ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր՝ Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ի. Դ. ՋԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

Ի ԴԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ЦЕНА 30 К. ИНДЕКС 77735

EDITORIAL BOARD

Editor in chief M. M. DŽRBAŠIAN

R. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKIĬ

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and nam the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 3, 1967 Математика

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ

О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Будем обозначать буквами x, y, $\cdots$ точки $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $\cdots$ евклидова пространства E_n, $n\geqslant 2$, $|x|=(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2)^{1/2}$. В случае плоскости E_2 будем пользоваться комплексным переменным $z=x_1+ix_2$. Через $s_n(r)=\{x;\ |x|=r\}$, $r>0$ обозначаем сферу радиуса r с центром в начале координат O, $\sigma_n(r)=\dfrac{\pi^{n/2}n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^{n-1}$ — площадь этой сферы, $\sigma_n(1)=\sigma_n$.

Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в окрестности начала координат O. Хорошо известна теорема Ф. Рисса о том, что среднее значение этой функции по площади сферы

$$I(r;\ u)=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{s_n(r)} u(x)\,d\sigma_n \tag{1}$$

является неубывающей функцией от r, выпуклой относительно $\log r$ при $n=2$ или относительно $1/r^{n-2}$ при $n>2$ (см. [1], стр. 40). В работах Дингхаса (см. [2], где указана дальнейшая литература) изучались свойства выпуклости средних значений вида

$$F(r;\ u^p)=\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{s_n(r)} u^p(x)\,d\sigma_n\right\}^{1/p},\quad p\geqslant 1 \tag{2}$$

и аналогичных средних, для составления которых вместо степенной функции $\lambda(t)=t^p$, $p\geqslant 1$, используется функция $\lambda(t)=e^{at}$, $a>0$. Для случая функций $u(x)$, субгармонических в полупространстве $E_n^+=\{x;\ x_1>0\}$, братьями Ф. и Р. Неванлинна [3] и Л. Альфорсом [4] были введены в рассмотрение средние специального вида, взятые по полусфере и также обладающие некоторыми свойствами выпуклости. Эти результаты также были обобщены Дингхасом [2].

В настоящей работе мы рассматриваем для субгармонических функций $u(x)$ средние значения более общего вида

$$F(r;\ \lambda(u))=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{s_n^{(r)}}\lambda(u(x))\,d\sigma_n\right\}, \tag{3}$$

где $\lambda(t)$ —некоторая возрастающая выпуклая функция от t, λ^{-1}—ей обратная. При этом свойства средних для функций $\lambda(t)=t^p$, $p\geqslant 1$ и $\lambda(t)=e^{at}$, $a>0$ получаются как частные случаи общих теорем.

Применяемые методы позволяют не только изучить средние общего вида с использованием выпуклой функции $\lambda(t)$ для случая субгармонических функций в полупространстве E_n^+, но и в случае угловых областей при $n=2$ или конических областей при $n>2$.

§ 1. Средние значения функций, субгармонических в шаре

Пусть $u(x)$—субгармоническая функция в шаре $D=\{x;\ |x|<1\}$ пространства E_n. В этом параграфе рассматриваются средние значения вида

$$F(r;\lambda(u))=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n^{(r)}}\lambda(u((x))\,d\sigma_n\right\} \tag{1.1}$$

как функции от радиуса сферы $S_n(r)$, составленные при помощи некоторой функции $\lambda=\lambda(t)$. Естественно считать функцию $\lambda(t)$ определенной для всех t из области значений $u(x)$, (строго) возрастающей и выпуклой относительно t. Для выпуклых функций $\lambda(t)$ сложная функция $\lambda(u(x))$ также является субгармонической и, следовательно, как уже упоминалось во введении, среднее значение

$$m(r;\lambda(u))=\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n^{(r)}}\lambda(u(x))\,d\sigma_n \tag{1.2}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\log r$ при $n=2$ или $1/r^{n-2}$ при $n>2$, (см. [1], стр. 40).

Здесь и всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем предполагать эти условия на $\lambda(t)$ выполненными. Кроме того, мы ограничиваемся случаем, когда $\lambda(t)$ необходимое число раз непрерывно дифференцируема.

Поскольку в практически интересных случаях функции $\lambda(t)$ выпуклы чаще всего только при $t>0$, целесообразно ограничиться рассмотрением средних для субгармонической функции $u^+(x)$ ($u^+=u$, если $u\geqslant 0$ и $u^+=0$, если $u<0$). В этом случае мы всегда предполагаем функцию $\lambda(t)$ неотрицательной при $t\geqslant 0$, $\lambda'(t)>0$ и $\lambda''(t)>0$ при $t>0$. Подобно тому, как это делается при выводе обобщенного неравенства Минковского (см. [5], стр. 107—110), мы вынуждены потребовать, кроме того, чтобы выражение $\varphi(\tau)=\dfrac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))}$ было вогнутой функцией от τ для всех $\tau=\lambda(t)$, $t>0$. Если функция $\lambda(t)$ имеет непрерывную производную $\lambda^{IV}(t)$, то из тождества $\dfrac{d\varphi}{d\tau}=\dfrac{d}{dt}\dfrac{\lambda'(t)}{\lambda''(t)}+1$ видно, что равносильными требованиями являются вогнутость функции $\dfrac{\lambda'(t)}{\lambda''(t)}$ относительно t или возрастание функции $\dfrac{\lambda'(t)\,\lambda'''(t)}{[\lambda''(t)]^2}$. Выпуклые

функции, удовлетворяющие условиям, перечисленным в этом абзаце, мы будем называть *допустимыми* при $t \geqslant 0$. Например, допустимыми выпуклыми функциями при $t \geqslant 0$ являются: $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$; $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$; $\lambda(t) = \operatorname{ch} at$, $a > 0$. Напротив, выпуклые при $t \geqslant 0$ функции $\lambda(t) = \operatorname{sh} at$, $a > 0$ и $\lambda(t) = (1+t)\log(1+t)$ не являются допустимыми.

Теорема 1.1. *Пусть функция $u(x)$ субгармоническая в D, $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$. Тогда среднее значение*

$$F(r; \lambda(u^+)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n}\int_{S_n(r)} \lambda(u^+(x))\, d\sigma_n\right\}, \quad 0 \leqslant r < 1, \tag{1.3}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\xi = \log r$ при $n = 2$ или $\xi = 1/r^{n-2}$ при $n > 2$.

Доказательство. Как известно (см. [1], стр. 154), во всякой замкнутой области, целиком лежащей внутри шара D, субгармоническая функция $u^+(x)$ может быть представлена как предел невозрастающей последовательности дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций $u_n(x)$. Так как при этом переход к пределу в неравенствах, характеризующих возрастание и выпуклость, возможен, теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных субгармонических функций $u(x)$.

Если обозначить $F(r) = F(e^{\xi}) = \Psi(\xi)$ при $n = 2$ и $F(r) = F\left(\xi^{-\frac{1}{n-2}}\right) = \Psi(\xi)$ при $n > 2$, то для таких функций $u(x)$ по правилам дифференцирования и в силу (1.1) получаем:
при

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = r^2 \cdot \Delta F = \frac{r^2}{\lambda'(F)}\left\{\Delta m - \frac{\lambda''(F)}{[\lambda'(F)]^2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2\right\} \tag{1.4}$$

и при $n > 2$

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{1}{(n-2)^2} r^{2(n-1)} \cdot \Delta F =$$

$$= \frac{1}{(n-2)^2}\frac{r^{2(n-1)}}{\lambda'(F)}\left\{\Delta m - \frac{\lambda''(F)}{[\lambda'(F)]^2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2\right\}, \tag{1.5}$$

где ΔF и Δm обозначают оператор Лапласа, примененный соответственно к функциям $F = F(r) = F(r; \lambda(u))$ и $m = m(r) = m(r; \lambda(u))$, зависящим только от r.

Из выражения (1.2) имеем

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S_n(r)} \lambda'(u)\frac{\partial u}{\partial r}\, d\sigma_n. \tag{1.6}$$

Далее, обозначая

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_0 u,$$

где $\Delta_0 u$ — сферическая часть оператора Лапласа, получаем

$$\Delta m = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\left[\frac{\partial^2\lambda(u)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda(u)}{\partial r}\right]d\sigma_n =$$

$$= \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\left[\Delta\lambda(u) - \frac{1}{r^2}\Delta_0\lambda(u)\right]d\sigma_n = \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\Delta\lambda(u)\,d\sigma_n, \qquad (1.7)$$

так как интеграл от $\Delta_0\lambda(u)$ по сфере равен нулю.

Кроме того

$$\Delta\lambda(u) = \lambda'(u)\cdot\Delta u + \lambda''(u)\cdot\operatorname{grad}^2 u. \qquad (1.8)$$

Поскольку $\operatorname{grad}^2 u \geqslant \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ и для субгармонических функций $\Delta u \geqslant 0$, из (1.7) и (1.8) получаем

$$\Delta m \geqslant \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\lambda''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n. \qquad (1.9)$$

С другой стороны, применяя неравенство Буняковского, из (1.6) находим

$$\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x))}\,d\sigma_n \cdot \frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\lambda''(u(x)\left(\frac{\partial u(x)}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n. \qquad (1.10)$$

Комбинируя (1.5), (1.9) и (1.10), видим, что производная $\frac{d^2\Psi}{d\xi^2}$ будет неотрицательна при условии, что выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x))}\,d\sigma_n \leqslant \frac{[\lambda'(F)]^2}{\lambda''(F)}. \qquad (1.11)$$

По условию теоремы $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция, т. е. функция $\varphi(\tau) = \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))}$ — вогнутая. Следовательно, к левой части неравенства (1.11) применимо неравенство Иенсена (см. [5], стр. 182), и мы находим

$$\frac{1}{\sigma_n}\int\limits_{S_n(r)}\frac{[\lambda'(u(x))]^2}{\lambda''(u(x))}\,d\sigma_n \leqslant \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(m))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(m))} = \frac{[\lambda'(F)]^2}{\lambda''(F)},$$

что доказывает (1.11), а вместе с этим и выпуклость функции $F(r)$ относительно переменной ξ.

В силу субгармоничности функции $\lambda(u(x))$ функция $m(r)$, согласно цитированной во введении теореме Ф. Рисса, неубывающая. Так

как обратная функция $\lambda^{-1}(\tau)$ также возрастающая, заключаем, что функция $F(r)$—неубывающая.

Теорема доказана.

Теорема 1.2. *В условиях теоремы 1.1 выражение* $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$ *есть неубывающая функция от* r, *выпуклая относительно переменной* $\eta = r^{n-2}$ *при* $n \geqslant 2$.

Доказательство. Эта теорема немедленно вытекает из теоремы 1.1, если учесть, что (можно предполагать, что $0 \leqslant u(x) \in C^2(D)$)

$$\frac{d^2}{d\eta^2}[r^{n-2}F(r)] = \frac{1}{(n-2)^2} r^{4-n} \cdot \Delta F(r).$$

Замечания. 1. Как видно из доказательства, утверждения теорем 1.1 и 1.2 относительно выпуклости функций $F(r; \lambda(u^+))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$ остаются в силе и для функций $u(x)$, субгармонических в кольцевой области вида $\{x;\ 0 \leqslant r_1 < |x| < r_2\}$.

2. Допустим, что выпуклая функция $\lambda(t)$ является допустимой для всех t, $-\infty < t < +\infty$, т. е. $\lambda'(t) > 0$, $\lambda''(t) > 0$ всюду и функция

$$\varphi(\tau) = \frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))}, \quad \tau = \lambda(t),$$

является вогнутой для всех t, $-\infty < t < +\infty$. Так обстоит дело для функции $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$. Тогда, как видно из доказательства, утверждения теорем 1.1 и 1.2 справедливы не только для функций $F(r; \lambda(u^+))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u^+))$, но и для функций $F(r; \lambda(u))$ и $r^{n-2}F(r; \lambda(u))$.

3. Пусть функция $f(z)$, $z = re^{i\theta}$ голоморфна в круге $D = \{z;\ |z| < 1\}$. Применяя теорему 1.1 к субгармонической функции $\log|f(z)|$, получаем следующее предложение: *если функция* $f(z)$ *голоморфна в круге* D *и* $\lambda(t)$ — *допустимая выпуклая функция при* $t \geqslant 0$, *то среднее значение*

$$F(r; \lambda(\log^+|f(z)|)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lambda(\log^+|f(re^{i\theta})|)\, d\theta\right\}$$

есть неубывающая функция от r, *выпуклая относительно* $\log r$.

Применяя теорему 1.1 и замечание 2 для случая $u(z) = \log|f(z)|$ и $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$, получаем классическую теорему Харди о том, что среднее значение

$$M_a(r) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^a\, d\theta\right\}^{1/a}, \quad a > 0,$$

для голоморфной функции $f(z)$ есть неубывающая функция от r, логарифмически-выпуклая относительно $\log r$.

4. Теоремы 1.1, 1.2 вместе с замечаниями *1* и *2* обобщают результаты Дингхаса, который рассматривал случай функций $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$ и $\lambda(t) = e^{at}$, $a > 0$ (см. [2], теоремы 6—11).

5. Для функций $u(x)$, супергармонических или гармонических в шаре D можно рассматривать другие комбинации знаков $\lambda'>0$, $\lambda''<0$ или $\lambda'<0$, $\lambda''<0$, соответственно модифицируя класс допустимых функций $\lambda(t)$. Пусть, например, $u(x)$ — супергармоническая неотрицательная функция в D. В качестве допустимых при $t>0$ примем положительные возрастающие вогнутые функции $\lambda(t)$ такие, что $\lambda'(t)>0$, $\lambda''(t)<0$ и, кроме того,

$$\varphi(\tau)=\frac{[\lambda'(\lambda^{-1}(\tau))]^2}{\lambda''(\lambda^{-1}(\tau))},\quad \tau=\lambda(t)$$

является выпуклой функцией при $t>0$. При этом справедливы следующие утверждения:

Теорема 1.1′. *Пусть $u(x)$ — неотрицательная супергармоническая функция в D и $\lambda(t)$ — допустимая вогнутая функция при $t\geqslant 0$. Тогда среднее значение $F(r;\lambda(u))$ вида (1.1) есть вогнутая функция относительно $\xi=\log r$ при $n=2$ или $\xi=1/r^{n-2}$ при $n>2$.*

Теорема 1.2′. *В условиях теоремы 1.1′ выражение $r^{n-2}F(r;\lambda(u))$ есть вогнутая функция относительно $\tau_1=r^{n-2}$ при $n>2$.*

§ 2. Средние значения функций, субгармонических в угловой области

Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в угловой области $D_\alpha=\left\{z=re^{i\theta};\ |\theta|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<r<1\right\}$, $\frac{1}{2}\leqslant\alpha<+\infty$. На лучах $\zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$, входящих в границу области D_α, предполагается выполненным следующее условие:

$$\lim_{z\to\zeta}\sup u(z)\leqslant 0,\ \zeta=\rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}},\ 0\leqslant\rho\leqslant 1\ . \tag{2.1}$$

Мы рассмотрим в этом параграфе средние значения

$$\mu(r;\lambda(u^+))=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta d\theta, \tag{2.2}$$

$$\Phi(r;\lambda(u^+))=\lambda^{-1}(\mu(r;\lambda(u^+)))=$$

$$=\lambda^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\lambda\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta d\theta\right\}, \tag{2.3}$$

где $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t\geqslant 0$ в смысле § 1, стр. 141.

Нетрудно показать, что для субгармонических функций $u(z)$ в области D_α, удовлетворяющих условию (2.1), средние значения (2.2) и (2.3) конечны при всех r, $0\leqslant r<1$.

В самом деле, если $z = re^{i\theta}$, $\zeta = Re^{i\varphi}$, $0 < r < R < 1$, то для $u(z)$ имеем неравенство

$$u^+(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} u^+(Re^{i\varphi})\, h(z, \zeta)\, d\varphi, \tag{2.4}$$

где

$$h(z, \zeta) = \operatorname{Re}\left\{ \frac{\zeta^\alpha + z^\alpha}{\zeta^\alpha - z^\alpha} - \frac{\overline{\zeta}^\alpha - z^\alpha}{\overline{\zeta}^\alpha + z^\alpha} \right\} =$$

$$= 4R^\alpha r^\alpha \cos \alpha\theta \cos \alpha\varphi \frac{R^{2\alpha} - r^{2\alpha}}{|\zeta^\alpha - z^\alpha|^2 \cdot |\overline{\zeta}^\alpha + z^\alpha|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4R^\alpha r^\alpha \cos \alpha\theta \cos \alpha\varphi \frac{R^\alpha + r^\alpha}{(R^\alpha - r^\alpha)^3}, \quad 0 < r < R < 1. \tag{2.5}$$

Подставляя оценку (2.5) в (2.4), а затем (2.4) в (2.2), убеждаемся, что интегралы (2.2) и (2.3) конечны при любом r, $0 < r < 1$.

Теорема 2.1. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию (2.1), $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t > 0$, причем $\lambda(0) = 0$. Тогда среднее значение $\mu(r) = \mu(r; \lambda(u^+))$ есть неубывающая функция от r, и график $y = \mu(r)$ представляет собой выпуклую кривую относительно семейства $y = C_1 r^\alpha + C_2 r^{-\alpha}$.*

Доказательство. Пусть $D = \{z;\ |z| < 1\}$ обозначает единичный круг плоскости z. Функция

$$w(z) = \begin{cases} u^+(z), & z \in D_\alpha, \\ 0, & z \in D - D_\alpha, \end{cases}$$

в силу условия (2.1) субгармоническая и неотрицательная в D. Пусть ε — произвольное достаточно малое положительное число. Тогда неотрицательная функция $w_\varepsilon(z) = [w(z) - \varepsilon]^+$ также субгармоническая в D, причем $w(z) - \varepsilon \leqslant w_\varepsilon(z) \leqslant w(z)$. Кроме того, при любом r_0, $0 < r_0 < 1$, в некоторой окрестности лучей $\arg z = \pm \dfrac{\pi}{2\alpha}$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, функция $w_\varepsilon(z)$ тождественно равна нулю. Применяя итерированные средние функции $w_\varepsilon(z)$ по площади кружков достаточно малого радиуса (см. [1], стр. 154), можно построить невозрастающую последовательность дважды непрерывно дифференцируемых субгармонических функций $w_\varepsilon^{(k)}(z)$ таких, что $w_\varepsilon^{(k)}(z) \downarrow w_\varepsilon(z)$ внутри D, причем $w_\varepsilon^{(k)}(z) \equiv 0$ в $(D - D_\alpha) \cap \{|z| \leqslant r_0\}$.

Отсюда вытекает, что теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных в D субгармонических функций $u(z)$, тождественно равных нулю в $D - D_\alpha$. В самом деле, если теорема верна для функций $w_\varepsilon^{(k)}(z)$, то, в силу возможности пре-

дельного перехода под знаком интеграла, она верна для $w_1(z)$, а затем и для $w(z)$.

Обозначим

$$v(z) = \frac{u(z)}{\cos \alpha\theta}, \quad u(z) > 0, \quad z \in D_1;$$

$$\mu(r) = \mu(r; \lambda(u)) = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda(v) \cos^2 \alpha\theta d\theta. \tag{2.6}$$

Как и в (1.6), имеем

$$\frac{d\mu}{dr} = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v) \frac{\partial u}{\partial r} \cos \alpha\theta d\theta. \tag{2.7}$$

Далее, дифференцируя еще раз и учитывая, что $u(z) \equiv 0$ в $D - D_0$ и $\Delta u \geqslant 0$, получаем

$$\Delta\mu = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v) \cdot \Delta u \cdot \cos \alpha\theta d\theta -$$

$$- \frac{1}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cos \alpha\theta d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta - \frac{1}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \cos \alpha\theta d\theta. \tag{2.8}$$

После преобразований находим

$$\Delta\mu \geqslant \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{1}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + \alpha u \operatorname{tg} \alpha\theta\right]^2 d\theta +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v) u \cos \alpha\theta d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{\alpha^2}{r^2} \mu \geqslant \frac{\alpha^2}{r^2} \mu. \tag{2.9}$$

Последнее неравенство в (2.9) получается в силу условия $\lambda(0)=0$, так как при этом для допустимой выпуклой функции $\lambda'(v)\,v \geqslant \lambda(v)$.

Если $\xi = \log r$ и $\mu(r) = \mu(e^{\xi}) = \psi(\xi)$, то $\frac{d^2\mu}{d\xi^2} = r^2\Delta\mu$. Из (2.9) теперь получаем

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \geqslant \alpha^2\psi \geqslant 0. \tag{2.10}$$

Неравенство (2.10) как раз и означает, что график $y=\psi(\xi)$ выпуклый относительно семейства $y = C_1e^{\alpha\xi} + C_2e^{-\alpha\xi}$, т. е. график $y=\mu(r)$ выпуклый относительно семейства $y = {}_1rC^{\alpha} + C_2r^{-\alpha}$.

Из (2.9) видно, что $\mu(r)$, как функция от r, $0 \leqslant r < 1$, является субгармонической. Следовательно, в силу теоремы Ф. Рисса она является неубывающей функцией от r. Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (2.1), *$\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$. Тогда среднее значение $\Phi(r) = \Phi(e^{\xi}) = \Psi(\xi)$ есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\xi = \log r$.*

Доказательство. Как в (1.4), имеем [можно предполагать, что $0 \leqslant u(z) \in C^2(D)$]

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{r^2}{\lambda'\Phi}\left\{\Delta\mu - \frac{\lambda''(\Phi)}{[\lambda'(\Phi)]^2}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2\right\}. \tag{2.11}$$

Применяя неравенство Буняковского, из (2.7) получаем

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \leqslant \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{[\lambda'(v)]^2}{\lambda''(v)}\cos^2\alpha\theta\,d\theta \cdot \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta. \tag{2.12}$$

Подставляя оценку (2.12) в (2.11) и пользуясь свойствами $\lambda(t)$ так же, как при доказательстве теоремы 1.1, получаем неравенство

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \geqslant \alpha^2\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\,d\theta \geqslant 0, \tag{2.13}$$

доказывающее теорему.

Очевидно, что при конкретном выборе функции $\lambda(t)$ из полученных соотношений можно извлечь более полную информацию о поведении средних $\mu(r)$ и $\Phi(r)$. Выбирая $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$, получаем следующее утверждение:

Теорема 2.3. *Если $u(z)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (2.1), *то выражение*

$$L_p(r) = r^{\alpha}\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}}\left(\frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos\alpha\theta}\right)^p\cos^2\alpha\theta\,d\theta\right\}^{1/p}, \quad p \geqslant 1, \tag{2.14}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно перемен
ной $\eta = r^{2\alpha}$.

Доказательство. В данном случае $\lambda(t) = t^p$, $p \geqslant 1$, и из (2.9 имеем (можно предполагать, что $0 \leqslant u(z) \in C^2(D)$)

$$\Delta\mu \geqslant \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda''(v) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{\alpha^2}{r^2} \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda'(v)\, u \cos \alpha\theta d\theta =$$

$$= p(p-1)\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} v^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta + \frac{\alpha^2}{r^2} p\mu. \tag{2.15}$$

С другой стороны, из (2.7) при помощи неравенства Буняковско го находим

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \leqslant p^2\mu \cdot \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} v^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\theta. \tag{2.16}$$

Сопоставляя (2.15) и (2.16), приходим к неравенству

$$\frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr} - \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \geqslant \frac{\alpha^2}{r^2} p. \tag{2.17}$$

Теперь простыми преобразованиями нетрудно показать, что (2.17 равносильно неравенству

$$\frac{d^2}{d\eta^2} L(\eta^{\frac{1}{2\alpha}}) \geqslant 0, \tag{2.18}$$

которое и доказывает теорему.

Замечания. 1. Пусть функция $f(z)$ регулярна в D_α и $\lim_{z\to}$ $\sup |f(z)| \leqslant 1$, $\zeta = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Тогда из теоремы 2.2 получае для любой допустимой выпуклой функции $\lambda(t)$ предложение. *Средне значение*

$$\Phi(r; \lambda(\log^+ |f(z)|)) = \lambda^{-1}\left\{\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \lambda\left(\frac{\log^+ |f(z)|}{\cos \alpha\theta}\right) \cos^2 \alpha\theta d\theta\right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\xi = \log r$ Теорема 2.3 в этом случае дает: *выражение*

$$r^\alpha \left\{\frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\frac{\log^+ |f(z)|}{\cos \alpha\theta}\right)^p \cos^2 \alpha\theta d\theta\right\}^{1/p}, \quad p \geqslant 1,$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta = r^{2\alpha}$.

2. Переходя к пределу в теореме 2.3 при $p \to +\infty$, получаем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r) = r^\alpha \left\{ \max_{|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}} \frac{u^+(re^{i\theta})}{\cos \alpha\theta} \right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta = r^{2\alpha}$.

Для случая голоморфных функций $f(z)$ в D_α

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} \sup |f(z)| \leqslant 1, \ \zeta = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}, \ 0 \leqslant \rho \leqslant 1$$

имеем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r) = r^\alpha \left\{ \max_{|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}} \frac{\log^+ |f(re^{i\theta})|}{\cos \alpha\theta} \right\}$$

есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно $\eta = r^{2\alpha}$.

3. В случае супергармонических функций $u(z)$ в D_α и допустимых вогнутых функций $\lambda(t)$ можно установить аналоги теорем 2.1—2.3, как это было сделано в замечании 5 из § 1, стр. 144. Мы опускаем здесь эти формулировки.

В случае гармонических функций возможны и другие варианты. Пусть, например, $u(z)$ — положительная гармоническая функция в D_α такая, что $\overline{\lim_{z \to \zeta}} u(z) = 0$, $\zeta = \rho e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Тогда выражение

$$r^\alpha \mu\left(r; u^{-\frac{1}{p}}\right) = r^\alpha \left\{ \frac{2\alpha}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\alpha}}^{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\frac{u(z)}{\cos \alpha\theta} \right)^{-\frac{1}{p}} \cos^2 \alpha\theta \, d\theta \right\}^{-p}, \ p \geqslant 1$$

является вогнутой функцией относительно $\eta = r^{2\alpha}$. При этом среднее $\mu\left(r; u^{-\frac{1}{p}}\right)$ есть невозрастающая функция от r. В пределе при $p \to +\infty$ здесь получаем. *Выражение*

$$r^\alpha \left\{ \min_{|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha}} \frac{u(re^{i\theta})}{\cos \alpha\theta} \right\}$$

является вогнутой функцией относительно $\eta = r^{2\alpha}$.

4. В работе [4] Л. Альфорс изучил случай $\alpha = 1$, $\lambda(t) = t$ (при $n = 2$ и $n > 2$). Теоремы 2.1—2.3 обобщают также (при $n = 2$) результаты Дингхаса, который рассматривал случай $\alpha = 1$, $\lambda(t) = t^p$, $\lambda(t) = t^{-\frac{1}{p}}$, $p \geqslant 1$ (см. [2], теоремы 1.2).

§ 3. Средние значения функций, субгармонических в конической области

Пусть $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ — точка пространства E_n, $n>2$, $x_1=r\cos\theta$, $r=|x|$. Будем предполагать функцию $u(x)$ субгармонической в конической области

$$D_\alpha=\left\{x;\ 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2\alpha},\ |x|<1\right\},\ 1\leqslant\alpha<+\infty,$$

и на части границы Γ_1 области D_α,

$$\Gamma_1=\left\{y;\ y_1=|y|\cos\frac{\pi}{2\alpha},\ 0\leqslant|y|\leqslant1\right\},$$

удовлетворяющей условию

$$\lim_{x\to y}\sup u(x)\leqslant0,\ y\in\Gamma_1. \tag{3.1}$$

Этот случай является пространственным аналогом рассуждений § 2, и мы рассматриваем средние значения

$$\mu(r;\lambda(u^+))=\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda\left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^\gamma\alpha\theta\,d\sigma_n, \tag{3.2}$$

$$\Phi(r;\lambda(u^+))=\lambda^{-1}(\mu(r;\lambda(u^+)))=$$

$$=\lambda^{-1}\left\{\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda\left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right)\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n\right., \tag{3.3}$$

где $\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t\geqslant0$ в смысле § 1, стр. 141; $S_n(r;\alpha)$ — часть сферы $|x|=r$, определяемая условием $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$;

$$\sigma_n(1;\alpha)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2\alpha}}\cos^2\alpha\theta\,\sigma_{n-1}(\sin\theta)\,d\theta.$$

Конечность интегралов (3.2), (3.3) устанавливается таким же путем, как в § 2, но здесь необходимо привлечь оценки нормальной производной функции Грина для области $\left\{x;\ 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|x|<R<1\right\}$. Мы опускаем здесь это рассуждение.

Теорема 3.1. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_α, удовлетворяющая условию* (3.1), *$\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t>0$, причем $\lambda(0)=0$. Тогда среднее $\mu(r)=\mu(r;\lambda(u^+))$ есть неубывающая функция от r и график $y=r^{\frac{n}{2}-1}\mu(r)$ является выпуклой кривой относительно семейства $y=C_1r^\gamma+C_2r^{-\gamma}$, где $\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4(\alpha^2-1)(n-1)}$.*

Доказательство. Методом аппроксимации легко убедиться, как в § 2 при доказательстве теоремы 2.1, что теорему достаточно доказать для дважды непрерывно дифференцируемых неотрицательных субгармонических функций $u(x)$ в $D=\{x;\ |x|<1\}$, тождественно равных нулю в $D-D_\alpha$.

Обозначим

$$v(x)=\frac{u(x)}{\cos\alpha\theta},\quad u(x)\geqslant 0,\quad x\in D_\alpha; \tag{3.4}$$

$$\mu(r)=\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda(v)\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n.$$

Как и в (2.7), имеем

$$\frac{d\mu}{dr}=\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\frac{\partial u}{\partial r}\cos\alpha\theta\,d\sigma_n. \tag{3.5}$$

Далее необходимо дифференцировать еще раз и учитывать, что $u(x)\equiv 0$ в $D-D_\alpha$ и

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\Delta_\theta u\geqslant 0,$$

где $\Delta_\theta u$ — сферическая часть оператора Лапласа. Выполнив эти вычисления, приходим к неравенству

$$\Delta\mu\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\lambda)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+\alpha u\operatorname{tg}\alpha\theta\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\left[2\alpha(n-2)\frac{\operatorname{tg}\alpha\theta}{\operatorname{tg}\theta}-\alpha^2(n-3)\right]d\sigma_n. \tag{3.6}$$

Так как при $1\leqslant\alpha<+\infty$

$$2\alpha(n-2)\frac{\operatorname{tg}\alpha\theta}{\operatorname{tg}\theta}-\alpha^2(n-3)\geqslant\alpha^2(n-1)$$

и в силу условия теоремы $\lambda'(v)\,v\geqslant\lambda(v)$, из (3.6) получаем

$$\Delta\mu\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\,u\cos\alpha\theta\,d\sigma_n\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu\geqslant\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu \tag{3.7}$$

или

$$\frac{d^2\mu}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{d\mu}{dr} \geqslant \frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\mu. \tag{3.8}$$

Из (3.7) видно, что $\mu(r)$, как функция от r, является субгармонической. Следовательно, в силу теоремы Ф. Рисса, $\mu(r)$ есть неубывающая функция от r, $0 \leqslant r < 1$.

Введя функцию $L(r) = r^{\frac{n}{2}-1}\mu(r)$ и составляя производные от $L(r) = L(e^{\xi})$ по $\xi = \log r$, из (3.8) получаем

$$\frac{d^2L}{d\xi^2} - \gamma^2 L \geqslant 0, \tag{3.9}$$

где $\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + 4(\alpha^2-1)(n-1)}$. Неравенство (3.9) как раз и доказывает утверждение теоремы о выпуклости $L(r)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_n, удовлетворяющая условию* (3.1), *$\lambda(t)$ — допустимая выпуклая функция при $t \geqslant 0$. Тогда среднее значение $\Phi(r) = \Phi(r, \lambda(u^+)) = \Phi(\xi^{-\frac{1}{n-2}}) = \Psi(\xi)$ есть неубывающая функция от r, выпуклая относительно переменной $\xi = 1/r^{n-2}$.*

Доказательство. Как в (2.11), имеем (можно предполагать что $0 \leqslant u(x) \in C^2(D)$)

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{1}{(n-2)^2} r^{2(n-1)} \cdot \Delta\Phi = \frac{1}{(n-2)^2}\frac{r^{2(n-1)}}{\lambda'(\Phi)}\left\{\Delta\mu - \frac{\lambda''(\Phi)}{[\lambda'(\Phi)]^2}\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2\right\}. \tag{3.10}$$

Применяя неравенство Буняковского, из (3.5) получаем

$$\left(\frac{d\mu}{dr}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)} \frac{[\lambda'(v)]^2}{\lambda''(v)}\cos^2\alpha\theta\, d\sigma_n \cdot \frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) в (3.10) и учитывая (3.7), как и раньше, находим

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = \frac{1}{(n-2)^2} r^{2(n-1)} \cdot \Delta\Phi \geqslant \frac{1}{(n-2)^2}\frac{r^{2(n-2)}}{\lambda'(\Phi)}\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)} \lambda'(v)u\cos\alpha\theta\, d\sigma_n \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) вытекает, во-первых, как при доказательстве теоремы 3.1, что $\Phi(r)$ — неубывающая функция от r. Во-вторых, $\Psi(\xi)$ есть выпуклая функция относительно $\xi = 1/r^{n-2}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если $u(x)$ — субгармоническая функция в области D_n, удовлетворяющая условию* (3.1), *то выражение*

$$L_p(r)=r^{\beta}\left\{\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\left(\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right)^p\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n\right\}^{1/p},\quad p\geqslant 1,$$

где $\beta=\frac{n}{2}-1+\gamma$, $\gamma=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4(\alpha^2-1)(n-1)}$, *есть неубывающая функция от* r, *выпуклая относительно переменной* $\eta=r^{2\gamma}$.

Доказательство. В данном случае $\lambda(t)=t^p$, $p\geqslant 1$, и из (3.7) имеем (можно предполагать, что $0\leqslant u(x)\in C^2(D)$)

$$\Delta\mu\geqslant\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda''(v)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+$$

$$+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\,\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\lambda'(v)\;u\cos\alpha\theta\,d\sigma_n=$$

$$=p(p-1)\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}v^{p-2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma_n+\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\,p\mu. \qquad (3.13)$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 2.3, применяя неравенство Буняковского к (3,5), получаем неравенство

$$\frac{1}{\mu}\frac{d^2\mu}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\,\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dr}-\frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{\mu}\,\frac{d\mu}{dr}\right)^2\geqslant\frac{\alpha^2(n-1)}{r^2}\,p, \qquad (3.14)$$

аналогичное (2.17). Преобразуя это неравенство, получаем

$$\frac{d^2}{d\eta^2}L^{\frac{1}{2\gamma}}(\eta)\geqslant 0,$$

что и доказывает теорему.

Замечания. 1. Переходя к пределу в теореме 3.3 при $p\to+\infty$, получаем предложение. *Выражение*

$$L_\infty(r)=r^{\beta}\left\{\max_{|\theta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{u^+(x)}{\cos\alpha\theta}\right\}$$

есть неубывающая функция от r, *выпуклая относительно* $\eta=r^{2\gamma}$.

2. Как в замечании 3 из § 2 имеем следующее предложение.

Пусть $u(x)$—*положительная гармоническая функция в области* D_α *такая, что* $\lim\limits_{x\to y}u(x)=0$, $y\in\Gamma_1$. *Тогда среднее значение*

$$\Phi(r;\,u^{-\frac{1}{p}})=\left\{\frac{1}{\sigma_n(1;\alpha)}\int\limits_{S_n(r;\alpha)}\left(\frac{u(x)}{\cos\alpha\theta}\right)^{-\frac{1}{p}}\cos^2\alpha\theta\,d\sigma_n\right\}^{-p},\quad p\geqslant 1,$$

есть невозрастающая функция от r, *а* $L(r)=r^{\beta}\Phi(r;\,u^{-\frac{1}{p}})$ — *выпуклая функция относительно* $\eta=r^{2\gamma}$. *В частности, выражение*

$$r^{\beta}\left\{\min_{|\theta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\frac{u(x)}{\cos\alpha\theta}\right\}$$

является вогнутой функцией относительно $\eta = r^{2\tau}$.

3. В работе Л. Альфорса [4] изучен случай $\alpha=1$, $n\geqslant 2$, $\lambda(t)=t$, который является предельным в теоремах 3.1, 3.2 и включается в теорему 3.3. Теоремы 3.1—3.3 обобщают также при $n>2$ результаты Динг-хаса, который рассматривал случай $\alpha=1$, $\lambda(t)=t^{p}$, $\lambda(t)=t^{-\frac{1}{p}}$, $p\geqslant 1$ (см. [2], теоремы 3—5).

Московский энергетический
институт

Поступило 13.II 1967

Ե. Դ. ՍՈԼՈՄԵՆՑԵՎ

ՍՈՒԲՀԱՐՄՈՆԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում են սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միջին արժեքները, որոնք կառուցված են ուռուցիկ ֆունկցիաների օգնությամբ (տես օրինակ (3) բանաձևը)

Ուսումնասիրվում է այդ միջին արժեքների կախվածությունը սֆերայի շառավղից, երբ սուբհարմոնիկ ֆունկցիաները որոշված են $E_n, n\geqslant 2$ տարածության գնդում, և անկյունային կամ կոնական տիրույթներում:

E. D. SOLOMENTSEV

ON THE MEAN VALUES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

S u m m a r y

The paper considers the mean values (such as (3)) of subharmonic functions, constructed with the use of convex functions. The dependence of the mean values on the radius of the sphere is investigated, the subharmonic functions being defined in the sphere in E_n, $n\geqslant 2$, or in angular or conic domians.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Субгармонические функции, М., ГТТП, 1937.
2. *A. Dinghas,* Über einige Konvexitätssätze für die Mittelwerte von subharmonischen Funktionen, J. math. pures appl., 44, 3, 1965. 223—247.
3. *F.* und *R. Nevanlinna.* Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. sci. fenn., 50, 5, 1922.
4. *L. V. Ahlfors.* On Phragmén—Lindelof's principle, Trans. Amer. Math. Soc., 41, 1, 1937, 1—8.
5. *Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИЛ, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 3, 1967 Математика

И. С. САРГСЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Введение

1. В релятивистской квантовой теории Дирака волновая функция Ψ удовлетворяет уравнению следующего вида:

$$(p_0 + Vc^{-1} + \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta)\,\Psi = 0, \tag{0.1}$$

где $V = V(x, y, z)$ — потенциальная функция, c — скорость света,

$$p_0 = i\hbar c^{-1}\frac{\partial}{\partial t},\ p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x},\ p_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y},\ p_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z},$$

$\hbar$ — постоянная Планка, операторы α_x, α_y, α_z и β удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1,\ \alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x = \alpha_x\alpha_z + \alpha_z\alpha_x = \alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y = 0 \\ &\beta^2 = m^2c^2, \qquad \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = \alpha_y\beta + \beta\alpha_y = \alpha_z\beta + \beta\alpha_z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{0.2}$$

и, наконец, m — масса частицы. Эти формулы следуют из формулы (19), § 53.1, см. [1], если в последней формуле положить $A = 0$ и $e\Phi = V$.

Пусть α_x, α_y, α_z и β—квадратные матрицы 4×4. Тогда волновая функция Ψ будет матрицей 4×1, т. е. является четырехкомпонентной функцией $\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \vdots \\ \Psi_4\end{pmatrix}$, $\Psi_k = \Psi_k(x, y, z; t)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$ и, поэтому уравнение (0.1) эквивалентно системе четырех дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций $\Psi_k(x, y, z; t)$, $(k = 1, 2, 3, 4)$. Если положим $\Psi = e^{-iWt/\hbar}X$, где W — энергия, а четырехкомпонентная функция X зависит только от x, y и z, то уравнение (0.1) примет вид

$$\{(W - V)\,c^{-1} + \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z + \beta\}\,X = 0, \tag{0.3}$$

где W играет роль параметра собственных значений.

2. Мы будем рассматривать одномерный случай уравнения (0.3), т. е. предположим, что функции V и X зависят только от x. Тогда из уравнения (0.3) следует

$$\{(W - V)\,c^{-1} + \alpha_x p_x + \beta\}\,X = 0, \tag{0.4}$$

где

$$p_x = -i\hbar\frac{d}{dx},\ \alpha_x^2 = 1,\ \beta^2 = m^2c^2,\ \alpha_x\beta + \beta\alpha_x = 0. \tag{0.5}$$

В этом случае α_x и β — матрицы 2×2, а функция X теперь двухкомпонентная и ее можно рассматривать как матрицу 2×1. Поэтому уравнение (0.4) эквивалентно двум совместным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка относительно компонент $X_1(x)$ и $X_2(x)$ функции X.

Пусть

$$\alpha=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \frac{\beta}{mc}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}X_1(x)\\ X_2(x)\end{pmatrix}.$$

Тогда условия (0.5) удовлетворяются, и поэтому уравнение (0.4) в матричной форме можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\{W-V(x)\}\,c^{-1}X_1(x)-\hbar X_2'(x)+mcX_1(x)=0\\ \{W-V(x)\}\,c^{-1}X_2(x)+\hbar X_1'(x)-mcX_2(x)=0\end{aligned}\right\}. \tag{0.6}$$

Теперь, полагая $V(x)-m=p(x)$, $V(x)+m=r(x)$, $W=\lambda$, уравнение (0.6) можно переписать в следующем окончательном виде:*

$$X_2'(x)+p(x)X_1(x)=\lambda X_1(x), \tag{0.7}$$

$$-X_1'(x)+r(x)X_2(x)=\lambda X_2(x). \tag{0.8}$$

Присоединим к системе (0.7) — (0.8) граничное условие

$$X_2(0)-hX_1(0)=0, \tag{0.9}$$

где h — произвольное действительное число.

3. Обозначим через $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ решение системы (0.7)—(0.8), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0,\lambda)=1,\ \varphi_2(0,\lambda)=h. \tag{0.10}$$

Известно [см. (2)], что при данном h каждой граничной задаче (0.7) + (0.8) + (0.9) соответствует единственная** неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, $(-\infty<\lambda<+\infty)$, порождающая изометрическое отображение пространства с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0,\infty)$ вектор-функций $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}\subset L^2(0,\infty)$,

$$\int_0^\infty\{f_1^2(x)+f_2^2(x)\}\,dx<+\infty,$$

на пространство $L^2_{\{\rho(\lambda)\}}(-\infty,+\infty)$ по формулам

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\{f_1(x)\varphi_1(x,\lambda)+f_2(x)\varphi_2(x,\lambda)\}\,dx, \tag{0.11}$$

---

* Здесь предположено, что единицы измерения выбраны так, что скорость света c и постоянная Планка $\hbar$ равны 1.

** Единственность функции $\rho(\lambda)$ доказана Б. М. Левитаном.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{0.12}$$

$$f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,\varphi_2(x,\lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{0.13}$$

где интегралы (0.11) и (0.12)—(0.13) сходятся в метриках пространств $L^2_{\rho(\lambda)}(-\infty,+\infty)$ и $L^2(0,\infty)$ соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty}\{f_1^2(x)+f_2^2(x)\}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda).$$

Введем следующую терминологию:

а) функцию $\rho(\lambda)$ будем называть спектральной функцией задачи (0.7) + (0.8) + (0.9);

б) матрицу второго порядка $\theta(x,s;\lambda)=\|\theta_{ik}(x,s;\lambda)\|$, $(i,k=1,2)$, где функции $\theta_{ik}(x,s;\lambda)$ определяются по формулам

$$\theta_{ik}(x,s;\lambda)=\begin{cases}\int_0^{\lambda}\varphi_i(x,\lambda)\,\varphi_k(s,\lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda>0,\\ -\int_{\lambda}^{0}\varphi_i(x,\lambda)\,\varphi_k(s,\lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda<0,\\ 0, & \lambda=0\end{cases}$$

мы будем называть спектральной матрицей задачи (0.7) + (0.8) + (0.9). В силу первого из условий (0.9) мы имеем

$$\theta_{11}(0,0;\lambda)=\rho(\lambda)-\rho(0). \tag{0.14}$$

4. Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения спектральной матрицы $\theta(x;s;\lambda)=\|\theta_{ik}(x,s;\lambda)\|$ при $|\lambda|\to\infty$ и вопросов разложения произвольной вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0,\infty)$ по собственным вектор-функциям задачи (0.7) + (0.8) + (0.9), т. е. одномерного оператора Дирака. Метод работы аналогичен методу, разработанному В. М. Левитаном [3] и В. А. Марченко [4] для уравнения Шредингера. Основные результаты работы изложены в заметках автора [6, 7].

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 0.1. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (0.7)—(0.8) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных x и s справедливы асимптотические формулы*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\theta_{11}(x,s;\lambda)-\theta_{11}(x,s;-\lambda)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}+\frac{\sin\lambda(x+s)}{x+s}\right]+\right.$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\cdot\sin^2\left[\frac{1}{4}\int_s^x(p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\Bigg\}=0, \tag{0.15}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\cdot\Bigg\{\theta_{12}(x,s;\lambda)-\theta_{12}(x,s;-\lambda)-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\times$$

$$\times\sin\left[\frac{1}{2}\int_s^x(p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\Bigg\}=0, \tag{0.16}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg\{\theta_{21}(x,s;\lambda)-\theta_{21}(x,s;-\lambda)+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\times$$

$$\times\sin\left[\frac{1}{2}\int_s^x(p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\Bigg\}=0, \tag{0.17}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg\{\theta_{22}(x,s;\lambda)-\theta_{22}(x,s;-\lambda)-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}-\frac{\sin\lambda(x+s)}{x+s}+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\cdot\sin^2\left[\frac{1}{4}\int_s^x(p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\right\}=0. \tag{0.18}$$

Асимптотические формулы (0.15) — (0.18) *имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных* x *и* s.

Из формулы (0.15) при $x=s=0$, в силу равенства (0.14), следует

Теорема 0.2. *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале, то имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\{\rho(\lambda)-\rho(-\lambda)-\frac{2}{\pi}\lambda\right\}=0. \tag{0.19}$$

5. Обозначим через $\theta^*(x,s;\lambda)=\|\theta^*_{ik}(x,s;\lambda)\|$, $i,\ k=1,2$, спектральную матрицу задачи (0.7) + (0.8) + (0.9) при $p(x)=r(x)=h=0$. В этом случае $\varphi_1(x,\lambda)=\cos\lambda x$, $\varphi_2(x,\lambda)=\sin\lambda x$. Поэтому функции $\theta^*_{ik}(x,s;\lambda)$ определяются по формулам

$$\theta^*_{11}(x,s;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\cos\mu x\cdot\cos\mu s\,d\mu,\quad \theta^*_{12}(x,s;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\cos\mu x\cdot\sin\mu s\,d\mu,$$

$$\theta^*_{21}(x,s;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\sin\mu x\cdot\cos\mu s\,d\mu,\quad \theta^*_{22}(x,s;\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\sin\mu x\cdot\sin\mu s\,d\mu.$$

Пусть вектор-функция $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}\subset L^2(0,\infty)$.

Введем обозначения

$$S_1(x,\lambda)=\int_0^\infty\{f_1(s)\,\theta_{11}(x,s;\lambda)+f_2(s)\,\theta_{12}(x,s;\lambda)\}\,ds,$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s)\, \theta_{22}(x, s; \lambda)\}\, ds.$$

В силу определения функций $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$ и $F(\lambda)$ для $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ получим выражения:

$$S_1(x, \lambda) = \int_0^{\lambda} F(\lambda)\, \varphi_1(x, \lambda)\, d\rho(\lambda),$$

$$S_2(x, \lambda) = \int_0^{\lambda} F(\lambda)\, \varphi_2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Функции $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ являются отрезками разложений, соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в интеграл Фурье по собственным функциям задачи (0.7)+(0.8)+(0.9).

Аналогично предыдущему, функции

$$S_1^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{11}^*(x, s; \lambda) + f_2(s)\, \theta_{12}^*(x, s; \lambda)\}\, ds,$$

$$S_2^*(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{21}^*(x, s; \lambda) + f_2(s)\, \theta_{22}^*(x, s; \lambda)\}\, ds$$

являются отрезками разложений функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в обычный интеграл Фурье.

Теорема 0.3. *Пусть* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \infty)$. *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном* x *справедливы равенства*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \{[S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)] - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} = 0,$$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \{[S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)] - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} = 0,$$

т. е. разность между разложением вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ *с интегрируемым квадратом на полупрямой* $(0, \infty)$ *в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака и разложением в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Теорема 0.3 дает окончательное решение вопроса о возможности разложения произвольной вектор-функции с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака. В частности, из этой теоремы следует

Теорема 0.4. *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале, и вектор-функция* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ *интегрируема с квадратом на полупрямой* $(0, \infty)$, *т. е.*

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x)+f_2^2(x)\}\,dx<+\infty,$$

то в каждой точке, где выполняются локальные условия разложимости вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ *в обычный интеграл Фурье, имеют место равенства*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\{S_1(x,\lambda)-S_1(x,-\lambda)\}=f_1(x),$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\{S_2(x,\lambda)-S_2(x,-\lambda)\}=f_2(x),$$

т. е. разложение вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}\subset L^2(0,\infty)$ *в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерного оператора Дирака стремится к значению разлагаемой функции.*

Приношу глубокую благодарность проф. Б. М. Левитану за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

§ 1. Решение задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупримой $(0,\infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале. Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x)y_1=\lambda y_1, \tag{1.1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x)y_2=\lambda y_2, \tag{1.2}$$

$$y_2(0)-hy_1(0)=0, \tag{1.3}$$

где h — произвольное действительное число.

Изучение асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным вектор-функциям задачи (1.1)+(1.2)+(1.3) методами, аналогичными методам Б. М. Левитана и В. А. Марченко, основано на предварительном исследовании задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака, а именно задачи:

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)u_1=0, \tag{1.4}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)u_2=0, \tag{1.5}$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ u_2(x,0)=f_2(x),\ u_2(0,t)=hu_1(0,t), \tag{1.6}$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — вещественные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые на полупримой $(0,\infty)$. Исследование задачи

(1.4)+(1.5)+(1.6) нами проведено в работе [9]. Там выведены явные формулы для решения задачи (1.4)+(1.5)+(1.6), а именно, справедлива

Теорема 1.1. *Пусть функции* $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *удовлетворяют вышеуказанным требованиям. Тогда решения* $u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ u_2(x,t) \end{pmatrix}$ *задачи* (1.4)+(1.5)+(1.6) *даются по формулам*

I. при $0 < t < x$

$$u_1(x,t) = k(x,t)\{f_1 x+t) + if_2(x+t)\} + l(x,t)\{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{K(x,t,s) f_1(s) + L(x,t,s) f_2(s)\}\,ds, \quad (1.7)$$

$$u_2(x,t) = k(x,t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x,t)\{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{M(x,t,s) f_1(s) + N(x,t,s) f_2(s)\}\,ds; \quad (1.8)$$

II. *при* $t < 0$, $0 < -t < x$

$$u_1(x,t) = k(x,t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x,t)\{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t}\{\bar{K}(x,-t,s) f_1(s) + \bar{L}(x,-t,s) f_2(s)\}\,ds, \quad (1.9)$$

$$u_2(x,t) = k(x,t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x,t)\{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t}\{\bar{M}(x,-t,s) f_1(s) + \bar{N}(x,-t,s) f_2(s)\}\,ds, \quad (1.10)$$

где положено

$$k(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i\int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\,d\tau\right\}, \quad (1.11)$$

$$l(x,t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i\int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\,d\tau\right\}, \quad (1.12)$$

а вектор-функции $\begin{pmatrix} K(x,t,s) \\ L(x,t,s) \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} M(x,t,s) \\ N(x,t,s) \end{pmatrix}$ *удовлетворяют системе*

$$i\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} + p(s)\, w_1 = 0, \quad (1.13)$$

$$i\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} + r(s)\, w_2 = 0 \quad (1.14)$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$K(x,t,x+t) + iL(x,t,x+t) = \frac{1}{2} i\{p(x+t) - r(x+t)\}\, k(x,t), \quad (1.15)$$

$$K(x,t,x-t) - iL(x,t,x-t) = \frac{1}{2} i\{p(x-t) - r(x-t)\}\, l(x,t), \quad (1.16)$$

$$N(x, t, x+t) - iM(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i \{r(x+t) - p(x+t)\} k(x, t), \quad (1.17)$$

$$N(x, t, x-t) + iM(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i \{r(x-t) - p(x-t)\} l(x, t), \quad (1.18)$$

вектор-функции же $\begin{pmatrix} \bar{K}(x,-t, s) \\ \bar{L}(x,-t, s) \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} \bar{M}(x,-t, s) \\ \bar{N}(x,-t, s) \end{pmatrix}$ *также удовлетворяют системе* (1.13)+(1.14) *и условиям* (1.17)+(1.18) *и* (1.15)+(1.16), *соответственно.*

Для решения задачи (1.4)+(1.5)+(1.6) при $0 < x < t$ поступим следующим образом. Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$—по формулам*:

$$f_1(-x) = \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int_0^x \{P(x, s) f_1(s) + R(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.19)$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s) f_1(s) + H(x, s) f_2(s)\} ds, \quad (1.20)$$

где положено

$$\alpha(x) = \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\},$$

$$\beta(x) = -\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\},$$

а функции $P(x, s)$, $R(x, s)$, $\Theta(x, s)$ и $H(x, s)$ удовлетворяют системе

$$\frac{\partial P(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial H(x, s)}{\partial s} = \{r(x) - p(-s)\} Q(x, s),$$

$$\frac{\partial H(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial P(x, s)}{\partial s} = \{r(-s) - p(x)\} R(x, s),$$

$$\frac{\partial Q(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial R(x, s)}{\partial s} = \{p(-s) - p(x)\} P(x, s),$$

$$\frac{\partial R(x, s)}{\partial x} - \frac{\partial Q(x, s)}{\partial s} = \{r(x) - r(-s)\} H(x, s)$$

и условиям

$$H(x, x) - P(x, x) = \alpha'(x) - \beta(x) \{p(-x) - r(x)\};$$

* В совместной работе Б. М. Левитана и автора [8] показано, что это продолжение непрерывно вместе с первой производной.

$$R(x, x)+Q(x, x)=-\beta'(x)-\alpha(x)\{r(-x)-r(x)\},$$
$$R(x, 0)-h^*P(x, 0)=0;\ H(x, 0)-h^*Q(x, 0)=0,$$

где $h^*=\dfrac{f_2(0)}{f_1(0)}$. Если $f_1(0)=0$, то следует взять $h^*=0$;

III. При $0<x<t$ *решение задачи* (1.4)+(1.5)+(1.6) *задается формулами*

$$u_1(x, t)=k(x, t)\{f_1(x+t)+if_2(x+t)\}+l_1(x, t)\{f_1(t-x)-if_2(t-x)\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{x+t}\{K(x, t, s)f_1(s)+L(x, t, s)f_2(s)\}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\{K_1(x, t, s)f_1(s)+L_1(x, t, s)f_2(s)\}\,ds, \qquad (1.21)$$

$$u_2(x, t)=k(x, t)\{f_2(x+t)-if_1(x+t)\}+l_1(x, t)\{f_2(t-x)+if_1(t-x)\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{x+t}\{M(x, t, s)f_1(s)+N(x, t, s)f_2(s)\}\,ds+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\{M_1(x, t, s)f_1(s)+N_1(x, t, s)f_2(s)\}\,ds, \qquad (1.22)$$

где

$$l_1(x, t)=\{\alpha(t-x)+i\beta(t-x)\}\,l(x, t), \qquad (1.23)$$

функции $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ имеют те же значения, что и в формулах (1.7) и (1.8), а функции $K_1(x, t, s)$, $L_1(x, t, s)$, $M_1(x, t, s)$ и $N_1(x, t, s)$ определяются следующим образом

$$K_1(x, t, s)=\alpha(s)K(x, t, -s)-\beta(s)L(x, t, -s)+2l(x, t)[P(t-x, s)-$$
$$-iQ(t-x, s)]+\int_s^{t-x}\{K(x, t, -\tau)P(\tau, s)+L(x, t, -\tau)Q(\tau, s)\}\,d\tau, \qquad (1.24)$$

$$L_1(x, t, s)=\alpha(s)L(x, t, -s)+\beta(s)K(x, t, -s)+2l(x, t)[R(t-x, s)-$$
$$-iH(t-x, s)]+\int_s^{t-x}\{K(x, t, -\tau)R(\tau, s)+L(x, t, -\tau)H(\tau, s)\}\,d\tau, \qquad (1.25)$$

$$M_1(x, t, s)=\alpha(s)M(x, t, -s)-\beta(s)N(x, t, -s)+2l(x, t)[Q(t-x, s)+$$
$$+iP(t-x, s)]+\int_s^{t-x}\{M(x, t, -\tau)P(\tau, s)+N(x, t, -\tau)Q(\tau, s)\}\,d\tau, \qquad (1.26)$$

$$N_1(x, t, s)=\alpha(s)N(x, t, -s)+\beta(s)M(x, t, -s)+2l(x, t)[H(t-x, s)+$$
$$-iR(t-x, s)]+\int_s^{t-x}\{M(x, t, -\tau)R(\tau, s)+N(x, t, -\tau)H(\tau, s)\}\,d\tau. \qquad (1.27)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые равенства, которые следуют из условий (1.15)—(1.18). Так, полагая в равенствах (1.15) и (1.16) $t=0$ и учитывая, что при $t=0$ $k(x, 0)=l(x, 0)=\frac{1}{2}$ (см. равенства (1.11) и (1.12)), мы получим

$$K(x, 0, x)=\frac{1}{4} i\{p(x)-r(x)\},\ L(x, 0, x)=0. \tag{1.28}$$

Поступая аналогично, из (1.17) и (1.18) получаем

$$N(x, 0, x)=-\frac{1}{4} i\{p(x)-r(x)\},\ M(x, 0, x)=0. \tag{1.29}$$

Далее, так как вектор-функции $\begin{pmatrix}\widetilde{K}(x,-t, s)\\ \widetilde{L}(x,-t, s)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\widetilde{M}(x,-t, s)\\ \widetilde{N}(x,-t, s)\end{pmatrix}$ удовлетворяют условиям (1.17) — (1.18) и (1.15) — (1.16) соответственно, то для них справедливы равенства

$$\widetilde{K}(x, 0, x)=-\frac{1}{4} i\{p(x)-r(x)\},\ \widetilde{L}(x, 0, x)=0, \tag{1.30}$$

$$\widetilde{N}(x, 0, x)=\frac{1}{4} i\{p(x)-r(x)\},\ \widetilde{M}(x, 0, x)=0. \tag{1.31}$$

§ 2. Вывод основных тождеств

Мы будем изучать задачу

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x) y_1=\lambda y_1, \tag{2.1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x) y_2=\lambda y_2, \tag{2.2}$$

$$y_2(0)-h y_1(0)=0, \tag{2.3}$$

где $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а h — произвольное число.

Наряду с системой (2.1)+(2.2) рассмотрим систему уравнений в частных производных

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x) u_1=0, \tag{2.4}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x) u_2=0. \tag{2.5}$$

Пусть вектор-функция $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ имеет непрерывную первую производную и определена на полупрямой $(0, \infty)$. Обозначим через

$u(x, t; f) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ решение системы (2.4)+(2.5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x). \tag{2.6}$$

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на всю числовую ось с сохранением класса, а в остальном как угодно и предположим, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют еще условию

$$f_2(0) - h f_1(0) = 0. \tag{2.7}$$

Продолжим функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось по формулам ($x > 0$) [см. формулы (1.19) и (1.20)]:

$$f_1(-x) = \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int_0^x \{P(x, s) f_1(s) + R(x, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{2.8}$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s) f_1(s) + H(x, s) f_2(s)\}\, ds. \tag{2.9}$$

Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ решение системы (2.1)+(2.2), удовлетворяющее условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h. \tag{2.10}$$

Очевидно, что функция $\varphi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ удовлетворяет условию (2.3).

Теперь положим $f_1(x) = \varphi_1(x, \lambda)$, $f_2(x) = \varphi_2(x, \lambda)$ и рассмотрим задачу (2.4)+(2.5)+(2.6). С одной стороны, решение этой задачи дается по формулам (1.7)+(1.8), (1.9)+(1.10) и (1.21)+(1.22) при $0 < t < x$, $0 < -t < x$ и $0 < x < t$, соответственно. С другой стороны, решая задачу (2.4)+(2.5)+(2.6) по методу Фурье, легко убедиться непосредственной проверкой, что решение этой задачи можно задавать по формулам:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x, \lambda)\, e^{i\lambda t}, \tag{2.11}$$

$$u_2(x, t) = \varphi_2(x, \lambda)\, e^{i\lambda t}. \tag{2.12}$$

Тогда, в силу единственности решения задачи (2.4)+(2.5)+(2.6), приравнивая правые части формул (1.7)+(1.8), (1.9)+(1.10) и (1.21)+(1.22) с правыми частями формул (2.11)+(2.12), соответственно находим тождества:

I. при $0 < t < x$

$$\varphi_1(x, \lambda)\, e^{i\lambda t} = k(x, t)\{\varphi_1(x + t, \lambda) + i\varphi_2(x + t, \lambda)\} + l(x, t)\{\varphi_1(x - t, \lambda) -$$

$$-i\varphi_2(x-t,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{K(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+L(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{2.13}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)\,e^{i\lambda t}=k(x,t)\,\{\varphi_2(x+t,\lambda)-i\varphi_1(x+t,\lambda)\}+l(x,t)\,\{\varphi_2(x-t,\lambda)+$$

$$+i\varphi_1(x-t,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{M(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+N(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds; \tag{2.14}$$

II. при $t<0,\ 0<-t<x$

$$\varphi_1(x,\lambda)\,e^{i\lambda t}=k(x,t)\,\{\varphi_1(x+t,\lambda)+i\varphi_2(x+t,\lambda)\}+l(x,t)\,\{\varphi_1(x-t,\lambda)-$$

$$-i\varphi_2(x-t,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t}\{\bar{K}(x,-t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+\bar{L}(x,-t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{2.15}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)\,e^{i\lambda t}=k(x,t)\,\{\varphi_2(x+t,\lambda)-i\varphi_1(x+t,\lambda)\}+l(x,t)\,\{\varphi_2(x-t,\lambda)+$$

$$+i\varphi_1(x-t,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_{x+t}^{x-t}\{\bar{M}(x,-t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+\bar{N}(x,-t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds; \tag{2.16}$$

III. при $0<x<t$

$$\varphi_1(x,\lambda)\,e^{i\lambda t}=k(x,t)\,\{\varphi_1(x+t,\lambda)+i\varphi_2(x+t,\lambda)\}+l_1(x,t)\,\{\varphi_1(t-x,\lambda)-$$

$$-i\varphi_2(t-x,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_0^{x+t}\{K(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+L(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\{K_1(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+L_1(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{2.17}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)\,e^{i\lambda t}=k(x,t)\,\{\varphi_2(x+t,\lambda)-i\varphi_1(x+t,\lambda)\}+l_1(x,t)\{\varphi_2(t-x,\lambda)+$$

$$+i\varphi_1(t-x,\lambda)\}+\frac{1}{2}\int_0^{x+t}\{M(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+N(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t-x}\{M_1(x,t,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+N_1(x,t,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds. \tag{2.18}$$

Обозначим через ε произвольное положительное число и через $g_\varepsilon^{(t)}$ — функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1°. $g_\varepsilon(t)$ четна, т. е. $g_\varepsilon(-t)=g_\varepsilon(t)$;

2°. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$;

3°. $g_\varepsilon(t)$ имеет кусочно-непрерывную первую производную.

Далее, обозначим через $\psi_\varepsilon(\lambda)$ преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е. положим

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)\, e^{i\lambda t}\, dt. \tag{2.19}$$

Так как согласно условию 1° функция $g_\varepsilon(t)$ четная, то из равенства (2.19) следует, что

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) \cos \lambda t dt. \tag{2.20}$$

Обозначим через x произвольную точку полупрямой $(0, \infty)$.

Предположим, что $x \geqslant \varepsilon$*. Умножим обе части тождества (2.13) на функцию $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до ε. Имеем

$$\varphi_1(x, \lambda) \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \int_0^\varepsilon k(x, t) \{\varphi_1(x+t, \lambda) + i\varphi_2(x+t, \lambda)\} g_\varepsilon(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^\varepsilon l(x, t) \{\varphi_1(x-t, \lambda) - i\varphi_2(x-t, \lambda)\} g_\varepsilon(t)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [K(x, t, s)\, \varphi_1(s, \lambda) + L(x, t, s)\, \varphi_2(s, \lambda)]\, ds \right\} g_\varepsilon(t)\, dt. \tag{2.21}$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и меняя порядок интегрирования в третьем интеграле, тождество (2.21) можно переписать в виде

$$\varphi_1(x, \lambda) \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \int_x^{x+\varepsilon} k(x, s-x)\, g_\varepsilon(s-x) \{\varphi_1(s, \lambda) + i\varphi_2(s, \lambda)\}\, ds +$$

$$+ \int_{x-\varepsilon}^{x} l(x, x-s)\, g_\varepsilon(x-s) \{\varphi_1(s, \lambda) - i\varphi_2(s, \lambda)\}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ \left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon} K(x, t, s)\, g_\varepsilon(t)\, dt \right] \varphi_1(s, \lambda) + \right.$$

$$\left. + \left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon} L(x, t, s)\, g_\varepsilon(t)\, dt \right] \varphi_2(s, \lambda) \right\} ds. \tag{2.22}$$

Умножая теперь обе части тождества (2.15) на функцию $g_\varepsilon(t)$ и интегрируя по t в пределах от $-\varepsilon$ до 0, а затем поступая так же, как и при получении тождества (2.22), мы находим

---

* Случай $x < \varepsilon$ изучается аналогично, поэтому мы его рассматривать не будем.

$$\varphi_1(x,\lambda)\int_{-\varepsilon}^{0} g_\varepsilon(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\int_{x-\varepsilon}^{x} k(s,s-x)\,g_\varepsilon(s-x)\,\{\varphi_1(s,\lambda)+i\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds+$$

$$+\int_{x}^{x+\varepsilon} l(x,x-s)\,g_\varepsilon(x-s)\,\{\varphi_1(s,\lambda)-i\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left\{\left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\widetilde{K}(x,t,s)\,g_\varepsilon(t)\,dt\right]\varphi_1(s,\lambda)+\right.$$

$$\left.+\left[\int_{|x-s|}^{\varepsilon}\widetilde{L}(x,t,s)\,g_\varepsilon(t)\,dt\right]\varphi_2(s,\lambda)\right\}ds. \qquad (2.23)$$

Суммируя тождества (2.22) и (2.23) и учитывая равенство (2.19), мы получим

$$\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\left\{\left[\left[k(x,s-x)+l(x,x-s)\right]g_\varepsilon(x-s)+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{\varepsilon}[K(x,t,s)+\widetilde{K}(x,t,s)]g_\varepsilon(t)\,dt\Big\}\varphi_1(s,\lambda)\,ds+$$

$$+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{i[k(x,s-x)-l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{\varepsilon}[L(x,t,s)+\widetilde{L}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt\right\}\varphi_2(s,\lambda)\,ds. \qquad (2.24)$$

Поступая аналогичным образом, из тождеств (2.14) и (2.16) найдем

$$\varphi_2(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{-i[k(x,s-x)-l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{\varepsilon}[M(x,t,s)+\widetilde{M}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt\}\,\varphi_1(s,\lambda)\,ds+$$

$$+\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{[k(x,s-x)+l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{\varepsilon}N(x,t,s)+\widetilde{N}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt\}\,\varphi_2(s,\lambda)\,ds. \qquad (2.25)$$

Для удобства записи введем обозначения:

$$K_\varepsilon(x,s)=[k(x,s-x)+l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}[K(x,t,s)+\widetilde{K}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt, \tag{2.26}$$

$$L_\varepsilon(x,s)=i[k(x,s-x)-l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}[L(x,t,s)+\widetilde{L}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt, \tag{2.27}$$

$$M_\varepsilon(x,s)=-i[k(x,s-x)-l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}[M(x,t,s)+\widetilde{M}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt, \tag{2.28}$$

$$N_\varepsilon(x,s)=[k(x,s-x)+l(x,x-s)]\,g_\varepsilon(x-s)+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}[N(x,t,s)+\widetilde{N}(x,t,s)]\,g_\varepsilon(t)\,dt. \tag{2.29}$$

Тогда тождества (2.24) и (2.25) примут следующий вид:

$$\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{K_\varepsilon(x,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+L_\varepsilon(x,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{2.30}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{M_\varepsilon(x,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+N_\varepsilon(x,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds. \tag{2.31}$$

Тождества (2.30) и (2.31) для нас являются основными и в дальнейшем они будут играть важную роль.

§ 3. Предварительная оценка спектральной матрицы

Пусть $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция класса $L_2^2(0,\infty)$, т. е.

$$\int\limits_0^\infty\{f_1^2(x)+f_2^2(x)\}\,dx<+\infty,$$

пусть вектор-функция $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$ по-прежнему является решением задачи

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1, \tag{3.1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x)\,y_2=\lambda y_2, \tag{3.2}$$

$$y_1(0)=1,\ y_2(0)=h. \tag{3.3}$$

Известно [2], что при данном h существует единственная (единственность доказана Б. М. Левитаном) неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, порождающая изометрическое отображение пространства вектор-функций $L^2(0, \infty)$ на пространство $L^2_{\{\rho(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ по формулам:

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \{f_1(x)\,\varphi_1(x, \lambda) + f_2(x)\,\varphi_2(x, \lambda)\}\,dx, \tag{3.4}$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,\varphi_1(x, \lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{3.5}$$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,\varphi_2(x, \lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{3.6}$$

где интегралы (3.4) и (3.5)—(3.6) сходятся в метриках пространств $L^2_{\{\rho(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\,d\rho(\lambda). \tag{3.7}$$

Пусть $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ и $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \infty)$, а $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — их преобразования Фурье в смысле (3.4). Легко видеть, что вектор-функции $f(x) \pm g(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \pm g_1(x) \\ f_2(x) \pm g_2(x) \end{pmatrix}$ имеют своими преобразованиями Фурье $F(\lambda) \pm G(\lambda)$. Поэтому в силу равенства Парсеваля (3.7) мы имеем

$$\int_0^\infty \{[f_1(x) + g_1(x)]^2 + [f_2(x) + g_2(x)]^2\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) + G(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda),$$

$$\int_0^\infty \{[f_1(x) - g_1(x)]^2 + [f_2(x) - g_2(x)]^2\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - G(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda).$$

Вычитая из верхнего равенства нижнее, находим

$$\int_0^\infty \{f_1(x)\,g_1(x) + f_2(x)\,g_2(x)\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\,G(\lambda)\,d\rho(\lambda). \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) будем называть обобщенным равенством Парсеваля. Введем следующую терминологию:

1. *Функцию $\rho(\lambda)$ будем называть спектральной функцией задачи* (2.1)+(2.2)+(2.3);

2. *Матрицу второго порядка*

$$\theta(x, s; \lambda)=\begin{pmatrix}\theta_{11}(x, s; \lambda), & \theta_{12}(x, s; \lambda)\\ \theta_{21}(x, s; \lambda), & \theta_{22}(x, s; \lambda)\end{pmatrix},$$

где функции $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$, $i, k=1, 2$ *определяются по формулам*

$$\theta_{ik}(x, s; \lambda)=\begin{cases}\int\limits_0^{\lambda}\varphi_i(x, \lambda)\,\varphi_k(s, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda<0,\\ -\int\limits_{\lambda}^{0}\varphi_i(x, \lambda)\,\varphi_k(s, \lambda)\,d\rho(\lambda), & \lambda<0,\\ 0, & \lambda=0,\end{cases} \tag{3.9}$$

мы будем называть спектральной матрицей задачи (2.1) + + (2.2) + (2.3). Очевидно, что при $x=s=0$, в силу условия (3.3), мы имеем

$$\theta_{11}(0, 0; \lambda)=\rho(\lambda)-\rho(0). \tag{3.10}$$

В этом параграфе мы получим некоторые оценки для спектральной матрицы $\theta(x, s; \lambda)$.

В предыдущем параграфе мы получили тождества

$$\varphi_1(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{K_\varepsilon(x, s)\,\varphi_1(s, \lambda)+L_\varepsilon(x, s)\,\varphi_2(s, \lambda)\}\,ds, \tag{3.11}$$

$$\varphi_2(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{M_\varepsilon(x, s)\,\varphi_1(s, \lambda)+N_\varepsilon(x, s)\,\varphi_2(s, \lambda)\}\,ds. \tag{3.12}$$

Тождества (3.11) и (3.12) означают, что для любого $x\geqslant 0$ функции $\varphi_1(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)$ и $\varphi_2(x, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)$ являются преобразованиями Фурье вектор-функций, равных $\begin{pmatrix}K_\varepsilon(x, t, s)\\ L_\varepsilon(x, t, s)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}M_\varepsilon(x, t, s)\\ N_\varepsilon(x, t, s)\end{pmatrix}$, соответственно, при $|x-s|\leqslant\varepsilon$ и равных нулю при $|x-s|>\varepsilon$. Поэтому, если $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}\subset$ $\subset L^2(0, \infty)$, то, в силу обобщенного равенства Парсеваля (3.8), из равенств (3.4)—(3.11) и (3.4)—(3.12) соответственно получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x, \lambda)\,F(\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}\{f_1(s)\,K_\varepsilon(x, t, s)+f_2(s)\,L_\varepsilon(x, t, s)\}\,ds, \tag{3.13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x, \lambda)\,F(\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int\limits_0^{\infty}\{f_1(s)\,M_\varepsilon(x, t, s)+f_2(s)\,N_\varepsilon(x, t, s)\}\,ds, \tag{3.14}$$

где функции $K_\varepsilon(x, s)$, $L_\varepsilon(x, s)$, $M_\varepsilon(x, s)$ и $N_\varepsilon(x, s)$ определяются равенствами (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно.

Лемма 3.1. Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3.1)+(3.2) суммируемы в каждом конечном интервале, и если (x_0, x_1) — произвольный конечный интервал вещественной оси, то существует постоянная $C = C(x_0, x_1)$ такая, что для любых x и s, принадлежащих интервалу (x_0, x_1), и для всех a справедливы оценки

$$\bigvee_{a}^{a+1}\{\vartheta_{ik}(x, s; \lambda)\} = \int_{a}^{a+1} |\varphi_i(x, \lambda)| \cdot |\varphi_k(s, \lambda)|\, d\rho(\lambda) < C, \quad (i; k = 1, 2). \tag{3.15}$$

Оценки (3.15) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Пусть функция $g_\varepsilon(t)$ определяется равенством

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |t|), & |t| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |t| > 0. \end{cases} \tag{3.16}$$

Тогда

$$\psi_\varepsilon(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = \left(\frac{\sin \dfrac{\varepsilon\lambda}{2}}{\dfrac{\varepsilon\lambda}{2}} \right)^2. \tag{3.17}$$

Пусть a — произвольное положительное число. Положим

$$g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\, e^{-iat},$$

причем функция $g_\varepsilon(t)$ по-прежнему определяется по формуле (3.16). В таком случае, согласно (3.17), мы имеем

$$\psi_\varepsilon(\lambda, a) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t, a)\, e^{i\lambda t}\, dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(t)\, e^{i(\lambda - a)t}\, dt = \left(\frac{\sin \dfrac{\varepsilon(\lambda - a)}{2}}{\dfrac{\varepsilon(\lambda - a)}{2}} \right)^2. \tag{3.18}$$

Поэтому из тождеств (3.11), (3.12) и (3.18), в силу равенства Парсеваля, следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin \dfrac{(\lambda - a)\varepsilon}{2}}{\dfrac{(\lambda - a)\varepsilon}{2}} \right]^4 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{[K_\varepsilon(x, s; a)]^2 + [L_\varepsilon((x, s; a)]^2\} ds, \tag{3.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin \dfrac{(\lambda - a)\varepsilon}{2}}{\dfrac{(\lambda - a)\varepsilon}{2}} \right]^4 d\rho(\lambda) = \int_0^{\infty} \{[M_\varepsilon(x, s; a)]^2 + [N_\varepsilon(x, s; a)]^2\}\, ds, \tag{3.20}$$

где функции $K_\varepsilon(x, s; a)$, $L_\varepsilon(x, s; a)$, $M_\varepsilon(x, s; a)$ и $N_\varepsilon(x, s; a)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно, в которых функция $g_\varepsilon(t)$ заменена на $g_\varepsilon(t, a) = g_\varepsilon(t)\, e^{-iat}$. А так как функция $g_\varepsilon(t)$ финитна, то эти функции тоже финитны и, в силу суммируемости функций $p(x)$ и $r(x)$, суммируемы и они. Поэтому интегралы, стоящие в правых частях равенств (3.19) и (3.20), существуют. Тогда из этих равенств при $\varepsilon = 2$ следуют оценки

$$\int_0^\infty \varphi_1^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin(\lambda - a)}{\lambda - a}\right]^4 d\rho(\lambda) < C,$$

$$\int_0^\infty \varphi_2^2(x, \lambda) \left[\frac{\sin(\lambda - a)}{\lambda - a}\right]^4 d\rho(\lambda) < C$$

и, значит, тем более ($a > 0$)

$$\int_a^{a+1} \varphi_1^2(x, \lambda) \frac{\sin^4(\lambda - a)}{(\lambda - a)^4} d\rho(\lambda) < C, \tag{3.21}$$

$$\int_a^{a+1} \varphi_2^2(x, \lambda) \frac{\sin^4(\lambda - a)}{(\lambda - a)^4} d\rho(\lambda) < C. \tag{3.22}$$

Так как для $0 < x < 1$ справедливо неравенство $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, то из (3.21) и (3.22) следуют оценки

$$\int_a^{a+1} \varphi_1^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) < \frac{\pi^4}{16} C = C_1, \tag{3.23}$$

$$\int_a^{a+1} \varphi_2^2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda) < \frac{\pi^4}{16} C = C_1. \tag{3.24}$$

Оценки (3.23) и (3.24) доказывают лемму для функций $\theta_{11}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{22}(x, s; \lambda)$ при $s = x$. Оценки (3.15) для функций $\theta_{11}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{22}(x, s; \lambda)$ при $s \neq x$ следует из (3.23) и (3.24) в силу неравенства Коши-Буняковского. Аналогично завершается доказательство леммы для функций $\theta_{12}(x, s; \lambda)$ и $\theta_{21}(x, s; \lambda)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то для всех a*

$$\rho(a + 1) - \rho(a) < C. \tag{3.25}$$

Доказательство леммы следует из оценки (3.23), если в ней положить $x = 0$ и учесть, что $\varphi_1(0, \lambda) = 1$.

§ 4. Асимптотическое поведение спектральной матрицы

Пусть $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция из класса $L^2(0, \infty)$, равная нулю вне некоторого конечного интервала. В таком случае ее преобразование Фурье

$$F(\lambda)=\int_0^\infty \{f_1(x)\,\varphi_1(x, \lambda)+f_2(x)\,\varphi_2(x, \lambda)\}\,dx \tag{4.1}$$

существует в обычном смысле.

Подставляя выражение $F(\lambda)$ из (4.1) в (3.13) и (3.14), а затем, меняя порядок интегрирования в левых частях этих тождеств, что возможно, в силу оценки (3.25) и теоремы Фубини, получим

$$\int_0^\infty \{f_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda)\,\varphi_1(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)+f_2(s)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda)\,\varphi_2(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)\}\,ds=\int_0^\infty \{f_1(s)\,K_\varepsilon(x, s)+f_2(s)\,L_\varepsilon(x, s)\}\,ds, \tag{4.2}$$

$$\int_0^\infty \{f_1(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda)\,\varphi_1(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)+f_2(s)\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda)\,\varphi_2(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)\}\,ds=\int_0^\infty \{f_1(s)\,M_\varepsilon(x, s)+f_2(s)\,N_\varepsilon(x, s)\}\,ds. \tag{4.3}$$

Благодаря произвольности вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, из равенств (4.2) и (4.3) следуют равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda)\,\varphi_1(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=K_\varepsilon(x, s), \tag{4.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x, \lambda)\,\varphi_2(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=L_\varepsilon(x, s), \tag{4.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda)\,\varphi_1(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=M_\varepsilon(x, s), \tag{4.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(x, \lambda)\,\varphi_2(s, \lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=N_\varepsilon(x, s), \tag{4.7}$$

где функции $K_\varepsilon(x, s)$, $L_\varepsilon(x, s)$, $M_\varepsilon(x, s)$ и $N_\varepsilon(x, s)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29) соответственно, и как видно из последних формул, все эти функции равны нулю, когда $(x-s)>\varepsilon$. Теперь, полагая

$$K_\varepsilon(x, s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}\{K(x, t, s)+\bar{K}(x, t, s)\}\, g_\varepsilon(t)\, dt, \tag{4.8}$$

$$L_\varepsilon(x, s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}\{L(x, t, s)+\bar{L}(x, t, s)\}\, g_\varepsilon(t)\, dt, \tag{4.9}$$

$$M_\varepsilon(x, s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}\{M(x, t, s)+\bar{M}(x, t, s)\}\, g_\varepsilon(t)\, dt, \tag{4.10}$$

$$N_\varepsilon(x, s)=\frac{1}{2}\int\limits_{|x-s|}^{\varepsilon}\{N(x, t, s)+\bar{N}(x, t, s)\}\, g_\varepsilon(t)\, dt \tag{4.11}$$

и учитывая формулы (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), в силу определения спектральной матрицы $\theta(x, s; \lambda)=|\theta_{ik}(x, s; \lambda)|$, $(i, k=1, 2)$, т. е. выражения (3.9), тождества (4.4)–(4.7) примут вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\theta_{11}(x, s; \lambda)=$$

$$=\begin{cases}[k(x, s-x)+l(x, x-s)]\, g_\varepsilon(x-s)+K_\varepsilon(x, s), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|>\varepsilon,\end{cases} \tag{4.12}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\theta_{12}(x, s; \lambda)=$$

$$=\begin{cases}i[k(x, s-x)-l(x, x-s)]\, g_\varepsilon(x-s)+L_\varepsilon(x, s), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|>\varepsilon,\end{cases} \tag{4.13}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\theta_{21}(x, s; \lambda)=$$

$$=\begin{cases}-i[k(x, s-x)-l(x, x-s)]\, g_\varepsilon(x-s)+M_\varepsilon(x, s), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|>\varepsilon,\end{cases} \tag{4.14}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\theta_{22}(x, s; \lambda)=$$

$$=\begin{cases}[k(x, s-x)+l(x, x-s)]\, g_\varepsilon(x-s)+N_\varepsilon(x, s), & |x-s|\leqslant\varepsilon,\\ 0, & |x-s|>\varepsilon.\end{cases} \tag{4.15}$$

Рассмотрим теперь задачу (2.1) + (2.2) + (2.10) при условиях $p(x)=r(x)\equiv 0$ и $h=0$, т. е. задачу

$$\frac{dy_2}{dx}=\lambda y_1, \tag{4.16}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}=\lambda y_2, \tag{4.17}$$

$$y_1(0)=1,\ y_2(0)=0. \tag{4.18}$$

Наша ближайшая цель—выписывать тождества, аналогичные тождествам (4.12)—(4.15), для задачи (4.16) + (4.17) + (4.18). Как легко видеть, в этом случае все функции $K(x, t, s)$, $\widetilde{K}(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $\widetilde{L}(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $\widetilde{M}(x, t, s)$, $N(x, t, s)$ и $\widetilde{N}(x, t, s)$ тождественно обращаются в нуль. Поэтому в силу равенств (4.8)—(4.11)

$$K_1^{\cdot}(x, s) = L_1^{\cdot}(x, s) = M_1^{\cdot}(x, s) = N_1^{\cdot}(x, s) \equiv 0. \tag{4.19}$$

Далее, из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. равенств (1.11) и (1.72), следует, что при $p(x) = r(x) \equiv 0$

$$k(x, s-x) + l(x, x-s) \equiv 1, \tag{4.20}$$

$$k(x, s-x) - l(x, x-s) \equiv 0. \tag{4.21}$$

И, наконец, так как в этом случае $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$, $\varphi_2(x, \lambda) = \sin \lambda x$, то спектральная матрица $\|\theta^*(x, s; \lambda)\| = \|\theta_{ik}^*(x, s, \lambda)\|$, $(i, k = 1, 2)$ задачи (4.16) + (4.17) + (4.18), согласно (3.9), определяется по формулам

$$\theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \cos \mu x \cdot \cos \mu s \, d\mu, \tag{4.22}$$

$$\theta_{12}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \cos \mu x \cdot \sin \mu s \, d\mu, \tag{4.23}$$

$$\theta_{21}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \sin \mu x \cdot \cos \mu s \, d\mu, \tag{4.24}$$

$$\theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \sin \mu x \cdot \sin \mu s \, d\mu. \tag{4.25}$$

Поэтому, в силу равенств (4.19), (4.20) и (4.21), тождества (4.12) — (4.15) для задачи (4.16) + (4.17) + (4.18) соответственно примут вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda)\, d_\lambda \theta_{11}^*(x, s; \lambda) = \begin{cases} g_1(x-s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda)\, d_\lambda \theta_{12}^*(x, s; \lambda) = 0, \tag{4.27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda)\, d_\lambda \theta_{21}^*(x, s; \lambda) = 0, \tag{4.28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda)\, d_\lambda \theta_{22}^*(x, s; \lambda) = \begin{cases} g_2(x-s), & |x-s| < \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > 0. \end{cases} \tag{4.29}$$

Теперь, вычитая из тождеств (4.12) — (4.15) соответственно тождества (4.26) — (4.29), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda)\, d_\lambda \{\theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}^*(x, s; \lambda)\} =$$

$$= \begin{cases} [k(x,s-x) + l(x, x-s) - 1]\, g_1(x-s) + K_1^*(x, s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(\lambda)\, d_\lambda \{\theta_{12}(x, s; \lambda) - \theta_{12}^*(x, s; \lambda)\} =$$

$$= \begin{cases} i[k(x, s-x) - l(x, x-s)] g_1(x-s) + L_1^*(x, s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon, \end{cases} \tag{4.31}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda)\, d_\lambda \{\theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}^*(x, s; \lambda)\} =$$

$$= \begin{cases} -i\,[k(x, s-x) - l(x, x-s)]\, g_1(x-s) + M_1^*(x, s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \tag{4.32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(\lambda)\, d_\lambda \{\theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}^*(x, s; \lambda)\} =$$

$$= \begin{cases} [k(x, s-x)\, l(x, x-s) - 1]\, g_1(x-s) + N_1^*(x, s), & |x-s| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & |x-s| > \varepsilon. \end{cases} \tag{4.33}$$

Займемся теперь преобразованием правых частей тождеств (4.30) — (4.33). С этой целью положим

$$\alpha_{11}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} \cos \lambda t\, dt, \tag{4.34}$$

$$\alpha_{12}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \{L(x, t, s) + \bar{L}(x, t, s)\} \cos \lambda t\, dt, \tag{4.35}$$

$$\alpha_{21}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \{M(x, t, s) + \bar{M}(x, t, s)\} \cos \lambda t\, dt, \tag{4.36}$$

$$\alpha_{22}(x, s; \lambda) = \frac{1}{2} \int_{|x-s|}^{\infty} \{N(x, t, s) + \bar{N}(x, t, s)\} \cos \lambda t\, dt. \tag{4.37}$$

С другой стороны, согласно формуле (2.20), имеем

$$\psi_k(\lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_k(t) \cos \lambda t\, dt. \tag{4.38}$$

Тогда в силу равенства Парсеваля для cos-преобразований Фурье из равенств (4.34) — (4.37) и (4.38) соответственно получим (см. также формулы (4.8)—(4.11))

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,\alpha_{11}(x,s;\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{x}\{K(x,t,s)+\widetilde{K}(x,t,s)\}\,g_\varepsilon(t)\,dt=K_\varepsilon^{*}(x,s), \tag{4.39}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,\alpha_{12}(x,s;\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{x}\{L(x,t,s)+\widetilde{L}(x,t,s)\}\,g_\varepsilon(t)\,dt=L_\varepsilon^{*}(x,s), \tag{4.40}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,\alpha_{21}(x,s;\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{x}\{M(x,t,s)+\widetilde{M}(x,t,s)\}\,g_\varepsilon(t)\,dt=M_\varepsilon^{*}(x,s), \tag{4.41}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,\alpha_{22}(x,s;\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int_{|x-s|}^{x}\{N(x,t,s)+\widetilde{N}(x,t,s)\}\,g_\varepsilon(t)\,dt=N_\varepsilon^{*}(x,s). \tag{4.42}$$

Далее, обращая формулу (4.38), получим

$$g_\varepsilon(x-s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\cos\lambda(x-s)\,d\lambda. \tag{4.43}$$

На основании (4.39) — (4.43) тождества (4.30) — (4.33) соответственно примут окончательный вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda\,\Phi_{11}(x,s;\lambda)=0, \tag{4.44}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda\,\Phi_{12}(x,s;\lambda)=0, \tag{4.45}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda\,\Phi_{21}(x,s;\lambda)=0, \tag{4.46}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\lambda\,\Phi_{22}(x,s;\lambda)=0, \tag{4.47}$$

где положено

$$\Phi_{11}(x,s;\lambda)=\theta_{11}(x,s;\lambda)-\theta_{11}^{*}(x,s;\lambda)-$$

$$-\{k(x,s-x)+l(x,x-s)\}\,\frac{\sin\lambda(x-s)}{\pi(x-s)}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}\alpha_{11}(x,s;\nu)\,d\nu, \tag{4.48}$$

$$\Phi_{12}(x,s;\lambda)=\theta_{12}(x,s;\lambda)-\theta_{12}^{*}(x,s;\lambda)-$$

$$-i\{k(x,s-x)-l(x,x-s)\}\,\frac{\sin\lambda(x-s)}{\pi(x-s)}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}\alpha_{12}(x,s;\nu)\,d\nu, \tag{4.49}$$

$$\Phi_{21}(x, s; \lambda) = \theta_{21}(x, s; \lambda) - \theta_{21}^{*}(x, s; \lambda) +$$

$$+ i\{k(x, s-x) - l(x, x-s)\}\frac{\sin\lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} z_{21}(x, s; \nu)\, d\nu, \qquad (4.50)$$

$$\Phi_{22}(x, s; \lambda) = \theta_{22}(x, s; \lambda) - \theta_{22}^{*}(x, s; \lambda) -$$

$$-\{k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1\}\frac{\sin\lambda(x-s)}{\pi(x-s)} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} z_{22}(x, s; \nu)\, d\nu. \qquad (4.51)$$

Тождества (4.44)—(4.47) и тауберова теорема для интегралов Фурье В. А. Марченко [5] дают возможность изучить поведение функций $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$, $(i, k = 1, 2)$ при $|\lambda| \to \infty$. Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 4.1. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (3.1)+(3.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных x и s и для всех d справедливы оценки*

$$\bigvee_a^{a+1}\{\Phi_{ik}(x, s; \lambda)\} < C \quad (i, k = 1, 2). \qquad (4.52)$$

Оценки (4.52) имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно получить оценку (4.52) для каждого члена входящих в выражения функций $\Phi_{ik}(x, s; \lambda)$, т. е. в правых частях равенств (4.48)—(4.51). Для функций $\theta_{ik}(x, s; \lambda)$ $(i, k = 1, 2)$ оценка (4.52) совпадает с оценкой (3.15). Для функций $\theta_{ik}^{*}(x, s; \lambda)$ оценка (4.52) получается непосредственно, если учесть явный вид этих функций, т. е. равенства (4.22)—(4.25). Далее из определения функций $\alpha_{ik}(x, s; \lambda)$ $(i, k = 1, 2)$, т. е. равенств (4.34)—(4.37), в силу непрерывности функций $K(x, t, s)$, $\overline{K}(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $\overline{L}(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $\overline{M}(x, t, s)$, $N(x, t, s)$, $\overline{N}(x, t, s)$ и известной леммы Римана-Лебега следует, что в каждой конечной области изменения переменных x и s справедливы равенства

$$\lim_{\lambda \to \infty} \alpha_{ik}(x, s; \lambda) = 0 \quad (i, k = 1, 2).$$

Поэтому при $a \to +\infty$

$$\bigvee_a^{a+1}\left\{\int_0^{\lambda} \alpha_{ik}(x, s; \nu)\, d\nu\right\} = o(1) \quad (i, k = 1, 2). \qquad (4.53)$$

И, наконец, для остальных членов в равенствах (4.48)—(4.51) (по одному члену в каждом равенстве) оценка (4.52) получается непосредственно, если учесть явный вид этих членов. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *При любых фиксированных x и s справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\alpha_{ik}(x, s; \nu)\,d\nu = 0 \quad (i, k = 1, 2). \tag{4.54}$$

Равенства (4.54) *имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных* x *и* s.

Доказательство. Докажем равенство (4.54) сначала для функции $\alpha_{11}(x, s; \nu)$. В силу определения этой функции, т. е. равенства (4.34), имеем

$$\int_0^{\lambda}\alpha_{11}(x, s; \nu)\,d\nu = \int_0^{\lambda}\left\{\int_{|x-s|}^{a}[K(x, t, s) + \widetilde{K}(x, t, s)]\cos \nu t\,dt\right\}d\nu =$$

$$= \int_{|x-s|}^{a}[K(x, t, s) + \widetilde{K}(x, t, s)]\,\frac{\sin \lambda t}{t}\,dt. \tag{4.55}$$

Поэтому при $s \neq x$ лемма следует из (4.55), в силу леммы Римана — Лебега. Если $s = x$, то

$$\int_0^{\lambda}\alpha_{11}(x, x; \nu)\,d\nu = \int_0^{a}[K(x, t, x) + \widetilde{K}(x, t, x]\frac{\sin \lambda t}{t}dt. \tag{4.56}$$

Далее, согласно равенствам (1.28) и (1.30), мы имеем

$$K(x, 0, x) + \widetilde{K}(x, 0, x) = 0. \tag{4.57}$$

Тогда, так как функция $K(x, t, x) + \widetilde{K}(x, t, x)$ дифференцируема по t, то в силу равенства (4.57)

$$K(x, t, x) + \widetilde{K}(x, t, x) = O(t). \tag{4.58}$$

Поэтому в этом случае равенство (4.54) является следствием из известной теоремы теории рядов Фурье: если при $t \to 0$, $\varphi(t) - \varphi(0) = O(t^{\alpha})$, $\alpha > 0$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{a}\varphi(t)\,\frac{\sin \lambda t}{t}\,dt = \varphi(0). \tag{4.59}$$

Доказательство леммы для функций $\alpha_{12}(x, s; \nu)$, $\alpha_{21}(x, s; \nu)$ и $\alpha_{22}(x, s; \nu)$ проводится аналогично, в силу равенств (1.28)—(1.32), которые обеспечивают выполнение равенства (4.57) для соответствующих ядер в представлениях этих функций в виде (4.56).

Теперь докажем основную теорему этого параграфа.

Теорема 4.1. *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *системы* (3.1) + (3.2) *суммируемы в каждом конечном интервале, то при любых фиксированных* x *и* s *справедливы асимптотические формулы*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\theta_{11}(x, s; \lambda) - \theta_{11}(x, s; -\lambda) - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin \lambda(x+s)}{x+s} + \frac{\sin \lambda(x-s)}{x-s}\right] + \right.$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\cdot\sin^2\left[\frac{1}{4}\int_s^x (p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\Bigg\}=0. \quad (4.60)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg\{\theta_{12}(x,s;\lambda)-\theta_{12}(x,s;-\lambda)-\frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\times$$

$$\times\sin\left[\frac{1}{2}\int_s^x (p(\tau)+r(\tau)\,d\tau\right]\Bigg\}=0, \quad (4.61)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg\{\theta_{21}(x,s;\lambda)-\theta_{21}(x,s;-\lambda)+\frac{2}{\pi}\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\times$$

$$\times\sin\left[\frac{1}{2}\int_s^x p(\tau)+r(\tau))\,d\tau\right]\Bigg\}=0, \quad (4.62)$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Bigg\{\theta_{22}(x,s;\lambda)-\theta_{22}(x,s;-\lambda)+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda(x+s)}{x+s}-\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\right]+$$

$$+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\cdot\sin^2\left[\frac{1}{4}\int_s^x (p(\tau)+r(\tau)\,d\tau\right]\Bigg\}=0. \quad (4.63)$$

Асимптотические формулы (4.60)—(4.63) *имеют место равномерно в каждой конечной области изменения переменных* x *и* s.

Доказательство. В силу оценок (4.52) и тождеств (4.44)—(4.47) применима тауберова теорема для интегралов Фурье В. А. Марченко [5], согласно которой равномерно в каждой конечной области изменения переменных x и s справедливы равенства

$$\lim_{\lambda\to\infty}\{\Phi_{ik}(x,s;\lambda)-\Phi_{ik}(x,s;-\lambda)\}=0 \quad (i,\ k=1,\ 2). \quad (4.64)$$

Докажем формулу (4.60). Остальные доказываются аналогично. Из определения функции $\Phi_{11}(x,s;\lambda)$, т. е. равенства (4.48), следует, что

$$\Phi_{11}(x,s;\lambda)-\Phi_{11}(x,s;-\lambda)=\theta_{11}(x,s;\lambda)-\theta_{11}(x,s;-\lambda)-[\theta_{11}^{*}(x,s;\lambda)-\theta_{11}(x;s-$$

$$-\lambda)]-\frac{2}{\pi}[k(x,s-x)+\quad\quad-\quad-\quad\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}-\frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \alpha_{11}(x,s;\nu)\,d\nu. \quad (4.65)$$

Вычислим теперь каждый член правой части равенства (4.65). Из определения функции $\theta_{11}^{*}(x,s;\lambda)$, т. е. из равенства (4.22), следует

$$\theta_{11}^{*}(x,\ s;\lambda)-\theta_{11}^{*}(x,s;-\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \cos\lambda x\cdot\cos\lambda s\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda(x+s)}{x+s}+\frac{\sin\lambda(x-s)}{x-s}\right]. \quad (4.66)$$

Далее из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. из равенств (1.11) и (1.12), следует

$$k(x, s-x)+l(x, x-s)=\cos\left\{\frac{1}{2}\int_s^x [p(\tau)+r(\tau)]\,d\tau\right\},$$

поэтому

$$-\frac{2}{\pi}[k(x, s-x)+l(x, x-s)-1]=\frac{4}{\pi}\sin^2\left\{\frac{1}{4}\int_s^x [p(\tau)+r(\tau)]\,d\tau\right\}. \tag{4.67}$$

И так как в силу леммы 4.2

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda a_{11}(x, s; \nu)\,d\nu=0,$$

то формула (4.60) следует из (4.64) (при $i=k=1$), в силу равенств (4.65), (4.66) и (4.67). Теорема доказана.

Из теоремы 4.1, точнее из формулы (4.60), следует

Теорема 4.2. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\rho(\lambda)-\rho(-\lambda)-\frac{2}{\pi}\lambda\right\}=0. \tag{4.68}$$

В самом деле, полагая в формуле (4.60) $x=s=0$, мы получим

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\{\theta_{11}(0, 0; \lambda)-\theta_{11}(0, 0; -\lambda)-\frac{2}{\pi}\lambda\right\}=0,$$

что совпадает с формулой (4.68), так как в силу равенств (3.10)

$$\theta_{11}(0, 0; \lambda)=\rho(\lambda)-\rho(0).$$

Теорема доказана.

§ 5. Некоторые предварительные оценки

В следующем параграфе мы докажем теорему о равносходимости разложения произвольной вектор-функции $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x)\end{pmatrix}$ с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ по собственным вектор-функциям задачи

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1, \tag{5.1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x)\,y_2=\lambda y_2, \tag{5.2}$$

$$y_2(0)-hy_1(0)=0 \tag{5.3}$$

и разложения в обычный интеграл Фурье, притом при минимальном требовании на коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ — суммируемости в каждом конечном интервале. Для этого мы в настоящем параграфе получим

некоторые предварительные оценки для отрезков разложений по собственным функциям.

В параграфе 2 нами получены тождества (см. (2.30) и (2.31):

$$\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{K_\varepsilon(x,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+L_\varepsilon(x,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{5.4}$$

$$\varphi_2(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{M_\varepsilon(x,s)\,\varphi_1(s,\lambda)+N_\varepsilon(x,s)\,\varphi_2(s,\lambda)\}\,ds, \tag{5.5}$$

где вектор-функция $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, как и прежде, означает решение системы (5.1)+(5.2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0,\lambda)=1,\quad \varphi_2(0,\lambda)=h, \tag{5.3'}$$

а функции $K_\varepsilon(x,s)$, $L_\varepsilon(x,s)$, $M_\varepsilon(x,s)$ и $N_\varepsilon(x,s)$ определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29), соответственно.

Пусть $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция класса $L^2(0,\infty)$.

Обозначим через $F(\lambda)$ обобщенное преобразование Фурье вектор-функции $f(x)$, т. е. положим

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\{f_1(x)\,\varphi_1(x,\lambda)+f_2(x)\,\varphi_2(x,\lambda)\}\,dx. \tag{5.6}$$

Из тождеств (5.4) и (5.5) следует, что функции $\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)$ и $\varphi_2(x,\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)$ при каждом фиксированном x являются обобщенными преобразованиями Фурье соответственно вектор-функций, равных $\begin{pmatrix}K_\varepsilon(x,t,s)\\ L_\varepsilon(x,t,s)\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}M_\varepsilon(x,t,s)\\ N_\varepsilon(x,t,s)\end{pmatrix}$ при $x-\varepsilon\leqslant s\leqslant x+\varepsilon$ и равных нулю вне этого интервала. Поэтому, в силу обобщенного равенства Парсеваля (3.8), из тождеств (5.4)—(5.5) и равенства (5.6) соответственно следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x,\lambda)\,F(\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{K_\varepsilon(x,s)\,f_1(s)+L_\varepsilon(x,s)\,f_2(s)\}\,ds, \tag{5.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_2(x,\lambda)\,F(\lambda)\,\psi_\varepsilon(\lambda)\,d\rho(\lambda)=\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\{M_\varepsilon(x,s)\,f_1(s)+N_\varepsilon(x,s)\,f_2(s)\}\,ds. \tag{5.8}$$

Введем в рассмотрение функции

$$S_1(x,\lambda)=\int_0^\lambda F(\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{5.9}$$

$$S_2(x,\lambda)=\int_0^\lambda F(\lambda)\,\varphi_2(x,\lambda)\,d\rho(\lambda). \tag{5.10}$$

Тогда равенства (5.7) и (5.8) примут вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda S_1(x,\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{K_\varepsilon(x,s) f_1(s) + L_\varepsilon(x,s) f_2(s)\}\, ds, \quad (5.11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda S_2(s,\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{M_\varepsilon(x,s) f_1(s) + N_\varepsilon(x,s) f_2(s)\}\, ds. \quad (5.12)$$

Выпишем формулы, аналогичные формулам (5.11) и (5.12), для задачи (5.1) + (5.2) + (5.3) при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $h = 0$. С этой целью найдем новые представления для функций $S_1(x,\lambda)$ и $S_2(x,\lambda)$. Подставляя значение функций $F(\lambda)$ из (5.6) в выражения (5.9) и (5.10), а затем меняя порядок интегрирования, получим

$$S_1(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_0^{\lambda} \varphi_1(x,\lambda)\, \varphi_1(s,\lambda)\, d\rho(\lambda) +$$

$$+ f_2(s) \int_0^{\lambda} \varphi_1(x,\lambda)\, \varphi_2(x,\lambda)\, d\rho(\lambda)\}\, ds, \quad (5.13)$$

$$S_2(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s) \int_0^{\lambda} \varphi_2(x,\lambda)\, \varphi_1(s,\lambda)\, d\rho(\lambda) +$$

$$+ f_2(s) \int_0^{\lambda} \varphi_2(x,\lambda)\, \varphi_2(s,\lambda)\, d\rho(\lambda)\}\, ds. \quad (5.14)$$

Тогда, в силу определения спектральной матрицы $\vartheta(x,s;\lambda) = \|\theta_{ik}(x,s;\lambda)\|_1^2$, $i, k = 1, 2$ (см. равенства (3.9)), равенства (5.13) и (5.14) приобретают вид

$$S_1(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{11}(x,s;\lambda) + f_2(s)\, \theta_{12}(x,s;\lambda)\}\, ds, \quad (5.15)$$

$$S_2(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{21}(x,s;\lambda) + f_2(s)\, \theta_{22}(x,s;\lambda)\}\, ds. \quad (5.16)$$

Положим

$$S_1^*(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{11}^*(x,s;\lambda) + f_2(s)\, \theta_{12}^*(x,s;\lambda)\}\, ds, \quad (5.17)$$

$$S_2^*(x,\lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\, \theta_{21}^*(x,s;\lambda) + f_2(s)\, \theta_{22}^*(x,s;\lambda)\}\, ds. \quad (5.18)$$

Далее, если учесть, что при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $k = 0$ (см. вывод тождеств (4.26) — (4.29)), в силу равенств (4.19) — (4.21) $K_\varepsilon(x,s) = N_\varepsilon(x,s) = g_\varepsilon(x-s)$, а $L_\varepsilon(x,s) = M_\varepsilon(x,s) = 0$, то в рассматриваемом случае равенства (5.11) и (5.12) соответственно примут вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\, S_1^*(x,\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_1(s)\, g_\varepsilon(x-s)\, ds, \tag{5.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda\, S_2^*(x,\lambda) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_2(s)\, g_\varepsilon(x-s)\, ds. \tag{5.20}$$

Теперь, вычитая из равенств (5.11) и (5.12) соответственно равенства (5.19) и (5.20), окончательно получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda \{S_1(x,\lambda) - S_1^*(x,\lambda)\} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \{[K_\varepsilon(x,s) - g_\varepsilon(x-s)] f_1(s) + L_\varepsilon(x,s) f_2(s)\}\, ds, \tag{5.21}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda \{S_2(x,\lambda) - S_2^*(x,\lambda)\} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [M_\varepsilon(x,s) f_1(s) + [N_\varepsilon(x,s) - g_\varepsilon(x-s)] f_2(s)\}\, ds. \tag{5.22}$$

Лемма 5.1. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы (5.1)+(5.2) суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном x и при $a \to \infty$ справедливы оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x,\lambda)\} = \int_a^{a+1} |\varphi_i(x,\lambda)| \cdot |F(\lambda)|\, d\rho(\lambda) = o(1) \quad (i=1,2). \tag{5.23}$$

Оценки (5.23) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функций $S_1(x,\lambda)$, т. е. равенств (5.9) и (5.10), мы имеем

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x,\lambda)\} = \int_a^{a+1} |\varphi_i(x,\lambda)| \cdot |F(\lambda)|\, d\rho(\lambda) \quad (i=1,2).$$

Поэтому согласно неравенству Коши-Буняковского, из последнего равенства следует

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i(x,\lambda)\} = \left(\int_a^{a+1} |\varphi_i(x,\lambda)|^2\, d\rho(\lambda)\right)^{1/2} \left(\int_a^{a+1} |F(\lambda)|^2\, d\rho(\lambda)\right)^{1/2} \quad (i=1,2). \tag{5.24}$$

Теперь, с одной стороны, согласно лемме 3.1

$$\int_a^{a+1} |\varphi_i(x,\lambda)|^2\, d\rho(\lambda) = \bigvee_a^{a+1} \{\theta_{il}(x,x;\lambda)\} < C \quad (i=1,2). \tag{5.25}$$

С другой стороны, так как (см. равенство (3.7))

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) < +\infty,$$

то при $a \to \infty$

$$\int_a^{a+1} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = o(1). \tag{5.26}$$

Поэтому оценки (5.23) следуют из неравенств (5.24), в силу оценок (5.25) и (5.26). Лемма доказана.

Из определения функций $S_1^*(x, \lambda)$ и $S_2^*(x, \lambda)$, т. е. равенств (5.17) и (5.18) и из явного вида функций $\theta_{ik}^*(x, s; \lambda)$ (см. формулы (4.22) — — (4.25) непосредственно следует

Лемма 5.2. *Равномерно на всей полупрямой* $(0, \infty)$ *при* $a \to \infty$ *справедливы оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \{S_i^*(x, \lambda)\} = o(1) \quad (i = 1, 2). \tag{5.27}$$

§ 6. Доказательство теоремы равносходимости

Опираясь на формулы (5.21) и (5.22) и на тауберову теорему В. А. Марченко [5], в настоящем параграфе мы дадим полное доказательство теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям задачи (5.1)+(5.2)+(5.3) и в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам для произвольных вектор-функций с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$.

Обозначим через x произвольную точку полупрямой $(0, \infty)$.

Займемся сначала преобразованием правых частей формул (5.21) и (5.22). Функции $K_x(x, s)$, $L_x(x, s)$, $M_x(x, s)$ и $N_x(x, s)$, входящие в правые части формул (5.21) и (5.22), определяются по формулам (2.26), (2.27), (2.28) и (2.29) соответственно. Поэтому, подставляя их выражения в (5.21) и (5.22), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(\lambda)\, d_\lambda \{S_1(x, \lambda) - S_1^*(x, \lambda)\} =$$

$$= \int_{x-x}^{x+x} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1]\, g_x(x-s)\, f_1(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-x}^{x+x} \left\{ \int_{|x-s|}^{x} [K(x, t, s) + \tilde{K}(x, t, s)]\, g_x(t)\, dt \right\} f_1(s)\, ds +$$

$$+ i \int_{x-x}^{x+x} [k(x, s-x) - l(x, x-s)]\, g_x(x-s)\, f_2(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-x}^{x+x} \left\{ \int_{|x-s|}^{x} [L(x, t, s) + \tilde{L}(x, t, s)]\, g_x(t)\, dt \right\} f_2(s)\, ds, \tag{6.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda \{S_2(x,\lambda) - S_2^0(x,\lambda)\} =$$

$$= -i \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [k(x, s-x) - l(x, x-s)]\, g_\varepsilon(x-s)\, f_1(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [M(x,t,s) + \tilde{M}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} f_1(s)\, ds +$$

$$+ \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} [k(x, s-x) + l(x, x-s) - 1]\, g_\varepsilon(x-s)\, f_2(s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [N(x,t,s) + \tilde{N}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} f_2(s)\, ds. \qquad (6.2)$$

Меняя порядок интегрирования в двукратных интегралах правых частей (6.1) с (6.2), мы находим

$$\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_1(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [K(x,t,s) + \tilde{K}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [K(x,t,s) + \tilde{K}(x,t,s)]\, f_1(s)\, ds \right\} g_\varepsilon(t)\, dt, \qquad (6.3)$$

$$\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_2(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [L(x,t,s) + \tilde{L}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [L(x,t,s) + \tilde{L}(x,t,s)]\, f_2(s)\, ds \right\} g_\varepsilon(t)\, dt, \qquad (6.4)$$

$$\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_1(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [M(x,t,s) + \tilde{M}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [M(x,t,s) + \tilde{M}(x,t,s)]\, f_1(s)\, ds \right\} g_\varepsilon(t)\, dt, \qquad (6.5)$$

$$\frac{1}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f_2(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} [N(x,t,s) + \tilde{N}(x,t,s)]\, g_\varepsilon(t)\, dt \right\} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon} \left\{ \int_{x-t}^{x+t} [N(x,t,s) + \tilde{N}(x,t,s)]\, f_2(s)\, ds \right\} g_\varepsilon(t)\, dt. \qquad (6.6)$$

Далее положим

$$\alpha_1(x,\lambda)=\int_0^\pi\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}[K(x,t,s)+\bar{K}(x,t,s)]f_1(s)\,ds\right\}\cos\lambda t\,dt=$$

$$=\int_0^\pi h_1(x,t)\cos\lambda t\,dt, \tag{6.7}$$

$$\alpha_2(x,\lambda)=\int_0^\pi\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}[L(x,t,s)+\bar{L}(x,t,s)]f_2(s)\,ds\right\}\cos\lambda t\,dt=$$

$$=\int_0^\pi h_2(x,t)\cos\lambda t\,dt, \tag{6.8}$$

$$\alpha_3(x,\lambda)=\int_0^\pi\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}[M(x,t,s)+\bar{M}(x,t,s)]f_1(s)\,ds\right\}\cos\lambda t\,dt=$$

$$=\int_0^\pi h_3(x,t)\cos\lambda t\,dt, \tag{6.9}$$

$$\alpha_4(x,\lambda)=\int_0^\pi\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}[N(x,t,s)+\bar{N}(x,t,s)]f_2(s)\,ds\right\}\cos\lambda t\,dt=$$

$$=\int_0^\pi h_4(x,t)\cos\lambda t\,dt. \tag{6.10}$$

С другой стороны, в силу (2.20) мы имеем

$$\frac{1}{2}\psi_s(\lambda)=\int_0^\pi g_s(t)\cos\lambda t\,dt. \tag{6.11}$$

Поэтому, применяя равенство Парсеваля для обычных интегралов Фурье к каждому из равенств (6.7)—(6.10) и равенству (6.11), соответственно получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_s(\lambda)\,\alpha_i(x,\lambda)\,d\lambda=\int_0^\pi h_i(x,t)\,g_s(t)\,dt\quad(i=1,2,3,4). \tag{6.12}$$

И, наконец, полагая

$$\beta_1(x,\lambda)=\int_{-\pi}^{\pi}[k(x,-t)+l(x,t)-1]f_1(x-t)\cos\lambda t\,dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\chi_1(x,t)\cos\lambda t\,dt, \tag{6.13}$$

$$\beta_2(x, \lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} i\,[k(x, -t) - l(x, t)]\, f_2(x-t) \cos \lambda t\, dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma_2(x, t) \cos \lambda t\, dt, \tag{6.14}$$

$$\beta_3(x, \lambda) = -i \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [k(x, -t) - l(x, t)]\, f_1(x-t) \cos \lambda t\, dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma_3(x, t) \cos \lambda t\, dt, \tag{6.15}$$

$$\beta_4(x, \lambda) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [k(x, -t) + l(x, t) - 1]\, f_2(x-t) \cos \lambda t\, dt =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma_4(x, t) \cos \lambda t\, dt, \tag{6.16}$$

и применяя опять равенство Парсеваля к каждому из равенств (6.13)—(6.16) и равенству (6.11), соответственно, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, \beta_i(x, \lambda)\, d\lambda = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \gamma_i(x, t)\, g_\varepsilon(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6.17}$$

Теперь, учитывая равенства (6.3)—(6.10) и (6.12)—(6.17), формулы (6.1) и (6.2) можно, соответственно, записать в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda R_1(x, \lambda) = 0, \tag{6.18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\lambda)\, d_\lambda R_2(x, \lambda) = 0, \tag{6.19}$$

где

$$R_1(x, \lambda) = S_1(x, \lambda) - S_1^*(x, \lambda) - \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_1(x, \nu)\, d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_1(x, \nu)\, d\nu -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_2(x, \nu)\, d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_2(x, \nu)\, d\nu, \tag{6.20}$$

$$R_2(x, \lambda) = S_2(x, \lambda) - S_2^*(x, \lambda) - \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_3(x, \nu)\, d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_3(x, \nu)\, d\nu -$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \beta_4(x, \nu)\, d\nu - \frac{1}{2\pi} \int_0^\lambda \alpha_4(x, \nu)\, d\nu. \tag{6.21}$$

Докажем несколько лемм.

Лемма 6.1. *При каждом фиксированном x и при $a \to \infty$ спра ведливы оценки*

$$\bigvee_{a}^{a+1}\{R_i(x, \lambda)\} = o(1) \quad (i = 1, 2). \tag{6.22}$$

Оценки (6.22) *имеют место равномерно в каждом конечном интер вале.*

Доказательство. Так как вариация суммы функций не пр восходит суммы вариаций слагаемых, то для доказательства леммы до статочно показать, что оценка (6.22) имеет место для каждого из ш сти слагаемых правых частей равенств (6.20) и (6.21). Для функци $S_i(x, \lambda)$ и $S_i^*(x, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ оценка (6.22) совпадает с оценками (5.2 и (5.27). Далее, в силу леммы Римана-Лебега

$$\lim_{\lambda \to \infty} \beta_i(x, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Поэтому

$$\bigvee_{a}^{a+1}\left\{\int_0^{\lambda} \beta_i(x, \nu)\, d\nu\right\} = \int_a^{a+1} |\beta_i(x, \nu)|\, d\nu = o(1) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

А так как функции $h_i(x, t)$ (см. равенства (6.7)—(6.10)) даже диффе ренцируемы по t, то оценка (6.22) для функций $a_i(x, \lambda)$, $i = 1, 2, 3,$ также следует из леммы Римана-Лебега. Лемма доказана.

Лемма 6.2. *Пусть* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ *— произвольная вектор функция класса* $L^2(0, \infty)$. *Тогда для каждого интервала* $0 \leqslant x \leqslant$ *существует постоянная* $C = C(N)$ *такая, что при* $t \to 0$ *справед ливы оценки*

$$|h_i(x, t)| < Ct^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6.23}$$

Доказательство. Докажем оценку (6.23) для функции $h_1(x, t$ Для остальных функций $h_i(x, t)$ $(i = 2, 3, 4)$, доказательство анал гично. По определению (см. равенство (6.7))

$$h_1(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \{K(x, t, s) + \bar{K}(x, t, s)\} f_1(s)\, ds. \tag{6.24}$$

Так как в равенстве (6.7) интеграл по t берется в пределах от 0 до а по условию $\varepsilon \leqslant x$ (см. сноску на стр. 13), то $t \leqslant x$, т. е. $x - t \geqslant$ Поэтому из равенства (6.24) и неравенства Коши-Буняковского сл дует, что

$$|h_1(x, t)| \leqslant C\int_{x-t}^{x+t} |f_1(s)|\, ds < C\left(\int_0^{\infty} f_1^2(s)\, ds\right)^{1/2} \cdot t^{1/2} = C_1 t^{1/2},$$

где

$$C = \max_{x-t \le s \le x+t} |K(x, t, s) + \tilde{K}(x, t, s)|.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.3. *Пусть выполняется условие леммы 6.2. Тогда при любом фиксированном x справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} \alpha_i(x, \nu)\, d\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6.25}$$

Равенства (6.24) *имеют место равномерно в каждом конечном интервале.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 6.2 докажем равенство (6.25) только для функции $\alpha_1(x, \nu)$. Из определения $\alpha_1(x, \nu)$, т. е. равенства (6.7), следует

$$\int_0^{\lambda} \alpha_1(x, \nu)\, d\nu = \int_0^{\lambda} \left\{ \int_0^{x} h_1(x, t) \cos \nu t\, dt \right\} d\nu = \int_0^{x} h_1(x, t) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt.$$

Далее, так как из (6.24) следует, что $h(x, 0) = 0$, то, в силу оценки (6.23), $h(x, t) - h(x, 0) = O(t^{\alpha})$, $\alpha > 0$. Поэтому оценка (6.25) следует из равенства (4.59). Лемма доказана.

Лемма 6.4. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале, то при любом фиксированном x справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} \beta_i(x, \nu)\, d\nu = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{6.26}$$

Равенства (6.26) имеют место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. Докажем лемму опять только для $\beta_1(x, \nu)$. Из равенства (6.13) следует, что

$$\int_0^{\lambda} \beta_1(x, \nu)\, d\nu = \int_{-x}^{x} \{k(x, -t) + l(x, t) - 1\} f_1(x - t)\, \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt. \tag{6.27}$$

С другой стороны, из определения функций $k(x, t)$ и $l(x, t)$, т. е. равенств (1.11) и (1.12), мы имеем

$$k(x, -t) + l(x, t) - 1 = -2 \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x} [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau \right\}.$$

Поэтому из (6.27) мы получим

$$\int_0^{\lambda} \beta_1(x, \nu)\, d\nu = -2 \int_{-x}^{x} \sin^2 \left\{ \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x} [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau \right\} f_1(x - t) \frac{\sin \lambda t}{t}\, dt,$$

откуда и следует равенство (6.26) для функции $\beta_1(x, \nu)$ на основании леммы Римана-Лебега. Лемма доказана.

Теорема 6.1 (*о равносходимости*). *Пусть* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ — *произвольная вектор-функция с интегрируемым квадратом на полуправой* $(0, \infty)$, *т. е. пусть*

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}\, dx < +\infty.$$

Если коэффициенты $p(x)$ *и* $r(x)$ *системы* (5.1) + (5.2) *суммируемы в каждом конечном интервале, то равномерно в каждом конечном интервале имеют место равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{[S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)] - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} = 0, \quad (6.28)$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{[S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)] - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} = 0, \quad (6.29)$$

т. е. разность между разложением произвольной вектор-функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \infty)$ *в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерной системы Дирака и разложением в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Доказательство. В силу оценок (6.22) и равенств (6.18), (6.19) применима тауберова теорема В. А. Марченко [5], на основании которой при любом фиксированном x

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{R_i(x, \lambda) - R_i(x, -\lambda)\} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

т. е. согласно равенствам (6.20) и (6.21)

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{[S_1(x, \lambda) - S_1(x, -\lambda)] - [S_1^*(x, \lambda) - S_1^*(x, -\lambda)]\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \{\beta_1(x, \nu) + \beta_2(x, \nu) + \frac{1}{2}[\alpha_1(x, \nu) + \alpha_2(x, \nu)]\}\, d\nu, \quad (6.30)$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{[S_2(x, \lambda) - S_2(x, -\lambda)] - [S_2^*(x, \lambda) - S_2^*(x, -\lambda)]\} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \{\beta_3(x, \nu) + \beta_4(x, \nu) + \frac{1}{2}[\alpha_3(x, \nu) + \alpha_4(x, \nu)]\}\, d\nu. \quad (6.31)$$

Тогда (6.28) и (6.29) следуют из равенств (6.30) и (6.31) в силу лемм 6.3 и 6.4. Теорема доказана.

Теорема 6.1 дает окончательное решение вопроса о сходимости разложения по собственным вектор-функциям одномерной системы Дирака для вектор-функции с интегрируемым квадратом на полуправой $(0, \infty)$. В частности, из теоремы 6.1 следует

Теорема 6.2 (*о сходимости*). *Если коэффициенты* $p(x)$ *и* $r(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале, а вектор-функция*

$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \infty)$, *то в каждой точке* x_0, *где выполняются локальные условия разложимости вектор-функции* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ *в обычный интеграл Фурье, имеют место равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{S_1(x_0, \lambda) - S_1(x_0, -\lambda)\} = f_1(x_0),$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \{S_2(x_0, \lambda) - S_2(x_0, -\lambda)\} = f_2(x_0),$$

т. е. разложение вектор-функции $f(x)$ *в обобщенный интеграл Фурье по собственным вектор-функциям одномерной системы Дирака в точке* x_0 *стремится к значению* $f(x_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \end{pmatrix}$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 24.IX.1966

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ՄԻԱՉԱՓ ՍԻՍՏԵՄԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՎԱՐՔԻ ԵՎ ԸՍՏ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է Դիրակի ստացիոնար միաչափ սիստեմի՝

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)y_1 = \lambda y_1, \tag{1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)y_2 = \lambda y_2, \tag{2}$$

$$y_2(0) - hy_1(0) = 0, \tag{3}$$

այսպես կոչված սպեկտրալ ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը, որը տրվում է (0,19) բանաձևով (տես հիմնական տեքստի ներածությունը)։ Այնուհետև ապացուցվում է թեորեմ՝ ըստ (1)—(3) խնդրի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության և ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության միաժամանակյա զուգամիտության մասին։

H. S. SARGSIAN

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR AND EIGENFUNCTION DEVELOPMENT OF THE SPECTRAL FUNCTION FOR THE ONE DIMENTIONAL DIRAC SYSTEM

S u m m a r y

For the one dimensional Dirac system

$$\frac{dy_2}{dx} + p(x)\, y_1 = \lambda y_1, \tag{1}$$

$$-\frac{dy_1}{dx} + r(x)\, y_2 = \lambda y_2, \tag{2}$$

$$y_2(0) - h y_1(0) = 0 \tag{3}$$

the asymptotic behaviour given in (0.19) of the so called spectral function is studied. A theorem concerning the simultaneous convergence of the corresponding to (1)—(3) problem eigenfunction development and of the usual Fourier integral development is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. F. Mott* and *I. N. Sneddon*. Wave mechanics and its applications, Oxford, 1948.
2. *E. C. Titchmarsh*. Some eigenfunction expansion formules, Proc. London Math. Soc. (3), 11, 1961, 159—168.
3. *Б. М. Левитан*. Приложение III к книге Э. Ч. Титчмарша. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, ИЛ, М., 1960.
4. *В. А. Марченко*. Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I, Труды Моск. матем. об-ва, 1, 1952, 327—420.
5. *В. А. Марченко*. Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, серия матем., 19, 1955, 381—422.
6. *И. С. Сарнсян*. Асимптотическое поведение спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1058—1061.
7. *И. С. Сарнсян*. Разложение по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1292—1295.
8. *Б. М. Левитан* и *И. С. Сарнсян*. О продолжении решений одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 165, № 6, 1965, 1241—1244.
9. *И. С. Сарнсян*. О решении задачи Коши для одномерной системы Дирака, Известия АН Арм.ССР, Математика, I, № 6, 1966, 392—436.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 3, 1967 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ И О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ. II

В первой части этой работы [1] были получены некоторые условия эргодичности непрерывных автоморфизмов замкнутых кривых.

В настоящей работе исследуется вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны в классе измеримых функций путем применения полученных в [1] результатов к специальным автоморфизмам замкнутых кривых, тесно связанным с этой задачей.

Описывается также структура множества так называемых обобщенных собственных значений указанной задачи.

2.1. В допустимой области D с границей Γ рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$(1+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$u/\Gamma=\sigma(s), \tag{2}$$

где λ — действительный параметр с модулем меньшим единицы. Область D называется λ-допустимой, если характеристики уравнения (1) пересекают ее границу не более, чем в двух точках, и называется допустимой, если она λ-допустима при любом $\lambda\in(-1, 1)$.

Задача (1), (2) для допустимой области D подробно исследована в работах Р. А. Александряна, которому в частности принадлежат различные определения обобщенного решения этой задачи и доказательство их эквивалентности в классе суммируемых функций [2, 3]. В связи с этим, представляется естественным следующее более широкое понятие обобщенного решения этой задачи в классе измеримых функций.

Пусть $y-\mu x=\text{const}$ (соответственно $y+\mu x=\text{const}$) — первое (соответственно второе) семейство характеристик уравнения (1), где положено $\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}=\mu$.

Пусть $\sigma(s)$ — измеримая функция на Γ. Измеримая функция $U(x, y)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), если она на границе Γ почти везде равна $\sigma(s)$ и представима в виде суммы двух измеримых функций

$$U(x, y)=f(x, y)+g(x, y),$$

где $f(x, y)$ постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а $g(x, y)$ постоянна почти на всех характеристиках второго семейства.

Пусть S_λ^+ (соответственно S_λ^-) — автоморфизм, который каждой точке $\theta \in \Gamma$ сопоставляет точку пересечения проходящей через нее характеристики первого (соответственно второго) семейства с границей Γ. Точка $\theta \in \Gamma$ называется периодической точкой автоморфизма $S_\lambda = S_\lambda^- \cdot S_\lambda^+$ границы Γ, если существует такое целое число r, что $S_\lambda^r \theta = \theta$. Р. А. Александряном доказано [2], что если автоморфизм S_λ имеет хотя бы одну периодическую точку, которая порождает нетривиальный λ-цикл, то однородная задача (1), (2) в классе кусочно-непрерывных функций имеет нетривиальное решение $U_\lambda(x, y)$, которое называется обобщенной собственной функцией этой задачи, соответствующей обобщенному собственному значению λ. Им было доказано также, что если граница Γ гладкая и S_λ не имеет периодических точек, то решение задачи (1), (2) единственно в классе кусочно-непрерывных функций [4].

В работе [5] при аналогичных условиях доказана единственность решения задачи (1), (2) в первом классе Бэра для невыпуклых и многосвязных областей.

Отметим также, что для прямоугольной области D с иррациональным отношением сторон единственность решения задачи (1), (2) при $\lambda = 0$ в классе функций, которые непрерывно дифференцируемы и имеют в D суммируемые по Лебегу вторые производные, была доказана в 1939 году в работе [6].

2.2. Еще в пятидесятых годах Р. А. Александряном была высказана гипотеза о том, что если автоморфизм S_λ не имеет периодических точек, а граница области имеет непрерывную кривизну, то обобщенное решение задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

В настоящей работе доказывается справедливость этой гипотезы для почти всех упомянутых автоморфизмов S_λ. С другой стороны, приведенный в работе пример показывает, что для справедливости гипотезы требование некоторой гладкости границы, вообще говоря, необходимо.

Заметим, что S_λ является сохраняющим ориентацию автоморфизмом. Кроме того, очевидно, что гладкость автоморфизмов S_λ^+, S_λ^-, а следовательно и S_λ, зависит от гладкости границы Γ.

Имеет место следующее утверждение, которое фактически содержится в работе [3].

Лемма 1. *Пусть граница Γ λ-допустимой области D гладкая. Тогда для единственности решения задачи* (1), (2) *в классе измеримых функций необходимо и достаточно, чтобы любое измеримое множество $E \subset \Gamma$, инвариантное относительно обоих автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-, имело либо меру нуль, либо полную меру.*

Доказательство. Достаточность. Допустим обратное. Пусть любое измеримое множество, которое инвариантно относительно обоих автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-, имеет либо меру нуль, либо полную меру, а однородная задача (1), (2) имеет нетривиальное решение $U(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ в классе измеримых функций. Обозначим через $f^*(s)$ и $g^*(s)$ функции на Γ, которые совпадают соответственно с граничными значениями функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Из сделанного предположения вытекает, что $f^*(s)$ и $g^*(s)$ отличны от постоянной, следовательно существуют два таких множества F_1 и F_2 положительной меры, что значения $f^*(s)$ на множестве F_1 отличны от ее значений на множестве F_2 в том смысле, что

$$f^*(F_1) \cap f^*(F_2) = \varnothing. \tag{3}$$

С другой стороны, легко видеть, что $f^*(s)$ (соответственно $g^*(s)$) инвариантна относительно автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-, т. е. для почти всех $\theta \in \Gamma$

$$f^*(\theta) = f^*(S_\lambda^n \theta) = f^*(S_\lambda^n S_\lambda^- \theta) \quad (n = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots). \tag{4}$$

В самом деле, пусть Δ_1 — множество тех характеристик первого семейства, на которых функция $f(x, y)$ не постоянна, и δ_1 — множество точек пересечения этих характеристик с границей Γ. Аналогичным образом, заменяя первое семейство характеристик вторым и $f(x, y)$ через $g(x, y)$, определяем множество δ_2. Пусть $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$, где δ_3 — множество всех граничных точек, в которых $U(x, y)$ не равно нулю. Из определения обобщенного решения и из гладкости границы вытекает, что $m\delta = 0$ и, поскольку автоморфизм S_λ, в силу гладкости границы Γ, обладает свойством N, то мера множества $\tilde{\delta} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n(\delta + S_\lambda^+ \delta)$ также равна нулю. Легко убедиться, что $\tilde{\delta}$ — инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, следовательно его дополнение $C\tilde{\delta}$ также инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, имеет полную меру и на этом множестве $U(x, y) = 0$, т. е. $g^*(s) = -f^*(s)$. Пусть $\theta \in C\tilde{\delta}$ и $f^*(\theta) = f^*(S_\lambda^+ \theta) = a$, тогда

$$g^*(\theta) = g^*(S_\lambda^+ \theta) = g^*(S_\lambda^- \theta) = g^*(S_\lambda^- S_\lambda^+ \theta) = -a,$$

следовательно

$$f^*(S_\lambda^- \theta) = f^*(S_\lambda^- S_\lambda^+ \theta) = f^*(S_\lambda^+ S_\lambda^- \theta) = f^*(S_\lambda^+ S_\lambda^- S_\lambda^+ \theta) = a.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $f(x, y)$ и $g(x, y)$ постоянны на характеристиках соответственно первого и второго семейства, проходящих через точки множества $G\tilde{\delta}$. Продолжая таким образом и учитывая, что $(S_\lambda^+)^2$ и $(S_\lambda^-)^2$ являются тождественными отображениями, получаем равенство (4). Из (3) и (4) легко заключить, что множества $E_i = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n(F_i + S_\lambda^+ F_i)$, $(i = 1, 2)$, которые инвариантны относи-

тельно S_λ^+ и S_λ^-, имеют положительную меру и удовлетворяют условию $m(E_1 \cap E_2) = 0$. Таким образом, вопреки предположению, нашлись два множества положительной, но не полной меры, которые инвариантны относительно обоих автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-. Полученное противоречие показывает, что однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение в классе измеримых функций.

Необходимость. Допустим обратное. Пусть в классе измеримых функций однородная задача (1), (2) имеет только травиальное решение, и существует такое множество $E \subset \Gamma$ положительной меры и отличное от полной меры, которое инвариантно относительно обоих автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-. Полагая функцию $f^*(s)$ равной единице на E и нулю на CE, а $g^*(s) = -f^*(s)$ и продолжая эти функции во внутрь области D, полагая их постоянными на соответствующих характеристиках, мы получим, как легко убедиться, нетривиальное решение однородной задачи (1), (2), что противоречит предположению, и лемма доказана.

Следствие. Для единственности решения задачи (1), (2) в классе измеримых функций достаточно, чтобы автоморфизм S_λ был эргодическим.

Действительно, любое инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримое множество E, очевидно, является также и инвариантным относительно S_λ, и из эргодичности S_λ вытекает, что E имеет либо меру нуль, либо полную меру.

2.3. Теперь уже, опираясь на установленное в [1] достаточное условие эргодичности (теорема 2), критерий единственности (лемма 1), а также на тот факт, что из гладкости границы Γ следует соответствующая гладкость функции $g_\lambda(s)$ (см. [1]), отвечающей автоморфизму S_λ, легко убеждаемся в справедливости следующей теоремы единственности.

Теорема 1. Пусть кривизна границы Γ λ-допустимой области D удовлетворяет условию Липшица по отношению к длине дуги, а число вращения ξ_λ автоморфизма S_λ иррационально и удовлетворяет условию (2) работы [1]. Тогда решение задачи (1), (2) для области D единственно в классе измеримых функций.

2.4. Пусть $g_\lambda(s)$—функция, порожденная автоморфизмом S_λ, которая, как уже было отмечено в [1], является непрерывной и строго возрастающей функцией s.

Лемма 2. Для допустимой области D с гладкой границей Γ $g_\lambda(s)$ является равномерно относительно s непрерывной и строго возрастающей функцией параметра $\lambda \in (-1, 1)$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любого $\lambda_0 \in (-1, 1)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\lambda_0, \varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\theta \in \Gamma$ неравенство $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ влечет

$$\rho(S_{\lambda_0}^+ \theta, S_\lambda^+ \theta) < \varepsilon,$$

где под $\rho(\theta_1, \theta_2)$ понимается длина меньшей из двух дуг, образованных точками θ_1, θ_2.

В самом деле, в прямоугольной системе координат x, y ось y-ов направим параллельно характеристикам первого семейства при значении параметра λ_0. Очевидно, границу Γ допустимой области D можно разбить на конечное число дуг, каждая из которых является графиком некоторой непрерывной и монотонной функции в этой системе координат.

Пусть (p, q)—одна из этих дуг, а $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ — уравнение этой дуги (рис. 1). В силу равномерной непрерывности $f(x)$ на

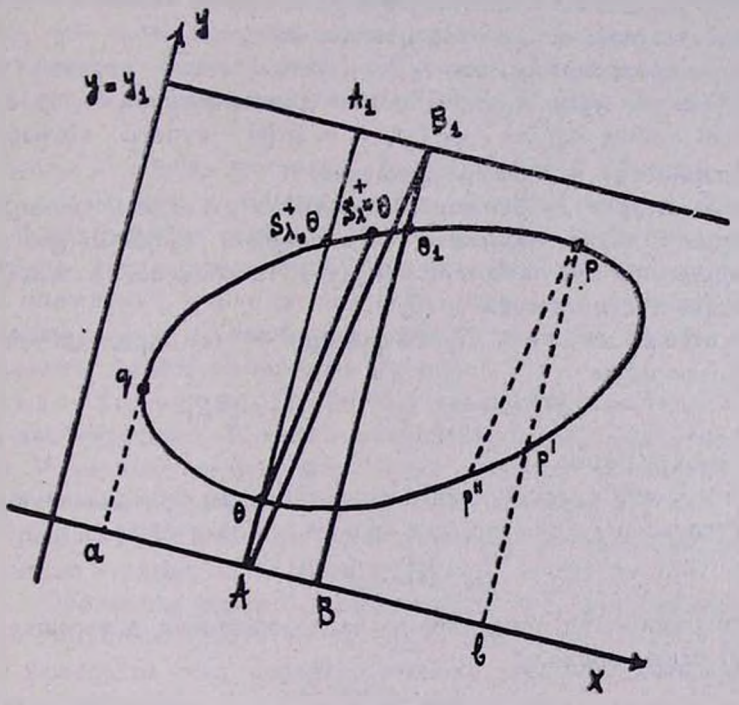

Рис. 1.

$[a, b]$, по заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta_1 > 0$ так, чтобы равномерно по $x \in [a, b]$ из $|\Delta x| \leqslant \delta_1$ вытекало неравенство

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть θ — произвольная точка на дуге $(q.\, p')$ такая, что ее абсцисса x и $x + \delta_1$ принадлежат отрезку $[a, b]$. Проведем через точки $A(x, 0)$ и $B(x + \delta_1, 0)$ прямые, параллельные оси y, до их пересечения с прямой $y = y_1$ (см. рис. 1).

Обозначим через λ^* то значение параметра, при котором характеристики первого семейства параллельны отрезку $[A, B_1]$.

Полагая $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, для всех $\theta \in (q, p'')$ будем иметь

$$\rho(S_{\lambda_0}^{+}\theta, S_{\lambda}^{+}\theta) \leqslant \rho(S_{\lambda_0}^{+}\theta, \theta_1) \leqslant \left(\delta_1 + \bigvee_{x}^{x+\delta_1} f(x) \right) \leqslant \varepsilon,$$

если только $|\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta^* = |\lambda^* - \lambda_0|$, после чего, принимая во внимание независимость λ^* от выбора точки θ на участке (q, p''), легко заключаем, что $S_{\lambda}^{+}\theta$ непрерывно по λ равномерно относительно всех $\theta \in \Gamma$.

То же самое верно относительно автоморфизма S_{λ}^{-} и, поскольку S_λ есть их суперпозиция, то легко убедиться, что S_λ тоже непрерывно зависит от λ, равномерно относительно точек $\theta \in \Gamma$. Это в свою очередь означает, что $g_\lambda(s)$ — непрерывная функция параметра λ, причем непрерывность равномерна относительно s.

Теперь предположим, что $\lambda_1 > \lambda_2$, тогда легко видеть, что при любом $\theta \in \Gamma$ длина дуги $(\theta, S_{\lambda_1}\theta)$ больше длины дуги $(\theta, S_{\lambda_2}\theta)$, следовательно, при любом s $g_{\lambda_1}(s) > g_{\lambda_2}(s)$, т. е. $g_\lambda(s)$ — строго возрастающая функция параметра λ, и лемма доказана.

Лемма 3. Для допустимой области D с гладкой границей числа вращения ξ_λ автоморфизмов S_λ образуют непрерывную и монотонную функцию от параметра $\lambda \in (-1, 1)$, область значений которой совпадает с интервалом $(0,1)$.

Доказательство. Пусть функция $g_\lambda^{(n)}(s)$ определяется рекуррентно по формуле

$$g_\lambda^{(n)}(s) = g_\lambda(g_\lambda^{(n-1)}(s)), \quad n \geqslant 2,$$

где положено $g_\lambda^{(1)}(s) \equiv g_\lambda(s)$.

Из того, что $g_\lambda(s)$ — строго возрастающая функция от s и от λ, следует, что если $\lambda_1 > \lambda_2$, то для любого s и для любого $n > 0$

$$g_{\lambda_1}^{(n)}(s) > g_{\lambda_2}^{(n)}(s). \tag{5}$$

С другой стороны, по определению число вращения в терминах функций $g_\lambda^{(n)}(s)$ равно пределу

$$\xi_\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{g_\lambda^{(n)}(s) - s}{n \cdot l},$$

где l — длина границы Γ, поэтому из неравенства (5) немедленно заключаем, что $\xi_{\lambda_1} \geqslant \xi_{\lambda_2}$, т. е. ξ_λ — неубывающая функция от λ.

Как показал В. И. Арнольд [7], ξ_λ непрерывно зависит от S_λ в том смысле, что из близости функций $g_{\lambda_0}(s)$ и $g_\lambda(s)$, равномерной по s, следует близость чисел ξ_{λ_0} и ξ_λ. Сопоставляя это с леммой 2, заключаем, что ξ_λ — непрерывная функция от λ.

С другой стороны, легко видеть, что когда λ изнутри интервала $(-1,1)$ стремится к -1 (соответственно к 1), числа вращения ξ_λ автоморфизмов S_λ стремятся к нулю (соответственно к единице). Отсюда и из непрерывности ξ_λ от λ следует, что числа вращения ξ_λ автоморфизмов S_λ заполняют весь интервал $(0, 1)$, и лемма доказана.

Из теоремы 1, учитывая замечание, сделанное в конце работы [1], следует, что для допустимой области D с гладкой границей решение

задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций, для почти всех ξ из интервала (0,1).

2.5. Пусть M — множество всех обобщенных собственных значений λ, так что для всех $\lambda \in CM$ решение задачи (1), (2) единственно в классе кусочно-непрерывных функций. Как уже было сказано, Р. А. Александряном доказано, что λ принадлежит множеству M тогда и только тогда, когда соответствующий автоморфизм S_λ имеет периодическую точку θ, которая порождает нетривиальный λ-цикл. Отсюда и из определения числа вращения легко следует, что число вращения автоморфизма S_λ рационально для всех $\lambda \in M$. Таким образом, данное λ может принадлежать дополнению множества M либо за счет того, что число вращения автоморфизма S_λ иррационально, либо за счет того, что хотя это число рационально, однако циклы, порожденные всеми периодическими точками автоморфизма S_λ, оказываются тривиальными.

Теорема 2. Пусть кривизна Γ *допустимой области* D, *как функция длины дуги, удовлетворяет условию Липшица. Тогда множество* M *расположено всюду плотно в интервале* $(-1,1)$ *и состоит из счетного числа компонент, каждая из которых либо точка, либо интервал*, а множество* CM *имеет положительную меру, и для почти всех* λ *из этого множества решение задачи* (1), (2) *единственно в классе измеримых функций.*

Доказательство. Пусть M_1 — множество всех $\lambda \in (-1, 1)$, для которых автоморфизмы S_λ имеют рациональное число вращения. Покажем, что M_1 состоит из счетного числа связных компонент, каждая из которых является либо отрезком, либо точкой. Пусть ξ — рациональное число из (0,1). Тогда, согласно лемме 3, существует хотя бы одно значение λ такое, что ξ служит числом вращения для автоморфизма S_λ. Обозначим через Λ_ξ множество всех λ, для которых автоморфизмы S_λ имеют одно и то же число вращения, равное ξ. Покажем, что каждое из этих множеств состоит либо из одной точки, либо образует отрезок.

Пусть $\lambda_0 \in \Lambda_\xi$, т. е. число вращения автоморфизма S_{λ_0} равно рациональному числу $\xi = \frac{m}{n}$. Как показал Пуанкаре, в этом случае отображение $S^n_{\lambda_0}$ имеет неподвижную точку: $S^n_{\lambda_0}\theta = \theta$, которая совершает ровно m оборотов при этом отображении. Другими словами, в этом случае периодические точки автоморфизма S_{λ_0} образуют непустое множество $A(\lambda_0, \Gamma)$ на Γ.

Пусть $A(\lambda_0, \Gamma)$ совпадает с Γ, т. е. все точки Γ являются периодическими для автоморфизма S_{λ_0}. Покажем, что в этом случае Λ_ξ состоит из одной точки λ_0. В самом деле, из определения числа вращения следует, что в этом случае каждая точка $\theta \in \Gamma$ при отображе-

* Интервал может быть открытым, полуоткрытым и замкнутым.

нии $S_{\lambda_0}^n$ совершает ровно m оборотов на Γ. В терминах функции $g_{\lambda_0}(s)$ это означает, что при любом s

$$g_{\lambda_0}^{(n)}(s) - s = m \cdot l.$$

Поскольку $g_\lambda(s)$ — строго возрастающая функция от s и от λ, то при $\lambda \gtrless \lambda_0$ и при любом s

$$(g_\lambda^{(n)}(s) - s) \gtrless m \cdot l,$$

это означает, что ни одна точка $\theta \in \Gamma$ не может совершать ровно m оборотов на Γ при отображении S_λ^n, т. е. число вращения автоморфизма S_λ для $\lambda \neq \lambda_0$ отлично от ξ.

Рассмотрим случай, когда множество $A(\lambda_0, \Gamma)$ не совпадает с Γ, т. е. не все точки $\theta \in \Gamma$ являются периодическими лля автоморфизма S_{λ_0}. Известно, что периодические точки автоморфизма S_{λ_0} образуют замкнутое множество на Γ, следовательно его дополнение состоит из не более, чем счетного числа интервалов. Рассмотрим один из этих интервалов (α, β). Пусть θ — некоторая точка из этого интервала, тогда точка $S_{\lambda_0}^n \theta$ принадлежит интервалу (α, β), но не совпадает с точкой θ. В силу того, что S_λ^n зависит от λ непрерывно, путем непрерывного изменения λ убеждаемся, что существует значение $\lambda_1 \neq \lambda_0$ такое, что $S_{\lambda_1}^n \theta = \theta$, причем точка θ совершает ровно m оборотов на Γ при этом отображении, т. е. $\frac{m}{n}$ служит числом вращения и для автоморфизма s_{λ_1}. В силу моноточности функции ξ_λ от λ (лемма 3) следует, что при любом λ между λ_0 и λ_1 $\frac{m}{n}$ служит числом вращения для S_λ. Учитывая также непрерывность числа вращения ξ_λ от λ, заключаем, что множество значений параметра λ, для каждого из которых соответствующий автоморфизм S_λ имеет число вращения, равное $\frac{m}{n}$, образует отрезок.

Отсюда легко заключить, что Λ_i является одноточечной компонентой тогда и только тогда, когда все точки Γ λ-периодические при некотором значении λ.

Вместе с тем, как уже было отмечено [4], при иррациональном числе вращения автоморфизма S_λ значение λ не может принадлежать множеству M, поэтому $M \subset M_1$.

Покажем, что множество M получается из M_1 удалением из каждого принадлежащего ему отрезка не более, чем двух точек. Этим первая часть теоремы будет доказана. Всюду плотность множества M на $(-1,1)$ доказана в работе [4].

Граничная точка λ-допустимой области D называется λ-вершиной, если хотя бы одна из двух характеристик уравнения (1), проходящих через нее, целиком лежит вне D.

Очевидно, каждая такая область с гладкой границей имеет четыре λ-вершины.

Множество точек $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n \theta$ называется λ-циклом, порожденным точкой θ.

λ-цикл называется тривиальным, если он содержит λ-вершину, и называется замкнутым, если состоит из конечного числа точек.

Легко убедиться, что тривиальный и замкнутый λ-цикл содержит две λ-вершины, поэтому более двух тривиальных и замкнутых λ-циклов быть не может.

Учитывая это, легко убедиться, что все компоненты множества M_1, которые состоят из одной точки, принадлежат также и множеству M. В самом деле, пусть λ_0—одна из таких компонент, тогда все точки Γ являются λ_0-периодическими и поскольку лишь конечное число точек может порождать тривиальные λ_0-циклы, то все остальные точки обязаны порождать нетривиальные λ_0-циклы, стало быть [2] $\lambda_0 \in M$.

Пусть $[\lambda_1, \lambda_2]$ один из составляющих множество M_1 отрезков. Покажем, что все точки этого отрезка, кроме, может быть двух, принадлежат множеству M.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — точки, в которых касательная параллельна одной из координатных осей (рис. 2).

Допустим, что при некотором $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$ λ^*-вершина θ^* из дуги (a_1, a_2) порождает тривиальный и замкнутый λ^*-цикл. Пусть λ—неко-

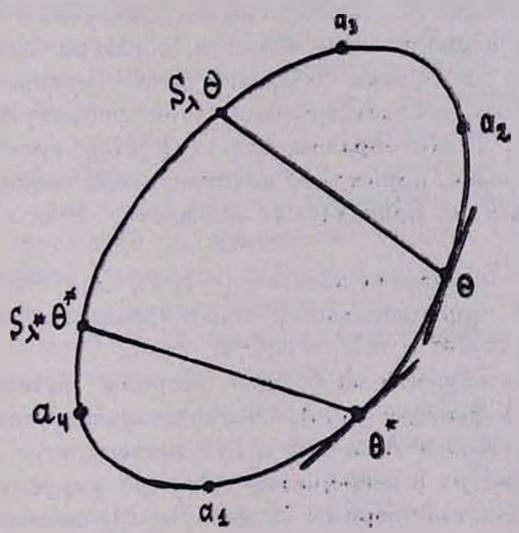

Рис. 2.

торое значение из $[\lambda_1, \lambda_2]$, отличное от λ^*, а θ — λ-вершина на дуге (a_1, a_2). Покажем, что θ не может порождать тривиальный и замкнутый λ-цикл.

Предположим, что $\lambda < \lambda^*$ (случай $\lambda > \lambda^*$ рассматривается аналогично), тогда θ^* будет расположена по дуге (a_1, a_2) ближе к a_1, чем θ.

Пусть s и s^*— значения параметра, соответствующие точкам θ и

θ^*, выбранные так, чтобы разность $s - s^*$ равнялась длине дуги (θ^*, θ). Тогда, поскольку $S_\lambda \theta = S_\lambda^- \theta$ и $S_{\lambda^*} \theta^* = S_{\lambda^*}^- \theta^*$, легко видеть, что

$$g_\lambda(s) < g_{\lambda^*}(s^*).$$

Отсюда, учитывая, что $g_\lambda(s)$ — строго возрастающая функция s и λ, получаем

$$g_\lambda^{(k)}(s) < g_{\lambda^*}^{(k)}(s^*)$$

при любом положительном k.

Пусть $\xi = \frac{m}{n}$ — число вращения автоморфизмов S_λ при $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, тогда из определения числа вращения следует, что все λ-периодические точки при любом $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ обязаны совершать ровно m оборотов на Γ при отображении S_λ^n. Поэтому, полагая $k = n$, будем иметь

$$(g_\lambda^{(n)}(s) - s) < g_{\lambda^*}^{(n)}(s^*) - s^* = m \cdot l,$$

где l — длина границы Γ. Это неравенство показывает, что точка θ не может совершать полных m оборотов при отображении S_λ^n, следовательно, она не может быть λ-периодической точкой.

Теперь уже легко убедиться, что для не более чем двух значений $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ замкнутые λ-циклы могут быть тривиальными.

Вместе с тем, все $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, в силу рациональности числа вращения автоморфизмов S_λ, согласно вышеупомянутому результату Пуанкаре, допускают периодические точки и, согласно сказанному выше, соответствующие им λ-циклы обязаны быть нетривиальными, кроме может быть циклов, соответствующих двум упомянутым исключительным значениям λ. Таким образом, все $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, кроме, может быть, двух исключительных, порождают нетривиальные обобщенные собственные функции [2], т. е. принадлежат множеству M, и первая часть теоремы доказана.

Пусть M_2 — множество всех $\lambda \in (-1, 1)$, для которых автоморфизмы S_λ имеют иррациональные числа вращения. Из доказанного следует, что $M_2 \subset CM$ и $mM_2 = mCM$.

Легко убедиться, что из условий теоремы вытекает, что вторые производные по s функций $g_\lambda(s)$, соответствующих автоморфизмам S_λ, удовлетворяют условию Липшица и что зависимость семейства этих функций от параметра λ непрерывно дифференцируема. В этих условиях из доказательства теоремы В работы [8] вытекает, что множество M_2 имеет положительную меру и что множество тех $\lambda \in M_2$, для которых функции Φ_λ^{-1}, обратные отображающим функциям Данжуа Φ_λ, соответствующим автоморфизмам S_λ, могут быть негладкими, имеет меру нуль. После этого доказательство второй части теоремы вытекает из теоремы 1 работы [1] и из следствия леммы 1.

Таким образом, для допустимой области с гладкой границей решение задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций для почти всех λ из M_2, т. е. гипотеза верна для почти всех $\lambda \in M_2$. Вер-

на ли она в том объеме, в каком была высказана, т. е. для всех $\lambda \in M_2$, пока еще неизвестно.

2.6. В этом пункте мы приводим пример, который показывает, что для справедливости упомянутой гипотезы некоторая гладкость границы, вообще говоря, необходима и, кроме того, что эту гладкость нельзя заменить какими-либо ограничениями на число вращения соответствующего автоморфизма. Этот же пример служит подтверждением того, что иррациональность числа вращения не обеспечивает эргодичности даже для частного класса рассматриваемых выше автоморфизмов, если не требовать соответствующей гладкости границы.

В самом деле, для любого иррационального числа ξ между нулем и единицей и для любого λ из интервала $(-1,1)$ мы построим λ-допустимую область D с границей Γ такую, что цикл каждой точки $\vartheta \in \Gamma$, порожденной автоморфизмом S_λ, всюду плотен на Γ, число вращения автоморфизма S_λ равно ξ и S_λ не является эргодическим. Более того, окажется, что для этой области решение задачи (1), (2), будучи единственным в классе кусочно-непрерывных функций, не будет единственным в классе измеримых функций.

По данным ξ и λ построим прямоугольник R со сторонами $ad = \dfrac{\xi}{\mu}$ и $ab = 1 - \xi$ (рис. 3).

Пусть образ точки b при отображении S_λ^- лежит на стороне cd (случай, когда он лежит на стороне ad, рассматривается аналогично). Возьмем прямоугольную систему координат x, y с началом в точке b и с осью y-ов, параллельной характеристикам первого семейства. Положительные направления осей выберем так, чтобы точка c имела положительные координаты. Пусть φ — острый угол, образованный положительным направлением оси x-ов и характеристикой второго семейства, проходящей через точку b. Обозначим через x_1 абсциссу точки c, а длину отрезка $[b, x_1]$ примем за единицу. Рассмотрим на этом единичном отрезке функцию $f_1(x) = K[\Theta(x) + x]$, где $K > \operatorname{tg}\varphi$, а $\Theta(x)$ — известная сингулярная функция [9]. Легко убедиться, что характеристики второго семейства пересекают график этой функции не более, чем в одной точке. На отрезке $[x_1, x_2]$, где x_2—абсцисса точки $S_\lambda^- b$, определим функцию $f_2(x)$ следующим образом: проведем через точку $x \in [x_1, x_2]$ характеристику первого семейства до пересечения со стороной cd в точке z; обозначим через β точку пересечения стороны bc с характеристикой второго семейства, проходящей через α, а через γ-пересечение графика функции $y = f_1(x)$ с характеристикой первого семейства, проходящей через точку β. Пусть δ—точка пересечения характеристик первого и второго семейства, проходящих соответственно через x и γ. В точке x определим функцию $f_2(x)$, равную длине отрезка $[x, \delta]$. Очевидно, $f_2(x)$—непрерывная и строго монотонная функция.

Рассмотрим область D, граница Γ которой совпадает с границей Γ^* прямоугольника R на участке $bad\,S_\lambda^- b$ и с графиками функций

$f_1(x)$ и $f_2(x)$ в остальной части. Из построения видно, что область D является λ-допустимой.

Покажем, что автоморфизм S_λ границы Γ не является эргодическим.

Пусть P_0 — канторово совершенное множество меры нуль на единичном отрезке $[b, x_1]$, а G_0 — его дополнение. Обозначим через P_0' (соответственно G_0') множество точек, получающееся пересечением общей части границ Γ^* и Γ с характеристиками первого семейства, прохо-

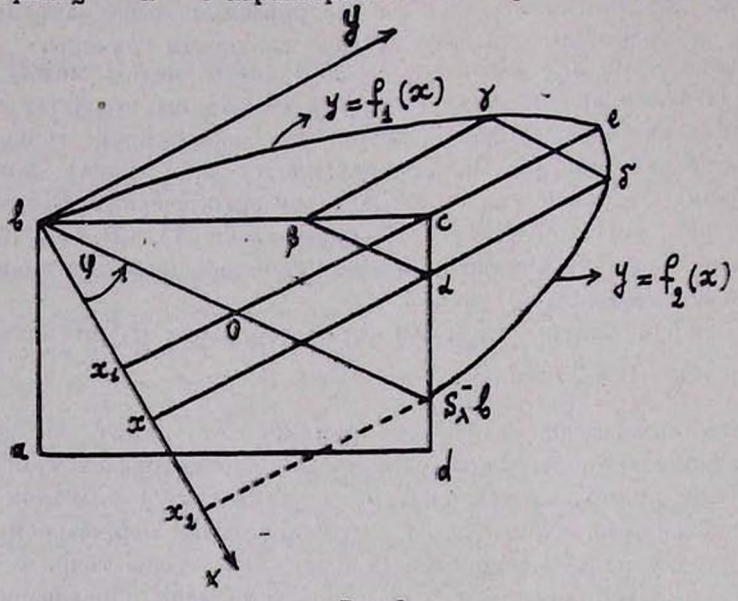

Рис. 3.

дящих через точки множества P_0 (соответственно, проходящих через точки множества G_0). На границе Γ^* прямоугольника R образуем множество

$$M^*(P_0') = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n (P_0' + S_\lambda^+ P_0'),$$

которое, очевидно, имеет меру нуль.

Образуем аналогичное множество на границе Γ

$$M(P_0') = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n (P_0' + S_\lambda^+ P_0'),$$

которое, очевидно, является множеством типа F_σ, следовательно измеримо.

Из построения границы Γ легко убедиться, что эти два множества совпадают на общей части границ Γ^* и Γ и следовательно мера множества $M(P_0')$ строго меньше, чем мера границы Γ. С другой стороны, $M(P_0')$ имеет положительную меру, поскольку множество $S_\lambda^+ P_0'$ имеет положительную меру. В самом деле, легко посчитать, что на Γ

$mf_1(G_0) = \sqrt{1+K^2}$, а длина графика функции $f_1(x)$ больше, чем $\sqrt{1+4K^2}$. Следовательно, мера множества $f_1(P_0)$ на Γ, которое совпадает с множеством $S_\lambda^+ P_0'$, больше нуля. Кроме того, легко видеть, что множество $M(P_0')$ инвариантно относительно автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^- границы Γ, следовательно и относительно автоморфизма S_λ границы Γ, т. е. S_λ не является эргодическим.

Известно [10], что число вращения автоморфизма S_λ границы Γ^* прямоугольника R с указанными сторонами равно ξ. Кроме того, очевидно, что Γ получается из Γ^* непрерывным и сохраняющим ориентацию отображением, при котором автоморфизм S_λ границы Γ^* переходит в автоморфизм S_λ границы Γ, и поскольку число вращения инвариантно относительно таких преобразований, то число вращения автоморфизма S_λ границы Γ также равно ξ.

Пусть θ—некоторая точка, принадлежащая общей части границ Γ^* и Γ, тогда оба цикла этой точки, порожденные автоморфизмами S_λ на Γ^* и Γ, совпадают на общей части границ. Принимая во внимание, что цикл любой точки границы Γ^* всюду плотен на Γ^*, нетрудно убедиться, что цикл любой точки границы Γ также всюду плотен на Γ.

Поскольку граница Γ негладкая, то мы не можем опираться на лемму 1, и для доказательства неединственности решения задачи (1), (2) в классе измеримых функций заметим, что мера пересечения отрезка oe с характеристиками второго семейства, проходящими через точки множества $f_1(P_0) = S_\lambda^+ P_0'$, равна $K > 0$, а мера пересечения oe с характеристиками того же семейства, проходящими через точки $f_1(G_0) = S_\lambda^+ G_0'$, равна $(K - \operatorname{tg}\varphi) > 0$. Кроме того, поскольку $f_1(G_0)$ принадлежит гладкой части границы Γ, а множество $M(P_0')$ на общей части границ Γ^* и Γ имеет меру нуль, легко убедиться, что мера пересечения множества $f_1(G_0)$ с множеством $M(P_0')$ равна нулю. Теперь уже легко заключить, что пересечения области D как с множеством характеристик второго семейства, переходящих через точки инвариантного относительно S_λ^+ и S_λ^- множества $M(P_0')$, так и с множеством характеристик того же семейства, проходящих через точки дополнительного множества $CM(P_0')$, (которое также инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-), имеют положительную плоскую меру.

Положим $f(s)$ равной единице на множестве $M(P_0')$ и нулю на $CM(P_0')$, и продолжим эти значения во внутрь области D, полагая их постоянными на характеристиках первого семейства. Обозначим полученную таким образом функцию через $f(x, y)$. Аналогичным образом, исходя из $g(s) = -f(s)$ и заменяя первое семейство характеристик вторым, определим функцию $g(x, y)$. Принимая во внимание сказанное выше, легко убеждаемся, что в области D функция $U(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ является нетривиальным решением однородной задачи (1), (2) в классе измеримых функций.

Таким образом, решение задачи (1), (2) в области D, которое единственно в классе кусочно-непрерывных функций [4] (цикл каждой точки Γ, порожденной автоморфизмом S_λ, всюду плотен на Γ), не является единственным в классе измеримых функций.

В заключение выражаю глубокую благодарность Р. А. Александряну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 24.III.1967

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ԷՐԳՈԴԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԼԱՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵՒ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ: II

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում քննարկվում է ուռուցիկ տիրույթներում լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման միակության հարցը չափելի ֆունկցիաների դասում։

Ապացուցվում է, որ եթե տիրույթի եզրագծի կորությունը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, ապա λ պարամետրի համարյա բոլոր այն արժեքների համար, որոնց դեպքում (1), (2) խնդրին համապատասխանող S_λ ավտոմորֆիզմների պտտման թվերը իռացիոնալ են, (1), (2) խնդրի լուծումը միակն է չափելի ֆունկցիանների դասում։

Ցույց է տրվում նաև, որ (1), (2) համասեռ խնդրի ալսպես կոչված ընդհանրացած սեփական արժեքների բազմությունը կազմված է հաշվելի թվով կապակցված կոմպոնենտներից, որոնցից ամեն մեկն իրենից ներկայացնում է կամ մեկ կետ, կամ ամբողջ հնտերվալ։

S. G. HOVSEPIAN

ON THE ERGODICITY OF GONTINEOUS AUTOMORPHISMS AND THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE VIBRATING STRING EQUATION. II

S u m m a r y

In the class of measurable functions the uniqueness of solution of Dirichlet problem for vibrating string equation in convex domains is discussed.

It is proved in the paper, that if the boundary's curvature satisfies Lipsitz condition, then for almost every value of those λ, for which the rotation numbers of corresponding to the problem (1) (2) S_λ automorphisms are irrational, the solution of the problem (1), (2) is unique in the class of measurable functions.

It is also shown, that the set of so called generalised eigenvalues for the homogenous problem (1), (2) constitutes of countable number of connected components, each being a point or an interval.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Овсепян.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. I, Известия АН АрмССР, Математика, 2, № 2, 1967, 128—136.
2. *Р. А. Александрян.* Кандидатская диссертация, МГУ, 1949.
3. *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962.
4. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды Моск. матем. о-ва, 9, 1960, 455—505.
5. *С. Г. Овсепян.* О порождающем множестве граничных точек в задаче Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных областях, ДАН АрмССР, XXXIX, 1964, 193—200.
6. *D. G. Bourgin, R. Diffin.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Am. Math. Soc., 45, 1939, 851—859.
7. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, сер. матем., 25, № 1, 1961, 21—86.
8. *A. Finzi.* Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitesimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3), 1950, 243—305.
9. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
10. *F. John.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation, Amer. Journ. Math., 63, № 1, 1941, 141—154.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Ե. Դ. Սոլոմենցև. *Սուբհարմոնիկ ֆունկցիաների միջին արժեքների մասին* . . . 139
Ի. Ս. Սարգսյան. *Դիրակի միաչափ սիստեմի սպեկտրալ ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքի և ըստ սեփական ֆունկցիաների վերլուծության մասին* 155
Ս. Գ. Հովսեփյան. *Անընդհատ ավտոմորֆիզմների էրգոդիկության և լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման միակության մասին II* . . 185

СОДЕРЖАНИЕ

Е. Д. Соломенцев. О средних значениях субгармонических функций 139
И. С. Саргсян. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям одномерной системы Дирака 155
С. Г. Овсепян. Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны II 195

CONTENTS

E. D. Solomentsev. On the mean values of subharmonic functions 139
I. S. Sargsian. On the asymptotic behaviour and eigenfunction development of the spectral function for the one dimentional Dirac system. 155
S. G. Hovsepian. On the ergodicity of contineous automorphisms and the uniqueness of the solution of Dirichlet problem for the vibrating string equation II 195

Технический редактор Л. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04445. Подписано к печати 12/VII 1967 г. Тираж 820 экз. Изд. № 2874. Зак. 233.
Формат бумаги 70×108$^1/_{16}$. Печ. л. 4,5. Бум. л. 2,25. Усл. печ. л. 6.12.
Уч. изд. лист. 5,2.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, ул. Барекамутян, 24