ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գին 30 կ.
ЦЕНА 30 К. индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 1, 1967 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

Введение

1. В работе автора [1] была построена специальная система рациональных функций $\{M_k(z)\}_0^\infty$ с фиксированными полюсами $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащими вне данного ограниченного континуума K, содержащего более одной точки. Эта система представляла собой естественное обобщение хорошо известных полиномов Фабера для того случая, когда все полюсы сосредоточены не в точке $z=\infty$, а лежат на данной последовательности точек $\{\omega_k\}_0^\infty$ вне континуума K.

Построение системы $\{M_k(z)\}_0^\infty$ проводилось следующим образом.

Во-первых, вводилась в рассмотрение ортонормальная на окружности $|w|=1$ система рациональных функций Такенака-Мальмквиста

$$\varphi_0(w)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_0 w},$$

$$\varphi_n(w)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_n w}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k-w}{1-\overline{\alpha}_k w}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad(n=1,2,3,\cdots).\tag{1}$$

При этом мы полагаем, что $\alpha_k=\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$, где функция $w=\Phi(z)$ $(z=\Psi(w))$, подчиненная условиям нормировки $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, конформно отображает смежную с континуумом K компоненту $G^{(-)}\supset\infty$ на область $D^{(-)}=\{w,\ |w|>1\}$.

Затем система $\{M_k(z)\}_0^\infty$ определялась посредством приема, аналогичного тому, который применяется при определении полиномов Фабера (см. напр. [2] и [3]).

А именно, функция $M_n(z)$ определялась как сумма главных частей с постоянными слагаемыми разложения функции $\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестностях всех ее полюсов $\{\omega_k\}_0^n$, отличных друг от друга.

Отметим, что указанный прием построения более общих чем у Фабера базисов в работе [1], по-видимому, применялся впервые.

Наконец, в случае, когда K есть замыкание жордановой области G^{+}, а $G^{(-)}$ — ее дополнение, в работе [1] устанавливалась возможность равномерно сходящегося внутри области $G^{(+)}$ разложения

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k M_k(z)\tag{2}$$

при определенных ограничениях, накладываемых на густоту расположения полюсов $\{\omega_k\}_0^\infty \subset G^{(-)}$, на границу Γ области $G^{(+)}$ и на разлагаемую функцию $f(z)$.

Условие на последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ заключалось в требовании

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})=+\infty. \tag{3}$$

Отметим, что, хотя и в случае, когда область — круг $D^{(+)}=\{z, |z|<1\}$, было хорошо известно, что это требование необходимо, в общем случае вопрос его необходимости оставался открытым.

Ограничение, накладываемое на контур Γ, было несколько жестким, поскольку оно заключалось в требовании конечности величины

$$H_p(\Gamma)=\limsup_{r\to+0}\left\{\int_0^{2\pi}|\Psi'(re^{i\theta})|^p\,d\theta\right\}<+\infty \tag{4}$$

при $p=2$, в то время как для произвольной жордановой спрямляемой кривой Γ можно лишь утверждать конечность этой величины при $p=1$.

Наконец, что касается наложенного на разлагаемую функцию $f(z)$ ограничения, а именно требования, чтобы она была голоморфной внутри и непрерывной в замкнутой области $\overline{G^{(+)}}$, то следует отметить, что оно было совершенно не по существу. Дело в том, что примененный в работе [1] метод доказательства теоремы разложения оставался в силе и для класса функций, представимых в области $G^{(+)}$ интегралом типа Коши

$$f(z)=K(z;\,g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta. \tag{5}$$

2. Впоследствии, с целью освобождения от наложенного нами на контур Γ ограничения $H_2(\Gamma)<+\infty$, Г. Ц. Тумаркин [4] в качестве $\{M_k(z)\}_0^\infty$ предложил несколько модифицированную систему $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$. Эта модификация совершалась с помощью приема, известного в теории различных обобщений полиномов Фабера (см. напр. [3]). Он заключается в том, что в отличие от $M_n(z)$, определенной нами посредством функции $\varphi_n[\Phi(z)]$, функция $M_n^*(z)$ определялась уже как сумма главных частей и постоянных слагаемых от выражения $\sqrt{\Phi'(z)}\times$ $\times\varphi_n[\Phi(z)]$. Оказалось, что определенная таким образом модифицированная система $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$ при том же условии (3) уже образует базис в области $G^{(+)}$, притом без каких-либо дополнительных ограничений на контур Γ, кроме условия его спрямляемости—$H_1(\Gamma)<+\infty$.

Здесь было доказано, что каждая функция $f(z)$, представимая интегралом типа Коши

$$f(z)=K(z;\,g),\ z\in G^{(+)}, \tag{6}$$

с функцией плотности $g(\zeta)$, подчиненной условию $\int\limits_{\Gamma} |g(\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty$, разлагается в равномерно сходящийся внутри области $G^{(+)}$ ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{*}(z), \quad z \in G^{(+)}, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty$.

Кроме того, в этой же работе Г. Ц. Тумаркин доказал также важную теорему о необходимости условия (3) в случае произвольной области $G^{(+)}$ со спрямляемой жордановой границей. Точнее, им было установлено необходимое и достаточное условие для возможности разложения (7) функции $f(z)$, представимой интегралом типа Коши (6), в том случае, когда условие (3) не выполняется, т. е. когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty. \tag{8}$$

Это условие заключается в том, что среди всевозможных представлений данной функции $f(z)$ интегралом типа Коши: $f(z) = K(z; g)$ существует такое, при котором функция $g(\zeta)$ почти всюду на Γ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в $G^{(-)}$ функции $F(z)$ с полюсами в точках последовательности $\{\omega_k\}_0^{\infty}$ и с вполне определенным структурным представлением*.

3. В настоящей статье приводится развернутое изложение результатов нового исследования автора, касающихся вопросов разложимости аналитических функций в ряды по более общим, родственным с рассмотренными ранее, системам рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, а также вопросов сходимости таких рядов и разложений на всей комплексной плоскости.

Отметим, что как в первой работе автора [1], так и в работе Г. Ц. Тумаркина [4] вопрос о поведении рядов вида (2) или (7) в области $G^{(-)}$, в случае нарушения условия разложимости (3), т. е. при условии (8) не был затронут вовсе и здесь исследуется впервые**.

В этом направлении, по-видимому, впервые устанавливается наличие систем рациональных функций, образующих базис в множестве довольно общих классов в известном смысле „моногенных" функций.

Приведем несколько подробный обзор содержания данной работы, состоящей из четырех параграфов.

В § 1, имеющем предварительный характер, приводится изложение некоторых необходимых для дальнейшего результатов, касающихся ортонормальной системы Такенака-Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ и разложений по этой системе. При этом мы сочли уместным для облегчения чте-

---

* См. [4], теорему 2, а также теорему 3.

** Основные результаты данной работы были анонсированы нами ранее без доказательств в заметке [5].

ния статьи большинство этих сведений привести с доказательствами.

Отметим, что эти доказательства читатель может найти также в известной монографии Дж. Уолша (см. [6], гл. X). Однако соответствующие факты изложены там в несколько ином аспекте и в менее общем виде, как теоремы об интерполировании функций из H_2 рациональными функциями с *простыми* нулями $\{\alpha_k\}_0^\infty$, между тем как в нашем изложении не исключается случай, когда полюсы системы $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, расположенные на последовательности $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty$, могут иметь произвольную кратность.

В заключение параграфа приводятся теоремы о рядах по неполным системам Такенака-Мальмквиста, т. е. по системам (1), для которых

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty.$$

В последующем мы по существу занимаемся распространением результатов этих теорем на случай произвольной ограниченной области со спрямляемой жордановой границей.

В § 2 статьи дается построение системы рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$, порожденной ограниченным континуумом K и произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащей в ее неограниченной смежной компоненте $G^{(-)}\supset\infty$. Эта система строится как сумма главных частей и постоянных в разложениях функции $[\Phi'(z)]^s\varphi_n[\Phi(z)]$ в окрестностях всех ее отличных друг от друга полюсов $\{\omega_k\}_0^n$. Таким образом, при значениях параметра $s=0$ и $s=\dfrac{1}{2}$ система $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ охватывает как первоначальную систему $\{M_k(z)\}_0^\infty$, так и ее модификацию $\{M_k^*(z)\}_0^\infty$.

Далее приводятся интегральные представления для системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в точках континуума K и на его дополнении $G^{(-)}$. Эти представления затем пишутся для того важного в дальнейшем случая, когда $K=\overline{G^{(+)}}$ есть замкнутая область с жордановой границей Γ, подчиненной условию $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$. Наконец, в заключительной лемме 3 устанавливается другое, необходимое в последующем, свойство сходимости рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}|M_k^{(s)}(z)|^2$$

в области $G^{(+)}$ вообще и в области $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$ при условии (8).

Следующий § 3 посвящается исследованию рядов и разложений по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в предположении, что граница взаимно-дополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ удовлетворяет условию $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$.

Здесь, во-первых, доказывается теорема Г. Ц. Тумаркина (см. [4], стр. 29) для системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в несколько усиленной формулировке о характере сходимости и о функциях, представимых в области $G^{(+)}$ рядами вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k M_k^{(s)}(z)\quad\left(\sum_0^{\infty}|c_k|^2<+\infty\right). \tag{9}$$

Причем усиление заключается в утверждении, что такие ряды сходятся абсолютно.

Далее доказывается теорема 5, устанавливающая характер сходимости ряда (9) в области $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$, а также структурное представление его суммы там же уже при условии (8). В результате из теорем 4 и 5 следует, что ряды вида (9) при условии (8) абсолютно и равномерно сходятся внутри множества $G^{(+)}+G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$, определяя две функции $f_i(z)$ $(z\in G^{(+)})$ и $f_e(z)$ $(z\in G^{(-)})$ с вполне определенным структурным представлением, являющимися „аналитическими продолжениями" друг друга через контур Г областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$.

В конце параграфа доказывается теорема 6, являющаяся обобщением теоремы разложения работы [1], на случай системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ - когда порождающая ее последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty\in G^{(-)}$ удовлетворяет условию (3), а кривая Г принадлежит классу $H_{2(1-s)}(\Gamma)<+\infty$. В ней, разумеется, охватывается также отмеченное уже выше усиление этой же теоремы на случай $H_1(\Gamma)<+\infty$, установленное в работе [4].

Наконец, в заключительном § 4 приводится исследование задачи разложения в принципиально отличном от теоремы 6 случае, когда порождающая последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяет уже только условию (8).

Здесь, во-первых, доказывается (лемма 4) важное обобщение одного известного ранее тождества для систем $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$. Суть этой леммы заключается в эффективном определении разности между ядром Коши

$$\frac{1}{\zeta-z}\quad(\zeta\in\Gamma,\ z\in G^{(+)})$$

и его формальным разложением в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$. Это позволяет установить аналогичный результат для довольно общих классов $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, представимых в виде интеграла типа Коши (6) и с функцией плотности $g(\zeta)$, подчиненной условию

$$\int_{\Gamma}|[\Phi'(\zeta)]^{1/2-s}g(\zeta)|^2\,|d\zeta|<+\infty.$$

В итоге, в теореме 7 определяется значение разности

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z) \tag{10}$$

между функциями класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ и их разложением по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в случае, когда последовательность $\{\omega_k\}_0^\infty$ удвлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty.$$

Результат этой теоремы может быть трактован как естественное обобщение теоремы Дж. Уолша [§ 1 (7^0)] на случай в известном смысле неполной и неортогональной системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ и порождающей ее области $G^{(+)}$ с границей $H_{2(1-s)}[\Gamma]<+\infty$.

Отсюда, в качестве непосредственного следствия, мы приходим к теореме 8, дающей полную характеристику и структурное представление класса $\tilde{K}_2(G^{(+)})$ функций, допускающих разложение в ряд вида (9) в случае, когда полюсы $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяют условию (8).

Таким образом, мы получаем чисто аналитическое доказательство отмеченного уже выше основного результата работы Г. Ц. Тумаркина [4], первоначальное доказательство которого существенно опиралось на методы функционального анализа.

В конце статьи приводится структурное определение класса $\lambda_2\{G^{(+)}; G^{(-)}; \omega_k\}$ функций, аналитических в отдельности в каждой из областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ и являющихся в известном смысле „аналитическим продолжением" друг друга через общую границу Γ этих областей. В заключительной теореме 9 утверждение теоремы 8 значительно усиливается, поскольку здесь устанавливается тождественность классов $\tilde{K}_2(G^{(+)})$ и $\lambda_2\{G^{(+)}; G^{(-)}; \omega_k\}$, а также их совпадение с классом функций, представимых внутри множества $G^{(+)}+G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$ равномерно и абсолютно сходящимся рядом вида (9).

§ 1. Предварительные сведения и теоремы в случае круга

1.1. (а) Пусть $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной или даже бесконечной кратности (при этом не обязательно подряд).

Условившись при $\alpha_k=0$ полагать $\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\frac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1$, рассмотрим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$

$$\varphi_0(z)=\frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad(n\geqslant 1), \tag{1.1}$$

всевозможные полюсы которых лежат вне единичного круга $|z|<1$ на последовательности точек $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty$.

Эта система, введенная впервые Такенака [7] и Мальмквистом [8] (см. также [6], гл. X), является естественным обобщением системы степеней $\{z^k\}_0^\infty$, поскольку, во-первых, в предельном случае, когда $\alpha_k=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, она просто совпадает с нею. Во-вторых, и в общем случае система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, как и $\{z^k\}_0^\infty$, ортонормальна на окружности $|z|=1$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,|dz|=\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & n=m\\ 0, & n\neq m\end{cases} \quad (n, m=0, 1, 2, \cdots). \tag{1.2}$$

Наряду с этим система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ обладает и другим важным свойством уже алгебраического характера. Известно, что для произвольных значений переменных z и ζ имеют место тождества (см. [9], а также [10])

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z)+\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)^*, \tag{1.3}$$

где

$$B_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}. \tag{1.4}$$

(в) Пусть $\{c_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty. \tag{1.5}$$

Тогда, согласно теореме Рисса-Фишера, существует функция $F(e^{i\theta})\in L_2(-\pi, \pi)$, для которой выполняются условия

1) $$c_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}F(\zeta)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (k=0, 1, 2, \cdots);$$

2) $$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|F(\zeta)|^2|d\zeta|=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2,$$

Принимая во внимание условия 1), получим равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\Big|F(\zeta)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(\zeta)\Big|^2|d\zeta|=$$

---

* Отметим, что в случае, когда $\alpha_k=0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$, тождество (1.3) эквивалентно элементарной формуле для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{n}(\bar{\zeta}z)^k=\frac{1-(\bar{\zeta}z)^{n+1}}{1-\bar{\zeta}z}.$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} |F(\zeta)|^2 |d\zeta| - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Поэтому условие 2) эквивалентно предельному равенству

$$2') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \left| F(\zeta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(\zeta) \right|^2 |d\zeta| = 0.$$

Справедливо следующее предложение:

1°. *Функция $F(\zeta)$ почти всюду на окружности $|\zeta|=1$ совпадает с радиальными граничными значениями некоторой функции $F(z)$ из класса H_2 Рисса.*

2°. *Справедливо разложение*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z) \qquad (|z|<1), \tag{1.6}$$

равномерно сходящееся внутри единичного круга.

Действительно, во-первых, при любых $n \geqslant m \geqslant 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\left\{ \sum\limits_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(\zeta) \right\}}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \sum\limits_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(z), & |z|<1, \\ 0 & , |z|>1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$\left| \sum_{k=m}^{n} c_k \varphi_k(z) \right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1-|z|)} \left\{ \sum_{k=m}^{n} |c_k|^2 \right\}^{1/2} \quad (|z|<1)$$

и тем самым, в силу условия (1.5), равномерная сходимость ряда (1.6) внутри круга $|z|<1$.

Во-вторых, если в формуле (1.7) положить $m=0$, а затем перейти к пределу при $n\to+\infty$, в силу условия 2'), мы приходим к формулам

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z), & |z|<1, \\ 0 & , |z|>1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Покажем, что в круге $|z|<1$ $\Phi(z) \in H_2$.

С этой целью заметим, что для любой аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ интеграл

$$H_2(r; f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \quad (0<r<1)$$

является монотонно возрастающей функцией от r. Поэтому, очевидно, что для любого $n \geqslant 0$

$$H_2\left(r; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) < H_2\left(1; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) = \sum_0^n |c_k|^2 \leqslant \sum_0^\infty |c_k|^2 = C < +\infty,$$

ввиду условия (1.5). Наконец, отсюда, вследствие равномерной сходимости ряда (1.6), будем иметь

$$H_2(r; \Phi) = \lim_{n\to+\infty} H_2\left(r; \sum_0^n c_k\varphi_k\right) \leqslant C \quad (0 < r < 1),$$

т. е. функция $\Phi(z)$ — из класса H_2 Рисса.

Далее, из (1.8) при $|z| < 1$ имеем

$$\Phi(z) - \Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right) \equiv \Phi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta \quad (z = re^{i\varphi})$$

и, следовательно, по известной теореме* почти всюду на $[0,2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} \Phi(re^{i\varphi}) = F(e^{i\varphi}).$$

Таким образом, в (1.8) $\Phi(z)$ можно заменить на $F(z)$, в результате чего мы приходим к утверждениям 1° и 2°.

(c) Имея ортонормальную систему $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированную с данной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ($|\alpha_k| < 1$), для любой функции $f(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ можем образовать формальный ряд типа Фурье

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^\infty c_k(f)\, \varphi_k(z) \quad (|z| = 1), \tag{1.9}$$

где

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, \overline{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta| \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Пользуясь ортонормальностью системы $\{\varphi_k(z)\}$ и обозначением (1.9), можем записать тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} \Big|f(\zeta) - \sum_{k=0}^n c_k(f)\,\varphi_k(\zeta)\Big|^2 |d\zeta| = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\, |d\zeta| - \sum_{k=0}^n |c_k(f)|^2 \geqslant 0,$$

откуда, вследствие произвольности n следует неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\, |d\zeta|.$$

Из приведенного в предыдущем пункте предложения следует, что для выполнения равенства Парсеваля

$$\sum_{k=0}^\infty |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\, |d\zeta|$$

* См. напр. [11], гл. I.

необходимо, чтобы $f(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ представляла собой граничные значения некоторой функции $f(z)\in H_2$, допускающей притом еще разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(z) \qquad (|z|<1).$$

Вопрос о том, замкнута или нет данная система $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ в классе H_2, существенно зависит от густоты расположения соответствующей порождающей последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$.

Справедливо следующее предложение, доказательство которого считаем уместным привести здесь (см. [6], гл. X).

3°. *Для замкнутости системы* $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ *в классе* H_2 *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty. \tag{1.10}$$

Достаточность. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса H_2. Тогда почти всюду на окружности $|\zeta|=1$ существуют ее угловые граничные значения $f(e^{i\theta})\in L_2(0,2\pi)$, причем справедлива интегральная формула Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|.$$

Пользуясь далее тождеством (1.3), получим отсюда представление

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,\varphi_k(z)+\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_{n+1}(\zeta)}\cdot\frac{|d\zeta|}{1-\bar{\zeta}z} \quad (|z|<1), \tag{1.11}$$

а также оценку

$$\Big|f(z)-\sum_{k=0}^{n}c_k(f)\,\varphi_k(z)\Big|\leqslant\frac{|B_{n+1}(z)|}{2\pi(1-|z|)}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|B_{n+1}(z)|}{\sqrt{2\pi}\,(1-|z|)}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|^2\,|d\zeta|\right\}^{1/2} \quad (|z|<1). \tag{1.12}$$

С другой стороны, легко убедиться в справедливости неравенства

$$\left|\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\right|^2\leqslant 1-\frac{1-|z|}{1+|z|}\,(1-|\alpha_k|) \qquad (|z|<1)$$

откуда, принимая во внимание, что $\log(1-x)\leqslant -x$ $(0\leqslant x<1)$, получим оценку

$$|B_{n+1}(z)|\leqslant\exp\left\{-\frac{1-|z|}{2(1+|z|)}\sum_{k=0}^{n}(1-|\alpha_k|)\right\} \qquad (|z|<1). \tag{1.13}$$

Переходя теперь к пределу в (1.12), в силу оценки (1.13) и условия (1.10) получим разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,\varphi_k(z) \quad (|z|<1),$$

равномерно сходящееся внутри единичного круга.

Наконец, так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta| < +\infty, \tag{1.14}$$

то на основании предложений 1° и 2° заключаем, что для граничных значений $f(\zeta)$ $(|\zeta|=1)$ произвольной функции $f(z)\in H_2$ в (1.14) имеет место знак равенства.

Необходимость. Полагая, что условие (1.10) не выполнено, т. е. что

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty,$$

покажем, что существует функция из класса H_2, для которой равенство Парсеваля не имеет места.

В самом деле, как известно, тогда произведение Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}^{*}$$

сходится в круге $|z|<1$, обращается в нуль на последовательности точек $\{\alpha_k\}_0^{\infty}$, по модулю меньше единицы и, наконец, ее граничные значения на окружности $|\zeta|=1$ почти всюду существуют и $|B(\zeta)|=1$.

Поэтому, очевидно, что $B(z)\in H_2$, причем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B(\zeta)|^2\,|d\zeta|=1. \tag{1.15}$$

С другой стороны, заметим, что для любого $n\geqslant 0$ функция

$$R_n(z)=\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

также из класса H_2 и поэтому очевидно, что

$$c_n(B)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}B(\zeta)\,\overline{\varphi_n(\bar{\zeta})}\,|d\zeta|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}R_n(\zeta)\,d\zeta=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.16}$$

Итак, из (1.15) и (1.16) следует

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(B)|^2<\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B(\zeta)|^2\,|d\zeta|=1,$$

---

* И здесь при $\alpha_k=0$ следует положить $\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\dfrac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1$.

т. е. для функции $B(z)$ равенство Парсеваля заведомо не верно.

1.2. Остановимся теперь на вопросе о разложении по системе $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ в том случае, когда она не полна в H_2. Поэтому далее в этом пункте будем полагать, что $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих лишь условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty. \tag{1.17}$$

(а) Приведем сначала три известных предложения, в которых, наряду с доказательством основных свойств функции Бляшке $B(z)$, отмеченных выше, выясняется также характер сходимости частных произведений $B_n(z)$ в областях

$$D^{(+)}=\{z;\ |z|<1\} \text{ и } D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\}$$

и на их общей границе $|z|=1$*.

4°. *Частные произведения*

$$B_n(z)=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\quad(n=1,\ 2,\cdots)$$

равномерно сходятся к функции Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k-z}{1-\bar{\alpha}_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \tag{1.18}$$

на каждой замкнутой части множества

$$D\{\alpha_k\}=D^{(+)}+D^{(-)}-\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty. \tag{1.19}$$

5°. *Почти для всех* $\theta\in[-\pi,\ \pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r\to 1-0}B(re^{i\theta})=B(e^{i\theta}),\ |B(e^{i\theta})|=1, \tag{1.20}$$

при этом

$$\lim_{n\to\infty}\int_{|\zeta|=1}|B(\zeta)-B_n(\zeta)|^2\,|d\zeta|=0. \tag{1.21}$$

6°. ***Функция $B(z)$ аналитична в области $D^{(+)}$ и обращается в нуль на последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$; кроме того, $B(z)$ мероморфна в области $D^{(-)}$ с полюсами в точках $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^\infty$ и отлична там от нуля.***

Доказательство. В силу условия (1.17) при некотором $N>1$ имеем $|\alpha_k|\geqslant\frac{1}{2}$, $k\geqslant N$. Далее, принимая во внимание очевидное неравенство

$$\log(1-x)\geqslant-2x\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right),$$

приходим к оценке

* См. [6], гл. X.

$$\exp\left\{-2\sum_{k=N}^{\infty}(1-|\alpha_k|)\leqslant\sum_{k=N}^{N+n-1}|\alpha_k|<1.\right. \tag{1.22}$$

Рассматривая теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|B_{N+n}(\zeta)-B_N(\zeta)|^2|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\left|\sum_{k=N}^{N+n-1}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar\alpha_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}-1\right|^2|d\zeta|=$$

$$=2-\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int\limits_{|\zeta|=1}\left\{\sum_{k=N}^{N+n-1}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar\alpha_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}=2\left\{1-\prod_{k=N}^{N+n-1}|\alpha_k|\right\}$$

переходом к пределу при $N\to+\infty$, на основании (1.22) заключаем, что существует функция $B^*(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi)$ такая, что

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta=0. \tag{1.23}$$

Далее, в силу (1.23) и неравенства

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-1|^2d\theta\leqslant\int\limits_{-\pi}^{\pi}|B^*(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|^2d\theta,$$

можем утверждать, что $|B^*(e^{i\theta})|=1$ почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$.

Пусть $z_0\in D^{(+)}$ — произвольная точка, отличная от точек последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$.

Выберем целое $k_0\geqslant1$ так, чтобы

$$2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|)\leqslant\frac{1}{2},\ k\geqslant k_0,$$

и, заметив, что

$$\left|\frac{\alpha_k-z_0}{1-\bar\alpha_kz_0}\right|^2\geqslant1-2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|),$$

напишем оценку

$$\prod_{k=k_0}^{n}\left|\frac{\alpha_k-z_0}{1-\bar\alpha_kz_0}\right|\geqslant\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{n}\log\left|1-2\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}(1-|\alpha_k|)\right|\right\}\geqslant$$

$$\geqslant\exp\left\{-\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\cdot\sum_{k=k_0}^{n}(1-|\alpha_k|)\right\}\geqslant\exp\left\{-\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)\right\}>0 \tag{1.24}$$

для всех $n\geqslant k_0$.

Поэтому, если записать интегральную формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{B_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}B_n(z), & z\in D^{(+)}\\ 0, & z\in D^{(-)}\end{cases}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

то вследствие (1.23) и (1.24), переходя к пределу при $n\to+\infty$, придем к заключению, что последовательность $\{B_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $D^{(+)}$ к некоторой аналитической функции $B(z)$ ($|B(z)|<1$), обращающейся в нуль только на последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$. Итак, справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{B^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}B(z), & z\in D^{(+)},\\ 0, & z\in D^{(-)},\end{cases} \tag{1.25}$$

причем в области $D^{(+)}$ функция $B(z)$ определится также через бесконечное произведение (1.18). Но из формулы (1.25) следует также, что стоящий слева интеграл типа Коши на самом деле является интегралом Коши. Следовательно, почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$ существует предел*

$$\lim_{r\to1-0}B(re^{i\theta})=B(e^{i\theta})=B^*(e^{i\theta}).$$

Отсюда вытекают формулы (1.20) при $r\to1-0$ и (1.21).

Наконец, остается заметить, что характер сходимости произведения $B(z)$ в области $D^{(-)}$ и существование предела (1.20) при $r\to1+0$ просто будут следовать из того факта, что при любом $z\in D^{(-)}-\left\{\frac{1}{\bar\alpha_k}\right\}_0^\infty$ имеют место тождества

$$B_n(z)=\frac{1}{\bar B_n\left(\frac{1}{z}\right)}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

и вытекающий из них предельный случай

$$B(z)=\frac{1}{\bar B\left(\frac{1}{z}\right)},\ z\in D^{(-)}-\{1/\bar\alpha_k\}_0^\infty. \tag{1.26}$$

(в) Как уже было установлено выше, при условии (1.17) система $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ не полна в классе H_2. Здесь имеет место теорема Дж. Уолша [6].

7°. *Для любой функции $f(z)\in H_2$ справедливо представление*

$$f(z)=\sum_{k=0}^\infty c_k(f)\varphi_k(z)+\frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta,\ z\in D^{(+)}. \tag{1.27}$$

В самом деле, запишем формулу (1.11) в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^n c_k(f)\varphi_k(z)+\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_{n+1}(\zeta)}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z},\ z\in D^{(+)}. \tag{1.28}$$

Это по существу и есть формула (1.27) для случая конечного числа $\{\alpha_k\}_0^n$ и соответствующей конечной ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}_0^n$.

Обозначая

$$e_n(\sigma)=E(\theta;\ |B(e^{i\theta})-B_n(e^{i\theta})|\geqslant\sigma)\quad(\sigma>0),$$

имеем оценку

---

* См. напр. [11].

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|B(\zeta)-B_n(\zeta)|\,|d\zeta|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\left\{2\int\limits_{E_n(\sigma)}|f(\zeta)|\,|d\zeta|+\sigma\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|\,|d\zeta|\right\},\ z\in D^{(+)}. \qquad (1.29)$$

Но из предельной формулы (1.21) очевидно вытекает, что при любом $\sigma>0$

$$\lim_{n\to+\infty}E_n(\sigma)=0.$$

Отсюда и из оценки (1.29) ввиду произвольности $\sigma>0$ следует, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta-z)}d\zeta,\ z\in D^{(+)}, \qquad (1.30)$$

притом равномерно внутри области $D^{(+)}$. Наконец, переходя к пределу в представлении (1.28) при $n\to+\infty$, получим формулу (1.27); равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\,\varphi_k(z)$$

следует из характера сходимости произведений $\{B_n(z)\}$ к функции Бляшке $B(z)$ внутри $D^{(+)}$, а также из характера предельной формулы (1.30).

(c) Обозначим через $H_2\{\alpha_k\}$ класс мероморфных в области $D^{(-)}$ функций, допускающих представление вида

$$f(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(-)},$$

где $\tilde{f}(z)\in H_2$ — произвольна.

Очевидно, что если $f(z)\in H_2\{\alpha_k\}$, то почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$ существует предел

$$\lim_{r\to1+0}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi).$$

Далее обозначим через $\lambda_2\{\alpha_k\}$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям

1) $f(z)\in H_2,\ z\in D^{(+)}$;
2) $f(z)\in H_2\{\alpha_k\},\ z\in D^{(-)}$;
3) почти для всех $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\lim_{r\to1-0}f(re^{i\theta})=\lim_{r\to1+0}f(re^{i\theta})=f(e^{i\theta}).^*$$

* Отметим, что из условий 1) и 2) уже следует существование соответствующих пределов почти всюду.

Легко видеть, что функции класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$ определяются единственным образом через свои значения на любой из областей $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$.

Заметим теперь, что так как

$$\varphi_k(z)=\frac{B(z)}{z}\tilde{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right)\ (k=0,1,2,\cdots), \qquad (1.31)$$

где

$$\tilde{\varphi}_k(z)=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\alpha_k z}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\prod_{j=k+1}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}_j-z}{1-\alpha_j z}\cdot\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\in H_2,$$

то любая из функций системы $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$, как и любые их конечные линейные комбинации, принадлежат классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Построение функций класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$ более общей природы приводится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\{c_k\}_0^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty. \qquad (1.32)$$

Тогда при условии (1.17) ряд

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(z) \qquad (1.33)$$

абсолютно и равномерно сходится внутри круга $D^{(+)}$, а также в каждой ограниченной и замкнутой части области $D^{(-)}-\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, определяя функцию $F(z)$ из класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Кроме того, на отрезке $[-\pi,\pi]$ имеем

$$F(e^{i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(e^{i\theta}), \qquad (1.34)$$

где $F(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi)$ — радиальные предельные значения функции $F(z)$ изнутри и извне окружности $z=e^{i\theta}\ (-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$, которые почти всюду существуют и равны друг другу, согласно свойству 3) класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

Доказательство. Из определения (1.1) функций $\varphi_k(z)$ имеем

$$|\varphi_k(z)|=\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-|z|},\ z\in D^{(+)}\ (k=0,1,2,\cdots).$$

Отсюда, ввиду (1.17) и (1.32), следует наше утверждение о характере сходимости ряда (1.33), а ввиду предложений 1° и 2° имеем $F(z)\in H_2$, причем, если обозначить

$$\lim_{r\to1-0}F(re^{i\theta})=F_+(e^{i\theta})\in L_2(-\pi,\pi); \qquad (1.35)$$

то на $[-\pi,\pi]$

$$F_+(e^{i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(e^{i\theta}). \qquad (1.35')$$

Далее система аналитических в круге $D^{(+)}$ функций $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^\infty$, которые были определены согласно формулам (1.31), также ортонормальна, поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\tilde{\varphi}_n(\zeta)\,\overline{\tilde{\varphi}_m(\zeta)}\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\varphi_n(\zeta)\,\overline{\varphi_m(\zeta)}\,|d\zeta|\quad (n, m=0, 1, 2,\cdots).$$

Заметив, кроме того, что

$$|\tilde{\varphi}_k(z)|\leqslant\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-|z|},\ z\in D^{(+)}\quad (k=0, 1, 2,\cdots),$$

как и выше мы заключаем, что ряд

$$\tilde{F}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\tilde{\varphi}_k(z) \tag{1.33'}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри области $D^{(+)}$, определяет функцию $\tilde{F}(z)\in H_2$, причем, если обозначить

$$\tilde{F}_+(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0}\tilde{F}(re^{i\theta}), \tag{1.36}$$

то

$$\tilde{F}_+(e^{i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m}}\sum_{k=0}^{n}c_k\tilde{\varphi}_k(e^{i\theta}). \tag{1.36'}$$

Далее, из (1.31) и (1.33') вытекают равенства

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(z)=\frac{B(z)}{z}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\tilde{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{B(z)}{z}\tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right),\ z\in D^{(+)}. \tag{1.37}$$

Отсюда и следует утверждения теоремы о природе сходимости ряда (1.33) в области $D^{(-)}$, а также, что $F(z)\in H_2\{\alpha_k\}$.

Из (1.37) и (1.36) вытекает существование предела

$$F_-(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1+0}F(re^{i\theta})=\frac{B(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\tilde{F}_+(e^{-i\theta}) \tag{1.38}$$

почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Причем, в силу (1.36'), (1.31), на $[-\pi, \pi]$

$$\tilde{F}_+(e^{-i\theta})=\underset{n\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\frac{e^{i\theta}}{B(e^{i\theta})}\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(e^{i\theta}),$$

откуда и из (1.35') следует, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$\tilde{F}_+(e^{-i\theta})=\frac{e^{i\theta}}{B(e^{i\theta})}F_+(e^{i\theta}). \tag{1.39}$$

Наконец, из (1.38) и (1.39) следует, что почти всюду на $[-\pi, \pi]$

$$F_-(e^{i\theta})=F_+(e^{i\theta})\equiv F(e^{i\theta}).$$

Итак, теорема полностью доказана, поскольку функция $F(z)$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), т. е. принадлежит классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

1.3. В данном пункте, существенно дополнив теорему 1, мы дадим полную характеристику класса $\lambda_2\{a_k\}$.

(а) Предварительно докажем одно простое предложение об интегралах типа Коши.

8°. *Пусть функция* $\gamma(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi)$ *— произвольна. Тогда интеграл типа* Коши

$$\Gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma(\zeta)}{\zeta - w} \, d\zeta, \quad |w| \neq 1,$$

обладает следующими свойствами:

а) $$\Gamma(w) \in H_2, \quad w \in D^{(+)};$$

в) $$\Gamma(w) = \frac{1}{w} \tilde{\Gamma}\left(\frac{1}{w}\right), \quad w \in D^{(-)},$$

где $\tilde{\Gamma}(w) \in H_2$.

В самом деле, при $w \in D^{(+)}$ имеем

$$\Gamma(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(e^{i\theta}) \, e^{-ik\theta} \, d\theta.$$

Поэтому, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(e^{i\theta})|^2 \, d\theta < +\infty,$$

а это значит, что $\Gamma(w) \in H_2$.

Полагая затем, что $w \in D^{(-)}$, заменяя ζ на ζ^{-1}, получим

$$\Gamma(w) = -\frac{1}{w} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-1} \gamma(\zeta^{-1})}{\zeta - w^{-1}} \, d\zeta,$$

причем, поскольку $e^{-i\theta}\gamma(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi)$, то, согласно предыдущему, функция

$$\Gamma(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-1} \gamma(\zeta^{-1})}{\zeta - w} \, d\zeta \; *$$

будет из класса H_2. Отсюда и следует второе свойство функции $\Gamma(w)$.

(в) В дополнение к уже принятым обозначениям отнесем к классу $\lambda_2\{a_k\}$ множество функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

1) $$f(z) \in H_2, \quad z \in D^{(+)};$$

2) $$f(z) \in H_2\{a_k\}, \quad z \in D^{(-)}.$$

Теперь, в качестве дальнейшего расширения предложения 7°, докажем теорему

---

* Здесь, как и в интеграле $\Gamma(w)$, интегрирование совершается в положительном направлении.

Теорема 2. *Если $f(z) \in H_2$, то компоненты представления*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta \equiv f_1(z) + f_2(z) \tag{1.40}$$

обладают следующими свойствами:

а) $f_1(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\},\ f_2(z) \in \tilde{\lambda}_2\{\alpha_k\};$

в) $$(f_1, f_2) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f_1(\zeta)\overline{f_2(\zeta)}\,|d\zeta| = 0 \tag{1.41}$$

и поэтому

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 + \|f_2\|^2, \tag{1.42}$$

где $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

Доказательство. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|^2\,|d\zeta| < +\infty,$$

то по теореме 1

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z) \in \lambda_2\{\alpha_k\},$$

причем разложение сходится в любой точке $z \in D\{\alpha_k\}$.

Поскольку $f(e^{i\theta})B^{-1}(e^{i\theta}) \in L_2(-\pi, \pi)$, то, в силу предложения 8°, функция $f_2(z)$ допускает представление

$$f_2(z) = \begin{cases} B(z)\Phi_+(z) \in H_2, & z \in D^{(+)}, \\ \dfrac{B(z)}{z}\Phi_-\left(\dfrac{1}{z}\right) \in H_2\{\alpha_k\}, & z \in D^{(-)}, \end{cases}$$

где функции

$$\Phi_+(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)(\zeta - z)}\, d\zeta,$$

$$\Phi_-(z) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-1}f(\zeta^{-1})}{B(\zeta^{-1})(\zeta - z)}\, d\zeta$$

из класса H_2.

Таким образом, $f_2(z) \in \tilde{\lambda}_2\{\alpha_k\}$.

Далее, согласно формуле (1.34) теоремы 1, имеем

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_+(\zeta)B(\zeta)\overline{f_1(\zeta)}\,|d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\int\limits_{|\zeta|=1} \Phi_+(\zeta)\frac{B(\zeta)\overline{\varphi_k(\zeta)}}{\zeta}\, d\zeta. \tag{1.43}$$

С другой стороны, при $|\zeta| = 1$

$$\Phi_+(\zeta)\frac{B(\zeta)\,\overline{\varphi_k(\zeta)}}{\zeta}=\Phi_+(\zeta)\frac{(1-|\alpha_k|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\prod_{k=j+1}^{\infty}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k},$$

причем правая часть является функцией класса H_2 в круге $|\zeta|<1$. Следовательно, все интегралы, стоящие под знаком суммы в (1.43), равны нулю, откуда следует утверждение (1.41).

Наконец, так как почти всюду на окружности $|\zeta|=1$

$$f(\zeta)=f_1(\zeta)+f_2(\zeta),$$

то из свойства (1.41) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f(\zeta)|^2\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_2(\zeta)|^2\,|d\zeta|.$$

Остается заметить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}|f_1(\zeta)|^2\,|d\zeta|=\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(f)|^2,$$

чтобы прийти к формуле (1.42).

(e) Дадим, наконец, полную внутреннюю характеристику подкласса тех функций из H_2, которые допускают разложение по неполной системе $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$.

Теорема 3. *Класс $\lambda_2\{\alpha_k\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, определенных на множестве $D\{\alpha_k\}$ и представимых в виде ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varphi_k(z),\quad z\in D\{\alpha_k\},$$

где $\{c_k\}_0^{\infty}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

В самом деле, согласно теореме 1, функция $f(z)$, представимая в виде ряда, принадлежит классу $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Обратно, из формулы (1.42) теоремы 2 вытекает, что система $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$ полна лишь в классе функций из $\lambda_2\{\alpha_k\}$.

§ 2. Системы рациональных функций, порожденные ограниченными континуумами

2.1. (a) Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и $G^{(-)}$ та из смежных с ним компонент, которая содержит точку $z=\infty$. Очевидно, $G^{(-)}$ является односвязной областью расширенной плоскости z, граница Γ которой принадлежит континууму K.

Пусть функция

$$w=\Phi(z)\quad(z=\Psi(w)),\tag{2.1}$$

подчиненная условиям нормировки

$$\Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty)>0,$$

конформно отображает область $G^{(-)}$ на внешность единичного круга

$$D^{(-)}=\{w;\ |w|>1\}\ *.$$

Очевидно, что в окрестности точки $z=\infty$, а именно, при

$$|z|>R_0=\sup_{\zeta\in K}\{|\zeta|\}$$

имеют место следующие разложения в ряд Лорана:

$$\Phi(z)=\tau z+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\cdots,$$

$$\Phi'(z)=\tau-\frac{\alpha_1}{z^2}-\frac{2\alpha_2}{z^3}-\cdots. \tag{2.2}$$

Пусть $\{\omega_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел (в том числе и равных ∞), лежащих в области $G^{(-)}$.

Определим теперь другую последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|\leqslant 1)$, где

$$\alpha_k=\begin{cases}\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} & \text{при } \omega_k\neq 0\\ 0 & \text{при } \omega_k=\infty\end{cases}\quad (k=0,1,2,\cdots), \tag{2.3}$$

лежащих уже в круге $D^{(+)}=\{w;\ |w|<1\}$ и соответствующую ортонормальную систему Такенака-Мальмквиста $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$ согласно формулам (1.1). Тогда функции системы $\{\varphi_k[\Phi(z)]\}_0^\infty$ запишутся в виде

$$\varphi_0[\Phi(z)]=\frac{(1-|\Phi(\omega_0)|^{-2})^{1/2}}{1-\Phi^{-1}(\omega_0)\,\Phi(z)},$$

$$\varphi_n[\Phi(z)]=$$

$$=\frac{(1-|\Phi(\omega_n)|^{-2})^{1/2}}{1-\Phi^{-1}(\omega_n)\Phi(z)}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\Phi^{-1}(\omega_k)-\Phi(z)}{1-\Phi^{-1}(\omega_k)\,\Phi(z)}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}\quad (n=1,2,\cdots), \tag{2.4}$$

причем здесь и в дальнейшем при $\omega_k=\infty$ полагаем

$$|\Phi(\omega_k)|:\Phi(\omega_k)=\Phi(\omega_k):|\Phi(\omega_k)|=-1.$$

Функция

$$\Psi_n^{(s)}(z)=\varphi_n[\Phi(z)]\cdot[\Phi'(z)]^s,$$

где s $(0\leqslant s\leqslant 1)$ параметр, голоморфна** всюду в области $G^{(-)}$ за исключением точек $\{\omega_k\}_0^n$, где она имеет полюсы. При этом, очевидно, что если кратность появления числа ω_p $(0\leqslant p\leqslant n)$ в группе чисел $\{\omega_k\}_0^n$ равна $\nu(p,n)$, то точка $z=\omega_p$ для функции $\Psi_n^{(s)}(z)$ будет полюсом ровно порядка $\nu(p,n)$.

* Такая функция существует и единственна согласно теореме Римана.

** Поскольку $\Phi'(z)\neq 0$ при $z\in G^{(-)}$.

Обозначим через $M_n^{(s)}(z)$ сумму главных частей и постоянных в разложениях Лорана функции $\Psi_n^{(s)}(z)$ в окрестностях всех ее отличных друг от друга полюсов $\{\omega_k\}_0^n$.

Таким образом, $M_n^{(s)}(z)$ будет рациональной функцией с полюсами, лежащими лишь во всех отличных друг от друга точках $z=\omega_0$, $\omega_1, \cdots, \omega_k$ области $G^{(-)}$, причем с теми же главными частями, что и у функции $\psi_n^{(s)}(z)$.

Назовем *систему рациональных фукнций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ системой функций, порожденной континуумом K и последовательностью чисел $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$.*

Убедимся теперь, что система функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ представляет собой естественное обобщение известной системы полиномов Фабера.

В самом деле, положим, что все полюсы системы лежат в бесконечности, т. е.

$$\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_k = \cdots = \infty.$$

Тогда $\varphi_n[\Phi(z)] = [\Phi(z)]^n$, и функцию $M_n^{(s)}(z)$ следует определить как совокупность членов с неотрицательными степенями z в лорановском разложении функции

$$[\Phi(z)]^n\,[\Phi'(z)]^s.$$

в окрестности точки $z=\infty$.

В силу формул (2.2) в рассматриваемом случае $M_n^{(s)}(z)$ будет полиномом степени n вида

$$M_n^{(s)}(z) = \tau^{n+s} z^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \cdots + a_0^{(n)}.$$

Поэтому, в частности, функции $M_n^{(0)}(z)$ связаны с обычными полиномами Фабера $\Phi_n^{(1)}(z)$ (называемыми также *полиномами Фабера первого рода)* формулами

$$\Phi_n^{(1)}(z) \equiv \tau^{-n} M_n^{(0)}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Отметим, что прием получения различных модификаций полиномов Фабера путем умножения простейшей порождающей функции $[\Phi(z)]^n$ на какую-либо стандартную функцию $\nu(z)$ $(\nu(\infty)\neq 0)$, аналитическую в расширенной области $G^{(-)}$, применялся ранее другими авторами*. В частности, наряду с полиномами первого рода $\Phi_n^{(1)}(z)$, рассматривались также *полиномы Фабера второго рода*

$$\Phi_n^{(2)}(z) \equiv \tau^{-n-1} M_n^{(1)}(z) \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

(в) Определив систему рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, установим для них интегральное представление.

С этой целью обозначим через Γ_R $(R>1)$ образ окружности $|w|=R$ на плоскости z при отображении $z=\Psi(w)$ области $D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\}$ на область $G^{(-)}$.

* См. напр. [2] и [3].

Пусть, далее, $G_R^{(-)} \subset G^{(-)}$ есть внешняя область, ограниченная контуром Γ_R, а $G_R^{(+)}(\supset K)$ дополнительная к ней область, имеющая ту же границу Γ_R.

Пусть для $n \geqslant 0$.

$$R_n = \min\{|\Phi(\omega_0)|, |\Phi(\omega_1)|, \cdots, |\Phi(\omega_n)|\}, \tag{2.5}$$

тогда последовательность чисел $\{R_n\}_0^\infty$ $(R_n > 1)$, очевидно, невозрастающая. Поэтому при любом ρ $(1 < \rho < R_n)$ замкнутая область $\overline{G}_\rho^{(+)}$ не содержит полюсов функций $\{M_k^{(\rho)}(z)\}_0^n$, иначе говоря совокупность полюсов этих функций принадлежит области $G_\rho^{(-)}$.

Лемма 1. *Пусть* $1 < \rho < R_n$ — *любое, тогда*

а) *для любого* $z \in G_\rho^{(+)}$, *в частности при* $z \in K$ *справедливы формулы*

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n); \tag{2.6}$$

б) *для* $z \in G_\rho^{(-)}$ *справедливы формулы*

$$M_k^{(s)}(z) = \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n). \tag{2.7}$$

Доказательство. а) Функции

$$\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s - M_k^{(s)}(\zeta) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

голоморфны в рассмотренной области $G^{(-)}$, причем в бесконечно удаленной точке все они имеют нуль порядка, не ниже первого. Поэтому, согласно теореме Коши, имеем при любом $z \in G_\rho^{(+)}$ $(\rho > 1)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s - M_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.8}$$

Если для данного $n > 0$ параметр ρ выбрать из интервала $(1, R_n)$, то функции $M_k^{(s)}(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$, как уже отмечалось, не будут иметь полюсов в замкнутой области $\overline{G}_\rho^{(+)}$. Поэтому имеем

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{M_k^{(s)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \; z \in G_\rho^{(+)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

откуда и из (2.8) следуют требуемые представления (2.6).

б) Пусть z_0 — произвольная точка области $G_\rho^{(-)}$, отличная от точек $\{\omega_k\}_0^n$. Выберем $\rho_0 > \rho > 1$ таким образом, чтобы точка $z = z_0$, а также все точки $\{\omega_k\}_0^n$, отличные от $z = \infty$, лежали внутри области $G_{\rho_0}^{(+)}$. Тогда, с одной стороны, по теореме Коши имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\,d\zeta-$$

$$-\varphi_k[\Phi(z_0)][\Phi'(z_0)]^s-\sum_{j=0}^{k}{}'\operatorname*{Res}_{\zeta=\omega_j}\left\{\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z_0}\right\}, \tag{2.9}$$

где штрих означает, что суммирование распространяется на точки из совокупности $\{\omega_k\}_0^n$, отличные от $z=\infty$.

С другой стороны, из (2.6) следует также, что если $z\in G_\rho^{(+)}$, то

$$M_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_0}}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta-$$

$$-\sum_{j=0}^{k}{}'\operatorname*{Res}_{\zeta=\omega_j}\left\{\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\right\}\quad(k=0,1,2,\cdots,n). \tag{2.10}$$

Однако первое слагаемое, стоящее справа в (2.10), голоморфно всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$, а второе — рациональная функция. Поэтому представ ление (2.10) остается справедливым всюду в области $G_{\rho_0}^{(+)}$ и, в частности, в точке $z=z_0$. Из (2.9) и (2.10) вытекают формулы (2.7) леммы.

В заключение отметим, что интегральные члены, стоящие в обеих формулах (2.6) и (2.7) леммы, могут быть заменой переменного интегрирования записаны также в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{\varphi_k(w)\,[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w)-z}\,dw. \tag{2.11}$$

2.2 (а) Выше была определена система рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, порожденная произвольным ограниченным континуумом K и последовательностью комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащая в смежной с K области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

В дальнейшем необходимо исследовать вопросы разложения функций в ряды по системам $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в том важном случае, когда континуум K представляет собой замыкание односвязной области $G^{(+)}$, ограниченной замкнутой жордановой спрямляемой кривой Γ. Тогда, как известно, кривая Γ одновременно является полной границей для единственной смежной с континуумом $K=\overline{G^{(+)}}$ области $G^{(-)}$, содержащей точку $z=\infty$.

Итак положим, что Γ — спрямляемая жорданова кривая и функции

$$w=\Phi(z)\quad(z=\Psi(w))$$

имеют тот же смысл, что и выше. Тогда справедлива следующая

Лемма 2. а) *Для любого* p $(0<p\leqslant 1)$

$$\sup_{1<r<\infty}\left|\int\limits_0^{2\pi}|[\Psi'(re^{i\theta})]^p|\,d\theta\right|<+\infty; \tag{2.12}$$

б) *Почти для всех* $\theta \in [0, 2\pi]$ *существует предел*

$$\lim_{r \to 1+0} \Psi'(re^{i\theta}) = \Psi'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi), \tag{2.13}$$

причем при любом p $(0 < p \leqslant 1)$

$$\lim_{r \to 1+0} \int_0^{2\pi} |[\Psi'(e^{i\theta})]^p - [\Psi'(re^{i\theta})]^p|\, d\theta = 0; \tag{2.14}$$

в) *Если, кроме того, окажется, что* $\Psi'(e^{i\theta}) \in L_q(0, 2\pi)$ $(q > 1)$, *то предыдущие утверждения останутся в силе, если в них заменить число* p *на* q.

Доказательство. Пусть z_0 — фиксированная точка области $G^{(+)}$, тогда преобразование $z_1 = (z - z_0)^{-1}$ отображает область $G^{(-)}$ в некоторую ограниченную область g со спрямляемой границей γ.

Функция

$$z_1 = \Psi_0(w_1) = \left[\Psi\left(\frac{1}{w_1}\right) - z_0\right]^{-1} \tag{2.15}$$

осуществляет конформное отображение круга $|w_1| < 1$ на указанную область g плоскости z_1.

При любом разбиении отрезка $[0, 2\pi]$

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \theta_{n+1} = 2\pi$$

ломаная, вписанная в γ, с вершинами в точках $\Psi_0(e^{i\theta_1}), \cdots, \Psi_0(e^{i\theta_n})$ имеет длину

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} |\Psi_0(e^{i\theta_{k+1}}) - \Psi_0(e^{i\theta_k})|.$$

Так как кривая γ спрямляема, то в множестве всевозможных подразделений отрезка $[0, 2\pi]$ будем иметь $\sup\{l_n\} < +\infty$. Это значит, что функция $\Psi_0(w_1)$, будучи непрерывной в замкнутом круге $|w_1| \leqslant 1$ (как функция, осуществляющая конформное отображение круга на жорданову область), имеет ограниченное изменение на окружности $|w_1| = 1$. Поэтому, согласно известной теореме*, будем иметь $\Psi_0'(w_1) \in H_1$. Далее, так как $\Psi_0'(w_1) \neq 0$ при $|w_1| < 1$, то для любого p $(0 < p \leqslant 1)$ имеем также $[\Psi_0'(w_1)]^p \in H_1$. Итак, для любого p $(0 < p \leqslant 1)$

$$\sup_{0<r<1} \left\{\int_0^{2\pi} |[\Psi_0'(re^{i\theta})]^p|\, d\theta\right\} < +\infty. \tag{2.12'}$$

Отсюда согласно известным свойствам функций класса H_1 можно утверждать, что почти для всех $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\lim_{r \to 1-0} \Psi_0'(re^{i\theta}) = \Psi_0'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi) \tag{2.13'}$$

и, кроме того,

---

* См. напр. [12], стр. 462.

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}|[\Psi_0'(e^{i\theta})]^p-[\Psi_0'(re^{i\theta})]^p|\,d\theta=0. \qquad (2.14')$$

Теперь отметим, что, в силу разложения (2.2), имеем также

$$z=\Psi(w)=\tau^{-1}w+\beta_0+\frac{\beta_1}{w}+\frac{\beta_2}{w^2}+\cdots,\ w\in D^{(-)},$$

и поэтому

$$\sup_{w\in D^{(-)}}|\Psi(w)-z_0|\,|w|^{-1}=c(z_0)<+\infty, \qquad (2.16)$$

Далее, дифференцируя соотношение (2.15), имеем

$$\Psi'(w)=-\left\{\frac{\Psi(w)-z_0}{w}\right\}^2\Psi_0'\left(\frac{1}{w}\right),\ w\in D^{(-)}. \qquad (2.17)$$

Отсюда, в силу (2.12′)—(2.16), следует утверждение (2.12) леммы.

Наконец утверждение б) леммы соответственно следует из (2.13′) и (2.14′), если записать формулу в виде

$$\Psi'\left(\frac{1}{w_1}\right)=-w_1^2\left\{\Psi\left(\frac{1}{w_1}\right)-z_0\right\}^2\Psi_0'(w_1),\ w_1\in D^{(+)}$$

и заметить, что множитель, стоящий перед функцией $\Psi_0'(w_1)$, непрерывен в замкнутом круге $\overline{D}^{(+)}$.

Положим далее, что $\Psi'(e^{i\theta})\in L_q(0,2\pi)$ $(q>1)$, тогда из (2.17) следует, что $\Psi_0'(e^{i\theta})\in L_q(0,2\pi)$. Но поскольку $\Psi_0'(w_1)\in H_1$ по известной теореме* имеем также $\Psi_0'(w_1)\in H_q$. Отсюда следует, что $[\Psi_0'(w_1)]^q\in H_1$ и поэтому предельное равенство (2.14) остается в силе при замене p на q. Таким образом, нам остается вновь возвратиться к формуле (2.17), чтобы убедиться в справедливости утверждения б) леммы.

(в) Замкнутую спрямляемую жорданову кривую Γ отнесем к классу U_s $(0\leqslant s\leqslant 1)$, если граничные значения $\Psi'(e^{i\theta})$ функции $\Psi'(w)$, существующие почти всюду на окружности $w=e^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, согласно лемме 2, удовлетворяют условию**

$$\int_\Gamma|\Phi'(\zeta)|^{2s-1}|d\zeta|=\int_0^{2\pi}|\Psi'(e^{i\theta})|^{2(1-s)}d\theta<+\infty. \qquad (2.18)$$

Заметим, что если $\Psi'(e^{i\theta})\in L_{2(1-s)}(0,2\pi)$, то, согласно лемме 2, интегралы

$$\int_{\Gamma_\rho}|\Phi'(z)|^{2s-1}|dz|=\rho\int_0^{2\pi}|\Psi'(\rho e^{i\theta})|^{2(1-s)}d\theta,\ 1<\rho<+\infty \qquad (2.19)$$

при $\rho\to 1+0$ ограничены числом, не зависящим от ρ.

---

* См. напр. [11], стр. 116.

** Отметим, что во введении статьи принадлежность контура классу U_s отмечалась также условием $H_{2(1-s)}[\Gamma]<+\infty$.

Поскольку по лемме 2 $\Psi'(e^{i\theta}) \in L_1(0, 2\pi)$, то любая спрямляемая замкнутая кривая Γ входит в класс $U_{1/2}$. Легко видеть также, что для остальных значений параметра s будем иметь

$$U_s \subset U_{1/2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s < \frac{1}{2},$$

$$U_s \equiv U_{1/2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \tag{2.20}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает

С л е д с т в и е. *Если $\Gamma \in U_s$, то для функций системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ имеют место следующие формулы представления:*

а) *При* $z \in G^{(+)}$

$$M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw \quad (k = 0, 1, 2, \cdots); \tag{2.21}$$

б) *При* $z \in G^{(-)}$

$$M_k^{(s)}(z) - \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw \tag{2.22}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Действительно, сперва заметим, что поскольку особенности функции $\varphi_k(w)$ лежат в точках $w = 1/\bar{\alpha}_j = \Phi(\omega_j)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, k)$, то она непрерывна в любом замкнутом кольце $1 \leqslant |w| \leqslant \rho < R_k$, где

$$R_k = \min_{0 \leqslant j \leqslant k} \{|\Phi(\omega_j)|\}.$$

Рассмотрим далее функцию

$$\frac{\varphi_k(w)}{\Psi(w) - z}, \quad z \overline{\in} \Gamma \tag{2.23}$$

и отметим, что она непрерывна в каждом кольце $1 \leqslant |w| \leqslant \rho$, где при $z \in G^{(+)}$, $\rho < R_k$, а при $z \in G^{(-)}$ $\rho < \min(R_k, |\Phi(z)|)$.

Принимая теперь во внимание формулу (2.14) леммы 2 и отмеченное свойство функции (2.23), при фиксированном $z \overline{\in} \Gamma$ и любом s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ будем иметь

$$\lim_{\rho \to 1+0} \int_{|w|=\rho} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw = \int_{|w|=1} \frac{\varphi_k(w)[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw =$$

$$= \int_\Gamma \frac{\varphi_k[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta - z} d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.24}$$

Наконец, переходя к пределу в формулах (2.6) и (2.7) леммы 1, ввиду (2.11) и (2.24), получим требуемые представления (2.21) и (2.22).

Докажем еще одну лемму, дающую представление о поведении всей системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в целом на плоскости z.

Лемма 3. *Пусть области* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$ *имеют общую границу* Γ, *принадлежащую классу* U_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, *тогда*

а) *для любой последовательности комплексных чисел* $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$ *имеем*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |M_k^{(s)}(z)|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(+)}; \tag{2.25}$$

б) *для любой последовательности* $\{\omega_k\} \in G^{(-)}$, *удовлетворяющей дополнительному условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty, \tag{2.26}$$

имеем также

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{M_k^{(s)}(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(-)}, \tag{2.27}$$

где

$$B[\Phi(z)] = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} - \Phi(z)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)} \cdot \frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)} \tag{2.28}$$

— *мероморфная в области* $G^{(-)}$ *функция с полюсами в точках последовательности* $\{\omega_k\}_0^\infty$.

Доказательство. Пусть z — фиксированная точка, принадлежащая любой из областей $G^{(+)}$ или $G^{(-)}$. Тогда, определив функцию

$$\chi_s(\zeta, z) = \frac{[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}, \quad \zeta \in D^{(-)}, \tag{2.29}$$

ввиду того, что $\Gamma \subset U_s$, имеем

$$e^{i\theta}\chi_s(e^{i\theta}; z) \in L_2(0, 2\pi). \tag{2.30}$$

Для коэффициентов Фурье функции (2.30) относительно системы $\{\varphi_k(\zeta)\}_0^\infty$ получим

$$a_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \overline{\zeta\chi_s(\zeta; z)} \cdot \overline{\varphi_k(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\varphi_k(\zeta)[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}\, d\zeta \right\}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.31}$$

причем, согласно неравенству Бесселя,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{|\Psi'(\zeta)|^{2(1-s)}}{|\Psi(\zeta) - z|^2} |d\zeta| < +\infty, \tag{2.32}$$

поскольку $\Gamma \subset U_s$ и при $z \in G^{(\pm)}$

$$\inf_{|\zeta|=1} |\psi(\zeta) - z| > 0.$$

Но если $z \in G^{(+)}$, то из (2.31), в силу формулы (2.21), имеем

$$a_k(z) \equiv \overline{M_k^{(s)}(z)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.31'}$$

откуда, в силу неравенства (2.32), вытекает утверждение (2.25) леммы.

Если же $z \in G^{(-)}$, то из (2.31), согласно формуле (2.22), имеем

$$M_k^{(s)} = \varphi_k[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s + \overline{a_k(z)} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

откуда следует неравенство

$$|M_k^{(s)}(z)|^2 \leqslant 2\ |\Phi'(z)|^{2s} |\varphi_k[\Phi(z)]|^2 + 2\,|a_k(z)|^2 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.33}$$

Заметим теперь, что если $\{\alpha_k\}_0^\infty$ определяется по формулам (2.3), то, согласно предложению 4° (§ 1) при условии (2.26) леммы произведение Бляшке

$$B(w) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - w}{1 - \overline{\alpha}_k w} \cdot \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)} \frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)} \tag{2.28'}$$

равномерно сходится в каждой замкнутой части множества $D^{(-)} - \{1/\overline{\alpha}_k\}_0^\infty$. Это означает, что функция $B[\Phi(z)]$ мероморфна и отлична от нуля в области $G^{(-)}$, а ее полюсы лежат лишь в точках $\{\omega_k\}_0^\infty$.

Наконец из формул (2.4) и (2.28) следует неравенство

$$\left|\frac{\varphi_n[\Phi(z)]}{B[\Phi(z)]}\right| = \frac{(1 - |\Phi(\omega_k)|^{-2})^{1/2}}{|1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)|} \cdot \prod_{k=j}^{\infty} \left|\frac{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)}{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,(1 - |\Phi(\omega_k)|^{-2})^{1/2}, \quad z \in G^{(-)}, \quad k \geqslant k_0(z), \tag{2.34}$$

поскольку если $z \in G^{(-)}$, то

$$\left|\frac{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)}{\Phi^{-1}(\omega_k) - \Phi(z)}\right| = \left|\frac{\Phi^{-1}(z) - \Phi^{-1}(\omega_k)}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\Phi^{-1}(z)}\right| < 1$$

и при некотором целом $k_0(z)$ очевидно будем иметь

$$|\Phi^{-1}(\omega_k)\Phi(z)| \leqslant \frac{1}{2}, \quad k > k_0(z).$$

Из оценок (2.34), ввиду условия (2.26), следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{\varphi_k[\Phi(z)]}{B[\Phi(z)]}\right|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(-)},$$

откуда и из неравенств (2.32) и (2.33) вытекает утверждение (2.27) леммы.

§ 3. Разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$

3.1. (a) Приведем сначала некоторые определения и обозначения в дополнение к уже введенным в § 2.

Обозначим через $L_p(\Gamma)$ $(p>0)$ множество функций $g(\zeta)$, определенных почти всюду на жордановой спрямляемой границе Γ взаимно-дополнительных областей $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} |g(\zeta)|^p |d\zeta| < +\infty. \tag{3.1}$$

Множество функций $g(\zeta)$, представимых в виде

$$g(\zeta) = [\Phi'(\zeta)]^{s-1/2}\,\tilde{g}(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \tag{3.2}$$

где $\tilde{g}(\zeta) \in L_2(\Gamma)$, обозначим через $L_2^{(s)}(\Gamma)$.

Легко видеть, что если $\Gamma \in U_s$, то всегда $L_2^{(s)} \subset L_1(\Gamma)$.

Полагая далее, что $\Gamma \in U_s$, обозначим через $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$ множество мероморфных в области $G^{(-)}$ функций $F(z)$, представимых в виде

$$F(z) = \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)} [\Phi'(z)]^s \tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right), \quad z \in G^{(-)}, \tag{3.3}$$

где $\tilde{F}(w)$ — произвольная функция из класса H_2.

Заметим, что если $F_0(z) \in E_2^{(1/2)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$, то интегралы

$$\int_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F_0(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 |dz| = \int_{\Gamma_\rho} \left| \tilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) \right|^2 \frac{|\Phi'(z)|}{|\Phi(z)|^2} |dz| =$$

$$= \int_{|w|=\rho^{-1}} |\tilde{F}(w)|^2 |dw|, \quad 1 < \rho < +\infty \tag{3.4}$$

ограничены числом, не зависящим от ρ.

Если же $F(z) = E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$, то очевидно имеем

$$F_0(z) \equiv [\Phi'(z)]^{1/2-s} F(z) \in E_2^{(1/2)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$$

и поэтому интегралы

$$\int_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F(z)}{B[\Phi(z)]} \right| |dz| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{\Gamma_\rho} \left| \frac{F_0(z)}{B[\Phi(z)]} \right|^2 |dz| \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\Gamma_\rho} |\Phi'(z)|^{2s-1} |dz| \right\}^{1/2}, \quad 1 < \rho < +\infty \tag{3.5}$$

ввиду ограниченности интегралов (3.4), также ограничены числом, не зависящим от ρ.

(в) Для рядов по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ имеет место следующий частичный аналог теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть $\{c_k\}_0^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty. \tag{3.6}$$

Если граница Γ *областей* $G^{(+)}$ *и* $G^{(-)}$ *из класса* U_s $(0 \leqslant s \leqslant 1)$, *то*
а) *ряд*

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z), \quad z \in G^{(+)} \tag{3.7}$$

абсолютно и равномерно сходится внутри области $G^{(+)}$, *определяя голоморфную функцию, представимую интегралом типа Коши*

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in G^{(+)}, \tag{3.8}$$

где $g(\zeta)$ — *определенная функция из класса* $L_2^{(s)}(\Gamma)$.

б) *Если, кроме того, последовательность полюсов* $\{\omega_k\}_0^{\infty}$ *системы* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty, \tag{3.9}$$

то в представлении (3.8) функция $g(\zeta)$ *почти всюду на* Γ *совпадает с угловыми граничными значениями некоторой мероморфной в области* $G^{(-)}$ *функции* $F(z)$ *из класса* $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

Доказательство. а) Из утверждения а) леммы 3, в силу условия (3.6), следует абсолютная сходимость ряда (3.7) в области $G^{(+)}$, поскольку по неравенству Буняковского

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z) \right| \leqslant \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |M_k^{(s)}(z)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Далее из интегральных формул (2.18) для функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ следует, что

$$\sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{\left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(w) \right\} [\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw. \tag{3.10}$$

Заметим еще, что согласно предложениям 1° и 2° существует функция $\rho(e^{i\theta}) \in L_2(0, 2\pi)$ такая, что на промежутке $[0, 2\pi]$

$$\rho(e^{i\theta}) = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(e^{i\theta}). \tag{3.11}$$

При этом $\rho(e^{i\theta})$ — суть угловые граничные значения функции $\rho(w) \in H_2$, определяемой равномерно сходящимся внутри единичного круга разложением

$$\rho(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(w). \tag{3.12}$$

При $\zeta \in \Gamma$ обозначим

$$g(\zeta) = \rho[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s \tag{3.13}$$

и заметим, что $g(\zeta) \in L_2^{(s)}(\Gamma)$, так как

$$\int_{\Gamma} |\varphi[\Phi(\zeta)]\sqrt{\Phi'(\zeta)}|^2 |d\zeta| = \int_{|w|=1} |\varphi(w)|^2 |dw| < +\infty.$$

Тогда, в силу (3.10), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\left\{\varphi(w) - \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z}dw, \quad z \in G^{(+)}. \qquad (3.14)$$

Пользуясь, наконец, формулой (3.11) и тем, что при $\Gamma \in U$ интеграл

$$\int_{0}^{2\pi} |\Psi'(e^{i\theta})|^{2(1-s)} d\theta$$

конечен, путем предельного перехода в тождестве (3.14) при $n \to +\infty$ заключаем, что его правая часть стремится к нулю, притом равномерно как внутри области $G^{(+)}$, так и внутри $G^{(-)}$. Итак утверждение а) теоремы установлено.

б) Согласно теореме 1 при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty$$

ряд (3.12) определяет функцию $\varphi(w)$ из класса $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Это, в частности, означает, что существует функция $\tilde{\varphi}(w) \in H_2$ такая, что угловые граничные значения функции

$$\varphi(w) = \frac{B(w)}{w}\tilde{\varphi}\left(\frac{1}{w}\right) \in \tilde{H}_2\{\alpha_k\}, \quad w \in D^{(-)}$$

на окружности $w = e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ почти всюду совпадают с функцией $\varphi(e^{i\theta})$, определяемой по формуле (3.11). Поэтому, положив $\zeta = \Psi(e^{i\theta}) \in \Gamma$ и пользуясь обозначением (3.13), мы заключаем, что значения $g(\zeta)$ почти всюду на Γ совпадают с угловыми граничными значениями мероморфной в области $G^{(-)}$ функции

$$F(z) = \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)}[\Phi'(z)]^s\tilde{\varphi}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right), \qquad (3.15)$$

принадлежащей классу $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

(с) Покажем теперь, что, в условиях (3.6) и (3.9) теоремы 4, о рядах вида (3.7) можно утверждать значительно больше. А именно: такие ряды сходятся также всюду в области $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$, определяя мероморфную в $G^{(-)}$ функцию, являющуюся в определенном смысле моногенным продолжением функции $f_1(z)$ через границу Γ на всю плоскость переменной z.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (3.6) и (3.9) теоремы 4, а $\Gamma \in U_s$. Тогда*

а) *ряд*

$$f_e(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k M_k^{(s)}(z), \quad z \in G^{(-)} \tag{3.16}$$

абсолютно и равномерно сходится в любой замкнутой части множества $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$, определяя мероморфную в области $G^{(-)}$ функцию, представимую в виде

$$f_e(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + F(z), \quad z \in G^{(-)}, \tag{3.17}$$

где $g(\zeta)$ — определенная функция из класса $L_2^{(s)}(\Gamma)$, почти всюду совпадающая с угловыми граничными значениями функции

$$F(z) \in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$$

на кривой Γ.

б) *Функции $f_i(z)$ и $f_e(z)$, определенные как суммы одного и того же ряда соответственно в областях $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$, являются моногенными продолжениями друг друга через кривую Γ в том смысле, что почти для всех $\zeta_0 \in \Gamma$*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \{f_i(\zeta_0 + i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}) - f_e(\zeta_0 - i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)})\} = 0 \tag{3.18}$$

равномерно относительно $\psi_0 \left(|\psi_0| < \frac{\pi}{2}\theta,\ 0<\theta<1\right)$, где φ_0 есть угол наклона касательной к кривой Γ в точке ζ_0.

Доказательство. а) Пользуясь интегральным представлением (2.19) системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = [\Phi'(z)]^s \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k[\Phi(z)] +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\left\{\sum_0^n c_k\varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in G^{(-)}.$$

Отсюда, пользуясь обозначениями (3.12) и (3.13), имеем тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + [\Phi'(z)]^s \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k[\Phi(z)] -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} c_k M_k^{(s)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} \frac{\left\{\rho(w) - \sum_0^n c_k\varphi_k(w)\right\}[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z} dw, \quad z \in G^{(-)}. \tag{3.19}$$

Заметим теперь, что, как уже было отмечено в процессе доказательства теоремы 4, при $n \to +\infty$ правая часть тождества (3.19) равномерно стремится к нулю внутри области $G^{(-)}$.

Далее, согласно теореме 1, ряд

$$\rho(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(w)$$

равномерно сходится внутри множества $D^{(-)} - \{1/\bar{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, определяя в области $D^{(-)}$ мероморфную функцию из класса $H_2\{\alpha_k\}$

$$\rho(w) = \frac{B(w)}{w} \bar{\rho}\left(\frac{1}{w}\right), \; w \in D^{(-)}.$$

Ввиду сказанного, переходя к пределу при $n \to +\infty$, из (3.19) получим представление (3.17), где

$$F(z) = \rho[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s =$$

$$= \frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)} [\Phi'(z)]^s \bar{\rho}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right) \in E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$$

и почти всюду на Γ

$$g(\zeta) = \rho[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^{(s)} = F(\zeta) \in L_2^s(\Gamma).$$

Наконец абсолютная сходимость ряда (3.16) в точках множества $G^{(-)} - \{\omega_k\}_0^{\infty}$ вытекает из условия (3.6) и из утверждения б) леммы 3.

б) При достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $|\psi_0| < \frac{\pi}{2}$, если $\zeta_0 \in \Gamma$, то

$$z_1 = \zeta_0 + i\varepsilon e^{i(\varphi_0 + \psi_0)} \in G^{(+)}, \; z_2 = \zeta_0 - i\varepsilon e^{i(\varphi_0 + \psi_0)} \in G^{(-)}.$$

Согласно известной теореме теории интегралов типа Коши, почти для всех точек $\zeta_0 \in \Gamma$ имеем*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta \right\} = g(\zeta_0), \tag{3.20}$$

притом равномерно относительно ψ_0 $\left(|\psi_0| \leqslant \frac{\pi}{2}\theta; 0 < \theta < 1\right)$.

Так как почти для всех $\zeta_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F(z_2) = g(\zeta_0),$$

то наше утверждение (3.18) следует из представлений (3.8) и (3.17), в силу предельной формулы (3.20).

3.2. (а) Чтобы установить теорему разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$ приведем несколько дополнительных определений.

Пусть, как и выше, $G^{(+)}$ — область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Принято говорить, что голоморфная в области $G^{(+)}$ функция $f(z)$ принадлежит классу $E_p(G^{(+)})$ $(p > 0)$, если существует последовательность контуров $\Gamma_n \in G^{(+)}$, сходящихся к Γ, и таких, что

* См. [11], стр. 190.

$$\sup_{1<n<\infty}\left\{\int_{\Gamma_n}|f(z)|^p\,|dz|\right\}<+\infty. \tag{3.21}$$

Известно, что любая функция $f(z)\in E_p(G^{(+)})$ имеет почти всюду на границе Γ угловые граничные значения $f(\zeta)\in L_p(\Gamma)$. Известно также, что класс $E_1(G^{(+)})$ совпадает с множеством функций $f(z)$, представимых посредством своих угловых граничных значений $f(\zeta)$ интегралом Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in G^{(+)}. \tag{3.22}$$

Легко видеть, что $E_p(G^{(+)})\subset E_1(G^{(+)})$ $(p>1)$, и поэтому формула (3.22), в частности, имеет место также для любой функции $f(z)\in E_2(G^{(+)})$.

Полагая далее, что $\Gamma\in U_s$, обозначим через $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ множество голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, представимых в виде интеграла типа Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\equiv K(z;\ g),\ z\in G^{(+)}, \tag{3.23}$$

где $g(\zeta)$ — некоторая функция из класса $L_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е. такая, что

$$g(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^{s-1/2}\,\tilde{g}(\zeta),\ \tilde{g}(\zeta)\in L_2(\Gamma).$$

Очевидно, что если $f(z)\in E_2(G^{(+)})$, то имеем

$$f(z)=K(z;f),\ z\in G^{(+)},$$

где $f(\zeta)\in L_2^{(1/2)}(\Gamma)=L_2(\Gamma)$.

Теорема 6. *Пусть* $\Gamma\in U_s$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ *и последовательность полюсов* $\{\omega_k\}_0^\infty$, *порождающая систему* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})=+\infty. \tag{3.24}$$

Тогда любая функция

$$f(z)=K(z;\ g)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$$

допускает абсолютно и равномерно сходящееся внутри области $G^{(+)}$ *разложение*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\quad z\in G^{(+)}, \tag{3.25}$$

где

$$c_k(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}g(\zeta)\,[\Phi'(\zeta)]^{1-s}\,\overline{\varphi_k[\Phi(\zeta)]}\,\frac{d\zeta}{\Phi(\zeta)}=$$

---

* См. [11], стр. 203—209.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s \overline{\varphi_k(w)} \frac{dw}{w}, \tag{3.26}$$

причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 < +\infty. \tag{3.27}$$

Доказательство. Положив, что точка $z \in G^{(+)}$ фиксирована, рассмотрим функцию

$$\chi_s(\zeta; z) = \frac{[\Psi'(\zeta)]^{1-s}}{\Psi(\zeta) - z}, \tag{3.28}$$

голоморфную в области $D^{(-)} = \{\zeta; |\zeta| > 1\}$. Тогда функция

$$\chi_s^*(\zeta; z) = \frac{1}{\zeta} \overline{\chi_s\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}; z\right)} \tag{3.28'}$$

очевидно голоморфна в круге $D^{(+)} = \{\zeta; |\zeta| < 1\}$. Докажем, что при каждом $z \in G^{(+)}$, как функция от ζ, $\chi_s^*(\zeta; z) \in H_2$.

В самом деле, обозначая

$$d(z) = \inf_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z| > 0,$$

для любого $|\zeta| = \rho > 1$ будем иметь

$$|\Psi(w) - z| \geqslant d(z).$$

Поэтому

$$\lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\chi_s(\rho e^{i\theta}; z)|^2 d\theta \leqslant$$

$$\leqslant [d(z)]^{-2} \lim_{\rho \to 1+0} \sup \int_0^{2\pi} |\Psi'(\rho e^{i\theta})|^{2(1-s)} d\theta < +\infty, \tag{3.29}$$

поскольку при $\Gamma \in U_s$, как уже было указано выше [2.2 (в)], интегралы справа в (2.23) ограничены числом, не зависящим от ρ.

Однако, по (3.28′) при $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} |\chi_s^*(re^{i\theta}; z)|^2 d\theta = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \left|\chi_s\left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}; z\right)\right|^2 d\theta,$$

откуда, ввиду (3.29), следует, что $\chi_s^*(\zeta; z) \in H_2$.

Далее, имея в виду способ выбора (2.3) последовательности $\{\alpha_k\}_0^\infty$, порождающей систему $\{\varphi_k(\zeta)\}_0^\infty$, в силу условия (3.24) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) = +\infty.$$

Следовательно, согласно предложению 3° (§ 1), система $\{\varphi_k(w)\}_0^\infty$ замкнута в классе функций H_2. Отсюда следует, что, обозначая

$$a_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \chi_s^*(\zeta; z) \overline{\varphi_k(\zeta)} \, |d\zeta| \quad (k=0, 1, 2, \cdots),$$

будем иметь разложение

$$\chi_s^*(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) \varphi_k(\zeta), \quad z \in G^{(+)},$$

сходящееся равномерно внутри круга $D^{(+)} = \{w; |w| < 1\}$ и в среднем на ее границе $|w| = 1$.

Из формул (2.31′) и (3.28′) вытекает, что это разложение можно записать в виде

$$\chi_s\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}; z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z) \overline{\zeta\varphi_k(\zeta)}, \quad z \in G^{(+)}.$$

Наконец обозначая $\overline{\zeta}^{-1} = w$ и принимая во внимание значение (3.28) функции $\chi_s(w; z)$, приходим к заключению: *разложение*

$$\chi_s(w; z) = \frac{[\psi'(w)]^{1-s}}{\psi(w) - z} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z) \left\{\frac{1}{\overline{w}} \varphi_k\left(\frac{1}{\overline{w}}\right)\right\}, \quad w \in D^{(-)}, \; z \in G^{(+)} \tag{3.30}$$

сходится в среднем на окружности $|w| = 1$ *и равномерно внутри области* $D^{(-)}$ *при любом фиксированном* $z \in G^{(+)}$.

Теперь после замены переменной интегрирования $\zeta = \Psi(w)$ для функции $f(z) = K(z; g)$ получим представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]}{\Psi(w) - z} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s \chi_s(w; z) \, dw, \quad z \in G^{(+)}. \tag{3.31}$$

При этом, так как $g(\zeta) \in L_2^{(s)}(F)$, т. е.

$$g(\zeta) = [\Phi'(\zeta)]^{s-1/2} \tilde{g}(\zeta), \quad \tilde{g}(\zeta) \in L_2(\Gamma),$$

то

$$\int\limits_{|w|=1} |g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s|^2 |dw| = \int\limits_{\Gamma} |\tilde{g}(\zeta)|^2 |d\zeta| < +\infty. \tag{3.32}$$

Подставляя теперь разложение (3.30) функции $\chi_s(w; z)$ в формулу (3.31), заметив при этом, что это разложение сходится в среднем на окружности $|w| = 1$, получим требуемое разложение (3.25)—(3.26). При этом ряд (3.27) сходится в силу условия (3.32) и неравенства Бесселя. Наконец из условия (3.27), в силу теоремы 4, заключаем, что разложение (3.25) сходится равномерно и абсолютно внутри области $G^{(+)}$. Итак, теорема доказана.

(в) Отметим, что условие (3.24) не только достаточно, но и необходимо в остальных условиях теоремы 6. Этот факт, установленный впервые Г. Ц. Тумаркиным для системы $\{M_k^{(1,s)}(z)\}_0^\infty$, вытекает немедленно из теоремы 4.

В самом деле, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty$$

и если функция $f_0(z)$ допускает разложение вида (3.25)—(3.26), то, согласно теореме 4, существует функция $g_0(\zeta) \in L_2^{(s)}(\Gamma)$ такая, что

$$f_0(z) = K(z; g_0) \in K_2^{(s)}(G^{(+)}),$$

причем почти всюду на Γ функция $g_0(\zeta)$ совпадает с угловыми граничными значениями некоторой функции $F_0(z)$ из класса $E_2^{(s)}\{G^{(-)}; \omega_k\}$.

Это значит, что при нарушении условия (3.24) теоремы произвольная функция класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ не разлагается в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, т. е. условие это необходимо.

(с) В заключение сделаем следующее замечание о единственности разложений по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$.

Независимо от того выполняется или нет условие (3.24) имеет место следующее утверждение.

Если некоторая функция

$$f(z) = K(z; g) \in K_2^{(s)}(G^{(+)})$$

разлагается в ряд вида (3.25)—(3.26), а также в ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{*}{c}_k M_k^{(s)}(z), \quad z \in G^{(+)}, \tag{3.33}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\overset{*}{C}_k|^2 < +\infty, \tag{3.34}$$

то

$$\overset{*}{c}_k = c_k(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s \overline{\varphi_k(w)} \frac{dw}{w} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.35}$$

В самом деле, если функция $f(z)$ разлагается в ряд вида (3.25)—(3.26), то, обозначая

$$\rho_0(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) w^k, \ g_0(\zeta) = [\Phi'(\zeta)]^s \rho[\Phi(\zeta)], \ \zeta \in \Gamma, \tag{3.36}$$

согласно теореме 4, будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \ z \in G^{(+)}. \tag{3.37}$$

Аналогично из (3.33)—(3.34) следует, что если обозначить

$$\rho^*(w)=\sum_{k=0}^{\infty} \overset{*}{c}_k w^k,\quad g^*(\zeta)=[\Phi'(\zeta)]^s \rho^*[\Phi(\zeta)],\quad \zeta\in\Gamma, \tag{3.36'}$$

то имеем еще

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g^*(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(+)}. \tag{3.37'}$$

Из формул (3.36), (3.36′) и (3.37), (3.37′) вытекает тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\Phi'(\zeta)]^s\{\rho^*[\Phi(\zeta)]-\rho_0[\Phi(\zeta)]\}}{\zeta-z}d\zeta\equiv 0,\quad z\in G^{(+)}. \tag{3.38}$$

С другой стороны, очевидно, что интеграл (3.38) в области $G^{(-)}$ представляет аналитическую функцию, имеющую порядок $O\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности точки $z=\infty$. Поэтому тождество (3.38) приводит нас к заключению, что функция

$$[\Phi'(\zeta)]^s\{\rho^*[\Phi(\zeta)]-\rho_0[\Phi(\zeta)]\},\quad \zeta\in\Gamma$$

аналитически продолжается во всю область $G^{(-)}$, притом так, что при $z\to\infty$

$$[\Phi'(z)]^s\{\rho^*[\Phi(z)]-\rho_0[\Phi(z)]\}=O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Поскольку в области $G^{(-)}$ $\Phi'(z)\neq 0$, причем $\Phi'(\infty)>0$, то функция $\rho^*[\Phi(z)]-\rho_0[\Phi(z)]$ также голоморфна всюду в области $G^{(-)}$ и имеет порядок z^{-1} при $z=\infty$.

Иначе говоря голоморфная в круге $D^{(-)}$ функция

$$\rho^*(w)-\rho_0(w)=\sum_{k=0}^{\infty}\{\overset{*}{c}_k-c_k(g)\}w^k$$

аналитически продолжима на всю плоскость w, т. е. является целой, причем при $w\to\infty$ она имеет порядок $O(\Psi^{-1}(w))=O(w^{-1})$. Отсюда по теореме Лиувилля следует тождество $\rho^*(w)\equiv\rho_0(w)$ и тем самым формулы (3.35).

§ 4. Разложения по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ (продолжение)

4.1. (а) Продолжая пользоваться обозначениями, введенными в §§ 2 и 3, в данном параграфе мы проводим дальнейшее исследование разложений функций по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, в принципиально отличном от теоремы 6 случае, когда последовательность ее полюсов $\{\omega_k\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty. \tag{4.1}$$

Докажем сначала одну важную для дальнейшего лемму.

Лемма 4. *Пусть $\Gamma \in U_s$ $(0 < s \leqslant 1)$ и последовательность комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$, порождающая систему $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, удовлетворяет условию (4.1).*

Тогда при каждом $z \in G^{(+)}$ всюду в области $D^{(-)} = \{w: |w| > 1\}$ и почти всюду на ее границе $|w| = 1$ справедливо представление

$$\chi_s(w; z) = \frac{1}{w}\Gamma\left(\frac{1}{w}; z\right) + \frac{1}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w}; z\right), \tag{4.2}$$

где в области $D^{(+)} = \{\zeta; |\zeta| < 1\}$

$$\Gamma(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\,\overline{\varphi}_k(\zeta) \in H_2, \tag{4.3}$$

$$\omega(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B(t)\,[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t) - z]\,(1 - t\zeta)}\,dt \in H_2, \tag{4.4}$$

$$B(\zeta) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - \zeta}{1 - \overline{\alpha}_k\zeta}\cdot\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi^{-1}(\omega_k) - \zeta}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\,\zeta}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}. \tag{4.5}$$

При этом разложение (4.3) сходится к функции $\Gamma(\zeta; z)$ равномерно относительно ζ внутри круга $D^{(+)}$ и в среднем к ее граничным значениям на окружности $|\zeta| = 1$.

Доказательство. Пользуясь тождеством (1.3), а также формулами (2.31), (2.31′) и (3.28), 3.28′), при $\zeta \in G^{(+)}$ и $z \in G^{(+)}$ имеем

$$\frac{1}{\zeta}\overline{\chi_s\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}; z\right)} = \chi_s^*(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=1} \frac{\chi_s^*(t; z)}{1 - \zeta\overline{t}}\,|dt| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{M_k^{(s)}(z)}\,\varphi_k(z) + \frac{B_{n+1}(\zeta)}{2\pi}\int_{|t|=1} \frac{B_{n+1}(t)\,\chi_s^*(t; z)}{1 - \zeta\overline{t}}\,|dt|, \tag{4.6}$$

где

$$B_{n+1}(\zeta) = \prod_{k=0}^{n} \frac{\overline{\Phi^{-1}(\omega_k)} - \zeta}{1 - \Phi^{-1}(\omega_k)\,\zeta}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\Phi(\omega_k)}. \tag{4.5′}$$

Далее, переходя в формуле (4.6) к сопряженным величинам и заметив при этом, что

$$\overline{B_{n+1}(\zeta)} = \left[B_{n+1}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)\right]^{-1}$$

и при $|t| = 1$

$$\overline{\chi_s^*(t; z)} = t\chi_s(t; z),$$

после замены переменной $\overline{\zeta}^{-1} = w$ получим при $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$

$$\chi_s(w; z) = \sum_{k=0}^{n} M_k^{(s)}(z)\left\{\frac{1}{w}\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{w}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{[B_{n+1}(w)]^{-1}}{2\pi i}\int_{|t|=1} \frac{B_{n+1}(t)\,\chi_s(t; z)}{w - t}\,dt \equiv J_n^{(1)} + J_n^{(2)}. \tag{4.7}$$

Поскольку

$$\chi_s(w; z) = \frac{[\Psi'(w)]^{1-s}}{\Psi(w) - z},$$

то, заметив, что $\zeta = \Psi(w) \in G^{(-)}$ — любое, тождество (4.7) можем записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{n} M_k^{(s)}(z)\, R_k^{(s)}(\zeta) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{2\pi i B_{n+1}[\Phi(\zeta)]} \int_{\Gamma} \frac{B_{n+1}[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^{s}}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]}\, d\eta \tag{4.8}$$

при любом $\zeta \in G^{(-)}$ и $z \in G^{(+)}$, где

$$R_k^{(s)}(\zeta) = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \cdot \overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right) =$$

$$= \frac{(1 - |\alpha_k|^2)^{1/2}}{\Phi(\zeta) - \alpha_k} \cdot \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{B_k[\Phi(\zeta)]} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.9}$$

Отметим, что система $\{R_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ голоморфных в области $G^{(-)}$ функций ортонормальна на кривой Γ с весом $|\Phi'(\zeta)|^{2s-1} \in L_2(\Gamma)$.

В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\Phi'(\zeta)|^{2s-1}\, R_p^{(s)}(\zeta)\, \overline{R_q^{(s)}(\zeta)}\, |d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=1} \overline{\varphi_p(t)}\, \varphi_q(t)\, |dt| = \delta_{p,q} \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.10}$$

Заметим теперь, что поскольку $\chi_s(e^{i\theta}; z) \in L_2(0; 2\pi)$, то пользуясь предложениями 4°—5°—6° (§ 1) и поступая так же, как и при доказательстве теоремы Уолша 7° (§ 1), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{(2)} = \frac{1}{2\pi i B(w)} \int_{|t|=1} \frac{B(t)\chi_s(t; z)}{w - t}\, dt, \quad z \in G^{(+)},\ w \in D^{(-)}. \tag{4.11}$$

Далее, вследствие условия $\Gamma \in U_s$, если $|w| \neq 1$ и $z \in G^{(+)}$, то

$$\frac{B(e^{i\theta})[\Psi'(e^{i\theta})]^{1-s}}{[\Psi(e^{i\theta}) - z](w - e^{i\theta})} \in L_2(0; 2\pi).$$

Поэтому легко видеть, что при каждом фиксированном $z \in G^{(+)}$ интеграл

$$\omega(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{B(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t) - z](1 - t\zeta)}\, dt$$

как функция от ζ в области $D^{(+)}$ принадлежит классу H_2.

Итак, из (4.11) следует при $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{(2)} = \frac{1}{wB(w)}\, \omega\left(\frac{1}{w};\ z\right). \tag{4.12}$$

С другой стороны, согласно лемме 3,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |M_k^{(s)}(z)|^2 < +\infty, \quad z \in G^{(+)}$$

и, поскольку система $\{\overline{\varphi}_k(\zeta)\}_0^{\infty}$ также ортонормальна на окружности $|\zeta|=1$, то утверждения теоремы о природе сходимости ряда

$$\Gamma(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z)\overline{\varphi}_k(\zeta), \ z \in G^{(+)}$$

относительно переменной ζ и о том, что $\Gamma(\zeta; z) \in H_2$, непосредственно следуют из теоремы 1. Поэтому из (4.7) выводим, что для любого $z \in G^{(+)}$

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{(1)} = \frac{1}{w}\Gamma\left(\frac{1}{w}; z\right), \ w \in D^{(-)}. \tag{4.13}$$

Переходя к пределу в тождестве (4.7) при $n \to \infty$, ввиду (4.12) и (4.13), получим формулу (4.2) леммы для $z \in G^{(+)}$ и $w \in D^{(-)}$. Наконец, поскольку тождество (4.2) имеет место для всех $w \in D^{(-)}$, причем отдельные его слагаемые, очевидно, почти для всех точек окружности $|w|=1$ имеют граничные значения, принадлежащие классу $L_2(0; 2\pi)$, то оно справедливо также почти всюду на этой окружности.

Отметим, что аналогичным переходом к пределу в тождестве (4.8) при $n \to \infty$, поличим соотношение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} M_k^{(s)}(z) R_k^{(s)}(\zeta) +$$

$$+ \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{2\pi i B[\Phi(\zeta)]} \int_{\Gamma} \frac{B[\Phi(\eta)][\Phi'(\eta)]^s}{(\eta - z)[\Phi(\zeta) - \Phi(\eta)]} d\eta, \ z \in G^{(+)}, \tag{4.14}$$

справедливое для всех $\zeta \in G^{(-)}$ и почти всех $\zeta \in \Gamma$.

(в) Как уже было отмечено в дополнительном замечании к теореме 6, в случае сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\Phi(\omega_k)|^{-1}) \tag{4.15}$$

произвольная функция класса $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ не допускает разложения в ряд по системе $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$.

Докажем основную теорему данного параграфа, содержащую явное выражение для разности

$$f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) M_k^{(s)}(z)$$

в случае сходимости ряда (4.15), для любой функции $f(z) = K(z; g) \in \in K_2^{(s)}(G^{(+)})$.

Теорема 7. *Пусть* $\Gamma \in U_s$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ *и последовательность комлексных чисел* $\{\omega_k\}_0^{\infty} \in G^{(-)}$, *порождающая систему* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^{\infty}$, *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1-|\Phi(\omega_k)|^{-1}) < +\infty.$$

Тогда любая функция

$$f(z) = K(z;\ g) \in K_2^{(s)}(G^{(+)}) \tag{4.16}$$

допускает разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) M_k^{(s)}(z) +$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\, \omega\left(\frac{1}{w};\ z\right) dw,\quad z\in G^{(+)}, \tag{4.17}$$

где

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s \overline{\varphi_k(w)}\, \frac{dw}{w} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} g(\zeta)\, R_k^{(s)}(\zeta)\, d\zeta \quad (k=0, 1, 2, \cdots), \tag{4.18}$$

$$R_k^{(s)}(\zeta) = \frac{[\Phi'(\zeta)]^{1-s}}{\Phi(\zeta)} \cdot \varphi_k[\Phi(\zeta)],\ \zeta\in\Gamma. \tag{4.19}$$

Кроме того, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 < +\infty, \tag{4.20}$$

а ряд, стоящий в правой части (4.17), сходится абсолютно и равномерно внутри области $G^{(+)}$.

Наконец, при $w = e^{i\theta}$ *в формуле (4.17) под* $\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)$ *следует понимать граничное значение функции*

$$\omega(\zeta;\ z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{B(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{[\Psi(t)-z](1-\zeta t)}\, dt \in H_1 \tag{4.21}$$

в точке $\zeta = e^{-i\theta}$.

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 6 мы опирались на формулу (3.31)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\, \chi_s(w;\ z)\, dw,\quad z\in G^{(+)}.$$

Отсюда, пользуясь тождеством (4.2) леммы 4, справедливой почти всюду на окружности $|w|=1$, получим представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\, \Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right) \frac{dw}{w} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g\,[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)dw,\ z\in G^{(+)}. \tag{4.22}$$

С другой стороны, пользуясь обозначением (4.18), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} g\,[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)\frac{dw}{w}=\sum_{k=0}^{n}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} g\,[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\left\{\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)-\sum_{k=0}^{n}M_k^{(s)}(z)\,\bar{\varphi}_k\left(\frac{1}{w}\right)\right\}\frac{dw}{w}\equiv$$

$$\equiv S_n^{(1)}(z)+S_n^{(2)}(z),\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.23}$$

Ввиду того, что $g(\zeta)\in L_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е.

$$\int\limits_{|w|=1}|g\,[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s|^2\,|dw|<+\infty, \tag{4.24}$$

для функции $S_n^{(2)}(z)$ получим оценку

$$|S_n^{(2)}(z)|\leqslant\frac{c_0}{2\pi}\left\{\int\limits_{|w|=1}\left|\Gamma(w;\ z)-\sum_{k=0}^{n}M_k^{(s)}(z)\,\bar{\varphi}_k(w)\right|^2|dw|\right\}^{1/2},\ z\in G^{(+)}, \tag{4.25}$$

где c_0 не зависит от n.

Но, согласно лемме 4, при $n\to+\infty$ интеграл (4.24) стремится к нулю при любом $z\in G^{(+)}$. Поэтому после предельного перехода при $n\to\infty$ из тождества (4.23) получим, что справедливо разложение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} g\,[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s\,\Gamma\left(\frac{1}{w};\ z\right)\frac{dw}{w}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\ z\in G^{(+)}, \tag{4.26}$$

причем сходимость ряда (4.20) следует из условия (4.24), в силу формул (4.18) и неравенства Бесселя. Ряд же (4.26) сходится абсолютно и равномерно внутри области $G^{(+)}$ согласно теореме 4.

Из (4.22) и (4.26) следует представление (4.17). Таким образом, теорема полностью доказана.

4.2. (а) Обозначим через $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ класс голоморфных в области $G^{(+)}$ функций, допускающих разложение вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,M_k^{(s)}(z),\ z\in G^{(+)}, \tag{4.27}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

Согласно теореме 6 классы $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ и $K_2^{(s)}(G^{(+)})$ совпадают в случае расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1}),$$

а если он сходится, имеет место строгое включение

$$\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})\subset K_2^{(s)}(G^{(+)}).$$

Из теоремы 7 непосредственно получается

Следствие. *При условии*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty$$

класс $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ *совпадает с множеством тех функций* $f(z)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$, *для которых выполняются условия:*

а) *имеет место представление*

$$f(z)=K(z;\ g),\quad z\in G^{(+)};$$

б) *функция* $g(\zeta)$ — *из класса* $L_2^{(s)}(\Gamma)$ *и такова, что*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{g[\psi(w)][\psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};\ z\right)dw\equiv 0,\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.27'}$$

(в) характеристику класса $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ можно сформулировать в более обозримой форме.

С этой целью обозначим через $\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$ множество функций $g(\zeta)$ из класса $L_2^{(s)}(\Gamma)$, почти всюду на Γ совпадающих с угловыми граничными значениями некоторой функции $F(z)$ из класса $E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$, т. е. с граничными значениями мероморфных функций вида

$$F(z)=\frac{B[\Phi(z)]}{\Phi(z)}[\Phi'(z)]^s\widetilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(z)}\right),\quad z\in G^{(-)},$$

где $\widetilde{F}(w)\in H_2$.

Другая характеристика класса $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ дается следующей теоремой.

Теорема 8. *При условии*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\Phi(\omega_k)|^{-1})<+\infty$$

класс $\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$ *совпадает с множеством тех функций* $f(z)\in K_2^{(s)}(G^{(+)})$, *для которых при некотором* $g(\zeta)\in\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$ *имеет место представление*

$$f(z)=K(z;\ g),\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.28}$$

Доказательство. Пусть $f(z)\in\widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$, т. е. имеет место разложение вида (4.28). Тогда по теореме 4 функция $f(z)$ допускает представление (4.28), где $g(\zeta)\in\widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$.

Обратно, пусть функция $f(z)$ допускает представление вида (4.28), где $g(\zeta)\in \widetilde{L}_2^{(s)}(\Gamma)$, т. е. почти всюду на Γ имеем

$$g(\zeta)=\frac{B[\Phi(\zeta)]}{\Phi(\zeta)}[\Phi'(\zeta)]^s\widetilde{F}\left(\frac{1}{\Phi(\zeta)}\right),$$

где $\widetilde{F}(w)$ — некоторая функция из класса H_2. Тогда будем иметь

$$U(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{g[\Psi(w)][\Psi'(w)]^s}{wB(w)}\,\omega\left(\frac{1}{w};z\right)dw=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\widetilde{F}\left(\frac{1}{w}\right)\omega\left(\frac{1}{w};z\right)\frac{dw}{w^2}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\widetilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta;z)\,d\zeta. \tag{4.29}$$

Но, согласно лемме 9, при любом $z\in G^{(+)}$ имеем $\omega(\zeta;z)\in H_2$, и, поскольку $\widetilde{F}(\zeta)\in H_2$, то

$$\widetilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta;z)\in H_1,\quad z\in G^{(+)}.$$

Поэтому из (4.29) легко вытекает также, что при любом r $(0<r<1)$

$$U(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\widetilde{F}(\zeta)\,\omega(\zeta;z)\,d\zeta,\quad z\in G^{(+)}. \tag{4.30}$$

Подставляя теперь в (4.30) значение функции $\omega(\zeta;z)$ из формулы (4.21), после очевидно допустимой замены порядка интегрирования, получим

$$U(z)=-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{|t|=1}\frac{B(t)[\Psi'(t)]^{1-s}}{\Psi(t)-z}\left\{\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{1-t\zeta}d\zeta\right\}dt. \tag{4.31}$$

Однако, так как $\widetilde{F}(\zeta)\in H_2$, то очевидно, что при всех $|t|=1$

$$\int\limits_{|\zeta|=r}\frac{\widetilde{F}(\zeta)}{1-t\zeta}\,d\zeta\equiv 0.$$

Отсюда и из (4.31) следует тождество

$$U(z)\equiv 0;\ z\in G^{(+)},$$

и значит, ввиду приведенного выше следствия теоремы 7, можем утверждать, что $f(z)\in \widetilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$. Теорема доказана.

(с) Наконец, приведем обращение теоремы 5, что вместе с тем является также значительным усилением теоремы 8.

Обозначим через $\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$ класс функций $f(z)$, определенных на множестве

$$G\{\omega_k\}=G^{(+)}+G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^\infty$$

и удовлетворяющих условиям:

1) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in G^{(-)},$$

2) $$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+F(z),\ z\in G^{(-)},$$

где $F(z)\in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$, причем почти для всех $\zeta\in\Gamma$, $g(\zeta)=F(\zeta)$.

Теорема 9. *Класс* $\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$ *совпадает с множеством функций* $f(z)$, *представимых на* $G\{\omega_k\}$ *в виде ряда*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kM_k^{(s)}(z),\ z\in G\{\omega_k\},\tag{4.32}$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2<+\infty.$$

Доказательство. Что ряды вида (4.32) сходятся на множестве $G\{\omega_k\}$ и представляют функции класса $\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$ было уже установлено нами в теоремах 4 и 5.

Обратно, если $f(z)\in\lambda_2\{G^{(+)};\ G^{(-)};\ \omega_k\}$, то из свойств 1) и 2) следует, что имеем также: $f(z)\in\tilde{K}_2^{(s)}(G^{(+)})$. Поэтому согласно теоремам 7 и 8, справедливо разложение

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(g)\,M_k^{(s)}(z),\ z\in C^{(+)}.$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k(g)|^2<+\infty,$$

Однако, согласно теореме 5, этот же ряд сходится и на множестве $G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^{\infty}$, притом к сумме

$$f_e(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g_0(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+F_0(z),$$

где $F_0(z)\in E_2^{(s)}\{G^{(-)};\ \omega_k\}$ и $g_0(\zeta)=F_0(\zeta)$ почти для всех $\zeta\in\Gamma$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $f_e(z)\equiv f(z)$, $z\in G^{(-)}-\{\omega_k\}_0^{\infty}$.

С этой целью, во-первых, заметим, что по той же теореме 5 и в принятых там обозначениях почти для всех $\zeta_0\in\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{f\left(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}\right)-f_e\left(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}\right)\right\}=0,\tag{4.33}$$

поскольку, очевидно, $f_i(z)\equiv f(z)$, $z\in G^{(+)}$.

Во-вторых, заметим еще, что из представлений 1) и 2) функции $f(z)$ следует также, что почти для всех $\zeta_0\subset\Gamma$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{f\left(\zeta_0+i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}\right)-f\left(\zeta_0-i\varepsilon e^{i(\varphi_0+\psi_0)}\right)\right\}=0.\tag{4.34}$$

Из (4.33) – (4.34) вытекает, что мероморфная в области $G^{(-)}$ функция $f_e(z) - f(z)$ почти всюду на Γ имеет нулевые угловые граничные значения.

Отсюда по общей теореме единственности для мероморфных функций вытекает, что $f_e(z) \equiv f(z)$.

Возникает вопрос: в случае, когда контур Γ неспрямляем, либо, в более общем случае, когда $\overline{G}^{+} = K$ есть произвольный ограниченный континуум, в каких классах функций система $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ продолжает оставаться базисом в том или ином смысле?

По-видимому поставленный вопрос представляет особый интерес в том случае, когда последовательность полюсов $\{\omega_k\}_0^\infty$ системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ удовлетворяет условию (4.1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР и Ереванский
государственный университет

Поступило 30.XI.1966

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՖԻՔՍ ԲԵՎԵՌՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐՈՎ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Հեղինակի մի աշխատանքում [1] կառուցված էր $\{M_k(z)\}$ ($k=0, 1, 2, \ldots$) ռացիոնալ կոտորակների հատուկ սիստեմ. $\{\omega_k\}_1^\infty$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) ֆիքսած բևեռներով, որոնք ընկած են փակ ժորդանյան ուղղելի եզր ունեցող $G^{(+)}$ միակապ տիրույթից դուրս։ Այդ սիստեման իրենից ներկայացնում էր Ֆաբերի բազմանդամների սիստեմի բնական ընդհանրացումը այն դեպքի համար, երբ բոլոր բևեռները կուտակված չեն $z = \infty$ կետում, այլ ընկած են տված $\{\omega_k\}_1^\infty$ կետերի հաջորդականության վրա։

Ներկա հոդվածում բերված են ֆիքսած բևեռներ ունեցող ռացիոնալ կոտորակների սիստեմներով վերլուծության վերաբերյալ հեղինակի նոր հետազոտությունների ընդարձակ շարադրանքը։

M. M. DŽRBAŠIAN

EXPANSIONS BY THE SYSTEMS OF RATIONAL FUNCTIONS WITH FIXED POLES

Summary

In author's earlier paper [1] a special system $\{M_k(z)\}$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) of rational functions with fixed set $\{\omega_k\}_1^\infty$ ($k=0, 1, 2, \cdots$) of poles lying outside of a simply connected domain $G^{(+)}$ with close Jordanian rectifiable boundary Γ, was constructed. That system presents a natural generalization of the system of Faber polynomial, in the sence, that

the poles constitute a prescribed sequence $\{\omega_k\}_1^\infty$ rather than condence at $z=\infty$.

This paper describes author's latest research in the field of expansion by the sets of rational fractions with fixed poles.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О разложимости аналитических функций в ряд по рациональным функциям с заданным множеством полюсов, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 1 (1957), 21—29.
2. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М.—Л. (1955).
3. *G. Faber.* Über polynomische Entwicklungen, Math. Annalen, 57 (1903), 389—408, 64 (1907), 116—135.
4. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Известия АН Арм.ССР, 4, № 1, (1961), 9—31.
5. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, ДАН СССР, 143, № 1 (1962), 17—20.
6. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, Москва (1961).
7. *T. Takenaka.* On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese Journal of Mathematics, 2 (1925), 129—145.
8. *E. Malmquist.* Sur la dètermination d'une classe de fonctions analytoque par leurs valeurs dans un ensemble donnè de points, Comptes rendus du sixième congrés (1925) des mathématiciens Scandinaves, Kopenhagen, 253—259.
9. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. серия, 9, № 7 (1956).
10. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности, Известия АН Арм.ССР, Математика, 1, № 1 (1966), 3—24.
11. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Москва (1950).
12. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва (1952).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 1, 1967 Математика

Г. С. ЛИТВИНЧУК и Н. Т. МИШНЯКОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Для неограниченной области краевая задача Карлемана в классе обобщенных аналитических функций исследована в работе [1] одного из авторов этой статьи. Однако, примененный в [1] метод оказался недостаточным для решения задачи Карлемана в классе обобщенных аналитических функций в случае ограниченной области. Последняя задача рассматривалась Хоу Цзун-И [2], который установил связь между разрешимостью этой задачи и союзной с ней краевой задачи. Вопросы о числе линейно независимых решений и условий разрешимости задачи, так же как и вопрос о построении ее общего решения, попрежнему оставались открытыми. В настоящей заметке, опираясь на результаты работ [1] и [2], мы восполняем этот пробел.

1. Сформулируем задачу, указанную в заглавии статьи. Пусть L — замкнутый контур Ляпунова, делящий плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Начало координат принадлежит области D^+. Пусть $\alpha(t)$ — заданная на контуре L функция, имеющая H—непрерывную и отличную от нуля на L производную $\alpha'(t)$, и пусть $\alpha(t)$ гомеоморфно отображает контур L на себя с изменением направления обхода на нем. На L заданы также H — непрерывные функции $G(t)$ и $g(t)$, причем $G(t)\neq 0$. Пусть еще задана функция $A(z)$, непрерывная на всей плоскости за исключением дискретного ряда точек, в которых не существует предела функции $A(z)$, но $A(z)$ ограничена, и конечного числа линий разрыва первого рода. В окрестности бесконечно удаленной точки $A(z)$ допускает оценку

$$|A(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^\beta},\ M>0,\ \beta>1.$$

Требуется найти регулярное в D^+ решение уравнения [3] (обобщенную аналитическую функцию)

$$\frac{\partial U}{\partial\bar z}=A(z)\bar U, \tag{1}$$

удовлетворяющее на контуре L условию

$$U^+[\alpha(t)]=G(t)\,U^+(t)+g(t), \tag{2}$$

причем $\alpha(t)$ удовлетворяет на L условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)]=t. \tag{3}$$

Сформулируем результат Хоу Цзун-И [2].

Если союзная с задачей (2) однородная краевая задача

$$\psi^{+}[\alpha(t)] = \alpha'[\alpha(t)]\, G[\alpha(t)]\, \psi^{+}(t) \tag{4}$$

для регулярного в D^{+} решения уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \bar{A}(z)\,\bar{\psi} \tag{5}$$

не имеет нетривиальных решений, то краевая задача (2) разрешима.

2. Справедлива [1]

Лемма 1. *Уравнение (1) имеет единственное, с точностью до действительного постоянного множителя, регулярное в D^{+} решение, удовлетворяющее краевому условию*

$$U^{+}[\alpha(t)] = \lambda U^{+}(t) \text{ на } L,\ \lambda = \pm 1, \tag{6}$$

тождественно равное нулю при $\lambda = -1$.

Лемма 2. *Если $\psi(z)$ — регулярное в D^{+} решение уравнения (5), удовлетворяющее на L условию*

$$\psi^{+}[\alpha(t)] = \frac{\lambda}{\alpha'(t)}\,\psi^{+}(t), \tag{7}$$

то $\psi(z) \equiv 0$ в области D^{+}.

В самом деле, используя представление регулярных решений уравнения (5) ([3], стр. 156)

$$\psi(z) = \varphi(z)\exp\omega(z),\quad \omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{\overline{A(\zeta)}}{\zeta - z}\,\frac{\bar{\psi}}{\psi}\,dT,$$

сведем задачу (7) к однородной задаче Карлемана для аналитической функции $\varphi(z)$ с коэффициентом

$$s(t) = \frac{\lambda}{\alpha'(t)}\exp\{\omega(t) - \omega[\alpha(t)]\}.$$

Так как $\operatorname{Ind} s(t) = 2$, то последняя задача не имеет нетривиальных решений в D^{+}, откуда $\psi(z) \equiv 0$ в D^{+}.

Рассмотрим краевую задачу

$$U^{+}[\alpha(t)] = \lambda U^{+}(t) + g(t) \text{ на } L,\ \lambda = \pm 1, \tag{8}$$

где, как следует из (3), должно быть

$$g(t) + \lambda g[\alpha(t)] = 0 \text{ на } L. \tag{9}$$

Полагая $G(t) = \lambda$, из краевого условия (4) получаем союзную с задачей (8) задачу (7), которая, согласно лемме 2, имеет только тривиальное решение. Следовательно, задача (8) безусловно разрешима [2]. Учитывая лемму 1, получаем, что общее решение задачи (8) имеет вид

$$U(z) = C_{\lambda} U_{0}(z) + U_{0}^{*}(z),$$

где первое слагаемое есть общее решение задачи (6), а второе слагаемое есть частное решение задачи (8), C_λ — действительная постоянная, равная нулю при $\lambda = -1$.

Рассмотрим теперь краевую задачу (8) в классе функций, имеющих в начале координат полюс порядка $\varkappa'$. Такие функции можно представить в виде

$$U(z) = V(z) + U_R(z), \tag{10}$$

где $V(z)$ — регулярное в D^+ решение уравнения (1), а $U_R(z) = \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k W_k(z)$ — обобщенная рациональная функция, $W_k(z)$ — аналоги отрицательных степеней z^{-k}, iz^{-k}. Функции $W_k(z)$ строятся ([3]), стр. 200) при помощи оператора

$$K_D[\Phi(z)] = \Phi(z) + \iint_D \Gamma_1(z, t)\,\Phi(t)\,dT + \iint_D \Gamma_2(z, t)\,\overline{\Phi(t)}\,dT,$$

где $\Gamma_1(z, t)$ и $\Gamma_2(z, t)$ — резольвенты уравнения (1), а $\Phi(z)$ — любая аналитическая функция. Имеем

$$W_{2k-1}(z) = K_D[z^{-k}],\ W_{2k}(z) = K_D[iz^{-k}],\ k=1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (8), получим для $V(z)$ краевую задачу

$$V^+[\alpha(t)] - \lambda V^+(t) = \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k \{\lambda W_k(t) - W_k[\alpha(t)]\} + g(t). \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что правая часть краевого условия (12) удовлетворяет условию (9). Следовательно, задача (12) разрешима при любых действительных постоянных c_k. Пусть $V_k(z)$ — частные решения краевых задач

$$V^+[\alpha(t)] - \lambda V^+(t) = \lambda W_k(t) - W_k[\alpha(t)],\ \lambda = \pm 1.$$

Тогда общее решение задачи (8) в указанном выше классе функций запишется в виде формулы

$$U(z) = C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z) + \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k U_k(z), \tag{13}$$

где $U_k(z) = V_k(z) + W_k(z)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Общее решение задачи (8) в классе функций, имеющих в начале координат полюс порядка $\varkappa'$, содержит $2\varkappa' + 1$ или $2\varkappa'$ произвольных действительных постоянных, если соответственно $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$, и дается формулой (13).*

Составляющие общего решения (13) строятся так же, как это сделано в работе [1]: при помощи обобщенных интегралов типа Коши, плотности которых являются решениями нормально разрешимых сингулярных интегральных уравнений (с ядром Коши) с равными нулю индексами и удовлетворяют линейным соотношениям, совпадающим с соответствующими краевыми условиями.

3. Перейдем теперь к исследованию задачи (2). Ввиду условия (3) интерес представляет случай, когда на L

$$G(t)\,G[\alpha(t)] = 1,$$
$$g(t) + G(t)\,g[\alpha(t)] = 0. \tag{14}$$

Пусть $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t)$. Остановимся на случае $\varkappa = 2\varkappa'$. Случай нечетного $\varkappa$ легко приводится [4] к случаю $\varkappa = 2\varkappa'$. Если $\varkappa$ — четное число, то, как видно из условия (3) и первого условия (14), в неподвижных точках t_1 и t_2 сдвига $\alpha(t)$ либо $G(t_1) = G(t_2) = 1$, либо $G(t_1) = G(t_2) = -1$. Известно [4], что для задачи Карлемана теории аналитических функций существует каноническая функция [5], удовлетворяющая на L краевому условию

$$\chi^+[\alpha(t)] = \lambda G(t)\,\chi^+(t), \tag{15}$$

где $\lambda = \pm 1$ — значение функции $G(t)$ в неподвижных точках сдвига $\alpha(t)$. Функция $\chi(z)$—аналитическая в области D^+, имеющая нулевой порядок всюду в $D^+ + L$, кроме точки $z = 0$, где порядок $\chi(z)$ равен $-\varkappa'$. Так как $\chi^+(t) \neq 0$ на L, то, выражая $G(t)$ из (15) и подставляя полученный результат в краевое условие (2), придем к краевой задаче

$$\frac{U^+[\alpha(t)]}{\chi^+[\alpha(t)]} = \lambda\frac{U^+(t)}{\chi^+(t)} + \frac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]} \text{ на } L \tag{16}$$

для функции $\dfrac{U(z)}{\chi(z)}$, являющейся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{U}{\chi}\right) = A(z)\frac{\overline{\chi(z)}}{\chi(z)}\overline{\left(\frac{U}{\chi}\right)}. \tag{17}$$

Пусть $\varkappa \geqslant 0$. Так как функция $\dfrac{U(z)}{\chi(z)}$ имеет в начале координат полюс порядка $\varkappa'$, а функция $\dfrac{g(t)}{\chi^+[\alpha(t)]}$, в силу (14), удовлетворяет условию (9), заключаем, что в этом случае для краевой задачи (16) справедлива теорема 1. Поэтому общее решение задачи (16), а, следовательно, и задачи (2) имеет вид

$$U(z) = \chi(z)\left[C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z) + \sum_{k=1}^{2\varkappa'} c_k U_k(z)\right], \tag{18}$$

где c_k и C_λ — произвольные вещественные постоянные.

При $\varkappa < 0$ в формуле (18) все $c_k^* = 0$, а функция $C_\lambda U_0(z) + U_0^*(z)$ должна иметь в точке $z = 0$ нуль порядка не ниже $-\varkappa'$. Таким образом, в этом случае для существования регулярного в D^+ решения уравнения (17), удовлетворяющего краевому условию (2), необходимо и достаточно выполнение $-\varkappa$ вещественных условий разрешимости при $\lambda = -1$ и $-\varkappa - 1$ условий при $\lambda = 1$. В самом деле, в последнем случае одно из $-\varkappa$ условий разрешимости удовлетворяется за счет соответствующего выбора вещественной постоянной C_λ.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Общее решение краевой задачи (2) для уравнения (1) при* $\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) \geqslant 0$, *регулярное в* D^+, *зависит от* $\varkappa + 1$ *или* $\varkappa$ *произвольных вещественных постоянных, если соответственно* $\lambda = 1$ *или* $\lambda = -1$, *и дается формулой (18). При* $\varkappa < 0$ *единственное регулярное в* $D+$ *решение задачи (2) существует при выполнении* $-\varkappa - 1$ $(\lambda = 1)$ *и* $-\varkappa$ $(\lambda = -1)$ *вещественных условий разрешимости, выражающихся через коэффициенты краевого условия (2) и уравнения (1).*

Одесский государственный университет
Ростовский государственный университет

Поступило 19.V.66

Գ. Ս. ԼԻՏՎԻՆՉՈՒԿ և Ն. Տ. ՄԻՇՆՅԱԿՈՎ

ԿԱՐԼԵՄԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹԻ ՀԱՄԱՐ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍՈՒՄ

Ամփոփում

Տրված է Կարլեմանի եզրային խնդրի լուծումը առաջին կարգի էլիպտիկ տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների համար վերջավոր միակապ տիրույթի դեպքում։

G. S, LITWINCHUK and N. T. MISNJAKOV

CARLEMAN BOUNDARY PROBLEM FOR BOUNDED DOMAINS IN THE CLASS OF GENERALISED ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

Carleman boundary problem for a system of the first order differential equations of elliptic type is considered. The solution is found in the case of finite, simply-connected domains.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. С. Литвинчук.* Об одной краевой задаче с обратным сдвигом в классе обобщенных аналитических функций, Сибирский матем. журнал, III, № 2 (1962), 223—228.
2. *Хоу Цзун-И.* Краевая задача Карлемана для эллиптических систем уравнений первого порядка, „Scienta Sinica", 12, № 8 (1963), 1237.
3. *И. Н. Векуа.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., (1959).
4. *Д. А. Квеселава.* Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Тбилисского матем. института, 16 (1948), 39—80.
5. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, Физматгиз, М., (1963).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 1, 1967 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН

К ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ТОЧЕЧНЫХ ПОЛЕЙ ПУАССОНА В ТЕРМИНАХ РАЗЛОЖИМОСТИ ТОЧЕЧНОГО ПОЛЯ НА ОГРАНИЧЕННОЕ ЧИСЛО НЕЗАВИСИМЫХ КОМПОНЕНТ

Макфаддену принадлежит следующий результат (см. [1]).

Если стационарный рекуррентный точечный процесс Π *представим в виде суперпозиции двух независимых т. процессов, один из которых является рекуррентным т. процессом с конечным вторым моментом длины интервала между последовательными событиями, а другой является т. процессом Пуассона, то и сам т. процесс* Π *является т. процессом Пуассона.*

Возможность в некоторых ситуациях делать заключение, что данный т. процесс является т. процессом Пуассона на основании разложимости т. процесса на независимые компоненты, представляет большой интерес.

В частности возникает проблема: нельзя ли указать более широкий класс стационарных т. процессов P такой, что из представимости т. процесса $\Pi \in P$ в виде суперпозиции независимых рекуррентных т. процессов Π_i следовало бы, что Π является т. процессом Пуассона. Как показано в (2) в качестве класса P может быть выбран класс $\mathfrak{M}$ стационарных т. процессов, у которых интервалы между последовательными событиями составляют марковскую последовательность конечного порядка.

Более точно, в (2) доказана следующая

Теорема 1. *Пусть т. процесс* Π *представим в виде суперпозиции независимых рекуррентных т. процессов* Π_i:

$$\Pi = \Pi_1 * \cdots * \Pi_n$$

и выполняются условия

а) $\Pi \in \mathfrak{M}$

б) *для каждой из функций распределения* $F_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$ *длины интервала между последовательными событиями в т. процессе* Π_i *существуют производные в нуле, причем*

$$a_i = \left. \frac{dF_i(x)}{dx} \right|_{x=0} \neq 0$$

и как бы ни выбирались индексы $i, j_1, \cdots, j_k$, $i \neq j_1 \neq \cdots \neq j_k$ *всегда остается справедливым неравенство* $a_i \neq a_{j_1} + \cdots + a_{j_k}$.

Тогда т. процесс Π *(также как и каждая из компонент* Π_i*) является т. процессом Пуассона.*

Оказывается, что используя результаты, полученные в (4), можно так видоизменить применяемый в (2) и (3) метод условных математических ожиданий, чтобы получить результаты, аналогичные теореме 1 в случае, когда от компонент Π_i требуется уже не рекуррентность, а, например, всего лишь принадлежность к классу $\mathfrak{M}$ (вместе с некоторыми условиями регулярности). В то же время этот же видоизмененный метод позволяет проводить анализ *точечных полей* (В дальнейшем—т. полей), т. е. случайных распределений точечных объектов на плоскости (E_2) или в пространстве (E_3).

В настоящей статье показывается как это можно осуществить.

Отсутствие естественной упорядоченности у систем точек в E_2 или в E_3 не позволяет прямо распространить понятие класса $\mathfrak{M}$ на случай однородных т. полей. Таким образом, прежде всего возникает задача отыскания подходящих терминов, с помощью которых предполагается выделять классы т. полей. Выясняется, что в круге вопросов настоящей работы удобным является понятие производных т. полей данного однородного т. поля (определение 1). На основе этих понятий выделен класс $\mathfrak{M}'$ (определение 2), который в одномерном случае включает в себя все т. процессы, принадлежащие $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющие некоторым условиям регулярности.

Основным результатом настоящей работы является теорема 3, которая указывает достаточные условия, когда из соотношений

$$\Pi = \Pi_1 * \Pi_2 * \cdots * \Pi_n,$$

$$\Pi \in \mathfrak{M}',\ \Pi_i \in \mathfrak{M}',\ i = 1, \cdots, n$$

вытекает, что Π (а также Π_i, $i = 1, \cdots, n$) является т. полем Пуассона.

2. Напомним принадлежащее Рилль-Нардзиевскому определение точечных полей как мер в некотором измеримом пространстве.

Буква ω закрепляется для обозначения отдельных фиксированных систем точечных объектов в E_k ($k = 1, 2, 3$).

Через Ω обозначим множество всех возможных ω, подчиненных единственному условию: множество точечных объектов каждого $\omega \in \Omega$ не имеет точек сгущения в E_k.

Пусть $X(\omega, B)$ обозначает число объектов, принадлежащих данному $\omega \in \Omega$ и попадающих в выделенное в E_k борелевское множество $B \in E_k$.

Естественно рассматривать минимальное σ—поле R, порождаемое множествами элементов ω вида

$$\{\omega;\ \overline{X}(\omega, \overline{B}) = \overline{k}\} = \{\omega;\ X(\omega, B_1) = k_1, \cdots, X(\omega, B_n) = k_n\},$$

где $B_1, \cdots, B_n$ — непересекающиеся борелевские множества из E_k.

Точечное поле Π определяется заданием вероятностной меры π в измеримом пространстве (Ω, R). Для задания меры в (Ω, R) достаточно задать согласованные вероятности

$$\pi\{\omega;\ \overline{X}(\omega, \overline{B}) = \overline{k}\} = \pi_{\overline{k}}(\overline{B}).$$

Т. поле называется однородным, если для любого вектора $x \in E_k$ выполняется

$$\pi_{\overline{k}}(\overline{B}-x)=\pi_{\overline{k}}(\overline{B}),$$

где $\overline{B}-x$ обозначает систему борелевских множеств, получаемую из $\overline{B}$ сдвигом на вектор x.

Определение 1. Будем говорить, что для однородного т. поля П определено производное т. поле l-того порядка, если выполняются условия

а) $$\pi_l(C)=\sigma^{(l)}v^l+o(v^l),$$

где v — лебеговская мера в E_k борелевского множества C (диаметр множества C стремится к нулю) и $\sigma^{(l)}\neq 0$ есть коэффициент, не зависящий от v.

б) Для любой последовательности борелевских множеств C, стягивающихся к началу координат, существует предел

$$\lim \frac{\pi_{(l,\overline{k})}(C,\overline{B})}{\pi_l(C)}=\pi_{\overline{k}}^{(l)}(\overline{B}),$$

причем $\pi_{\overline{k}}^{(l)}(\overline{B})$ задает некоторую вероятностную меру $\pi^{(l)}$ в (Ω, R). Отвечающее мере $\pi^{(l)}$ т. поле $\Pi^{(l)}$ будем называть производным т. полем l-того порядка т. поля П.

Легко можно показать, что справедлива

Теорема 1. *Если для независимых однородных т. полей Π_i, $i=1,\cdots,n$ определены производные т. поля l-того порядка, то и для их суперпозиции*

$$\Pi=\Pi_1 * \cdots * \Pi_n$$

определено производное т. поле l-того порядка, причем

$$\Pi^{(l)}=\sum_{l_1+\cdots+l_n=l}\frac{\sigma_1^{(l_1)}\cdots\sigma_n^{(l_n)}}{\sigma^{(l)}}\Pi_1^{(l_1)}*\cdots*\Pi_n^{(l_n)} \tag{1}$$

и

$$\sigma^{(l)}=\sum_{l_1+\cdots+l_n=l}\sigma_1^{(l_1)}\cdots\sigma_n^{(l_n)}.$$

В (1) положено $\Pi_i^{(0)}=\Pi_i$. Вообще под выпуклой суммой т. полей

$$\Pi=\Sigma p_i\Pi_i,\ \Sigma p_i=1,\ p_i>0$$

следует понимать т. поле, отвечающее выпуклой сумме

$$\Sigma p_i\pi_i,$$

где π_i — вероятностные меры в (Ω, R), отвечающие т. полям Π_i.

В формулировке теоремы 1 нижние индексы указывают, к какому т. полю относится данная величина.

Отметим следующее свойство употребляемой нами символики: если под символом П понимать отвечающую данному т. полю производящую функцию, т. е. если формально полагать

$$\Pi = \Sigma \, \overline{z}^{\overline{k}} \, \pi_{\overline{k}}(\overline{B})$$

и символ * читать как умножение, то уравнения для т. полей (1) превращаются в алгебраические соотношения для производящих функций соответствующих т. полей. Имея это в виду, в дальнейшем суперпозицию независимых т. полей будем записывать с помощью знака умножения и будем обращаться с уравнениями в т. полях как с алгебраическими соотношениями.

Переходя к определению класса $\mathfrak{M}'$, ограничимся т. полями, для которых определены производные т. поля всех порядков.

Определение 2. Однородное т. поле Π принадлежит классу $\mathfrak{M}'$, если выполняются условия

а) существует такое целое r, что для всех $l \geqslant r$

$$\Pi^{(l)} = \Pi^{(r)}; \tag{2}$$

разумеется, в (2) исключается из рассмотрения начало координат;

б) для номеров $l \geqslant r$ справедливо представление

$$\pi_{(l,1)}(C, dC) = \pi_l(C)\,\alpha dv + o(v^l)\,dv + o(dv)\,\alpha + o, \tag{3}$$

где C — шар (малого) объема v, а dC — шаровой слой объема dv, примыкающий снаружи к шару C.

В дальнейшем постоянную величину α из (3) будем называть параметром т. поля $\Pi \in \mathfrak{M}'$.

Условие б) определения 2, очевидно, представляет собой некоторое требование асимптотической независимости числа объектов, попадающих в различные части малых областей в E_k. Что касается условия а), то определенное представление о его характере дает следующая простая теорема, которую мы также приводим без доказательства.

Теорема 2. *Пусть т. поле Π_1 удовлетворяет условию а) определения 2, и пусть Π_1 — однородное т. поле, для которого $\pi_r(C) = o(v^r)$ (обозначения см. в а), определения 1) но определены производные т. поля порядков меньших r.*

Тогда для выпуклой суммы

$$\overline{\Pi} = p\Pi + q\Pi_1, \; p + q = 1, \; p, q \geqslant 0$$

определены производные т. поля всех порядков, причем

$$\overline{\Pi}^{(l)} = \Pi^{(l)} \quad \text{для } l \geqslant r.$$

Примеры т. полей из класса $\mathfrak{M}'$. Если Π_1 — т. поле, фигурирующее в условии теоремы 2, а Π_2 — однородное пуассоновское т. поле, то, как легко видеть, выпуклая сумма

$$p\Pi_1 + q\Pi_2$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}'$.

С помощью введенных выше т. полей Π_1 и Π_2 можно построить и другой пример т. поля, принадлежащего классу $\mathfrak{M}'$.

Пусть $B(P)$ — бинарное однородное стохастическое поле на E_k, т. е. поле с вероятностью 1 принимающее только два значения: 0 и 1.

От $B(P)$ дополнительно потребуем, чтобы вероятность события: „$B(P)$ принимает различные значения внутри шара объема v" — стремилась бы к нулю вместе с v.

Под произведением $B(P)\Pi$ в настоящем примере будем понимать т. поле, получаемое из т. поля Π путем его прореживания согласно бинарному полю $B(P)$. Именно, объект т. поля Π, находящийся в точке P, выбрасывается, если $B(P)=0$ и оставляется на месте, если $B(P)=1$. Для независимых $B(P)$, Π_1 и Π_2 можно установить, что суперпозиция зависимых т. полей

$$B(P)\,\Pi_1 * [1-B(P)]\,\Pi_2 \tag{4}$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}'$. Имеется в виду при этом, что слева и справа от звезды в (4) стоит *одна и та же* реализация поля $B(P)$.

Следующая лемма является следствием условия б), входящего в определение класса $\mathfrak{M}'$.

Лемма 1. *Если* $\Pi \in \mathfrak{M}'$, *то для всех* $l \geqslant r$

$$\sigma^{(l)} = \frac{c\alpha^l}{l!},$$

где C не зависит от l, а α — параметр т. поля Π.

Доказательство. Вероятности $\pi_l(C)$, где C — шар объема v, будем рассматривать как функцию от v и обозначать $\pi_l(v)$. Имеем, в понятных обозначениях $(l \geqslant r)$

$$\pi_l(v+dv) = \pi_{(l,0)}(v, dv) + \pi_{(l-1,1)}(v, dv) + o(dv) =$$
$$= \pi_l(v) - \pi_{(l,1)}(v, dv) + \pi_{(l-1,1)}(v, dv) + o(dv) =$$
$$= \pi_l(v) - \pi_l(v)\,\alpha dv + o(v^l)\,dv + \pi_{l-1}(v)\,\alpha dv + o(v^{l-1})\,dv + o(dv).$$

Следовательно, существует производная $\dfrac{d}{dv}\pi_l(v)$, причем

$$\frac{d}{dv}\pi_l(v) = -\alpha\pi_l(v) + \alpha\pi_{l-1}(v) + o(v^{l-1}).$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим

$$\pi_l(v) = e^{-\alpha v}\int_0^v e^{\alpha\xi}\,\alpha\pi_{l-1}(\xi)\,d\xi + e^{-\alpha v}\int_0^v e^{\alpha\xi}\,o(\xi^{l-1})\,d\xi.$$

Используя условие а) определения 1, получаем

$$\sigma^{(l)} = \frac{\sigma^{(l-1)}}{l}\,\alpha, \quad l \geqslant r,$$

откуда и следует утверждение леммы 1.

Прежде чем сформулировать основную теорему 3 дадим еще одно

Определение 3. Будем говорить, что строка т. полей

$$(\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_n)$$

принадлежит к классу строк $\overline{\mathfrak{M}}'^n$, если а) все $\Pi_i \in \mathfrak{M}'$, $i=1,\cdots, n$ и независимы;

б) каким бы образом ни выбирались индекс i и набор индексов $j_1, \cdots, j_k$, $k<n$, $i \neq j_1, \cdots i \neq j_k$ из множества $1, 2, \cdots, n$, всегда

$$\alpha_i \neq \alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \cdots + \alpha_{j_k},$$

здесь α_i — параметр т. поля Π_i в смысле определения 2.

3. Теорема 3. *Пусть т. поле* Π *является суперпозицией т. полей* Π_i, $i=1,\cdots, n$

$$\Pi = \Pi_1 \Pi_2 \cdots \Pi_n,$$

и удовлетворяет условию а) определения 2, а $(\Pi_1, \cdots, \Pi_n) \in \overline{\mathfrak{M}}'^n$. *Тогда т. поле* Π, *также как и т. поля* Π_i, $i=1,\cdots n$, *являются т. полями Пуассона.*

При доказательстве теоремы 3 используется следующая лемма, доказательство которой мы опускаем.

Лемма 1. *Пусть* $r_1, \cdots, r_k$, m, s — целые неотрицательные числа, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ — *действительные числа; тогда*

$$\sum_{l=s}^{\infty} z^l \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_k=l-m \\ l_1 \geq r_1, \cdots, l_k \geq r_k}} \frac{\alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_k^{l_k}}{l_1! \cdots l_k!} =$$

$$= z^m e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)z} + \sum_{\substack{\{i_1,\cdots,i_h\} \\ h<k}} e^{(\alpha_{i_1}+\cdots+\alpha_{i_h})z} \varphi_{i_1,\cdots,i_h}(z)$$

где $\varphi_{i_1,\cdots,i_h}(z)$ — *многочлены, степень каждого из которых не превышает*

$$\max(s, m+r_1+r_2+\cdots+r_k).$$

Сумма справа берется по всем возможным наборам индексов размеров меньших k, *которые можно выбрать из множества индексов* $\{1, 2, \cdots, k\}$.

Доказательство теоремы 3.

Величины $\sigma^{(l)}$, r, a, c, определенные для каждого т. поля из класса $\mathfrak{M}'$, будем относить к т. полю Π_i, добавляя к ним нижний индекс i.

Положим $s = \max(r, r_1+\cdots+r_n)$ и рассмотрим производные т. поля $\Pi^{(l)}$ порядков, превышающих s. Согласно условию теоремы 3 можно положить для таких l

$$\Pi^{(l)} = \Pi^{(r)}, \quad \Pi_i^{(l)} = \Pi_i^{(r_i)}, \quad \sigma_i^{(l)} = \frac{c_i \alpha_i^l}{l!}. \tag{5}$$

Уравнение (1) для $\Pi^{(l)}$, учитывая (5), перепишем в виде

$$\sigma^{(l)} \Pi^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{(i_1,\cdots,i_k)} \sum_{\substack{0 \leq l_{i_1} < r_{i_1} \\ \cdots\cdots \\ 0 \leq l_{i_k} < r_{i_k}}} \sigma_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \sigma_{i_k}^{(l_{i_k})} \Pi_{i_1}^{(l_{i_1})} \cdots \Pi_{i_k}^{(l_{i_k})} \times$$

$$\times c_{j_1}\cdots c_{j_{n-k}}\Pi_{j_1}^{(r_{j_1})}\cdots\Pi_{j_{n-k}}^{(r_{j_{n-k}})}\sum_{\substack{l_{j_1}+\cdots+l_{j_{n-k}}=\\=l-l_{i_1}-\cdots-l_{i_k},\\ l_{j_1}\geq r_{j_1},\ldots,l_{j_{n-k}}\geq r_{j_{n-k}}}}\frac{\alpha_{j_1}^{l_{j_1}}\cdots\alpha_{j_{n-k}}^{l_{j_{n-k}}}}{l_{j_1}!\cdots l_{j_{n-k}}!}. \tag{6}$$

Поясним, что в (6) второе суммирование производится по всем возможным наборам индексов размера k, которые можно выбрать из множества индексов $\{1, 2,\cdots, n\}$, а $j_1,\cdots, j_{n-k}$ это те индексы из множества $\{1, 2,\cdots, n\}$, которые не входят в набор $\{i_1,\cdots, i_k\}$. Согласно теореме 1 имеем также

$$\sigma^{(l)}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}}\sum_{\substack{0<l_{i_1}<r_{i_1}\\ \cdots\cdots\\ 0<l_{i_k}<r_{i_k}}}\sigma_{i_1}^{(l_{i_1})}\cdots\sigma_{i_k}^{(l_{i_k})}c_{j_1}\cdots c_{j_{n-k}}\sum_{\substack{l_{j_1}+\cdots+l_{j_{n-k}}=\\=l-l_{i_1}-\cdots-l_{i_k},\\ l_{j_1}\geq r_{j_1},\ldots,l_{j_{n-k}}\geq r_{j_{n-k}}}}\frac{\alpha_{j_1}^{l_{j_1}}\cdots\alpha_{j_{n-k}}^{l_{j_{n-k}}}}{l_{j_1}!\cdots l_{j_{n-k}}!}.$$

Помножим теперь уравнение (6) на z^l и просуммируем от s до ∞. Меняя порядок суммирования и используя лемму 2, приходим к результату

$$\Pi^{(r)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}}\sum_{\substack{0<l_{i_1}<r_{i_1}\\ \cdots\cdots\\ 0<l_{i_k}<r_{i_k}}}\sigma_{i_1}^{(l_{i_1})}\cdots\sigma_{i_k}^{(l_{i_k})}c_{j_1}\cdots c_{j_{n-k}}\times$$

$$\times\left[z^{l_{i_1}+\cdots+l_{i_k}}e^{(\alpha_{j_1}+\cdots+\alpha_{j_{n-k}})z}+\sum_{\{d_1,\ldots,d_h\}}e^{(\alpha_{i_{d_1}}+\cdots+\alpha_{i_{d_h}})z}\varphi_{i_{d_1}\cdots i_{d_h}}(z)\right]= \tag{7}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}}\sum_{\substack{0<l_{i_1}<r_{i_1}\\ \cdots\cdots\\ 0<l_{i_k}<r_{i_k}}}\sigma_{i_1}^{(l_{i_1})}\cdots\sigma_{i_k}^{(l_{i_k})}\Pi_{i_1}^{(l_{i_1})}\cdots\Pi_{i_k}^{(l_{i_k})}\Pi_{j_1}^{(r_{j_1})}\cdots\Pi_{j_{n-k}}^{(r_{j_{n-k}})}\times$$

$$\times c_{j_1}\cdots c_{j_{n-k}}\left[z^{l_{i_1}+\cdots+l_{i_k}}e^{(\alpha_{j_1}+\cdots+\alpha_{j_k})z}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\{d_1,\ldots,d_h\}}e^{(\alpha_{j_{d_1}}+\cdots+\alpha_{j_{d_h}})z}\varphi_{j_{d_1}\cdots j_{d_h}}(z)\right].$$

Согласно лемме 2, степени каждого из многочленов $\varphi_{j_{d_1}\cdots j_{d_h}}(z)$ не превосходят $\max(s, l_{i_1}+\cdots+l_{i_k}+r_{j_1}+\cdots+r_{j_{n-k}})=s$.

Из этого, в частности, следует, что правую часть (7) можно представить в виде

$$c_1\cdots c_n\Pi_1^{(r_1)}\cdots\Pi_n^{(r_n)}e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)z}+ \tag{8}$$

$+$ остаток, линейно не зависящий от функции $e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)z}$, а левую часть (7)—в виде

$$c_1\cdots c_n\Pi^{(r)}e^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)z}+ \tag{9}$$

$+$ остаток, линейно не зависящий от функции $e^{(a_1+\cdots+a_n)z}$, откуда заключаем, что

$$\Pi^{(r)}=\Pi_1^{(r_1)}\cdots\Pi_n^{(r_n)}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что слагаемые слева и справа в (7), отвечающие $k=0$ равны и взаимно уничтожаются. Следовательно, равенство (7) остается справедливым, если слева и справа в (7) производить суммирование по k лишь от 1 до $n-1$. Замечания аналогичные (8) и (9) справедливы и для укороченных таким образом сумм слева и справа в формуле (7), по отношению к функциям $e^{(\Sigma a_k - a_l)z}$ и $ze^{(\Sigma a_k - a_l)z}$; с учетом условия б) определения 3 сравнение коэффициентов при этих функциях приводит к уравнениям

$$\Pi^{(r)}=\Pi_1^{(r_1)}\cdots\Pi_i^{(0)}\cdots\Pi_n^{(r_n)},$$

$$\Pi^{(r)}=\Pi_1^{(r_1)}\cdots\Pi_i^{(1)}\cdots\Pi_n^{(r_n)} \quad (i=1,\cdots,n).$$

Откуда заключаем, что

$$\Pi_i^{(0)}=\Pi_i^{(1)} \quad (i=1,\cdots,n). \tag{11}$$

Как показано в [4], из уравнений (11) следует, что Π_i, $i=1,\cdots,n$ является т. полем Пуассона. Следовательно, и Π есть т. поле Пуассона.

Таким образом, теорема 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 1.11.66

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԹՎՈՎ ԱՆԿԱԽ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՎՈՂ ԿԵՏԱՅԻՆ ԴԱՇՏԵՐԻ՝ ՊՈՒԱՍՍՈՆՅԱՆ ԼԻՆԵԼՈՒ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ խնդիրը. ինչ պայմանների պետք է բավարարեն հարթության կամ տարածության մեջ տրված Π և Π_i $(i=1,\cdots,n)$ կետային դաշտերը, որպեսզի $\Pi=\Pi_1*\cdots*\Pi_n$ առնչությունից բխի Π-ի (ինչպես և բոլոր Π_i բաղադրիչների) Պուասսոնյան լինելը։

Գտնված է մի բավարար պայման, որը հետևյալն է.

$$\Pi\in\mathfrak{M}', \quad (\Pi_1,\cdots,\Pi_n)\in\widetilde{\mathfrak{M}}'^n$$

որտեղ $\mathfrak{M}'$ և $\widetilde{\mathfrak{M}}'^n$ դասերը սահմանված են ածանցյալ դաշտերի տերմիններով (տես սահմանումներ 1, 2, 3)։ Միաչափ դեպքում $\mathfrak{M}'$ դասը ընդգրկում է «ռեգուլյար» վերջավոր կարգի Մարկովյան կետային պրոցեսների դասը։

R. V. AMBARTZUMIAN

CHARACTERISATION OF POISSON POINT FIELDS IN TERMS OF EXISTANCE OF LIMITED NUMBER OF INDEPENDENT COMPONENTS

Summary

The paper conside-s the following problem: find out the conditions to be imposed on the homogeneous point fields Π and Π_i $(i=1,\cdots, n)$ with realisations on plane or in space, such that from representation

$$\Pi=\Pi_1 * \cdots * \Pi_n$$

one may derive, that either Π and Π_i are Poisson. In the paper such sufficient conditions are found. These conditions are formulated as follows:

$$\Pi\in\mathfrak{M}', (\Pi_1,\cdots, \Pi_n)\in\overline{\mathfrak{M}'^n}$$

where $\mathfrak{M}'$ and $\overline{\mathfrak{M}'^n}$ are classes of point fields, defined in the paper in terms of derivative point fields (definitions 1, 2, 3). In one dimensional case the class $\mathfrak{M}'$ containes the class of regular Marcov point processes of finite order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. A. McFedden*. On the lengths of intervals in a stationary point process, J. R. Statis. Soc., B, 24, 368—382.
2. *Р. В. Амбарцумян*. К характеризации точечных процессов Пуассона в терминах разложимости точечного процесса на независимые рекуррентные компоненты.
3. *R. V. Ambartzumian*. Two inverse problems concerning the superposition of recurrent point processes, J. Appl. Prob., 2, 449—454 (1965).
4. *Р. В. Амбарцумян*. Об одном уравнении стационарных точечных процессов, ДАН Арм.ССР, XII, № 3 (1965).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS