ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ԳԻՆԸ 30 Կ.
ЦЕНА 30 К.

ИНДЕКС 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and nam, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

Р. И. ОСИПОВ

О РАСХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ К БЕСКОНЕЧНОСТИ

Введем обозначения: $E^+(\varphi) \equiv E(\varphi(x) > 0)$, $E^-(\varphi) \equiv E(\varphi(x) < 0)$.

В работе [1] показано, что ряд по системе Хаара не может расходиться к ∞ на множестве положительной меры.

При доказательстве этого утверждения существенно используются следующие свойства системы Хаара:

$$\int_0^1 \chi_n(x)\,dx = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1}$$

$$\frac{mE^+(\chi_n)}{mE^-(\chi_n)} = 1, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2}$$

Далее А. А. Талаляном была предложена задача: исследовать вопрос существования такой полной ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(x)\}$, что ряд по этой системе не может сходиться к ∞ на множестве положительной меры, вместе с тем

$$\frac{mE^+(\varphi_n)}{mE^-(\varphi_n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

В настоящей статье показывается, что эта задача имеет положительное решение, а именно верна

Теорема. *На отрезке* $[0,1]$ *существует полная ортонормированная система функций* $\{\varphi_n(x)\}$, *обладающая свойствами:*

а) *для любой измеримой, почти всюду на* $[0,1]$ *конечной функции* $f(x)$ *существует ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, *сходящийся к* $f(x)$ *почти в каждой точке отрезка* $[0, 1]$, *т. е. система* $\{\varphi_n(x)\}$ *является системой представления;*

б) *ряд по системе* $\{\varphi_n(x)\}$ *не может расходиться к бесконечности на множестве положительной меры;*

в) $\dfrac{mE_n^+}{mE_n^-} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, где $E_n^+ \equiv E^+(\varphi_n)$, $E_n^- \equiv E^-(\varphi_n)$.

По аналогии с системой Хаара определим на отрезке $[0,1]$ полную ортонормированную систему функций $\chi_n^{(i)}(x;\lambda)$ (λ — произвольное фиксированное целое число > 1) следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x;\lambda) \equiv 1, \; x \in [0,1], \tag{3}$$

$$\chi_0^{(1)}(x;\lambda)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}, & x\in\Delta_0^{(1)},\\ -\sqrt{\lambda}, & x\in\Delta_0^{(2)},\end{cases}\tag{4}$$

где $\Delta_0^{(1)}$ и $\Delta_0^{(2)}$ — интервалы, удовлетворяющие условиям

$$\Delta_0^{(1)}\subset[0,1],\quad \Delta_0^{(2)}\subset[0,1],\ \Delta_0^{(1)}\cdot\Delta_0^{(2)}=0,\ \frac{m\Delta_0^{(1)}}{m\Delta_0^{(2)}}=\lambda,$$

$$\overline{\Delta}_0^{(1)}+\overline{\Delta}_0^{(2)}\equiv[0,1].\tag{5}$$

Разделим каждый из интервалов $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}$ соответственно на 2 интервала $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$ и $\Delta_1^{(3)}$, $\Delta_1^{(4)}$ (нумерация слева направо) так, что

$$\frac{m\Delta_1^{(i)}}{m\Delta_1^{(i+1)}}=\lambda,\ i=1,\ 3.\tag{6}$$

Далее положим

$$\chi_1^{(1)}(x;\lambda)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda\cdot m\Delta_0^{(1)}}}, & x\in\Delta_1^{(1)},\\ \dfrac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_0^{(1)}}}, & x\in\Delta_1^{(2)},\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_0^{(1)},\end{cases}\tag{7}$$

$$\chi_1^{(2)}(x;\lambda)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda m\Delta_0^{(2)}}}, & x\in\Delta_1^{(3)},\\ \dfrac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_0^{(2)}}}, & x\in\Delta_1^{(4)},\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_0^{(2)}.\end{cases}\tag{8}$$

Положим, что, поступая аналогично, мы уже построили функции $\chi_m^{(k)}(x;\lambda)$, $m=1,\cdots,n$; $1\leqslant k\leqslant 2^m$.

Пусть $\Delta_n^{(i)}$ $(i=1,\cdots,2^{n+1})$ — означают занумерованные слева направо интервалы постоянства функций $\chi_n^{(k)}(x;\lambda)$ $(1\leqslant k\leqslant 2^n)$.

Каждый из интервалов $\Delta_n^{(i)}$ разобьем соответственно на 2 интервала $\Delta_{n+1}^{(2i-1)}$, $\Delta_{n+1}^{(2i)}$ (нумерация слева направо) так, что

$$\frac{m\Delta_{n+1}^{(2i-1)}}{m\Delta_{n+1}^{(2i)}}=\lambda\qquad(i=1,\cdots,2^n).\tag{9}$$

Далее положим

$$\chi_{n+1}^{(i)}(x;\lambda)\equiv\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda m\Delta_n^{(i)}}}, & x\in\Delta_{n+1}^{(2i-1)},\\ \dfrac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_n^{(i)}}}, & x\in\Delta_{n+1}^{(2i)},\\ 0, & x\overline{\in}\Delta_n^{(i)},\end{cases}\tag{10}$$

$i=1, 2, \cdots, 2^{n+1}$. Продолжив этот процесс до бесконечности, получим систему функций $\chi_0^{(0)}(x; \lambda)$, $\chi_0^{(1)}(x; \lambda)$, $\chi_n^{(k)}(x; \lambda)$,

$$n=1, 2, \cdots; \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Положим далее, $\chi_n^{(k)}(0, \lambda)=\chi_n^{(k)}(+0; \lambda)$, $\chi_n^{(k)}(1, \lambda)=\chi_n^{(k)}(1-0; \lambda)$. Если $x=x_0$ — внутренняя точка разрыва, то положим

$$\chi_n^{(k)}(x_0; \lambda)=\frac{1}{2}\left[\chi_n^{(k)}(x_0-0; \lambda)+\chi_n^{(k)}(x_0+0; \lambda)\right].$$

Покажем, что полученные функции взаимно ортогональны на отрезке [0, 1].

В самом деле, функции $\chi_n^{(i)}(x; \lambda)$ и $\chi_n^{(j)}(x; \lambda)$ при $i \neq j$ ортогональны, потому что множества, на которых они соответственно отличны от нуля ($\Delta_{n-1}^{(i)}$ и $\Delta_{n-1}^{(j)}$), не пересекаются. По тем же соображениям ортогональны функции $\chi_n^{(i)}(x; \lambda)$ и $\chi_m^{(j)}(x; \lambda)$ при $n \neq m$ и $\Delta_{n-1}^{(i)} \cdot \Delta_{m-1}^{(j)}=0$.

Рассмотрим последний возможный случай: $n \neq m$ (для определенности $m<n$), $\Delta_{n-1}^{(i)} \cdot \Delta_{m-1}^{(j)}=0$; тогда из способа определения функций $\chi_n^{(k)}(x; \lambda)$ легко следует, что интервал $\Delta_{n-1}^{(i)}$ принадлежит одному из интервалов $\Delta_m^{(2j-1)}$, $\Delta_m^{(2j)}$, на каждом из которых функция $\chi_m^{(j)}(x; \lambda)$ постоянна.

Но из (6)—(10) следует

$$\int\limits_{\Delta_{n-1}^{(i)}} \chi_n^{(i)}(x; \lambda)\, dx=0, \tag{11}$$

откуда вытекает утверждение и в этом случае.

Проверим нормированность функций $\chi_n^{(k)}(x; \lambda)$. Для функции $\chi_0^{(0)}(x; \lambda)$ утверждение очевидно. Далее из (4) и (5) следует

$$\int\limits_0^1 [\chi_0^{(1)}(x; \lambda)]^2\, dx=\frac{1}{\lambda} m\Delta_0^{(1)}+\lambda m\Delta_0^{(2)}=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\cdot m\Delta_0^{(2)}+\lambda m\,\Delta_0^{(2)}=1.$$

При $n>1$ из (6)—(10) получаем

$$\int\limits_0^1 [\chi_n^{(i)}(x; \lambda)]^2 dx=\int\limits_{\Delta_{n-1}^{(i)}} [\chi_n^{(i)}(x; \lambda)]^2\, dx=\frac{1}{\lambda\cdot m\Delta_{n-1}^{(i)}}\cdot m\Delta_n^{(2i-1)}+\frac{\lambda}{m\Delta_{n-1}^{(i)}}\cdot m\Delta_n^{(2i)}=$$

$$=\frac{\lambda\cdot m\Delta_n^{(2i)}}{\lambda\cdot m\Delta_{n-1}^{(i)}}+\frac{\lambda\cdot m\Delta_n^{(2i)}}{m\Delta_{n-1}^{(i)}}=1.$$

Ортонормированность функций $\chi_n^{(k)}(x; \lambda)$ установлена.

Очевидно при $\lambda=1$ система $\{\chi_n^{(k)}(x; 1)\}$ совпадает с системой Хаара.

Легко видеть, что совокупность концов интервалов $\{\Delta_n^{(k)}\}$ является множеством всюду плотным на $[0, 1]$. Но тогда [2] система $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$ полна на $[0, 1]$ и является системой сходимости.

Замечание А. В работе [3] показано, что система Хаара после выбрасывания любого конечного числа элементов остается системой представления. Те же методы позволяют сделать аналогичное утверждение для системы $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$. Такими же рассуждениями, что и в работе [1], можно убедиться в том, что ряд по системе $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$ не может расходиться к ∞ на множестве положительной меры. При этом используются свойства (9) и (10).

Пусть $\delta_1, \delta_2, \cdots$ — занумерованные слева направо интервалы, причем

$$\delta_i \cdot \delta_j = 0 \quad (i \neq j); \ \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\delta}_l \equiv [0, 1]. \tag{12}$$

Обозначим $\delta_k \equiv (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \cdots$.

Разумеется $b_k = a_{k+1}$, $\quad k = 1, 2, \cdots$.

Для фиксированной последовательности чисел $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ определим функции

$$\tilde{\chi}_n^{(k)}(t; \lambda_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b_i - a_i}} \cdot \chi_n^{(k)}\left(\dfrac{t - a_i}{b_i - a_i}; \lambda_i\right), & t \in \delta_i \\ 0 \quad , & t \overline{\in} \delta_i, \end{cases} \tag{13}$$

$i = 1, 2, \cdots$; при $n = 0$ $k = 0,1$; при $n = 1, 2, \cdots$ $1 \leqslant k \leqslant 2$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ будут определены в дальнейшем.

Из (13) и замечания A легко следует, что при каждом фиксированном i система $\{\tilde{\chi}_n^{(k)}(t; \lambda_i)\}$ полна и ортонормирована на интервале δ_i, является системой представления, ибо этими свойствами обладает система $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda_i)\}$ на $(0, 1)$.

Перейдем к определению чисел λ_i и искомой системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Под $\Delta_{n, i}^{(k)}$ в дальнейшем будем понимать образы интервалов $\Delta_n^{(k)}$ системы $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda_i)\}$ при преобразовании $t = a_i + x(b_i - a_i)$.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Определим возрастающую последовательность целых чисел $N_1^{(1)} < N_2^{(1)} < N_3^{(1)} < \cdots$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$(l+1) \cdot m\Delta_{n,1}^{(k)} < \frac{1}{2} m\,\delta_{l+1}, \tag{14}$$

как только $2^n + k > N_l^{(1)}$, $l = 1, 2, \cdots$.

Теперь возьмем число $\lambda_2 > \lambda_1$ настолько большим, чтобы выполнялось соотношение

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1}\right)^{N_2^{(1)} - N_1^{(1)}} > \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Это можно сделать, поскольку

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{N_2^{(1)}-N_1^{(1)}} \underset{\lambda\to\infty}{\to} 1.$$

Определим возрастающую последовательность целых чисел $N_1^{(2)}<N_2^{(2)}<N_3^{(2)}<\cdots$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$N_1^{(2)}>2^{N_2^{(1)}-N_1^{(1)}}, \tag{16}$$

$$(l+2)\cdot m\Delta_{n,2}^{(k)}<\frac{1}{2}\,m\delta_{l+2}, \tag{17}$$

как только $2^n+k\geqslant N_l^{(2)}$, $1\leqslant k\leqslant 2^n$, $l=1, 2,\cdots$.

Возьмем число $\lambda_3>\lambda_2$ настолько большим, чтобы

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+1}\right)^{\left(N_3^{(1)}-N_2^{(1)}\right)+\left(N_2^{(2)}-N_1^{(2)}\right)}>\frac{1}{2}. \tag{18}$$

Продолжив этот процесс до бесконечности, получим последовательности целых чисел $\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, $N_1^{(i)}<N_2^{(i)}<\cdots$ (при каждом фиксированном $i=1, 2,\cdots$), которые удовлетворяют условиям

$$N_1^{(i)}>2^{\sum\limits_{k=1}^{2}\left(N_k^{(i+1-k)}-N_{k-1}^{(i+1-k)}\right)}, \tag{19}$$

$$(l+1)\cdot m\Delta_{n,i}^{(k)}<\frac{1}{2}\,m\delta_{l+i}, \tag{20}$$

при $2^n+k\geqslant N_l^{(i)}$, $l=1, 2, \cdots$, $i=1, 2,\cdots$,

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}\right)^{\sum\limits_{k=n}^{2}\left(N_k^{(n+1-k)}-N_{k-1}^{(n+1-k)}\right)}>\frac{1}{2},\quad n=2, 3,\cdots. \tag{21}$$

Прежде чем перейти к определению искомой системы функций сделаем одно очевидное замечание, которое в дальнейшем нам пригодится.

При фиксированных $i\geqslant 1$ и $n\geqslant 0$ рассмотрим функцию $\tilde{\chi}_n^{(1)}(t;\lambda_i)$. Из (9), (10) и (13) следует, что она равна положительной постоянной на интервале $\Delta_{n,i}^{(1)}$ и отрицательной постоянной на интервале $\Delta_{n,i}^{(2)}$, причем

$$m\Delta_{n,i}^{(1)}=\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)^{n+1}\cdot m\delta_i. \tag{22}$$

Для удобства, там, где нужно, будем пользоваться обычной нумерацией системы Хаара, т. е.

$$\tilde{\chi}_0(t;\lambda_i)\equiv\tilde{\chi}_0^{(0)}(t;\lambda_i),\ \tilde{\chi}_1(t;\lambda_i)\equiv\tilde{\chi}_0^{(1)}(t;\lambda_i),$$

$$\tilde{\chi}_m(t;\lambda_l) \equiv \tilde{\chi}_n^{(k)}(t;\lambda_l) \quad \text{при } n>0,$$

где $m=2^n+k$.

Систему $\{\varphi_n(t)\}$ определим следующим образом:

$$\varphi_0(t)=\tilde{\chi}_0(t;\lambda_1),\ \varphi_1(t)=\tilde{\chi}_1(t;\lambda_1),$$

$$\varphi_2(t)=\tilde{\chi}_2(t;\lambda_1),\cdots \varphi_{N_1^{(1)}-1}(t)=\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}-1}(t;\lambda_1). \tag{23}$$

Функции $\varphi_{N_1^{(1)}}(t)$ и $\varphi_{N_1^{(1)}+1}(t)$ определим как координаты вектора, получающегося при умножении ортонормированной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{на вектор} \quad (\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}}(t;\lambda_1),\ \tilde{\chi}_0^{(1)}(t;\lambda_2)),$$

т. е.

$$\varphi_{N_1^{(1)}}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}}(t;\lambda_1)+\tilde{\chi}_0^{(1)}(t;\lambda_2)], \tag{24}$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+1}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[-\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}}(t;\lambda_1)+\tilde{\chi}_0^{(1)}(t;\lambda_2)], \tag{25}$$

и вообще функции $\varphi_{N_1^{(1)}+2i}(t)$, $\varphi_{N_1^{(1)}+2i+1}(t)$ аналогично определяются через функции

$$\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}+i}(t;\lambda_1),\ \tilde{\chi}_i^{(1)}(t;\lambda_2),\quad \text{т. е.}$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+2i}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}+i}(t;\lambda_1)+\tilde{\chi}_i^{(1)}(t;\lambda_2)], \tag{26}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ N_2^{(1)}-N_1^{(1)}-1,$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+2i+1}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[-\tilde{\chi}_{N_1^{(1)}+i}(t;\lambda_1)+\tilde{\chi}_i^{(1)}(t;\lambda_2)], \tag{27}$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\cdots,\quad N_2^{(1)}-N_1^{(1)}-1.$$

Таким образом, мы определили функции $\varphi_n(t)$, где

$$N_1^{(1)}\leqslant n\leqslant 2N_2^{(1)}-N_1^{(1)}-1.$$

Из последовательности функций $\tilde{\chi}_0(t;\lambda_2)$, $\tilde{\chi}_1(t;\lambda_2)$, $\tilde{\chi}_2(t;\lambda_2),\cdots$, $\tilde{\chi}_{N_1^{(2)}}(t;\lambda_2)$ выбросим те, которые уже были использованы для определения функций $\varphi_n(t)$, а оставшуюся последовательность поместим за функцией $\varphi_{2N_2^{(1)}-N_1^{(1)}-1}(t)$. Тем самым будут определены функции $\varphi_n(x)$ при

$$2N_2^{(1)} - N_1^{(1)} \leqslant n \leqslant N_2^{(1)} + N_1^{(2)} - 1$$

(ибо число выброшенных функций равно $N_2^{(1)} - N_1^{(1)}$).

Допустим, что мы уже определили функции $\varphi_n(t)$ для $0 \leqslant n \leqslant \alpha - 1$, где

$$\alpha = \sum_{\tau=1}^{m} N_\tau^{(m+1-\tau)}. \tag{28}$$

Определим функции $\varphi_n(t)$ для $\alpha \leqslant n \leqslant \beta - 1$, где

$$\beta = \sum_{\tau=1}^{m+1} N_\tau^{(m+2-\tau)}. \tag{29}$$

Предварительно введем обозначения

$$\alpha(0) = 0, \ \alpha(p) = \sum_{k=1}^{p} [N_{m+2-k}^{(k)} - N_{m+1-k}^{(k)}], \tag{30}$$

$$p = 1, 2, \cdots, m,$$

$$i(p) = \alpha(p+1) - \alpha(p), \ p = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{31}$$

Положим

$$\varphi_{\alpha+2\alpha(p)+2i}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [\tilde{\chi}_{N_{m-p}^{(p+1)}+i}(t; \lambda_{p+1}) + \tilde{\chi}^{(1)}_{\alpha(p)+i}(t; \lambda_{m+1})], \tag{32}$$

$$\varphi_{\alpha+2\alpha(p)+2i+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\chi_{N_{m-p}^{(p+1)}+i}(t; \lambda_{p+1}) + \tilde{\chi}^{(1)}_{\alpha(p)+i}(t; \lambda_{m+1})], \tag{32'}$$

$$p = 0, 1, \cdots, m-1, \ i = 0, 1, \cdots, i(p) - 1.$$

Таким образом, мы определили еще $2 \cdot \alpha(m)$ функций и при этом использовали $\alpha(m)$ функций вида $\tilde{\chi}_n^{(1)}(t; \lambda_{m+1})$. Выбросим эти $\alpha(m)$ функций из последовательности $\tilde{\chi}_0(t; \lambda_{m+1}), \tilde{\chi}_1(t; \lambda_{m+1}), \cdots, \tilde{\chi}_{N_1^{(m+1)}-1}(t; \lambda_{m+1})$, а оставшуюся последовательность в том же порядке поместим за последней из уже определенных функций $\varphi_n(x)$, т. е. за функцией $\varphi_{\alpha+2\alpha(m)-1}(t)$. Тем самым уже определены функции $\varphi_n(t)$ для $0 \leqslant n \leqslant \alpha + 2\alpha(m-1) - 1 + N_1^{(m+1)} - \alpha(m)$, т. е.

$$0 \leqslant n \leqslant \alpha + \alpha(m) + N_1^{(m+1)} - 1. \tag{33}$$

Но из (28)—(31) следует

$$\alpha + \alpha(m) = \sum_{\tau=1}^{m} N_\tau^{(m+1-\tau)} + \sum_{p=0}^{m-1} i(p) =$$

$$= \sum_{p=0}^{m-1} [N_{m-p}^{(p+1)} + i(p)] = \sum_{\tau=1}^{m+1} N_\tau^{(m+2-\tau)}, \tag{34}$$

ибо $N_{m-p}^{(p+1)} + i(p) = N_{m-p+1}^{(p+1)}$. А из (29), (33) и (34) вытекает $\alpha + \alpha(m) + N_1^{(m+1)} - 1 = \beta - 1$. Продолжив этот процесс до бесконечности, получим последовательность функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots$, которая и будет искомой системой функций.

Перейдем к доказательству последнего утверждения. Убедимся прежде всего в ортонормированности и полноте системы $\{\varphi_n(x)\}$. Пусть $\varphi_\tau(x)$ и $\varphi_\sigma(x)$ $(\tau \neq \sigma)$ две произвольные функции этой системы. Возможны следующие случаи:

а) $$\varphi_\tau(t) = \breve{\chi}_n(t; \lambda_i); \quad \varphi_\sigma(t) = \breve{\chi}_n(t; \lambda_j).$$

Ортогональность и нормированность функций $\varphi_\sigma(t)$ и $\varphi_\tau(t)$ следует из тех же свойств функций $\breve{\chi}_n(t; \lambda_i)$ и $\breve{\chi}_m(t; \lambda_j)$;

б) $$\varphi_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\breve{\chi}_n(t; \lambda_i) + \tilde{\chi}_m(t; \lambda_j)], \tag{35}$$

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\breve{\chi}_{n'}(t; \lambda_{i'}) + \tilde{\chi}_{m'}(t; \lambda_{j'})]; \tag{36}$$

если векторы $(n, i; m, j)$ и $(n', i'; m' j')$ не равны (в этом случае все функции, стоящие справа от знака равенства в (35) и (36), различны), то ортонормированность функций $\varphi_\sigma(t)$ и $\varphi_\tau(t)$ очевидна; если же эти векторы равны, то нужно учесть еще ортонормированность матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

в) $$\varphi_\sigma(t) = \breve{\chi}_n(t; \lambda_i),$$

$$\varphi_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\pm\tilde{\chi}_{n'}(t; \lambda_{i'}) + \breve{\chi}_{m'}(t; \lambda_{j'})].$$

В этом случае все три функции справа от знака равенства различны и утверждение очевидно.

Ортонормированность системы $\{\varphi_n(x)\}$ установлена.

Полнота этой системы следует из следующих соображений:

1) при любом фиксированном i система $\{\breve{\chi}_n(t; \lambda_i)\}$ полна на интервале δ_i; $\delta_i \cdot \delta_j = 0$, если $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \bar{\delta}_i \equiv [0, 1]$; $\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i) \equiv 0$ при $t \overline{\in} \bar{\delta}_i$, $n = 0, 1, \cdots$;

2) каждая из функций $\breve{\chi}_n(t; \lambda_i)$ или равна какой-либо функции $\varphi_k(t)$ или же есть сумма двух функций $\varphi_l(t)$ и $\varphi_{l+1}(t)$ (последнее следует из того, что определитель используемой матрицы отличен от нуля).

Если для функции $f(t) \in L_2(0, 1)$, $\int\limits_0^1 f(t)\varphi_n(t)\,dt = 0$, $n = 0, 1, \cdots$, то из (2) следует, что

$$\int_0^1 f(t)\,\tilde{\chi}_n(t;\lambda_i)\,dt=0,\quad i=1,2,\cdots,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{37}$$

Из 1) и (37) получаем, что $f(t)=0$ почти всюду на δ_i $(i=1,2,\cdots)$, т. е. $f(t)=0$ почти всюду на $[0,1]$.

Докажем, что система $\{\varphi_n(t)\}$ обладает свойством в) теоремы 1.

Если $\varphi_n(t)=\tilde{\chi}_m(t;\lambda_i)$, то из (6)—(10) следует

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-}=\lambda_i. \tag{38}$$

Пусть $\varphi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\pm\,\tilde{\chi}_\tau^{(k)}(t;\lambda_i)+\tilde{\chi}_\sigma^{(1)}(t;\lambda_j)]$

(для определенности возьмем знак $+$), где $i<j$; n, τ и k зависят от i и j. Точнее из (28)—(32) следует

$$\sum_{l=1}^{j-1}N_{j-l}^{(l)}\leqslant n<\sum_{l=1}^{j}N_{j+1-l}^{(l)}, \tag{39}$$

$$2^{\tau(i)}+k(i)\geqslant N_{j-i}^{(i)}, \tag{40}$$

$$0\leqslant\sigma\leqslant\sum_{l=0}^{j-2}[N_{j-l}^{(l+1)}-N_{j-l-1}^{(l+1)}]. \tag{41}$$

Далее из (4)—(10), (12), (13) имеем

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-}=\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}+m\Delta_{\tau,i}^{(2k-1)}}{m\Delta_{\sigma,j}^{(2)}+m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}}>\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}}{m\Delta_{\sigma,j}^{(2)}+m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}}>$$

$$>\frac{1}{2}\min\left\{\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}}{m\Delta_{\sigma,j}^{(2)}};\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}}\right\}=\frac{1}{2}\min\left\{\lambda_j;\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}}\right\}. \tag{42}$$

Из (21), (22) и (41) получаем

$$m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}>\frac{1}{2}\,m\delta_j. \tag{43}$$

Из (20) и (40) следует

$$j\cdot m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}<\frac{1}{2}\,m\delta_j. \tag{44}$$

Из (43) и (44) следует

$$\frac{m\Delta_{\sigma,j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau,i}^{(2k)}}>j. \tag{45}$$

Из (42) и (45) выводим неравенство

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-}>\frac{1}{2}\min\{\lambda_j;j\}=\frac{1}{2}\,j, \tag{46}$$

ибо $\lambda_j>j$.

Наконец из (38) и (46) следует

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

ибо вместе с увеличением n увеличивается и j, что видно из соотношения (39).

Докажем свойство б) теоремы.

Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \tag{47}$$

расходится к $+\infty$ на множестве E положительной меры. Тогда из (12) следует, что существует такой номер i_0, что $m(\delta_{i_0}\cdot E) > 0$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \tag{48}$$

где

$$\gamma = N_{i_0}^{(1)} + N_{i_0-1}^{(2)} + \cdots + N_1^{(i_0)}. \tag{49}$$

Очевидно ряд (48) расходится к $+\infty$ на том же множестве E.

Из определения функций $\varphi_n(t)$ видно, что часть из них равна нулю на интервале δ_{i_0}. Из последовательности $\varphi_\gamma(t)$, $\varphi_{\gamma+1}(t), \cdots$ выбросим те функции, которые равны нулю на δ_i и оставшуюся последовательность обозначим через

$$\varphi_{n_1}(t),\ \varphi_{n_2}(t), \cdots. \tag{50}$$

Из (28)—(32) и (49) следует, что последовательность (50) на интервале δ_{i_0} совпадает со следующей:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\chi}_{\alpha(i_0)}(t; \lambda_{i_0});\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\chi}_{\alpha(i_0)}(t; \lambda_{i_0});\ \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\chi}_{\alpha(i_0)+1}(t; \lambda_{i_0});\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{\chi}_{\alpha(i_0)+1}(t; \lambda_{i_0}). \tag{51}$$

Пусть $S_k(t)$ — частные суммы ряда

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{n_l} \varphi_{n_l}(t). \tag{52}$$

Тогда, поскольку $S_k(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ на множестве $\delta_{i_0}\cdot E$, то

$$S_{2k}(t) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad t \in E\cdot\delta_{i_0}. \tag{53}$$

Но из (51) следует, что $S_{2k}(t)$ является последовательностью частных сумм ряда по системе $\{\tilde{\chi}_n(t; \lambda_{i_0})\}$ и, согласно [1], не может расходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Перейдем к доказательству утверждения а) теоремы 1.

Пусть последовательность

$$\varphi_{n_1}(t),\ \varphi_{n_2}(t), \cdots,\ \varphi_{n_k}(t), \cdots \tag{54}$$

означает функции последовательности

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \cdots,\ \varphi_n(t), \cdots,$$

полученные посредством первой строки матрицы.

Пусть для фиксированного i ($i = 1, 2, \cdots$) последовательность

$$\varphi_{n_1^{(i)}}(t),\ \varphi_{n_2^{(i)}}(t), \cdots,\ \varphi_{n_k^{(i)}}(t), \cdots \tag{55}$$

состоит из тех функций последовательности (54), которые отличны от нуля в интервале δ_i (т. е. не обязательно на всем интервале δ_i).

Сделаем два замечания.

В. В силу определения системы $\{\varphi_n(t)\}$ и последовательности (55) получаем, что при любых i и j $(i \neq j)$ пересечение множеств $E_i \equiv \{n_k^{(i)}\}$ и $E_j \equiv \{n_k^{(j)}\}$ непусто и имеет конечную мощность.

С. Из замечания В следует, что для любого $i \geqslant 2$ существует такое целое число $k(i)$, что подмножество $\widetilde{E}_i \equiv \{n_k^{(i)};\ k \geqslant k(i)\}$ не пересекается ни с одним из множеств $E_1, E_2, \cdots, E_{i-1}$.

В силу определения системы $\{\varphi_n(t)\}$ и (54) последовательность (55), начиная с $k(i)$-ого члена, на интервале δ_i совпадает с последовательностью

$$\widetilde{\chi}_{m_i}(t;\ \lambda_i),\ \widetilde{\chi}_{m_i+1}(t;\ \lambda_i), \cdots, \tag{56}$$

где m_i зависит от $k(i)$, $i = 1, 2, \cdots$ $(k(1) = n_1)$.

В силу замечаний А и В существует ряд

$$\sum_{k=k(1)}^{\infty} a_{n_k^{(1)}}\, \varphi_{n_k^{(1)}}(t), \tag{57}$$

сходящийся к $f(t)$ на $E_1 \subset \delta_1$ и $mE = m\delta_1$. (58)

Ряд (57) вне $\overline{\delta}_1$ также сходится (это следует из замечания В), но его сумма $f_1(t)$ не обязана быть равной нулю вне $\overline{\delta}_1$. Таким образом

$$f_1(t) = f(t),\quad t \in E_1. \tag{59}$$

Из (55) и замечаний А, В, С следует существование такого ряда, что

$$\sum_{k=k(2)}^{\infty} a_{n_k^{(2)}}\, \varphi_{n_k^{(2)}}(t) = f_2(t) \quad \text{п. в. на } (0, 1), \tag{60}$$

причем

$$f_2(t) = f(t) - f_1(t),\quad t \in E_2 \subset \delta_2,\ mE_2 = m\delta_2, \tag{61}$$

$$f_2(t) = 0,\quad t \in \delta_1. \tag{62}$$

Продолжив этот процесс до бесконечности, мы определим коэффициенты $\{a_{n_k^{(i)}}\}$, $i = 1, 2, \cdots$, $k = k(i), k(i+1)$, причем $k(1) = n_1$ и функции $f_1(t), f_2(t), \cdots$ такие, что

$$\sum_{k=k(i)}^{\infty} a_{n_k^{(i)}} \varphi_{n_k^{(i)}}(t) = f_i(t) \quad \text{п. в. на } (0, 1),\ i=1, 2, 3, \cdots, \tag{63}$$

$$f_i(t) = f(t) - \sum_{\mu=1}^{i-1} f_\mu(t),\ t \in E_i \subset \delta_i,\ mE_i = m\delta_i, \tag{64}$$

$$f_i(t) = 0 \quad \text{на} \quad \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{i-1},\quad i=2, 3, \cdots. \tag{65}$$

Учтем, что ряды (63) сходятся всюду вне δ_i (при фиксированном $i=1, 2, 3, \cdots$).

Пусть

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i. \tag{66}$$

Из (58), (61), (64) и (12) следует

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i = \sum_{i=1}^{\infty} m\delta_i = 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=k(i)}^{\infty} a_{n_k^{(i)}} \varphi_{n_k^{(i)}}(t) \right) = f(t),\quad t \in E. \tag{67}$$

Пусть $t = t_0 \in E$, тогда t_0 принадлежит некоторому множеству E_{i_0} (и только ему, ибо множества E_i $i=1, 2, \cdots$ попарно не пересекаются).

Если $i_0=1$, то из (57), (59) и (65) следует, что в точке t_0 первая скобка ряда (67) равна $f(t_0)$, а все остальные скобки равны нулю и, следовательно, формула (67) для этого случая верна. Если же $i_0>1$, то из (57)—(65) следует, что в точке t_0 первые i_0 скобок ряда (67) равны соответственно

$$f_1(t_0),\ f_2(t_0), \cdots, f_{i_0-1}(t_0),\ f(t_0) - \sum_{k=1}^{i_0-1} f_k(t_0),$$

а все остальные скобки в этой точке равны нулю, откуда следует справедливость формулы (67).

Покажем, что из установленных фактов следует утверждение а) теоремы.

В силу замечания С множества $E_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \cdots$ попарно не пересекаются. Элементы множества $E_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \bar{E}_i$, упорядоченные естественным образом, обозначим через

$$n_1,\ n_2, \cdots,\ n_k, \cdots. \tag{68}$$

Справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(t) = f(t),\ t \in E. \tag{69}$$

В самом деле, пусть $t_0 \in E_{i_0}$ — произвольная фиксированная точка из множества E. В силу определения последовательностей (54), (55) и замечания C заключаем, что все члены ряда (69), которые отличны от нуля в точке t_0, находятся среди функций

$$a_{n_1}\varphi_{n_1}(t),\ a_{n_2}\varphi_{n_2}(t),\cdots,\ a_{n^{(i_0)}_{\omega}}\varphi_{n^{(i_0)}_{\omega}}(t),\ a_{n^{(i_0)}_{\omega+1}}\varphi_{n^{(i_0)}_{\omega+1}}(t),\cdots, \tag{70}$$

где $\omega = k(i_0)$.

Мы видим, что последовательность функций (70), за исключением конечного числа N первых функций, входит в i_0-ую скобку ряда (67), а значит ряды (67) и (69), если из них выбросить все члены, равные нулю в точке t_0, фактически (с точностью до порядка первых N функций) совпадают. Таким образом, из формулы (67) следует формула (69). Если положить

$$a_n = \begin{cases} a_{n_k}, & \text{при } n = n_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{при } n \neq n_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\varphi_n(t)$ сходится всюду на E к функции $f(t)$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 19.V.1967

Ռ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅԱՆԸ ՏԱՐԱՄԻՏԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ։ $[0,1]$ հատվածի վրա գոյություն ունի ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմ $\{\varphi_n(x)\}$, օժտված հետևյալ հատկություններով՝

ա) $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմը հանդիսանում է ներկայացման սիստեմ, այսինքն ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիայի համար, որը չափելի և համարյա ամենուրեք վերջավոր է $[0, 1]$ հատվածի վրա, գոյություն ունի այնպիսի շարք $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$, որը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային համարյա ամենուրեք $[0,1]$-ում.

բ) $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմով գրված շարքը չի կարող տարամիտել անվերջությանը դրական չափի բազմության վրա.

գ) $\dfrac{mE_n^+}{mE_n^-} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *որտեղ* $E_n^+ \equiv E(\varphi_n(x) > 0)$; $E_n^- \equiv E(\varphi_n(x) < 0$:

R. I. OSIPOV

ON DIVERGENCE OF ORTHOGONAL SERIES TO INFINITY

Summary

The following theorem is proved in the paper:

THEOREM: There exists a complete orthonormal system of functions on [0, 1] with properties

a) To every measurable, a.e. on [0,1] finite function $f(x)$ does correspond a series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, which converges to $f(x)$ a.e. on [0, 1].

b) No series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ does diverge to infinity on any set of positive measure.

c) $\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, where $E_n^+ \equiv E(\varphi_n(x) > 0)$, $E_n^- \equiv E(\varphi_n(x) < 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$ Математ. сборник, 66 (108) : 3, 1965, 240—247.
2. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, 1958, стр. 143.
3. *А. А. Талалян.* О рядах, универсальных относительно перестановок, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 24, 1960, 580—592.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЛОРАНА В C^n

В данной работе рассмотрены следующие вопросы:

1. Структура области нормальной сходимости ряда Лорана в C^n.
2. Разложимость функции $f(z)=f(z_1,\cdots, z_n)$, голоморфной в кратно-круговой области $G\subset C^n$ в нормально сходящийся ряд Лорана.
3. Построение оболочек голоморфности (неполных) кратно-круговых областей.

Используемые понятия и факты из теории функций многих комплексных переменных содержатся в книге [1].

§ 1. Ряд Лорана и голоморфные функции в кратно-круговых областях

Функция $f(z)=f(z_1,\cdots, z_n)$, голоморфная в замкнутом кольце $\overline{D}=\overline{D}_1\times\cdots\times\overline{D}_n$ $(D_k=[z_k;\ r_k<|z_k|<R_k])$, разлагается в нормально сходящийся ряд Лорана

$$f(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{k_1,\cdots,k_n=-\infty}^{\infty} a_{k_1\ldots k_n}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}. \tag{1}$$

Пусть $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ два произвольных кольца.

Лемма 1. *Если $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}\cup\overline{D}'$; $D''=D\cap D'\neq\varnothing$, то разложения $f(z)$ в ряд Лорана в D и D' совпадают.*

Заметим, что D'' тоже является кольцом и разложения в D и D' совпадают с разложением в D''. Это следует из представления коэффициентов

$$a_{k_1\ldots k_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n}\frac{f(t_1,\cdots,t_n)}{t_1^{k_1}\cdots t_n^{k_n}}\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n. \tag{2}$$

$\partial D=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ — остов границы кольца D.

Лемма 2. *Если области $G_1,\cdots, G_m\subset R_n$, $S\subset\subset G=\bigcup_1^m G_k$, то существуют такие $S_k\subset\subset G_k$,* что $S\subset\bigcup_1^m S_k$.

Теорема 1. Функция $f(z)$, *голоморфная в кратно-круговой области $G\subset C^r$, разлагается в ряд Лорана, нормально сходящийся в оболочке голоморфности $H(G)$.*

Доказательство. Пусть $G_1\subset\subset G$. Тогда $S_1\subset\subset S$, где S_1 и S образы G_1 и G в пространстве модулей R_n^+. По Лемме Гейне-Бореля

S_1 можно покрыть конечным числом m открытых прямоугольных параллелепипедов $\sigma_k \subset\subset S$, $S_1 \subset\subset \bigcup\limits_1^m \sigma_k$, которые в совокупности пересекаются, то есть

$$(\bigcup_l \sigma_{k_l}) \cap (\bigcup_j \sigma_{k_j}) \neq \varnothing \tag{3}$$

для любого разбиения $\{k_l\} \cup \{k_j\} = (1, \cdots, m)$. Следовательно G_1 можно покрыть конечным числом m в совокупности пересекающихся колец $D^{(k)}$ $(k=1, \cdots, m)$. В каждом из них $f(z)$ разлагается в нормально сходящийся ряд Лорана. Ввиду условия (3) и леммы 1 эти разложения совпадают. Ввиду того, что $G_1 \subset\subset \bigcup\limits_{k=1}^m D^{(k)}$ и леммы 2 G_1 можно покрыть компактами $P_k \subset\subset D^{(k)}$ $(k=1, \cdots, m)$. В каждом P_k ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| |z|^k \tag{4}$$

равномерно сходится.

Следовательно ряд (4) равномерно сходится в $G \subset \bigcup\limits_1^m P_k$. В силу произвольности компакта $G_1 \subset G$ ряд нормально сходится в G. Остается заметить, что $H(G)$ кратно-круговая область (свойство автоморфизма) и $f(z)$ голоморфна в $H(G)$.

Теорема 2 (*обратная*). *Область нормальной сходимости G ряда* (1) *является (кратно круговой) областью голоморфности.*

Докажем, что на каждой орбите $O_r \subset \partial G$ $r=(r_1, \cdots, r_n) \in \partial S$ (S — образ G в R_n^+). Существует хотя бы одна точка $z^{(0)} = (z_1^{(0)} \cdots z_n^{(0)})$ $|z_k^{(0)}| = |z_k|$, где сумма ряда (1) не голоморфна. В обратном случае орбиту O_r по лемме Гейне-Бореля покроем конечной системой $\sigma = \bigcup \sigma_k$ полицилиндров, где $f(z)$ голоморфна, возьмем наибольшую кратно-круговую область $G' : G \subset G' \subset G \cup \sigma$. По теореме 1 ряд нормально сходится в G', а это противоречит определению G (так как $G' \setminus G \neq \varnothing$). Таким образом $f(z)$ является барьером в некоторой точке $z^{(0)} \subset O_r$. Вращением $z_k^1 = z_k e^{i\varphi_k}$ $(k=1, \cdots, n)$ можно этот барьер перенести в желаемую точку границы области G. Теорема доказана.

§ 2. Оболочка голоморфности кратно-круговых областей

Кратно-круговая область $G \subset C^n$ называется логарифмически выпуклой, если ее образ Q в пространстве логарифмов модулей $L_n \supset Q = [\rho;\ \rho_k = \ln |z_k|,\ z \in G]$ выпуклый.

Известно, что из псевдовыпуклости кратно-круговой области следует ее логарифмическая выпуклость. Из теоремы Ока о псевдовыпуклости областей голоморфности следует, что кратно-круговые области голоморфности являются логарифмически выпуклыми.

Приведем пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Пусть $C^2 \supset G = [z;\ \ 0 < |z_1| < a,\ \ 0 \leqslant |z_2| < b]$, $M_l = [z_1 = 0,\ \ 0 \leqslant |z_2| < l]$, где $l < b$.

Как G, так и $G \cup M_l$ логарифмически выпуклые, G псевдовыпукла, а $G \cup M_l$ — нет.

Определение логарифмической выпуклости в некотором смысле неполное: точки, лежащие на плоскостях $z_k = 0$ не влияют на свойство области быть логарифмически выпуклой или нет, так как они в L_n уходят в $-\infty$.

Можно добавить определение логарифмической выпуклости новым требованием, после чего обратная теорема становится справедливой.

Нам понадобится следующая

Лемма 3. *Если кратно-круговая область $G \subset C^n$ логарифмически выпукла, S ее образ в R_n^+, полуинтервал $l_m(a^{(0)}] = [r;\ r_k = a_k^{(0)};\ k = 1, \cdots, m-1,\ m+1, \cdots, n;\ 0 < r_m \leqslant a_m^{(0)}] \subset S$ $a_k \neq 0$, то и всякий полуинтервал $l_m(a] \subset S$ при $a = (a_1, \cdots, a_n) \in S$.*

Из леммы 3 следует, что или все полуинтервалы $l_m(a] \subset S$, $a \in S$ или ни один из них полностью не принадлежит S (при том же m).

Определение логарифмической выпуклости ничего не говорит о концах этих интервалов $(a_1, \cdots, a_{m-1}, 0, a_{m+1}, \cdots, a_n)$. Мы добавим старое определение логарифмической выпуклости требованием:

Или концы всех интервалов $l_m(a]$ принадлежат S или ни один из них не принадлежит S.

Это требование, вводящее определенность в понятие логарифмической выпуклости, можно оправдать, интерпретируя координатные плоскости как прообразы опорных плоскостей в бесконечно удаленной точке $(-\infty)$.

Теорема 3. *Для того чтобы кратно-круговая область $G \subset C$ была псевдовыпуклой необходимо и достаточно, чтобы она была логарифмически выпуклой.*

Как уже отмечалось необходимость условия известна. Докажем достаточность.

Предположим сперва, что G ограничена. Тогда ее образ $Q \subset L_n$ ограничен с одной стороны (существует такой октант $P = [\rho;\ \rho_k < R]$ что $Q \subset P$). Тогда Q можно представить в виде внутренности пересечения полупространств $Q = \bigcap \left[\rho;\ \sum_1^m a_m \rho_m < b\right]$, где все числа G_k рациональны, $a_k = \frac{p_k}{q_k}$. Тогда

$$Q = \bigcap \left[\rho;\ \sum_{m=1}^{n} \frac{p_m}{q_m} \rho_m < b\right] = \bigcap\, [\rho;\ \Sigma\, k_m \rho_m < B],$$

где все числа k_m целые (положительные или отрицательные). Заметим, что те ρ_m могут иметь отрицательные коэффициенты, в направлении осей которых Q ограничена с обеих сторон $(\overline{G} \bigcap (z_m = 0) = \varnothing)$.

Вернемся к старым координатам, подставляя вместо $\rho_m = \ln |z_m|$, чтобы получить прообраз опорной плоскости

$$\sigma = \left[\rho; \sum_1^n k_m \rho_m = B\right] \text{ в } C^n,$$

$$k_1 \ln |z_1| + \cdots + k_n \ln |z_n| = B,$$

$$|z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}| = c, \quad z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} = ce^{i\theta}.$$

Прообразом плоскости $\sigma \subset L_n$ в C^n служит семейство гиперболоидов, зависящее от одного параметра θ.

Построим функции

$$F_k(z) \equiv \frac{1}{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} - Ce^{i\theta}}; \quad \frac{1}{z_{k_m}} \equiv f_{k_m}(z)$$

все функции такого вида (при надлежащем выборе $k_1, \cdots, k_n$ и c) голоморфны в G (так как σ и Q не пересекаются) и имеют особенности на аналитических поверхностях $z^k = ce^{i\theta}$. G является внутренностью пересечения областей голоморфности функции $F_k(z)$ и $f_{k_m}(z)$, следовательно она является областью голоморфности (то есть псевдовыпукла).

Пусть теперь область G неограниченная. Введем последовательность областей $G_N = G \cap U_N$, где $U_N = [z; |z_k| < R_N]$, $R_N \uparrow \infty$. Область G_N логарифмически выпуклая, так как Q_N — его образ в L_N является пересечением двух выпуклых областей — G и октанта $P_N = [\rho; \rho_k < \ln R_N]$.

В силу логарифмической выпуклости и ограниченности областей G_N они псевдовыпуклые.

Имеем $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_N \to G$.

Следовательно G, как предел расширяющихся псевдовыпуклых областей, псевдовынукла. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Оболочкой голоморфности кратно-круговой области $G \subset C^n$ является ее логарифмически-выпуклая оболочка (конструкция ее известна).*

Теоремы 1, 2, 3 дают обобщение известной теоремы Гартогса о логарифмической выпуклости области нормальной сходимости ряда Тейлора (см., например, [2]).

Автор выражает благодарность В. С. Владимирову за руководство настоящей работой.

Математический институт им. Стеклова
АН СССР
Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 12.V.1967

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԸ C^n-ՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է C^n տարածության մեջ Լորանի շարքի

նորմալ զուգամիտության տիրույթի կառուցվածքը։ Ապացուցվում է, որ n-*շրջանային (ոչ լրիվ)* G *տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի, որը նորմալ զուգամետ է տիրույթի* $H(G)$ *հոլոմորֆության թաղանթում։ Ապացուցվում է նույնպես, որ* $H(G)$*-ն համընկնում է* G*-ի լոգարիթմական ուռուցիկ թաղանթի հետ։*

N. B. YENGIBARJAN

THE REGION OF CONVERGENCE OF LORAN SERIES IN C^n

Summary

In this paper the construction of domains of normal convergence for Loran-Series in C^n is investigated.

It is proved, that the function holomorph in n — circular (incomplete) region G, may be developed in Loran series, which converges normally in the shell of holomorphity $H(G)$ of G. It is shown, that $H(G)$ coincides with the logarithmical convex shell of G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.
2. *Л. А. Айзенберг* и *Б. С. Митягин.* Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях, Сиб. мат. журн., 1, № 2, 1960, 153—170.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА

1. Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(2)}(x),\cdots,\chi_n^{(1)}(x),\cdots,\ \chi_n^{2^n}(x),\cdots \tag{1}$$

определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1 \quad \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\chi_0^{(1)}(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}, \\ -1 & \text{при } \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$ $(n=1, 2, \cdots;\quad k=1, 2,\cdots, 2^n)$ разделим отрезок $[0, 1]$ на 2^{n+1} равных частей и положим

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\dfrac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\left[\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right]. \end{cases} \tag{3}$$

Далее полагаем

$$\chi_n^{(k)}(0)=\chi_n^{(k)}(+0) \quad \text{и} \quad \chi_n^{(k)}(1)=\chi_n^{(k)}(1-0),$$

а в каждой точке разрыва функция Хаара считается равной полусумме ее левого и правого пределов в этой же точке.

Пусть

$$\chi_0(x),\ \chi_1(x),\cdots,\ \chi_n(x),\cdots \tag{4}$$

все функции системы Хаара, занумерованные в порядке (1). В дальнейшем мы будем пользоваться как нумерацией (1), так и нумерацией (4).

Для удобства обозначим через $\overset{+}{\gamma}{}_n^{(k)}=\overset{+}{\gamma}_m$ $(\overset{-}{\gamma}{}_n^{(k)}=\overset{-}{\gamma}_m)$ (при предположении $\chi_n^{(k)}(x)=\chi_m(x)$) множество всех внутренних точек множества $E\{\chi_m(x)>0\}$ $(E\{\chi_m(x)<0\})$. Интервалы $\overset{+}{\gamma}_m$ и $\overset{-}{\gamma}_m$ будем называть γ-интервалами функции $\chi_m(x)$. Введем некоторые определения.

Определение 1. Будем говорить, что множество E является M-множеством с условием A для системы Хаара, если существует такой ряд по этой системе, коэффициенты которого удовлетворяют условию A и не равны одновременно нулю и который всюду вне E сходится к нулю.

В противном случае множество E назовем U-множеством с условием A для системы Хаара.

Определение 2. Если задан ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x), \tag{5}$$

то будем говорить, что коэффициенты ряда (5) удовлетворяют условию B, если для произвольной точки $x_0 \in [0, 1]$ выполняется условие

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0,$$

где n_k $(k = 1, 2, \cdots)$ номера всех тех функций системы Хаара, которые не равны нулю в точке x_0.

В последние годы появился ряд работ, посвященных вопросам единственности рядов по системе Хаара и проблеме восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов по этой системе.

В работе [3] было установлено существование совершенных M-множеств при довольно сильных ограничениях на коэффициенты рядов (5). В работе [1] было доказано, что при условии B всякое счетное множество является U-множеством для рядов (5).

При этом легко видеть (см. [1]), что если условие B нарушается хотя бы в одной точке, то для таких рядов Хаара M-множеством может являться даже множество, состоящее из одной точки.

В настоящей работе полностью характеризуется класс M-множеств (тем самым и класс U-множеств) для рядов (5), коэффициенты которых удовлетворяют условию B, а для некоторого более узкого класса рядов устанавливается существование совершенных U-множеств. А именно, доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы множество E для системы Хаара было M-множеством с условием B, необходимо и достаточно, чтобы множество E содержало непустое совершенное подмножество.*

Теорема 2. *Существует совершенное множество P_0, которое не является U-множеством с условием* 6°, где

6°. *для любой точки $x_0 \in [0, 1]$ существует такое число $M(x_0)$, что*

$$|a_n \chi_n(x_0)| < M(x_0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

2. В дальнейшем будет использовано следующее предложение, доказанное в работе [1] (подобный результат был получен также в работе [4]).

Теорема 3. *Пусть ряд* (5) *сходится к некоторой суммируемой функции* $f(x)$ *всюду на отрезке* $[0, 1]$, *кроме, быть может, счетного множества точек, и коэффициенты этого ряда удовлетворяют условию* B. *Тогда ряд* (5) *является рядом Фурье функции* $f(x)$ *по системе Хаара, т. е.*

$$a_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(x)\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Для доказательства теорем нам понадобится следующая

Лемма. *Если ряд* (5) *сходится к нулю всюду в некотором интервале* δ, *кроме, быть может, счетного множества точек, и его коэффициенты удовлетворяют условию* B, *то* $a_n = 0$ *для всех функций* $\chi_n(x)$, *которые тождественно равны нулю вне сегмента* $\bar{\delta}$.

Это легко доказать, применив некоторые рассуждения работы [1].

Действительно, в предположении, что это утверждение неверно, существует такое целое число $n_0 > 0$, что $\chi_{n_0}(x) = 0$ для всех $x \overline{\in} \bar{\delta}$, но $a_{n_0} \neq 0$. Частные суммы ряда (5) обозначим через $S_n(x)$ $(n = 0, 1, \cdots)$. $S_{n_0-1}(x)$ принимает некоторое постоянное значение на множестве $\overset{+}{\gamma}_n + \overset{-}{\gamma}_n$, следовательно $S_{n_0}(x)$ хотя бы в одном из интервалов $\overset{+}{\gamma}_n$ или $\overset{-}{\gamma}_n$ принимает отличное от нуля постоянное значение d. Этот интервал обозначим через Δ.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x), \tag{7}$$

где $n_k > n_0$ $(k = 1, 2, \cdots)$ номера всех тех функций, которые тождественно не равны нулю в интервале Δ, следовательно равны нулю всюду вне сегмента $\bar{\Delta}$. Так как ряд (5) сходится к нулю всюду в интервале Δ, кроме, быть может, счетного множества, то ряд

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n \chi_n(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x) \tag{8}$$

тоже сходится к нулю всюду в интервале Δ, кроме, может быть, счетного множества. Следовательно должно иметь место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x) = -d \quad \text{при} \quad x \in \Delta. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} S_{n_0}(x), & \text{если} \quad x \overline{\in} \Delta, \\ 0, & \text{если} \quad x \in \Delta. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi(x)$—суммируемая функция, и ряд (8) сходится к $\varphi(x)$ всюду на отрезке $[0, 1]$, кроме, быть может, счетного множества. Следовательно ряд (8), согласно теореме 3, является рядом Фурье функции $\varphi(x)$. Отсюда следует, что для всех k $(k = 1, 2, \cdots)$

$$a_{n_k}=\int\limits_0^1 \varphi(x)\chi_{n_k}(x)\,dx=\int\limits_\Delta \varphi(x)\chi_{n_k}(x)\,dx+\int\limits_{[0,1]-\Delta}\varphi(x)\chi_{n_k}(x)\,dx=0,$$

что противоречит (9). Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Предположим, что множество E для системы Хаара является M-множеством с условием B, то есть существует ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\chi_n(x), \tag{10}$$

коэффициенты которого удовлетворяют условию B, не все равны нулю и ряд (10) сходится к нулю всюду вне E. Ясно, что множество E не может быть счетным или конечным, в противном случае все коэффициенты ряда (10) были бы равны нулю, вопреки предположению. Рассмотрим следующее множество:

$$G=\sum_{m=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} E\left(|S_k(x)|>\frac{1}{m}\right), \tag{11}$$

где $S_k(x)$—частная сумма ряда (10). Ясно, что G есть множество всех тех точек, на котором ряд (8) не сходится к нулю. G является борелевским множеством, и оно не счетно, следовательно G имеет непустое совершенное подмножество. Так как должно иметь место соотношение $G\subset E$, то E тоже имеет непустое совершенное подмножество.

Достаточность. Очевидно нужно доказать, что любое непустое совершенное множество меры нуль является M-множеством.

Рассмотрим множество $C_{[0,1]}P=[0,1]-P$. Если $0\in C_{[0,1]}P$, то наибольший полусегмент, содержащий эту точку и лежащий в $C_{[0,1]}P$, обозначим через δ_1, в противном случае через δ_1 обозначим точку $x=0$. Если $1\in C_{[0,1]}P$, то наибольший полусегмент, содержащий эту точку и принадлежащий множеству $C_{[0,1]}P$, обозначим через δ_2, в противном случае через δ_2 обозначим точку $x=1$. Между остальными составляющими интервалами множества $C_{[0,1]}P$ и последовательностью $3, 4, 5,\cdots$ установим взаимнооднозначное соответствие, и каждому интервалу сопоставим соответствующий номер. Мы получим последовательность

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \cdots. \tag{12}$$

Для удобства δ_1 и δ_2 тоже будем называть интервалами. На отрезке $[0, 1]$ построим функцию $F(x)$ следующим образом. Положим

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если}\quad x\in\delta_1,\\ 1, & \text{если}\quad x\in\delta_2,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если}\quad x\in\delta_3.\end{cases}$$

Допустим, что функция $F(x)$ определена на интервалах $\delta_1, \delta_2,\cdots,\delta_n$. Обозначим через $\Delta_{n+1}^{(1)}$ (соответственно $\Delta_{n+1}^{(2)}$) тот из интервалов

$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$, который лежит справа (соответственно слева) от δ_{n+1} и имеет наименьшее расстояние от δ_{n+1}. Теперь определим функцию $F(x)$ на интервале δ_{n+1} следующим образом:

$$F(x)=\frac{F(x_1)+F(x_2)}{2}, \text{ где } \quad x_1 \in \Delta^{(1)}_{n+1}, \quad x_2 \in \Delta^{(2)}_{n+1}.$$

Бесконечно продолжая этот процесс, мы построим функцию $F(x)$ на множестве $C_{[0,1]}P$. Ясно, что $F(x)$ — монотонная функция при $x \in C_{[0,1]}P$, а множество его значений всюду плотно на $[0, 1]$. Если $x_0 \in P$, то положим

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C_{[0,1]}P}} F(x) = F(x_0).$$

Построенная функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, и ее производная почти всюду равна нулю.

В дальнейшем будем пользоваться нумерацией (1).

Рассмотрим ряд

$$c_0^{(0)} \chi_0^{(0)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n} c_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x), \tag{13}$$

где

$$c_0^{(0)}=F(1)-F(0)=1,$$

$$c_n^{(k)}=\sqrt{2^n}\left[F\left(\frac{2k-2}{2^{k+1}}\right)-2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)+F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right]. \tag{14}$$

Покажем, что коэффициенты ряда (13) удовлетворяют условию B. Так как функция $F(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что имеет место

$$|F(x_1)-F(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{если} \quad |x_1-x_2|<\delta.$$

Возьмем натуральное число N настолько большим, чтобы имело место неравенство $\frac{1}{2^N}<\delta$. Для произвольного $n>N$ имеет место соотношение

$$\frac{|c_n^{(k)}|}{\max|\chi_n^{(k)}(x)|}=\frac{\sqrt{2^n}\left|F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right)-2F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)+F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)\right|}{\sqrt{2^n}} \leqslant$$

$$\leqslant\left|F\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right)-F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|+\left|F\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)-F\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right)\right|<\varepsilon.$$

Полученная оценка показывает, что условие B выполнено.

По теореме Бари (см. [2], стр. 527) ряд (13) сходится к $F'(x)$ всюду, где $F'(x)$ конечна, кроме, быть может, двоично рациональных точек. Так как $F'(x)=0$ при $x \in C_{[0,1]}P$, то ряд (13) сходится к нулю на множестве $C_{[0,1]}P$, кроме, быть может, двоично рациональных точек.

Покажем, что ряд (13) сходится к нулю также в тех двоично рациональных точках, которые принадлежат множеству $C_{[0,1]}P$. Допустим $x_0 \in \delta_{k_0} = (a_{k_0}, b_{k_0}) \subset C_{[0,1]}P$, x_0 является двоично рациональной точкой и $x_0 \neq 0$, $x_0 \neq 1$. Пусть $x_0 = \frac{l}{2^{m_0}}$, где $\frac{l}{2^{m_0}}$ — несократимая дробь. Обозначим $d = \min\{x_0 - a_{k_0}, b_{k_0} - x_0\}$ и возьмем n_0 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $d > \frac{1}{2^{n_0}}$. Обозначим $t_0 = \max\{n_0, m_0 + 1\}$. Среди функций $\chi_{t_0}^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{t_0}$ существуют две, для которых x_0 является концом γ-интервала. Ясно, что каждая из этих функций тождественно равна нулю вне сегмента $\overline{\delta}_{k_0}$, потому что каждая из этих функций равна нулю вне некоторого сегмента, длина которого равна $\frac{1}{2^{t_0}} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}}$ и один конец которого совпадает с точкой x_0. Те γ-интервалы этих функций, у которых один конец совпадает с x_0, обозначим через Δ_1 и Δ_2. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$ с $n > t_0$, не равные тождественно нулю в интервалах Δ_1 и Δ_2, всюду вне сегментов $\overline{\Delta}_1$ и $\overline{\Delta}_2$ равны нулю, следовательно, согласно лемме, коэффициенты этих функций в ряде (13) должны равняться нулю. Но ряд (13) сходится к нулю на множестве $\Delta_1 + \Delta_2$, кроме, быть может, счетного множества, следовательно те частные суммы, в которые входят все функции группы с номером t_0 (номером группы считается нижний индекс в последовательности (1)), должны быть тождественно равны нулю на множестве $\Delta_1 + \Delta_2$. Так как значения частных сумм ряда (13) в точке x_0 равны среднему арифметическому пределов справа и слева, то значение тех частных сумм, в которые входят все функции группы с номером t_0, в точке x_0 равны нулю. Если точка $x = 0$ принадлежит множеству $C_{[0,1]}P$, то доказательство аналогично, только вместо d надо взять длину полусегмента, а вместо среднего арифметического пределов справа и слева надо брать предел справа. Так же поступим и в том случае, когда точка $x = 1$ принадлежит множеству $C_{[0,1]}P$.

Этим заканчивается доказательство теоремы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Заметим, что из условия 6° следует условие B. В самом деле, возьмем произвольную точку $x_0 \in [0, 1]$. Пусть $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ — последовательность всех натуральных чисел, для которых $\chi_{n_k}(x_0) \neq 0$.

Из $|a_{n_k}\chi_{n_k}(x_0)| < M(x_0)$ следует, что

$$\frac{|a_{n_k}|}{|\chi_{n_k}(x_0)|} < \frac{M(x_0)}{|\chi_{n_k}(x_0)|^2} \to 0, \text{ так как } |\chi_{n_k}(x_0)| \to \infty, \tag{15}$$

и условие B выполнено. Отсюда ясно, что для класса рядов, удовлетворяющих условию 6°, применима доказанная лемма.

Построим совершенное множество P следующим образом.

На первом шаге отрезок $[0, 1]$ разделим на четыре равные части. Ясно, что полученные интервалы являются γ-интервалами функций первой группы системы Хаара. Обозначим через $\delta_1^{(1)}$ сумму тех двух интервалов вместе с общим концом, которые не имеют общих концов с отрезком $[0, 1]$. Замыкание двух остальных интервалов обозначим через $\overline{\Delta}_1^{(1)}$ и $\overline{\Delta}_1^{(2)}$. Очевидно

$$\operatorname{mes}(\delta_1^{(1)}) = 2\operatorname{mes}(\Delta_1^{(1)}) = 2\operatorname{mes}(\Delta_1^{(2)}) = \frac{1}{2}, \quad \overline{\Delta}_1^{(1)} \cdot \overline{\Delta}_1^{(2)} = 0. \qquad (16)$$

На втором шаге каждый из интервалов $\Delta_1^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ разделим на четыре равные части. Ясно, что каждый из полученных интервалов является γ-интервалом некоторой функции третьей группы системы Хаара. Обозначим через $\delta_2^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ сумму тех двух интервалов с общим концом, которые не имеют общих концов с интервалом $\Delta_1^{(i)}$. Замыкания остальных четырех интервалов обозначим через $\overline{\Delta}_2^{(1)}$, $\overline{\Delta}_2^{(2)}$, $\overline{\Delta}_2^{(3)}$, $\overline{\Delta}_2^{(4)}$. Ясно, что

$$\operatorname{mes}(\delta_2^{(1)}) = \operatorname{mes}(\delta_2^{(2)}) = \frac{1}{8}, \quad \overline{\Delta}_2^{(i)} \cdot \overline{\Delta}_2^{(j)} = 0 \quad \text{при } i \neq j. \qquad (17)$$

Предположим, что после $(n-1)$-го шага построены интервалы $\Delta_{n-1}^{(1)}, \Delta_{n-1}^{(2)}, \cdots, \Delta_{n-1}^{(2n-1)}$, каждый из которых является γ-интервалом некоторой функции из группы с номером $2n-3$ и имеют место равенства

$$\overline{\Delta}_{n-1}^{(i)} \cdot \overline{\Delta}_{n-1}^{(j)} = 0, \; i \neq j, \; 1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}, \; 1 \leqslant j \leqslant 2^{n-1}.$$

На n-ом шаге каждый из интервалов $\Delta_{n-1}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, 2^{n-1})$ разделим на четыре равные части. Каждый из полученных интервалов будет γ-интервалом некоторой функции из группы с номером $2n-1$. Обозначим через $\delta_n^{(i)}$ сумму тех двух интервалов вместе с общим концом, которые с интервалом $\Delta_{n-1}^{(i)}$ не имеют общих концов и принадлежат $\Delta_{n-1}^{(i)}$. Остальные два интервала обозначим через $\Delta_n^{(2i-1)}$ и $\Delta_n^{(2i)}$.

Таким образом, мы получили две группы интервалов

$$\Delta_n^{(1)}, \; \Delta_n^{(2)}, \cdots, \Delta_n^{(2^n)} \quad \text{и} \quad \delta_n^{(1)}, \; \delta_n^{(2)}, \cdots, \delta_n^{(2^{n-1})}.$$

Ясно, что выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\operatorname{mes}\delta_n^{(1)} = \operatorname{mes}\delta_n^{(2)} = \cdots = \operatorname{mes}\delta_n^{(2^{n-1})} = \frac{1}{2^{2n-1}}, \\ \operatorname{mes}\Delta_n^{(1)} = \operatorname{mes}\Delta_n^{(2)} = \cdots = \operatorname{mes}\Delta_n^{(2^n)} = \frac{1}{2^{2n}}, \\ \overline{\Delta}_n^{(i)} \cdot \overline{\Delta}_n^{(j)} = 0, \quad i \neq j,\end{gathered} \qquad (18)$$

и $\Delta_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, 2^n)$ является γ-интервалом некоторой функции из группы с номером $2n-1$.

Бесконечно продолжим описанный процесс, и рассмотрим множество

$$P = [0, 1] - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_n^{(k)}, \tag{19}$$

P является совершенным множеством, так как интервалы $\delta_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \cdots; k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$) не имеют общих точек и общих концов

$$\text{mes } P = \text{mes } [0, 1] - \text{mes} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_n^{(k)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n-1}} = 0.$$

Покажем, что множество P при условии 6° является U-множеством. Предположим обратное, то есть, что существует ряд

$$a_0^{(0)} \chi_0^{(0)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x), \tag{20}$$

сходящийся к нулю всюду вне множества P, коэффициенты которого удовлетворяют условию 6° и хотя бы один из них отличен от нуля.

Пусть $a_{n_0}^{(k_0)}$ — первый отличный от нуля коэффициент ряда (20). Покажем, что n_0 не может быть нечетным. Предположим обратное, пусть $n_0 = 2m_0 - 1$. Допустим $m_0 \neq 1$. Тогда функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно равна нулю на множестве

$$\sum_{n=1}^{m_0-1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_n^{(k)}. \tag{21}$$

В самом деле, каждый из интервалов $\delta_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \cdots, m_0-1; k = 1, \cdots, 2^{n-1}$) является суммой двух интервалов вместе с общим концом, каждый из которых является γ-интервалом некоторой функции, которая принадлежит группе с номером не большим, чем $2m_0-3$. Следовательно, если функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно не равна нулю в некотором интервале $\delta_n^{(k)}$ ($1 \leqslant n \leqslant m_0 - 1$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$), то она тождественно равна нулю вне сегмента $\bar{\delta}_n^{(k)}$ и, согласно лемме, ее коэффициент в ряде (20), вопреки нашему предположению, должен равняться нулю.

Отсюда вытекает, что функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно равна нулю вне некоторого сегмента $\bar{\Delta}_{m_0-1}^{(t_0)}$ ($1 \leqslant t_0 \leqslant 2^{m_0-1}$). Если $m_0 = 1$, то вместо $\bar{\Delta}_{m_0-1}^{(t_0)}$ надо взять сегмент [0, 1]. Так как $\Delta_{m_0-1}^{(t_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции из группы $2m_0 - 3$, то γ-интервалы функции $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ находятся или на правой или на левой половине интервала $\Delta_{m_0-1}^{(t_0)}$, причем один из этих γ-интервалов принадлежит интервалу $\delta_{m_0}^{(t_0)}$. Этот γ-интервал обозначим через Δ. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n > n_0$ или тождественно равны нулю в интервале Δ, или равны нулю вне сегмента $\bar{\Delta}$. Согласно лемме коэффициенты тех функций ряда (20), которые тождественно равны нулю вне сегмента $\bar{\Delta}$, равны нулю. Следовательно, так как ряд (20) сходится к нулю в интервале Δ, то

$$S_{n_0}^{(k_0)}(x) = a_{n_0}^{(k_0)}\ \chi_{n_0}^{(k_0)}(x) = 0,\ x \in \Delta.$$

Последнее равенство противоречит предположению $a_{n_0}^{(k_0)} \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $n_0 = 2m_0 - 2$ — четное. Можно доказать, как делалось выше, что функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно равна нулю на множестве (21) при предположении, что $m_0 \neq 0$. Отсюда следует, что функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ должна равняться нулю всюду вне одного из сегментов $\overline{\Delta}_{m_0-1}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, 2^{m_0-1})$. Обозначим этот сегмент через $\Delta_{m_0-1}^{(l_0)}$. Если $n_0 = 0$, то вместо $\overline{\Delta}_{m_0-1}^{(l_0)}$ надо взять сегмент $[0, 1]$. Так как интервал $\Delta_{m_0-1}^{(l_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции из группы $2m_0-3$, то функция $a_{n_0}^{(k_0)}\ \chi_{n_0}^{(k)}(x)$ на каждой половине этого интервала принимает равные по модулю постоянные значения разных знаков. Предположим, что

$$|a_{n_0}^{(k_0)}\ \chi_{n_0}^{(k)}(x)| = d > 0 \text{ внутри каждой половины интервала } \Delta_{m_0-1}^{(l_0)}. \tag{22}$$

Интервал $\delta_{m_0}^{(l_0)} \subset \Delta_{m_0-1}^{(l_0)}$ является суммой двух интервалов вместе с общим концом, каждый из которых является γ-интервалом некоторой функции из группы $2m_0 - 1$. Отсюда следует, что функции $\chi_n^{(k)}(x)$, которые принадлежат группе с номером, большим, чем $2m_0 - 1$, тождественно равны нулю или в интервале $\delta_{m_0}^{(l_0)}$, или вне сегмента $\overline{\delta}_{m_0}^{(l_0)}$. Во втором случае, согласно лемме, коэффициенты этих функций в ряде (20) должны равняться нулю. Следовательно, так как ряд (20) сходится к нулю в интервале $\delta_{m_0}^{(l_0)}$, имеет место равенство

$$S_n^{(k)}(x) = a_0^{(0)}\ \chi_0^{0}(x) + \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{2^p} a_p^{(m)}\ \chi_p^{(m)}(x) + \sum_{m=1}^{k} a_n^{(k)}\ \chi_n^{(k)}(x) = 0 \tag{23}$$

(при $x \in \delta_{m_0}^{(l_0)}$ и $n > 2m_0 - 1$, $k = 1, 2, \cdots, 2^n$).

В группе с номером $2m_0 - 1 = n_0 + 1$ существуют только две функции, которые тождественно не равны нулю в интервале $\Delta_{m_0-1}^{(l_0)}$. Причем один из γ-интервалов каждой из этих функций принадлежит интервалу $\delta_{m_0}^{(l_0)}$ и сумма этих γ-интервалов вместе с общим концом совпадает с интервалом $\delta_{m_0}^{(l_0)}$.

Отсюда, учитывая (22) и (23), имеем

$$\left.\begin{array}{c} \max|a_{n_0+1}^{(2k_0-1)} \cdot \chi_{n_0+1}^{(2k_0-1)}(x)| = \max|a_{n_0+1}^{(2k_0)}\ \chi_{n_0+1}^{(2k_0)}(x)| = d \\ S_{n_0+1}^{(2^{n_0}+1)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \delta_{m_0}^{(l_0)} \\ |S_{n_0+1}^{(2^{n_0}+1)}(x)| = 2d \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{m_0}^{(2l_0-1)} + \Delta_{m_0}^{(2l_0)} \end{array}\right\}. \tag{24}$$

Обозначим интервалы $\Delta_{m_0}^{(2l_0)}$ и $\delta_{m_0+1}^{(2l_0)}$ соответственно через $\Delta_{m_0}^{(l_1)}$ и $\delta_{m_0+1}^{(l_1)}$. Ясно, что $\delta_{m_0+1}^{(l_1)} \subset \Delta_{m_0}^{(l_1)} \subset \Delta_{m_0-1}^{(l_0)}$. Ряд (20) сходится к нулю в каждой точке $x \in \delta_{m_0+1}^{(l_1)}$. Интервал $\delta_{m_0+1}^{(l_1)}$ является суммой двух интервалов, каждый из которых есть γ-интервал некоторой функции из группы с номером $2m_0 + 1 = n_0 + 3$. Следовательно функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n > n_0 + 3$, которые тождественно не равны нулю в интервале $\delta^{(t_1)}_{m_0+1}$, равны нулю всюду вне сегмента $\bar{\delta}^{(t_1)}_{m_0+1}$. Согласно лемме коэффициенты этих функций в ряде (20) равны нулю. Отсюда следует, что

$$S^{(k)}_n(x)=0,\quad x\in\delta^{(t_1)}_{m_0+1},\quad n>n_0+3. \tag{25}$$

Так как $\delta^{(t_1)}_{m_0+1}\subset\Delta^{(t_1)}_{m_0}$ и интервал $\Delta^{(t_1)}_{m_0}$ является γ-интервалом некоторой функции из группы с номером n_0+1, то в группе с номером n_0+2 существует только одна функция (обозначим ее через $\chi^{(k_1)}_{n_0+2}$), не равная тождественно нулю в интервале $\delta^{(t_1)}_{m_0+1}$. Нетрудно видеть, что хотя бы в одной половине интервала $\Delta^{(t_1)}_{m_0}$ имеет место соотношение

$$|S^{(k_1')}_{n_0+2}(x)|\geqslant 2d.$$

Эту половину обозначим через λ_{m_0}. В группе с номером n_0+3 существует только одна функция (обозначим ее через $\chi^{(k_1)}_{n_0+3}$), не равная тождественно нулю в интервале λ_{m_0}. Отсюда, учитывая (25), получим

$$S^{(k_1)}_{n_0+3}(x)=0 \text{ при } x\in\lambda_{m_0}\cdot\delta^{(t_1)}_{m_0+1}.$$

Интервал $\lambda_{m_0}\cdot\delta^{(t_1)}_{m_0+1}$ является γ-интервалом функции $\chi^{(k_1)}_{n_0+3}$. Следовательно

$$S^{(k_1)}_{n_0+3}(x)=0 \quad\text{при}\quad x\in\lambda_{m_0}\cdot\delta^{(t_1)}_{m_0+1},$$

$$\max|a^{(k_1)}_{n_0+3}\chi^{(k_1)}_{n_0+3}(x)|=|S^{(k_1')}_{n_0+2}(x)|\geqslant 2d \quad\text{при}\quad x\in\lambda_{m_0}, \tag{26}$$

$$|S^{(k_1)}_{n_0+3}(x)|\geqslant 4d \quad\text{при}\quad x\in\lambda_{m_0}-\lambda_{m_0}\delta^{(t_1)}_{m_0+1}=\Delta^{(t_2)}_{m_0+1},\ 1\leqslant t_2\leqslant 2^{m_0+1}.$$

Ясно, что

$$\Delta^{(t_0)}_{m_0-1}\supset\Delta^{(t_1)}_{m_0}\supset\Delta^{(t_2)}_{m_0+1}.$$

Допустим, что после некоторого n-ого шага найдены интервалы $\Delta^{(t_1)}_{m_0}\supset\Delta^{(t_2)}_{m_0+1}\supset\cdots\supset\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1}$ и функции

$\chi^{(2k_0)}_{n_0+1}(x)$, $\chi^{(k_1)}_{n_0+3}(x)$, $\cdots$, $\chi^{(k_{n-1})}_{n_0+2n-1}(x)$, и имеют место следующие соотношения

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^{(t_1)}_{m_0}\supset\Delta^{(t_2)}_{m_0+1}\supset\cdots\supset\Delta^{(t_{n-1})}_{m_0+n-2}\supset\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1}\\ |S^{(k_{i-1})}_{n_0+2i-1}(x)|\geqslant 2^i d \text{ при } x\in\Delta^{(t_i)}_{m_0+i-1}\\ \max|a^{(k_{i-1})}_{n_0+2i-1}\chi^{(k_{i-1})}_{n_0+2i-1}(x)|\geqslant 2^{i-1}d,\quad 1\leqslant i\leqslant n\end{array}\right\}, \tag{27}$$

где интервал $\Delta^{(t_i)}_{m_0+i-1}$ является γ-интервалом функции $\chi^{(k_{i-1})}_{n_0+2i-1}(x)$, $1<i<n$. В группе с номером n_0+2n существует только одна функция (обозначим ее через $\chi^{(k_n')}_{n_0+2n}(x)$), не равная тождественно нулю в интервале $\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1}$. Легко убедиться, что хотя бы на одной половине интервала $\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1}$ имеет место соотношение

$$|S^{(k_n')}_{n_0+2n}(x)|\geqslant 2^n\cdot d.$$

Эту половину обозначим через λ_{m_0+n-1}. Интервалы $\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n}$ и $\lambda_{m_0+n-1}-\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n}$ являются γ-интервалами некоторой функции из группы $n_0+2\cdot n+1$, эту функцию обозначим через $\chi^{(k_n)}_{n_0+2\cdot n+1}(x)$. Интервал $\lambda_{m_0+n-1}-\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n}$ совпадает с некоторым интервалом $\Delta^{(t_{n+1})}_{m_0+n}$, $1\leqslant t_{n+1}\leqslant 2^{m_0+n}$. Из вышесказанного следует, что функции $\chi^{(k)}_n(x)$, $n>n_0+2\cdot n+1$ тождественно не равные нулю в интервале $\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n}$, равны нулю всюду вне сегмента $\bar{\lambda}_{m_0+n-1}\cdot\bar{\delta}^{(t_n)}_{m_0+n}$. Отсюда, согласно лемме, коэффициенты этих функций в ряде (20) равны нулю. Следовательно

$$S^{(k_n)}_{n_0+2n+1}(x)=0 \quad \text{при} \quad x\in\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n}. \tag{28}$$

Так как все функции, следующие за функцией $\chi^{(k'_n)}_{n_0+2n}(x)$ и предшествующие функции $\chi^{(k_n)}_{n_0+2n+1}(x)$, равны нулю в интервале λ_{m_0+n-1}, то из (27) и (28) следует

$$\left.\begin{array}{r} S^{(k_n)}_{n_0+2n-1}(x)=0 \text{ при } x\in\lambda_{m_0+n-1}\cdot\delta^{(t_n)}_{m_0+n} \\ \max|a^{(k_n)}_{n_0+2n+1}\ \chi^{(k_n)}_{n_0+2n+1}(x)|\geqslant 2^n\cdot d \\ |S^{(k_n)}_{n_0+2n+1}(x)|\geqslant 2^{n+1}\cdot d \text{ при } x\in\Delta^{(t_{n+1})}_{m_0+n}\subset\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1} \end{array}\right|. \tag{29}$$

Тем самым доказано, что найдется последовательность интервалов $\Delta^{(t_1)}_{m_0}\supset\Delta^{(t_2)}_{m_0+1}\supset\cdots\supset\Delta^{(t_n)}_{m_0+n-1}\supset\cdots$ и функций $\chi^{(2k_0)}_{n_0+1}(x)$, $\chi^{(k_1)}_{n_0+3}(x)\cdots$ $\chi^{(k_{n-1})}_{n_0+2n-1}(x),\cdots$, для которых справедливо соотношение (27) при любом $1\leqslant i<+\infty$.

Пусть $x_0=\prod\limits_{l=1}^{\infty}\bar{\Delta}^{(t_l)}_{m_0-1+l}$. Если x_0 не является двоично рациональной точкой, то имеет место соотношение

$$|a^{(k_{l-1})}_{n_0+2l-1}\ \chi^{(k_{l-1})}_{n_0+2l-1}(x_0)|\geqslant 2^{l-1}\cdot d,\ 1\leqslant i<\infty. \tag{30}$$

Если же x_0 является двоично рациональной точкой, то найдется такое целое число N, что будет иметь место соотношение

$$|a^{(k_{l-1})}_{n_0+2l-1}\ \chi^{(k_{l-1})}_{n_0+2l-1}(x_0)|\geqslant 2^{l-2}d \text{ при } N<i. \tag{31}$$

Полученные соотношения (30) и (31) противоречат условию 6°, чем и завершается доказательство теоремы 2.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и за оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 18.V.1967

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ

ՀԱԱՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Սահմանում. Կասենք որ E բազմությունը Հաարի սիստեմի համար M-բազմություն է A պայմանով, եթե այդ սիստեմով գոյություն ունի այնպիսի շարք, որի գործակիցները բավարարում են A պայմանին, ոչ բոլորն են հավասար զրոյի և շարքը E բազմությունից դուրս ամենուրեք զուգամիտում է զրոյի։

Ներկա աշխատանքում գործակիցների վրա դրված բավականաչափ թույլ պայմանի դեպքում լրիվ բնութագրվում է M-բազմությունների դասը։ Ցույց է տրվում, որ գործակիցների վրա դրված որոշ ավելի ուժեղ պայմանների դեպքում գոյություն ունի P կատարյալ բազմություն, որը M-բազմություն չէ։

H. M. MUSHEKYAN

THE SETS OF UNIQUENESS FOR THE HAAR SYSTEM

Summary

Definition. A set E on the Haar system is called M-set with A-condition if there exists a series $\sum a_n \chi_n (x)$, where the coefficients satisfy to A-condition and the series converges to zero everywhere in the complement of E.

In the present paper the class of M-sets is completely characterized under loose assumptions on the coefficients. Under more powerful assumptions on coefficients it is proved that there exists perfect set P_0, which is not an M-set.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд, М.—Л., 1951, 527—531.
3. *М. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, серия матем., 28, 1964, 773—799.
4. *М. Б. Петровская.* Некоторые теоремы единственности для рядов по системе Хаара, Вестник МГУ, № 5, 1964, 15—28.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

Функция $f(z)$, определенная в интервале $(a_1, b_1) \supset [a, b]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\int_a^b f(z+t)\, d\sigma(t) = 0, \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b), \tag{A}$$

называется периодической в среднем в интервале (a_1, b_1) (здесь $\sigma(z)$ — некоторая функция, имеющая на $[a, b]$ ограниченную вариацию).

Функции, периодические в среднем на всей оси, изучались в работах Дельсарта, Л. Шварца, Кахана и др. (см. по этому поводу [1]).

В работе [1] А. Ф. Леонтьев, рассматривая функции, периодические в среднем в интервале мнимой оси, ставит в соответствие каждой такой функции $f(z)$ последовательность полиномов Дирихле

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{\mu z}\, d\mu, \quad \rho_k \uparrow +\infty, \tag{B}$$

где $L(\mu) = \int\limits_a^b e^{\mu t}\, d\sigma(t)$,

$$\omega(\mu, \alpha, f) = e^{-\mu\alpha} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi f(\xi - \eta + \alpha)\, e^{\mu\eta}\, d\eta, \quad \alpha \in (a_1 - a, b_1 - b),$$

$|\mu| = \rho_k$ — окружность, на которой $L(\mu) \neq 0$.

Функция ω, зависящая от параметра α, названа А. Ф. Леонтьевым интерполирующей функцией для $f(z)$.

Последовательность (B) можно рассматривать и как последовательность частных сумм ряда

$$P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{\nu} P_\nu(z)\, e^{\mu_\nu z} \Big), \qquad \rho_0 = 0, \tag{C}$$

$$\rho_{k-1} < |\mu_\nu| < \rho_k$$

где член $P_\nu(z)\, e^{\mu_\nu z}$ равен вычету функции $\dfrac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{\mu z}$ (как функции переменного μ (в точке $\mu = \mu_\nu$ — нуле функции $L(\mu)$).

В частном случае, когда

$$\sigma(z)=\begin{cases}1, & z=-i\pi,\\ 0, & z\in(-i\pi, i\pi),\\ 1, & z=i\pi,\end{cases}$$

уравнение (A) принимает вид

$$f(z+i\pi)-f(z-i\pi)=0$$

и, следовательно, рассматриваемая функция — периодическая с периодом $2i\pi$. В этом случае функция $L(\mu)=2i\sin\pi\mu$, корнями ее будут точки $\mu=\pm k$, $k=0, 1, 2, \cdots$. Если в качестве ρ_k взять, например, $\rho_k=k+\frac{1}{2}$, $k=0, 1, 2, \cdots$, то последовательность (B) совпадает с последовательностью частных сумм ряда Фурье по системе $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ для функции $f(ix)$ (x — действительное).

Таким образом, ряд (C) можно считать обобщением ряда Фурье по тригонометрической системе.

В статье [1] удалось отыскать удобную формулу для остаточного члена ряда (C) при условии дифференцируемости функции $f(z)$. В качестве приложения этой формулы там же была доказана следующая (см. стр. 324)

Теорема. *Пусть для* $z\in(a_1-a, b_1-b)$ *функция* $f(z)$ *удовлетворяет уравнению* (A), *причем* $b=-a=q$. *Пусть, далее, функция* $L(\mu)$ *на некоторой системе окружностей* $|\mu|=\rho_k$, $\rho_k\uparrow+\infty$ *удовлетворяет условию*

$$|L(\mu)|>A|\mu|^{-p}\quad e^{q|\mu||\sin\theta|},\ p\geqslant 0,\ \theta=\arg\mu,$$

где A *и* p *— некоторые постоянные. Если функция* $f(z)$ *в интервале* (a_1, b_1) *имеет* $(n-1)$ *первых непрерывных производных и ограниченную кусочно-непрерывную производную* $f^{(n)}(z)$ *и* $n\geqslant p+1$, *то на любом ограниченном замкнутом множестве* $E\subset(a_1-a, b_1-b)$

$$f(z)-S_{\rho_k}(z, f)=o(\rho_k^{1+p-n}),\ \rho_k\uparrow+\infty,$$

откуда, в частности, следует, что

$$f(z)=\lim_{\rho_k\to\infty}S_{\rho_k}(z, f),\quad z\in(a_1-a, b_1-b).$$

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению сходимости последовательности (B) в зависимости от свойств функции $f(z)$, периодической в среднем. Условие, накладываемое на функцию $L(\mu)$, то же, что и в только что сформулированной теореме. Отметим, что в периодическом случае оно выполняется при $p=0$ для любой системы окружностей, отстоящих от нулей функции $\sin\pi\mu$ на положительном расстоянии.

Если в (1) функция $f(z)$ рассматривалась определенной в интервале мнимой оси, то здесь оказалось более удобным рассматривать интервал действительной оси. В этом случае

$$L(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t}\, d\sigma(t),$$

$$\omega(\mu, \alpha, f) = ie^{-i\alpha\mu} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f(\xi - \eta + \alpha)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta,$$

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)}\, e^{i\mu z}\, d\mu.$$

Отрезок $[a, b]$ будем предполагать симметричным относительно начала координат: $b = -a = q$ (в (1) отмечено, что это не снижает общности).

Неоднократно будет использоваться лемма, доказанная в [1]: если $f(z)$ удовлетворяет уравнению (А), то вычеты функции $\frac{\omega(\mu, \sigma, f)}{L(\mu)}\, e^{i\mu z}$ переменного μ от $\alpha \in (a_1 - a, b_1 - b)$ не зависят.

§ 1. Ограниченные функции и функции, имеющие ограниченную производную

Лемма 1. *Пусть s — дуга окружности $|\mu| = \rho_k$, заключенная в первой четверти. Тогда*

$$\int_s \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta e^{\beta q}}\, ds \leqslant c_1 + \ln \rho_k + o(1),\quad \rho_k \uparrow +\infty,$$

где $\beta = \operatorname{Im} \mu$, c_1 — постоянная, зависящая от q.

Доказательство. Пусть $\theta = \arg \mu$. Тогда $ds = \rho_k d\theta$ и

$$I = \int_s \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta e^{\beta q}}\, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{q\rho_k \sin\theta} - 1}{\sin\theta\, e^{q\rho_k \sin\theta}}\, d\theta \leqslant \int_0^{\varphi} \rho_k q\, d\theta + \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \rho_k q\varphi + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| \Bigg|_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} = \rho_k q\varphi - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Дифференцированием находим, что наименьшее значение правой части достигается при $\varphi = \arcsin \frac{1}{q\rho_k}$. Следовательно

$$I \leqslant q\rho_k \arcsin \frac{1}{q\rho_k} - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{q\rho_k} \right).$$

Используя элементарную связь $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$, получим

$$l \leqslant q\rho_k \arcsin \frac{1}{q\rho_k} - \ln \frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{1}{q\rho_k}\right)^2}}{\frac{1}{q\rho_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} - \ln q\rho_k + \ln 2q^2\rho_k^2 + o(1), \quad \rho_k \uparrow +\infty.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть существует последовательность окружностей* $|\mu| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow \infty$, *на которых функция* $L(\mu)$ *удовлетворяет условию*

$$|L(\mu)| \geqslant Ae^{q\rho_k|\sin\theta|}, \quad \theta = \arg\mu, \quad A = \mathrm{const} > 0. \tag{1.1}$$

Если $f(z)$, *удовлетворяющая уравнению* (A), *ограничена в интервале* (a_1, b_1), *то для* $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|S_{\rho_k}(z, f)| \leqslant \frac{2VM}{A\pi}(c_1 + \ln\rho_k + o(1)), \quad \rho_k \uparrow +\infty,$$

где c_1 — *постоянная из леммы* 1, $V = \underset{[a,b]}{\mathrm{var}}\, \sigma(z)$, $M = \sup\limits_{(a_1, b_1)} |f(z)|$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что вычеты функции $\frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{i\mu z}$ от $\alpha \in (a, -a, b_1 - b)$ не зависят. Подставим $\alpha = z$. Тогда получим

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi f(\xi - \eta + z)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta, \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b). \tag{1.1'}$$

Для выражения $B = \int\limits_0^\xi f(\xi - \eta + z)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta$ имеем оценку

$$|B| \leqslant M \frac{e^{|\beta| q} - 1}{|\beta|}, \quad \beta = \mathrm{Im}\, \mu.$$

В силу этой оценки и условия (1.1)

$$|S_{\rho_k}(z, f)| \leqslant \frac{MV}{2A\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{e^{|\beta| q} - 1}{|\beta|\, e^{|\beta| q}}\, ds.$$

Остается использовать лемму 1.

Теорема 2. *Пусть существует последовательность окружностей* $|\mu| = \rho_k$, $\rho_k \uparrow +\infty$, *на которых* $L(\mu)$ *удовлетворяет условию*

$$|L(\mu)| \geqslant A\rho_k^{-p}\, e^{\rho_k q|\sin\theta|}, \quad \theta = \arg\mu, \quad A = \mathrm{const} > 0, \quad p = \mathrm{const} \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Пусть, далее, функция $f(z)$, *удовлетворяющая уравнению* (A), *имеет в интервале* (a_1, b_1) $(n-1)$ *первых непрерывных производных* *и ограниченную кусочно-непрерывную производную порядка n. Тогда для* $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| \leqslant \frac{2VM}{A\pi\rho_k^{n-p}}(c_1 + \ln\rho_k + o(1)),$$

где $M = \sup\limits_{(a_1, b_1)} |f^{(n)}(z)|$, c_1 *— постоянная из леммы* 1, $V = \operatorname{var}\limits_{[a, b]} \sigma(z)$.
В частности, при $n > p$ *последовательность* $S_{\rho_k}(z, f)$ *сходится к* $f(z)$ *равномерно в* $(a_1 - a, b_1 - b)$.

Доказательство. В условиях теоремы справедлива доказанная в (1) формула

$$S_{\rho_k}(z, f) - f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi f^{(n)}(\xi - \eta + z)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta. \qquad (1.3)$$

Оценка правой части проводится так же, как в предыдущей теореме.

§ 2. Функции ограниченной вариации

В этом параграфе будет доказана следующая

Теорема 3. *Пусть функция* $f(z)$, *удовлетворяющая уравнению* (A), *имеет ограниченную вариацию в интервале* (a_1, b_1), *и пусть выполняется условие* (1.1) *теоремы 1. Тогда*

$$\text{I.}\quad S_{\rho_k}(z, f) \to \frac{1}{2}[f(z+0) + f(z-0)], \qquad \rho_k \uparrow +\infty,$$

в каждой точке $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$, *в частности,* $S_{\rho_k}(z, f)$ *сходится к* $f(z)$ *в каждой точке непрерывности* $f(z)$;

II. *Внутри любого интервала* $(c, d) \subset (a_1 - a, b_1 - b)$ *непрерывности функции* $f(z)$ *сходимость* $S_{\rho_k}(z, f)$ *равномерна.*

Доказательству теоремы будет предшествовать несколько лемм. Заметим еще, что в этом параграфе интеграл (A) понимается в смысле Лебега-Стилтьеса, так как интеграл Римана-Стилтьеса не существует в случае совпадения точек разрыва функций $f(z)$ и $\sigma(z)$.

Лемма 2. *Если постоянная* $h > 0$, *а* $\beta = \operatorname{Im}\mu$, *то*

а)
$$\int\limits_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds \leqslant \frac{2\pi}{h},$$

б)
$$\int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{\mu e^{|\beta|h}} = O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow +\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_k e^{-\rho_k h \sin\theta} d\theta < 4\rho_k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k \theta h} d\theta \leqslant \frac{2\pi}{h}.$$

Утверждение б) следует из а).

Лемма 3. *Если $f(z)$ имеет ограниченную вариацию в интервале (a_1, b_1), то интегралы*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}}\int\limits_0^q d\sigma(\xi)\int\limits_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta}\,df(\xi-\eta+z), \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}}\int\limits_{-q}^{0} d\sigma(\xi)\int\limits_0^{\xi+0} e^{i\mu\eta}\,df(\xi-\eta+z),\quad z\in(a_1-a,\ b_1-b),\ \beta=\operatorname{Im}\mu$$

стремятся к нулю при $\rho_k\uparrow\infty$, причем, если $f(z)$ непрерывна в интервале $(c, d)\subset(a_1-a, b_1-b)$, то стремление к нулю равномерно внутри (c, d) (внутреннее интегрирование в (2.1) происходит по переменному η на полуинтервале).

В силу полного сходства интегралов достаточно провести доказательство для одного из них, например, для первого. Обозначим его через J, вариацию $\sigma(z)$ на $[a, b]$ — через V, а вариацию $f(z)$ в (a_1, b_1) — через F.

Пусть $\varepsilon>0$, z — произвольная точка интервала (a_1-a, b_1-b). Так как $f(z)$, имеющая ограниченную вариацию, представима в виде линейной комбинации не более чем четырех действительных монотонных функций, то можно выбрать $h>0$ таким образом, чтобы было

$$\operatorname*{var}_{(z+0,\ z+h]} f(z)<\frac{\varepsilon}{2V}. \tag{2.2}$$

Имеем

$$J=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}}\int\limits_0^q d\sigma(\xi)\left[\int\limits_0^{\xi-h} e^{i\mu\eta}df+\int\limits_{\xi-h}^{\xi-0} e^{i\mu\eta}df\right].$$

Положив $\mu=\alpha+i\beta$, найдем $|e^{i\mu\eta}|=e^{-\beta\eta}$ и

$$|J|\leqslant\frac{V}{2\pi\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\sup_{\xi}\left|\int\limits_0^{\xi-h} e^{i\mu\eta}\,df(\xi-\eta+z)+\int\limits_{\xi-h}^{\xi-0} e^{i\mu\eta}\,df(\xi-\eta+z)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{V}{2\pi\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\left[e^{|\beta|(q-h)}\cdot F+e^{|\beta|q}\frac{\varepsilon}{2V}\right]=\frac{VF}{2\pi\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}e^{-|\beta|h}ds+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.3}$$

Первое слагаемое будет меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ по лемме 2, следовательно, $J\to 0$, если $\rho_k\uparrow\infty$.

Пусть теперь $f(z)$ непрерывна в $(c, d)\subset(a_1-a, b_1-b)$, и пусть K — произвольный отрезок, целиком принадлежащий (c, d). Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать $h>0$ так, чтобы неравенство (2.2) выполнялось для всех $z\in K$. В самом деле, если $f(z)$ действительна и монотонна, то для нее последнее утверждение следует из равномерной ее непрерывности внутри (c, d). Для комплекснозначной функции утверждение вытекает из того, что ее можно представить в виде линейной комбинации не более четырех монотонных функций.

Если неравенство (2.2) равномерно по $z \in K \subset (c, d)$, то и неравенство (2.3) выполняется для всех $z \in K$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если функция $\sigma(z)$ имеет скачки в точках $z = \pm q$ и постоянна в интервале $(-q, q)$, то для любой последовательности окружностей $|\mu| = \rho_k$, не проходящих через нули функции $L(\mu)$,*

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[\int\limits_0^q e^{i\mu\xi}\, d\sigma(\xi) - \int\limits_{-q}^{0} e^{i\mu\xi}\, d\sigma(\xi) \right] \to 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим скачки функции $\sigma(z)$ в точках $z = -q$ и $z = q$ соответственно через h_1 и h_2. Тогда

$$\int\limits_0^q e^{i\mu\xi}\, d\sigma(\xi) = h_2 e^{i\mu q}, \quad \int\limits_{-q}^{0} e^{i\mu\xi}\, d\sigma(\xi) = h_1 e^{-i\mu q},$$

$$L(\mu) = \int\limits_{-q}^{q} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}.$$

Пусть $\ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right) = \gamma$, тогда $\frac{h_1}{h_2} = -e^{\gamma}$ и

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \frac{e^{i\mu q} + e^{\gamma} e^{-i\mu q}}{e^{i\mu q} - e^{\gamma} e^{-i\mu q}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\cos\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Пусть сначала $\gamma = 2i\pi n$, где n — целое. Тогда

$$\tau_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\cos q\mu}{\sin q\mu} = 0,$$

ибо вычет подынтегральной функции в точке $\mu = 0$ равен нулю, а в точках $\mu = \pm k \frac{\pi}{q}$ (k — целое положительное) вычеты уничтожают друг друга.

Переходя к случаю, когда γ не кратно $2i\pi$, заметим, что $\sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) = 0$, когда $q\mu + i\frac{\gamma}{2} = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ или $\mu = \frac{1}{q}\left(k\pi - i\frac{\gamma}{2}\right)$.

Вычет функции, стоящей под знаком интеграла в (2.4), в точке $\mu=0$ равен $\operatorname{ctg}\left(i\frac{\gamma}{2}\right)$, а в точке $\mu=\frac{1}{q}\left(k\pi-i\frac{\gamma}{2}\right)$ равен $\frac{1}{k\pi-i\frac{\gamma}{2}}$.

Таким образом, $\tau_{\rho_k}=\operatorname{ctg}\left(i\frac{\gamma}{2}\right)-\frac{1}{i\frac{\gamma}{2}}+\sum'\frac{1}{k\pi-i\frac{\gamma}{2}}$, где символ Σ' означает, что суммирование ведется по всем $k\neq 0$, для которых соответствующие точки попали внутрь окружности $|\mu|=\rho_k$. Окончательно

$$\tau_{\rho_k}(\sigma)=\operatorname{ctg}\left(i\frac{\gamma}{2}\right)-\frac{1}{i\frac{\gamma}{2}}-\sum_{k>0}'\left[\frac{1}{i\frac{\gamma}{2}-k\pi}+\frac{1}{i\frac{\gamma}{2}+k\pi}\right]\to 0,\ \rho_k\uparrow\infty,$$

в силу известного разложения котангенса.

Лемма 5. *Если функция* $L(\mu)=\int\limits_{-q}^{q}e^{i\mu t}d\sigma(t)$ *на некоторой последовательности окружностей* $|\mu|=\rho_k$, $\rho_k\to\infty$, *удовлетворяет условию* (1.1), *то*

а) *в точках* $z=\pm q$ *функция* $\sigma(z)$ *не может быть непрерывной (соответственно слева и справа);*

б) *существует* $p>0$ *такое, что* $L(\mu)$ *обладает свойством* (1.1) *на любой системе окружностей, принадлежащих кольцам* $\rho_k-p\leqslant|\mu|\leqslant\rho_k+p$.

Для доказательства первого утверждения предположим противное. Пусть для определенности в точке $z=-q$ функция $\sigma(z)$ непрерывна справа. Обозначим через h_2 возможный скачок $\sigma(z)$ в точке $z=q$. Для $\varepsilon>0$ выберем $h>0$ так, чтобы на отрезке $[-q,-q+h]$ и на полуинтервале $[q-h,q)$ вариация функции $\sigma(z)$ не превосходила ε. Тогда

$$|L(\mu)|=\left|\int\limits_{-q}^{q}e^{i\mu t}d\sigma(t)\right|\leqslant h_2e^{-\beta q}+2\varepsilon e^{|\beta|q}+Ve^{|\beta|(q-h)},\ \beta=\operatorname{Im}\mu.$$

По условию на некоторой системе окружностей $|\mu|=\rho_k$

$$|L(\mu)|\geqslant Ae^{|\beta|q},\quad A>0.$$

Поэтому

$$Ae^{|\beta|q}\leqslant h_2e^{-\beta q}+2\varepsilon e^{|\beta|q}+Ve^{|\beta|(q-h)},\quad |\mu|=\rho_k,$$

откуда

$$A\leqslant\frac{h_2}{e^{q(\beta+|\beta|)}}+2\varepsilon+\frac{V}{e^{|\beta|h}},\quad |\mu|=\rho_k.$$

Так как это неравенство справедливо для всех точек указанных окружностей, то оно верно и для точки $\mu=0+i\rho_k$

$$A\leqslant\frac{h_2}{e^{2\rho_kq}}+2\varepsilon+\frac{V}{e^{h\rho_k}}.$$

Устремив ρ_k к ∞, получим $A \leqslant \varepsilon$, откуда, в силу произвола в выборе ε, следует, что $A = 0$. Это противоречие доказывает а).

Пусть снова $\varepsilon > 0$ и $h > 0$ выбирается так, чтобы вариация $\sigma(z)$ не превосходила ε на каждом из полуинтервалов: $(-q, -q+h]$, $[q-h, q)$. По доказанному в точках $z = \pm q$ функция $\sigma(z)$ имеет скачки. Придерживаясь обозначений, принятых при доказательстве леммы 4, будем иметь

$$L(\mu) = h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q} + \left\{ \int\limits_{-q+0}^{-q+h} + \int\limits_{-q+h}^{q-h} + \int\limits_{q-h}^{q-0} \right\} e^{i\mu t}\, d\sigma(t) =$$

$$= 2ih_2 \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) + \left\{ \int\limits_{-q+0}^{-q+h} + \int\limits_{-q+h}^{q-h} + \int\limits_{q-h}^{q-0} \right\} e^{i\mu t}\, d\sigma(t).$$

Следовательно

$$|L(\mu)| \geqslant 2|h_2| \left| \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) \right| - Ve^{|\beta|(q-h)} - 2\varepsilon e^{|\beta| q}.$$

Но

$$\left| \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) \right| \geqslant \left| \operatorname{sh}\left(\beta q + \operatorname{Re}\frac{\gamma}{2}\right) \right| \geqslant A_1\, e^{|\beta| q}, \quad |\beta| \geqslant \beta_0 > 0, \quad A_1 > 0.$$

Таким образом

$$|L(\mu)| \geqslant 2A_1 |h_2|\, e^{|\beta| q} - Ve^{|\beta|(q-h)} - 2\varepsilon\, e^{|\beta| q} = e^{|\beta| q}\left(2A_1 |h_2| - \frac{V}{e^{|\beta| h}} - 2\varepsilon\right).$$

Выбрав β_0 столь большим, чтобы для $|\beta| \geqslant \beta_0$ было

$$2A_1 |h_2| - \frac{V}{e^{|\beta| h}} - 2\varepsilon \geqslant A_2 > 0,$$

получим, что (1.1) выполняется всюду вне достаточно широкой горизонтальной полосы.

Для доказательства б) достаточно убедиться, что для некоторого $p > 0$ в пересечении колец $\rho_k - p \leqslant |\mu| \leqslant \rho_k + p$ с полосой $|\beta| \leqslant \beta_0$

$$\min_{\mu} \left| \int\limits_{-q}^{q} \exp\,(i\,|\mu|\, e^{i\theta}\, t)\, d\sigma(t) \right| \geqslant \delta_0 > 0. \tag{2.5}$$

Тогда в указанной системе колец будет справедливо неравенство

$$|L(\mu)| \geqslant e^{|\beta| q} \min\,(A_2,\ \delta_0\, e^{-\beta_0 q}).$$

Предположим, что (2.5) не выполняется. Тогда существует последовательность точек $\{\dot\rho_k e^{i\theta_k}\}$ таких, что $\dot\rho_k - \rho_k = r_k \to 0$

$$|\operatorname{Im}\,(\dot\rho_k\, e^{i\theta_k})| \leqslant \beta_0, \quad \int\limits_{-q}^{q} \exp\,(i\dot\rho_k\, e^{i\theta_k} t)\, d\sigma(t) \to 0, \quad \dot\rho_k \to \infty.$$

Рассмотрим разность

$$R_k = \int_{-q}^{q} e^{i\rho_k^* e^{i\theta_k t}} d\sigma(t) - \int_{-q}^{q} e^{i\rho_k e^{i\theta_k t}} d\sigma(t) = \int_{-q}^{q} e^{i\rho_k e^{i\theta_k t}} (e^{ir_k e^{i\theta_k t}} - 1)\, d\sigma(t).$$

Так как $|\exp(i\rho_k e^{i\theta_k} t)| = \exp(-\rho_k t \sin\theta_k) \leqslant \exp(\beta_0 q)$, а $(e^{ir_k e^{i\theta_k t}} - 1) \to 0$ при $\rho_k \uparrow \infty$ равномерно по $t \in [-q, q]$ (ввиду того, что $r_k \to 0$), разность R_k также стремится к нулю при $\rho_k \uparrow \infty$. Но по условию

$$\left| \int_{-q}^{q} e^{i\rho_k e^{i\theta_k t}}\, d\sigma(t) \right| \geqslant A,$$

и противоречие налицо. Лемма полностью доказана.

Лемма 6. *Если функция* $L(\mu) = \int_{-q}^{q} e^{i\mu t}\, d\sigma(t)$ *на некоторой последовательности окружностей* $|\mu| = \rho_k$ *удовлетворяет условию* (1.1) *теоремы 1, то*

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[\int_0^q e^{i\mu t} d\sigma(t) - \int_{-q}^{0} e^{i\mu t} d\sigma(t) \right] \to 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

В силу леммы 5 функция $\sigma(z)$ имеет в точках $z = q$ и $z = -q$ скачки. Обозначим их соответственно через h_2 и h_1 и положим $\frac{h_1}{h_2} = -e^{\gamma}$. Мы можем считать, благодаря второму утверждению леммы 5, что окружности $|\mu| = \rho_k$, на которых выполняется неравенство (1.1), отстоят на положительном расстоянии от нулей функции $h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q} = 2i \sin\left(q\mu + i\,\frac{\gamma}{2}\right)$ и, следовательно, можем полагать, что существует число $N > 0$ такое, что

$$\left| \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_2 e^{-i\mu q}} \right| = \left| \frac{\cos\left(q\mu + i\,\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(q\mu + i\,\frac{\gamma}{2}\right)} \right| < N, \quad |\mu| = \rho_k. \tag{2.6}$$

На основании леммы 4

$$\tau^*_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} \to 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Покажем, что $\tau_{\rho_k} - \tau^*_{\rho_k} \to 0$ при $\rho_k \uparrow \infty$. Выберем для $\varepsilon > 0$ такое $h > 0$, чтобы вариация функции $\sigma(z)$ на полуинтервалах $(-q, -q + h], [q - h, q)$ не превосходила ε. Имеем

$$\tau_{\rho_k} - \tau^*_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu}\, \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{L(\mu)} - \int_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{\mu}\, \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} + \right.$$

$$+\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu}\frac{\int\limits_0^{q-0}e^{i\mu t}d\sigma(t)-\int\limits_{-q+0}^{0}e^{i\mu t}\,d\sigma(t)}{L(\mu)}\Bigg]=\frac{1}{2\pi}[P_{\rho_k}+Q_{\rho_k}],$$

где P_{ρ_k} — разность двух первых интегралов, а Q_{ρ_k} — последний интеграл. Учитывая условие (1.1), для Q_{ρ_k} имеем оценку

$$|Q_{\rho_k}|\leqslant\frac{1}{A\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\,[2\varepsilon e^{|\beta|q}+2e^{|\beta|(q-h)}V]=\frac{4\pi\varepsilon}{A}+\frac{2V}{A\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}e^{-|\beta|h}\,ds.$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $\rho_k\uparrow\infty$ по лемме 2, следовательно, $Q_{\rho_k}\to 0$, если $\rho_k\uparrow\infty$. При оценке выражения P_{ρ_k} воспользуемся неравенством (2.6)

$$|P_{\rho_k}|=\left|\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu}\cdot\frac{(h_1e^{-i\mu q}-h_2e^{i\mu q})\int\limits_{-q+0}^{q-0}e^{i\mu t}\,d\sigma(t)}{L(\mu)\,(h_1e^{-i\mu q}+h_2e^{i\mu q})}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{N}{\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\left|\int\limits_{-q+0}^{q-0}e^{i\mu t}\,d\sigma(t)\right|\frac{ds}{|L(\mu)|}\leqslant\frac{N}{A\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{2\varepsilon e^{|\beta|q}+Ve^{|\beta|(q-h)}}{e^{|\beta|q}}\,ds=$$

$$=\frac{4\pi N\varepsilon}{A}+\frac{NV}{A\rho_k}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}e^{-|\beta|h}\,ds.$$

Остается снова сослаться на лемму 2. В результате $\tau_{\rho_k}\to 0$, $\rho_k\uparrow\infty$.

Переходим к доказательству уже сформулированной теоремы 3. Воспользуемся формулой (1.1′)

$$S_{\rho_k}(z,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^{\xi}f(\xi-\eta+z)\;\;e^{i\mu\eta}\,d\eta.$$

Отметим равенство

$$B=\int\limits_0^{\xi}f(\xi-\eta+z)\,e^{i\mu\eta}d\eta=\frac{1}{i\mu}\left\{f(\xi-\eta+z)\;\;e^{i\mu\eta}\Big|_0^{\xi}-\int\limits_0^{\xi}e^{i\mu\eta}df(\xi-\eta+z)\right\}=$$

$$=\frac{1}{i\mu}\left\{f(z)e^{i\mu\xi}-f(\xi+z)-\int\limits_0^{\xi}e^{i\mu\eta}\;df(\xi-\eta+z)\right\}.$$

Если $\xi=0$, то $B=0$. Пусть $\xi>0$, тогда

$$B=\frac{1}{i\mu}\left\{f(z)e^{i\mu\xi}-f(z+\xi)-e^{i\mu\xi}\,[f(z)-f(z+0)]-\int\limits_0^{\xi-0}e^{i\mu\eta}\,df(\xi-\eta+z)\right\}=$$

$$= \frac{1}{i\mu}\left\{ e^{i\mu\xi} f(z+0) - f(z+\xi) - \int_{0}^{\xi-0} e^{i\mu\eta}\, df(\xi-\eta+z) \right\}. \tag{2.7}$$

В случае же $\xi < 0$

$$B = \frac{1}{i\mu}\left\{ f(z)e^{i\mu\xi} - f(z+\xi) - e^{i\mu\xi}[f(z)-f(z-0)] - \int_{0}^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z)\right\} =$$

$$= \frac{1}{i\mu}\left\{ e^{i\mu\xi} f(z-0) - f(z+\xi) - \int_{0}^{\xi+0} e^{i\mu\eta}\, df(\xi-\eta+z) \right\}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в выражение для $S_{\rho_k}(z, f)$, получим

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\Big[f(z+0)\int_{0}^{q} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) - \int_{0}^{q} d\sigma(\xi)\int_{0}^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) -$$

$$- \int_{-q}^{q} f(z+\xi)\, d\sigma(\xi) + f(z-0)\int_{-q}^{0} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) - \int_{-q}^{0} d\sigma(\xi)\int_{0}^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z)\Big].$$

Но $\int_{-q}^{q} f(z+\xi)\, d\sigma(\xi) = 0$, поэтому

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\Big[f(z+0)\int_{0}^{q} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + f(z-0)\int_{-q}^{0} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi)\Big] -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\int_{0}^{q} d\sigma(\xi)\int_{0}^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\int_{-q}^{0} d\sigma(\xi)\int_{0}^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z).$$

В силу условия (1.1) на рост $|L(\mu)|$ снизу, к двум последним интегралам можно применить лемму 3. Следовательно, в случае непрерывности $f(z)$ утверждение II теоремы 3 можно считать доказанным

$$\int_{0}^{q} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + \int_{-q}^{0} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = L(\mu).$$

В случае разрыва $f(z)$ отметим равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\Big[f(z+0)\int_{0}^{q} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + f(z-0)\int_{-q}^{0} e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi)\Big] =$$

$$=f(z+0)+\frac{f(z-0)-f(z+0)}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\int\limits_{-q}^{0}e^{i\mu\xi}\,d\sigma(\xi)=$$

$$=f(z-0)+\frac{f(z+0)-f(z-0)}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\int\limits_{0}^{q}e^{i\mu\xi}d\sigma(\xi)=$$

$$=\frac{f(z+0)+f(z-0)}{2}+\frac{f(z+0)-f(z-0)}{4\pi i}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu L(\mu)}\Bigg[\int\limits_{0}^{q}e^{i\mu\xi}\,d\sigma(\xi)-$$

$$-\int\limits_{-q}^{0}e^{i\mu\xi}\,d\sigma(\xi)\Bigg].$$

Учитывая лемму 6, утверждение I теоремы 3 можно теперь также считать доказанным.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(z)$ определена на всей прямой и удовлетворяет уравнению (A) для всех $-\infty<t<+\infty$, то утверждения теоремы 3 справедливы для всех $-\infty<z<+\infty$. Впрочем, это замечание относится и к предыдущим теоремам, и к теоремам, которые будут доказаны ниже.

В связи с доказанной теоремой уместно отметить один результат Верблюнского [2].

Рассматривается функция $f(x)$, интегрируемая в каждом конечном интервале и удовлетворяющая уравнению

$$\int\limits_{0}^{1}K(\xi)\,f(\xi+x)\,d\xi=0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Предполагается, что $K(\xi)$ имеет ограниченную вариацию на [0, 1], причем $K(0+0)\neq0$, $K(1-0)\neq0$, а функция $L(\lambda)=\int\limits_{0}^{1}K(\xi)\,e^{i\lambda\xi}\,d\xi$ имеет лишь простые нули $\{\lambda_n\}$. Функции $f(x)$ ставится в соответствие некоторый ряд по системе $\{e^{i\lambda_n x}\}$ (ряд образован аналогично ряду (С)) и доказывается, что он сходится в каждой точке к $\frac{1}{2}[f(x+0)+$ $+f(x-0)]$, причем внутри интервала непрерывности $f(x)$ сходимость равномерна. Из условия Верблюнского на ядро вытекает некоторое ограничение на рост характеристической функции $L(\lambda)$ снизу. Оно менее жестко по сравнению с условием (1.1) теоремы I настоящей работы. Однако уравнение, изучавшееся Верблюнским, проще уравнения (А) и описывает более узкий класс функций (например, ни при каком $K(\xi)\not\equiv0$ решением уравнения не может быть произвольная периодическая функция).

§ 3. Вспомогательные предложения

Лемма 7. (*формула для отклонения* $S_{\rho_k}(z, f)$ *от функции* $f(z)$). *Пусть функция* $f(z)$, *удовлетворяющая уравнению* (A), *непрерывна в интервале* (a_1, b_1), *а функция* $L(\mu)$ *удовлетворяет условию* (1.1) *теоремы 1. Пусть, далее,* $[c, d]$*—произвольный отрезок, целиком лежащий в интервале* $(a_1 - a, b_1 - b)$. *Тогда для* $z \in [c, d]$

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta)\, d\eta + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad (3.1)$$

где $\varphi(\xi - \eta) = \varphi_z(\xi - \eta) = f(z) - f(\xi - \eta + z)$.

Для доказательства отметим следующие очевидные равенства:

$$\frac{e^{i\mu\xi}}{\mu} = i \int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta}\, d\eta + \frac{1}{\mu},$$

$$f(z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{f(z)\, d\mu}{\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int\limits_a^b e^{i\mu\xi} f(z)\, d\sigma(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi f(z) e^{i\mu\eta}\, d\eta + \frac{f(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi),$$

а

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi f(\xi - \eta + z)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta,$$

в силу которых

$$f(z) \cdot S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta} [f(z) - f(\xi - \eta + z]\, d\eta + \Phi_{\rho_k}.$$

На отрезке $[c, d]$ функция $|f(z)|$ ограничена некоторым числом M. Следовательно, по лемме 2

$$|\Phi_{\rho_k}| = \left| \frac{f(z)}{2\pi i} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \right| \leqslant \frac{MV}{2A\pi\rho_k} \int\limits_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|q}\, ds = O\left(\frac{1}{\rho_k}\right),$$

и соотношение (3.1) тем самым установлено.

Лемма 8. *Пусть* $f(z)$ *непрерывна в интервале* $(a_1, b_1) \supset [-q, q]$, *и пусть* $\omega(\delta)$ *— ее модуль непрерывности на отрезке* $[a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$, $\left(0 < \varepsilon < \frac{q}{2}\right)$. *Тогда при* $z \in [a_1 + q + \varepsilon, b_1 - q - \varepsilon]$ *и любом* $\xi \in [-q, q]$ *верны неравенства*

$$\left.\begin{aligned}&\left|\int_0^{\xi}\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta\right|\leqslant\int_0^{q}\omega(q-\eta)\,e^{-\beta\eta}\,d\eta,\ \text{если}\ \beta=\operatorname{Im}\mu<0,\\&\left|\int_0^{\xi}\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta\right|\leqslant\int_{-q}^{0}\omega(q+\eta)\,e^{-\beta\eta}\,d\eta,\ \text{если}\ \beta=\operatorname{Im}\mu>0,\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left|\int_{-h}^{\xi-h}\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta\right|\leqslant\int_{-h}^{q-h}\omega(q-\eta)\,e^{-\beta\eta}\,d\eta,\ \text{если}\ \beta<0,\\&\left|\int_{h}^{\xi+h}\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta\right|\leqslant\int_{-q+h}^{h}\omega(q+\eta)\,e^{-\beta\eta}\,d\eta,\ \text{если}\ \beta\geqslant0.\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

Здесь постоянная h такова, что $0<h<q$, а функция φ определена в (3.1).

Доказательство. Для функции

$$\Phi(\xi)=\int_0^{\xi}\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta=\int_0^{\xi}\varphi(t)\,e^{i\mu(\xi-t)}\,dt$$

имеем оценки

$$|\Phi(\xi)|\leqslant e^{-\beta\xi}\int_0^{\xi}\omega(t)\,e^{\beta t}\,dt=J(\xi),\quad \xi>0,$$

$$|\Phi(\xi)|\leqslant e^{-\beta\xi}\int_{\xi}^{0}\omega(|t|)\,e^{\beta t}\,dt=J(\xi),\quad \xi<0.$$

Функция $J(\xi)$, определенная на отрезке $[-q,q]$, достигает наибольшего значения в граничной точке отрезка, так как $J'(\xi)<0$ при $\xi<0$ и $J'(\xi)>0$ при $\xi>0$. В самом деле, если $\xi>0$, то

$$J'(\xi)=-\beta e^{-\beta\xi}\int_0^{\xi}\omega(t)\,e^{\beta t}\,dt+\omega(\xi)=-e^{-\beta\xi}\int_0^{\xi}\omega(t)\,de^{\beta t}+\omega(\xi)=$$

$$=e^{-\beta\xi}\int_0^{\xi}e^{\beta t}\,d\omega(t)>0,$$

так как $\omega(t)$ не убывает. Если же $\xi<0$, то

$$J'(\xi)=-\beta e^{-\beta\xi}\int_{\xi}^{0}\omega(|t|)\,e^{\beta t}\,dt-\omega(|\xi|)=-e^{-\beta\xi}\int_{\xi}^{0}\omega(|t|)\,de^{\beta t}-$$

$$-\omega(|\xi|)=e^{-\beta\xi}\int_{\xi}^{0}e^{\beta t}\,d\omega(|t|)<0,$$

ибо на отрезке $[\xi, 0]$ $\omega(|t|)$ не возрастает. Сравним величины

$$J(q)=e^{-\beta q}\int_0^q \omega(t)\,e^{\beta t}\,dt=\int_0^q \omega(t)\,e^{-\beta(q-t)}\,dt$$

и

$$J(-q)=e^{\beta q}\int_{-q}^0 \omega(|t|)\,e^{\beta t}\,dt=\int_0^q \omega(t)\,e^{-\beta(t-q)}\,dt.$$

Если $\beta<0$, то наибольшей является $J(q)$; если же $\beta\geqslant 0$, то $J(q)<$ $<J(-q)$. Неравенства (3.2) доказаны. Таким же путем устанавливаются неравенства (3.3).

Лемма 9. *Пусть ρ и φ — положительные постоянные, причем $\varphi<\frac{\pi}{2}$. Тогда*

а) *функция* $F(t)=e^{-\rho t\sin\varphi}-e^{-\rho t\varphi}$ *возрастает, если* $0<t<$ $<\frac{1}{\rho\varphi}$,

б) *функция* $\Phi(t)=e^{-\rho t\sin\varphi}-e^{-\frac{2}{\pi}\rho t\varphi}$ *возрастает, если* $t>\frac{\pi}{2\rho\varphi}$.

Для доказательства рассмотрим функцию $\Omega(\varphi)=\varphi e^{-\rho t\varphi}$ при постоянном положительном t. Имеем

$$\Omega'(\varphi)=e^{-\rho t\varphi}-\varphi\rho t e^{-\rho t\varphi}.$$

Отсюда

$$\Omega'(\varphi)>0 \quad \text{для} \quad 0<\varphi<\frac{1}{\rho t},$$

$$\Omega'(\varphi)<0 \quad \text{для} \quad \varphi>\frac{1}{\rho t}.$$

Итак, функция $\Omega(\varphi)$ возрастает в интервале $\left(0,\frac{1}{\rho t}\right)$ и убывает при $\varphi>\frac{1}{\rho t}$. Поэтому, если $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sin\varphi\, e^{-\rho t\sin\varphi}<\varphi e^{-\rho t\varphi},\quad 0<\varphi<\frac{1}{\rho t},$$

$$\sin\varphi e^{-\rho t\sin\varphi}<\frac{2}{\pi}\,\varphi e^{-\frac{2}{\pi}\rho t\varphi},\quad \varphi>\frac{\pi}{2\rho t},$$

или

$$-\sin\varphi\, e^{-\rho t\sin\varphi}+\varphi\, e^{-\rho t\varphi}>0,\quad 0<\varphi<\frac{1}{\rho t},$$

$$-\sin\varphi\, e^{-\rho t\sin\varphi}+\frac{2}{\pi}\,\varphi e^{-\frac{2}{\pi}\rho t\varphi}>0,\quad \varphi>\frac{\pi}{2\rho t}.$$

Левые части двух последних неравенств представляют собой производные функций $F(t)$ и $\Phi(t)$ соответственно с точностью до положительного множителя. Отсюда все и следует.

Следствие. Пусть постоянная $\delta>0$. Тогда, если $\rho>0$, $t>0$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,

$$e^{-\rho t\sin\varphi}-e^{-\rho(t+\delta)\sin\varphi}<e^{-\rho t\varphi}-e^{-\rho(t+\delta)\varphi},\quad 0<\varphi<\frac{1}{\rho(t+\delta)},$$

$$e^{-\rho t\sin\varphi}-e^{-\rho(t+\delta)\sin\varphi}<e^{-\frac{2}{\pi}\rho t\varphi}-e^{-\frac{2}{\pi}\rho(t+\delta)\varphi},\quad \varphi>\frac{\pi}{2\rho t}.$$

§ 4. Непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции

Теорема 4. *Если функция $f(z)$, удовлетворяющая уравнению* (A), *непрерывна в интервале* (a_1, b_1), *и если выполняется условие* (1.1) *теоремы 1, то*

$$S_{\rho_k}(z, f)=o(\ln\rho_k),\quad z\in(a_1-a,\ b_1-b),\quad \rho_k\uparrow\infty.$$

Достаточно показать, что интеграл, стоящий в правой части (3.1), растет медленнее, чем $\ln\rho_k$ (с возрастанием ρ_k). Оценим этот интеграл сверху. В силу леммы 8

$$|R_{\rho_k}|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta}\varphi(\xi-\eta)\,d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{V}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{ds}{|L(\mu)|}\int\limits_0^q\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}\,d\eta. \qquad (3.4)$$

Но

$$\int\limits_0^q\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}\,d\eta=\int\limits_0^{q-\frac{\pi}{\rho_k}}+\int\limits_{q-\frac{\pi}{\rho_k}}^q\leqslant\int\limits_0^{q-\frac{\pi}{\rho_k}}\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}\,d\eta+\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\int\limits_{q-\frac{\pi}{\rho_k}}^q e^{|\beta|\eta}\,d\eta, \qquad (3.5)$$

здесь $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(z)$ на некотором отрезке, принадлежащем (a_1, b_1) и содержащем точки $(\xi-\eta+z)$ при изменении ξ от $(-q)$ до q и η от 0 до ξ. В силу (3.4), (3.5) и условия (1.1), получим

$$|R_{\rho_k}|\leqslant\frac{V}{2\pi A}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\int\limits_0^{q-\frac{\pi}{\rho_k}}\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}+\frac{V}{2\pi A}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{e^{|\beta|q}-1}{|\beta|\,e^{|\beta|q}}\,ds. \qquad (3.6)$$

Из леммы 1 следует, что второй интеграл растет как $\ln \rho_k$, а множитель перед ним $\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \to 0$ при $\rho_k \uparrow \infty$. В результате все слагаемое ведет себя, как $o(\ln \rho_k)$. Первое же слагаемое (интеграл обозначим через J, а постоянную $\frac{2V}{A\pi}$ — через H) имеет оценку

$$J = H\rho_k \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-q\rho_k \sin\theta}\, d\theta \int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q} \omega(t)\; e^{\rho_k (q-t)\sin\theta}\, dt =$$

$$= H\rho_k \int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q} \omega(t)\, dt \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t\rho_k \sin\theta}\, d\theta \leqslant H\rho_k \int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q} \omega(t)\, dt \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\theta t\rho_k}\, d\theta = \frac{H\pi}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q} \frac{\omega(t)\, dt}{t}.$$

Последний интеграл есть $o(\ln \rho_k)$, благодаря следующей теореме (см. [3], стр. 31).

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ интегрируемы на каждом отрезке

$$[c', d] \;\; (c < c'),\;\; g(t) \geqslant 0,\;\; G(x) = \int\limits_x^d g(t)\, dt \to +\infty \;\text{ при }\; x \to c.$$

Тогда, если $f(t) = o[g(t)]$ при $t \to c$, то и

$$F(x) = \int\limits_x^d f(t)\, dt = o[G(x)] \quad \text{при} \quad x \to c.$$

В нашем случае достаточно положить $g(t) = \frac{1}{t}$, $f(t) = \frac{\omega(t)}{t}$, $c = 0$.

Теорема 4 доказана. Уместно сравнить ее с теоремой 1.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(z)$, *удовлетворяющая уравнению* (A), *непрерывна в интервале* (a_1, b_1), *и пусть* $\omega(\delta)$ — *ее модуль непрерывности на отрезке* $[a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}\right)$. *Пусть, кроме этого, выполняется условие* (1.1) *теоремы 1*. Тогда

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \ln \rho_k\right],\;\; z \in [a_1 - a + \varepsilon,\; b_1 - b - \varepsilon],\;\; \rho_k \uparrow \infty.$$

Доказательство. В силу леммы 7 оценка разности $f(z) - S_{\rho_k}(z, f)$ сводится к оценке интеграла

$$J_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\mu| = \rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi) \int\limits_0^{\xi} \varphi(\xi - \eta)\, e^{i\mu\eta}\, d\eta.$$

На окружности $|\mu|=\rho_k$ выберем точку $\alpha_0+i\beta_0$ так, чтобы было $\alpha_0>0$, $\beta_0>0$ и чтобы переменное $\left(\eta\pm\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)$ не вышло за пределы интервала $(a_1+\varepsilon,\ b_1-\varepsilon)$ при изменении η от a до b.

Обозначим через

$$\Gamma=\{\mu/|\mu|=\rho_k,\ |\mathrm{Re}\,\mu|\geqslant\alpha_0\},\quad \gamma=\{\mu/|\mu|=\rho_k,\ |\mathrm{Re}\,\mu|<\alpha_0\},$$

$$\Gamma_+=\{\mu/\ \mu\in\Gamma,\ \ \mathrm{Im}\,\mu\geqslant 0\},\quad \Gamma_-=\Gamma/\Gamma_+,\ \varphi_0=\arcsin\frac{\beta_0}{\rho_k}.$$

В соответствии с этим $J_{\rho_k}=J_\Gamma+J_\gamma$.

Начнем с оценки J_γ. Из доказательства теоремы 4 видно (см. [3.6]), что

$$|J_\gamma|\leqslant\frac{V}{2\pi A}\int\limits_\gamma\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\int\limits_0^{q-\frac{\pi}{\rho_k}}\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}d\eta+\frac{2V}{\pi A}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)(c_1+\ln\rho_k+o(1)).$$

Но

$$\frac{V}{2\pi A}\int\limits_\gamma\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\int\limits_0^{q-\frac{\pi}{\rho_k}}\omega(q-\eta)\,e^{|\beta|\eta}\,d\eta=\frac{2V}{\pi A}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\omega(t)\,dt\int\limits_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}}e^{-\rho_k t\sin\varphi}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{V}{A}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\frac{\omega(t)}{t}\,e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k t\varphi_0}\,dt=-\frac{\pi V}{2A\varphi_0\rho_k}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\frac{\omega(t)}{t}\,de^{-\frac{2}{\pi}\rho_k t\varphi_0}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi V}{2A\varphi_0\rho_k}\,e^{-2\varphi_0}\sup_{\left[\frac{\pi}{\rho_k},\,q\right]}\frac{\omega(t)}{t}=\frac{\pi Ve^{-2\varphi_0}}{2A\varphi_0\rho_k}\cdot\frac{\omega(x_0)}{x_0},$$

где $x_0\in\left[\frac{\pi}{\rho_k},\ q\right]$. Так как для любого модуля непрерывности $\frac{\omega(x_0)}{x_0}<2\frac{\omega(x)}{x}$, если $x_0>x$, то получаем

$$|J_\gamma|\leqslant\frac{Ve^{-2\varphi_0}}{A\varphi_0}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)+\frac{2V}{\pi A}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)(c_1+\ln\rho_k+o(1)).\tag{3.7}$$

Приступим к оценке интеграла

$$J_\Gamma=\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{d\mu}{L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^\xi\varphi(\xi-\eta)\,e^{i\mu\eta}\,d\eta.$$

В интеграле $B=\int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta}\varphi(\xi-\eta)\,d\eta$ произведем линейную замену переменного. Если $\mu \in \Gamma_+$, то заменим η на $\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)$, а если $\mu \in \Gamma_-$, заменим η на $\left(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right)$. В соответствии с этим интеграл B будем снабжать значками $\pm$, в зависимости от того, будет $\mu \in \Gamma_+$ или $\mu \in \Gamma_-$. Имеем

$$B^+ = \int_0^{\xi} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta)\, d\eta = -\int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\xi} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta)\, d\eta - \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} \varphi(\xi - \eta) \left[e^{-\beta\eta} - e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)}\right] d\eta + \right.$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\varphi} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \left[\varphi(\xi - \eta) - \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right)\right] d\eta -$$

$$- \int_{\xi}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta)\, d\eta -$$

$$- \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta +$$

$$+ \int_{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta +$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta)\, d\eta \right\} = \frac{1}{2}(B_1^+ + B_2^+ + B_3^+ + B_4^+ + B_5^+ + B_6^+),$$

$$B^- = \int_0^{\xi} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) = -\int_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta}\, \varphi(\xi-\eta)\, [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta\left(\eta-\frac{\pi}{|\alpha|}\right)}]\, d\eta + \right.$$

$$+ \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta}\, e^{-\beta\left(\eta-\frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \left[\varphi(\xi-\eta) - \varphi\left(\xi-\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right)\right] d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi} e^{i\alpha\eta}\, e^{-\beta\eta}\, \varphi(\xi-\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\left(\eta-\frac{\pi}{|\alpha|}\right)} \varphi\left(\xi-\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta - \int\limits_{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi+\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta}\, e^{-\beta\eta}\, \varphi\left(\xi-\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta -$$

$$\left. - \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{0} e^{i\alpha\eta}\, e^{-\beta\eta}\, \varphi(\xi-\eta)\, d\eta \right\} = \frac{1}{2}\,(B_1^- + B_2^- + B_3^- + B_4^- + B_5^- + B_6^-).$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} J_i^+ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_+} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi)\, B_i^+, \quad i = 1, 2, \cdots, 6, \\ J_i^- &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_-} \frac{d(\mu)}{L(\mu)} \int\limits_a^b d\sigma(\xi)\, B_i^-, \quad i = 1, 2, \cdots, 6. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Тогда

$$J_\Gamma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6} (J_i^+ + J_i^-). \tag{3.9}$$

Начнем с оценок B_i^+ и B_i^- $(i=1, 2, \cdots, 6)$. Имеем

$$|B_4^+| + |B_6^+| \leqslant 2\int\limits_0^{\frac{2\pi}{|\alpha|}} e^{-\beta\eta}\, |\varphi(\xi-\eta)|\, d\eta.$$

Пусть $M = \sup\limits_{[a_1+\varepsilon,\, b_1-\varepsilon]} |f(z)|$. Тогда $|\varphi(\xi-\eta)| = |f(z) - f(\xi-\eta+z)| \leqslant 2M$, $e^{-\beta\eta} \leqslant 1$, и, следовательно,

$$|B_4^+| + |B_6^+| \leqslant \frac{8\pi M}{|\alpha|}.$$

В силу этой оценки согласно (3.8) получаем

$$|J_4^+|+|J_6^+|\leqslant\frac{V}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{8\pi M}{|\alpha|}\cdot\frac{ds}{L(\mu)}\leqslant\frac{8MV}{A}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\theta}{\cos\theta e^{q\rho_k\sin\theta}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8MV}{A\cos\varphi_0}\int\limits_0^{\varphi_0}e^{-\frac{2}{\pi}q\rho_k\theta}\,d\theta\leqslant\frac{4MV\pi}{Aq\rho_k\cos\varphi_0}=\frac{1}{\cos\varphi_0}\,O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \qquad (3.10)$$

Та же оценка справедлива для B_4^-, B_6^- и J_4^-, J_6^-. Теперь отметим неравенства

$$|B_3^+|+|B_5^+|\leqslant 2\int\limits_{\xi}^{\xi+\frac{2\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\eta}\,|\varphi(\xi-\eta)|\,d\eta\leqslant 2\omega\left(\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_{\xi}^{\xi+\frac{2\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\eta}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant 2\omega\left(\frac{2\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_{-q}^{-q+\frac{2\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\eta}\,d\eta,$$

так как $\beta\geqslant 0$. Известно, что для любого модуля непрерывности справедливо соотношение $\omega(\lambda\delta)<(\lambda+1)\,\omega(\delta)$, каковы бы ни были $\lambda>0$, $\delta>0$. Стало быть

$$|B_3^+|+|B_5^+|\leqslant 2\omega\left(\frac{2}{\cos\varphi_0}\cdot\frac{\pi}{\rho_k}\right)\int\limits_{q-\frac{2\pi}{|\alpha|}}^{q}e^{\beta\eta}\,d\eta\leqslant 2\left(\frac{2}{\cos\varphi_0}+1\right)\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\frac{e^{\beta q}-1}{\beta},$$

и поэтому, учитывая лемму 1,

$$|J_3^+|+|J_5^+|\leqslant\frac{2V}{A\pi}\left(1+\frac{2}{\cos\varphi_0}\right)\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)(c_1+\ln\rho_k+o(1)). \qquad (3.11)$$

Для $|J_3^-|$, $|J_5^-|$ получаем такую же оценку. Обратимся к B_2^+. Имеем

$$|B_2^+|\leqslant\omega\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi+\frac{\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\left(\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right)}\,d\eta\leqslant\omega\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_{-q+\frac{2\pi}{|\alpha|}}^{\frac{2\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\eta}\,d\eta=$$

$$=\omega\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_{-\frac{2\pi}{|\alpha|}}^{q-\frac{2\pi}{|\alpha|}}e^{-\beta\eta}\,d\eta\leqslant 2\omega\left(\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\int\limits_0^q e^{\beta\eta}\,d\eta\leqslant 2\left(1-\frac{1}{\cos\varphi_0}\right)\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\frac{e^{\beta q}-1}{\beta}.$$

В силу этого

$$|J_2^+|\leqslant\frac{2V}{A\pi}\left(1+\frac{1}{\cos\varphi_0}\right)\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)(c_1+\ln\rho_k+o(1)). \qquad (3.12)$$

Таким же путем неравенство (3.12) устанавливается для J_2^-. Оценка J_1^+ и J_1^- будет проведена по другой схеме. Имеем

$$|J_1^+| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{d\mu}{L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi+\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\mu\eta}\,\varphi(\xi-\eta)\,(1-e^{-\beta\frac{\pi}{|\alpha|}})\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{ds}{|L(\mu)|}\sup_{\xi}\left|\int\limits_{\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi+\frac{\pi}{|\alpha|}}\varphi(\xi-\eta)e^{i\mu\eta}\,(1-e^{-\beta\frac{\pi}{|\alpha|}})\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{ds}{|L(\mu)|}\int\limits_{-q+\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}}\omega(q+\eta)\,[e^{-\beta\eta}-e^{-\beta\left(\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right)}]\,d\eta.$$

При последнем переходе была использована лемма 8. Далее, так как $|L(\mu)| > Ae^{|\beta|q}$, получаем

$$|J_1^+| \leqslant \frac{V}{2\pi A}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\int\limits_{-q+\frac{\pi}{\rho_k}}^{0}\omega(q+\eta)\,[e^{-\beta\eta}-e^{-\beta\left(\eta+\frac{\pi}{|\alpha|}\right)}]\,d\eta\,+$$

$$+\frac{V}{2\pi A}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{ds}{e^{|\beta|q}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{|\alpha|}}\omega(q+\eta)\,e^{-\beta\eta}(1-e^{-\beta\frac{\pi}{|\alpha|}})\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi A}\int\limits_{\Gamma_+}ds\int\limits_{-q+\frac{\pi}{\rho_k}}^{0}\omega(q+\eta)[e^{-\beta(q+\eta)}-e^{-\beta\left(q+\eta+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\,d\eta+\frac{MV}{\pi A}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{\pi}{|\alpha|}\times$$

$$\times\frac{ds}{e^{|\beta|q}} = \frac{V}{2\pi A}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\omega(t)\,dt\int\limits_{\Gamma_+}[e^{-\beta t}-e^{-\beta\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\,ds+\frac{2MV}{A}\int\limits_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\cos\varphi\, e^{q\rho_k\sin\varphi}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi A}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\omega(t)\,dt\int\limits_{\Gamma_+}[e^{-\beta t}-e^{-\beta\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\,ds+\frac{MV\pi}{Aq\rho_k\cos\varphi_0}. \tag{3.13}$$

Оценим внутренний интеграл. Имеем

$$K=\int\limits_{\Gamma_+}[e^{-\beta t}-e^{-\beta\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\,ds = 2\rho_k\int\limits_0^{\varphi_0}[e^{-\rho_k t\sin\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\sin\varphi}]\,d\varphi=$$

$$=2\rho_k\left\{\int\limits_0^{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}}+\int\limits_{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}}^{\frac{\pi}{2\rho_k t}}+\int\limits_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0}\right\}=2\rho_k\,\{K_1+K_2+K_3\}. \tag{3.14}$$

При оценке K_2 увеличим верхний предел, а к подынтегральной функции, как функции t, применим теорему Лагранжа. В результате получим

$$K_2 \leqslant \int\limits_{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}}^{\arcsin\frac{1}{\rho_k t}} \frac{\pi}{\alpha_0}\rho_k \sin\varphi\, e^{-\rho_k (t+h)\sin\varphi}\, d\varphi, \quad 0<h<\frac{\pi}{\alpha_0}.$$

Так как $\alpha_0=\rho_k\cos\varphi_0$, а $\sin\varphi\leqslant\frac{1}{\rho_k t}$ в интервале интегрирования, то

$$K_2 \leqslant \frac{\pi}{\rho_k t\cos\varphi_0} \int\limits_{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}}^{\arcsin\frac{1}{\rho_k t}} e^{-\rho_k (t+h)\sin\varphi}\, d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{\rho_k t\cos\varphi_0}\int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{\rho_k t}} e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k t\varphi}\, d\varphi \leqslant \frac{\pi^2}{2\rho_k^2 t^2\cos\varphi_0}. \tag{3.15}$$

При оценке K_1 и K_3 воспользуемся следствием из леммы 9

$$K_1=\int\limits_0^{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}} \left[e^{-\rho_k t\sin\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\sin\varphi}\right]d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}} \left[e^{-\rho_k t\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi \leqslant \int\limits_0^{\varphi_0}\left[e^{-\rho_k t\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi,$$

$$K_3=\int\limits_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0}\left[e^{-\rho_k t\sin\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\sin\varphi}\right]d\varphi \leqslant \int\limits_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0}\left[e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k t\varphi}-e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^{\varphi_0}\left[e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k t\varphi}-e^{-\frac{2}{\pi}\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{2}{\pi}\varphi_0}\left[e^{-\rho_k t\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi.$$

Отсюда

$$K_1+K_3\leqslant\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\int\limits_0^{\varphi_0}\left[e^{-\rho_k t\varphi}-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi}\right]d\varphi=$$

$$=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{1-e^{-\rho_k t\varphi_0}}{\rho_k t}-\frac{1-e^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi_0}}{\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1+\frac{\pi}{2}}{\rho_k}\left[\frac{t+\frac{\pi}{\alpha_0}-t}{t\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}-\frac{\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)e^{-\rho_k t\varphi_0}-te^{-\rho_k\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)\varphi_0}}{t\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\alpha_0\rho_k t^2}=\frac{\pi\left(1+\frac{\pi}{2}\right)}{\rho_k^2 t^2\cos\varphi_0}. \tag{3.16}$$

На основании оценок (3.15) и (3.16), используя формулу (3.14), будем иметь

$$K\leqslant\frac{2\pi(1+\pi)}{\rho_k^2 t^2\cos\varphi_0}. \tag{3.17}$$

Теперь возвратимся к соотношению (3.13). В силу (3.17) имеем

$$|J_1^+|\leqslant\frac{V(1+\pi)}{2A\rho_k\cos\varphi_0}\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+\frac{1}{\cos\varphi_0}O\left(\frac{1}{\rho_k}\right),\ \rho_k\uparrow\infty.$$

Но

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\frac{\omega(t)\,dt}{t^2}=\int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q}\frac{\omega(t)}{t}\,d\ln t\leqslant\sup_{\left[\frac{\pi}{\rho_k},\,q\right]}\frac{\omega(t)}{t}\cdot\operatorname*{var}_{\left[\frac{\pi}{\rho_k},\,q\right]}\ln t=\frac{\omega(t_0)}{t_0}\left[\ln q-\ln\frac{\pi}{\rho_k}\right]\leqslant$$

$$<\frac{2}{\pi}\rho_k\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\left[\ln\frac{q}{\pi}+\ln\rho_k\right],\quad\text{ибо}\quad\frac{\omega(t_0)}{t_0}\leqslant 2\,\frac{\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)}{\frac{\pi}{\rho_k}},\ \text{если}\ \frac{\pi}{\rho_k}<t_0.$$

Таким образом

$$|J_1^+|\leqslant\frac{V(1+\pi)}{A\pi\cos\varphi_0}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\left[\ln\rho_k+\ln\frac{q}{\pi}\right]+\frac{1}{\cos\varphi_0}O\left(\frac{1}{\rho_k}\right),\ \rho_k\uparrow\infty. \tag{3.18}$$

Остается оценить J_1^-. Применяя лемму 9 и условие (1.1), имеем

$$|J_1^-|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{d\mu}{L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}}e^{i\mu\eta}\varphi(\xi-\eta)\left[1-e^{\beta\frac{\pi}{|\alpha|}}\right]d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{ds}{|L(\mu)|} \sup_{\xi} \left| \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi-\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\mu\eta} \varphi(\xi-\eta)\,[1-e^{\beta\frac{\pi}{|\alpha|}}]\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{ds}{|L(\mu)|} \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{q-\frac{\pi}{|\alpha|}} \omega(q-\eta)\,[e^{-\beta\eta} - e^{-\beta\left(\eta-\frac{\pi}{|\alpha|}\right)}]\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2A\pi} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{ds}{e^{|\beta| q}} \int\limits_{0}^{q-\frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q-\eta)\,[e^{-\beta\eta} - e^{-\beta\left(\eta-\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\, d\eta +$$

$$+ \frac{V}{2A\pi} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{ds}{e^{|\beta| q}} \int\limits_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{0} \omega(q-\eta)\, e^{-\beta\eta}\,[1-e^{\beta\frac{\pi}{\alpha_0}}]\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{V}{2A\pi} \int\limits_{0}^{q-\frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q-\eta)\, d\eta \int\limits_{\Gamma_-} [e^{-|\beta|(q-\eta)} - e^{-|\beta|\left(q-\eta+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\, ds +$$

$$+ \frac{MV}{A\pi} \int\limits_{\Gamma_-} \frac{\pi}{|\alpha|} \cdot \frac{ds}{e^{|\beta| q}} =$$

$$= \frac{V}{2A\pi} \int\limits_{\frac{\pi}{\rho_k}}^{q} \omega(t)\, dt \int\limits_{\Gamma_+} [e^{-\beta t} - e^{-\beta\left(t+\frac{\pi}{\alpha_0}\right)}]\, ds + \frac{MV}{A\pi} \int\limits_{\Gamma_+} \frac{\pi}{|\alpha|} \cdot \frac{ds}{e^{|\beta| q}}.$$

Последняя сумма в точности совпадает с (3.13), поэтому для J_Γ^- верно неравенство (3.18). Весь интеграл по Γ имеет в результате оценку (учитывая (3.11), (3.12), (3.10), (3.18))

$$|J_\Gamma| \leqslant \frac{2V}{A}\, \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \left[\frac{(1+\pi)}{\cos\varphi_0} \ln \frac{q\rho_k}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(2+\frac{3}{\cos\varphi_0}\right)(c_1 + \ln\rho_k + o(1)) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\cos\varphi_0}\, O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \tag{3.19}$$

Объединяя теперь (3.7) и (3.19) и обозначая через H_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) постоянные, не зависящие от ρ_k и φ_0, получаем

$$|J_{\rho_k}| \leqslant |J_\Gamma| + |J_\gamma| \leqslant$$

$$\leqslant H_1 \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \left\{ H_2 \ln\rho_k + \frac{H_3}{\varphi_0} + \frac{H_4 + H_5 \ln\rho_k + o(1)}{\cos\varphi_0} + H_6 + o(1) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{\cos\varphi_0}\, O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Если положить теперь $\varphi_0 = O\left(\frac{1}{\ln \rho_k}\right)$, то будем иметь $|J_{\rho_k}| = = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\ln\rho_k\right]$, $\rho_k \uparrow \infty$, и теорема доказана.

Выкладки, приведенные здесь, позволяют утверждать также, что верна

Теорема 6. *Пусть функция $f(z)$, удовлетворяющая уравнению* (A), *имеет в интервале* (a_1, b_1) *непрерывные производные до порядка n включительно, и пусть* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f^{(n)}(z)$ *на отрезке* $[a_1+\varepsilon, b_1-\varepsilon]$, $\left(0<\varepsilon<\frac{q}{2}\right)$. *Если выполняется условие* (1.2) *теоремы* 2, *то для* $z \in [a_1+q+\varepsilon, b_1-q-\varepsilon]$

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = O\left[\rho_k^{p-n}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\ln\rho_k\right],\quad \rho_k \uparrow \infty.$$

В самом деле, формула (1.3), применявшаяся при доказательстве теоремы 2, может быть преобразована к виду

$$S_{\rho_k}(z, f) - f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta} f^{(n)}(\xi-\eta+z)\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta}\left[f^{(n)}(\xi-\eta+z) - f^{(n)}(z)\right]d\eta +$$

$$+\frac{f^{(n)}(z)}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=\rho_k}\frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)}\int\limits_a^b d\sigma(\xi)\int\limits_0^\xi e^{i\mu\eta}\,d\eta.$$

Из доказательства теоремы 5 ясно, что при $\rho_k \uparrow \infty$ первое слагаемое имеет порядок $\rho_k^{p-n}\,\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)\ln\rho_k$; порядок же второго слагаемого, как нетрудно подсчитать, применяя лемму 2, равен ρ_k^{p-n-1}.

§ 5. Бесконечно дифференцируемые функции

Во всех предыдущих теоремах существенным образом использовались ограничения на рост функции $L(\mu)$ снизу. Из теоремы 2 и 6 следует, что чем больше производных у функции $f(z)$ в интервале (a_1, b_1), тем слабее условия на рост $L(\mu)$, обеспечивающие сходимость $S_{\rho_k}(z, f)$. В связи с этим уместно отметить теорему, доказанную в (1), где подобные условия вообще отсутствуют. Она утверждает, что если $f(z)$, удовлетворяющая уравнению (A), аналитична в (a_1, b_1), то существует система окружностей $|\mu| = \rho_k$, $\rho_k \to \infty$, обладающая следующим свойством: для любого компакта $E \subset (a_1-a, b_1-b)$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого

$$\delta_1,\ 0<\delta_1<\delta,\ |f(z)-S_{\rho_k}(z, f)|<e^{-\delta_1\rho_k},\ k>K(\delta_1),$$

для всех z из некоторого прямоугольника, содержащего E.

При доказательстве теоремы использовалась доказанная там же лемма. Пусть $L(\mu)=\int\limits_{-q}^{q} e^{i\mu t}\, d\sigma(t)$, а функция $\sigma(z)$ имеет на отрезке $[-q, q]$ ограниченную вариацию. Тогда существует последовательность окружностей $|\mu|=\rho_k$, $\rho_k\uparrow\infty$ и число $p>0$ такие, что

$$\ln|L(re^{i\theta})|>(q\,|\sin\theta|-\varepsilon)\, r,\ \rho_k-p\leqslant r\leqslant\rho_k+p,\ k>K(\varepsilon).$$

Будем называть систему окружностей, фигурирующих в этой лемме, фундаментальной. Докажем теорему о скорости сходимости $S_{\rho_k}(z, f)$, если $f(z)$ принадлежит некоторому квазианалитическому классу, а окружности фундаментальной системы удовлетворяют некоторому дополнительному условию.

Теорема 7. *Пусть функция $f(z)$, удовлетворяющая уравнению* (A), *бесконечно дифференцируема в (a_1, b_1) и существуют последовательность $\{n_s\}$, $s=1, 2,\cdots$ натуральных чисел и число $M>0$ такие, что*

$$\sqrt[n_s]{M_{n_s}}\leqslant n_s\cdot M.\quad M_{n_s}=\sup_{(a_1, b_1)}|f^{(n_s)}(z)|. \tag{5.1}$$

Если $\sup\limits_{k>0}\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}=\lambda<+\infty$, то существует подпоследовательность $|\mu|=\rho_{k_l}$, $\rho_{k_l}\uparrow\infty$ окружностей фундаментальной системы такая, что для любого δ_1, $0<\delta_1<(Me\lambda)^{-1}$, и для всех $z\in(a_1-a, b_1-b)$

$$|f(z)-S_{\rho_{k_l}}(z, f)|\leqslant\exp(-\delta_1\rho_{k_l}),\quad l>J(\delta_1).$$

Из доказательства теоремы 2, а также из приведенной леммы следует, что при любом натуральном n

$$|f(z)-S_{\rho_k}(z, f)|\leqslant c(V)\, M_n e^{\varepsilon\rho_k}\ \rho_k^{-n}\ln\rho_k,\ \varepsilon>0,\ k>K(\varepsilon).$$

Благодаря условию (5.1)

$$|f(z)-S_{\rho_k}(z, f)|\leqslant c(V)\ (M\cdot n_s)^{n_s}\cdot\rho_k^{-n_s}\cdot e^{\varepsilon\rho_k}\ \ln\rho_k=$$

$$=c(V)\left(\frac{n_s}{e\delta\rho_k}\right)^{n_s} e^{\varepsilon\rho_k}\ln\rho_k,\ \text{где}\quad \delta=\frac{1}{Me}. \tag{5.2}$$

Будем рассматривать такую подпоследовательность $|\mu|=\rho_{k_l}$, $\rho_{k_l}\to\infty$ окружностей фундаментальной системы, что между двумя соседними числами $\delta\rho_{k_l}$ и $\delta\rho_{k_{l-1}}$ содержится по крайней мере одно n_s из последовательности $\{n_s\}$. Неравенство (5.2) верно для фиксированных ε, ρ_k и всех n_s. В качестве n_s возьмем наибольшее, удовлетворяющее условию $n_s\leqslant\delta\rho_{k_l}$. Тогда

$$|f(z)-S_{\rho_{k_l}}(z, f)|<\left(\frac{\delta\rho_{k_l}}{e\delta\rho_{k_l}}\right)^{\delta\rho_{k_l}-1} e^{\varepsilon\rho_{k_l}} \ln \rho_{k_l}\cdot C(V) \leqslant$$

$$\leqslant c(V)\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\delta}{\lambda}\rho_{kl}}\cdot e^{\varepsilon\rho_{kl}}\cdot \ln\rho_{k_l}=c(V)\, e^{-\left(\frac{\delta}{\lambda}-\varepsilon\right)\rho_{k_l}} \ln\rho_{k_l}.$$

Можно считать, что ε выбрано таким образом, что $0<\varepsilon<\frac{\delta}{\lambda}-\delta_1$.

Следовательно, для всех $\rho_{k_l}>\rho(\delta_1)$

$$|f(z)-S_{\rho_{k_l}}(z, f)|\leqslant \exp(-\delta_1\rho_{k_l}), \quad z\in(a_1-a,\ b_1-b),$$

что и утверждалось.

Замечание 1. Если $f(z)$ аналитична в (a_1, b_1), то в качестве последовательности $\{n_s\}$ можно взять последовательность всех натуральных чисел и доказать, что для $z\in(a_1-a,\ b_1-b)$

$$|f(z)-S_{\rho_k}(z, f)|\leqslant \exp(-\delta_1\rho_k),$$

не ограничивая расположения окружностей $|\mu|=\rho_k$, так как для любого ρ_k найдется n такое, что $\delta\rho_k-1\leqslant n\leqslant\delta\rho_k$.

Замечание 2. Если функция $f(z)$, удовлетворяющая уравнению. (A), является целой, то для $z\in(a_1-a,\ b_1-b)$

$$\left(\sup_z|f(z)-S_{\rho_k}(z, f)|\right)^{\frac{1}{\rho_k}}\to 0,\ \rho_k\to\infty,$$

где ρ_k обозначает радиус k-той окружности фундаментальной системы.

Это утверждение можно доказать, выбирая для ρ_k целое n так же, как в предыдущем замечании и, учитывая, что для любой целой функции

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n}=0.$$

Автор искренне благодарит профессора А. Ф. Леонтьева, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский энергетический институт Поступило 30.III.1967

Ա. Մ. ՍԵԴԼԵՑԿԻ

ՄԻՋԻՆ ԻՄԱՍՏՈՎ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՐԻԽԼԵՑԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՄԲ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

$f(z)$ ֆունկցիայի համար, որը հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծումը

$$\int_a^b f(z+t)\, d\sigma(t)=0,$$

որոշակի ձևով կառուցվում է Դիրիխլեի բազմանդամների հաջորդականություն։ Ուսումնասիրվում է այդ հաջորդականության զուգամիտության արագությունը f(z) ֆունկցիայի և

$$L(\mu)=\int_a^b e^{i\mu t}\,d\sigma(t)$$

տերմիններով։

A. M. SEDLETZKI

ON THE REPRESENTATION OF THE PERIODIC IN THE MEAN FUNCTIONS BY THE SERIES OF DIRICHLET POLINOMIALS

Summary

For the function $f(z)$, which is a solution of the equation

$$\int_a^b f(z+t)\,d\sigma(t)=0,$$

in a certain manner a sequence of Dirichlet polinomials is formed. The rate of convergence of that sequence in terms of the functions $f(z)$ and $L(\mu)=\int_a^b e^{i\mu t}\,d\sigma(t)$ is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев.* О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, серия матем., 29, 1965, 269—328.
2. *S. Verblunsky.* On an expansion in exponential series, Quart. J., Math., 7, № 27, 1956, 231—240.
3. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, Москва, „Мир“, т. 1, 1965.
4. *А. Ф. Тиман.* Теория приближения функций действительного переменного, Москва, Физматгиз, 1960.
5. *И. П. Натансон.* Конструктивная теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
7. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

В. Г. ВЕРДИЕВ

О РАСПОЛОЖЕНИИ (e)-ТОЧЕК В СЛУЧАЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

1. Пусть функции $\{\varphi_k(x)|_{k=0}^{n+1}$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Будем писать $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1}\in T^*_{n+1}$, если любые многочлены $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$, $P_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n+1} b_k\varphi_k(x)\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2>0, \sum_{k=0}^{n+1} b_k^2>0\right)$ и их производные $P_n'(x)$, $P_{n+1}'(x)$ имеют, соответственно, не более n и $n+1$ корней. Для любой непрерывной функции $f(x)$ на $[a, b]$, как обычно определяется норма

$$\|f\|_{[a,b]}=\max_{a<x<b}|f(x)|.$$

Через $E_n(f)$ и $E_{n+1}(f)$ обозначим наилучшие приближения функции $f(x)$ посредством многочленов по системам $\{\varphi_k(x)|_{k=0}^{n}$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1}\in T^*_{n+1}$ на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$E_n(f)=\min_{P_n}\|f-P_n\|_{[a,b]}\ \text{и}\ E_{n+1}(f)=\min_{P_n}\|f-P_{n+1}\|_{[a,b]}.$$

Обозначим через $P_n^*(x)$ и $P_{n+1}^*(x)$ многочлены наилучшего приближения, соответственно, порядка n и $n+1$ для функции $f(x)$, так что

$$E_n(f)=\|f-P_n^*\|,\quad E_{n+1}(f)=\|f-P_{n+1}\|.$$

Назовем *(e)-точкой* многочлена $P_n^*(x)$ любую точку $u\in[a, b]$, для которой

$$|f(u)-P_n^*(u)|=E_n(f).$$

Известно, что многочлен $P_n^*(x)$ имеет не менее $n+2$ (e)-точек $u_0, u_1,\cdots, u_{n+1}$ $(a\leqslant u_0<u_1<\cdots<u_{n+1}\leqslant b)$, в которых значения функции $f(x)-P_n^*(x)$ попеременно положительны и отрицательны.

С. Пашковский [1], [2] указал отрезки $[r_k, s_k]\subset[a, b]$, которым принадлежат (e)-точки u_k $(k=0, 1,\cdots, n+1)$ в случае, когда приближение осуществляется алгебраическими многочленами.

2. В настоящей заметке дается обобщение теоремы С. Пашковского на случай, когда рассматривается приближение многочленами по системе T^*_{n+1}. С одной стороны, мы следуем обозначениям и плану С. Пашковского [1], [2], с другой—мы опираемся на метод и результаты В. С. Виденского [3], [4], [5], касающиеся обобщения теоремы C. Davis'а [6] (см. также Mycielski J. and Paszkowski S. [7], Kudela J. [8]).

Не нарушая общности, в дальнейшем, положим $a=-1$, $b=1$. Через $z_1^p, z_2^p, \cdots, z_{n+1}^p$ будем обозначать корни многочлена $P_{n+1}(x)$. Индекс p при z_k показывает, что $\{z_k^p\}_{k=1}^{n+1}$ — корни многочлена $P_{n+1}(x)$.

Обозначим через $W_{n+1,h}$ класс многочленов по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) все корни $z_1^p, z_2^p, \cdots, z_{n+1}^p$ многочлена $P(x) \in W_{n+1,h}$ вещественны и $-1 < z_1^p < z_2^p < \cdots < z_{n+1}^p < 1$;

б) $\min\limits_{0<k<n+1} \|P\|_{[z_k, z_{k+1}]} \geqslant h \|P\|_{[-1,1]}$, где $z_0=-1$, $z_{n+2}=1$ и $h \in (0,1]$*.

Точки, в которых $P'(x)=0$ для $P(x) \in W_{n+1,h}$ будем обозначать через $v_1^p, v_2^p, \cdots, v_n^p$ $(-1=v_0^p<v_1^p<\cdots<v_n^p<v_{n+1}^p=1)$.

Будем рассматривать многочлены $(n+1)$-го порядка $\tau_{nkh}(x) \in W_{n+1,h}$, удовлетворяющие условиям

$$\tau_{nkh}(v_j) = \begin{cases} (-1)^{n+1-j}h & \text{для} \quad j=0,1,\cdots,k-1, \\ (-1)^{n+1-j} & \text{для} \quad j=k,k+1,\cdots,n+1; \ k=0,1,\cdots,n+1. \end{cases}$$

Существование и единственность многочленов $\tau_{nkh}(x)$ вытекает из результатов работ [3], [4], [5].

3. Докажем следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два многочлена $n+1$-го порядка, а числа* $-1=v_0^p<v_1^p<\cdots<v_{n+1}^p=1$ и $-1=v_0^q<v_1^q<\cdots<v_{n+1}^q=1$ *являются, соответственно, точками экстремума многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Если*

$$P(v_i^p)=Q(v_i^q) \quad \text{при} \quad i=0,1,\cdots,j-1,\ j+1,\cdots,n+1$$

и

$$P(v_j^p)>Q(v_j^q) \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

то

$$v_i^p \leqslant v_i^q \quad \text{при } i=1,2,\cdots,j-1 \quad \text{и} \quad v_i^p \geqslant v_i^q \quad \text{при } i=j+1,\cdots,n^{**}. \quad (1)$$

Доказательство. Укажем процесс перехода от многочлена $P(x)$ к многочлену $Q(x)$, из которого будет следовать утверждение леммы, т. е. справедливость неравенств (1). Многочлен $P(x)$ можно рассматривать как интерполяционный с узлами интерполяции в точках $v_0^p, v_1^p, \cdots, v_{n+1}^p$ и значениями $P(v_0^p), P(v_1^p), \cdots, P(v_{n+1}^p)$ (см. [5]). Так как $P(v_j^q) > Q(v_j^q)$, то в промежутке (z_j^p, z_{j+1}^p) найдутся две точки (именно две точки, так как система $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$) μ и η, причем $\mu<\eta$ такие, что $P(\mu)=Q(v_j^q)=P(\eta)$. Выберем точку $\xi_j=0,5(\mu+\eta)$. Применяя метод доказательства теоремы 1 из [5] легко установить, что существуют многочлен $P_1(x)$ и точки

$$-1=\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \cdots, \xi_n, \xi_{n+1}=1$$

---

* Индекс p при z_k будем иногда для удобства опускать в тех местах, где это не может вызывать сомнений.

** Аналогичный результат был получен для алгебраических многочленов в монографии Е. В. Вороновской. Метод функционалов и его приложения, Л., 1963.

такие, что

$$-1=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_{j-1}<\xi_j<\xi_{j+1}<\cdots<\xi_n<\xi_{n+1}=1,$$

$P_1(\xi_k)=P(v_k^p)$ при $k=0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n+1$ и $P_1(\xi_j)=Q(v_j^q)$, причем

$$P_1'(\xi_k)=0 \text{ при } k=1,\cdots,j-1,\ j+1,\cdots,n.$$

Если точка ξ_j является точкой экстремума, то $P_1(x)\equiv Q(x)$, если же ξ_j не является точкой экстремума, то $\max\limits_{[z_j^p,\ z_{j+1}^p]}|P_1(x)|>|Q(v_j^q)|$. Тогда опять найдутся две точки μ_1,η_1 и $\mu_1<\eta_1$ такие, что $P_1(\mu_1)=Q(v_j^q)=$ $=P_1(\eta_1)$. Выберем далее $\xi_j'=0{,}5(\mu_1+\eta_1)$. Существуют многочлен $P_2(x)$ и точки $-1=\xi_0',\ \xi_1',\cdots,\xi_{j-1}',\ \xi_{j+1}',\cdots,\xi_n',\ \xi_{n+1}'=1$ такие, что $\xi_0'<\xi_1'<\cdots<\xi_{j-1}'<\xi_j'<\xi_{j+1}'<\cdots<\xi_n'<\xi_{n+1}'$; $P_2(\xi_k')=P(v_k^p)$ при $k=$ $=0,\ 1,\cdots,\ j-1,\ j+1,\cdots,\ n+1$ и $P_2(\xi_j')=Q(v_j^q)$, причем $P_2'(\xi_k')=0$ при $k=0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$. Если $P_2'(\xi_j')=0$, то $P_2(x)\equiv Q(x)$, если же $P_2'(\xi_j')\neq 0$, то $P_2(x)\not\equiv Q(x)$.

Теперь покажем, что

$$\xi_1<\xi_1',\quad \xi_2<\xi_2',\cdots,\ \xi_{j-1}<\xi_{j-1}';\ \xi_{j+1}>\xi_{j+1}',\ \cdots,\ \xi_n>\xi_n'. \tag{2}$$

Рассмотрим многочлен $P_2(x)$ как непрерывный образ многочлена $P_1(x)$, соответствующий непрерывному перемещению точки ξ_j в ξ_j'. Сместим точку ξ_j в точку $\tilde{\xi}_j$ и будем считать, что $|\xi_j-\tilde{\xi}_j|$ настолько мала, насколько нам понадобится. В $(v_0^p,\ v_j^p)$ и $(v_j^p,\ v_{n+1}^p)$ однозначно найдутся $n-1$ точек $\tilde{\xi}_1<\tilde{\xi}_2<\cdots<\tilde{\xi}_{j-1}<\tilde{\xi}_{j+1}<\cdots<\tilde{\xi}_n$, которые представляют собой соответственно малые смещения точек $\xi_1<\xi_2<\cdots$ $<\xi_{j-1}<\xi_{j+1}<\cdots<\xi_n$ таких, что многочлен $\tilde{P}(x)$ удовлетворяет равенствам

$$\tilde{P}(\tilde{\xi}_k)=P(v_k^p) \text{ при } k=0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,\ n+1;\ \tilde{P}(\tilde{\xi}_j)=Q(v_j^q) \text{ и}$$

$$\tilde{P}'(\tilde{\xi}_k)=0 \text{ при } k=1,\ 2,\cdots,\ j-1,\ j+1,\cdots,\ n,$$

где $\tilde{\xi}_0=-1,\ \tilde{\xi}_{n+1}=1$. Если $|\tilde{\xi}_k-\xi_k|$ при $k=1,\ 2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,\ n$ достаточно малы, то

$$\xi_1<\tilde{\xi}_1,\cdots,\ \xi_{j-1}<\tilde{\xi}_{j-1};\ \xi_{j+1}>\tilde{\xi}_{j+1},\ \cdots,\ \xi_n>\tilde{\xi}_n. \tag{3}$$

Действительно, если бы при некотором k для $k<j$ $\tilde{\xi}_k<\xi_k$ или для $k>j$ $\tilde{\xi}_k>\xi_k$, то многочлен $P_1(x)-\tilde{P}(x)$ имел бы в окрестности точки ξ_k два корня. В окрестности же каждого из ξ_i он имеет хотя бы один корень, и, следовательно, общее число его корней в $[v_0^p,\ v_{n+1}^p]$ было бы $\geqslant n+2$, так что на $[-1,\ 1]$ многочлен $P_1(x)-\tilde{P}(x)$ имел бы $\geqslant n+2$ корней. Этим доказаны неравенства (2), так как неравенства (3) не могут нарушаться при $\xi_j \to \xi_j'$.

Ясно, что если продолжим процесс по той же схеме, то получим последовательность многочленов $\{P_m(x)\}$ с соответствующими точками экстремума $\{\xi_k^{(m)}\}$ $(k=1, 2, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n$ и $\xi_0^{(m)}=-1$, $\xi_{n+1}^{(m)}=1)$, которые при фиксированном k будут монотонными и ограниченными, следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{m\to\infty} \xi_k^{(m)}=v_k^q$, а последовательность многочленов $\{P_m(x)\}$ сходится к $Q(x)$. Таким образом, лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *— два многочлена из* $W_{n+1,h}$, *которые удовлетворяют условиям леммы 1. Если*

$$[r_k^p,\ s_k^p]=[z_k^p,\ z_{k+1}^p] \cap \{x: |P(x)| > h\,\|P\|_{[-1,1]}\},$$

$$[r_k^q,\ s_k^q]=[z_k^q,\ z_{k+1}^q] \cap \{x: |Q(x)| > h\,\|P\|_{[-1,1]}\}$$

при $k=0, 1, \cdots, n+1$, *то*

$$r_k^q > r_k^p \text{ при } k=1, 2, \cdots, j \text{ и } r_k^q \leqslant r_k^p \text{ при } k=j+1, \cdots, n+1.$$

Следствие 2. *Если многочлены* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *удовлетворяют условиям леммы 1, то корни их удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$z_i^q > z_i^p \text{ при } i=1, 2, \cdots, j \text{ и } z_i^q \leqslant z_i^p \text{ при } i=j+1, \cdots, n+1.$$

Ясно, что если

$$\frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)}=g<1, \tag{4}$$

то многочлены наилучшего приближения $P_n^*(x)$ и $P_{n+1}^*(x)$ для непрерывной функции $f(x)$ будут, соответственно, порядка n и $n+1$.

Лемма 2. *Если* $E_n(f)$ *и* $E_{n+1}(f)$ *удовлетворяют неравенству* (4), *то для* (e)*-точек* u_k^n $(k=0, 1, \cdots, n+1)$ *имеют место следующие соотношения:*

$$u_k^n \in [z_k^p,\ z_{k+1}^p] \cap \{x: |P_n^*(x)-P_{n+1}^*(x)| \geqslant h\,\|P_n^*-P_{n+1}^*\|_{[-1,1]}\},$$

где z_k^p *— корни многочлена* $P(x)=P_n^*(x)-P_{n+1}^*(x)$,

$$h=\frac{E_n(f)-E_{n+1}(f)}{E_n(f)+E_{n+1}(f)}. \tag{x}$$

Доказательство. Легко заметить, что $P(x)=P_n^*(x)-P_{n+1}^*(x)$ имеет $n+1$ различных корней z_i^p $(i=1, 2, \cdots, n+1)$, и (e)-точки u_k^n $(k=0, 1, \cdots, n+1)$ принадлежат отрезкам $[z_k^p,\ z_{k+1}^p]$. Из определения (e)-точки для многочлена $P_n^*(x)$ следует

$$|f(u_k^n)-P_{n+1}^*(u_k^n)| \leqslant E_{n+1}(f)$$

и

$$|f(u_k^n)-P_n^*(u_k^n)|=E_n(f).$$

Далее имеем

$$|P_n^*(u_k^n) - P_{n+1}^*(u_k^n)| > |P_n^*(u_k^n) - f(u_k^n)| - |P_{n+1}^*(u_k^n) - f(u_k^n)| > E_n(f) - E_{n+1}(f)$$

при $k = 0, 1, \cdots, n+1$. Так как

$$\|P_n^* - P_{n+1}^*\| \leqslant \|P_n^* - f\| + \|P_{n+1}^* - f\| \leqslant E_n(f) + E_{n+1}(f),$$

то

$$\frac{|P_n^*(u_k^n) - P_{n+1}^*(u_k^n)|}{\|P_n^* - P_{n+1}^*\|_{[-1,1]}} > \frac{E_n(f) - E_{n+1}(f)}{E_n(f) + E_{n+1}(f)} = h$$

$(k = 0, 1, \cdots, n+1)$.

Откуда следует утверждение леммы 2.

Лемма 3. *Если $P(x) \in W_{n+1, h}$, где h определяется формулой* (x) *и*

$$[r_k^p, s_k^p] = [z_k^p, z_{k+1}^p] \cap \{x : |P(x)| > h \|P\|_{[-1,1]}\},$$

где $k = 0, 1, \cdots, n+1$, то

$$\inf_{p \in W_{n+1,h}} r_k^p = t_{k,h}, \tag{5}$$

$$\sup_{p \in W_{n+1,h}} s_k^p = t_{n+1-k,h}, \tag{6}$$

где $t_{k,h}$ — корень уравнения $|\tau_{nkh}(x)| = h$, который лежит на отрезке $[z_k^\tau, v_k^\tau]$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть многочлены $P(x) \in W_{n+1,h}$, для которых $\|P\|_{[-1,1]} = 1$ и $P(1) > 0$, так как от умножения многочлена $P(x)$ на число, отличное от нуля, числа r_k^p и s_k^p не изменяются. Нужно установить, что если $P(x) \in W_{n+1,h}$ и $P(x) \not\equiv \tau_{nkh}(x)$, то $r_k^p > t_{k,h}$. В самом деле, если хоть одно экстремальное значение многочлена $P(x)$ в точке v_i^p отлично от экстремального значения многочлена $\tau_{nkh}(x)$ в соответствующей точке v_i^τ, то по следствию 1 будут справедливы требуемые неравенства $r_k^p \geqslant t_{k,h}$.

Для установления равенств (6) достаточно рассмотреть вместо многочлена $\tau_{nkh}(x)$ многочлен $\tau_{nkh}(-x)$ и провести рассуждения, аналогичные приведенным выше.

Лемма 4. *Для любых n и k $t_{k,h}$ есть возрастающая функция от h.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству теоремы 9:5 из [2], стр. 82.

4. Теперь докажем следующую теорему.

Теорема. *Для всех непрерывных функций $f(x)$, у которых наилучшие приближения $E_n(f)$ и $E_{n+1}(f)$ удовлетворяют неравенству* (4), *имеют место неравенства:*

$$\begin{cases} -1 \leqslant u_0^n \leqslant -t_{n+1,c}, \\ t_{k,c}^n \leqslant u_k^n \leqslant -t_{n+1-k,c} \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \\ t_{n+1,c}^n \leqslant u_{n+1}^n \leqslant 1, \quad \text{где } c = \dfrac{1-g}{1+g}. \end{cases} \tag{7}$$

Доказательство. Из лемм 2 и 3 мы имеем неравенства

$$-1 \leqslant u_0^n \leqslant t_{n+1,\,h},$$

$$t_{k,\,h} \leqslant u_k^n \leqslant -t_{n+1-k,\,h} \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

$$t_{n+1,\,h} \leqslant u_{n+1}^n \leqslant 1,$$

где $\quad h = \dfrac{E_n(f) - E_{n+1}(f)}{E_n(f) + E_{n+1}(f)}$.

Так как $E_{n+1}(f)/E_n(f) \leqslant g < 1$, то мы имеем $h > \dfrac{1-g}{1+g}$.

Из леммы 4 следует справедливость неравенств (7).

5. *Заметим, что неравенства* (7) *для* (e)*-точек справедливы также в случае, когда приближение осуществляется для непрерывных периодических функций* $f(x)$ ($f(a) = f(b)$) *посредством многочленов* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ *по системе* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ *такой, что* $\varphi_k(a) = \varphi_k(b)$, $k = 0, 1, \cdots, n$ (см. [4], [5]).

Неравенства (7) *установлены для класса многочленов* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ из T_{n+1}^{*}, *но можно получить неравенства типа* (7) *при более слабых требованиях, налагаемых на систему* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$ (см. [5]). *В частности, можно снять требование дифференцируемости системы* $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n}$.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность моему научному руководителю проф. В. С. Виденскому за помощь и дружеское внимание.

Ленинградский электротехнический институт связи
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича
Поступило 16.VI.1966

Վ. Գ. ՎԵՐԴԻԵՎ

ԿԵՏԵՐԻ ՏԵՂԱԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ՉԵԲԻՇԵՎԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿԵԼՈՒ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Այս աշխատանքում դիտված է այն բազմանդամի (e)*—կետերի դասավորությունը, որոնք մոտարկվում են Չեբիշևի ֆունկցիաների սիստեմով։ Ստացված անհավասարությունները բնութագրում են* (e)*—կետերի դասավորությունը, այն ենթադրությամբ, որ*

$$E_{n+1}(f)/E_n(f) < 1.$$

Այս աշխատանքը ընդհանրացնում է Ս. Պաշկովսկու թեորեմը [1], [2]։

V. G. VERDIEV

ON THE LOCATION OF (e)-POINTS IN THE CASE OF APPROXIMATION BY CHEBYSHEV SYSTEM POLINOMIALS

Summary

In this work the location of (e)-points of polynomials of the best approximation by Chebyshev function system is considered. Under the assumption that $E_{n+1}(f)/E_n(f) < 1$, the inequalities (7) are obtained which characterise the location of (e)-points. This result generalises the theorem of S. Paszkowski [1], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Ф. Пашковский*. О расположении (e)-точек полиномов наилучшего приближения, ДАН СССР, 117, № 4, 1957, 576—577.
2. *S. Paszkowski*. The theory of unifom approximation, I. Nonasymptotic theoretica problems, Rozprawy matematyczne, 26, Warszawa, 1962.
3. *В. С. Виденский*. Об одном классе интерполяционных многочленов с незакрепленными узлами, ДАН СССР, 162, № 2, 1965, 251—254.
4. *В. С. Виденский*. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи, исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Л., 1965, Сборник научных трудов, ЛМИ, № 50, 29—41.
5. *В. С. Виденский*. Теорема существования многочлена с данной последовательностью экстремумов, ДАН СССР, 171, № 1, 1966, 17—20.
6. *C. Davis*. Extrema of a polynomial, Amer. Math. Monthly, 64, № 9, 1957, 679—680.
7. *J. Mycielski* and *S. Paszkowski*. A generalisation of Chebyshev polynomyals. Bull. Acad. Polon. Sei., Sér. math., astr., phys., 8, № 7, 1960, 433—438.
8. *Jan Kudela*. Construction des certains polynômes extrémaux, Zesz, nauk. Uniw. jagiell.. 1963, № 77, 31—36.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

С. Е. МАРКОСЯН

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЗЫ ДУГ КОНЕЧНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Пусть дан конечный ориентированный граф* (орграф) $L=(X, U; P)$.

Условие А. Пусть в L существует два подграфа $L_1=(X_1, U_1; P)$ и $L_2=(X_2, U_2; P)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) L_1 и L_2 — бисвязные подграфы;

2) $X_1 \cap X_2 = \varnothing$;

3) $|U_{1,2}| \geqslant 2$, $U_{1,2}$ — множество дуг, идущих из вершин множества X_1 в вершины множества X_2;

4) в суграфе $(X, U \setminus U_{1,2}, P_{1,2})$ выполнено (см. рис. 1)

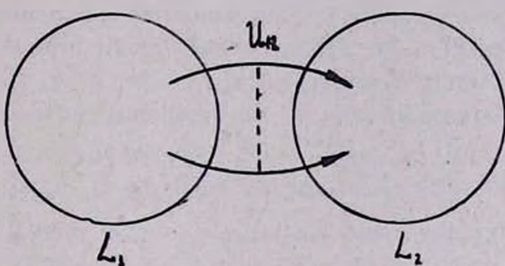

Рис. 1. Усл. А.

$$\forall x_1 \in X_1 \ \forall x_2 \in X_2 \ \overline{D}_{U|U_{1,2}}(x_1, x_2),$$

где $D_{U \setminus U_{1,2}}(x_1, x_2)$ — отношение достижимости.

Теорема. *Если в конечном ориентированном графе $L=(X, U; P)$ не выполнено условие A, то орграф обладает единственной базой дуг.* Мы докажем, что неединственность баз дуг влечет условие А.

Лемма. *Пусть конечный орграф $L=(X, U; P)$, удовлетворяет следующему условию B: в L существуют база дуг W, два подграфа $L_1=(X_1, U_1; P)$, $L_2=(X_2, U_2; P)$ такие, что*

1) *L_1 и L_2 — бисвязные подграфы,*

2) *$X_1 \cap X_2 = \varnothing$,*

3) *$W_1 = W \cap U_1$ является базой подграфа L_1,*

4) *$\exists w \in W \exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \ P(x_1, w, x_2)$;*

5) *если $w_0 \in W$ — дуга, для которой $\exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \ P(x_1, w_0, x_2)$, то в суграфе $(X, U \setminus w_0, P_0)$ выполнено $\exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \ D_{W \setminus w_0}(x_1, x_2)$; тогда L удовлетворяет условию A.*

* Мы придерживаемся терминологии и обозначений книги [2].

Доказательство леммы. Из пункта 5) следует существование пути, отличного от w_0 и соединяющего вершину $c \in X_1$ с вершиной $d \in X_2$. Обозначим его через $[c, d]$. Можно предположить, что длина этого пути $l[c, d] > 1$, в противном случае лемма была бы доказана. Очевидно путь $[c, d]$ можно предположить простым. Так как подграфы L_1 и L_2 бисвязные, то в L_1 выполнено $D_{W_1}(a, c)$ в силу 3), а в L_2 — $D_{U_2}(d, b)$, значит существуют простые пути $[a, c]$ и $[d, b]$. Дуги $[a, c]$ принадлежат W_1, а дуги $[d, b]$ принадлежат U_2. Простые пути $[a, c]$, $[c, d]$ и $[d, b]$ составляют простой путь $[a, c, d, b]$. Обозначим через z вершину, удовлетворяющую условию

$$(z \in [c, b]) \,\&\, (D_{W \setminus w_0}(c, z)) \,\&\, [\forall x \in [c, b]\, (D_{W \setminus w_0}(c, x) \to l[z, b] \leqslant l[x, b])], \quad (*)$$

где $[z, b]$, $[x, b] \subset [c, b]$, а $l[\cdots]$ означает длину пути $[\cdots]$. Вершина z не может совпадать с вершиной b, так как W — база. Возьмем путь $[c, z]$, дуги которого принадлежат $W \setminus w_0$. Отрезок пути $[c, b]$, соединяющий вершины z и b имеет длину, большую нуля: $l[z, b] > 0$, то есть существует дуга v, $v \in [z, b]$ и $(v \overline{\in} W) \,\&\, P(z, v, t)$. Имеем $D_U(z, t) \to D_{W'}(z, t)$. Но пути, соединяющие z и t, содержат дугу w_0, в противном случае условие (*) не выполняется, а именно $\forall x \in [c, b]$ $(D_{W/w_0}(c, x) \to l[z, b] \leqslant [x, b])$ не имеет место при $x = t$.

Рассмотрим один такой путь $[z, t] = [z, a, b, t]$. Ясно, что z может совпасть с вершиной c, а t — с вершиной b. Составим подграфы $L_1^{(1)} = (X_1^{(1)}, U_1^{(1)}; P)$ и $L_2^{(1)} = (X_2^{(1)}, U_2^{(1)}; P)$, где $L_1^{(1)} = L_1 \cup \mu$*, $\mu = [c, z, a] = [c, z]\,[z, a]$** $[z, a]$ — отрезок пути $[z, a, b, t]$;

$$L_2^{(1)} = \begin{cases} L_2 \cup \nu, & \text{если } X_\mu \cap X_2 = \varnothing \quad (\text{см. рис. } 2), \\ \nu, & \text{если } X_\mu \cap X_2 \neq \varnothing \quad (\text{см. рис. 3 и 4}), \end{cases}$$

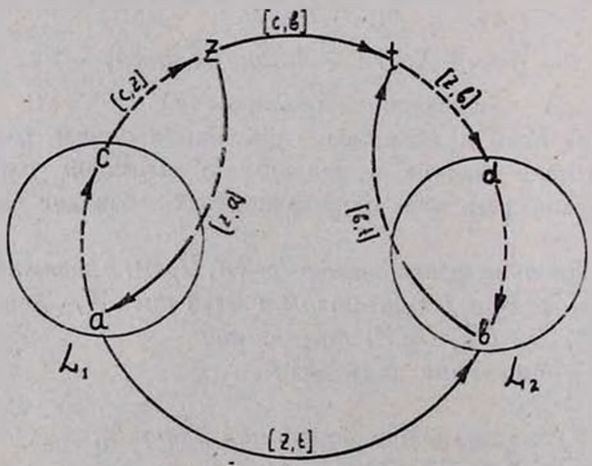

Рис. 2.

---

* Под $L_1 \cup \mu$ понимается подграф, порожденный множеством $X_1 \cup X_\mu$, X_μ — множество вершин, принадлежащих пути μ.

** Запись $[\cdots]\,[\cdots]$ означает путь, состоящий из двух путей $[\cdots]$ и $[\cdots]$.

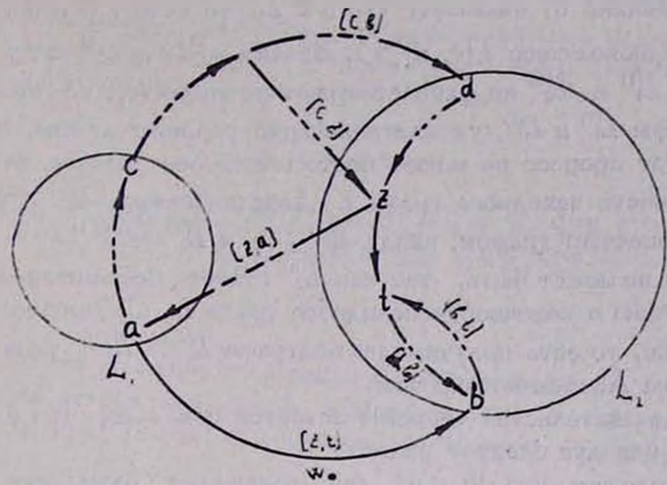

Рис. 3.

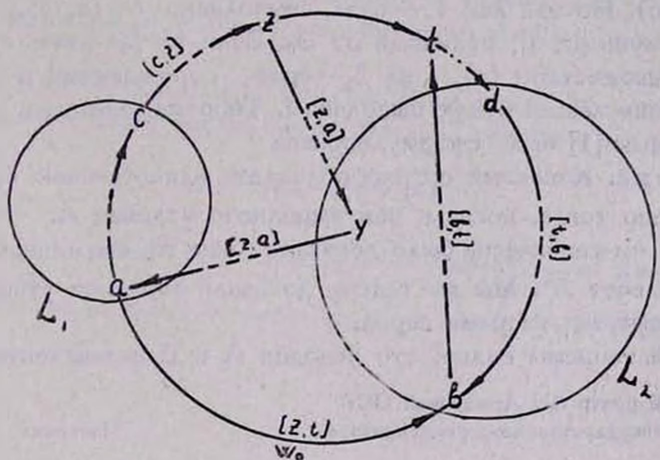

Рис. 4.

X_μ— множество вершин, принадлежащих пути μ, а $\nu=[t, b, t]=[t, b][b, t]$,$[t, b]$—отрезок пути $[z, b]$, значит и $[c, b]$, а $[b, t]$ отрезок из $[z, t]$.

Докажем, что $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ удовлетворяют всем условиям леммы.

Бисвязность $L_1^{(1)}$ следует из того, что $c, a \in X_1$ и из бисвязности L_1, а бисвязность $L_2^{(1)}$—из бисвязности ν и L_2 и из того, что $t \in X_2 \cap X_\nu \neq \varnothing$, $X_\nu \cap X_1^{(1)} = \varnothing$, так как $\overline{D}_{W/w_0}(c, t)$, откуда следует $X_1^{(1)} \cap X_2^{(1)} = \varnothing$, то есть 2); $W_1^{(1)} = W \cap U_1^{(1)}$ является базой $L_1^{(1)}$; условие 4) выполнено при $w = w_0$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $X_1 = X_1^{(1)}$, $X_2 = X_2^{(1)}$; условие 5) следует из существования дуги v, так как $z \in X_1^{(1)}$, а $t \in X_2^{(1)}$.

Заметим, что имеет место либо а) $L_1^{(1)} \supset L_1$ либо б) Если $L_1^{(1)}=L_1$, то $L_2^{(1)} \supset L_2$;

а) очевидно б) означает, что $\mu \subset L_1$, то есть $z = c$ и $t \overline{\in} X_2$, благодаря предположению $l\,[c,\ d] > 1$. Значит $v \overline{\in} L_2$ и $L_2^{(1)} \supset L_2$.

Если $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ не удовлетворяют условию A, то построим новые подграфы $L_1^{(2)}$ и $L_2^{(2)}$, удовлетворяющие условию леммы, и так далее. Но этот процесс не может повторяться бесконечное число раз, в силу конечности исходного графа L. Действительно, $L_1^{(n)}$ не может стать бесконечным графом, ввиду $L_1^{(n)} \subseteq L$, а $L_1^{(n)} = L_1^{(n+1)} = \cdots = L_1^{(n+k)} = = \cdots$ тоже не может быть, так как $L_2^{(n)}$ станет бесконечным вопреки предположению о конечности исходного графа L. Следовательно процесс конечен, то есть получим два подграфа $L_1^{(n_0)}$ и $L_2^{(n_0)}$, удовлетворяющих условию A. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы остается показать, что из неединственности баз дуг следует условие B.

Предположим, что W и V две различные базы дуг орграфа $L = (X,\ U;\ P)$. Значит существует w_0 такое, что $(w_0 \in W)\ \&\ (w_0 \overline{\in} V)\ \&\ \&\ P\,(a,\ w_0,\ b)$. Но так как V — база, выполнено $D_V\,(a,\ b)$, то есть существует путь $[a,\ b]$, отличный от w_0. Если за L_1 взять граф, порожденный множеством $\{a\}$, а за L_2 — граф, порожденный множеством $\{b\}$, то условия леммы будут выполнены. Теорема доказана.

Барздиным [1] была сформулирована

Т е о р е м а. Конечный орграф обладает единственной базой дуг тогда и только тогда, когда в нем выполнено условие $\overline{A}$.

Однако им фактически было доказано лишь то, что единственность базы дуг влечет $\overline{A}$*. Мы же теперь доказали обратное утверждение, так что упомянутая теорема верна.

Из этой теоремы видно, что условия A и B эквивалентны.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета
Поступило 1.VII.1967

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

ՕՐԻԵՆՏԱՑԻԱ ՈՒՆԵՑՈՂ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԱՂԵՂՆԵՐԻ ԲԱԶԱՅԻ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇ

Ա մ փ ո փ ու մ

Օրիենտացիա ունեցող կամայական վերջավոր գրաֆի աղեղների բազայի միակության հայտանիշ մինչև այժմ գոյություն չուներ։

Քյոնիգի կողմից տրված էին միայն բավարար պայմաններ, իսկ Բարզդինի կողմից—անհրաժեշտ պայման։

Այս հոդվածում ապացուցված է Բարզդինի կողմից տրված անհրաժեշտ պայմանի բավարարությունը, որի շնորհիվ ստացված է աղեղների բազայի

---

* См. также [2], глава 4, § 34.

միակության հայտանիշ օրիենտացիա ունեցող կամայական վերջավոր գրաֆի համար։ Հոդվածի վերջում բերված է Բարզդինի պայմանին էկվիվալենտ պայման, որը ավելի պիտանի է գործնական հարցերում։

S. E. MARKOSYAN

THE CRITERIUM OF SINGULARITY OF BASES OF ARCS FOR FINITE ORIENTED GRAPHS

Summary

Till now no criterium of singularity of bases of arcs for arbitrary finite oriented graphs was known. König has outlined only some sufficient conditions and the set of necessary conditions was proposed by Barzdin.

In the present article, the sufficientness of the conditions, the necessity of which was shown by Barzdin, is proved, and thus the criterium of singularity of bases of arcs for arbitrary finite oriented graph is obtained.

At the end of the article, the conditions which are equivalent to Barzdin's and are more applicable to practical problems are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. М. Барздинь.* Проблема базиса направленных графов, Уч. зап. Латв. унив., 28 1959, 33—34.
2. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов, 1, „Наука", 1967, Новосибирск.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի 1967 թ., հ. 2, № 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия „Математика" за 1967 г., т. 2, №№ 1—6

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian SSR, seria „Matematika“ vol. 2, Nos. 1—6, 1967