ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը ЦЕНА 30 կ. К. индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and nam the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН и В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

1°. Как известно [1], класс функций ограниченного вида N, введенный Р. Неванлинна, обладает следующими важными свойствами:

(а) если $F(z) \in N$, то предел

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta}) \tag{1}$$

существует всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$ линейной меры нуль;

(б) если функция $F(z) \not\equiv 0$ из класса N, то для ее граничных значений $F(e^{i\vartheta})$ выполняется условие

$$\int_0^{2\pi} |\log|F(e^{i\vartheta})|| \, d\vartheta < +\infty. \tag{2}$$

С другой стороны, в недавних работах [2], [3] введены новые классы N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ мероморфных в круге $|z| < 1$ функций и установлено их параметрическое представление.

Класс N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ определялся посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r; F) \equiv m_\alpha(r; F) + N_\alpha(r; F) \tag{3}$$

как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T_\alpha(r; F)\} < +\infty. \tag{4}$$

При этом функции $m_\alpha(r; F)$, $N_\alpha(r; F)$ и $T_\alpha(r; F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r; F)$, $N(r; F)$ и $T(r; F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha = 0$. Функции эти для каждого значения параметра α $(-1 < \alpha < \infty)$ определяются таким образом.

Пусть $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0 < \alpha < \infty$) или дифференцирования (при $-1 < \alpha < 0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке, т. е.

$$D^{-\alpha}\varphi(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \quad (0 < \alpha < \infty) \tag{5}$$

и

$$D^{-\alpha}\varphi(r) = \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)}\varphi(r) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

и пусть

$$D^{-\alpha}\varphi(r)\Big|_{\alpha=0}=\varphi(r),\ D^{-\alpha}_{(+)}\varphi(r)=\max\{D^{-\alpha}\varphi(r),\ 0\}. \tag{6}$$

Тогда для каждого α $(-1<\alpha<\infty)$

$$m_\alpha(r;F)\equiv m_\alpha(r;\infty)=\frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi}D^{-\alpha}_{(+)}\log|F(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta, \tag{7}$$

$$N_\alpha(r;F)\equiv N_\alpha(r;\infty)=\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}[\log r-k_\alpha]+k$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha}{t}[n(t;\infty)-n(0;\infty)]\,dt,\ k_\alpha=\alpha\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+\alpha)}, \tag{8}$$

где $n(0;\infty)$ означает кратность возможного полюса функции в точке $z=0$, $n(t,\infty)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$ и отличных от $z=0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Поскольку при значении параметра $\alpha=0$ имеем

$$T_0(r;F)\equiv T(r;F),$$

то $N_0\equiv N$, где N — класс функций ограниченного вида Р. Неванлинна.

Вместе с тем, важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0\quad(-1<\alpha<0). \tag{9}$$

2°. В связи со свойством (9) классов N_α естественно возникают два вопроса.

1. Не „утоньшается“ ли для функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$ то исключительное множество $E\subset[0,2\pi]$ нулевой линейной меры, где предел (1) возможно и не существует? Если да, то каким образом можно характеризовать его в зависимости от значения параметра α?

2. Нельзя ли утверждать для граничных значений функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$ нечто большее, чем конечность интеграла (2)?

В настоящей статье, привлекая понятие γ-емкости множеств [4], приводится положительное решение обеих поставленных выше задач.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0, 2\pi]$.

Будем называть *мерой* μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т. е. $\mu[0,2\pi]=1$. Будем говорить, что *мера сосредоточена на* B и писать $\mu\prec B$, если $\mu(B)=1$, т. е. если

$$\int_B d\mu=\int_0^{2\pi}d\mu=1.$$

Фростман и другие авторы ввели и изучили понятие γ-емкости множества. Мы не будем здесь указывать как надо находить величину γ-емкости множества, а лишь ограничимся тем, что приведем определение и будем различать множества *γ-емкости* положительной и равной нулю, а именно:

Множество E, измеримое B, имеет *положительную γ-емкость* $(0<\gamma<1)$, если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x;\ r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{|e^{it} - re^{ix}|^\gamma} \tag{10}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1-0$, то есть если при некотором $\mu \prec E$

$$V_\gamma(\mu) = \sup_{0<r<1} \left\{ \max_{0<x<2\pi} V_\gamma(x;\ r) \right\} < +\infty. \tag{11}$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$, то E имеет *γ-емкость, равную нулю;* и тогда будем писать $\mathrm{cap}_\gamma E = 0$.

Из самого определения непосредственно следуют следующие свойства множеств, имеющих нулевую γ-емкость:

а) если для данного γ $(0<\gamma<1)$, $\mathrm{cap}_\gamma E = 0$, то для любого γ' $(\gamma \leqslant \gamma' < 1)$ имеем также $\mathrm{cap}_{\gamma'} E = 0$;

б) если

$$\mathrm{cap}_\gamma E_k = 0 \quad (k = 1,\ 2, \cdots, p),$$

то имеем также

$$\mathrm{cap}_\gamma \left\{ \bigcup_1^p E_k \right\} = \mathrm{cap}_\gamma \left\{ \bigcap_1^p E_k \right\} = 0.$$

Следующие две основные теоремы дают ответ на поставленные выше вопросы о функциях класса N_α $(-1<\alpha<0)$.

Теорема 1. *Если $F(z) \in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$, то предел*

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

существует для любого $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, γ-емкость которого (где γ—любое число из интервала $1+\alpha<\gamma<1$) равна нулю.

Теорема 2. *Пусть $F(z) \in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ и $E \subset [0, 2\pi]$— любое множество с положительной γ-емкостью (где γ — любое число из интервала $1+\alpha<\gamma<1$). Тогда для любой меры $\mu \prec E$, у которой $V_\gamma(\mu) < +\infty$, для граничных значений $F(e^{i\vartheta})$ функции $F(z)$ выполняется условие*

$$\int_E \bigl|\log|F(e^{i\vartheta})|\bigr|\, d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} \bigl|\log|F(e^{i\vartheta})|\bigr|\, d\mu(\vartheta) < +\infty. \tag{12}$$

Как известно, класс N Неванлинна может быть определен как множество функций, представимых в виде отношения двух функций, аналитических и по модулю ограниченных единицей в единичном круге.

В заключении данной статьи будет установлено, что аналогичный факт имеет место и для функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$. А именно, будет доказана

Теорема 3. *Класс* N_α $(-1<\alpha<0)$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\quad (|z|<1),$$

где

$$|f_k(z)|\leqslant 1\quad (|z|<1),\ f_k(z)\in N_\alpha\quad (k=1, 2).$$

Ниже будет приведено доказательство этих и еще трех вспомогательных теорем, имеющих также и самостоятельный интерес.

3°. Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_\mu|\leqslant\cdots,$$

$$0<|b_1|\leqslant|b_2|\leqslant\cdots\leqslant|b_\nu|\leqslant\cdots,$$

причем каждый нуль или полюс мы записываем столько раз, какова его кратность.

Известно [2], [3], что если $F(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то ряды

$$\sum_{(\mu)}(1-|a_\mu|)^{1+\alpha},\qquad \sum_{(\nu)}(1-|b_\nu|)^{1+\alpha}$$

сходятся.

С другой стороны, известно также, что для любой последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{13}$$

существует функция из класса N_α с нулями, лежащими лишь в точках $\{z_k\}_1^\infty$. Важным примером такой функции служит бесконечное произведение

$$B_\alpha(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;\, z_k)}, \tag{14}$$

где для $|z|<1$ и $|\zeta|<1$

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k. \tag{15}$$

Эта функция, введенная и изученная в работах [2], [3], служит важным элементом в параметрическом представлении класса N_α.

Доказательство теорем 1 и 2, во-первых, существенно опирается на представления класса N_α и функции $B_\alpha(z; z_k)$. Приведем соответствующие теоремы.

Теорема А [2], [3]. *Класс* N_α $(-1<\alpha<\infty)$ *совпадает с множеством функций* $F(z)$, *допускающих представление вида*

$$F(z) = cz^{\lambda} \frac{B_\alpha(z; a_\mu)}{B_\alpha(z; b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z)\, d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{16}$$

где c — *постоянная*, $\lambda \gtrless 0$ — *целое число*,

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}, \tag{17}$$

а $\psi(\vartheta)$ — *произвольная вещественная функция ограниченной вариации на* $[0, 2\pi]$.

Известно, что при $\alpha = 0$ функция $B_\alpha(z; z_k)$ совпадает с обычным произведением Бляшке

$$B_0(z; z_k) = B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z} \cdot \frac{|z_k|}{z}. \tag{18}$$

В заметке [5] было установлено одно новое важное свойство функции Бляшке, заключающееся в том, что при $-1<\alpha<0$ условия (13) и $B(z) \in N_\alpha$ эквивалентны.

Отсюда и из теоремы А непосредственно следовала

Теорема В. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (13), *где* $-1<\alpha<0$, *то имеет место представление*

$$B_\alpha(z; z_k) = B_0(z; z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z)\, d\omega(\vartheta)\right\}, \tag{19}$$

где $\omega(\vartheta)$ — *некоторая функция ограниченной вариации на* $[0, 2\pi]$.

4°. Доказательство теорем 1 и 2 опирается также на приводимые ниже две теоремы Салема-Зигмунда [4] и Карлесона [6].

Теорема С [4]. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\, k < +\infty \quad (0<\beta<1),$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta$$

может расходиться только на множестве, у которого $(1-\beta)$-*емкость равна нулю.*

Отметим, что еще раньше, до появления работ [2], [3], Карлесоном [6] были введены другие классы мероморфных функций, входящие в класс N. Эти классы существенно отличны от классов N_α $(-1<\alpha<0)$ и определяются следующим образом.

Для данного значения β $(0<\beta<1)$ в класс T_β входят мероморфные в круге $|z|<1$ функции $w(z)$, для которых

$$T_\beta(w)=\int_0^1 (1-r)^{-\beta} A(r;w)\,dr<+\infty, \tag{20}$$

где

$$A(r;w)=\iint_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\,dxdy \tag{21}$$

—известная функция Альфорса-Симидзу.

В своем исследовании Карлесон установил, что *для каждой функции* $F(z)\in T_\beta$ *утверждение теоремы* 1 *справедливо, притом для значения* $\gamma=1-\beta$.

В случае, когда $F(z)$ — ограниченная функция из класса T_β $(0<\beta<1)$, это утверждение есть простое следствие теоремы B Салема-Зигмунда.

Наметим его простое доказательство, приведя его в виде отдельной теоремы.

Теорема D. *Если* $w(z)$ — *ограниченная функция из класса* T_β $(0<\beta<1)$, *то предел*

$$w(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} w(re^{i\theta})$$

существует почти всюду на $[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, *у которого* $(1-\beta)$*-емкость равна нулю.*

В самом деле, пусть

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z|<1)$$

и

$$\sup_{|z|<1}|w(z)|=w_0<+\infty.$$

Тогда имеем оценку

$$A(r;w)\geqslant(1+w_0^2)^{-2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{k-1}e^{ik\varphi}\right|^2 rdrd\varphi=$$

$$=2\pi(1+w_0^2)^{-2}\int_0^r\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^2|a_k|^2 r^{2k-1}\right\}dr=\pi(1+w_0^2)^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}k\,|a_k|^2 r^{2k}.$$

Поскольку $w(z)\in T_\beta$, то отсюда следует далее, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,|a_k|^2\int_0^1(1-r)^{-\beta}r^{2k}dr\leqslant\frac{(1+w_0^2)^2}{\pi}\int_0^1(1-r)^{-\beta}A(r;w)\,dr<+\infty. \tag{22}$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим

$$\lim_{k\to\infty}k^{1-\beta}\int_0^1(1-r)^{-\beta}r^{2k}dr=\frac{\Gamma(1-\beta)}{2^{1-\beta}},$$

откуда и из неравенства (22) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} |a_k|^2 < +\infty. \tag{23}$$

На основании теоремы С из условия (23) заключаем, что тригонометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\vartheta}$$

может расходиться только на множестве $E \subset [0, 2\pi]$, у которого $(1-\beta)$-емкость равна нулю.

Остается заметить еще, что по теореме Абеля будем иметь

$$\lim_{r \to 1-0} w(re^{i\vartheta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi] - E$$

и, тем самым, завершить доказательство.

Отметим, наконец, что позже, в работе [7], было анонсировано, что при определенных условиях *для любой функции* $F(z) \in T_\beta$ *справедливо утверждение теоремы 2 для значения* $\gamma = 1 - \beta$.

5°. Рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши-Стильтеса

$$K_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{(1 - e^{-i\vartheta} z)^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < 0), \tag{24}$$

где $\psi(\vartheta)$ — произвольная вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

Установим теорему о граничных свойствах интегралов вида $K_\alpha(z)$, играющую важную роль в дальнейшем.

Теорема 4. *Интеграл* $K_\alpha(z)$ *имеет радиальные пределы*

$$K_\alpha(e^{i\varphi}) = \lim_{r \to 1-0} K_\alpha(re^{i\varphi}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

всюду на $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E \subset [0, 2\pi]$, γ-*емкость которого (где* γ *— любое число из интервала* $1 + \alpha < \gamma < 1$) *равна нулю.*

Доказательство. Ввиду свойств а) и б) множеств нулевой γ-емкости, очевидно, достаточно установить справедливость теоремы для того случая, когда $\psi(\vartheta)$ — неубывающая функция. В таком предположении введем в рассмотрение функцию

$$w(z) = \exp\{-K_\alpha(z)\} \quad (|z| < 1). \tag{25}$$

Поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(1 - e^{-i\vartheta} z)^{1+\alpha}} \geqslant \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|1 - re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{2+2\alpha}} \quad (z = re^{i\varphi}) \tag{26}$$

и $d\psi(\vartheta) \geqslant 0$, то, обозначая

$$\omega_\alpha(re^{i\varphi}) = \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1 - re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{2+2\alpha}}, \tag{27}$$

из (24), (25) и (26) приходим к оценке

$$|w(re^{i\varphi})|^2 \leqslant \exp\{-\omega_\alpha(re^{i\varphi})\} \leqslant 1. \tag{28}$$

Таким образом, $w(z)$ — аналитична и ограничена по модулю единицей в круге $|z|<1$.

Но из (25) и (24) имеем также

$$|w'(re^{i\varphi})| \leqslant |w(re^{i\varphi})| \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{2+\alpha}}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Буняковского, в силу (27) и (28), приходим к следующей оценке:

$$|w'(re^{i\varphi})|^2 \leqslant \omega_\alpha(re^{i\varphi})\, e^{-\omega_\alpha(re^{i\varphi})}(1-r)^{-1-\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2}. \tag{29}$$

Наконец, замечая, что вообще $\omega e^{-\omega} \leqslant e^{-1}$ $(0 \leqslant \omega < +\infty)$, из (29) получим неравенство

$$\frac{|w'(re^{i\varphi})|}{(1+|w(re^{i\varphi})|^2)^2} \leqslant e^{-1}(1-r)^{-1-\alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2}. \tag{30}$$

Проинтегрируем теперь (30) по φ по промежутку $[0, 2\pi]$, учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2} = 2\pi(1-r^2)^{-1} \leqslant 2\pi(1-r)^{-1}.$$

В результате получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{|w'(re^{i\varphi})|^2}{(1+|w(re^{i\varphi})|^2)^2} d\varphi < \frac{2\pi e^{-1}}{(1-r)^{2+\alpha}} \int_0^{2\pi} d\psi(\vartheta)$$

и поэтому

$$A(r; w) = \iint_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} ds \leqslant c_\alpha \frac{r}{(1-r)^{1+\alpha}}, \tag{31}$$

где

$$c_\alpha = \frac{2\pi e^{-1}}{1+\alpha} \int_0^{2\pi} d\psi(\vartheta) > 0.$$

Из оценки (31) заключаем, что для любого γ $(1+\alpha < \gamma < 1)$

$$\int_0^1 A(r; w)(1-r)^{\gamma-1} dr < \infty.$$

Итак, $w(z)$ — ограниченная функция из класса $T_{1-\gamma}$, следовательно, согласно теореме D, утверждение теоремы справедливо для нее и, тем самым, для функции

$$K_\alpha(z) = -\log w(z).$$

6°. Докажем теперь теорему о граничных свойствах функции $B_\alpha(z; z_k)$.

Теорема 5*. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant\leqslant|z_{k+1}|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty\quad(-1<\alpha<0). \tag{32}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *для функции* $B(z)=B_0(z;z_k)$ *предел*

$$B(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0}B(re^{i\theta}),\ \theta\in[0,2\pi]$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, *кроме. быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, *у которого* $(1+\alpha)$*-емкость равна нулю:*

б) *для функции* $B_\alpha(z;z_k)$ *предел*

$$B_\alpha(e^{i\theta};z_k)=\lim_{r\to 1-0}B_\alpha(re^{i\theta};z_k),\ \theta\in[0,2\pi]$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, γ*-емкость которого (где* γ *— любое число из интервала* $1+\alpha<\gamma<1$*) равна нулю.*

Доказательство. а) Обозначим через $n(t)$ — числовую функцию последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, т. е. число точек z_k, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$.

Заметим, что для любого r $(0<r<1)$

$$\sum_{|z_k|<r}(1-|z_k|)^{1+\alpha}=\int_0^r(1-t)^{1+\alpha}dn(t)=$$

$$=(1-r)^{1+\alpha}n(r)+(1+\alpha)\int_0^r(1-t)^\alpha n(t)\,dt.$$

Отсюда, ввиду условия (32) и того, что $-1<\alpha<0$, следуют неравенства

$$(1-r)^\alpha\int_r^1\frac{n(t)}{t}dt<\int_r^1\frac{n(t)}{t}(1-t)^\alpha dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r}\int_0^1(1-t)^\alpha\ n(t)\,dt\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \tag{33}$$

для любого r $\left(\frac{1}{2}\leqslant r<1\right)$.

---

* Утверждение а) этой теоремы было установлено Карлесоном [6]. Основным моментом в его доказательстве служило обнаружение того факта, что при условии (31) $B(z)\in T_{-\alpha}$. Поскольку на этот же факт опирается также частично и доказательство утверждения б), то для удобства читателя мы сочли уместным изложить их в одной общей теореме.

Итак

$$\lim_{r\to 1-0}\sup\,(1-r)^{\alpha}\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt<+\infty. \tag{33'}$$

Далее, как известно, для любой мероморфной в круге $|z|<1$ функции $w(z)$ имеет место формула Альфорса-Симидзу [1]

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{A(r;w)}{r}=\frac{n(r;w)}{r}+\frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\left(1+|w(re^{i\vartheta})|^{2}\right)d\vartheta, \tag{34}$$

где функция $A(r;\,w)$ определяется из (31), а $n(r;\,w)$ -- число полюсов $w(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ с учетом их кратности.

Применим теперь формулу (34) к функции $w(z)=B^{-1}(z)$, заметив, что тогда $n(r;\,B^{-1})=n(r)$. Будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{A(r;\,B^{-1})}{r}=\frac{n(r)}{r}+\frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\,\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{|B(re^{i\varphi})|^{2}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{n(r)}{r}+\frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\,\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2\,|B(re^{i\varphi})|^{2}}\,d\varphi. \tag{34'}$$

Теперь проинтегрируем тождество (34′) по промежутку (0,1) с весом $(1-r)^{\alpha}$, в результате чего получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{A(r;\,B^{-1})}{r}\,(1-r)^{\alpha}\,dr=\int_{0}^{1}\frac{n(r)}{r}\,(1-r)^{\alpha}\,dr+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}(1-r)^{\alpha}\,dr\int_{0}^{2\pi}\log\left\{\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2\,|B(re^{i\varphi})|^{2}}\right\}d\varphi=U_{1}(\alpha)+U_{2}(\alpha). \tag{35}$$

Заметим, что, ввиду конечности третьего из интегралов, стоящих в неравенствах (33), очевидно, что $U_1(\alpha)<+\infty$.

Заметим далее, что в круге $|z|<1$

$$1\leqslant\frac{1+|B(z)|^{2}}{2\,|B(z)|^{2}}\leqslant\frac{1}{|B(z)|^{2}}, \tag{36}$$

а также, что по формуле Енсена

$$\int_{0}^{2\pi}\log\frac{1}{|B(re^{i\varphi})|}\,d\varphi=2\pi\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt\quad(0<r<1). \tag{37}$$

Теперь уже, учитывая неравенства (36) и формулу (37), заключаем, что

$$U_{2}(\alpha;\,r)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r}(1-r)^{\alpha}\,dr\int_{0}^{2\pi}\log\left\{\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2\,|B(re^{i\varphi})|^{2}}\right\}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\,(1-r)^{\alpha}\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt\qquad(0<r<1)$$

и, следовательно, в силу (33′), имеем $U_2(\alpha) < +\infty$.

Таким образом, интеграл, стоящий в левой части тождества (35), также имеет конечную величину.

Наконец, легко видеть, что $A(r; B^{-1}) = A(r; B)$ и поэтому имеем также

$$\int_0^1 \frac{A(r; B)}{r} (1-r)^\alpha \, dr < +\infty,$$

т. е. $B(z) \in T_{-\alpha}$. Поскольку функция $B(z)$ ограничена в круге $|z| < 1$. то утверждение о ее граничных свойствах непосредственно следует из теоремы D.

Дополнительно отметим еще, что, ввиду свойств множеств с нулевой γ-емкостью, очевидно, что утверждение а) остается в силе, если заменить в нем $(1+\alpha)$-емкость любой γ-емкостью, где $1+\alpha \leqslant \gamma < 1$.

б) Поскольку

$$S_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\},$$

то, согласно теореме 3, любая функция вида

$$\exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z) \, d\omega(\vartheta) \right\}$$

обладает требуемым свойством, т. е. ее радиальные пределы существуют везде на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{cap}_\gamma E = 0$, где γ — любое число из промежутка $1+\alpha < \gamma < 1$.

Выше уже было установлено, что тем же свойством обладает и функция Бляшке $B(z) \equiv B_0(z; z_k)$.

Поэтому, пользуясь представлением функции $B_\alpha(z; z_k)$ $(-1 < \alpha < 0)$,

$$B_\alpha(z; z_k) = B_0(z; z_k) \exp\left\{ \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z) \, d\omega(\vartheta) \right\}, \tag{38}$$

даваемым теоремой B, мы завершаем доказательство теоремы.

Отметим, наконец, что теорема Карлесона 4 (а) все же не содержит первоначального результата Фростмана, впервые рассмотревшего произведения Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$, подчиненными условию (32).

Приведем формулировку теоремы Фростмана [8], поскольку она нам будет нужна ниже.

Теорема Е. *При условии* (32) *будем иметь*

$$\lim_{r \to 1-0} |B(re^{i\vartheta})| = 1, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

всюду на $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E \subset [0, 2\pi]$, *у которого* $(1+\alpha)$*-емкость* равна нулю.*

* и, следовательно, любая γ — емкость, если только $1+\alpha < \gamma < 1$.

7°. Переходим к доказательству основных теорем.

Доказательство теоремы 1. Оно непосредственно следует из теорем А, 4 и 5.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию класса N_α $(-1<\alpha<0)$

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}\quad(|z|<1), \tag{39}$$

где $\psi(\vartheta)$ — произвольная вещественная функция с конечной вариацией на $[0, 2\pi]$.

Согласно теореме 1 для данного значения γ $(1+\alpha<\gamma<1)$ пределы

$$\Phi(e^{i\varphi})=\lim_{r\to1-0}\Phi(re^{i\varphi}),\ \varphi\in[0,2\pi] \tag{40}$$

существуют всюду на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества γ-емкости нуль.

Далее из (39), принимая во внимание значение (38) ядра $S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)$, мы получим неравенство

$$|\log|\Phi(re^{i\varphi})||\leqslant\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|+\frac{1}{\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}\frac{|d\psi(\vartheta)|}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{1+\alpha}}.$$

Поскольку $0<1+\alpha<\gamma<1$, то отсюда приходим к оценке

$$|\log|\Phi(re^{i\varphi})||\leqslant c_0+c_1\int_0^{2\pi}\frac{|d\psi(\vartheta)|}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{\gamma}}\ (0<r<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi), \tag{41}$$

где $c_0>0$ и $c_1>0$ — постоянные, не зависящие от φ и r.

Пусть, далее, при том же γ $(1+\alpha<\gamma<1)$, $E\subset[0,2\pi]$ представляет собою множество, γ-емкость которого положительна. Это означает, что найдется такая мера $\mu\prec E$, для которой интегралы

$$V_\gamma(\vartheta;r)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\varphi)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{\gamma}}$$

удовлетворяют условию

$$\sup_{0<\vartheta<1}\left\{\max_{0<\vartheta<2\pi}V_\gamma(\vartheta;r)\right\}=V_\gamma(\mu)<+\infty. \tag{42}$$

Теперь, пользуясь оценкой (41), ввиду (42), будем иметь

$$\int_E|\log|\Phi(re^{i\varphi})||d\mu(\varphi)\leqslant c_0+c_1V_\gamma(\mu)\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|=c_2<+\infty\ (0<r<1), \tag{43}$$

где $c_2>0$, очевидно, от r не зависит.

Наконец, принимая во внимание, что предел (40) может не существовать лишь на множестве нулевой γ-емкости, путем перехода к пределу в неравенстве (43), в силу теоремы Фату [9], заключаем, что

$$\int_E |\log|\Phi(e^{i\varphi})||\,d\mu(\varphi) < +\infty. \tag{44}$$

Итак, для любой функции $\Phi(z)$ вида (39) утверждение нашей теоремы справедливо.

Установим теперь справедливость теоремы для любой функции $B_\alpha(z; z_k)$.

Для этого, во-первых, заметим, что, согласно теореме E, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty$$

граничные значения $B(e^{i\varphi})$ функции Бляшке $B(z)$ удовлетворяют условию

$$\log|B(e^{i\varphi})| = 0 \tag{45}$$

всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $(1+\alpha)$-емкости нуль. Очевидно, что такое множество имеет нулевую γ-емкость при любом $1+\alpha \leqslant \gamma < 1$.

Следовательно, если $E \subset [0, 2\pi]$ — любое множество положительной γ-емкости $(1+\alpha < \gamma < 1)$ и $\mu \prec E$, то, ввиду характера тождества (45), будем иметь

$$\int_E |\log|B(e^{i\varphi})||\,d\mu(\varphi) = 0. \tag{46}$$

Обратимся далее к представлению (38) функции $B_\alpha(z; z_k)$, обладающей радиальными пределами

$$B_\alpha(e^{i\varphi}; z_k) = \lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)$$

всюду на $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, некоторого исключительного множества нулевой γ-емкости $(1+\alpha < \gamma < 1)$. Тогда, ввиду (46) и свойства (44) функций вида $\Phi(z)$, будем иметь

$$\int_E |\log|B_\alpha(e^{i\varphi}; z_k)||\,d\mu(\varphi) < +\infty. \tag{47}$$

Наконец, полное доказательство теоремы следует из утверждений (44) и (47), если принять во внимание представление функций класса N_α $(-1 < \alpha < 0)$, даваемое теоремой A.

8°. Чтобы установить теорему 3, предварительно докажем теорему.

Теорема 6. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^{\infty}$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha < 0),$$

то справедливо неравенство

$$|B_\alpha(z; z_k)| \leqslant |B_0(z; z_k)| \quad (|z|<1). \tag{48}$$

Доказательство. Заметим сначала, что, в силу определения (14) функции $B_\alpha(z; z_k)$, достаточно установить справедливость неравенства

$$U_\alpha(z; \zeta) \equiv \mathrm{Re}\,\{W_\alpha(z; \zeta) - W_0(z; \zeta)\} > 0 \tag{49}$$

для любых значений $|z|<1$, $|\zeta|<1$.

Но из разложения (15) функции $W_\alpha(z; \zeta)$ мы имеем

$$U(z; \zeta) = \frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho)\,|\omega|^k \cos(k \arg \omega), \tag{50}$$

где $\rho = |\zeta|$, $\omega = z\bar{\zeta}$ $(|\omega| = \rho\,|z| < 1)$,

$$a_0(\rho) = 2\int_\rho^1 [(1-x)^\alpha - 1]\,\frac{dx}{x} \geqslant 0, \tag{51}$$

$$a_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left\{\rho^{-2k}\int_0^\rho (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots). \tag{52}$$

Заметим далее, что достаточно установить выпуклость последовательности $\{a_k(\rho)\}_0^\infty$, т. е. справедливость неравенств

$$\varphi_k(\rho) \equiv \Delta^2 a_k(\rho) = a_k(\rho) - 2a_{k+1}(\rho) + a_{k+2}(\rho) \geqslant 0 \quad (0<\rho<1,\ k>0), \tag{53'}$$

чтобы требуемое неравенство (49) непосредственно следовало из известной теоремы о неотрицательных тригонометрических рядах [4].

Докажем первое из условий (53), т. е. установим, что

$$\varphi_0(\rho) \equiv \Delta^2 a_0(\rho) = a_0(\rho) - 2a_1(\rho) + a_2(\rho) > 0 \quad (0<\rho<1). \tag{53''}$$

С этой целью, пользуясь формулами (51) и (52), запишем функцию $\varphi_0(\rho)$ в раскрытом виде

$$\varphi_0(\rho) = 2\int_\rho^1 [(1-x)^\alpha - 1]\,\frac{dx}{x} -$$

$$-2\left\{1 - (1+\alpha)\left[\rho^{-2}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,dx - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-2}\,dx\right]\right\} +$$

$$+\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)\left[\rho^{-4}\int_0^\rho (1-x)^\alpha x\,dx - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-3}\,dx\right]\right\}. \tag{53''}$$

Заметим сперва, что

$$\varphi_0'(\rho) = -2\left[(1-\rho)^\alpha - 1\right]\rho^{-1} + 4(1+\alpha)\left[-\rho^{-3}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,dx + \rho^{-2}(1-\rho)^\alpha\right] -$$

$$-(1+\alpha)(2+\alpha)\left[-2\rho^{-5}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,x\,dx + \rho^{-3}(1-\rho)^\alpha\right]. \qquad (54)$$

Далее, имеем также представления

$$(1-\rho)^\alpha - 1 = \int_0^\rho d(1-x)^\alpha,\ \int_0^\rho (1-x)^\alpha\,dx = \rho(1-\rho)^\alpha - \int_0^\rho x\,d(1-x)^\alpha,$$

$$2\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,x\,dx = \rho^2(1-\rho)^\alpha - \int_0^\rho x^2\,d(1-x)^\alpha,$$

с учетом которых формула (54) запишется в виде

$$\frac{\rho}{2}\varphi_0'(\rho) = -\int_0^\rho \left\{1 - 2(1+\alpha)x\rho^{-2} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{2}x^2\rho^{-4}\right\} d(1-x)^\alpha. \qquad (55)$$

Поскольку при $-1<\alpha<0$ $(1+\alpha)^2 < \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)$,

то

$$1 - 2(1+\alpha)x\rho^{-2} + \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)x^2\rho^{-4} > \left[1-(1+\alpha)x\rho^{-2}\right]^2 \geqslant 0.$$

Наконец, заметив, что при $-1<\alpha<0$ функция $(1-x)^\alpha$ возрастает на $[0, 1)$, из (55) заключаем, что $\varphi_0'(\rho) \leqslant 0$. Это значит, что на интервале $[0,1]$ функция $\varphi_0(\rho)$ — убывающая и, в частности,

$$\varphi_0(\rho) \geqslant \varphi_0(1) \quad (0<\rho\leqslant 1).$$

Остается заметить, что, как следует простой проверкой из (53″), $\varphi_0(1) = 0$. Итак, утверждение (53) для $k=0$ справедливо.

Чтобы доказать неравенства (53) для $k\geqslant 1$, запишем сначала функции $a_k(\rho)$ $(k\geqslant 1)$ в виде

$$a_k(\rho) = b_k(\rho) + d_k(\rho),$$

где

$$b_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\rho^{-2k}\int_0^{\rho^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx, \qquad (56)$$

$$d_k(\rho) = \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx - \rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right\}. \qquad (57)$$

Теперь путем проведения непосредственных оценок установим выпуклость обеих последовательностей $\{b_k(\rho)\}_1^\infty$ и $\{d_k(\rho)\}_1^\infty$ в отдельности.

Во-первых, отметим, что эти последовательности неотрицательны.

В самом деле, из (56) имеем

$$b_k'(\rho) = -2\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\rho^{-1}(1-\rho^2)^\alpha - k\rho^{-2k-1}\int_0^{\rho^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\} \leqslant 0, \tag{58}$$

поскольку, как легко видеть, при $-1<\alpha<0$

$$\int_0^{\rho^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx \leqslant \frac{\rho^{2k}}{k}(1-\rho^2)^\alpha \quad (0<\rho<1).$$

Из (58) следует, что

$$b_k(\rho) > b_k(1)=0, \; k=1, 2, \cdots, \tag{59}$$

причем равенства $b_k(1)=0$ $(k\geqslant 1)$ непосредственно проверяются.

Чтобы установить неравенства

$$d_k(\rho) > d_k(1) = 0 \; (k=1, 2, \cdots) \tag{60}$$

достаточно заметить, что при $-1<\alpha<0$

$$\int_\rho^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx \geqslant (1-\rho)^\alpha\frac{\rho^{-k}-1}{k} \qquad (0<\rho<1),$$

$$\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx \leqslant \rho^{-2k}(1-\rho)^\alpha\int_{\rho^2}^{\rho}x^{k-1}\,dx =$$

$$= (1-\rho)^\alpha\frac{\rho^{-k}-1}{k} \qquad (0<\rho<1).$$

Теперь, записав формулу (56) в виде

$$b_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-\rho^2x)^\alpha x^{k-1}\,dx,$$

мы имеем

$$\Delta^2 b_k(\rho) = \frac{2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-\rho^2x)^\alpha x^{k-1}\left\{1-\right.$$

$$\left.-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}x + \frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\right\}dx. \tag{61}$$

Но, как легко видеть, при $-1<\alpha<0$ для любого y

$$1-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}y + \frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}y^2 > \left(1-\frac{1+\alpha+k}{1+k}y\right)^2 > 0. \tag{62}$$

Поскольку при $-1<\alpha<0$ выражение $(1-\rho^2 x)^\alpha$ $(0\leqslant\rho\leqslant 1,$ $0\leqslant x<1)$ является возрастающей функцией от ρ, то из (61) и (62) получим неравенство

$$\Delta^2 b_k(\rho)\geqslant\Delta^2 b_k(1)=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-$$

$$-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\left\{1-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\right\}dx.$$

Остается заметить, что стоящее в правой части этого неравенства выражение равно нулю. Это можно проверить непосредственным подсчетом.

Итак, отсюда и из (59) получим при $0<\rho<1$

$$b_k(\rho)\geqslant 0,\ \Delta^2 b_k(\rho)\geqslant 0\ (k=1,2,3,\cdots). \tag{63}$$

Далее, из (57) имеем

$$\Delta^2 d_k(\rho)=\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\int_\rho^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\left[1-\right.\right.$$

$$\left.-2\cdot\frac{1+\alpha+k}{1+k}x^{-1}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^{-2}\right]dx-$$

$$\left.-\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x\rho^{-2}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\rho^{-4}\right]dx\right\}. \tag{64}$$

Но выражения, стоящие в подынтегральных квадратных скобках справа в (64), очевидно, неотрицательны, в силу неравенства (62). Поэтому, учитывая еще, что функция $(1-x)^\alpha$ при $-1<\alpha<0$ не убывает на (0,1), из (64) получим следующую оценку:

$$\Delta^2 d_k(\rho)\geqslant(1-\rho)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\int_\rho^1 x^{-k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x^{-1}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^{-2}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}x^{k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x\rho^{-2}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\rho^{-4}\right]dx\right\}.$$

С помощью простого подсчета можно установить, что выражение, стоящее в правой части этого неравенства, равно нулю.

Отсюда и из (60) получим при $0<\rho\leqslant 1$

$$\operatorname{Re} S_\alpha(z) > 0 \quad (|z| < 1),$$

будем иметь $|\Phi_k(z)| \leqslant 1$ $(|z|<1)$, $(k=1, 2)$. Из сказанного вытекает, что

$$|f_k^*(z)| \leqslant 1 \quad (|z|<1), \quad f_k^*(z) \in N_\alpha \quad (k=1, 2),$$

откуда и из (67′) легко следует представление (67)—(68) теоремы.

Отметим, что результаты этой статьи, за исключением теорем 2 и 3, были вкратце анонсированы в [10].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 26. IV.1967

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ և Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

N_α ԴԱՍԻ ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Եթե $F(z) \in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ *ապա*

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

գոյություն ունի կամայական $\vartheta \in [0,2\pi]$ *համար, բացի գուցե մի բացառիկ* $E \subset [0,2\pi]$ *բազմությունից, որի* γ*-ունակությունը (որտեղ* γ*-ն կամայական թիվ է* $1+\alpha<\gamma<1$ *ինտերվալից) հավասար է զրոյի։*

Ապացուցված է նաև, որ եթե $-1<\alpha<0$, *ապա* N_α *դասի ամեն մի ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել որպես* N_α *դասի երկու սահմանափակ ֆունկցիաների հարաբերություն։*

M. M. DŽRBAŠHIAN AND V. S. ZAKARIAN

THE BOUNDARY PROPERTIES OF MEROMORPH FUNCTIONS, BELONGIHG TO N_α

S u m m a r y

The following proposition is proved in the paper: If $F(z)$ belongs to N_α $(-1<\alpha<0)$ then the limit

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

existes for every $\vartheta \in [0, 2\pi]$ may be with exception of a set $E \subset [0, 2\pi]$, whose ϑ — capacity (ϑ is arbitrary from the interval $1+\alpha < \vartheta < 1$) is equal zero.

Also it is proved that every function from the class N_α, $-1<\alpha<0$ may be presented as a ratio of two bounded functions, belonging to N_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
2. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966, гл. IX.
4. *Н. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
5. *М. М. Джрбашян.* Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, 175, № 5, 1967, 981—984.
6. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala, 1950.
7. *В. С. Захарян.* Об одной теореме единственности, ДАН СССР, 154, № 5, 1964, 1019—1022.
8. *O. Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12, 1942, 169—182.
9. *С. Сакс.* Теория интеграла, М., 1949.
10. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ И ДРУГИМИ БОЛЕЕ ОБЩИМИ РЯДАМИ

В работах [1]—[3] рассматривались вопросы, связанные с представлением в конечных областях произвольных аналитических функций рядами Дирихле. Отметим некоторые из полученных результатов.

Пусть $L(\lambda)$—целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$—функция ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\overline{D}$—наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, D—открытая часть $\overline{D}$. Допустим, что $0\in\overline{D}$. Возьмем произвольную функцию $F(z)$, аналитическую на множестве $\overline{D}$. Положим

$$\omega_L(\mu, F)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(\xi)\left[\int\limits_0^\xi F(\xi-\eta)\, e^{\mu\eta}\, d\eta\right]d\xi,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$—различные нули $L(\lambda)$ и $p_1, p_2, \cdots$— соответственно их кратности. Функции $F(z)$ приведем в соответствие ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(z)\, e^{\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

где

$$P_\nu(z)\, e^{\lambda_\nu z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu}\frac{\omega_L(\mu, F)\, e^{\mu z}\, d\mu}{L(\mu)}.$$

Здесь C_ν — замкнутый контур, содержащий нуль λ_ν функции $L(\lambda)$ и не содержащий других нулей этой функции.

В работе [2] показано, что если все $P_\nu(z)\equiv 0$, то $F(z)\equiv 0$. Следовательно, коэффициенты $P_\nu(z)$ ряда (1) полностью определяют функцию $F(z)$. Возникает естественная задача: каким образом можно восстановить функцию $F(z)$, если известны $P_\nu(z)$? В статье [1] получен следующий результат: пусть D—непустое множество и пусть имеются окружности $|\lambda|=r_k\uparrow\infty$ такие, что при любом $\varepsilon>0$

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})|>[h(\varphi)-\varepsilon]\, r_k,\quad k>K(\varepsilon)$$

($h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$). Тогда

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{r_{k-1}<|\lambda|<r_k} P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}\Big),\quad z\in D. \tag{2}$$

Ряд (2) вообще не может сходиться в большей области. Пусть теперь D — пустое множество и, следовательно, $\overline{D}$ — отрезок. Такая ситуация имеет место, например, когда $L(\lambda)=\prod_1^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\Big)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\sigma$, $\lambda_n>0$. В этом случае $\overline{D}$ — вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с серединой в начале координат и ряд (1) имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\pm\nu}\, e^{\pm\lambda_\nu z},\ a_{\pm\nu}=\frac{\omega_L(\pm\lambda_\nu, F)}{L'(\pm\lambda_\nu)}\,. \tag{3}$$

При $\lambda_n=n$ ряд (3), как нетрудно показать, становится обычным рядом Фурье для функции $F(z)$. Ряд (3), таким образом, является непосредственным обобщением ряда Фурье. Отметим, что этот ряд или соответствующий ему ряд (2) вообще не может сходиться ни в какой области. В статье [3] указан способ его суммирования. Пусть K — горизонтальная звезда голоморфности функции $F(z)$ (точка $z_0\in K$, если $F(z)$ можно аналитически продолжить в z_0 по горизонтали, исходя из отрезка $\overline{D}$). Положим

$$S_q(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_{k-1}<|\lambda_\nu|<r_k}\frac{a_{\pm\nu}\,e^{\pm\lambda_\nu z}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_\nu)}\int_0^q e^{-\xi}\,\xi^{\alpha\lambda_\nu}\,d\xi,\ \alpha>0,\ q>0.$$

Это — целая функция. Оказалось, что, каково бы ни было замкнутое ограниченное множество $\overline{G}\subset K$, при некотором α $(\alpha=\alpha(\overline{G}))$ на множестве $\overline{G}$ равномерно

$$\lim_{q\to\infty} S_q(z)=F(z).$$

В данной работе рассматриваются аналогичные вопросы, но только они связаны с представлением произвольных аналитических функций не в конечных областях, а во всей плоскости. Речь идет, следовательно, о целых функциях. В соответствии с предыдущим мы необходимо должны считать, что $L(\lambda)$—целая функция по меньшей мере первого порядка максимального типа. Мы будем предполагать, что она—целая функция порядка $\rho>1$. Наши рассуждения нисколько не усложнятся, если вместо рядов Дирихле мы будем рассматривать более общие ряды—ряды по системе $\{f(\lambda_n z)\}$. Поэтому с самого начала мы будем оперировать именно с этими более общими рядами. С целью представления произвольных целых функций они впервые были введены в статье [4]. Напомним как это делается.

Пусть $f(z)=\sum\limits_0^{\infty} a_n z^n$ — фиксированная целая функция конечного порядка $\rho>0$, причем $a_n\neq 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \left|\frac{1}{a_n}\right|} = \rho.$$

Пусть далее $L(\lambda) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n$ — целая функция порядка $\rho_1 > \rho$; $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — ее различные нули и $p_1, p_2, \cdots$ — соответственно их кратности. Возьмем произвольную целую функцию $F(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ порядка $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$.

Положим

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{n=1}^\infty c_n [D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)], \qquad (4)$$

где по определению

$$D^k F(z) = \sum_{n=k}^\infty b_n \frac{a_{n-k}}{a_n} z^{n-k} \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

При условии $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ ряд (4) равномерно сходится в любой ограниченной области и, следовательно, представляет собой целую функцию. Обозначим

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\omega_L(\mu, F) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

где C_n — замкнутый контур, внутри которого лежит нуль λ_n функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. Если λ_n — простой нуль, то

$$K_n(z) = \frac{\omega_L(\lambda_n, F)}{f(0) L'(\lambda_n)} f(\lambda_n z),$$

в противном случае

$$K_n(z) = \sum_{m=0}^{p_n - 1} A_m^n z^m f^{(m)}(\lambda_n z),$$

где A_m^n — некоторые постоянные. Функции $F(z)$ приводится в соответствие ряд

$$\sum_{m=1}^\infty K_m(z). \qquad (5)$$

Это и есть тот общий ряд, о котором говорилось выше.

Мы в данной статье показываем (теорема единственности), что если $K_m(z) = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$, то $F(z) \equiv 0$. Доказательство только в малой части следует схеме доказательства теоремы единственности в случае конечной области. Из теоремы единственности следует, что по $K_m(z)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ можно принципиально восстановить функцию $F(z)$. В работе [4] показано, что если имеются окружности $|\lambda| = r_n \uparrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(r_n e^{i\varphi})| > r_n^{\rho_1 - \varepsilon}, \ n > N(\varepsilon), \qquad (6)$$

то тогда

$$F(z) = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{r_{n-1} < |\lambda_m| < r_n} K_m(z) \right), \qquad (7)$$

сходимость в любой ограниченной области—равномерная. Анализ доказательства этого результата показывает, что представление (7) остается в силе, если вместо условия (6) будет выполняться более слабое условие

$$\ln |L(r_n e^{i\varphi})| > r_n^{p}, \quad n > N, \quad \rho < p < \rho_1. \tag{8}$$

В данной статье рассматривается ситуация, когда и это условие не выполняется. Указывается метод суммирования ряда (5). Свои рассуждения подробно мы проводим в частном случае, когда

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^m}{\lambda_n^m}\right), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}} = \sigma, \quad \lambda_n > 0, \quad \frac{m}{2} < \rho_1 < m, \tag{9}$$

где m — целое положительное число. Этот случай соответствует указанному выше случаю, когда отмечалась аналогичная ситуация при рассмотрении конечных областей. Кроме того, проследив метод в этом простом случае, можно будет видеть, как его распространить на другие более сложные случаи. Отметим, что рассматриваемый метод суммирования отличен от метода суммирования, описанного выше при рассмотрении ряда (3).

Стоит заметить, что функция (9) удовлетворяет следующему условию: существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\sigma}{\sin \dfrac{\pi\rho_1}{m}} \cos \rho_1\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Правая часть при $0 < \varphi < \varphi_0 = \dfrac{\pi}{m} - \dfrac{\pi}{2\rho_1}$ отрицательна. Следовательно, функция $L(\lambda)$ в угле $0 < \varphi < \varphi_0$ стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ и условие (8) заведомо не выполняется (при $\rho_1 < \dfrac{m}{2}$ будет выполняться условие (6)).

При рассмотрении и теоремы единственности и метода суммирования нам пришлось существенно опираться на асимптотическое поведение функции $\omega_L(\mu, F)$ при $\mu \to \infty$. Поэтому в § 1 устанавливается асимптотическое поведение этой функции.

§ 1. Об ином представлении функции $\omega_L(\mu, F)$

Прежде чем сформулировать соответствующий результат о представлении функции $\omega_L(\mu, F)$ отметим некоторые необходимые вспомогательные факты.

Будем говорить, что последовательность целых функций $\{F_m(z)\}$ имеет порядок α, если выполняется условие: при любом $\varepsilon > 0$

$$|F_n(z)| < \exp |z|^{\alpha+\varepsilon}, \quad |z| > r_0(\varepsilon), \tag{10}$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n, причем нет числа с таким свойством меньшего α. Очевидно, что если $\{F_n(z)\}$ имеет порядок α, то каждая функция $F_m(z)$ имеет порядок $\leqslant \alpha$. Обратное неверно: если каждая функция $F_m(z)$ имеет порядок $\leqslant\alpha$, то из этого не следует, что порядок $\{F_m(z)\}$ будет $\leqslant \alpha$. Например, порядки функций

$$F_m(z)=1+\frac{z}{1!}+\cdots+\frac{z^m}{m!}\,(m=1, 2, \cdots)$$

равны нулю, а порядок последовательности $\{F^m(z)\}$ равен единице.

Лемма 1. *Пусть последовательность целых функций* $\{F_m(z)\}$ *имеет порядок* $\alpha<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ *и пусть* $\{F_m(z)\}$ *сходится к* $F(z)$. *Тогда*

$$\lim_{m\to\infty}\omega_L(\mu, F_m)=\omega_L(\mu, F).$$

Для доказательства обратимся к формуле (4). Согласно этой формуле

$$\omega_L(\mu, F_m)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left[D^{n-1}F_m(0)+\mu D^{n-2}F_m(0)+\cdots+\mu^{n-1}D^0F_m(0)\right],$$

причем, если $F_m(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n^{(m)}z^n$, то

$$D^kF_m(0)=b_k^{(m)}\frac{a_0}{a_k}.$$

Из условия

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|}=\rho$$

и неравенств (10) следует, что

$$|D^kF_m(0)|<A(\varepsilon)\,k^{k\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon\right)}, \tag{11}$$

где $\varepsilon>0$ — любое и $A(\varepsilon)$ не зависит от m. Такое же неравенство будет справедливо и для $D^kF(0)$. Имеем

$$\omega_L(\mu, F)-\omega_L(\mu, F_m)=$$

$$=\sum_{n=1}^{N}c_n\left[D^{n-1}(F-F_m)_0+\mu D^{n-2}(F-F_m)_0+\cdots+\mu^{n-1}D^0(F-F_m)_0\right]+$$

$$+\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n\left[D^{n-1}(F-F_m)_0+\mu D^{n-2}(F-F_m)_0+\cdots+\mu^{n-1}D^0(F-F_m)_0\right]=$$

$$=J_m'+J_m''.$$

На основании (11) квадратная скобка по модулю при $|\mu|\leqslant R$, $R>1$ не превосходит

$$2A(\varepsilon)\,nR^n\,n^{n\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon\right)}$$

(не нарушая общности рассуждений можно считать $\alpha>\rho$, в силу чего $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\alpha}>0$) и поэтому, учитывая неравенство

$$|c_n| < n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)}$$

(оно верно при больших n), получим оценку

$$|\overset{*}{J}_m| < 2A(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} nR^n n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho} - 2\varepsilon\right)}, \quad |\mu| \leqslant R.$$

В силу условия $\alpha < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ круглая скобка в правой части при малом $\varepsilon > 0$ положительна. Выберем N так, чтобы было $|\overset{*}{J}_m| < \varepsilon_1$ (здесь m — любое). Фиксируя N, обратимся к $\overset{*}{J}_m$. Из (10) следует, что последовательность $\{F_m(z)\}$ в круге $|\mu| \leqslant R$ сходится равномерно, в силу чего при каждом k

$$\lim_{m \to \infty} D^k (F - F_m)_0 = 0.$$

Следовательно, можно выбрать такое K, что при $m > K$ будем иметь $|J_m'| < \varepsilon_1$. В итоге при $m > K$ в круге $|\mu| \leqslant R$

$$|\omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, F_m)| < 2\varepsilon_1,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть* $L_1(\lambda)$ — *целая функция порядка* $\beta > \rho$, *удовлетворяющая условиям:*

1) *имеются окружности* $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$ *такие, что при любом* $\varepsilon > 0$

$$\ln |L_1(r_k e^{i\varphi})| > r_k^{\beta - \varepsilon}, \quad k > K(\varepsilon);$$

2) *все нули* $\mu_1, \mu_2, \cdots$ *функции* $L_1(\lambda)$ — *простые, число их в кольце* $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ *не превосходит некоторого фиксированного числа* p, *одного и того же для всех* $k = 1, 2, \cdots$;

3) *существует постоянная* q *такая, что* $\frac{r_k}{r_{k-1}} < q$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

4) *существуют постоянные* A *и* h, $h < \beta$, *такие, что для любых* λ_m *и* λ_n, $m \neq n$, *из кольца* $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$

$$|\lambda_m - \lambda_n| > Ae^{-r_k^h}.$$

Пусть далее $F(z)$ — *целая функция порядка* $\nu < \frac{\rho\beta}{\beta - \rho}$. *Положим*

$$A_k = \frac{\omega_{L_1}(\mu_k, F)}{f(0) L_1'(\mu_k)} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Верны неравенства

$$\left|F(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k f(\mu_k z)\right| < A(\varepsilon)\, e^{-|\mu_m|^{\beta - \varepsilon}} \exp |z|^{\left(\frac{\rho\beta}{\beta - \rho} + \varepsilon\right)} \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ — *любое и* $A(\varepsilon)$ *не зависит от* m.

Эта лемма есть непосредственное следствие теоремы 1 (см. неравенство (1.3)) из работы [4], если учесть неравенство (4.4) из этой же работы.

Заметим, что из неравенств (12) следует, что порядок последовательности

$$F_m(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k f(\mu_k z) \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

не превосходит величины $\dfrac{\rho\beta}{\beta-\rho}$.

Приведем пример функции $L_1(\lambda)$, удовлетворяющей всем условиям леммы 2. Положим

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^m}{\upsilon_n^m}\right), \quad \upsilon_n = n^{\frac{1}{\beta}},$$

где m — целое число $> \beta$. Показывается, что существует предел (см. [5], стр. 88)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|L_1(re^{i\varphi})|}{r^\beta} = \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi\beta}{m}} \cos\beta\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \; 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Таким образом, $L_1(\lambda)$ — целая функция порядка β конечного типа, причем ее индикатриса роста $h(\varphi)$ равна

$$h(\varphi) = \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi\beta}{m}} \cos\beta\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \; 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

В силу непрерывности $h(\varphi)$ имеем: $h(0) = \pi \operatorname{ctg}\dfrac{\pi\beta}{m}$. Из вида функции $L_1(\lambda)$ следует, что

$$|L_1(\lambda)| \geqslant |L(|\lambda|)|. \tag{14}$$

Нулями функции $L_1(\lambda)$ являются точки $\varepsilon^s\upsilon_n$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ $(s = 0, 1, \cdots, m-1;$ $n = 1, 2, \cdots)$, они расположены на m лучах. Так как существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\upsilon_n^\beta} = 1$$

и при больших n

$$\upsilon_{n+1} - \upsilon_n > \alpha\upsilon_n^{1-\beta}, \; 0 < \alpha < 1,$$

то вне кружков $|\lambda - \upsilon_n| < \alpha\upsilon_n^{1-\beta}$ и аналогичных кружков с центрами в точках $\varepsilon^s\upsilon_n$ выполняется (см. [5], стр. 126) асимптотическое равенство

$$\ln|L_1(re^{i\varphi})| \sim r^\beta h(\varphi). \tag{15}$$

При $\alpha < \dfrac{1}{2}$ на положительной части действительной оси между υ_k и

υ_{k+1} найдется точка r_k, в которой будет иметь место соотношение (15). Отсюда, согласно (14), получаем

$$\ln|L_1(r_k e^{i\varphi})| > \ln|L_1(r_k)| > [h(0) - \varepsilon]\ r_k^{\beta} = \left[\pi \operatorname{ctg}\frac{\pi\beta}{m} - \varepsilon\right] r_k^{\beta}.$$

Подчиним m условию: $m > 2\beta$. Тогда $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi\beta}{m} > 0$ и

$$\ln|L_1(r_k e^{i\varphi})| > \delta r_k^{\beta},\ \delta > 0.$$

Числа r_k и нули $L_1(\lambda)$ удовлетворяют, что уже очевидно, всем другим условиям леммы 2. Таким образом функция $L_1(\lambda)$ — искомая.

Заметим, что наряду с $L_1(\lambda)$ условиям леммы 2 удовлетворяет и функция $L_1(\lambda e^{i\psi})$, где ψ — любое. В дальнейшем в качестве такой функции мы возьмем функцию

$$L_1(\lambda e^{i\frac{\pi}{m}}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda^m}{\upsilon_n^m}\right),\quad \upsilon_n = n^{\frac{1}{\beta}}.$$

Ее индикатриса $h(\varphi)$ равна $h(\varphi) = \dfrac{\pi}{\sin\dfrac{\pi\beta}{m}}\cos\beta\varphi,\ |\varphi| < \dfrac{\pi}{m}\cdot$

Теперь мы в состоянии и сформулировать и доказать теорему об асимптотическом поведении функции $\omega_L(\mu, F)$ при $\mu \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ — целая функция порядка $\upsilon < \dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Выберем число $\beta > \rho_1$ следующим образом: $\upsilon < \dfrac{\rho\beta}{\beta - \rho} < \dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Пусть $L_1(\lambda)$ — целая функция порядка β, удовлетворяющая условиям леммы 2. Допустим дополнительно, что нули μ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ этой функции расположены на лучах $l_1, l_2, \cdots, l_s$, исходящих из начала. Тогда мы имеем*

$$\omega_L(\mu, F) = -A(\mu) + B(\mu)\,L(\mu),$$

где

$$A(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k L(\mu_k)}{\mu - \mu_k},\quad B(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\mu - \mu_k},\quad B_k = \frac{\omega_{L_1}(\mu_k, F)}{L_1'(\mu_k)} \tag{15'}$$

— мероморфные функции с простыми полюсами в точках μ_k, которые в любом угле D с вершиной в начале, не содержащем лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$, имеют при $\mu \to \infty$ следующие асимптотические представления:

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{\mu^{k+1}},\quad B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta_k}{\mu^{k+1}}\cdot \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha_k = D^k\{M_L[F(z)]\}_0,\ \beta_k = D^k F(0)\ \ (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{17}$$

а

$$M_L[F(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z).$$

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим последовательность (13). Ее порядок не превосходит величины $\frac{\rho\beta}{\beta-\rho} < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ и она, в силу (12), сходится к $F(z)$. По лемме 1

$$\omega_L(\mu, F) = \lim_{m\to\infty} \omega_L(\mu, F_m).$$

Так как

$$D^n[f(\lambda z)] = \lambda^n f(\lambda z),$$

в силу чего

$$\omega_L[\mu, f(\lambda z)] = f(0)\,\frac{L(\mu)-L(\lambda)}{\mu-\lambda},$$

то

$$\omega_L(\mu, F_m) = f(0)\sum_{k=1}^{m} A_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}$$

и, следовательно

$$\omega_L(\mu, F) = f(0)\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}. \qquad (18)$$

Обратимся к неравенству (12). Из него, положив $z=0$, следует, что

$$|A_k| < C(\varepsilon)\exp\left[-|\mu_k|^{\beta-\varepsilon}\right],$$

где $C(\varepsilon)$ не зависит от k. Далее, на основании этого при больших k получим

$$|A_k L(\mu_k)| < \exp\left[-|\mu_k|^{\beta-\varepsilon} + |\mu_k|^{\rho_1+\varepsilon}\right] < \exp\left[-\frac{1}{2}|\mu_k|^{\beta-\varepsilon}\right], \qquad (19)$$

ибо $\beta > \rho_1$. Но $|\mu_k| > k^{\frac{1}{\beta+\varepsilon}}$ при больших k. Поэтому ряды (15) всюду сходятся кроме точек μ_k и представляют собой мероморфные функции с простыми полюсами в этих точках. В силу (18) имеем

$$\omega_L(\mu, F) = -A(\mu) + B(\mu)\,L(\mu).$$

Осталось найти асимптотику функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$. С этой целью запишем

$$\frac{1}{\mu-\mu_k} = \sum_{m=0}^{n}\frac{\mu_k^m}{\mu^{m+1}} + \left(\frac{\mu_k}{\mu}\right)^{n+1}\frac{1}{\mu-\mu_k}.$$

В силу этого тождества

$$A(\mu) = \sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{\mu^{m+1}} + A_n(\mu),$$

где

$$a_m = \sum_{k=1}^{\infty} B_k\mu_k^m L(\mu_k), \quad A_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty} B_k\mu_k^{n+1}\frac{L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}.$$

Пусть D — угол с вершиной в начале координат, в котором нет лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$. Тогда $|\mu - \mu_k| > \gamma|\mu|$, $\gamma > 0$, для $\mu \in D$ и

$$|A_n(\mu)| < \frac{c_n}{|\mu|^{n+2}}, \ \mu \in D,$$

где

$$c_n = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} |B_k \mu_k^{n+1} L(\mu_k)|$$

— конечная величина, в силу оценки (19). Следовательно,

$$A(\mu) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{\mu^{m+1}}.$$

Выясним чему равны коэффициенты a_m. Для этого подействуем оператором

$$M_L(y) = \sum_{0}^{\infty} c_n D^n y$$

на нашу функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\mu_k z).$$

Можно показать, что

$$M_L(F) = \lim_{m \to \infty} M_L(F_m) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L(\mu_k) f(\mu_k z).$$

Отсюда получаем

$$D^m \{M_L(F)\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k L(\mu_k) \mu_k^m f(\mu_k z),$$

$$D^m \{M_L(F)\}_0 = a_m.$$

Еще проще убедиться в искомой асимптотике для функции $B(\mu)$. Теорема доказана.

Замечание. Для дальнейшего полезно отметить следующее. Пусть в теореме 1 роль функции $L_1(\lambda)$ играет функция

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^m}{v_n^m}\right), \ v_n = n^{\frac{1}{\beta}},$$

рассмотренная перед теоремой 1. Посмотрим, как ведет себя функция $A(\mu)$ на окружностях $|\lambda| = r_k$. Напомним, что r_k мы выбирали между v_k и v_{k+1} вне интервалов $|\lambda - v_n| < a v_n^{1-\beta}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Поэтому при $|\mu| = r_k$

$$|\mu - \mu_n| > |r_k - v_k| > a v_k^{1-\beta} > a_1 |\mu|^{1-\beta}, \ 0 < a_1 < a,$$

в силу чего

$$|A(\mu)| < \frac{1}{\alpha_1} |\mu|^{\beta-1} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n L(\mu_n)|, \quad |\mu| = r_k.$$

Ряд справа, на основании неравенства (19), сходится.

Следствие 1. Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$ и пусть p—наименьшее целое число, удовлетворяющее условию: $D^p \{M_L[F(z)]\}_0 \neq 0$. Если $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, то при больших n

$$\omega_L(\lambda_n, F) \sim -\frac{D^p \{M_L[F(z)]\}_0}{\lambda_n^{p+1}}.$$

Если $M_L[F(z)] = 0$, то величина $\omega_L(\lambda_n, F)$ быстрее стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для доказательства возьмем в теореме 1 в качестве функции $L_1(\lambda)$ сначала функцию

$$\varphi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^m}{v_n^m}\right), \quad v_n = n^{\frac{1}{\beta}}, \quad m > 2\beta,$$

а затем функцию $\varphi(\lambda e^{i\frac{\pi}{m}})$. В первом случае роль лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$ будут играть лучи l_k: $\arg \lambda = \frac{2\pi}{m} k$ $(k=0, 1, \cdots, m-1)$, а во втором случае — лучи l_k^1: $\arg \lambda = \frac{2\pi}{m} k + \frac{\pi}{m}$ $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$. Объединение внешности лучей l_k и внешности лучей l_k' охватит всю плоскость и потому

$$\omega_L(\lambda_n, F) = -A(\lambda_n)$$

(здесь $A(\mu)$ определяется или по функции $\varphi(\lambda)$ или по функции $\varphi(\lambda e^{\frac{\pi i}{m}})$. Отсюда, учитывая (16) и (17), все и следует.

Следствие 2. Пусть выражение

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}$$

является целой функцией. Если $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, то функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$.

Согласно условию имеем $\omega_L(\lambda_n, F) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Отсюда, на основании следствия 1, вытекает, что

$$D^p \{M_L[F(z)]\}_0 = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, $M_L(F) = 0$.

§ 2. Теорема единственности

Здесь мы хотим доказать, что если в ряде (5) все члены равны нулю, то $F(z) \equiv 0$. Предположение, что в ряде (5) все члены равны нулю, эквивалентно предположению, что функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \tag{20}$$

—целая. Поэтому теорему единственности мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть* $L(\mu)$ *имеет бесконечно много нулей и функция* (20)*-целая. Тогда* $F(z) \equiv 0$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 3. Пусть $L(\beta) = 0$ *и* $\widetilde{L}(\lambda) = \dfrac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$. *Тогда имеет место тождество*

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta)\, \omega_{\widetilde{L}}(\mu, F) + M_{\widetilde{L}}(F)_0. \tag{21}$$

Имеем

$$\omega_L[\mu, f(\lambda z)] = f(0)\,\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}, \quad \omega_{\widetilde{L}}[\mu, f(\lambda z)] = f(0)\,\frac{\widetilde{L}(\mu) - \widetilde{L}(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

$$M_{\widetilde{L}}[f(\lambda z)] = \widetilde{L}(\lambda) f(\lambda z)$$

и тождество (21) сразу проверяется для функции $F(z) = f(\lambda z)$. Тогда оно верно для функции (13). Итак

$$\omega_L(\mu, F_m) = (\mu - \beta)\, \omega_{\widetilde{L}}(\mu, F_m) + M_{\widetilde{L}}(F_m)_0.$$

Устремим теперь m в ∞. В пределе, на основании леммы 1, мы и получим (21).

Лемма 4. *Пусть функция* (20)*—целая и пусть* $L(\beta) = 0$. *Тогда*

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\widetilde{L}}(\mu, F)}{\widetilde{L}(\mu)}, \quad \widetilde{L}(\mu) = \frac{L(\mu)}{\mu - \beta}.$$

Согласно условию $\omega_L(\beta, F) = 0$. Положив $\mu = \beta$ в (21), получим $M_{\widetilde{L}}(F)_0 = 0$. В силу этого, тождество (21) примет вид

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta)\, \omega_{\widetilde{L}}(\mu, F),$$

откуда и вытекает нужный результат.

Лемма 5. *Пусть* $L(\lambda)$ *имеет бесконечно много нулей и функция* (20)*—целая. Тогда*

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_\varphi(\mu, F)}{\varphi(\mu)}, \quad \varphi(\mu) = \mu L(\mu).$$

На основании тождества (21) имеем

$$\omega_\varphi(\mu, F) = \mu\omega_L(\mu, F) + M_L(F)_0.$$

Так как функция (20)—целая, то по следствию 2 из теоремы 1 функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$. Следовательно, $M_L(F)_0 = 0$. Поэтому

$$\omega_\varphi(\mu, F) = \mu\, \omega_L(\mu, F),$$

что и надо было показать.

Лемма 6. *Пусть последовательность целых функций* $\{\varphi_k(\mu)\}$ *имеет порядок* $\leqslant \rho_1$ *и пусть она сходится к функции* $\varphi(\mu)$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{\varphi_k}(\mu, F) = \omega_\varphi(\mu, F).$$

Для доказательства положим

$$\varphi_k(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \mu^n, \quad \varphi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mu^n.$$

Имеем

$$\omega_\varphi(\mu, F) - \omega_{\varphi_k}(\mu, F) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (d_n - d_n^{(k)}) [D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)] +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} (d_n - d_n^{(k)}) [D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)] = J_k' + J_k''.$$

Функция $F(z)$ имеет порядок $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Поэтому квадратная скобка не превосходит (см. доказательство леммы 1) по модулю при $|\mu| \leqslant R$, $R > 1$,

$$A(\varepsilon)\, n R^n n^{n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right)}, \quad \nu < \alpha < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}, \quad \alpha > \rho.$$

Согласно условию

$$|d_n^{(k)}| < B(\varepsilon)\, n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)},$$

где $B(\varepsilon)$ не зависит от k. То же неравенство будет иметь место и для коэффициентов d_n. В силу всего этого

$$|J_k''| < 2A(\varepsilon) B(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} n R^n n^{n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho_1} + 2\varepsilon\right)}.$$

Круглая скобка при малом ε отрицательна. Поэтому $|J_k''|$ можно сделать малым за счет большого N. Величина $|J_k'|$ будет малой (при фиксированном N) при достаточно больших k, ибо при любом фиксированном n

$$\lim_{k\to\infty} d_n^{(k)} = d_n.$$

Лемма 7. *В условиях леммы* 5

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_\psi(\mu, F)}{\psi(\mu)}, \quad \psi(\mu) = L(\mu) P(\mu),$$

где $P(\mu)$ — целая функция порядка $\leqslant \rho_1$.

Пусть

$$P(\mu) = \sum_0^{\infty} d_n \mu^n, \quad P_k(\mu) = \sum_{n=0}^{k} d_n \mu^n, \quad \psi_k(\mu) = L(\mu) \cdot P_k(\mu).$$

По лемме 5

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\varphi_1}(\mu, F)}{\varphi_1(\mu)} = \cdots = \frac{\omega_{\varphi_k}(\mu, F)}{\varphi_k(\mu)}, \quad \varphi_s(\mu) = \mu^s L(\mu),$$

откуда по известному свойству пропорций

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{k} d_n\, \omega_{\varphi_n}(\mu, F)}{\sum\limits_{n=0}^{k} d_n \varphi_n(\mu)} = \frac{\omega_{\psi_k}(\mu, F)}{\psi_k(\mu)}.$$

Последовательность $\{\psi_k(\mu)\}$ имеет порядок $\leqslant \rho_1$ и она сходится к $\psi(\mu)$. По лемме 6 тогда получаем

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \lim_{k \to \infty} \frac{\omega_{\psi_k}(\mu, F)}{\psi_k(\mu)} = \frac{\omega_\psi(\mu, F)}{\psi(\mu)}.$$

Доказательство теоремы. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^p e^{P(\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\lambda^s}{s\lambda_n^s}},$$

где $p \geqslant 0$, $s \leqslant \rho_1$ и $P(\lambda)$ — многочлен степени $\leqslant \rho_1$. Возьмем фиксированное число m и положим

$$P_m(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right), \quad Q_N(\lambda) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\lambda^s}{s\lambda_n^s}}, \quad N > m.$$

Применяя сначала несколько раз последовательно лемму 4, а затем лемму 7, получим

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\varphi_N}(\mu, F)}{\varphi_N(\mu)}, \quad \varphi_N(\mu) = P_m(\mu)\, Q_N(\mu).$$

Последовательность $\{\varphi_N(\mu)\}$ имеет порядок $\leqslant \rho_1$ и сходится к $P_m(\mu)$. На основании леммы 6 тогда будем иметь

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{P_m}(\mu, F)}{P_m(\mu)}.$$

Поскольку это отношение—целая функция, причем $P_m(\mu)$ — многочлен степени m, а $\omega_{P_m}(\mu, F)$ — многочлен степени $\leqslant (m-1)$, то

$$\omega_{P_m}(\mu, F) \equiv 0. \tag{22}$$

Пусть

$$P_m(\mu) = \sum_{n=0}^{m} d_n \mu^n.$$

Тогда тождество (22) запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{m} d_n \left[D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)\right] \equiv 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$
\begin{aligned}
d_1D^0F(0)+d_2D^1F(0)+\cdots+d_mD^{m-1}F(0)&=0,\\
d_2D^0F(0)+\cdots+d_mD^{m-2}F(0)&=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
d_{m-1}D^0F(0)+d_mD^1F(0)&=0,\\
d_mD^0F(0)&=0.
\end{aligned}
$$

Из этих равенств последовательно, начиная с конца, находим

$$D^0F(0)=D^1F(0)=\cdots=D^{m-1}F(0)=0.$$

Поскольку m — любое, то, следовательно, все $D^kF(0)=0$. Поэтому $F(z)\equiv 0$, что и надо было доказать.

§ 3. Интегральное представление произвольной функции

Теорема единственности обеспечивает принципиальную возможность восстановления функции $F(z)$, если известны члены ряда (5). Во введении было отмечено, что если функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (6) или условию (8), то она представляется рядом (7). Здесь мы рассмотрим случай, когда эти условия не выполняются. Пусть

$$L(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^m}{\lambda_n^m}\right),\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}}=\sigma,\ \lambda_n>0,\quad \frac{m}{2}<\rho_1<m, \tag{23}$$

где m — целое положительное число. Показывается (см. [5], стр. 88), что существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}}=\frac{\pi\sigma}{\sin\dfrac{\pi\rho_1}{m}}\cos\rho_1\left(\varphi-\frac{\pi}{m}\right),\ 0<\varphi<\frac{2\pi}{m}. \tag{24}$$

Учитывая (24) и тот факт, что функция $L(\lambda)$ принимает одинаковые значения в точках $\lambda e^{\frac{2k\pi}{m}i}$ $(k=0,1,\cdots,m-1)$, можно утверждать следующее: в углах

$$D_k^-:\left|\arg\left(\frac{2\pi}{m}k-\varphi\right)\right|<\varphi_0\ (k=0,1,\cdots,m-1),\ \varphi_0=\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2\rho_1}>0, \tag{25}$$

функция $L(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ стремится к нулю, а в углах

$$D_k^+:\left|\arg\left(\frac{2\pi}{m}k+\frac{\pi}{m}-\varphi\right)\right|<\frac{\pi}{2\rho_1}\ (k=0,1,\cdots,m-1) \tag{26}$$

она стремится к бесконечности. Отсюда, в частности, следует, что эта функция не удовлетворяет условию (8) и тем более условию (6). Наша задача получить для функции $F(z)$ порядка $\upsilon<\dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ интегральное представление через $L(\lambda)$ и $\omega_L(\lambda,F)$. С этой целью введем вспомогательную функцию

$$L_1(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^{2m}}{\upsilon_n^{2m}}\right),\quad \upsilon_n=n^{\frac{1}{\beta}},\tag{27}$$

где m — то же, что и выше, а β таково, что $\rho_1<\hat{\beta}<m$ и $\upsilon<\frac{\rho\beta}{\hat{\beta}-\rho}<$ $<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$. В § 1 мы убедились, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы 2. В силу леммы 2 имеем

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kf(\mu_kz),\quad A_k=\frac{\omega_{L_1}(\mu_k,F)}{f(0)L_1'(\mu_k)},\tag{28}$$

где μ_k $(k=1,2,\cdots)$—нули функции $L_1(\mu)$. По теореме 1

$$\omega_L(\mu,F)=-A(\mu)+B(\mu)L(\mu),\tag{29}$$

где

$$A(\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_kL(\mu_k)}{\mu-\mu_k},\quad B(\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\mu-\mu_k},\quad B_k=f(0)A_k.\tag{30}$$

Точки μ_s $(s=1,2,\cdots)$ расположены на лучах $l_k:\arg\mu=\frac{\pi}{2m}+$ $+\frac{k\pi}{m}$ $(k=0,\cdots,2m-1)$. Так как в неравенстве (26), определяющем угол D_k^+, величина $\frac{\pi}{2\rho_1}>\frac{\pi}{2m}$, то лучи l_k $(k=0,1,\cdots,2m-1)$ все расположены в углах D_s^+ $(s=0,1,\cdots,m-1)$. Рассмотрим подробнее угол D_0^+. В нем расположены лучи l_0, l_1. Построим замкнутый конечный контур C_k^0 следующим образом. Проведем в угле D_0^+ луч l_0' ниже луча l_0 и луч $l_0^{\bullet}$ выше луча l_1. Пусть $|\lambda|=r_k\uparrow\infty$ — окружности, такие, что при любом $\varepsilon>0$

$$\ln|L_1(r_ke^{i\varphi})|>r_k^{\beta-\varepsilon},\quad k>\mathrm{K}(\varepsilon)$$

(такие окружности имеются, ибо функция $L_1(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2). Контур C_k^0 состоит из отрезков p_k', $p_k^{\bullet}$ лучей l_0', $l_0^{\bullet}$, заключенных между началом координат и окружностью $|\lambda|=r_k$, и дуги γ_k этой окружности, заключенной между лучами l_0', $l_0^{\bullet}$. В силу (29) имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k^0}\frac{\omega_L(\mu,F)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k^0}\frac{A(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_k^0}\frac{B(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)}.$$

Левая часть равна нулю, так как внутри C_k^0 нет нулей функции $L(\mu)$. Второй интеграл из правой части, учитывая представление (30), равен

$$\sum_{\mu_j \in E_k^0} A_j f(\mu_j z),$$

где E_k^0 — область, ограниченная контуром C_k^0. Таким образом

$$\sum_{\mu_j \in E_k^0} A_j f(\mu_j z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p_k'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p_k^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)}. \tag{31}$$

На дугах γ_k функция $L(\mu)$, в силу равенства (24), удовлетворяет условию:

$$\ln |L(\mu)| > C\, |\mu|^{\rho_1},\ C > 0.$$

На тех же дугах имеем (см. замечание после теоремы 1):

$$|A(\mu)| < C_1\, |\mu|^{\beta - 1}.$$

Поэтому третий интеграл в правой части равенства (31) стремится к нулю при $k \to \infty$. В итоге получаем

$$\sum_{\mu_j \in D_0^+} A_j f(\mu_j z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_0'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_0^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)}, \tag{32}$$

причем переменная интегрирования μ пробегает луч l_0^1 в направлении от начала до ∞, а луч $l_0^{\bullet}$ — в направлении от ∞ до начала.

Равенства, аналогичные равенству (32), имеют место для каждого угла D_k^+. Сложив их и приняв во внимание формулу (28), получим

$$F(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_k'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_k^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} \right\}. \tag{33}$$

Здесь l_k', $l_k^{\bullet}$ — лучи из угла D_k^+, которые обладают следующим свойством: переход от l_k' к $l_k^{\bullet}$ происходит в D_k^+ против часовой стрелки, точки $\mu_j \in D_k^+$ (они находятся на двух лучах) лежат между l_k' и $l_k^{\bullet}$. Формула (33) и есть искомая формула. Мы ее сейчас запишем в несколько ином виде. Учтем, что в интегралах из формулы (33) луч l_k' обходится от начала координат до ∞, а луч $l_k^{\bullet}$ — в обратном направлении. Имея это в виду, обозначим через Γ_k ($k = 0, 1, \cdots, m-1$) контур, составленный из лучей $l_{k-1}^{\bullet}$, l_k', и проходимый против часовой стрелки (при $k=0$ следует считать $l_{-1}^{\bullet} = l_{m-1}^{\bullet}$). Заметим, что угол D_k^- (в нем $L(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ быстро стремится к нулю) лежит внутри контура Γ_k. С помощью контуров Γ_k формула (33) запишется в виде

$$F(z) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)}. \tag{34}$$

Следует отметить, что внутри контуров Γ_k $(k=0, 1, \cdots, m-1)$ у мероморфной функции $A(\mu)$ нет особых точек. Напротив, все нули функции $L(\mu)$ лежат внутри контуров Γ_k. Отсюда следует, в частности, принимая во внимание формулу (29), что у функций

$$-\frac{A(\mu)f(\mu z)}{f(0)L(\mu)}, \quad \frac{\omega_L(\mu, F)f(\mu z)}{f(0)L(\mu)}$$

вычеты в нулях $L(\mu)$ равны (у мероморфной функции $B(\mu)$ внутри Γ_k нет особых точек). Однако к интегралам из формулы (34) мы не можем применить непосредственно теорию вычетов, потому что знаменатель $L(\mu)$ внутри Γ_k, тогда $\mu\to\infty$ и $\mu\in D_k^-$, быстро стремится к нулю. В следующем параграфе будет показано, каким образом все-таки можно будет выразить интегралы через указанные вычеты.

§ 4. О суммировании ряда

Рассмотрим из формулы (34) интеграл

$$F_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{A(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}. \tag{35}$$

В нем Γ_0 — граница угла $|\arg\mu|<\varphi_1=\varphi_0+\delta$, где $\varphi_0=\dfrac{\pi}{m}-\dfrac{\pi}{2\rho_1}$ и δ — достаточно малое положительное число (лучи $\arg\mu=\pm\varphi_1$ лежат в областях D_0^+ и D_{m-1}^+). Функция $A(\mu)$ внутри Γ_0 — аналитическая.

Возьмем семейство функций $\{\varphi_q(\mu)\}$, обладающее следующими свойствами:

1) все функции $\varphi_q(\mu)$ регулярны на контуре Γ_0 и внутри него;

2) на любой конечной части контура Γ_0 равномерно $\varphi_q(\mu)\to 1$ при $q\to\infty$ и имеется такое $p<\rho_1$, что при всех q

$$|\varphi_q(\mu)|<Ae^{|\mu|^p}, \quad \mu\in\Gamma_0,$$

где постоянная A не зависит от q;

3) для каждого q имеются такие положительные $C(q)$ и $\beta(q)$, причем $\beta(q)>\rho_1$, что на Γ_0 и внутри Γ_0 выполняется условие

$$|\varphi_q(\mu)|<C(q)\,e^{-|\mu|^{\beta(q)}}.$$

Убедимся сначала, что такие семейства существуют. С этой целью введем функцию

$$\Phi(\mu)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right), \quad \nu_n=n^{\frac{1}{\rho_2}}, \quad \rho_1<\rho_2<m.$$

Для нее существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_2}}=\frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi\rho_2}{m}}\cos\rho_2\varphi, \quad |\varphi|<\frac{\pi}{m}.$$

Правая часть положительна, если $|\varphi|<\frac{\pi}{2\rho_2}$. В силу неравенств $\frac{m}{2}<\rho_1<m$, $\rho_1<\rho_2<m$ имеем

$$\varphi_0=\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{2\rho_1}<\frac{\pi}{2m},\ \frac{\pi}{2\rho_2}>\frac{\pi}{2m}.$$

Поэтому при достаточно малом $\delta>0$ получаем $\frac{\pi}{2\rho_2}>\varphi_1=\varphi_0+\delta$ и значит, на контуре Γ_0 и внутри Γ_0

$$|\Phi(\mu)|>Ce^{\gamma|\mu|^{\rho_2}},\ \gamma>0,\ C>0. \tag{36}$$

Теперь положим

$$\varphi_q(\mu)=\frac{1}{\Phi(\mu)}\prod_{n=1}^{q}\left(1+\frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right)=\left\{\prod_{n=q+1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu^n}{\nu_n^m}\right)\right\}^{-1}\ (q=1,2,\cdots). \tag{37}$$

У нас $\varphi_0<\frac{\pi}{2m}$, при малом $\delta>0$ также $\varphi_1=\varphi_0+\delta<\frac{\pi}{2m}$. В силу этого $|\arg(\mu^m)|<\frac{\pi}{2}$, когда точка μ находится на контуре Γ_0. Поэтому

$$\left|1+\frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right|\geqslant 1,\ \mu\in\Gamma_0$$

и $|\varphi_q(\mu)|<1$, $\mu\in\Gamma_0$. Отсюда и из оценки (36) вытекает, что последовательность $\{\varphi_q(\mu)\}$ удовлетворяет всем необходимым требованиям.

После этого вернемся к рассмотрению интеграла (35). Положим

$$\Phi_q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{A(\mu)\,\varphi_q(\mu)\,f(\mu z)\,d\mu}{f(0)\,L(\mu)}. \tag{38}$$

Из свойства 2) семейства $\{\varphi_q(\mu)\}$ следует, что для z из любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{q\to\infty}\Phi_q(z)=F_0(z).$$

Интеграл (38) вычисляется с помощью теории вычетов. Укажем как это делается. Функция $L(\mu)$ является функцией вполне регулярного роста и для нее поэтому имеются окружности $|\mu|=r_k\uparrow\infty$ такие, что

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})|>[h(\varphi)-\varepsilon]\,r_k^{\rho_1},\ k>K(\varepsilon),$$

где $h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\mu)$. Отсюда

$$\left|\frac{1}{L(\mu)}\right|<e^{a|\mu|^{\rho_1}},\ |\mu|=r_k\,(k=1,2,\cdots),\ a>0. \tag{39}$$

Функция $A(\mu)$ является ограниченной на Γ_0 и внутри Γ_0, функция $f(\mu z)$, когда z лежит в круге $|z|<R$, удовлетворяет условию

$$|f(\mu z)|<Ce^{|\mu|^{\rho'}},\ \rho'>\rho.$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (39) и свойство 3) семейства $\{\varphi_q(\mu)\}$ заключаем, что подынтегральная функция в интеграле (38) имеет оценку

$$\left|\frac{A(\mu)\varphi_q(\mu)f(\mu z)}{f(0)L(\mu)}\right| < C_1(q)\,e^{-\frac{1}{2}|\mu|^{\beta(q)}}, \quad |\mu|=r_k, \ |\arg\mu|\leqslant\varphi_1, \ |z|<R.$$

Следовательно, учитывая представление (23), получим

$$\Phi_q(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\frac{A(\lambda_\nu)\varphi_q(\lambda_\nu)f(\lambda_\nu z)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}\right).$$

Но (см. конец предыдущего параграфа)

$$A(\lambda_\nu)=-\omega_L(\lambda_\nu, F).$$

Поэтому окончательно

$$\Phi_q(z)=-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}\varphi_q(\lambda_\nu)f(\lambda_\nu z)\right).$$

В результате, интеграл (35) мы выразили через

$$\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}f(\lambda_\nu z)=K(z, \lambda_\nu),$$

где $K(z, \lambda_\nu)$ — член ряда (5), соответствующий нулю λ_ν функции $L(\mu)$. Аналогичным образом рассматривается интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{A(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}, \quad k>0$$

из формулы (34). Отметим только следующее. Можно считать, что контур Γ_k получается из контура Γ_0 поворотом последнего на угол $\frac{2\pi}{m}k$. Внутри Γ_k у $L(\mu)$ лежат нули $\lambda_\nu e^{\frac{2\pi}{m}ki}$ $(\nu=1, 2, \cdots)$. Если $\{\varphi_q(\mu)\}$ — уже рассмотренное семейство функций, связанных с контуром Γ_0, то $\{\varphi_q(\mu e^{-\frac{2\pi}{m}ki})\}$ — соответствующее семейство для контура Γ_k. В точках $\lambda_\nu e^{\frac{2\pi}{m}ki}$ функции этого семейства имеют те же значения что и функции исходного семейства в точках λ_ν.

Имея все это в виду, на основании формулы (34), можно утверждать следующее.

Теорема 3. *Пусть* $L(\mu)$ — *функция вида* (23), $|\mu|=r_k\uparrow\infty$ — *окружности, на которых выполняется условие*

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})|>[h(\varphi)-\varepsilon]\,r_k, \quad k>K(\varepsilon)$$

($h(\varphi)$ — *индикатриса роста* $L(\mu)$), $\{\varphi_q(\mu)\}$ — *семейство функций со свойствами* 1), 2), 3). *Если* $F(z)$ — *целая функция порядка* $<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$, *то*

$$F(z)=\lim_{q\to\infty} S_q(z),$$

где

$$S_q(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\varphi_q(\lambda_\nu)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\omega_L(\lambda_\nu\varepsilon^s, F)}{f(0)\,L'(\lambda_\nu\varepsilon^s)}f(\lambda_\nu\varepsilon^s z),\ \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Указанный процесс мы можем рассматривать как метод суммирования исходного ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\omega_L(\lambda_\nu\varepsilon^s, F)}{f(0)\,L'(\lambda_\nu\varepsilon^s)}f(\lambda_\nu\varepsilon^s z), \tag{40}$$

который расходится, если $M_L(F)\not\equiv 0$. То, что этот ряд расходится, видно из следующих рассуждений. Пусть p — наименьшее целое число такое, что $D^p\{M_L(F)\}_0\neq 0$. По следствию 1 из теоремы 1 имеем

$$\omega_L(\lambda_\nu, F)\sim-\frac{D^p\{M_L(F)\}_0}{\lambda_\nu^{p+1}}.$$

В угле $|\arg\mu|<\delta<\varphi_0=\dfrac{\pi}{m}-\dfrac{\pi}{2\rho_1}$, согласно равенству (24), справедлива оценка

$$|L(\mu)|<Ae^{-\alpha|\mu|^{\rho_1}},\ A>0,\ \alpha>0. \tag{41}$$

Пусть C_ν — окружность $|\mu-\lambda_\nu|=1$. Согласно формуле

$$L'(\lambda_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{L(\mu)\,d\mu}{(\mu-\lambda_\nu)^2},$$

на основании оценки (41), получаем

$$|L'(\lambda_\nu)|<A_1 e^{-\alpha_1\lambda_\nu^{\rho_1}},\ \alpha_1>0.$$

Таким образом

$$\left|\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{L'(\lambda_\nu)}\right|>A_2\frac{e^{\alpha_1\lambda_\nu^{\rho_1}}}{\lambda_\nu^{p+1}}, \tag{42}$$

и ряд (40) расходится по крайней мере в точке $z=0$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 10.II.1967

Ա. Ֆ. ԼԵՈՆՏԵՎ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ՝ ԴԻՐԻԽԼԵՅԻ ԵՎ ԱՎԵԼԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիցուք $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$-ը ρ կարգի ամբողջ ֆունկցիա է, ընդ որում բոլոր $a_n \neq 0$ և գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \left|\frac{1}{a_n}\right|} = \rho$ սահմանը, $L(\lambda) = \sum\limits_0^\infty c_n \lambda^n$ ամբողջ ֆունկցիա է. $\rho_1 > \rho$ կարգի և $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ նրա զրոներն են, $F(z) = \sum\limits_0^\infty b_n z^n$ $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ կարգի ամբողջ ֆունկցիա է, նշանակենք $\omega(\mu, F) =$

$$= a_0 \sum_{n=1}^\infty c_n \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \mu \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} + \cdots \mu^{n-1} \frac{b_0}{a_0}\right).$$

Ուսումնասիրվում է

$$\sum_{n=1}^\infty A_n f(\lambda_n z), \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_k)}. \tag{1}$$

շարքը։ Ստացված է $\omega(\mu, F)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական ներկայացումը (μ)-ի մեծ արժեքների համար։ Ապացուցված է միակության թեորեմ՝ եթե բոլոր $A_k = 0$, ապա $F(z) \equiv 0$, $L(\lambda)$-ի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում տրված է (1) շարքի $F(z)$ ֆունկցիային գումարման մեթոդ։

A. F. LEONTEV

ON THE REPRESENTATION OF ARBITRARY ENTIRE FUNCTIONS BY DIRICHLET AND SOME OTHER FUNCTIONAL SERIES

Summary

Let $f(z) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n z^n$ — be an entire function of order ρ with $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \cdots$, and let the $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \left|\frac{1}{a_n}\right|} = \rho$ exist. Also, let $L(\lambda) = \sum\limits_0^\infty c_n \lambda^n$ — be an entire function of order $\rho_1 > \rho$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — be the set of points where it vanishes, and $F(z) = \sum\limits_0^\infty b_n z^n$ — be an entire function of order $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. We build

$$\omega(\mu, F) = a_0 \sum_{n=1}^\infty C_n \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \mu \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} + \cdots + \mu^{n-1} \frac{b_0}{a_0}\right).$$

The series

$$\sum_{n=1}^\infty A_n f(\lambda_n z), \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_k)}, \tag{1}$$

are investigated in the paper. The asymptotic representation of $\omega(\mu, F)$ for arbitrary large values of $|\mu|$ is obtained. A uniqueness result is prooved: if $A_k=0$ for every k, then $F(z)\equiv 0$.

Under certain assumptions about $L(\lambda)$ a summation method of the series (1) to $F(z)$ is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле, Матем. сб., 70 (112), № 1, 1966, 132—144.
2. *А. Ф. Леонтьев.* Об одном свойстве единственности, Матем. сб., 72 (114), № 2, 1967, 237—250
3. *А. Ф. Леонтьев.* О суммировании ряда Дирихле с действительными показателями для произвольной аналитической функции, Изв. АН СССР, серия матем., 31, № 1, 1967, 87—102.
4. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Матем. сб., 71 (113), № 1, 1966, 3—13.
5. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

Г. Г. ДЖЕБЕЯН

ОБ ОПЕРАТОРЕ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ ПРИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящей работе изучается оператор Максвелла T [1] в ограниченной области для широкого класса краевых условий (самосопряженных и несамосопряженных). Доказывается, что при этих краевых условиях обратный оператор T^{-1} вполне непрерывен.

Оператор Максвелла T при несамосопряженных краевых условиях более частного вида рассматривался в статье Э. Р. Цекановского и автора [1]. В этой статье при изучении „задачи отражения" принималось, что затухающими видами колебаний можно пренебречь. Используя результаты настоящей работы, можно провести полный анализ „задачи отражения" без каких-либо дополнительных физических допущений.

Автор благодарен М. С. Лившицу за постановку задачи и внимание к ней, а также В. М. Адамяну и Э. Р. Цекановскому за критические замечания при выполнении настоящей работы.

1°. Пусть Ω — ограниченная область трехмерного пространства E_3 с кусочно-гладкой границей $\Gamma = S + \Sigma$, где S—гладкая выпуклая часть Γ, а Σ—плоская часть Γ, охватываемая контуром l. Введем прямоугольную систему координат (X_1, X_2, X_3) таким образом, чтобы плоская часть поверхности Γ—Σ совпадала с плоскостью $X_1 O X_2$, а ось OX_3 была направлена во внутрь Ω.

Пространством $L_2(\Sigma)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций $u^0 = (\overset{0}{u_1}(x_1, x_2), \overset{0}{u_2}(x_1, x_2))$, определенных на Σ, компоненты которых квадратично суммируемы на Σ; метрика в $L_2(\Sigma)$ определяется по формуле

$$(u^0, v^0)_\Sigma = \int\limits_\Sigma (\overset{0}{u_1} \overset{0^*}{v_1} + \overset{0}{u_2} \overset{0^*}{v_2})\, d\sigma.$$

Рассмотрим в $L_2(\Sigma)$ следующие подпространства:

M — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}$ градиентов гладких функций;

M_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{M}_0$ векторов grad φ^0, где φ^0—гладкие функции и $\varphi^0|_l = 0$;

N — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}$ гладких векторов u^0, у которых $\operatorname{div} u^0 = 0$;

N_0 — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{N}_0$ гладких векторов $\mathbf{v}^0$, у которых $\operatorname{div} \mathbf{v}^0 = 0$ и $(\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{n}^0)|_l = 0$, где $\mathbf{n}_0$ — нормаль к l;

U — замыкание в $L_2(\Sigma)$ линеала $\tilde{U}$ гладких градиентов гармонических функций.

Теорема 1. *Всякий гладкий вектор f^0 можно представить как ортогональную сумму*

$$\mathbf{f}^0 = \mathbf{u}^0 \oplus \mathbf{v}^0 \oplus \mathbf{w}^0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}^0 \in \widetilde{M}_0$, $\mathbf{v}^0 \in \widetilde{N}_0$, $\mathbf{w}^0 \in \widetilde{U}$; $\mathbf{u}^0 \oplus \mathbf{w}^0 \in \widetilde{M}$, $\mathbf{v}^0 \oplus \mathbf{w}^0 \subseteq \widetilde{N}$.

Теорема доказывается с помощью логарифмического потенциала и решения граничных задач для двумерного оператора Лапласа аналогично тому, как это сделано в статье Э. Б. Быховского и Н. В. Смирнова [2].

Следствие.

$$L_2(\Sigma) = M_0 \oplus N_0 \oplus U = M \oplus N_0 = M_0 \oplus N. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{u}^0$ — гладкий вектор из N. Как известно [3], его можно представить в виде

$$\mathbf{u}^0 = \operatorname{grad} \varphi^0 \times \mathbf{n}, \tag{3}$$

где φ_0 — гладкая на Σ функция, а $\mathbf{n}$ — нормаль к Σ. Если теперь на контуре l функция φ^0 обращается в нуль, то в нуль на l обращается $(\mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{n}_0)$; верно и обратное. Следовательно, вектор-функции $\mathbf{u}^0 \in N_0$, $\mathbf{v}^0 \in N$ допускают представления:

$$\mathbf{u}^0 = \operatorname{grad} \varphi_1^0 \times \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad} \varphi_1^0 \in M_0, \tag{4}$$

$$\mathbf{v}^0 = \operatorname{grad} \varphi_2^0 \times \mathbf{n}, \quad \operatorname{grad} \varphi_2^0 \in M. \tag{5}$$

Из этих представлений следует, что

$$N = M \times \mathbf{n}, \ N_0 = M_0 \times \mathbf{n}, \ M = \mathbf{n} \times N, \ M_0 = \mathbf{n} \times N_0. \tag{6}$$

2°. Рассмотрим на Σ совокупности функций (γ_m^0) и (ζ_m^0), которые являются системами собственных функций мембранных задач

$$\Delta \gamma_m^0 + \mu_m^2 \gamma_m^0 = 0, \quad \gamma_m^0|_l = 0,$$

$$\Delta \zeta_m^0 + \nu_m^2 \zeta_m^0 = 0, \quad \frac{\partial \zeta_m^0}{\partial n_0}\bigg|_l = 0.$$

Системы (γ_m^0) и (ζ_m^0) полны и ортогональны

$$\int\limits_\Sigma \gamma_m^0 \gamma_n^{0*} d\sigma = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{1}{\mu_m^2}, & m = n, \end{cases} \quad \int\limits_\Sigma \zeta_m^0 \zeta_n^{0*} d\sigma = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{1}{\nu_m^2}, & m = n. \end{cases} \tag{7}$$

Введем вектор-функции

$$\mathbf{F}_m^{(e)} = \operatorname{grad} \gamma_m^0, \quad \mathbf{F}_m^{(h)} = \operatorname{grad} \zeta_m^0 \times \mathbf{n} \quad (m \geqslant 1), \tag{8}$$

$$\mathbf{G}_m^{(e)} = \mathbf{n} \times \operatorname{grad} \gamma_m^0, \quad \mathbf{G}_m^{(h)} = \operatorname{grad} \zeta_m^0 \quad (m \geqslant 1). \tag{9}$$

Очевидно, что $\mathbf{F}_m^{(e)} \in M_0$, $\mathbf{F}_m^{(h)} \in N$, $\mathbf{G}_m^{(h)} \in M$, $\mathbf{G}_m^{(e)} \in N_0$. Нетрудно проверить, что

$$(\mathbf{F}_m^{(e)}, \mathbf{F}_n^{(e)})_\Sigma = (\mathbf{F}_m^{(h)}, \mathbf{F}_n^{(h)})_\Sigma = (\mathbf{G}_m^{(e)}, \mathbf{G}_n^{(e)})_\Sigma = (\mathbf{G}_m^{(h)}, \mathbf{G}_n^{(h)})_\Sigma = \delta_{mn} \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}. \tag{10}$$

Лемма 1. *Системы вектор-функций* $(\mathbf{F}_m^{(e)})$, $(\mathbf{F}_m^{(h)})$, $(\mathbf{G}_m^{(e)})$, $(\mathbf{G}_m^{(h)})$, *образуют ортонормированные базисы в соответствующих подпространствах:* M_0, N, N_0, M.

Утверждение леммы следует из теоремы Грина и полноты систем (γ_m^0), (ζ_m^0).

3°. Рассмотрим в области Ω следующие краевые задачи:

$$\Delta\gamma_m = 0,\ \gamma_{m|S} = 0,\ \gamma_{m|\Sigma} = \gamma_m^0\ (m \geqslant 1), \tag{11}$$

$$\Delta\zeta_m = 0,\ \frac{\partial\zeta_m}{\partial n}\Big|_S = 0,\ \zeta_m\Big|_\Sigma = \zeta_m^0\ (m \geqslant 1), \tag{12}$$

где γ_m^0, ζ_m^0 $(m \geqslant 1)$ — функции, рассмотренные в п. 2°. Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}_m^{(e)} = \operatorname{grad}\gamma_m,\ \mathbf{w}_m^{(h)} = \operatorname{grad}\zeta_m\ (m \geqslant 1). \tag{13}$$

Легко видеть, что $\mathbf{w}_m^{(e)}$, $\mathbf{w}_m^{(h)}$ гармоничны в Ω и на поверхности Γ выполняются условия

$$\mathbf{w}_{mt|S}^{(e)} = 0,\quad \mathbf{w}_{mt|\Sigma}^{(e)} = \mathbf{F}_m^{(e)},$$

$$(\mathbf{w}_m^{(h)} \cdot n)_{|S} = 0,\quad \mathbf{w}_{mt|\Sigma}^{(h)} = \mathbf{G}_m^{(h)}, \tag{14}$$

где $\mathbf{F}_m^{(e)}$, $\mathbf{G}_m^{(h)}$ — вектор-функции, определенные равенствами (8) и (9).

Лемма 2. *Системы* вектор-функций $(\mathbf{w}_m^{(e)})$, $(\mathbf{w}_m^{(h)})$ *линейно независимы и полны в* U_1, U_2* *соответственно.*

Доказательство. Покажем, что система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$ линейно независима и полна в U_1. Пусть для $m = M$ выполняется условие

$$a_1\mathbf{w}_1^{(e)} + a_2\mathbf{w}_2^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{w}_M^{(e)} = 0,$$

тогда на Σ справедливо равенство

$$a_1\mathbf{w}_{1t}^{(e)} + a_2\mathbf{w}_{2t}^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{w}_{Mt}^{(e)} = a_1\mathbf{F}_1^{(e)} + a_2\mathbf{F}_2^{(e)} + \cdots + a_M\mathbf{F}_M^{(e)} = 0.$$

Система $(\mathbf{F}_m^{(e)})$ линейно независима, значит $a_1 = a_2 = \cdots = a_M = 0$, а, следовательно, линейно независимой является система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$. Пусть $\operatorname{grad}\varphi_1 \in \widetilde{U}_1$ и выполняется условие

$$\int_\Omega \operatorname{grad}\varphi_1\,\mathbf{w}_m^{(e)}\,d\Omega = 0\ (m \geqslant 1), \tag{15}$$

которое эквивалентно следующему

$$\int_\Sigma \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\cdot\gamma_m^0\,d\sigma = 0 \qquad (m \geqslant 1). \tag{15a}$$

* U_1 — замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\widetilde{U}_1$ гладких $\operatorname{grad}\varphi$, где φ — гармонические в Ω функции] и $\varphi_{|S} = 0$; U_2—замыкание в $L_2(\Omega)$ линеала $\widetilde{U}_2$ гладких $\operatorname{grad}\psi$, где ψ — гармонические в Ω функции и $\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S = 0$ [1].

В силу полноты (φ_m^0) из (15а) следует, что $\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$, а поскольку $\varphi_{1|S} = 0$ и гармонична в области Ω, то $\varphi_1 = 0$. Значит не существует ненулевого вектора из $\widetilde{U}_1$, удовлетворяющего условию (15). Система $(\mathbf{w}_m^{(e)})$ полна в U_1. Аналогично доказывается утверждение леммы относительно системы $(\mathbf{w}_m^{(h)})$.

4°. Пусть grad $\Phi^0 \in M_0$, его разложение в ряд Фурье имеет вид

$$\operatorname{grad} \Phi^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_{\Sigma} \mathbf{F}_m^{(e)} .$$

Рассмотрим усеченную сумму этого ряда

$$(\operatorname{grad} \Phi_0)_N = \sum_{m=1}^{N} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_{\Sigma} \mathbf{F}_m^{(e)}, \tag{16}$$

и поставим ему в соответствие вектор $(\operatorname{grad} \Phi)_N \in \widetilde{U}_1$, определенный рядом

$$(\operatorname{grad} \Phi)_N = \sum_{m=1}^{N} (\operatorname{grad} \Phi^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_{\Sigma} \mathbf{w}_m^{(e)}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует, что $(\operatorname{grad} \Phi)_{Nt|\Sigma} = (\operatorname{grad} \Phi^0)_N$. Оператор, реализующий соответствие $(\operatorname{grad} \Phi^0)_N \to (\operatorname{grad} \Phi)_N$, обозначим через $\Gamma_0^{(e)}$. На основании неравенства для градиентов гармонических функций [1]

$$\int_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi)^2 \, d\Omega \leqslant C \int_{\Sigma} (\operatorname{grad} \varphi^0)^2 \, d\sigma$$

можно заключить, что $\|\Gamma_0^{(e)}\| \leqslant C$. Поскольку оператор $\Gamma_0^{(e)}$ определен на плотном множестве вектор-функций и является ограниченным, то его можно расширить на все M_0 с сохранением нормы. Таким образом, оператор $\Gamma_0^{(e)}$, переводящий векторы из M^0 в U_1, имеет вид

$$\Gamma_0^{(e)} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{F}_m^{(e)})_{\Sigma} \mathbf{w}_m^{(e)}, \ \|\Gamma_0^{(e)}\| \leqslant C . \tag{18}$$

Легко видеть, что оператор $\Gamma_0^{(e)*}$, действующий из U_1 в M_0, представим в виде

$$\Gamma_0^{(e)*} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{w}_m^{(e)})_{\Omega} \mathbf{F}_m^{(e)} . \tag{19}$$

Аналогично можно ввести операторы $\Gamma_0^{(h)}$ и $\Gamma_0^{(h)*}$:

$$\Gamma_0^{(h)} = \sum_{(m)} (\cdot, \ G_m^{(h)})_{\Sigma} \mathbf{w}_m^{(h)}, \ \|\Gamma_0^{(h)}\| \leqslant C, \tag{20}$$

$$\Gamma_0^{(h)*} = \sum_{(m)} (\cdot, \ \mathbf{w}_m^{(h)})_{\Omega} G_m^{(h)}. \tag{21}$$

5°. Рассмотрим оператор $Q=\begin{pmatrix} 0 & -i\,\mathrm{rot} \\ i\,\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}$, определенный на гладких соленоидальных в области Ω шестимерных векторах $\mathbf{f}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}$. Действие оператора Q на вектор-функции определяется формулой

$$Q\mathbf{f}=\begin{pmatrix} -i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \\ i\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Пусть вектор-функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на поверхности S удовлетворяют условиям

$$\mathbf{E}_{t}{}_{|S}=0, \quad (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})_{|S}=0, \tag{23}$$

а на Σ — тангенциальные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ есть гладкие функции*.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ определим формулой

$$(\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega=\int\limits_\Omega(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*+\mathbf{H}_1\cdot\mathbf{H}_2^*)\,d\Omega. \tag{24}$$

Составляя разность билинейных форм и используя известное равенство $\mathrm{div}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}-\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, будем иметь

$$(Q\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega-(\mathbf{f}_1,\ Q\mathbf{f}_2)_\Omega=-i\int\limits_\Sigma\mathbf{n}\,(\mathbf{E}_{1t}^{0}\times\mathbf{H}_{2t}^{0*}+\mathbf{E}_{2t}^{0*}\times\mathbf{H}_{1t}^{0})\,d\sigma \tag{25}$$

(верхний индекс „0“ здесь и в дальнейшем означает, что векторы определены на Σ).

На основании теоремы 1 вектор-функции $\mathbf{E}_{it}^{0}$, $\mathbf{H}_{it}^{0}$ $(i=1,2)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{it}^{0}=\mathbf{E}_{it}^{0'}+\mathbf{E}_{it}^{0''},\ \ \mathbf{E}_{it}^{0'}\in M_0,\ \ \mathbf{E}_{it}^{0''}\in N\ \ (i=1,2),$$

$$\mathbf{H}_{it}^{0}=\mathbf{H}_{it}^{0'}+\mathbf{H}_{it}^{0''},\ \ \mathbf{H}_{it}^{0'}\in M,\ \ \mathbf{H}_{it}^{0''}\in N_0\ \ (i=1,2). \tag{26}$$

Тогда (25) можно переписать так

$$(Q\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2)_\Omega-(\mathbf{f}_1,\ Q\mathbf{f}_2)_\Omega=$$

$$=-i\int\limits_\Sigma[\mathbf{E}_{it}^{0'}\,(\mathbf{H}_{2t}^{0''*}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{1t}^{0''}(\mathbf{H}_{2t}^{0'*}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{2t}^{0'*}(\mathbf{H}_{1t}^{0''}\times\mathbf{n})+\mathbf{E}_{2t}^{0''*}\,(\mathbf{H}_{it}^{0'}\times\mathbf{n})]\,d\sigma.$$

Нетрудно проверить, что при соотношениях вида

$$\mathbf{E}_t^{0'}=i\varkappa_1\,(\mathbf{H}_t^{0''}\times\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{H}_t^{0'}=i\varkappa_2\,(\mathbf{E}_t^{0''}\times\mathbf{n}) \tag{26'}$$

---

* Гладкие векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, соленоидальные в Ω и удовлетворяющие условиям (23), принадлежат линеалам $\tilde{J}$ и $\tilde{J}_2$, где $\tilde{J}$—линеал гладких соленоидальных в Ω вектор-функций, у которых $\mathbf{E}_{t|S}=0$, а $\tilde{J}_2$— линеал гладких соленоидальных в Ω вектор-функций, у которых $(\mathbf{H}\cdot n)_{|S}=0$. Замыкание $\tilde{J}$ и $\tilde{J}_2$ в норме $L_2(\Omega)$ есть J и J_2, [1], [2].

разность (25) обращается в нуль. Числа $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ могут принимать значения по модулю от 0 до ∞. Если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, то из (26) следует

$$E_t^{0'} = H^{0'} = 0. \tag{27}$$

Условия (26) и (27) можно переписать в базисах $(F_m^{(e)})$ и $(G_m^{(h)})$, полагая каждому „m“ свое значение $\varkappa_{1m}$ и $\varkappa_{2m}$, т. е.

$$\begin{aligned}&(E_t^0, F_m^{(e)})_\Sigma = i\varkappa_{1m} (H_t^0, G_m^{(e)})_\Sigma,\\ &(H_t^0, G_m^{(h)})_\Sigma = i\varkappa_{2m} (E_t^0, F_m^{(h)})_\Sigma, \qquad (m > 1)\end{aligned} \tag{26a}$$

$$(E_t^0, F_m^{(e)})_\Sigma = (H_t^0, G_m^{(h)})_\Sigma = 0 \quad (m \geqslant 1). \tag{27a}$$

6°. Пусть $H(\Omega) = \begin{pmatrix} J \\ J_2 \end{pmatrix}^*$ — гильбертово пространство вектор-функций $f = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ с метрикой (24). Обозначим через A оператор Q (22), определенный на гладком линеале $D(A)$

$$D(A) = \begin{pmatrix} E_{t|S} = 0; \quad (E_t^0, F_m^{(e)})_\Sigma = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (m > 1) \\ (H \cdot n)_{|S} = 0; \ (H_t^0, G_m^{(h)})_\Sigma = 0; \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $(F_m^{(e)})$ и $(G_m^{(h)})$ — ортонормированные базисы в M_0 и M. Область определения оператора A плотна в $H(\Omega)$. $\overline{D(A)} = H(\Omega)$.

Теорема 2. *В гильбертовом пространстве* $H(\Omega)$ *замыкание оператора A является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный* A^{-1}.

Доказательство. Покажем, что A имеет обратный A^{-1}. Пусть $f \in D(A)$ и $Af = 0$, тогда $E = \operatorname{grad} \varphi$, $H = \operatorname{grad} \psi$, где φ и ψ — гармонические в Ω функции, удовлетворяющие на Γ условиям

$$\varphi|_S = \text{const}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_S = 0,$$

$$(\operatorname{grad}_t \varphi, F_m^{(e)})_\Sigma = (\operatorname{grad}_t \psi, G_m^{(h)})_\Sigma = 0 \quad (m > 1).$$

Поскольку $(\operatorname{grad}_t \varphi)_{|\Sigma} \in M_0$ и $(\operatorname{grad}_t \psi)_{|\Sigma} \in M$, то $\varphi^0 = \text{const}$ и $\psi^0 = \text{const}$, а, следовательно, $E = H = 0$ в Ω, т. е. A^{-1} существует.

Пусть теперь $g = \begin{pmatrix} E' \\ H' \end{pmatrix}$ — гладкий вектор из $H(\Omega)$. Рассмотрим уравнение

$$Af = g, \quad f \in D(A)$$

или

$$\begin{aligned} -i \operatorname{rot} H &= E', \\ i \operatorname{rot} E &= H'. \end{aligned} \tag{29}$$

---

* См. сноску на стр. 7.

Векторы E' и H' единственным образом допускают представления [1], [2]

$$\begin{aligned} E' &= -i\,\mathrm{rot}\,H_0, \\ H' &= i\,\mathrm{rot}\,E_0 \end{aligned} \tag{30}$$

или в операторном виде

$$\mathbf{g} = A\mathbf{f}_0, \quad \mathbf{f}_0 \in \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 \\ \tilde{J}_n \end{pmatrix}^*.$$

Оператор A^{-1} имеет вид [2]

$$\mathbf{f}_0 = A^{-1}\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\displaystyle\int_\Omega \frac{H'}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\nabla\eta}{r}\,d\Omega\right\} + \nabla\varphi \\ \dfrac{i}{4\pi}\,\mathrm{rot}\left\{\displaystyle\int_\Omega \frac{E'}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{\nabla\xi}{r}\,d\Omega\right\} + \nabla\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{01} + \nabla\varphi \\ H_{01} + \nabla\psi \end{pmatrix}, \tag{31}$$

где η и ξ — гармонические в $\Omega_1 - \Omega$ $(\Omega_1 \supset \Omega)$ функции, удовлетворяющие на $\Gamma_1 + \Gamma$ условиям $\dfrac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0$, $\dfrac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = -(H'\cdot\mathbf{n})_{|\Gamma}$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0$, $\dfrac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = -(E'\cdot\mathbf{n})_{|\Gamma}$, а ψ и φ — гармонические в Ω функции и на Γ принимают значения: $\varphi_{|S} = -\varphi_0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = -(E_{01}\cdot\mathbf{n})_{|\Sigma}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{S+\Sigma} = -(H_{01}\cdot\mathbf{n})_{|S+\Sigma}$ (функция φ_0 восстанавливается по $E_{01t_{|S}}$ [2]).

Для векторов E_0 и H_0 справедливы оценки [1], [2]:

$$\|E_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathrm{rot}\,E_0\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|H_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathrm{rot}\,H_0\|_{L_2(\Omega)} \;{}^{**},$$

значит для оператора A^{-1} имеет место оценка

$$\|A^{-1}\mathbf{g}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\|\mathbf{g}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из данной оценки и теорем вложения Соболева следует полная непрерывность оператора A^{-1}.

---

* $\tilde{J}$ — линеал гладких соленоидальных векторов, у которых $(E\cdot n)_{|\Sigma} = 0$, $\tilde{J}_n$ — линеал гладких соленоидальных векторов, у которых $(H\cdot n)_{|S+\Sigma} = 0$. Замыкание $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_n$ в $L_2(\Omega)$ есть J_1 и J_n [1], [2].

** $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций, компоненты которых квадратично суммируемы в Ω и имеют квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка; метрика определяется формулой

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{f}_1\cdot\mathbf{f}_2^*\,d\Omega + \int_\Omega \sum_{l,k=1}^{3} \frac{\partial f_{1l}}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_{2l}^*}{\partial x_k}\,d\Omega.$$

Введем оператор $\widetilde{\Gamma}$, который осуществляет соответствие: $\mathbf{f} \to \mathbf{f}_t^0$, где $\mathbf{f} \in W_2^1(\Omega)$, $\mathbf{f}_t^0 \in L_2(\Sigma)$. В силу известного неравенства [4]: $\|\mathbf{f}_t^0\|_{L_2(\Sigma)} \leqslant C_2 \|\mathbf{f}\|_{W_2^1(\Omega)}$, оператор Γ ограничен. Построим оператор

$$\widetilde{A}\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{g} + \Gamma_0 \Gamma A^{-1}\mathbf{g}, \tag{32}$$

где $\Gamma_0 = \begin{pmatrix} -\Gamma_0^{(e)} & 0 \\ 0 & -\Gamma_0^{(h)} \end{pmatrix}$. Нетрудно проверить, что оператор $\widetilde{A}$ (32) переводит гладкие векторы $\mathbf{g}$ из $\mathrm{H}(\Omega)$ в линеал $D(A)$, причем $A\widetilde{A}\mathbf{g} = \mathbf{g}$, следовательно $\widetilde{A} = A^{-1}$. Таким образом

$$A^{-1}\mathbf{g} = A^{-1}\mathbf{g} + \Gamma_0 \Gamma A^{-1}\mathbf{g}. \tag{32a}$$

Расширяя по непрерывности на все $\mathrm{H}(\Omega)$ и обозначая это расширение вновь через A^{-1}, получим утверждение теоремы.

7°. Обозначим через B оператор Q (22), определенный на гладких векторах $\mathbf{f}$ таких, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют (23) и (26а), а числа $\varkappa_{1m}$ и $\varkappa_{2m}$ определены следующим образом:

$$\varkappa_{1m} = -\frac{1}{\rho_m^{(e)}}, \quad \varkappa_{2m} = -\rho_m^{(h)},$$

где $\rho_m^{(e)} = \dfrac{\sqrt{\mu_m^2 - \omega^2}}{\omega}$, $\rho_m^{(h)} = \dfrac{\omega}{\sqrt{\nu_m^2 - \omega^2}}$, а ω — вещественный параметр ($\omega^2 < \min(\mu_1^2, \nu_1^2)$). Значит область определения оператора B есть

$$D(B) = \left(\begin{matrix} \mathbf{E}_t|_s = 0; \ (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma = -\dfrac{i}{\rho_m^{(e)}} (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(e)})_\Sigma \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m \geqslant 1) \\ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})|_s = 0; \ (\mathbf{H}_t^0, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma = -i\rho_m^{(h)} (\mathbf{E}_t^0, \mathbf{F}_m^{(h)})_\Sigma \end{matrix} \right) \tag{33}$$

$$\overline{D(B)} = \mathrm{H}(\Omega).$$

Т е о р е м а 3. *В гильбертовом пространстве* $\mathrm{H}(\Omega)$ *замыкание оператора* B *является самосопряженным и имеет вполне непрерывный обратный* B^{-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование оператора B^{-1} доказывается как и в предыдущей теореме. Рассмотрим на Σ самосопряженные вполне непрерывные операторы $R^{(e)}$ и $R^{(h)}$, спектральные представления которых имеют вид

$$R^{(e)} = \sum_{(m)} \frac{1}{\rho_m^{(e)}} (\cdot, \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma \mathbf{F}_m^{(e)},$$

$$R^{(h)} = \sum_{(m)} \rho_m^{(h)} (\cdot, \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma \mathbf{G}_m^{(h)}. \tag{34}$$

С помощью операторов $\Gamma_0^{(e)}$, $\Gamma_0^{(h)}$, $\Gamma_0^{(e)*}$ и $\Gamma_0^{(h)*}$, рассмотренных в п. 4°, построим операторы

$$K_0^{(e)}=\Gamma_0^{(e)} R^{(e)}\Gamma_0^{(e)}=\sum_{(m)}\frac{1}{\rho_m^{(e)}}(.,\ \mathbf{w}_m^{(e)})_\Omega\,\mathbf{w}_m^{(e)},$$

$$K_0^{(h)}=\Gamma_0^{(h)} R^{(h)}\Gamma_0^{(h)}=\sum_{(m)}\rho_m^{(h)}(.,\ \mathbf{w}_m^{(h)})_\Omega\,\mathbf{w}_m^{(h)}. \tag{35}$$

Очевидно, что $K_0^{(e)}$ действует в U_1, а $K_0^{(h)}$ — в U_2 и являются самосопряженными вполне непрерывными операторами.

Рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{f}=A^{-1}\,\mathbf{g}+K_0\mathbf{g}, \tag{36}$$

где $\mathbf{g}$ — гладкий вектор из $H(\Omega)$, $K_0=\begin{pmatrix}-K_0^{(e)} & 0\\ 0 & -K_0^{(h)}\end{pmatrix}$. Легко проверяется, что вектор-функция, определяемая (36), принадлежит линеалу $D(B)$, а также

$$B\mathbf{f}=B\,(A^{-1}+K_0)\,\mathbf{g}=\mathbf{g}.$$

Таким образом

$$B^{-1}\mathbf{g}=A^{-1}\mathbf{g}+K_0\mathbf{g}. \tag{37}$$

Выполняя операцию продолжения оператора B^{-1} по непрерывности на все $H(\Omega)$, получим окончательное утверждение теоремы.

Введем вектор-функции:

$$\mathbf{v}_m^{(e)}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{1}{2\rho_m^{(e)}}}\ \mathbf{w}_m^{(e)}\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_m^{(h)}=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\dfrac{\rho_m^{(h)}}{2}}\ \mathbf{w}_m^{(h)}\end{pmatrix}, \tag{38}$$

тогда оператор B^{-1} примет вид

$$B^{-1}=A^{-1}+\frac{1}{2}\sum_{(m)}(.,\ \mathbf{v}_m^{(e)})_\Omega J_m\,\mathbf{v}_m^{(e)}+\frac{1}{2}\sum_{(m)}(.,\ \mathbf{v}_m^{(h)})_\Omega J_m\mathbf{v}_m^{(h)}, \tag{39}$$

где $J_m=-1\ (m>1)$.

8°. Рассмотрим теперь случай, когда $\nu_1^2<\omega^2<\mu_1^2\ (\nu_1^2<\mu_1^2)$. В этом случае $\rho_1^{(h)}=\dfrac{-i\omega}{\sqrt{\nu_1^2-\omega^2}}$, все остальные $\rho_m^{(h)}$ и $\rho_m^{(e)}$ по-прежнему будут действительными числами. Обозначим оператор Максвелла Q (22), определенный на гладком линеале (33) с учетом того, что $\vartheta_1^2<\omega^2<\mu_1^2\ (\upsilon_1^2<\mu_1^2)$, через T_1.

$$D(T_1)=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_t|_s=0;\ (\mathbf{E}_t^0,\ \mathbf{F}_m^{(e)})_\Sigma=-\dfrac{i}{\rho_m^{(e)}}(\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_m^{(e)})_\Sigma\ (m\geqslant 1)\\ (\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_m^{(h)})_\Sigma=-i\rho_m^{(h)}(\mathbf{E}_t^0,\mathbf{F}_m^{(h)})_\Sigma\ (m>1)\\ (\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})|_s=0;\quad (\mathbf{H}_t^0,\ \mathbf{G}_1^{(h)})_\Sigma=-\rho_1^{(h)}(\mathbf{E}_t^0,\mathbf{F}_1^{(h)})_\Sigma\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Оператор T_1 в рассматриваемом случае является несамосопряженным. Область определения $D(T_1)$ плотна в $H(\Omega)$. Повторяя рассуждения п. 7°, получим следующую теорему.

Теорема 4. *Несамосопряженный оператор T_1 имеет вполне непрерывный обратный T_1^{-1}, допускающий представление*

$$T_1^{-1} = B_1^{-1} + \frac{i}{2}(\cdot,\ \mathbf{v}_1^{(h)})_2\, J\mathbf{v}_1^{(h)} \quad (J = -1), \tag{41}$$

где B_1^{-1} — самосопряженный оператор вида

$$B_1^{-1} = A^{-1} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}(\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(e)})_2\, J_m \mathbf{v}_m^{(e)} + \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{\infty}(\cdot,\ \mathbf{v}_m^{(h)})_2\, J_m\, \mathbf{v}_m^{(h)}$$

$$(J_m = -1).$$

Сопряженный оператор $(T_1^{-1})^* = T_1^{*-1}$ имеет вид

$$T_1^{*-1} = B_1^{-1} - \frac{i}{2}(\cdot,\ \mathbf{v}_1^{(h)})_2\, J\, \mathbf{v}_1^{(h)} \quad (J = -1).$$

Нетрудно теперь проверить, что T_1^* определяется теми же граничными условиями, что и оператор T_1 (40), с той лишь разницей, что $\rho_1^{(h)}$ имеет противоположный знак.

9°. Выше (п. 7°) мы получили самосопряженный оператор B^{-1} (39), действующий в $H(\Omega)$ и зависящий от вещественного параметра ω; обозначим этот оператор через B_ω^{-1}. Расположим числа (ν_m^2) и (μ_m^2) в общую последовательность (υ_m^2) в порядке возрастания. При всех значениях ω, удовлетворяющих условию

$$\omega^2 < \upsilon_1^2 \quad (\upsilon_1^2 = \min\ (\nu_1^2,\ \mu_1^2)),$$

получим семейство самосопряженных операторов вида (39). Если ω удовлетворяет неравенству $\upsilon_1^2 < \omega^2 < \upsilon_2^2$, то оператор B_ω^{-1} становится несамосопряженным T_1^{-1} (п. 8°) вида (41). Вообще говоря, при всех ω, удовлетворяющих условию $\omega^2 > \upsilon_1^2$ будем иметь семейство несамосопряженных операторов T_ω^{-1}.

Одесский политехнический институт Поступило 20.III.1967

Հ. Գ. ՋԵՐԵՑԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ՄԱՔՍՎԵԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԱՍԻՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մաքսվելի T օպերատորը սահմանափակ տիրույթում մի քանի ինքնահամալուծ և ոչ ինքնահամալուծ եզրային պայմանների դեպքում։

Ապացուցվում է, որ այդպիսի եզրային պայմանների դեպքում T^{-1} օպերատորը լրիվին անընդհատ է։ Օգտագործելով ներկա աշխատանքի արդյունքները, կարելի է տալ ալիքատարների տեսության մեջ «անդրադարձման խնդրի» [1] լրիվ վերլուծությունը առանց որևէ լրացուցիչ ֆիզիկական ենթադրության։

G. G. GEBEYAN

ABOUT THE MAXWELL'S OPERATOR IN THE LIMITED DOMAIN WITH CERTAIN BOUNDARY CONDITIONS

S u m m a r y

In this paper the Maxwell's operator with self-adjoint and non self-adjoint boundary conditions is studied. The inverse operator's are found and their compactness established. The results obtained are applyed to the „reflection problem" in the waveguide theory [1] when no additional assumption about the damping sorts of oscillations is made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Г. Джебеян, Э. Р. Цекановский.* Об одной несамосопряженной краевой задаче в теории волноводов, Известия АН Арм.ССР, серия „Математика" 1, № 6, 1966, 359—373.
2. *Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа, Труды МИАН СССР, 59, 1960, 5—36.
3. *Н. Е. Кочин.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Издат. Наука, 1965.
4. *О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Издат. Наука, 1964.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS