ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գին 30 կ.
ЦЕНА 30 К.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, № 5, 1966 Математика

Г. В. ГЕНДЖОЯН

О МОДИФИКАЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СХЕМЫ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ

Функциональная схема приближенного метода, предложенного С. А. Чаплыгиным для решения дифференциальных уравнений [1], впервые разработана А. Н. Балуевым [2]. Впоследствии она развивалась и конкретизировалась С. Н. Слугиным [3], [4] и другими авторами. В настоящей работе мы вкратце изложим часть функциональной схемы метода Чаплыгина, относящуюся к алгорифму получения двусторонних монотонных (чаплыгинских) приближений, приведем ее некоторые видоизменения и остановимся на применении этого метода к решению первой краевой задачи для одного частного класса квазилинейных параболических уравнений второго порядка.

1. Функциональная схема метода

Пусть в частично упорядоченной группе X, полной относительно некоторой разумным образом выбранной сходимости, дано (в общем случае нелинейное) уравнение $P(x)=0$ [4].

Как операция P, так и операция Γ, которую мы определим ниже, отображают X в такую же группу Y. При этом предполагаются выполненными условия:

1. Существует аддитивная, положительно обратимая операция Γ такая, что для любого положительного $\Delta x \in X$ имеет место неравенство (условие Н. В. Азбелева)

$$P(x+\Delta x)-P(x)\leqslant \Gamma\Delta x. \tag{1.1}$$

2. Существуют элементы x_0 и y_0 такие, что

$$x_0\leqslant y_0 \text{ и } P(x_0)\leqslant 0\leqslant P(y_0). \tag{1.2}$$

При этих условиях, если последовательности x_n и y_n определить формулами

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma^{-1}P(x_n),\ y_{n+1}=y_n-\Gamma^{-1}P(y_n),\ n=0,1,2\cdots, \tag{1.3}$$

то имеют место неравенства

$$x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n. \tag{1.4}$$

В самом деле, обозначая: $\delta x_n=x_{n+1}-x_n$, $\delta y_n=y_{n+1}-y_n$, из (1.3), (1.2) и (1.1) получим $\delta x_0=-\Gamma^{-1}P(x_0)\geqslant 0$, $\delta y_0=-\Gamma^{-1}P(y_0)\leqslant 0$. Далее,

$$P(x_1)=P(x_0+\delta x_0)\leqslant P(x_0)+\Gamma\delta x_0=0,$$

$$P(y_1)=P(y_0+\delta y_0)\geqslant P(y_0)-\Gamma(-\delta y_0)=P(y_0)+\Gamma\delta y_0=0,$$

$$y_1 - x_1 = y_0 - x_0 - [\Gamma^{-1} P(y_0) - \Gamma^{-1} P(x_0)] = \Gamma^{-1} [\Gamma(y_0 - x_0) - P(y_0) + P(x_0)] > 0.$$

Этим доказана справедливость неравенств (1.4) для $n=0$ и соотношений (1.2), если в последних заменить пару (x_0, y_0) через (x_1, y_1). Методом индукции завершается доказательство утверждения. Заметим, что если x^* — некоторое решение уравнения $P(x)=0$, $x_0 \leqslant x^* \leqslant y_0$, то аналогично предыдущему, легко установить неравенства

$$x_n \leqslant x^* \leqslant y_n, \ n = 1, 2, 3, \cdots.$$

При некоторых дополнительных условиях (см. [4]) исследуется сходимость x_n и y_n к x^*.

В применении к нелинейным задачам описанная схема суть некоторая разновидность метода линеаризации: уравнение $P(u_{n+1})=0$ заменяется уравнением $P(u_n) + \Gamma(u_{n+1} - u_n) = 0$ с дополнительными условиями (1.1) и (1.2), соответственно, на операцию Γ и на начальные приближения (x_0, y_0). При рассмотрении задачи Коши для дифференциальных уравнений (обыкновенных или в частных производных) проверка условий (1.1) и (1.2) не встречает особых трудностей. Однако в нелинейных краевых задачах ситуация значительно усложняется. Проиллюстрируем это на примерах.

$$P(y) \equiv -y'' + f(x, y, y') = 0, \ y(0) = y'(0) = 0, \ 0 < x < 1.$$

Предположим, что функция f непрерывна по x и ее производные f'_y и $f'_{y'}$ в области $0 < x < 1$, $y^2 + y'^2 < \infty$ ограничены

$$|f'_y| \leqslant M, \ |f'_{y'}| \leqslant M.$$

Так как $P(y + \Delta y) - P(y) = -\Delta y'' + f(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - f(x, y, y') = -\Delta y'' + f_{y'}\Delta y' + f_y \Delta y$, то естественно операцию Γ искать в виде $\Gamma\Delta y = -\Delta y'' + k\Delta y' + l\Delta y$, где k и l — постоянные. Тогда условие (1.1) принимает вид

$$f'_{y'} \Delta y' + f'_y \Delta y \leqslant k\Delta y' + l\Delta y.$$

В силу заданных начальных условий оно выполнено для любых $k > M$ и $l > M$, если $\Delta y' \geqslant 0$. Исходя из этого С. Н. Слугин рассматривает $P(y)$ как операцию над $y'(x)$, т. е. $P(y) \equiv -(y')' + f(x, \int_0^x y'(t)\,dt, y')$; взяв в качестве X подпространство функций из C^1, обращающихся в нуль в точке $x=0$. Операция Γz примет вид $\Gamma z = -z' + kz + l\int_0^x z(t)\,dt$. Легко видеть, что

$$\Gamma^{-1} f = \int_0^x \frac{\beta e^{\beta(x-t)} - \alpha e^{\alpha(x-t)}}{\beta - \alpha} f(t)\,dt,$$

где α и β — корни уравнения $\gamma^2 - k\gamma - l = 0$. Положительность операции Г очевидна. Алгорифм (1.3) имеет вид

$$y'_{n+1}(x) = y'_n(x) - \int_0^x \frac{\beta e^{\beta(x-t)} - \alpha e^{\alpha(x-t)}}{\beta - \alpha}\left[-y'' + f(x, y_n, y'_n)\right] dt.$$

У С. Н. Слугина, описанная нами схема применяется фактически к старшей из производных, входящих нелинейно в левую часть дифференциального уравнения. При этом получающиеся монотонные последовательности этой производной индуцируют, благодаря начальным условиям, такую же упорядоченность для более низких производных, т. е. получаются двусторонние монотонные приближения самого решения.

Если поставить краевую задачу для того же уравнения

$$-y'' + f(x, y, y') = 0,\ y(0) = y(1) = 0,\ 0 < x < 1, \tag{1.5}$$

где $f(x, y, y')$ удовлетворяет еще дополнительному условию $f'_y \geqslant 0$, то упорядочивать производные уже нельзя, потому что сами функции тогда не будут удовлетворять граничным условиям. Если упорядочить класс функций $y(x)$, то невозможно удовлетворить условию (1.1):

$$-\delta y'' + f'_{y'}\,\delta y' + f'_y\delta y \leqslant -\delta y'' + k(x)\,\delta y' + l(x)\,\delta y \text{ при } \delta y \geqslant 0.$$

Действительно, для любой пары функций $k(x)$, $l(x)$ найдется дважды дифференцируемая на отрезке [0,1] и обращающаяся в нуль на его концах положительная функция δy, для которой нарушается неравенство

$$(k(x) - f'_{y'})\,\delta y' + (l(x) - f'_y)\,\delta y \geqslant 0.$$

Оказывается, если в условии 1 вместо неравенства (1.1) выставить более слабое требование: именно условие

$$P(x + \Delta x) - P(x) \leqslant \Gamma\Delta x \text{ при } \Gamma\Delta x \geqslant 0,$$

то существенно расширяется класс задач, решаемых методом Чаплыгина. С таким видоизменением функциональная схема применена для решения задачи (1.5) в работе [5]. В многомерных задачах типа (1.5) (первая краевая задача для уравнений в частных производных второго порядка) даже для видоизмененной таким образом схемы не известно, как построить операцию Г, т. е. получить линеаризованное уравнение $P(y_n) + \Gamma\delta y_n = 0$ для нахождения невязок δy_n двусторонних приближений. Для таких задач применима следующая модификация функциональной схемы, более непосредственно отражающая сущность метода двусторонних монотонных приближений.

Пусть операция $P(x)$, определенная на X обладает свойствами

1) *Из* $P(x) \leqslant P(y)$ *следует, что* $x \leqslant y$.

2) *Существует аддитивная положительная операция* Г, *определенная на множестве* $P(x)$ *со значениями в* X, *удовлетворяющая условию: из* $P(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0)$ *следует, что*

$$P(x - \Gamma P(x)) \geqslant 0 \ (\leqslant 0). \tag{1.6}$$

3) *Существуют элементы x_0, y_0 такие, что*

$$P(x_0) \leqslant 0 \leqslant P(y_0).$$

Тогда, определяемые формулами

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma P(x_n), \ y_{n+1} = y_n - \Gamma P(y_n), \ n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.7}$$

последовательности x_n, y_n удовлетворяют условиям

$$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n.$$

При этом, если $P(x^*) = 0$, то $x_n \leqslant x^* \leqslant y_n$.

Доказательство высказанных утверждений мы опускаем, ввиду их простоты. Отметим, что, в отличие от предыдущих функциональных схем, в этой — невязки δx_n и δy_n получаются непосредственно из алгорифма (1.7), а не как решения линеаризованной задачи. Такая схема была использована в работе [6] для решения задачи

$$-\Delta u + f(x, u, u_x) = 0, \ u/_\sigma = 0.$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ — оператор Лапласа, σ — граница области, в которой рассматривается уравнение. В настоящей работе мы применим ее для решения задачи

$$P(u) \equiv L u + f(x, t, u, u_x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u_x) = 0, \tag{1.8}$$

$$u/_s = 0 \tag{1.9}$$

в цилиндре $D = \Omega \times (0, T]$, где Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей σ в 3-мерном эвклидовом пространстве; $(0, T]$ — интервал изменения переменной t, а $S = \Omega \cup \{\sigma \times (0, T]\}$.

Метод Чаплыгина в применении к задаче (1.8), (1.9) при $n=1$ рассмотрен в работе [7], где на функцию $f(x, t, u, u_x')$ наложены следующие условия: она непрерывна вместе со своими производными f_x', f_u', f_{u_x}', f_{xu_x}' в области $(x, t) \in \overline{D}$, $u^2 + u_x^2 < \infty$, $f_{xu_x}' - 2f_u' < 0$ и квадратичная форма вторых производных отрицательно определена

$$\psi = f_{u^2}'' \alpha^2 + 2 f_{uu_x}'' \alpha\beta + f_{u_x^2}'' \beta^2 < 0. \tag{1.10}$$

Использован метод линеаризации; невязки δu_n, $\delta u_n|_S = 0$ определяются из уравнения типа

$$L\delta u_n + f_{u_x}'(u_n)\,\delta u_n' + f_u'(u_n)\,\delta u_n + P(u_n) = \Gamma\delta u_n + P(u_n) = 0.$$

Легко видеть, что для $P(u_{n+1})$ получим

$$P(u_{n+1}) = P(u_{n+1}) - P(u_n) + P(u_n) = \Gamma\delta u_n + P(u_n) + \psi = \psi \leqslant 0.$$

Следовательно, условие (1.10) дает возможность получить лишь односторонние монотонные приближения u_n, именно те, для которых $P(u_n) \leqslant 0$. Поэтому в случае, когда функция f зависит нелинейно от производной u_x', получены лишь односторонние приближения. В этой работе задача рассмотрена „в малом" (т. е. число T предполагается достаточно малым). В случае же, когда f не зависит от u'_x или зависит линейно, построены двусторонние монотонные, т. е. чаплыгинские приближения.

2. Применение модифицированной функциональной схемы

2.1. Введем обозначения, используемые в дальнейшем. Через $x=(x_1, x_2, x_3)$ обозначим точку эвклидова пространства E_3, а через $u'_x(x, t)$ — любую из производных $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}$ $(i=1, 2, 3)$. Аналогичный смысл имеет обозначение u_{x^2}; $f(x, t, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3})$ обозначается через $f(x, t, u, u_x)$, а иногда и через $f(x, t, u)$ или просто $f(u)$; ρ_x—расстояние точки $x \in \Omega$ до границы σ, D^τ — цилиндр $\Omega \times (\tau < t \leqslant T]$, n_ξ — нормаль к σ в точке ξ. Через c обозначаются постоянные, используемые в оценках, часто указываются параметры, от которых они зависят (постоянные обозначаются и буквами α, β, γ, δ, μ, ν).

В дальнейшем используются определения.

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет по x условию Гельдера с показателем α (или $u(x, t)$ непрерывна по Гельдеру с показателем α относительно x) в области D, если имеет место неравенство $|u(x, t) - u(x', t)| \leqslant c|x-x'|^\alpha$, где x и x'—произвольные точки из Ω, $0<t\leqslant T$.

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию A_α в D, если $u(x, t)$ $u'_x(x, t)$ и $Lu(x, t)$ непрерывны в DUS по совокупности (x, t) и по x удовлетворяют в D условию Гельдера с показателем α.

Рассмотрим задачу (1.8), (1.9), предъявляя к функции f следующие требования. В области $(x, t) \in DUS$, $u^2+\mathrm{grad}^2\, u < \infty$ она по совокупности аргументов непрерывна, по x удовлетворяет условию Гельдера с показателем α_0 $(\alpha_0<1)$

$$|f(x, t, u) - f(x', t, u)| \leqslant c|x-x'|^{\alpha_0}, \tag{2.1}$$

имеет непрерывные производные f'_u, f'_{u_x}, удовлетворяющие условиям

$$|f'_u| \leqslant M, \quad |f'_{u_x}| \leqslant M, \tag{2.2}$$

где M — некоторая постоянная.

Предположим, что σ принадлежит классу $c^{2\lambda}$. Решение задачи (1.8), (1.9) ищется среди регулярных функций, т. е. функций, непрерывных в DUS и обладающих внутри области непрерывными производными, входящими в уравнение (1.8).

Докажем единственность регулярного решения.

Если $u(x, t)$ и $v(x, t)$ такие решения, то функция $z(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ является решением задачи

$$Lz + \sum_{l=1}^{3} f'\, u_{x_l}\, z'_{x_l} + f'_u\, z = 0, \quad z|_S = 0.$$

Здесь значения производных вычислены для некоторых промежуточных значений аргументов согласно формуле Лагранжа (впредь это специально не будет оговорено). Функция $w(x, t) = e^{-Mt} z(x, t)$ является решением задачи

$$Lw + \sum_{l=1}^{3} f'_{u_{x_l}} w'_{x_l} + (f'_u + M) w = 0, \quad w|_S = 0. \tag{2.3}$$

Если $z(x, t) \not\equiv 0$, то функция $w(x, t)$ должна иметь в области $\bar{D} \setminus S$ точку положительного максимума или отрицательного минимума. В этой точке нарушается равенство (2.3). Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Перейдем к функциональной схеме. В качестве группы X возьмем множество регулярных функций, обращающихся в нуль на S и удовлетворяющих условию A_{α}. Упорядочение в ней—обычное упорядочение для непрерывных функций. В такой группе свойство 1 для операции P устанавливается с помощью принципа максимума, аналогично тому, как это было сделано только что при доказательстве единственности регулярного решения задачи. Рассмотрение свойства 2. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть функция* $G(x, t, \xi, \tau)$ *удовлетворяет следующим условиям:* а) *она определена и непрерывна по совокупности аргументов в области*

$$x \in \bar{\Omega}, \ \xi \in \Omega, 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{2.4}$$

по x и t при фиксированных ξ и τ удовлетворяет в D_τ уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G + M \sum_{l=1}^{3} |G'_{x_l}| + MG = 0; \tag{2.5}$$

б) $G(x, t, \xi, \tau) \geqslant 0$ *в области* (2.4);

в) *функция*

$$z(x, t) = \int_0^t \int_{\Omega} G(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau, \tag{2.6}$$

где $\varphi(x, t)$ непрерывна в $D \cup S$ и удовлетворяет по x в D условию Гельдера с показателем α $(\alpha < 1)$, непрерывна в $D \cup S$, $z(x, t)|_S = 0$;

г) *в области D функция $z(x, t)$ имеет непрерывные производные, определяемые формулами*

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_i} &= \int_0^t \int_{\Omega} G'_{x_i}(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} &= \int_0^t \int_{\Omega} G'_{x_i x_j}(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau; \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \int_0^t \int_{\Omega} G'_t(x, t, \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) \, d\xi d\tau + \varphi(x, t) \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

и удовлетворяет условию A_α.

Тогда

$$\Gamma\psi = \int_0^t \int_\Omega G(x, t, \xi, \tau)\, \psi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau \qquad (2.8)$$

—операция, требуемая в свойстве 2).

Доказательство. Положительность операции Γ следует непосредственно из условия б). Докажем справедливость неравенства (1.6). Пусть $u \in X$. В силу неравенств (2.2) функция $P(u) = Lu + f(x, t, u, u_x)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к функции $\varphi(x, t)$ в условии в). Тогда из условий в) и г) вытекает, что функция $z(x, t) = \Gamma P(u)$ принадлежит X и Lz имеет вид

$$Lz = P(u) + \int_0^t \int_\Omega LG(x, t, \xi, \tau)\, P(u)\, d\xi d\tau.$$

Рассмотрим, например, случай $P(u) \geqslant 0$.

$$P(u - \Gamma P(u)) = Lu - L\Gamma P(u) + f(u - \Gamma P(u)) = Lu + f(u) - L\Gamma P(u) +$$

$$+ f(u - \Gamma P(u)) - f(u) = P(u) - Lz - \sum_{l=1}^{3} f'_{u_{x_l}} z'_{x_l} - f'_u z.$$

Отсюда легко получить неравенство

$$P(u - \Gamma P(u)) \geqslant - \int_0^t \int_\Omega \left\{ LG + M \sum_{l=1}^{3} \left| \frac{\partial G}{\partial x_l} \right| + MG \right\} P(u)\, d\xi d\tau = 0.$$

Аналогично рассматривается случай $P(u) \leqslant 0$. Лемма доказана.

Для построения операции Γ остается построить функцию $G(x, t, \xi, \tau)$, удовлетворяющую условиям леммы.

2.2. Пусть $H(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) u = 0 \qquad (2.9)$$

в области D. Функция $h(x, t, \xi, \tau) = \dfrac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}}}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}}$ — фундаментальное решение уравнения (2.9), а $g(x, t, \xi, \tau)$ — регулярная часть функции Грина, определяемая интегральным уравнением

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial H(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta. \qquad (2.10)$$

Как известно, функция $H(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leqslant H(x, t, \xi, \tau) \leqslant h(x, t, \xi, \tau) = \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}}. \qquad (2.11)$$

В работе [8] доказано, что для любой пары точек x и x' из Ω, $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ справедливы оценки

$$|H_x'(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_1(\varepsilon) \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} = c_1(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2}, \quad (2.12)$$

$$|H_x'(x, t, \xi, \tau) - H_x'(x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, x, \xi, t, \tau) + e(\nu, x', \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x - x'|^{\alpha}, \quad (2.13)$$

где для краткости через $e(\mu, x, \xi, t, \tau)$ обозначена функция $e^{-\mu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}$, а ε, α, ν — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} \varepsilon > 0 \text{ — произвольное число,} \\ 0 < \alpha < 1 \text{ — произвольное число,} \\ 0 < \nu < \frac{1}{4} \text{ — некоторое число.} \end{gathered} \quad (2.14)$$

Следуя Леви [9] будем искать функцию $G(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$G(x, t, \xi, \tau) = H(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta, \quad (2.15)$$

где $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ подлежит определению. Пусть функция $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ определена и непрерывна при $\zeta, \xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < \theta \leqslant T$, и для любой пары ζ и $\zeta' \in \Omega$ выполнены неравенства

$$|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_3(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \zeta, \xi, \theta, \tau\right)}{(\theta-\tau)^2}, \quad (2.16)$$

$$|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau) - \Phi(\zeta', \theta, \xi, \tau)| \leqslant$$
$$\leqslant c_4(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, \zeta, \xi, \theta, \tau) + e(\nu, \zeta', \xi, \theta, \tau)}{(\theta-\tau)^2} |\zeta - \zeta'|^{\alpha}. \quad (2.17)$$

Здесь постоянные ε, α, ν удовлетворяют прежним условиям (2.14). Доказательство неравенств (2.16), (2.17) будет дано ниже.

Перепишем $G(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$G(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau) +$$
$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$
$$= h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau) + h^*(x, t, \xi, \tau) + g^*(x, t, \xi, \tau). \quad (2.18)$$

Рассмотрим сначала функцию $h^*(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t} J(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$, где

$$J(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int\limits_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta, \quad \tau < \theta < t.$$

Установим для нее оценку

$$|h^*(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_5(\varepsilon)\, \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{t - \tau}. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.11) и (2.16) получим для $J(x, t, \theta, \xi, \tau)$ неравенство

$$|J(x, t, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_6(\varepsilon) \int\limits_{\Omega} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(\tau-\theta)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^2}\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c_6(\varepsilon)\, e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} \int\limits_{\Omega} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{(t-\tau)}{(t-\theta)(\theta-\tau)}\left[\zeta - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}x - \frac{t-\theta}{t-\tau}\xi\right]}}{(t-\theta)^{3/2}(\theta-\tau)^2}\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c_6(\varepsilon)\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{} \int\limits_{\Omega'} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\left[\zeta' - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}x' - \frac{t-\theta}{t-\tau}\xi'\right]}}{(\theta-\tau)^{1/2}}\, d\zeta' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_7(\varepsilon)}{(\theta-\tau)^{1/2}} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Интегрируя по θ получим

$$|h^*(x, t, \xi, \tau)| = \left|\int\limits_{\tau}^{t} J(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta\right| \leqslant c_5(\varepsilon)\, \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{t - \tau},$$

т. е. оценку (2.19). Аналогичным образом оценивается интеграл

$$J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta$$

$$|J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau)| \leqslant \frac{c_8(\varepsilon)}{(t-\theta)^{1/2}(\theta-\tau)^{1/2}} \cdot \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{\tau}^{t} J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$ для значений $t - \tau \geqslant \delta_0 > 0$, а также неравенство

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta\right| \leqslant c_9(\varepsilon)\, \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{1/2}}.$$

Следовательно, в D_τ функция $h^*(x, t, \xi, \tau)$ имеет непрерывную производную по x, выражающуюся формулой

$$h^{*\prime}_x(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} h'_x(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta, \tag{2.20}$$

при этом верна оценка

$$|h_x^{0'}(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_9(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{3/2}}. \tag{2.21}$$

Для второй производной $\mathring{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)$ функции J легко получить неравенство

$$|\mathring{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau) \leqslant \frac{c_{10}(\varepsilon)\, e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\theta)(\theta-\tau)^{1/2}(t-\tau)^{3/2}}.$$

Обозначая $t_1 = \frac{t+\tau}{2}$, нетрудно убедиться, что из этого неравенства вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int_{\tau}^{t_1} \mathring{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta.$$

Для доказательства равномерной сходимости интеграла

$$\int_{t_1}^{t} \mathring{J}_{x^2}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta$$

преобразуем выражение $J'_x(x, t, \theta, \xi, \tau)$ следующим образом. Пусть y — произвольная точка из Ω, тогда

$$J'_{x_l}(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int_{\Omega} h'_{x_l}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta =$$

$$= \int_{\Omega} h'_{x_l}(x, t, \zeta, \theta)\, [\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau) - \Phi(y, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta -$$

$$- \Phi(y, \theta, \xi, \tau) \int_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta) \cos(n_\zeta, x_l)\, d\zeta.$$

Дифференцируя это выражение по x_j и полагая затем $y = x$, будем иметь

$$J'_{x_l x_j}(x, t, \theta, \xi, \tau) = \int_{\Omega} \mathring{h}_{x_l x_j}(x, t, \xi, \theta)\, [\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau) - \Phi(x, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta -$$

$$- \Phi(x, \theta, \xi, \tau) \int_{\sigma} h'_{x_j}(x, t, \zeta, \theta) \cos(n_\zeta, x_l)\, d\zeta = I_1 + I_2.$$

Используя соотношения (2.11), (2.16) и (2.17) получим

$$|I_1| \leqslant \frac{c_{11}(\nu, \alpha)\, e(\nu, x, \xi, t, \tau)}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}} (\theta-\tau)^{\frac{1+\alpha}{2}} (t-\tau)^{3/2}}.$$

Из соотношений (2.11) и (2.16) следует, что

$$|I_2| < c_{13}(\varepsilon, \rho_x) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2}.$$

При $t - \tau \geqslant \delta_0 > 0$ из полученных оценок вытекает равномерная сходимость интеграла

$$\int_{t_1}^{t} J_{x_i x_j}(x, t, \theta, \xi, \tau)\, d\theta = \int_{t_1}^{t}\int_{\Omega} h^{*}_{x_i x_j}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

Таким образом, в области D_τ существует вторая непрерывная производная функции $h^*(x, t, \xi, \tau)$ по x, вычисляемая по формуле

$$h^{*''}_{x^2}(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h''_{x^2}(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta. \tag{2.22}$$

Покажем, что в области D_τ существует непрерывная производная $h^{*'}_t(x, t, \xi, \tau)$, определяющаяся формулой

$$h^{*}_t(x, t, \xi, \tau) = \Phi(x, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h'_t(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta. \tag{2.23}$$

В силу равенства $h'_t = \Delta h$, равномерная сходимость интеграла, стоящего в правой части последнего соотношения, вытекает из равномерной сходимости интеграла, входящего в равенство (2.22). Следовательно, $h'_t(x, t, \xi, \tau)$, определенная формулой (2.23), непрерывна. Остается установить формулу (2.23).

Пусть для определенности $\Delta t > 0$. Имеем

$$\frac{h^*(x, t+\Delta t, \xi, \tau) - h^*(x, t, \xi, \tau)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{\Omega} h(x, t+\Delta t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} \frac{h(x, t_0+\Delta t, \zeta, \theta) - h(x, t, \zeta, \theta)}{\Delta t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \int_{\Omega} h(x, t+\Delta t, \zeta, t')\, \Phi(\zeta, t', \xi, \tau)\, d\zeta +$$

$$+ \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h'_t(x, t+\eta\Delta t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta,$$

где t' и $t + \eta\Delta t$ находятся между t и $t + \Delta t$.

Поскольку $h(x, t, \xi, \tau)$ является фундаментальным решением, отсюда получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{\Omega} h(x, t+\Delta t, \zeta, t') \Phi(\zeta, t', \xi, \tau)\, d\zeta = \Phi(x, t, \xi, \tau). \tag{2.24}$$

Рассмотрим разность

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t'(x, t+\eta\Delta t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta - \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t'(x, t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta.$$

Перепишем ее в виде

$$\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega}\left[h_t'(x, t+\eta\Delta t, \zeta, \theta) - h_t'(x, t, \zeta, \theta)\right] \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \left(\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon} + \int_{\tau+\varepsilon}^{t-\varepsilon} + \int_{t-\varepsilon}^{t}\right)\left\{\int_{\Omega}\left[h_t'(x, t+\eta\Delta t, \zeta, \theta) - h_t'(x, t, \zeta, \theta)\right]\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\right\} d\theta.$$

Благодаря оценкам, с помощью которых устанавливается равномерная сходимость интеграла $\int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} h_t' \Phi d\zeta d\theta$, первый и третий интегралы правой части могут быть сделаны произвольно малыми для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Для таким образом фиксированного ε второй интеграл становится достаточно малым при малых Δt. Отсюда с учетом (2.24) придем к формуле (2.23).

Для функции $g^*(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g(x, t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta$, в силу регулярности $g(x, t, \xi, \tau)$, в области D_τ существуют и непрерывны производные

$$g_x^{*\prime}(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_x'(x, t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta,$$

$$g_{x^2}^{*\prime\prime}(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_{x^2}''(x, t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta\, d\theta, \tag{2.25}$$

$$g_t^{*\prime}(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\Omega} g_t'(x, t, \zeta, \theta) \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

При этом функция g^* и ее производная по x, благодаря оценкам (2.11), (2.12) и (2.16), удовлетворяют неравенствам

$$g^*(x, t, \xi, \tau) \leqslant c_{13}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)}, \tag{2.26}$$

$$g_x^{*\prime}(x, t, \xi, \tau) \leqslant c_{14}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.27}$$

Для функции $G(x,t,\xi,\tau)$, как это следует из (2.18), (2.20), (2.22), (2.23), (2.25), существуют в области D_τ производные G'_x, G''_{x^2}, G'_t, вычисляемые по формулам

$$G'_x(x,t,\xi,\tau) = H'_x(x,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t\int_\Omega H'_x(x,t,\zeta,\theta)\,\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta,$$

$$G''_{x^2}(x,t,\xi,\tau) = H''_{x^2}(x,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t\int_\Omega H''_{x^2}(x,t,\zeta,\theta)\,\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta,$$

$$G'_t(x,t,\xi,\tau) = \Phi(x,t,\xi,\tau)+H'_t(x,t,\xi,\tau) + \tag{2.28}$$

$$+\int_\tau^t\int_\Omega H'_t(x,t,\zeta,\theta)\,\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta.$$

Для функции G и ее производной G'_x, в силу неравенств (2.11), (2.19), (2.26), (2.12), (2.21), (2.27), справедливы оценки

$$|G(x,t,\xi,\tau)|\leqslant c_{15}(\varepsilon)\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x,\xi,t,\tau\right)}{t-\tau}, \tag{2.29}$$

$$|G'_x(x,t,\xi,\tau)|\leqslant c_{16}(\varepsilon)\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}. \tag{2.30}$$

Из последней оценки следует, что $G(x,t,\xi,\tau)$ определена в $\overline{\Omega}$ и непрерывна по x при $t>\tau$. Перейдем к построению функции $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ Поскольку функция $G(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяет в области D_τ уравнению (2.5), приходим к интегральному уравнению

$$\Phi(x,t,\xi,\tau)+M\sum_{i=1}^{3}\Big|H_{x_i}(x,t,\xi,\tau)+\int_\tau^t\int_\Omega H_{x_i}(x,t,\zeta,\theta)\,\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta\Big|+$$

$$+M\Big[H(x,t,\xi,\tau)+\int_\tau^t\int_\Omega H(x,t,\zeta,\theta)\,\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta\Big]=0. \tag{2.31}$$

Решение $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ этого уравнения строится методом итерации.

Пусть $\Phi_0(x,t,\xi,\tau)=0$, тогда, с помощью неравенств (2.11), (2.12), (2.16), легко получить для последующих приближений оценки

$$|\Phi_1(x,t,\xi,\tau)|\leqslant M\Big[|H(x,t,\xi,\tau)|+\sum_{i=1}^{3}|H'_{x_i}(x,t,\xi,\tau)|\Big]\leqslant$$

$$\leqslant c_{17}(\varepsilon)\,M\,\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^2},$$

$$|\Phi_2(x,t,\xi,\tau)-\Phi_1(x,t,\xi,\tau)|\leqslant M\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\Big[|H(x,t,\zeta,\theta)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}|H'_{x_l}(x,t,\zeta,\theta)|\Big]\,|\Phi_1(\zeta,\theta,\xi,\tau)-\Phi_0(\zeta,\theta,\xi,\tau)|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^2\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\zeta,t,\theta\right)e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,\zeta,\xi,\theta,\tau\right)}{(t-\theta)^2(\theta-\tau)^2}\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^2c_{18}\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_\tau^t\frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{1}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^2c_{18}\,e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^1(1-z)^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^2c_{18}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

$$|\Phi_3(x,t,\xi,\tau)-\Phi_2(x,t,\xi,\tau)|\leqslant M\int\limits_\tau^t\int\limits_\Omega\Big[|H(x,t,\zeta,\theta)|+$$

$$+\sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x,t,\zeta,\theta)|\Big]\,|\Phi_2(\zeta,\theta,\xi,\tau)-\Phi(\zeta,\theta,\xi,\tau)|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant(c_{17}M)^3c_{18}^2\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{t-\tau}\int\limits_0^1(1-z)^{-\frac{1}{2}}dz=$$

$$=\frac{(c_{17}M)^3c_{18}^2\,e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{t-\tau}\,\frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)}.$$

И вообще

$$|\Phi_{n+1}(x,t,\xi,\tau)-\Phi_n(x,t,\xi,\tau)|\leqslant\frac{(c_{17}M)^{n+1}c_{18}^n\,e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon,x,\xi,t,\tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{4-n}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)},\qquad n=0,1,2,\cdots,\qquad(2.32)$$

где функция $\Gamma(m)$ — Гамма-функция Эйлера. Используя известное свойство функции Γ для значений переменных x, $\xi \in \Omega$, $t > \tau$, из оценки (2.32) получим равномерную сходимость последовательности $\Phi_n(x, t, \xi, \tau)$ к некоторой функции $\Phi(x, t, \xi, \tau)$, а также оценку (2.16). Предельная функция $\Phi(x, t, \xi, \tau)$, очевидно, непрерывна и удовлетворяет уравнению (2.31). Докажем справедливость соотношения (2.17). Из уравнения (2.31) имеем

$$|\Phi(x, t, \xi, \tau) - \Phi(x', t, \xi, \tau)| \leqslant M|H(x, t, \xi, \tau) - H(x', t, \xi, \tau)| +$$
$$+ M\int_\tau^t\int_\Omega |H(x, t, \zeta, \theta) - H(x', t, \zeta, \theta)|\,\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta +$$
$$+ M\sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x, t, \xi, \tau) - H_{x_l}(x', t, \xi, \tau)| + M\int_\tau^t\int_\Omega\sum_{l=1}^{3}|H_{x_l}(x, t, \zeta, \theta) -$$
$$- H_{x_l}(x', t, \zeta, \theta)|\cdot|\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)|\,d\zeta d\theta = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Оценим слагаемое J_1. Пусть η — некоторое фиксированное число,

а) если $|x - x'| \geqslant \eta(t-\tau)^{\frac{1}{2}}$, то согласно неравенству (2.11)

$$|J_1| \leqslant c_{19}(\eta, \alpha)\frac{|x - x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}\cdot\frac{e\left(\frac{1}{4}, x, \xi, t, \tau\right) + e\left(\frac{1}{4}, x', \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}; \quad (2.33)$$

б) если $|x - x'| < \eta(t-\tau)^{\frac{1}{2}}$, тогда из неравенства (2.12) получим $|J_1| \leqslant$

$$\leqslant |x - x'|\,|H_x(\tilde{x}, t, \xi, \tau)| \leqslant c_1(\varepsilon)|x - x'|\frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, \tilde{x}, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2},$$

где $\tilde{x}$ — некоторая внутренняя точка отрезка $[x, x']$. Используя известные неравенства: $e^{-\mu|x-\xi|^2} \leqslant c(\mu, \varepsilon, \nu)\,e^{-(\mu-\varepsilon)\xi^2}$ при $|x| \leqslant \nu$ и $x^\beta e^{-\mu x^2} \leqslant c(\varepsilon, \mu, \beta)\,e^{-(\mu-\varepsilon)x^2}$; $\mu, \beta > 0$, придем к оценке

$$|J_1| \leqslant c_{20}(\eta, \varepsilon)\frac{|x - x'|\,e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{21}(\eta, \varepsilon, \alpha)\,e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}|x - x'|^\alpha,$$

где, как и в неравенстве (2.33), α — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Отсюда и из (2.33) будем иметь

$$|J_1| \leqslant c_{22}(\varepsilon, \alpha)\frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right) + e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x', \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} \times$$
$$\times |x - x'|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (2.34)$$

Известно, что J_3 удовлетворяет оценке

$$|J_3| \leqslant c_{23}(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, x, \xi, t, \tau) + e(\nu, x', \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x - x'|^{\alpha} \ (0 < \alpha < 1). \qquad (2.35)$$

Из (2.34), (2.35) и (2.16) получим для J_2 и J_4

$$|J_2| \leqslant c_{24}(\varepsilon, \alpha) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, t, \xi, \tau\right) + e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x', t, \xi, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{2+\alpha}{2}}} |x - x'|^{\alpha},$$

$$|J_4| \leqslant c_{25}(\nu, \alpha) \frac{e(\nu, x, t, \xi, \tau) + e(\nu, x', t, \xi, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |x - x'|^{\alpha}.$$

Отсюда и из неравенств (2.34), (2.35) непосредственно вытекает неравенство (2.17). Тем самым доказано, что $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет условию а), а также установлена законность построений, основанных на априорных неравенствах (2.16) и (2.17).

Перейдем к условию б). Рассмотрим поведение $G(x, t, \xi, \tau)$ при стремлении точки (x, t) к границе S_τ цилиндра D_τ при фиксированных $\xi \in \Omega$ и $\tau \geqslant 0$. Пусть $x_1 \in \sigma$, K_ρ — шар радиуса $\rho \leqslant \frac{|x - \xi|}{2}$ с центром в точке x_1, а числа δ_0, δ — постоянные, $\delta_0 < \delta \leqslant \frac{t-\tau}{2}$. Тогда, как известно, $H(x_1, t, \xi, \tau) = 0$. Разобьем интегральный член в представлении (2.15) функции G на слагаемые вида

$$\int_\tau^t \int_\Omega H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta = \left(\int_{t-\delta_0}^{t} \int_\Omega + \int_\tau^{t-\delta_0} \int_{\Omega \setminus K_\rho} + \right.$$

$$\left. + \int_\tau^{t-\delta_0} \int_{K_\rho} \right) H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta. \qquad (2.36)$$

Для первого и третьего интегралов правой части получим оценки

$$\int_{t-\delta_0}^{t} \int_\Omega H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta \leqslant c_{26}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4} - \varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \int_{t-\delta_0}^{t} \frac{d\theta}{(\theta - \tau)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{c_{27}\, \delta_0}{\delta^2},$$

$$\int_\tau^{t-\delta_0} \int_{K_\rho} H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta \leqslant$$

$$< \frac{c_{28}(\varepsilon)}{\delta_0^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{\tau}^{t-\delta_0} \int\limits_{K_\rho} \frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, \xi, \zeta, \theta, \tau\right)}{(\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta \leqslant \frac{c_{29}}{\delta_0^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{K_\rho} \frac{d\zeta}{|\zeta-\xi|^2} \leqslant \frac{c_{30}\rho}{\delta_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Очевидно, что, выбрав подходящим образом δ_0, а затем и ρ, можно правые части этих неравенств сделать достаточно малыми. Для фиксированного ρ второй интеграл при стремлении x к x_1 стремится к нулю. Следовательно, доказано соотношение

$$\lim_{x \to x_1} G(x, t, \xi, \tau) = 0. \tag{2.37}$$

На нижнем основании D_τ, как известно, $g(x, t, \xi, \tau) \to 0$. Используя выражение (2.10) для функции $g(x, t, \xi, \tau)$, перепишем $g^*(x, t, \xi, \tau)$ в виде

$$\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} g(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma} h(x, t, \alpha, \beta)\, \psi(\alpha, \beta, \xi, \tau)\, d\alpha d\beta,$$

где

$$\psi(\alpha, \beta, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{\beta}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial H(\alpha, \beta, \zeta, \theta)}{\partial n_\alpha} \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

Перемена порядка интегрирования здесь законна в силу оценок (2.11), (2.12) и (2.16). Из тех же оценок можно получить для функции ψ неравенство

$$|\psi(\alpha, \beta, \xi, \tau)| \leqslant c_{31}(\varepsilon) \frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, \alpha, \xi, \beta, \tau\right)}{(\beta-\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда следует, что

$$|g^*(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c'(\rho_\xi)\,(t-\tau)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ при } t \to \tau.$$

Рассмотрим теперь сумму

$$v(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\Omega} h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta,$$

которая, как это следует из (2.11) и (2.16), может быть отрицательной лишь при условии

$$\frac{e(\varepsilon, x, \xi, t, \tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} < c_{32}(\varepsilon).$$

При подходящем выборе ε из последнего условия вытекает, что $v(x, t, \xi, \tau) = 0\,(t-\tau) \to 0$ при $t \to \tau$. Следовательно, граничные значения v неотрицательны на нижнем основании цилиндра D_τ. Из доказанных соотношений для отдельных слагаемых представления (2.18) функции G следует неравенство

$$\lim_{t \to \tau+0} G(x, t, \xi, \tau) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \ \xi \in \Omega, \ 0 \leqslant \tau < t \leqslant T. \tag{2.38}$$

Отсюда и из (2.37) вытекает, что функция $G(x, t, \xi, \tau)$ не может принимать отрицательных значений и в D_τ (в противном случае она должна достичь отрицательного минимума внутри D_τ или на ее верхнем основании, а это противоречит уравнению (2.5)). Выполнение условия б) доказано.

Проверим выполнение условий в) и г). Непрерывность в D функции $z(x, t)$, определенной формулой (2.6), следует из непрерывности $G(x, t, \xi, \tau)$ и оценки (2.29). Из той же оценки следует непрерывность z на нижнем основании цилиндра D, именно, $z(x, t) \to 0$ при $t \to 0$ равномерно по x в области $\overline{\Omega}$. На боковой поверхности $\sigma \times (0, T]$ как и для интеграла (2.36), получим $z(x, t) \to 0$. Таким образом, доказана непрерывность $z(x, t)$ в DUS и выполнение условия $z(x, t)|_S = 0$.

Для доказательства существования непрерывных производных, а также формул (2.7), представим $z(x, t)$ в виде

$$z(x, t) = \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega h^*(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g^*(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Подставляя в последнее соотношение выражения для функций h^* и g^* из формулы (2.18), получим

$$z(x, t) = \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta + \int_0^t \int_\Omega g(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta, \qquad (2.39)$$

где

$$\varphi_1(\zeta, \theta) = \int_0^\theta \int_\Omega \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Как легко проверить, функция $\varphi_1(\xi, \theta)$ непрерывна в DUS и удовлетворяет неравенству $|\varphi_1(\zeta, \theta) - \varphi_1(\zeta', \theta)| \leqslant c_{33}(\alpha) \cdot |\zeta - \zeta'|^\alpha$, где α имеет то же значение, что и в неравенстве (2.17).

Второй и четвертый интегралы в представлении (2.39), ввиду регулярности функции g, допускают в D непрерывные производные по x первых двух порядков, а также производную по t. Эти производные получаются дифференцированием под знаком интеграла. Для первого и третьего интегралов с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были применены к функции $h^*(x, t, \xi, \tau)$, легко показать, что они обладают непрерывными производными первого и второго порядка по x, получаемыми дифференцированием под знаком интеграла, а также непрерывной производной по t.

При этом имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta = \varphi(x, t) +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta = \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \varphi_1(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta +$$

$$+\int_0^t\int_\Omega \Phi(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \int_0^t\int_\Omega \varphi(\xi, \tau)\left[\int_\tau^t\int_\Omega \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial t}\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta + \Phi(x, t, \xi, \tau)\right] d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_\Omega \left[\varphi(\xi, \tau)\, \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau^t\int_\Omega h(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta\right] d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_\Omega \frac{\partial h^*(x, t, \xi, \tau)}{\partial t}\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

Таким образом, в D установлены формулы для производных

$$z'_x(x, t) = \int_0^t\int_\Omega G_x(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta;$$

$$z''_{x^2}(x, t) = \int_0^t\int_\Omega G_{x^2}(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta; \qquad (2.41)$$

$$z'_t(x, t) = \varphi(x, t) + \int_0^t\int_\Omega G'_t(x, t, \zeta, \theta)\, \varphi(\zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Докажем непрерывность по Гельдеру функций $z_x(x, t)$ и Lz относительно x в области D. Из формул (2.41) имеем

$$Lz = \varphi(x, t) + \int_0^t\int_\Omega LG(x, t, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau, \text{ но в } D_\tau$$

$$LG(x, t, \xi, \tau) = LH(x, t, \xi, \tau) + L\int_\tau^t\int_\Omega H(x, t, \zeta, \theta)\, \Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)\, d\zeta d\theta =$$

$$= \Phi(x, t, \xi, \tau).$$

Следовательно,

$$Lz = \varphi(x, t) + \int_0^t\int_\Omega \Phi(x, t, \xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = \varphi(x, t) + \varphi_1(x, t). \qquad (2.42)$$

Отсюда непосредственно вытекает справедливость нашего утверждения относительно Lz.

Используя выражение

$$z_x(x, t) = \int_0^t \int_\Omega H_x(x, t, \zeta, \theta)\,[\varphi(\zeta, \theta) + \varphi_1(\zeta, \theta)]\, d\zeta d\theta,$$

из неравенства (2.13) получим

$$|z_x(x, t) - z_x(x', t)| \leqslant c_{34}(\alpha)\,|x - x'|^\alpha \quad (0 < \alpha < 1).$$

Отсюда, очевидно, следует непрерывность по Гельдеру относительно x и функции $z(x, t)$.

Итак, построенная функция $G(x, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет всем условиям леммы, следовательно интегральная операция (2,8) удовлетворяет требованиям, предъявляемым к операции Γ в модифицированной функциональной схеме. Для применимости функциональной схемы остается убедиться, что операция P обладает свойством 3).

2.3. Функцию $u(x, t) \in X$ назовем верхней (нижней), если $P(u) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$). Согласно свойству 1) операции P для любой пары верхних и нижних функций $v(x, t)$, $u(x, t)$ имеет место соотношение $u \leqslant v$. В частности, если $u^*(x, t)$— решение задачи (1.8), (1.9), то $u \leqslant u^* \leqslant v$.

Построим в X пару верхних и нижних функций—начальные приближения $v_0(x, t)$ и $u_0(x, t)$.

Пусть $\gamma = \sup\limits_{(x, t) \in D} \int_0^t \int_\Omega H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau$. В силу оценок (2.11), $\gamma \leqslant c_{35} \cdot T$.

Из разложения

$$P(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i=1}^{3} f_{u_{x_i}} u_{x_i} + f_u u + f(x, t, 0, 0)$$

вытекает, что, если положительная функция $w(x, t)$ является решением задачи

$$L_1 w \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) w - M \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| - N \geqslant 0, \quad (x, t) \in \overline{D} \setminus S$$

$$w|_S = 0,$$

где $N = \sup\limits_{(x, t) \in D} |f(x, t, 0, 0)|$, то функция $v(x, t) = w(x, t)\, e^{Mt}$ суть верхняя функция, а $u(x, t) \equiv -v(x, t)$ — нижняя функция.

Ищем решение $w(x, t)$ в виде: $w(x, t) = e^K - e^{K\omega(x, t)}$ (постоянную K и функцию $\omega(x, t)$ выберем ниже). Имеем

$$L_1 w = \left(K^2 \operatorname{grad}^2 \omega + K\Delta\omega - K\frac{\partial \omega}{\partial t} - KM \sum_{i=1}^{3} \left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|\right) e^{K\omega} - N \geqslant$$

$$\geqslant \left[K^2 \operatorname{grad}^2 \omega - 3KM\,|\operatorname{grad}\omega| - K\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega\right)\right] e^{K\omega} - N \geqslant$$

$$\geqslant\left[\left(K|\operatorname{grad}\omega|-\frac{3M}{2}\right)^2-\frac{9M^2}{4}-K\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}-\Delta\omega\right)\right]e^{k\omega}-N\geqslant$$

$$\geqslant\left[-\frac{9M^2}{4}-K\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}-\Delta\omega\right)\right]e^{K\omega}-N.$$

Отсюда вытекает, что, если функция $\omega(x, t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}-\Delta\omega=-c_{36},\quad (x,t)\in\overline{D}\setminus S \tag{2.43}$$

$$\omega|_S=1,$$

где положительная постоянная c_{36} выбрана так, чтобы $\omega(x, t)$ удовлетворяла неравенствам $0\leqslant\omega(x, t)\leqslant 1$, то при значениях K, удовлетворяющих условию $K\geqslant\dfrac{9M^2+4N}{4c_{36}}=c_{37}$, имеем $L_1\omega\geqslant 0$. При этом, очевидно, выполняется условие $w|_S=0$. Легко проверить, что в качестве функции $\omega(x, t)$ можно взять функцию

$$\omega(x, t)=1-\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega H(x, t, \xi, \tau)\,d\xi d\tau.$$

Для такой функции $\omega(x, t)$ постоянная c_{36}, входящая в уравнение (2.43), равна $\dfrac{3}{\gamma}$.

Тем самым построена пара верхних и нижних функций — первоначальные двусторонние приближения. Они, очевидно, принадлежат X.

2.4. Исходя из произвольной пары $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$ нижних и верхних функций, последующие чаплыгинские приближения определяются по алгорифму (1.7) формулами

$$u_{n+1}(x, t)-u_n(x, t)=\delta u_n(x, t)=-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega G(x, t, \xi, \tau)\,P(u_n(\xi, \tau))\,d\xi d\tau,$$

$$v_{n+1}(x, t)-v_n(x, t)=\delta v_n(x, t)=-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega G(x, t, \xi, \tau)\,P(v_n(\xi, \tau))\,d\xi d\tau, \tag{2.44}$$

$$n=0, 1, 2, \cdots.$$

Последовательности u_n и v_n связаны соотношениями

$$u_0(x, t)\leqslant u_1(x, t)\leqslant\cdots\leqslant u_n(x, t)\leqslant\cdots\leqslant v_{n+1}(x, t)\leqslant v_n(x, t)\leqslant\cdots$$
$$\cdots\leqslant v_1(x, t)\leqslant v_0(x, t).$$

В силу монотонности, они стремятся соответственно к функциям $u(x, t)$ и $v(x, t)$; $u(x, t)\leqslant v(x, t)$.

Покажем, что предельные функции $u(x, t)$ и $v(x, t)$ являются регулярными решениями задачи (1.8). (1.9) и, следовательно, совпадают.

Из формул (2.42) и (2.44) имеем

$$P(u_{n+1}) = -\int_0^t\int_\Omega \Phi(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau -$$

$$-\sum_{l=1}^{3} f_{u_{x_l}} \int_0^t\int_\Omega G_{x_l}(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau -$$

$$-f_u \int_0^t\int_\Omega G(x, t, \xi, \tau)\, P(u_n(\xi, \tau))\, d\xi d\tau.$$

Используя оценки (2.16), (2.29), (2.30), отсюда получим

$$|P(u_1)| \leqslant c_{38}(\varepsilon) \int_0^t\int_\Omega \frac{e\left(\frac{1}{4}-\varepsilon, x, \xi, t, \tau\right)}{(t-\tau)^2} |P(u_0(\xi, \tau))|\, d\xi d\tau \leqslant c_{39}\int_0^t \frac{k_0 d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= c_{39} k_0 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau = c_{39} k_0 t^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)},$$

где $k_0 = \sup\limits_{(x, t)\in D} |P(u_0(x, t))|$,

$$|P(u_2)| \leqslant c_{39}^2 k_0 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)} \int_0^t \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau = c_{39}^2 k_0 t \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)}.$$

С помощью индукции придем к формуле

$$|P(u_m)| \leqslant \frac{k_0 c_{39}^m t^{\frac{m}{2}} \Gamma^m\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)}. \tag{2.45}$$

Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость в D ряда $\sum\limits_0^\infty P(u_m)$. Но тогда из выражения $u_{m+r}(x, t) = \int_0^t\int_\Omega G(x, t, \xi, \tau) \times \sum\limits_m^{m+r-1} P(u_k(\xi, \tau))\, d\xi d\tau + u_m(x, t)$, в силу оценок (2.29), (2.30), (2.45), следует равномерная сходимость последовательностей $u_m(x, t)$ и $\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x}$. Следовательно, функция $u(x, t)$ непрерывна и обладает непрерывной производной $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, являющейся пределом последовательности $\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x}$. Теперь легко завершить доказательство нашего утверждения. Действительно, из оценок (2.11), (2.45) следует, что

$$u_n(x, t) + \int_0^t \int_\Omega f(u_n) H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau = \int_0^t \int_\Omega (L u_n -$$
$$- f(u_n)) H(x, t, \xi, \tau)\, d\xi d\tau \to 0.$$

Пользуясь равномерной сходимостью последовательностей u_n и $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, с учетом неравенств (2.11), (2.2), получим для функции $u(x, t)$ представление

$$u(x, t) = \int_0^t \int_\Omega H(x, t, \xi, \tau) f(u(\xi, \tau))\, d\xi d\tau. \tag{2.46}$$

Из него следует, что $u(x, t)$ и ее производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывны по Гельдеру в D с показателем $\alpha < 1$ относительно x. В силу неравенств (2.2) непрерывностью с показателем α_0 будет обладать и функция $f(x, t, u, u_x)$. Тогда, очевидно, интегральным уравнением (2.46) определяется регулярное решение $u(x, t)$ задачи (1.8), (1.9). Совершенно аналогично доказывается, что $v(x, t)$ также является регулярным решением задачи. Итак, доказана

Теорема. Пусть $\sigma \in C^{2\lambda}$ $(\lambda < 1)$, *а функция* $f(x, t, u, u_x)$ *непрерывна по совокупности аргументов в области* $(x, t) \in DUS$, $u^2 + \operatorname{grad}^2 u < \infty$ *и удовлетворяет условиям* (2.1) *и* (2.2).

Тогда существует единственное регулярное решение задачи (1.8), (1.9), *являющееся пределом двусторонних, монотонных (чаплыгинских) приближений, сходящихся к ней равномерно вместе с производными по x первого порядка.*

Ереванский политехнический институт
имени Карла Маркса

Поступило 16.XII.65

Գ. Վ. ԳԵՆՋՈՅԱՆ

ՉԱՊԼԻԳԻՆԻ ՄԵԹՈԴԻ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՍԽԵՄԱՅԻ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՅԻ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում առաջարկվում է Չապլիգինի մեթոդի ֆունկցիոնալ սխեմայի մի տարբերակ, որում չապլիգինյան մոտավորությունները ստացվում են անմիջականորեն, հատուկ ձևով կառուցված կորիզի միջոցով։

Այդ տարբերակը կիրառվում է

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u'_x) &= 0 \\ u/s &= 0 \end{aligned}\right| \tag{I}$$

խնդրի լուծման համար։ Այստեղ խնդիրը դիտարկվում է $\Omega\times(0, T)$ գլանում, որտեղ Ω -եռաչափ էվկլիդյան տարածության սահմանափակ տիրույթ է բավական ողորկ եզրով, S-ը նշված գլանի ստորին հիմքն է և կողմնային մակերևույթը։

Ստացված v_n և u_n չապլիգինյան հաջորդականությունները հավասարաչափ իրենց $\dfrac{\partial v_n}{\partial x_i}$ և $\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ ածանցյալների հետ մեկտեղ ձգտում են (I) խնդրի լուծմանը և նրա համապատասխան ածանցյալներին։

G. V. GUENJOYAN

ON THE MODIFICATION OF THE FUNCTIONAL SCHEME OF CHAPLIGIN'S METHOD AND ON ITS APPLICATIONS

S u m m a r y

A variant of functional scheme of Chapligin's method is suggested in which. Chapligins successive approximations are directly obtained with the aid of a specially constructed kernel. The variant is used to solve the problem

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(x, t, u, u_x') = 0 \\ u/s = 0. \end{aligned}\right| \qquad (I)$$

Here the problem is discussed for the cylinder $\Omega\times(0, T]$ where Ω is a finite domain of the three-dimensional Euclidean space region with a rather smooth boundary, while S is the lateral surface of the cylinder, together with its base.

Chapligin's successive approximations u_n and v_n together with their partial derivatives $\dfrac{dv_n}{dx_l}$ and $\dfrac{du_n}{dx_l}$ are proved to converge uniformly to the solution of the problem (1) and its corresponding derivatives.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. А. Чаплыгин.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М. Л. Гостехиздат, 1950.
2. *А. Н. Балуев.* О методе С. А. Чаплыгина, Вестник ЛГУ, 13 (1956).
3. *С. Н. Слугин.* Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина, ДАН СССР, 103, № 4, 1955.
4. *С. Н. Слугин.* Монотонные процессы двусторонних приближений в частично упорядоченной сходимостной группе, ДАН СССР, 147, № 1, 1962.
5. *Г. В. Генджоян.* О двусторонних чаплыгинских приближениях решения двухточечной граничной задачи, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.
6. *Г. В. Генджоян.* О применении метода Чаплыгина к задаче Дирихле для одного класса квазилинейных эллиптических уравнений, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 1, 1965.
7. *П. К. Зерагия.* Граничные задачи для некоторых нелинейных уравнений параболического типа, Труды Тбилисского математического института, 24 (1957).
8. *Г. В. Генджоян.* Оценки функции Грина для параболических уравнений, Известия АН Арм.ССР, серия „Математика", 1, № 3 (1966).
9. *E. E. Levi.* Sulle equazioni lineare totalemente elliptiche alle derivate parziali, Rend. Circ. Matem., Palermo, 24 (1907), (русский перевод УМН, вып. VIII (1940)).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 5, 1966 Математика

Э. М. КЕГЕЯН

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ В КРУГЕ

I

Пусть D — единичный круг в комплексной плоскости Z, S — единичная окружность, а $H_2(D)$ — класс функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модулей по площади D.

Известно, что семейство многочленов полно в пространстве $H_2(D)$, т. е. для каждой функции $f(z)$ из класса $H_2(D)$ существует последовательность полиномов $P_n(z)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_D |f(z)-P_n(z)|^2\,d\sigma=0.$$

Возникает вопрос, насколько эта аппроксимирующая $f(z)$ последовательность полиномов свободна на границе круга. Эта задача поставлена А. Л. Шагиняном и исследована в работах [1]—[3].

В статье [3] эта задача изучена в следующем виде.

Пусть $f(z)\in H_2(D)$, $E\subset S$ — всюду разрывное замкнутое множество, а $\varphi(\xi)$ — заданная на E непрерывная функция. Спрашивается: при каких ограничениях на E существует последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\iint\limits_D |f(z)-P_n(z)|^2\,d\sigma+\sup_{\xi\in E}|\varphi(\xi)-P_n(\xi)|\right\}=0. \qquad (1)$$

Доказано, что, если линейная мера множества E равна нулю, то аппроксимация вида (1) всегда возможна. Если же $\operatorname{mes} E>0$ и $C_s E=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$, то при условии $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)\ln(b_k-a_k)>-\infty$ аппроксимация вида (1) невозможна.

Остался открытым вопрос: существуют ли множества положительной линейной меры, для которых все-таки аппроксимация вида (1) возможна?

В данной работе дается положительный ответ на поставленный вопрос.

Далее на основании этого результата доказывается (теорема 2), что для каждой пары функций $f(z)\in H_2(D)$ и измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ (которая может принимать как конечные, так и бесконечные значения) существует последовательность полиномов, аппроксимирующая $f(z)$ в среднем в D, и одновременно стремящаяся к $\varphi(\xi)$ почти всюду на S.

Теорема 3 утверждает, что нельзя „почти всюду на S“ заменить на „всюду на S“.

II

Теорема 1. *Существует на S замкнутое множество A положительной линейной меры, для которого аппроксимация вида* (1) *возможна для каждой пары функции $f(z) \in H_2(D)$ и $\varphi(\xi) \in C(A)$, где $C(A)$— класс непрерывных на A функций.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Для каждой пары чисел $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует аналитическая в D и непрерывная вплоть до границы функция $\chi_{\varepsilon,\delta}(z)$ такая, что*

1. $$\iint\limits_D |1 - \chi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2 \, d\sigma < \varepsilon,$$

2. $$|\chi_{\varepsilon,\delta}(\xi)| < \varepsilon$$ *на некотором замкнутом множестве $E_{\varepsilon,\delta} \subset S$ с мерой, большей $2\pi - \delta$.*

Доказательство. Подберем целые положительные числа n, k и m следующим образом: $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$, $k > \frac{\pi}{\delta}$,

$$m > \frac{ae^{bnk}}{\varepsilon^6},$$

где a и b—абсолютные константы, которые мы подберем позже, и разделим единичную окружность S на m равных частей точками $\exp\{i\xi_t\}$, где $\xi_t = \frac{2\pi t}{m}$ $(t = 0, 1, \cdots, m-1)$.

Далее каждый из сегментов $[\xi_t, \xi_{t+1}]$ вновь разделим на $2k+1$ равных частей точками $\exp\{i\xi_{t,q}\}$, где $\xi_{t,q} = \xi_t + \frac{2\pi q}{(2k+1)m}$ $(q = 1, 2, \cdots, 2k)$.

На окружности S рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \varphi(e^{i\theta}) = \varphi(\theta)$:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} 2kn, & \text{при } \xi_{t,k} < \theta < \xi_{t,k+1} \\ -n & \text{— в остальных точках окружности.} \end{cases}$$

Пусть

$$u(z) = u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} \, d\theta,$$

а $v(z)$ — сопряженная с $u(z)$ гармоническая функция, удовлетворяющая условию $v(0) = 0$.

Покажем, что при подходящем выборе чисел a и b аналитическая в D функция

$$\Phi_{\varepsilon,\delta}(z) = \exp\{\psi(z)\}$$

где

$$\psi(z) = u(z) + iv(z)$$

удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы.

Действительно,

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\varphi(\theta)\,P(r,\theta,\varphi)\,d\theta, \tag{2}$$

где $P(r,\theta,\varphi)$ — ядро Пуассона, а $\xi_m=\xi_0$.

По формуле Лагранжа

$$P(r,\theta,\varphi)=P(r,\xi_i,\varphi)+P'_\theta(r,\overline{\theta},\varphi)(\theta-\xi_i),$$

$\xi_i<\overline{\theta}<\theta$. Легко видеть, что для всех θ и φ

$$|P'_\theta(r,\theta,\varphi)|<\frac{4}{(1-r)^3}. \tag{3}$$

Из определения функции $\varphi(\theta)$, (2) и (3) получим

$$|u(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}|\varphi(\theta)\;P'_\theta(r,\overline{\theta},\varphi)\;(\theta-\xi_i)|\,d\theta<\frac{C_1}{(1-|z|)^3}\frac{kn}{m}, \tag{4}$$

где C_1 — абсолютная константа ($C_1=8\pi$).

Далее по формуле Лузина (см. [4], стр. 214),

$$v(re^{i\theta})=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\frac{u(re^{i(\theta+\alpha)})-u(re^{i(\theta-\alpha)})}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi u'_\theta(re^{i\widetilde{\theta}})\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$(\theta-\alpha<\widetilde{\theta}<\theta+\alpha). \tag{5}$$

Из (2) видно, что

$$u'_\theta(re^{i\widetilde{\theta}})=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{m-1}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\varphi(\theta)\;\frac{2r(1-r^2)\sin(\theta-\widetilde{\theta})}{[1+r^2-2r\cos(\theta-\widetilde{\theta})]^2}\,d\theta. \tag{6}$$

Обозначив через J_i слагаемые этой суммы, имеем

$$J_i=\frac{2r}{1-r^2}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\varphi(\theta)\sin(\theta-\widetilde{\theta})\,P^2(r,\theta,\widetilde{\theta})\,d\theta=\frac{2r}{1-r^2}\Bigg[\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\varphi(\theta)\times$$

$$\times\sin(\xi_i-\widetilde{\theta})\,P^2(r,\xi_i,\widetilde{\theta})\,d\theta+\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\varphi(\theta)\frac{d}{d\theta}\{\sin(\theta-\widetilde{\theta})\,P^2(r,\theta,\widetilde{\theta})\}\Bigg|_{\theta=\tilde{\tilde{\theta}}}(\theta-\xi_i)\,d\theta$$

$$(\xi_i<\tilde{\tilde{\theta}}<\theta).$$

Так что

$$|J_i|\leqslant\frac{1}{1-r}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}|\varphi(\theta)|\,[P^2(r,\tilde{\tilde{\theta}},\widetilde{\theta})+2\,P(r,\tilde{\tilde{\theta}},\widetilde{\theta})\,|P'_\theta(r,\tilde{\tilde{\theta}},\widetilde{\theta})|]\,(\theta-\xi_i)\,d\theta.$$

Учитывая определение функции $\varphi(\theta)$, неравенство (3) и то, что $0<P(r,\theta,\varphi)\leqslant\dfrac{2}{1-r}$, получим

$$|J_1| < \frac{2\pi C_2}{(1-r)^5} \cdot \frac{kn}{m^2}.$$

Здесь C_2 — абсолютная константа ($C_2 = 2^6\pi$).

Отсюда и из (6) имеем

$$|u_0'(re^{i\widetilde{\theta}})| < \frac{C_2}{(1-r)^5} \cdot \frac{kn}{m}.$$

Из последнего неравенства и из (5) вытекает, что

$$|v(z)| < \frac{2C_2}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m},$$

$$|(v(z)| < \frac{2C_2}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m},$$

а это совместно с (4) приведет к оценке

$$|\psi(z)| < \frac{C_3}{(1-|z|)^5} \cdot \frac{kn}{m} \tag{7}$$

(здесь $C_3 = C_1 + 2C_2$ — абсолютная константа).

При

$$R = 1 - \frac{\varepsilon}{16\pi} e^{-4kn} \tag{8}$$

имеем

$$\iint\limits_D |1 - \Phi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2 d\sigma = \iint\limits_{|z|<R} + \iint\limits_{K_R}, \tag{9}$$

где K_R — кольцо $R < |z| < 1$.

Пользуясь определением функции $\varphi(\theta)$ и (8), получим

$$\iint\limits_{K_R} |1 - \Phi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2 d\sigma < [2e^{2kn}]^2 \text{ пл. } K_R < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Легко оценивается и первое слагаемое правой части равенства (9)

$$\iint\limits_{|z|<R} |1 - \Phi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2 d\sigma \leqslant \iint\limits_{|z|<R} |\psi(z)|^2 \left[1 + \frac{|\psi(z)|}{2!} + \cdots + \frac{|\psi(z)|^{n-1}}{n!} + \right.$$

$$\left. + \cdots \right]^2 d\sigma < \pi \frac{C_3^2}{(1-R)^{10}} \cdot \frac{k^2n^2}{m^2} \exp\left\{\frac{2C_3}{(1-R)^5} \cdot \frac{kn}{m}\right\}.$$

Если в условии $m > \dfrac{ae^{bnk}}{\varepsilon^6}$, наложенном на m в начале доказательства леммы, взять $a = c_3(16\pi)^6$ и $b = 21$, то нетрудно видеть, что

$$\iint\limits_{|z|<R} |1 - \Phi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2 d\sigma < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{11}$$

Так что из (9), (10) и (11) следует

$$\iint\limits_D |1-\Phi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2\, d\sigma < \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

Далее очевидно, что

$$|\Phi_{\varepsilon,\delta}(\xi)| = e^{-n} < \varepsilon \tag{13}$$

на некотором множестве $E_{\varepsilon,\delta} \subset S$ с линейной мерой $\dfrac{2\pi}{m\,(2k+1)}\cdot m\cdot 2k.$

Так как $k > \dfrac{\pi}{\delta}$, то

$$\operatorname{mes} E_{\varepsilon,\delta} > 2\pi - \delta. \tag{14}$$

Методами, используемыми при доказательстве леммы 1 статьи [3], можно построить непрерывную на $\overline{D}$ и аналитическую в D функцию $\Psi(z)$ со следующими свойствами:

1. $$\Psi(z) \neq 0 \text{ в } D,$$ $$|\Psi(z)| < 1 \text{ на } \overline{D}; \tag{15}$$

2. $$\Psi(\xi_{t,k}) = \Psi(\xi_{t,k+1}) = 0$$ при $t = 0, 1, \cdots, m-1$;

3. $$\iint\limits_D \frac{d\sigma}{|\Psi(z)|^2} < \frac{\varepsilon}{4\cdot 10^2}. \tag{16}$$

Тогда аналитическая в D функция

$$\chi_{\varepsilon,\delta}(z) = \Psi(z)\,\Phi_{\varepsilon,\delta}(z)$$

будет обладать свойствами

1. $\chi_{\varepsilon,\delta}(z)$ непрерывна на $\overline{D}$;

2. $|\chi_{\varepsilon,\delta}(z)| < \varepsilon$ на некотором замкнутом множестве $E_{\varepsilon,\delta}$ с линейной мерой, большей $2\pi - \delta$;

3. $$\iint\limits_D |1-\chi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2\, d\sigma < \varepsilon.$$

Действительно, так как ограниченная в D функция $\Phi_{\varepsilon,\delta}(z)$ непрерывна на $\overline{D}$, за исключением точек $\{\xi_{t,k}\}$ и $\{\xi_{t,k+1}\}$ $(t = 0, 1, \cdots, m-1)$, то функция $\chi_{\varepsilon,\delta}(z)$ непрерывна на $\overline{D}$. Условие 2 следует из (13), (14) и (15), а последнее условие можно получить из (12), (15) и (16) следующим образом:

$$\iint\limits_D |1-\chi_{\varepsilon,\delta}|^2\, d\sigma = \iint\limits_D |\Psi|^2 \left|\frac{1}{\Psi} - \Phi_{\varepsilon,\delta}\right|^2 d\sigma < \iint\limits_D \left|\frac{1}{\Psi} - \Phi_{\varepsilon,\delta}\right|^2 d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sqrt{\iint\limits_D |1-\Phi_{\varepsilon,\delta}|^2\, d\sigma} + \sqrt{\iint\limits_D \left|\frac{1}{\Psi} - 1\right|^2 d\sigma}\,\right]^2.$$

Но

$$\iint\limits_D \left|\frac{1}{\Psi}-1\right|^2 d\sigma < 4\iint\limits_D \frac{d\sigma}{|\Psi|^2} < \frac{\varepsilon}{10^2}$$

следовательно

$$\iint\limits_D |1-\chi_{\varepsilon,\delta}(z)|^2\, d\sigma < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\varepsilon}+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{10}\right)^2 < \varepsilon.$$

Этим и завершается доказательство леммы. Теперь можно перейти к доказательству теоремы 1. С этой целью берем последовательности чисел $\varepsilon_k > 0$ и $\delta_k > 0$ такие, что

1. $\varepsilon_k \to 0,$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < \pi.$ (17)

Для каждой пары ε_k и δ_k построим множество $E_k = E_{\varepsilon_k,\delta_k}$ и функцию $\chi_k(z) = \chi_{\varepsilon_k,\delta_k}(z)$ с указанными в лемме свойствами.

Так как функция $\chi_k(z)$ аналитична в D и непрерывна на $\overline{D}$, то существует полином $P_k(z)$ такой, что

$$|\chi_k(z) - P_k(z)| < \varepsilon_k \text{ при } z \in \overline{D}.$$

Учитывая неравенства 1 и 2 леммы, которым удовлетворяет $\chi_k(z)$, получим

$$\iint\limits_D |1-P_k(z)|^2\, d\sigma < 4\pi\varepsilon_k,$$

$$\sup_{\xi\in E_k} |P_k(\xi)| < 2\varepsilon_k. \tag{18}$$

Рассмотрим замкнутое множество $A = \prod\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Так как $\operatorname{mes} E_k > 2\pi - \delta_k$, то из (17) следует, что $\operatorname{mes} A > \pi$. Кроме того, из (18) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\iint\limits_D |1-P_k(z)|^2\, d\sigma + \sup_{\xi\in E} |P_k(\xi)|\right\} = 0. \tag{19}$$

Пусть теперь $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ — пара функций, упомянутых в теореме 1, и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число.

По теореме Рунге существует полином $Q_1(z)$ такой, что

$$\iint\limits_D |f(z) - Q_1(z)|^2\, d\sigma < \frac{\varepsilon}{5}. \tag{20}$$

Далее, согласно теореме С. Н. Мергеляна (см. [5]), существует многочлен $Q_2(z)$ такой, что

$$|\varphi(\xi) - Q_2(\xi)| < \frac{\varepsilon}{10} \text{ при } \xi \in A. \tag{21}$$

Пусть

$$T(z) = Q_1(z) - Q_2(z) \tag{22}$$

и

$$M = \max\{1; \max_{z\in\overline{D}} |T(z)|\}. \tag{23}$$

Далее из (19) следует существование полинома $Q_3(z)$ такого, что

$$\iint_D |1 - Q_3(z)|^2 d\sigma + \sup_{\xi\in A} |Q_3(\xi)| < \frac{\varepsilon}{20M^2}. \tag{24}$$

Беря в качестве $Q_4(z)$ многочлен $[Q_3(z)\cdot T(z)]$ и учитывая (23) и (24), получим

$$\iint_D |T(z) - Q_4(z)|^2 d\sigma + \sup_{\xi\in E} |Q_4(\xi)| < \frac{\varepsilon}{20}. \tag{25}$$

Но тогда из (21), (22) и (25) имеем

$$\iint_D |Q_1 - [Q_2 + Q_4]|^2 d\sigma + \sup_{\xi\in A} |\varphi(\xi) - [Q_2(\xi) + Q_4(\xi)]| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{20} + \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{20} = \frac{\varepsilon}{5}. \tag{26}$$

Наконец, обозначая $P(z) = Q_2(z) + Q_4(z)$ и учитывая (20) и (26), заключаем, что

$$\iint_D |f - P|^2 d\sigma + \sup_{\xi\in A} |\varphi(\xi) - P(\xi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{5} +$$

$$+ \left\{\left[\iint_D |f - Q_1|^2 d\sigma\right]^{1/2} + \left[\iint_D |Q_1 - P|^2 d\sigma\right]^{1/2}\right\}^2 < \frac{\varepsilon}{5} +$$

$$+ \left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}\right)^2 = \varepsilon$$

и, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема 1 доказана.

Замечание. В ходе доказательства теоремы 1 множество A пришлось взять в следующем виде: $A = \prod_{k=1}^{\infty} E_k$, однако нетрудно видеть, что в качестве A можно было взять любое из множеств

$$A_m = \prod_{k=m}^{\infty} E_k. \tag{27}$$

Этим мы воспользуемся при доказательстве следующей теоремы.

Пусть $\mathfrak{M}(S)$ — класс измеримых на S функций (функции этого класса могут принимать как конечные, так и бесконечные значения).

Теорема 2. *Для каждой пары функций $f \in H_2(D)$ и $\varphi \in \mathfrak{M}(S)$ можно построить последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ такую, что*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_D |f-P_n|^2\, d\sigma = 0,$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi)$ *почти всюду на* S.

Доказательство. Пусть $\varphi(\xi) = u(\xi) + iv(\xi)$. Обозначим соответственно через $u_m(\xi)$ и $v_m(\xi)$ срезки функций $u(\xi)$ и $v(\xi)$ числом m, т. е.

$$u_m(\xi) = \begin{cases} u(\xi), & \text{если } |u(\xi)| \leqslant m, \\ m\cdot sign\, u(\xi), & \text{если } |u(\xi)| > m, \end{cases}$$

$$v_m(\xi) = \begin{cases} v(\xi), & \text{если } |v(\xi)| \leqslant m, \\ m\cdot sign\, v(\xi), & \text{если } |v(\xi)| > m. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_k(\xi) = u_k(\xi) + iv_k(\xi)$ $(k=1, 2, \cdots)$.

Пусть, далее, $\{\eta_k\}$ — последовательность положительных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty. \tag{28}$$

Ограниченная функция $\varphi_k(\xi)$ измерима на S, следовательно, по теореме Егорова, существует замкнутое множество $e_k \subset S$ такое, что

$\varphi_k(\xi)$ непрерывна на e_k,

$$\text{mes } e_k > 2\pi - \eta_k. \tag{29}$$

Обозначим через

$$R_m = \prod_{k=m}^{\infty} e_k. \tag{30}$$

Из (30) и (29) следует, что

$$R_1 \subset R_2 \subset \cdots \subset R_m \subset \cdots$$

и

$$\text{mes } R_m > 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} \eta_k. \tag{31}$$

Рассмотрим затем множества A_m $(m=1, 2, \cdots)$, определенные соотношением (27). Очевидно

$$_1A \subset A_2 \subset \cdots \subset A_m \subset \cdots$$

и

$$\text{mes } A_m > 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} \delta_k. \tag{32}$$

Если теперь обозначить

$$T_m = A_m R_m, \quad T = \sum_{m=1}^{\infty} T_m,$$

то из (32), (31), (17) и (28) получим

$$\text{mes } T = \lim_{m\to\infty} \text{mes } T_m \geqslant \lim_{m\to\infty} \left\{ 2\pi - \sum_{k=m}^{\infty} (\delta_k + \eta_k) \right\},$$

т. е.

$$\operatorname{mes} T = 2\pi. \tag{33}$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю.

Так как функция $\varphi_m(\xi)$ непрерывна на $R_m \supset T_m$, то она непрерывна и на T_m. Далее $T_m \subset A_m$, следовательно, по теореме 1, существует полином $P_m(z)$ такой, что

$$\iint_D |f - P_m|^2 d\sigma + \sup_{\xi \in T_m} |\varphi_m(\xi) - P_m(\xi)| < \varepsilon_m.$$

Отсюда вытекает, что

$$1.\ \lim_{m \to \infty} \iint_D |f - P_m|^2 d\sigma = 0,$$

$$2.\ \lim_{m \to \infty} P_m(\xi) = \varphi(\xi) \quad \text{при } \xi \in T.$$

Этим и завершается доказательство теоремы 2, так как согласно (33) $\operatorname{mes} T = 2\pi$.

Теорема 3. *Если для пары функций $f(z)$ и $\varphi(\xi)$ соответственно из классов $H_2(D)$ и $\mathfrak{M}(S)$ (предполагается, что $\varphi(\xi)$ всюду конечна на S) существует последовательность полиномов $P_n(\xi)$ такая, что*

$$1.\ \lim_{n \to \infty} \iint_D |f(z) - P_n(z)|^2 d\sigma = 0,$$

$$2.\ \lim_{n \to \infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi) \ \text{ всюду на } S,$$

то существует всюду плотное на S открытое множество, на котором почти все радиальные граничные значения $f(z)$ совпадают с $\varphi(\xi)$.

Доказательство. Предварительно заметим, что если последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ удовлетворяет условиям 1 и 2 теоремы и кроме того равномерно ограничена на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset S$, то на этом же интервале почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ совпадают со значениями функции $\varphi(\xi)$.

Действительно, из условия 1 теоремы следует, что интегралы квадратов модулей полиномов $\{P_n(z)\}$ по области D равномерно ограничены

$$\iint_D |P_n(z)|^2 d\sigma \leqslant C.$$

Отсюда следует, что для всех кругов D_1 с центром в z_1 и с радиусом $1 - |z_1|$

$$\iint_{D_1} |P_n(z)|^2 d\sigma \leqslant C.$$

Из последнего неравенства легко получить оценку

$$|P_n(z_1)| \leqslant \frac{C_1}{1-|z_1|}, \tag{34}$$

где C_1 — абсолютная константа.

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \exp\left\{\frac{1}{ze^{-i\alpha}-1} + \frac{1}{ze^{-i\beta}-1}\right\}. \tag{35}$$

Очевидно эта функция аналитична в D, непрерывна вплоть до границы и по модулю не превосходит единицы.

Пусть

$$F_n(z) = \Phi(z)\, P_n(z), \tag{36}$$

а $\Delta_{\alpha\beta}$ — сектор круга D, опирающийся на интервал (α, β). Из (34), (35) и (36) заключаем, что

$$|F_n(re^{i\alpha})| < \frac{C_1}{1-r} \exp\left\{-\frac{1}{1-r}\right\}$$

и, так как правая часть этого неравенства достигает своего наибольшего значения на промежутке $0 \leqslant r \leqslant 1$ в точке $r=0$, то

$$|F_n(re^{i\alpha})| \leqslant C_2 \text{ при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \tag{37}$$

где C_2 — абсолютная константа $\left(C_2 = \frac{C_1}{e}\right)$.

Аналогичным образом получим, что

$$|F_n(re^{i\beta})| \leqslant C_2 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant 1. \tag{38}$$

Из равномерной ограниченности полиномов $\{P_n(\xi)\}$ на (α, β), а также из (37) и (38) следует, что

$$|F_n(z)| \leqslant M \tag{39}$$

на $\overline{\Delta}_{\alpha\beta}$, где M — константа.

Далее, так как в точках интервала (α, β) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\xi) = \varphi(\xi)$, то по теореме Егорова для каждого n существует замкнутое множество $E_n \subset (\alpha, \beta)$ такое, что

$$\operatorname{mes} E_n > \frac{n(\beta-\alpha)}{n+1}; \tag{40}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k(\xi) = \varphi(\xi)$ равномерно на E_n.

Поскольку почти каждая точка множества E_n является его точкой плотности, то существует замкнутое множество A_n, состоящее только из точек плотности множества E_n и обладающее свойствами (40), т. е.

$$\operatorname{mes} A_n > \frac{n(\beta-\alpha)}{n+1}; \tag{41}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} P_k(\xi) = \varphi(\xi)$ равномерно на A_n.

Пусть

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n. \text{ Очевидно}$$

$$\operatorname{mes} A = \beta - \alpha. \tag{42}$$

Покажем, что радиальные граничные значения функции $f(z)$ совпадают с $\varphi(\xi)$ на A.

Действительно, пусть $\xi_0 \in A$ — произвольная точка. Для некоторого номера $n = n_0$ множество A_{n_0} содержит точку ξ_0 и, так как функция $\varphi(\xi)$ непрерывна на A_{n_0}, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех точек $\xi \in A_{n_0}$, расстояния которых до ξ_0 меньше δ, справедливо неравенство

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

На множестве A_{n_0} последовательность $\{P_n(\xi)\}$ стремится к $\varphi(\xi)$ равномерно, следовательно, начиная с некоторого номера $k \geqslant k_0$, будем иметь

$$|P_k(\xi) - \varphi(\xi_0)| < 2\varepsilon \tag{43}$$

для всех $\xi \in E_{n_0}$, расстояния которых до ξ_0 меньше δ. Но функция $\Phi(z)$ непрерывна на замкнутом круге $\overline{D}$, следовательно она там равномерно непрерывна. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta_1 > 0$ такое, что для произвольных двух точек z_1 и z_2 из круга $\overline{D}$, находящихся друг от друга на расстоянии меньшем, чем δ_1, имеем

$$|\Phi(z_1) - \Phi(z_2)| < \varepsilon. \tag{44}$$

Учитывая неравенства (43), (44) и то, что функция $\Phi(z)$ по модулю ограничена единицей в $\overline{D}$, получим

$$|F_k(\xi) - \varphi(\xi_0)\,\Phi(\xi_0)| < (2 + |\varphi(\xi_0)|)\,\varepsilon \tag{45}$$

при $k \geqslant k_0$ и всех $\xi \in A_{n_0}$, расстояние которых до точки ξ_0 меньше $\overline{\delta} = \min\{\delta, \delta_1\}$.

С другой стороны, так как ξ_0 является точкой плотности множества A_{n_0}, то, очевидно, гармоническая мера относительно сектора $\Delta_{\alpha\beta}$ той порции A_{n_0}, которая попадает в интервал $(\xi_0 - \overline{\delta}, \xi_0 + \overline{\delta})$ (обозначим эту порцию через $A_{n_0}(\overline{\delta})$), стремится к единице при z стремящемся к ξ_0 вдоль радиуса $\arg z = \arg \xi_0 = \theta_0$:

$$\lim_{r \to 1} \omega(re^{i\theta_0}, A_{n_0}(\overline{\delta}); \Delta_{\alpha\beta}) = 1.$$

Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\omega(re^{i\theta_0}, A_{n_0}(\overline{\delta}); \Delta_{\alpha\beta}) > 1 - \varepsilon, \tag{46}$$

как только $0 < 1 - r < \gamma$.

Применяя теорему о двух константах (см. [6]) к функции $[F_k(z) - \varphi(\xi_0)\,\Phi(\xi_0)]$ и к области $\Delta_{\alpha\beta}$, а также, учитывая неравенства (39), (45) и (46), получим

$$|F_k(re^{i\theta_0}) - \Phi(e^{i\theta_0})\,\varphi(e^{i\theta_0})| < \varepsilon^{1-\varepsilon}(2 + M + |\varphi(\xi_0)|), \tag{47}$$

как только $k \geqslant k_0$ и $0 < 1 - r < \gamma$.

Переходя в (47) к пределу и используя условие 1 теоремы будем иметь

$$|f(re^{i\theta_0})\,\Phi(re^{i\theta_0})-\varphi(\xi_0)\,\Phi(\xi_0)|\leqslant\varepsilon^{1-\varepsilon}(2+M+|\varphi(\xi_0)|)^{\varepsilon} \tag{48}$$

при $0<1-r<\gamma$.

Но $\alpha<\theta_0<\beta$, так что

$$C_{\theta_0}=\min_{0\leqslant r\leqslant 1}|\Phi(re^{i\theta_0})|>0.$$

Следовательно, при $0<1-r<\gamma$

$$|f(re^{i\theta_0})-\varphi(e^{i\theta_0})|\leqslant\frac{1}{C_{\theta_0}}\left|f(re^{i\theta_0})\,\Phi(re^{i\theta_0})-\Phi(re^{i\theta_0})\cdot\varphi(e^{i\theta_0})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{C_{\theta_0}}|f(re^{i\theta_0})\,\Phi(re^{i\theta_0})-\varphi(\xi_0)\,\Phi(\xi_0)|+$$

$$+\frac{1}{C_{\theta_0}}|\Phi(re^{i\theta_0})-\Phi(\xi_0)|\,|\varphi(\xi_0)|.$$

Если взять $0<1-r<\min\{\gamma,\delta_1\}$, то из (48) и (44) получим

$$|f(re^{i\theta_0})-\varphi(e^{i\theta_0})|<\frac{1}{C_{0}}\,\varepsilon^{1-\varepsilon}(2+M+|\varphi(\xi_0)|)^{\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{C_{\theta_0}}|\varphi(\xi_0)|,$$

то есть

$$\lim_{r\to 1}f(re^{i\theta_0})=\varphi(e^{i\theta_0}).$$

Таким образом имеем, что радиальные граничные значения функции $f(z)$ почти всюду на интервале (α,β) окружности S совпадают со значениями функции $\varphi(\xi)$, если только последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, удовлетворяющая условиям теоремы, равномерно ограничена на (α,β).

Пусть теперь, вопреки утверждению теоремы, внутри некоторого интервала (a,b) не существует интервала, на котором почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ существуют и равны $\varphi(\xi)$. Согласно вышесказанному последовательность $P_n(z)$ не ограничена равномерно на (a,b). Следовательно, существует отрезок $[a_1,b_1]\subset(a,b)$ и такой номер n_1, что

$$|P_{n_1}(\xi)|>1 \text{ при } \xi\in[a_1 b_1].$$

Аналогично найдем номер $n_2>n_1$ и промежуток $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$ такой, что

$$|P_{n_2}(\xi)|>2 \text{ при } \xi\in[a_2,b_2].$$

И вообще, для каждого k, как только найден промежуток $[a_k,b_k]$ и номер n_k, можно построить промежуток $[a_{k+1},b_{k+1}]\subset[a_k,b_k]$, на котором один из полиномов последовательности $\{P_n(z)\}$ (допустим $P_{n_{k+1}}(z)$ $(n_{k+1}>n_k)$) по модулю превосходит $(k+1)$

$$|P_{n_{k+1}}(\xi)|>k+1 \text{ при } \xi\in[a_{k+1},b_{k+1}].$$

Если $\bar{\xi}\in\prod\limits_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$, то последовательность $\{P_k(\bar{\xi})\}$ не может стремиться к $\varphi(\xi)$, вопреки условиям теоремы. Значит внутри всякого интервала существует другой интервал, на котором почти все радиальные граничные значения функции $f(z)$ существуют и совпадают со значениями функции $\varphi(\xi)$.

Ереванский государственный
университет

Поступило 1.III.66

Է. Մ. ՔԵՀԵՅԱՆ

ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՅԱ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ (ՇՐՋԱՆՈՒՄ)

Ամփոփում

Դիցուկ $f\in H_2(D)$ (այսինքն f-ը D միավոր շրջանում մոդուլի քառակուսով ինտեգրելի ցանկացած անալիտիկ ֆունկցիա է), E-ն՝ միավոր շրջանագծի վրա մի փակ փոշիացած բազմություն է, իսկ $\varphi(\xi)$-ն՝ E-ի վրա տրված կոմպլեքս արժեքներ ընդունող մի անընդհատ ֆունկցիա է։

Ներկա աշխատանքում փնտրվում է բազմանդամների հաջորդականություն, որը միջին իմաստով մոտարկում է $f(z)$-ը D-ում և միաժամանակ հավասարաչափ $\varphi(\xi)$-ն E-ի վրա։ Կառուցվում է դրական գծային չափի մի E բազմություն, որի համար այդպիսի մոտարկում հնարավոր է ցանկացած f և φ ֆունկցիաների զույգի համար։ Բացի այդ ցույց է տրվում, որ միավոր շրջանագծի վրա տրված ամեն մի չափելի $\psi(\xi)$ ֆունկցիայի համար (որը կարող է հավասարվել ∞-ի դրական չափի բազմության վրա) և ամեն մի $f(z)$-ի համար՝ $H_2(D)$-ից կարելի է գտնել բազմանդամների մի հաջորդականություն, որը միավոր շրջանում միջին իմաստով $f(z)$-ը մոտարկելով հանդերձ զուգամիտում է $\psi(\xi)$-ին ճամարյա ամենուրեք միավոր շրջանագծի վրա։ Ընդորում, ցույց է տրվում, որ «համարյա ամենուրեքը» չի կարելի փոխարինել «ամենուրեք»-ով։

E. M. KEHEYAN

ON SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS IN THE UNIT CIRCLE

Summary

Let $H_2(D)$ denote the class of analytic complex-valued functions $f(z)$ in the unit circle D for which $\iint\limits_D |f(z)|^2\,dxdy < \infty$ $(z = x + iy)$. Let E be a closed set dense on $|z|=1$ and let $\varphi(\xi)$ be a complex-valued continuous function given on E.

The object of the paper is to find a sequence of polynomials for every similar pair of functions f and φ that would average $f(z)$ in D and simulataneously converge to $\varphi(\xi)$ uniformly on E. A closed set of positive measure on $|z|=1$ is constructed where such an approximation is possible. We also prove that for every measurable function $\psi(\xi)$ given on $|\xi|=1$ (which may be equal to ∞ on a set of positive linear measure) and for each function $f\in H_2(D)$ there exists a sequence of polynomials which approximates $f(z)$ in the mean over D and simulta-

neously converges to $\psi(\xi)$ almost everywhere on $|\xi|=1$. It is shown, however, that „almost everywhere on $|\xi|=1$“ should not be replaced by „everywhere on $|\xi|=1$“.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Л. Шагинян.* К вопросу о весовом приближении средними квадратичными в области комплексного аргумента, ДАН Арм.ССР, XVI, № 1 (1953).
2. *А. А. Талалян* и *Э. М. Кегеян.* О средней полиномиальной аппроксимации в единичном круге, ДАН Арм.ССР, XXXI, № 1 (1960).
3. *Э. М. Кегеян.* О смешанной полиномиальной аппроксимации, ДАН Арм.ССР, XXXI, № 3 (1960).
4. *Н. Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд, Изд. 2, М. (1951).
5. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (1952).
6. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, М.-Л. (1941).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, № 5, 1966 Математика

Л. А. ПЕТРОСЯН

ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ „С ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ" СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

Рассматриваемые игры являются моделями преследования в некотором замкнутом, выпуклом множестве S на плоскости с несколькими участниками: нарядом преследователей $P=\{P_1,\cdots, P_m\}$ и преследуемыми $E_1,\cdots, E_n$, которые перемещаются в множестве S с постоянными скоростями, имея возможность в каждый момент времени изменять направление своего движения. Преследуемый E_j считается пойманным, как только найдется такое $i\in\{1,\cdots, m\}$, что местоположения P_i и E_j в некоторый момент совпадают. Каждый из преследуемых заинтересован в достижении границы множества S до его поимки одним из преследователей.

Хотя все дальнейшие результаты остаются справедливыми и в более общем случае произвольных траекторий, рассмотренном в [3], мы, во избежание громоздких выкладок, будем предполагать, что траектории игроков кусочно-непрерывно дифференцируемы и игроки в игре обладают полной информацией. Это означает, что в каждый момент времени наряд $P=\{P_1,\cdots, P_m\}$ имеет информацию о своем местоположении, местоположении игроков E_j, $j=1,\cdots, n$ и о направлении скоростей игроков E_j $(j=1,\cdots, n)$. Каждый из преследуемых $E_j (j=1,\cdots, n)$ имеет информацию о своем местоположении, местоположении преследуемых E_j $(j=1, 2,\cdots, n)$ и местоположении наряда преследователей P. Преследование происходит в евклидовой плоскости и местоположение игроков в каждый момент времени определяется точкой $(x^1,\cdots, x^m, y^1,\cdots$ $\cdots, y^n)$, где $x^k=(x_1^k, x_2^k)$—местоположение преследующего P_k, входящего в наряд P, а $y^j=(y_1^j, y_2^j)$ — местоположение преследуемого E_j. В каждый момент времени игроки могут выбирать направление своего движения или направление вектора скорости (величина скорости постоянна и равна v_i для $P_i\in P$ и u_j для E_j). Направление скорости каждого из преследующих, входящих в наряд P, однозначно определяется вектором $\varphi^i=(\varphi_1^i, \varphi_2^i)$, где $(\varphi_1^i)^2+(\varphi_2^i)^2=v_i^2$. Аналогично, направление скорости E_j однозначно определяется вектором $\psi^j=(\psi_1^j, \psi_2^j)$, где $(\psi_1^j)^2+(\psi_2^j)^2=u_j^2$. Под стратегией игроков, как обычно в теории позиционных игр (см. [7]), понимается некоторое правило, по которому каждой информации игрока ставится в соответствие то или иное действие (поведение) из действий (поведений), доступных при данной информации. Это означает, что стратегиями наряда $P=\{P_1,\cdots, P_m\}$ должны быть некоторые $2m$-мерные вектор-функции $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \cdots, \varphi_1^m, \varphi_2^m$, зависящие от переменных $x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n, \psi^1, \cdots, \psi^n$, где $(\varphi_1^i)^2 + (\varphi_2^i)^2 = u_j^2$, $j=1, \cdots, n$ и такие, что $(\varphi_1^i)^2 + (\varphi_2^i)^2 = v_i^2$ $(i=1, \cdots, m)$ тождественно по всем переменным. Аналогично, стратегиями E_j, $j=1, \cdots, n$ должны быть некоторые вектор-функции $\psi^j = (\psi_1^j, \psi_2^j)$, зависящие от переменных $x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n$, такие, что $(\psi_1^j)^2 + (\psi_2^j)^2 = u_j^2$, $j=1, \cdots, n$ тождественно по всем переменным. Однако не все вектор-функции (наборы поведений) можно считать стратегиями в игре преследования.

Положим $t \in [0, \infty]$. Пусть R^i, $i=1, \cdots, m$ и I^j, $j=1, \cdots n$, — множества вектор-функций

$$\varphi^i(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n, \psi^1, \cdots, \psi^n)$$

и

$$\psi^j(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n),$$

обладающих следующими свойствами:

1. При любых $\varphi^i \in R^i$, $i=1, \cdots, m$ и $\psi^j \in I^j$, $j=1, \cdots, n$ система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^i &= \varphi_1^i(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n, \psi^1, \cdots, \psi^n), \\ \dot{x}_2^i &= \varphi_2^i(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n, \psi^1, \cdots, \psi^n), \\ \dot{y}_1^j &= \psi_1^j(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n), \quad i=1, \cdots, m, \\ \dot{y}_2^j &= \psi_2^j(x^1, \cdots, x^m, y^1, \cdots, y^n), \quad j=1, \cdots, n \end{aligned} \tag{1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях $\xi^1, \cdots, \xi^m$, $\eta^1, \cdots, \eta^n \in S$;

2. $(\varphi_1^i)^2 + (\varphi_2^i)^2 = v_i^2$, $i=1, \cdots, m$,

$(\psi_1^j)^2 + (\psi_2^j)^2 = u_j^2$, $j=1, \cdots, n$,

где $v_i = \text{const}$, $i=1, \cdots, m$, $u_j = \text{const}$, $j=1, \cdots, n$ и $\min v_i > \max u_j$;

3. Пусть $\{x^1(t), \cdots, x^m(t), y^1(t), \cdots, y^n(t)\}$ — решение системы уравнений (1) при начальных условиях $\xi^1, \cdots, \xi^m, \eta^1, \cdots, \eta^n \in S$ и

$$t_{S_{E_j}} = \inf \{t : y^j(t) \overline{\in} S\}; \ j=1, \cdots, n,$$

тогда при

$$t > t_{S_{E_j}} \quad y^j(t) \overline{\in} S, \ j=1, \cdots, n.$$

Для любых $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^m)$, где $\xi^i \in S$, $i=1, \cdots, m$ и $\eta = (\eta^1, \cdots, \eta^n)$, где $\eta^j \in S$, $j=1, \cdots, n$ определим дифференциальную игру преследования, которую условимся обозначать через $\Gamma(m, n, \xi, \eta)$. Как уже было отмечено выше игра $\Gamma(m, n, \xi, \eta)$ является игрой с $n+1$ игроками: нарядом преследователей $P = \{P_1, \cdots, P_m\}$ и преследуемыми E_j, $j=1, \cdots, n$. Декартово произведение множеств $R = \prod_1^m R^i$, удовлетворяющих условиям 1—3 и множества I^j $(j=1, \cdots, n)$ представляет собой множество стратегий наряда преследователей $P = \{P_1, \cdots, P_m\}$ и преследуемых $E_1, \cdots, E_n$. Пусть $\varphi \in R$ и

$\psi^j \in I^j$ $(j=1, \cdots, n)$. Каждой ситуации $(\varphi, \psi^1, \cdots, \psi^n)$ однозначно соответствуют $n+m$ траекторий, называемых траекториями преследователей $P_1, \cdots, P_m$ и преследуемых E_j, $j=1, \cdots, n$.

Положим

$$t_P^{ij} = \min \{t : x^i(t) = y^j(t)\}, \; i, j=1, \cdots, m, n.$$

В любой ситуации матрица $\{t_P^{ij}\}$ однозначно определена, хотя, очевидно, некоторые из ее элементов могут быть равны бесконечности.

Функции выигрыша задаются следующим образом:

$$K_{E_j}(\xi, \eta, \varphi, \psi^1, \cdots, \psi^n) = \left| \begin{array}{l} +1, \text{ если } t s_{E_j} < t_P^{ij} \text{ для всех } i=1, \cdots, m, \\ -1, \text{ если существует такое } i_0, \text{ что} \\ \qquad t s_{E_j} \geqslant t_P^{i_0 j}, \; j=1, \cdots, n, \\ \;\; 0, \; t s_{E_j} = \infty \text{ и } t_P^{ij} = \infty \text{ при всех } i, \end{array} \right.$$

$$K_P(\xi, \eta, \varphi, \psi^1, \cdots, \psi^n) = -\sum_{j=1}^{n} K_{E_j}(\xi, \eta, \varphi, \psi^1, \cdots, \psi^n).$$

Построив пространства стратегий игроков R и I^j $(j=1, \cdots, n)$ и задав значение функции выигрыша в каждой ситуации, мы задаем некоторое семейство игр в нормальной форме $\Gamma(m, n, \xi, \eta)$, где $\xi=(\xi^1, \cdots, \xi^m)$, $\eta=(\eta^1, \cdots, \eta^n)$, $\xi^i \in S$, $\eta^j \in S$ $(i, j=1, \cdots, m, n)$. Игра $\Gamma(m, n, \xi, \eta)$ является обобщением игр „с линией жизни“, рассмотренных в [1], [2], на случай, когда в игре участвуют несколько преследователей и преследуемых.

А. Преследование нарядом одного преследуемого; игра $\Gamma(m, 1, \xi, \eta)$.

Определение. Стратегию $\varphi^\Pi \in \mathrm{R} = \prod_{1}^{m} \mathrm{R}^i$ мы будем называть П-стратегией, если

$$\varphi^\Pi = ([\varphi^1]^\Pi, \cdots, [\varphi^m]^\Pi),$$

где $[\varphi^i]^\Pi$, $i=1, \cdots, m$, П-стратегия в игре $\Gamma(\xi^i, \eta)$, рассматриваемой на множествах стратегий R^i и I (определение П-стратегии см. [1], [4]).

Т е о р е м а А.1. *В игре $\Gamma(m, 1, \xi, \eta)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, и П-стратегия оптимальна для наряда преследователей $P=\{P_1, \cdots, P_m\}$.*

Доказательство. Во избежание громоздких выкладок доказательство будем проводить для игры $\Gamma(2, 1, \xi, \eta)$.

Пусть в ситуации (φ^Π, ψ) моменты поимки соответственно равны t_P^{11} и t_P^{12}. Пусть $\psi^\circ \in \mathrm{I}$ — линейная стратегия, то есть стратегия, при которой в ситуации $(\varphi^\Pi, \psi^\circ)$ траектория $y(t)$ представляет собой полупрямую, проходящую через точки η и $y(t_P^{11})$. Из оптимальности П-стратегии в игре $\Gamma(\xi^1, \eta)$ следует, что точка $y[(t_P^{11})^\circ]$ лежит дальше точки $y[(t_P^{11})]$ от точки η на прямой $y^\circ(t)$ (здесь $(t_P^{11})^\circ$ и $(t_P^{21})^\circ$ — моменты поимки в ситуации $(\varphi^{\Pi}, \psi^{c})$. Не ограничивая общности можно положить $t_p^{11} < t_p^{21}$ (поимку осуществляет P_1). Докажем, что точка поимки $y\,[(t_p^{21})^{\circ}]$ также не может лежать внутри отрезка прямой, соединяющего точки η и $y\,(t_p^{11})$. Предположим, что это не так. Пусть C_2 — круг Апполония для игры $\Gamma\,(\xi^2, \eta)$, рассматриваемой на множестве стратегий R^2, I. Из нашего предположения следует, что окружность C_2 пересекается с отрезком прямой $[\eta, y\,(t_p^{11})]$ и, так как точка η находится внутри круга C_2, точка $y\,(t_p^{11})$ должна находиться вне этого круга. Следовательно, существует точка $\bar{t} < t_p^{11}$, обладающая тем свойством, что $y\,(\bar{t})$ лежит на окружности $\bar{C}_2$. Однако этого не может быть, поскольку из предыдущего следует существование такой точки t_0,

$$\bar{t} < t_0 < t_p^{11} < t_p^{21},$$

что $y\,(t_0) \bar{\in} C_2$, это противоречит тому, что в игре $\Gamma\,(\xi^2, \eta)$ в ситуации (φ^{Π}, ψ) при любых $\psi \in$ I все точки $y\,(t)$ при $t < t_p^{21}$ принадлежат кругу C_2 (теорема 1 [1]).

Мы показали, таким образом, что обе точки $y\,[(t_p^{11})^{\circ}]$ и $y\,[(t_p^{21})^{\circ}]$ лежат на прямой $y_0\,(t)$ вне отрезка $[\eta, y\,(t_p^{11})]$; однако это эквивалентно тому, что для любой стратегии $\psi \in$ I находится, доминирующая ее при П-стратегии, стратегия $\psi^{\circ} = \mathrm{const}$. В то же время П-стратегия является наилучшим ответом на любую стратегию $\psi^{\circ} = \mathrm{const}$. Это и означает, что ситуация $(\varphi^{\Pi}, \psi^{\circ})$ образует ситуацию равновесия в игре $\Gamma\,(2, 1, \xi, \eta)$. Теорема доказана.

Теорема 1 дает нам конструктивный метод построения оптимальной стратегии преследователя в случае, когда в поимке участвует наряд преследователей и один преследуемый. Легко понять, что если наряд преследователей будет достаточно „представительным" и $P_1, \cdots, P_m$ будут в начальный момент времени соответствующим образом расположены, то игра станет для E явно проигрышной. В таких случаях рассмотрение игр с линией жизни становится неинтересным, и мы естественно приходим к играм преследования, в которых целью преследуемого игрока является максимизация времени преследования.

Пример 1. Игра $\Gamma\,(2, 1, \xi, \eta)$. Пусть S—круг с радиусом a. В начальный момент времени E находится в центре, P_1 и P_2 на границе круга и в диаметрально противоположных точках. Задача заключается в отыскании границ для отношения v_i/u $(i=1, 2)$, при которых E может избежать поимки в S. Множество точек поимки в ситуации (φ^{Π}, ψ) при $\psi \in$ I представляет собой пересечение кругов Апполония C_1 и C_2 в играх $\Gamma\,(\xi^i, \eta)$ между P_1, E и P_2, E. Игрок E будет пойман, если соотношение скоростей таково, что пересечение кругов C_1 и C_2 содержится в S, в противном случае он всегда может избежать поимки, Очевидно, что пересечение кругов C_1 и C_2 принадлежит S тогда и только тогда, когда $v > u\sqrt{2}$.

Пример 2. Пусть теперь наряд P состоит из трех преследователей P_1, P_2, P_3, расположенных в начальный момент времени на границе круга S на равных расстояниях друг от друга; E находится в начальный момент времени в центре круга S. При доказательстве теоремы 1 мы видели, что любая стратегия $\psi \in \mathrm{I}$ доминируется при П-стратегии некоторой стратегией ψ^0, предписывающей E прямолинейное движение. При $v_i = u$ ($i = 1, 2, 3$) в ситуации (φ^{Π}, ψ) для всех $\psi \in \mathrm{I}$ множество точек поимки совпадает со сторонами равностороннего треугольника $M_1M_2M_3$, который, как это легко понять, содержится в S.

Таким образом, при указанном начальном расположении игроков, преследуемый E ловится внутри круга S уже при всех $v/u \geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть в игре* $\Gamma(n, 1, \xi, \eta)$ *существует такой круг* B, *принадлежащий* S, *радиуса* R, *что*

а. $\xi^1, \cdots, \xi^m \in B$ *в начальный момент,*

б. точка η *является центром круга* B,

в. расстояние между двумя соседними радиальными проекциями точек $\xi^1, \cdots, \xi^m$ *на окружность* B *меньше* $R\sqrt{3}$.

Тогда E *ловится в* S *при любых* $v_i/u \geqslant 1$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует из того, что при выполнении условий *а*—в игроку E вообще не удается покинуть множество B. Действительно, условия а., б., в., мажорируют как число преследователей в примере 2, так и их расположение.

Теорема, хотя и является совершенно тривиальной, однако дает эффективный достаточный критерий оценки безнадежности ситуации для E в игре $\Gamma(n, 1, \xi, \eta)$.

В. Преследование с запаздыванием и решение игры $\Gamma'(1, 2, \xi, \eta)$.

Непосредственное рассмотрение игр $\Gamma(1, 2, \xi, \eta)$ оказывается затруднительным, ввиду специфических свойств функции выигрыша, допускающей произвольные действия преследуемого игрока, который во всех случаях ловится в S. Дадим теперь определение одной игры преследования, которая отличается от игры $\Gamma(\xi, \eta)$, рассмотренной в [1], только функцией выигрыша.

Пусть $y(t_P)$ — точка поимки в ситуации (φ, ψ), принадлежащая множеству S. Обозначим через $\rho[y(t_P), S]$ расстояние от точки поимки до границы множества S.

Пусть $f(\rho)$ — некоторая функция, обладающая следующими свойствами:

а. $f(\rho)$ строго убывающая функция от ρ;

б. $0 < f(\rho) < 1$;

в. если поимка происходит в точке η и ρ — расстояние от η до $\overline{S}$, то $f(\rho) = 0$.

Функция выигрыша $K'(\xi, \eta, \varphi, \psi)$ определяется в каждой ситуации следующим образом:

$$K'(\xi, \eta, \varphi, \psi) = \begin{cases} -1, & \text{если } t_P > t_{SE};\ y(t_P) \in S, \\ 1 - f(\rho), & \text{если } t_P \leqslant t_{SE};\ y(t_P) \in S, \\ 0, & \text{если } t_P = t_{SE} = \infty. \end{cases}$$

Полученную таким образом игру будем обозначать через $\Gamma' (\xi, \eta)$.

Теорема 3. *В игре $\Gamma' (\xi, \eta)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях. Игрок P обладает при этом единственной оптимальной стратегией, именно — П-стратегией.*

Рассмотрим теперь одну модификацию $\Gamma'_T (\xi, \eta)$ игры $\Gamma' (\xi, \eta)$, в которой P может начать преследование только через некоторое время $T > 0$ после начала игры. Игру $\Gamma'_T (\xi, \eta)$, полученную таким образом, мы будем называть игрой с запаздыванием T или просто игрой с запаздыванием.

Теорема 4. *В игре $\Gamma'_T (\xi, \eta)$ П-стратегия оптимальна для P.*

Пусть теперь в игре $\Gamma'_T (\xi, \eta)$ за время T преследующий P перемещается по некоторой фиксированной прямой из точки ξ_0 в точку ξ_T. Тогда, очевидно, и в этом случае теорема 4 будет иметь место. При этом преследуемый E должен действовать таким образом, чтобы наилучшим способом уйти от преследователя P, когда последний будет находиться в точке ξ_T. Предположим далее, что помимо условия перемещения преследующего P из ξ_0 в ξ_T за время T, игрок E может пользоваться только некоторым подклассом I_T своих стратегий в промежутке времени $[0, T]$. Обозначим эту игру через $\Gamma'_T (\xi, \eta)$.

Теорема 5. *В игре $\Gamma'_T (\xi, \eta)$ П-стратегия оптимальна для преследующего P. Преследуемый E для любого $\varepsilon > 0$ обладает ε-оптимальной стратегией.*

Перейдем теперь к решению игры $\Gamma' (1, 2, \xi, \eta)$.

Игра $\Gamma' (1, 2, \xi, \eta)$ представляет собой игру трех лиц: преследователя P и преследуемых E_1 и E_2. Пространства стратегий те же, что и в игре $\Gamma (1, 2, \xi, \eta)$. Как и в игре $\Gamma (1, 2, \xi, \eta)$ стратегии игроков будут обозначаться через φ, ψ^1, ψ^2. Выигрыш E_k, $k = 1, 2$, определяется как обратная величина выигрыша P в игре $\Gamma' (\xi, \eta^k)$. Пусть K_i — выигрыш E_i $(i = 1, 2)$; тогда выигрыш P определяется по формуле

$$K_P = -K_1 - K_2.$$

Некоторые дальнейшие обозначения: $\vec{\psi}^k (t)$ — направление оптимальной стратегии E_k в игре $\Gamma' (\xi, \eta^k)$, начинающейся в момент времени t; $\varphi^{i, 3-i}$ — стратегия преследователя P, заключающаяся в последовательном применении П-стратегии сперва к E_i, а потом к E_{3-i}. Так как оптимальная стратегия E_i в игре $\Gamma' (\xi, \eta^i)$ в ситуации $(\varphi^{П}, \psi)$ дает прямолинейное движение, функция $\vec{\psi}^i (t)$ постоянна при всех t.

Рассмотрим две ситуации

$$(\vec{\psi}^1, \vec{\psi}^2, \varphi^{12}) \text{ и } (\vec{\psi}^1, \vec{\psi}^2, \varphi^{2,1}).$$

Пусть K_P^{12} — выигрыш P в одной ситуации, K_P^{21} выигрыш — в другой, причем $K_P^{12} \geqslant K_P^{21}$. Обозначим через

$\tilde{y}^2 (t)$ — траекторию E_2 в ситуации $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \psi^2)$,

$\widetilde{Y}^2$ — некоторое подмножество таких траекторий,

$\widetilde{\Psi}_y$ — подмножество стратегий, дающих в ситуации $(\varphi^{1,2}, \vec{\psi}^1, \widetilde{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}})$

траекторию $\widetilde{y}^2(t) \in \widetilde{Y}^2$:

$$\Psi_{\underset{Y}{\smile}} = \bigcup_{\overline{y} \in \widetilde{Y}^2} \widetilde{\Psi}^2_{\underset{y}{\smile}}.$$

Пусть теперь $\overline{Y}^2$—подмножество траекторий E_2, для которых на отрезке $[0, t_P^{11}]$ выполнено неравенство

$$K_P(x(t), y^1(t), \overline{y}^2(t); \varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}}) \geqslant K_P(x(t), y^1(t), \overline{y}^2(t); \varphi^{2,1}, \vec{\psi}^1, \overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}}), \tag{2}$$

где $\overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}}$ — стратегия, дающая траекторию $\overline{y}^2(t)$ в ситуации $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \widetilde{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}})$,

$\overline{\Psi}^2_{\underset{y}{\smile}}$ — подмножество стратегий, дающих в ситуации $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}})$ траекторию $\overline{y}^2(t) \in \overline{Y}^2$.

Теорема 6. *Если $K_P^{12} \geqslant K_P^{21}$, то ситуация ε-равновесия по Нэшу в игре $\Gamma'(1, 2, \xi, \eta)$ строится следующим образом:*

а. *Оптимальная стратегия P* есть $\varphi^{1,2}$, *пока E_1 находится в точке $\overline{y}(t)$, принадлежащей одной из траекторий $\overline{y}(t) \in \overline{Y}^2(t)$* и φ_P^{21}— *—в противном случае;*

б. *Оптимальная стратегия E_1* есть $\overline{\psi}^1$;

в. *ε-оптимальная стратегия ψ^2_ε определяется как ε-оптимальная стратегия E в игре $\Gamma_{t_P^{11}}(\xi, \eta^2)$ при условии, что E может пользоваться только подмножеством множества стратегий $\widetilde{\Psi}^2_{\underset{Y}{\smile}}$ при ограничении*

$$k_{E_2}(x(t), y^1(t), \overline{y}^2(t); \varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}}) \geqslant K_{E_2}(x(t), y^1(t), \overline{y}^2(t); \varphi^{21}, \vec{\psi}^1, \overline{\psi}^2_{\underset{y}{\smile}}). \tag{3}$$

Доказательство. Заметим сперва, что подмножество $\overline{\mathrm{I}}_2$ множества стратегий E_2 при ограничении (3) не пусто. Действительно, ему принадлежит по крайней мере стратегия $\vec{\psi}_2$.

Неравенство

$$K_P(\vec{\psi}^1, \psi^2_\varepsilon, \varphi^{12}) \geqslant K_P(\vec{\psi}^1, \psi^2_\varepsilon, \varphi^{21}) \tag{4}$$

следует из самого определения стратегий ψ^2_ε и φ^{12}. Очевидно, что любая „хорошая" стратегия P должна давать поимку E_1 и E_2 в одном из двух порядков: 1,2 или 2,1. Из решений игр Γ и Γ' следует, что стратегии первого вида всегда в ситуации $(\vec{\psi}^1, \psi^2_z, \varphi)$ доминируются стратегией φ^{12}. Стратегии же второго вида доминируются стратегией φ^{21}, которая сама на основании (4) доминируется стратегией φ^{12}. Неравенство (4) доказано таким образом для любой стратегии $\varphi \in R$.

Неравенство

$$K_{E_1}(\vec{\psi}^1, \psi^2_z, \varphi^{12}) \geqslant K_{E_1}(\psi^1, \psi^2, \varphi^{12}) \qquad (5)$$

при всех ψ^1 следует из решения игры $\Gamma'(\xi, \eta^1)$.

Неравенство

$$K_{E_2}(\vec{\psi}^1, \psi^2_z, \varphi^{12}) \geqslant K_{E_2}(\vec{\psi}^1, \psi^2, \varphi^{12}) - \varepsilon \qquad (6)$$

для стратегий ψ^2, принадлежащих подмножеству $\Psi^2_{\tilde{Y}}$ и удовлетворяющих условию (3), следует из определения ε-оптимальной стратегии E_2 в игре $\overline{\Gamma}'_{\Pi_P}(\xi, \eta^2)$ при ограничении на множество допустимых стратегий преследуемого (2) и (3) (существование такой стратегии следует из теоремы 5). Предположим теперь, что ψ^2 не удовлетворяет неравенствам (2) и (3). Если она не удовлетворяет (3), то стратегия $\vec{\psi}^2$, которая удовлетворяет как (3) так и (2), доминирует ее и сама доминируется ε-оптимальной в игре $\overline{\Gamma}'_{\Pi_P}(\xi, \eta^2)$ стратегией. Таким образом, для всех стратегий, не удовлетворяющих (3), неравенство (6) выполнено. Пусть теперь ψ^2 не удовлетворяет (2). При этом представляются две возможности.

1. ψ^2 в ситуации $(\varphi^{1,2}, \vec{\psi}^1, \tilde{\psi}^2_{\tilde{y}})$ не дает следа $\tilde{y}^2(t) \in \tilde{Y}^2$.

2. ψ^2, хотя и дает след $\tilde{y}^2(t) \in \tilde{Y}^2$ в ситуации $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \tilde{\psi}^2_{\tilde{y}})$, тем не менее не удовлетворяет (2).

В случае 1 (6) следует из определения оптимальной стратегии P.

Пусть имеет место вторая альтернатива. В этом случае траектория $\tilde{y}^2(t) \in \tilde{Y}^2$ и поэтому, на основании условиия а. теоремы, P будет преследовать по стратегии φ^{12}. Так как $\tilde{y}^2(t) \in \tilde{Y}^2$, то из построения множества $\Psi^2_{\tilde{Y}}$ следует, что существует стратегия $\tilde{\psi}^2$, удовлетворяющая условию (2) и дающая в ситуации $(\vec{\psi}^1, \psi^2, \varphi^{12})$ след $\tilde{y}^2(t)$. Так как выигрыш зависит только от траекторий игроков, а последние в ситуациях $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \tilde{\psi}^2)$ и $(\varphi^{12}, \vec{\psi}^1, \psi^2)$ совпадают, (6) выполняется, поскольку оно выполняется для стратегии $\tilde{\psi}^2$. Доказав неравенства (6), (4), (5) мы доказали теорему.

Если $K^{21}_p \geqslant K^{12}_p$, то несколько видоизменив условия (2), (3), можно доказать аналогичную теорему.

С. Игра $\Gamma(m, n, \xi, \eta)$.

Для решения этой игры не удалось найти оптимальных стратегий игроков и доказать существование ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях (см. [5]). Однако, пользуясь методами целочисленного программирования, удается оценить снизу максимальный возможный выигрыш наряда преследователей $\mathrm{Val}\cdot\Gamma(m, n, \xi, \eta)$.

Оценка значения $\mathrm{Val}\,\Gamma(m, n, \xi, \eta)$ производится следующим образом. Предположим, что множество преследующих (преследующий наряд) $P=\{P_1,\cdots,P_m\}$ разделено на n преследующих групп $M_1,\cdots, M_n$ так, что до окончания игры каждая из групп $M_1,\cdots, M_n$ может преследовать только одного преследуемого $E_1,\cdots, E_n$ по П-стратегии.

При каждом фиксированном разбиении множества преследующих на группы $M_1,\cdots, M_n$ наибольший выигрыш наряда P: $f(M_1,\cdots, M_n)$ получается, как решение следующей простейшей задачи о назначениях ([6]):

$$\max \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij}\, a_{ij} \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ij} \leqslant 1, \quad j=1, 2,\cdots, n$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \leqslant 1, \quad i=1, 2,\cdots, n$$

(здесь a_{ij} — выигрыш i-ой группы M_i от преследования E_j по П-стратегии; его нахождение возможно, используя теорему 1).

Очевидно, что

$$\mathrm{Val}\,\Gamma(m, n, \xi, \eta) \geqslant \max_{\{M_1, \cdots, M_n\}} f(M_1, \cdots, M_n), \tag{8}$$

где $\{M_1,\cdots, M_n\}$ — множество всевозможных разбиений наряда $P_1,\cdots, P_m$ на n преследующих групп.

Заметим далее, что, поскольку всегда $n \geqslant \mathrm{Val}\,\Gamma(m, n, \xi, \eta)$, то, как только справа в неравенстве (8) мы получим n, оно перейдет в равенство и оптимальная стратегия преследующего наряда будет: разделиться с момента начала игры на группы $M_1,\cdots, M_n$, дающие $\max f(M_1, \cdots, M_n)$ и преследовать группой M_i по П-стратегии те из E_j, для которых при решении задачи (7) получается $\xi_{ij}=1$.

Ленинградский государственный
университет

Поступило 30.V.66

Լ. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

N ՄԱՍՆԱԿԻՑՆԵՐՈՎ «Ի ԿՅԱՆՔԱՊԱՀՈՒԹՅԱՆ» ԽԱՂԵՐ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ամփոփում

Դիտարկվում են N մասնակիցներով «ի կյանքապահության» խաղեր ուռուցիկ բազմության մեջ հարթության վրա։

Օպտիմալ խաղակերպը գտնվում է այն դեպքերում, երբ m հետապնդողները հետապնդում են մեկ E խույս տվողի և մեկ հետապնդողը հետապնդում է *երկու E_1, E_2՝ խույս տվողների: Հետապնդողների արագությունը գերազանցում է խույս տվողների արագությանը:*

Ընդհանուր դեպքում խաղի արժեքի է ֆունկցիան գնահատվում է ներքև-վից:

L. A. PETROSIAN

THE MULTI-PERSON LIFELINE GAMES OF PURSUIT

Summary

Multi-person lifeline games in a given closed convex set S on the plane are considered. Optimal strategies are found in cases when m pursuers $P_1, \cdots, P_m$ chase a fugitive E, or one pursuer chases two fugitives E_1, E_2. In both cases the speeds of the pursuers are greater than that of the fugitives.

A lower bound for the value function is also maked for rather general cases.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Петросян.* Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n, ДАН СССР, 161, № 1 (1965).
2. *R. Jsaaks.* Differential games, NY (1965).
3. *Л. А. Петросян.* Игры с линией жизни над пространством отображений, Труды конференции по математическому оптимальному программированию, Новосибирск (1965).
4. *Л. А. Петросян.* Дифференциальные игры на выживание со многими участниками ДАН СССР, 161, № 2 (1965).
5. *J. F. Nash.* Equlibrium Points in n-person Games, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 36 (1950), 48—49.
6. *Д. Гейл.* Теория линейных экономических моделей, ИЛ (1963).
7. *Н. Н. Воробьев.* Конечные бескоалиционные игры, УМН, 14:4 (88) (1959).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, № 5, 1966 Математика

М. Б. БАЛК

ЦЕЛЫЕ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ НУЛЕЙ

1. Функция $f(z)$ называется *целой полианалитической порядка n* или *целой n-аналитической*, если она представима в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\cdot f_k(z), \tag{1}$$

де все $f_k(z)$ $(k=0, 1,\cdots, n-1)$ — целые аналитические функции комплексного переменного z, а $\bar{z}$ комплексно сопряжено z. Можно считать, что $f_{n-1}(z)\not\equiv 0$. Если все функции $f_k(z)$ являются полиномами относительно z, то $f(z)$ называют n-аналитическим полиномом.

Целая n-аналитическая функция $F(z)$ называется *приведенной*, если она представима в виде

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n-1}|z|^{2k}\cdot\varphi_k(z), \tag{2}$$

где все $\varphi_k(z)$ — целые аналитические функции. Примером такой функции может служить приведенный полианалитический полином, т. е. полином $\Pi(z, |z|^2)$ относительно пары переменных z и $|z|^2$.

Здесь мы намерены, используя аппарат мероморфных кривых, выяснить каков общий вид целой полианалитической функции, имеющей ограниченное (но не обязательно конечное) множество нулей (см. теорему 2).

От весьма стеснительных ограничений, при которых были установлены теоремы 1 и 2 в первоначальном рукописном варианте данной статьи,нам удалось освободиться, благодаря ценным советам А. А. Гольдберга. А. А. Гольдберг внимательно прочитал рукопись и сделал ряд очень полезных и важных замечаний, которые были мною учтены. Пользуюсь случаем, чтобы выразить ему свою глубокую признательность.

2. Нам потребуется следующее

Замечание 1. Всякую целую приведенную n-аналитическую функцию (2) возможно представить в виде

$$F(z)=\sum_{\nu=1}^{s}p_\nu(|z|^2)\cdot\psi_\nu(z), \tag{3}$$

где: 1) все $\psi_\nu(z)$ $(\nu=1, 2,\cdots, s)$ — линейно независимые целые функции; 2) каждая из функций $\psi_\nu(z)$ совпадает с одной из функций $\varphi_k(z)$ $(k=0, 1,\cdots, n-1)$; $\psi_s(z)\equiv\varphi_{n-1}(z)$, $\psi_\nu(z)\not\equiv 0$ $(\nu=1,\cdots, s)$; 3) функции $p_\nu(t)$ — полиномы (от переменного t), степени которых α_ν монотонно возрастают с ростом ν:

$$0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_s=n-1. \tag{3a}$$

Действительно, будем последовательно перебирать функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_{n-1}(z)$ и каждый раз, когда окажется, что какая-либо из них ($\varphi_k(z)$) является линейной комбинацией следующих за ней функций ($\varphi_{k+1}(z)$, $\varphi_{k+2}(z), \cdots, \varphi_{n-1}(z)$), мы ее заменим этой комбинацией, раскроем скобки и приведем подобные члены (случай, когда все коэффициенты такой комбинации окажутся нулями, мы не исключаем). Очевидно, что после конечного числа шагов мы представим $F(z)$ в виде (3), причем функции $\psi_\nu(z)$ и $p_\nu(t)$ будут удовлетворять всем условиям замечания 1.

Не нарушая общности, мы будем в дальнейшем полагать, что при $\nu = 1, 2, \cdots, s$

$$\tau(\psi_\nu) = 1, \tag{3б}$$

где $\tau(\psi_\nu)$ — первый из неравных нулю тейлоровых коэффициентов разложения функции $\psi_\nu(z)$ по степеням z.

3. Каждой целой приведенной полианалитической функции, записанной в виде (3), мы можем сопоставить мероморфную (точнее говоря — целую) кривую

$$B \equiv B(z) = \{\psi_1(z), \cdots, \psi_s(z)\}. \tag{4}$$

Через $T(r, B)$ обозначим следующую ее характеристику:

$$T(r, B) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\varphi})\, d\varphi, \tag{5}$$

где

$$u(z) \equiv u(z, B) = \max_\nu \{\ln |\psi_\nu(z)|\}. \tag{6}$$

Величина $T(r, B)$ несущественно отличается от характеристики, введенной для мероморфных кривых А. Картаном (сравните [1] или [2]).

Приведем некоторые вспомогательные формулы, которые потребуются нам ниже.

В дальнейшем мы воспользуемся формулой Иенсена в следующем виде (сравните [3], стр. 166, формула (2‴)):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi = N(r, 0, f) - N(r, \infty, f) + \ln |\tau(f)|, \tag{7}$$

где $f(z)$ — функция, мероморфная в круге $|z| \leqslant r$, $\tau(f)$ — ее первый (по порядку роста номеров) отличный от нуля коэффициент разложения Лорана в окрестности точки $z = 0$, $N(r, a, f)$ — известная характеристика Р. Неванлинны

$$N(r, a, f) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t}\, dt + n(0, a) \ln r. \tag{8}$$

(Здесь $n(t, a)$ означает, как обычно, число a-точек функции $f(z)$ в замкнутом круге $|z| \leqslant t$; при $a = \infty$ под a-точками понимаются полюсы.)

Для функции $\psi(z)$, *голоморфной* в круге $|z| \leqslant r$, имеем $N(r, \infty, \psi) = 0$, и формула Иенсена (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\psi(re^{i\varphi})|\,d\varphi = N(r, 0, \psi) + \ln|\tau(\psi)|. \tag{9}$$

Пусть $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$ — целые функции, которые, вообще говоря, могут иметь общие нули.

Мероморфной функции

$$f_{ks}(z) = \frac{\psi_k(z)}{\psi_s(z)} \tag{10}$$

естественно сопоставляется мероморфная кривая

$$B_{ks} = \{\psi_k, \psi_s\}. \tag{11}$$

Легко написать соотношение между характеристикой $T(r, B_{ks})$ этой кривой и характеристикой Неванлинны $T(r, f_{ks})$.

Применяя формулу (6), получим для кривой (11)

$$u_{ks}(z) \equiv u(z, B_{ks}) = \ln^+|f_{ks}(z)| + \ln|\psi_s(z)|. \tag{12}$$

Как известно, характеристика Неванлинны $T(r, f)$ для мероморфной функции $f(z)$ определяется формулой

$$T(r, f) = m(r, \infty, f) + N(r, \infty, f), \tag{13}$$

где

$$m(r, \infty, f) \equiv m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi. \tag{14}$$

Если еще учесть (12) и (9), то найдем

$$T(r, f_{ks}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{ks}(re^{i\varphi})\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\psi_s(re^{i\varphi})|\,d\varphi + N(r, \infty, f_{ks}) =$$

$$= T(r, B_{ks}) + N(r, \infty, f_{ks}) - N(r, 0, \psi_s) - \ln|\tau(\psi_s)|. \tag{15}$$

Обозначим через $\psi_{ks}(z)$ наибольший общий делитель функций $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$, то есть такую целую функцию, что $\psi_k(z)$ и $\psi_s(z)$ представимы в виде

$$\psi_k(z) = \sigma_k(z)\cdot\psi_{ks}(z),\quad \psi_s(z) = \sigma_s(z)\cdot\psi_{ks}(z),$$

где $\sigma_k(z)$ и $\sigma_s(z)$ — некоторые целые функции, но уже без общих нулей. Будем еще полагать, что $\psi_{ks}(z)$ так нормирована, что $\tau(\psi_{ks})=1$. Легко видеть, отправляясь от формулы (10), что

$$N(r, 0, \psi_s) = N(r, \infty, f_{ks}) + N(r, 0, \psi_{ks}). \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует

$$T(r, f_{ks}) \leqslant T(r, B_{ks}) - N(r, 0, \psi_{ks}) - \ln|\tau(\psi_s)|. \tag{17}$$

Отметим еще очевидное следствие из формулы (6)

$$u(z, B_{ks}) \leqslant u(z, B), \tag{18}$$

откуда

$$T(r, B_{ks}) \leqslant T(r, B). \tag{19}$$

При $r > 1$ из (17) и (19) следует неравенство, которым мы воспользуемся ниже (п. 13)

$$T\left(r, \frac{\psi_k}{\psi_s}\right) \leqslant T(r, B). \tag{20}$$

4. Справедлива следующая

Теорема 1. *Если целая приведенная n-аналитическая функция*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \cdot F_k(z) \tag{21}$$

имеет ограниченное множество нулей, то она представима в виде произведения приведенного аналитического полинома $\Pi(z, |z|^2)$ *на целую аналитическую функцию без нулей* $e^{g(z)}$, *то есть*

$$F(z) = \Pi(z, |z|^2) \cdot e^{g(z)}. \tag{22}$$

Доказательство будет дано в пп. 5—13.

5. Прежде всего заметим, что если функция $F_{n-1}(z)$ имеет бесконечное множество нулей, то множество нулей функции $F(z)$ должно быть неограниченным. В [4] (стр. 159, лемма 1) этот факт установлен для бианалитических функций (двумя способами), но приведенное там доказательство тривиальным образом переносится на случай полианалитических функций произвольного порядка; поэтому мы его здесь приводить не будем.

Так как, по условию, множество нулей функции $F(z)$ ограничено, то $F_{n-1}(z)$ имеет вид

$$F_{n-1}(z) = \varphi_{n-1}(z) \cdot e^{g(z)}, \tag{23}$$

где $\varphi_{n-1}(z)$ — полином относительно z, а $g(z)$ — целая функция. Положим

$$e^{-g(z)} \cdot F_k(z) = \varphi_k(z) \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-2), \tag{24}$$

$$e^{-g(z)} \cdot F(z) = \Psi(z). \tag{25}$$

Тогда функция

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \cdot \varphi_k(z) \tag{26}$$

также имеет ограниченное множество нулей.

Функцию (26) можно, согласно замечанию 1, представить в виде

$$\Psi(z) = \sum_{k=1}^{s} p_k(|z|^2) \cdot \psi_k(z), \tag{3}$$

причем $\psi_k(z)$ и $p_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots, s)$ удовлетворяют всем условиям этого замечания.

Допустим, что среди функций $\psi_k(z)$ *хотя бы одна не является полиномом, и покажем, что это приводит к противоречию.* В силу формул (3) и (25) мы тем самым и докажем теорему 1.

Интересующее нас противоречие мы легко выведем из того факта, что при больших положительных c (за исключением, быть может, множества ограниченной меры) характеристика $T(c, B)$ (см. (5)) удовлетворяет неравенству вида

$$T(c, B) < A \ln T(c, B) + A \ln c \tag{27}$$

(здесь и всюду в дальнейшем буквой A обозначаются положительные константы, не зависящие от параметра c; даже в одной и той же формуле эти константы могут быть различными).

Рассуждения немного упрощаются, если предварительно вместо целой кривой (5) рассмотреть вспомогательную целую кривую

$$G(z) \equiv G(z; c) = \{g_1(z), g_2(z), \cdots, g_s(z)\}, \tag{28}$$

где

$$g_k \equiv g_k(z) \equiv g_k(z; c) = p_k(c^2) \cdot \psi_k(z) \quad (k = 1, 2, \cdots, s). \tag{29}$$

Нетрудно убедиться, что при больших c

$$T(c, B) < T(c, G) + A. \tag{30}$$

Действительно, положим

$$U(z) = \max_{\nu} \{\ln |g_\nu(z)|\}. \tag{31}$$

Тогда

$$T(r, G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(re^{i\varphi})\, d\varphi. \tag{32}$$

Учитывая (6), легко получим, что

$$u(z) = \max_{\nu} \{\ln |\psi_\nu(z)|\} = \max_{\nu} \{\ln |g_\nu(z)| - \ln |p_\nu(c^2)|\} < \max_{\nu} \ln |g_\nu(z)| + A$$

(при достаточно больших c), то есть

$$u(z) < U(z) + A,$$

откуда следует (30).

Чтобы получить (27), остается показать, что при больших c (кроме, возможно, множества положительной меры)

$$T(c, G) < A \ln T(c, B) + A \ln c. \tag{33}$$

Целью рассуждений в пунктах 6—13 и будет получение неравенства (33).

6. В силу условия теоремы 1 можно выбрать настолько большую окружность γ $\{|z| = \rho\}$, что функция $\Psi(z)$ отлична от нуля при $|z| \geqslant \rho$.

Будем понимать под *вращением функции* $\Psi(z)$ *на контуре* γ величину

$$\text{Вр}_\gamma \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg \Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma d \arg \Psi(z). \tag{34}$$

Пусть

$$\text{Вр}_\gamma \Psi(z) = h.$$

Тогда при любом $c \geqslant \rho$ на окружности Γ $\{|z| = c\}$

$$\text{Вр}_\Gamma \Psi(z) = h. \tag{35}$$

На Γ функция $\Psi(z)$ совпадает с *аналитической* функцией

$$\Phi(z) \equiv \Phi(z, c^2) = \sum_{k=1}^{s} p_k(c^2) \cdot \psi_k(z), \tag{36}$$

так что

$$Bp_\Gamma \Phi(z) = h, \tag{37}$$

то есть $\Phi(z)$ имеет внутри Γ в точности h нулей (с учетом их кратности).

7. Выше (см. замечание 1) мы обозначили через α_k точную степень полинома $p_k(t)$ $(k = 1, \cdots, s)$; числа α_k удовлетворяют условию (3а).

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{Vmatrix} a_1^{\alpha_1} & a_1^{\alpha_2} \cdots a_1^{\alpha_s} \\ a_2^{\alpha_1} & a_2^{\alpha_2} \cdots a_2^{\alpha_s} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_s^{\alpha_1} & a_s^{\alpha_2} \cdots a_s^{\alpha_s} \\ a_{s+1}^{\alpha_1} & a_{s+1}^{\alpha_2} \cdots a_{s+1}^{\alpha_s} \end{Vmatrix}, \tag{38}$$

где $a_1, \cdots, a_s, a_{s+1}$ — какие-либо положительные числа, причем

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_s < a_{s+1}.$$

Вычеркивая из матрицы M любую из $s+1$ строк и оставляя строки с номерами $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$, мы можем образовать определитель порядка s

$$\sigma[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s] = \begin{vmatrix} a_{\beta_1}^{\alpha_1} & a_{\beta_1}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_1}^{\alpha_s} \\ a_{\beta_2}^{\alpha_1} & a_{\beta_2}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_2}^{\alpha_s} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{\beta_s}^{\alpha_1} & a_{\beta_s}^{\alpha_2} \cdots a_{\beta_s}^{\alpha_s} \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Нетрудно убедиться, что определитель (39) отличен от нуля. Для этого удобно воспользоваться известной из высшей алгебры теоремой Декарта: число положительных корней многочлена с вещественными коэффициентами либо равно числу перемен знака в ряду его коэффициентов, либо меньше этого числа (на четное число).

Будем (39) рассматривать как полином относительно переменного a_{β_1} (при фиксированных $a_{\beta_2}, \cdots, a_{\beta_s}$).

Тогда у него не более, чем s коэффициентов, отличных от нуля (это очевидно из формулы (39)) и он, в силу теоремы Декарта, имеет не более, чем $s-1$ положительных корней. Но их и не менее, чем $s-1$: каждое из чисел $a_{\beta_2}, \cdots, a_{\beta_s}$ — корень этого нолинома. Следовательно, если положительное число a_{β_1} отлично от чисел $a_{\beta_2}, \cdots, a_{\beta_s}$, то определитель (39) не равен нулю.

Нами позднее (в п. 12) будет использовано число

$$R = \max\left\{\frac{1}{|\sigma[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s]|}\right\}. \tag{40}$$

Ясно, что $0 < R < \infty$.

Построим затем $s+1$ функций

$$\Phi_\nu(z) \equiv \Phi(z, c^2 a_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, s, s+1). \tag{41}$$

Каждая из них имеет в круге $d\{|z| \leqslant c\}$ не более, чем h нулей.

8. Проводя рассуждения, почти не отличающиеся от соответствующих рассуждений А. Картана [1] (см. также [2], стр. 295; следует положить $p = s$, $q = s+1$), можно без труда убедиться, что функции $T(r, G)$ и

$$v(z) = \max_{1 \leqslant \beta \leqslant s+1} \{\ln |\Phi_\beta(z)|\} \tag{42}$$

связаны неравенством

$$T(c, G) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(ce^{i\varphi})\, d\varphi + \ln K, \tag{43}$$

где K — константа, зависящая только от s (но не от c и не от функций $\psi_k(z)$).

Согласно (33), нам теперь следует оценить интеграл в правой части формулы (43). Предварительно мы его преобразуем.

Выберем из $s+1$ чисел $1, 2, \cdots, s, s+1$ каким-либо образом s не равных между собой номеров $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$. Тогда имеет место следующая зависимость между вронскианами:

$$w[\Phi_{\beta_1}, \Phi_{\beta_2}, \cdots, \Phi_{\beta_s}] \equiv C[\beta_1, \cdots, \beta_s; c] \cdot w[g_1, \cdots, g_s], \tag{44}$$

где

$$C[\beta_1, \cdots, \beta_s; c] = \begin{vmatrix} \dfrac{p_1(c^2 a_{\beta_1})}{p_1(c^2)} & \cdots & \dfrac{p_s(c^2 a_{\beta_1})}{p_s(c^2)} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{p_1(c^2 a_{\beta_s})}{p_1(c^2)} & \cdots & \dfrac{p_s(c^2 a_{\beta_s})}{p_s(c^2)} \end{vmatrix}. \tag{45}$$

Если вспомнить, что сказано о полиномах $p_k(t)$ в замечании 1, то легко убедиться, что определитель (45) при $c \to \infty$ имеет конечный и отличный от нуля предел $\sigma[\beta_1, \cdots, \beta_s]$ (см. (39)):

$$\lim_{c \to \infty} C[\beta_1, \cdots, \beta_s; c] = \sigma[\beta_1, \cdots, \beta_s]. \tag{46}$$

Введем обозначения

$$H(z) \equiv H(z, c) = \frac{\Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z) \cdots \Phi_{s+1}(z)}{w[g_1, g_2, \cdots, g_s]}, \tag{47}$$

$$\Theta(z; \beta_1, \cdots, \beta_s; c) = \frac{1}{C[\beta_1, \cdots, \beta_s; c]} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \dfrac{\Phi'_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \dfrac{\Phi'_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \cdots & \dfrac{\Phi'_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \\ \dfrac{\Phi''_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \dfrac{\Phi''_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \cdots & \dfrac{\Phi''_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_1}}{\Phi_{\beta_1}} & \dfrac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_2}}{\Phi_{\beta_2}} & \cdots & \dfrac{\Phi^{(s-1)}_{\beta_s}}{\Phi_{\beta_s}} \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Если β — тот из $s+1$ номеров $1, 2, \cdots, s, s+1$, который не оказался среди чисел $\beta_1, \cdots, \beta_s$, то

$$\Phi_\beta(z) = \Theta(z; \beta_1, \cdots, \beta_s; c) \cdot H(z). \tag{49}$$

Положим

$$W(z) = \max \{\ln |\Theta(z; \beta_1, \cdots, \beta_s; c)|\} \tag{50}$$

(максимум берется при фиксированных z и c по всевозможным допустимым комбинациям $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$).

Тогда, как показал Картан (см. [1] или [2], стр. 296),

$$v(z) = \ln |H(z)| + W(z). \tag{51}$$

Из (43) и (51) видно, что нам теперь предстоит оценить сверху интегралы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\varphi})| \, d\varphi \tag{52}$$

и

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi}) \, d\varphi \tag{53}$$

при больших c.

9. Предварительно выясним, как располагаются нули функций $\Phi_\nu(z)$ в окрестности точки $z=0$ при больших c.

Пусть функция $\psi_s(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка λ $(\lambda > 0)$, так что

$$\psi_s(z) = z^\lambda \chi(z), \quad \chi(0) = 1. \tag{54}$$

Можно выбрать затем r_0 настолько малым, чтобы всюду в круге $\delta \{|z| \leqslant r_0\}$ функция $\chi(z)$ была отлична от нуля.

Применяя теорему Руше к функциям

$$p_s(c^2)\, \psi_s(z) \text{ и } \sum_{k=0}^{s-1} p_k(c^2)\, \psi_k(z),$$

легко убедиться, что при достаточно больших c их сумма, то есть функция $\Phi(z; c^2)$, имеет в δ в точности λ нулей (с учетом их кратности).

Не исключено, что $\Phi(z; c^2)$ обращается в нуль и в точке $z=0$. Обозначим кратность нуля функции Φ в точке $z=0$ через μ. С изменением c может, вообще говоря, меняться и μ. Покажем, что *при достаточно больших c порядок μ не зависит от c.* Действительно, пусть для какой-либо последовательности чисел c_m $(c_m \to \infty$ при $m \to \infty)$, функция $\Phi(z; c^2)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка $\mu_1 = \text{const} \leqslant \lambda$, так что для каждого c_m

$$\Phi(z; c_m^2) = z^{\mu_1} \cdot E(z; c^2), \tag{55}$$

причем $E(z; c^2)$ регулярна и отлична от нуля в точке $z=0$. Тогда равенство (36) перепишем так:

$$\frac{z^{\mu_1} \cdot E(z; c_m^2) - z^\lambda \chi(z) \cdot p_s(c_m^2)}{p_{s-1}(c_m^2)} = \psi_{s-1}(z) + \sum_{k=1}^{s-2} \frac{p_k(c_m^2)}{p_{s-1}(c_m^2)} \psi_k(z), \tag{56}$$

причем $\psi_{s-1}(z) \neq 0$. При $c_m \to \infty$ правая часть формулы (56) сходится в δ равномерно к $\psi_{s-1}(z)$. Поэтому при больших c_m правая часть формулы (56) должна иметь в точке $z=0$ нуль порядка не выше, чем $\psi_{s-1}(z)$; с другой стороны, правая часть равенства (56) при любых c_m имеет в точке $z=0$ нуль порядка не ниже μ_1. Следовательно, $\psi_{s-1}(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка не ниже μ_1. Повторяя затем сходные рассуждения, легко убедиться, что *все* функции $\psi_k(z)$ $(k=s, s-1, s-2, \cdots, 1)$ делятся на z^{μ_1}. Но тогда, как ясно из (36), $\Phi(z; c^2)$ делится на z^{μ_1} при *всех* c (а не только для c из последовательности $\{c_m\}$).

Отсюда, очевидно следует, что *порядок* μ *нуля функции* $\Phi(z; c^2)$ *в точке* $z=0$ *при больших* c *не зависит от* c.

10. Могут представиться два случая:

I) $\mu=\lambda$ или II) $\mu<\lambda$.

Если $\mu=\lambda$, то $\Phi(z; c^2)$ (при больших c) не имеет, очевидно, нулей в кольце $0<|z|\leqslant r_0$; то же остается в силе и для функций $\Phi_\nu(z)$ $(\nu=1, 2, \cdots, s, s+1)$.

При $\mu<\lambda$ этого уже утверждать нельзя. Однако мы докажем следующее:

если $\mu<\lambda$, *то существуют такие положительные константы* A *и* α, *не зависящие от* c, *что при достаточно больших* c *функции* $\Phi(z; c^2)$ *не имеют нулей в кольце*

$$0<|z|\leqslant A\cdot c^{-\alpha}; \tag{57}$$

то же остается в силе для функций $\Phi_\nu(z)$.

Действительно, из (36) видно, что все нули функции $\Phi(z; c^2)$, лежащие в кольце

$$0<|z|\leqslant r_0,$$

удовлетворяют уравнению

$$z^{\lambda-\mu}+\sum_{k=1}^{s-1}\frac{p_k(c^2)}{p_s(c^2)}\chi_k(z)=0, \tag{58}$$

где $\chi_k(z)\equiv\psi_k(z)/(z^\mu\chi(z))$, причем все $\chi_k(z)$ $(k=1, \cdots, s-1)$ регулярны в δ и хотя бы одна из них отлична от 0 в точке $z=0$.

Введем новое вспомогательное переменное $\zeta=c^{-2}$; рассмотрим функции $\pi_k(\zeta)=\dfrac{p_k(c^2)}{p_s(c^2)}$ и доопределим их при $\zeta=0$ по непрерывности. Тогда очевидно, что $\pi_k(0)=0$ при $k=1, 2, \cdots, s-1$.

Уравнение (58) перепишется следующим образом:

$$z^{\lambda-\mu}+\sum_{k=1}^{s-1}\pi_k(\zeta)\cdot\chi_k(z)=0. \tag{59}$$

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса (см. [5], стр. 352) это уравнение (относительно переменного z) равносильно некоторому уравнению вида

$$A_0(\zeta)+A_1(\zeta)\cdot z+A_2(\zeta)\cdot z^2+\cdots+A_{\lambda-\mu-1}(\zeta)z^{\lambda-\mu-1}+z^{\lambda-\mu}=0, \tag{60}$$

где все $A_k(\zeta)$ — аналитические функции в точке $\zeta=0$, причем $A_k(0)=0$.

Разлагая, если это возможно, левую часть уравнения (60) на неприводимые псевдополиномы (в окрестности точки (0,0)) и применяя известную теорему о явном задании аналитической поверхности (см. [6], стр. 88—89, теорема 4.12), мы придем к выводу, что уравнение (59) определяет в окрестности точки $z=0$ конечное число функций вида

$$z = d_{1,j}\zeta^{\frac{1}{m_j}} + d_{2,j}\zeta^{\frac{2}{m_j}} + \cdots$$

(здесь m_j — натуральные числа, $\Sigma m_j = \lambda - \mu$).

Отсюда ясно, что при достаточно больших c нули функции $\Phi(z; c^2)$, лежащие в кольце $0 < |z| \leqslant r_0$, удовлетворяют неравенству вида

$$|z| > \frac{A}{c^{\alpha}}, \tag{61}$$

где A и α — положительные константы, не зависящие от c.

То же верно, очевидно, и для нулей каждой функции $\Phi_\nu(z)$ ($\nu = 1, \cdots, s, s+1$). Так как таких функций конечное число, то можно выбрать A таким, чтобы неравенство (61) имело место одновременно для всех ν.

Очевидно, оба случая I и II можно охватить одной формулой (57); при этом, в случае I можно брать $\alpha=0$, $A = r_0$.

Итак, если $\psi_s(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка λ, то существует такое целое число μ ($0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$) и такие константы $A>0$ и $\alpha \geqslant 0$, что при всех достаточно больших c все функции $\Phi_\nu(z)$ ($\nu=1, 2, \cdots, s, s+1$) имеют в точке $z=0$ нуль порядка μ, а все остальные нули этих функций удовлетворяют неравенству (61).

Этим фактом воспользуемся в п. 11.

11. Вернемся теперь к оценке интеграла (52).

В силу формулы Иенсена (7)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\varphi})|\, d\varphi = N(c, 0, H) - N(c, \infty, H) + \ln|\tau(H)|,$$

откуда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant \ln|\tau(H)| + N(c, 0, H). \tag{62}$$

Но

$$|\tau(H)| = \frac{|\tau(\Phi_1)| \cdots |\tau(\Phi_{s+1})|}{|\tau(w[\psi_1, \cdots, \psi_s])| \cdot |p_1(c^2) \cdots p_s(c^2)|} < A\, c^{(2s+2)\,\alpha_s}.$$

Поэтому (при достаточно больших c)

$$\ln|\tau(H)| \leqslant A \ln c. \tag{63}$$

Теперь нужно оценить $N(c, 0, H)$. Будем придерживаться следующих обозначений: $\overline{n}_\nu(r, 0)$ обозначает число нулей функции $\Phi_\nu(z)$ в круге $|z| \leqslant r$, причем каждый нуль засчитывается столько раз, каково наименьшее из двух чисел: порядок этого нуля и число $s-1$;

под $\overline{N}_\nu(r, 0)$ понимается величина

$$\int_0^r \frac{\bar{n}_\nu(t, 0) - \bar{n}_\nu(0,0)}{t} dt + \bar{n}_\nu(0, 0) \ln r. \tag{64}$$

Картан показал (см. [1], или [2], стр. 296), что

$$N(r, 0, H) \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} \overline{N}_\nu(r, 0). \tag{65}$$

Но $\overline{N}_\nu(r, 0)$ легко оценивается, если использовать (64) и то, что $\Phi_\nu(z)$ имеет в $d = \{|z| \leqslant c\}$ не более, чем h нулей (см. конец п. 6).

Действительно, при достаточно больших c

$$\overline{N}_\nu(c, 0) \leqslant \int_{Ac^{-\alpha}}^{c} \frac{\bar{n}_\nu(t, 0)}{t} dt + \mu \ln c \leqslant h \ln \frac{c}{A \cdot c^{-\alpha}} + \lambda \ln c \leqslant A \ln c.$$

Поэтому (см. (65))

$$N(c, 0, H) \leqslant A \ln c. \tag{66}$$

Из (62), (63) и (66) следует, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |H(ce^{i\varphi})| d\varphi < A \ln c. \tag{67}$$

12. Теперь обратимся к оценке интеграла (53).

Мы сумеем его оценить, если воспользуемся „функцией приближения" Неванлинны $m(r, f)$ (см. (14)). Из (46), (50), (48) и (14) имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi}) d\varphi < A + \sum_{\nu=1}^{s+1}\left[m\left(c, \frac{\Phi_\nu'}{\Phi_\nu}\right) + m\left(c, \frac{\Phi_\nu''}{\Phi_\nu}\right) + \cdots + m\left(c, \frac{\Phi_\nu^{(s-1)}}{\Phi_\nu}\right)\right]. \tag{68}$$

Но при любых r, ν и k

$$m\left(r, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu}\right) = m\left(r, \frac{\Phi_\nu'}{\Phi_\nu} \cdot \frac{\Phi_\nu''}{\Phi_\nu'} \cdots \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant m\left(r, \frac{\Phi_\nu'}{\Phi_\nu}\right) + m\left(r, \frac{\Phi_\nu''}{\Phi_\nu'}\right) + \cdots + m\left(r, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right). \tag{69}$$

Таким образом, оценка интересующего нас интеграла (53) сводится к оценке (сверху) величин вида

$$m\left(r, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right) \quad (\nu = 1, \cdots, s+1;\ k = 1, \cdots, s-1). \tag{70}$$

Приведем два неравенства, которые будут использованы для оценки величин (70) (см. ниже неравенства а) и б)).

а) (см. [7], стр. 61, сноска, формула (5')): если для мероморфной функции $f(z)$ имеем $\tau(f) = c\lambda$, то при $0 < r < \rho$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < 34 + 5 \overset{+}{\ln} |\lambda| + 3 \ln^+ \frac{1}{|c\lambda|} + 7 \overset{+}{\ln} \frac{1}{r} + 4 \overset{+}{\ln} \rho + 3 \overset{+}{\ln} \frac{1}{\rho - r} +$$
$$+ 4 \overset{+}{\ln} T(\rho, f). \tag{71}$$

Ниже мы применим формулу (71) при следующих дополнительных предположениях: функция $f(z)$ будет зависеть от некоторого параметра $c>0$ (это будет функция $\Phi_\nu^{(k)}(z)$); нас будет интересовать случай больших c, при этом условии $|\tau(f)|$ будет больше некоторой положительной константы, а число $|\lambda|$ ограничено; число r будет большим.

При таких предположениях формулу (71) можно записать немного проще:

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A + 4\ln\rho + 3\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho-r} + 4\overset{+}{\ln}T(\rho, f); \tag{72}$$

б)

$$T(r, f') \leqslant 2\,T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right). \tag{73}$$

Чтобы убедиться в справедливости этого неравенства, достаточно заметить, что

$$T(r, f') = N(r, f') + m(r, f') = 2N(r, f) - N_1(r, f) + m\left(r, f\cdot\frac{f'}{f}\right) \leqslant$$

$$\leqslant N(r, f) + [N(r, f) + m(r, f)] + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant 2\,T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

(Здесь, как это принято в теории распределения значений мероморфных функций (см. [8], стр. 14), под $N_1(r, f)$ мы понимаем величину

$$\int_0^r \frac{n_1(t, a) - n_1(0, a)}{t}\,dt + n_1(0, a)\ln r,$$

а $n_1(t, a)$ означает число a-точек функции $f(z)$ в круге $|z| \leqslant t$, причем каждая a-точка порядка λ засчитывается $\lambda-1$ раз.)

В сочетании с (72) формула (73) дает:

$$T(r, f') < A + 4\ln\rho + 3\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho-r} + 2\,T(r, f) + 4\overset{+}{\ln}T(\rho, f). \tag{74}$$

Следовательно,

$$T(r, f') < A + 4\ln\rho + 3\ln^{+}\frac{1}{\rho-r} + 6\,T(\rho, f). \tag{75}$$

Заметим попутно, что вместо неравенства (75) можно было бы с таким же успехом воспользоваться одним неравенством Чжуан Цзи-тая ([8], теорема 8).

Положим

$$f(z) = \Phi_\nu^{(k-1)}(z).$$

Пусть далее числа $\rho_0, \rho_1, \cdots, \rho_s$ таковы, что

$$1 < c = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_s.$$

Выбор этих чисел мы уточним позднее. Воспользуемся неравенствами (71), (75) и соотношениями $\ln x < x$ (для всякого $x>0$), $T(\rho_k) \leqslant T(\rho_s)$ при $\rho_k \leqslant \rho_s$, а также известными свойствами плюс-логарифма (см. [3] или [8]). Имеем

$$m\left(c, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right) < A + A\ln\rho_1 + A\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_1-\rho_0} + A\overset{+}{\ln}T(\rho_1, \Phi_\nu^{(k-1)}), \tag{76}$$

$$T(\rho_1, \Phi_\nu^{(k-1)}) < A + A\ln\rho_2 + A\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_2-\rho_1} + AT(\rho_2, \Phi_\nu^{(k-2)}),$$

$$T(\rho_2, \Phi_\nu^{(k-2)}) < A + A\ln\rho_3 + A\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_3-\rho_2} + AT(\rho_3, \Phi_\nu^{(k-3)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(\rho_{k-1}, \Phi'_\nu) < A + A\ln\rho_{k-1} + A\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_k-\rho_{k-1}} + A\,T(\rho_{k-1}, \Phi_\nu).$$

Поэтому

$$T(\rho_1, \Phi_\nu^{(k-1)}) < A + A\ln\rho_s + A\sum_{j=0}^{s-1}\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_{j+1}-\rho_j} + A\,T(\rho_s, \Phi_\nu),$$

$$m\left(c, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right) < A + A\ln\rho_s + A\sum_{j=0}^{s-1}\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_{j+1}-\rho_j} + A\overset{+}{\ln}T(\rho_s, \Phi_\nu). \tag{77}$$

Вспомнив выражение для Φ_ν (41), (36), из (77) выводим

$$m\left(c, \frac{\Phi_\nu^{(k)}}{\Phi_\nu^{(k-1)}}\right) < A + A\ln\rho_s + A\sum_{j=1}^{s}\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_j-\rho_{j-1}} + A\ln c +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{s}\overset{+}{\ln}T(\rho_s, \psi_\nu). \tag{78}$$

Из (68), (69) и (78) заключаем, что при всех достаточно больших c имеем неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi})\,d\varphi < A + A\ln c + A\ln\rho_s + A\sum_{\nu=1}^{s}\overset{+}{\ln}T(\rho_s, \psi_\nu) +$$

$$+ A\sum_{j=1}^{s}\overset{+}{\ln}\frac{1}{\rho_j-\rho_{j-1}}. \tag{79}$$

Можно, очевидно, считать, что $T(c, \psi_\nu) \geqslant 1$ для $\nu = 1, \cdots, s$. Теперь уточним выбор чисел ρ_k. Положим

$$\rho_k = c + \frac{k}{s\cdot[T(c, \psi_1) + \cdots + T(c, \psi_s)]} \quad (k = 0, 1, \cdots, s). \tag{80}$$

Если $0 \leqslant k \leqslant s$, то, очевидно,

$$\rho_s \leqslant c + \frac{1}{T(c, \psi_k)}. \tag{81}$$

Формулы (79) и (80) приводят к неравенству

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi})\,d\varphi < A + A\ln c + A\sum_{k=1}^{s}\ln T(c, \psi_k) +$$

$$+A\sum_{k=1}^{s}\ln T\left(c+\frac{1}{T(c,\psi_k)},\psi_k\right). \tag{82}$$

Воспользуемся теперь следующим свойством монотонно возрастающих функций (см. [10], гл. II, лемма 2.4): если функция $h(c)$ монотонно возрастает при $c>0$, то

$$h\left(c+\frac{1}{h(c)}\right)<2h(c) \tag{83}$$

для всех c кроме, возможно, множества конечной меры.

Полагая в нашем случае $h(c)=T(c,\psi_k)$, мы можем заключить из (82), что для всех положительных c вне множества конечной меры

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(ce^{i\varphi})\,d\varphi<A+A\ln c+A\sum_{k=1}^{s}\ln T(c,\psi_k). \tag{84}$$

13. Сопоставляя формулы (43), (50)—(53), (67), (84) найдем, что при всех $c>0$ (кроме, возможно, множества конечной меры)

$$T(c,G)<A\ln c+A\sum_{k=1}^{s}\ln T(c,\psi_k). \tag{85}$$

Но

$$T(c,\psi_k)=T\left(c,\frac{\psi_k}{\psi_s}\cdot\psi_s\right)\leqslant T\left(c,\frac{\psi_k}{\psi_s}\right)+T(c,\psi_s).$$

Учитывая (20) и то, что ψ_s— полином, получим

$$T(c,G)<A\ln T(c,B)+A\ln c,$$

то есть формулу (33) (см. конец п. 5). Из (30) и (33) следует (как мы уже отметили в п. 5) неравенство

$$T(c,B)<A\ln T(c,B)+A\ln c, \tag{27}$$

то есть

$$1<A\frac{\ln T(c,B)}{T(c,B)}+A\frac{\ln c}{T(c,B)} \tag{86}$$

для всех c, кроме, быть может, множества конечной меры.

Допустим теперь, что хотя бы при одном k ($k=1,2,\cdots,s-1$) функция $f_{ks}=\psi_k/\psi_s$ трансцендентна. Тогда, как известно (см. [8], стр. 35),

$$\lim_{c\to\infty}\frac{\ln c}{T(c,f_{ks})}=0,$$

и, в силу формулы (20),

$$\lim_{c\to\infty}\frac{\ln c}{T(c,B)}=0. \tag{87}$$

Так как $T(c,B)$ неограниченно возрастает с ростом c (это видно, в частности, из (20)), то при $c\to\infty$

$$\lim\frac{\ln T(c,B)}{T(c,B)}=0.$$

Переходя затем в неравенстве (86) к пределу, когда c неограниченно возрастает (оставаясь вне исключительных интервалов конечной суммарной меры), придем к противоречию.

Следовательно, все функции f_{ks} — рациональные, и, так как ψ_s — —полином, то и все функции ψ_k $(k=1, 2, \cdots, s-1)$ — также полиномы. Теорема 1 доказана.

14. Простым следствием из теоремы 1 является следующая

Теорема 2. *Всякая целая полианалитическая функция порядка n*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k f_k(z), \tag{1}$$

имеющая ограниченное множество нулей, представима в виде

$$f(z)\equiv e^{g(z)}P(z, \bar{z}), \tag{88}$$

где $g(z)$ — целая аналитическая функция, а $P(z, \bar{z})$ — n-аналитический полином.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(z)=z^{n-1}f(z). \tag{89}$$

Она, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому представима в виде (22), так что

$$F(z)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(z)\cdot\bar{z}^k\right)\cdot e^{g(z)}, \tag{90}$$

где $\varphi_k(z)$ — полиномы от z $(k=0, 1, \cdots, n-1)$. Из (89) и (90) видно, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k z^{n-1}f_k(z)\ e^{-g(z)}=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k\varphi_k(z),$$

и поэтому имеем n тождеств

$$z^{n-1}f_k(z)e^{-g(z)}=\varphi_k(z)\quad(k=0, 1, \cdots, n-1). \tag{91}$$

Таким образом, полином $\varphi_k(z)$ делится на z^{n-1}, то есть

$$\varphi_k(z)=z^{n-1}\cdot Q_k(z),$$

где $Q_k(z)$ — полином $(k=0, 1, \cdots, n-1)$.

Из (89) и (90) видно, что $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}Q_k(z)\cdot\bar{z}^k\right)\cdot e^{g(z)},$$

что и требовалось доказать.

Смоленский педагогический институт

Поступило 1.VI.66

Մ. Բ. ԲԱԼԿ

ԶՐՈՆԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՄԲ ԱՄԲՈՂՋ ՊՈԼԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Ամփոփում

$f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է պոլիանալիտիկ ամբողջ եթե նա ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա ներկայացվում է հետևյալ տեսքով

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k f_k(z), \tag{1}$$

որտեղ բոլոր $f_k(z)$-երը ամբողջ անալիտիկ ֆունկցիաներ են z-ից, իսկ $\bar{z}$-ը z-ի կոմպլեքս համալուծն է։

Մերոմորֆ կորերի ապարատի և մերոմորֆ ֆունկցիաների արժեքների բաշխման թեորիայի որոշ գնահատականների օգնությամբ ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Յուրաքանչյուր (1) տեսքի ամբողջ պոլիանալիտիկ ֆունկցիա, որի զրոների բազմությունը սահմանափակ է, կարելի է ներկայացնել երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով, որոնցից մեկը զրոներ չունեցող ամբողջ անալիտիկ ֆունկցիա է z-ից, իսկ մյուսը բազմանդամ է z և $\bar{z}$ փոփոխականներից։

M. B. BALK

ENTIRE POLYANALYTIC FUNCTIONS WITH A LIMITED SET OF ZEROS

Summary

A function $f(z)$ is called an entire polyanalytic function if it may be presented in the form

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\bar{z}^k f_k(z) \tag{1}$$

where all $f_k(z)$ are entire analytic functions in z, and $\bar{z}$ is the complex conjugate to z.

Using some results about meromorphic curves and some inequalities from the Nevanlinna value distribution theory, it is possible to prove the following theorem:

Every entire polyanalytic function (1) with a limited set of zeros may be presented as a product of an entire analytic function in z without zeroes ($e^{g(z)}$) and a polynomial ($P(z, \bar{z})$) in the conjugate variables z and $\bar{z}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Cartan.* Sur les zéros des combinaisons des p fonctions holomorphes données, „Mathematica", Cluj, 7 (1933), 5—31.
2. *А. А. Гольдберг.* Некоторые вопросы теории распределения значений, Дополнение к книге Г. Виттиха „Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям", Физматгиз М. (1960), 289—300.
3. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л. (1941).
4. *М. Б. Балк.* Большая теорема Пикара для целых бианалитических функций, УМН, 20, вып. 2 (1965), 157—167.
5. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций, М., ГИТТЛ (1950).
6. *Б. А. Фукс.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М., (1962).
7. *R. Nevanlinna.* Le thèoréme de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris (1929).
8. *Г. Виттих.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, Физматгиз, М. (1960).
9. *Chuang Chi tai.* Sur la comparaison de la croissance d'une fonction mèromorphe et de celle de sa derivée, Bulletion des sciences mathèmatiques, 75 (1951), 171—190.
10. *W. Hayman.* Meromorphic functions, L. (1964).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS