ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ, համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 30 կ.
ЦЕНА 30 К.

ИНДЕКС 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and nam, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН и А. Б. НЕРСЕСЯН

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Операция интегирования произвольного порядка была введена в анализ Риманом и Лиувиллем. Обращение интегрального уравнения Абеля естественным образом привело к понятию производной произвольного, вообще говоря не целого, порядка.

В дальнейшем эти понятия нашли важное применение в различных вопросах анализа, причем неоднократно замечалось, что ряд свойств и приложений обычных операций интегрирования и дифференцирования присущ также соответствующим операциям дробного порядка.

Понятие дробного интегро-дифференцирования нашло ряд новых применений в некоторых работах авторов данной статьи.

Например, в работе [1] была установлена формула типа Тейлора-Маклорена для разложения функции по, вообще говоря, не целым степеням аргумента $\{x^{\lambda_k}\}_0^\infty$. В этой формуле коэффициенты естественным образом выражаются как значения дробных производных функций соответствующего порядка. Это позволило установить критерий разложимости функции, заданной на полуоси $[\Delta, +\infty)$, в ряд Дирихле по системе функций $\{e^{-\lambda_k x}\}_0^\infty$.

Другое, более глубокое свойство операторов дробного интегродифференцирования было выявлено в связи с построением теории интегральных преобразований в комплексной области с ядрами Миттаг-Леффлера. Теория этих преобразований, обобщающая теорию Фурье-Планшереля в комплексной области, была построена чисто аналитическим путем [2], [3].

Однако в дальнейшем оказалось, что она может быть трактована как теория спектрального разложения по собственным функциям сингулярной краевой задачи на полуоси $(0, +\infty)$ для специального дифференциального оператора дробного порядка. Более того, в работе [4] авторам удалось построить дискретный аналог теории—обобщение рядов Фурье в качестве разложения по собственным функциям краевой задачи, уже на конечном отрезке $(0, l)$, для того же специального дифференциального оператора дробного порядка.

Наконец, в недавних работах одного из авторов [3] оператор Римана-Лиувилля нашел другое, существенно новое, приложение — в теории мероморфных функций. Пользуясь этими операторами, удалось полностью описать и установить структурное представление классов мероморфных в единичном круге функций, в частности, охватывающих мероморфные функции любого конечного порядка. Таким образом, была обобщена известная теорема Р. Неванлинна о представлении мероморфных функций с ограниченной характеристикой.

Во всех указанных выше работах понадобился ряд свойств операторов Римана-Лиувилля, частью ранее известный, а в остальном установленный авторами этой статьи. Отметим, что большинство этих свойств было изложено в главе 9 монографии [3], посвященной представлениям мероморфных функций.

Настоящей работой авторы начинают публикацию результатов своих исследований, посвященных краевым задачам для дифференциальных операторов дробного порядка.

В § 1 предлагаемой статьи приводится систематическое изложение ряда основных свойств операторов Римана-Лиувилля, необходимых в последующем.

На эти свойства существенно использованы в § 2, посвященном задаче типа Коши для линейных дифференциальных операторов дробного порядка. Здесь ставится аналог задачи Коши и с помощью нескольких вспомогательных лемм доказывается основная теорема 3 о существовании и единственности задачи в классе функций $L_1(0, l)$.

В заключительном § 3 сначала приводится одно уточнение теоремы 3, касающееся достаточных условий существования решения той же задачи в классе функций $L_p(0, l)$ $(p>1)$. Наконец, в заключение приводится важный пример дифференциального оператора дробного порядка, для которого решение задачи типа Коши пишется в явной форме как линейная комбинация от функций типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z, \mu)$.

§ 1. Интегральные и дифференциальные операторы дробного порядка

1°. Пусть $f(x) \in L_1(0, l)$ $(0<l<+\infty)$. *Интегралом от функции $f(x)$ порядка $\alpha>0$ с началом в точке* $x=0$ принято называть функцию

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l). \tag{1.1}$$

Соответственно *интегралом порядка $\alpha>0$ от функции $f(x)$ с концом в точке $x=l$* называют функцию

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l). \tag{1.1'}$$

Применив теорему Фубини, из (1.1) и (1.1′) получим оценки

$$\int_0^l \left| \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \right| dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

$$\int_0^l \left|\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}\right| dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha-\gamma} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Таким образом, если $f(x) \in L_1(0, l)$, то функции $\dfrac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}}$ и $\dfrac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}$ также принадлежат классу $L_1(0, l)$.

Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Тогда почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{dx^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1} f(x)}{dx^{-\alpha_1}}\right) = \frac{d^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}{dx^{-(\alpha_1+\alpha_2)}} f(x), \tag{1.2}$$

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{d(l-x)^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha_1}}\right) = \frac{d^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}{d(l-x)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}} f(x). \tag{1.2'}$$

Действительно, из определения (1.1) имеем

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{dx^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} f(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x (x-t_2)^{\alpha_2-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_2} (t_2-t_1)^{\alpha_1-1} f(t_1)\, dt_1 \right\} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x f(t_1) \left\{ \int_0^x (x-t_2)^{\alpha_2-1} (t_2-t_1)^{\alpha_1-1}\, dt_2 \right\} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^x (x-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1} f(t_1)\, dt,$$

откуда следует формула (1.2). Формула (1.2′) доказывается аналогично.

Докажем теперь, что почти всюду на $(0, l)$

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} = f(x). \tag{1.3}$$

Действительно, пусть $x \in (0, l)$ есть точка Лебега функции $f(x)$, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(t)|\, dt = 0.$$

Тогда, положив

$$F_x(t) = \int_0^t f(x-\tau)\, d\tau = \int_{x-t}^x f(\xi)\, d\xi, \tag{1.4}$$

можем представить $F_x(t)$ в виде

$$F_x(t) = t\,[f(x) + \omega_x(t)], \quad 0 \leqslant t \leqslant x, \tag{1.5}$$

где, очевидно, $\omega_x(t) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|\omega_x(t)| < \varepsilon, \quad 0 < t < \delta. \tag{1.6}$$

В силу (1.4) и (1.5) интеграл (1.1) можно переписать в виде

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \tau^{\alpha-1} f(x-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{F_x(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x F_x(t)\, \tau^{\alpha-2}\, d\tau =$$

$$= \frac{F_x(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\Gamma(1+\alpha)} x^{\alpha} f(x) - \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\delta} \omega_x(\tau)\, \tau^{\alpha-1}\, d\tau -$$

$$- \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\delta}^{x} \omega_x(\tau)\, \tau^{\alpha-1}\, d\tau.$$

Отсюда, в силу (1.6), следует оценка

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \left| \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} - f(x) \right| \leqslant \varepsilon,$$

доказывающая, ввиду произвольности ε, первую из формул (1.3). Вторая доказывается аналогично.

Таким образом, при $\alpha = 0$ интегралы (1.1) и (1.2) естественно отождествить с самой функцией $f(x)$, т. е.

$$\left. \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \right|_{\alpha=0} = f(x), \quad x \in (0, l). \tag{1.3'}$$

2°. Пусть теперь $\alpha > 0$ и целое число $p \geqslant 1$ таково, что

$$p - 1 < \alpha \leqslant p. \tag{1.7}$$

Если для $f(x) \in L_1(0, l)$ почти всюду на $(0, l)$ существует (не обязательно суммируемая на $(0, l)$) функция

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)} f(x)}{dx^{-(p-\alpha)}}, \tag{1.8}$$

то последнюю назовем *производной порядка* $\alpha > 0$ *от* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$.

Аналогично, формулой

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} \equiv (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)} f(x)}{d(l-x)^{-(p-\alpha)}} \tag{1.8'}$$

определяется *производная порядка* $\alpha > 0$ *от* $f(x)$ *с концом в точке* $x = l$.

Из (1.3) следует, что функции (1.8) и (1.8′) при целом $\alpha = p > 0$ являются обычными производными функции $f(x)$ порядка α.

Из легко проверяемого соотношения

$$\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,(x-t)^{\alpha+\beta-1}$$

$$(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x > t)$$

и из определений предыдущих пунктов 1° и 2° для степенных функций получаются следующие формулы:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left\{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\quad (\beta > -1,\ \beta-\alpha > -1), \tag{1.9}$$

$$\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}\left\{\frac{(l-x)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \frac{(l-x)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\,(\beta > -1,\ \beta-\alpha > -1), \tag{1.9′}$$

причем нужно учесть, что при целом $n \geqslant 0$

$$\frac{x^{-n-1}}{\Gamma(-n)} = 0,\quad x \in (0, +\infty).$$

3°. Установим теперь некоторые свойства введенных операций дробного интегрирования и дифференцирования.

Прежде всего покажем, что для любой функции $f(x) \in L_1(0, l)$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}\,\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}f(x) = f(x)\ (\alpha > 0). \tag{1.10}$$

Действительно, если $\alpha = p$ — целое, то, согласно определению, почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-p}}{dx^{-p}}f(x) = \frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = f(x).$$

Если же $p - 1 < \alpha < p$, то, согласно формуле (1.2),

$$\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}\,\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\,f(x) = \frac{d^{-p}}{dx^{-p}}\,f(x).$$

Из этих двух соотношений и определения (1.8) следует первая из формул (1.10). Вторая доказывается аналогично.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет суммируемую на $(0, l)$ производную порядка α $(p-1 < \alpha < p)$ с началом в точке $\alpha = 0$ (или с концом в точке $x = l$). Докажем, что почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\,\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}\,f(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)} \tag{1.11}$$

или, соответственно,

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{d(l-x)^{\alpha}}f(x)=f(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\alpha-k}f(x)}{d(l-x)^{\alpha-k}}\right\}_{x=l}\frac{(l-x)^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \qquad (1.11')$$

Действительно, согласно определению

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\frac{d^p}{dt^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha}\frac{d^p}{dt^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt\right\}. \qquad (1.12)$$

После p-кратного интегрирования по частям выражение, стоящее в правой части формулы (1.12), принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-p)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-p-1}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{p-k}}{dt^{p-k}}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\right\}_{t=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)},$$

причем это выражение имеет смысл, в силу условий, наложенных на $f(x)$.

Для завершения доказательства формулы (1.11) остается применить (1.10). Формула (1.11′) доказывается аналогично.

Приведем теперь обобщение формул (1.10) и (1.11). Именно: пусть $f(x)\in L_1(0,l)$. Покажем, что

1) если $\alpha>0$, $\beta>0$ и существует производная $\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x)$ (а при $\beta>\alpha$ это условие заведомо выполняется), то

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x); \qquad (1.13)$$

2) если существует производная $\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)\in L_1(0,l)$ $(0\leqslant p-1\leqslant\beta\leqslant p)$, то для любого $\alpha>0$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)=\frac{d^{\beta-\alpha}}{dx^{\beta-\alpha}}f(x)-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\beta-k}}{dx^{\beta-k}}f(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha+k)}; \qquad (1.14)$$

3) если $0<\alpha<1$ и $0<\beta\leqslant1$, то

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{\alpha+\beta-1}}{dx^{\alpha+\beta-1}}f(x)-\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}f(x)\right]_{x=0}\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right\}. \qquad (1.15)$$

Для доказательства формулы (1.13) заметим, что при $\beta > \alpha$ она следует из формулы (1.10) и представления (см. (1.2))

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{-(\beta-\alpha)}}{dx^{-(\beta-\alpha)}}f(x).$$

Пусть теперь $\beta<\alpha$. Обозначим

$$\alpha-\beta=p-\theta,\ 0\leqslant\theta<1,\ \alpha-p=q-r,\ r\geqslant 0,$$

где $p,\ q>0$ — целые. Имеем, согласно определению (1.8) и предыдущей формуле

$$\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x)=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-\theta}}{dx^{-\theta}}f(x)=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{\alpha-p}}{dx^{\alpha-p}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=$$

$$=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^q}{dx^q}\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x).$$

Формула (1.14) следует из (1.11), если заметить, что по (1.13)

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{\beta-\alpha}}{dx^{\beta-\alpha}}f(x).$$

И, наконец, формула (1.15) следует из (1.14), так как $0<\alpha\leqslant 1$ и, по определению,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)\right\}.$$

Укажем теперь следующий удобный для применений критерий существования дробной производной.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, l]$ вместе со своими производными до порядка $q-1$ ($q\geqslant 1$ — целое) включительно и $f^{(q)}(x)\in L_1(0, l)$.*

Тогда для любого α $(0\leqslant p-1<\alpha\leqslant p<q)$ производная $\dfrac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$ существует и представляется в виде

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)}x^{k-\alpha}+\frac{1}{p-\alpha}\int_0^x(x-t)^{p-\alpha-1}f^{(p)}(t)\,dt. \quad (1.16)$$

Доказательство. Правая часть формулы (1.16), переписанная в виде

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(0)\,x^{p+k-\alpha}}{\Gamma(1+p+k-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(2p-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{2p-\alpha-1}f^{(p)}(t)\,dt\right\},$$

после p-кратного интегрирования по частям под знаком интеграла может быть представлена также формулой

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{p-\alpha-1}f(t)\,dt\right\}.$$

Согласно определению дробной производной это выражение есть $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $f'(x) \in L_1(0, l)$, то для любого $0 < \alpha < 1$ существует производная

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)\, dt, \tag{1.17}$$

также принадлежащая классу $L_1(0, l)$.

Следствие 2. Если существует производная

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \in L_1(0, l),$$

то при любом β $(0 < \beta < \alpha)$ существует также производная

$$\frac{d^\beta f(x)}{dx^\beta} \in L_1(0, l).$$

В самом деле, обозначая $g(x) = \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}} f(x)$, имеем

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{d}{dx} g(x) \in L_1(0, l).$$

С другой стороны, согласно формуле (1.13) и следствию 1, так как $0 < 1+\beta-\alpha < 1$, $\frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) = \frac{d^{1+\beta-\alpha}}{dx^{1+\beta-\alpha}} g(x) \in L_1(0, l)$.

4°. Приведем теперь теорему Я. Д. Тамаркина [5] об обращении обобщенного интегрального уравнения Абеля.

Теорема 2. *Для того чтобы интегральное уравнение*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t)\, dt \quad (p-1 < \alpha \leqslant p) \tag{1.18}$$

имело решение $g(x) \in L_1(0, l)$ при $f(x) \in L_1(0, l)$ необходимо и достаточно, чтобы

1) *функция* $\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \omega(x)$, *где*

$$\omega(x) = \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} f(x) \tag{1.19}$$

была абсолютно непрерывна на $[0, l]$;

2) $$\omega(0) = \omega'(0) = \cdots = \omega^{(p-1)}(0). \tag{1.20}$$

Если эти условия соблюдены, то решение уравнения (1.18) *единственно и, почти всюду на* $(0, l)$, *представляется в виде*

$$g(x) = \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} f(x). \tag{1.21}$$

Доказательство. Если уравнение (1.18) имеет решение $g(x) \in L_1(0, l)$, то, применив к его обеим частям оператор интегрирования порядка $p - \alpha$, по формуле (1.2) получим

$$\omega(x) = \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} f(x) = \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x) =$$

$$= \frac{d^{-p}}{dx^{-p}} g(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} g(t)\, dt. \tag{1.22}$$

Отсюда следует как формула (1.21), так и условия 1) и 2).

Докажем теперь достаточность условий теоремы. Из условия 1) вытекает, прежде всего, что

$$\frac{d^p \omega(x)}{dx^p} = \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} f(x) \in L_1(0, l).$$

С другой стороны, из формулы (1.2) выводим

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{d^{-1} f(x)}{dx^{-1}} = \frac{d^{-(\alpha-p+1)}}{dx^{-(\alpha-p+1)}} \omega(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-p+1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-p} \omega(t)\, dt.$$

Последний интеграл интегрированием по частям, с учетом условий 2) приводится к виду

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} \omega^{(p)}(t)\, dt.$$

Итак, мы получаем

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha} g(t)\, dt,$$

где функция $g(x)$ определяется формулой (1.19), что и требовалось доказать.

5°. В этом пункте мы установим некоторые формулы „интегрирования по частям“ в применении к дробным производным.

Прежде всего без труда непосредственно проверяется, что, если $f_1(x)$ и $f_2(x) \in L_1(0, l)$ и при $\alpha > 0$

$$f_2(x) \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f_1(x) \in L_1(0, l), \tag{1.23}$$

то

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^{-\alpha}f_1(x)}{dx^{-\alpha}}\,dx=\int_0^l f_1(x)\frac{d^{-\alpha}f_2(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}\,dx. \tag{1.24}$$

Менее очевидным является следующая

Теорема 3. *Пусть* $f_1(x), f_2(x)\in L_1(0, l)$ *и при некотором* α $(0<\alpha\leqslant 1)$

1) *существуют производные* $\dfrac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}$ *и* $\dfrac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}$,

причем $f_2(x)\dfrac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\in L_1(0, l)$;

2) *функции* $f_2(x)$ *и* $\dfrac{d^{-(1-\alpha)}f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}}$

непрерывны в точке $x=0$, *а функции* $f_1(x)$ *и* $\dfrac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}$

непрерывны в точке $x=l$.

Тогда имеет место формула

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\,dx=\int_0^l f_1(x)\frac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}\,dx+$$

$$+\left\{f_1(x)\frac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=l}-\left\{f_2(x)\frac{d^{-(1-\alpha)}f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=0}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Из формул (1.11) и (1.11′) при $p<\alpha\leqslant 1$ имеем

$$f_1(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}f_1(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{1.26}$$

$$f_2(x)=\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}f_2(x)+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=l}\frac{(l-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.26′}$$

Следовательно, согласно (1.24)

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\,dx=\int_0^l \frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}\,dx+$$

$$+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}f_2(x)\right\}_{x=l}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l (l-x)^{\alpha-1}\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\,dx=$$

$$=\int_0^l \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}f_2(x)\,dx+$$

$$+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}f_2(x)\right\}_{x=l}\left\{\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)\right\}_{x=l}=$$

$$= \int_0^l f_1(x) \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha} f_2(x)\,dx -$$

$$- \left\{\frac{d^{-(1-\alpha)} f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=0} \left\{\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha} f_2(x)\right\}_{x=0} +$$

$$+ \left\{\frac{d^{-(1-\alpha)} f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=l} \left\{\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1(x)\right\}_{x=l}. \qquad (1.27)$$

Нетрудно видеть, наконец, что отсюда, в силу соотношений (1.26) и (1.26′), следует формула (1.25).

§ 2. Задача типа Коши для дифференциальных операторов дробного порядка

1°. Пусть

$$\{\gamma_k\}_0^n \equiv \{\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\} \qquad (2.1)$$

—произвольная совокупность вещественных чисел, подчиненных лишь условию

$$0 < \gamma_k \leqslant 1 \quad (k = 0, 1, \cdots, n). \qquad (2.2)$$

Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1 \qquad (2.3)$$

и всюду дальше положим

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 > 0. \qquad (2.4)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на $[0, \Delta)$ $(\Delta > 0)$. Введем в рассмотрение следующие, ассоциированные с $\{\gamma_k\}_0^n$, дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x), \qquad (2.5)$$

$$D^{\sigma_k} f(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

предполагая, что эти операции имеют смысл, по крайней мере, почти всюду на $(0, \Delta)$.

Из (2.5) следуют рекуррентные соотношения

$$D^{\sigma_k} f(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_{k-1}} f(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2.6)$$

Пользуясь этими соотношениями и формулой (1.9), легко можно проверить, что

$$D^{\sigma_s}\left\{\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}\right\} = \begin{cases} 0, \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant s-1, \quad 0 \leqslant s \leqslant n, \\ \dfrac{x^{\sigma_k - \sigma_s}}{\Gamma(1+\sigma_k - \sigma_s)}, \quad \text{при } s \leqslant k \leqslant n. \end{cases} \qquad (2.7)$$

2°. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с производными дробного порядка

$$D^{\sigma_n} y(x) = \Phi(x), \quad x \in (0, \Delta), \tag{2.8}$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция из класса $L_1(0, \Delta)$.

Поставим следующую задачу: в классе функций $L_1(0, \Delta)$ отыскать решение $y = y(x)$ уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям

$$D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0} = y_k^0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{2.9}$$

где $\{y_k^0\}_0^{n-1}$ — произвольная наперед заданная совокупность чисел.

Заметим, что при $\gamma_k = k$, $D^{\sigma_k} y = y^{(k)}$, и, таким образом, задача (2.8)—(2.9) переходит в классическую задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}(x) = \Phi(x), \; y^{(k)}(0) = y_k^0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Поэтому задачу (2.8)—(2.9) также будем называть задачей Коши.

Заметим, что при $\gamma_n < 1$ условие $\Phi(x) \in L_1(0, \Delta)$ не достаточно для разрешимости задачи (2.8)—(2.9). Действительно, учитывая формулу (1.2), из (2.8) получим, что $\Phi(x)$ должна представляться в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_n)} \int_0^x (x-t)^{-\gamma_n} \tilde{\Phi}(t)\, dt = \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \tilde{\Phi}(x), \tag{2.10}$$

где $\tilde{\Phi}(x) \in L_1(0, l)$; иными словами, $\Phi(x)$ должна обладать производной

$$\frac{d^{1-\gamma_n}}{dx^{1-\gamma_n}} \Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) \in L_1(0, \Delta). \tag{2.10'}$$

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(x) \in L_1(0, \Delta)$ *представляется в виде* (2.10), *если* $\gamma_n < 1$. *Тогда решение задачи* (2.8)—(2.9) *существует, единственно и представляется в виде*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k)} x^{\sigma_k} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - 1} \Phi(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant \Delta). \tag{2.11}$$

Кроме того, справедливы также формулы

$$D^{\sigma_k} y(x) = \sum_{k=s}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_s)} x^{\sigma_k - \sigma_s} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_s)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - \sigma_s - 1} \Phi(t)\, dt \quad (s = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{2.12}$$

Доказательство. Предположим, что задача (2.8)—(2.9) имеет решение $y(x)$. Тогда, согласно теореме 2 и формуле (2.6),

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \Phi(x), \tag{2.12'}$$

причем производная справа существует, так как при $\gamma_n \leqslant 1$ это обеспечено условиями леммы, что нетрудно доказать, пользуясь формулой (1.2).

Из (2.12) и (2.9) следует, что

$$D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \Phi(x) + y_n^0. \tag{2.13}$$

Таким образом, теперь мы должны уже решать задачу Коши (2.13)—(2.9), причем в последнем условии $k = 0, 1, \cdots, n-2$. Убедимся, что здесь также полностью обоснован шаг, аналогичный тому, который мы сделали, переходя от (2.8) к (2.13).

Действительно, согласно (2.10), (2.13) можно переписать в виде

$$D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \frac{d^{\gamma_n - 1}}{dx^{\gamma_n - 1}} \tilde{\Phi}(x) + y_n^0 =$$

$$= \int_0^x \Phi(t)\, dt + y_n^0 \equiv \Phi_1(x).$$

Отсюда следует, что существует производная

$$\frac{d}{dx} \frac{d^{-\gamma_{n-1}}}{dx^{-\gamma_{n-1}}} \Phi(x),$$

и поэтому функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$D^{\sigma_{n-2}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_{n-1}}}{dx^{-\gamma_{n-1}}} \Phi_1(x) + y_n^1. \tag{2.13}$$

Через n шагов, каждый раз учитывая формулы (1.2) и (1.9), получим (2.11) и, попутно, формулу (2.12). Кроме того мы получаем единственность решения задачи (2.8)—(2.9).

Для доказательства существования решения мы, очевидно, должны показать, что функция, определяемая формулой (2.11), удовлетворяет уравнению (2.8) и условиям (2.9). Для этого мы должны применить к этой функции операции (2.5), каждый раз учитывая формулы (2.7), (1.2) и (1.13). Сначала мы получим, что

$$D^{\sigma_0} y(x) = y_k^0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1 + \sigma_k - \sigma_0)} x^{\sigma_k - \sigma_0} + \frac{d^{-(\sigma_n - \sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n - \sigma_0)}} \Phi(x), \tag{2.14}$$

откуда будет следовать справедливость формулы (2.12) при $s = 0$ и выполнение условия (2.9) при $k = 0$.

Далее, согласно (2.6),

$$D^{\sigma_1} y(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{y_k^0}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_0)}x^{\sigma_k-\sigma_0-1}+\frac{d}{dx}\frac{d^{-(\sigma_n-\sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n-\sigma_0)}}\Phi(x)\right\}. \quad (2.15)$$

Существование производной в фигурных скобках обеспечено условиями леммы, поскольку

$$\sigma_n-\sigma_0-\gamma_n=\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k>0$$

и, следовательно, согласно свойству (1.13)

$$\frac{d}{dx}\frac{d^{-(\sigma_n-\sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n-\sigma_0)}}\Phi(x)=\frac{d^{-(\sigma_n-\sigma_0-\gamma_n)}}{dx^{-(\sigma_n-\sigma_0-\gamma_n)}}\tilde{\Phi}(x)\cdot$$

Последние замечания позволяют вывести из (2.15) формулу (2.12) при $s=1$ и, следовательно, условие (2.9) при $k=1$.

Повторяя буквально те же рассуждения и применив метод индукции, получим, что функция (2.11) является решением задачи (2.8)—(2.9).

3°. Введем в рассмотрение следующий линейный оператор:

$$Ly=D^{\sigma_n}y+p_0(x)D^{\sigma_{n-1}}y+\cdots+p_{n-1}(x)D^{\sigma_0}y+p_n(x)y, \quad (2.16)$$

где функции $p_k(x)$ $(k=0, 1,\cdots, n)$ (вообще говоря, комплекснозначные) пока предполагаются лишь непрерывными на $[0, l]$. В этом пункте мы исследуем задачу Коши

$$Ly(x)=f(x),\ D^{\sigma_k}y(x)=y_k^0\ (k=0, 1,\cdots, n-1), \quad (2.17)$$

где $f(x)\in L_1(0, l)$ и $y(x)$ ищется в классе $L_1(0, l)$.

Предполагая, что задача (2.17) имеет решение $y=y(x)$, положим

$$D^{\sigma_n}y(x)=\Phi(x). \quad (2.18)$$

Применив лемму 1, после очевидных преобразований получим, что функция $\Phi(x)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\Phi(x)=\omega(x)+\int_0^x W(x, t)\,\Phi(t)\,dt, \quad (2.19)$$

где

$$W(x, t)=-p_n(x)\frac{(x-t)^{\sigma_n-1}}{\Gamma(\sigma_n)}-$$
$$-\sum_{s=0}^{n-1}p_{n-1-s}(x)\frac{(x-t)^{\sigma_n-\sigma_s-1}}{\Gamma(\sigma_n-\sigma_s)}, \quad (2.20)$$

$$\omega(x)=f(x)-p_n(x)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k)}x^{\sigma_k}-$$
$$-\sum_{s=0}^{n-1}p_{n-1-s}(x)\sum_{k=s}^{n-1}\frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_s)}x^{\sigma_k-\sigma_s}. \quad (2.21)$$

Из формулы (2.20) следует, что, если функции $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ непрерывны на $(0, l)$, то ядро $W(x, t)$ имеет слабую сингулярность, т. е.

$$W(x, t)=\frac{W_1(x, t)}{(x-t)^{1-\chi}}, \quad x \geqslant t, \tag{2.22}$$

где $\chi=\min\{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_1, \cdots, \sigma_n-\sigma_{n-1}\}=\min\{\sigma_n, \gamma_n\}$, т. е. $0<\chi\leqslant 1$. Изучение уравнения (2.19) с ядром вида (2.22) не представляет принципиальной трудности и может быть проведено по известной схеме (см., напр., [6]).

Применив метод последовательных приближений, мы получим, что уравнение (2.19) имеет единственное решение $\Phi(x)\in L_1(0, l)$, которое непрерывно на сегменте $[0, l]$.

Заметим еще, что если $p_k(x)\in L_p(0, l)$ $(p>1)$, $(k=0, 1, \cdots, n)$, то при $f(x)\in L_p(0, l)$ имеем также $\Phi(x)\in L_p(0, l)$.

4°. Таким образом, единственность решения задачи (2.17) обеспечена, а доказательство существования решения этой задачи, согласно лемме 1, сводится к доказательству возможности представления вида (2.10) для решения уравнения (2.19). С целью выяснения условий, обеспечивающих такое представление, докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $g(x)\in L_1(0, l)$ и $f(x)\in Lip\, 1$, т. е. для любых $x', x''\in(0, l)$*

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant \text{const}\,|x'-x''|.$$

Тогда для любого α $(0\leqslant\alpha<1)$ имеет место представление

$$f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}F_\alpha(x), \quad x\in(0, l), \tag{2.23}$$

где $F_\alpha(x)\in L_1(0, l)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что (1°, § 1) функции

$$f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x) \text{ и } \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\left[f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right]$$

принадлежат классу $L_1(0, l)$. Далее имеем

$$F(x)\equiv\frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\left[f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right]=$$

$$=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{-\alpha}\{f(t)-f(x)\}\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\,dt\equiv F_1(x)+F_2(x). \tag{2.24}$$

Так как $f(x)\in Lip\, 1$, то почти для всех $x\in(0, l)$ существует конечная производная $f'(x)$. Кроме того, согласно (2.2),

$$F_1(x) = f(x) \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x) =$$

$$= f(x) \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} g(x) = f(x) \int_0^x g(t)\, dt.$$

Таким образом, почти всюду на $(0, l)$ существует производная

$$F'(x) = f(x)\, g(x) + f'(x) \int_0^x g(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-(\alpha-1)} \{f(t) - f(x)\} \frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} g(t)\, dt, \tag{2.25}$$

причем $F'(x) \in L_1(0, l)$ опять согласно условию $f(x) \in Lip\, 1$. Последнее означает, что

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}} \left\{ f(x) \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x) \right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \left[f(x) \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x) \right] \equiv F_\alpha(x) \in L_1(0, l). \tag{2.26}$$

Из (2.24) и (2.26) получим, в силу формулы (1.14)

$$f(x) \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} g(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} F_\alpha(x) + \frac{F(+0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}. \tag{2.27}$$

Наконец, из оценок

$$|F_1(x)| \leqslant |f(x)| \int_0^x |g(t)|\, dt$$

и

$$|F_2(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{1-\alpha} \left| \frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} g(t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{\Gamma(1-\alpha)} x^{1-\alpha} \int_0^x \left| \frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}} g(t) \right| dt$$

следует, что

$$F(+0) = \lim_{x \to +0} F(x) = 0,$$

чем и завершается доказательство леммы 2.

5°. Докажем теперь следующую, основную для этой работы, теорему.

Теорема 4. *Пусть функции* $\{p_k(x)\}_0^n$ *принадлежат классу* $Lip\ 1$ *на* $[0, l]$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[0, l]$ *и допускает представление*

$$f(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{f}(x),\ x\in(0,\ l),\tag{2.28}$$

где $\tilde{f}(x)\in L_1(0,\ l)$.

Тогда, если $\gamma_0>1-\gamma_n$, *то задача Коши* (2.17) *имеет единственное непрерывное на* $(0,\ l]$ *решение.*

Доказательство. Поскольку уравнение (2.19) имеет единственное решение $\Phi(x)\in L_1(0,\ l)$, нам достаточно доказать, согласно (2.18) и лемме 1, что функция

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1-\sigma_k)}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^x(x-t)^{\sigma_n-1}\Phi(t)\,dt,\tag{2.29}$$

которая, очевидно, непрерывна на $(0,\ l]$, является решением задачи (2.17). Прежде всего для этого нужно показать, что $\Phi(x)$ можно представить в виде

$$\Phi(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Phi}(x)\in L_1(0,\ l).\tag{2.30}$$

С этой целью заметим сначала, что, поскольку $\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j-1,\ k=0,1,$ $\cdots,n$ и $\gamma_0>1-\gamma_n$, то

$$\sigma_n+\gamma_n\geqslant\sigma_0+\gamma_n=\gamma_n-(1-\gamma_0)>0\ \ (0\leqslant k\leqslant n-1)\tag{2.31}$$

и

$$\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n\geqslant\gamma_n>0,\quad s\leqslant k\leqslant n-1.$$

Пользуясь этими условиями и формулой (1.9), получим представления

$$\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\frac{x^{\sigma_k+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\gamma_n)}\right\}\quad(0\leqslant k\leqslant n-1),\tag{2.32}$$

$$\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s}}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_s)}=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n)}\right\}(s\leqslant k\leqslant n-1).$$

Теперь уже, в силу (2.28), (2.32) и (2.21)

$$\omega(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{f}(x)-$$

$$-p_n(x)\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\gamma_n)}\right\}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n-1}p_{n-1-s}(x)\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\sum_{k=s}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n)}.\tag{2.33}$$

Применив лемму 2, получим

$$\omega(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{\omega}(x),\ \tilde{\omega}(x)\in L_1(0,\ l).\tag{2.34}$$

С другой стороны, согласно (2.20), уравнение (2.19) можно записать в виде.

$$\Phi(x) = \omega(x) - p_n(x) \frac{d^{-\sigma_n}}{dx^{-\sigma_n}} \Phi(x) -$$

$$- \sum_{s=0}^{n-1} p_{n-1-s}(x) \frac{d^{-(\sigma_n-\sigma_s)}}{dx^{-(\sigma_n-\sigma_s)}} \Phi(x). \tag{2.35}$$

Обозначив, как и в (2.22),

$$\varkappa = \min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_1, \cdots, \sigma_n - \sigma_{n-1}\} = \min\{\sigma_n, \gamma_n\}$$

и снова воспользовавшись леммой 2, получим

$$\Phi(x) = \omega(x) + \frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}} v(x), \quad v(x) \in L_1(0, l),$$

откуда ввиду (3.34) следует, что

$$\Phi(x) = \frac{d^{-\tau_1}}{dx^{-\tau_1}} \Phi_1(x), \quad \Phi_1(x) \in L_1(0, l), \ \tau_1 = \min\{1-\gamma_n, \varkappa\}. \tag{2.36}$$

Если теперь $\varkappa \geqslant 1 - \gamma_n$, то представление (2.30) доказано, если же $\varkappa < 1 - \gamma_n$, то, обратившись снова к формуле (2.35), из (2.36) согласно лемме 2, получим, что

$$\Phi(x) = \frac{d^{-\tau_2}}{dx^{-\tau_2}} \Phi_2(x), \quad \Phi_2(x) \in L_1(0, l), \ \tau_2 = \min\{1-\gamma_n, 2\varkappa\}.$$

Если и $2\varkappa < 1 - \gamma_n$, мы продолжим этот процесс дальше. Очевидно, что через p шагов $p\varkappa \geqslant 1 - \gamma_n > (p-1)\varkappa$ мы получим требуемое представление (2.30).

Теперь уже, поскольку функция (2.29), согласно лемме 1, допускает все операции

$$D^{\sigma_s} y(x), \quad s = 0, 1, \cdots, n, \tag{2.37}$$

то проверка справедливости всех соотношений (2.17) сводится к проверке равенства (2.19).

Однако уравнение (2.19) было получено из (2.17) при помощи операций, позволяющих однозначное обращение. Поэтому задача Коши (2.17) эквивалентна интегральному уравнению (2.19) тогда и только тогда, когда существуют все операции (2.37). Итак, теорема 4 полностью доказана.

§ 3. Некоторые уточнения теоремы 4 и простейший частный случай

1°. Зафиксируем целое число r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$, и рассмотрим следующий частный случай задачи (2.17):

$$Ly(x) = f(x), \quad D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0} = y_k^0 = \begin{cases} 1, \text{ при } & k = r, \\ & 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0, \text{ при } & k \neq r. \end{cases} \tag{3.1}$$

Покажем, что в этом случае теорема 4 полностью остается в силе, если условие $\gamma_n > 1 - \gamma_0$ заменить более слабым (при $r > 0$) условием

$$\gamma_n > 1 - \sum_{j=0}^{r} \gamma_j. \tag{3.2}$$

Для этого мы должны повторить рассуждения доказательства теоремы 4 в применении к следующим измененным формулам (2.19), (2.21) и (2.29):

$$\Phi_r(x) = \omega_r(x) + \int_0^x W(x, t)\, \Phi_r(t)\, dt, \tag{3.3}$$

$$\omega_r(x) = y(x) - p_n(x) \frac{x^{\sigma_r}}{\Gamma(1+\sigma_r)} - \sum_{j=0}^{r} p_{n-1-j}(x) \frac{x^{\sigma_r - \sigma_j}}{\Gamma(1+\sigma_r - \sigma_j)}, \tag{3.4}$$

$$y(x) = J_r(x) = \frac{x^{\sigma_r}}{\Gamma(1+\sigma_r)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - 1}\, \Phi_r(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Условие $\gamma_0 > 1 - \gamma_n$ было использовано в представлении (2.33) функции $\omega(x)$, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\omega_r(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \tilde{f}(x) - p_n(x) \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\sigma_r + \gamma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_r + \gamma_n)} \right\} -$$

$$- \sum_{j=0}^{r} p_{n-1-j}(x) \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\sigma_r - \sigma_j + \gamma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_r - \sigma_j + \gamma_n)} \right\}. \tag{3.6}$$

Остается заметить, что представление (3.6) сохраняет силу и при условии (3.2), так как $\sigma_r - \sigma_j = \sum_{k=j}^{r} \gamma_j > 0$ $(0 \leqslant j \leqslant r)$ и $\sigma_r + \gamma_n = \gamma_n + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j$. Для завершения доказательства остается воспользоваться формулами (3.3)—(3.5) так же, как и в п. 5° § 2.

2°. В этом пункте мы докажем теорему о существовании и единственности решения задачи Коши (3.1) (и (2.17)) в классе $L_p(0, l)$. Для этого нам понадобится следующая простая

Лемма 3. *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $L_p(0, l)$, $p \geqslant 1$, то при любом $\alpha > 0$ функция*

$$\varphi_\alpha(x) \equiv \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \tag{3.7}$$

принадлежит тому же классу.

Действительно, если $p=1$, то уже было отмечено (§ 1, 1°), что $\varphi_\alpha(x) \in L_1(0, l)$. Если же $p > 1$, то для любого β $(0 < \beta < p\alpha)$, пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|\varphi_\alpha(x)|^p \leqslant \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\left(\int_0^x \left\{(x-t)^{\frac{\beta-1}{p}}|\varphi(t)|\right\}(x-t)^{\alpha-1-\frac{\beta-1}{p}}dt\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}|\varphi(t)|^p dt \times \left(\int_0^x (x-t)^{\frac{p\alpha-\beta}{p-1}}dt\right)^{p-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{p-1}{p\alpha-\beta}\right)^{p-1} x^{p\alpha-\beta}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\{|\varphi(x)|^p\}. \tag{3.8}$$

Так как $|\varphi(x)|^p \in L_1(0, l)$ и $p\alpha-\beta>0$, то остается сослаться на п. 1° § 1, откуда будет следовать, что

$$\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}\{|\varphi(x)|^p\} \in L_1(0, l).$$

В силу неравенства (3.8) это равносильно утверждению леммы 3.

Теорема 5. *Пусть функции* $\{p_k(x)\}_0^n$ *принадлежат классу* $Lip\,1$ *на отрезке* $[0, l]$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[0, l]$ *и допускает представление* (2.28). *Если для некоторого целого* r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ *и* $p>1$

$$\sum_{j=0}^r \gamma_j > \max\left\{1-\gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.9}$$

то задача (3.1) *имеет единственное непрерывное на* $(0, l]$ *решение* $y_r(x)$, *принадлежащее классу* $L_p(0, l)$.

Доказательство. Из условия (3.9), в частности, следует условие (3.2), и поэтому существует единственное решение $y_r(x) \in L_1(0, l)$ задачи (3.1), непрерывное на $(0, l)$. Таким образом, нам остается лишь доказать, что $y_r(x) \in L_p(0, l)$. С этой целью заметим, что $\sigma_r - \sigma_j = \sum_{k=j}^r \gamma_k$ $(j=0, 1, \cdots, r)$ и, согласно условию (3.9),

$$\sigma_r = \sum_{j=0}^r \gamma_j - 1 > -\frac{1}{p}. \tag{3.10}$$

Поэтому функция $\omega_r(x)$, определяемая формулой (3.4), принадлежит классу $L_p(0, l)$.

С другой стороны, поскольку, согласно формуле (2.22), ядро $W(x, t)$ интегрального уравнения Вольтерра (3.3) имеет слабую особенность и $\omega_r(x) \in L_p(0, l)$, то, воспользовавшись замечанием, приведенным в конце п. 3° § 2, мы заключаем, что $\Phi_r(x) \in L_p(0, l)$. Наконец, из формулы (3.5), ввиду условия (3.10), приходим к выводу, что $y_r(x) \in L_p(0, l)$, согласно лемме 3.

В дополнение к доказанной теореме отметим, что, если в теореме 5 условие (3.9) заменить более сильным условием

$$\gamma_0 > \max\left\{1-\gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.11}$$

то ее утверждение остается в силе и относительно решения

$$y(x)=\sum_{r=0}^{n-1} y_r^0\, y_r(x) \tag{3.12}$$

общей задачи Коши (2.17).

3°. В заключение приведем явные решения специальной и общей задач Коши в классе $L_p(0, l)$ $(p>1)$ для простейшего случая, когда

$$Ly = D^{\sigma_n} y - \lambda y, \tag{3.13}$$

где λ — произвольный параметр.

С этой целью введем следующие обозначения

$$\rho=\sigma_n^{-1}=\left\{\sum_{j=0}^{n}\gamma_j-1\right\}^{-1},$$

$$\mu_r=\sigma_r+1=\sum_{j=0}^{r}\gamma_j \quad (0\leqslant r\leqslant n-1), \tag{3.14}$$

$$Y_r(x, \lambda)=x^{\mu_r-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu_r), \tag{3.15}$$

где, как обычно,

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)} \tag{3.16}$$

есть целая функция типа Миттаг-Лефлера.

Теорема 6. *Если при данном целом r $(0\leqslant r\leqslant n-1)$ и $p\geqslant 1$*

$$\mu_r>\max\left\{1-\gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.17}$$

то функция $Y_r(x, \lambda)$ является решением специальной задачи Коши

$$D^{\sigma_n}y-\lambda y=0,$$

$$D^{\sigma_k}y(x)\Big|_{x=0}=\begin{cases}1, & \text{при } k=r\\ 0, & \text{при } k=0, 1,\cdots, r-1, r+1,\cdots, n-1\end{cases} \tag{3.18}$$

в классе $L_p(0, l)$.

Доказательство. Во-первых, из определения (3.15) самой функции $Y_r(x, \lambda)$ следует, что при условии (3.17) она—из класса $L_p(0, l)$.

Заметив теперь, что имеет место разложение

$$Y_r(x, \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}, \tag{3.19}$$

докажем сперва, что при каждом r $(0\leqslant r\leqslant n)$

$$D^{\sigma_k}Y_r(x, \lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m x^{\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}\right)} \quad (k=0, 1,\cdots, r). \tag{3.20}$$

В силу (3.19) для этого достаточно установить справедливость соотношений

$$D^{\sigma_k}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{x^{\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}\right)}. \tag{3.21}$$

$$(k=0,\ 1,\cdots,\ r;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

С этой целью заметим, что в силу формулы (1.9) имеем

$$D^{\sigma_0}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_0+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_0+\frac{m}{\rho}\right)}\quad(m=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{3.22}$$

поскольку $\gamma_0=\mu_0$. Таким образом, при $r=0$ формулы (3.21) справедливы.

Положим теперь, что $r\geqslant 1$. Тогда, заметив, что при любом k $(1\leqslant k\leqslant r)$

$$\mu_r-\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j=\mu_r-\mu_{k-1}\geqslant\mu_r-\mu_{r-1}=\gamma_r>0,$$

k-кратным применением формулы (1.9) получим

$$\frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}}\cdots\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}\right)}\quad(k=1,\ 2,\cdots,\ r,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Поэтому

$$D^{\sigma_k}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}}\left\{\frac{x^{\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}\right)}\quad(k=1,\ 2,\cdots,\ r;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

откуда и из (3.22), очевидно вытекает справедливость совокупности всех формул (3.21).

Кстати, из разложений (3.20) следует еще, что

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda)\Big|_{x=0} = \begin{cases} 1, & \text{при } k=r, \\ 0, & \text{при } k=0, 1, \cdots, r-1. \end{cases} \tag{3.23}$$

В этом легко убедиться, заметив, что

$$D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{\rho}\right)} \tag{3.20'}$$

и, что при $0 \leqslant k \leqslant r-1$

$$\mu_r - \mu_k + \frac{m}{\rho} \geqslant \mu_r - \mu_{r-1} = \gamma_k > 0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Вычислим теперь производные

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda) \quad (k = r+1, \cdots, n),$$

полагая опять число r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ произвольным.

Пусть сперва $r = n-1$, из (3.20) имеем

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} Y_{n-1}(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\frac{m}{\rho}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{m}{\rho}\right)}.$$

Пользуясь далее формулой (1.9), будем иметь отсюда

$$D^{\sigma_n} Y_{n-1}(x, \lambda) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} Y_{n-1}(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{m}{\rho}\right)} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\gamma_n}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho}-\gamma_n+\frac{m}{\rho}\right)} =$$

$$= \lambda x^{\mu_{n-1}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_{n-1}+\frac{m}{\rho}\right)} = \lambda Y_{n-1}(x, \lambda), \tag{3.24}$$

поскольку, в силу (3.14) и (3.15),

$$\frac{1}{\rho} - \gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j - 1 = \mu_{n-1} - 1.$$

Итак, функция $Y_{n-1}(x, \lambda)$ является решением задачи Коши (3.18) при $r = n-1$.

Положим теперь, что $0 \leqslant r \leqslant n-2$ (и значит $n \geqslant 2$), и докажем формулы

$$D^{\sigma_k} Y_2(x, \lambda) =$$

$$= \lambda x^{\nu_k(r)-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\nu_k(r) + \frac{m}{\rho}\right)} \quad (k = r+1, \cdots, n), \tag{3.25}$$

где

$$\nu_k(r) = \mu_n + \mu_r - \mu_k. \tag{3.25'}$$

В самом деле, с одной стороны, при $k = r+1$ имеем

$$D^{\sigma_{r+1}} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{-(1-\gamma_{r+1})}}{dx^{-(1-\gamma_{r+1})}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda), \tag{3.26}$$

причем согласно (3.20)

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} \lambda^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)}. \tag{3.27}$$

Так как, с другой стороны,

$$\frac{d^{-(1-\gamma_{r+1})}}{dx^{-(1-\gamma_{r+1})}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)} \right\} = \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1} + \frac{m}{\rho}\right)},$$

то ввиду равенства

$$\frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1} = \mu_n + \mu_r - \mu_{r+1} - 1 = \nu_{r+1}(r) - 1$$

мы приходим к требуемой формуле (3.25) для случая $k = r+1$.

Убедимся далее в справедливости формулы (3.25) для остальных значений $k = r+2, \cdots, n$.

Для этого заметим сначала, что поскольку

$$D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_r)}}{dx^{-(1-\gamma_r)}} \frac{d^{\gamma_{r-1}}}{dx^{\gamma_{r-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} Y_r(x, \lambda),$$

то

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{\gamma_r}}{dx^{\gamma_r}} \frac{d^{\gamma_{r-1}}}{dx^{\gamma_{r-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} Y_r(x, \lambda),$$

и поэтому при $r+2 \leqslant k \leqslant n$

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_{r+1}}}{dx^{\gamma_{r+1}}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x\nu). \tag{3.28}$$

Далее имеем

$$\frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_{r+1}}}{dx^{\gamma_{r+1}}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)} \right\} =$$

$$=\frac{x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\sum\limits_{j=r+1}^{k}\gamma_j}}{\Gamma\left(1+\cdots\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\sum\limits_{j=r+1}^{k}\gamma_j\right)}=x^{\nu_k(r)-1}\frac{x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\nu_k(r)+\frac{m}{\rho}\right)}, \tag{3.29}$$

поскольку

$$\frac{1}{\rho}-\sum_{j=r+1}^{k}\gamma_j=\mu_n-1-\mu_k+\mu_r=\nu_k(r)-1.$$

Наконец, из (3.27), (3.29) и (3.28) вытекают требуемые формулы (3.25) для значений $k=r+2, \cdots, n$.

Из формул (3.25)—(3.25′), в частности, следует, что

$$D^{\sigma_n} Y_r(x, \lambda)=\lambda x^{\mu_r-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}=\lambda Y_r(x, \lambda), \quad 0\leqslant r\leqslant n-2.$$

Вместе с (3.24) это означает, что все функции $\{Y_r(x, \lambda)\}_0^{n-1}$ являются решениями уравнения

$$D^{\sigma_n} y-\lambda y=0,$$

причем, очевидно, что все они линейно независимы.

Кроме того, так как

$$\nu_k(r)-1>\mu_n+\mu_r-\mu_{n-1}-1=\mu_r+\gamma_n-1 \quad (k=r+1,\cdots, n-1),$$

то условие (3.17) означает, в частности, что

$$\nu_k(r)-1>0, \ k=r+1,\cdots, n-1.$$

Из этого замечания и из формулы (3.25) вытекает еще, что

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda)/_{x=0}=0 \ (k=r+1,\cdots, n-1). \tag{3.23′}$$

Таким образом, с учетом начальных условий (3.23) и (3.23′) можно утверждать, что функция $Y_r(x, \lambda)$ действительно будет решением специальной задачи Коши (3.18) в классе $L_p(0, l)$.

И здесь можно отметить еще, что, если в теореме 6 условие (3.17) заменить условием

$$\gamma_0>\max\left\{1-\gamma_n, \ \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.17′}$$

то функция

$$Y(x, \lambda)=\sum_{r=0}^{n-1} y_r^0 \, Y_r(x, \lambda)$$

будет решением общей задачи Коши

$$D^{\sigma_n} y-\lambda y=0,$$

$$D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0}=y_k^0 \quad (k=0, 1,\cdots, n-1). \tag{3.18′}$$

Наконец, отметим также, что единственность каждого решения $\{Y_k(x, \lambda)\}_0^{n-1}$ либо решения $Y(x, \lambda)$ общей задачи (3.18) вытекает уже из теоремы 5.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 1.XI.1967

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ և Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴԻՐԸ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցման հասկացությունը գտել է մի շարք նոր կիրառություններ այս հոդվածի հեղինակների որոշ աշխատանքներում։

Այս աշխատանքով հեղինակները սկսում են կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար եզրային խնդիրներին նվիրված հետազոտությունների արդյունքների հրապարակումը։

Ներկա հոդվածի § 1-ում բերվում է Ռիման-Լիուվիլլի օպերատորների մի շարք հիմնական հատկությունների սիստեմատիկ շարադրանքը։

Այդ հատկությունները օգտագործված են § 2-ում, որը նվիրված է կոտորակային կարգի գծային դիֆերենցիալ օպերատորների համար Կոշու տիպի խնդրին։ Այստեղ դրվում է Կոշու խնդրին համապատասխանող խնդիրը, և մի քանի օժանդակ լեմմաների օգնությամբ ապացուցվում է հիմնական 4-րդ թեորեման, $L_p(0,l)$ ֆունկցիաների դասում խնդրի լուծման գոյության և միակության մասին։

Եզրափակող § 3-ում սկզբում բերվում է 4-րդ թեորեմայի մի ճշգրտում, որը վերաբերվում է ֆունկցիաների $L_p(0, l)$ $(p > 1)$ դասում նույն խնդրի լուծման գոյության բավարար պայմաններին։ Վերջում բերվում է կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի կարևոր օրինակ, որի համար Կոշու տիպի խնդրի լուծումը գրվում է բացահայտ տեսքով, որպես Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի $E_\rho(z; \mu)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա։

M. M. DŽRBAŠIAN and A. B. NERSESIAN

FRACTIONAL DERIVATIVES AND THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Summary

The concept of fractional integro-differentiation has found a number of applications in the earlier papers of the present authors.

With this paper we begin the publication of our results in the field of boundary problems for differential operators of fractional order.

The § 1 of the present paper is devoted to the treatment of a number of basic properties of Rieman-Liuvill operator.

These properties are used in § 2, which is devoted to the Cauchy type problem for linear differential operators of fractional order. Here the analog of the Cauchy problem is formulated and with the aid of a number of lemma the basic theorem 4 is proved, which states the existence and uniqueness of the solution in the class $L_1(0, l)$.

The concluding § 3 containes a modification of the theorem 4, which introduces some sufficient conditions for the existence of the solution for the same problem in the class $L_p(0, l)$ $(p > 1)$.

An important example of a differential operator of fractional order for which the solution of the Cauchy type problem may be written explicitly as a linear combination of Mittag-Lefler type functions $E_\rho(z; \mu)$ is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* Критерий разложимости функций в ряды Дирихле, ИАН АрмССР, физ.-мат. науки, 11, № 5, 1958, 85.
2. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ИАН СССР, сер. матем., 19, 1955, 133—180.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
4. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян.* Разложения по специальным биортогональным системам, и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды ММО, 10, 1961, 89—179.
5. *J. D. Tamarkin.* On integrable solutions of Abel's integral equation, Ann. of Math., (2) 31, 1930, 214—228.
6. *Р. Трикоми.* Интегральные уравнения, М., 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

С. Н. СЛУГИН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ АНАЛОГИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Здесь строятся топологические полуупорядоченные аналоги некоторых функциональных пространств. Факты из теории линейных топологических пространств используются в терминах [1]; из теории полуупорядоченных пространств—в терминах [2].

§ 1. КТ-линеал. Распространение нормальной топологии на К-пополнение

1. Множество V называется нормальным в К-линеале X, если из соотношений $|x|\leqslant|y|$, $y \in V$ следует $x \in V$. Из нормальности следует уравновешенность [1]. Под сходимостью направления [2] $x_a \to x$ понимается сходимость топологическая. Фундаментальная система окрестностей нуля называется базисом.

Определение 1. Базис, состоящий из нормальных] окрестностей, называем *нормальным*.

Определение 2. Отделимое линейное топологическое пространство, являющееся К-линеалом и обладающее нормальным базисом, назовем КТ-*линеалом*.

Топологию КТ-линеала называем нормальной.

КТ-линеал обладает основными свойствами KN-линеала. В частности, он—архимедов К-линеал. Структурные операции топологически непрерывны. Из структурной ограниченности множества следует его топологическая ограниченность.

2. Нормальная топология КТ-линеала распространяется на его К-пополнение.

Теорема 1. *К-пополнение Y КТ-линеала X с нормальным базисом $\{V\}$ является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{O\}$, где $y \in O$, если существует элемент $x \geqslant |y|$, $x \in V$. При этом*

$$V = O \cap X. \tag{1}$$

Для любого элемента y К-пополнения Y найдется элемент $x \in X$, $x \geqslant |y|$. Элемент x линейного топологического пространства X поглощается любой окрестностью V нуля: $x \in \lambda V$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_V$. По определению множества $O = O_V$ элемент $y \in \lambda O$ при этих λ, то есть O—поглощающее.

Для множества O_0, определенного через V_0 (из данного базиса), возьмем окрестность V такую, что алгебраическая сумма $V+V\subset V_0$. Тогда $O+O\subset O_0$.

Нормальность O очевидна.

Отделимость. Для элемента $y\neq 0$ К-пополнения Y имеется элемент $z\in X$, $0<z\leqslant|y|$. Для элемента $z\neq 0$ отделимого пространства X есть окрестность V нуля такая, что $z\bar{\in} V$. Если бы $y\in O$, то, по определению окрестности O, должен существовать элемент $x\in V$, $x>|y|$. Но тогда $0<z\leqslant x\in V$, $z\in V$ вследствие нормальности V; противоречие; следовательно $y\bar{\in} O$.

Равенство (1) следует из нормальности V.

§ 2. Аналог пространства измеримых функций. Непрерывное погружение КТ-линеала

1. Пусть в базе I К-пространства Z с единицей 1 имеется система множеств $\Gamma\subset I$, удовлетворяющая условиям:

(Г1) *Для любых* Γ_i *существует* $\Gamma\subset\Gamma_1\cap\Gamma_2$.

(Г2) *Для каждого* Γ_0 *имеется* Γ *такое, что, если* $e_i\in\Gamma$, *то* $e_1ve_2\in\Gamma_0$.

(Г3) Γ *нормально содержатся в* I.

(Г4) $\bigcap\Gamma=\{0\}$.

Обозначим через $e[z]$ след положительной части элемента $|z|-1$ и определим множество

$$W_\Gamma=\{z\colon e[z]\in\Gamma\}.$$

Теорема 2. *Если элементы какого-либо фундамента Y К-пространства Z поглощаются множествами W_Γ, то Y является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{Y\cap\varepsilon W_\Gamma\}$, где числа $\varepsilon\in(0,1]$. Можно считать, что Y содержит подлинеал ограниченных элементов К-пространства Z.*

Если $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i$, $\Gamma\subset\bigcap\limits_i\Gamma_i$, то $\varepsilon W_\Gamma\subset\bigcap\limits_i\varepsilon_i W_{\Gamma_i}$ $(i=1,2)$.

Пользуясь условием (Г2), покажем, что

$$\frac{1}{2}W_\Gamma+\frac{1}{2}W_\Gamma\subset W_{\Gamma_0}. \qquad (2)$$

Пусть z, $u\in\frac{1}{2}W_\Gamma$, то есть следы $e[2z]$, $e[2u]\in\Gamma$. Тогда

$$e[z+u]\leqslant e[2|z|\vee 2|u|]\leqslant e[2z]\vee e[2u]\in\Gamma_0.$$

По условию (Г3) след $e[z+u]\in\Gamma_0$, элемент $z+u\in W_{\Gamma_0}$, включение (2) верно.

Из условия (Г3) и определения множества W_Γ следует его нормальность.

Отделимость. Пусть элемент $z\in\bigcap\varepsilon W_\Gamma$, тогда следы $e[nz]\in\Gamma$ при всех Γ и n. По условию (Г4) $e[nz]=0$, $z=0$.

Отметим, что всеми установленными здесь свойствами обладает не только система $\{\varepsilon W_\Gamma\}$, но и $\{Y_0 \cap \varepsilon W_\Gamma\}$ для любого фундамента Y_0. А так как элементы $y \in Y$, по условию, поглощаются множествами W_Γ, то Y является КТ-линеалом с указанным базисом.

След $e[1] = 0 \in \Gamma$ по условию (Г4), поэтому W_Γ поглощает любой элемент вида $\lambda 1$, а в силу нормальности W_Γ—и любой ограниченный элемент z_0 в Z. Ясно, что W_Γ поглощает любые элементы z, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant |y| + |z_0|$. Но такие элементы составляют фундамент, поэтому можно полагать, что подлинеал ограниченных элементов $Z_0 \subset Y$.

Теорема 3. *База I является топологическим подпространством КТ-линеала Y. Ее топология определяется системой множеств $\Gamma = I \cap \varepsilon W_\Gamma$. Сходимость направления $e_\alpha \to e$ в I означает, что симметричная разность $e_\alpha Ce + eCe_\alpha \in \Gamma$ при $\alpha \geqslant \alpha_\Gamma$.*

Здесь обозначено $Ce = 1 - e$, $ee_0 = e \wedge e_0$. Докажем топологическую замкнутость базы. Если $e_\alpha \in I$, $e_\alpha \to y$, то $0 = e_\alpha Ce_\alpha \to y \wedge (1-y)$ вследствие непрерывности структурных соотношений в КТ-линеале Y. Поэтому $y \wedge (1-y) = 0$, $y \in I$. Если $e_\alpha \to e$, то $e_\alpha Ce + eCe_\alpha = |e_\alpha - e| \to 0$ по той же причине.

Теорема 4. *Для того чтобы некоторый нормальный подлинеал Y, содержащий единицу К-пространства Z, был КТ-линеалом с базисом $\{Y \cap \varepsilon W_\Gamma\}$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$(RI) \text{ Если } e_n \in I,\ e_n > e_{n+1} \xrightarrow{(r)} 0 \text{ в } Y, \text{ то } e_n \to 0 \text{ в } I.$$

Необходимость очевидна. Для проверки достаточности построим последовательность следов $e_n = e\left[\frac{y}{n}\right] \leqslant \frac{y}{n}$. Тогда $e_n > e_{n+1} \xrightarrow{(r)} 0$ в Y, $e_n \in \Gamma$ при некотором n по условию (RI). Поэтому $y \in nW_\Gamma \subset \lambda W_\Gamma$ при $|\lambda| \geqslant n$, окрестности W_Γ поглощают элементы из Y. Применяем теорему 2.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие*

$$(AI) \text{ если } e_n \downarrow 0, \text{ то } e_n \to 0.$$

Тогда Z является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{\varepsilon W_\Gamma\}$. Действительно, из условия (AI) следует условие (RI) для $Y = Z$.

Теорема 5 верна, в частности, для расширенного К-пространства (универсального полуполя [3]) Z.

Сходимость в КТ-линеале Z с базисом $\{\varepsilon W_\Gamma\}$ в случае $Z = S$ означает сходимость по мере, поэтому построенная здесь топология является обобщением топологии пространства измеримых функций.

2. Эквивалентную топологию можно задать системой окрестностей W_Γ (см. [3]). Условие (AI) или (RI) для $Y = Z$ слабее данного в аксиоме 6; здесь не использована также аксиома 8 ([3], стр. 52). Кроме того, при построении топологии в Y после погружения КТ-линеала X в Z (см. ниже п. 4) постулат (AI) не потребуется.

3. Системой окрестностей W_{Γ} можно задать аналогичную топологию в фундаменте более общего объекта—архимедова К-линеала с единицей, (b)-полного в смысле [4, 5].

В таком К-линеале вводятся [5] абстрактные функции, порожденные непрерывными функциями нескольких переменных. Можно доказать, что такая функция топологически непрерывна вблизи (топологически) тех точек, где она имеет смысл.

4. Покажем, что произвольный КТ-линеал можно топологически непрерывно погрузить в некоторый КТ-линеал Y с указанным выше базисом.

КТ-линеал X с нормальным базисом $\{V\}$, по теореме 1, топологически гомеоморфно погружается в свое К-пополнение X_0, являющееся КТ-линеалом с нормальным базисом $\{O\}$. В базе I максимального расширения Z К-пространства X_0 определим множества $\Gamma = O \cap I$. Тогда выполняются все условия (Г1—4). В частности, условие (Г2) следует из непрерывности структурных соотношений в КТ-линеале X_0. Так как множество $W_{\Gamma} \supset O$, то оно поглощает любой элемент линейного топологического пространства X_0 и, следовательно, любой элемент фундамента

$$Y = \{z\colon\ z \in Z,\ |z| \leqslant |x_0| + |z_0|,\ x_0 \in X_0,\ z_0 \in Z_0\},$$

где Z_0— подлинеал ограниченных элементов в Z (см. доказательство теоремы 2). Из включений

$$X \subset X_0 \subset Y,\ V \subset O \subset Y \cap W_{\Gamma}$$

следует

Теорема 6. *Любой КТ-линеал топологически непрерывно погружается в некоторый КТ-линеал Y с базисом* $\{Y \cap \varepsilon W_{\Gamma}\}$. Ясно, что топологии, индуцированные в $X \cap I$ из КТ-линеалов X и Y, совпадают.

5. Можно показать, что условие, выставленное в аксиоме 8 [3], не только достаточно, но и необходимо для топологической непрерывности обратного отображения КТ-линеала X с базисом $\{X \cap \varepsilon W_{\Gamma}\}$ в КТ-линеал X с базисом $\{V\}$.

§ 3. Аналог линеала Орлича

1. Теперь X—а. п. н. К-линеал, то есть архимедов внутренне-нормальный (b)-полный в смысле [5] К-линеал с ф. с. е. э.—фундаментальной системой единичных элементов $\{e_{\tau}\}$.

Отметим, что топологически счетно-полный КТ-линеал (b)-полон в указанном смысле. Действительно, (b)-пополнение (в этом смысле) дает часть топологического счетного пополнения, поскольку из такой (b)-сходимости следует топологическая.

Как известно, частными случаями а. п. н. К-линеала являются K_{δ}-пространство с единицей и произвольное К-пространство.

А. п. н. К-линеал X является [5] фундаментом некоторого К-линеала Z с единицей, реализуемого К-линеалом всех непрерывных функций, допускающих бесконечные значения на нигде не плотных подмножествах.

В дальнейшем $\varphi(u)$ означает числовую неотрицательную непрерывную функцию, определенную на всей числовой оси, четную, неубывающую при $u>0$, для которой имеется такое число k, что

$$(\Delta_2) \quad \varphi(2u) \leqslant k\varphi(u).$$

При наличии в К-линеале X единицы Δ_2-условие [6] выставляем лишь для достаточно больших u.

В Z имеют смысл [5] абстрактные функции φ, порожденные непрерывными функциями; x, $\varphi(x) \in Z$.

Для подмножеств $A \subset X$ образуем (ср. [7]) множества

$$A_\varphi = \{x \colon x \in Z,\ \varphi(x) \in A\}.$$

Теорема 7. *X_φ является нормальным подлинеалом в Z и, следовательно, К-линеалом.*

Пусть $x \in Z$, $|x| \leqslant |y|$, $y \in X_\varphi$. Тогда

$$0 \leqslant \varphi(|x|) \leqslant \varphi(|y|) = \varphi(y) \in X,\ \varphi(x) = \varphi(|x|) \in X,$$

так как X нормально в Z. По определению, $x \in X_\varphi$; X_φ нормально в Z.

Если $x \in X_\varphi$, то $\lambda x \in X_\varphi$, так как по Δ_2-условию при всех u $\varphi(\lambda x) \leqslant k^n \varphi(x)$ для $|\lambda| \leqslant 2^n$, $k^n\varphi(x) \in X$, $\varphi(\lambda x) \in X$. Если же Δ_2-условие выполняется лишь при $u \geqslant u_0 > 0$ и в X есть единица 1, то, обозначая

$$w = |x| \vee u_0 1, \tag{3}$$

находим, что для $|\lambda| \leqslant 2^n$, $\varphi(\lambda x) = \varphi(|\lambda x|) \leqslant \varphi(|\lambda|\, w) \leqslant k^n \varphi(w) \in X$, так как

$$\varphi(u_0 1) = \varphi(u_0) 1 \in X,$$

$$\varphi(w) = \varphi(x) \vee \varphi(u_0 1) \in X.$$

Если $x, y \in X_\varphi$, то $|x| \vee |y| \in X_\varphi$, $x+y \in X_\varphi$:

$$\varphi(|x| \vee |y|) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \in X;$$

$$\varphi(x+y) \leqslant \varphi(2|x| \vee 2|y|) \in X,\ \varphi(x+y) \in X.$$

Соотношение $\lambda x + y \in X_\varphi$ указывает, что X_φ—подлинеал. Теорема 7 доказана.

Пусть X, кроме того, —КТ-линеал с нормальным базисом $\{V\}$, функция $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и существует такое число $l < 1$, что

$$\varphi(u) \leqslant l\varphi(2u).$$

При наличии в а. п. н. К-линеале X единицы последнее требование выставляем лишь для достаточно больших u.

Теорема 8. *X_φ—КТ-линеал с нормальным базисом $\{V_\varphi\}$.*

Ясно, что множества V_φ нормальны и для любой их пары найдется третье, содержащееся в их пересечении.

Покажем, что V_φ—поглощающее. Пусть $x \in X_\varphi$. Элемент $\varphi(x)$ линейного топологического пространства X поглощается любой окрестностью V, $\varphi(x) \in l^{-n} V$ при некотором n. По условию (4)

$$\varphi(2^{-n}x) \leqslant l^n \varphi(x), \quad x \in 2^n V_\varphi.$$

Если же (4) имеет место лишь при $u \geqslant u_0 > 0$ и в X есть единица 1, то, применяя обозначение (3), для $x \in X_\varphi$ находим $\varphi(w) \in X$, $\varphi(w) \in l^{-m} V$ при некотором m,

$$\varphi(2^{-m}w) \leqslant l^m \varphi(w) \in V, \ w \in 2^m V_\varphi, \ x \in 2^m V_\varphi.$$

Докажем теперь существование для множества V_φ^0 такого множества V_φ, что $V_\varphi + V_\varphi \subset V_\varphi^0$. В КТ-линеале структурные соотношения непрерывны, поэтому для любой окрестности V^0 имеется такая окрестность V, что, если $z, t \in V$, то $k(z \vee t) \in v^0$. Пусть $x, y \in v_\varphi$, тогда элементы $z = \varphi(x)$, $t = \varphi(y) \in V$, $\varphi(x+y) \leqslant k(z \vee t) \in V^0$, $x + y \in V_\varphi^0$.

Отделимость. Если $x \neq 0$, то $\varphi(x) \neq 0$, существует окрестность V нуля в отделимом пространстве X такая, что $\varphi(x) \bar{\in} V$, $x \bar{\in} V_\varphi$. Теорема 8 доказана.

Пусть, кроме того, φ строго возрастает и $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$.

Теорема 9. *КТ-линеалы X и X_φ топологически гомеоморфны, $\varphi(X_\varphi) = X$, $\varphi(V_\varphi) = V$. К-линеал X_φ является фундаментом в Z с той же ф. с. е. э. Если X—К-пространство, то X_φ тоже К-пространство.*

В этих условиях преобразование φ обратимо.

Так как $\varphi(e) = \varphi(1)e$, то система $\{e_\nu\}$ остается ф. с. е. э. и в X_φ.

Если X — К-пространство и в X_φ $0 \leqslant x_\xi < x$, то в X $0 \leqslant \psi(x_\xi) \leqslant \leqslant \psi(x)$ (где $\psi = \varphi^{-1}$), существует $v = \sup \psi(x_\xi) \in X$. Очевидно $\varphi(v) = \sup x_\xi \in X_\varphi$.

2. Примером такой функции $\varphi(u)$ является N-функция [6], удовлетворяющая Δ_2-условию. Частным случаем КТ-линеала X_φ является пространство X_M, построенное в [7] и, в частности, *линейный класс Орлича* [6].

3. Взяв $\varphi(u) = |u|^p$ (где $p > 0$), строим КТ-линеал

$$X_p = \{x\colon x \in Z, \ |x|^p \in X\}, \ V_p = \{x\colon x \in Z, \ |x|^p \in V\}.$$

КВ-пространство X_p определено в [7].

§ 4. Аналог пространства L_p

1. Введем топологический полуупорядоченный аналог пространства L_p, где $p > 0$.

Определение 3. Пусть нормальный базис $\{V\}$ КТ-линеала X удовлетворяет условию: если $x, y > 0$, $x + y \in V$, то имеются такие числа $\lambda, \mu > 0$, что

$$x \in \lambda V, \ y \in \mu V, \ \lambda^p + \mu^p = 1.$$

Тогда будем говорить, что X удовлетворяет условию (L_p).

Теорема 10. *Топологически ограниченно-полный КТ-линеал, удовлетворяющий условию (L_p), является К-пространством.*

Пусть $0 \leqslant x_\xi \leqslant x_0$. Составим возрастающее направление граней всевозможных конечных наборов $y_\alpha = \sup x_{\xi_i}$, где множество A индексов частично упорядочено по включению. Тогда $0 \leqslant y_\alpha \leqslant x_0$. Докажем существование грани $\sup y_\alpha \in X$ (которая, очевидно, и будет гранью $\sup x_\xi$).

Введем функционалы

$$N_V(x) = \inf \{|\lambda|^p: \quad x \in \lambda V\}.$$

При фиксированной V числовое возрастающее направление $N_V(y_\alpha)$ ограничено сверху числом $N_V(x_0)$ и, следовательно, сходится в себе. По условию (L_p) при $\beta \geqslant \alpha$, $\beta \in A$

$$N_V(y_\beta - y_\alpha) \leqslant N_V(y_\beta) - N_V(y_\alpha) \to 0,$$

направление $y_\beta - y_\alpha \to 0$ по множеству A^2 при $\beta \geqslant \alpha$ и, следовательно, по множеству A^2 независимых пар индексов. Но множество элементов y_α топологически ограничено, пространство X топологически ограниченно-полно, существует $\lim y_\alpha = y$. Переходя в КТ-линеале X к пределу в неравенствах $y_\alpha \leqslant y_\beta \leqslant x_0$ при $\alpha \leqslant \beta$ по множеству A индексов β, находим, что $y_\alpha \leqslant y \leqslant x_0$, то есть $y = \sup y_\alpha$. Теорема 10 доказана.

2. Остановимся вкратце на локально выпуклом случае.

Определение 4. Окрестность V называем p-выпуклой, если из соотношений

$$x, y \in V, \ |\lambda|^p + |\mu|^p = 1$$

следует $\lambda x + \mu y \in V$.

Можно показать, что, если выполнены условия теоремы 10 и определения 4, то X локально выпукло и реализуется пространством функций, суммируемых в p-ой степени на некотором экстремальном бикомпакте [2] с абстрактной мерой. Доказательство можно провести, например, привлекая пространство X_r (см. § 3, п. 3), где $pr = 1$, и теоремы 9, 10. В нормированном случае получаем пространство L_p, мера числовая.

Горьковский государственный
университет

Поступило 26.II.1967

Ս. Ն. ՍԼՈՒԳԻՆ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ԿԻՍԱԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԸ

Ամփոփում

Կառուցված են Օրլիչի լինեալի և չափելի ու հանրագումարելի ֆունկցիաների տարածությունների տոպոլոգիական կիսակարգավորված անալոգներ։

S. N. SLUGUIN

TOPOLOGICAL LATTICE ANALOGS OF FUNCTIONAL SPACES

Summary

The topological lattice analogs of spaces of measurable and summerable functions and Orlich's lineal are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
2. *Б. З. Вулих.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
3. *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков.* Топологические алгебры Буля, Ташкент, Издан. АН УзбССР, 1963.
4. *М. Г. Крейн, С. Г. Крейн.* Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном множестве, ДАН СССР, 27, № 5, 1940.
5. *Б. З. Вулих.* Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, ИАН СССР, серия матем., 17, № 4, 1953.
6. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
7. *Г. Я. Лозановский.* О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича, ДАН СССР, 163, № 3, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

РАДИАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ И РАДИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ $B_\alpha(z; z_k)$

1°. **Введение.** Пусть $\{z_k\}_1^\infty$, $(0<|z_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей.

Как хорошо известно, если

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|)<+\infty, \tag{1}$$

то бесконечное произведение Бляшке

$$B(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty \frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\cdot\frac{|z_k|}{z_k} \tag{2}$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Известно также [1], что произведение Бляшке имеет предел

$$B(e^{i\vartheta};\ z_k)=\lim_{r\to 1-0} B(re^{i\vartheta};\ z_k),$$

если

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|}<+\infty. \tag{3}$$

В работах [2, 3] М. М. *Джрбашяна* для каждого значения параметра α $(-1<\alpha<\infty)$ построена функция $B_\alpha(z;\ z_k)$, являющаяся естественным обобщением произведения Бляшке.

Пусть вместо (1) последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^\infty (1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{4}$$

где $\alpha\in(-1,\ \infty)$ — фиксированное число. Тогда произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ имеет следующий вид:

$$B_\alpha(z;\ z_k)=\prod_{k=1}^\infty \left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\ z_k)}, \tag{5}$$

где при $|z|<1$ и $|\zeta|<1$ положено

$$W_\alpha(z,\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\Big\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-$$

$$-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\Big\}z^k. \tag{6}$$

Произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ равномерно и абсолютно сходится в любом замкнутом круге $|z|\leqslant r<1$ и $B_0(z;\ z_k)=B(z;\ z_k)$ [3].

В работах [4, 5], в частности, доказано, что для произведения $B_\alpha(z;\ z_k)$ при $-1<\alpha<0$ предел

$$\lim_{r\to 1-0}B_\alpha(re^{i\theta};\ z_k)=B_\alpha(e^{i\theta};\ z_k) \tag{7}$$

существует всюду, кроме, быть может, некоторого множества E, γ-емкость которого нуль, где $1+\alpha<\gamma<1$ — любое число.

В первом параграфе настоящей статьи доказывается, что при $-1<\alpha<0$ условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty \tag{8}$$

достаточно для того, чтобы в точке $e^{i\theta}$ существовал предел (7).

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\theta}$, если посредством этой функции сегмент, соединяющий $e^{i\theta}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\theta}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\theta}$.

Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Во втором параграфе рассматривается вопрос о радиальном изменении произведения $B_\alpha(z;\ z_k)$.

Карго [6] показал, что, если выполняется условие (3), то в точке $e^{i\theta}$ произведение Бляшке $B(z;\ z_k)$ имеет конечное радиальное изменение, более того, $B(z;\ z_k)$ имеет конечное сегментное изменение [7].

В настоящей статье доказывается, что условие (8) достаточно также для того, чтобы в точке $e^{i\theta}$ произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ имело конечное радиальное изменение.

В работе [8] Рудиным было доказано, что, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty, \tag{9}$$

то произведение $B(z;\ z_k)$ имеет конечное радиальное изменение почти всюду на $[0,\ 2\pi]$.

В конце настоящей работы доказывается, что, если вместо (9) предположить сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty \quad (-1<\alpha<0),$$

то множество, где радиальное изменение произведения $B_\alpha(z; z_k)$ $(-1<\alpha<0)$ становится бесконечностью, имеет нулевую $(1+\alpha)$-емкость.

§ 1. Радиальные пределы произведения $B_\alpha(z; z_k)$ в данной точке

2°. Вспомогательные леммы. Приведем сперва следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ *и* $0\leqslant r<1$, *тогда, если*

$$J_\alpha^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}|\zeta|^{-2k}\int_0^{|\zeta|^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar{\zeta})^k,$$

то

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}, \tag{10}$$

*где c не зависит от r и ζ**.

Доказательство. Заметив, что

$$\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx=\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(1+\alpha+k)},$$

$J_\alpha^{(1)}$ можем записать в следующем виде:

$$J_\alpha^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left[\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1(1-|\zeta|^2x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar{\zeta})^k.$$

В интеграле

$$\int_0^1\left[(1-x)^\alpha-(1-|\zeta|^2x)^\alpha\right]x^{k-1}\,dx$$

после замены $\dfrac{1-x}{1-|\zeta|^2x}=t$ получим

$$J_\alpha^{(1)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\left(\frac{1-t}{1-|\zeta|^2t}\right)^k\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}(r\bar{\zeta})^k.$$

---

* Через c мы в дальнейшем будем обозначать абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

В силу разложения

$$\frac{1}{(1-w)^{1+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,w^k,\quad |w|<1 \tag{11}$$

будем иметь

$$J_\alpha^{(1)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{[1-|\zeta|^2t-(1-t)\,r\bar\zeta]^{1+\alpha}}-$$

$$-(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}.$$

Так как

$$\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}\leqslant\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-t)^{1+\alpha}}<c,$$

то

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{|1-r\bar\zeta-t(r-\zeta)\bar\zeta|^{1+\alpha}}+c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \tag{12}$$

Имеем также

$$|1-r\bar\zeta-t\,(r-\zeta)\bar\zeta|\geqslant|1-r\bar\zeta|-t\,|r-\zeta|\,|\zeta|\geqslant$$

$$\geqslant|1-r\bar\zeta|\cdot\left(1-t\left|\frac{r-\zeta}{1-r\bar\zeta}\right||\zeta|\right)\geqslant|1-r\bar\zeta|\,(1-t\,|\zeta|)\geqslant|1-r\bar\zeta|\,(1-t). \tag{13}$$

Подставив это неравенство в (12), получим

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}+c\,\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{14}$$

Заметим теперь, что

$$\left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant\left|1-\frac{1}{\bar\zeta}\right|-|r-1|\ \text{и}\ \left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant|r-1|,$$

следовательно

$$\left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{\bar\zeta}\right|=\frac{1}{2}\,|1-\zeta|\cdot|\zeta|^{-1}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ *и* $0\leqslant r<1$. *Обозначим*

$$J_\alpha^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left[\int_{|\zeta|}^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar\zeta)^k.$$

Тогда

$$|J_\alpha^{(2)}| \leqslant \frac{c}{|\zeta|^{1+\alpha}} \left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} \right)^{1+\alpha}. \tag{16}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{1}{|\zeta|^{2k}} \int_{|\zeta|^2}^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx = \int_{|\zeta|}^{1} \left(1 - \frac{|\zeta|^2}{x}\right)^\alpha x^{-k-1} dx.$$

Теперь, если в интеграле

$$\int_{|\zeta|}^{1} \left[(1-x)^\alpha - \left(1 - \frac{|\zeta|^2}{x}\right)^\alpha \right] x^{-k-1} dx$$

сделаем замену переменной

$$\frac{1-x}{x-|\zeta|^2} = t,$$

то получим

$$J_\alpha^{(2)} = (1-|\zeta|^2)^{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)} \int_0^{1/|\zeta|} \Bigg[t^\alpha -$$

$$- \left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2} \right)^\alpha \Bigg] \left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2} \right)^k \frac{dt}{(1+t)^{1+\alpha}} (r\bar{\zeta})^k.$$

Снова используя разложение (11), имеем

$$|J_\alpha^{(2)}| \leqslant (1-|\zeta|^2)^{1+\alpha} \int_0^{1/|\zeta|} \left[t^\alpha - \left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2} \right)^\alpha \right] \left(\frac{1+t|\zeta|^2}{1+t} \right)^{1+\alpha} \times$$

$$\times \frac{dt}{|1-r\bar{\zeta}+t\bar{\zeta}(r-\zeta)|^{1+\alpha}} + c(1-|\zeta|)^{1+\alpha}.$$

Отсюда так же, как и для $J_\alpha^{(1)}$, получается

$$|J_\alpha^{(2)}| \leqslant c \left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar{\zeta}|} \right)^{1+\alpha} \int_0^{1/|\zeta|} \frac{t^\alpha\, dt}{(1-t|\zeta|)^{1+\alpha}} + c(1-|\zeta|)^{1+\alpha} \leqslant c \left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar{\zeta}|} \right)^{1+\alpha}. \tag{17}$$

Для завершения доказательства леммы остается сослаться на неравенство (15).

3°. Теорема о радиальных пределах. Следующая теорема аналогична теореме Фростмана для произведений Бляшке и при $\alpha = 0$ совпадает с ней.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|} \right)^{1+\alpha} < +\infty, \tag{18}$$

то при $-1<\alpha<0$

$$\lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\vartheta};\ z_k)=B_\alpha(e^{i\vartheta};\ z_k)$$

существует и конечен.

Доказательство. Так как

$$B_\alpha(re^{i\vartheta};\ z_k)=B_\alpha(r;\ z_k e^{-i\vartheta})$$

и

$$\frac{1-|z_k e^{-i\vartheta}|}{|1-z_k e^{-i\vartheta}|}=\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|},$$

то достаточно доказать теорему в том частном случае, когда $\vartheta=0$. Введем следующие обозначения:

$$b_\alpha(z;\ \zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\alpha(z;\ \zeta)} \tag{19}$$

и

$$J_\alpha(z;\ \zeta)=1-b_\alpha(z;\ \zeta).$$

В силу известного признака сходимости бесконечных произведений [6] для существования $\lim\limits_{r\to1-0} B_\alpha(r;\ z_k)$ достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|J_\alpha(r;\ z_k)| \tag{20}$$

сходился равномерно относительно r в интервале $0\leqslant r\leqslant1$.

Имеем

$$|J_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|1-b_0(r;\ \zeta)|+|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|. \tag{21}$$

Но так как $b_0(r;\zeta)=\dfrac{r-\zeta}{1-r\bar\zeta}\cdot\dfrac{|\zeta|}{\zeta}$, то

$$|1-b_0(r;\ \zeta)|\leqslant c\,\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}, \tag{22}$$

ввиду неравенства (15) (см. также [10], стр. 469).

Заметим теперь, что

$$|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|b_0(r;\ \zeta)|\,|1-e^{W_0(r;\ \zeta)-W_\alpha(r;\ \zeta)}|.$$

Но, как известно [4, 5], при $-1<\alpha<0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\,[W_\alpha(r;\ \zeta)-W_0(r;\ \zeta)]\geqslant0 \tag{23}$$

и, поскольку для $\operatorname{Re}\ z\geqslant0$ имеем

$$|1-e^{-z}|\leqslant|z|,$$

то

$$|1-e^{W_0(r;\ \zeta)-W_\alpha(r;\ \zeta)}|\leqslant|W_0(r;\ \zeta)-W_\alpha(r;\ \zeta)|. \tag{24}$$

Поскольку

$$|b_0(r;\ \zeta)|\leqslant1, \tag{25}$$

то

$$|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|W_0(r;\ \zeta)-W_\alpha(r;\ \zeta)|. \tag{26}$$

Из (6) вытекает, что

$$W_\alpha(r;\zeta)-W_0(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left[\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right]\right\}(r\bar{\zeta})^k=$$

$$=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx-J_\alpha^{(1)}-J_\alpha^{(2)}. \tag{27}$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}.$$

Тогда, применив леммы 1 и 2, получим

$$|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{28}$$

Из неравенств (22), (28) и (26) следует

$$|J_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{29}$$

В силу условия (18) теоремы (при $\vartheta=0$) и согласно неравенству (29), мы получим, что ряд (20) и, следовательно, произведение $B_\alpha(r;z_k)$ сходятся равномерно по r на отрезке [0, 1], что и доказывает теорему.

Используя оценки (14) и (17), легко получить неравенство

$$|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar{\zeta}|}\right)^{1+\alpha}, \tag{30}$$

которое в дальнейшем будет нами использовано.

§ 2. Радиальные изменения произведения $B_\alpha(z;z_k)$

4°. Вспомогательные леммы. Следующие три леммы нам понадобятся в дальнейшем, причем первая из них имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и* $|\zeta|<1$, *тогда*

$$J_\alpha=\int\limits_0^1\frac{dr}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}<\frac{c_\alpha}{|1-\zeta|^{1+\alpha}}. \tag{31}$$

Доказательство. Обозначим через $\eta=1-\frac{|1-\bar{\zeta}|}{2}$, $0<\eta<1$ и запишем интеграл J_α в следующем виде:

$$J_\alpha = \int_0^\eta \frac{dr}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} + \int_\eta^1 \frac{dr}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} = J_\alpha^{(1)} + J_\alpha^{(2)}.$$

Так как $|1-r\bar{\zeta}| \geqslant 1-r$, то для $J_\alpha^{(1)}$ получим

$$J_\alpha^{(1)} \leqslant \int_0^\eta \frac{dr}{(1-r)^{2+\alpha}} \leqslant \frac{c_\alpha}{|1-\bar{\zeta}|^{1+\alpha}}.$$

Для оценки $J_\alpha^{(2)}$ применим неравенство (15). Имеем

$$J_\alpha^{(2)} \leqslant c \int_\eta^1 \frac{dr}{|1-\zeta|^{2+\alpha}} = c\,\frac{1-\eta}{|1-\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} = \frac{c}{|1-\bar{\zeta}|^{1+\alpha}}.$$

Оценки, полученные для $J_\alpha^{(1)}$, $J_\alpha^{(2)}$, доказывают неравенство (31).

Лемма 4. *Пусть* $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ *и* $0 \leqslant r<1$, *тогда, если*

$$A_\alpha^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)}|\zeta|^{-2k}\int_0^{|\zeta|^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar{\zeta})^{k-1},$$

то

$$|A_\alpha^{(1)}| \leqslant \frac{c}{|\zeta|^{1+\alpha}}\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1 мы можем $A_\alpha^{(1)}$ представить в следующем виде:

$$A_\alpha^{(1)} = (1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)} \times$$

$$\times \int_0^1 (t^\alpha-1)\left(\frac{1-t}{1-t|\zeta|^2}\right)^{k-1}\frac{dt}{(1-t|\zeta|^2)^{2+\alpha}}\,(r\bar{\zeta})^{k-1};$$

в силу разложения

$$\frac{1+\alpha}{(1-w)^{2+\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)}\,w^{k-1},\quad |w|<1, \tag{32}$$

будем иметь, что

$$A_\alpha^{(1)} = \frac{(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int_0^1 (t^\alpha-1)\frac{dt}{[1-|\zeta|^2 t - r\bar{\zeta}(1-t)]^{2+\alpha}}.$$

Используя неравенство (13), получим

$$|A_\alpha^{(1)}| \leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}\int_0^1 \frac{t^\alpha-1}{(1-t)^{2+\alpha}}\,dt \leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}.$$

Лемма 5. Пусть $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ и $0\leqslant r<1$, если

$$A_\alpha^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}\Bigg[\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-\alpha k-1}dx-$$

$$-\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int\limits_{|\zeta|^2}^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}dx\Bigg](r\bar\zeta)^{k-1},$$

то

$$|A_\alpha^{(2)}|\leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar\zeta|^{2+\alpha}}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, получим, что

$$A_\alpha^{(2)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\left[t^{\alpha}-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^{\alpha}\right]\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^{k-1}\times$$

$$\times\frac{dt}{(1+t)^{\alpha}(1+t|\zeta|^2)}(r\bar\zeta)^{k-1}.$$

Еще раз используя разложение (32), получим

$$A_\alpha^{(2)}=\frac{(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\left[t^{\alpha}-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^{\alpha}\right]\frac{(1+t|\zeta|^2)^{1+\alpha}}{(1+t)^{\alpha}}\,\frac{dt}{[1-r\bar\zeta+t\bar\zeta(r-\zeta)]^{2+\alpha}}.$$

Отсюда, в силу неравенства (13), получим

$$|A_\alpha^{(2)}|\leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar\zeta|^{2+\alpha}}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\left\{\left[\frac{1+t}{t(1+t|\zeta|^2)}\right]^{\alpha}-1\right\}\frac{t^{\alpha}\,dt}{(1-t|\zeta|)^{2+\alpha}}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что последний интеграл сходится.

5°. **Радиальное изменение в данной точке.** Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{33}$$

то в точке $e^{i\vartheta}$ *произведение* $B_\alpha(z;\,z_k)$ *при* $-1<\alpha<0$ *имеет конечное радиальное изменение.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, не нарушая общности, мы можем считать, что $\vartheta=0$.

Согласно обозначению (19) имеем

$$B_\alpha(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}b_\alpha(z;\,z_k).$$

Тогда, вычислив логарифмическую производную произведения $B_\alpha(z;\,z_k)$, получим

$$B_\alpha'(z;\,z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_\alpha'(z;\,z_k)}{b_\alpha(z;\,z_k)}B_\alpha(z;\,z_m).$$

Так как при $-1<\alpha<0$ имеем [4, 5]

$$|B_\alpha(z; z_m)| < |B_0(z; z_m)| \leqslant 1,$$

то

$$|B'_\alpha(z; z_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |b'_\alpha(z; z_k)| \tag{34}$$

для всех z из единичного круга.

Теперь, обозначая через $V(f; \vartheta)$ радиальное изменение функции $f(z)$ в точке $e^{i\vartheta}$, а именно

$$V(f, \vartheta) = \int_0^1 |f'(re^{i\vartheta})|\, dr,$$

получим

$$V(B_\alpha, 0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |b'_\alpha(r; z_k)|\, dr. \tag{35}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int_0^1 |b'_\alpha(r; \zeta| \, dr = K_\alpha.$$

Имеем

$$K_\alpha \leqslant \int_0^1 |b'_0(r; \zeta)|\, dr + \int_0^1 |b'_\alpha(r; \zeta) - b'_0(r; \zeta)|\, dr = K_\alpha^{(1)} + K_\alpha^{(2)}. \tag{36}$$

Так как $b_0(z; z_k)$ — дробно-линейная функция, которая отображает единичный круг на себя, то ясно, что

$$K_\alpha^{(1)} \leqslant \frac{\pi}{2} |b_0(0; \zeta) - b_0(1; \zeta)| = \frac{\pi}{2}(1+|\zeta|)\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|} \leqslant \pi \frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}. \tag{37}$$

Для оценки $K_\alpha^{(2)}$ заметим, что

$$b_\alpha(r; \zeta) - b_0(r; \zeta) = b_0(r; \zeta)\left[e^{W_0(r;\zeta) - W_\alpha(r;\zeta)} - 1\right]$$

и, следовательно,

$$b'_\alpha(r; \zeta) - b'_0(r; \zeta) = b'_0(r; \zeta)\left[e^{W_0(r;\zeta) - W_\alpha(r;\zeta)} - 1\right] +$$
$$+ b_0(r; \zeta)\, e^{W_0(r;\zeta) - W_\alpha(r;\zeta)}\left[W'_0(r; \zeta) - W'_\alpha(r; \zeta)\right].$$

Согласно (23), (24) и (25) получим

$$|b'_\alpha(r; \zeta) - b'_0(r;\zeta)| \leqslant |W_0(r; \zeta) - W_\alpha(r; \zeta)|\, |b'_0(r; \zeta)| + |W'_0(r; \zeta) - W'_\alpha(r; \zeta)|. \tag{38}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$K_\alpha^{(2)} \leqslant \int_0^1 |W_0(r; \zeta) - W(r; \zeta)|\, |b'_0(r; \zeta)|\, dr +$$
$$+ \int_0^1 |W'_0(r; \zeta) - W'_\alpha(r; \zeta)|\, dr = \overline{K}_\alpha^{(2)} + \widetilde{K}_\alpha^{(2)}. \tag{39}$$

Имея в виду неравенства (28) и (37), получим

$$\overline{K}_\alpha^{(2)} \leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{2+\alpha}. \tag{40}$$

Для оценки $\widetilde{K}_\alpha^{(2)}$ заметим, что из (27) следует

$$W'_\alpha(r;\zeta) - W'_0(r;\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\zeta+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left[\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right]\right\} kr^{k-1}\bar{\zeta}^k = -\bar{\zeta}A_\alpha^{(1)} - \bar{\zeta}A_\alpha^{(2)}.$$

Согласно леммам 4 и 5 имеем

$$|W'_\alpha(r;\zeta) - W'_0(r;\zeta)| \leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}. \tag{41}$$

Теперь на основании леммы 3 получим оценку

$$\widetilde{K}_\alpha^{(2)} \leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{42}$$

Из неравенств (36)—(39), согласно (35), следует утверждение теоремы.

Заметим, что, так как

$$b'_0(r;\zeta) = \frac{|\zeta|\,(|\zeta|^2-1)}{|\zeta|\,(1-r\bar{\zeta})^2}, \tag{43}$$

то из (38), в силу (30) и (41), следует

$$|b'_\alpha(r;\zeta) - b'_0(r;\zeta)| \leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}. \tag{44}$$

6°. **Радиальное изменение на единичной окружности.** Пусть множество $E\subset[0, 2\pi]$, измеримое по Борелю, имеет положительную $(1+\alpha)$-емкость $(-1<\alpha<0)$. Это означает, что существует такое неотрицательное распределение μ, сосредоточенное на E, а именно

$$\int_0^{2\pi} d\mu = \int_E d\mu = 1,$$

что интеграл

$$U_\alpha(x;r) = \int_0^{2\pi}\frac{d\mu(t)}{|1-re^{i(x-t)}|^{1+\alpha}}$$

остается равномерно ограниченным по x при $r\to 1-0$ [11]:

$$\sup_{0<r<1}\left\{\max_{0<x<2\pi} U_\alpha(x;r)\right\} < +\infty. \tag{45}$$

Теорема 3. *Пусть множество* $E\subset[0, 2\pi]$ *имеет положительную* $(1+\alpha)$*-емкость* $(-1<\alpha<0)$ и μ*—такое распределение на* E*, что выполняется условие* (45). *Тогда,* если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty, \tag{46}$$

то

$$\int_0^{2\pi} V(B_\alpha;\ \vartheta)\,d\mu(\vartheta)<\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Из неравенства

$$|b_\alpha'(z;\ \zeta)|\leqslant|b_0'(z;\ \zeta)|+|b_0'(z;\zeta)-b_\alpha'(z;\ \zeta)|$$

имеем

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}|b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\,drd\mu(\vartheta)\leqslant\int_0^1\int_0^{2\pi}|b_0'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\,drd\mu(\vartheta)+$$

$$+\int_0^1\int_0^{2\pi}|b_0'(re^{i\vartheta};\ \zeta)-b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\,drd\mu(\vartheta)=A_1+A_2. \tag{48}$$

Согласно (43) для $\zeta=|\zeta|\,e^{i\varphi}$ имеем

$$A_1\leqslant(1-|\zeta|)\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{drd\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\,e^{i(\vartheta-\varphi)}|^2}\leqslant$$

$$\leqslant(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{dr}{1-r|\zeta|}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\,e^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}}.$$

Отсюда, используя условие (45), получим

$$A_1\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|\zeta|}. \tag{49}$$

Для оценки A_2 используем оценку (44). Тогда

$$A_2\leqslant(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{dr}{1-r|\zeta|}\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\,e^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}}$$

и, в силу (45), получим

$$A_2\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|\zeta|}. \tag{50}$$

Так как согласно (34)

$$V(B_\alpha;\ \vartheta)=\int_0^1|B_\alpha'(re^{i\vartheta};\ z_k)|\,dr\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1|b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ z_k)|\,dr,$$

то из (49) и (50), в силу неравенства (48) и условия (46) теоремы, получим доказательство неравенства (47).

Заметим, что из теоремы 3 следует, что при условии (46) произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ всюду на $[0,\ 2\pi]$ имеет конечное радиальное изменение, кроме, может быть, некоторого исключительного множества E, $(1+\alpha)$-емкость которого—нуль.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 23.V.1967

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

$B_\alpha(z;\ z_k)$ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է, որ եթե $\{z_k\}_1^\infty$ հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

ապա $B_\alpha(z;\ z_k)$ արտադրյալի շառավղային սահմանը և շառավղային փոփոխությունը $e^{i\theta}$ կետում վերջավոր է։

Ցույց է տրված նաև, որ եթե

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

ապա, ամենուրեք $[0,\ 2\pi]$ հատվածի վրա, բացի գույն մի բազմությունից, որի $(1+\alpha)$-ունակությունը զերո է, $B_\alpha(z;\ z_k)$ արտադրյալը ունի վերջավոր շառավղային փոփոխություն։

V. S. ZAKARIAN

RADIAL LIMITS AND RADIAL VARIATIONS OF $B_\alpha(z;\ z_k)$ PRODUCTS

Summary

It is proved in the paper, that if the sequence $\{z_k\}_1^\infty$ satisfied the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

then the radial limit and the radial variance of the product $B_\alpha(z;z_k)$ at the point $e^{i\theta}$ are both finite.

It is proved also, that under the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

the $B_\alpha(z;\ z_k)$ product has finite variance in every point of $[0,\ 2\pi]$, except, may be, of a set whose $(1+\alpha)$ capacity is equal zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otto Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12, 1942, 169—182.
2. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
4. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, Математика, 2, № 5, 1967, 275—294.
6. *G. T. Cargo.* The radial images of Blaschke products, The Journal of the London Mathematical Society, vol. 36, 1961, 424—430.
7. *G. T. Cargo.* The segmental variation of Blaschke products, Duke Mathematical Journal, vol. 30, 1963, 143—149.
8. *W. Rudin.* The radial variation of analytic functions, Duke Mathematical Journal, vol. 22, 1955, 235—242.
9. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.
10. *О. А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, том 1, М., 1965.
11. *Н. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

3, № 1, 1968

Р. Л. ШАХБАГЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

1°. В полупространстве $R^n_+ = R^n\ (x;\ x_n > 0)$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\mathfrak{M}u \equiv u(x) - \int\limits_{R^n_+} K(x, x-y)\ u\ (y)\,dy = f(x),\ x \in R^n_+ \cdot \tag{1}$$

Ядро $K(x, z)$ уравнения (1) предполагается гладким по x и принадлежащим пространству $L_1(R^n)$ по z при всех x (точная формулировка условий, налагаемых на функцию $K(x, z)$ приводится в п. 2°).

Теория интегральных уравнений вида (1) на полупрямой с ядрами, принадлежащими пространству $L_1(-\infty, +\infty)$ и зависящими только от разности аргументов, развита М. Г. Крейном в [1].

В работах [2], [3], [4] некоторые результаты, полученные в [1], перенесены на случай многомерных интегральных уравнений вида (1), рассматриваемых в полупространстве R^n_+, с ядрами, зависящими только от разности аргументов. Построение общей теории таких уравнений в известном смысле проще построения теории соответствующих одномерных уравнений, ибо, как выяснено*, при $n > 1$ индекс уравнения (1) равен нулю, если ядро его $K(z) \in L_1(R^n)$ подчинено некоторым естественным ограничениям.

Теория уравнений в свертках вида (1) в ограниченной области с положительно однородными по ξ символами $A(x, \xi)$ изложена в работе М. И. Вишика и Г. И. Эскина [5].

В настоящей заметке обобщаются результаты, полученные в [3], [4], относящиеся к интегральным уравнениям вида (1), а именно, при довольно естественных ограничениях, налагаемых на их ядра, доказывается, что оператор $\mathfrak{M}$, задаваемый левой частью уравнения (1), является Ф-оператором в пространстве $E(R^n_+)$**.

2°. Пусть ядро $K(x, z)$ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) Существует неотрицательная функция $h(z)$, принадлежащая пространству $L_1(R^n)$, такая, что

$$|K(x, z)| \leqslant h(z) \tag{2}$$

для всех $x \in R^n_+$, $z \in R^n$;

* См. [2], [3].

** Определение пространства E будет дано ниже.

б) Ядро $K(x, z)$ непрерывно относительно x при любом z. Существует число $l>0$ такое, что при $|x| \geqslant l$ $K(x, z) = K_0(z)$*, где $K_0(z)$—суммируемая в пространстве R^n функция, удовлетворяющая условию

$$\widetilde{K}_1(\xi) = 1 - \widetilde{K}_0(\xi) \neq 0 \text{ при всех } \xi \in \widetilde{R}^n, \tag{3}$$

где через $\widetilde{K}_0(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функции $K_0(z)$.

Тогда, как доказано в [3], справедлива

Теорема 1. *Пусть ядро $K_0(z)$ уравнения*

$$u(x) - \int\limits_{R^n_+} K_0(x-y)\, u(y)\, dy = f(x) \tag{4}$$

удовлетворяет условию (3). *Тогда при любой правой части $f(x) \in L_2(R^n_+)$ уравнение* (4) *имеет одно и только одно решение $u(x)$, принадлежащее пространству $L_2(R^n_+)$. Оператор, определяемый левой частью уравнения* (4), *осуществляет гомеоморфное отображение пространства $L_2(R^n_+)$ на себя.*

Замечание. В формулировке теоремы 1 мы ограничились рассмотрением уравнения (4) в пространстве $L_2(R^n_+)$. Можно доказать, воспользовавшись результатом работы [2], существование и единственность решения уравнения (4) в ряде других функциональных пространств, а именно, в пространстве $E(R^n_+)$. Под $E(R^n_+)$ понимается одно из пространств:

$$L_p(R^n_+)\ (p \geqslant 1),\ C_0(R^n_+) \subset C(R^n_+) \subset M^u(R^n_+) \subset M^c(R^n_+) \subset M(R^n_+).$$

Перечисленные пространства определяются аналогично одномерному случаю [1] с естественными видоизменениями.

в) Функция $K(x, z)$ равномерно непрерывна относительно x в метрике пространства $L_1(R^n)$, то есть для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $x \in S_l$ (S_l — шар $|x|<l$)

$$\int\limits_{R^n} |K(x+h, z) - K(x, z)|\, dz < \varepsilon \text{ при } |h|<\delta; \tag{5}$$

г) Для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ такое, что

$$\int\limits_{R^n} |K(x, z+h) - K(x, z)|\, dz < \varepsilon \tag{6}$$

при всех $x \in S_l$, $|h|<\delta$.

---

* Вместо этого достаточно было бы считать, что существует $\lim\limits_{|x|\to\infty} K(x, z) = K_0(z)$, причем разность $K(x, z) - K_0(z)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|$.

Теорема 2. *Пусть ядро $K(x, z)$ уравнения* (1) *удовлетворяет условиям* а) — г). *Тогда оператор* $\mathfrak{M}$, *действующий в пространстве* $E(R^n_+)$, *является* Ф-*оператором.*

Доказательство. Для простоты приведем доказательство теоремы в случае пространства $L_2(R^n_+)$, после чего совершенно очевидным становится доказательство теоремы в случае пространства E. Воспользовавшись условием (2), легко доказать, что интеграл, входящий в левую часть уравнения (1), является ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_2(R^n_+)$.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$u(x) - \int\limits_{R^n_+} [K(x, x-y) - K_0(x-y)]\, u(y)\, dy -$$

$$- \int\limits_{R^n_+} K_0(x-y)\, u(y)\, dy = f(x), \quad x \in R^n_+ \cdot \tag{1*}$$

Введем обозначения:

$$A_0 u(x) = \int\limits_{R^n_+} K_0(x-y)\, u(y)\, dy,$$

$$A_1 u(x) = \int\limits_{R^n_+} [K(x, x-y) - K_0(x-y)]\, u(y)\, dy.$$

Оператор $(E - A_0)$ (E — оператор тождественного преобразования), действующий в пространстве $L_2(R^n_+)$, в силу условия б) теоремы, обратим. Рассмотрим оператор

$$A_1 u = \int\limits_{R^n_+} K_1(x, x-y)\, u(y)\, dy,$$

где $K_1(x, z) = K(x, z) - K_0(z)$. Очевидно, что $K_1(x, z) \equiv 0$ при $|x| > l$. Докажем полную непрерывность оператора A_1. Установим сначала его ограниченность. Обозначим через $K_2(z) = \max\limits_{x \in S_l} |K_1(x, z)|$.

Имеем

$$|A_1 u| \leqslant \int\limits_{R^n} |K_2(x-y)|\, |u(y)|\, dy,$$

откуда, в силу неравенства Минковского, получим

$$\|A_1 u\|_{L_2(S_l)} \leqslant \|K_2\|_{L_1(R^n)} \|u\|_{L_2(R^n_+)}, \tag{7}$$

что свидетельствует о непрерывности оператора A_1, как оператора, действующего из пространства $L_2(R_+^n)$ в пространство $L_2(S_l)$.

Рассмотрим ограниченное в $L_2(R_+^n)$ семейство функций $\{u(x)\}$

$$\|u\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant M, \tag{8}$$

где M — некоторая константа, и докажем равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства $\{A_1 u\}$. Равномерная ограниченность этого семейства непосредственно вытекает из оценки (7). Для доказательства равностепенной непрерывности $\{A_1 u\}$ рассмотрим разность

$$v(x+h) - v(x) = A_1 u(x+h) - A_1 u(x) =$$

$$= \int_{R_+^n} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x-y)]\, u(y)\, dy.$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$v(x+h) - v(x) = \int_{R_+^n} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)]\, u(y)\, dy +$$

$$+ \int_{R_+^n} [K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)]\, u(y)\, dy \equiv J_1(x) + J_2(x), \tag{9}$$

$|x| < l$. Оценим первое слагаемое выражения (9).

Имеем

$$|J_1(x)| \leqslant \int_{R^n} |K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)|\, |u(y)|\, dy =$$

$$= \int_{R^n} |K_1(x+h, z) - K_1(x, z)|\, |u(x+h-z)|\, dz \leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x+h, z) - K_1(x, z)|\}\, |u(x+h-z)|\, dz.$$

Из (10), учитывая условие (5) и неравенство (8), получаем оценку

$$\|J_1\|_{L_2(S_l)} \leqslant \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x+h, z) - K_1(x, z)|\}\, \|u\|_{L_2(R_+^n)}\, dz <$$

$$< \varepsilon \|u\|_{L_2(R_+^n)} \leqslant \varepsilon M \tag{11}$$

при $|h| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$; $\|u\|_{L_2(R_+^n)}$ — норма функции u в пространстве $L_2(R_+^n)$ по x. При выводе последнего неравенства мы воспользовались свойством инвариантности L_2-нормы относительно сдвига.

Перейдем к оценке второго слагаемого выражения (9).
Имеем

$$|J_2(x)| \leqslant \int\limits_{R^n} |K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)|\, |u(y)|\, dy =$$

$$= \int\limits_{R^n} |K_1(x, z+h) - K_1(x, z)|\, |u(x-z)|\, dz \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant \int\limits_{R^n} \max_{x\in S_l} \{|K_1(x, z+h) - K_1(x, z)|\}\, |u(x-z)|\, dz.$$

Воспользовавшись условием (6) и (8), получим из (12) аналогично предыдущему

$$\|J_2\|_{L_2(S_l)} \leqslant \int\limits_{R^n} \max_{x\in S_l} \{|K_1(x, z+h) - K_1(x, z)|\}\, \|u\|_{L_2(R^n_+)}\, dz <$$

$$< \varepsilon \|u\|_{L_2(R^n_+)} \leqslant \varepsilon M \tag{13}$$

при $|h| < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Если теперь взять в качестве $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то при $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)$ из (11) и (13) окончательно получим

$$\|v(x+h) - v(x)\|_{L_2(S_l)} \leqslant 2\varepsilon M = \varepsilon_1,$$

что свидетельствует о том, что семейство функций $\{v(x) = A_1 u(x)\}$ равностепенно непрерывно. Таким образом, мы доказали, что оператор $\mathfrak{M}$, действующий из пространства $L_2(R^n_+)$ в пространство $L_2(S_l)$, вполне непрерывен. Этим и завершается доказательство теоремы, поскольку мы получили представление оператора $\mathfrak{M}$ в виде суммы обратимого и вполне непрерывного операторов, откуда, согласно теореме И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [6], следует, что оператор $\mathfrak{M}$ является Ф-оператором. Теорема доказана.

Следствие. *Индекс Ф-оператора $\mathfrak{M}$ равен нулю.*

Случай $n=1$. Используя теорему М. Г. Крейна (см. [1], § 9) можно получить аналог теоремы 2. А именно, справедлива

Теорема 3. *Пусть ядро $K(t, z)$ уравнения*

$$x(t) - \int\limits_0^\infty K(t, t-s)\, x(s)\, ds = f(t),\ t \in (0, \infty) \tag{14}$$

удовлетворяет условиям теоремы 2, а функция $K_0(z) = K(t, z)$ при $t > l$ удовлетворяет дополнительно условиям

$$K_0(z) \in L_1(-\infty, \infty),\ 1 - \widetilde{K}_0(\lambda) \neq 0 \text{ при } -\infty < \lambda < +\infty,$$

$$\nu = \operatorname{ind}(1 - \widetilde{K}_0(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} [\arg(1 - \widetilde{K}_0(\lambda))]_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} \leqslant 0$$

($\widetilde{K}_0(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $K_0(z)$).

Тогда оператор, определяемый левой частью уравнения (14), *является* Ф-*оператором в пространстве* $E(0, \infty)$ *с индексом, равным* $|\nu|$.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 12.V.1967

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԳՅԱՆ

ԾԱԼՔԻ ՏԻՊԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՍԻՄՎՈԼՆԵՐՈՎ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է ծալքի տիպի ինտեգրալ հավասարումների՝ մի բավականաչափ լայն դասի լուծման ուսումնասիրությանը։

Պարզվում է, որ բավական ընդհանուր պայմանների բավարարման դեպքում, ուսումնասիրվող հավասարումներին համապատասխանող օպերատորները հանդիսանում են Նետերի տիպի օպերատորներ մի շարք ֆունկցիոնալ տարածություններում, որոնք բնական ձևով կապված են հավասարումների դիտարկվող դասի հետ։

R. L. SHAKHBAGIAN

INTEGRAL EQUATIONS IN CONVOLUTIONS WITH VARIABLE SYMBOL

Summary

The paper is devoted to the problem of so called normal solvability of a class of integral equations of convolution type with variable symbol.

For such an equations under rather general assumptions imposed on their kernels, the noetherity of the corresponding operators in a number of functional spaces is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.
2. *Л. С. Гольденштейн* и *И. Ц. Гохберг.* О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов и его дискретном аналоге, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 9—12.
3. *Р. Л. Шахбагян.* Уравнения в свертках в полупространстве, Матем. сборник, 70 (112): 2, 1966, 266—296.
4. *Р. Л. Шахбагян.* Интегральные уравнения в полупространстве, Доклады АН Армянской ССР, XLII, № 1, 1966, 9—14.
5. *М. И. Вишик* и *Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XIX, вып. 3 (123), 1965, 99—161.
6. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—72.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

Ю. Ф. ПЯТАК

О ГЛАДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Рассмотрим в комплексной плоскости конечную односвязную область D, ограниченную контуром Ляпунова Γ с показателем α. $0<\alpha<1$ (т. е. $D\in A_\alpha'$; [3], гл. 1, § 1), и пусть $\bar{D}=D\cup\Gamma$. На границе Γ задана функция $\varphi(t)$, относительно которой мы предполагаем, что $\varphi(t)\in C_\alpha^0(\Gamma)$, т. е.

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|<S|t_1-t_2|^\alpha,\ t_1,\ t_2\in\Gamma,\ 0<\alpha<1. \tag{1}$$

Пусть $(n\geqslant 0)$

$$M_n(z,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\left(\frac{\bar{t}-\bar{z}}{t-z}\right)^n\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt, \tag{2}$$

$$\xi+i\eta=t\in\Gamma,\quad x+iy=z\in D$$

и

$$P_n(x,y;\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{(y-\eta)^n\varphi(t)}{[\xi-x+\lambda_j(\eta-y)]^{n+1}}\,dt,\ \mathrm{Im}\,\lambda_j\neq 0. \tag{3}$$

Поскольку $\varphi(t)\in C_\alpha^0(\Gamma)$, $M_n(z,\varphi)$ и $P_n(x,y;\varphi)$ определимы в каждой точке области D. Под $M_n(t_0,\varphi)$, когда $t_0\in\Gamma$, будем понимать граничное значение этой функции (если оно существует) в точке t_0, когда $z\to t_0$ из D. Аналогично определяется $P_n(t_0,\varphi)$ при $t_0\in\Gamma$.

Основной результат статьи заключается в доказательстве того факта, что $M_n(z,\varphi)\in C_\alpha^0(\bar{D})$, $P_n(x,y;\varphi)\in C_\alpha^0(\bar{D})$.

Ввиду того, что $D\in A_\alpha^1$, внутренняя нормаль к Γ меняется непрерывно, когда $t\in\Gamma$ пробегает весь контур. Более того, в D можно выделить такую окрестность Γ ширины $\varepsilon=\varepsilon(\Gamma)$, что каждая точка $z\in D$ в этой окрестности будет лежать на одной и только одной нормали, проходящей через нормальную проекцию точки z на Γ (мы называем нормальной проекцией точки $z\in D$ на Γ точку $z'\in\Gamma$ такую, что нормаль, проводимая в точке z', проходит через z). Обозначим эту ε-окрестность через D', причем D' не содержит Γ.

Очевидно, в $D-(D'\cup\Gamma)$ функции (2) и (3) сколь угодно много раз дифференцируемы, и поэтому не вызывает сомнений, что при любом n

$$M_n(z, \varphi) \in C_\alpha^0(D-(D' \cup \Gamma)), \ P_n(x, y; \varphi) \in C_\alpha^0(D-(D' \cup \Gamma)). \quad (4)$$

Остается доказать это свойство для области $D' \cup \Gamma \equiv \overline{D}'$.

§ 1. Случай $n = 1$

Используя сделанное предположение относительно гладкости Γ, можно без труда показать, что для любых двух точек z_1 и z_2 из D' справедливо следующее неравенство:

$$|z_2' - z_1'| \leqslant A(\Gamma)\, |z_2 - z_1|; \quad (1.1)$$

здесь $A(\Gamma)$ — постоянная, зависящая только от вида контура Γ, $z_1' \in \Gamma$, $z_2' \in \Gamma$ — нормальные проекции точек z_1 и z_2.

Интеграл

$$M_1(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \ z \in D' \quad (2.1)$$

представим в виде

$$M_1(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(z')}{t - z} + \frac{\varphi(z')}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \frac{dt}{t - z} \equiv$$

$$\equiv \Psi_1(z, \varphi) + \varphi(z')\, J_1(z). \quad (3.1)$$

В (3.1) введены следующие обозначения: z' — нормальная проекция точки z на Γ (это обозначение для нормальной проекции сохраняется всюду в дальнейшем), причем, в силу выбора области D', z' является однозначной функцией z в D',

$$\Psi_1(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(z')}{t - z}\, dt, \quad (4.1)$$

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \cdot \frac{dt}{t - z}. \quad (5.1)$$

Используя (1) и (1.1) получаем, что

$$|\varphi(z_2') - \varphi(z_1')| \leqslant B(\Gamma)\, |z_2 - z_1|^\alpha, \quad (6.1)$$

т. е. $\varphi(z'(z)) \in C_\alpha^0(\overline{D}')$.

Что же касается $J_1(z)$, то для $z \in D'$ имеем

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \frac{dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\overline{t}}{(t - z)^2}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(\overline{t}')^2}{t - z}\, dt.$$

Но $\dfrac{d\overline{t}}{dt} \in C_\alpha^0(\Gamma)$, ибо $D \in A_\alpha^1$, поэтому на основании теории интеграла типа Коши, развитой в [1], можно утверждать, что

$$J_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\cdot\frac{dt}{t-z}\in C^0_\alpha(\overline{D}'). \qquad (7.1)$$

Из (6.1) и (7.1) следует, что

$$\varphi(z'(z))\cdot J_1(z)\in C^0_\alpha(\overline{D}'). \qquad (8.1)$$

Остается доказать это утверждение для $\Psi_1(z,\varphi)$.

Предварительно сделаем следующее замечание. Легко видеть, что функция

$$\varphi_1(t,z')=\frac{\overline{t}-\overline{z}'}{t-z}[\varphi(t)-\varphi(z')]\in C^0_\alpha(\Gamma)\ \text{по } t \text{ и } z,$$

если $\varphi(t)\in C^0_\alpha(\Gamma)$. В этом случае, ввиду регулярности (4.1), вспоминая (8.1), получим, что

$$M_1(t_0,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}\cdot\frac{\varphi(t)}{t-t_0}\,dt\ \in C^0_\alpha(\Gamma),\ t_0\in\Gamma, \qquad (9.1)$$

причем

$$\Psi_1(t_0,\varphi)=\lim_{\substack{z\to t_0\in\Gamma\\ z\in D'}}\Psi_1(z,\varphi)$$

равномерно относительно положения t_0 на Γ (t_0 — произвольная точка на Γ).

Докажем теперь, что

$$|\Psi_1(z_2,\varphi)-\Psi_1(z_1,\varphi)|<C\,|z_2-z_1|^\alpha,\ 0<\alpha<1, \qquad (10.1)$$

где C — постоянная. Рассмотрим случай, когда контур Γ содержит прямолинейный участок, границами которого являются точки R_1 и R_2 ($R_1<R_2$). Тогда, в соответствии с определением, мы можем взять в качестве части D', соответствующей этому прямолинейному участку, множество тех точек $z\in D$, нормальные проекции которых удовлетворяют неравенству (δ — достаточно малое фиксированное число) $R_1+\delta<$ $<z'<R_2-\delta$.

Ниже мы докажем справедливость (10.1) в окрестности выделенного прямолинейного участка, а затем обобщим это утверждение на случай, когда $D\in A'_\alpha$ — произвольный гладкий контур.

Выше мы уже установили, что $J_1(z)\in C^0_\alpha(\overline{D})$. Поэтому

$$\max_{z\in\overline{D}'}|J_1(z)|<\infty.$$

Так как

$$|\Psi_1(z_2,\varphi)-\Psi_1(z_1,\varphi)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{t-z_2}\cdot\frac{\varphi(t)-\varphi(z_2')}{t-z_2}\,dt-\int_{\Gamma}\frac{\overline{t}-\overline{z}_1}{t-z_1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\varphi(t)-\varphi(z_1')}{t-z_1}\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_1}{(t-z_1)^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\ \right|+$$

$$+|\varphi(z_2')-\varphi(z_1')|\cdot\max_{z_1\in\overline{D'}}|J_1(z_1)|<C_2(\Gamma)|z_2-z_1|^\alpha+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\overline{t}-\overline{z}_1}{(t-z_1)^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|, \tag{11.1}$$

то (10.1) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{t-z_2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_1}{t-z_1}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|<C_3|z_2-z_1|^\alpha. \tag{12.1}$$

1. Пусть $z_2\in D'$, $z_1\equiv z_2'\in\Gamma$. Преобразуем выражение $\dfrac{1}{(t-z_2')^2}$:

$$\frac{1}{(t-z_2')^2}=\frac{1}{(t-z_2+z_2-z_2')^2}=\frac{1}{(t-z_2)^2}\left[1+\frac{1}{\left(1+\dfrac{z_2-z_2'}{t-z_2}\right)^2}-1\right]=$$

$$=\frac{1}{(t-z_2)^2}\left[1+\frac{2-\dfrac{z_2'-z_2}{t-z_2}}{\left(1-\dfrac{z_2'-z_2}{t-z_2}\right)^2}\cdot\frac{z_2'-z_2}{t-z_2}\right]. \tag{13.1}$$

Пусть теперь γ_1 — все те точки Γ, для которых

$$|t-z_2'|<l\,|z_2-z_2'|, \tag{14.1}$$

а γ_2 — точки Γ, для которых

$$|t-z_2'|\geqslant l\,|z_2-z_2'|. \tag{15.1}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\left|\int_\Gamma\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_1}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_2}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|. \tag{16.1}$$

Если выполняется (15.1) (l — фиксированное число, $1<l<\infty$), то для любых $z_2\in\overline{D'}$ и $z_2'\in\Gamma$

$$|t-z_2|^2=|t-z_2'|^2+|z_2-z_2'|^2\geqslant|t-z_2'|^2, \tag{17.1}$$

$$\left|\frac{z_2-z_2'}{t-z_2}\right|^2\leqslant\left|\frac{z_1-z_2'}{t-z_2'}\right|^2\leqslant\frac{1}{l^2}<1.$$

Поэтому, ввиду (13.1)

$$\left|\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right|\leqslant\frac{|z_2-z_2'|}{|t-z_2|^2}+\frac{|t-z_2'|\cdot|z_2-z_2'|}{|t-z_2|^3}\,Q, \tag{18.1}$$

где, как легко проверить, $Q=\dfrac{3l^2}{(l-1)^2}<\infty$.

Из оценок (17.1) и (18.1) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_2}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|\leqslant\frac{|z_2-z_2'|}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{|\varphi(t)-\varphi(z_2')|}{|t-z_2|^2}|dt|+$$

$$+\frac{Q\,|z_2-z_2'|}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{|t-z_2'|\,|\varphi(t)-\varphi(z_2')|}{|t-z_2|^3}|dt|<A\,\frac{|z_2-z_2'|}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{|t-z_2'|^\alpha}{|t-z_2'|^2}\,d|t-z_2'|+$$

$$+A\,Q\,\frac{|z_2-z_2'|}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{|t-z_2'|^\alpha}{|t-z_2'|^2}\,d|t-z_2'|; \tag{19.1}$$

вводя новую переменную $\lambda=|t-z_2'|$ и обозначая через N интеграл по криволинейной части контура Γ, который является ограниченной величиной, продолжаем оценивать (19.1):

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_2}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}_2'}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]dt\right|<-\frac{2A(1+Q)}{\pi(1-\alpha)}|z_2-z_2'|\int\limits_{l|z_2-z_2'|}^{R}d\lambda^{\alpha-1}+$$

$$+|z_2-z_2'|\,\frac{N}{2\pi}<|z_2-z_2'|\,\frac{N}{2\pi}+\frac{2A(1+Q)}{\pi(1-\alpha)}|z_2-z_2'|\cdot\left\{\frac{1}{l^{1-\alpha}|z_2-z_2'|^{1-\alpha}}-\frac{1}{R^{1-\alpha}}\right\}=$$

$$=\frac{|z_2-z_2'|^\alpha}{2\pi}\left\{\frac{4A(1+Q)}{(1-\alpha)\,l^{1-\alpha}}-|z_2-z_2'|^{1-\alpha}\left(\frac{1}{R^{1-\alpha}}-N\right)\right\}<C_4|z_2-z_2'|^\alpha. \tag{20.1}$$

Если же $|t-z_2'|<l\,|z_2-z_2'|$, то $|t-z_2|^2=|t-z_2'|^2+|z_2-z_2'|^2>$ $>|z_2-z_2'|^2$.

Откуда

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_1}\left[\frac{\overline{t}-\overline{z}_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\overline{t}-\overline{z}'_2}{(t-z_2')^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{|\varphi(t)-\varphi(z_2')|}{|t-z_2|}|dt|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{|\varphi(t)-\varphi(z_2')|}{|t-z_2'|}|dt|<4A\int\limits_0^{l|z_2-z_2'|}\frac{d\lambda}{\lambda^{1-\alpha}}\leqslant 4Al^\alpha|z_2-z_2'|^\alpha<C_3\,|z_2-z_2'|^\alpha. \tag{21.1}$$

Из полученных оценок (20.1) и (21.1) следует справедливость (12.1); поэтому, в силу (19.1),

$$|\Psi_1(z_2,\varphi)-\Psi_1(z_1,\varphi)|<C\,|z_2-z_2'|^\alpha=C\,|z_2-z_1|^\alpha. \tag{22.1}$$

Если же $z_1\in\Gamma$ не совпадает с нормальной проекцией точки z_2 на Γ, то

$$|\Psi_1(z_2,\varphi)-\Psi_1(z_1,\varphi)|\leqslant|\Psi_1(z_2,\varphi)-\Psi_1(z_2',\varphi)|+|\Psi_1(z_2',\varphi)-\Psi_1(z_1,\varphi)|. \tag{23.1}$$

Для первого слагаемого в правой части (23.1) справедливо (22.1); для второго слагаемого аналогичное утверждение вытекает из (9.1).

Итак, справедливость (10.1) доказана в случае, когда $z_1 \in \Gamma$, $z_2 \in D'$.

2. Пусть теперь $z_1 \in D'$, $z_2 \in D'$. Как уже говорилось ранее, этим двум точкам соответствуют нормальные проекции z_1' и z_2'.

Пусть

$$h = \max \{|z_1 - z_1'|, |z_2 - z_2'|\} \tag{24.1}$$

(на рис. 1 $h = |z_2 - z_2'|$).

Возможны следующие случаи:

а) $$|z_2 - z_1| \geqslant \frac{h}{k}, \tag{25.1}$$

б) $$|z_2 - z_1| < \frac{h}{k}, \tag{26.1}$$

k — фиксированное число, $1 < k < \infty$.

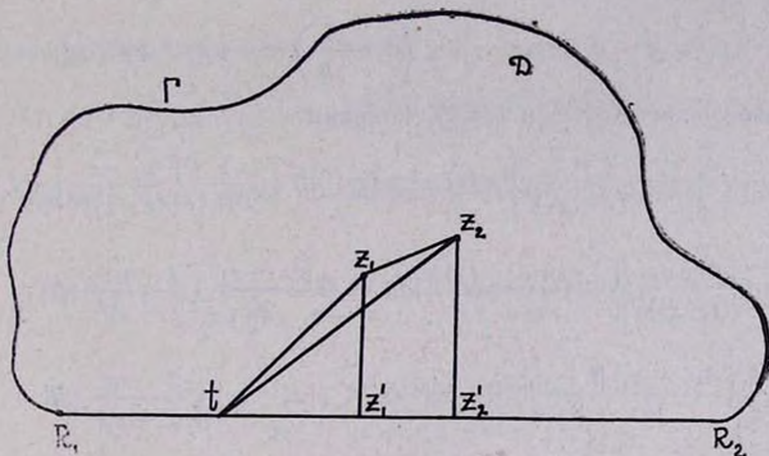

Рис. 1.

В случае а) неравенство (10.1) доказывается легко. Действительно, используя (22.1), получим

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leqslant |\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_2', \varphi)| + |\Psi_1(z_2', \varphi) - \Psi_1(z_1', \varphi)| +$$
$$+ |\Psi_1(z_1', \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leqslant C|z_2 - z_2'|^\alpha + C|z_1 - z_1'|^\alpha + B|z_2' - z_1'|^\alpha.$$

Воспользуемся (24.1), (25.1) и (1.1), имеем

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leqslant 2Ch^\alpha + BA(\Gamma)|z_2 - z_1|^\alpha < C_6|z_2 - z_1|^\alpha \tag{27.1}$$

и (10.1) доказано. Рассмотрим случай б). Докажем справедливость (12.1). Из (26.1) следует, что

$$\left|\frac{z_2 - z_1}{t - z_2}\right| < \frac{1}{k} < 1, \tag{28.1}$$

$$t \in \Gamma; \; z_1, \; z_2 \in D'.$$

Поэтому $\dfrac{1}{(t - z_1)^2}$ можно преобразовать так же, как это было сделано в (13.1), а именно

$$\frac{1}{(t-z_1)^2}=\frac{1}{(t-z_2)^2}\left[1+\frac{2-\dfrac{z_1-z_2}{t-z_2}}{\left(1-\dfrac{z_1-z_2}{t-z_2}\right)^2}\cdot\frac{z_1-z_2}{t-z_1}\right], \tag{29.1}$$

причем коэффициент при $(z_1-z_2)/(t-z_2)$ можно, ввиду (28.1), заменить константой $L=\dfrac{3k^2}{(k-1)^2}<\infty$.

С помощью (29.1) получаем

$$\left|\frac{\bar t-\bar z_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\bar t-\bar z_1}{(t-z_1)^2}\right|\leqslant\left|\frac{\bar z_1-\bar z_1}{(t-z_2)^2}\right|+L|z_2-z_1|\left|\frac{\bar t-\bar z_1}{(t-z_2)^3}\right|. \tag{30.1}$$

Замечая, что

$$|t-z_1|=|t-z_2+z_2-z_1|\leqslant\left(1+\frac{1}{k}\right)|t-z_2|<2\,|t-z_2|, \tag{31.1}$$

воспользовавшись (30.1) и (31.1), получим

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\bar t-\bar z_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\bar t-\bar z_1}{(t-z_1)^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left\{\left|\frac{\bar z_1-\bar z_2}{(t-z_2)^2}\right|+L|z_2-$$

$$-z_1|\left|\frac{\bar t-\bar z_1}{(t-z_2)^3}\right|\right\}|\varphi(t)-\varphi(z_2')|\,|dt|\leqslant A\frac{|z_2-z_1|}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{|t-z_2'|^\alpha}{|t-z_2|^2}|dt|+$$

$$+\frac{AL}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\frac{|z_2-z_1|\,|t-z_1|}{|t-z_2|^3}|t-z_2'|^\alpha|dt|<\mu|z_2-z_1|\int\limits_{\Gamma}\frac{|t-z_2'|^\alpha}{|t-z_2|^2}|dt|. \tag{32.1}$$

Так как, очевидно, $|t-z_2'|<C_7\,|t-z_2|$, то

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{|t-z_2'|^\alpha}{|t-z_2|^2}|dt|\leqslant\frac{C_8}{|z_2-z_2'|^{1-\alpha}}. \tag{33.1}$$

Из (26.1), (32.1) и (33.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\bar t-\bar z_2}{(t-z_2)^2}-\frac{\bar t-\bar z_1}{(t-z_1)^2}\right][\varphi(t)-\varphi(z_2')]\,dt\right|<C|z_2-z_1|^\alpha, \tag{34.1}$$

т. е. соотношение (12.1). Ввиду (11.1) и (34.1) убеждаемся в справедливости (10.1).

Итак, мы доказали (10.1) в том случае, когда Γ содержит прямолинейный участок и только для таких точек $z\in D'$, нормальные проекции которых лежат строго внутри этого прямолинейного участка. При этом можно заметить, что константа Гельдера, входящая в (11.1), зависит, ввиду (1.1), только от вида контура Γ и не зависит от выбора точек z_1 и z_2 из D'. Пусть теперь Γ — произвольный контур $(D\in A_\alpha^1)$, не обязательно содержащий прямолинейный участок. Выберем $N=N(\Gamma)$

и разобьем Γ на N частей точками $t_1, t_2, \cdots, t_N$ таким образом, чтобы на каждом участке $[t_j, t_{j+1}]$ $(j=1, 2, \cdots, N-1)$ значения функции $t(s)$, задающей контур Γ, мало отличались от прямой линии. Проводя в точках t_j нормали к Γ до пересечения с границей D', мы тем самым разобьем область $D' \cup \Gamma$ на N криволинейных четырехугольников. Для каждого из них, в силу построения и по определению области D', мы можем аналогичными вышеприведенным рассуждениями доказать неравенство (10.1). Ввиду конечности N неравенство (10.1) справедливо в $D' \cup \Gamma \equiv \overline{D}'$ с константой, зависящей от вида Γ.

Вспоминая (4) мы можем утверждать, что (10.1) справедливо во всей области $\overline{D}$ и ввиду (8.1) $M_1(z, \varphi) \in C_\alpha^0(\overline{D})$.

§ 2. Некоторые обобщения. Формулы Сохоцкого-Племеля

Рассмотрим теперь интеграл (2)

$$M_n(z, \varphi) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^n \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \Psi_n(z, \varphi) + \varphi(z') J_n(z). \qquad (1.2)$$

Здесь введены следующие обозначения (z' — нормальная проекция z на Γ):

$$\Psi_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^n \frac{\varphi(t)-\varphi(z')}{t-z}\,dt, \qquad (2.2)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^n \frac{dt}{t-z}\,. \qquad (3.2)$$

Если воспользоваться обозначением (2.2), то нетрудно проверить, что

$$J_n(z) = \left(\frac{d\overline{t}}{dt}\right)^n_{t=z'} + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_{n-1-k}\left(z, \frac{d\overline{t}}{dt}\right)\left(\frac{d\overline{t}}{dt}\right)^k_{t=z'}\,. \qquad (4.2)$$

Соотношения (1.2) и (4.2) дают нам возможность перенести утверждение § 1 на случай $n > 1$, ибо метод доказательства остается тем же самым. Сформулируем результат.

Теорема 1. *Пусть* Γ*—гладкий замкнутый контур* $(D \in A_\alpha^1)$, $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$, D *— конечная односвязная часть плоскости, ограниченная* Γ. *Функция*

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left(\frac{\overline{t}-\overline{z}}{t-z}\right)^n \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt \quad (n \geqslant 0) \qquad (5.2)$$

принадлежит классу $C_\alpha^0(\overline{D})$ *с константой Гельдера, зависящей от вида контура* Γ*; под* $M_n(z_0, \varphi)$ *при* $z_0 \in \Gamma$ *понимается соответствующее граничное значение* $M_n^+(z_0, \varphi)$.

Перейдем к рассмотрению интеграла (3). Пусть $\zeta=(x+\lambda_j y)\in D$, $\xi+\lambda_j\eta=\tau\in\Gamma$, $\operatorname{Im}\lambda_j\neq 0$.

Разность $y-\eta$, фигурирующую в числителе (3), можно представить следующим образом: $y-\eta=\dfrac{(\bar\tau-\bar\zeta)-(\tau-\zeta)}{\lambda_j-\bar\lambda_j}$.

и поэтому ядро интеграла (3) принимает вид

$$\frac{(y-\eta)^n}{[\xi-x+\lambda_j(\eta-y)]^{n+1}}=\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\cdot\frac{[(\bar\tau-\bar\zeta)-(\tau-\zeta)]^n}{[\tau-\zeta]^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\cdot\frac{1}{\tau-\zeta}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\left(\frac{\bar\tau-\bar\zeta}{\tau-\zeta}\right)^{n-k}. \qquad (6.2)$$

Следовательно, (3) приводится к виду

$$P_n(x,y;\varphi)=\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{\bar\tau-\bar\zeta}{\tau-\zeta}\right)^{n-k}\frac{\varphi(t)}{\tau-\zeta}\,dt.$$

Если совершить теперь линейное преобразование координат

$$x+\lambda_j y=X+iY\equiv Z,$$

$$\xi+\lambda_j\eta=U+iV\equiv T, \qquad (7.2)$$

то, поскольку $\operatorname{Im}\lambda_j\neq 0$, очевидно, что это линейное преобразование является неособенным и сохраняющим гладкость. Область D при этом перейдет в область Ω, граница Γ — в некоторую кривую R, которая будет границей Ω, причем $R\in A_\alpha^1$. Ясно также, что (7.2) сохраняет прямые и углы между ними.

В таком случае

$$P_n(x,y;\varphi)=\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{\bar\tau-\bar\zeta}{\tau-\zeta}\right)^{n-k}\frac{\varphi(t)}{\tau-\zeta}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{\bar T-\bar Z}{T-Z}\right)^{n-k}\frac{\varphi_2(T)}{T-Z}\cdot\frac{dt}{dT}\,dT\equiv \qquad (8.2)$$

$$\equiv\frac{1}{(\bar\lambda_j-\lambda_j)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\,W_{n-k}(Z,\varphi),$$

где $\varphi_2(T)\equiv\varphi(t(T))$, а через $W_{n-k}(Z,\varphi)$ обозначен интеграл

$$W_{n-k}(Z,\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\frac{\bar T-\bar Z}{T-Z}\right)^{n-k}\cdot\frac{\varphi_2(T)}{T-Z}\,\frac{dt}{dT}\,dT. \qquad (9.2)$$

Функция dt/dT, ввиду предположенной гладкости контура Γ и сказанного относительно преобразования (7.2), принадлежит классу $C_\alpha^0(R)$.

Используя (8.2), (9.2) и теорему 1, убеждаемся, что справедлива

Теорема 2. *Пусть D — конечная односвязная часть плоскости, ограниченная гладким контуром $D \in A_\alpha^1$, $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$. Тогда функция*

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{(y-\eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^{n+1}} dt$$

при $n \geqslant 0$ принадлежит классу $C_\alpha^0(\overline{D})$, причем под значениями этого интеграла в точках границы Γ следует понимать соответствующие граничные значения (предел изнутри области D), которые мы будем обозначать $P_n^+(\xi, \eta; \varphi)$.

Из теорем 1 и 2 можно получить такое следствие: если $D \in A_\alpha^1$ и $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$, то интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \left(\frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z}\right)^n \varphi(t)\, dt, \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{(y-\eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^n} dt$$

при $n \geqslant 1$ принадлежат классу $C_\alpha^1(\overline{D})$.

Докажем справедливость следующих соотношений:

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} M_n(z, \varphi) \equiv M_n^+(t_0, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}\right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2} \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^n_{t = t_0}, \tag{10.2}$$

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} P_n(x, y; \varphi) \equiv P_n^+(\xi_0, \eta_0; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{(y - \eta_0)^n \varphi(t)}{[\xi - \xi_0 + \lambda_j(\eta - \eta_0)]^{n+1}} dt +$$

$$+ \frac{\varphi(t_0)}{2(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \left(1 - \frac{d\overline{T}}{dT}\right)^n \frac{dt}{dT}\bigg|_{t = t_0}, \tag{11.2}$$

где сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим сначала (10.2). Ввиду (1.2) и (4.2)

$$M_n(z, \varphi) = \Psi_n(z, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^{n} \Psi_{n-1-k}\left(z, \frac{d\bar{t}}{dt}\right)\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^k_{t = t_0} + \varphi(t_0) \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^n_{t = t_0}, \tag{12.2}$$

$$\lim_{\substack{z \to t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} M_n(z, \varphi) = \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^{n} \Psi_{n-1-k}\left(t_0, \frac{d\bar{t}}{dt}\right)\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^k_{t = t_0} +$$

$$+ \varphi(t_0) \left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^n_{t = t_0}. \tag{13.2}$$

Главное же значение для $M_n(t_0, \varphi)$, как легко проверить, вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$M_n(t_0, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0}\right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt =$$

$$= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\bar{t} - \bar{t}_0)^n}{(t - t_0)^{n+1}} dt = \tag{14.2}$$

$$= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \left[- n \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \Bigg|_{\Gamma_\varepsilon} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^{n-1} \frac{\frac{d\bar{t}}{dt}}{t - t_0} dt \right] =$$

$$= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) M_{n-1}\left(t_0, \frac{d\bar{t}}{dt}\right).$$

Применяя (14.2) к интегралам M_{n-k} $(k = 1, 2, \cdots, n)$, получим следующую формулу для главного значения:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt = \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^{n} \Psi_{n-1-k}\left(t_0, \frac{d\bar{t}}{dt}\right) \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^k_{t=t_0} +$$

$$+ \frac{\varphi(t_0)}{2} \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^n_{t=t_0}. \tag{15.2}$$

Внося (15.2) в (13.2), получаем (10.2).

Обращаясь к (11.2), мы замечаем из (8.2), что $P_n(x, y; \varphi)$ есть линейная комбинация интегралов типа (2). Поэтому, используя (10.2) и производя суммирование, получаем (11.2).

Теоремы 1 и 2 о гладкости функций $M_n(z, \varphi)$ и $P_n(x, y; \varphi)$ $(n \geqslant 1)$ играют в теории эллиптических систем примерно такую же роль, (см. [4]), какую играет аналогичная теорема для интеграла типа Коши в теории эллиптических систем вида

$$\Delta u + a u_x + b u_y + c u = 0.$$

Настоящая заметка была написана по предложению Н. Е. Товмасяна. Автор искренне благодарит его за постоянное внимание и многочисленные советы.

Институт математики
Сибирского отделения АН СССР

Поступило 4.II.1967

Յ. Ֆ. ՊՅԱՏԱԿ

ՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԿՈՇՈՒ ՏԻՊԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԻ ՈՂՈՐԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկենք վերջավոր միակապ D *տիրույթը, սահմանափակված* $\Gamma \in A^1_\alpha$ *եզրագծով և նշանակենք* $\bar{D} = D \cup \Gamma$. Γ *եզրագծի վրա տրված է* $\varphi(t) \in C^0_\alpha(\Gamma)$ *ֆունկցիան։*

Դիցուք $(n > 0)$

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

$$t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad z = x + iy \in D,$$

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda j\, (\eta - y)]^{n+1}}, \quad \operatorname{Im} \lambda j \neq 0.$$

Հոդվածում ապացուցված է, որ $M_n(z, \varphi) \in C_\alpha^0(\overline{D})$, $P_n(x, y; \varphi) \in C_\alpha^0(\overline{D})$ *և բերված են բանաձևեր նշված ֆունկցիաների սահմանային արժեքների համար։*

Yu. F. PJATAK

A SMOOTHNESS IN THE CLOSED DOMAIN OF CAUCHY TYPE INTEGRAL ANALOGUES

Summary

Consider a finite simply connected domain D, bounded by the curve $\Gamma \in A_\alpha^1$ and denote $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

For $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$ we introduce

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{\overline{t} - \overline{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt,$$

$$t = (\xi + i\eta) \in \Gamma, \quad x + iy = z \in D,$$

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j (\eta - y)]^{n+1}}\, dt, \quad \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0.$$

It is proved in the article, that $M_n(z, \varphi) \in C_\alpha^0(\overline{D})$, $P_n(x, y; \varphi) \in C_\alpha^0(\overline{D})$. The formulae are presented for the above mentioned functions' boundary values.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, Москва, 1962.
2. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
3. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка Москва, 1966.
4. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задачи для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, II, № 1 1966.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
3, № 1, 1968

В. В. ЮРАШЕВ

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ ГЕОМЕТРИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ В ОБЛАСТИ $D\subset C^n$ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В работе [2] Б. А. Фуксом была получена оценка кривизны Риччи бергмановой метрики для систем $\{\varphi_\sigma(Z)\}$ голоморфных функций, замкнутых в классе $L^2(D)$ и ортонормированных по отношению к области D (здесь D — ограниченная область пространства C^n_Z, $Z=(z^1\cdots z^n)$ и $L_2(D)$ — класс голоморфных в D функций $f(Z)$, для которых $\int\limits_D |f(Z)|^2 dV_Z<+\infty$ (см. [1], стр. 76—96). Оказывается, что всегда $\rho<n+1$, где ρ — кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U=(u^1,\cdots,u^n)$. Если мы не будем допускать замкнутость и ортонормальность последовательности $\{\varphi_\alpha\}$, то, как будет показано, кривизна Риччи $\rho\leqslant n+1$. Кроме того, область D не предполагается ограниченной. Заметим, что аналогичный результат был получен Хуа-Ло-Кэном для кривизны Римана R (см. [4]). Он обобщил результаты Б. А. Фукса (см. [3]), показавшего, что для бергмановой метрики в ограниченной области $D\subset C^n_Z$ в любой точке $Z\in D$ по произвольному аналитическому направлению $R<2$. Если не допускать замкнутость и ортонормальность последовательности $\{\varphi_\alpha\}$ и не предполагать ограниченность области D, то, как показал Хуа-Ло-Кэн, $R\leqslant 2$.

2. О метрике с фундаментальным тензором $T_{i\bar{j}}$

Рассмотрим в области D последовательность $\{\varphi_\alpha(Z)\}$ голоморфных функций, и пусть ряд

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\varphi_\alpha(Z)\overline{\varphi_\alpha(Z)}=K(Z,\overline{Z}) \tag{2.1}$$

равномерно сходится в любом компакте $D^*\subset D$. Обозначим через T матрицу

$$T=\begin{pmatrix} T_{1\bar{1}} & T_{1\bar{2}}\cdots & T_{1\bar{n}}\\ T_{2\bar{1}} & T_{2\bar{2}}\cdots & T_{2\bar{n}}\\ \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ T_{n\bar{1}} & T_{n\bar{2}}\cdots & T_{n\bar{n}}\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

элементы которой

$$T_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \ln K(Z\bar{Z})}{\partial z^i \, \partial \bar{z}^j}. \tag{2.3}$$

Мы предположим далее для существования $\ln K(Z\bar{Z})$, что $\varphi_\alpha(Z)$ не только голоморфные функции, но и не имеют общего нуля в области D. Если мы подставим выражение (2.1) в (2.8), то получим

$$T_{i\bar{j}} = K^{-2} \sum_{\alpha > \beta} (\varphi_\alpha \varphi_\beta^i - \varphi_\beta \varphi_\alpha^i)\overline{(\varphi_\alpha \varphi_\beta^j - \varphi_\beta \varphi_\alpha^j)}, \tag{2.4}$$

где

$$\varphi_\beta^i = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^i}, \quad \varphi_\alpha^i = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z^i}, \quad \bar{\varphi}_\beta^j = \frac{\partial \bar{\varphi}_\beta}{\varphi \bar{z}^j}, \quad \bar{\varphi}_\alpha^j = \frac{\partial \bar{\varphi}_\alpha}{\partial \bar{z}^j}.$$

Теперь эрмитову дифференциальную форму $dZTd\bar{Z}'$ можно записать в виде

$$dZTd\bar{Z}' = K^{-2} \sum_{\alpha > \beta} |\varphi_\alpha d\varphi_\beta - \varphi_\beta d\varphi_\alpha|^2. \tag{2.5}$$

Из выражения (2.5) следует, что если $\varphi_0(Z)$, $\varphi_1(Z), \cdots$ — последовательность функций, голоморфных в D без общего нуля в D, и если ряд $K(Z\bar{Z}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varphi_\alpha(Z)\overline{\varphi_\alpha(Z)}$ сходится равномерно в любом компакте $D^* \subset D$, то эрмитова дифференциальная форма $dZ\bar{T}dZ' \geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место лишь в том случае, когда ранг матрицы $(n \times \infty)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_\alpha \varphi_\beta^1 - \varphi_\beta \varphi_\alpha^1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_\alpha \varphi_\beta^n - \varphi_\beta \varphi_\alpha^n \end{pmatrix}_{\alpha > \beta > 0} \tag{2.6}$$

меньше n. Мы будем называть, как обычно, линейным замыканием последовательности $\{\varphi_\nu\}$ совокупность функций $f(Z)$, представимых рядом $f(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(Z)$, где a_ν — некоторые постоянные, равномерно сходящимся в любом компакте $D^* \subset D$. Можно показать, что если линейное замыкание последовательности $\{\varphi_\nu\}$ содержит функции 1, z^1, z^2, $\cdots, z^n$, то $dS^2 = dZTd\bar{Z}' > 0$. Очевидно, что $dS^2 > 0$, если $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система голоморфных функций.

3. Представление $n + 1 - \rho$ через сумму квадратов

В этом пункте будет показано, что если $D \subset \mathbf{C}_Z^n$, то выражение $n + 1 - \rho$ может быть представлено через сумму квадратов некоторых функций. Здесь ρ — кривизна Риччи, вычисляемая по формуле

$$\rho = \frac{U\tilde{R}U'}{UT\bar{U}'}, \tag{3.1}$$

где $U=(u^1\cdots u^n)$ — произвольный вектор, T выражается по формуле (2.2), а $\bar{R}$ — матрица кривизны Риччи, элементами которой служат величины $R_{p\bar{q}} = -(\ln\det T)^{\cdot}_{z^p\bar{z}^q}$, стоящие на пересечении p-ой строки и q-ого столбца.

Представим

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{1\bar{1}}\cdots T_{n\bar{1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ T_{n\bar{1}}\cdots T_{n\bar{n}} \end{vmatrix}$$

в виде

$$\det T = K^{-(n+1)}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\beta_n=0}^{\infty}\begin{vmatrix} \varphi_\alpha\cdot\bar{\varphi}_\alpha & \varphi^1_\alpha\cdot\bar{\varphi}_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha\cdot\bar{\varphi}_\alpha \\ \varphi_{\beta_1}\cdot\bar{\varphi}^1_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1}\cdot\bar{\varphi}^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1}\cdot\bar{\varphi}^1_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n}\cdot\bar{\varphi}^n_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n}\cdot\bar{\varphi}^n_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n}\cdot\bar{\varphi}^n_{\beta_n} \end{vmatrix} =$$

$$= K^{-(n+1)}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{\beta_n=0}^{\infty}\bar{\varphi}_\alpha\bar{\varphi}^1_{\beta_1}\cdots\bar{\varphi}^n_{\beta_n}\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix} = \tag{3.2}$$

$$= K^{-(n+1)}\sum_{\alpha>\beta_1>\cdots>\beta_n}\overline{\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}}\times\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Мы получили, что

$$\det T = K^{-(n+1)}\sum_{\alpha>\beta_1>\cdots>\beta_n}\overline{\Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n}(Z)}\,\Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n}(Z), \tag{3.3}$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n} = \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Расположим $(\alpha\beta_1\cdots\beta_n)$, где $\alpha>\beta_1>\cdots>\beta_n$, в следующем порядке: если $\alpha=\gamma_0$, $\beta_1=\gamma_1,\cdots$, $\beta_{r-1}=\gamma_{r-1}$, но $\beta_r>\gamma_r$, то $(\gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_n)$ следует за $(\alpha\beta_1\cdots\beta_n)$. Пронумеруем эту последовательность $\omega=0,1,2\cdots$.

Тогда

$$\det T = K^{-(n+1)}\sum_{\omega=0}^{\infty}\overline{\Psi_\omega(Z)}\,\Psi_\omega(Z). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.1), мы получаем

$$\rho = n+1-(UT\overline{U}')^{-1}\sum_{\omega>\mu}|\Psi_\omega \tilde{d}\overline{\Psi}_\mu - \Psi_\mu \tilde{d}\overline{\Psi}_\omega|^2\left(\sum_{\omega=0}^{\infty}|\Psi_\omega|^2\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

где $\tilde{d} = \frac{\partial}{\partial z^p}\cdot u^p$, $\bar{\tilde{d}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^q}\cdot \bar{u}^q$.

Поскольку элементы матрицы $\tilde{R}$: $R_{p\bar{q}} = -\left(\ln K^{-(n+1)}\sum_{\omega=0}^{\infty}\overline{\Psi}_\omega\Psi_\omega\right)''_{z^p\bar{z}^q}$, то, очевидно, что для существования логарифма, функции $\Psi_\omega(Z)$ из последовательности $\{\Psi_\omega(Z)\}$ не должны иметь общего нуля в области L. Но $\Psi_\omega(Z)$ выражается через функции $\varphi_\nu(Z)\in\{\varphi_\nu(Z)\}$ (см. (3.4)). Пусть в точке $Z=Z_0$, $\varphi_{\beta_n}(Z_0)\neq 0$, тогда

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha\varphi_\alpha^1\cdots\varphi_\alpha^n \\ \varphi_{\beta_1}\varphi_{\beta_1}^1\cdots\varphi_{\beta_1}^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{\beta_n}\varphi_{\beta_n}^1\cdots\varphi_{\beta_n}^n \end{vmatrix} = \varphi_{\beta n}^{n+1}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z^1}\left(\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta n}}\right) & \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta n}}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z^n}\left(\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta n}}\right) \\ \frac{\partial}{\partial z^1}\left(\frac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta n}}\right) & \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta n}}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z^n}\left(\frac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta n}}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial z^1}\left(\frac{\varphi_{\beta n-1}}{\varphi_{\beta n}}\right) & \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{\varphi_{\beta n-1}}{\varphi_{\beta n}}\right) & \cdots & \frac{\partial}{\partial z^n}\left(\frac{\varphi_{\beta n-1}}{\varphi_{\beta n}}\right) \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что если последовательность $\{\varphi_\nu(Z)\}$ содержит n независимых функций $\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta n}}, \frac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta n}}, \cdots, \frac{\varphi_{\beta n-1}}{\varphi_{\beta n}}$, то в точке $Z=Z_0$ $\det T$ не обращается в нуль. Отсюда следует

Теорема. Если в области $D\subset \mathbb{C}_Z^n$ существует последовательность голоморфных функций $\{\varphi_\nu(Z)\}$, обладающих следующими свойствами:

1. Ряд $K(Z\overline{Z})=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\overline{\varphi_\alpha(Z)}\,\varphi_\alpha(Z)$ сходится равномерно в любом компакте $D^*\subset D$;

2. Функции $\varphi_\nu(Z)\in\{\varphi_\nu(Z)\}$ не имеют общего нуля в области D;

3. Последовательность $\{\varphi_\nu/\varphi_0\}_{\nu=1,2,\cdots}$ ($\varphi_0\neq 0$ в точке $Z=Z_0$) содержит не менее n независимых функций.

Тогда в любой точке $Z_0\in D$ по направлению произвольного вектора $U=(u^1\cdots u^n)$ кривизна Риччи $\rho\leqslant n+1$.

Следствие 1. Если в качестве элементов последовательности $\{\varphi_\nu(Z)\}$ возьмем функции $1, z^1, z^2,\cdots, z^n$, тогда в любой точке $Z_0\in D$ кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U=(u^1\cdots u^n)$ равна $n+1$.

Следствие 2. Если в качестве элементов последовательности $\{\varphi_\nu(Z)\}$ возьмем функции $1, z^1, z^2,\cdots, z^n, z^i\cdot z^j$ $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$, тогда в любой точке $Z_0\in D$ кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U=(u^1\cdots u^n)$ меньше $n+1$.

Московский институт электронного машиностроения Поступило 17.V.1967

Վ. Վ. ՅՈՒՐԱՇԵՎ

ՌԻՉԻԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՈՐՈՇՎԱԾ ՀՈԼՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ $D \subset C^n$ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է Ռիչիի երկրաչափության կորության գնահատական, որոշված կամայական $D \subset C^n$ տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների հաջորդականության օգնությամբ։

Դիտարկված մետրիկայի մասնավոր դեպքը հանդիսանում է Բերգմանի մետրիկան։ Այդ դեպքում հեղինակի կողմից ստացված գնահատականը համընկնում է Բ. Ա. Ֆուքսի կողմից ստացված գնահատականի հետ։

V. V. YURASHEY

ON THE RICCI CURVATURE OF THE GEOMETRY DEFINED IN A DOMAIN $D \subset C^n$ WITH THE AID OF A SYSTEM OF ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

The estimation of the Ricci curvature of the geometry defined in an arbitrary domain $D \subset C^n$ with the aid of a system of analytic functions is considered.

The Bergman metric is a particular case of the metric in question. For this case the estimation obtained by the author coincides with that obtained by Fuchs.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., Гос. изд. ф.-м. лит., 1963.
2. *Б. А. Фукс.* О кривизне Риччи бергмановой метрики, инвариантной при биголоморфных отображениях, ДАН, 167, № 3, 1966, 996—999.
3. *Б. А. Фукс.* Uber geodäsische Manigtaltigkeiten einer invarianten Geometrie, Матем. сб., 2, 1937, 567—594.
4. *Хуа-Ло-Кэн.* On the Rimannian curvature in the space of several variables, Schrift Forschungsinst, Math. 1, 1957, 245—263.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS