ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 6, 1966 Математика

Г. Г. ДЖЕБЕЯН, Э. Р. ЦЕКАНОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ

Введение

Изучаемая в настоящей работе задача возникла в связи с применением теории несамосопряженных операторов к вопросам распространения волн в радиоволноводах [2].

Пусть $L_2(\Omega)$ — гильбертово пространство вектор-функций $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, заданных в области Ω трехмерного эвклидова пространства R_3 со скалярным произведением $(u, v)=\int\limits_{\Omega}\sum\limits_{i=1}^{3} u_i \overset{*}{v_i}\, d\Omega$. В работах [4, 5] рассматривается разбиение $L_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства и подробно исследуются в них свойства оператора rot при различных однородных краевых условиях, которым подчинены вектор-функции. Опираясь на указанные результаты, мы изучаем оператор Максвелла

$$T=\begin{pmatrix}0 & -i\,rot\\ i\,rot & 0\end{pmatrix}$$

при некоторых несамосопряженных краевых условиях и устанавливаем ряд его свойств (находится вид обратного оператора T^{-1}, устанавливается его полная непрерывность, определяются реальная и мнимая части этого оператора). Основываясь на работе [8], мы строим нормированное в точке нуль обобщенное расширение оператора T. Эти исследования [2], [4, 5] применяются к вопросам распространения волн в волноводе (коаксиальной линии), оканчивающимся объемным резонатором. Оказывается, что можно написать уравнение поля внутри резонатора с помощью несамосопряженного оператора T^{-1}, при условии, когда не учитываются затухающие виды колебаний, образующиеся при отражении падающей волны от горловины резонатора. Используя определение характеристических функций ограниченного и неограниченного операторов [1], [9] и связь между ними [9], мы показываем, что коэффициент отражения совпадает с характеристической функцией оператора T, обладающей важными аналитическими свойствами (отображает верхнюю полуплоскость на внутренность либо внешность единичного круга, особенности ее являются частью дискретного спектра оператора T).

Для удобства мы поместили в § 1 определения некоторых функциональных пространств и основные результаты работ [4, 5], а в § 3 привели схему построения обобщенных расширений несимметрических операторов [8, 9] и их характеристических функций.

В заключение, мы хотим выразить благодарность М. С. Лившицу за постоянное внимание и советы при выполнении настоящей работы.

§ 1. Вспомогательные определения и теоремы

1. Пусть Ω — ограниченная область трехмерного эвклидова пространства R_3 с поверхностью Γ, состоящей из двух кусков: достаточно гладкой поверхности S и плоского сечения Σ. В дальнейшем мы будем рассматривать вектор-функции $\mathbf{u}\,(u_1,\ u_2,\ u_3)$, заданные в области Ω и принадлежащие некоторым функциональным пространствам, определения которых мы приводим.

Пространством $L_2(\Omega)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых суммируемы с квадратом модуля в Ω, а скалярное произведение определяется по формуле

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}u_i v_i^{*}\,d\Omega.$$

Пространством $W_2^1(\Omega)$ назовем гильбертово пространство вектор-функций, все компоненты которых суммируемы с квадратом модуля в Ω и имеют квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка. Скалярное произведение в W_2^1 определяется по формуле

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\int\limits_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial v_i^{*}}{\partial x_k}\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}u_i v_i^{*}\,d\Omega.$$

J_1 — подпространство в $L_2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_1$ гладких соленоидальных векторов $\mathbf{u}$ (т. е. векторов, удовлетворяющих условию $div\,u=0$), для которых $u_{n|\Sigma}=0$, где $u_{n|\Sigma}$ — нормальная составляющая вектора $\mathbf{u}$ на Σ.

J_2 — подпространство $L_2(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $L_2(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_2$ гладких соленоидальных векторов $\mathbf{v}$, для которых $v_{n|S}=0$.

J_{11} — подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^1(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_{11}$ гладких соленоидальных векторов $\mathbf{u}$, для которых $u_{n\,\Sigma}=0$, $\mathbf{u}_{\tau|S}=0$.

J_{21} — подпространство $W_2^1(\Omega)$, являющееся замыканием в норме $W_2^1(\Omega)$ линеала $\tilde{J}_{21}$ гладких соленоидальных векторов, для которых $v_{n|S}=0$, $\mathbf{v}_{\tau|\Sigma}=0$.

Лемма 1. *Линеалы* $\tilde{J}_{11}$ *и* $\tilde{J}_{21}$ *плотны соответственно в* J_1 *и* J_2.

Теорема 1. *Всякий вектор* $\mathbf{u} \in J_1$ *однозначно представим в виде* $\mathbf{u} = rot\,\Phi$, *где* $\Phi \in J_{21}$; *имеет место неравенство*

$$\|\Phi\|_{W_2^1} \leqslant C\|rot\,\Phi\|_{L_2}.$$

Теорема 2. *Всякий вектор* $\mathbf{v} \in J_2$ *однозначно представим в виде* $\mathbf{v} = rot\,\Psi$, *где* $\Psi \in J_{21}$; *имеет место неравенство*

$$\|\Psi\|_{W_2^1} \leqslant C\|rot\,\Psi\|_{L_2}.$$

Доказательство леммы 1 и теорем 1, 2 можно найти в работах [4, 5].

Введем гильбертово пространство $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ вектор-функций $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ со следующим скалярным произведением:

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \int_\Omega (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2^*)\, d\Omega.$$

Оператором Максвелла будем называть оператор вида

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -irot \\ irot & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Обозначим через B оператор Q, определенный на гладком линеале $D(B) = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} \\ \tilde{J}_{21} \end{pmatrix}$.

Из леммы 1 следует, что область определения оператора B плотна в H. Значение B на $f \in D(B)$ вычисляется по формуле

$$B\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -irot\,\mathbf{H} \\ irot\,\mathbf{E} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Оператор B симметричен. Замыкание оператора B обозначим через B_0, при этом $D(B)$ расширяется до $D(B_0) = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{21} \end{pmatrix}$.

Из теорем 1,2 следует, что оператор B_0 однозначно отображает $D(B_0)$ на все H, следовательно B_0 — самосопряженный оператор. Для любого вектора $\mathbf{f} \in D(B_0)$ имеет место неравенство

$$\|\mathbf{f}\|_{W_2^1} \leqslant C\|B_0\mathbf{f}\|_{L_2}, \tag{1.3}$$

которое вытекает из теорем 1,2. Из неравенства (1.3) и теорем вложения С. Соболева [6] следует вполне непрерывность обратного оператора B_0^{-1}. Вид оператора B_0^{-1} мы установим в следующем параграфе.

2. Пусть в сечении Σ задана полная ортонормированная система гладких вектор-функций $\{\mathbf{G}_\nu\}_1^\infty$, для которых

$$\int_\Sigma \mathbf{G}_\nu \cdot \mathbf{G}_\mu \, d\sigma = \delta_{\nu\mu}, \quad \delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \nu = \mu, \\ 0, & \nu \neq \mu. \end{cases} \tag{1.4}$$

Будем считать, что вектор-функции $\mathbf{G}_\nu$ $(\nu > 1)$ имеют представление

$$\mathbf{G}_\nu = \sqrt{\rho_\nu}\, grad \zeta_\nu^0, \tag{1.5}$$

где ζ_ν^0 — гладкие функции в сечении Σ, удовлетворяющие на контуре l, охватывающем Σ, условию $\left.\frac{\partial \zeta_\nu^0}{\partial n_0}\right|_l = 0$ ($\mathbf{n}_0$ — нормаль к l).

Рассмотрим в области Ω краевые задачи [7]

$$\Delta \zeta_\nu = 0, \ \left.\frac{\partial \zeta_\nu}{\partial n}\right|_s = 0, \ \zeta_\nu|_\Sigma = \zeta_\nu^0. \tag{1.6}$$

Введем вектор-функции

$$\mathbf{w}_\nu = \sqrt{\rho_\nu}\, grad \zeta_\nu, \tag{1.7}$$

которые удовлетворяют векторному уравнению Лапласа и краевым условиям

$$w_{\nu n}|_s = 0, \ \mathbf{w}_{\nu\tau}|_\Sigma = \mathbf{G}_\nu. \tag{1.8}$$

§ 2. Построение обратного для оператора Максвелла при несамосопряженных краевых условиях

Обозначим через T оператор Максвелла Q ((1.1)), определенный на линеале $D(T)$, состоящем из гладких вектор-функций $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ из $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условиям

$$D(T) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau|_s = 0, & E_n|_\Sigma = 0, & \int_\Sigma \mathbf{H}_\tau \mathbf{G}_\nu \, d\sigma = 0 \quad (\nu > 1) \\ H_n|_s = 0, & \int_\Sigma \mathbf{E}_\tau (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) \, d\sigma = -\rho_1 \int_\Sigma \mathbf{H}_\tau \mathbf{G}_1 d\sigma & \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\{\mathbf{G}_\nu\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система вектор-функций в сечении Σ, векторы $\mathbf{G}_\nu$ $(\nu > 1)$ имеют представление (1.5) и удовлетворяют (1.4), ρ_1 — вещественное число. Значение оператора T на векторах $\mathbf{f} \in D(T)$ вычисляется по формуле

$$T\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i\,rot\,\mathbf{H} \\ i\,rot\,\mathbf{E} \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Область определения оператора T плотна в $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$, поскольку $D(T) \supset D(B)$.

Теорема 3. *Оператор T ((2.2), (2.1)) имеет обратный оператор, определенный на множестве гладких вектор-функций $g = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \in H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$, замыкание которого является вполне непрерывным оператором в H.*

Доказательство. Покажем, что оператор T обратим. Пусть $\mathfrak{f} \in D(T)$ и $T\mathfrak{f} = 0$. Тогда $rot\,E = 0$, $rot\,H = 0$. Следовательно, $E = grad\,\varphi$, $H = grad\,\psi$, где φ и ψ — гармонические функции, поскольку $div\,E = 0$, $div\,H = 0$. Так как вектор E удовлетворяет на $\Gamma = S + \Sigma$ условиям $E_{n|_\Sigma} = 0$, $E_{\tau}|_s = 0$, то для гармонической функции φ имеют место условия $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0$, $\varphi|_s = \text{const}$. Значит, $E = grad\,\varphi = 0$. Краевые условия для вектора H, учитывая, что $E = 0$, имеют вид

$$H_n\big|_s = 0, \quad \int\limits_\Sigma H_\tau G_\nu d\sigma = 0 \quad (\nu > 1)$$

или

$$H_{n|_s} = 0, \quad H_{\tau_\Sigma} = 0.$$

Тогда гармоническая функция ψ на границе области принимает значения $\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_s = 0$, $\psi\big|_\Sigma = \text{const}$, значит $H = grad\,\psi = 0$. Таким образом, уравнение $T\mathfrak{f} = 0$ имеет тривиальное решение. Найдем вид обратного оператора T^{-1}. Рассмотрим уравнение

$$T\mathfrak{f} = g, \tag{2.3}$$

где $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} \in D(T)$, а $g = \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix}$ — гладкий вектор из $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$. Уравнение (2.3) можно переписать в виде

$$-i\,rot\,H = E, \tag{2.4}$$

$$i\,rot\,E = H. \tag{2.5}$$

Построим векторы

$$E_I = -\frac{i}{4\pi} rot \left| \int\limits_\Omega \frac{H}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad\,\eta}{r} d\Omega \right|, \tag{2.6}$$

$$H_I = \frac{i}{4\pi} rot \left| \int\limits_\Omega \frac{E}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad\,\xi}{r} d\Omega \right|, \tag{2.7}$$

где Ω_1 — область, содержащая в себе область Ω, с границей Γ_1, η — решение в $\Omega_1 - \Omega$ задачи

$$\Delta\eta = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_s = 0, \quad \frac{\partial\eta}{\partial n}\Big|_\Sigma = -H_n\big|_\Sigma; \tag{2.8}$$

ξ — решение в $\Omega_1 - \Omega$ задачи

$$\Delta\xi = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_s = -\mathbf{E}_n\Big|_s, \quad \frac{\partial\xi}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0. \tag{2.9}$$

Очевидно, $div\,\mathbf{E}_I = div\,\mathbf{H}_I = 0$. Векторы $\mathbf{E}_I$ и $\mathbf{H}_I$ удовлетворяют уравнениям (2.4) и (2.5). Действительно,

$$rot\,\mathbf{E}_I = -\frac{i}{4\pi}\,rot\,rot\left\{\int_\Omega \frac{\mathbf{H}}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega} \frac{grad\,\eta}{r}\,d\Omega\right\} =$$

$$= \frac{i}{4\pi}\Delta\left\{\int_\Omega \frac{\mathbf{H}}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega}\frac{grad\,\eta}{r}\,d\Omega\right\} - \frac{i}{4\pi}\,grad\,div\left\{\int_\Omega \frac{\mathbf{H}}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega}\frac{grad\,\eta}{r}\,d\Omega\right\} =$$

$$= \frac{i}{4\pi}\Delta\int_\Omega \frac{\mathbf{H}}{r}\,d\Omega - \frac{i}{4\pi}\,grad\left\{\int_\Omega \frac{div\,\mathbf{H}}{r}\,d\Omega + \int_{\Omega_1-\Omega}\frac{div\,grad\,\eta}{r}\,d\Omega - \int_{S+\Sigma}\frac{H_n}{r}\,d\sigma -\right.$$

$$\left. - \int_{\Gamma_1+S+\Sigma} \frac{\frac{\partial\eta}{\partial n}}{r}\,d\Omega\right\} = \frac{i}{4\pi}\Delta\int_\Omega \frac{\mathbf{H}}{r}\,d\Omega = -i\mathbf{H}.$$

Аналогично проверяется, что $rot\,\mathbf{H}_I = i\mathbf{E}$.

Вектор-функцию $\mathbf{f} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} \in D(T)$ и удовлетворяющую уравнению (2.3) будем искать в виде

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_{II}\\ \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_{II}\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{W}_1\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Вектор-функции $\mathbf{E}_{II}$ и $\mathbf{H}_{II}$ представим следующим образом:

$$\mathbf{E}_{II} = grad\,\varphi, \quad \mathbf{H}_{II} = grad\,\psi, \tag{2.11}$$

где φ и ψ являются решениями смешанных задач

$$\Delta\varphi = 0; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_\Sigma = -E_{In}\Big|_\Sigma, \quad \varphi\Big|_s = \varphi^\circ, \tag{2.12}$$

$$\Delta\psi = 0; \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_s = -H_{In}\Big|_s, \quad \psi\Big|_\Sigma = \psi^\circ.$$

Граничные функции φ° и ψ° восстанавливаются по $E_{I\tau}\big|_s$ и $H_{I\tau}\big|_\Sigma$ соответственно [4, 5] так, что выполняются условия

$$grad_\tau\,\varphi^\circ = \mathbf{E}_{I\tau}\big|_s, \quad grad_\tau\,\psi^\circ = -\mathbf{H}_{I\tau}\big|_\Sigma. \tag{2.13}$$

Вектор-функция $\mathbf{w}_1$ имеет представление (1.7) ($\nu = 1$) и удовлетворяет условиям (1.8).

Вектор-функция

$$\mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{H}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_{II}\\ \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_{II}\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

удовлетворяет уравнению (2.3), а на границе области Ω выполняются условия

$$\mathbf{E}_{0\tau}\big|_{\Sigma} = 0, \ E_{0n}\big|_{\Sigma} = 0,$$
$$H_{0n}\big|_{\Sigma} = 0, \ \mathbf{H}_{0\tau}\big|_{\Sigma} = 0,$$

т. е. $\mathbf{f}_0$ принадлежит линеалу $D(B) = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{11} \\ \tilde{J}_{21} \end{pmatrix}$.

Коэффициент α найдем из условия

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{H}_{\tau} \mathbf{G}_1 \, d\sigma = -\frac{1}{\rho_1} \int\limits_{\Sigma} \mathbf{E}_{\tau} (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n}) \, d\sigma.$$

Подставляя $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \alpha \mathbf{w}_1$, получим

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_1} \int\limits_{\Sigma} \mathbf{E}_{0\tau} (\mathbf{G}_1 \times n) \, d\sigma = -\frac{1}{\rho_1} \int\limits_{\Sigma + S} (\mathbf{E}_{0\tau} \times \mathbf{w}_1) n d\sigma = \tag{2.15}$$

$$= \frac{1}{\rho_1} \int\limits_{\Omega} div \, (\mathbf{E}_0 \times \mathbf{w}_1) \, d\Omega = \frac{1}{\rho_1} \int\limits_{\Omega} rot \, \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{w}_1 \, d\Omega = -\frac{i}{\rho_1} \int\limits_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 \, d\Omega.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{f}$ ((2.10)) имеет представление

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 - \frac{i}{\rho_1} \int\limits_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 \, d\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{f}_0 \in D(B)$.

Легко проверить, что обратный оператор T^{-1} имеет вид

$$T^{-1} g = \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{4\pi} rot \left\{ \displaystyle\int\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \, \eta}{r} d\Omega \right\} + grad \, \varphi \\ \dfrac{i}{4\pi} rot \left\{ \displaystyle\int\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{E}}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \, \xi}{r} d\Omega \right\} + grad \, \psi \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{i}{\rho_1} \int\limits_{\Omega} \mathbf{H} \mathbf{w}_1 d\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Первое слагаемое в (2.17) определяет линейный оператор, переводящий гладкие векторы $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}$ из H в линеал $D(B)$, т. е.

$$B^{-1} \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\dfrac{i}{4\pi} rot \left\{ \displaystyle\int\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{H}}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \, \eta}{r} d\Omega \right\} + grad \, \varphi \\ \dfrac{i}{4\pi} rot \left\{ \displaystyle\int\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{E}}{r} d\Omega + \int\limits_{\Omega_1 - \Omega} \frac{grad \, \xi}{r} d\Omega \right\} + grad \, \psi \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Введем в рассмотрение вектор

$$\bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \sqrt{\dfrac{2}{\rho_1}} \mathbf{w}_1 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Тогда оператор T^{-1} ((2.17)) можно представить в виде

$$T^{-1}g = B^{-1}g - \frac{i}{2}(g, e)\ e.$$

Расширяя оператор T^{-1} по непрерывности на все H и обозначая это расширение снова через T^{-1}, получим

$$T^{-1}g = B_0^{-1}g + \frac{i}{2}(g, e)\ Je \quad (J = -1), \tag{2.20}$$

где B_0^{-1} является обратным оператором для самосопряженного оператора B_0, рассмотренного в § 1. Оператор T^{-1} представляется, как видно из (2.20), в виде суммы вполне непрерывного оператора B_0^{-1} и одномерного оператора $(\cdot, e)\ e$, следовательно, T^{-1} является вполне непрерывным оператором в $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$.

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы мы попутно установили, что вектор-функции f, принадлежащие области определения замкнутого оператора T, допускают представление

$$f = f_0 + \frac{i}{2}(B_0 f_0, e)\ Je, \quad f_0 \in D(B_0), \tag{2.21}$$

причем $Tf = B_0 f_0$.

§ 3. Понятие об обобщенных расширениях несимметрических операторов и их характеристических функциях. Обобщенное расширение оператора Максвелла

1. Путь T — замкнутый оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Оператор T будем относить к классу Ω_1, если:

1. Область определения $D(T)$ плотна в H;

2. На $D(T) \cap D(T^*)$ оператор T индуцирует симметрический оператор T_0;

3. Существует ограниченный обратный оператор T^{-1}, имеющий вполне непрерывную мнимую часть.

Введем гильбертово пространство $H_+ = D(T_0^*)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_+ = (T_0^* f, T_0^* g) + (f, g) \quad (f, g \in D(T_0^*)),$$

и построим тройку пространств [8]

$$H_+ \subseteq H \subseteq H_-,$$

где H_- — гильбертово пространство обобщенных элементов, порождающих антилинейные функционалы над H_+.

Пусть C — линейный ограниченный оператор, действующий из H_+ в H_-. При помощи равенства

$$(Cf, g) = (f, C' g) \quad (f, g \in H_+)$$

однозначно определяется обобщенный сопряженный оператор C^{*}, который также отображает H_{+} в H_{-}.

В [8] показано, что если оператор T принадлежит к классу Ω_1, то T и T^* можно расширить на все $H_{+} = D(T_0^*)$ так, чтобы полученные расширения были сопряжены друг к другу в обобщенном смысле и имели вид

$$T_{H_+} = A + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\cdot, \hat{e}_\alpha)\, v_{\alpha\beta}\, \hat{e}_\beta,$$

$$T^{*}_{H_+} = A - \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\cdot, \hat{e}_\alpha)\, v_{\alpha\beta}\, \hat{e}_\beta, \tag{3.1}$$

где A — обобщенное самосопряженное расширение оператора $\left(\frac{T^{-1}+T^{-1*}}{2}\right)^{-1}$, $\hat{e}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ — обобщенные каналовые векторы, определяемые равенством

$$(T_0^* f, e_\alpha) = (f, \hat{e}_\alpha), \tag{3.2}$$

e_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, r)$ — ортонормированный базис собственных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям оператора $\frac{T^{-1}-T^{-1*}}{i}$ в подпространстве $\frac{T^{-1}-T^{-1*}}{i}H$. В $H_{+} = D(T_0^*)$ обобщенный самосопряженный оператор определяется следующим образом:

$$Af = A_1 f_1 + A_2 f_2 \quad (f \in D(T_0^*),\ f_1 \in D(T),\ f_2 \in D(T^*)), \tag{3.3}$$

причем операторы A_1 и A_2 имеют представление

$$A_1 f_1 = T f_1 - \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (f_1, \hat{e}_\alpha)\, v_{\alpha\beta}\hat{e}_\beta,$$

$$A_2 f_2 = T^* f_2 + \frac{i}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (f_2, \hat{e}_\alpha)\, v_{\alpha\beta}\hat{e}_\beta, \tag{3.4}$$

где $V = \|v_{\alpha\beta}\|$ — некоторая эрмитова матрица, для которой $V^2 = I$. Из (3.1) следует, что

$$\frac{T_{H_+} - T^{*}_{H_+}}{i} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} (\cdot, \hat{e}_\alpha)\, v_{\alpha\beta}\, \hat{e}_\beta.$$

Пусть ω — регулярная точка оператора T, тогда она будет регулярной и для T_{H_+} [8]. Матрица-функция комплексного переменного

$$W_T(\omega) = I - i\,\|((T_{H_+} - \omega I)^{-1}\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta)\|\, V \tag{3.5}$$

называется характеристической для оператора T. При этом, если оператор T принадлежит классу Ω_1, то для любой матрицы-функции $W_T(\omega)$ можно найти такую характеристическую матрицу-функцию $W_{T^{-1}}(\omega)$ оператора T, что

$$W_T(\omega) = W_{T^{-1}}(\omega^{-1}). \tag{3.6}$$

Характеристическая матрица-функция $W_{T^{-1}}(\omega)$ вычисляется по формуле

$$W_{T^{-1}}(\omega) = I - i\,[((T^{-1} - \omega I)^{-1} e_\alpha, e_\beta)]\,J \quad (J = -V). \tag{3.7}$$

2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$ оператор Максвелла

$$T\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i\,rot\,\mathbf{H} \\ i\,rot\,\mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} \in D(T).$$

Из соотношений (2.17), (2.18), (2.21) вытекает, что в область определения $D(T^*)$ оператора T^* входит совокупность гладких векторов $\mathbf{f}$, удовлетворяющих условиям

$$D(T^*) \supset \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau|_s = 0, \; E_n|_\Sigma = 0, \; \int\limits_\Sigma \mathbf{H}_\tau \mathbf{G}_\nu\, d\sigma = 0 \quad (\nu > 1) \\ H_n|_s = 0, \; \int\limits_\Sigma \mathbf{E}_\tau (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n})\, d\sigma = +\rho_1 \int\limits_\Sigma \mathbf{H}_\tau \mathbf{G}_1 d\sigma \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Обозначим через T_0 оператор, индуцируемый оператором T на $D(T_0) = D(T) \cap D(T^*)$. Тогда

$$D(T_0) \supset \begin{pmatrix} \mathbf{E}_\tau|_s = 0, \; E_n|_\Sigma = 0, \; \int\limits_\Sigma \mathbf{E}_\tau (\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n})\, d\sigma = 0 \\ H_{n|_s} = 0, \; \mathbf{H}_{\tau|_\Sigma} = 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

В работе [8] показано, что

$$D(T_0^*) = D(T) + D(T^*).$$

Учитывая (2.1) и (3.8) получим, что $D(T_0^*)$ содержит гладкие соленоидальные векторы, удовлетворяющие условиям*

$$D(T_0^*) \supset \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{\tau|_S} = 0, \; E_{n|_\Sigma} = 0 \\ H_{n|_S} = 0, \; \int\limits_\Sigma \mathbf{H}_\tau \mathbf{G}_\nu\, d\sigma = 0 \;\; (\nu > 1) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Так как оператор T_0 является симметрическим, и существует ограниченный оператор T^{-1}, имеющий одномерную мнимую компоненту, то оператор T принадлежит классу Ω_1. Поэтому, согласно (2.18), (3.1) и (3.7), операторы T и T^* можно расширить на $H_- = D(T_0^*)$ так, чтобы полученные обобщенные расширения имели вид

$$\begin{aligned} T_{H_+} &= A + \frac{i}{2}(\cdot, \hat{e})\, v\hat{e}, \\ & \qquad\qquad\qquad (v = +1) \\ T_{H_+} &= A - \frac{i}{2}(\cdot, \hat{e})\, v\hat{e}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

---

* Линеалы (3.8), (3.9), (3.10), как нетрудно видеть, являются, с точностью до замыкания, областями определения операторов T^*, T_0, T_0^*.

Обобщенный каналовый вектор $\hat{e}$ определяется через каналовый вектор e оператора T^{-1} с помощью равенства (3.2), т. е.

$$(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{e}}) = (T_0^* \mathbf{f}, \hat{\mathbf{e}}) = i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Omega} rot\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{w}_1 d\Omega = i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Omega} div\,(\mathbf{E}\times\mathbf{w}_1)\,d\Omega =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Sigma+s}(\mathbf{E}_{\tau}\times\mathbf{w}_1)\,\mathbf{n}\,d\sigma = -i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{\tau}(\mathbf{G}_1\times\mathbf{n})\,d\sigma =$$

$$= -i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{\tau}\,\mathbf{F}_1 d\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\dfrac{2}{\rho_1}}\,\mathbf{F}_1\delta_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{F}_1 = \mathbf{G}_1\times\mathbf{n}$, а δ_{Σ} — дельта-функция, сосредоточенная на границе Σ и определяемая соотношением $\int\limits_{\Omega}\mathbf{v}\delta_{\Sigma}d\Omega = \int\limits_{\Sigma}\mathbf{v}d\sigma$. Найдем теперь оператор A. Согласно (3.4)

$$A_1\mathbf{f}_1 = T\mathbf{f}_1 - \frac{i}{2}(\mathbf{f}_1, \hat{\mathbf{e}})\,\hat{\mathbf{e}},$$

$$A_2\mathbf{f}_2 = T^*\mathbf{f}_2 + \frac{i}{2}(\mathbf{f}_2, \hat{\mathbf{e}})\,\hat{\mathbf{e}}.$$

Поэтому, учитывая (3.3) и [8], получим

$$A\mathbf{f} = A_1\mathbf{f}_1 + A_2\mathbf{f}_2 = T\mathbf{f}_1 + T^*\mathbf{f}_2 - \frac{i}{2}(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \hat{\mathbf{e}})\,\hat{e} = T_0^*\mathbf{f} - \frac{i}{2}(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \hat{\mathbf{e}})\,\hat{\mathbf{e}}.$$

Далее

$$(\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \hat{e}) = -i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Omega}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\,\mathbf{F}_1\delta_{\Sigma}d\Omega = -i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{1\tau}\mathbf{F}_1 d\sigma +$$

$$+ i\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{2\tau}\mathbf{F}_1 d\sigma = i\sqrt{2\rho_1}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{1\tau}\mathbf{G}_1 d\sigma + i\sqrt{2\rho_1}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{2\tau}\mathbf{G}_1 d\sigma =$$

$$= i\sqrt{2\rho_1}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{\tau}\mathbf{G}_1\,d\sigma,$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.

Таким образом

$$A\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -i\,rot\mathbf{H} \\ i\,rot\mathbf{E} \end{pmatrix} + \frac{i\sqrt{2\rho_1}}{2}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{\tau}\mathbf{G}_1\,d\sigma \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{2}{\rho_1}}\,\mathbf{F}_1\delta_{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Обобщенное расширение оператора Максвелла T имеет вид

$$T_{H_+}\mathbf{f}=\begin{pmatrix}-i\,rot\,\mathbf{H}\\ i\,rot\,\mathbf{E}\end{pmatrix}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\left(\rho_1\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{\tau}\mathbf{G}_1 d\sigma+\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{\tau}\mathbf{F}_1 d\sigma\right)\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\mathbf{F}_1\delta_{\Sigma}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$T^{*}_{H_+}\mathbf{f}=\begin{pmatrix}-i\,rot\,\mathbf{H}\\ i\,rot\,\mathbf{E}\end{pmatrix}+\frac{i}{2}\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\left(\rho_1\int\limits_{\Sigma}\mathbf{H}_{\tau}\mathbf{G}_1 d\sigma-\int\limits_{\Sigma}\mathbf{E}_{\tau}\mathbf{F}_1 d\sigma\right)\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{2}{\rho_1}}\mathbf{F}_1\delta_{\Sigma}\\ 0\end{pmatrix}.$$

§ 4. Несамосопряженная краевая задача для уравнений Максвелла. Вычисление коэффициента отражения

Рассмотрим регулярный волновод с осью Oz, оканчивающийся объемным резонатором.

Будем считать, что вдоль волновода распространяется одна поперечно-электрическая TE волна ($E_z=0$). При отражении от горловины резонатора, как известно [10], возникает отраженная волна типа TE и экспоненциально затухающие волны всевозможных типов. Выберем начало отсчета $z=0$ достаточно удаленным от горловины резонатора с тем, чтобы всеми затухающими видами колебаний можно было пренебречь при $z<0$.

Поперечные составляющие TE поля с точностью до множителя $e^{i\omega t}$ при $z\leqslant 0$ имеют вид

$$\mathbf{E}_{\tau}=(A_1e^{-i\beta_1 z}-B_1e^{i\beta_1 z})\,\mathbf{F}_1\sqrt{\rho_1},$$

$$\mathbf{H}_{\tau}=(A_1e^{-i\beta_1 z}+B_1e^{i\beta_1 z})\,\mathbf{G}_1\frac{1}{\sqrt{\rho_1}},\tag{4.1}$$

где $\mathbf{F}_1=\mathbf{G}_1\times n$, $\mathbf{G}_1=\sqrt{\rho_1}\,grad\,\psi_1^0$, ψ_1^0 — собственная функция мембранной задачи в поперечном сечении Σ_z волновода и $\left.\frac{\partial\psi_1^0}{\partial n_0}\right|_{l_z}=0$ (l_z — контур, охватывающий сечение Σ_z), β_1 — волновое число.

Между амплитудами падающей волны A_1 и отраженной — B_1, существует линейная связь

$$B_1=S(\omega)A_1,\tag{4.2}$$

где $S(\omega)$ — коэффициент отражения. Из (4.1) и (4.2) вытекает

$$\int\limits_{\Sigma_z}\mathbf{E}_{\tau}\mathbf{F}_1 d\sigma=A_1(1-S(\omega))\sqrt{\rho_1},$$

$$\int\limits_{\Sigma_z}\mathbf{H}_{\tau}\mathbf{G}_1 d\sigma=A_1(1+S(\omega))\frac{1}{\sqrt{\rho_1}}\tag{4.3}$$

или, исключая коэффициент $S(\omega)$, получим при всех $z \leqslant 0$

$$\int_{\Sigma_z} H_\tau G_1 d\sigma = \frac{2A_1}{\sqrt{\rho_1}} - \frac{1}{\rho_1}\int_{\Sigma_z} E_\tau (G_1 \times n)\, d\sigma.$$

Поле при $z \geqslant 0$ (при сделанных выше предположениях о затухающих волнах) удовлетворяет системе уравнений Максвелла при заданной частоте $\omega > 0$

$$-i \operatorname{rot} H = \omega E, \quad i \operatorname{rot} E = \omega H \tag{4.4}$$

и следующим краевым условиям:

$$\left.\begin{array}{l} E_\tau|_s = 0,\ E_n|_{\Sigma_0} = 0,\ H_n|_s = 0,\ \int_{\Sigma_0} H_\tau G_\nu d\sigma = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu > 1) \\ \int_{\Sigma_0} H_\tau G_1 d\sigma = \frac{2A_1}{\sqrt{\rho_1}} - \frac{1}{\rho_1}\int_{\Sigma_0} E_\tau (G_1 \times n)\, d\sigma \end{array}\right| . \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что решение краевой задачи (4.4), (4.5) почти при всех $\omega > 0$ является единственным. Действительно, пусть $f_1 = \begin{pmatrix} E_1 \\ H_1 \end{pmatrix}$ и $f_2 = \begin{pmatrix} E_2 \\ H_2 \end{pmatrix}$ являются решениями уравнений (4.4) и удовлетворяют условиям (4.5).

Вектор-функция $f_0 = f_1 - f_2$, очевидно, также удовлетворяет уравнениям (4.4) и краевым условиям

$$\left.\begin{array}{l} E_{0\tau}|_S = 0,\ E_{0n}|_{\Sigma_0} = 0,\ H_{0n}|_S = 0,\ \int_{\Sigma_0} H_{0\tau} G_\nu d\sigma = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\nu > 1) \\ \int_{\Sigma_0} H_{0\tau} G_1 d\sigma = -\frac{1}{\rho_1}\int_{\Sigma_0} E_{0\tau} (G_1 \times n)\, d\sigma \end{array}\right| . \tag{4.6}$$

Уравнения (4.4) при условиях (4.6) представляют собой задачу на собственные значения для несамосопряженного оператора T. Поскольку спектр оператора T, в силу теоремы 3, является дискретным, то почти при всех $\omega > 0$ уравнения (4.4) с условиями (4.6) имеют только нулевое решение и поэтому решение краевой задачи (4.4), (4.5) почти при всех $\omega > 0$ является единственным.

Повторяя рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 3, получаем, что решение задачи (4.4), (4.5), записанное в операторном виде, представляется в форме

$$f = \left[\, \omega B_0^{-1} f + \omega \frac{i}{2} (f,\ e)\, e \,\right] + i\sqrt{2} A_1 e, \tag{4.7}$$

где B_0^{-1} — самосопряженный оператор (2.18), e — каналовый вектор (2.19), $J=-1$.

Соотношение (4.7) перепишем в виде

$$\mathbf{f} - \omega T^{-1}\mathbf{f} = i\sqrt{2}\, A_1 \mathbf{e}. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) равносильно краевой задаче (4.4), (4.5). Зная решение уравнения (4.8), можно найти коэффициент отражения. Действительно,

$$\mathbf{f} = (I - \omega T^{-1})^{-1}\, i\sqrt{2}\, A_1 \mathbf{e}.$$

Далее из (4.3) следует

$$A_1 S(\omega) = A_1 - \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \int_{\Sigma} \mathbf{E}\cdot(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{n})\, d\sigma = A_1 + \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \int_{\Omega} rot\, \mathbf{E}\cdot \mathbf{w}_1 d\Omega =$$

$$= A_1 - \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = A_1 - i\omega A_1 \left((I - \omega T^{-1})^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e}\right),$$

откуда

$$S(\omega) = 1 - i\omega \left((I - \omega T^{-1})^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e}\right) = 1 - i\left(\left(T^{-1} - \frac{1}{\omega} I\right)^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{e}\right) J. \tag{4.9}$$

Коэффициент отражения есть функция параметра ω. Сравнивая (4.2) с (3.6) и (3.7), получим

$$S(\omega) = W_{T^{-1}}\left(\frac{1}{\omega}\right) = W_T(\omega). \tag{4.10}$$

Формула (4.10) показывает, что коэффициент отражения можно вычислить двумя способами. Один из них, основанный на методе обобщенных расширений, нам представляется более естественным с точки зрения приближенных расчетов этого коэффициента.

Одесский политехнический институт
Донецкий государственный университет

Поступило 28.VI.66

Հ. Գ. ՋԵԲԵՅԱՆ, Է. Ռ. ՑԵԿԱՆՈՎՍԿԻ

ԱԼԻՔԱՏԱՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ, ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մակսվելի օպերատորը ոչ-ինքնահամալուծ եզրային պայմանների դեպքում։ Գտնվում է հակադարձ օպերատորի տեսքը և ապացուցվում նրա լրիվին անընդհատությունը։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են ծավալուն ռեզոնատորով վերջացող ալիքատարում ալիքների տարածման հարցում, այն դեպքում, երբ անտեսվում են մարող տատանումները։ Օգտագործելով դիտարկվող և նրա հակադարձ օպերատոր-

ների խարակտերիստիկ ֆունկցիաների միջև գոյություն ունեցող կապը, ցույց է տրվում, որ անդրադարձման գործակիցը համընկնում է դիտարկվող օպերատորի խարակտերիստիկ ֆունկցիայի հետ։

G. GEBEIAN, E. TSEKANOVSKY

ON A NON SELF-ADJOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE WAVE-GUIDE THEORY

Summary

Maxwell's operator T with non self-adjoint boundary condition is under consideration. The form of the inverse operator T^{-1} is found and its completeness established.

These results are applied to wave propagation in a waveguide with resonator, under assumption, that the damping modes of ascilations are neglectable. It is shown, that the reflection coefficient coincides with the characteristic function of T.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Бродский, М. С. Лившиц*. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН (1958), XIII, вып. 1 (79), 3—85.
2. *М. С. Лившиц*. Метод несамосопряженных операторов в теории волноводов, Радиотехника и электроника, VII, вып. 2 (1962), 281—293.
3. *О. А. Ладыженская, В. А. Солонников*. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, Труды матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 59 (1960), 115—173.
4. *Э. Б. Быховский*. Решение смешанной задачи для системы уравнений Максвелла в случае идеально проводящей границы, Вестник ЛГУ, № 13 (1957), 50—66.
5. *Э. Б. Быховский*. Оценка вектора через его ротор и начально-краевая задача электродинамики в случае смешанных граничных условий, Вестник ЛГУ (1961), № 19, 161—164.
6. *С. Л. Соболев*. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ (1950).
7. *Заремба*. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа, УМН, I, вып. 3—4 (1946), 125—126.
8. *Э. Р. Цекановский*. Обобщенные расширения несимметрических операторов, Матем. сборник, 68 (1965) (110), № 4.
9. *Э. Р. Цекановский*. Характеристические функции неограниченных операторов, Труды Харьковского горного ин-та, XI (1962).
10. *Я. Д. Ширман*. Радиоволноводы и объемные резонаторы, Связьиздат (1959).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 6, 1966 Математика

Л. А. МАТЕВОСЯН

О ПОВЕРХНОСТЯХ В ПРИВОДИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. Рассмотрим поверхность X_m в приводимом пространстве V_n. Риманово пространство V_n приводимо, если в некоторой системе координат его метрика распадается на самостоятельные части, зависящие каждая от своих переменных

$$ds^2 = ds_0^2 + ds_1^2 + \cdots + ds_q^2,$$

где ds_0^2 — эвклидова метрика, а ds_r^2 $(r = 1, 2, \cdots, q)$ — неодномерные и неприводимые метрики.

В настоящей статье поверхность X_m рассматривается в приводимом пространстве с метрикой

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2. \tag{1.1}$$

В работе [1] А. П. Норден доказал, что приводимое пространство с метрикой (1.1) есть риманово пространство, допускающее декартову композицию двух многообразий, позиции которых вполне ортогональны, причем самостоятельные метрики, на которые распадается метрика этого пространства, определяют внутренние геометрии позиций.

Обозначим первое базовое многообразие через M_{n_1}, а второе — через M_{n_2}, где $n_1 + n_2 = n$. Координаты M_{n_1} обозначим через u^a $(a, b, c, d = 1, 2, \cdots, n_1)$, координаты M_{n_2} — через $u^{\bar{a}}$ $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} = n_1 + 1, \cdots \cdots, n)$, а за криволинейные координаты V_n берем адаптированные координаты $(u^a, u^{\bar{a}})$ (ср. [1], стр. 119).

Поверхность X_m в приводимом пространстве V_n можно рассматривать как геометрическое место точек, находящихся во взаимнооднозначном соответствии с некоторыми наборами точек A и $\bar{A}$, где A — любая точка подмногообразия M_{m_1} многообразия M_{n_1}, а $\bar{A}$ — любая точка подмногообразия M_{m_2} многообразия M_{n_2}, причем $m_1 \leqslant n_1$, $m_2 \leqslant n_2$. Набор точек A и $\bar{A}$ обозначим через $(A, \bar{A})$. О точках A и $\bar{A}$, участвующих в одном наборе $(A, \bar{A})$, будем говорить, что они находятся в связи.

Если $m = m_1 + m_2$, то точки X_m находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными наборами $(A, \bar{A})$ точек A и $\bar{A}$. Тогда многообразия M_{m_1} и M_{m_2} находятся в свободной композиции. В общем случае $m \leqslant m_1 + m_2$ многообразия M_{m_1} и M_{m_2} находятся в несвободной композиции.

Возьмем некоторую точку A многообразия M_{m_1}. Эта точка находится в связи с точками $\bar{A}$ подмногообразия $M_{\bar{p}}$ многообразия M_{m_2} $(0 \leqslant \bar{p} \leqslant m_2)$. Это многообразие $M_{\bar{p}}$ назовем слоем многообразия M_{m_2}, соответствующим точке A. Такие точки A заполняют подмногообразие M_p многообразия M_{m_1} $(0 \leqslant p \leqslant m_1)$.

Многообразие M_{m_1} можно считать t-параметрическим семейством многообразий M_p, однократно покрывающим многообразие M_{m_1}. Следовательно будем иметь

$$t + p = m_1. \tag{1.2}$$

При изменении t параметров изменяется M_p и, следовательно, $M_{\bar{p}}$. Таким образом, в многообразии M_{m_2} получим семейство слоев $M_{\bar{p}}$, зависящее от тех же t параметров. Назовем M_p слоем многообразия M_{m_1}. Слои M_p и $M_{\bar{p}}$, соответствующие тем же значениям этих t параметров, назовем соответственными.

Покажем, что t-параметрическое семейство слоев $M_{\bar{p}}$ покрывает, хотя бы однократно, многообразие M_{m_2}. Для этого достаточно показать, что любая точка $\bar{A}$ многообразия M_{m_2} принадлежит хотя бы одному слою $M_{\bar{p}}$ этого семейства, что легко доказывается. Действительно, пусть $\bar{A}$ — любая точка многообразия M_{m_2}. В наборах $(A, \bar{A})$ эта точка $\bar{A}$ находится в связи с некоторыми точками A многообразия M_{m_1}. Зафиксируем одну из этих точек A и обозначим ее через A_1. Так как t-параметрическое семейство слоев M_p заполняет многообразие M_{m_1}, то точка A_1 принадлежит некоторому слою $\underset{1}{M_p}$. Слой $\underset{1}{M_{\bar{p}}}$, соответствующий слою $\underset{1}{M_p}$, содержит точку $\bar{A}$.

Таким образом, t-параметрическое семейство слоев $M_{\bar{p}}$ покрывает многообразие M_{m_2}, и, в общем случае, может быть неоднократно. Значит, $m_2 \leqslant \bar{p} + t$.

В настоящей работе рассматривается тот частный случай, когда

$$m_2 = \bar{p} + t. \tag{1.3}$$

Ясно, что для поверхности X_m имеем:

$$m = \bar{p} + p + t. \tag{1.4}$$

Из (1.2), (1.3) и (1.4) получим

$$p = m - m_2, \tag{1.5}$$

$$\bar{p} = m - m_1, \tag{1.6}$$

$$t = m_1 + m_2 - m. \tag{1.7}$$

Таким образом, рассмотрим такую поверхность X_m, для которой многообразия M_{m_1} и M_{m_2} расслаиваются так, что многообразие M_{m_1} однократно покрывается $m_1 + m_2 - m$-параметрическим семейством слоев M_{m-m_2}, а многообразие M_{m_2} однократно покрывается семейством слоев M_{m-m_1}, зависящих от тех же параметров.

Уравнения M_{m_1} в M_{n_1} следующие

$$u^a = u^a (v^{\rho_1}), \tag{1.8}$$

где v^{ρ_1} $(\rho_1, \sigma_1, \tau_1, \mu_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ — криволинейные координаты M_{m_1}.

Аналогично, уравнения M_{m_2} в M_{n_2} запишутся так

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (\overline{v}^{\rho_2}), \tag{1.9}$$

где $\overline{v}^{\rho_2}$ $(\rho_2, \sigma_2, \tau_2, \mu_2 = m - m_2 + 1, \cdots, m)$ — криволинейные координаты M_{m_2}. Так как многообразие M_{m_1} покрывается однократно m_1+m_2-m-параметрическим семейством слоев M_{m-m_2}, то ее криволинейные координаты v^{ρ_1} $(\rho_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ можно выбрать так, чтобы $m-m_2$ из них являлись внутренними координатами слоя, а остальные — параметрами семейства.

Не нарушая общности, первые $m-m_2$ из координат v^{ρ_1} $(\rho_1 = 1, 2, \cdots, m_1)$ можно считать внутренними координатами слоя M_{m-m_2} и обозначить через v^i $(i, j, k, l = 1, 2, \cdots, m-m_2)$, а последние m_1+m_2-m координаты — параметрами семейства слоев M_{m-m_2} и обозначить через v^ρ $(\rho, \sigma, \tau, \mu = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$. Рассуждая аналогично, из координат $\overline{v}^{\rho_2}$ $(\rho_2 = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$ последние $m - m_1$ можно считать внутренними координатами слоя M_{m-m_1} и обозначить через $\overline{v}^{\overline{i}}$ $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}, \overline{l} = m_1 + 1, \cdots, m)$, а первые $m_1 + m_2 - m$ координаты — параметрами семейства слоев M_{m-m_1} и обозначить через $\overline{v}^\rho$ $(\rho, \sigma, \tau, \mu = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$. Так как слои M_{m-m_2} и M_{m-m_1} соответствуют друг другу, то можно положить $v^\rho = \overline{v}^\rho$ и уравнения (1.8) и (1.9) переписать в виде

$$u^a = u^a (v^i, v^\rho), \tag{1.10}$$

$$u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (v^\rho, \overline{v}^{\overline{i}}). \tag{1.11}$$

Точки поверхности X_m находятся во взаимно однозначном соответствии со всевозможными наборами $(A, \overline{A})$ точек A и $\overline{A}$, принадлежащих соответственным слоям M_{m-m_2} и M_{m-m_1}, т. е. точек $A(v^i, v^\rho)$ и $\overline{A}(v^\rho, \overline{v}^{\overline{i}})$. Следовательно, параметры v^i, v^ρ, $\overline{v}^{\overline{i}}$ можно выбрать как криволинейные координаты X_m в V_n. Так как $(u^a, u^{\overline{a}})$ являются криволинейными координатами V_n, то уравнения (1.10) и (1.11) вместе являются уравнениями поверхности X_m в V_n. Поскольку координаты $\overline{v}^{\overline{i}}$ $(\overline{i} = m_1 + 1, \cdots, m)$ отличаются от координат v^i $(i=1, 2, \cdots, m-m_2)$, v^ρ $(\rho = m - m_2 + 1, \cdots, m_1)$ своими номерами, заменим их через $v^{\overline{i}}$ и уравнения поверхности X_m запишем в виде

$$u^a = u^a (v^i, v^\rho), \quad u^{\overline{a}} = u^{\overline{a}} (v^\rho, v^{\overline{i}}). \tag{1.12}$$

2. Обозначим первую позицию через V_{n_1}, а вторую — через V_{n_2}. Криволинейными координатами V_{n_1} и V_{n_2} можно считать соответственно

$$u^a \ (a, b, c, d = 1, 2, \cdots, n_1) \text{ и } u^{\overline{a}} \ (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} = n_1 + 1, \cdots, n).$$

Любой индекс, принадлежащий совокупности индексов i, ρ и $\overline{i}$, обозначим через α $(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \cdots, m)$.

Касательные векторы X_m будем обозначать через $(\xi^a_\alpha, \xi^{\bar a}_\alpha)$, т. е.

$$\xi^a_\alpha = \frac{\partial u^a}{\partial v^\alpha}, \quad \xi^{\bar a}_\alpha = \frac{\partial u^{\bar a}}{\partial v^\alpha} .$$

Так как уравнения поверхности X_m имеют вид (1.12), то касательными векторами будут векторы $(\xi^a_i, 0)$, $(\xi^a_\varphi, \xi^{\bar a}_\varphi)$, $(0, \xi^{\bar a}_{\bar i})$.

За нормальные векторы X_m выберем векторы $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$, $(\underset{s}{\nu^a}, \underset{s}{\nu^{\bar a}})$, $(0, \underset{s_2}{\nu^{\bar a}})$, определяемые следующими уравнениями:

$$\underset{s_1}{\nu^a}\, \xi^b_{\rho_1} g_{ab} = 0, \tag{2.1}$$

$$\underset{s_2}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_{\rho_2} g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.2}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \xi^b_i g_{ab} = 0, \tag{2.3}$$

$$\underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_{\bar i} g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.4}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \xi^b_\rho g_{ab} + \underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \xi^{\bar b}_\rho g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.5}$$

$$\underset{s}{\nu^a}\, \underset{s_1}{\nu^b} g_{ab} = 0, \tag{2.6}$$

$$\underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \underset{s_2}{\nu^{\bar b}} g_{\bar a \bar b} = 0, \tag{2.7}$$

$(p_1, q_1, r_1, s_1, t_1 = 1, 2, \cdots, n_1 - m_1)$, $(p, q, r, s, t = n_1 - m_1 + 1, \cdots, n_1 + m_2 - m)$, $(p_2, q_2, r_2, s_2, t_2 = n_1 + m_2 - m + 1, \cdots, n - m)$,

где g_{ab} и $g_{\bar a \bar b}$ — метрические тензоры V_{n_1} и V_{n_2} соответственно. В дальнейшем буквами p, q, r, s, t обозначаются номера нормальных векторов типа $(\underset{s}{\nu^a}, \underset{s}{\nu^{\bar a}})$, в отличие от первого пункта, где эти буквы имели другое значение.

Поверхность, определяемую уравнениями

$$u^a = u^a (v^{\rho_1}), \tag{2.8}$$

назовем проекцией X_m на V_{n_1} или первой проекцией X_m и обозначим через $'X_{m_1}$.

Аналогично, поверхность, определяемую уравнениями

$$u^{\bar a} = u^{\bar a} (v^{\rho_2}), \tag{2.9}$$

назовем проекцией X_m на V_{n_2} или второй проекцией X_m и обозначим через $'\bar X_{m_2}$.

В дальнейшем, если речь идет о поверхностях $'X_{m_1}$, $'\bar X_{m_2}$ и X_m, то всегда предполагается, что они рассматриваются в V_{n_1}, V_{n_2} и V_n соответственно, пока не оговорено противное.

Касательными векторами $'X_{m_1}$ будут векторы $\xi^{a}_{\rho_1}$, а касательными векторами $'\overline{X}_{m_2}$ — векторы $\xi^{\bar a}_{\rho_2}$. Из (2.1) и (2.2) видно, что $\underset{s_1}{\nu^{a}}$ являются нормальными векторами $'X_{m_1}$, а $\underset{s_2}{\nu^{\bar a}}$ — нормальными векторами $'\overline{X}_{m_2}$.

Сравнивая (2.1) и (2.6), получим

$$\underset{s}{\nu^{a}} = \underset{s}{\lambda^{\sigma_1}}\, \xi^{a}_{\sigma_1} \tag{2.10}$$

и, аналогично,

$$\underset{s}{\nu^{\bar a}} = \underset{s}{\bar\lambda^{\sigma_2}}\, \xi^{\bar a}_{\sigma_2}. \tag{2.11}$$

Используя (2.10) и (2.11), из (2.3), (2.4) и (2.5) имеем соответственно

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, 'g_{\rho_1 t} = 0, \tag{2.12}$$

$$\underset{s}{\bar\lambda^{\rho_2}}\, '\bar g_{\rho_2 \bar t} = 0, \tag{2.13}$$

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, 'g_{\rho_1\sigma} + \underset{s}{\bar\lambda^{\rho_2}}\, '\bar g_{\rho_2\sigma} = 0, \tag{2.14}$$

где $'g_{\rho_1\sigma_1}$ и $'\bar g_{\rho_2\sigma_2}$ — метрические тензоры $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$ соответственно. Нормальные векторы X_m выберем единичными и ортогональными, т. е.

$$\underset{s_1}{\nu^{a}}\, \underset{t_1}{\nu^{b}}\, g_{ab} = g_{s_1 t_1} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_1 \neq t_1 \\ 1, & \text{если } s_1 = t_1, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\underset{s_2}{\nu^{\bar a}}\, \underset{t_2}{\nu^{\bar b}}\, g_{\bar a \bar b} = g_{s_2 t_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } s_2 \neq t_2 \\ 1, & \text{если } s_2 = t_2, \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\underset{s}{\nu^{a}}\, \underset{t}{\nu^{b}}\, g_{ab} + \underset{s}{\nu^{\bar a}}\, \underset{t}{\nu^{\bar b}}\, g_{\bar a \bar b} = g_{st} = \begin{cases} 0, & \text{если } s \neq t \\ 1, & \text{если } s = t. \end{cases} \tag{2.17}$$

Опускание и поднятие индексов s_1, s и s_2 производится тензорами $g_{s_1 t_1}$, g_{st} и $g_{s_2 t_2}$ соответственно.

Используя (2.10) и (2.11), из (2.17) получим

$$\underset{s}{\lambda^{\rho_1}}\, \underset{t}{\lambda^{\sigma_1}}\, 'g_{\rho_1\sigma_1} + \underset{s}{\lambda^{\rho_2}}\, \underset{t}{\lambda^{\sigma_2}}\, '\bar g_{\rho_2\sigma_2} = g_{st}. \tag{2.18}$$

3. Найдем связь между основными величинами поверхности и ее проекцией.

Легко видеть, что

$$g_{i\rho_1} = 'g_{i\rho_1},\quad g_{\bar i \rho_2} = '\bar g_{\bar i \rho_2},\quad g_{\rho\sigma} = 'g_{\rho\sigma} + '\bar g_{\rho\sigma},\quad g_{i\bar j} = 0, \tag{3.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор X_m. В дальнейшем основные величины поверхностей X_m, $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$ будем обозначать одинаковыми буквами с добавлением для поверхности $'X_{m_1}$ знака (′) штрих слева, а для поверхности $'\overline{X}_{m_2}$ — знака (′) штрих слева и надчеркиванием, как это уже сделано в (3.1).

Основные уравнения X_m ([3], стр. 193) распадаются на

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \xi^a_\beta = \overset{s_1}{b}_{\alpha\beta} \underset{s_1}{\nu}{}^a + \overset{s}{b}_{\alpha\beta} \underset{s}{\nu}{}^a, \tag{3.2}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \xi^{\bar a}_\beta = \overset{s}{b}_{\alpha\beta} \underset{s}{\nu}{}^{\bar a} + \overset{s_2}{b}_{\alpha\beta} \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar a}, \tag{3.3}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_1}{\nu}{}^a = -\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_\alpha \xi^a_{\sigma_1} + \overset{s_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha \underset{s_1}{\nu}{}^a + \overset{s}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha \underset{s}{\nu}{}^a, \tag{3.4}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar a} = -\underset{s_2}{b}{}^{\sigma_2}_\alpha \xi^{\bar a}_{\sigma_2} + \overset{s}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_\alpha \underset{s}{\nu}{}^{\bar a} + \overset{s_2}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_\alpha \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar a}, \tag{3.5}$$

с условиями интегрируемости

$$\overset{\bullet}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \xi^a_\alpha \xi^b_\beta \xi^c_\gamma \xi^d_\delta R_{abcd} + \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \xi^{\bar c}_\gamma \xi^{\bar d}_\delta R_{\bar a \bar b \bar c \bar d} + 2 \overset{s_3}{b}_{\gamma[\alpha} \underset{s_3}{b}_{\beta]\delta}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_\alpha \underset{s_3}{b}_{\beta\gamma} - \overset{\bullet}{\nabla}_\beta \underset{s_3}{b}_{\alpha\gamma} = -\xi^a_\alpha \xi^b_\beta \xi^c_\gamma \underset{s_3}{\nu}{}^d R_{abcd} - \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \xi^{\bar c}_\gamma \underset{s_3}{\nu}{}^{\bar d} R_{\bar a \bar b \bar c \bar d} + 2 \overset{t_3}{b}_{\gamma[\beta} \underset{t_3 s_3}{n}{}_{\alpha]}, \tag{3.7}$$

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\alpha} \underset{t_3 s_3}{n}{}_{\beta]} + g^{\gamma\delta} \underset{t_3}{b}_{\gamma[\beta} \underset{s_3}{b}_{\alpha]\delta} + g^{p_3 r_3} \underset{p_3 t_3}{n}{}_{[\beta} \underset{r_3 s_3}{n}{}_{\alpha]} = \frac{1}{2} \xi^a_\alpha \xi^b_\beta \underset{t_3}{\nu}{}^c \underset{s_3}{\nu}{}^d R_{abcd} +$$

$$+ \frac{1}{2} \xi^{\bar a}_\alpha \xi^{\bar b}_\beta \underset{t_3}{\nu}{}^{\bar c} \underset{s_3}{\nu}{}^{\bar d} R_{\bar a \bar b \bar c \bar d}, \tag{3.8}$$

где через s_3 обозначен любой из совокупности индексов s_1, s, s_2, т. е. (p_3, q_3, r_3, s_3, $t_3 = 1, 2, \cdots, n-m$). Уравнение (3.2) в развернутом виде, при $\alpha = \rho_1$, $\beta = \sigma_1$ имеет вид,

$$\partial_{\rho_1} \xi^a_{\sigma_1} - \overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1 \sigma_1} \xi^a_{\tau_1} + G^a_{bc} \xi^b_{\rho_1} \nu^c_{\sigma_1} = b_{\rho_1\sigma_1} \underset{s_1}{\nu}{}^a + \overset{s}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s}{\nu}{}^a. \tag{3.9}$$

Так как $\xi^a_{\sigma_1}$ есть касательные, а $\underset{s_1}{\nu}{}^a$ — нормальные векторы $'X_{m_1}$, имеем

$$\partial_{\rho_1} \xi^a_{\sigma_1} - {}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1 \sigma_1} \xi^a_{\tau_1} + G^a_{bc} \xi^b_{\rho_1} \xi^c_{\sigma_1} = {}'\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s_1}{\nu}{}^a. \tag{3.10}$$

Вычитая (3.10) из (3.9) и используя (2.10), получим

$$\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} = {}'\overset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1} \tag{3.11}$$

и

$${}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1 \sigma_1} - \overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{\rho_1 \sigma_1} = \overset{s}{b}_{\rho_1\sigma_1} \underset{s}{\lambda}{}^{\tau_1}. \tag{3.12}$$

Аналогично

$$\overset{s_2}{b}_{\rho_2\sigma_2} = {}'\overset{s_2}{\bar b}_{\rho_2\sigma_2}, \tag{3.13}$$

и

$${}'\overline{\overset{\bullet}{G}}{}^{\tau_2}_{\rho_2 \sigma_2} - \overset{\bullet}{G}{}^{\tau_2}_{\rho_2 \sigma_2} = \overset{s}{\bar b}_{\rho_2\sigma_2} \underset{s}{\bar\lambda}{}^{\tau_2}, \tag{3.14}$$

(3.2) в развернутом виде при $\beta = \bar i$ запишется так

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar i \alpha} \xi^a_{\sigma_1} = \overset{s_1}{b}_{\bar i \alpha} \nu^a_{s_1} + \overset{s}{b}_{\bar i \alpha} \underset{s}{\nu}{}^a,$$

откуда, используя (2.10), получим

$$\overset{s}{b}_{\bar{i}\alpha}=0, \tag{3.15}$$

и

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar{i}\alpha}=\overset{s}{b}_{\bar{i}\alpha}\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}. \tag{3.16}$$

Аналогично получим

$$\overset{s}{b}_{i\beta}=0, \tag{3.17}$$

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{i\beta}=\overset{s}{b}_{i\beta}\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2}. \tag{3.18}$$

Свертывая (2.16) и (2.18) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}$ и $\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}$ соответственно и складывая, получим

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar{i}\alpha}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{i\beta}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}=\overset{s}{b}_{\bar{i}\alpha}\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}+\overset{s}{b}_{i\beta}\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}.$$

Отсюда, согласно (2.12) и (2.13), при $\alpha=j$, $\beta=\bar{i}$ имеем

$$-\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma}_{\bar{i}j}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\mu_1\sigma}+\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\mu_2\sigma}\right)=\overset{s}{b}_{\bar{i}j}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}+\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}\right)$$

или, используя (2.14) и (2.18), получим

$$\underset{t}{b}_{\bar{i}j}=0. \tag{3.19}$$

Подставляя выражение $\underset{t}{b}_{\bar{i}j}$ из (3.19) в (3.16), при $\alpha=j$ получим

$$\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_1}_{\bar{i}j}=0 \tag{3.20}$$

и, аналогично,

$$\overset{\bullet}{G}{}^{\sigma_2}_{\bar{i}j}=0. \tag{3.21}$$

Свертывая (3.12) и (3.18) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\sigma_1\mu_1}$ и $\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}$ соответственно и складывая, при $\rho_1=j$, $\beta=\sigma_1$, получим

$$'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{j\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_1}_{j\sigma_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}-\overset{\bullet}{G}{}^{\tau_2}_{j\sigma_1}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\sigma_2\mu_2}=\overset{s}{b}_{j\sigma_1}\left(\underset{s}{\lambda}{}^{\tau_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}+\underset{s}{\bar{\lambda}}{}^{\tau_2}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\tau_2\mu_2}\right)$$

или, используя (2.12), (2.13) (2.18), будем иметь

$$\underset{t}{b}_{j\sigma_1}={}'\overset{\bullet}{G}{}^{\tau}_{j\sigma_1}{}'g_{\tau\mu_1}\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}. \tag{3.22}$$

Точно так же

$$\underset{t}{b}_{\bar{j}\sigma_2}={}'\overset{\bullet}{\bar{G}}{}^{\tau}_{\bar{j}\sigma_2}{}'\bar{g}_{\tau\mu_2}\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}. \tag{3.23}$$

Свертывая (3.12) с $\underset{t}{\lambda}{}^{\mu_1}{}'g_{\tau_1\mu_1}$ при $\rho_1=\rho$, $\sigma_1=\sigma$, а (3.14) с $\underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\mu_2}{}'\bar{g}_{\tau_2\mu_2}$ при $\rho_2=\rho$, $\sigma_2=\sigma$, складывая полученные равенства и используя (2.12), (2.13), (2.14) и (2.18), получим

$$\underset{t}{b}_{\rho\sigma} = \left({}'\dot{G}_{\rho\sigma} - {}'\dot{\bar{G}}_{\rho\sigma}\right) {}'g_{\sigma\sigma_1} \underset{t}{\lambda}{}^{\sigma_1}. \tag{3.24}$$

Легко видеть, что

$$\dot{\nabla}_{\rho_1} \underset{s_1}{\nu}{}^a = {}'\dot{\nabla}_{\rho_1} \underset{s_1}{\nu}{}^a.$$

где ${}'\dot{\nabla}$ — символ смешанного ковариантного дифференцирования в V_{n_1}. Имея в виду это равенство, из (3.4) при $\alpha = \rho_1$, $s_3 = s_1$ имеем

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}\xi^a_{\sigma_1} + \overset{t_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t_1}{\nu}{}^a + \overset{t}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\nu}{}^a = -{}'\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1} \xi^a_{\sigma_1} + {}'\overset{t_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t_1}{\nu}{}^a. \tag{3.25}$$

Свертывая (3.25) с $\underset{p_1}{\nu}{}^b g_{ab}$ и используя (2.1), (2.6) и (2.15), получим

$$\underset{p_1 s_1}{n}{}_{\rho_1} = {}'\underset{p_1 s_1}{n}{}_{\rho_1} \tag{3.26}$$

и

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1} + \overset{t}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\rho_1} \underset{t}{\lambda}{}^{\sigma_1} = -{}'\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_1}_{\rho_1}. \tag{3.27}$$

Аналогично

$$\underset{p_2 s_2}{n}{}_{\rho_2} = {}'\underset{p_2 s_2}{\bar{n}}{}_{\rho_2}. \tag{3.28}$$

$$-\underset{s_2}{b}{}^{\sigma_2}_{\rho_2} + \overset{t}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_{\rho_2} \underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2} = -{}'\underset{s_2}{\bar{b}}{}^{\sigma_2}_{\rho_2}. \tag{3.29}$$

Из (3.15), (3.4) при $\alpha = \bar{l}$, $s_3 = s_1$ имеем

$$\partial_{\bar{l}} \underset{s_1}{\nu}{}^a = \overset{t_1}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\bar{l}} \underset{t_1}{\nu}{}^a + \overset{t}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_{\bar{l}} \underset{t}{\nu}{}^a \tag{3.30}$$

и, аналогично,

$$\partial_l \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar{a}} = \overset{t}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_l \underset{t}{\nu}{}^{\bar{a}} + \overset{t_2}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_l \underset{t_2}{\nu}{}^{\bar{a}}. \tag{3.31}$$

Легко видеть, что

$$\dot{\nabla}_\alpha \underset{s_1}{\nu}{}^{\bar{a}} = 0. \tag{3.32}$$

Используя (3.32), из (3.5) при $s_3 = s_1$ получим

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_2}_{\alpha} \xi^{\bar{a}}_{\sigma_2} + \overset{t}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha \underset{t}{\nu}{}^{\bar{a}} + \overset{t_2}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha \underset{t_2}{\nu}{}^{\bar{a}} = 0. \tag{3.33}$$

Откуда, согласно (2.10)

$$\overset{t_2}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha = 0, \tag{3.34}$$

и

$$-\underset{s_1}{b}{}^{\sigma_2}_{\alpha} + \overset{t}{\underset{\cdot s_1}{n}}{}_\alpha \underset{t}{\bar{\lambda}}{}^{\sigma_2} = 0. \tag{3.35}$$

Аналогично получим $\overset{t_1}{\underset{\cdot s_2}{n}}{}_\alpha = 0$, что совпадает с (3.34) и

$$-\underset{s_2}{b}{}_{\alpha}^{\bar a_1} + \underset{\cdot s_2}{\overset{+}{n}}{}_{\alpha}\,\underset{t}{\lambda}{}^{\bar a_1} = 0. \tag{3.36}$$

Используя (3.15) и (3.34), из (3.33) при $\alpha = \bar i$ получим

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar i}\,\underset{t}{\nu}{}^{\bar a} = 0. \tag{3.37}$$

Ранг матрицы $\|\underset{t}{\nu}{}^{\bar a}\|$ равен $m_1 + m_2 - m$, так как в противном случае число нормалей $(\underset{s}{\nu}{}^{a}, \underset{s}{\nu}{}^{\bar a})$ можно уменьшить путем выбора другой системы нормальных векторов, а это невозможно, в силу (2.1)—(2.7). Из (3.37) имеем

$$\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar i} = 0 \tag{3.38}$$

и, аналогично,

$$\underset{\cdot s_2}{\overset{t}{n}}{}_{i} = 0. \tag{3.39}$$

Подставляя выражение $\underset{\cdot s_1}{\overset{t}{n}}{}_{\bar i}$ из (3.38) в (3.30), получим

$$\partial_{\bar i}\,\underset{s_1}{\nu}{}^{a} = \underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar i}\,\underset{t_1}{\nu}{}^{a}. \tag{3.40}$$

Покажем, что $\underset{\cdot s_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar i} = 0$. Действительно, выберем другую систему нормальных векторов так, чтобы нормальные векторы $(\underset{s}{\nu}{}^{a}, \underset{s}{\nu}{}^{\bar a})$ и $(0, \underset{s_2}{\nu}{}^{\bar a})$ оставались неизменными, а нормальные векторы $(\underset{s_1}{\nu}{}^{a}, 0)$ менялись по закону

$$\underset{s_1}{\tilde\nu}{}^{a} = \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\,\underset{t_1}{\nu}{}^{a}, \tag{3.41}$$

где $\det\left\|\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\right\| \neq 0.$

Из (3.41), используя (3.40), получим

$$\partial_{\bar i}\,\underset{s_1}{\tilde\nu}{}^{a} = \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar i}\,\underset{t_1}{\nu}{}^{a} + \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\,\underset{\cdot t_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{\bar i}\,\underset{p_1}{\nu}{}^{a}.$$

Покажем, что $\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}$ можно выбрать так, чтобы $\partial_{\bar i}\,\underset{s_1}{\tilde\nu}{}^{a} = 0$, т. е.

$$\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar i}\,\underset{t_1}{\nu}{}^{a} + \underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}\,\underset{\cdot t_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{\bar i}\,\underset{p_1}{\nu}{}^{a} = 0$$

или

$$\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar i} + \underset{s_1}{\overset{p_1}{\mu}}\,\underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar i} = 0\,. \tag{3.42}$$

Составим условия интегрируемости (3.42)

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar j}\underset{s_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar i]} = -\underset{s_1}{\overset{p_1}{\mu}}\,\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar j}\underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{\mu}}{}_{\bar i]} + \underset{s_1}{\overset{r_1}{\mu}}\,\underset{\cdot r_1}{\overset{p_1}{n}}{}_{[\bar j}\,\underset{\cdot p_1}{\overset{t_1}{n}}{}_{\bar i]} = 0$$

или

$$-\mu_{\alpha_1}^{p_1}\left(\overset{*}{\nabla}_{[\bar{j}}\, n_{\cdot p_1\,\bar{i}]}^{t_1} - n_{\cdot p_1}^{r_1}\, {}_{[\bar{j}}n_{\cdot r_1\,\bar{i}]}^{t_1}\right) = 0,$$

то есть

$$\overset{*}{\nabla}_{[\bar{j}}\, n_{\cdot p_1\,\bar{i}]}^{t_1} - n_{p_1}^{r_1}\, {}_{[\bar{j}}\, n_{\cdot r_1\,\bar{i}]}^{t_1} = 0. \tag{3.43}$$

Легко видеть, что (3.43) получается из (3.8) при $\alpha = \bar{i}$, $\beta = \bar{j}$, $t_3 = t_1$, $s_3 = p_1$. Таким образом, условия интегрируемости (3.42) выполняются и, следовательно, можно выбрать $\mu_{s_1}^{t_1}$ так, чтобы $\partial_{\bar{i}}\, \tilde{\nu}_{s_1}^{a} = 0$. В дальнейшем опустим знак ($\sim$) (тильда) и будем считать

$$\partial_{\bar{i}}\, \nu_{s_1}^{a} = 0. \tag{3.44}$$

Используя (3.44), получим из (3.40)

$$n_{\cdot s_1\,\bar{i}}^{t_1} = 0 \tag{3.45}$$

и, аналогично,

$$n_{\cdot s_2\, i}^{t_2} = 0. \tag{3.46}$$

Очевидно

$$\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \nu_{s}^{a} = {}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \nu_{s}^{a}. \tag{3.47}$$

Согласно (3.47), из (3.4) при $\alpha = \rho_1$, $s_3 = s$ имеем

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \nu_{s}^{a} = -b_{\rho_1\, s}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t_1}\, \nu_{t_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t}\, \nu_{t}^{a}$$

или, подставляя выражение для ν_{s}^{a} из (2.10), получим

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \lambda_{s}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} + \lambda_{s}^{\sigma_1}\, {}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} = -b_{\rho_1\, s}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t_1}\, \nu_{t_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t}\, \lambda_{t}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a}$$

или

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \lambda_{s}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} + \lambda_{s}^{\sigma_1}\, {}'b_{\rho_1\sigma_1}^{s_1}\, \nu_{s_1}^{a} = -b_{\rho_1\, s}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t_1}\, \nu_{t_1}^{a} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t}\, \lambda_{t}^{\sigma_1}\, \xi_{\sigma_1}^{a},$$

откуда

$$n_{\cdot s\,\rho_1}^{t_1} = {}'b_{\rho_1\sigma_1}^{t_1}\, \lambda_{s}^{\sigma_1} \tag{3.48}$$

и

$${}'\overset{*}{\nabla}_{\rho_1}\, \lambda_{s}^{\sigma_1} = -b_{\rho_1\, s}^{\sigma_1} + n_{\cdot s\,\rho_1}^{t}\, \lambda_{t}^{\sigma_1}. \tag{3.49}$$

Аналогично, получим

$$n_{\cdot s\,\rho_2}^{t_2} = {}'\bar{b}_{\rho_2\sigma_2}^{t_2}\, \bar{\lambda}_{s}^{\sigma_2} \tag{3.50}$$

и

$${}'\overset{*}{\bar{\nabla}}_{\rho_2}\, \bar{\lambda}_{s}^{\sigma_2} = -b_{\rho_2\, s}^{\sigma_2} + n_{\cdot s\,\rho_2}^{t}\, \bar{\lambda}_{t}^{\sigma_2}, \tag{3.51}$$

где $'\overset{*}{\nabla}$ — символ смешанного ковариантного дифференцирования в V_{n_1}. Используя (3.38), из (3.4) при $\alpha = i$, $s_3 = s$ получим

$$\partial_i \underset{s}{\nu}^a = -\underset{s}{b}_{\bar i}^{\alpha_1} \xi^a_{\alpha_1} + \underset{\cdot s}{n}{}_{\bar i}^{t} \underset{t}{\nu}^a \cdot$$

Подставляя сюда выражение для $\underset{s}{\nu}^a$ из (2.10), получим

$$\partial_{\bar i} \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} \xi^a_{\alpha_1} = -\underset{s}{b}_{\bar i}^{\alpha_1} \xi^a_{\alpha_1} + \underset{\cdot s}{n}{}_{\bar i}^{t} \underset{t}{\lambda}^{\alpha_1} \xi^a_{\alpha_1},$$

откуда

$$\partial_{\bar i} \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} = -\underset{s}{b}_{\bar i}^{\alpha_1} + \underset{\cdot s}{n}{}_{\bar i}^{t} \underset{t}{\lambda}^{\alpha_1} \tag{3.52}$$

и, аналогично,

$$\partial_i \underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2} = -\underset{s}{b}_i^{\alpha_2} + \underset{\cdot s}{n}{}_i^{t} \underset{t}{\bar\lambda}^{\alpha_2} \cdot \tag{3.53}$$

Принимая в (3.49) $\rho_1 = \rho$, а в (3.51) — $\rho_2 = \rho$ и свертывая полученные равенства соответственно с $\underset{p}{\lambda}^{\beta_1}\, 'g_{\alpha_1\beta_1}$ и $\underset{p}{\lambda}^{\beta_2}\, '\bar g_{\alpha_2\beta_2}$, складывая затем их и используя (2.12), (2.13), (2.14), (2.18), получим

$$\underset{ps}{n}_\rho = 'g_{\beta_1\alpha_1} \underset{p}{\lambda}^{\beta_1}\, '\overset{*}{\nabla}_\rho \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} + '\bar g_{\beta_2\alpha_2} \underset{p}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, '\overset{*}{\bar\nabla}_\rho \underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2} \cdot \tag{3.54}$$

Принимая в (3.49) $\rho_1 = i$ и свертывая полученное равенство и (3.53) с $\underset{p}{\lambda}^{\beta_1}\, 'g_{\alpha_1\beta_1}$ и $\underset{p}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, '\bar g_{\alpha_2\beta_2}$ соответственно, складывая и используя (2.12), (2.13), (2.14) и (2.15), получим

$$\underset{ps}{n}_i = \underset{p}{\lambda}^{\beta_1}\, 'g_{\alpha_1\beta_1}\, '\overset{*}{\nabla}_i \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} + \underset{p}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, '\bar g_{\alpha_2\beta_2}\, \partial_i \underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2} \tag{3.55}$$

и, аналогично,

$$\underset{ps}{n}_{\bar i} = \underset{p}{\lambda}^{\beta_1}\, 'g_{\alpha_1\beta_1}\, \partial_{\bar i} \underset{s}{\lambda}^{\alpha_1} + \underset{p}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, '\bar g_{\alpha_2\beta_2}\, '\overset{*}{\bar\nabla}_{\bar i} \underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2} \cdot \tag{3.56}$$

Таким образом, формулы (3.1), (3.11), (3.13), (3.15), (3.17), (3.19), (3.22) (3.23), (3.24), (3.26), (3.28), (3.34), (3.38), (3.39), (3.45), (3.46), (3.48), (3.50), (3.54), (3.55) и (3.56) выражают связь между основными величинами поверхности X_m и ее проекциями $'X_{m_1}$ и $'\bar X_{m_2}$. Векторы $\underset{s}{\lambda}^{\alpha_1}$ и $\underset{s}{\bar\lambda}^{\alpha_2}$, входящие в эти формулы, удовлетворяют уравнениям (2.12), (2.13), (2.14) и (2.18). Свертывая (2.14) с $'\bar g^{\gamma_2\alpha_2}$, получим

$$\underset{s}{\bar\lambda}^{\beta_2}\, '\bar g_{\beta_2\alpha_2}\, '\bar g^{\gamma_2\alpha_2} = -'\bar g^{\gamma_2\alpha_2}\, 'g_{\alpha_2\beta_1} \underset{s}{\lambda}^{\beta_1},$$

откуда, согласно (2.13) имеем

$$\underset{s}{\bar\lambda}^{\gamma_2} = -'\bar g^{\gamma_2\alpha_2}\, 'g_{\alpha_2\beta_1} \underset{s}{\lambda}^{\beta_1} \cdot \tag{3.57}$$

Подставляя выражения для $\lambda_s^{\rho_1}$ из (3.57) в (2.18), получим

$$\lambda_s^{\rho_1}\lambda_t^{\sigma_1}(g_{\rho_1\sigma_1} + {}'g^{\bar\rho_1\bar\sigma_1}\, g_{\rho_1\bar\rho_1}\, {}'g_{\bar\sigma_1\sigma_1}) = g_{st}. \tag{3.58}$$

4. Определим взаимное расположение X_m, $'X_{m_1}$ и $'\bar X_{m_2}$, а также расположение X_n относительно позиций V_{n_1} и V_{n_2}. Уравнения многообразия $v^{\rho_1} = \overset{0}{v}{}^{\rho_1} = \mathrm{const}$, принадлежащего поверхности X_m, в V_n следующие:

$$u^a = u^a\,(v^l,\ \overset{0}{v}{}^{\rho}),\quad u^{\bar a} = u^{\bar a}\,(\overset{0}{v}{}^{\rho}) = \mathrm{const},$$

откуда вытекает, что это многообразие принадлежит и поверхности $'X_{m_1}$. Назовем его первой внутренней проекцией X_m. Уравнения этого многообразия в V_{n_1} имеют вид

$$u^a = u^a\,(v^l,\ \overset{0}{v}{}^{\rho}). \tag{4.1}$$

Аналогично, многообразие $v^{\rho_1} = \overset{0}{v}{}^{\rho_1} = \mathrm{const}$, принадлежащее поверхности X_m, принадлежит и поверхности $'\bar X_{m_2}$. Назовем это многообразие второй внутренней проекцией X_m. Его уравнения в V_{n_2} будут

$$u^{\bar a} = u^{\bar a}\,(\overset{0}{v}{}^{\rho},\ v^{\bar l}). \tag{4.2}$$

Уравнения многообразия $v^l = \overset{0}{v}{}^l = \mathrm{const}$, $v^{\bar l} = \overset{0}{v}{}^{\bar l} = \mathrm{const}$, принадлежащего поверхности X_m, в V_n следующие:

$$u^a = u^a\,(\overset{0}{v}{}^l,\ v^{\rho}),\quad u^{\bar a} = u^{\bar a}\,(v^{\rho},\ \overset{0}{v}{}^{\bar l}). \tag{4.3}$$

Это многообразие назовем центром X_m.

Проекцию центра X_m на V_{n_1} определим уравнениями

$$u^a = u^a\,(\overset{0}{v}{}^l,\ v^{\rho}) \tag{4.4}$$

и назовем первой внешней проекцией X_m. Из (2.8) и (4.4) следует, что первая внешняя проекция принадлежит поверхности $'X_{m_1}$. Аналогично, проекцию центра X_m на V_{n_2} определим уравнениями

$$u^{\bar a} = u^{\bar a}\,(v^{\rho},\ \overset{0}{v}{}^{\bar l}) \tag{4.5}$$

и назовем второй внешней проекцией X_m. Из (2.9) и (4.5) следует, что вторая внешняя проекция принадлежит поверхности $'\bar X_{m_2}$.

Из (4.4) и (4.5) вытекает, что существует взаимно однозначное соответствие между внешними проекциями X_m, а также, что v^{ρ} являются координатами, общими относительно этого соответствия.

Из (2.8), (4.1) и (4.4) следует, что поверхность $'X_{m_1}$ есть пространство композиции двух многообразий, позициями которых являются первая внутренняя и первая внешняя проекции X_m. Аналогично поверхность $'\bar X_{m_2}$ есть пространство композиции двух многообразий, позициями которых являются вторая внутренняя и вторая внешняя проекции X_m, а поверхность X_m есть пространство композиции трех многообразий, позициями которых являются первая и вторая внутренние проекции и центр X_m.

5. Рассмотрим подробнее как определяются внутренние и внешние проекции, а также соответствие между внешними проекциями заданием поверхности.

Прежде всего покажем, что преобразование координат, сохраняющее форму (1.12) уравнения поверхности X_m, имеет вид

$$v^{l} = v^{l}(\bar{v}^{\rho_1}),\quad v^{\rho} = v^{\rho}(\bar{v}^{\tau}),\quad v^{\bar{l}} = v^{\bar{l}}(\bar{v}^{\rho_2}), \tag{5.1}$$

где $\bar{v}^{\tau}$ — новые криволинейные координаты X_m.

Действительно, в новой системе координат уравнения поверхности будут

$$u^{a} = u^{a}(\bar{v}^{\rho_1}),\quad u^{u} = u^{u}(\bar{v}^{\rho_2}),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial u^{a}}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0$$

или

$$\frac{\partial u^{a}}{\partial v^{\rho_1}} \cdot \frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0. \tag{5.2}$$

Так как ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial u^{a}}{\partial v^{\rho_1}} \right\|$ равен m_1, то из (5.2) следует, что

$$\frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial \bar{v}^{\bar{l}}} = 0 \tag{5.3}$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial v^{\rho_2}}{\partial \bar{v}^{l}} = 0. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что из (5.3) и (5.4) вытекает (5.1).

Рассмотрим внутренние проекции, как поверхности в пространстве X_m. Уравнения первой внутренней проекции в системах координат v^{τ} и $\bar{v}^{\tau}$ будут соответственно

$$v^{\rho_1} = \overset{0}{v}{}^{\rho_1} = \mathrm{const} \tag{5.5}$$

и

$$v^{\rho_1} = \overset{0}{\bar{v}}{}^{\rho_1} = \mathrm{const}. \tag{5.6}$$

В силу (5.1) из (5.5) следует (5.6) и наоборот, т. е. любая точка' принадлежащая поверхности (5.5), принадлежит и поверхности (5.6) и наоборот. Значит, поверхности (5.5) и (5.6) совпадают, т. е. первая внутренняя проекция остается неизменной при преобразовании (5.1).

Аналогично показывается, что вторая внутренняя проекция остается неизменной при преобразовании (5.1).

Таким образом, заданием поверхности X_m внутренние проекции определяются однозначно.

Рассмотрим центр как поверхность в пространстве X_m. Его уравнения в системе координат v^α есть

$$v^l = \overset{0}{v}{}^l = \mathrm{const}, \quad v^{\bar{l}} = \overset{0}{v}{}^{\bar{l}} = \mathrm{const}, \tag{5.7}$$

а в системе координат $\tilde{v}^\alpha$

$$\tilde{v}^l = \overset{0}{\tilde{v}}{}^l = \mathrm{const}, \quad \tilde{v}^{\bar{l}} = \overset{0}{\tilde{v}}{}^{\bar{l}} = \mathrm{const}. \tag{5.8}$$

При преобразовании координат (5.1) из (5.7) не следует, вообще говоря, (5.8), т. е. точки, принадлежащие поверхности (5.7) не принадлежат, вообще говоря, поверхности (5.8). Значит, при преобразовании (5.1) центр изменяется и, следовательно, изменяются внешние проекции.

Итак, заданием поверхности X_m внешние проекции определяются неоднозначно и произвол их выбора сопряжен с произволом выбора систем криволинейных координат поверхности.

Посмотрим как меняется соответствие между внешними проекциями при изменении этих проекций.

Обозначая касательные векторы первой внешней проекции в пространстве $'X_{m_1}$ через $\xi^{\rho_1}_\rho$, а коэффициенты связности — через $'\Gamma^{\tau}_{\rho\sigma}$, можно написать

$$\partial_\sigma \xi^{\rho_1}_\rho - {}'\Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}\, \xi^{\rho_1}_{\tau} + {}'\dot{G}^{\rho_1}_{\sigma_1\tau_1}\, \xi^{\sigma_1}_\sigma \xi^{\tau_1}_\rho = \overset{l}{B}_{\rho\sigma} \underset{l}{\nu}^{\rho_1}, \tag{5.9}$$

где $\overset{l}{B}_{\rho\sigma}$ — вторые тензоры, а $\underset{l}{\nu}^{\rho_1}$ — нормальные векторы первой внешней проекции в пространстве $'X_{m_1}$. Поскольку

$$\xi^{\rho_1}_\rho = \frac{\partial v^{\rho_1}}{\partial v^\rho} = \delta^{\rho_1}_\rho,$$

то из (5.9) получим

$$-{}'\Gamma^{\tau}_{\sigma\rho}\, \delta^{\rho_1}_{\tau} + {}'\dot{G}^{\rho_1}_{\sigma\rho} = \overset{l}{B}_{\rho\sigma} \underset{l}{\nu}^{\rho_1},$$

откуда при $\rho_1 = \mu$ имеем

$$-{}'\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + {}'\dot{G}^{\mu}_{\sigma\rho} = \overset{l}{B}_{\sigma\rho} \underset{l}{\nu}^{\mu}. \tag{5.10}$$

Аналогично

$$-{}'\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho} + {}'\dot{\bar{G}}^{\mu}_{\sigma\rho} = \overset{\bar{l}}{B}_{\sigma\rho} \underset{\bar{l}}{\nu}^{\mu}, \tag{5.11}$$

где $'\bar{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho}$ — коэффициенты связности, $\overset{\bar{l}}{B}_{\sigma\rho}$ — вторые тензоры и $\underset{\bar{l}}{\nu}^{\rho_2}$ — нормальные векторы второй внешней проекции в пространстве $'\bar{X}_{m_2}$.

Вычитая (5.10) из (5.11), получим

$$T^{\mu}_{\sigma\rho} = \left({}'\overset{*}{G}{}^{\mu}_{\sigma\rho} - {}'\overset{*}{\overline{G}}{}^{\nu}_{\sigma\rho}\right) + \overset{\overline{1}}{B}_{\sigma\rho} \underset{\overline{1}}{\nu}{}^{\mu} - \overset{1}{B}_{\sigma\rho} \underset{1}{\nu}{}^{\mu}, \tag{5.12}$$

где

$$T^{\mu}_{\sigma\rho} = {}'\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} - {}'\overline{\Gamma}{}^{\mu}_{\sigma\rho} \tag{5.13}$$

тензор аффинной деформации внешних проекций.

Таким образом, при изменении внешних проекций соответствие между ними изменяется так, что тензор аффинной деформации удовлетворяет условию (5.12).

6. Покажем, что основные величины поверхности X_m определяются заданием основных величин проекций $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$, основных величин внутренних и внешних проекций и соответствия между внешними проекциями.

Действительно, основные величины поверхности X_m по формулам (3.1), (3.11). (3.13), (3.15), (3.17), (3.19), (3.22), (3.23), (3.24), (3.26), (3.28), (3.34), (3.38), (3.39), (3.45), (3.46), (3.48), (3.50), (3.54), (3.55) и (3.56) определяются данными величинами и векторами $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$, определяемыми уравнениями (2.12) и (3.58). Покажем, что векторы $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$ определяются через данные величины. В самом деле, (2.12) можно записать в виде

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,{}'g_{\rho l} + \underset{s}{\lambda}{}^{J}\,{}'g_{lJ} = 0. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что $'g_{lJ}$ и $'g_{\rho\sigma}$ будут метрическими тензорами первой внутренней и первой внешней проекций соответственно. Обозначим через $'\overset{*}{g}{}^{lJ}$ тензор, взаимный тензору $'g_{lJ}$. Свертывая (6.1) с $'\overset{*}{g}{}^{lk}$, получим

$$\underset{s}{\lambda}{}^{k} = -\,{}'\overset{*}{g}{}^{kl}\,\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,{}'g_{\rho l}. \tag{6.2}$$

Подставляя выражение $\underset{s}{\lambda}{}^{k}$ из (6.2) в (3.58), придем к соотношению

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,\underset{t}{\lambda}{}^{\sigma}\left({}'g_{\rho\sigma} + {}'\overline{g}{}^{\mu\tau}\,{}'g_{\mu\rho}\,{}'g_{\sigma\tau} - {}'\overset{*}{g}{}^{lJ}\,{}'g_{J\sigma}\,{}'g_{l\rho} - {}'\overset{*}{g}{}^{lJ}\,{}'g_{J\sigma}\,{}'g_{\tau\rho}\,{}'g_{l\mu}\,{}'\overline{g}{}^{\mu\tau}\right) = g_{st}$$

или, обозначая через $\overset{*}{g}_{\rho\sigma}$ выражение, находящееся в скобках, получим

$$\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}\,\underset{t}{\lambda}{}^{\sigma}\,\overset{*}{g}_{\rho\sigma} = g_{st}, \tag{6.3}$$

откуда видно, что $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho}$ есть ортогональный единичный репер в метрике $\overset{*}{g}_{\rho\sigma}$.

Легко видеть, что произвол выбора такого репера сопряжен только с произволом выбора системы векторов, нормальных к X_m ([2], стр. 197).

Таким образом, векторы $\underset{s}{\lambda}{}^{\rho_1}$ определяются данными величинами и, следовательно, данными величинами определяются основные величины поверхности X_m.

7. Рассмотрим некоторые свойства X_m.

Линия кривизны для нормали $\left(\underset{s_1}{\nu^a}, 0\right)$ определяется уравнениями ([2], стр. 203)

$$(\underset{s_1}{b_{\alpha\beta}} + \underset{s_1}{K} g_{\alpha\beta}) dv^\beta = 0, \tag{7.1}$$

где $\underset{s_1}{K}$ — корни уравнения

$$|\underset{s_1}{b_{\alpha\beta}} + \underset{s_1}{K} g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{7.2}$$

Используя (3.15) для $m - m_1$ корней (7.2), получим

$$\underset{s_1}{K_{\bar{1}}} = 0. \tag{7.3}$$

Подставляя выражение $\underset{s_1}{K_{\bar{1}}}$ из (7.3) в (7.1), уравнения линий кривизны для нормали $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$, соответствующих корням $\underset{s_1}{K_{\bar{1}}}$, примут вид

$$\underset{s_1}{b_{\alpha\beta}} dv^\beta = 0$$

или, используя (3.15)

$$\underset{s_1}{b_{\rho_1\sigma_1}} dv^{\sigma_1} = 0.$$

Отсюда следует, что любая линия на многообразии $v^{\sigma_1} = \overset{0}{v}{}^{\sigma_1} = \text{const}$ есть линия кривизны для нормали $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$.

Таким образом, приходим к выводу: *вторая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали* $(\underset{s_1}{\nu^a}, 0)$.

Аналогично, *первая внутренняя проекция есть омбилическое многообразие для нормали* $(0, \underset{s_2}{\nu^{\bar{a}}})$.

При изгибании проекций $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$, как следует из (3.1), поверхность X_m тоже изгибается. Из (3.22), (3.23), (3.25), (6.2) и (6.3) следует, что поверхность X_m изгибается так, что вторые тензоры $\underset{s}{b_{\alpha\beta}}$ остаются неизменными, а $\underset{s}{b_{\alpha\beta}}$ есть вторые тензоры поверхности X_m в подпространстве $V_{m_1+m_2}$ пространства V_n, являющемся топологическим произведением проекций $'X_{m_1}$ и $'\overline{X}_{m_2}$.

Итак, при изгибании проекций $'X_{m_1}$ *и* $'\overline{X}_{m_2}$ *поверхность* X_m *изгибается так, что остается неизменной в пространстве, являющемся топологическим произведением этих проекций.*

8. Покажем, что $'g_{\rho_1\sigma_1}$ не зависят от $v^{\bar{1}}$.

Действительно, имеем

$$'g_{\rho_1\sigma_1} = g_{ab} \frac{\partial u^a}{\partial v^{\rho_1}} \cdot \frac{\partial u^b}{\partial v^{\sigma_1}}. \tag{8.1}$$

Дифференцируя (8.1) по $v^{\bar{i}}$ и имея в виду, что $g_{ab}=g_{ab}(u^c)$, $u^a= =u^a(v^{\tau_1})$, получим

$$\partial_{\bar{i}}{}' g_{\rho_1\sigma_1}=0 \tag{8.2}$$

и, аналогично,

$$\partial_i{}' \bar{g}_{\rho_2\sigma_2}=0. \tag{8.3}$$

Используя (3.15), (3.34), (3.38), из (3.7) при $s_3=s_1$, $\alpha=\bar{i}$, $\beta=\rho$, $\gamma=\sigma$ выводим

$$2\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{i}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1]\sigma_1}=-\overset{t}{b}_{\sigma_1\bar{i}}\underset{ts_1}{n}_{\rho_1}$$

или

$$\partial_{\bar{i}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1}-\overset{\bullet}{C}{}^{\tau_1}_{\bar{i}\sigma_1}\underset{s_1}{b}_{\tau_1\rho_1}=-\overset{t}{b}_{\sigma_1\bar{i}}\underset{ts_1}{n}_{\rho_1},$$

Откуда, согласно (3.16) и (3.48), получаем

$$\partial_{\bar{i}}\underset{s_1}{b}_{\rho_1\sigma_1}=0 \tag{8.4}$$

и, аналогично,

$$\partial_i\underset{s_2}{b}_{\rho_2\sigma_2}=0. \tag{8.5}$$

Из (3.8) при $t_3=t_1$, $s_3=s_1$, $\alpha=\bar{i}$, $\beta=\rho_1$ имеем

$$\overset{\bullet}{\nabla}_{[\bar{i}}\underset{s_1t_1}{n}_{\rho_1]}+g^{\gamma\delta}\underset{t_1}{b}_{\gamma[\rho_1}\underset{s_1}{b}_{\bar{i}]\delta}+g^{p_1r_1}\underset{p_1t_1}{n}_{[\rho_1}\underset{r_1s_1}{n}_{\bar{i}]}=0$$

или, используя (3.15), (3.34), (3.38) и (3.45), получим

$$\partial_{\bar{i}}\underset{s_1t_1}{n}_{\rho_1}=0 \tag{8.6}$$

и, аналогично,

$$\partial_{\bar{i}}\underset{s_2t_2}{n}_{\rho_2}=0. \tag{8.7}$$

Имея в виду формулы (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.6), (8.7), придем к выводу: *на поверхности X_m есть система криволинейных координат $(v^i, v^\rho, v^{\bar{i}})$, относительно которой имеет место следующее:* а) *компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ распадаются на три группы $g_{i\alpha}$, $g_{\rho\sigma}$, $g_{\bar{i}\beta}$ так, что*

$$g_{i\alpha}=g_{i\alpha}(v^j, v^\tau),\quad g_{\rho\sigma}=g_{\rho\sigma}(v^i, v^\tau, v^{\bar{j}}),\quad g_{\bar{i}\beta}=g_{\bar{i}\beta}(v^\tau, v^{\bar{j}});$$

б) *вторые тензоры $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$ распадаются на три группы $\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}$, $\underset{s}{b}_{\alpha\beta}$, $\underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}$ так, что*

$$\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s_1}{b}_{\alpha\beta}(v^j, v^\rho),\quad \underset{s}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s}{b}_{\alpha\beta}(v^i, v^\rho, v^{\bar{i}}),\quad \underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}=\underset{s_2}{b}_{\alpha\beta}(v^\rho, v^{\bar{i}});$$

в) *векторы $\underset{s_3t_3}{n}_\alpha$ распадаются на три группы $\underset{s_1t_{12}}{n}_\alpha$, $\underset{st_3}{n}_\alpha$, $\underset{s_2t_{12}}{n}_\alpha$ и так что*

$$\underset{s_1t_{12}}{n}_\alpha=\underset{s_1t_{12}}{n}_\alpha(v^i, v^\rho),\quad \underset{st_3}{n}_\alpha=\underset{st_3}{n}_\alpha(v^i, v^\rho, v^{\bar{i}}),\quad \underset{s_2t_{12}}{n}_\alpha=\underset{s_2t_{12}}{n}_\alpha(v^\rho, v^{\bar{i}}),$$

где через t_{12} обозначен любой индекс, принадлежащий совокупности индексов t_1 и t_2.

Казанский государственный
университет

Поступило 6.IV.66.

Լ. Ա. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԲԵՐՎԱԾ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵՋ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ մակերևույթը ռիմանյան բերված տարածության մեջ հանդիսանում է երկու բազմաձևությունների ընդհանրապես ոչ-ազատ կոմպոզիցիայի տարածություն։

Մանրամասը ուսումնասիրվում է այն մասնավոր դեպքը, երբ մակերևույթի բազիսային բազմաձևությունները ծածկվում են համապատասխան շերտերի միջոցով միապատիկ կերպով։

Ուսումնասիրված է մակերևույթի մի քանի հատկությունները, ինչպես նաև մակերևույթի մի քանի գծերի հատկությունները, որոնք բնութագրում են մակերևույթի ներքին ու արտաքին երկրաչափությունները։

L. A. MATEVOSIAN

ON SURFACES IN REDUCABLE SPACES

S u m m a r y

It is proved in the paper, that the surface in a reducable rieman space may be represented as a generally non-free composition space of two manifolds.

The case, when the basic manifolds of the surface may be covered with the corresponding layers, is studied in detail.

Several properties of the surfaces and ofsurfece lines related with internal and external geometrics, are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *А. П. Норден.* Пространства декартовой композиции, Изв. вузов, Матем., № 4 (1963).
2. *Л. П. Эйзенхарт.* Риманова геометрия, ГИТЛ, М. (1948).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 6, 1966 Математика

И. С. САРГСЯН

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Введение

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — вещественные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — вещественные, непрерывно дифференцируемые функции на той же полупрямой. Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0, \tag{0.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0, \tag{0.2}$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ \ u_2(x,0)=f_2(x). \tag{0.3}$$

Система (0.1)—(0.2) является одномерным аналогом нестационарной системы Дирака в релятивистской квантовой теории.

Изучение асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным функциям одномерной стационарной системы Дирака, т. е. задачи

$$\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1, \tag{0.4}$$

$$-\frac{dy_1}{dx}+r(x)\,y_2=\lambda y_2, \tag{0.5}$$

$$y_2(0)-hy_1(0)=0, \tag{0.6}$$

методами, аналогичными методам, разработанными Б. М. Левитаном [1] и В. А. Марченко [2[для уравнения Шредингера, основано на предварительном исследовании задачи (0.1) + (0.2) + (0.3).

В настоящей работе выводятся явные формулы для решения задачи (0.1) + (0.2) + (0.3). Эти формулы нами уже использованы при изучении асимптотического поведения спектральной функции и ее производных, а также вопросов разложения и суммирования дифференцированных разложений по собственным функциям задачи (0.4) + (0.5) + + (0.6); полученные в этом направлении результаты изложены в заметках автора [5—8].

Приведем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть функции $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ удовлетворяют вышеуказанным требованиям. Тогда решение задачи* (0.1) ÷ (0.2) ÷ (0.3) $u(x, t; f) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ *дается формулами:*

I. *при* $0 < t < x$

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{0.7}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\}\, ds. \tag{0.8}$$

II. *при* $t < 0$, $0 < -t < x$

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{\bar{K}(x, -t, s) f_1(s) + \bar{L}(x, -t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{0.9}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\bar{M}(x, -t, s) f_1(s) + \bar{N}(x, -t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{0.10}$$

где положено

$$k(x, t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\, d\tau\right\},$$

$$l(x, t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\, d\tau\right\},$$

а функции $\{K(x, t, s),\ L(x, t, s)\}$ *и* $\{M(x, t, s),\ N(x, t, s)\}$ *удовлетворяют системе*

$$i\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial s} + p(s) K(x, t, s) = 0, \tag{0.11}$$

$$i\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial K}{\partial s} + r(s) L(x, t, s) = 0 \tag{0.12}$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$\left.\begin{aligned} K(x, t, x+t) + i L(x, t, x+t) &= \frac{1}{2} i \{p(x+t) - r(x+t)\} k(x, t), \\ K(x, t, x-t) - i L(x, t, x-t) &= \frac{1}{2} i \{p(x-t) - r(x-t)\} l(x, t), \end{aligned}\right| \tag{0.13}$$

$$\left.\begin{aligned} N(x,t,x+t) - iM(x,t,x+t) &= \frac{1}{2}\, i\{r(x+t) - p(x+t)\}\, k(x,t),\\ N(x,t,x-t) + iM(x,t,x-t) &= \frac{1}{2}\, i\{r(x-t) - p(x-t)\}\, l(x,t) \end{aligned}\right| . \tag{0.14}$$

Функции же $\{\tilde{K}(x,-t,s), \tilde{L}(x,-t,s)\}$ *и* $\{\tilde{M}(x,-t,s), \tilde{N}(x,-t,s)\}$ *удовлетворяют системе* (0.11) + (0.12) *и условиям на характеристиках, соответственно,* (0.14) *и* (0.13).

Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — по формулам*

$$f_1(-x) = \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int_0^x \{P(x,s) f_1(s) + R(x,s) f_2(s)\}\, ds, \tag{0.15}$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\}\, ds, \tag{0.16}$$

где

$$\alpha(x) = \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\},$$

$$\beta(x) = -\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]\, d\tau\right\},$$

а функции $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$ и $H(x,s)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} P'_x(x,s) + H'_s(x,s) &= \{r(x) - p(-s)\}\, Q(x,s),\\ H'_x(x,s) + P'_s(x,s) &= \{r(-s) - p(x)\}\, R(x,s),\\ Q'_x(x,s) - R'_s(x,s) &= \{p(-s) - p(x)\}\, P(x,s),\\ R'_x(x,s) - Q'_s(x,s) &= \{r(x) - r(-s)\}\, H(x,s) \end{aligned}$$

и условиям

$$\begin{aligned} H(x,x) - P(x,x) &= \alpha'(x) - \beta(x)\{p(-x) - r(x)\},\\ R(x,x) + Q(x,x) &= -\beta'(x) - \alpha(x)\{r(-x) - r(x)\}, \end{aligned}$$

$$R(x,0) - hP(x,0) = 0,\ H(x,0) - hQ(x,0) = 0 \quad \left(h = \frac{f_2(0)}{f_1(0)}\right).$$

Если $f_1(0) = 0$, то следует взять $h = 0$.

---

* В совместной работе Б. М. Левитана и автора [4] показано, что это продолжение непрерывно вместе с производной первого порядка.

III. *при* $0 < x < t$

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) - if_2(x+t)\} + l_1(x, t)\{f_1(t-x) -$$

$$- if_2(t-x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{K_1(x, t, s) f_1(s) + L_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{0.17}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l_1(x, t)\{f_2(t-x) +$$

$$+ if_1(t-x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{M_1(x, t, s) f_1(s) + N_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{0.18}$$

где

$$l_1(x, t) = \{\alpha(t-x) + i\beta(t-x)\}\, l(x, t),$$

а функции $K_1(x, t, s)$, $L_1(x, t, s)$, $M_1(x, t, s)$ *и* $N_1(x, t, s)$ *выражаются через функции* $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$, $N(x, t, s)$, $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ *и* $H(x, s)$ *элементарно.*

Для полноты изложения в работе приведен полный текст вышеупомянутой совместной работы Б. М. Левитана и автора, что составляет часть параграфа 4.

Поясним в общих чертах сущность метода работы.

Сначала строится система интегральных уравнений, эквивалентная задаче (0.1) + (0.2) + (0.3). Интегральные уравнения оказываются уравнениями типа уравнения Вольтерра. Затем система интегральных уравнений решается методом последовательных приближений. Решения задаются формулами (0.7)—(0.8) и (0.9)—(0.10) при $0 < t < x$ и $t < 0$, $0 < -t < x$ соответственно. Для построения решения при $0 < x < t$ строится оператор преобразования, с помощью которого удается продолжить решения на отрицательную полуось с сохранением класса, т. е. непрерывно вместе с производными первого порядка. Тогда решение дается формулами (0.17)—(0.18).

В заключение искренне благодарю проф. Б. М. Левитана за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

§ 1. Вывод формулы для решения задачи Коши

В этом параграфе мы выведем формулу для решения задачи Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)\, u_1 = 0, \tag{1.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0, \tag{1.2}$$

$$u_1(x,t)|_{t=0}=f_1(x), \tag{1.3}$$

$$u_2(x,t)|_{t=0}=f_2(x). \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что функции $p(x)$ и $r(x)$ определены на полупрямой $(0,\infty)$, вещественны и суммируемы в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ также определены на полупрямой $(0,\infty)$ и имеют непрерывные первые производные. Продолжим функции $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном, как угодно.

Сначала рассмотрим задачу (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) при $p(x)=r(x)=0$. Тогда мы имеем

$$i\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}+\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}=0, \tag{1.5}$$

$$i\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}-\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}=0, \tag{1.6}$$

$$u_1^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_1(x), \tag{1.7}$$

$$u_2^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_2(x). \tag{1.8}$$

Задача (1.5) + (1.6) + (1.7) + (1.8) эквивалентна двум независимым задачам относительно функций $u_1^{(0)}(x,t)$ и $u_2^{(0)}(x,t)$. В самом деле, дифференцируя уравнение (1.5) по x, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}\right)=-i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right).$$

Подставляя сюда значение $\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}$ из уравнения (1.6), получим

$$\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}=-i\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

Далее, из уравнения (1.6) и условия (1.7) следует

$$i\left.\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right|_{t=0}=f_1'(x). \tag{1.10}$$

Значит, в силу (1.9), (1.8) и (1.10), для функции $u_2^{(0)}(x,t)$ получаем следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial x^2}, \tag{1.11}$$

$$u_2^{(0)}(x,t)|_{t=0}=f_2(x), \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{\partial u_2^{(0)}(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-if_1'(x). \tag{1.13}$$

Решение задачи (1.11) + (1.12) + (1.13) дается формулой Даламбера

$$u_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x+t} f_1'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\}. \quad (1.14)$$

Поступая аналогичным образом, т. е. дифференцируя (1.6) по x и подставляя в полученное уравнение значение $\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}$ из уравнения (1.5), для функции $u_1^{(0)}(x, t)$ находим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(i \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial t}\right) = i \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial t^2}. \quad (1.15)$$

Далее, из уравнения (1.5), в силу (1.8), находим условие

$$i \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x}\bigg|_{t=0} = -f_2'(x). \quad (1.16)$$

Поэтому уравнение (1.15) совместно с условиями (1.7) и (1.16) для функции $u_1^{(0)}(x, t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_1^{(0)}}{\partial x^2},$$

$$u_1^{(0)}(x, t)\,|_{t=0} = f_1(x),$$

$$\frac{\partial u_1^{(0)}(x, t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = i f_2'(x).$$

Применяя формулу Даламбера, получаем

$$u_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x+t} f_2'(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\}. \quad (1.17)$$

Итак, доказано, что решение задачи (1.5) + (1.6) + (1.7) + (1.8) даются по формулам (1.17) и (1.14), т. е.

$$u_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\}, \quad (1.18а)$$

$$u_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2}\{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\}. \quad (1.18в)$$

Рассмотрим теперь неоднородную систему с однородными начальными условиями

$$i \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x} = F_1(x, t), \quad (1.18)$$

$$i\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t}-\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x}=F_2(x,t), \tag{1.19}$$

$$\bar{u}_1(x,t)/_{t=0}=0, \tag{1.20}$$

$$\bar{u}_2(x,t)/_{t=0}=0. \tag{1.20'}$$

Составим задачи Коши для функций $\bar{u}_1(x,t)$ и $\bar{u}_2(x,t)$ независимо друг от друга. С этой целью дифференцируем уравнение (1.18) по t, а уравнение (1.19) по x. Имеем

$$i\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t}\right)+\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}. \tag{1.21}$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x^2}+\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}. \tag{1.22}$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) относительно функции $\bar{u}_1(x,t)$ получаем следующее окончательное уравнение

$$\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x^2}=-i\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x}. \tag{1.23}$$

Далее, из уравнения (1.18) и начального условия (1.20′) следует

$$\left.\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial t}\right|_{t=0}=-i\left.\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial x}\right|_{t=}-iF_1(x,t)\Big|_{t=0}=-iF_1(x,0). \tag{1.24}$$

Поэтому уравнение (1.23) совместно с начальными условиями (1.20) и (1.24) для функции $\bar{u}_1(x,t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\bar{u}_1}{\partial x^2}=-i\frac{\partial F_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial x},$$

$$\bar{u}_1(x,t)/_{t=0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial\bar{u}_1(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-iF_1(x,0).$$

Решение этой задачи дается формулой (см. [3], стр. 158):

$$\bar{u}_1(x,t)=-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x+t}F_1(y,0)\,dy+\frac{1}{2}\int_0^t d\tau\left\{\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\left[-i\frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial y}\right]dy\right\}. \tag{1.25}$$

Составим теперь задачу Коши для функции $\bar{u}_2(x,t)$. Аналогично предыдущему, дифференцируем уравнение (1.19) по t, а уравнение (1.18) по x. Тогда

$$
\left.
\begin{aligned}
i\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t}\right) + \frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t},\\
i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t}\right) &= -\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}.
\end{aligned}
\right| \tag{1.26}
$$

Равенства (1.26) для функции $\tilde{u}_2(x, t)$ определяют уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x}. \tag{1.27}$$

Далее, из уравнения (1.19) и начального условия (1.20) следует

$$\left.\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t}\right|_{t=0} = -i\left.\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}\right|_{t=0} - iF_2(x,t)\Big|_{t=0} = -iF_2(x,0). \tag{1.28}$$

Тогда уравнение (1.27) совместно с начальными условиями (1.20) и (1.28) для функции $\tilde{u}_2(x, t)$ определяют следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial x^2} = -i\frac{\partial F_2(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial F_1(x,t)}{\partial x},$$

$$\tilde{u}_2(x,t)/_{t=0} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -iF_2(x,0).$$

Решение этой задачи дается формулой

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x+t} F_2(y,0)\,dy - \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[i\frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial y}\right] dy. \tag{1.29}$$

Преобразуем теперь формулы (1.25) и (1.29). Сначала преобразуем второй интеграл формулы (1.25). Имеем

$$J = \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[-i\frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial y}\right] dy =$$

$$= -\frac{1}{2}i\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial \tau}\,dy + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial y}\,dy = J_1 + J_2. \tag{1.30}$$

Непосредственным интегрированием для J_2 получим

$$J_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \{F_2(x+t-\tau,\tau) - F_2(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau. \tag{1.31}$$

Меняя порядок интегрирования в J_1 и интегрируя, находим

$$J_1 = -\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} dy \int\limits_0^{y-(x-t)} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} dy \int\limits_0^{x+t-y} \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+t)\,dy + \frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_1(y,0)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_1(y, x+t-$$

$$-y)\,dy + \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_1(y,0)\,dy = \frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x+t} F_1(y,0)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+$$

$$+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_1(y, x+t-y)\,dy. \tag{1.32}$$

В силу (1.30), (1.31) и (1.32) формула (1.25) принимает вид

$$\bar{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \{F_2(x+t-\tau,\tau) - F_2(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_1(y, x+t-y)\,dy. \tag{1.33}$$

Преобразуем теперь формулу (1.29). Сначала преобразуем второй интеграл этой формулы, т. е. интеграл

$$I = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \left[i\frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial\tau} + \frac{\partial F_1(y,\tau)}{\partial y}\right] dy = I_1 + I_2. \tag{1.34}$$

Меняя порядок интегрирования, а затем интегрируя, получим

$$I_1 = -\frac{1}{2}i\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial\tau}\,dy = -\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} dy \int\limits_0^{y-(x-t)} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} dy \int\limits_0^{x+t-y} \frac{\partial F_2(y,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\,dy +$$

$$+\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_2(y,0)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_2(y, x+t-y)\,dy + \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_2(y,0)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x+t} F_2(y,0)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int\limits_x^{x+t} F_2(y, x+t-y)\,dy. \tag{1.35}$$

Непосредственным интегрированием для I_2 получим

$$I_2 = -\frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x+t-\tau,\tau) - F_1(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau. \tag{1.36}$$

В силу равенств (1.34), (1.35) и (1.36) формула (1.29) примет вид

$$\tilde{u}_2(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x+t-\tau,\tau) - F_1(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_x^{x+t} F_2(y,-y+x+t)\,dy. \tag{1.37}$$

Итак, доказано, что решения задачи (1.18)+(1.19)+(1.20)+(1.20′) даются формулами (1.33) и (1.37), т. е.

$$\tilde{u}_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_2(x+t-\tau,\tau) - F_2(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_1(y, y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_x^{x+t} F_1(y,-y+x-t)\,dy, \tag{1.38^a}$$

$$\tilde{u}_2(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \{F_1(x-t+\tau,\tau) - F_1(x+t-\tau,\tau)\}\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x} F_2(y, y-x+t)\,dy - \frac{1}{2}i\int_x^{x+t} F_2(y,-y+x+t)\,dy. \tag{1.38^b}$$

Вернемся теперь к задаче (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4). Перепишем ее в следующем виде:

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = -p(x)\,u_1(x,t),$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = -r(x)\,u_2(x,t),$$

$$u_1(x,t)/_{t=0} = f_1(x),$$

$$u_2(x,t)/_{t=0} = f_2(x).$$

Положим

$$F_1(x,t) = -p(x)\,u_1(x,t), \tag{1.38}$$

$$F_2(x,t) = -r(x)\,u_2(x,t). \tag{1.38′}$$

Считая функции $F_1(x,t)$ и $F_2(x,t)$ в равенствах (1.38) и (1.38′) известными и учитывая линейность системы (1.1)+(1.2), нетрудно убедиться, что решения задачи (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4) $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задаются формулами

$$u_1(x,t)=u_1^{(0)}(x,t)+\tilde{u}_1(x,t),$$

$$u_2(x,t)=u_2^{(0)}(x,t)+\tilde{u}_2(x,t),$$

где $u^{(0)}(x,t)=\begin{pmatrix}u_1^{(0)}(x,t)\\ u_2^{(0)}(x,t)\end{pmatrix}$ и $\tilde{u}(x,t)=\begin{pmatrix}\tilde{u}_1(x,t)\\ \tilde{u}_2(x,t)\end{pmatrix}$, соответственно, являются решениями задач (1.5)+(1.6) + (1.7) + (1.8) и (1.18) + (1.19) + +(1.20) + (1.20′). Поэтому, в силу формул (1.18^a), (1.18^b), (1.38) и (1.38′), для решения задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) получим формулы

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\{f_1(x+t)+f_1(x-t)\}+\frac{1}{2}i\{f_2(x+t)-f_2(x-t)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\{r(x+t-\tau)\,u_2(x+t-\tau,\tau)-r(x-t+\tau)\,u_2(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x}p(\tau)\,u_1(\tau,\tau-x+t)\,d\tau+\frac{1}{2}i\int_x^{x+t}p(\tau)\,u_1(\tau,x+t-\tau)\,d\tau, \qquad (1.39)$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\{f_2(x+t)+f_2(x-t)\}-\frac{1}{2}i\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\{p(x+t-\tau)\,u_1(x+t-\tau,\tau)-p(x-t+\tau)\,u_1(x-t+\tau,\tau)\}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x}r(\tau)\,u_2(\tau,\tau-x+t)\,d\tau+\frac{1}{2}i\int_x^{x+t}r(\tau)\,u_2(\tau,x+t-\tau)\,d\tau. \qquad (1.40)$$

Таким образом, для решения задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) мы построили эквивалентную ей систему интегральных уравнений (1.39) + (1.40). Эти уравнения являются уравнениями типа Вольтерра и поэтому могут быть решены методом последовательных приближений. Сначала приведем их к более удобному для исследования виду. Заменяя переменную в первых интегралах, мы находим

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\{f_1(x+t)+f_1(x-t)\}+\frac{1}{2}i\{f_2(x+t)-f_2(x-t)\}+$$

$$+\frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x}p(s)\,u_1(s,s-x+t)\,ds+\frac{1}{2}i\int_x^{x+t}p(s)\,u_1(s,x+t-s)\,ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x}r(s)\,u_2(s,s-x+t)\,ds+\frac{1}{2}\int_x^{x+t}r(s)\,u_2(s,x+t-s)\,ds, \qquad (1.39')$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\{f_2(x+t)+f_2(x-t)\}-\frac{1}{2}i\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}+$$

$$+\frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} r(s)\, u_2(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} r(s)\, u_2(s, x+t-s)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x} p(s)\, u_1(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{2} \int_{x}^{x+t} p(s)\, u_1(s, x+t-s)\, ds. \quad (1.40')$$

Пусть функции $u_1^{(0)}(x, t)$ и $u_2^{(0)}(x, t)$ определяются по формулам

$$u_1^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} \{f_1(x+t) + f_1(x-t)\} + \frac{1}{2} i \{f_2(x+t) - f_2(x-t)\}, \quad (1.41)$$

$$u_2^{(0)}(x, t) = \frac{1}{2} \{f_2(x+t) + f_2(x-t)\} - \frac{1}{2} i \{f_1(x+t) - f_1(x-t)\}. \quad (1.42)$$

При $p \geqslant 1$ ($p=1, 2, 3, \cdots$) положим

$$u_1^{(p)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} p(s)\, u_1^{(p-1)}(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} p(s)\, u_1^{(p-1)}(s, x+$$

$$+t-s)\, ds - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x} r(s) u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{x}^{x+t} r(s) u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\, ds, \quad (1.43)$$

$$u_2^{(p)}(x, t) = \frac{1}{2} i \int_{x-t}^{x} r(s)\, u_2^{(p-1)}(s, s-x+t)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2} i \int_{x}^{x+t} r(s)\, u_2^{(p-1)}(s, x+t-s)\, ds - \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x} p(s) u_1^{(p-1)}(s, s-x+t)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2} \int_{x}^{x+t} p(s)\, u_1^{(p-1)}(s, x+t-s)\, ds. \quad (1.44)$$

Тогда из равномерной сходимости последовательных приближений, доказательство которой мы опускаем, считая его общеизвестным, следует, что решение системы интегральных уравнений (1.39′)+(1.40′) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются равенствами

$$u_1(x, t) = u_1^{(0)}(x, t) + u_1^{(1)}(x, t) + u_1^{(2)}(x, t) + \cdots \quad (1.45)$$

$$u_2(x, t) = u_2^{(0)}(x, t) + u_2^{(1)}(x, t) + u_2^{(2)}(x, t) + \cdots. \quad (1.46)$$

Покажем, что каждую из функций $u_1^{(p)}(x, t)$ и $u_2^{(p)}(x, t)$, $p=1, 2, \cdots$, можно представить в виде

$$u_1^{(p)}(x, t) = k_1^{(p)}(x, t)\, f_1(x+t) + l_1^{(p)}(x, t)\, f_1(x-t) + m_1^{(p)}(x, t)\, f_2(x+t) +$$

$$+n_1^{(p)}(x, t)\, f_2(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \{K_p(x, t, s)\, f_1(s) + L_p(x, t, s)\, f_2(s)\}\, ds, \quad (1.47)$$

$$u_2^{(p)}(x,t)=k_2^{(p)}(x,t)f_1(x+t)+l_2^{(p)}(x,t)\,f_1(x-t)+m_2^{(p)}(x,t)\,f_2(x+t)+$$
$$+n_2^{(p)}(x,t)\,f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M_p(x,t,s)\,f_1(s)+N_p(x,t,s)\,f_2(s)\}\,ds. \quad (1.48)$$

Положим

$$J_1^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,u_1^{(p-1)}(s,s-x+t)\,ds, \quad (1.49)$$

$$J_2^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\,u_1^{(p-1)}(s,x+t-s)\,ds, \quad (1.50)$$

$$J_3^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}r(s)\,u_2^{(p-1)}(s,s-x+t)\,ds, \quad (1.51)$$

$$J_4^{(p)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}r(s)\,u_2^{(p-1)}(s,x+t-s)\,ds. \quad (1.52)$$

Тогда равенства (1.43) и (1.44) можно переписать в виде

$$u_1^{(p)}(x,t)=iJ_1^{(p)}(x,t)+iJ_2^{(p)}(x,t)-J_3^{(p)}(x,t)+J_4^{(p)}(x,t), \quad (1.53)$$

$$u_2^{(p)}(x,t)=-J_1^{(p)}(x,t)+J_2^{(p)}(x,t)+iJ_3^{(p)}(x,t)+iJ_4^{(p)}(x,t). \quad (1.54)$$

Докажем теперь формулы (1.47) и (1.48). При $p=1$ из (1.49) и (1.41) следует

$$J_1^{(1)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\left\{\frac{1}{2}[f_1(2s-x+t)+f_1(x-t)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,i[f_2(2s-x+t)-f_2(x-t)]\right\}ds=f_1(x-t)\times$$
$$\times\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,ds-f_2(x-t)\cdot\frac{1}{4}\,i\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,ds+$$
$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t}p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_1(s)\,ds+\frac{1}{8}\,i\int\limits_{x-t}^{x+t}p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_2(s)\,ds. \quad (1.55)$$

Из равенств (1.50) и (1.41) получаем

$$J_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\left\{\frac{1}{2}[f_1(x+t)+f_1(2s-x-t)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\,i[f_2(x+t)-f_2(2s-x-t)]\right\}ds=f_1(x+t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)\,ds+$$

$$+ f_2(x+t)\cdot\frac{1}{4}i\int\limits_x^{x+t} p(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x+t-s)\right]f_1(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]f_2(s)\,ds. \tag{1.56}$$

Далее, из (1.51) и (1.42) мы имеем

$$J_3^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\left\{\frac{1}{2}[f_2(2s-x+t)+f_2(x-t)] - \frac{1}{2}i[f_1(2s-\right.$$

$$\left.-x+t)-f_1(x-t)]\right\}ds = f_2(x-t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,ds + f_1(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_2(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]f_1(s)\,ds. \tag{1.57}$$

И, наконец, из равенств (1.52) и (1.42) следует

$$J_4^{(1)}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\left\{\frac{1}{2}[f_2(x+t)+f_2(2s-x-t)] - \frac{1}{2}i[f_1(x+t)-\right.$$

$$\left.-f_1(2s-x-t)]\right\}ds = f_2(x+t)\cdot\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\,ds - f_1(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{4}i\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\,ds + \frac{1}{8}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]f_2(s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{8}i\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]f_1(s)\,ds, \tag{1.58}$$

Положим

$$k_1^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4}i\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)-r(s)]\,ds, \tag{1.59}$$

$$l_1^{(1)}(x,t) = \frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)-r(s)]\,ds, \tag{1.60}$$

$$m_1^{(1)}(x,t) = -\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)-r(s)]\,ds, \tag{1.61}$$

$$n_1^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)-r(s)]\,ds, \tag{1.62}$$

$$K_1(x,t,s)=\frac{1}{4}i\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$

$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.63}$$

$$L_1(x,t,s)=\frac{1}{4}\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$

$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}. \tag{1.64}$$

Тогда формула (1.47) при $p=1$ следует из (1.53) в силу равенств (1.55)—(1.58) и (1.59)—(1.64).

Далее, полагая

$$k_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.65}$$

$$l_2^{(1)}(x,t)=-\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.66}$$

$$m_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}i\int\limits_{x}^{x+t}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.67}$$

$$n_2^{(1)}(x,t)=\frac{1}{4}i\int\limits_{x-t}^{x}[p(s)+r(s)]\,ds, \tag{1.68}$$

$$M_1(x,t,s)=\frac{1}{4}\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]+\right.$$

$$\left.+r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.69}$$

$$N_1(x,t,s)=-\frac{1}{4}i\left\{p\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]+p\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]-\right.$$

$$\left.-r\left[\frac{1}{2}(x+t+s)\right]-r\left[\frac{1}{2}(x-t+s)\right]\right\}, \tag{1.70}$$

мы получим формулу (1.48) при $p=1$, в силу равенств (1.54)—(1.58).

Допустим теперь, что для $p=1,2,\cdots,q-1$ формулы (1.47) и (1.48) уже доказаны. Докажем их для $p=q$. Полагая в (1.47) $p=q-1$ и подставляя выражение для $u_1^{(q-1)}(x,t)$ в (1.49), получим

$$J_1^{(q)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)\,\{k_1^{(q-1)}(s,s-x+t)\,f_1(2s-x+t)+$$

$$+ l_1^{(q-1)}(s, s-x+t) f_1(x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\{m_1^{(q-1)}(s, s-x+$$

$$+t) f_2(2s-x+t) + n_1^{(q-1)}(s, s-x+t) f_2(x-t)\} ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\left\{\frac{1}{2}\int_{x-t}^{2s-x+t} K_{q-1}(s, s-x+t, z) f_1(z)\, dz +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{2s-x+t} L_{q-1}(s, s-x+t, z) f_2(z)\, dz\right\} ds.$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и изменяя порядок интегрирования в последнем интеграле так, чтобы внешний интеграл брался по z, $J_1^{(q)}(x, t)$ приведем к виду

$$J_1^{(q)}(x, t) = f_1(x-t)\cdot\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\, l_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds - f_2(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x} p(s)\, n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t} p\left[\frac{1}{2}(x-t+\right.$$

$$\left.+s)\right]\left\{k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) f_1(s) + m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{s-x+t}{2}\right) f_2(s)\right\} ds + \frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}\left\{\int_{x-t}^{\frac{1}{2}(z+x-t)} p(s) K_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_1(z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int_{x-t}^{x+t}\left\{\int_{x-t}^{\frac{1}{2}(z+x-t)} p(s) L_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_2(z)\, dz. \qquad (1.71)$$

Из равенств (1.47) и (1.50) при $p = q$ следует

$$J_2^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\{k_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_1(x+t) + l_1^{(q-1)}(s, x+t-$$

$$-s) f_1(2s-x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\{m_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_2(x+t) +$$

$$+ n_1^{(q-1)}(s, x+t-s) f_2(2s-x-t)\} ds + \frac{1}{2}\int_{x}^{x+t} p(s)\left\{\frac{1}{2}\int_{2s-x-t}^{x+t} K_{q-1}(s, x+t-\right.$$

$$\left.-s, z) f_1(z)\, dz + \frac{1}{2}\int_{2s-x-t}^{x+t} L_{q-1}(s, x+t-s, z) f_2(z)\, dz\right\} ds.$$

Заменяя переменную в первых двух интегралах и изменяя порядок интегрирования в третьем интеграле, получим

$$J_2^{(q)}(x, t) = f_1(x+t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(s)\, k_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds + f_2(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(z)\, m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} p\left(\frac{x+t+s}{2}\right)\times$$

$$\times\left\{l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) f_1(s) + n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{x+t-s}{2}\right) f_2(s)\right\} ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_x^{\frac{1}{2}(x+t+z)} p(s)\, K_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\right\} f_1(z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_x^{\frac{1}{2}(x+t+z)} p(s)\, L_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\right\} f_2(z)\, dz. \tag{1.72}$$

Поступая аналогичным образом, из равенств (1.47), (1.51) и (1.52) для $J_3^{(q)}(x, t)$ и $J_4^{(q)}(x, t)$ получим следующие представления:

$$J_3^{(q)}(x, t) = f_1(x-t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, l_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds + f_2(x-t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left(\frac{x-t+s}{2}\right)\left\{k_2^{(q-1)}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) f_1(s) + m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\times$$

$$\left.\times f_2(s)\right\} ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+z)} r(s)\, M_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_1(z)\, dz +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\left\{\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+z)} r(s)\, N_{q-1}(s, s-x+t, z)\, ds\right\} f_2(z)\, dz, \tag{1.73}$$

$$J_4^{(q)}(x, t) = f_1(x+t)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} r(s)\, k_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds + f_2(x+t)\times$$

$$\times\frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} r(s)\, m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t} r\left(\frac{x+t+s}{2}\right)\left\{l_2^{(q-1)}\times\right.$$

$$\times\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) f_1(s) + n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\times$$

$$\times f_2(s)\Big\} ds + \frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big\{\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+z)} r(s)\, M_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\Big\} f_1(s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{4}\int\limits_{x-t}^{x+t}\Big\{\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+z)} r(s)\, N_{q-1}(s, x+t-s, z)\, ds\Big\} f_2(z)\, dz. \tag{1.74}$$

Теперь положим

$$k_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\, i\int\limits_{x}^{x+t} p(s)\, k_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\, k_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.75}$$

$$l_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\, i\int\limits_{x-t}^{x} p(s)\, l_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, l_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.76}$$

$$m_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\, i\int\limits_{x}^{x+t} p(s)\, m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t} r(s)\, m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.77}$$

$$n_1^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\, i\int\limits_{x-t}^{x} p(s)\, n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.78}$$

$$K_q(x, t, s) = \frac{1}{2}\, i\Big\{p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) +$$

$$+p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{r\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) -$$

$$-r\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)}\{ip(z)K_{q-1}(z, z-x+t, s)-r(z)M_{q-1}(z, z-x+t, s)\}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{ip(z)K_{q-1}(z, x+t-z, s)+r(z)M_{q-1}(z, x+t-z, s)\}dz,$$

$$(1.79)$$

$$L_q(x, t, s)=\frac{1}{2}i\left\{p\left(\frac{x-t+s}{2}\right)m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+p\left(\frac{x+t+s}{2}\right)n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{r\left(\frac{x-t+s}{2}\right)m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-r\left(\frac{x+t+s}{2}\right)n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)}\{ip(z)L_{q-1}(z, z-x+t, s)-r(z)N_{q-1}(z, z-x+t, s)\}dz+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{ip(z)L_{q-1}(z, x+t-z, s)+r(z)N_{q-1}(z, x+t-z, s)\}dz. \quad (1.80)$$

Подставляя значения для функций $f_i^{(q)}(x, t)$, $i=1, 2, 3, 4$, из равенств (1.71)—(1.74) в равенство (1.53), в силу обозначений (1.75)—(1.80), получим формулу (1.47) при $p=q$. Таким образом, формула (1.47) доказана при любом p ($p=1, 2, \cdots$).

Далее положим

$$k_2^{(q)}(x, t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{x+t}p(s)k_1^{(q-1)}(s, x+t-s)ds+$$

$$+\frac{1}{2}i\int\limits_{x}^{x+t}r(s)k_2^{(q-1)}(s, x+t-s)ds, \quad (1.81)$$

$$l_2^{(q)}(x, t)=-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x}p(s)l_1^{(q-1)}(s, s-x+t)ds+$$

$$+\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x}r(s)l_2^{(q-1)}(s, s-x+t)ds, \quad (1.82)$$

$$m_2^{(q)}(x, t) = \frac{1}{2}\int\limits_x^{x+t} p(s)\, m_1^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int\limits_x^{x+t} r(s)\, m_2^{(q-1)}(s, x+t-s)\, ds, \tag{1.83}$$

$$n_2^{(q)}(x, t) = -\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x} p(s)\, n_1^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} i \int\limits_{x-t}^{x} r(s)\, n_2^{(q-1)}(s, s-x+t)\, ds, \tag{1.84}$$

$$M_q(x, t, s) = \frac{1}{2}\left\{-p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) k_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) k_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) l_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)} \{-p(z)\, K_{q-1}(z, z-x+t, s) + ir(z)\, M_{q-1}(z, z-x+t, s)\}\, dz +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)} \{p(z)\, K_{q-1}(z, x+t-z, s) + ir(z)\, M_{q-1}(z, x+t-z, s)\}\, dz, \tag{1.85}$$

$$N_q(x, t, s) = \frac{1}{2}\left\{-p\left(\frac{x-t+s}{2}\right) m_1^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x-t+s}{2}\right) m_2^{(q-1)}\left(\frac{x-t+s}{2}, \frac{s-x+t}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{p\left(\frac{x+t+s}{2}\right) n_1^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + ir\left(\frac{x+t+s}{2}\right) n_2^{(q-1)}\left(\frac{x+t+s}{2}, \frac{x+t-s}{2}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{\frac{1}{2}(x-t+s)} \{-p(z)\, L_{q-1}(z, z-x+t, s) + ir(z)\, N_{q-1}(z, z-x+t, s)\}\, dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{1}{2}(x+t+s)}\{p(z)\,L_{q-1}(z,x+t-z,s)+ir(z)\,N_{q-1}(z,x+t-z,s)\}\,dz. \tag{1.86}$$

Подставляя значения функций $f_i^{(q)}(x,t)$, $i=1,2,3,4$, из равенств (1.71)—(1.74) в равенство (1.54) и учитывая обозначения (1.81)—(1.86), мы получим формулу (1.48) при $p=q$. Следовательно, формула (1.48) доказана при любом p $(p=1,2,\cdots)$.

Из равенств (1.45) и (1.46), в силу формул (1.41), (1.42), (1.47) и (1.48), следует, что решение задачи (1.1)+(1.2)+(1.3)+(1.4) задается формулами

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}\{f_1(x+t)+f_1(x-t)\}+\frac{1}{2}i\{f_2(x+t)-f_2(x-t)\}+$$
$$+k_1(x,t)f_1(x+t)+l_1(x,t)f_1(x-t)+m_1(x,t)f_2(x+t)+$$
$$+n_1(x,t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x,t,s)f_1(s)+L(x,t,s)f_2(s)\}\,ds, \tag{1.87}$$

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}\{f_2(x+t)+f_2(x-t)\}-\frac{1}{2}i\{f_1(x+t)-f_1(x-t)\}+$$
$$+k_2(x,t)f_1(x+t)+l_2(x,t)f_1(x-t)+m_2(x,t)f_2(x+t)+$$
$$+n_2(x,t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x,t,s)f_1(s)+N(x,t,s)f_2(s)\}\,ds, \tag{1.88}$$

где

$$k_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}k_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.89}$$

$$l_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}l_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.90}$$

$$m_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}m_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.91}$$

$$n_j(x,t)=\sum_{p=1}^{\infty}n_j^{(p)}(x,t)\quad(j=1,2), \tag{1.92}$$

$$K(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}K_p(x,t,s), \tag{1.93}$$

$$L(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}L_p(x,t,s), \tag{1.94}$$

$$M(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty}M_p(x,t,s), \tag{1.95}$$

$$N(x,t,s)=\sum_{p=1}^{\infty} N_p(x,t,s). \tag{1.96}$$

Равномерная сходимость рядов (1.89) — (1.96) следует из равномерной сходимости последовательных приближений, т. е. из равномерной сходимости рядов (1.45) и (1.46).

Отметим некоторые свойства функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, которые позволят упростить формулы (1.87) и (1.88). Из равенств (1.59)—(1.62) следует, что

$$m_1^{(1)}(x,t)=i\,k_1^{(1)}(x,t). \tag{1.97}$$

$$l_1^{(1)}(x,t)=i\,n_1^{(1)}(x,t). \tag{1.98}$$

Соответственно, из равенств (1.65)—(1.68) получим

$$m_2^{(1)}(x,t)=ik_2^{(1)}(x,t), \tag{1.99}$$

$$l_2^{(1)}(x,t)=i\,n_2^{(1)}(x,t). \tag{1.100}$$

Покажем, что равенства (1.97)—(1.100) справедливы и для функций $k_j^{(p)}(x,t)$, $l_j^{(p)}(x,t)$, $m_j^{(p)}(x,t)$ и $n_j^{(p)}(x,t)$ $(j=1,2)$ при любом p, т. е. справедливы равенства

$$m_j^{(p)}(x,t)=ik_j^{(p)}(x,t)\quad (j=1,2;\ \ p=1,2,\cdots), \tag{1.101}$$

$$l_j^{(p)}(x,t)=in_j^{(p)}(x,t)\quad (j=1,2;\ p=1,2,\cdots). \tag{1.102}$$

Действительно, допустим, что для $p=1,2,\cdots,q-1$ равенства (1.101) и (1.102) уже доказаны и докажем их справедливость при $p=q$. Равенство (1.101) при $p=q$ для $j=1$ следует из (1.75) и (1.77), а для $j=2$ — из равенств (1.81) и (1.83). Соответственно, равенство (1.102) при $p=q$ для $j=1$ следует из равенств (1.76) и (1.78), а для $j=2$— из (1.82) и (1.84).

Тогда, учитывая определения функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, $j=1,2$, т. е. равенства (1.89)—(1.92), в силу (1.101) и —(1.102), заключаем, что

$$m_j(x,t)=ik_j(x,t), \tag{1.103}$$

$$l_j(x,t)=in_j(x,t)\quad (j=1,2). \tag{1.104}$$

Отметим еще одно свойство функций $k_j(x,t)$, $l_j(x,t)$, $m_j(x,t)$ и $n_j(x,t)$, $j=1,2$. Из (1.59)—(1.62), (1.65)—(1.68), (1.75)—(1.78) и (1.81)—(1.84) непосредственно следует, что при любом p имеют место следующие равенства

$$k_j^{(p)}(x,0)=l_j^{(p)}(x,0)=m_j^{(p)}(x,0)=n_j^{(p)}(x,0)=0,\ \ j=1,2.$$

Поэтому, в силу (1.89)—(1.92),

$$k_j(x,0)=l_j(x,0)=m_j(x,0)=n_j(x,0)=0,\ j=1,2. \tag{1.105}$$

Далее положим

$$k(x,t)=\frac{1}{2}+k_1(x,t), \tag{1.106}$$

$$l(x, t) = \frac{1}{2} + l_1(x, t), \tag{1.107}$$

$$m(x, t) = \frac{1}{2} + m_2(x, t), \tag{1.108}$$

$$n(x, t) = \frac{1}{2} + n_2(x, t). \tag{1.109}$$

Тогда, в силу (1.105), имеем

$$k(x, 0) = l(x, 0) = m(x, 0) = n(x, 0) = \frac{1}{2}\cdot \tag{1.110}$$

Учитывая равенства (1.103)—(1.104) и обозначения (1.106)—(1.109), решение задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4), т. е. формулы (1.87) и (1.88), можно представить в виде

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) - if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{1.111}$$

$$u_2(x, t) = m(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + n(x, t)\{f_2(x-t) + if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\}\, ds. \tag{1.112}$$

§ 2. Сведéние к задаче Гурса

Рассмотрим задачу Коши

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)\, u_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x)\, u_2 = 0, \tag{2.2}$$

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_2(x, 0) = f_2(x). \tag{2.3}$$

Пусть решение этой задачи дается формулами (1.111) и (1.112) Выясним каким условиям должны удовлетворять функции $k(x, t)$, $l(x, t)$, $m(x, t)$, $n(x, t)$, $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$, чтобы функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные формулами (1.111) и (1.112), давали решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3). В настоящем параграфе будет показано, что для функций $K(x, t, s)$, $L(x, t, s)$, $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ получаются задачи Гурса, а функции $k(x, t)$, $l(x, t)$, $m(x, t)$ и $n(x, t)$ удается явно вычислить, притом

$$m(x, t) \equiv k(x, t); \quad n(x, t) \equiv l(x, t).$$

Из формул (1.111) и (1.112) следует, что, в силу равенств (1.110), начальные условия (2.3) выполняются автоматически.

Обозначим через $u(x, t; f)$ решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3), и пусть нам уже известно, что вектор—функция $u(x, t; f) = \begin{pmatrix} u_1(x, t; f) \\ u_2(x, t; f) \end{pmatrix}$ представляется по формулам (1.111) — (1.112). Обозначим через T_t следующую матрицу второго порядка:

$$T^t \equiv \begin{pmatrix} -i\dfrac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -i\dfrac{d}{dt} \end{pmatrix},$$

а через B_x матрицу

$$B_x \equiv \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что

$$B_x u(x, t; f) \equiv u(x, t; B_x f).$$

В самом деле, нетрудно убедиться , что левая и правая части этого равенства удовлетворяют одной и той же задаче Коши

$$B_x v = T_t v,$$

$$v|_{t=0} = B_x f.$$

Поэтому требуемое равенство следует из единственности решения задачи Коши.

Таким образом, систему (2.1) можно записать в виде

$$T_t u = u(x, t; B_x f). \tag{2.4}$$

В левой и правой частях уравнения (2.4) стоят двухкомпонентные векторы, поэтому это уравнение равносильно системе двух уравнений, соединяющих соответствующие компоненты этих векторов.

Теперь, используя формулы (1.111) и (1.112), найдем компоненты правой и левой частей уравнения (2.4). Для нахождения первой компоненты левой части дифференцируем формулу (1.111) по t и умножаем на $-i$ (см. определение матрицы T_t). Имеем

$$-i\frac{\partial u_1(x, t; f)}{\partial t} = -i\left\{k_t'(x, t) + \frac{1}{2}K(x, t, x+t)\right\}f_1(x+t) -$$

$$-ik(x, t)f_1'(x+t) - i\left\{l_t'(x, t) + \frac{1}{2}L(x, t, x-t)\right\}f_1(x-t) +$$

$$+ il(x, t)f_1'(x-t) + \left\{k_t'(x, t) - \frac{1}{2}iL(x, t, x+t)\right\}f_2(x+t) -$$

$$-\left\{l_t'(x, t) + \frac{1}{2}iL(x, t, x-t)\right\}f_2(x-t) + k(x, t)f_2'(x+t) + l(x, t)f_2'(x-$$

$$-t) - \frac{1}{2}i\int_{x-t}^{x+t}\{K_t'(x, t, s)f_1(s) + L_t'(x, t, s)f_2(s)\}\,ds. \tag{2.5}$$

Для нахождения второй компоненты левой части уравнения (2.4) дифференцируем формулу (1.112) по t и умножаем на $-i$

$$-i\frac{\partial u_2(x,t;f)}{\partial t}=-i\left\{m_t'(x,t)+\frac{1}{2}N(x,\ t,\ x+t)\right\}f_2(x+t)-$$

$$-im(x,t)f_2'(x+t)-i\left\{n_t'(x,t)+\frac{1}{2}N(x,t,\ x-t)\right\}f_2(x-t)+$$

$$+in(x,t)f_2'(x-t)-\left\{m_t'(x,t)+\frac{1}{2}iM(x,t,x+t)\right\}f_1(x+t)+$$

$$+\left\{n_t'(x,t)-\frac{1}{2}iM(x,t,\ x-t)\right\}f_1(x-t)-m(x,t)f_1'(x+t)-$$

$$-n(x,t)f_1'(x-t)-\frac{1}{2}i\int\limits_{x-t}^{x+t}\{M_t'(x,t,s)f_1(s)+N_t'(x,t,s)f_2(s)\}\,ds. \tag{2.6}$$

Для вычисления первой компоненты правой части уравнения (2.4), в силу определения матрицы B_x, в формуле (1.111) следует функцию $f_1(x)$ заменить на $p(x)f_1(x)+f_2'(x)$, а $f_2(x)$ на $-f_1'(x)+r(x)f_2(x)$. Тогда, интегрируя еще полученные в правой части интегралы по частям, мы получим

$$u_1(x,t;B_xf)=p(x+t)k(x,t)f_1(x+t)+k(x,t)f_2'(x+t)-$$

$$-ik(x,t)f_1'(x+t)+ir(x+t)k(x,t)f_2(x+t)+p(x-t)\,l(x,t)f_1(x-$$

$$-t)+l(x,t)f_2'(x-t)-il(x,t)f_1'(x-t)-ir(x-t)\,l(x,t)f_2(x-t)-$$

$$-\frac{1}{2}L(x,t,x+t)f_1(x+t)+\frac{1}{2}L(x,t,x-t)f_1(x-t)+\frac{1}{2}K(x,t,x+$$

$$+t)f_2(x+t)-\frac{1}{2}K(x,t,x-t)f_2(x-t)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{L_s'(x,t,s)+p(s)\times$$

$$\times K(x,t,s)\}f_1(s)ds+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}\{-K_s'(x,t,s)+r(s)L(x,t,s)\}f_2(s)\,ds. \tag{2.7}$$

Аналогично предыдущему, заменяя в формуле (1.112) функцию $f_1(x)$ опять на $p(x)f_1(x)+f_2'(x)$, а $f_2(x)$ — на $-f_1'(x)+r(x)f_2(x)$ и интегрируя по частям, для второй компоненты получим следующее выражение:

$$u_2(x,t;B_xf)=-m(x,t)f_1'(x+t)+r(x+t)\,m(x,t)f_2(x+t)-$$

$$-im(x,t)f_2'(x+t)-ip(x+t)\,m(x,t)f_1(x+t)-n(x,t)f_1'(x-t)+$$

$$+r(x-t)\,n(x,t)f_2(x+t)+ip(x-t)\,n(x,t)f_1(x-t)+$$

$$+in(x,t)f_2'(x-t)+\frac{1}{2}M(x,t,x+t)f_2(x+t)-$$

$$-\frac{1}{2}M(x,t,x-t)f_2(x-t)-\frac{1}{2}N(x,t,x+t)f_1(x+t)+$$

$$+\frac{1}{2}N(x,t,x-t)f_1(x-t)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{N_s'(x,t,s)+p(s)M(x,t,s)\}\times$$

$$\times f_1(s)\,ds+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x-t}\{-M_s'(x,t,s)+r(s)N(x,t,s)\}f_2(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Так как вектор-функция $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ произвольна, то, в силу уравнения (2.4), в выражениях (2.5) и (2.7) (соответственно, в выражениях (2.6) и (2.8)) коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$, $f_2(x-t)$ и подынтегральные выражения должны совпадать (коэффициенты при производных $f_1'(x+t)$, $f_1'(x-t)$, $f_2'(x+t)$ $f_2'(x-t)$ взаимно уничтожаются). Итак, приравнивая в выражениях (2.5) и (2.7) коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$ и $f_2(x-t)$, соответственно, получим

$$-ik_t'(x,t)-\frac{1}{2}iK(x,t,x+t)=p(x+t)k(x,t)-\frac{1}{2}L(x,t,x+t),$$

$$-il_t'(x,t)-\frac{1}{2}iK(x,t,x-t)=p(x-t)l(x,t)+\frac{1}{2}L(x,t,x-t),$$

$$k_t'(x,t)-\frac{1}{2}iL(x,t,x+t)=ir(x+t)k(x,t)+\frac{1}{2}K(x,t,x+t),$$

$$-l_t'(x,t)-\frac{1}{2}iL(x,t,x-t)=-ir(x-t)l(x,t)-\frac{1}{2}K(x,t,x-t).$$

Из первого и третьего равенств получаем следующую систему для определения функции $k(x,t)$:

$$k_t'(x,t)-ip(x+t)k(x,t)=-\frac{1}{2}\{K(x,t,x+t)+iL(x,t,x+t)\}, \tag{2.9}$$

$$k_t'(x,t)-ir(x+t)k(x,t)=\frac{1}{2}\{K(x,t,x+t)+iL(x,t,x+t)\}, \tag{2.10}$$

а второе и четвертое равенства определяют следующую систему для функции $l(x,t)$:

$$l_t'(x,t)-ip(x-t)l(x,t)=-\frac{1}{2}\{K(x,t,x-t)-iL(x,t,x-t)\}, \tag{2.11}$$

$$l_t'(x,t)-ir(x-t)l(x,t)=\frac{1}{2}\{K(x,t,x-t)-iL(x,t,x-t)\}. \tag{2.12}$$

Суммируя равенства (2.9) и (2.10), для определения $k(x,t)$ окончательно получим уравнение

$$2k'_t(x, t) - i\{p(x+t) + r(x+t)\}\, k(x, t) = 0. \tag{2.13}$$

Присоединим к уравнению условие (1.110), т. е.

$$k(x, 0) = \frac{1}{2}. \tag{2.14}$$

Из уравнения (2.13), в силу начального условия (2.14), для функции $k(x, t)$ находим следующее выражение:

$$k(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\, i \int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.15}$$

Теперь, суммируя равенства (2.11) и (2.12), получим

$$2l'_t(x, t) - i\{p(x-t) + r(x-t)\}\, l(x, t) = 0.$$

Решая это уравнение и учитывая условие (1.110), т. е. $l(x, 0) = \frac{1}{2}$,

получим

$$l(x, t) = \frac{1}{2} \exp\left\{\frac{1}{2}\, i \int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.16}$$

Вычитая из равенства (2.10) равенство (2.9) (соответственно, из равенства (2.12) равенство (2.11)) для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$ получим соотношения

$$K(x, t, x+t) + iL(x, t, x+t) = \frac{1}{2}\, i\{p(x+t) - r(x+t)\}\, k(x, t), \tag{2.17}$$

$$K(x, t, x-t) - iL(x, t, x-t) = \frac{1}{2}\, i\{p(x-t) - r(x-t)\}\, l(x, t). \tag{2.18}$$

И, наконец, приравнивая подынтегральные выражения в равенствах (2.5) и (2.7), для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$, как функций переменных s и t, получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$i\frac{\partial K(x, t, s)}{\partial t} + \frac{\partial L(x, t, s)}{\partial s} + p(s)\, K(x, t, s) = 0, \tag{2.19}$$

$$i\frac{\partial L(x, t, s)}{\partial t} - \frac{\partial K(x, t, s)}{\partial s} + r(s)\, L(x, t, s) = 0. \tag{2.20}$$

Система (2.19) — (2.20) совместно с условиями (2.17) и (2.18) для функций $K(x, t, s)$ и $L(x, t, s)$ определяет задачу Гурса.

Далее, приравнивая коэффициенты при $f_1(x+t)$, $f_1(x-t)$, $f_2(x+t)$ и $f_2(x-t)$ в выражениях (2.6) и (2.8), соответственно, получим

$$-m_t'(x, t)-\frac{1}{2}iM(x, t, x+t)=-ip(x-t)\,m(x, t)-$$
$$-\frac{1}{2}N(x, t, x+t),$$

$$n_t'(x, t)-\frac{1}{2}iM(x, t, x-t)=ip(x-t)\,n(x, t)+\frac{1}{2}N(x, t, x-t),$$

$$-im_t'(x, t)-\frac{1}{2}iN(x, t, x+t)=r(x+t)\,m(x, t)+\frac{1}{2}M(x, t, x+t),$$

$$-in_t'(x, t)-\frac{1}{2}i\,N(x, t, x-t)=r(x-t)\,n(x, t)-\frac{1}{2}M(x, t, x-t).$$

Из первого и третьего равенств для определения функции $m(x, t)$ получаем систему

$$m_t'(x, t)-ip(x+t)\,m(x, t)=\frac{1}{2}\{N(x, t, x+t)-iM(x, t, x+t)\}, \tag{2.21}$$

$$m_t'(x, t)-ir(x+t)\,m(x, t)=-\frac{1}{2}\{N(x, t, x+t)-iM(x, t, x+t)\}, \tag{2.22}$$

а второе и четвертое равенства определяют следующую систему для определения функции $n(x, t)$:

$$n_t'(x, t)-ip(x-t)\,n(x, t)=\frac{1}{2}\{N(x, t, x-t)+iM(x, t, x-t)\}, \tag{2.23}$$

$$n_t'(x, t)-ir(x-t)\,n(x, t)=-\frac{1}{2}\{N(x, t, x-t)+iM(x, t, x-t)\}. \tag{2.24}$$

Суммируя уравнения (2.21) и (2.22), находим

$$2m_t'(x, t)-i\{p(x+t)+r(x+t)\}\,m(x, t)=0. \tag{2.25}$$

Решая уравнение (2.25) и учитывая условие (1.110), т. е. $m(x, 0)=\frac{1}{2}$, для функции $m(x, t)$ получим выражение

$$m(x, t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int_0^t[p(x+\tau)+r(x+\tau)]\,d\tau\right\}. \tag{2.26}$$

Поступая аналогичным образом, из уравнений (2.23) и (2.24) и условия $n(x, 0)=\frac{1}{2}$ получим

$$n(x, t)=\frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2}i\int_0^t[p(x-\tau)+r(x-\tau)]\,d\tau\right\}. \tag{2.27}$$

Теперь, вычитая из равенства (2.21) равенство (2.22) (соответственно из равенства (2.23) равенство (2.24)) и подставляя в полученном равенстве явное выражение функции $m(x, t)$ из (2.26) (соответственно явное выражение функции $n(x, t)$ из (2.27)), для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ получим следующие соотношения:

$$N(x, t, x+t) - iM(x, t, x+t) = \frac{1}{2} i \{r(x+t) - p(x+t)\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(x+\tau) + r(x+\tau)]\, d\tau\right\}, \tag{2.28}$$

$$N(x, t, x-t) + iM(x, t, x-t) = \frac{1}{2} i \{r(x-t) - p(x-t)\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t [p(x-\tau) + r(x-\tau)]\, d\tau\right\}. \tag{2.29}$$

И, наконец, приравнивая подынтегральные выражения в равенствах (2.6) и (2.8), для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ (как функций переменных s и t) мы получим следующую систему

$$i\frac{\partial M(x, t, s)}{\partial t} + \frac{\partial N(x, t, s)}{\partial s} + p(s) M(x, t, s) = 0, \tag{2.30}$$

$$i\frac{\partial N(x, t, s)}{\partial t} - \frac{\partial M(x, t, s)}{\partial s} + r(s) N(x, t, s) = 0. \tag{2.31}$$

Система (2.30) + (2.31) совместно с соотношениями (2.28) и (2.29) для функций $M(x, t, s)$ и $N(x, t, s)$ определяет задачу Гурса.

Заметим, что из (2.15), (2.16), (2.26) и (2.27) следует

$$m(x, t) = k(x, t); \quad n(x, t) = l(x, t). \tag{2.32}$$

Далее, полагая в формулах (2.17) и (2.18) $t = 0$, имеем

$$K(x, 0, x) + iL(x, 0, x) = \frac{1}{2} i \{p(x) - r(x)\},$$

$$K(x, 0, x) - iL(x, 0, x) = \frac{1}{2} i \{p(x) - r(x)\}.$$

Из последних соотношений следуют нужные в дальнейшем равенства, справедливые в каждой точке непрерывности функций $p(x)$ и $r(x)$, а именно

$$K(x, 0, x) = \frac{1}{2} i [p(x) - r(x)]; \quad L(x, 0, x) = 0. \tag{2.33}$$

Поступая аналогичным образом, из равенств (2.28) и (2.29) получим соотношения

$$N(x, 0, x) = -\frac{1}{2} i [p(x) - r(x)]; \quad M(x, 0, x) = 0. \tag{2.34}$$

В частности, при $x = 0$ из (2.33) и (2.34) следует

$$K(0, 0, 0) = -N(0, 0, 0) = \frac{1}{2} [p(0) - r(0)]. \tag{2.35}$$

И, наконец, учитывая (2.32), решение задачи (2.1) + (2.2) + (2.3), выражаемое формулами (1.111) и (1.112), можно переписать в следующем окончательном виде:

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) -$$

$$- if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds, \qquad (2.36)$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) +$$

$$+ if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x-t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds. \qquad (2.37)$$

Формулы (2.36) и (2.37) при исследовании вопросов асимптотического поведения спектральной функции и вопросов разложения по собственным функциям одномерной системы Дирака, т. е. системы (0.4) + (0.5) + (0.6) (см. введение), будут играть исключительно важную роль.

§ 3. Оператор-матрица преобразования

Пусть A и B — два линейных дифференциальных оператора, E_1 и E_2 — два линейных функциональных пространства.

Определение. *Линейный непрерывный оператор X, отображающий пространство E_1 в E_2 называется* оператором преобразования, *если он удовлетворяет следующим двум условиям:*

1. $AX = XB$, (3.1)

2. *Существует обратный оператор* X^{-1}.

Пусть

$$A \equiv \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

причем $p(x)$, $r(x)$, $p_1(x)$ и $r_1(x)$ — вещественные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $(0 \leqslant x < b \leqslant \infty)$.

E_1 есть совокупность непрерывно дифференцируемых двухкомпонентных вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, определенных на интервале $[0, b)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$f_2(0) - hf_1(0) = 0, \qquad (3.3)$$

где h — конечное действительное число.

E_2 есть совокупность непрерывно дифференцируемых двухкомпонентных вектор-функций $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$, определенных на том же интервале $[0, b)$ и удовлетворяющих граничному условию

$$g_2(0) - h_1 g_1(0) = 0, \tag{3.4}$$

где h_1 — конечное действительное число.

Оператор-матрицу X будем искать в виде (см. [4])

$$X[f(x)] =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \alpha(x) f_1(x) + \beta(x) f_2(x) + \int\limits_0^x \{P(x,s) f_1(s) + R(x,s) f_2(s)\} ds, & (3.5) \\ \gamma(x) f_1(x) + \delta(x) f_2(x) + \int\limits_0^x \{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\} ds. & (3.6) \end{array} \right.$$

Вычислим компоненты вектор-функции $AX[f(x)]$. Из определения оператора-матрицы A и выражений (3.5), (3.6) следует

$$AX[f(x)]_1 = p(x)\alpha(x) f_1(x) + p(x)\beta(x) f_2(x) + p(x)\int\limits_0^x P(x,s) f_1(s)\, ds +$$

$$+ p(x)\int\limits_0^x R(x,s) f_2(s)\, ds + \gamma'(x) f_1(x) + \gamma(x) f_1'(x) + \delta'(x) f_2(x) +$$

$$+ \delta(x) f_2'(x) + Q(x,x) f_1(x) + H(x,x) f_2(x) +$$

$$+ \int\limits_0^x \{Q_x'(x,s) f_1(s) + H_x'(x,s) f_2(s)\} ds; \tag{3.7}$$

$$AX[f(x)]_2 = -\alpha'(x) f_1(x) - \alpha(x) f_1'(x) - \beta'(x) f_2(x) - \beta(x) f_2'(x) -$$

$$- P(x,x) f_1(x) - R(x,x) f_2(x) - \int\limits_0^x P_x'(x,s) f_1(s)\, ds -$$

$$- \int\limits_0^x R_x'(x,s) f_2(s)\, ds + r(x)\gamma(x) f_1(x) + r(x)\delta(x) f_2(x) +$$

$$+ r(x)\int\limits_0^x \{Q(x,s) f_1(s) + H(x,s) f_2(s)\} ds. \tag{3.8}$$

Вычислим теперь компоненты вектор-функции $XB[f(x)]$. В силу определения операторов X и B имеем

$$XB[f(x)]_1 = \alpha(x) p_1(x) f_1(x) + \alpha(x) f_2'(x) - \beta(x) f_1'(x) +$$

$$+ \beta(x) r_1(x) f_2(x) + \int\limits_0^x P(x,s)\{p_1(s) f_1(s) + f_2'(s)\} ds +$$

$$+ \int\limits_0^x R(x,s)\{-f_1'(s) + r_1(s) f_2(s)\} ds; \tag{3.9}$$

$$XB[f(x)]_2=\gamma(x)p_1(x)f_1(x)+\gamma(x)f_2'(x)-\delta(x)f_1'(x)+$$
$$+\delta(x)r_1(x)f_2(x)+\int_0^x Q(x,s)\{p_1(s)f_1(s)+$$
$$+f_2'(s)\}ds+\int_0^x H(x,s)\{-f_1'(s)+r_1(s)f_2(s)\}ds. \tag{3.10}$$

Согласно условию (3.1) соответствующие компоненты вектор-функций $AX[f(x)]$ и $XB[f(x)]$ должны быть равны, т. е. равны выражения (3.7)—(3.9) и (3.8)—(3.10). Поэтому, приравнивая выражения (3.7) и (3.9), а затем приводя подобные члены, интегрируя по частям интегралы в выражении (3.9), содержащие производные $f_1'(s)$ и $f_2'(s)$ и учитывая условие (3.3), получим

$$\{\alpha(x)[p(x)-p_1(x)]+\gamma'(x)+Q(x,x)+R(x,x)\}f_1(x)+$$
$$+\{\beta(x)[p(x)-r_1(x)]+\delta'(x)+H(x,x)-P(x,x)\}f_2(x)+$$
$$+[\gamma(x)+\beta(x)]f_1'(x)+[\delta(x)-\alpha(x)]f_2'(x)+[hP(x,0)-$$
$$-R(x,0)]f_1(0)+\int_0^x\{P(x,s)p(x)+Q_x'(x,s)-P(x,s)p_1(s)-$$
$$-R_s'(x,s)\}f_1(s)ds+\int_0^x\{R(x,s)p(x)+H_x'(x,s)-R(x,s)r_1(s)+$$
$$+P_s'(x,s)\}f_2(s)ds=0. \tag{3.11}$$

Поступая аналогично, из выражений (3.8) и (3.10) получим

$$\{\gamma(x)[p_1(x)-r(x)]+\alpha'(x)+P(x,x)-H(x,x)\}f_1(x)+$$
$$+\{\delta(x)[r_1(x)-r(x)]+\beta'(x)+R(x,x)+Q(x,x)\}f_2(x)+$$
$$+[\alpha(x)-\delta(x)]f_1'(x)+[\gamma(x)+\beta(x)]f_2'(x)+[H(x,0)-hQ(x,0)]f_1(0)+$$
$$+\int_0^x\{Q(x,s)p_1(s)+H_s'(x,s)-Q(x,s)r(x)+P_x'(x,s)\}f_1(s)ds+$$
$$+\int_0^x\{H(x,s)r_1(s)-Q_s'(x,s)-H(x,s)r(x)+R_x'(x,s)\}f_2(s)ds=0. \tag{3.12}$$

Так как $f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ — произвольная вектор-функция, то в тождествах (3.11) и (3.12) коэффициенты при $f_1(x), f_2(x), f_1'(x), f_2'(x), f_1(0)$ и подынтегральные круглые скобки равны нулю. Следовательно, приравнивая к нулю подынтегральные коэффициенты при $f_1(x)$, $f_2(x)$ и коэффициенты при $f_1(0)$, относительно функций $P(x,s)$, $R(x,s)$, $Q(x,s)$ и $H(x,s)$ получим следующую систему:

$$\frac{\partial P(x,s)}{\partial x}+\frac{\partial H(x,s)}{\partial s}=[r(x)-p_1(s)]\,Q(x,s), \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial H(x,s)}{\partial x}+\frac{\partial P(x,s)}{\partial s}=[r_1(s)-p(x)]\,R(x,s), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial Q(x,s)}{\partial x}-\frac{\partial R(x,s)}{\partial s}=[p_1(s)-p(x)]\,P(x,s), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial R(x,s)}{\partial x}-\frac{\partial Q(x,s)}{\partial s}=[r(x)-r_1(s)]\,H(x,s), \tag{3.16}$$

$$R(x,0)-hP(x,0)=0, \tag{3.17}$$

$$H(x,0)-hQ(x,0)=0. \tag{3.18}$$

Далее, приравнивая к нулю коэффициенты при $f_1(x)$ и $f_2(x)$, относительно функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ получим систему

$$\alpha'(x)+\gamma(x)[p_1(x)-r(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.19}$$

$$-\delta'(x)+\beta(x)[r_1(x)-p(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.20}$$

$$\beta'(x)+\delta(x)[r_1(x)-r(x)]=-R(x,x)-Q(x,x), \tag{3.21}$$

$$\gamma'(x)+\alpha(x)[p(x)-p_1(x)]=-R(x,x)-Q(x,x). \tag{3.22}$$

И, наконец, приравнивая к нулю коэффициенты при $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$, получим равенства $\alpha(x)-\delta(x)=0$, $\beta(x)+\gamma(x)=0$, т. е.

$$\delta(x)=\alpha(x),\quad \gamma(x)=-\beta(x). \tag{3.22'}$$

Поэтому система (3.19) + (3.20) + (3.21) + (3.22) принимает вид

$$\alpha'(x)-\beta(x)[p_1(x)-r(x)]=H(x,x)-P(x,x), \tag{3.23}$$

$$\alpha'(x)-\beta(x)[p(x)-r_1(x)]=P(x,x)-H(x,x), \tag{3.24}$$

$$\beta'(x)+\alpha(x)[r_1(x)-r(x)]=-R(x,x)-Q(x,x), \tag{3.25}$$

$$\beta'(x)-\alpha(x)[p(x)-p_1(x)]=R(x,x)+Q(x,x). \tag{3.26}$$

Из системы (3.23) + (3.24) + (3.25) + (3.26) можно найти явные выражения для функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ через функции $p(x)$, $r(x)$, $p_1(x)$ и $r_1(x)$. В самом деле, суммируя уравнения (3.23) и (3.24) (соответственно (3.25) и (3.26)), получим систему

$$2\alpha'(x)+\beta(x)[p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x)]=0, \tag{3.27}$$

$$2\beta'(x)-\alpha(x)[p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x)]=0. \tag{3.28}$$

Положим

$$q(x)=p(x)-p_1(x)+r(x)-r_1(x). \tag{3.29}$$

Тогда систему (3.27) + (3.28) можно переписать в виде

$$2\alpha'(x)=-q(x)\,\beta(x), \tag{3.30}$$

$$2\beta'(x)=-q(x)\,\alpha(x). \tag{3.31}$$

Из (3.30) + (3.31) следует

$$2\alpha(x)\,\alpha'(x)+2\beta(x)\,\beta'(x)=0,$$

т. е.

$$\{\alpha^2(x) - \beta^2(x)\}' = 0;$$

отсюда, после интегрирования в пределах от 0 до x, получим

$$\alpha^2(x) - \beta^2(x) = \alpha^2(0) + \beta^2(0). \tag{3.32}$$

Вычислим $\alpha(0)$ и $\beta(0)$. Пусть вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируема и

$$f_1(0) = 1, \ f_2(0) = h. \tag{3.33}$$

Тогда $f(x)$ удовлетворяет условию (3.3) и поэтому $f(x) \in E_1$. Далее, пусть

$$X[f(x)] = g(x), \tag{3.34}$$

где вектор-функция $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$ — элемент пространства E_2 и, значит, удовлетворяет граничному условию (3.4). Тогда из равенства (3.34), в силу определения оператор-матрицы X, т. е. в силу выражений (3.5) и (3.6), при $x=0$ имеем (см. (3.22′))

$$g_1(0) = \alpha(0) f_1(0) + \beta(0) f_2(0), \tag{3.35}$$

$$g_2(0) = -\beta(0) f_1(0) + \alpha(0) f_2(0). \tag{3.36}$$

Умножая уравнение (3.35) на число h_1, а затем вычитая из уравнения (3.36) и учитывая граничное условие (3.4) и условия (3.33), находим

$$\beta(0) = \frac{h - h_1}{1 + hh_1} \alpha(0).$$

Положим

$$\alpha(0) = 1. \tag{3.37}$$

Тогда

$$\beta(0) = \frac{h - h_1}{1 + h_1 h}. \tag{3.38}$$

Поэтому

$$\alpha^2(0) + \beta^2(0) = \frac{(1 + h^2)(1 + h_1^2)}{(1 + hh_1)^2} = \varkappa^2. \tag{3.39}$$

Теперь, решая систему (3.30) + (3.31) и учитывая выражения (3.37), (3.38) и (3.39), для функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ получаем явные выражения

$$\alpha(x) = \varkappa \sin\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(\tau)\, d\tau + \arcsin \frac{1}{\varkappa} \right\}, \tag{3.40}$$

$$\beta(x) = \varkappa \cos\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x q(\tau)\, d\tau + \arcsin \frac{1}{\varkappa} \right\}, \tag{3.41}$$

где функция $q(\tau)$ определяется по формуле (3.29), а число $\varkappa$—(3.39).

5*

Далее положим

$$P(x, 0) = \varphi(x), \tag{3.42}$$

$$Q(x, 0) = \psi(x), \tag{3.43}$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Тогда система уравнений (3.13) + (3.14) + (3.15) + (3.16) совместно с условиями (3.17) + (3.18) + (3.42) + (3.43) для функций $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ и $H(x, s)$ определяет задачу Коши. Эта задача разрешима. Существование и единственность решения этой задачи можно доказать, например, методом последовательных приближений. Решая эту задачу и используя равенства (3.1), мы получим систему интегро-дифференциальных уравнений для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Поэтому, проделывая вычисления в обратном порядке, мы докажем, что оператор-матрица X, определенная по формулам (3.5) + (3.6), в которых ядра $P(x, s)$, $R(x, s)$, $Q(x, s)$ и $H(x, s)$ являются решениями задачи Коши (3.13) — (3.18)+(3.42)+(3.43), удовлетворяет соотношению (3.1). Существование обратного оператора X^{-1} следует из построения оператора X.

§ 4. Решение смешанной задачи на полупрямой

Пусть $p(x)$ и $r(x)$ — действительные функции, определенные на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемые в каждом конечном интервале, а $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции на той же полупрямой $(0, \infty)$. Продолжим функции $p(x)$ и $r(x)$ на отрицательную полуось с сохранением класса, а в остальном, как угодно, а функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — пока неопределенным образом (в дальнейшем мы уточним способ продолжения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$).

При сделанных предположениях относительно функций $p(x)$, $r(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$-i\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + p(x)\, u_1, \tag{4.1}$$

$$-i\frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + r(x)\, u_2, \tag{4.2}$$

$$u_1(x, t)/_{t=0} = f_1(x), \tag{4.3}$$

$$u_2(x, t)/_{t=0} = f_2(x), \tag{4.4}$$

$$[u_2(x, t) - h\, u_1(x, t)]/_{x=0} = 0. \tag{4.5}$$

Обозначим через $u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{pmatrix}$ решение задачи (4.1)—(4.5). Согласно формулам (2.36) и (2.37) решение задачи (4.1)—(4.4) можно представить в виде

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x+t) + if_2(x+t)\} + l(x, t)\{f_1(x-t) -$$
$$- if_2(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\}\, ds, \tag{4.6}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x+t) - if_1(x+t)\} + l(x, t)\{f_2(x-t) +$$

$$+ if_1(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds. \quad (4.7)$$

Рассмотрим теперь применение операторов преобразования к продолжению решения системы (4.1) + (4.2) на отрицательную полуось. Будет показано как выразить решение $u(x, t)$ в точке $-x$ в виде линейного оператора над $u(s, t) = \begin{pmatrix} u_1(s, t) \\ u_2(s, t) \end{pmatrix}$, $0 \leqslant s \leqslant x$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} p(-x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(-x) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r(x) \end{pmatrix} \quad (x \geqslant 0). \quad (4.8)$$

Предположим, что функции $p(x)$ и $r(x)$ продолжены на отрицательную полуось так, что

$$p(-0) = p(+0), \quad r(-0) = r(+0), \quad (4.9)$$

т. е. продолжения в нуле непрерывны. Далее обозначим через X оператор-матрицу преобразования, отображающий пространство E_h непрерывно дифференцируемых вектор-функций $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$, удовлетворяющих граничному условию (4.5), т. е.

$$f_2(0) - hf_1(0) = 0 \quad (4.10)$$

на пространство E_h. Согласно (3.1)

$$AX = XB.$$

Пусть вектор-функция $u^+(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^+(x, t) \\ u_2^+(x, t) \end{pmatrix}$ является решением смешанной задачи (4.1) — (4.5) на полупрямой $(0, \infty)$. В силу условия (4.5) при каждом фиксированном t вектор-функция $u^+(x, t)$ принадлежит пространству E_h, поэтому над $u^+(x, t)$ можно применить оператор X, в силу определения которого, т. е. в силу равенств (3.5) и (3.6), имеем (учитывая (3.22))

$$X[u^+]_1 = \alpha(x) u_1^+(x, t) + \beta(x) u_2^+(x, t) + \int_0^x [P(x, s) u_1^+(s, t) +$$

$$+ R(x, s) u_2^+(s, t)] ds. \quad (4.11)$$

$$X[u^+]_2 = \alpha(x) u_2^+(x, t) - \beta(x) u_1^+(x, t) + \int_0^x [Q(x, s) u_1^+(s, t) +$$

$$+ H(x, s) u_2^+(s, t)] ds. \quad (4.12)$$

Продолжения функций $u_1^+(x, t)$ и $u_2^+(x, t)$ на отрицатьльную полуось определим по формулам

$$u_1(-x, t) \equiv u_1^-(x, t) = X[u^+]_1, \tag{4.13}$$

$$u_2(-x, t) \equiv u_2^-(x, t) = X[u^+]_2, \tag{4.14}$$

т. е., в силу выражений (4.11) и (4.12), положим

$$u_1^-(x, t) = \alpha(x)\, u_1^+(x, t) + \beta(x)\, u_2^+(x, t) + \int_0^x [P(x, s)\, u_1^+(s, t) +$$

$$+ R(x, s)\, u_2^+(s, t)]\, ds, \tag{4.15}$$

$$u_2^-(x, t) = \alpha(x)\, u_2^+(x, t) - \beta(x)\, u_1^+(x, t) + \int_0^x \{Q(x, s)\, u_1^+(s, t) +$$

$$+ H(x, s)\, u_2^+(s, t)\}\, ds. \tag{4.16}$$

Покажем, что функции $u_1^-(x, t)$ и $u_2^-(x, t)$ удовлетворяют системе (4.1) + (4.2) на отрицательной полуоси. В самом деле, из определения оператор-матрицы A, т. е. из (4.8), следует

$$A[u^-]_1 = \frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)\, u_1^-.$$

Тогда, полагая в последнем равенстве (вернее в левой его части) выражение u_1^- из равенств (4.13) и (4.14) и учитывая условие (4.10), мы приходим к равенству

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)\, u_1^- = AX[u_1^+] = XB[u^+]_1. \tag{4.17}$$

Вычислим $XB[u^+]_1$. Для этого, в силу определения оператор-матрицы B (см. (4.81)), следует в правой части равенства (4.11) заменить функцию $u_1^+(x, t)$ на $\dfrac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)\, u_1^+(x, t)$, а функцию $u_2^+(x, t)$ — на $-\dfrac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)\, u_2^+(x, t)$. Поэтому

$$XB[u^+]_1 = \alpha(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)\, u_1^+(x, t)\right] + \beta(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} +\right.$$

$$\left. + r(x)\, u_2^+(x, t)\right] + \int_0^x P(x, s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)\, u_1^+(s, t)\right] ds +$$

$$+ \int_0^x R(x, s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)\, u_2^+(s, t)\right] ds. \tag{4.18}$$

Так как функции $u_1^+(x, t)$ и $u_2^+(x, t)$ являются решениями системы (4.1)+(4.2), то равенство (4.18) можно записать так

$$XB[u^+]_1 = \alpha(x)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] + \beta(x)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right] + \int_0^x \left\{P(x, s)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right] +\right.$$

$$+R(x,s)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right]\Bigg\}ds=-i\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\alpha(x)\,u_1^+(x,t)+\beta(x)\,u_2^+(x,t)+$$

$$+\int_0^x[P(x,s)\,u_1^+(s,t)+R(x,s)\,u_2^+(s,t)]\,ds\Bigg\}. \qquad (4.19)$$

Из равенств (4.17) и (4.19), в силу (4.15), следует

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x}+p(-x)\,u_1^-=-i\frac{\partial u_1^-}{\partial t},$$

т. е. удовлетворяется уравнение (4.1) при $x<0$. Аналогично,

$$A[u^+]_2=-\frac{\partial u_1^-}{\partial x}+r(-x)\,u_2^-=AX[u^+]_2=XB[u^+]_2=\alpha(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+r(x)\,u_2^+\right]-\beta(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x}+p(x)\,u_1^+\right]+\int_0^x\Bigg\{Q(x,s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x}+p(s)\,u_1^+\right]+$$

$$+H(x,s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x}+r(x)\,u_2^+\right]\Bigg\}ds=\alpha(x)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right]-\beta(x)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right]+$$

$$+\int_0^x\Bigg\{Q(x,s)\left[-i\frac{\partial u_1^+}{\partial t}\right]+H(x,s)\left[-i\frac{\partial u_2^+}{\partial t}\right]\Bigg\}ds=-i\frac{\partial}{\partial t}\Bigg\{\alpha(x)u_2^+(x,t)-$$

$$-\beta(x)\,u_1^+(x,t)+\int_0^x[Q(x,s)\,u_1^+(s,t)+H(x,s)\,u_2^+(s,t)]\,ds\Bigg\}=$$

$$=-i\frac{\partial}{\partial t}X[u^+]_2=-i\frac{\partial u_2^-}{\partial t},$$

т. е.

$$-\frac{\partial u_1^-}{\partial x}+r(-x)\,u_2^-=-i\frac{\partial u_2^-}{\partial t}.$$

Значит удовлетворяется и уравнение (4.2) при $x<0$.

Покажем теперь, что продолжения функций $u_1^+(x,t)$ и $u_2^+(x,t)$ на отрицательную полуось непрерывны вместе с первыми производными. Действительно, полагая в формулах (4.15) и (4.16) $x=+0$, получим

$$u_1^-(-0,t)=\alpha(0)\,u_1^+(+0,t)+\beta(0)\,u_2^+(+0,t), \qquad (4.20)$$

$$u_2^-(-0,t)=\alpha(0)\,u_2^+(+0,t)-\beta(0)\,u_1^+(+0,t). \qquad (4.21)$$

Далее, в нашем случае $h=h_1$, в силу чего из равенства (3.39) находим, что $\varkappa=1$. Тогда из равенств (3.40) и (3.41) следует, что $\alpha(0)=1$, $\beta(0)=0$. Поэтому непрерывность продолжения следует из (4.20) и (4.21).

Покажем, что, если коэффициенты системы (4.1)+(4.2) продолжены на отрицательную полуось непрерывно, т. е. если выполняются равенства (4.9), то непрерывно не только продолжение решения, но и его первая производная.

В самом деле, из равенств (4.10), (4.13) и (4.14) имеем

$$A[u^-] = XB[u^+].$$

Используя явный вид операторов A, B и X, согласно (4.8), (4.11) и (4.12), последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\partial u_2^-}{\partial x} + p(-x)u_1^- = \alpha(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)u_1^+\right] + \beta(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)u_2^+\right] +$$

$$+\int_0^x \left\{P(x,s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)u_1^+\right] + R(x,s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)u_2^+\right]\right\}ds. \quad (4.22)$$

$$-\frac{\partial u_1^-}{\partial x} + r(-x)u_2^- + \alpha(x)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial x} + r(x)u_2^+\right] - \beta(x)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial x} + p(x)u_1^+\right] +$$

$$+\int_0^x \left\{Q(x,s)\left[\frac{\partial u_2^+}{\partial s} + p(s)u_1^+\right] + H(x,s)\left[-\frac{\partial u_1^+}{\partial s} + r(s)u_2^+\right]\right\}ds. \quad (4.23)$$

Теперь, полагая в равенствах (4.22) и (4.23) $x = +0$ и используя непрерывность функций $p(x)$ и $r(x)$ в нуле, мы получим

$$\frac{\partial}{\partial x}u_2(-x,t)/_{x=0} + p(0)u_1(-0,t) = \alpha(0)\left[\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} +\right.$$

$$\left.+p(0)u_1(+0,t)\right] + \beta(0)\left[-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} + r(0)u_2(+0,t)\right], \quad (4.24)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}u_1(-x,t/_{x=0} + r(0)u_2(-0,t) = \alpha(0)\left[-\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} +\right.$$

$$\left.+r(0)u_2(+0,t)\right] + -\beta(0)\left[\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} + p(0)u_1(+0,t)\right]. \quad (4.25)$$

Так как $\alpha(0) = 1$, $\beta(0) = 0$, $u_1(-0,t) = u_1(+0,t)$, $u_2(-0,t) = u_2(+0,t)$, то из равенств (4.24) и (4.25) следует

$$\frac{\partial u_1(-x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} = \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0}, \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial u_2(-x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0} = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big/_{x=0}, \quad (4.27)$$

т. е. в нуле непрерывны и первые производные продолжения.

Формулы (4.15) и (4.16) можно использовать для продолжения начальных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. условие (4.3) и (4.4)). В самом деле, полагая в формулах (4.15) и (4.16) $t = 0$ и учитывая начальные условия (4.3) и (4.4), находим

$$f_1(-x) = \alpha(x)f_1(x) + \beta(x)f_2(x) + \int_0^x \{P(x,s)f_1(s) + R(x,s)f_2(s)\}\,ds, \quad (4.28)$$

$$f_2(-x) = \alpha(x) f_2(x) - \beta(x) f_1(x) + \int_0^x \{Q(x, s) f_1(s) + H(x, s) f_2(s)\} ds. \tag{4.29}$$

Непрерывность продолжений $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и их первых производных следует из равенств (4.26), (4.27), (4.28) и (4.29), если в них положить $x = +0$.

Вернемся теперь к задаче (4.1) + (4.2) + (4.3) + (4.4) + (4.5).

Если $x > t > 0$, то решение задачи (4.1)—(4.5) совпадает с решением задачи (4.1)—(4.4) и, следовательно, дается формулами (4.6) и (4.7). А если $x < t$, то нужно использовать продолжения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрицательную полуось по формулам (4.28) и (4.29), притом следующим образом: интервал интегрирования в формулах (4.6) и (4.7) $(x - t, x + t)$ разбиваем на два интервала: $(x - t, 0)$ и $(0, x + t)$, а затем, в интегралах по интервалу $(x - t, 0)$, $x - t < 0$, переменную интегрирования s заменяем на $-s$, а значения функций $f_1(-s)$ и $f_2(-s)$ соответственно по формулам (4.28) и (4.29). Аналогично, заменяем значения функций $f_1(x - t)$ и $f_2(x - t)$ в слагаемых, стоящих вне интегралов в правых частях формул (4.6) и (4.7). Тогда после несложных преобразований, которые мы опускаем, для решения задачи (4.1)—(4.5) при $0 < x < t$ получаем формулы

$$u_1(x, t) = k(x, t)\{f_1(x + t) + if_2(x + t)\} + l_1(x, t)\{f_1(t - x) - \\ - if_2(t - x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} \{K(x, t, s) f_1(s) + L(x, t, s) f_2(s)\} ds + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{K_1(x, t, s) f_1(s) + L_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{4.30}$$

$$u_2(x, t) = k(x, t)\{f_2(x + t) - if_1(x + t)\} + l_1(x, t)\{f_2(t - x) + \\ + if_1(t - x)\} + \frac{1}{2}\int_0^{t+x} \{M(x, t, s) f_1(s) + N(x, t, s) f_2(s)\} ds + \\ + \frac{1}{2}\int_0^{t-x} \{M_1(x, t, s) f_1(s) + N_1(x, t, s) f_2(s)\} ds, \tag{4.31}$$

где

$$l_1(x, t) = l(x, t)\{\alpha(t - x) + i\beta(t - x)\} = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int_0^{t-x} [p(\tau) + \\ + r(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} i \int_0^x [p(\tau) + r(\tau)] d\tau\right\}, \; K_1(x, t, s) = \alpha(s) K(x, t, -s) - \\ - \beta(s) L(x, t, -s) + 2l(x, t)[P(t - x, s) - iR(t - x, s)] +$$

$$+\int_{s}^{t-x}\{K(x,t,-\tau)P(\tau,s)+L(x,t,-\tau)R(\tau,s)\}\,d\tau,$$

$$L_1(x,t,s)=\beta(s)K(x,t,-s)+\alpha(s)L(x,t,-s)+2l(x,t)[Q(t-x,s)-$$

$$-iH(t-x,s)]+\int_{s}^{t-x}\{K(x,t,-\tau)Q(\tau,s)+L(x,t,-\tau)H(\tau,s)\}\,d\tau,$$

$$M_1(x,t,s)=\alpha(s)M(x,t,-s)-\beta(s)N(x,t,-s)+2l(x,t)[R(t-x,s)+$$

$$+iP(t-x,s)]+\int_{x}^{t-x}\{M(x,t,-\tau)P(\tau,s)+N(x,t,-\tau)R(\tau,s)\}\,d\tau,$$

$$N_1(x,t,s)=\beta(s)M(x,t,-s)+\alpha(s)N(x,t,-s)+2l(x,t)[H(t-x,s)+$$

$$+iQ(t-x,s)]+\int_{s}^{t-x}\{M(x,t,-\tau)Q(\tau,s)+N(x,t,-\tau)H(\tau,s)\}\,d\tau.$$

§ 5. Решение задачи (1.1) + (1.2) + (1.3) + (1.4) при $t<0$

Пусть теперь $t<0$. Положим $\tau=-t$. Тогда система (1.1)—(1.2) принимает вид

$$i\frac{\partial u_1}{\partial\tau}-\frac{\partial u_2}{\partial x}-p(x)u_1=0, \tag{5.1}$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial\tau}+\frac{\partial u_1}{\partial x}-r(x)u_2=0. \tag{5.2}$$

Введем новые функции, полагая

$$u_1(x,-\tau)\equiv v_2(x,\tau), \tag{5.3}$$

$$u_2(x,-\tau)\equiv v_1(x,\tau), \tag{5.4}$$

$$-r(x)\equiv q(x),\ -p(x)\equiv h(x), \tag{5.5}$$

$$f_1(x)\equiv g_2(x),\ f_2(x)\equiv g_1(x). \tag{5.6}$$

В силу обозначений (5.3)—(5.6), задачу (1.1)—(1.4), с учетом (5.1) и (5.2), можно записать так:

$$i\frac{\partial v_1}{\partial\tau}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+q(x)v_1=0, \tag{5.7}$$

$$i\frac{\partial v_2}{\partial\tau}-\frac{\partial v_1}{\partial x}+h(x)v_2=0, \tag{5.8}$$

$$v_1(x,0)=g_1(x),\ v_2(x,0)=g_2(x). \tag{5.9}$$

Решение задачи (5.7)+(5.8)+(5.9), как уже доказано в параграфе 2, дается формулами (2.36) и (2.37), т. е.

$$v_1(x,\tau)=\bar{k}(x,\tau)\{g_1(x+\tau)+ig_2(x+\tau)\}+\bar{l}(x,\tau)\{g_1(x-\tau)-$$

$$-ig_2(x-\tau)\}+\frac{1}{2}\int_{x-\tau}^{x+\tau}\{\bar{K}(x,\tau,s)g_1(s)+\bar{L}(x,\tau,s)g_2(s)\}\,ds, \tag{5.10}$$

$$v_3(x, \tau) = \bar{k}(x, \tau)\{g_2(x+\tau) - ig_1(x+\tau)\} + \bar{l}(x, \tau)\{g_2(x-\tau) + ig_1(x-\tau)\} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau}\{\bar{M}(x, \tau, s)\, g_1(s) + \bar{N}(x, \tau, s)\, g_2(s)\}\, ds, \tag{5.11}$$

где, согласно формулам (2.15) и (2.16),

$$\bar{k}(x, \tau) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^\tau [h(x+\sigma) + q(x+\sigma)]\, d\sigma\right\}, \tag{5.12}$$

$$\bar{l}(x, \tau) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^\tau [h(x-\sigma) + q(x-\sigma)]\, d\sigma\right\}. \tag{5.13}$$

Вычислим значения функций $\bar{k}(x, \tau)$ и $\bar{l}(x, \tau)$, возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$. Имеем

$$\bar{k}(x, -t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^{-t} [-p(x+\sigma) - r(x+\sigma)]\, d\sigma\right\} = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} \int\limits_0^{t} [p(x-\sigma) + r(x-\sigma)]\, d\sigma\right\},$$

откуда, в силу (2.16), следует, что

$$\bar{k}(x, \tau) = \bar{k}(x, -t) = l(x, t). \tag{5.14}$$

Аналогичным образом получим

$$\bar{l}(x, -t) = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^{-t} [-p(x-\sigma) - r(x-\sigma)]\, d\sigma\right\} = \frac{1}{2}\exp\left\{\frac{1}{2} i \int\limits_0^{t} [p(x+\sigma) + r(x+\sigma)]\, d\sigma\right\},$$

что, согласно (2.15), равносильно равенству

$$\bar{l}(x, \tau) = \tilde{l}(x, -t) = k(x, t). \tag{5.15}$$

Далее, выписывая задачу, аналогичную (2.19) + (2.20) + (2.17) + (2.18) для функций $K(x, \tau, s)$ и $L(x, \tau, s)$, а затем возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$ получим следующую задачу:

$$i\frac{\partial \bar{K}(x, -t, s)}{\partial t} - \frac{\partial \bar{L}(x, -t, s)}{\partial s} + r(x)\bar{K}(x, -t, s) = 0, \tag{5.16}$$

$$i\frac{\partial \bar{L}(x, -t, s)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{K}(x, -t, s)}{\partial s} + p(x)\bar{L}(x, -t, s) = 0, \tag{5.17}$$

$$\bar{K}(x, -t, x+t) - i\bar{L}(x, -t, x+t) = -i\{r(x+t) - p(x+t)\}\, k(x, t), \tag{5.18}$$

$$\tilde{K}(x,-t,x-t)-i\tilde{L}(x,-t,x-t)=-i\ \{r(x-t)-p(x-t)\}\ l(x,t). \tag{5.19}$$

Так как $k(x,0)=l(x,0)=\frac{1}{2}$, то, полагая в равенствах (5.18) и (5.19) $t=0$, а затем складывая (вычитая), мы, соответственно, получим

$$\tilde{K}(x,0,x)=\frac{1}{2}i\ \{p(x)-r(x)\},\ \tilde{L}(x,0,x)=0. \tag{5.20}$$

Выписывая теперь задачу, аналогичную (2.30) + (2.31) + (2.28) + (2.29) для функций $\tilde{M}(x,t,s)$ и $\tilde{N}(x,t,s)$, а затем возвращаясь от τ, $h(x)$ и $q(x)$, соответственно, к $-t$, $-p(x)$ и $-r(x)$, получим

$$i\frac{\partial\tilde{N}(x,-t,s)}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{M}(x,-t,s)}{\partial s}-+p(s)\tilde{N}(x,-t,s)=0, \tag{5.21}$$

$$i\frac{\partial\tilde{M}(x,-t,s)}{\partial t}--\frac{\partial\tilde{N}(x,-t,s)}{\partial s}+r(s)\tilde{M}(x,-t,s)=0, \tag{5.22}$$

$$\tilde{N}(x,-t,x+t)+i\tilde{M}(x,-t,x+t)=i\{r(x+t)-p(x+t)\}k(x,t), \tag{5.23}$$

$$\tilde{N}(x,-t,x-t)-i\tilde{M}(x,-t,x-t)=i\{r(x-t)-p(x-t\}l(x,t). \tag{5.24}$$

Поступая так же, как и при получении равенств (5.20), из (5.23) и (5.24) имеем

$$\tilde{N}(x,0,x)=\frac{1}{2}i\{r(x)-p(x)\},\ M(x,0,x)=0.$$

Заменяя в формулах (5.10) и (5.11) τ на $-t$ и учитывая равенства (5.3), (5.4), (5.6), (5.14) и (5.15), получим ($t<0$)

$$u_1(x,t)=k(x,t)\{f_1(x+t)+if_2(x+t)\}+l(x,t)\{f_1(x-t)-$$
$$-if_2(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\tilde{N}(x,-t,s)f_1(s)+M(x,-t,s)f_2(s)\}ds,$$
$$u_2(x,t)=k(x,t)\{f_2(x+t)-if_1(x+t)\}+l(x,t)\{f_2(x-t)+$$
$$+if_1(x-t)\}+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t}^{x-t}\{\tilde{L}(x,-t,s)f_1(s)+\tilde{K}(x,-t,s)f_2(s)\}ds.$$

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 24.IX.1966

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԴԻՐԱԿԻ ՄԻԱՉԱՓ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրվում է Կոշու հետևյալ խնդիրը՝

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0,$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0,$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ u_2(x,0)=f_2(x),$$

որտեղ $p(x)$ *և* $r(x)$ *ֆունկցիաներն իրական են, որոշված են* $(0, \infty)$ *կիսաառանցքի վրա և հանրագումարելի են ամեն մի վերջավոր ինտերվալում, իսկ* $f_1(x)$ *և* $f_2(x)$ *ֆունկցիաները նույնպես իրական են և անընդհատ դիֆերենցելի են նույն կիսաառանցքի վրա։*

Աշխատության մեջ ստացված են բացահայտ բանաձևեր ուսումնասիրվող Կոշու խնդրի լուծման համար, որոնք արտահայտված են (0.7)—(0.10) և (0.17)—(0.18) բանաձևերում (տես հիմնական տեքստի ներածությունը)։

I. S. SARGSIAN

ON THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE DIMENSIONAL DYRAC SYSTEM

S u m m a r y

The following Cauchy problem is investigated

$$i\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+p(x)\,u_1=0,$$

$$i\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial x}+r(x)\,u_2=0,$$

$$u_1(x,0)=f_1(x),\ u_2(x,0)=f_2(x),$$

with $p(x)$ and $r(x)$ defined on $(0, \infty)$, real valued and summable, as for $f_1(x)$ and $f_2(x)$, they are assumed to be real-valued and to posess continous first derivatives on $(0, \infty)$. Explicit solution for this problem is obtained (see formulae (0.7)—(0.10) and (0.17)—(0.18)).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. М. Левитан.* Приложение III к книге Э. Ч. Титчмарша — Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I, Издательство ИЛ, Москва (1960).
2. *В. А. Марченко.* Некоторые вопросы теории одьомерных линейных дифферен-

циальных операторов второго порядка, Труды Моск. матем. общества, I (1952), 327—420.

3. *Р. Курант, Д. Гильберт.* Методы математической физики, Гостехиздат, М.—Л. (1951).
4. *Б. М. Левитан, И. С. Саргсян.* О продолжении решений одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 165, № 6 (1965).
5. *И. С. Саргсян.* Асимптотическое поведение спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 5 (1966).
6. *И. С. Саргсян.* Разложение по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН СССР, 166, № 6 (1966).
7. *И. С. Саргсян.* Суммирование производных спектральной матрицы одномерной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 4 (1966).
8. *И. С. Саргсян.* Теорема о равносуммируемости дифференциальных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 5 (1966).
9. *И. С. Саргсян.* О решении задачи Коши для одномерной нестационарной системы Дирака, ДАН Арм.ССР, XLII, № 3 (1966).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հայկական ՍՍՀ Գիտությունների Ակադեմիայի Տեղեկագիր «Մաթեմատիկա» ամսագրի
1966 թ., հ. 1, №№ 1—6

СОДЕРЖАНИЕ

журнала Известия АН Армянской ССР, серия «Математика» за 1966 г., т. 1, №№ 1—6

CONTENTS

of the Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., seria„ Matematika", Vol. 1, Nos. 1—6, 1966

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке.

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 30 կ.
ЦЕНА 30 к.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia