ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика»,

ԳԻՆԸ 30 Կ.
ЦЕНА 30 К.   индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

О СПРЯМЛЯЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Как известно, в классическом анализе доказывается следующий критерий спрямляемости плоских кривых: для того, чтобы плоская кривая была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы ее компоненты были функциями ограниченной вариации. В классическом анализе доказывается также следующее достаточное условие спрямляемости плоских кривых: если обе компоненты плоской кривой имеют ограниченные производные, то кривая спрямляема.

В настоящей статье рассматривается вопрос о возможности перенесения этих критериев спрямляемости плоских кривых в конструктивный математический анализ. Как оказывается, в конструктивном анализе ограниченность вариаций компонент плоской кривой является необходимым, но не достаточным условием спрямляемости кривой. Точно так же наличие ограниченных производных компонент плоской кривой не является достаточным условием спрямляемости кривой. Однако равномерная дифференцируемость компонент плоской кривой (т. е. возможность равномерного приближения их производных соответствующими отношениями приращений) является достаточным условием спрямляемости кривой.

Все дальнейшие рассмотрения проводятся в рамках конструктивной установки в математике ([1], [2]). Будут использоваться обозначения и понятия из [3], [4], [5] с отдельными отступлениями, так, например, знак = будет употребляться не только в роли символа равенства FR-чисел, но также в роли символа графического равенства и равенства по определению; толкование знака равенства в каждом отдельном случае будет видно из контекста. Для удобства читателя некоторые определения из [3], [4], [5] будут повторены в тексте статьи. Символы ε и δ будут употребляться в такой же роли, как в [5], т. е. в качестве переменных для положительных рациональных чисел.

Доказательства теорем настоящей статьи изложены несколько более сжатым образом, чем это обычно принято в работах по конструктивному анализу, в частности, иногда в рассуждениях подразумевается рассмотрение алгорифмов, не введенных в изложение явным образом посредством указания их конструкции. Во всех случаях такого рода построение этих алгорифмов может быть легко выполнено по образцу аналогичных мест в доказательствах теорем из [3], [4], [5].

Формулировки большинства результатов настоящей статьи были опубликованы в [6].

§ 1. Формулировки основных определений и теорем

Конструктивной кривой, заданной на невырожденном сегменте $\alpha\Delta\beta$, мы будем называть алгорифм K, который по каждому FR-числу $x \in \alpha\Delta\beta$ выдает некоторую конструктивную точку $u \circ v$ и обладает свойствами корректности: если $x \in \alpha\Delta\beta$, и $x = y$, то $K(x) = K(y)$. Это определение отличается лишь в техническом отношении от определения, приведенного в [3] на стр. 255. Очевидно, что для всякой конструктивной кривой K, заданной на $\alpha\Delta\beta$, потенциально осуществимы ее компоненты, т. е. конструктивные функции K^{ξ} и K^{η} такие, что всегда $K(x) = K^{\xi}(x) \circ K^{\eta}(x)$.

Зафиксируем некоторый стандартный способ построения компонент кривой K, исходя из задания K, и впредь через K^{ξ} и K^{η} будем обозначать компоненты кривой K, построенные фиксированным стандартным способом. Будем говорить, что кривая K является *непрерывной (равномерно непрерывной, дифференцируемой)*, если K^{ξ} и K^{η} непрерывны (равномерно непрерывны, дифференцируемы). Будем говорить, что конструктивная функция f, заданная на $\alpha\Delta\beta$, *равномерно дифференцируема*, если для всякого ε потенциально осуществимо такое δ, что всегда из

$$x \in \alpha\Delta\beta,\ 0 < |u_1| < \delta,\ 0 < |u_2| < \delta,\ x + u_1 \in \alpha\Delta\beta,\ x + u_2 \in \alpha\Delta\beta$$

следует

$$\left| \frac{f(x+u_1) - f(x)}{u_1} - \frac{f(x+u_2) - f(x)}{u_2} \right| < \varepsilon.$$

Кривая K называется равномерно дифференцируемой, если K^{ξ} и K^{η} равномерно дифференцируемы.

Будем говорить, что функция f, определенная на $\alpha\Delta\beta$, удовлетворяет *условию Липшица*, если потенциально осуществимо FR-число u такое, что $|f(x) - f(y)| \leqslant u \cdot |x - y|$ при любых x и y, принадлежащих $\alpha\Delta\beta$. Будем говорить, что кривая K удовлетворяет условию Липшица, если K^{ξ} и K^{η} удовлетворяют условию Липшица.

В дальнейших определениях алгорифмов W и W^*, а также во всех рассмотрениях, связанных с этими алгорифмами, мы предполагаем фиксированной некоторую кривую K, заданную на $\alpha\Delta\beta$, и некоторую функцию f, заданную на $\alpha\Delta\beta$. Будем рассматривать различные дробления $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$, где $\alpha = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_h = \beta$. Посредством W будем обозначать алгорифм, который всякое дробление $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ перерабатывает в FR-число $\sum\limits_{i=1}^{h-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|$.

Посредством W^* мы будем обозначать алгорифм, который всякое дробление $P = a_1 * a_2 * \cdots * a_h$ перерабатывает в FR-число

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{(K^{\xi}(\alpha_{i+1}) - K^{\xi}(\alpha_i))^2 + (K^{\eta}(\alpha_{i+1}) - K^{\eta}(\alpha_i))^2}.$$

Будем говорить (ср. [4], § 6), что функция f является *функцией ограниченной вариации*, если потенциально осуществимо такое FR-число $v > 0$ (именуемое *вариацией* функции f), что всегда $W(P) \leqslant v$, и для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление P сегмента $\alpha\Delta\beta$, что $W(P) > v - \varepsilon$. Будем говорить, что кривая K *спрямляема*, если потенциально осуществимо такое FR-число $u > 0$ (именуемое *длиной* кривой K), что всегда $W^*(P) \leqslant u$, и для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление P сегмента $\alpha\Delta\beta$, что $W^*(P) > u - \varepsilon$.

Теорема 1. *Если K спрямляема, то K^{ξ} и K^{η} суть функции ограниченной вариации.*

Теорема 2. *Всякая равномерно дифференцируемая кривая спрямляема.*

Теорема 3. *Потенциально осуществима дифференцируемая кривая K, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что K^{ξ} и K^{η} суть функции ограниченной вариации, однако кривая K не спрямляема.*

§ 2. Некоторые вспомогательные определения и леммы

Будем говорить, что дробление P есть *продолжение* дробления Q, если для любого FR-числа, входящего в Q, потенциально осуществимо равное ему FR-число, входящее в P. Будем говорить, что дробление P есть *квазипродолжение* дробления Q, если для любого FR-числа, входящего в Q, квазиосуществимо равное ему FR-число, входящее в P. *Итерацией* дробления $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ относительно дробления $Q = \beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_k$ того же сегмента будем называть дробление $x_1 * x_2 * \cdots * x_{(k-1)\cdot h}$, где $x_{(i-1)\cdot h + j} = \min(\max(\beta_i, \alpha_j)\beta_{i+1})$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $1 \leqslant j \leqslant h$. Через T будем обозначать алгорифм, который всякое натуральное число n перерабатывает в дробление сегмента $\alpha\Delta\beta$, состоящее из всех FR-чисел вида

$$\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2^n} \cdot k \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Лемма 1. *Каковы бы ни были дробления P и Q сегмента $\alpha\Delta\beta$, итерация дробления P относительно дробления Q является продолжением дробления Q и квазипродолжением дробления P.*

Доказательство. Пусть $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ и $Q = \beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_k$ суть дробления $\alpha\Delta\beta$, и пусть $R = x_1 * x_2 * \cdots * x_{(k-1)\cdot h}$ есть итерация P относительно Q. Из определений очевидно, что $x_{(i-1)\cdot h + 1} = \beta_i$, и $x_{i\cdot h} = \beta_{i+1}$ при любом i от 1 до $k-1$. Таким образом, R есть продолжение Q. Далее для каждого j в пределах от 1 до h, очевидно, квазиосуществимо такое натуральное i в пределах от 1 до $k-1$, что $\beta_i \leqslant \alpha_j \leqslant \beta_{i+1}$ и, следовательно, $x_{(i-1)\cdot h + j} = \alpha_j$. Лемма доказана.

Следствие. *Для любых двух дроблений P и Q* сегмента $\alpha\Delta$ потенциально осуществимо дробление R того же сегмента, являющееся квазипродолжением дроблений P и Q.

Следующая лемма показывает, что следствие леммы 1 нельз усилить путем замены слова „квазипродолжение" словом „продолжение".

Лемма 2. *Неверно, что для любых двух дроблений P и Q сегмента $0\Delta 1$ потенциально осуществимо дробление R, являющееся продолжением дроблений P и Q.*

Доказательство. Допустим, напротив, что для любых дроблений P и Q сегмента $0\Delta 1$ потенциально осуществимо дробление R являющееся продолжением дроблений P и Q. Тогда, в частности, дл любых FR-чисел x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, потенциально осуществимо дробление $R = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$, являющееся продолжением дроблений $0 * x * 1$ и $0 * y * 1$; следовательно, потенциально осуществимы такж натуральные числа i и j в пределах от 1 до h такие, что $\alpha_i = x$, $\alpha_j = y$ Но тогда очевидно, что, если $i \leqslant j$, то $x \leqslant y$, и если $i > j$, то $x > y$ Так как для натуральных чисел i и j справедлива дизъюнкция $i \leqslant j \vee j \leqslant$ то для любых x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, справедлива дизъюнкци $x \leqslant y \vee y \leqslant x$; но это, как легко видеть, невозможно согласно лемме из § 2 работы [7]. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если дробление Q сегмента $\alpha\Delta\beta$ является квазипродолжением дробления P того же сегмента, то*

$$W^*(P) \leqslant W^*(Q),$$

$$W(P) \leqslant W(Q).$$

Доказательство. Пусть дробление Q сегмента $\alpha\Delta\beta$ являетс продолжением дробления P того же сегмента; тогда утверждение лем мы легко следует из неравенств $|u+v| \leqslant |u| + |v|$, $\sqrt{(x+y)^2+(u+v)^2} \leqslant$ $\leqslant \sqrt{x^2+u^2} + \sqrt{y^2+v^2}$. Если же дробление Q является квазипродолжением дробления P, то требуемое утверждение немедленно выво дится из предыдущего на основании эквивалентности каждого неравен ства его двойному отрицанию. Лемма доказана.

Лемма 4. *FR-число v является вариацией функции f, заданной на $\alpha\Delta\beta$, в том и только в том случае, когда*

$$W(T(n)) \underset{n \to \infty}{\to} v.$$

Эта лемма является частным случаем леммы 2 из § 6 статьи [4].

Лемма 5. *FR-число u является длиной кривой K, заданной на $\alpha\Delta\beta$, в том и только в том случае, когда*

$$W^*(T(n)) \underset{n \to \infty}{\to} u.$$

Доказательство аналогично лемме 4. Вначале доказывается, что для всякого дробления $P = \alpha_1 * \alpha_2 \cdots * \alpha_h$ сегмента $\alpha\Delta\beta$ и для всякого ε потенциально осуществимо такое натуральное число n, что

$$W^*(T(n)) > W^*(P) - \varepsilon. \tag{a}$$

В самом деле, для построения такого натурального n достаточно воспользоваться непрерывностью конструктивных функций K^{ξ} и K^{η} в точках $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_h$ и выбрать n таким образом, чтобы при любом i от 1 до h и при любом $x \in \alpha\Delta\beta$ из $|\alpha_i - x| < \frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$ вытекало бы $|K^{\xi}(\alpha_i) - K^{\xi}(x)| < \frac{\varepsilon}{4h}$, $|K^{\eta}(\alpha_i) - K^{\eta}(x)| < \frac{\varepsilon}{4h}$; легко проверить, что число n, построенное указанным образом, удовлетворяет требуемому условию. Теперь, если кривая K спрямляема, и u есть длина кривой K, то всегда $W^*(T(n)) \leqslant u$ и, кроме того, согласно (а), в соответствии с определением спрямляемой кривой, для всякого ε потенциально осуществимо такое n_0, что $W^*(T(n_0)) > u - \varepsilon$; но тогда при всяком $n \geqslant n_0$ имеем: $u - \varepsilon < W^*(T(n)) \leqslant u$, откуда $|W^*(T(n)) - u| < \varepsilon$.

Таким образом, если длина кривой K равна u, то $W^*(T(n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. С другой стороны, если $W^*(T(n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, то, очевидно, для любого ε потенциально осуществимо такое n, что $W^*(T(n)) > u - \varepsilon$; кроме того, согласно лемме 3, последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ является неубывающей, а тогда из (а) легко следует, что $W^*(P) \leqslant u$ для всякого дробления P сегмента $\alpha\Delta\beta$. Таким образом, если $W^*(T(n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$, то кривая K спрямляема, и ее длина равна u. Лемма доказана.

Дальнейшие леммы будут использоваться только в доказательстве теоремы 1.

Лемма 6. *Каковы бы ни были FR-числа x, y, z, если $z > 0$, то* $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$ равносильно $|x| \leqslant \frac{|y|+z}{2}$.

Доказательство. Пусть $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$. Тогда

$$|x| = \frac{1}{2}\left|\left(x - \frac{y}{2}\right) + \left(x + \frac{y}{2}\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right|\right) \leqslant \frac{|y|+z}{2}.$$

Пусть теперь $|x| \leqslant \frac{|y|+z}{2}$. Легко видеть, что всегда

$$\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| = \left||x| - \frac{|y|}{2}\right| + \left||x| + \frac{|y|}{2}\right|$$

(это равенство легко доказывается разбором случаев $x \geqslant 0$, $x < 0$, $y \geqslant 0$, $y < 0$ с последующим устранением двойных отрицаний). Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Но для этого случая неравенство $\left|x - \frac{y}{2}\right| + \left|x + \frac{y}{2}\right| \leqslant |y| + z$ легко устанавливается разбором случаев $x \geqslant \frac{y}{2}$, $x < \frac{y}{2}$ с последующим устранением двойных отрицаний. Лемма доказана.

Лемма 7. *Каковы бы ни были FR-числа x, y, α, β, и каково бы ни было ε, если* $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\varepsilon$, *то* $|x|+|\alpha-x|-|\alpha|\leqslant\sqrt{2\varepsilon\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}+2\varepsilon$.

Доказательство. Если $\alpha^2+\beta^2=0$, то лемма очевидна.

Разбором случаев $\alpha^2+\beta^2=0$, $\alpha^2+\beta^2\neq0$ при помощи снятия двойных отрицаний немедленно убеждаемся в том, что для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Пусть $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Введем обозначения: $\sigma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; $x'=\frac{\alpha x+\beta y}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}$; $y'=\frac{-\beta x+\alpha y}{\sigma}$;

$\alpha'=\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)$; $\beta'=\frac{1}{2}\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}$.

Тогда $x=\frac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}+\frac{\alpha}{2}$; $y=\frac{\beta x'+\alpha y'}{\sigma}+\frac{\beta}{2}$. Подставляя эти значения для x и y в неравенство $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\leqslant\varepsilon$, после очевидных преобразований имеем

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{2}(\sigma+\varepsilon)\right)^2}+\frac{y'^2}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}\right)^2}\leqslant1,$$

откуда $|x'|\leqslant\alpha'$, $|y'|\leqslant\beta'$. Но тогда

$$\left|\frac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}\right|\leqslant\frac{|\alpha|}{\sigma}\cdot\alpha'+\frac{|\beta|}{\sigma}\cdot\beta'\leqslant\frac{|\alpha|}{2\sigma}(\sigma+\varepsilon)+\beta'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\alpha|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\beta'=\frac{|\alpha|}{2}+\frac{\varepsilon+2\beta'}{2}.$$

Отсюда, согласно лемме 6, вытекает, что $\left|\frac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}+\frac{\alpha}{2}\right|+$ $+\left|\frac{\alpha x'-\beta y'}{\sigma}-\frac{\alpha}{2}\right|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+2\beta'$, иначе говоря, $|x|+|x-\alpha|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+$ $+\sqrt{2\sigma\varepsilon+\varepsilon^2}$, откуда $|x|+|x-\alpha|\leqslant|\alpha|+\varepsilon+\sqrt{2\sigma\varepsilon}+\varepsilon=|\alpha|+\sqrt{2\sigma\varepsilon}+2\varepsilon$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Каковы бы ни были FR-числа* $x_1, x_2, \cdots, x_h$, $y_1, y_2, \cdots, y_h$, если $\sum_{i=1}^{h}\sqrt{x_i^2+y_i^2}-\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{h}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{h}y_i\right)^2}\leqslant\varepsilon$, *то*

$$\sum_{i=1}^{h}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{h}x_i\right|\leqslant2\varepsilon+\sqrt{2\varepsilon\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{h}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{h}y_i\right)^2}}.$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\sigma=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{h}x_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{h}y_i\right)^2}.$$

Так как неравенство $\sum_{i=1}^{h}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{h}x_i\right|\leqslant2\varepsilon+\sqrt{2\sigma\varepsilon}$ эквивалентно своему двойному отрицанию, то, не нарушая общности, мы можем считать, что система FR-чисел $x_1 * x_2 * \cdots * x_h$ разбита на две подсистемы, из которых первая (соответственно, вторая подсистема) составлена из всех чисел x_l, удовлетворяющих условию $x_l > 0$ (соответственно, $x_l < 0$). Введем обозначения: $\alpha = \sum_{l=1}^{h} x_l$; $\beta = \sum_{l=1}^{h} y_l$; $x = \sum_{x_l > 0} x_l$; $y = \sum_{x_l > 0} y_l$.

Тогда имеем

$$\varepsilon > \sum_{l=1}^{h} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} - \sqrt{\left(\sum_{l=1}^{h} x_l\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{h} y_l\right)^2} =$$
$$= \sum_{x_l > 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} + \sum_{x_l < 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Но, очевидно,

$$\sum_{x_l > 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{x_l > 0} x_l\right)^2 + \left(\sum_{x_l > 0} y_l\right)^2},$$
$$\sum_{x_l < 0} \sqrt{x_l^2 + y_l^2} \geqslant \sqrt{\left(\sum_{x_l < 0} x_l\right)^2 + \left(\sum_{x_l < 0} y_l\right)^2},$$

а потому

$$\varepsilon > \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Отсюда, согласно лемме 7, имеем: $|x| + |\alpha - x| - |\alpha| \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\alpha\varepsilon}$, а это равносильно требуемому неравенству. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть K — конструктивная кривая, заданная на $\alpha\Delta\beta$, и пусть натуральные числа m и n и рациональное число ε таковы, что $W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) \leqslant \varepsilon$. Тогда $W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon W^*(T(n))}$,* где *при определении алгорифма W в роли функции f взята функция K^ξ.*

Доказательство. Введем следующие сокращенные обозначения:

$$x_i^{(n)} = \alpha + \frac{i}{2^n} \cdot (\beta - \alpha),$$

$$\Delta_n K_i^\xi = K^\xi (x_{i+1}^{(n)}) - K^\xi (x_i^{(n)}),$$

$$\Delta_n K_i^\eta = K^\eta (x_{i+1}^{(n)}) - K^\eta (x_i^{(n)}),$$

$$\Delta_n K_i = \sqrt{(\Delta_n K_i^\xi)^2 + (\Delta_n K_i^\eta)^2}.$$

Согласно определениям алгорифмов W^* и T имеем

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) = \sum_{l=0}^{2^{n+m}-1} \Delta_{n+m} K_l -$$
$$- \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_n K_l = \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=2^m \cdot l}^{(l+1)\cdot 2^m - 1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right).$$

Обозначим FR-числа $\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l$ при $i = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1$

соответственно через $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2^n-1}$. Очевидно, что все эти числа неотрицательны. Согласно лемме 8 при каждом i от 0 до 2^n-1 имеем

$$\sum_{j=i\cdot 2^m}^{(i+1)\cdot 2^m-1} |\Delta_{n+m} K_j| - |\Delta_n K_i| \leqslant 2\lambda_i + \sqrt{2\lambda_i \cdot \Delta_n K_i}\,.$$

Складывая эти неравенства при $i = 0, 1, 2, \cdots, 2^n - 1$, имеем

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant \sum_{i=0}^{2^n-1} (2\lambda_i + \sqrt{2\lambda_i \Delta_n K_i}),$$

откуда

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_i + \sqrt{2} \sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\lambda_i} \cdot \sqrt{\Delta_n K_i}) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{i=0}^{2^n-1} \lambda_i + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\lambda_i})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^{2^n-1} (\sqrt{\Delta_n K_i})^2} =$$

$$= 2(W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))) +$$

$$+ \sqrt{2}\sqrt{W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))} \cdot \sqrt{W^*(T(n))}$$

или, согласно условию леммы,

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{W^*(T(n))}\,.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть кривая K спрямляема, и пусть u — длина кривой K. Пусть функция f совпадает с K^1. Согласно лемме 9 имеем: каковы бы ни были натуральные числа m, n и рациональное число $\varepsilon < 1$, если

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) \leqslant \varepsilon,$$

то

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) \leqslant 2\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon W^*(T(n))} \leqslant 2\varepsilon +$$

$$+ \sqrt{2u\varepsilon} < 2(1 + \sqrt{u})\sqrt{\varepsilon}\,.$$

Согласно лемме 5 конструктивная последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится; отсюда вытекает, что последовательность FR-чисел $W(T(n))$ также конструктивно сходится. В самом деле, в силу сходимости $W^*(T(n))$ имеем: для всякого $\varepsilon < 1$ потенциально осуществимо такое натуральное n, что при любом натуральном m будет

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) < \frac{\varepsilon^2}{4(1+\sqrt{u})^2},$$

откуда

$$W(T(n+m)) - W(T(n)) < 2\cdot(1+\sqrt{u})\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4(1+\sqrt{u})^2}} = \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность FR-чисел $W(T(n))$ сходится и потому, согласно лемме 4, функция K^ξ есть функция ограниченной вариации. В точности таким же образом доказывается, что K^η есть функция ограниченной вариации. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть кривая K равномерно дифференцируема. Докажем, что K спрямляема. Для этого, согласно лемме 5, достаточно показать, что конструктивная последовательность FR-чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится при $n\to\infty$.

Фиксируем произвольное ε. Пользуясь равномерной дифференцируемостью функций K^ξ и K^η, построим такое натуральное n, чтобы всегда при

$$x\in\alpha\Delta\beta,\ x+u_1\in\alpha\Delta\beta,\ x+u_2\in\alpha\Delta\beta,\ 0<|u_1|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}},\ 0<|u_2|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$$

было бы

$$\left|\frac{K^\xi(x+u_1)-K^\xi(x)}{u_1}-\frac{K^\xi(x+u_2)-K^\xi(x)}{u_2}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\frac{K^\eta(x+u_1)-K^\eta(x)}{u_1}-\frac{K^\eta(x+u_2)-K^\eta(x)}{u_2}\right|<\varepsilon.$$

Очевидно, что в этом случае всегда при

$$x\in\alpha\Delta\beta,\ x+u\in\alpha\Delta\beta,\ 0<|u|<\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}$$

будет

$$\left|\frac{K^\xi(x+u)-K^\xi(x)}{u}-K^{\xi'}(x)\right|\leqslant\varepsilon,$$

$$\left|\frac{K^\eta(x+u)-K^\eta(x)}{u}-K^{\eta'}(x)\right|\leqslant\varepsilon, \qquad (б)$$

где через $K^{\xi'}$ и $K^{\eta'}$ обозначены производные* функций, соответственно K^ξ и K^η. Докажем теперь, что для построенного указанным образом n и для любого натурального m справедливо следующее неравенство:

$$|W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))| \leqslant 8\varepsilon(\beta-\alpha). \qquad (в)$$

Будем употреблять при этом сокращенные обозначения, введенные в начале доказательства леммы 9 и, кроме того, через $R_i^{(n)}$ будем обозначать выражение $\sqrt{(K^{\xi'}(x_i^{(n)}))^2+(K^{\eta'}(x_i^{(n)}))^2}$. Из определений алгорифмов W^* и T имеем

* Во избежание недоразумений отметим, что здесь, как и в аналогичных местах в дальнейшем, мы не рассматриваем ′ как символ оператора дифференцирования, а понимаем $K^{\xi'}$ и $K^{\eta'}$ как неразложимые обозначения.

$$W^*(T(n+m)) - W^*(T(n)) = \sum_{l=0}^{2^{n+m}-1} \Delta_{n+m} K_l - \sum_{l=0}^{2^n-1} \Delta_n K_l =$$

$$= \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\,2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right).$$

Согласно (б) при любом i от 0 до 2^n-1 и при любом j от 0 до $(i+1)\cdot 2^m-1$ имеем

$$\left| \frac{\Delta_{n+m} K_j^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^{n+m}} - K^{\xi'}(x_j^{(n+m)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{K^{\xi}(x_j^{(n+m)}) - K^{\xi}(x_l^{(n)})}{x_j^{(n+m)} - x_l^{(n)}} - K^{\xi'}(x_j^{(n+m)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{K^{\xi}(x_j^{(n+m)}) - K^{\xi}(x_l^{(n)})}{x_j^{(n+m)} - x_l^{(n)}} - K^{\xi'}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из этих неравенств получаем

$$\left| \frac{\Delta_{n+m} K_j^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^{n+m}} - K^{\xi'}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant 3\varepsilon,$$

иначе говоря,

$$\left| \Delta_{n+m} K_j^{\xi} - K^{\xi'}(x_l^{(n)}) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 3\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}}. \qquad \text{(г)}$$

Точно таким же образом доказывается, что

$$\left| \Delta_{n+m} K_j^{\eta} - K^{\eta'}(x_l^{(n)}) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 3\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}}. \qquad \text{(д)}$$

Из (г) и (д) после очевидных преобразований имеем

$$\left| \Delta_{n+m} K_j - R_l^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}} \right| \leqslant 6\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^{n+m}},$$

откуда

$$\left| \sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m-1} \Delta_{n+m} K_j - R_l^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n} \right| \leqslant 6\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n}. \qquad \text{(е)}$$

С другой стороны, согласно (б)

$$\left| \frac{\Delta_n K_l^{\xi}}{(\beta-\alpha)/2^n} - K^{\xi'}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

$$\left| \frac{\Delta_n K_l^{\eta}}{(\beta-\alpha)/2^n} - K^{\eta'}(x_l^{(n)}) \right| \leqslant \varepsilon,$$

откуда, как легко проверить, вытекает, что

$$\left| \Delta_n K_l - R_l^{(n)} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n} \right| \leqslant 2\varepsilon \cdot \frac{\beta-\alpha}{2^n}. \qquad \text{(ж)}$$

Теперь на основании (е) и (ж) получаем

$$\left| \sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m - 1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right| < 8\varepsilon \cdot \frac{\beta - \alpha}{2^n},$$

откуда

$$\left| \sum_{l=0}^{2^n-1} \left(\sum_{j=l\cdot 2^m}^{(l+1)\cdot 2^m - 1} \Delta_{n+m} K_j - \Delta_n K_l \right) \right| < 8\varepsilon\,(\beta - \alpha),$$

иначе говоря

$$|W^*(T(n+m)) - W^*(T(n))| < 8\varepsilon\,(\beta - \alpha),$$

и неравенство (в) доказано. Мы показали, таким образом, что для всякого ε потенциально осуществимо такое n, что при любом m справедливо (в). Отсюда сразу вытекает, что последовательность чисел $W^*(T(n))$ конструктивно сходится при $n \to \infty$. Следовательно, кривая K спрямляема. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Построим точное дизъюнктное 1/2-ограниченное сегментное покрытие Φ сегмента $0\Delta 1$ (см. [5], § 2), обладающее следующим свойством: каждое FR-число $x \in 0\Delta 1$ принадлежит интервалу $a\nabla b$, где a и b суть соответственно левый и правый конец сегмента $\Phi_{K(x)} \cup \Phi_{L(x)}$ (K, L суть характеристические алгорифмы покрытия Φ). Потенциальная осуществимость алгорифма Φ с указанными свойствами легко следует из доказательств теорем 2.2 и 2.3 работы [5]. Очевидно, что для каждого натурального k потенциально осуществима функция φ_k такая, что при любом x

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{(b-a)^3} \cdot (\max(0,\ (x-a)\cdot(b-x)))^2,$$

где через a и b обозначены соответственно левый и правый конец сегмента Φ_k. На основании этого при помощи конструкции, указанной в теореме 3.1 из [5], построим всюду определенную функцию f такую, что при любом $x \in 0\Delta 1$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N(x)} \varphi_k(x), \tag{з}$$

где N есть ограничительный алгорифм покрытия Φ. Очевидно, что для любого натурального числа k и любого FR-числа $x \in 0\Delta 1$ имеем: если $x \in \Phi_k = a\Delta b$, то $f(x) = \varphi_k(x) = \dfrac{(x-a)^2 (b-x)^2}{(b-a)^3}$. Построим, наконец, кривую K, определенную на $0\Delta 1$ и такую, что при любом $x \in 0\Delta 1$

$$K^{\xi}(x) = x + f(x),$$
$$K^{\eta}(x) = x.$$

Как будет сейчас доказано, построенная таким образом кривая удовлетворяет всем требуемым условиям.

Докажем вначале, что кривая K дифференцируема и удовлетворяет условию Липшица. В самом деле, очевидно, что при любом K функция φ_k дифференцируема и ее производная равна 0 при $x \bar{\in} \Phi_k$ и равна $\dfrac{4(x-a)(b-x)\left(\frac{b+a}{2}-x\right)}{(b-a)^3}$ при $x \in \Phi_k = a\Delta b$. Согласно построению функции f, для всякого FR-числа x потенциально осуществимы такие ε и n, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z) \tag{з}$$

при любом $z \in (x-\varepsilon) \nabla (x+\varepsilon)$. Отсюда немедленно вытекает, что функция f всюду дифференцируема; следовательно, кривая K дифференцируема. Легко проверить, что при любом $x \in a\Delta b$

$$\left|\frac{4(x-a)(b-x)\left(\frac{b+a}{2}-x\right)}{(b-a)^3}\right| \leqslant \frac{1}{2};$$

но для любого x потенциально осуществимо не более одного k, для которого производная $\varphi'_k(x)$ отлична от 0; поэтому, согласно (з), производная f' функции f удовлетворяет условию

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

при любом x. Но тогда производная функции K^{ξ} по модулю не превосходит 3/2, а потому, согласно конструктивному варианту теоремы Лангранжа ([7], § 5, следствие 3 теоремы 2), при любых x и y, принадлежащих $0\Delta 1$, имеем

$$|K^{\xi}(x) - K^{\xi}(y)| \leqslant \frac{3}{2} \cdot |x-y|.$$

Следовательно, кривая K удовлетворяет условию Липшица.

Так как всегда $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$, то при любом $x \in 0\Delta 1$ производная функции K^{ξ} не меньше 1/2, а потому, согласно указанному следствию теоремы 2 из [7], § 5, функция K^{ξ} строго возрастает. Таким образом, согласно теореме 6.7 из [4], функции K^{ξ} и K^{η} являются функциями ограниченной вариации на $0\Delta 1$.

Остается показать, что кривая K не спрямляема. Допустим, напротив, что кривая К спрямляема; пусть u есть длина K. Согласно определению спрямляемой кривой для всякого ε потенциально осуществимо такое дробление $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$ сегмента $0\Delta 1$, что $u - \varepsilon < W^*(P) \leqslant u$. Зафиксируем некоторое ε, построим дробление $P = \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_h$, удовлетворяющее указанным условиям, и построим натуральное число n такое, что $n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant h} N(\alpha_i)$, где N — ограничительный алгорифм покрытия Φ. Нашей ближайшей целью будет доказательство того, что построенное таким образом натуральное число n обладает следующим свойством: для любого натурального числа m будет*

* Здесь, как и в дальнейшем, посредством $|\Phi_k|$ обозначена длина сегмента Φ_k.

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < 4112\varepsilon. \qquad (\text{и})$$

В самом деле, пусть m — произвольное натуральное число. Рассмотрим итерацию дробления P относительно дробления, составленного из точки 0, точки 1, всех левых концов сегментов $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ и всех правых концов тех же сегментов; обозначим эту итерацию через Q. Ясно, что $u - \varepsilon < W^*(Q) \leqslant u$. Теперь построим итерацию дробления Q относительно дробления, составленного из точки 0, точки 1, всех левых концов сегментов $\Phi_{n+1}, \Phi_{n+2}, \cdots, \Phi_{n+m}$, всех правых концов тех же сегментов и всех середин тех же сегментов. Обозначим построенную итерацию через R. Легко проверить, что

$$W^*(R) - W^*(Q) = \left(\frac{\sqrt{145} + \sqrt{113}}{16} - \sqrt{2}\right) \cdot \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| >$$

$$> \frac{1}{4112} \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k|. \qquad (\text{к})$$

С другой стороны очевидно, что $W^*(R) \leqslant u$, и $W^*(Q) > u - \varepsilon$; следовательно

$$W^*(R) - W^*(Q) < \varepsilon. \qquad (\text{л})$$

Сопоставляя (л) и (к), получаем

$$\frac{1}{4112} \sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < \varepsilon$$

и, тем самым, (и) доказано.

Исходя из предположения о спрямляемости кривой K, мы доказали, таким образом, что для всякого ε потенциально осуществимо такое натуральное число n, что при любом натуральном m будет: $\sum_{k=n+1}^{n+m} |\Phi_k| < 4112\varepsilon$, иначе говоря, мы доказали, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|$ конструктивно сходится. Но это невозможно, так как, согласно теореме 1.4. из [5], ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi_k|$ является шпекеровым. Следовательно, кривая K не спрямляема. Теорема доказана.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 12.XI.66

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ

ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎ ՀԱՐԹ ԿՈՐԵՐԻ ՈՒՂՂԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հետազոտվում են հարթ կորերի ուղղելիության որոշ պայմաններ կոնստրուկտիվ մաթեմատիկական անալիզում։ Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները. 1) ցանկացած կոնստրուկտիվորեն ուղղելի կորի բաղադրիչները ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ։ 2) Կոնստրուկտիվորեն հավասարաչափ ածանցելի բաղադրիչներ ունեցող ցանկացած կոր կոնստրուկտիվորեն ուղղելի է։ 3) Գոյություն ունի K կոր, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝ K կորի բաղադրիչները ածանցելի են, ունեն կոնստրուկտիվորեն սահմանափակ վարիացիաներ և սահմանափակ ածանցյալներ, սակայն K կորը կոնստրուկտիվորեն ուղղելի չէ։

I. D. ZASLAVSKIĬ

ON THE RECTIFIABILITY OF CONSTRUCTIVE PLANAR CURVES

Summary

Some conditions for rectifiability of planar curves in constructive mathematical analysis are investigated. The following statements are proved: 1) Two components of any constructively rectifiable curve are functions of constructively bounded variation. 2) Any planar curve with uniformly differentiable in constructive sense components is constructively rectifiable. 3) There exists a planar curve K, satisfying the following conditions: the components of K are differentiable functions, possessing constructively bounded variations and bounded derivatives, but K is not rectifiable in constructive sense.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 8—14.
2. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LII (1958), 226—311.
3. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 15—294.
4. *И. Д. Заславский.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII (1962), 385—457.
5. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. LXVII (1962), 458—502.
6. *И. Д. Заславский.* О дифференцировании и интегрировании конструктивных функций, ДАН СССР, 156, № 1 (1964), 25—27.
7. *Г. С. Цейтин.* Теоремы о среднем значении в конструктивном анализе, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, LXVII(1962), 362—384.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

Л. А. МАТЕВОСЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРИВОДИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В работе [1] изучена поверхность X_m в приводимом пространстве V_n в том случае, когда базовые многообразия поверхности M_{m_1} и M_{m_2} расслаиваются так, что M_{m_1} покрывается однократно m_1+m_2-m-параметрическим семейством слоев M_{m-m_2}, а M_{m_2} покрывается однократно семейством слоев M_{m-m_1}, соответствующих слоям M_{m-m_2}.

В настоящей работе рассматривается поверхность X_m, для которой слои M_{m-m_2} и M_{m-m_1} вырождаются в точки, то есть для которой $m-m_2=0$, $m-m_1=0$. Поверхность X_m характерна тем, что существует взаимно однозначное соответствие между ее проекциями $'X_m$ и $'\overline{X}_m$, она обладает рядом интересных свойств, зависящих от свойств этого соответствия.

Изучим свойства поверхности X_m при некоторых соответствиях между проекциями.

1. Формулы, выражающие связь между основными величинами поверхности X_m и ее проекций $'X_m$, $'\overline{X}_m$, получим из соответствующих формул, доказанных в работе [1], предполагая $m_1=m_2=m$.

Сохраняя обозначения, введенные в работе [1], запишем эти формулы:

$$g_{\sigma\mu} = 'g_{\sigma\mu} + '\overline{g}_{\sigma\mu}, \tag{1.1}$$

$$\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma} = '\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma}, \tag{1.2}$$

$$\overset{t_2}{b}_{\rho\sigma} = '\overline{\overset{t_2}{b}}_{\rho\sigma}, \tag{1.3}$$

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma} = T^{\tau}_{\rho\sigma}\, 'g_{\tau\mu} \underset{s}{\lambda}^{\mu}, \tag{1.4}$$

$$\overset{t_1}{n}_{\rho\cdot s_1} = '\overset{t_1}{n}_{\rho\cdot s_1}, \tag{1.5}$$

$$\overset{t_2}{n}_{\rho\cdot s_1} = 0, \tag{1.6}$$

$$\overset{t_2}{n}_{\rho\cdot s_2} = '\overline{\overset{t_2}{n}}_{\rho\cdot s_2}, \tag{1.7}$$

$$\overset{t_1}{n}_{\rho\cdot s} = '\overset{t_1}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{\lambda}^{\sigma}, \tag{1.8}$$

$$\overset{t_2}{n}_{\rho\cdot s} = '\overline{\overset{t_2}{b}}_{\rho\sigma} \underset{s}{\overline{\lambda}}^{\sigma}, \tag{1.9}$$

$$\underset{ps}{n_{\rho}} = {}'g_{\sigma\mu}\underset{p}{\lambda^{\mu}}\,{}'\Gamma^{\sigma}_{\rho\tau}\underset{s}{\lambda^{\tau}} + {}'\bar{g}_{\sigma\mu}\underset{p}{\bar{\lambda}^{\mu}}\,{}'\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\rho\tau}\underset{s}{\bar{\lambda}^{\tau}}, \tag{1.10}$$

$$\rho, \sigma, \tau, \mu = 1, 2, \cdots, m, \; s_1 = 1, 2, \cdots, n_1 - m, \; s = n_1 - m + 1, \cdots, n_1,$$
$$s_2 = n_1 + 1, \cdots, n - m,$$

где $T^{\cdot}_{\rho\sigma}$ — тензор аффинной деформации $'X_m$ и $'\bar{X}_m$, а векторы $\underset{s}{\lambda^{\mu}}$ и $\underset{s}{\bar{\lambda}^{\mu}}$ определяются уравнениями

$$\underset{s}{\lambda^{\sigma}}\,{}'g_{\sigma\mu} + \underset{s}{\bar{\lambda}^{\sigma}}\,{}'\bar{g}_{\sigma\mu} = 0, \tag{1.11}$$

$$\underset{s}{\lambda^{\sigma}}\underset{t}{\lambda^{\mu}}\,{}'g_{\sigma\mu} + \underset{s}{\bar{\lambda}^{\sigma}}\underset{t}{\bar{\lambda}^{\mu}}\,{}'\bar{g}_{\sigma\mu} = g_{st}. \tag{1.12}$$

Геометрически ясно, что если изменяется только соответствие между проекциями $'X_m$ и $'\bar{X}_m$, то X_m изменяется в V_n, оставаясь все время в подпространстве V_{2m} пространства V_n, являющемся топологическим произведением этих проекций. Имея это в виду, рассмотрим некоторые свойства поверхности X_m в пространстве V_{2m} при данных соответствиях между $'X_m$ и $'\bar{X}_m$, а именно: при аффинном, конформном и проективном соответствиях.

Основные величины X_m в V_{2m} определяются по формулам (1.1), (1.4), (1.10), где векторы $\underset{s}{\lambda^{\mu}}$ и $\underset{s}{\bar{\lambda}^{\mu}}$ определяются формулами (1.11), и (1.12). Из (1.11) и (1.12) получим

$$-\underset{s}{\lambda^{\sigma}}\underset{t}{\bar{\lambda}^{\mu}}\,{}'\bar{g}_{\sigma\mu} - \underset{s}{\bar{\lambda}^{\sigma}}\underset{t}{\lambda^{\mu}}\,{}'g_{\sigma\mu} = g_{st}$$

или, используя (1.1), имеем

$$-\underset{s}{\lambda^{\sigma}}\underset{t}{\bar{\lambda}^{\mu}}\,g_{\sigma\mu} = g_{st}, \tag{1.13}$$

откуда следует, что репер $\underset{s}{\bar{\lambda}^{\mu}}$ есть взаимный репер репера $\underset{s}{\lambda^{\mu}}$ на поверхности X_m. Соотношение (1.13) можно записать еще в виде

$$\underset{s}{\lambda^{\sigma}}\,\overset{s}{\bar{\lambda}^{\mu}} = -g^{\sigma\mu}. \tag{1.14}$$

2. Предположим, что соответствие между проекциями аффинное, т. е.

$$T^{\cdot}_{\rho\sigma} = 0. \tag{2.1}$$

Из (1.4), используя (2.1), получим $\underset{s}{b_{\rho\sigma}} = 0$, т. е. X_m является вполне геодезической поверхностью (ср. [3], стр. 222).

И наоборот, если $\underset{s}{b_{\rho\sigma}} = 0$, то из (1.4), используя то обстоятельство, что векторы $\underset{s}{\lambda^{\sigma}}$ независимы, следует (2.1).

Таким образом, доказана следующая теорема: *для того чтобы поверхность была вполне геодезической необходимо и достаточно, чтобы связности ее проекций совпадали.*

3. Предположим, что соответствие между проекциями конформное, то есть

$$'\bar{g}_{\rho\sigma} = \lambda' g_{\rho\sigma}. \tag{3.1}$$

Согласно (3.1) и (1.11) из (1.13) получим

$$\underset{s}{\lambda^{\sigma}} \underset{t}{\lambda^{\mu}} 'g_{\sigma\mu} = \lambda g_{st}, \tag{3.2}$$

т. е. на поверхности X_m $\underset{s}{\lambda^{\sigma}}$ есть ортогональный репер, состоящий из векторов одинаковой длины $\sqrt{\lambda}$.

Тензор аффинной деформации имеет вид (см. [2], стр. 166)

$$T^{\tau}_{\rho\sigma} = p_{\rho}\,\delta^{\tau}_{\sigma} + p_{\sigma}\delta^{\tau}_{\rho} - 'g^{\tau\mu} p_{\mu}\, 'g_{\rho\sigma},$$

где

$$p_{\sigma} = \frac{1}{2}\,\partial_{\sigma} \ln \lambda.$$

Вторые тензоры, определяемые по формуле (1.4), примут вид

$$\underset{s}{b_{\rho\sigma}} = \frac{1}{1+\lambda}\,(p_{\rho}\, g_{\sigma\mu} + p_{\sigma} g_{\rho\mu} - p_{\mu} g_{\rho\sigma})\,\underset{s}{\lambda^{\mu}}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим асимптотические линии поверхности X_m. Они определяются из уравнения (см. [3], стр. 201)

$$\underset{s}{b_{\rho\sigma}}\, \overset{s}{b}_{\varkappa\omega}\, du^{\rho}\, du^{\sigma}\, du^{\varkappa}\, du^{\omega} = 0. \tag{3.4}$$

Подставляя в (3.4) выражение $\underset{s}{b_{\rho\sigma}}$ из (3.3) и используя (1.11) и (1.14), получим

$$(g^{\mu\varkappa} p_{\mu} p_{\varkappa})\,(g_{\rho\sigma}\, du^{\rho}\, du^{\sigma}) = 0. \tag{3.5}$$

Предположим, что $g^{\mu\varkappa} p_{\mu} p_{\varkappa} \neq 0$, т. к. в противном случае $\lambda = \text{const}$ и соответствие аффинное, рассмотренное в пункте 2. В силу этого предположения из (3.5) получим

$$g_{\rho\sigma}\, du^{\rho}\, du^{\sigma} = 0,$$

откуда вытекает, что *асимптотические линии изотропны.*

Рассмотрим линии кривизны поверхности X_m.

Уравнение линии кривизны для данной нормали имеет вид (см. [3], стр. 203)

$$(\underset{s}{b_{\rho\sigma}} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma})\, du^{\rho} = 0, \tag{3.6}$$

где $\underset{s}{K}$ — корни уравнения

$$\left| \underset{s}{b_{\rho\sigma}} + \underset{s}{K} g_{\rho\sigma} \right| = 0. \tag{3.7}$$

Подставляя в (3.7) выражение $\underset{s}{b_{\rho\sigma}}$ из (3.3), для корней этого уравнения получим следующие выражения:

$$\underset{s}{K_{1,2}} = \pm \frac{\Pi}{1+\lambda}\sqrt{\lambda}, \quad \underset{s}{K_{3,4,\dots,m}} = \frac{1}{1+\lambda}\, p_{\mu} \underset{s}{\lambda^{\mu}}, \tag{3.8}$$

где

$$\Pi^2 = g^{\mu\pi} p_\mu p_\pi.$$

Таким образом, *для данной нормали на поверхности существует многообразие $m-2$ измерений $\underset{s}{M}_{m-2}$, все направления которого есть главные направления для этой нормали.*

Изучим расположение многообразий $\underset{s}{M}_{m-2}$ на поверхности X_m. Подставляя в (3.6) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3) и $\underset{s}{K}$ из (3.8), получим уравнение линий кривизны данной нормали, соответствующих кратным корням, в следующем виде:

$$(p_\rho g_{\sigma\mu} + p_\sigma g_{\rho\mu}) \underset{s}{\lambda}^\mu du^\rho = 0. \tag{3.9}$$

Свертывая (3.9) с du^σ, получим

$$(p_\rho du^\rho)(g_{\sigma\mu} \underset{s}{\lambda}^\mu du^\sigma) = 0. \tag{3.10}$$

Из (3.10) следует, что по крайней мере один из сомножителей равен нулю, а из (3.9) следует, что в этом случае оба они равны нулю

$$p_\rho \, du^\rho = 0, \tag{3.11}$$

$$g_{\sigma\mu} \underset{s}{\lambda}^\mu du^\sigma = 0. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) вытекает, что многообразия $\underset{s}{M}_{m-2}$ лежат на поверхности уровня функции p — потенциала вектора конформного преобразования, именно: их касательные плоскости являются пересечениями касательной плоскости этой поверхности с гиперплоскостями $\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства X_m, которые ортогональны векторам репера $\underset{s}{\lambda}^\sigma$ соответственно.

Второй тензор $b_{\rho\sigma}$, соответствующий средней нормали, определяется из условия (см. [8], стр. 205)

$$M b_{\rho\sigma} = \overset{s}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{b}_{\varkappa\omega} g^{\varkappa\omega}, \tag{3.13}$$

где M есть средняя кривизна поверхности X_m, т. е.

$$M^2 = \overset{s}{b}_{\rho\sigma} \underset{s}{b}_{\varkappa\omega} g^{\rho\sigma} g^{\varkappa\omega}. \tag{3.14}$$

Подставляя в (3.14) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3), получим

$$M = \frac{2-m}{1+\lambda} \Pi \sqrt{\lambda}. \tag{3.15}$$

Поверхность будет минимальной, если ее средняя кривизна равна нулю (см. [3], стр. 213). Из (3.15) следует, что это имеет место тогда и только тогда, когда $m = 2$. Таким образом, приходим к выводу: *поверхность X_2 в Y_4 является минимальной.*

Подставляя в (3.13) выражение M из (3.15) и $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ — из (3.3), получим

$$b_{\rho\sigma} = \frac{\sqrt{\lambda}}{(1+\lambda)\,\Pi}\,(2p_\rho p_\sigma - \Pi^2 g_{\rho\sigma}).$$

Подставляя затем значение $b_{\rho\sigma}$ в уравнение $|b_{\rho\sigma} + Kg_{\rho\sigma}| = 0$, для его корней получим

$$K_1 = 0;\ K_{2,3,\cdots,m} = \frac{\Pi}{1+\lambda}\sqrt{\lambda}$$

и уравнения линий кривизны для средней нормали, соответствующих кратным корням, будут

$$p_\rho\, p_\sigma\, du^\sigma = 0. \tag{3.16}$$

Так как все p_ρ одновременно не равны нулю, то из (3.16) получим

$$p_\sigma\, du^\sigma = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу: *все линии на поверхности уровня функции p есть линии кривизны для средней нормали.*

Поверхность уровня функции p имеет $m+1$ нормалей в пространстве V_{2m}, из которых m нормалей общие с нормалями поверхности X_m, а одна есть нормаль этой поверхности в пространстве X_m. Вторые тензоры, соответствующие общим нормалям, определяются из соотношения (см. [3], стр. 236)

$$\underset{s}{b}_{ij} = \underset{s}{b}_{\rho\sigma}\,\xi_i^\rho\,\xi_j^\sigma, \tag{3.17}$$

где $\xi_i^\rho = \frac{\partial u^\rho}{\partial u^i}$, а u^i $(i, j = 1, 2, \cdots, m-1)$ — криволинейные координаты этой поверхности.

Нужно отметить, что формула (3.17) ([3], стр. 236) имеет место для поверхности пространства Y_m, вложенного в плоское пространство S_n, и легко проверить, что она верна и для поверхности пространства Y_m, вложенного в пространство Y_n.

Подставляя в (3.17) выражение $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (3.3) и имея в виду, что вдоль этой поверхности $p_\sigma \xi_i^\sigma = 0$, получим

$$\underset{s}{b}_{ij} = -\frac{1}{1+\lambda}\, p_\mu \underset{s}{\lambda}^\mu g_{ij},$$

где g_{ij} — метрический тензор этой поверхности.

Таким образом, рассматривая поверхность $p = \text{const}$ как подпространство пространства X_m, вложенного в пространство Y_{2m}, получим, *что все направления поверхности уровня функции p являются главными направлениями этой поверхности относительно любой общей нормали.*

Нужно отметить, что отсюда не следует, что все эти направления являются главными направлениями и для поверхности X_m относительно данной нормали. Действительно, главные направления поверхности уровня функции p относительно данной общей нормали удовлетворяют уравнению

$$(\underset{s}{b}_{ij}+\underset{s}{K}g_{ij})\,du^i=0;$$

подставляя сюда $g_{ij}=g_{\rho\sigma}\xi^\rho_i\xi^\sigma_j$ и выражение $\underset{s}{b}_{ij}$ из (3.17), получим

$$(\underset{s}{b}_{\rho\sigma}+\underset{s}{K}g_{\rho\sigma})\xi^\sigma_j\,du^\rho=0,$$

откуда не следует, что

$$(\underset{s}{b}_{\rho\sigma}+\underset{s}{K}g_{\rho\sigma})\,du^\rho=0.$$

4. Предположим, что соответствие между проекциями проективное. Тензор аффинной деформации имеет вид ([2] стр. 171)

$$T^\tau_{\rho\sigma}=p_\rho\,\delta^\tau_\sigma+p_\sigma\delta^\tau_\rho.$$

Вторые тензоры, определяемые по формуле (1.4), примут вид

$$\underset{s}{b}_{\rho\sigma}=(p_\rho{}'g_{\sigma\mu}+p_\sigma{}'g_{\rho\mu})\,\underset{s}{\lambda}^\mu. \tag{4.1}$$

Подставляя в (3.4) выражение для $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (4.1), получим уравнения асимптотических линий в виде

$$(p_\alpha\,du^\alpha)\,(g^{\mu\kappa}{}'g_{\mu\sigma}{}'\overline{g}_{\kappa\rho}\,du^\sigma du^\rho)=0.$$

Значит есть два семейства асимптотических линий. Любая линия одного семейства содержится на поверхности уровня функции p — потенциала вектора проективного преобразования и наоборот, линии же другого семейства касаются конуса второго порядка специального вида

$$g^{\mu\kappa}{}'g_{\mu\sigma}{}'\overline{g}_{\rho\kappa}\,du^\sigma du^\rho=0.$$

Рассуждая аналогично, как и для конформного преобразования, для корней уравнения (3.7) получим следующие выражения:

$$\underset{s}{K}_{1,2}=-g^{\mu\kappa}p_\mu{}'g_{\kappa\sigma}\pm\pi\sqrt{g^{\kappa\omega}{}'g_{\kappa\rho}{}'g_{\omega\sigma}\underset{s}{\lambda}^\rho\underset{s}{\lambda}^\sigma};\quad \underset{s}{K}\ 3,4,\cdots,m=0. \tag{4.2}$$

Таким образом, *для данной нормали на поверхности существует многообразие $m-2$ измерений, все направления которого есть главные направления для этой нормали.*

Подставляя выражение для $\underset{s}{b}_{\rho\sigma}$ из (4.1) и $\underset{s}{K}$—из (4.2) в (3.6), уравнения линий кривизны данной нормали, соответствующих кратным корням, примут вид

$$(p_\rho{}'g_{\sigma\mu}+p_\sigma{}'g_{\rho\mu})\,\underset{s}{\lambda}^\mu du^\rho=0.$$

Рассуждая аналогично как и в случае, когда преобразование конформно, получим:

$$p_\rho\,du^\rho=0 \tag{4.3}$$

и

$${}'g_{\sigma\mu}\underset{s}{\lambda}^\mu\,du^\sigma=0. \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что многообразия $\underset{s}{M}_{m-2}$ лежат на поверхности уровня функции p, именно: их касательные плоскости являются пересечениями касательной плоскости этой поверхности с гиперплоскостями $\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства X_m, соответствующим гиперплоскостям $'\underset{s}{\Pi}_{m-1}$ пространства $'X_m$, которые ортогональны векторам репера $\underset{s}{\lambda}^{\alpha}$.

Рассмотрим поверхность $p = \mathrm{const}$ как подпространство пространства X_m, вложенное в V_{2m}. Вторые тензоры, соответствующие общим нормалям, определяются по формуле (1.4). Рассуждая так же, как и в случае, когда преобразование конформно, получим

$$\underset{s}{b}_{ij} = 0.$$

Это означает, что *все направления поверхности уровня функции p являются главными направлениями этой поверхности относительно любой общей нормали.*

Казанский государственный
университет

Поступило 7.IV.66

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ ԲԵՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում դիտարկում ենք ռիմանյան բերված տարածության մեջ այնպիսի մակերևույթ, որի պրոեկցիաների միջև գոյություն ունի փոխմիարժեք համապատասխանություն։ Մանրամասն ուսումնասիրված է մակերևույթի հատկությունները այն դեպքերում, երբ այդ համապատասխանությունն աֆֆինական է, կոնֆորմ կամ պրոեկտիվ։

L. A. MATEVOSIAN

ON A CLASS OF SURFACES IN REDUCED SPACES

Summary

Surfaces in reduced Rieman space are considered.

The cases of affine, conform and projective correspondence between the projections are studied in detail.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Матевосян.* О поверхностях в приведенных пространствах, Известия АН Арм.ССР, Математика, 1, № 6 (1966).
2. *А. П. Норден.* Пространства аффинной связанности, М. Л., Гос. изд. техн.-теорет. лит. (1950).
3. *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия, Москва, Гос. изд. иностр. лит-ры (1948).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

А. С. АВДЖЯН

ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

1. Рассматривается система вида

$$\dot{x}(t)=f\,]t, x(t), x(t-\tau_1(t)), \cdots, x(t-\tau_m(t)),$$
$$\dot{x}(t-\tau_1(t)), \cdots, \dot{x}(t-\tau_m(t))], \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор-функция, f — непрерывная вектор-функция от t и $2m+1$ ограниченных векторов $\tau_i(t)\geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$. Обозначив через $\tau=\max\limits_t \tau_i(t)$, перепишем систему в виде (1)

$$\dot{x}(t)=f[t, x(t+s), \dot{x}(t+s)], \tag{2}$$

где $-\tau\leqslant s\leqslant 0$.

Начальные условия для системы (2) задаются в виде

$$x(t)=\varphi(t),\ t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0,$$
$$\dot{x}(t)=\varphi_1(t),\ t_0-\tau\leqslant t< t_0,$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная, $\varphi_1(t)$ — интегрируемая функции, t_0 — начальный момент, $E_{t_0}=[t_0-\tau, t_0]$ — начальное множество.

В дальнейшем предполагается, что выполняются условия существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных (см. [1], [2], [5], [6]).

1. Предположим, что на начальном множестве $E_{t_0}=[t_0-\tau, t_0]$ задается дифференцируемая начальная вектор-функция $\varphi(t)$.

Пусть C_1 — функциональное пространство

$\{\varphi_1(s), \varphi_2(s), \varphi_3(s), \cdots, \varphi_n(s)\}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_1}=\sup_{t_0-\tau<t<t_0}\{|\varphi_i(t)|, |\dot{\varphi}_i(t)|\} \quad (i=1, 2, \cdots, m).$$

В дальнейшем употребляются следующие символы:

J — интервал $0\leqslant t<\infty$;

E_H — множество начальных функций φ, для которых

$$\|\varphi\|\leqslant H_0 \text{ и } \|\dot{\varphi}\|\leqslant H;$$

E_{H_0} — множество начальных функций φ, для которых

$$\|\varphi\|\geqslant H_0 \text{ и } \|\dot{\varphi}\|\geqslant H_0;$$

Δ — топологическое произведение $J\times E_H\times E_H$;

Δ^* — топологическое произведение $J\times E_{H_0}\times E_{H_0}$;

$x(t; \varphi, t_0)$ — решение системы (2) с начальной функцией φ в начальный момент времени t_0.

При исследовании ограниченности решений систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа будут использованы функционалы, введенные Н. Н. Красовским. Эти функционалы будем называть функционалами Ляпунова-Красовского.

Определение 1. Решение $x(t; \varphi, t_0)$ системы (2) называется ограниченным, если существует такое $\beta > 0$, что $\|x(t; \varphi, t_0)\| < \beta$ для всех $t \geqslant t_0$.

Определение 2. Решения системы (2) называются равномерно ограниченными, если для всех решений $x(t; \varphi, t_0)$ с начальной функцией $\varphi \in E_H$ и $\dot{\varphi} \in E_H$ можно найти такое β, что выполняется неравенство $\|x(t; \varphi, t_0)\| < \beta$ для всех $t \geqslant t_0$, причем β зависит только от H и не зависит от t_0.

Определение 3. Решение $x(t; \varphi, t_0)$ системы (2) называется ограниченным в пределе границей B, если существует положительное число T такое, что $\|x(t; \varphi, t_0)\| < B$ для $t > t_0 + T$.

Определение 4. Решения системы (2) называются равномерно ограниченными в пределе границей B, если для всех решений $x(t; \varphi, t_0)$ с $\varphi \in E_H$ и $\dot{\varphi} \in E_H$ существует такое число T, что выполняется неравенство $\|x(t; \varphi, t_0)\| < B$ для $t \geqslant t_0 + T$, причем T зависит только от H и не зависит от t_0.

Определение 5. Функционал Ляпунова-Красовского $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$, определенный на пространстве $\dot{C}_1$, называется определенно-положительным, если можно указать непрерывную функцию $\omega(r)$, $\omega(r) = 0$ при $r = 0$ и $\omega(r) > 0$ при $r \neq 0$ такую что

$$V[t, \varphi, \dot{\varphi}] \geqslant \omega(\|\varphi\|_{C_1}).$$

Будем говорить, что функционал $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ обладает свойством A, если существует положительная непрерывная монотонно возрастающая функция $a(r)$ такая, что $V[t, \varphi, \dot{\varphi}] \leqslant a(\|\varphi\|_{C_1})$, и будем говорить, что функционал $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ обладает свойством B, если существует неотрицательная непрерывная функция $b(r)$ такая, что $V[t, \varphi, \dot{\varphi}] \geqslant b(\|\varphi\|_{C_1})$, причем $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Скажем, что функционал $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ обладает свойством C, если существует неотрицательная непрерывная функция $c(r)$ такая, что правое верхнее производное число удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{h \to +0} \left[\frac{V[t+h, x(t+h+s; \varphi, t_0), \dot{x}(t+h+s; \varphi, t_0)]}{h} - \right.$$
$$\left. - \frac{V[t, x(t+s; \varphi, t_0), \dot{x}(t+s; \varphi, t_0)]}{h} \right] \leqslant -c(\|\varphi\|_{C_1}),$$

где $s \in [-\tau, 0]$, $h > 0$.

3. В дальнейшем предполагается, что правая часть системы (2) удовлетворяет условиям теоремы 2 и 3 работы [1], которые дают ус-

ловия существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

Теорема 3.1. *Если существует непрерывный функционал Ляпунова-Красовского $V[t, \varphi, \dot\varphi]$, определенный на Δ^* и обладающий свойствами А и В, и если функция $V^*(t) = V[t, x(t+s; \varphi, t_0), \dot x(t+s; \varphi, t_0)]$ монотонно убывает внутри Δ^* при $t \geqslant t_0$, то решения системы (2) равномерно ограничены.*

Доказательство. По свойству A функционала $V[t, \varphi, \dot\varphi]$ для данного $H_1 > 0$ имеем $V[t, \varphi, \dot\varphi] \leqslant a(H_1)$ при $\|\varphi\|_{C_1} = H_1$. Согласно свойству B, по данному H_1 можно выбрать $H_2 > H_1$ так, что $b(H_2) > a(H_1)$. Рассмотрим некоторое решение $x(t; \varphi, t_0)$ системы (2) с $\varphi \in E_{H_1}$ и $\dot\varphi \in E_{H_1}$. Предположим, что в некоторый момент времени t_2 выполняется равенство $\|x(t_2; \varphi, t_0)\| = H_2$. В противном случае теорема была бы доказана. Будем считать, что t_2 первый момент времени, в который справедливо это равенство. Тогда, в силу непрерывности решения и в силу того, что $\|x(t_0; \varphi, t_0)\| = \|\varphi(t_0)\| \leqslant H_1$, существует такой момент t_1 $(t_0 \leqslant t_1 < t_2)$, что имеет место равенство $\|x(t_1; \varphi, t_0)\| = H_1$. Предположим, что t_1 — последний момент до момента t_2, в который выполняется это равенство. Рассмотрим функцию $V^*(t)$ в моменты t_1 и t_2. Имеем

$$V^*(t_1) = V[t_1, x(t_1 + s; \varphi, t_0), \dot x(t_1 + s; \varphi, t_0)] \leqslant a(H_1), \tag{3}$$

$$V^*(t_2) = V[t_2, x(t_2 + s; \varphi, t_0), \dot x(t_2 + s; \varphi, t_0)] \geqslant b(H_2). \tag{4}$$

По условию теоремы функция $V^*(t)$ монотонно убывает вдоль решения, т. е. $V^*(t_2) \leqslant V^*(t_1)$. Тогда из неравенств (3) и (4) следует, что $b(H_2) \leqslant a(H_1)$, которое противоречит тому, что H_2 выбрано так, что $b(H_2) > a(H_1)$. Полагая $H_2 = \beta$, получим, что все решения системы (2) с $\varphi \in E_{H_1}$ и $\dot\varphi \in E_{H_1}$ удовлетворяют неравенству $\|x(t, \varphi, t_0)\| < \beta$. Причем β зависит только от H_1, т. е. решения системы (2) равномерно ограничены. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Если существует непрерывный функционал Ляпунова-Красовского $V[t, \varphi, \dot\varphi]$, определенный на Δ^* и обладающий свойствами А, В и С, то решения системы (2) равномерно ограничены в пределе.*

Доказательство. По свойству B функционала Ляпунова-Красовского $V[t, \varphi, \dot\varphi]$ существует такая непрерывная неотрицательная возрастающая функция $b(r)$, что $V[t, \varphi, \dot\varphi] \geqslant b(\|\varphi\|_{C_1})$ и поэтому можно выбрать такое H_0, что будет выполняться неравенство $V[t, \varphi, \dot\varphi] \geqslant b(H_0)$ для всех решений с $\varphi \in \overline{E}_{H_0}$ и $\dot\varphi \in \overline{E}_{H_0}$. В силу теоремы 1 решения системы (2) являются равномерно ограниченными, т. е. существует такое $B_1 > 0$, что для всех решений $x(t; \varphi, t_0)$ с $\varphi \in E_{H_0}$ и $\dot\varphi \in E_{H_0}$ выполняется неравенство $\|x(t; \varphi, t_0)\| < B_1$ при $t \geqslant t_0$.

Выберем $H_1 > H_0$, где H_1 — произвольное постоянное положительное число. Рассмотрим решение $x(t; \varphi, t_0)$ с начальной функцией $\varphi \in E_{H_1}$ и

$\dot{\varphi} \in E_{H_1}$. Из равномерной ограниченности решений системы (2) следует, что существует такое $\beta(H_1)$ (β зависит только от H_1), что для всех решений с $\varphi \in E_{H_1}$ и $\dot{\varphi} \in E_{H_1}$ выполняется неравенство $\|x(t; \varphi, t_0)\| < \beta(H_1)$ для $t \geqslant t_0$.

По свойству A функционала $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ существует непрерывная положительная и возрастающая функция $a(r)$ такая, что выполняется неравенство $V[t, \varphi, \dot{\varphi}] \leqslant a(H_1)$ при $\|\varphi\|_{C_1} = H_1$.

Рассмотрим функционал $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ в области $t \in J$, $H_0 \leqslant \|\varphi\| \leqslant \beta$ и $H_0 \leqslant \|\dot{\varphi}\| \leqslant \beta$. По свойству C функционала $V[t, \varphi, \dot{\varphi}]$ существует неотрицательная непрерывная функция $c(r)$ такая, что имеет место следующее неравенство:

$$\lim_{h \to +0} \sup \left| \frac{V[t+h, x(t+h+s; \varphi, t_0), \dot{x}(t+h+s; \varphi, t_0)]}{h} - \right.$$

$$\left. - \frac{V[t, x(t+s; \varphi, t_0), \dot{x}(t+s; \varphi, t_0)]}{h} \right| \leqslant -c(\beta) = -c_0.$$

Предположим, что некоторое решение $x(t; \varphi, t_0)$ системы (2) с начальной функцией $\varphi \in E_{H_1} - E_{H_0}$ и $\dot{\varphi} \in E_{H_1} - E_{H_0}$ удовлетворяет всегда условию

$$H_0 < \|x(t; \varphi, t_0)\| \leqslant \beta. \tag{5}$$

Вычисляя правое верхнее производное число вдоль исследуемого решения $x(t; \varphi, t_0)$ по свойству C имеем

$$\lim_{h \to +0} \sup \frac{V^*(t+h) - V^*(t)}{h} \leqslant -c_0. \tag{6}$$

По свойству правого верхнего производного числа, из (6), принимая за два различных значения t и t_0 из J, получим

$$V^*(t) - V^*(t_0) \leqslant -c_0(t - t_0). \tag{7}$$

Из неравенства (7) видно, что в некоторый момент $t = t'$ выполняется равенство $\|x(t'; \varphi, t_0)\| = H_0$, где $t_0 \leqslant t' \leqslant t_0 + T$, $T = \dfrac{a(H_1) - b_0}{c_0}$, которое противоречит условию (5). Отсюда получаем, что для всех решений $x(t; \varphi, t_0)$ системы (2) с начальной функцией $\varphi \in E_{H_1}$ и $\dot{\varphi} \in E_{H_1}$ имеет место неравенство $\|x(t; \varphi, t_0)\| < B_1$ при $t > t_0 + T$ и это T зависит только от H_1. Таким образом, решения системы (2) в пределе равномерно ограничены. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если решения системы (2) в пределе равномерно ограничены, то они равномерно ограничены.*

Доказательство. Предположим, что правая часть системы (2) удовлетворяет условиям теорем 2 и 3 [1]. Тогда очевидно, что множество начальных функций $\{\varphi(t)\}$ компактно.

По условию теоремы существуют такие числа B и $T(H)$, что все решения $x(t;\varphi,t_0)$ с $\varphi\in E_H$ и $\dot\varphi\in E_H$ удовлетворяют неравенству $\|x(t;\varphi,t_0)\|<B$ при $t>t_0+T(H)$. Очевидно, что для всех $t>t_0+T(H)$ решения системы (2) ограничены числом B. Рассмотрим решения $x(t;\varphi,t_0)$ с $\varphi\in E_H$ и $\dot\varphi\in E_H$ на отрезке $[t_0, t_0+T(H)]$. В силу непрерывной зависимости решений от начальных условий для любого $\varepsilon>0$ можно найти $\delta>0$ такое, что если

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|<\delta,\ \|\dot\varphi_1(t)-\dot\varphi_2(t)\|<\delta \text{ на } [t_0-\tau, t_0],$$

то $\|x(t;\varphi_1,t_0)-x(t;\varphi_2,t_0)\|<\varepsilon$ для $t\geqslant t_0$. В силу компактности множества начальных функций можно выделить конечное число δ- окрестностей, покрывающих множество начальных функций. Тогда существует конечное число ε- окрестностей, покрывающих множество решений. По известной теореме, на отрезке $[t_0, t_0+T(H)]$ решения достигают своего максимума. Обозначив этот максимум через β, получим, что для всех решений $x(t;\varphi,t_0)$ с $\varphi\in E_H$ и $\dot\varphi\in E_H$ выполняется неравенство $x(t;\varphi,t_0)\|<\beta$ для $t\geqslant t_0$, причем β зависит только от H, т. е. решения системы (2) равномерно ограничены. Теорема доказана.

Аналогичные теоремы доказаны автором для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом вида

$$\dot x(t)=f[t, x(t), x(t-\tau_1(t)),\cdots, x(t-\tau_m(t))], \tag{8}$$

где $x(t)$ и f — вектор-функции, $\tau_i(t)\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ — непрерывные и ограниченные. Для системы (8) также доказаны теоремы обращения.

В заключение приношу глубокую благодарность профессорам Б. П. Демидовичу и Л. Э. Эльсгольцу за многочисленные беседы и полезные советы.

Ярославский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило 10.6.66

Ա. Ս. ԱՎՋՅԱՆ

ՉԵՉՈՔ ՏԻՊԻ ՇԵՂՎՈՂ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏՈՎ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում Լյապունով-Կրասովսկու ֆունկցիոնալների օգնությամբ ուսումնասիրվում է չեզոք տիպի շեղվող արգումենտով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների հավասարաչափ սահմանափակությունը և սահմանային հավասարաչափ սահմանափակությունը։

Ուսումնասիրվող դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմները ունեն հետևյալ տեսքը.

$$\dot{x}(t)=f[t, x(t), x(t-\tau_1(t)),\cdots,x(t-\tau_m(t)), \dot{x}(t-\tau_1(t)),\cdots$$
$$\cdots, \dot{x}(t-\tau_m(t))],$$

որտեղ $x(t)$-ն և f-ը վեկտոր-ֆունկցիաներ են, իսկ $\tau_i(t) \geqslant 0 \ (i=1,2,\cdots,m)$ ֆունկցիաները սահմանափակ են։

A. S. AVDJAN

BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF NEUTRAL TYPE SYSTEMS WITH DEVIATING ARGUMENT

S u m m a r y

The paper considers systems of differential equations of the form

$$\dot{x}(t)=f[t, x(t), x(t-\tau_1(t)),\cdots, x(t-\tau_m(t)),$$
$$\dot{x}(t-\tau_1(t)),\cdots, \dot{x}(t-\tau_m(t))]$$

where $x(t)$ and f are vector-functions and $\tau_i(t) \geqslant 0 \ (i=1,\cdots,n)$ are non-negative and bounded. With the aid of Ljapunov-Krassovsky functional the uniform boundedness and the uniform—ultimate boundedness of the solutions is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Зверкин.* Теоремы существования и единственности для уравнения с отклоняющимся аргументом в критическом случае, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, 1 (1962), 37—45.
2. *Г. А. Каменский.* О существовании и единственности решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, Уч. Зап. МГУ, 181, Матем., 8 (1956), 83—89.
3. *Н. Н. Красовский.* Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М. (1959).
4. *Т. Йосидзава.* Функция Ляпунова и ограниченность решений, Математика, М., 9 : 5 (1965).
5. *Л. Э. Эльсгольц.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, „Наука“, М. (1964).
6. *Л. Э. Эльсгольц.* Приближенные методы интегрирования дифференциально-разностных уравнений, УМН, VIII, вып. 4 (56) (1953), 81—93.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

Э. В. ЧЕЛИДЗЕ

ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ МЕТОДАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (A^*) И $(C^*_{\alpha,\beta})$ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть α и β — неотрицательные числа, а λ — число, большее единицы. Функцию $f(t, \tau)$, заданную в области $Q = [0 \leqslant t < +\infty, 0 \leqslant \tau < +\infty)$, будем называть $C^*_{\alpha,\beta}$-интегрируемой, если она интегрируема по Лебегу в области $[0 \leqslant t \leqslant a, 0 < \tau \leqslant b]$ и существует конечный предел

$$\lim_{(x,\, y)_\lambda \to \infty} F_{\alpha,\beta}(x, y),$$

где

$$F_{\alpha,\beta}(x, y) = \int_0^x \int_0^y \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1 - \frac{\tau}{y}\right)^\beta f(t, \tau)\, dt\, d\tau,$$

причем символом $(x, y)_\lambda \to \infty$ обозначено такое стремление x и y к $+\infty$, при котором $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \lambda$. Этот предел будем обозначать

$$(C_{\alpha,\beta}) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Далее, пусть функция $f(t, \tau)$, определенная в области Q, интегрируема по Лебегу в любой области $[0 \leqslant t \leqslant a;\ 0 \leqslant \tau \leqslant b]$. Если для любых фиксированных $p > 0$, $q > 0$ существуют двойной интеграл

$$f^*(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt - q\tau} f(t, \tau)\, dt d\tau$$

и конечный предел $\lim\limits_{(p,\, q)_\lambda \to 0} f^*(p, q)$, то $f(t, \tau)$ мы назовем A^*-интегрируемой на Q, где символом $(p, q)_\lambda \to 0$ обозначено такое стремление p и q к 0, при котором $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{p}{q} \leqslant \lambda$. Этот предел будем обозначать так:

$$(A^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Определение 1. Функцию $F(t, \tau)$, заданную в области Q, мы будем называть квази-ограниченной на Q, если существуют такие числа $M > 0$ и $\nu > 0$, что

$$|F(t, \tau)| < M \text{ при } t \geqslant \nu,\ \tau \geqslant \nu.$$

Определение 2. Функцию $F(t, \tau)$, заданную в областм Q, мы назовем квази-неотрицательной, если существует такое число $\nu > 0$, что

$$F(t, \tau) \geqslant 0 \text{ при } t \geqslant \nu,\ \tau \geqslant \nu.$$

Определение 3. Функцию $f(t, \tau)$, заданную в области Q, мы будем называть функцией класса $D^*_{\alpha,\beta}$, если $F_{\alpha,\beta}(x, y)$ квази-ограничена в Q и выполнены следующие условия:

$$1) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}} \int_0^x t^\beta F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, dt = 0$$

равномерно по τ на любом отрезке $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$,

$$2) \qquad \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}} \int_0^y \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, d\tau = 0$$

равномерно по t на любом отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Теорема. *Если функция $f(t, \tau)$ принадлежит классу $D^*_{\alpha,\beta}$ и A^*-интегрируема, то она будет $C^*_{\alpha+1,\beta+1}$-интегрируемой и имеет место равенство*

$$(C^*_{\alpha+1,\beta+1}) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau)\, dt d\tau = s,$$

где

$$s = (A^*) \int_0^\infty \int_0^\infty f(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Доказательство. Функцию $f^*(p, q)$ можно представить в следующем виде:

$$f^*(p, q) = \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^\infty \int_0^\infty t^\alpha \tau^\beta e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Можно показать, что для любого $\nu > 0$

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^\nu dt \int_0^\infty t^\alpha \tau^\beta e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, d\tau = 0,$$

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^\nu d\tau \int_0^\infty t^\alpha \tau^\beta e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, dt = 0,$$

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0} p^{\alpha+1} q^{\beta+1} \int_0^\nu \int_0^\nu t^\alpha \tau^\beta e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, dt d\tau = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to\infty} f^*(p,q) = \lim_{(p,q)_\lambda\to\infty} \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_\nu^\infty \int_\nu^\infty t^\alpha \tau^\beta e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t, \tau)\, dt d\tau. \qquad (1)$$

Так как

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0} f^*(p, q) = s,$$

то, в силу (1), имеем

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}\frac{p^{\alpha+1}q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty t^\alpha\tau^\beta e^{-pt-q\tau}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau=s.$$

Заменяя p и q соответственно через $(r+1)p$ и $(\mu+1)q$, где r и μ — положительные числа, получим

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}\frac{(r+1)^{\alpha+1}(\mu+1)^{\beta+1}p^{\alpha+1}q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty t^\alpha\tau^\beta e^{-(r+1)pt-(\mu+1)q\tau}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau=s.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}\frac{p^{\alpha+1}q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty t^\alpha\tau^\beta (e^{-pt})^r(e^{-q\tau})^\mu e^{-pt-q\tau}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau= \tag{2}$$

$$=\frac{s}{(r+1)^{\alpha+1}(\mu+1)^{\beta+1}}=\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 u^r v^\mu\left(\ln\frac{1}{u}\right)^\alpha\left(\ln\frac{1}{v}\right)^\beta dudv.$$

Пусть теперь $Q(u,v)$ — произвольный полином от u и v. Тогда, в силу (2), имеем

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}\frac{p^{\alpha+1}q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty t^\alpha\tau^\beta Q(e^{-pt},e^{-q\tau})e^{-pt-q\tau}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau=$$

$$=\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 Q(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^\alpha\left(\ln\frac{1}{v}\right)^\beta dudv. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $g(u,v)$, заданную в квадрате $[0,1;0,1]$ следующим образом:

$$g(u,v)=\begin{cases}\dfrac{1}{uv}, & \text{когда } (u,v)\in[e^{-1},1;\ e^{-1},1],\\ 0, & \text{в остальных точках квадрата.}\end{cases}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют полиномы $p(u,v)$ и $P(u,v)$ такие, что

$$p(u,v)\leqslant g(u,v)\leqslant P(u,v), \tag{4}$$

$$\int_0^1\int_0^1[P(u,v)-p(v,v)]\left(\ln\frac{1}{u}\right)^\alpha\left(\ln\frac{1}{v}\right)^\beta dudv<\varepsilon. \tag{5}$$

Далее, так как функция $F_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ квази-неотрицательная, то существует такое число $\nu>0$, что $F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\geqslant 0$ при $t\geqslant\nu$, $\tau\geqslant\nu$. Поэтому

$$\frac{p^{\alpha+1}q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_\nu^\infty\int_\nu^\infty t^\alpha\tau^\beta p(e^{-pt},e^{-q\tau})e^{-pt-q\tau}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau\leqslant$$

$$< \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{\nu}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty} t^{\alpha}\tau^{\beta} g(e^{-pt}, e^{-q\tau}) e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\, dt\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{\nu}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty} t^{\alpha}\tau^{\beta} P(e^{-pt}, e^{-q\tau}) e^{-pt-q\tau} F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\, dt\, d\tau.$$

В силу (3) для функции

$$I(p,q) = \frac{p^{\alpha+1} q^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_{\nu}^{\infty}\int_{\nu}^{\infty} t^{\alpha}\tau^{\beta} g(e^{-pt}, e^{-q\tau}) e^{-pt-q\tau}\, dt\, d\tau$$

имеем

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 p(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{(p,q)_\lambda \to 0} I(p,q) \leqslant \varlimsup_{(p,q)_\lambda \to 0} I(p,q) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 P(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv. \tag{6}$$

Принимая во внимание соотношения (5) и (6), получим

$$\varlimsup_{(p,q)_\lambda \to 0} I(p,q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 p(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 [P(u,v) - p(u,v)]\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv <$$

$$< \frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Откуда, на основании (4), будем иметь

$$\varlimsup_{(p,q)_\lambda \to 0} I(p,q) - \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 g(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv <$$

$$< \frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{7}$$

Далее

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 P(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv - \varlimsup_{(p,q)_\lambda \to 0} I(p,q) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int_0^1\int_0^1 [P(u,v) - p(u,v)]\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta} du\, dv <$$

$$< \frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}.$$

Отсюда, согласно (4), имеем

$$\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 g(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta}dudv-$$

$$-\overline{\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}}\, I(p,q)\leqslant\frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\left|\overline{\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}}\, I(p,q)-\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 g(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta}dudv\right|<$$

$$<\frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{9}$$

Аналогично получим

$$\left|\underline{\lim_{(p,q)_\lambda\to 0}}\, I(p,q)-\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 g(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta}dudv\right|<$$

$$<\frac{s\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}. \tag{10}$$

В силу произвольности ε из (9) и (10) будем иметь

$$\lim_{(p,q)_\lambda\to 0} I(p,q)=\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_0^1\int_0^1 g(u,v)\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta}dudv=$$

$$=\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_{e^{-1}}^{1}\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{uv}\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{v}\right)^{\beta}dudv=$$

$$=\frac{s}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)[(\alpha+1)(\beta+1)]}=\frac{s}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}. \tag{11}$$

Полагая

$$p=1-e^{-\frac{1}{x}},\quad q=1-e^{-\frac{1}{y}},\quad x>\nu,\ y>\nu,$$

имеем

$$I(p,q)=\frac{(1-e^{-\frac{1}{x}})^{\alpha+1}(1-e^{-\frac{1}{y}})^{\beta+1}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\int_{\nu}^{\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{x}}}}\int_{\nu}^{\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{y}}}} t^{\alpha}\tau^{\beta}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau.$$

Но, так как

$$1-e^{-\frac{1}{x}}\sim\frac{1}{x},\quad 1-e^{-\frac{1}{y}}\sim\frac{1}{y}\ \text{при } x,\ y\to\infty,$$

то, в силу (11), получим

$$\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\lim_{(x,y)_\lambda\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}}\int_{\nu}^{x}\int_{\nu}^{y} t^{\alpha}\tau^{\beta}F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dtd\tau=s,$$

т. е.

$$s = \frac{1}{B(\alpha+1,1)\,B(\beta+1,1)} \lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}} \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^\alpha \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

В силу условий теоремы

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}} \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^\alpha \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}} \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^\alpha \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0,$$

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}} \int\limits_0^y \int\limits_0^y t^\alpha \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{B(\alpha+1,1)\,B(\beta+1,1)} \lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}y^{\beta+1}} \int\limits_0^x \int\limits_0^y t^\alpha \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt\,d\tau = s,$$

т. е.

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} F_{\alpha+1,\beta+1}(x,y) = s.$$

Таким образом теорема доказана для того случая, когда $F_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ является кваэи-неотрицательной функцией.

Пусть теперь $F_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ имеет любой знак. По условию функция $F_{\alpha,\beta}(t,\tau)$ квази-ограничена. Поэтому существуют такие положительные числа M и N, что

$$|F_{\alpha,\beta}(t,\tau)| < \frac{M}{2} \text{ при } t > N,\ \tau > N.$$

Полагая

$$\varphi(t,\tau) = f(t,\tau) + Me^{-t-\tau},$$

будем иметь

$$F^*_{\alpha,\beta}(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left(1-\frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1-\frac{\tau}{y}\right)^\beta \varphi(t,\tau)\,dt\,d\tau = F_{\alpha,\beta}(x,y) + \psi(x,y),$$

где

$$\psi(x,y) = M \int\limits_0^x \int\limits_0^y \left(1-\frac{t}{x}\right)^\alpha \left(1-\frac{\tau}{y}\right)^\beta e^{-t-\tau}\,dt\,d\tau.$$

Ясно, что

$$\lim_{t,\tau \to \infty} \psi(t,\tau) = M.$$

Следовательно, существует такое $N^* \geqslant N$, что

$$\psi(t,\tau) > \frac{M}{2} \text{ при } t > N^*,\ \tau > N^*.$$

Так как $|F_{\alpha,\beta}(x, y)| < \frac{M}{2}$, то при $x > N^*$, $y > N^*$ будет $F^*_{\alpha,\beta}(x, y) > 0$, то есть $F^*_{\alpha,\beta}(x, y)$ является квази-положительной.

Нетрудно показать, что $\varphi(t, \tau) \in D^*_{\alpha,\beta}$.

Положим

$$\varphi^*(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt-q\tau} \varphi(t, \tau)\, dt d\tau.$$

Ясно, что

$$\varphi^*(p, q) = f^*(p, q) + M \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt-q\tau} e^{-t-\tau} dt d\tau = f^*(p, q) + \frac{M}{(p+1)(q+1)}.$$

По условию

$$\lim_{(p,q)_\lambda \to 0} f^*(p, q) = s.$$

Поэтому

$$\lim_{(p,q)_\lambda \to \infty} \varphi^*(p, q) = s + M.$$

С другой стороны, в силу вышедоказанного, имеем

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} F^*_{\alpha,\beta}(x, y) = s + M.$$

Но, так как

$$F^*_{\alpha,\beta}(x, y) = F_{\alpha,\beta}(x, y) + \psi(x, y),$$

то

$$\lim_{(x,y)_\lambda \to \infty} F_{\alpha,\beta}(x, y) = s.$$

Теорема доказана полностью.

Из этой теоремы при $\alpha = \beta = 0$ получается теорема С. П. Топурия [1].

Тбилисский государственный
университет

Поступило 27.X.66

Է. Վ. ՉԵԼԻՁԵ

ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԿԱՊ ԵՐԿՈՒ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ (A^*) և ($C^*_{\alpha,\beta}$) ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է տաուբերյան տիպի թեորեմ կրկնակի ինտեգրալների համար։

Դիցուք $f(t,\tau)$ ֆունկցիան որոշված է $R=[0,+\infty;\ 0,+\infty]$ տիրույթում և ինտեգրելի է ըստ Լեբեգի ցանկացած $[0\leqslant t\leqslant x;\ 0\leqslant\tau\leqslant y]$ տիրույթում։ Ենթադրենք, որ

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)=\int_0^x\int_0^y\left(1-\frac{t}{x}\right)^\alpha\left(1-\frac{\tau}{y}\right)^\beta f(t,\tau)\,dt\,d\tau,$$

որտեղ $\alpha,\beta>0$։ $f(t,\tau)$ ֆունկցիան կանվանենք $D^*_{\alpha,\beta}$ դասի, եթե $F_{\alpha,\beta}(x,y)$-ը քվազի–սահմանափակ է և բավարարվում են հետևյալ պայմանները

$$1)\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}}\int_0^x t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt=0,$$

$$2)\qquad \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}}\int_0^y \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,d\tau=0.$$

Թեորեմ. Եթե $f(t,\tau)$ ֆունկցիան պատկանում է $D^*_{\alpha,\beta}$ դասին, A^* ինտեգրելի է R-ում, ապա այն կլինի նաև $C^*_{\alpha+1,\beta+1}$ ինտեգրելի R-ում և

$$(C^*_{\alpha+1,\beta+1})\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau)\,dt\,d\tau=(A^*)\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau)\,dt\,d\tau.$$

E. V. CHELIDZE

INTERDEPENDENCE BETWEEN (A^*) AND $(C^*_{\alpha,\beta})$ METHODS OF INTEGRATION FOR FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Summary

In the present note we prove a tauberian theorem for double integrals.

Let $f(t,\tau)$ belong to L in $[0\leqslant t\leqslant x;\ 0\leqslant\tau\leqslant y]$ for every $x>0$, $y>0$, and let

$$F_{\alpha,\beta}(x,y)=\int_0^x\int_0^y\left(1-\frac{t}{x}\right)^\alpha\left(1-\frac{\tau}{y}\right)^\beta f(t,\tau)\,dt\,d\tau,$$

where $\alpha,\beta>0$. We say, that the function $f(t,\tau)$ belongs to the class $D^*_{\alpha,\beta}$, if $F_{\alpha,\beta}(x,y)$ is quasi-bounded and satisfies the conditions:

$$1)\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha+\beta+2}}\int t^\alpha F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,dt=0,$$

$$2)\qquad \lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^{\alpha+\beta+2}}\int_0^y \tau^\beta F_{\alpha,\beta}(t,\tau)\,d\tau=0.$$

Theorem. If the function $f(t, \tau)$ belonging to $D^*_{\alpha,\beta}$ is (A^*) — integrable in $R = [0, +\infty; 0, +\infty)$, then it is $(C^*_{\alpha+1,\beta+1})$ — integrable in R and

$$(C^*_{\alpha+1,\beta+1})\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau)\,dt d\tau = (A^*)\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\tau)\,dt d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. П. Топурия.* О C_1 и А-интегрируемости функций двух переменных. Труды Сухумского государственного педагогического института им. А. М. Горького, X—XI (1958).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

Д. М. ЧАУСОВСКИЙ

ОТКРЫТЫЕ СИСТЕМЫ НА ГРАФАХ

1. Операторный узел—фундаментальное понятие спектральной теории несамосопряженных операторов [1]. М. С. Лившиц показал, что понятие операторного узла адэкватно понятию открытой системы [2, 3], и это послужило толчком к работам по применению теории несамосопряженных операторов [4, 5].

В настоящей статье строится некоторый класс открытых систем на LC-графах, находятся связанные с ними операторные узлы, исследуется возможность реализации абстрактно заданного операторного узла с помощью LC-графа. При этом используются методы изучения RLC-графов, предложенные в [6]. Один подкласс рассматриваемого класса был ранее построен и изучен в [5].

2. *Открытой системой* $\tilde{F}$ (или линейным автоматом) называется совокупность двух линейных пространств $\tilde{E}$ и $\tilde{H}$, для которых определены линейные отображения R и S пространства $\tilde{E}$ в $\tilde{H}$ и пространства $\tilde{E}$ в себя. $\tilde{E}$ называется пространством входов и выходов, $\tilde{H}$—пространством внутренних состояний. Систему $\tilde{F}$ будем обозначать так: $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\tilde{H}\end{matrix}\right)$.

Операторный узел—это совокупность двух гильбертовых пространств E и H и трех линейных операторов T, Γ, J, связанных соотношением $\mathrm{T}-\mathrm{T}^*=i\Gamma \mathrm{J}\Gamma^*$; при этом T действует из H в H, J — самосопряженный унитарный оператор в E, Γ действует из E в H. Операторный узел обозначается так: $\begin{bmatrix}\mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J}\\ H & & E\end{bmatrix}$.

В дальнейшем через $\tilde{E}, \tilde{H}, \cdots$ мы будем обозначать линейные пространства вектор-функций вещественного аргумента t $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$, значения которых принадлежат гильбертовым пространствам $E, H, \cdots$ соответственно. По определению операторный узел $\begin{bmatrix}\mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J}\\ H & & E\end{bmatrix}$ *принадлежит открытой системе* $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{matrix}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow R\to\tilde{H}\end{matrix}\right)$, если для каждого $\varphi^-\in\tilde{E}$ и $\psi=\mathrm{R}\varphi^-$ выполнены соотношения

$$i\frac{d\psi(t)}{dt}+\mathrm{T}\psi(t)=\Gamma\varphi^-(t),\ \ \mathrm{S}\varphi^-=\varphi^- - i\mathrm{J}\Gamma^*\psi.$$

3. Пусть G—конечный ориентированный граф (в вопросах, относящихся к графам, мы придерживаемся терминологии [7, 8]; по терминологии [9] G—мультиграф). Отметим в нем n ребер, называемые далее *внешними*. Остальные ребра назовем *внутренними*. Множество внутренних ребер разобьем на два класса: *L—ребра* (обозначаемые q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant \mu$) и *C—ребра* (обозначаемые q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant \nu$). Каждому внутреннему ребру поставим в соответствие положительное число, называемое *параметром* ребра. Параметры ребер q_{Li} обозначим L_i, параметры ребер q_{Cj} — через C_j. Граф G с отмеченными в нем внешними L- и C-ребрами, и набор параметров L_i, C_j образуют по определению *LC-граф*. Пусть число внешних ребер четно и равно $2m$. Половину внешних ребер назовем *входными* и обозначим через q_k^-, $1 \leqslant k \leqslant m$, остальные—*выходными* и обозначим через q_k^+, $1 \leqslant k \leqslant m$. Предположим, что g_1: не существует циклов, образованных только входными и еще разве лишь C-ребрами; g_2: для каждой пары ребер q_k^- и q_k^+ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ существует цикл, содержащий, кроме q_k^- и q_k^+, еще разве лишь C-ребра, и в этом цикле q_k^- и q_k^+ ориентированы одинаково.

Класс таких LC-графов назовем *классом* Ω. Заметим, что из g_1 и g_2 следует g_3: не существует сечений, состоящих только из выходных ребер и еще разве лишь L-ребер.

Теорема 1. *Пусть G — LC-граф класса Ω. Поставим в соответствие каждому входному ребру q_k^- две непрерывные комплексные функции $V_k^-(t)$, $I_k^-(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. Тогда каждому внутреннему ребру и каждому выходному ребру можно поставить в соответствие две функции V_{Li}, I_{Li}, V_{Cj}, I_{Cj}, V_k^+, I_k^+ (обозначения функций согласованы с обозначениями ребер), набор которых вместе с функциями V_k^-, I_k^- удовлетворяет условиям:*

K1. Для каждого цикла Q графа G $\sum\limits_{q \in Q} (-1)^{\delta(q)} V_q \equiv 0$, *где* $\delta(q) = 1$, *если q—не входное ребро и его направление совпадает с направлением цикла или же q—входное ребро и его направление противоположно направлению цикла; в остальных случаях $\delta(q) = 0$.*

K2. Для каждого сечения s графа G $\sum\limits_{q \in s} (-1)^{\varepsilon(q)} I_q \equiv 0$, где $\varepsilon(q) = 0$, если направление q совпадает с ориентацией сечения, и $\varepsilon(q) = 1$ в остальных случаях.

K3. $$V_{Li} = L_i \frac{dI_{Li}}{dt}, \ 1 \leqslant i \leqslant \mu; \quad I_{Cj} = C_j \frac{dV_{Cj}}{dt}, \ 1 \leqslant j \leqslant \nu.$$

Функции, отвечающие внутренним и выходным ребрам, определяются однозначно функциями V_k^-, I_k^-, $1 \leqslant k \leqslant m$ и начальными условиями, согласованными с K1 и K2.

Доказательство. Условия g_1 и g_2 позволяют построить лес $\mathfrak{f}$ графа G (Лес графа—это совокупность деревьев, взятых по одному из каждой компоненты связности), такой, что

f_1: все входные ребра принадлежат f;

f_2: все выходные ребра суть хорды f;

f_3: любой другой лес, удовлетворяющий f_1 и f_2, содержит не более C — ребер чем f.

Условиями f_1, f_2, f_3 лес f определяется, вообще говоря, неоднозначно. Пусть L и C-ребра, входящие в f, таковы: q_{Li}, $1 \leqslant i \leqslant r$ и q_{Cj}, $1 \leqslant j \leqslant p$. Введем обозначения

$$V^- = \begin{bmatrix} V_1^- \\ \vdots \\ V_m^- \end{bmatrix}, \quad I^- = \begin{bmatrix} I_1^- \\ \vdots \\ I_m^- \end{bmatrix}, \quad V_L = \begin{bmatrix} V_{L1} \\ \vdots \\ V_{Lr} \end{bmatrix}, \quad I_L = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ \vdots \\ I_{Lr} \end{bmatrix}, \quad V_C = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ \vdots \\ V_{Cp} \end{bmatrix},$$

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{C1} \\ \vdots \\ I_{Cp} \end{bmatrix},$$

$$V^+ = \begin{bmatrix} V_1^+ \\ \vdots \\ V_m^+ \end{bmatrix}, \quad I^+ = \begin{bmatrix} I_1^+ \\ \vdots \\ I_m^+ \end{bmatrix}, \quad \tilde{V}_L = \begin{bmatrix} V_{L(r+1)} \\ \vdots \\ V_{L\nu} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_L = \begin{bmatrix} I_{L(r+1)} \\ \vdots \\ I_{L\nu} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{V}_C = \begin{bmatrix} V_{C(p+1)} \\ \vdots \\ V_{C\gamma} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_C = \begin{bmatrix} I_{C(p+1)} \\ \vdots \\ I_{C\gamma} \end{bmatrix}.$$

Напишем уравнения К1 и К2 для фундаментальной системы циклов и фундаментальной системы сечений, определяемых лесом f [10]. В матричной форме эти уравнения запишутся так:

$$\begin{aligned} &-A_{11}V^- + A_{12}V_L + A_{13}V_C + \tilde{V}_L = 0, \quad I^- + B_{11}\tilde{I}_L + B_{12}\tilde{I}_C + B_{13}I^+ = 0,\\ &-A_{21}V^- + A_{22}V_L + A_{23}V_C + \tilde{V}_C = 0, \quad I_L + B_{21}\tilde{I}_L + B_{22}\tilde{I}_C + B_{23}I^+ = 0, \quad (1)\\ &-A_{31}V^- + A_{32}V_L + A_{33}V_C + V^+ = 0, \quad I_C + B_{31}\tilde{I}_L + B_{32}\tilde{I}_C + B_{33}I^+ = 0. \end{aligned}$$

Матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & U & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & U & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & U \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} U & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & U & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & U & B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}$$

являются соответственно фундаментальной цикломатической матрицей и матрицей сечений графа G (U—единичные матрицы надлежащих размеров). Известно [10], что $QS' = 0$. Отсюда $A_{ij} = -B_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$. Из условия f_3 следует, что $A_{22} = 0$, $B_{22} = 0$, а из условий g_1, g_2, g_3 последовательно получаем $A_{21} = 0$, $B_{23} = 0$, $A_{31} = U$.

Таким образом, система (1) имеет вид

$$-A_{11}V^- + A_{12}V_L + A_{13}V_C + \tilde V_L = 0,\quad I^- + B_{11}\tilde I_L - I^+ = 0,$$
$$A_{23}V_C + \tilde V_C = 0;\quad I_L + B_{21}\tilde I_L = 0, \qquad (2)$$
$$-V^- + A_{33}V_C + V^+ = 0,\quad I_C + B_{31}\tilde I_L + B_{32}\tilde I_C + B_{33}I^+ = 0.$$

Положив

$$L = \begin{vmatrix} L_1 \ddots & 0 \\ 0 & L_r \end{vmatrix},\ \tilde L = \begin{bmatrix} L_{r+1} \ddots & 0 \\ 0 & L_\mu \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} C_1 \ddots & 0 \\ 0 & C_p \end{bmatrix},\ \tilde C = \begin{vmatrix} C_{p+1} \ddots & 0 \\ 0 & C_\nu \end{vmatrix},$$

запишем уравнения К3 в виде

$$V_L = L\frac{dI_L}{dt},\ \tilde V_L = \tilde L\frac{d\tilde I_L}{dt},\ I_C = C\frac{dV_C}{dt},\ \tilde I_C = \tilde C\frac{d\tilde V_C}{dt}. \qquad (3)$$

Комбинируя уравнения (2) и (3), получим

$$\begin{bmatrix} \tilde L + A_{12}LA'_{12} & 0 \\ 0 & C + B_{32}\tilde C B'_{32} \end{bmatrix} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A_{13} \\ B_{31}+B_{33}B_{11} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde I_L \\ V_C \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 \\ 0 & -B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V^- \\ I^- \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

$$\begin{bmatrix} V^+ \\ I^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^- \\ I^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_{33} \\ B_{11} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde I_L \\ V_C \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} I_L \\ \tilde V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -B_{21} & 0 \\ 0 & -A_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde I_L \\ V_C \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Положим $\Delta_L = \tilde L + A_{12}LA'_{12}$, $\Delta_C = C + B_{32}\tilde C B'_{32}$, $\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{vmatrix}$. При помощи формулы Бинэ-Коши можно показать, что Δ_L, Δ_C, Δ — положительно определенные матрицы. Поэтому уравнение (4) может быть разрешено относительно $\tilde I$ и V_C, каковы бы ни были непрерывные функции V^- и I^-. Если определить V^+, I^+, I_L, $\tilde V_C$ равенствами (5), а V_L, $\tilde V_L$, I_C, $\tilde I_C$ — равенствами (3), мы получим набор функций, удовлетворяющих (2) и (3), а следовательно, и К1, К2, К3. Очевидно, все эти функции определяются однозначно функциями V^-, I^- и начальными условиями, согласованными с К1 и К2.

4. Пусть E и H — координатные гильбертовы пространства, $\dim E = 2m$, $\dim H = \mu + \nu$. Сохраним обозначения предыдущего пункта. Введем в рассмотрение вектор-функции $\varphi^- = [V_1^- \cdots V_m^-, I_m^- \cdots I_1^-]'$, $\varphi^+ = [V_1^+ \cdots V_m^+, I_m^+ \cdots I_1^+]'$, $\psi = [\sqrt{L_1}\, I_{L1} \cdots \sqrt{L_\mu}\, I_{L\mu}, \sqrt{C_1}\, V_{C1} \cdots \cdots \sqrt{C_\nu}\, V_{C\nu}]'$. Очевидно, φ^-, $\varphi^+ \in \tilde E$, $\psi \in \tilde H$. Назовем эти функции входным, выходным и внутренним векторами. Из (4) и (5) следует, что при некоторых начальных условиях [4] $\varphi^+ = S\varphi^-$, $\psi = R\varphi^-$, где S и R — линейные операторы, действующие из $\tilde E$ в $\tilde E$ и из $\tilde E$ в $\tilde H$. Это означает, что

$\tilde{E}$, $\tilde{H}$, S, R образуют открытую систему $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\tilde{H}\end{array}\right)$. Ее мы будем называть открытой системой на LC-графе класса Ω.

5. Пусть E, H, H^0 — гильбертовы пространства. Открытая система $\tilde{F}^0\left[\tilde{E}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}^0\to\tilde{H}^0\end{array}\right]$ называется основой открытой системы $\tilde{F}\left(\tilde{E}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}\to\tilde{H}\end{array}\right)$, если 1) существует линейный оператор P, действующий из H^0 в H, такой, что для каждого t и $\varphi^- \in \tilde{E}$ $R\varphi^-(t) = \mathrm{PR}^0\varphi^-(t)$, $\|\mathrm{R}\varphi^-(t)\|_H = \|\mathrm{R}^0\varphi^-(t)\|_{H_0}$,

2) системе $\tilde{F}^0$ принадлежит операторный узел.

Теорема 2. *Для открытой системы на LC-графе класса Ω существует основа. Операторный узел, принадлежащий основе, определяется топологией графа и параметрами ребер по формулам (7) (см. ниже).*

Сохраним обозначения п. 3 и п. 4. Пусть H^0 — гильбертово пространство $\mu - r + p$ — мерных вектор-столбцов, в котором скалярное произведение $\langle g_1, g_2\rangle$ определено равенством $\langle g_1, g_2\rangle = g_2^* \Delta g_1$. Умножим уравнение (4) слева на $i\Delta^{-1}$. Получим

$$i\frac{dg(t)}{dt} + Tg(t) = \Gamma\varphi^-(t), \tag{6}$$

где

$$g=\begin{bmatrix}\tilde{I}_L\\ V_C\end{bmatrix},\; T=\begin{bmatrix}0 & i\Delta_L^{-1}A_{13}\\ i\Delta_C^{-1}(B_{31}+B_{33}B_{11}) & 0\end{bmatrix},\; \Gamma=\begin{bmatrix}i\Delta_L^{-1}A_{11} & \\ 0 & -i\Delta_C^{-1}B_{33}J_m\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Здесь и ниже J_n — квадратная матрица $\begin{bmatrix}0 & & 1\\ & \diagup & \\ 1 & & 0\end{bmatrix}$, порядок которой n каждый раз выбирается так, чтобы действия с применением J_n имели смысл. Если подчинить g надлежащим начальным условиям, то уравнение (6) определит линейный оператор R^0, действующий из $\tilde{E}$ в $\tilde{H}^0$, такой, что $g = \mathrm{R}^0\varphi^-$. Из (5) имеем $\varphi^+ = \mathrm{S}\varphi^-$, где

$$S\varphi^-(t) = \varphi^-(t) - iJ\,\Gamma^*\Delta\mathrm{R}^0\varphi^-(t) \tag{8}$$

$(J = J_{2m})$. Таким образом, построена открытая система $\tilde{F}^0\left(\tilde{E}\begin{array}{l}\nearrow \mathrm{S}\to\tilde{E}\\ \searrow \mathrm{R}^0\to\tilde{H}^0\end{array}\right)$.

Рассматривая T, Γ, J как матрицы операторов T, Г, J, действующих из $\tilde{H}^0$ в $\tilde{H}^0$, из $\tilde{E}$ в $\tilde{H}^0$ и из $\tilde{E}$ в $\tilde{E}$ соответственно, имеем $T^+ = \Delta^{-1}T^*\Delta$, $\Gamma^+ = \Gamma^*\Delta$, где T^+ и Γ^+ — матрицы операторов T^+ и Γ^+, сопряженных по отношению к операторам T и Г (* означает переход к комплексно сопряженной матрице). Непосредственно проверяется равенство $\mathrm{T} - \mathrm{T}^+ =$

$= i\,\Gamma J\Gamma^{+}$. так что E. H^0. T, Г. J образуют операторный узел $\begin{bmatrix} T & \Gamma & J \\ H^0 & & E \end{bmatrix}$.
В силу (6) и (8). которое может быть записано в виде $S\varphi^{-}(t) = \varphi^{-}(t) - i J\Gamma^{+} R^0 \varphi^{-}(t)$, этот узел принадлежит системе $\tilde{F}^0$. Из (4) и второго равенства (5) $R = PR^0$ (определение R см. в п. 4), где оператор P представлен матрицей

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{\tilde{L}}\,B_{21} & 0 \\ \sqrt{\tilde{L}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tilde{C}} \\ 0 & -\sqrt{\tilde{C}}\,A_{23} \end{bmatrix}.$$

Равенство $\|R^0\varphi^{-}(t)\|_{H^0} = \|R\varphi^{-}(t)\|_{H}$ проверяется непосредственно. Мы показали. что $\tilde{F}^0$ есть основа $\tilde{F}$. Теорема доказана.

Основа $\tilde{F}^0$ зависит от выбора леса f, поэтому мы будем называть ее *основой на лесе* f и обозначать $\tilde{F}^0_f$.

6. Уравнения (2) и (3) приводят также к соотношению

$$iA\frac{d\psi}{dt} + B\psi = \Gamma_1\varphi^{-},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12}\sqrt{L} & \sqrt{\tilde{L}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C} & B_{32}\sqrt{\tilde{C}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = i\begin{bmatrix} \sqrt{L^{-1}} & B_{21}\sqrt{\tilde{L}^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{13}\sqrt{C^{-1}} & 0 \\ 0 & (B_{31}+B_{33}B_{11})\sqrt{\tilde{L}^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23}\sqrt{C^{-1}} & \sqrt{\tilde{C}^{-1}} \end{bmatrix},\quad \Gamma_1 = i\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{11} & 0 \\ 0 & -B_{33}I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этом $BA^* - AB^* = i\Gamma_1 I\Gamma_1^*$, а область значений Γ_1 содержится в области значений A.

7. Пример. На схеме представлен LC-граф G класса Ω. Так как G—связный граф, то его лес состоит из одного дерева. Условиям f_1, f_2, f_3 удовлетворяет, например, дерево $\{q^{-}, q_{L1}, q_{C1}, q_{C2}\}$. Фундаментальная система циклов, отвечающая этому дереву, такова:

$$Q_1 = \{q_{L1}, q_{C1}, q_{C2}, q_{L2}\},\ Q_2 = \{q^{-}, q_{L1}, q_{C1}, q_{L3}\},\ Q_3 = \{q_{C1}, q_{C2}, q_{C3}\},$$
$$Q_4 = \{q^{-}, q_{C2}, q^{+}\}.$$

Цикломатическая матрица имеет вид

$$
\begin{array}{c@{\,}c}
 & \begin{array}{cccccccc} q^- & q_{L1} & q_{C1} & q_{C2} & q_{L2} & q_{L3} & q_{C3} & q^+ \end{array} \\
\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_1 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].
\end{array}
$$

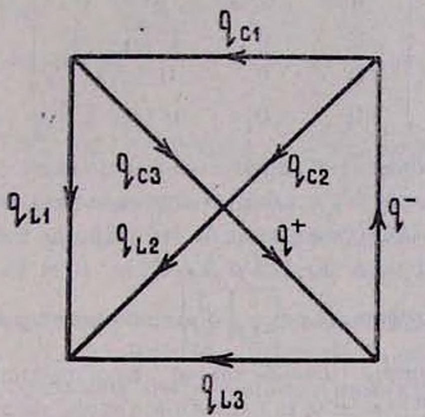

Рис. 1

В нашем случае $L=[L_1]$, $\tilde{L}=\begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{C}\,[C_3]$. Блоки

$$A_{ij} \text{ таковы: } A_{11}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{13}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{23}=[1\,-1], \quad A_{33}=[0\ 1].$$

Далее

$$\Delta_L=\tilde{L}+A_{12}LA'_{12}=\begin{bmatrix} L_1+L_2 & L_1 \\ L_1 & L_1+L_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_C=C+B_{32}\tilde{C}B'_{32}=$$

$$=\begin{bmatrix} C_1+C_3 & -C_3 \\ -C_3 & C_2+C_3 \end{bmatrix}.$$

Согласно (6) и (7) $i\dfrac{dg}{dt}+Tg=\Gamma\varphi^-$, где

$$g=\begin{bmatrix} I_{L2} \\ I_{L3} \\ V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}, \quad T=i\begin{bmatrix} 0 & 0 & lL_3 & (L_1+L_3)\,l \\ 0 & 0 & -lL_2 & -L_1 l \\ cC_2 & cC_2 & 0 & 0 \\ -cC_1 & -cC_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma=i\begin{bmatrix} lL_1 & 0 \\ -l\,(L_1+L_2) & 0 \\ 0 & cC_3 \\ 0 & c\,(C_1+C_3) \end{bmatrix}.$$

Здесь $c=(C_1C_3+C_1C_3+C_2G_3)^{-1}$, $l=(L_1L_2+L_1L_3+L_2L_3)^{-1}$. Переход от вектора g к вектору $\psi=[\sqrt{L_1}\,I_{L1}, \sqrt{L_2}\,I_{L2}, \sqrt{L_3}\,I_{L3}, \sqrt{C_1}\,V_{C1}, \sqrt{C_2}\,V_{C2}, \sqrt{C_3}\,V_{C3}]'$ осуществляется так: $\psi=\mathrm{P}g$, где P — оператор с матрицей

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{L_1} & -\sqrt{L_1} & 0 & 0 \\ \sqrt{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{L_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{C_2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{C_3} & \sqrt{C_3} \end{bmatrix}.$$

8. Поставим обратную задачу: каким должен быть наперед заданный операторный узел N, чтобы он принадлежал основе некоторой открытой системы на LC-графе класса Ω? Кроме того, требуется дать способ построения графа по узлу N.

Теорема 3. *Пусть* $N=\begin{vmatrix} \mathrm{T} & \Gamma & \mathrm{J} \\ H^0 & E & \end{vmatrix}$ — *операторный узел, в котором* E — *координатное гильбертово пространство размерности* $2m$, $J=J_{2m}$, $\dim H^0=a+b$ *и скалярное произведение в* H^0 *определено равенством* $\langle g_1; g_2\rangle=g_2^{*}\Delta g_1$, где $\Delta=\begin{bmatrix} \Delta_L & 0 \\ 0 & \Delta_C \end{bmatrix}$; Δ_L *и* Δ_C — *положительно определенные матрицы порядков* a *и* b *соответственно. Пусть операторы* T *и* Γ *имеют матрицы вида*

$$T=i\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} 0 & K \\ \hline M & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} a \\ b \end{array}, \quad \Gamma=i\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & m \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & -QJ_m \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} a \\ b \end{array}.$$

Если матрицы Δ_L *и* Δ_C *допускают представление*

$$\Delta_L=\tilde{L}+ALA', \quad \Delta_C=C+B'\tilde{C}B \tag{9}$$

такое, что L, $\tilde{L}$, C, $\tilde{C}$ — *положительные диагональные, и матрица*

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P & A & \Delta_L K & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & U & 0 \\ U & 0 & -Q'\Delta_C & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \tag{10}$$

является цикломатической, то узел N *принадлежит основе некоторой открытой системы на* LC*-графе класса* Ω, *для которого (10) есть фундаментальная матрица циклов.*

Доказательство. Построим граф G с цикломатической матрицей (10). Ребра, отвечающие столбцам подматрицы

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P & A & \Delta_L K \\ 0 & 0 & B \\ U & 0 & -Q'\Delta_C \end{bmatrix},$$

образуют лес $\mathfrak{f}$ графа G [10]. Назовем входными, выходными, C-ребрами и L-ребрами ребра, отвечающие столбцам матриц

$$\begin{bmatrix} \Delta_L P \\ 0 \\ U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Delta_L K & 0 \\ B & U \\ -Q'\Delta_C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

соответственно. Ребру, отвечающему k-му столбцу матрицы $\begin{bmatrix} \Delta_L K & 0 \\ B & U \\ -Q'\Delta_C & 0 \end{bmatrix}$ (матрицы $\begin{bmatrix} A & U \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$), поставим в соответствие в качестве параметра ненулевой элемент k-го столбца матрицы $\begin{vmatrix} C & 0 \\ 0 & \widetilde{C} \end{vmatrix}$ (матрицы $\begin{vmatrix} L & 0 \\ 0 & \widetilde{L} \end{vmatrix}$). Из строения (10) непосредственно усматривается, что граф G обладает свойствами g_1 и g_2, т. е. является LC-графом класса Ω. Если теперь выполнить построения п. 4, используя лес $\mathfrak{f}$, мы получим открытую систему $\widetilde{F}$ и $\widetilde{F}_f^0$ — ее основу, которой принадлежит узел N.

9. Матрицы A и B в равенствах (9), как блоки фундаментальной матрицы циклов (10), должны быть вполне унимодулярными [10]. Если найдено какое-нибудь представление Δ_L и Δ_C в виде (9), то проверка матрицы (10) на цикломатичность и построение графа G (если он существует) может быть осуществлена одним из разработанных для этого способов (см., например, [7]). Алгоритм, позволяющий представить Δ_L и Δ_C в виде (9) со вполне унимодулярными A и B (или доказать, что такого представления не существует) описан в [11]. Мы оценим размеры матриц A и B, а тем самым число шагов применения указанного алгоритма, учитывая не только полную унимодулярность A и B, но и то, что они суть блоки цикломатической матрицы. Так как число строк A равно a, а число столбцов B равно b, то остается оценить число столбцов A и число строк B. Число столбцов A совпадает с числом L-ветвей леса $\mathfrak{f}$, число строк B равно числу C-хорд. Покажем, что при выполнении условий теоремы 3 граф G, построенный в процессе доказательства теоремы, можно подчинить дополнительным ограничениям:

h_1: в графе G нет двуугольников, образованных C-ребрами;

h_2: для любых двух L-ветвей леса $\mathfrak{f}$ существует цикл, содержащий одну из них и не содержащий другой;

h_3: сечение, определяемое L-ветвью, содержит не менее двух L-хорд (заметим, что сечение, определяемое L-ветвью, содержит только L-хорды; это видно из строения матрицы (10)). Действительно, указываемыениже преобразования а), б), в), г) графа G затрагивают лишь матрицы A, B, L, $\widetilde{L}$, C, $\widetilde{C}$, но не меняютматриц Δ_L и Δ_C, так что узел $\begin{bmatrix} T & \Gamma & J \\ H^0 & E & \end{bmatrix}$, принадлежащий основе, остается без изменения.

а). Если две C-хорды $\tilde{q}_{Cl}$ и $\tilde{q}_{Ck}$ образуют двуугольник, то можно удалить одну из них, приписав другой параметр $C_l + C_k$;

б) если C-ветвь q_{Cl} и C-хорда $\tilde{q}_{Ck}$ образуют двуугольник, то можно удалить хорду, приписав ветви параметр $C_l + C_k$;

в) если две L-ветви леса q_{Ll}, q_{Lk} входят в одни и те же циклы, то одну из них можно стянуть*, приписав другой параметр $L_l + L_k$;

г) если L-ветвь q_{Ll} и L-хорда $\tilde{q}_{Lk}$ образуют сечение, то ветвь можно стянуть, приписав хорде параметр $L_l + L_k$.

Требуемые оценки следуют из теоремы 4.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{f}$ — *лес графа* G *класса* Ω, *удовлетворяющий условиям* f_1, f_2, f_3 (*п.* 3) *и* h_1, h_2, h_3. *Если число* L-*хорд и число* C-*ветвей равно соответственно* a *и* b, *то число* L-*ветвей не превышает* $\frac{1}{2}a(a-1)$, *число* C-*хорд не превышает* $\frac{1}{2}b(b-1)$.

Доказательство. 1. Оценку числа L-ветвей докажем индукцией по a. Для $a = 0$ и $a = 1$ она очевидна, так как в силу h_3 $\mathfrak{f}$ вообще не имеет L-ветвей. Пусть оценка верна для $a = n$, а граф G, удовлетворяющий условиям теоремы, имеет $n + 1$ L-хорду. Удалим одну L-хорду. Получим граф G' с тем же лесом $\mathfrak{f}$, содержащий n L-хорд и удовлетворяющий f_1, f_2, f_3. Если условия h_2, h_3 не нарушены, то, по предположению, $\mathfrak{f}$ содержит не более $\frac{n(n-1)}{2}$ L-ветвей, а значит, и не более $\frac{n(n+1)}{2}$ L-ветвей. Условия h_2, h_3 могут быть нарушены лишь в двух случаях: а) две (и только две!) L-ветви леса $\mathfrak{f}$ в графе G' входят в одни и те же циклы; б) появляются сечения, каждое из которых состоит из одной L- ветви и одной L-хорды. Стянем одну из L-ветвей, упомянутых в а), и все L-ветви упомянутые в б). При этом всего будет стянуто не более n L-ветвей. Образовавшийся граф G'' и его лес $\mathfrak{f}''$, полученный из $\mathfrak{f}$ таким стягиванием, удовлетворяют условиям f_1, f_2, f_3 и h_1, h_2, h_3. Кроме того, G'' имеет n L-хорд. По предположению индукции $\mathfrak{f}''$ содержит не более $\frac{1}{2}n(n-1)$ ветвей. Поэтому $\mathfrak{f}$ содержит не более $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ L-ветвей. 2. Оценивая число C-хорд, заметим, что при добавлении к $\mathfrak{f}$ C-хорды образуется цикл, состоящий только из C-ребер. Множество всех C-ветвей леса $\mathfrak{f}$ распадается на несколько компонент связности $G_1, G_2, \cdots, G_s$. Пусть они содержат $m_1, m_2, \cdots, m_s$ ребер и, следовательно, m_1+1, $m_2+1, \cdots, m_s+1$ вершин. Число пар вершин в каждой компоненте связности G_k, исключая пары, состоящие из концов одной и той же C-ветви, равно

* Стягивание ребра — удаление ребра с последующим отождествлением инцидентных ему вершин.

$\frac{m_k(m_k-1)}{2}$. Так как C-хорды не могут соединять вершины, принадлежащие разным компонентам, то общее количество C-хорд не более $\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k(m_k-1)}{2}$. Так как $m_1+m_2+\cdots+m_s=b$, то $\sum_{k=1}^{s}\frac{m_k(m_k-1)}{2}<\frac{b(b-1)}{2}$, что и требовалось доказать.

Как нетрудно показать, верхняя граница числа C-хорд — точная. Верхняя граница числа L-ветвей, по-видимому, может быть улучшена.

Приношу глубокую благодарность А. Г. Руткасу за внимание к этой работе.

Донецкий государственный
университет

Поступило 20.XI.66

Դ. Մ. ՉԱՈՒՍՈՎՍԿԻ

ԲԱՑ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Սույն հոդվածում կառուցված է բաց սիստեմների որոշ դաս LC-*գրաֆների վրա, գտնված են նրանց հետ կապված օպերատորային հանգույցները, հետազոտված է աբստրակտորեն տրված օպերատորային հանգույցի իրականացման հնարավորությունը* LC-*գրաֆի օգնությամբ։*

D. M. CHAUSOVSKY

OPEN SYSTFMS ON GRAPHS

Summary

The article deals wilh a class of open systems on LG-graphs and corresponding operator nodes.

The possibility of realization of a given operator node by means of LC-graphs is under consideration.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Бродский, Ю. Л. Шмульян.* Инвариантные подпространства линейного оператора и делители его характеристической функции, УМН, XIX, 1 (115) (1964), 143—150.
2. *М. С. Лившиц.* О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи, Изв. АН СССР, сер. матем., 27,5 (1963), 993—1030.
3. *М. С. Лившиц.* Открытые системы как линейные автоматы, Изв. АН СССР, сер. матем., 27,5 (1963), 1215—1228.
4. *М. С. Лившиц.* Операторы, колебания, волны (открытые системы), „Наука“ (1966).
5. *А. Г. Руткас.* Несамосопряженные операторы в теории многополюсников, записки механико-математического факультета ХГУ и Харьковского матем. общ-ва, (1966).

6. *David P., Brown*. Derivative-explicit differential equations for RLC-graphs, J. Franklin Inst. (1963), 275, № 6.
7. *R. Gould*. Graphs and vector spaces, J. Math. and Phys., v. 37, Oct. (1958).
8. *Myril B. Reed*. The Seg: A new class of subgraphs, IRE Trans. on C. T., v. CT-8, March (1961), 17—22.
9. *К. Берж*. Теория графов и ее применения, ИИЛ (1962).
10. *С. Сешу, Н. Балабанян*. Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат (1963).
11. *Z. Winter*. A note on matrix factorization, IRE Trans. on C. T., v. CT-7, March (1960).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

О СЕГМЕНТНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Введение. Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\varphi}$ (φ—вещественная), если посредством этой функции сегмент, соединяющий $e^{i\varphi}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\varphi}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\varphi}$.

Ясно, что в данной точке из конечности сегментного изменения вытекает, что функция имеет конечное радиальное изменение, а из последнего вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Берлинг [1] доказал, что если функция регулярна в D и имеет конечный интеграл Дирихле, то она имеет конечное радиальное изменение в каждой точке единичной окружности C, исключая, быть может, такое множество, внешняя емкость которого равна нулю. В дальнейшем Цудзи [2] показал, что в теореме Берлинга слова „конечное радиальное изменение" можно заменить словами „конечное сегментное изменение" и утверждение теоремы останется верным.

В работах Карго [3, 4] эти вопросы были рассмотрены для произведений Бляшке.

По теореме Рисса произведение Бляшке почти всюду имеет радиальные граничные значения с модулем, равным единице, и можно было ожидать, что эти функции почти всюду будут иметь конечное радиальное изменение. Однако Рудином [5] был построен пример произведения Бляшке, которое почти всюду имеет бесконечное радиальное изменение. Значит следовало найти условие, при котором произведение Бляшке в точке $e^{i\varphi}$ имеет конечное сегментное изменение. Фростманом [6] доказано, что если $\{z_n\}$—последовательность Бляшке удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|}{|e^{i\varphi}-z_n|} < +\infty \tag{1.1}$$

в некоторой точке $e^{i\varphi}$, то произведение Бляшке $B(z, \{z_n\})$ в точке $e^{i\varphi}$ имеет радиальное предельное значение с модулем, равным единице.

Карго [3] показал, что если (1.1) выполняется, то в точке $e^{i\varphi}$ $B(z, \{z_n\})$ имеет конечное радиальное изменение; более того, $B(z, \{z_n\})$ имеет конечное сегментное изменение [4].

В качестве следствия им было получено также, что если последовательность Бляшке удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha} < +\infty \tag{1.2}$$

для некоторого $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, то произведение Бляшке $B_{\alpha}(z, \{z_n\})$ имеет конечное сегментное изменение в каждой точке C, кроме, быть может, множества, внешняя α-хаусдорфова мера которого есть нуль.

Это вытекает из того, что при условии (1.2) условие (1.1) выполняется вне такого множества.

Броманом [7] были рассмотрены классы S_{α} регулярных функций, ряд Тейлора $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ которых удовлетворяет условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{\alpha} < +\infty$ для некоторого α $(0 < \alpha < 1)$. Тогда функция, регулярная в D, принадлежит S_1 в том и только в том случае, если она имеет конечный интеграл Дирихле. Броман доказал, что если функция f принадлежит $S_{\alpha}(0 < \alpha < 1)$, то она имеет конечную радиальную вариацию вне некоторого множества, внешняя $(1 - \alpha)$ емкость которого—нуль.

Поскольку Карлесоном [8] показано, что $B_{\alpha}(z, \{z_n\}) \in S_{\alpha}$, то Карго в работе [4] предполагает, что функции класса S_{α} должны иметь конечное сегментное изменение вне некоторого множества, $(1-\alpha)$ внешняя емкость которого—нуль.

В настоящей заметке, опираясь на интегральное представление М. М. Джрбашяна для классов функций $H_2(\alpha)$, устанавливается оценка для одного интеграла от модуля производной для функций класса S_{α}. Эта оценка позволяет доказать, что функции класса S_{α} имеют конечное сегментное изменение вне множества, $(1 - \beta)$ емкость которого—нуль, где $\beta < \alpha$ любое.

2. Основная теорема. Скажем, что голоморфная в D функция принадлежит классу $H_2(\alpha)$, $(\alpha > -1)$, если

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)^{\alpha} \, |f(\rho e^{i\gamma})|^2 \, \rho d\rho d\gamma < +\infty.$$

Известно [9], что функции класса $H_2(\alpha)$ допускают интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} \frac{\varphi(t)\,|dt|}{(1 - z\bar{t})^{\frac{\alpha+3}{2}}}, \tag{2.1}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная суммируемая с квадратом модуля функция на $|t| = 1$.

Пусть регулярная в D функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ принадлежит классу S_{α} $(0 < \alpha < 1)$, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{\alpha} < +\infty. \tag{2.2}$$

Условие (2.2) эквивалентно условию

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{1-\alpha} |f'(\rho e^{i\gamma})|^2 \rho d\rho d\gamma < +\infty, \tag{2.3}$$

поскольку

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1-\rho^2)^{1-\alpha} |f'(\rho e^{i\gamma})|^2 \rho d\rho d\gamma = \int_0^1 (1-\rho^2)^{1-\alpha} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^2 \rho^{2n-1} \right\} \rho d\rho,$$

и имеем при $n \to \infty$

$$n^2 \int_0^1 (1-\rho^2)^{1-\alpha} \rho^{2n} d\rho \sim n^{\alpha}.$$

Это значит, что если $f(z) \in S_{\alpha}$, то $f'(z) \in H_2(1-\alpha)$ и, согласно формуле (2.1), имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \frac{\varphi(t)}{(1-\bar{t}z)^{\frac{4-\alpha}{2}}} |dt| \quad (|z| < 1). \tag{2.4}$$

Теорема 1. *Пусть интегрируемая функция* $\omega(r)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{1-r} dr < +\infty, \tag{2.5}$$

и $f \in S_{\alpha}$. *Тогда интеграл*

$$V_{\omega}(\varphi) = \int_0^1 \omega(r) |f'(re^{i\varphi})| dr \tag{2.6}$$

имеет конечное значение вне некоторого множества, $(1-\alpha)$ *внешняя емкость которого равна нулю.*

Доказательство. Пусть $E \subset [0,2\pi]$ — любое множество $(1-\alpha)$ положительной емкости. Значит существует мера μ, $\mu(E)=1$ такая, что функция

$$U_{\alpha}(x, r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(t)}{|1-re^{i(x-t)}|^{1-\alpha}} \tag{2.7}$$

$(0 \leqslant r < 1)$ остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$.

Итак, имеем

$$U_{\alpha}(x, r) \leqslant c_1 \tag{2.8}$$

$(0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1)$, где $c_1 < +\infty$ не зависит от x и r.

Теперь рассмотрим следующий интеграл:

$$A_{\omega} = \int_0^{2\pi} V_{\omega}(t)\, d\mu(t), \tag{2.9}$$

и заметим, что теорема будет доказана, если мы покажем, что этот интеграл конечен, поскольку из бесконечности $V_\omega(\varphi)$ на E вытекала бы бесконечность A_ω.

Из (2.6) и (2.4) имеем

$$A_\omega \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 \omega(r)\left[\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|}{\left|1-re^{i(t-\gamma)}\right|^{\frac{4-\alpha}{2}}}\,d\gamma\right]dr\right\}d\mu(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \omega(r)\,dr\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|}{\left|1-re^{i(t-\gamma)}\right|^{\frac{4-\alpha}{2}}}\,d\gamma\,d\mu(t).$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Шварца, получаем

$$A_\omega \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \omega(r)\,dr\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\varphi(e^{i\gamma})|^2\,d\gamma\,d\mu(t)}{|1-re^{i(t-\gamma)}|^{1-\alpha}}\right\}^{1/2}\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma\,d\mu(t)}{|1-re^{i(t-\gamma)}|^{3}}\right\}^{1/2}, \tag{2.10}$$

откуда, используя (2.5) и (2.8), легко заключаем, что

$$A_\omega \leqslant c_2\int_0^1\frac{\omega(r)}{1-r}\,dr \leqslant c_3,$$

где c_2 и c_3 — постоянные.

3. Следствие из основной теоремы. Пусть a — любая точка D.

Параметрическое уравнение сегмента, соединяющего точку a с точкой $e^{i\varphi}$, можно записать так:

$$z(r)=a+r(e^{i\varphi}-a)\quad (0\leqslant r\leqslant 1).$$

Тогда, если через $V_{\omega,a}(\varphi)$ обозначим интеграл

$$V_{\omega,a}(\varphi)=\int_0^1 \omega(r)\,|f'(z(r))|\,dr, \tag{3.1}$$

то

$$V_{\omega,a}(\varphi)\leqslant cV_\omega(\varphi), \tag{3.2}$$

где c зависит только от a. Действительно

$$|1-z(r)\bar t|=|1-a\bar t-r\bar t(e^{i\varphi}-a)|\geqslant|1-re^{i(\varphi-\gamma)}|-|1-r||a|\geqslant c|1-re^{i(\varphi-\gamma)}|,$$

откуда следует (3.2). Значит по основной теореме $V_{\omega,a}(\varphi)$ имеет конечное значение вне множества, $(1-\alpha)$ внешняя емкость которого — нуль.

Заметим, что если в определении $V_{\omega,a}(\varphi)$ отсутствует функция $\omega(r)$, то конечность $V_{\omega,a}(\varphi)$ для некоторого φ означает, что функция f имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\varphi}$.

Теорема 2. *Если функция f из класса S_α, то она имеет конечное сегментное изменение всюду, кроме, быть может, такого множества, внешняя $(1-\beta)$ емкость которого равна нулю, где $0<\beta<\alpha$ — любое число.*

Действительно, тогда (2.8) выполняется, если вместо α подставить β, и аналогично можно оценить интеграл

$$V_a(\varphi)=\int_0^1 |f'(z(r))|\,dr,$$

где роль функции $\omega(r)$ будет играть функция $(1-r)^{\alpha-\beta}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 19.I.67

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՍԵԳՄԵՆՏԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ասում են, որ բաց միավոր շրջանում հոլոմորֆ ֆունկցիան $e^{i\varphi}$ կետում ունի վերջավոր սեգմենտային փոփոխություն, եթե $e^{i\varphi}$ կետը շրջանի որևէ կետի հետ միացնող սեգմենտը այդ ֆունկցիայի միջոցով արտապատկերվում է ուղղելի կորի վրա։

Ապացուցված է, որ եթե $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ֆունկցիան բավարարում է $\sum\limits_{1}^{\infty}|a_n|^2 n^\alpha<+\infty$ $(0<\alpha<1)$ պայմանին, ապա $f(z)$ ֆունկցիան բոլոր φ-երի համար ունի վերջավոր սեգմենտային փոփոխություն, բացի գուցե մի բազմությունից, որի $(1-\beta)$-արտաքին ունակությունը զերո է, որտեղ $0<\beta<\alpha$ կամայական թիվ է։

V. S. ZAKARIAN

ON THE SEGMENTAL VARIATION OF A CLASS OF ANALYTIC FUNCTION

Summary

Let us say that a function which is regular in the open unit disk has finite segmental variation at a point $e^{i\varphi}$ provided every line segment connecting $e^{i\varphi}$ to a point of disk is mapped onto a rectifiable curve by the function.

It is proved, if $f(z)=\sum\limits_{1}^{\infty} a_n n^n$ satisfy the condition $\sum\limits_{1}^{\infty}|a_n|^2 n^\alpha<+\infty$

$(0<\alpha<1)$ then it has a finite segmental variation except on a set whose outer capacity of order $1-\beta$ is zero, where $0<\beta<\alpha$ is any number.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Beurling.* Ensembles exceptionnels, Acta Mathematica, vol. 72 (1940), 1—13.
2. *M. Tsuji.* Potential theory in modern function theory, Tokyo (1959).
3. *G. T. Cargo.* The radial images of Blaschke products, The journal of the London Mathematical Society, vol. 36 (1961), 424—430.
4. *G. Cargo.* The segmental variation of Blaschke products, Duke Mathematical Journal, vol. 30 (1963), 143—149.
5. *W. Rudin.* The radial variation of analytic functions. Duke Math. Journal, vol. 22 (1955), 235—242.
6. *O. Frostman.* Sur les produits de Blascke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12 (1942), 169—182.
7. *A. Broman.* On two classes of trigonometrical series, Thesis, University of Uppsala (1947).
8. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala (1950).
9. *М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций. Сообщ. института математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2 (1948).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

С. А. АКОПЯН

ТЕОРЕМА О ДВУХ ПОСТОЯННЫХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА H_p

Хорошо известно, что ограниченная в правой полуплоскости аналитическая функция, непрерывная вплоть до границы, обладает следующим свойством: если

$$|f(iy)| \leqslant M_1 < +\infty, \quad |f(-iy)| \leqslant M_2 < +\infty \quad (y > 0),$$

то в каждой точке $z = re^{i\varphi}$ $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Пусть H_p — класс функций, аналитических в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p \, dy \right\} < +\infty \quad (p > 0).$$

Известно, что если $f(z) \in H_p$, то почти всюду существуют граничные значения $f(iy)$ $(-\infty < y < +\infty)$ и $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$.

Цель настоящей заметки — доказать, что функции класса H_p обладают свойством, аналогичным вышеприведенному. А именно, справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $f(z) \in H_p$ $(p > 0)$ *и*

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(iy)|^p \, dy \leqslant M_1 < +\infty,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(-iy)|^p \, dy \leqslant M_2 < +\infty,$$

тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant M^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Приведем доказательство сначала для случая $p = 2$.

Пусть $p = 2$ и $f(z) \in H_2$, т. е. $f(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяет условию

$$\sup_{x>0} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2 \, dy \right\} < +\infty.$$

Известно [1], что этот класс и класс $\overline{H}_2$ функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 \, dr \right\} < +\infty,$$

совпадают.

Пределы в среднем

$$\underset{\varphi\to\frac{\pi}{2}-0}{\text{l. i. m.}} f(re^{i\varphi}) = f(ir),$$

$$\underset{\varphi\to-\frac{\pi}{2}+0}{\text{l. i. m.}} f(re^{i\varphi}) = f(-ir)$$

существуют почти всюду и $f(\pm ir) \in L_2(0, +\infty)$.

Пусть

$$\int_0^{+\infty} |f(ir)|^2 \, dr \leqslant M_1 < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |f(-ir)|^2 \, dr \leqslant M_2 < +\infty.$$

Обозначим через $F^{(\pm)}(s)$ и $F(s; \varphi)$ преобразования Меллина функций $f(\pm ir)$ и $f(re^{i\varphi})$ в смысле

$$F^{(\pm)}(s) = \underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{1/a}^{a} f(\pm ir) \, r^{s-1} \, dr; \ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$$

$$F(s; \varphi) = \underset{a\to+\infty}{\text{l. i. m.}} \int_{1/a}^{a} f(re^{i\varphi}) \, r^{s-1} \, dr, \ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Известно ([2], [3, гл. VIII, стр. 508]), что

$$F(s; \varphi) = e^{-is\left(\varphi\mp\frac{\pi}{2}\right)} F^{(\pm)}(s), \ \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Из (1) имеем

$$\left|F\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right)\right|^2 = e^{2t\varphi} \left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) F^{(-)}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| \quad (-\infty < t < +\infty).$$

По равенству Парсеваля

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^2 \, dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| F\left(\frac{1}{2} + it; \varphi\right)\right|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t\varphi} \left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2} + it\right) F^{(-)}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| dt \equiv M(\varphi) \ \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Из (2) имеем

$$M\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty}|f(-ir)|^2\,dr\leqslant M_1,$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_0^{+\infty}|f(ir)|^2\,dr\leqslant M_2. \tag{3}$$

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — произвольные значения, удовлетворяющие условию: $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi_1<\varphi_2\leqslant\frac{\pi}{2}$.

По неравенству Буняковского имеем

$$M\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{t(\varphi_1+\varphi_2)}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2t\varphi_1}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\right\}^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2t\varphi_2}\left|F^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it\right)F^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|dt\right\}^{1/2}=\sqrt{M(\varphi_1)\,M(\varphi_2)}\,.$$

Таким образом, $\log M(\varphi)$ — выпуклая функция на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, принимая во внимание (3), имеем

$$\log M(\varphi)\leqslant\frac{\frac{\pi}{2}-\varphi}{\pi}\log M_1+\frac{\varphi+\frac{\pi}{2}}{\pi}\log M_2,$$

т. е.

$$M(\varphi)\leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}}\,M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Утверждение теоремы при $p=2$ установлено.

Пусть $p>0$ — произвольное число и $f(z)\in H_p$. Известно, что $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=B(z)\,\varphi(z),$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке нулей функции $f(z)$, а $\varphi(z)\in H_p$ и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$. Очевидно, что функция $g(z)=[\varphi(z)]^{p/2}\in H_2$, но тогда [1] $g(z)\in\widetilde{H}_2$. Так как $|B(z)|\leqslant 1$, то имеем

$$|f(z)|^p\leqslant|\varphi(z)|^p.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p\,dr\leqslant\int\limits_0^{+\infty}|\varphi(re^{i\varphi})|^p\,dr=\int\limits_0^{\infty}|g(re^{i\varphi})|^2\,dr, \tag{4}$$

т. е.

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\} < +\infty.$$

Кроме того

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(iy)|^p \, dy = \int_0^{+\infty} |f(iy)|^p \, dy \leqslant M_1 < +\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(-iy)|^p \, dy = \int_0^{+\infty} |f(-iy)|^p \, dy \leqslant M_2 < +\infty.$$

Но для функции $[\varphi(z)]^{p/2} \in H_2$ по доказанному имеем

$$\int_0^{+\infty} |\varphi(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}}.$$

Принимая во внимание (4), получим утверждение теоремы.

Выражаю благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 28.I.1967

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

H_p ԴԱՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԵՐԿՈՒ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆՆԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝ դիցուք $\operatorname{Re} z > 0$ *աջ կիսահարթության մեջ* $H_p \ (p > 0)$ *դասի ֆունկցիան բավարարում է*

$$\int_0^{+\infty} |f(iy)|^p \, dy \leqslant M_1 < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} |f(-iy)|^p \, dy \leqslant M_2 < +\infty$$

պայմաններին, այդ դեպքում ճիշտ է նաև հետևյալ անհավասարությունը

$$\int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

S. A. HAKOPIAN

TWO CONSTANTS THEOREM FOR THE FUNCTIONS BELONGING TO H_p

Summary

In this paper we prove following theorem: if $f(z) \in H_p \ (p > 0)$ in the right half-plane and the conditions

$$\int_0^{\infty} |f(iy)|^p \, dy \leqslant M_1, \quad \int_0^{\infty} |f(-iy)|^p \, dy \leqslant M_2,$$

are satisfied, then the inequality

$$\int_{0}^{\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \leqslant M_1^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{\pi}} M_2^{\frac{1}{2}+\frac{\varphi}{\pi}} \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$$

is valid.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян.* Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сибирский Матем. журнал, 1, № 3 (1960), 382—426.
2. *С. А. Акопян.* О параметрических представлениях некоторых классов функций, голоморфных в угловых областях, ДАН Арм. ССР, XL, № 2 (1965), 71—80.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство „Наука", М. (1966).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 2, 1967 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ И О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ. I

1.1. Пусть Γ — спрямляемая, замкнутая жорданова кривая, а T — сохраняющий ориентацию автоморфизм этой кривой.

Множество точек $E\subset\Gamma$ называется инвариантным относительно автоморфизма T, если $TE=E$.

Автоморфизм T называется эргодическим, если любое, инвариантное относительно T, измеримое по Лебегу множество $E\subset\Gamma$ имеет либо меру нуль, либо полную меру, т. е. меру, равную длине Γ.

В настоящей заметке даются некоторые необходимые и некоторые достаточные условия эргодичности автоморфизма T. Из них, в частности, вытекает существование неэргодических автоморфизмов с иррациональным числом вращения.

Полученные результаты применяются к специальным автоморфизмам замкнутых кривых, тесно связанным с задачей Дирихле для уравнения струны, для исследования единственности решения этой задачи в классе измеримых функций.

В первой части мы будем рассматривать только непрерывные и сохраняющие ориентацию отображения замкнутой кривой на себя, для краткости их будем называть просто автоморфизмами.

1.2. Пусть θ — некоторая точка, принадлежащая Γ. Множество точек $\mathfrak{M}(\theta)=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}T^n\theta$ называется циклом точки θ, порожденным автоморфизмом T (T^{-k} означает k-ую итерацию обратного отображения T^{-1}).

Лемма 1. *Для эргодичности автоморфизма T замкнутой кривой Γ необходимо, чтобы цикл каждой точки $\theta\in\Gamma$, порожденный автоморфизмом T, был всюду плотен на Γ, или иначе, необходимо, чтобы число вращения* [1] *автоморфизма T было иррациональным.*

Доказательство. Пусть для некоторой точки $\theta\in\Gamma$ множество $\mathfrak{M}(\theta)$ не является всюду плотным на Γ. Очевидно, что $T\mathfrak{M}(\theta)=\mathfrak{M}(\theta)$, т. е. $\mathfrak{M}(\theta)$ инвариантно относительно T. Легко показать, что замыкание $\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$ этого множества также является инвариантным относительно T. Действительно, пусть $\theta^*\in\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$ и $\theta^*\overline{\in}\mathfrak{M}(\theta)$. Тогда существует последовательность точек $\theta_n\in\mathfrak{M}(\theta)$ такая, что $\theta_n\to\theta^*$. В силу непрерывности автоморфизма T $T\theta_n\to T\theta^*$ и, поскольку $T\theta_n\in\mathfrak{M}(\theta)$, то $T\theta^*\in\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Таким образом, $T\overline{\mathfrak{M}(\theta)}\subset\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Аналогичным образом, учитывая инвариантность множества $\mathfrak{M}(\theta)$ относительно T^{-1}, получаем $T^{-1}\overline{\mathfrak{M}(\theta)} \subset \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$, т. е. $T\overline{\mathfrak{M}(\theta)} = \overline{\mathfrak{M}(\theta)}$.

Рассмотрим дополнение множества $\overline{\mathfrak{M}(\theta)}$. Оно также инвариантно относительно T и состоит из не более, чем счетного числа интервалов $C\overline{\mathfrak{M}(\theta)} = \bigcup_i (\alpha_i, \beta_i)$. Образ каждого из этих интервалов при отображении T, очевидно, совпадает с некоторым из этих интервалов. Поэтому, если (α, β) — некоторый из этих интервалов, то возможны два случая.

1. Существует такое целое число r, что $T^r(\alpha, \beta)$ совпадает с (α, β), т. е. (α, β) является периодическим интервалом автоморфизма T, при этом $T^r\alpha = \alpha$ и $T^r\beta = \beta$, в силу сохранения ориентации автоморфизмом T.

2. Пересечение интервала $T^n(\alpha, \beta)$ с интервалом (α, β) пусто при любом, отличном от нуля, целом n, т. е. (α, β) — непериодический интервал автоморфизма T.

Рассмотрим случай 1. Пусть p — некоторая точка из интервала (α, β). Тогда при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \cdots$ точки $p_k = T^{kr}p$ принадлежат интервалу (α, β). Возможны два случая:

а) при всех k $p_k = p$;

б) точки $p_k k = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ образуют монотонную последовательность на интервале (α, β) (поскольку T сохраняет ориентацию).

В случае а) очевидно $T^{kr}(\alpha, p) = (\alpha, p)$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, и пересечение $T^n(\alpha, p)$ с (α, β) пусто при $n \neq kr$. Образуем множество $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(\alpha, p)$, которое, очевидно, инвариантно относительно T и имеет положительную меру. Однако мера этого множества не может совпадать с мерой Г, поскольку это множество не имеет точек из интервала (p, β).

В случае б) возьмем некоторую точку q между p и p_1. Интервалы $T^n(p, q)$ при любом n, в силу сохранения ориентации автоморфизмом T, лежат вне интервала (q, p_1). Следовательно, множество $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(p, q)$, которое инвариантно относительно T, имеет положительную меру, отличную от полной меры.

В случае 2 пересечение интервала $T^n(\alpha, p)$ с интервалом (p, β) пусто при любом n, поэтому мера инвариантного относительно T множества $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n(\alpha, p)$ положительна и отлична от полной меры, т. е. T не является эргодическим автоморфизмом.

Если T имеет рациональное число вращения, равное $\frac{m}{n}$, то, как показал Пуанкаре [2], T^n имеет неподвижную точку: $T^n\theta = \theta$, т. е цикл точки θ состоит из конечного числа точек и, согласно доказанному, T не является эргодическим.

Замечание. Если цикл некоторой точки $\theta \in \Gamma$, порожденный автоморфизмом T, не является всюду плотным на Γ, то из доказательства леммы 1 видно, что всю кривую Γ можно разделить на два непересекающихся, инвариантных относительно T множества, каждое из которых содержит некоторый интервал. Поскольку вместе с каждой точкой θ инвариантное относительно T множество обязано содержать и весь цикл точки θ, то цикл любой другой точки $\theta^* \in \Gamma$, порожденный автоморфизмом T, не является всюду плотным на Γ. Таким образом, для сохраняющих ориентацию непрерывных автоморфизмов T замкнутой кривой Γ, либо цикл любой точки, порожденный автоморфизом T, всюду плотен на Γ, либо этим свойством не обладает цикл ни одной точки.

1.3. Пусть T такой автоморфизм на Γ, что цикл некоторой точки (следовательно каждой точки), порожденный автоморфизмом T, всюду плотен на Γ. Известно, что число вращения таких автоморфизмов иррационально [1]. По теореме Данжуа [1] T топологически эквивалентен повороту окружности, т. е. существует единственное, с точностью до аддитивной постоянной, сохраняющее ориентацию взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение Φ кривой Γ на единичную окружность C, такое, что если

$$\Phi\theta = \varphi, \text{ то } \Phi(T\theta) = \varphi + 2\pi\xi,$$

где ξ — число вращения автоморфизма T.

Если на Γ ввести в качестве параметра длину дуги s, то Φ становится непрерывной обратимой функцией, периодической в том смысле, что

$$\Phi(s + l) = \Phi(s) + 2\pi,$$

где l — длина кривой Γ. Обратную Φ функцию будем обозначать через Φ^{-1}.

Теорема 1. *Для эргодичности автоморфизма T с иррациональным числом вращения ξ достаточно, чтобы Φ^{-1} была абсолютно непрерывной, а если производная этой функции отлична от нуля на некотором множестве положительной меры, то это условие является также и необходимым.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $E \subset \Gamma$ — некоторое множество положительной меры, инвариантное относительно автоморфизма T. Надо показать, что E имеет полную меру (т. е. $mE = m\Gamma$).

Пусть F — некоторое замкнутое множество положительной меры, принадлежащее множеству E. Образуем множество $\tilde{F} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n F$. Очевидно, $\tilde{F}$ инвариантно относительно T, имеет положительную меру и принадлежит множеству E. Кроме того, $\tilde{F}$ является множеством типа

F_σ и, в силу непрерывности Φ, множество $\Phi(\tilde{F})$ измеримо. Учитывая абсолютную непрерывность Φ^{-1} и то, что $m\tilde{F}>0$, по теореме Банаха-Зарецкого заключаем, что $m\Phi(\tilde{F})>0$. По теореме Данжуа множество $\Phi(\tilde{F})$ является инвариантным относительно поворота на угол $2\pi\xi$, где ξ—число вращения T. Известно, что если множество положительной меры на единичной окружности инвариантно относительно поворота на угол $2\pi\xi$, где ξ—иррациональное число, то мера этого множества равна 2π. Таким образом, $m\Phi(\tilde{F})=2\pi$ и, поскольку $\Phi(\tilde{F})\subset\Phi(E)$, то $m\Phi(E)=2\pi$. Отсюда легко заключить, что множество E имеет полную меру. В самом деле, допустим обратное, пусть $mE<m\Gamma$, тогда дополнение CE этого множества, которое также инвариантно относительно T, имеет положительную меру. Согласно доказанному $m\Phi(CE)=2\pi$, т. е. $m\Phi(\Gamma)=4\pi$. Противоречие показывает, что E имеет полную меру.

Необходимость. Пусть T — эргодический автоморфизм и пусть $(\Phi^{-1})'\neq 0$ на некотором множестве положительной меры. Надо показать, что Φ^{-1} является абсолютно непрерывной функцией.

Поскольку Φ^{-1} монотонна, то по теореме Банаха-Зарецкого достаточно показать, что она обладает свойством N.

Пусть e — некоторое множество на единичной окружности C и $me=0$. Образуем множество $\tilde{e}=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n e$, где R_ξ — преобразование поворота на угол $2\pi\xi$. Множество $\tilde{e}$ инвариантно относительно R_ξ и имеет меру нуль. Из условий теоремы следует, что существуют такое число $\sigma>0$ и такое множество $\gamma\subset C\tilde{e}$, что $m\gamma>0$ и на этом множестве $(\Phi^{-1})'\geqslant\sigma$. Пусть F — замкнутое множество, принадлежащее $C\tilde{e}$, такое, что $mF>2\pi-m\gamma$. Образуем множество $\tilde{F}=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n F$, которое, очевидно, принадлежит множеству $C\tilde{e}$, является множеством типа F_σ, инвариантно относительно R_ξ и имеет меру большую, чем $2\pi-m\gamma$. Пусть $\tilde{\gamma}$ — пересечение множеств γ и $\tilde{F}$. Оно, очевидно, имеет положительную меру и на нем $(\Phi^{-1})'\geqslant\sigma$. Отсюда следует [3], что внешняя мера $m^*\Phi^{-1}(\tilde{\gamma})\geqslant\sigma\cdot m\tilde{\gamma}>0$, и, поскольку $\Phi^{-1}(\tilde{\gamma})$ есть часть множества $\Phi^{-1}(\tilde{F})$, то внешняя мера множества $\Phi^{-1}(\tilde{F})$ также положительна. Но множество $\Phi^{-1}(\tilde{F})$, будучи образом множества типа F_σ при непрерывном отображении Φ^{-1}, само является множеством типа F_σ, т. е. измеримо, и поэтому $m\Phi^{-1}(\tilde{F})>0$. Кроме того, множество $\Phi^{-1}(\tilde{F})$ инвариантно относительно автоморфизма T, и поскольку он эргодичен, то $m\Phi^{-1}(\tilde{F})=m\Gamma$. Отсюда, так как $\Phi^{-1}(C\tilde{e})$ содержит в себе $\Phi^{-1}(\tilde{F})$, следует, что множество $\Phi^{-1}(\tilde{Ge})$ измеримо и имеет полную меру. Таким образом, мера множества $\Phi^{-1}(\tilde{e})$, а следовательно, и ее части $\Phi^{-1}(e)$ равны нулю, и теорема доказана.

1.4. *Следствие* 1. *Для произвольного иррационального числа* ξ *между нулем и единицей существует непрерывный, неэргодический автоморфизм окружности с числом вращения* ξ.

Действительно, пусть f — определенная на всей оси строго возрастающая, непрерывная, но не абсолютно непрерывная функция, производная которой больше нуля на некотором множестве положительной меры, и такая, что

$$f(x+2\pi)=f(x)+2\pi. \tag{1}$$

Такая функция f естественным образом порождает некоторое непрерывное и сохраняющее ориентацию отображение единичной окружности C на единичную окружность C_1.

Определим отображение T окружности C_1 на себя следующим образом:

$$T\theta=fR_\xi f^{-1}\theta,$$

где R_ξ — отображение поворота окружности C на угол $2\pi\xi$.

Очевидно, T — сохраняющий ориентацию, непрерывный автоморфизм окружности C_1, поскольку такими свойствами обладают отображения f, R_ξ и f^{-1}.

Имеем

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} T^n\theta=f\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} R_\xi^n f^{-1}\theta.$$

Учитывая непрерывность отображения f и то, что цикл каждой точки $f^{-1}\theta\in C$, порожденный отображением R_ξ, всюду плотен на окружности C, заключаем, что цикл каждой точки $\theta\in C_1$, порожденный автоморфизмом T, всюду плотен на C_1.

Функцией Данжуа для автоморфизма T, очевидно, служит f^{-1}, которая автоморфизму T окружности C_1 сопоставляет отображение поворота на угол $2\pi\xi$ на окружности C, т. е. число вращения автоморфизма T равно ξ, и остается убедиться, что T не является эргодическим автоморфизмом. Допустим обратное, пусть T является эргодическим автоморфизмом окружности C_1. Тогда из теоремы 1, в силу того, что $\Phi^{-1}=f$ имеет отличную от нуля производную на множестве положительной меры, будет следовать, что f является абсолютно непрерывной функцией. Это противоречит предположению и, следовательно, T не является эргодическим автоморфизмом.

Замечание. Повторяя доказательство необходимости условия теоремы 1, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* T — *эргодический автоморфизм замкнутой кривой* Γ, *а* f — *некоторое обратимое, непрерывное отображение* Γ *на* Γ_1, *которое автоморфизму* T *сопоставляет автоморфизм* $T_1=fTf^{-1}$ *замкнутой кривой* Γ_1

Если T_1 обладает свойством N и $(f^{-1})' \neq 0$ на некотором множестве положительной меры, то f^{-1} абсолютно непрерывна.

Следствие 2. Если автоморфизм T замкнутой кривой Γ обладает свойством N и имеет иррациональное число вращения ξ, то из абсолютной непрерывности Φ^{-1} следует абсолютная непрерывность Φ.

Действительно, по теореме Зарецкого производная функции Φ отлична от нуля почти всюду, так как Φ^{-1} абсолютно непрерывна, и остается применить лемму 2 к отображению R_ξ окружности на себя, которое, как уже было замечено, является эргодическим отображением.

Следствие 3. Если эргодический автоморфизм T с иррациональным числом вращения ξ обладает свойством N, то Φ и Φ^{-1} для этого автоморфизма одновременно либо абсолютно непрерывны, либо не являются абсолютно непрерывными, причем в последнем случае почти всюду $\Phi' = (\Phi^{-1})' = 0$.

В самом деле, рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 2, из абсолютной непрерывности Φ заключаем абсолютную непрерывность Φ^{-1}, и наоборот. Поэтому, если Φ не является абсолютно непрерывной, то Φ^{-1} тоже не является абсолютно непрерывной и, в силу леммы 2, учитывая эргодичность автоморфизма T и то, что R_ξ обладает свойством N, заключаем, что производная функции Φ^{-1} не может быть отличной от нуля на множестве положительной меры. Аналогичным образом, поскольку T обладает свойством N, применяя лемму 2 к эргодическому отображению R_ξ, убеждаемся, что производная функции Φ также равна нулю почти всюду.

Следствие 4. Существуют эргодические автоморфизмы окружности, не обладающие свойством N.

Действительно, пусть f — удовлетворяющая условию (1) строго возрастающая и абсолютно непрерывная функция, обратная f^{-1} которой не является абсолютно непрерывной функцией. Рассмотрим, как и при доказательстве следствия 1, отображение $T = fR_\xi f^{-1}$ окружности на себя. Из достаточного условия теоремы 1, в силу абсолютной непрерывности $f = \Phi^{-1}$, следует, что T — эргодический автоморфизм. Если предположить, что T обладает свойством N, то из следствия 3 будет вытекать, что обе функции f и f^{-1} абсолютно непрерывны, что противоречит предположению, и следовательно T не обладает свойством N.

1.5. Введем в качестве параметра на Γ длину дуги s, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки так, чтобы возрастанию s соответствовал обход области D слева. При этом будем считать, что параметр s, изменяясь непрерывно, принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ так, однако, что разность значений, соответствующих одной и той же точке, кратна l, где l — длина кривой Γ.

Каждой упорядоченной паре точек θ_1, θ_2 кривой Γ мы будем относить ту из двух образуемых ими дуг, для всех точек θ которой обход θ_1, θ, θ_2 является положительным.

В терминах упомянутого выше параметра любой сохраняющий ориентацию непрерывный автоморфизм описывается заданной на всей оси вещественной функцией $g(s)$, которая определяется следующим образом: для каждого s $g(s) = s +$ длина дуги $(\theta, T\theta)$, где θ—та единственная на Γ точка, параметр которой равен s. Очевидно, что определенная таким образом функция $g(s)$ является непрерывной, строго возрастающей и периодической в том смысле, что удовлетворяет условию

$$g(s+l) = g(s) + l.$$

Обратно, каждая обладающая этими свойствами функция $g(s)$ порождает, естественным образом, непрерывный и сохраняющий ориентацию автоморфизм кривой Γ.

1.6. Пусть

$$\frac{m_k}{n_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

—k-ая подходящая дробь иррационального числа ξ, и пусть существует такое положительное число $\lambda < 1$, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{n_k^{\lambda}} = 0. \tag{2}$$

Теорема 2. Если вторая производная функции $g(s)$, соответствующей автоморфизму T, удовлетворяет условию Липшица, а число вращения ξ автоморфизма T удовлетворяет условию (2), то автоморфизм T—эргодический.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из сопоставления достаточного условия теоремы 1 с результатами работы [4], из которой следует, что в условиях теоремы 2 функция Φ^{-1}, соответствующая автоморфизму T, непрерывно дифференцируема.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что теорема 2 станет неверной, если снять условие гладкости автоморфизма T.

1.7. В работе [5] В. И. Арнольдом построен пример аналитического отображения A окружности на себя с иррациональным числом вращения ξ, для которого функция Φ не является абсолютно непрерывной. Так как A обладает свойством N, то из следствия 2 вытекает, что и Φ^{-1} не является абсолютно непрерывной. Кроме того, применяя лемму 2 к эргодическому отображению R_ξ, убеждаемся, что производная функции Φ почти всюду равна нулю. С другой стороны, легко доказать, что таким свойством обладает и обратная функция Φ^{-1}.

В самом деле, в силу периодичности функции $\Phi(s)$ в указанном выше смысле, достаточно показать, что производная функции Φ^{-1} равна нулю почти всюду на отрезке $[a, b]$, где $[a, b]$—область значений функции $\Phi(s)$, когда s меняется на отрезке $[0, l]$. Пусть M—множество всех $s \in [0, l]$, для которых $\Phi'(s) = 0$. Имеем $mM = l$. В силу монотонности Φ^{-1} мера множества точек из $[a, b]$, где производные числа этой функции бесконечны, равна нулю, т. е. $m\Phi(M)=0$, следовательно, $mC\Phi(M)=b-a$. Покажем, что производная функции Φ^{-1} почти всюду на $C\Phi(M)$ равна нулю. Допустим обратное, пусть $(\Phi^{-1})' \neq 0$ на некотором множестве положительной меры. Тогда существуют такое число $\sigma>0$ и такое множество γ положительной меры, что на этом множестве $(\Phi^{-1})' \geqslant \sigma$. Пусть F — замкнутое множество положительной меры, принадлежащее множеству γ, тогда $\Phi^{-1}(F)$ измеримо, принадлежит множеству CM, следовательно $m\Phi^{-1}(F)=0$. С другой стороны [3], $m\Phi^{-1}(F) \geqslant \sigma \cdot mF>0$. Противоречие показывает, что $(\Phi^{-1})'=0$ почти всюду на $[a, b]$.

Таким образом, почти всюду $\Phi'=(\Phi^{-1})'=0$.

Является ли A эргодическим или нет—нам не удалось выяснить, но тем не менее из этого примера можно вывести следующее заключение: либо условие на производную функции Φ^{-1} в теореме 1 не является излишним (случай эргодичности A), либо оправдано ограничение на число вращения ξ в теореме 2 (случай неэргодичности A).

Отметим также, что совокупность иррациональных чисел из $(0,1)$, удовлетворяющих условию (2), образует множество полной лебеговской меры.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 11.II.1967

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ԷՐԳՈԴԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԼԱՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵՅԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ: I

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները՝

1. Որպեսզի փակ կորի վրա որոշված անընդհատ և ուղղությունը պահպանող T *ավտոմորֆիզմը լինի էրգոդիկ, բավարար է, որ նրան համապատասխանող Դանժուայի ֆունկցիայի հակադարձը՝* Φ^{-1}*-ը լինի բացարձակ անընդհատ, իսկ եթե* Φ^{-1}*-ի ածանցյալը զրոյից տարբեր է մի որևէ դրական չափի բազմության վրա, ապա այդ պայմանը նաև անհրաժեշտ է։*

2. Եթե T *ավտոմորֆիզմի պտտման թիվը իռացիոնալ է և բավարարում է (2) պայմանին, իսկ նրանով ծնված* $g(s)$ *ֆունկցիայի երկրորդ ածանցյալը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, ապա* T*-ն էրգոդիկ է։*

Ցույց է տրվում նաև, որ էրգոդիկության համար անհրաժեշտ է որպեսզի T*-ի պտտման թիվը լինի իռացիոնալ։*

S. G. HOVSEPIAN

ON THE ERGODICITY OF CONTINEOUS AUTOMORPHISMS AND THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE VIBRATING STRING EQUATION. I

Summary

Following two theorems are proved in the paper:

1. Let T be contineous and direction preserving automorphism, defined on a closed curve. In order T be ergodic, it is sufficient, that the corresponding Denjoy's function's inversion Φ^{-1} be absolute contineous. If the derivative of Φ^{-1} on some set of positive measure is not equal to zero, then this condition is also necessary.

2. If the rotation number of T is irrational and satisfies condition (2), and the second derivative of $g(s)$ function generated by T satisfies Lipshitz condition, then it follows that T is ergodic.

Also it is shown, that ergodicity implies the rotation numbers of T to be irrational.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Denjoy.* Sur les courbes définies par les équations differentielles à al surface du tore, Journ. de Math., XI, Fasc. IV (1932), 333—375.
2. *H. Poincaré.* Sur les courbes définies par les équations différentiales, Journ. Math. pures et appl., 1 (1885), 167—244.
3. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной, М. (1957).
4. *A. Finzi.* Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3) (1950), 243—305.
5. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели. 1, Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, сер. матем., 25 (1961), 21—86.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS