

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ԶՐԲԱՇԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵԽՍԱՆԴՐՅԱՆ

Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Ռ. Լ. ՇԱԽՐԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀՆՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամքենագրված, երկու օրինակով՝ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում, Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդոքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չգրադվել մերժման պատճառների պարզարանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН

С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. А. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитируемая литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг — инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей — инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылаются 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN

A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika“ are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheets, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:

Izvestia, series „Matematika“,
Academy of Sciences of Armenia,
24, Berekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

В. А. ПЕТРОВ

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ФАТУ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция $w(z)$ называется полианалитической порядка n (или n -аналитической) в области D , если она представима в виде

$$w(z) = f_0(z) + \bar{z}f_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1}f_{n-1}(z), \quad (1)$$

где $f_i(z)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) — функции, аналитические в D .

Известно [1], что аналитическая и ограниченная в единичном круге функция почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения (теорема Фату). Оказывается, для полианалитических функций это уже не так. Для того чтобы убедиться в этом вначале покажем, что справедлива следующая

Лемма 1. *Существует функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z| < 1$ и обладающая свойствами:*

$$1) |f(re^{i\theta})| \leq \frac{6}{1-r}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq r < 1; \quad (2)$$

2) для некоторой последовательности $\{r_v\}$, $r_v \rightarrow 1$,

$$|f(r_v e^{i\theta})| > \frac{1}{2} \frac{1}{1-r_v}, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Доказательство. Факт существования такой функции и идея ее построения любезно указаны нам Е. П. Долженко.

Будем строить $f(z)$ с помощью лакунарных рядов. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad (4)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\max_{0 < r < 1} \{r^{n_k} (1-r)\}}.$$

Покажем, что последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ можно выбрать так, что функция (4) будет обладать свойствами (2), (3). Заметим прежде всего, что

$$\max_{0 < r < 1} \{r^t (1-r)\} = \frac{t^t}{(1+t)^t} \cdot \frac{1}{1+t},$$

и точки максимума r_t с увеличением номера t приближаются к единице.

Пусть n_1 — произвольное натуральное число. Выбор остальных чисел n_k подчиним пока только следующим требованиям:

все числа n_k — нечетные;

$$n_k + 1 > 2n_{k-1}. \quad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(re^{i\theta})| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k} (1 + n_k) \left(\frac{1 + n_k}{n_k} \right)^{n_k} < \\ &< 3 \sum_{k=1}^{\infty} (1 + n_k) \cdot r^{n_k} < 3 \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(r^{\frac{n_k + 1}{2}} + \dots + r^{n_k - 1} + r^{n_k} \right) < \\ &< 6(1 + r + r^2 + \dots) = \frac{6}{1 - r}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ряд (4) сходится в круге $|z| < 1$, то есть $f(z)$ аналитична в единичном круге, и для нее выполняется соотношение (2).

Последовательность $\{r_k\}$, о которой говорится во второй части леммы выберем таким образом: r_k равно тому r , которое дает максимум функции $\{r^{n_k} (1 - r)\}$. В таком случае

$$|f(r, e^{i\theta})| \geq \frac{1}{1 - r_v} - \left(\sum_{k=1}^{v-1} a_k r_v^{n_k} + \sum_{k=v+1}^{\infty} a_k r_v^{n_k} \right). \quad (6)$$

Но

$$\sum_{k=1}^{v-1} a_k r_v^{n_k} < \sum_{k=1}^{v-1} a_k$$

и, поскольку $r_v = r_{(n_v)}$ стремится к единице при $n_v \rightarrow \infty$, то можно считать, что n_v выбрано настолько большим, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{v-1} a_k < \frac{1}{4} \frac{1}{1 - r_v}. \quad (7)$$

Так как, с другой стороны, ряд (4) при $r = r_v$ сходится (равномерно относительно θ), то можно считать, что

n_{v+1} выбрано настолько далеко от n_v , что для остаточного члена имеет место оценка

$$\sum_{k=v+1}^{\infty} a_k r_v^{n_k} < \frac{1}{4} \frac{1}{1 - r_v}. \quad (8)$$

Неравенства (6)–(8) показывают, что функция $f(z)$, действительно, обладает свойством (3). Итак, если числа n_k ряда (4) выбраны так, что выполняются условия (5), (7), (8), а это сделать возможно, то функция $f(z)$, определяемая этим рядом, обладает свойствами (2), (3). Лемма доказана.

Теорема 1. *Существует функция $w(z)$, бианалитическая и ограниченная в единичном круге и не имеющая почти всюду на единичной окружности угловых граничных значений.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, построенная выше. Тогда функция $w(re^{i\theta}) = (r^2 - 1)f(z)$, очевидно, бианалитична и в силу (2) ограничена в $|z| < 1$. Пусть $w(z)$ имеет угловые граничные значения $w(t)$ в точках $t \in E$ окружности $|z| = 1$. Как следует из (3) $|w(t)| > 1$, и поэтому функция $f(z)$ в каждой точке t имеет угловым граничным значением ∞ . Но, в силу граничной теоремы единственности Лузина и Привалова [1], множество E точек t , в которых аналитическая функция $f(z)$ обращается (в смысле угловых граничных значений) в бесконечность, не может иметь положительной меры. Теорема доказана.

Возникает вопрос, какие дополнительные условия следует наложить на полианалитическую функцию, чтобы для нее имела место теорема Фату. Прежде всего отметим, что верна следующая простая

Теорема 2. *Функция $w(z)$, n -аналитическая в единичном круге k и ограниченная в k вместе со своими ареоларными производными*

$$\frac{\partial^v w}{\partial z^v}$$

до порядка $n-1$ включительно, почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения.

Доказательство. Так как функция $w(z)$ имеет вид (1), то

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_1(z) + 2zf_2(z) + \dots + (n-1)\bar{z}^{n-2}f_{n-1}(z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 2f_2(z) + \dots + (n-2)(n-1)\bar{z}^{n-2}f_{n-1}(z),$$

.....

$$\frac{\partial^{n-1} w}{\partial z^{n-1}} = (n-1)! f_{n-1}(z).$$

Отсюда очевидно следует, что в круге k ограничены аналитические компоненты $f_i(z)$ функции $w(z)$. А поскольку для каждой из них верна теорема Фату, то из (1) ясно, что $w(z)$ почти всюду имеет угловые граничные значения.

В случае бианалитических функций можно привести также аналог теоремы Фату с несколько другими условиями.

Теорема 3. *Функция $w(z)$, бианалитическая в единичном круге и ограниченная в нем вместе со своей радиальной производной $\frac{\partial w}{\partial r}$, имеет почти всюду на единичной окружности угловые граничные значения.*

Для доказательства этого утверждения нам будут полезны две леммы о бигармонических функциях (бигармонической называется действительная или мнимая части бианалитической функции).

Лемма 2. Если бигармоническая в единичном круге k функция ограничена в k вместе со своей радиальной производной, то она представима в k интегралом

$$u(re^{i\theta}) = (r^2 - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da(t), \quad (9)$$

где $a(t)$ и $\beta(t)$ — функции ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$, а

$$P(r, \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2},$$

$$\Pi(r, \varphi) = \frac{(1 - r^2)^2 [1 - r \cos \varphi]}{[1 - 2r \cos \varphi + r^2]^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим два семейства функций

$$\alpha_r(\theta) = \int_0^\theta u(r, t) dt \text{ и } \beta_r(\theta) = \int_0^\theta \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} dt,$$

где $r < 1$ и $0 < \theta \leq 2\pi$. Так как

$$|\alpha_r(\theta)| \leq \int_0^{2\pi} |u(r, t)| dt \leq M$$

и

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_r(\theta_k) - \alpha_r(\theta_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} u(r, t) dt \right| \leq 2\pi \cdot M,$$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n+1} = 2\pi, \quad r < 1,$$

то семейство функций $\{\alpha_r(\theta)\}$ является семейством: 1) равномерно ограниченным и 2) равномерно ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$ относительно r . Семейство функций $\{\beta_r(\theta)\}$ будет очевидно также обладать свойствами 1) и 2). По первой теореме Хелли ([2], стр. 184) из семейства $\{\alpha_r(\theta)\}$ можно выбрать последовательность $\{\alpha_{r_n}(\theta)\}$, сходящуюся в каждой точке $[0, 2\pi]$ к некоторой функции $\alpha(\theta)$ ограниченной вариации. Далее по той же теореме из последовательности $\{\beta_{r_n}(\theta)\}$ можно также выбрать последовательность $\{\beta_{r_n}(\theta)\}$, которая в каждой точке $[0, 2\pi]$ сходится к некоторой функции ограниченной вариации $\beta(\theta)$. Заметим, что получившаяся при этом последовательность $\{\alpha_{r_n}(\theta)\}$ также, очевидно, сходится к $\alpha(\theta)$ на $[0, 2\pi]$.

Из свойства 2) рассматриваемых последовательностей $\{\alpha_{r_n}(\theta)\}$ и $\{\beta_{r_n}(\theta)\}$ следует, что к каждой из них можно применить вторую теорему Хелли ([2], стр. 194). Поэтому имеем равенство

$$(r^2 - 1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da(t) =$$

$$= (r^2 - 1) \frac{r_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta_{r_n}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da_{r_n}(t) + o(1)$$

или

$$\begin{aligned} & (r^2 - 1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da(t) = \\ & = (r^2 - 1) \frac{r_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) \cdot \frac{\partial u(r_n, t)}{\partial r} dt + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) \cdot u(r_n, t) dt + o(1). \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $u(z)$ — функция, бигармоническая в круге $|z| \leq r_0$. Если $u(r_0 e^{i\theta}) = g(\theta)$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial u(r_0 e^{i\theta})}{\partial r} = h(\theta)$, то значение функции $u(z)$ в произвольной точке $z = re^{i\theta}$, $r < r_0$, определяется [3] через $g(\theta)$ и $h(\theta)$ по формуле

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) = & \frac{1}{2\pi} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{-h(t) dt}{r^2 - 2rr_0 \cos(t - \theta) + r_0^2} + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \frac{g(t) [1 - rr_0 \cos(t - \theta)] dt}{[r^2 - 2rr_0 \cos(t - \theta) + r_0^2]^2} \right]. \end{aligned}$$

Потому равенство (10) можно переписать в виде

$$(r^2 - 1) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da(t) = u(r_n \cdot z) + o(1). \quad (11)$$

Переходя теперь в (11) к пределу при $r \rightarrow 1$, мы и получаем нужное соотношение.

Лемма 3. Бигармоническая функция $u(z)$, представляемая интегралом (9), почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения, равные $\alpha'(t)$.

Доказательство. Как показано нами в [4] функция

$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Pi(r, t - \theta) da(t)$ почти всюду на $|z| = 1$ имеет угловые граничные

значения, равные $\alpha'(t)$, а функция $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \theta) d\beta(t)$ имеет почти

всюду угловые граничные значения, равные $\varphi'(t)$, в силу классической теоремы Фату [1]. Отсюда и следует справедливость леммы 3.

Доказательство теоремы 3. Условия теоремы выполняются для бигармонических функций $u(z) = \operatorname{Re} w(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} w(z)$. Поэтому каждая из функций $u(z)$ и $v(z)$, по только что доказанным леммам 2 и 3, имеет почти всюду на $|z| = 1$ угловые граничные значения. Значит, таким же свойством обладает и $w(z) = u(z) + iv(z)$.

Дополнением к этим результатам может служить

Теорема 4. Если ограниченная бианалитическая в круге k $\{|z| < 1\}$ функция

$$w(z) = f(z) + (1 - r^2) \varphi(z) \quad (12)$$

имеет на некотором множестве E угловые граничные значения, то 1) почти всюду на E имеет угловые граничные значения компонента $f(z)$, 2) угловые граничные значения функции $w(z)$ почти всюду на E совпадают с угловыми граничными значениями аналитической функции $f(z)$.

Доказательство. Пусть

$$w(z) = u(z) + iv(z),$$

тогда

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (13)$$

Пусть $x = re^{it}$ — любая точка круга k . Опишем вокруг нее круг радиуса $R = \frac{1-r^2}{2}$. Этот круг целиком принадлежит k . Но для p -гармонической в некоторой области D функции $\psi(z)$ и круга $T\{|z - z_0| = R\}$, принадлежащего D , М. Николеску [5] установил неравенство

$$R^{n_1+n_2} \frac{\partial^{n_1+n_2} \psi(z)}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2}} \leq CM, \quad (14)$$

где M — верхняя грань $\psi(z)$ в круге T , а $C = C(n_1, n_2, p)$ — некоторая константа.

В нашем случае действительная $u(z)$ и мнимая $v(z)$ части ограниченной функции не превосходят по модулю некоторого числа. Поэтому из (14) при $R = \frac{1-r^2}{2}$ и $n_1 = 1, n_2 = 0; n_1 = 0, n_2 = 1$ соответственно получаем

$$(1-r^2) \left| \frac{\partial \psi(z)}{\partial x} \right| < N, \quad (1-r^2) \left| \frac{\partial \psi(z)}{\partial y} \right| < N,$$

где $\psi(z) = u(z), v(z)$. Отсюда, в силу (13), находим

$$(1-r^2) \left| \frac{\partial w(z)}{\partial z} \right| < M \quad (15)$$

для любой точки $z = re^{it}$ круга k . Но с другой стороны

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} [f(z) + \varphi(z) - z \bar{z} \varphi(z)] = -z \bar{\varphi}(z).$$

Поэтому из (15) вытекает, что функция

$$\Phi(z) = (1 - r^2) \varphi(z)$$

ограничена в k , а следовательно, в k ограничена и аналитическая функция $f(z)$. Отсюда следует, что, во-первых, $f(z)$ почти всюду на E имеет угловые граничные значения, а во-вторых, $\Phi(z)$ также обладает тем же свойством. Но у $\Phi(z)$, как показано при доказательстве теоремы 1, угловые граничные значения почти всюду равны нулю, а это и означает, что функции $w(z)$ и $f(z)$ почти всюду на E имеют одинаковые значения.

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступило 31.XII.1966

Վ. Ա. ՊԵՏՐՈՎ

ՖԱՏՈՒԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԸ ԲԱԶՄԱՆԱԼԻՏԻԿ
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ լ

$$W(z) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z)$$

Ֆունկցիան կոչվում է n -անալիտիկ միավոր շրջանում, եթե $f_i(z)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) ֆունկցիաները անալիտիկ են այնտեղ:

Հոդվածում կառուցվում է երկանալիտիկ ֆունկցիալի օրինակ, որի համար ֆաթուի թեորեմը տեղի չունի և բերվում են այդ թեորեմի անալոգները բազմանալիտիկ ֆունկցիաների համար:

V. A. PETROV

FATOU TYPE THEOREMS FOR POLYANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

A function

$$w(z) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z)$$

is said to be n -analytic in the unit disk if all $f_i(z)$ ($i = 1, \dots, n-1$) are analytic there.

In the present note we construct a bi-analytic function for which the Fatou theorem does not hold and prove several Fatou type theorems for polyanalytic functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
2. И. П. Натансон. Основы теории функций вещественной переменной, Л., 1941.
3. А. Н. Тихонов и А. А. Самарский. Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1953.
4. В. А. Петров. Бигармонический интеграл Пуассона, Литовский математический сборник, 1967.
5. М. Nicolesko. Les fonction polyharmoniques, Paris, 1936.

А. Г. ГЮЛЬМИСАРЯН

ОБЩИЕ РАЗРЫВНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В статье рассматривается эллиптическое уравнение второго порядка

$$A(x, D_x, q)u(x, q) = f(x, q) \quad (1)$$

в некоторой области $\Omega \subset R_{n+1}$ с боковой поверхностью Γ ; q — комплексный параметр, меняющийся в некотором угле Q : $\alpha_1 \leq \arg q \leq \alpha_2$. На боковой поверхности Γ задается граничное условие

$$B(x, D_x, q)u(x, q)|_{\Gamma} = g(x', q), \quad x' \in \Gamma. \quad (2)$$

Нами будет исследован случай, когда коэффициенты оператора B претерпевают разрыв вдоль некоторого $(n-1)$ -мерного многообразия γ , делящего Γ на две части Γ^+ и Γ^- (*), $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, $\gamma = \Gamma^+ \cap \Gamma^-$.

В этом случае граничное условие (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} B_1(x, D_x, q)u(x, q)|_{\Gamma^+} &= g_1(x', q), \\ B_2(x, D_x, q)u(x, q)|_{\Gamma^-} &= g_2(x', q), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{ord } B_i = m_i \quad (i = 1, 2).$$

Задачи вида (1) — (2) или (1) — (3) являются типичными задачами, возникающими при преобразовании Лапласа из параболических задач, в предположении, что коэффициенты параболической задачи не зависят от времени (см., например, [1], [2], [3]).

Предполагается для простоты, что коэффициенты операторов A , B_1 и B_2 бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$.

Предполагается также, что боковая поверхность Γ и поверхность γ (линия разрыва граничных условий) допускают локальное выпрямление.

На операторы A , B_1 и B_2 накладываются некоторые условия (§§ 2, 3), которые при $q=0$ дают условие эллиптичности оператора A и условия З. Я. Шапиро—Я. Б. Лопатинского [4], [5] для операторов B_1 и B_2 .

Основным результатом настоящей работы является установление существования и единственности решения задачи (1) — (3) в соответствующим образом подобранных пространствах.

* Все результаты справедливы также и в случае разбиения Γ на любое конечное число подобластей.

Доказательство основных результатов будет основано на методике, развитой рядом авторов в работах [6], [2], [7].

Как это обычно делается при рассмотрении эллиптических задач сначала исследуется случай однородных операторов с постоянными коэффициентами в полупространстве. Здесь существенную роль при доказательстве существования решения будет играть метод факторизации (известный также под названием метода Винера-Хопфа), развитый недавно в работах М. Г. Крейна и И. Ц. Гохберга [8], [9], М. И. Вишика и Г. И. Эскина [7], [10].

Будет установлено, что даже при бесконечно гладких правых частях решение задачи (1)–(3) имеет лишь конечную вполне определенную гладкость на линии разрыва граничных условий и, следовательно, конечную вполне определенную гладкость на всей боковой поверхности Γ .

Введем некоторые обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Через $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x', x_{n+1})$ будем обозначать точку $(n+1)$ -мерного евклидова пространства R_{n+1} ; $\bar{R}_{n+1}^+$ ($\bar{R}_{n+1}^-$) — полупространство $x_{n+1} \geq 0$ ($x_{n+1} \leq 0$). Аналогично определяются $\bar{R}_n^+$ и $\bar{R}_n^-$. Преобразование Фурье функции $f(x)$ будем обозначать через

$$Ff(x) = f(\xi) = \int e^{i(x, \xi)} f(x) dx,$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}) = (\xi', \xi_{n+1});$$

если не указываются пределы интегрирования, то интеграл берется по всему пространству; $D_x = D_{x_1} \dots D_{x_{n+1}}$, $D_{x_i} = -i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

§ 1. Пространства функций

В этом параграфе описываются функциональные пространства, в которых мы будем рассматривать разрывные эллиптические задачи, зависящие от некоторого числового параметра q , меняющегося в некотором угле Q : $\alpha_1 \leq \arg q \leq \alpha_2$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, s и r — произвольные действительные числа.

1. Через $H_s = H_s(R_{n+1})$ будем обозначать пространство функций $u(x, q)$ с конечной нормой

$$\|u\|_s^2 = \int (|q| + |\xi|)^{2s} |u(\xi, q)|^2 d\xi. \quad (1.1)$$

При фиксированном q и $s \geq 0$ это пространство совпадает с пространством С. Л. Соболева—Л. Н. Слободецкого [11], [12]; при $s < 0$ $H_s(R_{n+1})$ содержит обобщенные функции. Через $\tilde{H}_s(R_{n+1})$ обозначается $FH_s(R_{n+1})$. Норму в $\tilde{H}_s(R_{n+1})$ зададим по формуле (1.1). Через $\dot{H}_s^+(R_{n+1})$ обозначим замкнутое подпространство функций из

$H_s(R_{n+1})$, носители которых сосредоточены в $\bar{R}_{n+1}^+$. Аналогично $H_s^-(R_{n+1}^-) = \{u(x, q); u(x, q) \in H_s(R_{n+1}), \text{supp } u(x, q) \subset \bar{R}_{n+1}^-\}; \tilde{H}_s^+ = FH_s^+, \tilde{H}_s^- = FH_s^-$.

Через $H_s(R_{n+1}^+)$ обозначим пространство функций $u(x, q)$, являющихся сужением на R_{n+1}^+ функций из $H_s(R_{n+1})$. Т. е. любую функцию из $H_s(R_{n+1}^+)$ можно продолжить на все R_{n+1} так, что полученная функция $lu(x, q) \in H_s(R_{n+1})$ (продолжение функции $u(x, q)$ мы всегда будем обозначать $lu(x, q)$). Норма в $H_s(R_{n+1}^+)$ задается следующим образом:

$$\|u\|_s^+ = \inf \|lu\|_s, \quad (1.2)$$

где $\inf$ берется по всем указанным продолжениям.

Обозначим через $\theta(t)$ функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Любая функция из $H_0(R_{n+1})$ допускает разложение

$$u(x, q) = \theta(x_{n+1}) u(x, q) + (1 - \theta(x_{n+1})) u(x, q) = u_+ + u_-,$$

где $u_+ \in \tilde{H}_0^+(R_{n+1}^+)$, $u_- \in \tilde{H}_0^-(R_{n+1}^-)$. Через θ^+ обозначим оператор проектирования H_0 на $\tilde{H}_0^+$

$$\theta^+ u(x, q) = u_+(x, q).$$

Последнее равенство после применения преобразования Фурье переходит в следующее:

$$\Pi^+ u(\xi, q) = u_+(\xi, q),$$

где через Π^+ обозначен образ Фурье оператора θ^+ . На гладких и убывающих функциях оператор Π^+ действует по формуле

$$\begin{aligned} \Pi^+ u(\xi, q) &= \frac{i}{2\pi} \int \frac{u(\xi', \eta_{n+1}, q)}{\xi_{n+1} + i0 - \eta_{n+1}} d\eta_{n+1} = \\ &= \frac{i}{2\pi} \text{v.p.} \int \frac{u(\xi', \eta_{n+1}, q)}{\xi_{n+1} - \eta_{n+1}} d\eta_{n+1} + \pi i u(\xi', \xi_{n+1}, q). \end{aligned} \quad (1.3)$$

На любой функции $u(\xi, q) \in \tilde{H}_0(R_{n+1})$ оператор Π^+ понимается как результат замыкания оператора (1.3) на гладких и убывающих функциях*).

Оператор Π^+ ограничен в $\tilde{H}_0$ при $|\xi| < 1/2$, причем $\Pi^+ \tilde{H}_0(R_{n+1}) = \tilde{H}_0^+(R_{n+1})$ ([13]), (подробнее об операторах θ^+ и Π^+ см. [7]).

Очевидно, если $u_- \in \tilde{H}_0^-(R_{n+1})$, то $\Pi^+ u_- = 0$. Обозначим через

* Например, на S -пространстве бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|\xi| \rightarrow \infty$ вместе с любой из своих производных быстрее, чем любая степень $1/|\xi|$.

$$\xi_+ = \xi_{n+1} + i(|\xi'| + |q|), \quad \xi_- = \xi_{n+1} - i(|\xi'| + |q|).$$

При любом s ξ_-^s аналитична при $\text{Im } \xi_{n+1} < 0$. Т. е. если $u_-(\xi, q) \in \dot{H}_s^-(R_{n+1})$,

то $\xi_- u_-(\xi, q) \in \dot{H}_0^-(R_{n+1})$ и $\Pi^+ \xi_- u_- = 0$.

Можно показать, что норма (1.2) эквивалентна норме

$$\|u\|_s^+ = \|\Pi^+ \xi_-^s u_-(\xi, q)\|, \quad (1.4)$$

где l — любой из определенных выше операторов продолжения.

2. Через $H_{s,r} = H_{s,r}(R_{n+1})$ обозначим пространство функций $u(x, q)$ с нормой

$$\|u\|_{s,r}^2 = \int (|q| + |\xi|)^{2s} (|q| + |\xi'|)^{2r} |u(\xi, q)|^2 d\xi. \quad (1.5)$$

При фиксированном q это пространство совпадает с пространством $H_{(s,r)}$ Л. Хермандера [14] (см. также [15]).

Пространство $H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ состоит из функций $u(x, q)$ в R_{n+1}^+ , которые допускают продолжения $lu(x, q) \in H_{s,r}$. Норма в $H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ определяется по формуле

$$\|u\|_{s,r}^+ = \inf \|lu\|_{s,r}.$$

Как и в $n^0 1$ в пространстве $H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_{s,r}^+ = \|\Pi^+ \xi_-^s (|q| + |\xi'|)^r u(\xi, q)\|, \quad (1.6)$$

Пространство функций из $H_{s,r}(R_{n+1})$ ($s \geq 0$), продолженных нулем при $x_{n+1} < 0$ с нормой пространства $H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ обозначим через $H_{s,r}^+$. Очевидно при $r = 0$ пространства типа $H_{s,r}$ являются пространствами H_s .

Через γ_{n+1} будем обозначать оператор сужения на гиперплоскость $x_{n+1} = 0$.

Приведем некоторые свойства пространств $H_{s,r}$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 1.1. Пусть $u(x, q) \in H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ и $s > 1/2$. Тогда

$$\|u\|_{s+1/2} \leq C_1 \|u\|_{s,r}^+, \quad (1.7)$$

где в левой части стоит норма пространства $H_{s+1/2}(R_n)$ (ср. [14]).

Лемма 1.2. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(R_{n+1})$. Тогда

$$\|\varphi u\|_{s,r} \leq \max |\varphi| \|u\|_{s,r} + C(\varphi) \|u\|_{s,r-1}. \quad (1.8)$$

Будем говорить, что функция $A(\xi, q)$ принадлежит классу $Y_\alpha(q)$, если $|A(\xi, q)| < \text{const} (|q| + |\xi|)^\alpha$; функция $A_- \in Y_\alpha^-(q)$, если $A_- \in Y_\alpha(q)$ и допускает аналитическое продолжение при $\text{Im } \xi_{n+1} < 0$. Аналогично определяется класс $Y_\alpha^+(q)$. Функция $A(\xi, q)$, принадлежащая $Y_\alpha(q)$ принадлежит $\dot{D}_\alpha(q)$, если при любом $s > -\alpha$ справедливо разложение

$$\xi_-^s A(\xi, q) = A_-(\xi, q) + R(\xi, q),$$

где

$$A_-(\xi, q) \in Y_{\alpha+s}^-(q) \text{ а } |R(\xi, q)| \leq \text{const} \frac{(|q| + |\xi|)^{\alpha+s+1}}{|q| + |\xi'| + |\xi_{n+1}|}.$$

Лемма 1.3. Пусть $A(\xi, q) \in \hat{D}_\alpha(q)$. Тогда

$$\|A(\xi, q) \text{ и } (\xi, q)\|_{s-\alpha, r}^+ \leq C_2 \|u\|_{s, r}^+, \quad (1.9)$$

где $u(x, q) \in H_{s, r}^+$ и C_2 не зависит от $u(x, q)$.

Лемма 1.4. Пусть $D(\xi, q) \in \hat{D}_\beta(q)$. Тогда

$$\|D(\xi, q) g(\xi', q)\|_{s, r}^+ \leq C_3 \|g(\xi', q)\|_{s+\beta+r+1/2}, \quad (1.10)$$

где $g(\xi', q) \in \tilde{H}_{s+\beta+r+1/2}(R_n)$.

Лемма 1.5. Пусть $A(x, \xi, q) \in C_0^\infty(R_{n+1})$ по x и является полиномом степени m от ξ и q . Тогда

$$\|A u\|_{s-m, r}^+ \leq C_4 \|u\|_{s, r}^+, \text{ и } u \in H_{s, r}^+.$$

Доказательства лемм 1.2—1.5 близко к доказательству аналогичных лемм в пространствах H_s (см. [7], [16]). Ввиду громоздкости доказательства лемм 1.1—1.5 мы опускаем.

Отметим еще два легко проверяемых неравенства, которые понадобятся нам в дальнейшем

$$|q| \|u\|_{s, r-1} \leq C_5 \|u\|_{s, r}, \quad |q| \|u\|_{s-1, r} \leq C_6 \|u\|_{s, r}, \quad (1.11)$$

где константы C_5 и C_6 не зависят от q и функции $u(x, q)$.

Будем говорить, что однородная порядка α функция $A(\xi', \xi_{n+1}, q)$ допускает однородную факторизацию по ξ_{n+1} , если имеет место представление

$$A(\xi', \xi_{n+1}, q) = A_+(\xi', \xi_{n+1}, q) A_-(\xi', \xi_{n+1}, q),$$

где A_+ и A_- однородны по (ξ, q) , $\text{ord } A_+ = \alpha$, $\text{ord } A_- = \alpha - \alpha$, $A_+ \neq 0$ при $|\xi'| + |\xi_{n+1}| + |q| > 0$, $\text{Im } \xi_{n+1} > 0$ и аналитически продолжается в полуплоскость $\text{Im } \xi_{n+1} > 0$. A_- обладает теми же свойствами при $\text{Im } \xi_{n+1} < 0$. Можно доказать, что если $A(\xi', \xi_{n+1}, q)$ — однородная функция от (ξ, q) порядка α , $A(\xi, q) \neq 0$ при $|\xi| + |q| \neq 0$ и $A(\xi, q)$ имеет при $|\xi'| + |q| \neq 0$ непрерывные первые производные, ограниченные при $|\xi|^2 + |q|^2 = 1$, $|\xi'| + |q| \neq 0$, то $A(\xi, q)$ допускает, и притом единственную с точностью до константы, однородную факторизацию по ξ_{n+1} .

§ 2. Уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве

Рассмотрим в полупространстве R_{n+1}^+ уравнение

$$A(D_x, q) u(x, q) = f(x, q) \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$B_1(Dx, q) u(x, q) \Big|_{\substack{x_{n+1}=0 \\ x_n > 0}} = g_1(x', q), \quad (2.2)$$

$$B_2(Dx, q) u(x, q) \Big|_{\substack{x_{n+1}=0 \\ x_n < 0}} = g_2(x', q), \quad (2.3)$$

где A , B_1 и B_2 — однородные операторы с постоянными коэффициентами, $\text{ord } A = 2$, $\text{ord } B_i = m_i$ ($i = 1, 2$).

Пусть оператор $A(D, q)$ подчинен следующему условию:

Условие А. При $|\xi| + |q| \neq 0$

$$A(\xi, q) \neq 0.$$

Из этого условия следует, что многочлен $A(\xi, q)$ допускает факторизацию $A(\xi, q) = A_+(\xi, q) A_-(\xi, q)$. Здесь $A_{\pm}(\xi, q) = \xi_{n+1} \pm \lambda(\xi', q)$, где $\lambda(\xi', q)$ — корень полинома $A(\xi, q)$, $\text{Im } \lambda < 0$. Функция $A_+(\xi, q)$ не обращается в нуль и аналитична при $\text{Im } \xi_{n+1} > 0$, $|\xi_{n+1}| + |\xi'| + |q| > 0$; $A_-(\xi, q)$ не обращается в нуль и аналитична при $\text{Im } \xi_{n+1} < 0$, $|\xi_{n+1}| + |\xi'| + |q| > 0$. Найдем решение $u(x, q) \in H_{s, r}(R_{n+1}^+)$ задачи (2.1) — (2.3), предполагая его существование при $f(x, q) \in H_{s-2, r}(R_{n+1}^+)$, $g_1(x', q) \in H_{s+r-m_1-1/2}(R_n^+)$, $g_2(x', q) \in H_{s+r-m_2-1/2}(R_n^-)$, $s = x + \delta + 1/2 - r$, число x будет определено ниже, а число r подбирается так, чтобы выполнялось условие $s > \max\{m_1 + 1/2, m_2 + 1/2, 1\}$.

Сначала рассмотрим случай, когда в уравнении (2.1) функция $f(x, q)$ тождественно равна нулю. Продолжим $g_1(x', q)$ на все R_n так, чтобы ее продолжение $\lg_1(x', q) \in H_{s+r-m_1-1/2}(R_n)$. Аналогично, $\lg_2(x', q) \in H_{s+r-m_2-1/2}(R_n)$. Тогда (2.2) — (2.3) можно записать в виде

$$B_1(Dx, q) u(x, q) \Big|_{x_{n+1}=0} = \lg_1(x', q) + V_-(x', q),$$

$$B_2(Dx, q) u(x, q) \Big|_{x_{n+1}=0} = \lg_2(x', q) + V_+(x', q).$$

При наших предположениях $V_+ \in \dot{H}_{s+r-m_2-1/2}^+(R_n^+)$, $V_- \in \dot{H}_{s+r-m_1-1/2}^-(R_n^-)$. Сделав теперь преобразование Фурье по всем переменным, получим

$$\Pi^+ A(\xi, q) u(\xi, q) = 0, \quad (2.1')$$

$$\Pi' B_1(\xi, q) u_+(\xi, q) = \lg_1(\xi', q) + V_-(\xi', q), \quad (2.2'),$$

$$\Pi' B_2(\xi, q) u_+(\xi, q) = \lg_2(\xi', q) + V_+(\xi', q), \quad (2.3')$$

где $u_+(\xi, q) = Fu_+(x, q)$, $u_+(x, q) = u(x, q)$ при $x_{n+1} > 0$, $u_+(x, q) = 0$ при $x_{n+1} < 0$, а Π' — образ Фурье оператора сужения функции с R_{n+1} на R_n

$$\Pi' u_+(\xi, q) = \lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix_{n+1} \xi_{n+1}} u_+(\xi', \xi_{n+1}, q) d\xi_{n+1}.$$

Нетрудно заметить, что общее решение уравнения (2.1') имеет вид

$$u_+(\xi, q) = \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)}, \quad (2.4)$$

и при $x_{n+1} > 0$

$$u_+(\xi', x_{n+1}, q) = F_{x_{n+1}}^{-1} u_+(\xi, q) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix_{n+1} \xi_{n+1}} \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)} d\xi_{n+1} = \\ = C(\xi', q) e^{-ix_{n+1} \lambda(\xi', q)}.$$

Для определения $C(\xi', q)$ подставим (2.4) в граничные условия (2.2'), (2.3').

Имеем

$$\Pi' B_1(\xi, q) u_+(\xi, q) = \Pi' B_1(\xi, q) \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)} = \\ = \lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{-ix_{n+1} \xi_{n+1}} C(\xi', q) \frac{B_1(\xi, q)}{A_+(\xi, q)} d\xi_{n+1} = \\ = \lim_{x_{n+1} \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} C(\xi', q) 2\pi \operatorname{res} \left\{ e^{-ix_{n+1} z} \frac{B_1(\xi', z, q)}{A_+(\xi', z, q)}, \lambda(\xi', q) \right\} = \\ = b_1(\xi', q) C(\xi', q),$$

где $b_1(\xi', q) = B_1(\xi', \lambda(\xi', q), q)$. Аналогично $\Pi' B_2(\xi, q) u_+(\xi, q) =$
 $= \Pi' B_2(\xi, q) \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)} = b_2(\xi', q) C(\xi', q), \quad b_2(\xi', q) = B_2(\xi', \lambda(\xi', q), q).$

Таким образом, для определения $C(\xi', q)$ получаем систему

$$b_1(\xi', q) C(\xi', q) = \lg_1(\xi', q) + V_-(\xi', q), \\ b_2(\xi', q) C(\xi', q) + \lg_2(\xi', q) + V_+(\xi', q). \quad (2.5)$$

Наложим теперь условия на граничные операторы.

Условие В. При $|\xi'| + |q| \neq 0$

$$b_i(\xi', q) \neq 0 \quad (i = 1, 2).$$

Произведем факторизацию по ξ_n .

$$b_i(\xi', q) = b_i^+(\xi', q) b_i^-(\xi', q).$$

Обозначим

$$x_1 = \operatorname{ord} b_1^+, \quad x_2 = \operatorname{ord} b_2^-, \quad x = x_1 + x_2. \quad (2.6)$$

Исключая $C(\xi', q)$ из уравнений (2.5), получим

$$b_1^+ (b_2^+)^{-1} V_+ - b_2^- (b_1^-)^{-1} V_- = b_2^- (b_1^-)^{-1} \lg_1 - b_1^+ (b_2^+)^{-1} \lg_2, \quad (2.5')$$

причем в обеих частях этого равенства все слагаемые принадлежат $H_k(R_n)$. После применения оператора Π_n^{+*} , получаем

$$V_+(\xi', q) = \frac{b_2^-}{b_1^+} \Pi_n^+ \left(\frac{b_2^-}{b_1^-} \lg_1 + \frac{b_1^+}{b_2^+} \lg_2 \right).$$

Найденная таким образом функция $V_+(\xi', q)$ дает единственное решение уравнения (2.5') в $\hat{H}_{x+\varepsilon-m_n}^+(R_n^+)$ (см. [7]).

* Π_n^+ — образ Фурье оператора сужения на R_n^+ ; $\Pi_n^- = I - \Pi_n^+$, где I — единичный оператор.

Таким образом

$$C(\xi', q) = \frac{lg_2}{b_2} + \frac{V_+}{b_2} = \frac{1}{b_1^+ b_2^-} \left(\Pi_n^+ \frac{b_2^-}{b_1^-} lg_1 + \Pi_n^- \frac{b_1^+}{b_2^+} lg_2 \right) \quad (2.7)$$

и окончательно

$$u_+(\xi, q) = \frac{1}{A_+ b_1^+ b_2^-} \left(\Pi_n^+ \frac{b_2^-}{b_1^-} lg_1 + \Pi_n^- \frac{b_1^+}{b_2^+} lg_2 \right). \quad (2.8)$$

Формула (2.8) дает нам решение задачи (2.1)–(2.3) при условии $f(x, q) \equiv 0$.

Из (2.7) непосредственно следует, что $C(\xi', q) \in H_{s+\delta}(R_n)$ и, заметив, что $s + \delta = s + r - 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \|C(\xi', q)\|_{s+\delta} &\leq C_1 \left(\left\| \frac{1}{b_1^+ b_2^-} \Pi_n^+ \frac{b_2^-}{b_1^-} lg_1 \right\|_{s+\delta} + \left\| \frac{1}{b_1^+ b_2^-} \Pi_n^- \frac{b_1^+}{b_2^+} lg_2 \right\|_{s+\delta} \right) \leq \\ &\leq C_2 (\|g_1\|_{s+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{s+\delta-m_2}^-). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из леммы 1.4 имеем $u_+(x, q) \in H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ и

$$\begin{aligned} \|u_+(x, q)\|_{s,r}^+ &= \left\| \frac{C(\xi', q)}{A_+(\xi, q)} \right\|_{s,r}^+ \leq C_3 \|C(\xi', q)\|_{s+r+1/2-1} = \\ &= C_4 \|C(\xi', q)\|_{s+\delta} \leq C_4 (\|g_1\|_{s+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{s+\delta-m_2}^-). \end{aligned} \quad (2.10)$$

С другой стороны (в силу лемм 1.1 и 1.3)

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{s+\delta-m_1}^+ &= \|\Pi_n^+ \xi_{-}^{s+\delta-m_1} lg_1\|_0 = \|\Pi_n^+ \xi_{-}^{s+\delta-m_1} \Pi' B_1 u_+\|_0 \leq \\ &\leq C_5 \|\Pi' B_1 u_+\|_{s+\delta-m_1} \leq C_6 \|B_1 u_+\|_{s-m_1}^+ \leq C_7 \|u_+\|_{s,r}^+. \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка

$$\|g_2\|_{s+\delta-m_2}^- \leq C_8 \|u_+\|_{s,r}^+.$$

Из двух последних неравенств и из (2.10) имеем следующую двустороннюю априорную оценку для решения задачи (2.1)–(2.3):

$$\|g_1\|_{s+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{s+\delta-m_2}^- \leq C_9 \|u_+\|_{s,r}^+ \leq C_{10} (\|g_1\|_{s+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{s+\delta-m_2}^-). \quad (2.11)$$

Перейдем к рассмотрению случая $f(x, q) \not\equiv 0$. Уравнение (2.1) после преобразования Фурье переходит в уравнение

$$\Pi^+ A(\xi, q) u(\xi, q) = \Pi^+ l f(\xi, q). \quad (2.12)$$

Функция

$$u_0(\xi, q) = \frac{1}{A_+(\xi, q)} \Pi^+ \frac{l f(\xi, q)}{A_-(\xi, q)}$$

является частным решением уравнения (2.12). Заметим, что оператор Π^+ применим, так как $s > 1$. Обозначая

$$u(\xi, q) = u_0(\xi, q) + w(\xi, q), \quad (2.13)$$

для определения $w(\xi, q)$ получаем задачу (2.1')–(2.3'), где в правых частях вместо $lg_i(\xi', q)$ стоят функции

$$h_i(\xi', q) = \lg_i(\xi', q) - \Pi' B_i(\xi, q) \frac{1}{A_+(\xi, q)} \Pi^+ \frac{If(\xi, q)}{A_-(\xi, q)}.$$

Из (2.9)–(2.13) следует, что априорное решение задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$u(\xi, q) = \frac{1}{A_+} \Pi^+ \frac{If}{A_-} + \frac{1}{A_+ b_1^+ b_2^-} \left(\Pi_n^+ \frac{b_2^-}{b_1^-} h_1 + \Pi_n^- \frac{b_1^+}{b_2^+} h_2 \right). \quad (2.14)$$

Очевидно

$$\|u\|_{s,r}^+ \leq C_{11} (\|f\|_{s-2,r}^+ + \|h_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|h_2\|_{x+\delta-m_2}^-). \quad (2.15)$$

С другой стороны, так как $x + \delta - m_1 = s + r - 1/2 - m_1$, то

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{x+\delta-m_1}^+ &\leq C_{12} \left(\|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \left\| \Pi' B_1 \frac{1}{A_+} \Pi^+ \frac{If}{A_-} \right\|_{x+\delta-m_1}^+ \right) \leq \\ &\leq C_{13} \left(\|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \left\| B_1 \frac{1}{A_+} \Pi^+ \frac{If}{A_-} \right\|_{s-m_1,r}^+ \right) \leq \\ &\leq C_{14} (\|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|f\|_{s-2,r}^+). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Аналогично

$$\|h_2\|_{x+\delta-m_2}^- \leq C_{15} (\|g_2\|_{x+\delta-m_2}^- + \|f\|_{s-2,r}^+). \quad (2.17)$$

Из (2.15)–(2.17) получаем

$$\|u\|_{s,r}^+ \leq C_{16} (\|f\|_{s-2,r}^+ + \|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{x+\delta-m_2}^-). \quad (2.18)$$

Доказательство обратного неравенства

$$\|f\|_{s-2,r}^+ + \|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{x+\delta-m_2}^- \leq C_{17} \|u\|_{s,r}^+ \quad (2.19)$$

тривиально.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия *A* и *B* настоящего параграфа, и пусть $f(x, q) \in H_{s-2,r}(R_{n+1}^+)$, $g_1(x', q) \in H_{x+\delta-m_1}(R_n^+)$, $g_2(x', q) \in H_{x+\delta-m_2}(R_n^-)$, $s = x + \delta + 1/2 - r$, $|\delta| < 1/2$, число x определяется из (2.6), а число r подбирается так, чтобы $s > \max\{m_1 + 1/2, m_2 + 1/2, 1\}$. Тогда задача (2.1)–(2.3) имеет в пространстве $H_{s,r}(R_{n+1}^+)$ единственное решение, для которого выполнена двусторонняя априорная оценка

$$\begin{aligned} \|f\|_{s-2,r}^+ + \|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{x+\delta-m_2}^- &\leq C_{18} \|u\|_{s,r}^+ \leq \\ &\leq C_{19} (\|f\|_{s-2,r}^+ + \|g_1\|_{x+\delta-m_1}^+ + \|g_2\|_{x+\delta-m_2}^-). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Приведем пример, иллюстрирующий теорему 2.1. Рассмотрим в полупространстве $x_{n+1} > 0$ следующую задачу (задачу Заремба):

$$\begin{aligned} \Delta u(x, q) + q^2 u(x, q) &= 0, \\ u(x, q) \Big|_{x_{n+1}=0} &= \varphi(x', q), \\ x_n &> 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial u(x, q)}{\partial x_{n+1}} \Big|_{\substack{x_{n+1}=0 \\ x_n < 0}} = \psi(x', q), \quad (2.22)$$

Δ — оператор Лапласа. В наших обозначениях будем иметь

$$A(\xi, q) = A_+(\xi, q) A_-(\xi, q) = \\ = (\xi_{n+1} - \lambda(\xi', q))(\xi_{n+1} + \lambda(\xi', q)),$$

где $\lambda(\xi', q) = -i\sqrt{q^2 + |\xi'|^2}$. Далее

$$b_1(\xi', q) = B_1(\xi', \lambda(\xi', q), q) = 1,$$

$$b_2(\xi', q) = B_2(\xi', \lambda(\xi', q), q) = -i\sqrt{q^2 + |\xi'|^2}.$$

После факторизации b_1 и b_2 получим $x_1=0$, $x_2=1/2$, $x=1/2$. Из (2.4) и (2.9) следует, что порядок гладкости решения задачи (2.21)—(2.22) при $x_{n+1}=0$ не выше, чем $1/2 + \delta$, где $|\delta| < 1/2$ даже если не налагать никаких ограничений на гладкость $\varphi(x', q)$, $\psi(x', q)$.

§ 3. Уравнения с переменными коэффициентами в ограниченной области

Рассмотрим разрывную краевую задачу в некоторой ограниченной области Ω $(n+1)$ -мерного евклидова пространства R_{n+1} . Пусть Γ — граница области Ω , $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$, $\gamma = \bar{\Gamma}^+ \cap \bar{\Gamma}^-$

$$A(x, D_x, q) u(x, q) = f(x, q) \quad (3.1)$$

$$\gamma^+ B_1(x, D_x, q) u(x, q) = g_1(x', q), \quad (3.2)$$

$$\gamma^- B_2(x, D_x, q) u(x, q) = g_2(x', q), \quad (3.3)$$

где γ^+ — оператор сужения с Ω на Γ^+ , γ^- — оператор сужения с Ω на Γ^- . Предполагаем, что граница Γ является бесконечно гладкой n -мерной поверхностью, допускающей локальное выпрямление. Точнее, допускаем, что границу Γ можно покрыть конечной системой областей

$$\{V_j\} = \{V_1, \dots, V_N\} \quad (3.4)$$

в R_{n+1} таких, что в каждой из V_j определено бесконечно гладкое невырожденное преобразование координат $x \rightarrow y$, в результате которого та часть Γ , которая содержится в $V_j \cap \Gamma$, переходит в гиперплоскость $y_{n+1}=0$ (точки области $\Omega \cap V_j$ переходят в точки полупространства $y_{n+1} > 0$). Введенную таким образом в каждой из V_j систему координат будем называть локальной системой координат — л.с.к.

Пусть x_0 — любая точка границы. Перенесем начало координат в точку x_0 и повернем систему координат так, чтобы направление оси x_{n+1} совпало с направлением внутренней нормали к Γ в точке x_0 , и пусть y — локальные координаты в некоторой области V_j , содержащей точку x_0 . Потребуем, чтобы в точке x_0

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_{n+1}} = \dots = \frac{\partial x_n}{\partial y_{n+1}} = 0; \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_2} = \dots = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = 0. \quad (3.5)$$

Систему окрестностей (3.4), обладающую свойством (3.5) будем называть допустимой системой окрестностей.

Пусть теперь

$$\sum \varphi_j(x) \equiv 1, \operatorname{supp} \varphi_j = U_j \quad (3.6)$$

достаточно мелкое разбиение единицы области Ω . Ниже мы уточним насколько мелким оно должно быть. Предположим, что разбиение единицы (3.6) обладает следующим свойством: либо носитель функции $\varphi_j(x)$ не имеет общих точек с Γ , либо, если $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$, то U_j целиком лежит в некотором V_k из допустимого покрытия Γ . Определим для каждого j функцию $\psi_j(x) \in C_0^\infty(R_{n+1})$ такую, что $\psi_j(x) \equiv 1$ в окрестности носителя функции $\varphi_j(x)$, так что $\varphi_j \psi_j = \varphi_j$. Обозначим через W такую окрестность линии разрыва γ , что любая точка из W однозначно определяется длиной нормали, проведенной в эту точку из Γ и точкой на Γ , откуда проведена эта нормаль.

Исследование задачи (3.1)–(3.3) мы будем производить с помощью перехода к локальной системе координат в каждом из U_j . Поступим следующим образом: если $U_j \cap \Gamma = \emptyset$, то в U_j оставляем исходную систему координат (т. е. за новую л.с.к. берем старую систему); если $U_j \cap \Gamma \neq \emptyset$, то выбираем такую л.с.к., в которой ось x_{n+1} совпадает с нормалью к Γ и после выпрямления Γ в пределах соответствующей области U_j уравнение Γ имеет вид $x_{n+1} = 0$; если $U_j \cap \gamma \neq \emptyset$, то ось x_n берем совпадающей с нормалью к γ в Γ и после локального выпрямления уравнение γ в пределах соответствующей области U_j имеет вид $x_{n+1} = x_n = 0$.

Сделаем следующие предположения:

а) при любом $x \in \Omega$ для главной части оператора A выполнено условие: $A_0(x, \xi) \neq 0$ при $|\xi| + |\eta| \neq 0$,

б) после выпрямления Γ в соответствующей л.с.к. выполнено условие В параграфа 2 для главных частей операторов B_1 и B_2 ,

в) существует непрерывная функция $x_0(x)$ на γ такая, что $\max_{x \in \gamma} |x_0(x) - x_j(x)| < 1/2$, где $x_j(x)$ — индекс (2.6) при факторизации b_1 и b_2 в соответствующей л.с.к. в U_j .

Пусть $l > \max \{m_1 + 1/2, m_2 + 1/2, 1\}$. Определим в $\overline{\Omega}$ непрерывную функцию $r(x) < 0$ такую, что

$$s(x) = x_0(x) - r(x) + 1/2 > l \text{ при } x \in \gamma, \quad (3.7)$$

и $r(x) = 0$ при $x \in \overline{W}$. Продолжим $x_0(x)$ на все $\overline{\Omega}$ с сохранением неравенства (3.7). Допустим, что разбиение единицы (3.6) настолько мало, что колебание $s(x)$, $r(x)$ и $x_0(x)$ в каждой из U_j меньше $1/4$. Выберем в U_j произвольную точку x_1 , причем, если U_j имеет общие точки с Γ , то $x_1 \in \Gamma$; если $U_j \cap \gamma \neq \emptyset$, то $x_1 \in \gamma$, и если $U_j \cap W \neq \emptyset$ и $U_j \subset W$, то $x_1 \in W$.

Через l_j будем обозначать оператор перехода из исходной системы координат в л.с.к.

Введем пространство $H_{(s), (r)}$ с нормой

$$\|u\|_{(s), (r)} = \sum_j \|l_j \varphi_j u\|_{s_j, r_j}^+,$$

где плюс в обозначении означает, что при $U_j \cap \Gamma \neq 0$ берется норма $H_{s_j, r_j}(R_{n+1}^+)$, а $s_j = s(x_j)$, $r_j = r(x_j)$. Через $H_{(x)-m}(\Gamma^+)$ будем обозначать пространство функций $g(x', q)$ на Γ^+ с нормой

$$\|g(x', q)\|_{(x)-m}^+ = \sum_j \|l_j \gamma(\Gamma) \varphi_j u\|_{x_j}^+ - m,$$

где $x_j = x_0(x_j)$, $\gamma(\Gamma)$ — оператор сужения на Γ , а плюс в обозначении означает, что при $U_j \cap \gamma \neq 0$ берется норма $H_{x_j, -m}(R_n^+)$. Аналогично определяется пространство $H_{(x)-m}(\Gamma^-)$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей теоремы:

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия а), б) и в) настоящего параграфа, и пусть $f(x, q) \in H_{(s)-2, (r)}(\Omega)$, $g_1(x', q) \in H_{(x)-m_1}(\Gamma^+)$, $g_2(x', q) \in H_{(x)-m_2}(\Gamma^-)$.

Тогда при достаточно большом $|q|$ ($|q| > q_0 > 0$) существует единственное решение $u(x, q) \in H_{(s), (r)}(\Omega)$ задачи (3.1) — (3.3) и имеет место двусторонняя априорная оценка

$$\begin{aligned} \|f\|_{(s)-2, (r)} + \|g_1\|_{(x)-m_1}^+ + \|g_2\|_{(x)-m_2}^- \leq C_1 \|u\|_{(s), (r)} \leq C_2 (\|f\|_{(s)-2, (r)} + \\ + \|g_1\|_{(x)-m_1}^+ + \|g_2\|_{(x)-m_2}^-). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Докажем сначала априорную оценку. Предположим, что $U_j \cap \Gamma \neq 0$, в противном случае доказательство намного упрощается. Умножая (3.1) на $\varphi_j(x)$ и переходя к л.с.к., получаем

$$\varphi_j A u = \varphi_j f \text{ или } \varphi_j A \psi_j u = \varphi_j f.$$

Выделим главную часть оператора A

$$\varphi_j A_0 \psi_j u = \varphi_j f + \varphi_j T_1 \psi_j u,$$

где T_1 является оператором порядка ≤ 1 . Ниже мы всегда будем обозначать операторы порядка не выше первого через T_k ($k=1, 2, \dots$). Обозначая $A_{0j} = A_0(0, D_x, q)$, $A_1 = A_{0j} - A_0$, имеем

$$\varphi_j A_{0j} \psi_j u = \varphi_j f + \varphi_j T_1 \psi_j u + \varphi_j A_1 \psi_j u. \quad (3.9)$$

Заметим, что если носитель $\varphi_j(x)$ достаточно мал, то оператор $\varphi_j A_1 \psi_j$ является оператором с финитными мало меняющимися коэффициентами. С другой стороны

$$\varphi_j A_{0j} \psi_j u = A_{0j} \varphi_j u + T_2 \psi_j u,$$

$$\psi_j A_1 \varphi_j u = \psi_j A_1 \varphi_j \psi_j u = \varphi_j A_1 \psi_j u + T_3 \psi_j u.$$

Теперь (3.9) можно записать в виде

$$A_{0j} \varphi_j u = \varphi_j f + \varphi_j T_1 \psi_j u + T_4 \psi_j u + \psi_j A_1 \varphi_j u = \Phi. \quad (3.10)$$

Умножая (3.2) и (3.3) на $\varphi_j(x)$, точно таким же образом как и при получении (3.10), будем иметь

$$\gamma^+ B_{1j}^0 \varphi_j u = \gamma^+ (\varphi_j g_1 + \varphi_j Q_1 \psi_j u + Q_2 \psi_j u + \psi_j B_{11} \varphi_j u) = \Psi_1, \quad (3.11)$$

$$\gamma^- B_{2j}^0 \varphi_j u = \gamma^- (\varphi_j g_2 + \varphi_j P_1 \psi_j u + P_2 \psi_j u + \psi_j B_{21} \varphi_j u) = \Psi_2, \quad (3.12)$$

где операторы Q_j имеют порядок $m_j - 1$, операторы P_j — порядок $m_j - 1$, а операторы B_{11} — операторы с финитными мало меняющимися коэффициентами.

Так как операторы A_{0j} , B_{1j}^0 , B_{2j}^0 являются однородными операторами с постоянными коэффициентами, то в силу теоремы 2.1 для решения задачи (3.10) — (3.12) имеет место априорная оценка

$$\|\varphi_j u\|_{s_j, r_j} \leq C_3 (\|\Phi\|_{s_j - 2, r_j} + \|\Psi_1\|_{s_j}^{+m_1} + \|\Psi_2\|_{s_j}^{-m_2}). \quad (3.13)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое.

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{s_j - 2, r_j} &\leq \|\varphi_j f\|_{s_j - 2, r_j} + \|T_4 \psi_j u\|_{s_j - 2, r_j} + \\ &+ \|\varphi_j A_1 \psi_j u\|_{s_j - 2, r_j} + \|\varphi_j T_1 \psi_j u\|_{s_j - 2, r_j}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В силу лемм 1.2 и 1.5 будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{s_j - 2, r_j} &\leq C_4 (\|\varphi_j f\|_{s_j - 2, r_j} + \|\psi_j u\|_{s_j - 1, r_j} + \\ &+ \|\varphi_j u\|_{s_j, r_j} + \|\psi_j u\|_{s_j - 1, r_j - 1}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

причем ε мало, если носитель $\varphi_j(x)$ достаточно мал. Далее

$$|q| \|\psi_j u\|_{s_j - 1, r_j - 1} \leq \|\psi_j u\|_{s_j - 1, r_j}. \quad (3.16)$$

С другой стороны

$$\|\psi_j u\|_{s_j - 1, r_j} \leq \sum_k \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_j - 1, r_j},$$

где суммирование берется по тем k , для которых $U_k \cap U_j \neq \emptyset$. В силу наших предположений $s_j = s_k + \delta$, $r_j = r_k + \delta_1$, где $|\delta|$ и $|\delta_1|$ меньше $1/4$. Рассмотрим два случая

1) $\delta_1 > 1$. Так как при $\alpha > 0$ $\|u\|_{s - \alpha, r + \alpha} \leq \|u\|_{s, r}$, то

$$\begin{aligned} \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_j - 1, r_j} &= \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_k - 1 + \delta, r_k + \delta_1} \leq \\ &\leq \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_k - 1 + \delta + \delta_1, r_k} \leq \frac{1}{|q|^{1 - \delta - \delta_1}} \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_k, r_k}, \end{aligned}$$

в силу (1.11).

2) $\delta_1 < 0$. Тогда опять воспользуемся неравенством (1.11)

$$\|\varphi_k \psi_j u\|_{s_j - 1, r_j} = \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_k - 1 + \delta, r_k + \delta_1} \leq \frac{1}{|q|^{1 - \delta + \delta_1}} \|\varphi_k \psi_j u\|_{s_k, r_k}.$$

Итак при любых δ и δ_1 , меньших по модулю $1/4$, имеем

$$\|\varphi_k \psi_j u\|_{s_j - 1, r_j} \leq \frac{1}{|q|^{1 - \delta - \delta_1}} \|\varphi_k u\|_{s_k, r_k}, \quad (3.17)$$

причем $1 - \delta - \delta_1 > 0$. Таким образом, из (3.14) — (3.17) получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{s_j - 2, r_j} &\leq C_5 (\|\varphi_j f\|_{s_j - 2, r_j} + \|\varphi_j u\|_{s_j, r_j} + \\ &+ \frac{1}{|q|^{1 - \delta - \delta_1}} \sum_k \|\varphi_k u\|_{s_k, r_k}). \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваем $\|\Psi_{1j}^+ - m_j\|$ и $\|\Psi_{2j}^- - m_j\|$ (здесь сначала нужно воспользоваться леммой 1.1). Из (3.13) получаем

$$\begin{aligned} \|\varphi_j u\|_{s_j, r_j} &\leq C_6 (\|\varphi_j f\|_{s_j-2, r_j} + \|\gamma^+ \varphi_j g_1\|_{s_j^+ - m_j}) + \\ &+ \|\gamma^- \varphi_j g_2\|_{s_j^- - m_j} + \frac{C_7}{|q|^{1-s_1}} \sum_k \|\varphi_k u\|_{s_k, r_k}. \end{aligned}$$

Если теперь выбрать q достаточно большим по модулю ($|q| > q_1 > 0$), а разбиение единицы (3.6) достаточно мелким, то, как нетрудно заметить, из последнего неравенства будем иметь

$$\|u\|_{(s), (r)} \leq C_8 (\|f\|_{(s)-2, (r)} + \|g_1\|_{(s)^+ - m_1} + \|g_2\|_{(s)^- - m_2}).$$

Второе из неравенств (3.8) доказано. Отсюда сразу следует единственность решения задачи (3.1)–(3.3).

Первое из неравенств (3.8) получается достаточно просто с помощью лемм 1.5 и 1.2.

Перейдем к доказательству существования решения. Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор $\{A(x, D_x, q), \gamma^+ B_1(x, D_x, q), \gamma^- B_2(x, D_x, q)\}$, действующий из пространства $H_{(s), (r)}(\Omega)$ в пространство $H_{(s)-m}(\Omega) = H_{(s)-2, (r)}(\Omega) \times H_{(s)-m_1}(\Gamma^+) \times H_{(s)-m_2}(\Gamma^-)$. Пространство $H_{(s)-m}(\Omega)$ состоит из элементов $F = (f, g_1, g_2)$ с нормой

$$\|F\|_{(s)-m} = \|f\|_{(s)-2, (r)} + \|g_1\|_{(s)^+ - m_1} + \|g_2\|_{(s)^- - m_2}.$$

Очевидно

$$\mathfrak{M}u = \sum_j \varphi_j \mathfrak{M} \psi_j u.$$

Эта сумма состоит из слагаемых двух типов: таких, для которых $U_j \cap \Gamma = 0$ и таких, для которых $U_j \cap \Gamma \neq 0$. В слагаемых первого типа за л.с.к. примем исходную систему координат; в слагаемых второго типа перейдем к л.с.к.

Рассмотрим выражение $\varphi_j A \psi_j u$. Будем считать, что $U_j \cap \Gamma \neq 0$ (в противном случае выкладки немного упрощаются). После перехода к л.с.к. приведем нашу задачу к виду (3.10)–(3.12)

$$\mathfrak{M}_0 \varphi_j u = \varphi_j F + \varphi_j P_1 \psi_j u + P_2 \psi_j u + \psi_j \mathfrak{M}_1 \varphi_j u,$$

где

$$\mathfrak{M}_0 = \{A_0, \gamma^+ B_1^0, \gamma^- B_2^0\}, \quad \varphi_j P = \varphi_j T_1 \gamma^+ \varphi_j Q_1, \quad \gamma^- \varphi_j P_1,$$

$$P_2 = \{T_2, \gamma^+ Q_2, \gamma^- P_2\}.$$

Для оператора $\mathfrak{M}_0$ в § 2 был построен оператор

$$R_j: (\varphi_j f, \gamma^+ \varphi_j g_1, \gamma^- \varphi_j g_2) \rightarrow \varphi_j u,$$

обладающий свойством $\mathfrak{M}_0 \varphi_j R_j = I$.

Рассмотрим выражение

$$\varphi_j \mathfrak{M} \psi_j R_j \varphi_j = I + T_j,$$

где

$$T_j = \psi_j \mathfrak{M}_1 \varphi_j R_j \varphi_j + \varphi_j P_1 \psi_j R_j \varphi_j + P_2 \psi_j R_j \varphi_j.$$

Оценивая T_j по общей схеме, так же как и при получении априорной оценки (3.8) получим, что если разбиение единицы (3.6) достаточно мало, а $|q| > q_2 > 0$, то $\|T_j\|_{(s)_-m} < \frac{1}{2}$.

Таким образом оператор $I + T_j$ имеет обратный. Положим теперь

$$RF = \sum_k \psi_k R_k \varphi_k F.$$

Заметим, что R — ограниченный оператор из $H_{(s)-m}(\Omega)$ в $H_{(s), (r)}(\Omega)$. Далее

$$\mathfrak{M}R = \sum_k \sum_j \varphi_j \mathfrak{M}\psi_j \psi_k R_k \varphi_k,$$

где сумма берется по тем j и k , для которых $\varphi_j \psi_k \neq 0$.

После элементарных преобразований получим

$$\mathfrak{M}R = I + T,$$

причем при $|q| > q_2 > 0$ норма оператора T в $H_{(s)-m}(\Omega)$ меньше $1/2$. Таким образом, оператор $I + T$ будет иметь обратный, следовательно будет иметь обратный и оператор $\mathfrak{M}R = I + T$. Полагая $\mathfrak{M}^{-1} = R(\mathfrak{M}R)^{-1}$, получим, что $\mathfrak{M}^{-1}$ является правым обратным для оператора $\mathfrak{M}$ при достаточно больших q ($|q| > q_0$, $q_0 = \max\{q_1, q_2, q_3\}$). Оператор $\mathfrak{M}^{-1}$ действует ограниченным образом из $H_{(s)-m}(\Omega)$ в $H_{(s), (r)}(\Omega)$.

Следовательно, оператор $\mathfrak{M}$ отображает $H_{(s), (r)}(\Omega)$ на $H_{(s)-m}(\Omega)$. Единственность решения уравнения $\mathfrak{M}u = F$ следует из априорной оценки (3.8). Следовательно, оператор $\mathfrak{M}^{-1}$ является также и левым обратным оператором. Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность проф. М. И. Вишику за внимание к настоящей работе.

Вычислительный центр АН Арм.ССР

и Ереванского государственного
университета

Поступило 13.III.1967

Ա. Գ. ԳԵՈՒԼՄԻՍԱՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԽՁՎՈՂ ԵԶՐԱՑԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ
ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ n փ n լ մ

Ձ սահմանափակ տիրույթում դիտարկվում է երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարում

$$A(x, D_x, q) u(x, q) = f(x, q)$$

կախված q պարամետրից, Γ եզրալին մակերևույթի վրա տրվում է խզվող դրժակիցներով եզրալին պայման

$$B(x, D_x, q) u(x, q)|_{\Gamma} = q(x', q), \quad x' \in \Gamma:$$

Ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում:

Նշվում է լուծման ողորկութիւն կարգը ան մտկերհուլթի վրա, որտեղ խզվում են B օպերատորի գործակիցները:

A. G. GULMISSARIAN

GENERAL DISCONTINUOUS BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ELLIPTIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER WITH PARAMETER

S u m m a r y

The elliptic equation of the second order of the form

$$A(x, Dx, q)u(x, q) = f(x, q)$$

q being a parameter, is considered in limited domains.

On the boundary Γ the given conditions are

$$B(x, Dx, q)u(x, q)|_{\Gamma} = g(x', q); x' \in \Gamma.$$

The case, when the coefficients of B have a discontinuity along certain manifold on Γ is studied. A theorem on existence and uniqueness of the solution for the problem is proved. The order of smoothness of the solution on Γ is indicated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Т. Я. Загорский. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений параболического типа, Львов (1961).
2. М. С. Агранович, М. И. Вишик. Краевые задачи для параболических уравнений, УМН, 19, вып. 4 (1964), 53—161.
3. А. Г. Гюльмисарян. Общие краевые задачи для параболических уравнений с разрывными коэффициентами, Известия АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 18, № 1 (1965), 14—33.
4. Э. Я. Шапиро. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа, Известия АН СССР, сер. матем., 17 (1953), 539—562.
5. Я. Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. журн., 5, № 2 (1953), 123—151.
6. С. Аїмон, А. Дуїлис, Л. Ниренберг. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ (1962).
7. М. И. Вишик, Г. И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, 20, вып. 3 (1965), 89—152.
8. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, вып. 5 (1958), 3—120.
9. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, вып. 2 (1958), 3—72.
10. М. И. Вишик, Г. И. Эскин. Общие граничные задачи с разрывными граничными условиями, ДАН 158, № 1 (1964), 25—78.
11. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. АГУ, Л., (1950).

12. *А. Н. Слободецкий*. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их применение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. ЛГПИ им. Герцена, Уч. зап. физ.-мат. фак., 196 (1958), 54—112.
13. *R. T. Seeley*. Regularisation of singular integral operators on compact manifolds. Amer. J. Math., 83, № 2 (1961), 265—275.
14. *А. Хермандер*. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М. (1965).
15. *Ж. Петре*. О новом подходе к граничным задачам для эллиптических уравнений. Сб. переводов „Математика“, 7:1 (1963), 43—65.
16. *J. Peetre*. A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators, Comm. Pure Appl. Math, 14 (1961), 734—745.

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $B_a(z)$

Как известно [1], если $\{z_n\}_1^\infty$ ($0 < |z_k| < 1$) — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty, \quad (1)$$

то произведение Бляшке

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}z_k} \frac{|z_k|}{z_k}$$

равномерно сходится внутри единичного круга и обладает следующими свойствами:

- 1) $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |B(re^{i\varphi})| d\varphi = 0,$
- 2) $|B(z)| < 1 \quad (|z| < 1).$

Известно также, что условия 1) и 2) полностью определяют эти произведения в том смысле, что всякая аналитическая в круге $|z| < 1$ функция, удовлетворяющая указанным условиям, является произведением Бляшке [1].

В связи с установлением параметрического представления некоторых классов мероморфных в круге $|z| < 1$ функций М. М. Джрбашяном было построено важное обобщение произведений Бляшке для того случая, когда последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ вместо условия (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < \infty \quad (-1 < \alpha < \infty). \quad (1')$$

Вкратце остановимся на определении и на некоторых основных свойствах указанных произведений (см. [2], гл. IX). Обозначим

$$A_\alpha(z; \varsigma) = \left(1 - \frac{z}{\varsigma}\right) e^{-W_\alpha(z; \varsigma)},$$

где

$$W_\alpha(z; \varsigma) = \int_{|z|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left(\varsigma^{-k} \int_0^{|z|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx - \right.$$

$$- \zeta^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^{\alpha} x^{-k-1} dx \Bigg\} z^k (|z| < 1; |\zeta| < 1).$$

Известно, что при условии (1') произведение

$$B_{\alpha}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} A_{\alpha}(z; \zeta) \quad (2)$$

равномерно сходится в круге $|z| < 1$ и представляет аналитическую функцию с нулями, лежащими лишь на последовательности $\{z_k\}_1^{\infty}$. Эти произведения являются естественным обобщением произведений Бляшке, причем

$$B_{\alpha}(z)/_{\alpha=0} \equiv B(z).$$

Кроме того известны также следующие свойства произведений $B_{\alpha}(z)$:

а) если $-1 < \alpha < \infty$, то

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha}(re^{i\varphi})| d\varphi = 0;$$

б) если $0 \leq \alpha < \infty$, то

$$D^{-\alpha} \log |B_{\alpha}(z)| \leq 0 \quad (|z| < 1).$$

Здесь оператор $D^{-\alpha} f(x)$ определяется следующим образом: если $0 < \alpha < \infty$, а $f(x) \in L_1(0, 1)$, то

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

а если $-1 < \alpha < 0$, то

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-(\alpha+1)} f(x)\}.$$

Отметим, что почти всюду на $(0, 1)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} D^{-\alpha} f(x) = f(x),$$

в силу чего естественно распространить оператор $D^{-\alpha}$ на случай $\alpha=0$, принимая

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Известно также, что если $0 \leq \alpha < \infty$, то $r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha}(re^{i\varphi})|$ является субгармонической функцией в круге $|z| < 1$.

Наконец, приведем определение класса A_{α} и его параметрическое представление. Обозначим через A_{α} ($-1 < \alpha < \infty$) класс аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} < +\infty,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha} \varphi(r) = \max \{D^{-\alpha} \varphi(r), 0\}.$$

Класс A_α ($-1 < \alpha < \infty$) совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих в круге $|z| < 1$ представление вида

$$f(z) = e^{i\gamma + i k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z; a_\mu) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\theta} z) d\psi(\theta) \right\}, \quad (3)$$

где

$$B_\alpha(z; a_\mu) = \prod_{\mu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\mu} \right) e^{-W_\alpha(z; a_\mu)},$$

$$S_\alpha(e^{-i\theta} z) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ \frac{2}{(1 - e^{-i\theta} z)^{1+\alpha}} - 1 \right\}, \quad (4)$$

$\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi, \pi]$, $\lambda \geq 0$ — любое целое число, γ — любое вещественное число, а

$$k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Заметим, что условия а) и б) являются обобщением условий 1) и 2), характеризующих произведения Бляшке и отождествляются с ними при $\alpha=0$.

В настоящей статье доказывается, во-первых, что условия а) и б) характерны для произведений $B_\alpha(z)$. Затем устанавливаются две теоремы, являющиеся распространением на произведения $B_\alpha(z)$ двух основных теорем Г. Ц. Тумаркина [3] о сходящихся в круге $|z| < 1$ последовательностях произведений Бляшке.

Что касается некоторых других результатов работ [3] (§ 1—4) и [4] (§§ 1, 2), то их обобщения мы не приводим, поскольку они получаются без особых затруднений.

Автор выражает глубокую благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении настоящей работы.

1°. Характерные свойства произведения $B_\alpha(z)$

Теорема 1. Если для данного α ($0 \leq \alpha < \infty$) аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $F(z)$ удовлетворяет условиям а) и б), то ее можно представить в виде

$$F(z) = e^{i\gamma + i k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z), \quad (1.1)$$

где $\lambda \geq 0$ — целое, а γ — вещественное число, $B_\alpha(z)$ — некоторое произведение вида (2), наконец,

$$k_\alpha = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Доказательство. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ есть последовательность нулей функции $F(z)$, пронумерованных в порядке неубывания модулей, а

$\lambda > 0$ — кратность возможного нуля в начале координат. Составим последовательность функций

$$\varphi_n(z) \equiv \frac{F(z)}{e^{\lambda k_n} z^\lambda \prod_{k=1}^n A_k(z; z_k)} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

которая равномерно сходится внутри единичного круга, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z) = \frac{F(z)}{e^{\lambda k_\infty} z^\lambda B_\infty(z)}, \quad (1)$$

функция $\varphi(z)$ голоморфна и не имеет нулей в круге $|z| < 1$. Следовательно аналитической будет функция $\log \varphi(z)$, а также функции $D^{-\alpha} \log \varphi(z)$ ($-1 < \alpha < \infty$)*.

Из самого определения оператора $D^{-\alpha}$ непосредственно следует, что при $0 \leq \alpha < \infty$ внутри круга $|z| < 1$ равномерно будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^{-\alpha} \log \varphi_n(z) = D^{-\alpha} \log \varphi(z) \quad (|z| < 1).$$

Следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)| = D^{-\alpha} \log |\varphi(z)| \quad (0 \leq \alpha < \infty, |z| < 1),$$

причем для любого ρ ($0 < \rho < 1$) имеет место следующее интегральное представление**:

$$\log |\varphi(re^{i\vartheta})| = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha\left(\varphi - \vartheta, \frac{r}{\rho}\right) D^{-\alpha} \log |\varphi(\rho e^{i\vartheta})| d\vartheta \quad (1)$$

$$(0 \leq r < \rho; -\pi \leq \vartheta \leq \pi),$$

где

$$P_\alpha\left(\varphi - \vartheta; \frac{r}{\rho}\right) = \Gamma(1+\alpha) \left\{ Re \frac{2(\rho e^{i\vartheta})^{1+\alpha}}{(\rho e^{i\vartheta} - re^{i\vartheta})^{1+\alpha}} - 1 \right\}.$$

Поскольку

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \{1\} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log r = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} [\log r - k_\alpha],$$

из условий (1.2) и б) теоремы получим

$$\begin{aligned} D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)| &= D^{-\alpha} \log |F(z)| - \frac{\lambda r^\alpha \log r}{\Gamma(1+\alpha)} - D^{-\alpha} \log |B_{\alpha, n}(z)| \leq \\ &\leq - \frac{\lambda r^\alpha \log r}{\Gamma(1+\alpha)} - D^{-\alpha} \log |B_{\alpha, n}(z)|, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$B_{\alpha, n}(z) = \prod_{k=1}^n A_k(z; z_k).$$

* См. [2], стр. 594.

** См. [2], стр. 596.

Пользуясь параметрическим представлением (3) функций класса A_α , легко видеть, что если $f(z) \in A_\alpha$ ($0 \leq \alpha < \infty$), то $r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |f(re^{i\varphi})|$ будет субгармонической функцией в круге $|z| < 1$, поскольку, как было отмечено уже, при $0 \leq \alpha < \infty$, $r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi})|$ — субгармоническая функция. Из определения класса A_α следует, что $\varphi_n(z) \in A_\alpha$ ($n = 1, 2, \dots$) и потому $D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)|$ ($n = 1, 2, \dots$) также будут субгармоническими функциями в круге $|z| < 1$.

Поскольку для каждого α ($-1 < \alpha < \infty$)

$$\lim_{r \rightarrow 1} D^{-\alpha} \log |A_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)| = 0^*,$$

то, считая n фиксированным, для любого $\varepsilon > 0$ можем выбрать r_1 ($0 < r_1 < 1$) так, чтобы коль скоро $r_1 \leq |z| < 1$ имели бы место неравенства

$$|D^{-\alpha} \log |A_\alpha(z; z_k)|| < \frac{\varepsilon}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Итак, при $r_1 \leq |z| < 1$ справедливо неравенство

$$|D^{-\alpha} \log |B_{\alpha, n}(z)|| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.6)$$

Теперь выберем r_2 ($r_1 \leq r_2 < 1$) таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\left| \frac{\lambda r^\alpha \log r}{\Gamma(1+\alpha)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (r \geq r_2). \quad (1.7)$$

Учитывая (1.5), (1.6) и (1.7), получим

$$|D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)|| < \varepsilon \quad (r_2 \leq |z| < 1). \quad (1.8)$$

Так как при $\alpha \geq 0$ $D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)|$ ($n = 1, 2, \dots$) — субгармонические функции в круге $|z| < 1$, то согласно принципу максимума неравенство (1.8) имеет место во всем круге $|z| < 1$.

Устремляя $\varepsilon > 0$ к нулю, из последнего неравенства получаем, что при любом z ($|z| < 1$)

$$D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)| \leq 0.$$

Наконец, устремив $n \rightarrow \infty$, приходим к неравенству

$$D^{-\alpha} \log |\varphi(z)| \leq 0. \quad (1.9)$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} D^{-\alpha} \log |\varphi(0)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} D^{-\alpha} \log |\varphi_n(0)| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |F(r_n e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{\lambda r_n^\alpha \log r_n}{\Gamma(1+\alpha)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha, n}(r_n e^{i\varphi})| d\varphi \right\}, \end{aligned}$$

* См. [2], стр. 619.

и пользуясь условием а) теоремы и равенствами

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda r_n^\alpha \log r_n}{\Gamma(1+\alpha)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_{\alpha, n}(r_n e^{i\varphi})| d\varphi = 0,$$

получим

$$D^{-\alpha} \log |\varphi(0)| = 0. \quad (1.10)$$

Из (1.9) и (1.10) согласно принципу максимума следует, что

$$D^{-\alpha} \log |\varphi(z)| \equiv 0.$$

Имея ввиду (1.4), отсюда заключаем также, что $\log |\varphi(z)| \equiv 0$, т. е. $\varphi(z) \equiv e^{i\gamma}$, где γ — вещественная постоянная.

Таким образом, из (1.3) следует представление

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z).$$

Теорема доказана.

Условимся называть произведением типа $B_\alpha(z)$ выражение вида

$$e^{i\gamma + \lambda k_\alpha} z^\lambda B_\alpha(z).$$

Тогда справедливо утверждение: для того чтобы для данного α ($0 \leq \alpha < \infty$) аналитическая в круге $|z| < 1$ функция $F(z)$ была произведением типа $B_\alpha(z)$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям а) и б).

2°. Свойства предельных функций произведений $B_\alpha(z)$

Теорема 2. Пусть $0 \leq \alpha < \infty$. Для того чтобы предельная функция $F(z)$ равномерно сходящейся внутри круга $|z| < 1$ последовательности произведений $\{e^{i\gamma_k} B_\alpha^{(k)}(z)\}_{k=1}^\infty$ была снова произведением типа $e^{i\gamma} B_\alpha(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

1) во всяком круге $|z| < r$ ($0 < r < 1$) число нулей функций $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_{k=1}^\infty$ было равномерно ограничено,

2) для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое R ($0 < R < 1$), что при всех k ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\sum_{|z_k| > R} (1 - |z_k|)^{1+\alpha} < \varepsilon.$$

Здесь суммирование ведется по всем нулям $B_\alpha^{(k)}(z)$ с модулями $> R$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку необходимость условия 1) очевидна, докажем необходимость условия 2). Так как предельная функция последовательности есть $e^{i\gamma} B_\alpha(z)$, то

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(\rho e^{i\theta})| d\theta = 0^* \quad (-1 < \alpha < \infty). \quad (2.1)$$

* См. [2], стр. 626.

С другой стороны

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(\rho e^{i\vartheta})| d\vartheta = \\ & = - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_j|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_j| < \frac{\rho}{p}} \int_{\frac{|z_j|}{p}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \end{aligned} \quad (2.1')$$

где $\{z_j\}_1^\infty$ — нули $B_\alpha(z)^*$.

Из (2.1) и (2.1') следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $r_0 = r_0(\varepsilon) < 1$ так, чтобы имело место неравенство

$$- \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_j|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_j| < r_0} \int_{\frac{|z_j|}{r_0}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx > - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку последовательность $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится внутри круга $|z| < 1$, то можно указать такое $k_0 = k(r_0)$, чтобы как только $k > k_0$

$$\begin{aligned} & \frac{r_0^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha^{(k)}(r_0 e^{i\varphi})| d\varphi = \\ & = - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r_0} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r_0}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx > - \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Итак, при $k > k_0$, имеем

$$\begin{aligned} & - \sum_{|z_{kj}| > r_0} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r_0} \left\{ \int_{\frac{|z_{kj}|}{r_0}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \right. \\ & \left. - \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right\} > - \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.2')$$

Поскольку второе слагаемое в правой части (2.2') отрицательно, то тем более, при $k > k_0$

$$\sum_{|z_{kj}| > r} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx < - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Наконец, заметим, что

$$\int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \geq \frac{(1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}}{1+\alpha}. \quad (2.4)$$

* См. [2], стр. 627.

Из (2.3) и (2.4) получаем при $k > k_0$, $r > r_0(\varepsilon)$

$$\sum_{|z_{kj}| < r_0} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha} \leq \sum_{|z_{kj}| > r} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha} < \varepsilon. \quad (2.3')$$

Теперь возьмем $R > r$ настолько близким к единице, чтобы имели место неравенства

$$\sum_{|z_{kj}| > R} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha} < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots, (k_0)). \quad (2.3'')$$

Из (2.3') и (2.3'') следует необходимость условия 2).

Достаточность. Нужно доказать, что при выполнении условий 1) и 2) предельная функция $F(z)$ последовательности $\{B_i^{(k)}(z)\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям а) и б).

В самом деле, поскольку при $\alpha > 0$

$$D^{-\alpha} \log |B_i^{(k)}(re^{i\varphi})| \leq 0 \begin{pmatrix} 0 \leq r < 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix},$$

$$(k=1, 2, \dots),$$

то, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})| \leq 0 \begin{pmatrix} 0 \leq r < 1, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{pmatrix},$$

так как сходимость $\{B_i^{(k)}(z)\}_1^\infty$ к $F(z)$ равномерна внутри круга $|z| < 1$.

Остается показать, что предельная функция $F(z)$ удовлетворяет условию а), то есть

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi = 0.$$

Заметим, что для любого $k > 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_i^{(k)}(\rho e^{i\theta})| d\theta = \\ &= - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < \rho} \int_{\frac{|z_{kj}|}{\rho}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Покажем, что независимо от $k > 1$ можно выбрать r ($0 < r < 1$) так, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ имела место оценка

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.6)$$

С этой целью, во-первых, заметим, что если $|z_{kj}| \leq \rho < 1$, то

$$\int_{\frac{|z_{kj}|}{\rho}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \leq \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx < \frac{(1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha}}{|z_{kj}|(1+\alpha)} \quad (2.7)$$

и

$$\int_{\frac{|z_{kj}|}{\rho}}^{\frac{|z_{kj}|}{\rho}} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx < \frac{(1-|z_{kj}|)^\alpha}{|z_{kj}|} \left(\frac{|z_{kj}|}{\rho} - |z_{kj}| \right) = (1-|z_{kj}|)^\alpha \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right). \quad (2.8)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx = \\ & = - \sum_{|z_{kj}| > r_1} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r_1} \left[\int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right] + \\ & + \sum_{r_1 < |z_{kj}| < r} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из условия 2) теоремы и неравенства (2.7) следует, что можно выбрать r_1 ($0 < r_1 < 1$) так, чтобы

$$|J_1| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.10)$$

Согласно условию 1) теоремы число нулей произведений $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ в круге $|z| \leq r_1$ равномерно ограничено, допустим некоторым числом $N(r_1)$, следовательно в J_2 независимо от k число слагаемых не превосходит $N(r_1)$. Из (2.8) и ограниченности слагаемых в J_2 следует, что r ($r_1 < r < 1$) можно выбрать так, что

$$|J_2| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.11)$$

Наконец

$$|J_3| < |J_1| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2.12)$$

Из (2.9), (2.10), (2.11) и (2.12) следует

$$\left| - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0 < |z_{kj}| < r} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

то есть

$$\left| \frac{r^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha^{(k)}(re^{i\varphi})| d\varphi \right| < \varepsilon \quad (k=1, 2, \dots).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\left| \frac{r^{-\alpha} \Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})| d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что предельная функция $F(z)$ удовлетворяет условию а).

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда предельная функция последовательности произведений $\{B_a^{(k)}(z)\}_1^\infty$ не имеет нулей в круге $|z| < 1$.

Определим последовательность аналитических в круге $|z| < 1$ функций

$$M_a^{(k)}(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_a(e^{-i\theta} z) d\psi_k(\theta) \right\} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (2.13)$$

где $\psi_k(\theta)$ является функцией скачков и определяется из соотношения

$$\psi_k(\theta) = -\frac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{0 < \arg z_{kj} < \theta} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha}. \quad (2.14)$$

Теорема 3. Пусть дана равномерно сходящаяся внутри круга $|z| < 1$ последовательность произведений $\{B_a^{(k)}(z)\}_1^\infty$, где α ($-1 < \alpha < \infty$) — любое, причем для α ($-1 < \alpha < 0$)

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log |B_a^{(k)}(re^{i\varphi})| d\varphi \leq M < +\infty, \quad (2.15)$$

где постоянная M от k не зависит. Предположим, что предельная функция $F(z)$ последовательности $\{B_a^{(k)}(z)\}_1^\infty$ не обращается в нуль в круге $|z| < 1$. Тогда последовательность функций $\{M_a^{(k)}(z)\}_1^\infty$, определенная по формуле (2.13), будет как и $\{B_a^{(k)}(z)\}_1^\infty$, равномерно сходиться внутри круга $|z| < 1$ к той же функции $F(z)$.

Доказательство. Так как

$$B_a^{(k)}(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_{kj}} \right) e^{-W_a(z; z_j)} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\omega_a(z; z_j)}, \quad (2.16)$$

где

$$\omega_a(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left\{ \left(1 - \frac{\zeta x}{x} \right)^{-1-\alpha} + \left(1 - \frac{x\zeta}{\zeta} \right)^{-1-\alpha} - 1 \right\} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx, \quad (2.17)$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и r ($0 < r < 1$), начиная с достаточно большого k , имеет место неравенство

$$\left| -\sum_{j=1}^{\infty} \omega_a(z; z_j) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_a(e^{-i\theta} z) d\psi_k(\theta) \right| < \varepsilon, \quad (2.18)$$

где функции $\psi_k(\theta)$ и $S_a(e^{-i\theta} z)$ определяются формулами (2.14) и (4).

С этой целью обозначим

$$\omega_\alpha^*(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^1 \left\{ (1 - \bar{\zeta}z)^{-1-\alpha} + \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{-1-\alpha} - 1 \right\} (1-x)^\alpha dx$$

и, пользуясь биномиальным разложением

$$\frac{1}{(1-w)^{1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} w^k (|w| < 1), \quad (2.19)$$

представим функцию $\omega_\alpha^*(z; \zeta)$ в следующем виде:

$$\omega_\alpha^*(z; \zeta) = \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left(|\zeta|^k + \frac{1}{|\zeta|^k} \right) (e^{-i\theta} z)^k - 1 \right\}. \quad (2.20)$$

Оценим разность $\omega_\alpha^*(z; \zeta) - \omega_\alpha(z; \zeta)$, заметив, что для $0 < |z| < r < 1$

$$\begin{aligned} |\omega_\alpha^*(z; \zeta) - \omega_\alpha(z; \zeta)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |\zeta|^k |z|^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha (x^{-k-1} - 1) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha (1-x^{k-1}) dx + \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx \equiv \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |\zeta|^k |z|^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha (x^{-k-1} - 1) dx + \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |\zeta|^k |z|^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha (x^{-k-1} - 1) dx \equiv J'_1 + J''_1. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha (x^{-k-1} - 1) dx \leq \frac{1}{|\zeta|^{k+1}} \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha dx = \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)|\zeta|^{k+1}},$$

то

$$J'_1 \leq \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)|\zeta|} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k. \quad (2.21)$$

Замечая, что при фиксированном z ($|z| < 1$) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k$$

сходится, для $\varepsilon > 0$ и r ($0 < r < 1$) выберем $N = N(\varepsilon, r)$ так, чтобы для всех z ($|z| \leq r$) имело место неравенство

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k < \frac{\varepsilon}{2} (1+\alpha)r. \quad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) следует

$$j_1' \leq \frac{\varepsilon}{12} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.23)$$

Затем, поскольку

$$j_1' \leq \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^\alpha \frac{(1-x^{k+1})}{x} dx,$$

то, пользуясь очевидным неравенством $(1-x^{k+1}) < k(1-x)$ ($0 < x < 1$) и имея ввиду, что при $(|z| \leq r < |\zeta| < 1)$ очевидно

$$\sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k \leq \frac{1}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

получим

$$j_1' \leq \frac{N(1-|\zeta|)^{2+\alpha}}{|\zeta|(2+\alpha)(1-r)^{1+\alpha}}. \quad (2.24)$$

Теперь возьмем ε так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{N(1-|\zeta|)}{|\zeta|(2+\alpha)(1-r)^{1+\alpha}} < \frac{\varepsilon}{12}. \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) следует

$$j_1' \leq \frac{\varepsilon}{12} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.26)$$

Из неравенств (2.23) и (2.26) получим

$$J_1 \leq \frac{\varepsilon}{6} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.27)$$

Таким же образом мы получаем неравенства

$$J_2 \leq \frac{\varepsilon}{6} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}, \quad (2.28)$$

$$J_3 = \int_{|\zeta|}^1 (1-x)^{1+\alpha} \frac{dx}{x} \leq \frac{(1-|\zeta|)^{2+\alpha}}{|\zeta|(2+\alpha)} < \frac{\varepsilon}{6} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.29)$$

Из (2.27), (2.28) и (2.29) следует

$$\left| \omega_z^*(z; \zeta) - \omega_z(z; \zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{2} (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.30)$$

Теперь оценим разность

$$\begin{aligned} & \omega_z^*(z; \zeta) - \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_z(e^{-i\theta} z) = \\ &= \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} (e^{-i\theta} z)^k \frac{(1-|\zeta|^k)^2}{|\zeta|^k}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Для данного r ($0 < r < 1$) и $\varepsilon > 0$ обозначим $r/|\zeta_0| = q$ ($r < |\zeta_0| < 1$) и выберем $N(\varepsilon, q)$ так, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} q^k < \frac{\varepsilon}{4} (1+\alpha).$$

Тогда получим также

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \frac{(1-|\zeta|^k)^2}{|\zeta|^k} (e^{-i\theta} z)^k \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left| \frac{z}{\zeta} \right|^k < \frac{\varepsilon}{4} (1+\alpha), \end{aligned} \quad (2.32)$$

причем одновременно для всех значений z ($|z| \leq r$) и ζ ($|\zeta_0| \leq |\zeta| \leq 1$).

Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} (e^{-i\theta} z)^k \frac{(1-|\zeta|^k)^2}{|\zeta|^k} \right| \leq \\ & \leq \frac{(1-|\zeta|^N)^2}{|\zeta|^N} \sum_{k=0}^N \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} q^k \leq \frac{(1-|\zeta|^N)^2}{|\zeta|^N (1-q)^{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

выберем ζ_1 ($|\zeta_0| \leq |\zeta_1| \leq 1$) так, чтобы

$$\frac{(1-|\zeta|^N)^2}{|\zeta|^N (1-q)^{1+\alpha}} < \frac{\varepsilon}{4} (1+\alpha). \quad (2.33)$$

Из (2.29) и (2.33) следует, что для любого фиксированного r ($0 < r < 1$) можно выбрать R ($0 < R < 1$) так, чтобы в круге $|z| \leq r$ при $R \leq |\zeta| \leq 1$ имели бы

$$\left| \omega_\alpha(z; \zeta) - \frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_\alpha(e^{-i\theta} z) \right| \leq \varepsilon (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.34)$$

Далее

$$-\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_\alpha(e^{-i\theta} z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-it} z) d\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — кусочно постоянна на $[-\pi, \pi]$ и имеет единственный скачок в точке $t = \theta$, равный $-2\pi(1-|\zeta|)^{1+\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$.

Следовательно неравенство (2.34) можно записать в следующем виде:

$$\left| \omega_\alpha(z; \zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-it} z) d\psi(t) \right| < \varepsilon (1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \quad (2.34')$$

Так как предельная функция последовательности $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ в круге $|z| < 1$ не имеет нулей, то для любого фиксированного R ($0 < R < 1$) можно указать такой номер k_0 , чтобы для $k > k_0$ произведения $B_\alpha^{(k)}(z)$ в круге $|z| \leq R$ не имели бы нулей.

Предполагая, что $k > k_0$, с помощью (2.34') оценим каждое слагаемое разложения

$$\log B_{\alpha}^{(k)}(z) = - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_{\alpha}(z; z_j).$$

Тогда будем иметь

$$\left| \log B_{\alpha}^{(k)}(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\alpha}(e^{-i\theta} z) d\psi_k(\theta) \right| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha}, \quad (2.35)$$

где $\psi_k(\theta)$ определяется формулой (2.14).

Так как предельная функция $F(z) \in A_{\alpha}$ (для $0 \leq \alpha < \infty$ очевидно, а для $-1 < \alpha < 0$ это следует из условия (2.15)) и не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то, пользуясь леммой 9.17 [2], легко доказать, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |z_{kj}|)^{1+\alpha} < \infty.$$

Отсюда, учитывая (2.35), получим (2.18).

Теорема доказана.

Ереванский государственный
университет

Поступило 20.X.1966

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ

$B_{\alpha}(z)$ ԱՐՏԱԴՐՑԱԼՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա հոդվածում Բլյաշկինի արտադրյալների համար Գ. Յ. Տումարկինի [3] ստացած հիմնական արդյունքները տարածված են Մ. Մ. Զրբաշյանի [2] կողմից մոծված $B_{\alpha}(z)$ արտադրյալների վրա:

Նախ ապացուցված է՝ որպեսզի տված α ($0 \leq \alpha < \infty$)-ի համար $|z| < 1$ շրջանում անալիտիկ $F(z)$ ֆունկցիան լինի $B_{\alpha}(z)$ տիպի արտադրյալ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա բավարարի ա) և ճ) պայմաններին:

Այնուհետև նշված են $|z| < 1$ շրջանում $B_{\alpha}(z)$ ($0 \leq \alpha < \infty$) տիպի արտադրյալներից կազմված հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականության սահմանալին ֆունկցիան $B_{\alpha}(z)$ տիպի արտադրյալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ:

Վերջում ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ $|z| < 1$ շրջանում հավասարաչափ զուգամետ $B_{\alpha}(z)$ տիպի արտադրյալների հաջորդականության սահմանալին ֆունկցիան միավոր շրջանում զերո չի դառնում:

G. G. GEVORKIAN

ON THE CONVERGENT SEQUENCES OF $B_{\alpha}(z)$ TYPE PRODUCTS

S u m m a r y

The present paper extends some of Toumarkin's results on Blyaske products over $B_{\alpha}(z)$ type products, which were introduced by Dzrbashian.

First, it is proved, that given α ($0 < \alpha < \infty$), conditions a) and b) are both necessary and sufficient for an analytical in the unit circle $F(z)$ function to be a product of $B_\alpha(z)$ type.

Necessary and sufficient conditions for the limit of an uniformly over $|z| < 1$ convergent sequence of $B_\alpha(z)$ type products to be again a product of $B_\alpha(z)$ type then follow.

Also the case, when the limit of such sequence does not vanish in the unit circle is studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М. (1950).
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство "Наука" (1966).
3. Г. Ц. Тумаркин. Сходящиеся последовательности произведений Бляшке, Сибирский математический журнал, № 1 (1964).
4. Г. Ц. Тумаркин. Условия равномерной сходимости и сходимости граничных значений аналитических и мероморфных функций с равномерно ограниченными характеристиками, Сибирский математический журнал, № 2 (1964).
5. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций (1950).

В. Б. ДЫБИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ВИНЕРА-ХОПФА
В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМ ХАРАКТЕРОМ
ПОВЕДЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Интегральное уравнение типа свертки

$$(I - K) \varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} k(t-s) \varphi(s) ds = \psi(t), \quad t > 0 \quad (1)$$

исследовалось при различных предположениях относительно характера поведения его коэффициентов на ∞ . Основные результаты в этом направлении для невырожденного* случая уравнения (1) можно найти в работах [1]—[2].

Вырожденный случай уравнения (1), когда символ его в отдельных точках вещественной оси обращается в нуль, также изучался рядом авторов (см. [3]—[7]).

В предположениях дополнительной гладкости символа (гельдеровости или дифференцируемости) в отмеченных работах получены результаты о числе и виде решений однородного уравнения (1) в пространствах L_1 , L_2 . Кроме того, предложены различные ограничения на правую часть ψ , достаточные для разрешимости неоднородного уравнения (1) в указанных классах.

Ниже уравнение (1), а также ему транспонированное уравнение рассматриваются в пространствах $E_+ \{\pm n\}$ ($n \geq 0$), $E_+ \{\pm \infty\}$.

Через $E_+ \{\pm n\}$ обозначено банахово пространство функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $(t+i)^{\mp n} f(t) \in E_+$, где E_+ одно из пространств:

$$L_{p+}(p > 1), \quad C_+^0 \subset C_+ \subset M_+^u \subset M_+^c \subset M_+.$$

Норма в пространстве $E_+ \{\pm n\}$ вводится следующим образом (см. [1], § 6): $\|f\|_{E_+ \{\pm n\}} = \|(t+i)^{\mp n} f(t)\|_{E_+}$.

Через $E_+ \{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_+ \{-n\}$ обозначено полное счетно-нормированное пространство со следующим набором попарно сравнимых и согласованных норм: $\|f\|_n = \|f\|_{E_+ \{-n\}}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

* Под невырожденным понимается тот случай, когда символ уравнения

$$1 - K(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{ixt} dt \neq 0 \quad \text{всюду на вещественной оси } x.$$

Наконец, под $E_+ \{\infty\}$ понимается пространство $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_+ \{n\}$, где $E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\}$ ($p > 1$) или $M_+ \{n\}$. Сходимость в пространстве $E_+ \{\infty\}$ вводится слабая.

Предполагается, что ядро свертки $k(t)$ принадлежит пространствам $L_1 \{-n\}$ или $L_1 \{-\infty\}$.

В связи с этим заметим, что наряду с общим для этих двух случаев обозначением $I - K$ для оператора (1) там, где это существенно, будут также употребляться обозначения $I - K_n$ и $I - K_{\infty}$.

В указанных предположениях интеграл, входящий в левую часть уравнения (1), определен для любой функции $\varphi(s) \in E_+ \{-n\}$ ($E_+ \{\pm \infty\}$), существует почти для всех $t > 0$ и является ограниченным оператором в пространстве $E_+ \{\pm n\}$ ($E_+ \{\pm \infty\}$).

Характер вырождения символа оператора $I - K$ задается следующим представлением:

$$1 - K(x) = \frac{A(x)}{(x-i)^{\alpha}} \cdot (1 - \bar{K}(x)) \quad (-\infty \leq x \leq \infty), \quad (2)$$

где $A(x) = \prod_{k=1}^r (x - \alpha_k)^{\alpha_k}$, причем все α_k — вещественные,

α_k — целые положительные числа, $\sum_{k=1}^r \alpha_k = \alpha$; $\bar{K}(x) = \frac{1}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(t) e^{ixt} dt$,

где $\bar{K}(t) \in L_1 \{-n\}$ или $L_1 \{-\infty\}$, $1 - \bar{K}(x) \neq 0$ для всех вещественных значений x .

§ 1. Оператор $I - K$ в пространствах $E_+ \{\pm n\}$, $E_+ \{\pm \infty\}$.

Невырожденный случай

Ввиду того, что метод исследования уравнения (1) в предположениях (2) состоит в сведении его к соответствующему уравнению Винера-Хопфа с невырожденным символом, приведем краткую сводку результатов для последнего случая. Все они могут быть получены тем же путем, что и в работе [1], и частично вытекают из результатов заметки [8].

Пусть $n \geq 0$, $1 - K(x) \neq 0$ ($-\infty < x < \infty$) и $\kappa = -\text{Ind}(1 - K(x)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d \ln(1 - K(x))$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.1. Если функция $k(t) \in L_1 \{-n\}$ ($L_1 \{-\infty\}$) и $\kappa = 0$, то для любой правой части $\psi(t) \in E_+ \{\pm n\}$ ($E_+ \{\pm \infty\}$) уравнение (1) имеет одно и только одно решение $\varphi(t) \in E_+ \{\pm n\}$ ($E_+ \{\pm \infty\}$), вида

$$\varphi(t) = \psi(t) + \int_0^{\infty} \gamma(t, s) \psi(s) ds, \quad t > 0, \quad (3)$$

где $\gamma(t, s)$ ($0 \leq t, s \leq \infty$) — некоторое ядро, обладающее тем свойством, что $\gamma(t, 0)$ и $\gamma(0, t)$ принадлежат $L_1 + \{-n\}$ ($L_1 + \{-\infty\}$) и

$$\gamma(t, s) = \gamma(t-s, 0) + \gamma(0, s-t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \gamma(t-r, 0) \gamma(0, s-r) dr$$

$$(0 \leq t, s \leq \infty).$$
 (4)

Теорема 1.2. Если функция $k(t) \in L_1 + \{-n\}$ ($L_1 + \{-\infty\}$) и $x > 0$, то подпространство решений в $E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) однородного уравнения (1) x -мерно, одно и то же для всех пространств $E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) и имеет в качестве базиса следующую систему функций:

$$\varphi_j(t) = \tilde{\varphi}_j(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \lambda_+(t-s) \tilde{\varphi}_j(s) ds, \quad t > 0; \quad (j = 1, 2, \dots, x), \quad (5)$$

где $\lambda_+(t) \in L_1 + \{-n\}$ ($L_1 + \{-\infty\}$) равна нулю при $t < 0$ и целиком определяется ядром $k(t)$, а $\tilde{\varphi}_j(t) = t^{j-1} e^{-t}$, $t > 0$.

Неоднородное уравнение (1) разрешимо при любой правой части $\psi(t) \in E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$). Одно из его возможных решений $\varphi(t) \in E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) имеет вид (3), (4).

Теорема 1.3. Если функция $k(t) \in L_1 + \{-n\}$ ($L_1 + \{-\infty\}$) и $x < 0$, то однородное уравнение (1) ни в одном из пространств $E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) не имеет решений, отличных от тривиального $\varphi \equiv 0$.

Неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $\psi(t) \in E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) удовлетворяет следующим $|x|$ условиям:

$$\int_0^\infty \psi(t) \varphi_j(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, |x|), \quad (6)$$

где $\{\varphi_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, |x|$) — базис подпространства решений однородного уравнения, транспонированного уравнению (1). При выполнении условий (6) решение $\varphi(t) \in E_+ + \{\pm n\}$ ($E_+ + \{\pm \infty\}$) уравнения (1) единственно и может быть получено по формуле (3), где $\gamma(t, s)$ — любая из резольвент транспонированного уравнения

$$(I - K^*) f \equiv f(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(t-s) f(t) dt = g(s), \quad s > 0. \quad (7)$$

Из теорем 1.1—1.3 следует, что во всех пространствах $L_{p+} + \{\pm n\}$ ($n > 0$) и $L_{p+} + \{-\infty\}$ ($p > 1$) оператор $I - K$ является нетеровым, т. е. линейным нормально разрешимым оператором с конечной d -характеристикой $(x, 0)$ или $(0, -x)$. Индекс его в каждом из указанных пространств один и тот же, не зависит от n и равен x .

Транспонированный оператор $I - K^*$ обладает аналогичными свойствами, его индекс $x_* = -x$. Поэтому для оператора $I - K$ в любом из пространств $L_{p+} + \{\pm n\}$, $L_{p+} + \{-\infty\}$ ($p > 1$) справедливо утвержде-

ние, которое обычно называется третьей теоремой Нетера (см. [9], § 53 или [10], § 23): разность числа нулей оператора $I-K$ в этом пространстве и числа нулей оператора $I-K^*$ в том же пространстве равна индексу оператора $I-K$.

Нетеров оператор, обладающий этим свойством, будем называть нормальным нетеровым оператором* или, для краткости, просто нормальным оператором. Многие из распространенных нетеровых операторов (сингулярное интегральное уравнение с невырождающимся на контуре символом, системы таких уравнений, дискретный и матричный аналоги уравнения Винера-Хопфа; парное интегральное уравнение в свертках и др.) являются нормальными. Тем не менее ниже будет показано, что существуют нетеровы операторы, не обладающие свойством нормальности.

§ 2. Оператор $I-K$ в пространствах $E_+ \{-n\}$, $E_+ \{-\infty\}$. Вырожденный случай

Рассмотрим оператор $I-K_n$, действующий из $L_{p+} \{-n\}$ в $L_{p+} \{-n\}$. Если условия (2) выполняются, то он не является нетеровым. Ниже будет показано, что можно найти такое подпространство $DL_{p+} \{-n\}$ пространства $L_{p+} \{-n\}$, что оператор $I-K_n$, действующий из $L_{p+} \{-n\}$ в $DL_{p+} \{-n\}$, нетеров.

Определение. Пусть T —линейный оператор, действующий из банахова** пространства B_1 в банахово пространство B_2 . Пусть существует такой линейный оператор N , действующий из B_2 в B_1 , что оператор $\tilde{T} = NT$ нормален в пространстве B_1 . Тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует левый нормализатор N .

Если оператор N имеет линейный левый обратный, действующий из B_1 в B_2 , тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует левый равносильный нормализатор N .

Теорема 2.1. Пусть $k(t) \in L_1 \{-n\}$ ($n \geq 0$) и выполняются условия (2). Тогда найдется такое подпространство $DL_{p+} \{-n\}$ пространства $L_{p+} \{-n\}$, что оператор $I-K_n$, действующий из $L_{p+} \{-n\}$ в $DL_{p+} \{-n\}$ ($p \geq 1$), имеет в пространстве $L_{p+} \{-n\}$ левый равносильный нормализатор.

Доказательство. В частном случае, когда

$$1-K(x) = \frac{x-a_k}{x-i} (1-\tilde{K}(x)),$$

искомое пространство $DL_{p+} \{-n\}$ строится следующим образом.

Пусть оператор N_k определяется равенством

* Обращаем внимание на различие между нормальным нетеровым оператором и оператором нормально разрешимым.

** Или полного счетно-нормированного пространства.

$$N_k \psi \equiv \psi(t) + i(a_k - i) e^{-ia_k t} \int_t^{\infty} e^{ia_k s} \psi(s) ds, \quad t > 0, \quad (8)$$

где интеграл понимается в обычном смысле. Через $DL_{p+}\{-n\}$ обозначим пространство функций $\psi(t) \in L_{p+}\{-n\}$, для которых $N_k \psi$ существует и принадлежит $L_{p+}\{-n\}$. Если в пространстве $DL_{p+}\{-n\}$ ввести норму

$$\|\psi\|_{DL_{p+}\{-n\}} = \|N_k \psi\|_{L_{p+}\{-n\}},$$

то оператор N_k становится ограниченным оператором, действующим из $DL_{p+}\{-n\}$ в $L_{p+}\{-n\}$.

Покажем, что оператор N_k является левым равносильным нормализатором в $L_{p+}\{-n\}$ для оператора $I - K_n$.

Действительно, пусть $\varphi \in L_{p+}\{-n\}$. Так как $1 - K(x) = \left(1 + \frac{i - a_k}{x - i}\right)(1 - \tilde{K}(x))$, то оператор $I - K_n$ можно представить следующей форме:

$$(I - K_n) \varphi \equiv \tilde{\varphi}(t) + i(a_k - i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{t-s} \tilde{\varphi}(s) ds, \quad t > 0,$$

где

$$\tilde{\varphi}(t) = (I - \tilde{K}_n) \varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{K}(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

а

$$e^{t-s} = \begin{cases} 0, & t > s, \\ -e^{t-s}, & t < s. \end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\varphi}(t) \in L_{p+}\{-n\}$. Покажем, что $N_k(I - K_n) = I - K_n$. В самом деле

$$\begin{aligned} N_k(I - K_n) \varphi &\equiv (I - K_n) \varphi + i(a_k - i) e^{-ia_k t} \left[\int_t^{\infty} e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s) ds - \right. \\ &\quad \left. - i(a_k - i) \int_t^{\infty} e^{(ia_k + 1)s} ds \int_s^{\infty} e^{-\tau} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \right] = (I - K_n) \varphi + \\ &\quad + i(a_k - i) e^{-ia_k t} \int_t^{\infty} e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s) ds - \\ &\quad - \frac{[i(a_k - i)]^2 e^{-ia_k t}}{ia_k + 1} \left[\int_t^{\infty} e^{(ia_k + 1)s} ds \int_s^{\infty} e^{-\tau} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau + \int_t^{\infty} e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s) ds \right] = \\ &= (I - K_n) \varphi - i(a_k - i) \int_0^{\infty} e^{t-s} \tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{\tilde{\varphi}}(t), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Законность интегрирования по частям оправдывается тем, что функции $e^{i(a_k - t)}$ и $\int_s^\infty e^{-\tau} \bar{\varphi}(\tau) d\tau$ абсолютно непрерывны на любом отрезке $(0, N)$. Мы воспользовались также соотношением

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^s \int_s^\infty e^{-\tau} \bar{\varphi}(\tau) d\tau = 0.$$

Справедливость его становится очевидной, если учесть, что при $s > 0$ непрерывная функция

$$e^s \int_s^\infty e^{-\tau} \bar{\varphi}(\tau) d\tau = - \int_0^\infty e^{s-\tau} \bar{\varphi}(\tau) d\tau \in L_{p+} \{-n\}.$$

Если положить $\bar{K}(t) \equiv 0$, то из приведенных выше выкладок следует, что оператор $I - K_n$ с символом $1 - K(x) = \frac{x - a_k}{x - i}$ является правым обратным для оператора N_k . Так как $\|N_k \psi\| = \|\psi\|$, то у оператора N_k существует линейный левый обратный, который совпадает с указанным оператором $I - K_n$. Следовательно, пространство $DL_{p+} \{-n\}$ полно по введенной выше норме, а оператор N_k является левым равносильным нормализатором в пространстве $L_{p+} \{-n\}$ для оператора $I - K_n$.

В общих предположениях (2) подпространство $DL_{p+} \{-n\}$ определяется оператором

$$N = \prod_{k=1}^n (N_k)^{2k}, \quad (9)$$

где N_k — оператор вида (8). Элементами пространства $DL_{p+} \{-n\}$ являются функции $\psi \in L_{p+} \{-n\}$, удовлетворяющие требованию $N\psi \in L_{p+} \{-n\}$. Норма в пространстве $DL_{p+} \{-n\}$ вводится соотношением

$$\|\psi\|_{DL_{p+} \{-n\}} = \|N\psi\|_{L_{p+} \{-n\}}.$$

Сам же оператор N является левым равносильным нормализатором в пространстве $L_{p+} \{-n\}$ для оператора $I - K_n$.

Теорема доказана.

Оператор N вида (9), (8) можно рассматривать как ограниченный оператор, действующий в пространстве $E_+ \{-\infty\}$. Это следует из справедливости неравенств

$$\|N\varphi\|_k \leq \text{const} \|\varphi\|_{k+2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $\varphi \in E_+ \{-\infty\}$.

Поэтому для оператора $I - K_\infty$, действующего в пространстве $L_{p+} \{-\infty\}$ может быть сформулирован следующий аналог теоремы 2.1.

Теорема 2.2. Пусть $k(t) \in L_1 \{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Тогда оператор N вида (9), (8) является левым равносильным

нормализатором в пространстве $L_{p+} \{-\infty\}$ ($p > 1$) для операторов $I - K_*$.

Доказательство теоремы 2.2 в основных своих пунктах совпадает с приведенным выше доказательством теоремы 2.1.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что соотношение $N(I - K) = I - \tilde{K}$ выполняется не только в пространствах $L_{p+} \{-n\}$ ($n > 0$) или $L_{p+} \{-\infty\}$, но и в любом из пространств C^0_+ (при $n = 0$), $E_+ \{-n\}$ (при $n > 0$) или $E_+ \{-\infty\}$. При этом в каждом из указанных пространств уравнения $(I - K)\varphi = 0$ и $(I - \tilde{K})\tilde{\varphi} = 0$ имеют одинаковые решения.

Из теорем 2.1, 2.2 и теорем предыдущего параграфа вытекают ряд следствий о разрешимости уравнения (2) в пространствах $E_+ \{-n\}$ и $E_+ \{-\infty\}$.

Обозначим через $\tilde{x} = -\text{Ind } [1 - \tilde{K}(x)]$ индекс нормального оператора $I - \tilde{K}$, полученного путем левой равносильной нормализации оператора $I - K$.

Теорема 2.3. Пусть $k(t) \in L_1 \{-n\}$ ($n > 0$) или $L_1 \{-\infty\}$; выполняются условия (2). Тогда подпространство решений однородного уравнения (1) в классах L_{p+} ($p > 1$), C^0_+ (при $n = 0$), $E_+ \{-n\}$ (при $n > 0$), $E_+ \{-\infty\}$ конечномерно и при $\tilde{x} > 0$ имеет в качестве базиса систему функций вида (5). Если $\tilde{x} \leq 0$, то оно не имеет указанных классов решений, отличных от тривиального $\varphi \equiv 0$.

Вторым следствием теоремы 2.1 является критерий разрешимости неоднородного уравнения (1) в пространствах $E_+ \{-n\}$ ($n > 0$)*.

Теорема 2.4. Пусть $k(t) \in L_1 \{-n\}$ ($n > 0$) и выполняются условия (2). Для того чтобы неоднородное уравнение (1), идя $\psi(t) \in E_+ \{-n\}$ имело решение $\varphi(t) \in E_+ \{-n\}$ необходимы и достаточны следующие условия:

а) $\psi(t) \in DE_+ \{-n\}$,

б) если $\tilde{x} < 0$, то

$$\int_0^{\tilde{x}} N\psi(t)f_j(t) dt = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, |\tilde{x}|), \quad (10)$$

где оператор N имеет вид (9), (8), а $\{f_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, |\tilde{x}|$) — базис подпространства нулей оператора $I - K^*$, транспонированного нормализованному с $E_+ \{-n\}$ оператору $I - \tilde{K}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in E_+ \{-n\}$ — решение уравнения

* Здесь и всюду ниже в § 2 под $E_+ \{0\}$ понимаются лишь пространства L_{p+} ($p > 1$), C^0_+ .

(1). Очевидно $N(I-K)\varphi \in E_+ \{-n\}$, откуда следует необходимость условия а).

Пусть условие а) теоремы выполнено. Подействовав на уравнение (1) оператором N , получим равносильное нормальное уравнение $(I-\tilde{K})\varphi = N\psi$. Остается заметить, что по теореме 1.3 необходимые и достаточные условия разрешимости в $E_+ \{-n\}$ этого уравнения имеют вид (10).

В случае пространства $E_+ \{-\infty\}$ критерий разрешимости неоднородного уравнения (1) имеет более простую форму.

Теорема 2.5. Пусть $k(t) \in L_1 \{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Если $x \geq 0$, то неоднородное уравнение (1) разрешимо при любой правой части $\psi \in E_+ \{-\infty\}$. Для того чтобы оно имело решение $\varphi \in E_+ \{-\infty\}$ при $x < 0$ необходимо и достаточно выполнения условий (10).

§ 3. Оператор $I-K^*$ в пространствах $E_+ \{n\}$, $E_+ \{\infty\}$.

Вырожденный случай

Стремясь упростить форму изложения, будем рассматривать в классах, растущих на ∞ функций вместо оператора $I-K$ транспонированный ему оператор $I-K^*$, что принципиального значения не имеет.

Ввиду условий (2) характер вырождения символа оператора $I-K^*$ определяется следующим представлением:

$$1-K(-x) = \frac{A_+(x)}{(x+i)^{\alpha}} (1-\tilde{K}(-x)) \quad (-\infty \leq x \leq \infty),$$

где $A_+(x) = \prod_{k=1}^r (x+\alpha_k)^{\alpha_k}$. Очевидно $1-\tilde{K}(-x) \neq 0$ на всей вещественной оси $\tilde{\alpha}_+ = -I \operatorname{nd} [1-\tilde{K}(-x)] = I \operatorname{nd} [1-\tilde{K}(x)] = -\tilde{\alpha}_-$.

Введем понятие правого равносильного нормализатора.

Определение. Пусть T линейный оператор, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2 .

Пусть существует такой линейный оператор N , действующий из пространства B_2 в B_1 ($B_2 \subset B_1$), что оператор TN , определенный на элементах пространства B_2 , продолжим до нормального в B_1 оператора $\tilde{T}$. Тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует правый нормализатор N .

Если при этом у оператора N существует линейный правый обратный, действующий из B_1 в B_2 , тогда будем говорить, что оператор N является правым равносильным нормализатором в пространстве B_1 для оператора T .

Будем рассматривать оператор $I-K_n^*$ в пространстве $L_{p+} \{n\}$ ($p \geq 1$). Если условия (2) выполнены, то он не является нетеровым. Оператор $I-K_n^*$ допускает правую равносильную нормализацию в пространстве

$L_{p+}\{n\}$. Позже с использованием этого факта будет показано, как нужно сузить область значений оператора $I - K_n$, чтобы он стал нетеровым.

Теорема 3.1. Пусть $k(t) \in L_1\{-n\}$ ($n > 0$) и выполняются условия (2). Тогда найдется оператор N_k , действующий из некоторого подпространства $\tilde{L}_{p+}\{n\}$ пространства $L_{p+}\{n\}$ в $L_{p+}\{n\}$, являющийся правым равносильным нормализатором в пространстве $L_{p+}\{n\}$ для оператора $I - K_n$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2. Рассмотрим частный случай, когда

$$1 - K(-x) = \frac{x + a_k}{x + i} (1 - \tilde{K}(-x)) = \left(1 - \frac{i - a_k}{x + i}\right) (1 - \tilde{K}(-x)).$$

Будем относить к пространству $\tilde{L}_{p+}\{n\}$ те функции $\tilde{f} \in L_{p+}\{n\}$, для которых $N_k \tilde{f} \in L_{p+}\{n\}$, где

$$N_k \tilde{f} \equiv \tilde{f}(t) + i(a_k - i) e^{ia_k t} \int_0^t e^{-ia_k \tau} \tilde{f}(\tau) d\tau, \quad t > 0. \quad (11)$$

В пространстве $\tilde{L}_{p+}\{n\}$ можно ввести норму таким образом, чтобы оно стало банаховым*. Оператор N_k ограничен по введенной норме. Покажем, что оператор

$$(N_k)^{-1} f \equiv f(t) - i(a_k - i) \int_0^\infty e_+^{-t+s} f(s) ds, \quad t > 0, \quad (12)$$

где $e_+^{-t+s} \begin{cases} e^{-t+s}, & t > s, \\ 0, & t \leq s \end{cases}$ является линейным правым обратным для оператора N_k .

Пусть $f \in L_{p+}\{n\}$ ($p \geq 1$). Составим композицию $N_k (N_k)^{-1}$,

$$\begin{aligned} N_k (N_k)^{-1} f &\equiv f(t) - i(a_k - i) e^{-t} \int_0^t e^s f(s) ds + \\ &\quad + i(a_k - i) e^{ia_k t} \int_0^t e^{-ia_k \tau} f(\tau) d\tau - \\ &\quad - [i(a_k - i)]^2 e^{ia_k t} \int_0^t e^{-ia_k \tau} e^{-\tau} d\tau \int_0^\tau e^s f(s) ds = \\ &= f(t) - i(a_k - i) e^{-t} \int_0^t e^s f(s) ds + i(a_k - i) e^{ia_k t} \int_0^t e^{-ia_k \tau} f(\tau) d\tau + \end{aligned}$$

* Например, $\|f\|_{\tilde{L}_{p+}\{n\}} = \|N_k f\|_{L_{p+}\{n\}}$.

$$+ i(a_k - i)e^{ia_k t} \left[e^{-i(a_k - i)\tau} \int_0^\tau e^s f(s) ds \right]_{\tau=0}^t - \\ - i(a_k - i)e^{ia_k t} \int_0^t e^{-ia_k \tau} f(\tau) d\tau = f(t), t > 0.$$

Таким образом $N_k^* (N_k^*)^{-1} = I$. Оператор $(N_k^*)^{-1}$ является ограниченным, так как

$$\|(N_k^*)^{-1} f\|_{D_{L_{p+}\{n\}}} = \|N_k^* (N_k^*)^{-1} f\|_{L_{p+}\{n\}} = \|f\|_{L_{p+}\{n\}}.$$

С другой стороны, у оператора N_k^* существует линейный левый обратный, поэтому оператор (12) является обратным для оператора N_k^* .

Покажем, что оператор N_k^* , действующий из $\bar{L}_{p+}\{n\}$ в $L_{p+}\{n\}$, является правым равносильным нормализатором в $L_{p+}\{n\}$ для оператора $I - K_n^*$.

Для произвольной функции $f \in L_{p+}\{n\}$ оператор $I - K_n^*$ всегда можно представить в форме

$$(I - K_n^*) f = (I - \bar{K}_n^*) \left[f(t) - i(a_k - i) \int_0^\infty e_+^{-t+s} f(s) ds \right] = \\ = [I - \bar{K}_n^*] (N_k^*)^{-1} f,$$

где оператор Винера-Хопфа $I - K_n^*$ определяется ядром $\bar{K}(-t) \in L_1\{-n\}$. Но тогда для любой функции $\bar{f} \in \bar{L}_{p+}\{n\}$

$$(I - K_n^*) N_k^* \bar{f} = [I - \bar{K}_n^*] (N_k^*)^{-1} N_k^* \bar{f} = [I - \bar{K}_n^*] \bar{f}.$$

Оператор $I - \bar{K}_n^*$ имеет невырождающийся на вещественной оси символ и является поэтому нормальным оператором, действующим в $L_{p+}\{n\}$. Его можно рассматривать как продолжение оператора $(I - K_n^*) N_k^*$, определенного в $\bar{L}_{p+}\{n\}$, на все пространство $L_{p+}\{n\}$. Откуда и вытекают свойства равносильной нормализации оператора N_k^* .

Остается заметить, что в общем случае искомым оператор N^* имеет вид

$$N^* = \prod_{k=1}^r (N_k^*)^{a_k}, \quad (13)$$

где N_k^* — оператор, определенный равенством (11).

Теорема доказана.

Замечание 2. Легко видеть, что все выкладки, проделанные при доказательстве теоремы 3.1, верны не только тогда, когда

$f \in L_{p+}\{n\}$, но и для всех $f \in E_+\{n\}$ ($n \geq 0$)*. Таким образом, в условиях теоремы 3.1 могут быть сформулированы аналогичные результаты, касающиеся свойств оператора $I - K_n^*$ в любом из пространств $E_+\{n\}$ ($n \geq 0$).

Перейдем к непосредственному исследованию уравнения (7) в пространстве $E_+\{n\}$.

Теорема 3.2. Пусть $k(t) \in L_1\{-n\}$ ($n > 0$) и выполняются условия (2), где $\tilde{x} = -x_+ > 0$. Тогда однородное уравнение (7) ни в одном из пространств $E_+\{n\}$ не имеет решений, отличных от тривиального $f \equiv 0$.

При $\tilde{x}_+ < 0$ неоднородное уравнение (7), где $g \in E_+\{n\}$, разрешимо в пространстве $E_+\{n\}$ в том и только в том случае, если выполняются условия

$$a) N^*(I + \tilde{\Gamma}^*) g \in E_+\{n\};$$

$$b) \int_0^{\tilde{x}_+} g(s) \tilde{\varphi}_j(s) ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, |\tilde{x}_+|),$$

где N^* — оператор вида (13), (11); спектр $I + \tilde{\Gamma}^*$ определяется произвольной резольвентой $\tilde{\gamma}(t, s)$ нормального оператора $I - \tilde{K}_n$,

$$(I + \tilde{\Gamma}^*) g \equiv g(s) + \int_0^{\tilde{x}_+} \tilde{\gamma}(t, s) g(t) dt, \quad s > 0;$$

$\{\tilde{\varphi}_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, |\tilde{x}_+|$) — базис подпространства нулей в $E_+\{\pm n\}$ оператора $I - \tilde{K}_n$.

Если условия а), б) выполнены, то единственное решение уравнения (7) дается формулой

$$f = N^*(I + \tilde{\Gamma}^*) g. \quad (14)$$

Доказательство. Обратимся к нормальному уравнению

$$(I - \tilde{K}_n^*) \tilde{f} = g. \quad (15)$$

По теореме 1.3 однородное уравнение (15) ни в одном из пространств $E_+\{n\}$, а следовательно, и в $\tilde{E}_+\{n\} \subset E_+\{n\}$ ** не имеет нетривиальных решений. Поэтому $f \equiv 0$ — единственное решение в $E_+\{n\}$ однородного уравнения (7).

Условия б) доказываемой теоремы (см. условия (6) теоремы 1.3) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного урав-

* Здесь и всюду ниже в § 3 под $E_+\{0\}$ понимаются пространства $C_+ \subset M_+^C \subset M_+^u \subset M_+$.

** Пространства $\tilde{E}_+\{n\}$ вводятся подобно пространствам $\tilde{L}_{p+}\{n\}$.

нения (15) в пространстве $E_+ \{n\}$. Пусть они выполняются. Тогда единственное решение его $\tilde{f} \in E_+ \{n\}$ имеет вид $\tilde{f} = (I + \tilde{\Gamma}^*) g$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы $\tilde{f} \in E_+ \{n\}$ состоит теперь в том, чтобы $N^*(I + \tilde{\Gamma}^*) g \in E_+ \{n\}$. При выполнении последнего единственное решение $f = N^* \tilde{f}$ неоднородного уравнения (7) имеет вид (14). Теорема доказана.

В случае оператора $I - K_-^*$ имеет место следующая

Теорема 3.3. Пусть $k(t) \in L_1 \{-\infty\}$ и выполняются условия (2), где $\tilde{\kappa}_- = -\kappa_- > 0$. Тогда ни в одном из пространств $E_+ \{\infty\}$ неоднородное уравнение (7) не имеет нетривиальных решений.

Если $\tilde{\kappa}_- < 0$, то неоднородное уравнение (7) разрешимо для тех и только тех правых частей $g \in E_+ \{\infty\}$, которые ортогональны подпространству нулей в $E_+ \{\infty\}$ оператора $I - K_-^*$.

Оператор N^* вида (13), (11) является ограниченным в пространстве $E_+ \{\infty\}$, так как элементарный нормализатор N_k^* переводит функции из пространства $E_+ \{n\} = M_+ \{n\}$, $L_{p+} \{n\}$ ($p > 1$) в элементы пространства $E_+ \{n+1\}$. В случае пространства $M_+ \{n\}$ этот факт вытекает из обычных простейших оценок. Если же $E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\}$ ($p > 1$), то он является следствием свойств интеграла Харди-Литтльвуда ([11], § 9.9).

Поэтому какова бы ни была резольвента нормального оператора $I - K_-^*$ условия а) теоремы 3.2 выполняются автоматически для любой правой части $g \in E_+ \{\infty\}$ уравнения (7).

Прежде чем перейти к случаю $\tilde{\kappa}_- > 0$ введем ряд обозначений.

Пусть $\mu = \max_{1 \leq k \leq r} \alpha_k$, тогда

$$\mu^E = \begin{cases} \mu + 1 & \text{для } E_+ \{n\} = L_+ \{n\}, \\ \mu & \text{для } E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\} \quad (p > 1), \quad C_+^* \{n\}, \\ \mu - 1 & \text{для остальных } E_+ \{n\}. \end{cases}$$

Под $\vartheta_k^E(n)$ ($k = 1, 2, \dots, r$) будем понимать следующие целочисленные функции аргумента $n > 0$: для $E_+ \{n\} = L_+ \{n\}$

$$\vartheta_k^E(n) = \begin{cases} \alpha_k - n + 1, & \text{если } \alpha_k - n + 1 > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_k - n + 1 \leq 0, \end{cases}$$

для $E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\}$ ($p > 1$), $C_+^* \{n\}$

$$\vartheta_k^E(n) = \begin{cases} \alpha_k - n, & \text{если } \alpha_k - n > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_k - n \leq 0, \end{cases}$$

для остальных пространств $E_+ \{n\}$

$$\vartheta_k^E(n) = \begin{cases} \alpha_k - n - 1, & \text{если } \alpha_k - n - 1 > 0, \\ 0, & \text{если } \alpha_k - n - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Наконец, через $\vartheta^E(n)$ обозначим $\vartheta^E(n) = \sum_{k=1}^r \vartheta_k^E(n)$.

Теорема 3.4. Пусть $k(t) \in L_1\{-n\}$ ($n \geq 0$) и выполняются условия (2), где $\tilde{x} = -\tilde{x}_r < 0$. Тогда при $\mu^E \leq n$ подпространство решений в $E_+\{n\}$ однородного уравнения (7) $\tilde{x}_r$ -мерно. В противном случае ($\mu^E > n$) размерность указанного подпространства равна

$$\begin{cases} \tilde{x}_r - \vartheta^E(n), & \text{если } \tilde{x}_r - \vartheta^E(n) > 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_r - \vartheta^E(n) \leq 0. \end{cases}$$

Если $\tilde{x}_r \geq 0$, то неоднородное уравнение (7) разрешимо в пространстве $E_+\{n\}$, когда свободный член его g удовлетворяет условию $N^c(I + \Gamma^c)g \in E_+\{n\}$, где оператор $I + \Gamma^c$ определяется любой резольвентой ядра $\tilde{k}(-t) \in L_1\{-n\}$, порождающего нормальный оператор $I - \tilde{K}_n^c$.

Доказательство. Пусть $g \equiv 0$, тогда уравнение (15) имеет в пространстве $E_+\{n\}$ $\tilde{x}_r$ линейно независимых решений. Его общее решение $\tilde{f}$ можно представить в форме $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{\tilde{x}_r} c_j \varphi_j$, где $\{\varphi_j\}$ ($j=1, 2, \dots, \tilde{x}_r$) — функции вида (5), а c_j — произвольные постоянные.

Условие $N^c \tilde{f} \in E_+\{n\}$ определяет принадлежность решения $\tilde{f}$ однородного уравнения (15) пространству $\tilde{E}_+\{n\}$. Можно показать, что

требование $N^c \left(\sum_{j=1}^{\tilde{x}_r} c_j \varphi_j \right) \in E_+\{n\}$ равносильно условию

$$N^c \left(\sum_{j=1}^{\tilde{x}_r} c_j \varphi_j \right) \in E_+\{n\}, \text{ где } \tilde{\varphi}_j(t) = t^{j-1} e^{-t}, t > 0 \quad (j=1, 2, \dots, \tilde{x}_r).$$

Пусть $f_{lk}(t) = t^{l-1} e^{lakt}$, $t > 0$, ($l=1, 2, \dots; 1 \leq k \leq r$).

Предполагая, что $1 \leq m, k \leq r$ ($m \neq k$), $1 \leq j \leq \tilde{x}_r$, $p > 1$, укажем следующие легко проверяемые свойства оператора N^c :

$$a) N^c \tilde{f}_j \equiv \sum_{s=1}^j A_s \tilde{\varphi}_s + B_{lk} f_{lk} \in M_+\{0\} \cap L_{p+}\{1\} \cap L_+\{2\}; \cap C^0_+\{1\};$$

$$6) (N_k^*)^{a_k} \bar{\varphi}_j \equiv \sum_{s=1}^j C_s \bar{\varphi}_s + \sum_{l=1}^{a_k} D_{lk} f_{lk} \in M_+ \{a_k - 1\} \cap L_{p+} \{a_k\} \cap L_+ \{a_k + 1\} \cap C_+^0 \{a_k\};$$

$$в) N_m^* N_k^* \bar{\varphi}_j \equiv \sum_{s=1}^j F_s \bar{\varphi}_s + H_{1m} f_{1m} + H_{1k} f_{1k} \in M_+ \{0\} \cap L_{p+} \{1\} \cap L_+ \{2\} \cap C_+^0 \{1\};$$

$$г) N_m^* (N_k^*)^{a_k} \bar{\varphi}_j \equiv \sum_{s=1}^j G_s \bar{\varphi}_s + \sum_{l=1}^{a_k} R_{lk} f_{lk} + R_{lm} f_{1m} \in M_+ \{a_k - 1\} \cap L_{p+} \{a_k\} \cap L_+ \{a_k + 1\} \cap C_+^0 \{a_k\},$$

где постоянные A, B, C, D, F, G, H, R могут быть определены полнотой.

Из этих свойств вытекает, что

$$N^* \bar{\varphi}_j \equiv \sum_{s=1}^j U_{js} \bar{\varphi}_s + \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{a_k} V_{lk} f_{lk} \in E_+ \{\mu^E\}.$$

Повторю

$$N^* \left(\sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j \bar{\varphi}_j \right) \equiv \sum_{s=1}^{\bar{x}_r} U_s \bar{\varphi}_s + \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{a_k} V_{lk} f_{lk} \in E_+ \{\mu^E\},$$

где

$$U_s = \sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j U_{js}, \quad V_{lk} = \sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j V_{lk}.$$

Пусть теперь $n \geq \mu^E$ и, следовательно, $E_+ \{\mu^E\} \subset E_+ \{n\}$. Тогда

$N^* \left(\sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j \bar{\varphi}_j \right) \in E_+ \{n\}$ для произвольных постоянных c_j ($j = 1, 2, \dots, \bar{x}_r$). Поэтому однородное уравнение (15) имеет в $\bar{E}_+ \{n\}$ $\bar{x}_r$ -мерное подпространство решений. Откуда следует, что однородное уравнение (7)

имеет в пространстве $E_+ \{n\}$ $\bar{x}_r$ линейно независимых решений вида

$N^* \bar{\varphi}_j$ ($j = 1, 2, \dots, \bar{x}_r$).

Если $n < \mu^E$, то необходимые и достаточные условия того, чтобы

$N^* \left(\sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j \bar{\varphi}_j \right) \in E_+ \{n\}$ состоят в том, чтобы $V_{lk} = \sum_{j=1}^{\bar{x}_r} c_j V_{lk} = 0$ для всех

$$l \geq \begin{cases} n, & \text{если } E_+ \{n\} = L_+ \{n\}, \\ n+1, & \text{если } E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\} \ (p > 1), \ C_+ \{n\}, \\ n+2, & \text{для всех остальных } E_+ \{n\}, \end{cases}$$

или, что одно и то же, для всех $1 \leq k \leq r$, для которых $\vartheta_k^E(n) > 0$. Количество этих независимых друг от друга условий равно $\vartheta^E(n)$.

Таким образом, если $\tilde{x}_+ > 0^E(n)$, то размерность подпространства решений в $E_+\{n\}$ однородного уравнения (15), а вместе с тем и размерность подпространства нулей в $E_+\{n\}$ оператора $I - K_n^+$ равна $\tilde{x}_+ - 0^E(n)$. В противном случае ($\tilde{x}_+ \leq 0^E(n)$) оператор $I - K_n^+$ не имеет в пространстве $E_+\{n\}$ нулей, отличных от тривиального $f \equiv 0$.

Неоднородное уравнение (15) разрешимо при любой правой части $g \in E_+\{n\}$, его частное решение имеет вид $\tilde{f} = (I + \tilde{\Gamma}_n^+) g$.

Отсюда следует, что достаточным условием разрешимости $E_+\{n\}$ неоднородного уравнения (7) является требование $N^+(I + \tilde{\Gamma}_n^+) g \in E_+\{n\}$ для любой резольвенты оператора $I - K_n^+$.

Теорема доказана.

Наконец сформулируем аналог теоремы 3.4 для оператора $I - K_n^+$.

Теорема 3.5. Пусть $k(t) \in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия

(2), где $\tilde{x} = -\tilde{x}_+ \leq 0$. Тогда в любом из пространств $E_+\{\infty\}$ неоднородное уравнение (7) разрешимо при любой правой части $g \in E_+\{\infty\}$, а однородное уравнение имеет $\tilde{x}_+$ линейно независимых решений, одинаковых в каждом из пространств $E_+\{\infty\}$.

Более подробно с характером решений однородного уравнения (7) можно познакомиться в работе [12], § 3.

§ 4. О классах нормальной разрешимости оператора $I - K$ в вырожденном случае

Рассмотрим оператор $I - K_n^+$, действующий в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ ($p > 1$), и покажем, что он нетеров.

Действительно, если $\tilde{x} < 0$ и, следовательно, $\tilde{x}_+ = -\tilde{x} > 0$, то функции $N^+\psi_j \in E_+\{-\infty\}$ ($j = 1, 2, \dots, \tilde{x}_+$) образуют $\tilde{x}_+$ -мерный базис подпространства нулей в $E_+\{\infty\}$ транспонированного оператора $I - K_n^+$. Если теперь учесть, что для любой функции

$$\psi(t) \in L_{p+}\{-\infty\} \quad (p \geq 1) \quad \int_0^\infty N \psi(t) \varphi_j(t) dt = \int_0^\infty \psi(t) N^+ \psi_j(t) dt,$$

то ясно, что условия (10) являются условиями нормальной разрешимости оператора $I - K_n^+$ в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ ($p > 1$). Так как оператор $I - K_n^+$ имеет при этом конечную d -характеристику вида $(\tilde{x}, 0)$ или $(0, -\tilde{x})$, то верна следующая

Теорема 4.1. Пусть $k(t) \in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Тогда оператор $I - K_n^+$, действующий в $L_{p+}\{-\infty\}$ ($p > 1$), яв-

является нормально разрешимым. Индекс его в этом пространстве конечен и совпадает с индексом $\tilde{\kappa} = -\text{Ind } [1 - \tilde{K}(x)]$ нормального оператора $I - \tilde{K}$, полученного путем левой равносильной нормализации в $L_{p+} \{-\infty\}$ оператора $I - K_{\infty}$.

Перейдем к рассмотрению оператора $I - K_n$ ($n > 0$). Ниже будет показано, что если в качестве области его определения взять пространство $L_{p+} \{-n\}$ ($p \geq 1$), а в качестве области значений — пространство $DL_{p+} \{-n\}$, то он также становится нетеровым.

Сопряженный оператор $(I - K_n)^*$ действует из пространства $(DL_{p+} \{-n\})^*$ в пространство $L_{p+}^* \{-n\} = L_{q+} \{n\}$ ($p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$); если $p = 1$, то $L_{p+}^* \{-n\} = M_+ \{n\}$.

Структуру пространства $(DL_{p+} \{-n\})^*$ описывает

Теорема 4.2. Любой линейный ограниченный функционал f над пространством $DL_{p+} \{-n\}$ ($p \geq 1$) может быть представлен в виде

$$(f, \varphi) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(t) N\varphi(t) dt,$$

где $\varphi \in DL_{p+} \{-n\}$, а $\tilde{f} \in L_{p+}^* \{-n\}$.

Доказательство. С помощью оператора N , определенного в пространстве $DL_{p+} \{-n\}$, установим взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $DL_{p+} \{-n\}$ и элементами $\psi = N\varphi \in L_{p+} \{-n\}$, совокупность которых обозначим через E . Ввиду того, что $\|\psi\|_{L_{p+} \{-n\}} = \|\varphi\|_{DL_{p+} \{-n\}}$, пространство $DL_{p+} \{-n\}$ изоморфно линейному замкнутому в $L_{p+} \{-n\}$ множеству E .

Любой линейный функционал f над пространством $DL_{p+} \{-n\}$ порождает линейный функционал $\tilde{f}$ над подпространством E , ограниченный по норме $L_{p+} \{-n\}$,

$$(f, \varphi) = (\tilde{f}, \psi), \text{ где } \psi \in E,$$

$$|(\tilde{f}, \psi)| = |(f, \varphi)| \leq c \|\varphi\|_{DL_{p+} \{-n\}} = c \|\psi\|_{L_{p+} \{-n\}}.$$

По теореме Хана-Банаха функционал $\tilde{f}$ можно продолжить на все пространство $L_{p+} \{-n\}$.

Общий вид линейного функционала над пространством $L_{p+} \{-n\}$ дается формулой

$$(\tilde{f}, \tilde{\psi}) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(t) \tilde{\psi}(t) dt, \text{ где } \tilde{\psi} \in L_{p+} \{-n\}, \tilde{f} \in L_{p+}^* \{-n\}.$$

В частности для элементов $\psi \in E \subset L_{p+} \{-n\}$

$$(\tilde{f}, \psi) = (f, \varphi) = \int_0^{\infty} \tilde{f}(t) N\varphi(t) dt.$$

Теорема доказана.

Покажем, что если $\tilde{\kappa} < 0$, то подпространство нулей в $(DL_{p+}[-n])^*$ у оператора $(I - K_n)^*$ $\tilde{\kappa}_\tau$ -мерно ($\tilde{\kappa}_\tau = -\tilde{\kappa}$). Базисом этого подпространства является следующая система функционалов:

$(f_j, \varphi) = (\tilde{f}_j, N\varphi)$ ($j=1, 2, \dots, \tilde{\kappa}_\tau$), где $\varphi \in DL_{p+}[-n]$, а $\{\tilde{f}_j\}$ ($j=1, 2, \dots, \tilde{\kappa}_\tau$) — базис подпространства нулей в $L_{p+}^*[-n]$ нормального оператора $I - \tilde{K}_n$.

В самом деле, ввиду теорем 4.2 и 2.1 уравнение

$$((I - K_n)^* f, \psi) = (f, (I - K_n) \psi) = 0$$

можно записать в следующей равносильной форме:

$$(f, (I - K_n) \psi) = (\tilde{f}, N(I - K_n) \psi) = (\tilde{f}, (I - \tilde{K}_n) \psi) = ((I - \tilde{K}_n) \tilde{f}, \psi),$$

где $\psi \in L_{p+}[-n]$, $\tilde{f} \in L_{p+}^*[-n]$.

При этом мы воспользовались формулой

$$\int_0^\infty \tilde{f}(x) \int_0^\infty \tilde{K}(x-t) \psi(t) dt dx = \int_0^\infty \psi(t) \int_0^\infty \tilde{K}(x-t) \tilde{f}(x) dx dt.$$

Таким образом, вопрос об отыскании нулей в $(DL_{p+}[-n])^*$ оператора $(I - K_n)^*$ сведен к вопросу о подпространстве нулей в $L_{p+}^*[-n]$ нормального оператора $I - \tilde{K}_n$. Обозначим через $\{\tilde{f}_j\}$ ($j=1, 2, \dots, \tilde{\kappa}_\tau$) базис указанного подпространства. Тогда функционалы

$$(f_j, \varphi) = (\tilde{f}_j, N\varphi) \quad (j=1, 2, \dots, \tilde{\kappa}_\tau)$$

образуют базис искомого подпространства нулей оператора $(I - K_n)^*$.

Теперь можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.3. Пусть $k(t) \in L_1[-n]$ ($n \geq 0$) и выполняются условия (2). Тогда оператор $I - K_n$, действующий из $L_{p+}[-n]$ в $DL_{p+}[-n]$ ($p > 1$) является нормально разрешимым. Индекс его в этом пространстве совпадает с индексом $\tilde{\kappa} = -\text{Ind}[1 - \tilde{K}(x)]$ нормального оператора $I - \tilde{K}_n$, полученного путем левой равносильной нормализации в $L_{p+}[-n]$ оператора $I - K_n$.

Обозначим через $DL_{p+}[n]$ ($n > 0$) пространство функций g , удовлетворяющих условию $N^*(I + \tilde{\Gamma}^*) g \in L_{p+}[n]$, полное по норме

$$\|g\|_{DL_{p+}[n]} = \|N^*(I + \tilde{\Gamma}^*) g\|_{L_{p+}[n]} + \|g\|_{L_{p+}[n]}.$$

Рассмотрим теперь оператор $I - K_n^*$ ($n > 0$) с пространствами $L_{p+}[n]$ и $DL_{p+}[n]$ в качестве областей определения и значений соответственно. Покажем, что при $\tilde{\kappa}_\tau \leq 0$ оператор $I - K_n^*$ тоже нетеров.

Для этого достаточно убедиться, что в случае, когда $\tilde{\kappa}_\tau < 0$, сопряженный оператор $(I - K_n)^*$ имеет в пространстве $(DL_{p+}[n])^*$ подпро-

пространство решений, совпадающее с подпространством нулей в $E_+ | -n |$ оператора $I - \bar{K}_n$. Тогда условия (в) теоремы 3.2 являются условиями нормальной разрешимости оператора $I - \bar{K}_n$.

Оператор $(I - \bar{K}_n)^*$ действует из пространства $(DL_{p+} | n |)^*$ в пространство $L_{p+}^* | n |$. Структуру пространства $(DL_{p+} | n |)^*$ описывает

Теорема 4.4. *Любой линейный ограниченный функционал над пространством $DL_{p+} | n |$ ($p \geq 1$) может быть представлен в виде*

$$(\psi, g) = \int_0^{\infty} \tilde{\psi}(t) N^{\sim} (I + \tilde{\Gamma}^{\sim}) g(t) dt, \quad (16)$$

где $g \in DL_{p+} | n |$, а $\tilde{\psi} \in L_{p+}^* | n | = L_{q+} | -n |$ ($p > 1$, $q = \frac{p}{p-1}$) или $M_+ | -n |$ ($p = 1$).

Доказательство теоремы 4.4 существенно не отличается от доказательства теоремы 4.2.

Ввиду теоремы 4.4 однородное уравнение $(I - \bar{K}_n)^* \psi = 0$ можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$((I - \bar{K}_n)^* \psi, h) = (\psi, (I - \bar{K}_n) h) = (\tilde{\psi}, N^{\sim} (I + \tilde{\Gamma}^{\sim}) (I - \bar{K}_n) h) = 0, \quad (17)$$

где $h \in L_{p+} | n |$, $\tilde{\psi} \in L_{p+}^* | n |$.

Рассмотрим уравнение

$$N^{\sim} (I + \tilde{\Gamma}^{\sim}) (I - \bar{K}_n) h = h_1. \quad (18)$$

Оператор, стоящий в его левой части, в $L_{p+} | n |$ ограничен. Пусть $h_1 \in L_{p+} | n |$. По предположению $\tilde{\kappa}_n < 0$ и, следовательно, оператор $I - \bar{K}_n$ не имеет в $L_{p+} | n |$ нулей, отличных от тривиального. Поэтому уравнение (18) равносильно уравнению

$$(I - \bar{K}_n) h = (I - \bar{K}_n) h_1 = g.$$

Последнее уравнение разрешимо для тех и только тех функций $g \in DL_{p+} | n |$ (тех и только тех функций $h_1 \in L_{p+} | n |$), которые удовлетворяют следующим условиям (теорема 3.2):

$$(\tilde{\psi}_j, g) = (\tilde{\psi}_j, (I - \bar{K}_n) h_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, |\tilde{\kappa}_n|). \quad (19)$$

Здесь $\{\tilde{\psi}_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, |\tilde{\kappa}_n|$) — базис указанного выше подпространства нулей оператора $I - \bar{K}_n$.

При выполнении условий (19) единственное в $L_{p+} | n |$ решение уравнения (18) имеет вид

$$h = N^{\sim} (I + \tilde{\Gamma}^{\sim}) (I - \bar{K}_n) h_1.$$

Найдем общее решение $\tilde{\psi} \in L_{p+}^* | n |$ уравнения (17). Подставляя найденное для h выражение в уравнение (17), получим, что $(\tilde{\psi}, h_1) = 0$. При

этом найденное решение определено лишь на тех основных функциях $h_1 \in L_{p+}[n]$, которые удовлетворяют условиям (19).

Воспользовавшись идеей, предложенной в [13], продолжим функционал $\tilde{\psi}$ на все пространство $L_{p+}[n]$ следующим способом:

$$(\tilde{\psi}, h) = (\tilde{\psi}, h_1) + \sum_{k=1}^{|\tilde{x}_-|} c_k (\tilde{\psi}_k, (I - K_n^c) h).$$

Указанное продолжение единственно с точностью до выбора постоянных c_k ($k = 1, 2, \dots, |\tilde{x}_-|$).

Возвращаясь к уравнению $(I - K_n^c)^* \psi = 0$, получим, что его общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} (\psi, g) &= (\tilde{\psi}, N^c(I + \tilde{\Gamma}^c)g) = \sum_{k=1}^{|\tilde{x}_-|} c_k (\tilde{\psi}_k, (I - K_n^c)N^c(I + \tilde{\Gamma}^c)g) = \\ &= \sum_{k=1}^{|\tilde{x}_-|} c_k (\tilde{\psi}_k, g). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4.5. Пусть $k(t) \in L_1[-n]$ ($n > 0$) и выполняются условия (2). Тогда при $\tilde{x}_- \leq 0$ оператор $I - K_n^c$, действующий из $L_{p+}[n]$ в $DL_{p+}[n]$ ($p > 1$), является нормально разрешимым. Он имеет конечную d-характеристику* вида $(\tilde{x}_- - \vartheta^E(n)), (0, 0)$ или $(0, -\tilde{x}_-)$. Индекс его определяется по следующему правилу, он равен

$$\begin{cases} \tilde{x}_- - \vartheta^E(n), & \text{если } \tilde{x}_- > \vartheta^E(n), \\ 0, & \text{если } 0 \leq \tilde{x}_- \leq \vartheta^E(n), \\ -\tilde{x}_-, & \text{если } \tilde{x}_- < 0, \end{cases}$$

где через $\tilde{x}_- = -\text{Ind}[1 - \tilde{K}(-x)]$ обозначен индекс нормального оператора $I - \tilde{K}_n^c$, полученного путем правой равносильной нормализации в $L_{p+}[n]$ оператора $I - K_n^c$.

Легко видеть, что ни один из операторов $I - K_x$, $I - K_n$, $I - K_n^c$ не является нормальным нетеровым. Так, например, размерность подпространства нулей в $L_{p+}[-\infty]$ оператора $I - K_x^c$ равна в случае $\tilde{x} < 0$

$$\begin{cases} \tilde{x}_- - \alpha, & \text{если } \tilde{x}_- - \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_- - \alpha \leq 0. \end{cases}$$

* См. § 3, теорему 3.4.

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ

ՎԻՆԵՐ-ՀՈՊԳԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԸ ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ
ԱՍՏԻՃԱՆԱՑԻՆ ՎԱՐՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Վերը նշված ծալքի տիպի օպերատորը ուսումնասիրվում է $(t+i)^{\pm n} f(t)$ տեսքի ֆունկցիաների դասերում, որտեղ $n \geq 0$ — ամբողջ թիվ է, իսկ $f(t)$ -ն պատկանում է L_p , $1 \leq p \leq \infty$ տարածությանը, կամ սահմանափակ ֆունկցիաների M տարածության բնական ենթատարածություններին:

Ենթադրվում է, որ օպերատորի սիմվոլը ամբողջ աստիճանի զերո է դառնում կոնտուրի վերջավոր թվով կետերում:

Նշված են տարածություններ, որոնց մեջ դիտարկվող օպերատորը բավարարում է նետերի տեսությանը, հաշված է նրա ինդեքսը, կառուցված է սեղումները:

V. B. DYBIN

WIENER-HOPF INTEGRAL OPERATOR IN THE CLASSES OF FUNCTIONS WITH POWER BEHAVIOUR AT INFINITY

S u m m a r y

The operator mentioned in the heading is assumed to be of convolution type and is investigated in the classes of functions of the form $(t+i)^{\pm n} f(t)$, where $n \geq 0$ is an integer and $f(t)$ belongs to the space L_p , $1 \leq p \leq \infty$, or to certain other natural subspaces of the space M of essentially bounded functions.

The symbol of the operator is supposed to be equal zero only in finite number of points on the contour.

The spaces where the operator considered satisfies Noether's theory, are pointed out its index is counted up and the resolvent is constructed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, № 5, (83), 1958, 3—120.
2. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. мат., 20, № 1, 1956, 3—52.
3. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Мат. сб., 14 (56), №№ 1—2, 1944, 3—50.
4. Ф. Д. Гахов, В. И. Смагина. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки и уравнения перзого рода, Изв. АН СССР, сер. мат., 26, № 3, 1962, 361—390.
5. Ю. И. Черский. Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения, автореферат диссертации, Тбилиси, 1964.
6. С. Г. Самко. Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, ДУ, 1, № 8 (1965), 1108—1116.

7. Г. Н. Чеботарев. О кольцах функций, интегрируемых с весом, Изв. вузов, Математика, № 5 (36), (1963), 133—145.
8. Ф. Д. Беркович. Об одном интегральном уравнении на полуоси, Изв. вузов, Математика, № 1 (50), (1966), 3—14.
9. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, М. (1962).
10. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, М. (1963).
11. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Полиа. Неравенства, М. (1948).
12. В. Б. Дыбин, Н. К. Карапетянц. Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций, СМЖ, VII, № 3 (1966), 531—545.
13. В. С. Розожин. Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, ДАН СССР, 164, № 2 (1965), 277—280.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

Վ. Ա. Պետրով. Ֆատուի թեորեմի անալոգները բազմանալիտիկ ֆունկցիաների համար	211
Ա. Դ. Գյումիսարյան. Ընդհանուր խզվող եզրային խնդիրներ պարամետրից կախված երկրորդ կարգի էլիպտիկ հավասարումների համար	218
Գ. Դ. Գևորգյան. $B_\alpha(z)$ արտադրյալների զուգամիտ հանրահանությունների մասին	235
Վ. Ռ. Դիբին. Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ օպերատորը անվերջոթյունում աստիճանային վարք ունեցող ֆունկցիաների դասերում	250

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В. А. Петров. Аналоги теоремы Фату для полианалитических функций	211
А. Г. Гюльмисарян. Общие разрывные граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка с параметром	218
Г. Г. Геворкян. О сходящихся последовательностях произведений $B_\alpha(z)$	235
В. Б. Дыбин. Интегральный оператор Виенера-Хопфа в классах функций со степенным характером поведения на бесконечности	250

C O N T E N T S

V. A. Petrov. Fatou type theorems for polyanalytic functions	211
A. G. Gulmisharian. General discontinuous boundary value problems for elliptic equations of the second order with parameter	218
G. G. Gevorgian. On the convergent sequences of $B_\alpha(z)$ type products	235
V. B. Dybin. Viener-Hopf integral operator in the classes of functions with power behaviour at infinity	250