ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

Գինը 30 կ.
ЦЕНА 30 к.

индекс 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings zvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" re requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Paers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles, f foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be nderlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines bove. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line nd indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers nd locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the autor's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, he date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, he title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication hould be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in quare brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that ould call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the nal version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial ffice reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work s been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4, 1966 Математика

Г. А. ДАВТЯН

О ПОРЯДКАХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНЕЧНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ p-ГРУППАХ

Настоящая статья посвящена определению количества элементов любого заданного порядка в регулярных p-группах, удовлетворяющих условию A.

Введем некоторые определения, используемые в дальнейшем.

Определение 1. Пусть Φ — подгруппа Фраттини конечной p-группы P, $a_1, \cdots, a_r$ — базис фактор-группы P/Φ. Множество элементов $x_1, \cdots, x_r$, являющихся соответственно прообразами элементов $a_1, \cdots, a_r$ при гомоморфизме $P \to P/\Phi$, называется минимальным базисом p-группы P.

Определение 2. Упорядоченное множество отличных от единицы элементов $y_1, \cdots, y_s$ группы G порядков соответственно $n_1, \cdots, n_s$ называется базой единственности группы G, если каждый элемент x из G можно единственным образом представить в виде

$$x = y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdots y_s^{\alpha_s},$$

где $0 \leqslant \alpha_i < n_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

Определение 3. Мы скажем, что минимальный базис p-группы P: $x_1, \cdots, x_r$ удовлетворяет условию A, если при любом целом $i \geqslant 0$ коммутант группы, порожденной элементами $x_1^{p^i}, \cdots, x_r^{p^i}$ принадлежит подгруппе, порожденной элементами $x_1^{p^{i+1}}, \cdots, x_r^{p^{i+1}}$.

Можно доказать, что если некоторый минимальный базис регулярной p-группы удовлетворяет условию A, то и любой другой минимальный базис этой группы также удовлетворяет условию A. В дальнейшем для краткости такие группы будем называть группами, удовлетворяющими условию A.

Автором настоящей статьи доказано, что регулярная p-группа тогда и только тогда удовлетворяет условию A, когда число элементов минимального базиса равно числу элементов базы единственности.

Для доказательства следующей леммы удобно элементы базы единственности (минимального базиса) расположить в следующем порядке:

$$x_{m_1 1}, \cdots, x_{m_1 n_1}, \cdots, x_{m_l 1}, \cdots, x_{m_l n_l}, \cdots, x_{m_r n_r} \tag{1}$$

$$(m_1 < m_2 < \cdots < m_r),$$

где элементы $x_{m_l j}$ имеют порядок p^{m_l}, а n_l — число таких элементов.

Считаем, что регулярная p-группа P с базой единственности (1) удовлетворяет условию A.

Лемма. Пусть u — любой элемент группы P, а

$$u = x_{m_1 1}^{\alpha_{m_1 1} p^{m_1-\alpha}} \cdots x_{m_1 n_1}^{\alpha_{m_1 n_1} p^{m_1-\alpha}} \cdots x_{m_l 1}^{\alpha_{m_l 1} p^{m_l-\alpha}} \cdots x_{m_l n_l}^{\alpha_{m_l n_l} p^{m_l-\alpha}} \cdot \tag{2}$$

$$\cdot x_{m_{l+1} 1}^{\alpha_{m_{l+1} 1} p^{m_{l+1}-\alpha}} \cdots x_{m_{l+1} n_{l+1}}^{\alpha_{m_{l+1} n_{l+1}} p^{m_{l+1}-\alpha}} \cdots x_{m_r 1}^{\alpha_{m_r 1} p^{m_r-\alpha}} \cdots x_{m_r n_r}^{\alpha_{m_r n_r} p^{m_r-\alpha}}$$

его единственное представление при помощи базы единственности (1). Если $m_{l+1} \geqslant \alpha > m_l$, то числа $p^{m_l-\alpha}$ считаем равными единице, а $\alpha_{m_1 1}, \cdots, \alpha_{m_1 n_1}, \cdots, \alpha_{m_l 1}, \cdots, \alpha_{m_l n_l}$ — произвольными целыми числами. Пусть среди коэффициентов показателей $\alpha_{m_{l+1} 1}, \cdots, \cdots, \alpha_{m_{l+1} n_{l+1}}, \cdots, \alpha_{m_r 1}, \cdots, \alpha_{m_r n_r}$, каждый из которых взаимно прост с числом p, имеется хоть один отличный от нуля. Тогда элемент (2) имеет порядок p^α.

Доказательство. Тот факт, что $u^{p^\alpha} = 1$ вытекает из того, что каждый множитель произведения (2) имеет порядок не больший p^α и из регулярности p-группы P. Докажем, что $u^{p^{\alpha-1}} \neq 1$, откуда будет следовать, что элемент u имеет порядок p^α. Пусть

$$\alpha_{m_{l+1} 1} = \cdots = \alpha_{m_{l+1} n_{l+1}} = \cdots = \alpha_{m_{l+s-1} 1} = \cdots = \alpha_{m_{l+s-1} n_{l+s-1}} = 0,$$

но среди системы чисел $\alpha_{m_{l+s} 1}, \cdots, \alpha_{m_{l+s} n_{l+s}}$ есть хоть одно, отличное от нуля. Можем считать, что $\alpha_{m_{l+s} 1} \neq 0$, ибо порядок следования элементов в (1) не влияет на базу единственности. Возведя элемент (2) в степень $p^{\alpha-1}$ и используя свойство регулярности p-группы P, получим

$$u^{p^{\alpha-1}} = \Big(x_{m_1 1}^{\alpha_{m_1 1} p^{m_1-\alpha}} \cdots x_{m_1 n_1}^{\alpha_{m_1 n_1} p^{m_1-\alpha}} \cdots x_{m_{l+s} 1}^{\alpha_{m_{l+s} 1} p^{m_{l+s}-\alpha}} \cdots x_{m_{l+s} n_{l+s}}^{\alpha_{m_{l+s} n_{l+s}} p^{m_{l+s}-\alpha}} \cdots$$

$$\cdots x_{m_r n_r}^{\alpha_{m_r n_r} p^{m_r-\alpha}} \Big)^{p^{\alpha-1}} = \Big(x_{m_{l+s} 1}^{\alpha_{m_{l+s} 1} p^{m_{l+s}-\alpha}} \cdots x_{m_{l+s} n_{l+s}}^{\alpha_{m_{l+s} n_{l+s}} p^{m_{l+s}-\alpha}} \cdots$$

$$\cdots x_{m_r 1}^{\alpha_{m_r 1} p^{m_r-\alpha}} \cdots x_{m_r n_r}^{\alpha_{m_r n_r} p^{m_r-\alpha}} \Big)^{p^{\alpha-1}},$$

так как порядки элементов $x_{m_1 1}, \cdots, x_{m_{l+s-1} n_{l+s-1}}$ не превосходят $p^{\alpha-1}$. Далее из регулярности группы получим

$$u^{p^{\alpha-1}} = x_{m_{l+s} 1}^{\alpha_{m_{l+s} 1} p^{m_{l+s}-1}} \cdots x_{m_{l+s} n_{l+s}}^{\alpha_{m_{l+s} n_{l+s}} p^{m_{l+s}-1}} \cdots x_{m_r 1}^{\alpha_{m_r 1} p^{m_r-1}} \cdots$$

$$\cdots x_{m_r n_r}^{\alpha_{m_r n_r} p^{m_r-1}} \cdot s^{p^{\alpha-1}},$$

где s — элемент коммутанта группы, порожденной элементами

$$x_{m_1 1}^{p^{m_{l+s}-\alpha}}, \cdots, x_{m_1 n_1}^{p^{m_{l+s}-\alpha}}, \cdots, x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}-\alpha}}, \cdots, x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}-\alpha}}.$$

В силу условия A

$$s\in\left\{x_{m_1 1}^{p^{m_{l+s}-\alpha+1}},\dots,x_{m_1 n_1}^{p^{m_{l+s}-\alpha+1}},\dots,x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}-\alpha+1}},\dots,x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}-\alpha+1}}\right\},$$

а элемент $s^{p^{\alpha-1}}$ принадлежит подгруппе

$$\left\{x_{m_1 1}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_1 n_1}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}}}\right\}=$$

$$=\left\{x_{m_{l+s+1}1}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_{l+s+1}n_{l+s+1}}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}}},\dots,x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}}}\right\}.$$

Таким образом

$$u^{p^{\alpha-1}}=x_{m_{l+s}1}^{\alpha_{m_{l+s}1}p^{m_{l+s}-1}}\cdot b,$$

где элемент b принадлежит подгруппе, порожденной элементами

$$x_{m_{l+s}2}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_{l+s}n_{l+s}}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}-1}}. \tag{3}$$

Если допустить, что $u^{p^{\alpha-1}}=1$, то элемент $x_{m_{l+s}}^{p^{m_{l+s}-1}}$ принадлежал бы подгруппе, порожденной элементами (3), что неверно, ибо элементы

$$x_{m_{l+s}1}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_{l+s}n_{l+s}}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_r 1}^{p^{m_{l+s}-1}},\dots,x_{m_r n_r}^{p^{m_{l+s}-1}}$$

составляют минимальный базис в группе $P^{(m_{l+s}-1)}$, порожденной этими элементами. Лемма доказана.

Теорема. Пусть $P=\{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ — *регулярная р-группа с инвариантами* $p^{m_1}, p^{m_2}, \dots, p^{m_t}$ $(m_1\geqslant m_2\geqslant\dots\geqslant m_t)$, *удовлетворяющая условию* A, *где элементы* $x_1, x_2, \dots, x_t$ *составляют базу единственности (минимальный базис) данной группы [3]. Тогда число элементов этой группы, имеющих порядок* p^α, *равно* $p^{t(\alpha-1)}\times$ $\times(p^t-1)$, *если* $m_t\geqslant\alpha$, *и равно*

$$p^{l(\alpha-1)+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s}\cdot(p^l-1),$$

если $m_l\geqslant\alpha>m_{l+1}$.

Доказательство. Рассмотрим элементы вида

$$x_1^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha}k_{1s}p^{m_1-s}}\cdot x_2^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha}k_{2s}p^{m_2-s}}\cdots x_t^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha}k_{ts}p^{m_t-s}}, \tag{4}$$

где отрицательные степени числа p в показателях элементов (если такие существуют) положим равными нулю. Например, при $\alpha\geqslant m_t$

$$x_t^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha}k_{ts}p^{m_t-s}}=x_t^{\sum\limits_{s=1}^{m_t}k_{ts}p^{m_t-s}}.$$

Если $m_j \geqslant \alpha > m_{j+1}$ и требуется чтобы элемент (4) был порядка p^{α}, то мы, на основании леммы, должны считать, что не все числа $k_{1\alpha}, k_{2\alpha}, \cdots$ $\cdots, k_{j\alpha}$ одновременно равны нулю. Рассмотрим два случая.

Первый случай. $m_t \geqslant \alpha$. В произведении (4) будут участвовать все $k_{i1}, \cdots, k_{i\alpha}$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$. Этому произведению поставим в соответствие последовательность целых чисел

$$(k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1\alpha}, k_{21}, k_{22}, \cdots, k_{2\alpha}, \cdots, k_{t1}, k_{t2}, \cdots, k_{t\alpha}), \tag{5}$$

в которой каждое k_{ij} может принимать независимо от других целые значения от нуля до $p-1$ (т. е. p различных значений). Очевидно, в силу единственности представления элемента группы в виде произведения (4) следует, что различным последовательностям вида (5), исключая последовательности вида

$$(k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1\alpha-1}, 0, k_{21}, k_{22}, \cdots, k_{2\alpha-1}, \cdots, 0, k_{t1}, k_{t2}, \cdots, k_{t\alpha-1} 0), \tag{6}$$

которым соответствуют порядки меньше p^{α}, соответствуют различные элементы группы, имеющие порядок p^{α}. Таким образом, чтобы найти число элементов группы, имеющих порядок p^{α}, необходимо определить количество последовательностей вида (5), и от него отнять число последовательностей вида (6).

Последовательности вида (5) образуют всевозможные перестановки с повторениями из p элементов по αt, а последовательности вида (6)— всевозможные перестановки с повторениями из p элементов по $\alpha t - t$. Отсюда получим, что число элементов данной группы, имеющих порядок p^{α}, равно

$$p^{\alpha t} - p^{\alpha t - t} = p^{t(\alpha-1)} \cdot (p^t - 1). \tag{7}$$

Второй случай. $m_l \geqslant \alpha > m_{l+1}$. В этом случае произведение (4) будет иметь вид

$$x_1^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha} k_{1s} p^{m_1-s}} \cdot x_2^{\sum\limits_{s=1}^{\alpha} k_{2s} p^{m_2-s}} \cdots x_l^{\sum\limits_{s=1}^{m_l} k_{ls} p^{m_l-s}} \cdots x_t^{\sum\limits_{s=1}^{m_t} k_{ts} p^{m_t-s}}, \tag{4'}$$

которому поставим в соответствие последовательность чисел

$$(k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1\alpha}, \cdots, k_{l-11}, k_{l-12}, \cdots, k_{l-1\alpha}, \cdots, k_{l1}, \cdots, k_{lm_l}, \cdots$$
$$\cdots, k_{t1}, \cdots, k_{tm_t}) \tag{5'}$$

(и здесь различным последовательностям вида (5′) будут соответствовать различные элементы группы). Но последовательностям вида

$$(k_{11}, k_{12}, \cdots, k_{1\alpha-1}, 0, k_{21}, k_{22}, \cdots, k_{2\alpha-1}, 0, \cdots, k_{l1}, \cdots, k_{lm_l}, \cdots$$
$$\cdots, k_{t1}, \cdots, k_{tm_t}), \tag{6'}$$

как было отмечено выше, соответствуют элементы группы, имеющие порядок меньший, чем p^{α}. Аналогично предыдущему, чтобы найти число элементов группы, имеющих порядок p^{α}, нужно и здесь определить число последовательностей вида (5′), которые образуют всевозможные перестановки с повторениями из p элементов по $\alpha i+\sum\limits_{s=l+l}^{t} m_s$ и от него отнять число последовательностей вида (6′), которые составляют всевозможные перестановки с повторениями из p элементов по $\alpha i+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s - i$. Таким образом, число всех элементов порядка p^α $(m_l \geqslant \alpha > m_{l+1})$ равно

$$p^{\alpha l+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s} - p^{\alpha l+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s - l} = p^{l(\alpha-1)+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s}\cdot(p^l-1). \tag{8}$$

Формула (7) является частным случаем формулы (8). В самом деле, если $m_t \geqslant \alpha$, то $i=t$, а сумма $\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s$ исчезает. Подставляя эти значения в формулу (8), получим (7).

Например, пусть требуется определить число элементов различных порядков в регулярной p-группе P, удовлетворяющей условию A с инвариантами: p^4, p^3, p^3, p^2. Обозначим через n_a число элементов группы, имеющих порядок p^a; n_1, n_2 определяем по формуле (7), для данной группы $t=4$,

$$n_1=p^4-1,\ n_2=p^4(p^4-1)=p^8-p^4,$$

n_3, n_4 определяем по формуле (8). Для нахождения n_3 мы должны принять $i=3$, таким образом, $\sum\limits_{s=4}^{4} n_s=2$,

$$n_3=p^{3(3-1)+2}\cdot(p^3-1)=p^{11}-p^8.$$

Для — n_4: $i=1$, $\sum\limits_{s=2}^{4} m_s=3+3+2=8$, подставляя эти значения в формулу (8), получим

$$n_4=p^{3+8}\cdot(p-1)=p^{12}-p^{11}.$$

Число всех элементов отличных от единицы равно $n_1+n_2+n_3+n_4=$ $=p^{12}-1$, ибо группа с инвариантами p^4, p^3, p^3, p^2 имеет порядок p^{12}.

Учитывая, что две циклические подгруппы порядка p^α или совпадают или не имеют общих элементов порядка p^α, получим число всех циклических подгрупп порядка p^α, если разделим число, выражающее количество всех элементов порядка p^α в группе с инвариантами p^{m_1}, p^{m_2}, $\cdots$, p^{m_t} на число всех элементов порядка p^α в циклической группе порядка p^α. Таким образом, число всех циклических подгрупп порядка p^α $(m_l \geqslant \alpha > m_{l+1})$ в группе с инвариантами p^{m_1}, p^{m_2}, $\cdots$ $\cdots$, p^{m_t} $(m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_t)$ равно

$$\frac{p^{l(\alpha-1)+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s}\cdot(p^l-1)}{p^{\alpha-1}\cdot(p-1)}=p^{(l-1)(\alpha-1)+\sum\limits_{s=l+1}^{t} m_s}(p^{l-1}+p^{l-2}+\cdots+1).$$

Например, если требуется определить число всех подгрупп порядка p в указанной группе, то в последней формуле мы должны положить $i=t$, $\sum\limits_{s=t+1}^{t} m_s=0$, $\alpha=1$, то есть число циклических подгрупп порядка p в указанной группе будет равно

$$p^{t-1}+p^{t-2}+\cdots+p+1,$$

откуда видно, что это число зависит только от t и p и не зависит от $m_1, m_2, \cdots, m_t$.

Абелева группа P с инвариантами p^{m_1}, p^{m_2}, $\cdots$, p^{m_t} имеет одну единственную подгруппу с инвариантами p^α, $p^\alpha, \cdots$, p^α, $p^{m_{s+1}}$, $\cdots, p^{m_t}$ при $m_s \geqslant \alpha > m_{s+1}$ $(s=1,\ 2, \cdots, t)$. Это вытекает из того факта, что группа P и подгруппа с указанными инвариантами согласно формуле (8), имеют одинаковое число элементов, имеющих порядки $p, p^2, \cdots, p^\alpha$. Таким образом, указанная подгруппа состоит из всех элементов группы P, имеющих порядки p, p^2, $\cdots$, p^α и поэтому будет единственной подгруппой.

Ереванский УКП РИИЖТ Поступило 22.IX.65 г

Գ. Հ. ԴԱՎԹՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ P-ԽՄԲԵՐԻ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԿԱՐԳԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքի մեջ արտածվում է բանաձև, որը հնարավորություն է տալիս որոշելու ցանկացած տված կարգի էլեմենտների քանակը ռեգուլյար p-խմբերի մեջ, որոնք բավարարում են A պայմանին՝ p-խմբի P′ կոմուտանտը պատկանում է $P^{(1)}$ ենթախմբին, որը բաղկացած է P խմբի էլեմենտների p աստիճանից։ Խմբերի նշված տեսակների համար որոշվում է p^α կարգի բոլոր ցիկլիկ ենթախմբերի քանակը ցանկացած α ամբողջ թվերի համար։

Ստացվում է նաև հետևյալ արդյունքը, որ $p^{m_1} \geqslant p^{m_2} \geqslant \cdots \geqslant p^{m_r}$ ինվարիանտներով աբելյան խումբը ունի միայն մեկ ենթախումբ p^α, $p^\alpha, \cdots$, p^α, $p^{m_{k+1}}, \cdots$, p^{m_r} ինվարիանտներով, եթե $m_k \geqslant \alpha > m_{k+1}$։

G. A. DAVTIAN

ON THE ORDER OF ELEMENTS OF FINITE REGULAR *P*-GROUPS

Summary

In this paper a formula is deduced which gives us the opportunity to determine the number of elements of any given order in regular *p*-groups which satisfy the condition *A*.

For the above mentioned groups the number of cyclic subgroups of the order p^α is pointed out for any given integer α.

The following result is also achieved. If $m_k > \alpha > m_{k+1}$, then the Abelian group with invariants $p^{m_1} \geqslant p^{m_2} \geqslant \cdots \geqslant p^{m_r}$ has only one subgroup with invariants $p^\alpha, p^\alpha, \cdots, p^\alpha, p^{m_{k+1}}, p^{m_r}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Курош*, Теория групп, М., 1953 г.
2. *Ш. С. Кемхадзе*, Базы единственности в бесконечных регулярных p-группах, Укр. мат. журнал, 4 (1952).
3. *P. Hall*, A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. Lond Math. soc., (2) 36 (1933).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, № 4, 1966 Математика

А. С. МАШУРЯН

ОБ АКСИОМАХ ДИСТРИБУТИВНОСТИ В ИСЧИСЛЕНИИ СТРОГОЙ ИМПЛИКАЦИИ АККЕРМАНА

Аккерман в 1956 г. построил исчисление, в котором, в отличие от классического исчисления высказываний, импликация отражает некоторую связь по смыслу.

В частности, устранены так называемые парадоксы материальной импликации, заключающиеся в следующем: истинное высказывание выводимо из любого высказывания, и из ложного высказывания следует любое высказывание. Например, формула $A \to (B \to A)$ в исчислении Аккермана невыводима.

В работе [2] показано, что схемы аксиом 1, 3 (1. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и 3. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \to (\mathfrak{C} \to \mathfrak{B}))$ из списка, данного в 1, выводимы из остальных схем аксиом и что остальные схемы аксиом независимы.

Схема аксиом № 11 из этого списка, названная дистрибутивностью, по форме отличается от дистрибутивности. Здесь мы покажем, что эта схема аксиом эквивалентна дистрибутивности.

Таким образом, объединяя этот результат с работой [2], можно следующим образом описать исчисление, эквивалентное исчислению строгой импликации Аккермана.

Алфавит исчисления состоит из (потенциально) бесконечного перечня букв $A, B, C, \cdots$ и знаков логических операций & (конъюнкция, V (дизъюнкция),—(отрицание), $\to$ (строгая импликация).

Понятие формулы определяется индуктивно.

1. Любая буква $A, B, C, \cdots$ — формула.

2—5. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы, то $(\mathfrak{A})\ \&\ (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A})\ V\ (\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}) \to (\mathfrak{B})$, $\overline{\mathfrak{A}}$ — формулы.

6. Никаких формул, кроме построенных согласно 1—5, нет.

Примечание. В дальнейшем, вместо слов: схема аксиом и схема формул мы будем употреблять просто слова: аксиома и формула. Путаницы не возникнет, так как в дальнейшем всюду будут встречаться исключительно схемы аксиом и схемы формул.

Система аксиом. (В скобках дается номер аксиомы по работе [2]; аксиомы №№ 1, 3 опущены по причине, указанной выше).

(2) 1. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to ((\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}))$ — правило силлогизма;

(4) 2. $(\mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$ — правило сокращения;

$$\left.\begin{array}{l} (5)\ 3.\ \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \\ (6)\ 4.\ \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \end{array}\right\} \text{— конъюнкция в антецеденте;}$$

(7) 5. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$ — конъюнкция в консеквенте;

(8) 6. $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

(9) 7. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ — дизъюнкция в консеквенте;

(10) 8. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{C})\ \&\ (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$ — дизъюнкция в антецеденте;

(11) 9*. $\mathfrak{A}\ \&\ (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C})$ — дистрибутивность;

(12) 10. $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to (\overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A}})$ — контрапозиция;

(13) 11. $\mathfrak{A} \& \overline{\mathfrak{B}} \to \overline{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}$ — связь строгой импликации с материальной;

(14) 12. $\mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ — двойное отрицание в консеквенте;

(15) 13. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \to \mathfrak{A}$ — двойное отрицание в антецеденте.

Примечание. Аксиома 9 отмечена звездочкой потому, что она заменяет аксиому дистрибутивности $(\mathfrak{A}\ \&\ (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}))$ из первоначального списка аксиом.

Правила вывода.

(α) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ — (modus ponens),

(β) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$ — (объединение),

(γ) $\dfrac{\mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ — (modus ponens для материальной импликации),

(δ) $\dfrac{\mathfrak{A} \to (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}$ — (здесь $\mathfrak{B}$ — логическое тождество, т. е. формула, выводимая только из аксиом).

Покажем теперь, что описанное таким образом исчисление эквивалентно исчислению строгой импликации Аккермана.

Для этого, учитывая работу [2], достаточно доказать теоремы 1а и 1в.

Теорема 1а. *В описанном выше исчислении выводима формула*

$$\mathfrak{A}\ \&\ (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}).$$

Теорема 1в. *В исчислении, получающемся заменой аксиомы 9* аксиомой*

9** $$\mathfrak{A}\ \&\ (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}),$$

выводима формула

$$\mathfrak{A}\ \&\ (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C}).$$

Будем пользоваться следующим вспомогательным правилом вывода

$$(\varepsilon)\quad \frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}}.$$

Это правило легко получить из аксиомы 1 двукратным применением правила (α).

Доказательство теоремы 1а.

Нижеследующая последовательность формул является требуемым выводом. Цифры рядом с формулами указывают на анализ данного вывода. (То же относится к доказательству теорем 1в и 2.)

1. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ — акс. 4
2. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 6.
3. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (ε), 1, 2.
4. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 7.
5. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — пр. (β), 3, 4.
6. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to$
   $\to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$—акс. 8.
7. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (α), 5, 6.
8. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 9*.
9. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$—пр. (ε), 8,7.

Доказательство теоремы 1в.

1. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}$ — акс. 3.
2. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 9**.
3. $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}$ — акс. 7.
4. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}$ — акс. 6.
5. $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})$ — пр. (β), 3, 4.
6. $(\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}) \to (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to$
   $\to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})$ — акс. 8.
7. $\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}$ — пр. (α), 5,6.
8. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}$ — пр. (ε), 2, 7.
9. $(\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})$ — пр. (β), 1, 8.
10. $(\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A})\ \&(\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}) \to$
    $\to (\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}))$ — акс. 5.
11. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B})$ — пр. (α), 9, 10.
12. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ — акс. 9**.
13. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{B}$ — пр. (ε), 11, 12.
14. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 7.
15. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — акс. 6.
16. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — пр. (β), 14, 15.
17. $(\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})\ \&\ (\mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to$
    $\to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C})$ — акс. 8.
18. $\mathfrak{A}\&\mathfrak{C} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (α), 16, 17.
19. $\mathfrak{A}\&\ (\mathfrak{B} \lor \mathfrak{C}) \to \mathfrak{A}\&\mathfrak{B} \lor \mathfrak{A}\&\mathfrak{C}$ — пр. (ε), 13, 18.

Итак, уже доказано, что описанное выше исчисление эквивалентно исчислению срогой импликации Аккермана.

Отметим, что посылка и заключение аксиомы 9** не эквивалентны (даже в классическом исчислении высказываний). Следующая теорема показывает, что посылка и заключение аксиомы 9* эквивалентны в исчислении строгой импликации.

Теорема 2. *В нашем исчислении выводима формула*

$$Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ).$$

Доказательство.

1. $Ա\&Բ \to Ա$ — акс. 3.
2. $Ա\&Բ \to Բ$ — акс. 4.
3. $Բ \to Բ \vee Գ$ — акс. 6.
4. $Ա\&Բ \to Բ \vee Գ$ — пр. (ε) 2,3.
5. $(Ա\&Բ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Բ \to Բ \vee Գ)$ — пр. (β), 1, 4.
6. $(Ա\&Բ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Բ \to Բ \vee Գ) \to (Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 5.
7. $Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 5, 6.
8. $Ա\&Գ \to Ա$ — акс. 3.
9. $Ա\&Գ \to Գ$ — акс. 4.
10. $Գ \to Բ \vee Գ$ — акс. 7.
11. $Ա\&Գ \to Բ \vee Գ$ — пр. (ε), 9, 10.
12. $(Ա\&Գ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Գ \to Բ \vee Գ)$ — пр. (β), 8, 11.
13. $(Ա\&Գ \to Ա)\ \&\ (Ա\&Գ \to Բ \vee Գ) \to (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 5.
14. $Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 12, 13.
15. $(Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))\ \&\ (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — пр. (β), 7, 14.
16. $(Ա\&Բ \to Ա\&(Բ \vee Գ))\ \&\ (Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)) \to (Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to$
    $\to Ա\&(Բ \vee Գ))$ — акс. 8.
17. $Ա\&Բ \vee Ա\&Գ \to Ա\&(Բ \vee Գ)$ — пр. (α), 15, 16.

Следовательно, в нашем исчислении формулы

$$Ա\&(Բ \vee Գ) \text{ и } Ա\&Բ \vee Ա\&Գ$$

эквивалентны.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 12.I.66

Ա. Ս. ՄԱՇՈՒՐՅԱՆ

ԱԿԵՐՄԱՆԻ ԽԻՍՏ ԻՄՊԼԻԿԱՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Այս հոդվածը նվիրված է Ակերմանի «խիստ իմպլիկացիայի հաշվին»: Սկզբնական տեսքով տրված այդ հաշվի № 11 աքսիոմը այս հոդվածում փոխարինված է մի նոր աքսիոմով, որը ավելի պարզ և կիրառելի բովանդակություն ունի:

Ցույց է տրված, որ այդ փոփոխությունից հետո «Ակերմանի իմպլիկացիայի հաշիվը» չի փոխվում:

Այդ փաստը ապացուցված է 1a և 1в թեորեմներում։ Ապացուցված է նաև 2 թեորեմը, որով ցույց է տրվում, որ նոր աքսիոմի երկու մասը՝ ի տարբերություն հին աքսիոմի, խիստ համարժեք բանաձևեր են։

A. S. MAŠOURIAN

ON AKERMAN'S STRICT IMPLICATION CALCULUS

Summary

The paper deals with Akerman's strict implication calculus. The original axiom No. 11 we replace here by a new simple and more applicable one. It is shown that this replacement does not change Akerman's implication calculus. This argument is proved in theorems 1a and 1b. Theorem 2 proves that the two parts of the new axiom, unlike the old one, are strictly equivalent formulas.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Донченко.* Некоторые вопросы, связанные с проблемой разрешения для исчисления строгой импликации Аккермана, Проблемы логики, Издательство АН СССР, (1963).
2. *Л. Л. Максимова.* О системе аксиом исчисления строгой импликации, Алгебра и логика, т. 3, вып. 3, (1964).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4. 1966 Математика

С. Я. ХАВИНСОН

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ УОЛША

В 1938 г. в работе [1] Уолш поставил следующую задачу. Пусть R — некоторая область z-плоскости (которую для определенности будем считать конечной), а $S \subset R$ — замкнутая подобласть R. Обозначим через $B(R)$ класс однозначных в R аналитических функций $f(z)$, для которых $\sup_{z \in R} |f(z)| < \infty$, а через $B_M(R)$ — подкласс $B(R)$, состоящий из функций, для которых $|f(z)| \leqslant M$, $z \in R$.

Пусть в области S задана аналитическая функция $F(z)$. Рассмотрим величину

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|. \tag{1}$$

Требуется: 1) исследовать свойства функции $f^*(z) \in B_M(R)$, реализующей нижнюю грань в (1). Существование такой функции $f^*(z)$ очевидно в силу компактности $B_M(R)$; 2) исследовать скорость стремления величины $E_M(F)$ к нулю при $M \to \infty$ в зависимости от свойств $F(z)$.

Вторая задача исследована весьма подробно в работах Уолша, частично выполненных совместно с другими авторами. Простейшие результаты в этом направлении имеются в монографии Уолша [2] (дополнение, п. 3, стр. 442); там же приводится дальнейшая литература. Что касается первого вопроса, то здесь имеется ([2], стр. 443) только указание на установленную Агмоном в неопубликованной работе единственность $f^*(z)$ для односвязной области R.

В настоящей работе исследуются свойства $f^*(z)$ в произвольной конечно-связной области R, ограниченной непересекающимися жордановыми контурами $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$. Эти контуры можно, не ограничивая общности, считать аналитическими.

Вместо того, чтобы вести аппроксимацию в равномерной метрике в области $S \subset R$, можно рассмотреть гораздо более общую ситуацию.

Пусть $X = \{\varphi\}$ — банаховское пространство. Норму элемента $\varphi \in X$ обозначаем $\|\varphi\|$. Предполагается выполнение следующих условий.

1. Определен оператор N из $B_M(R)$ в X, обладающий следующими свойствами:

а) $$N(\lambda f_1 + (1-\lambda) f_2) = \lambda N f_1 + (1-\lambda) N f_2,$$

$$f_i \in B_M(R),\ i = 1, 2,\quad 0 < \lambda < 1 \text{ — произвольно;}$$

в) если $\{f_n(z)\} \subset B_M(R)$ равномерно сходится внутри R к $f(z) \in B_M(R)$, то $\|Nf_n - Nf\| \to 0$;

c) если $l(\varphi)$ — произвольный линейный функционал над X, то существует аналитическая на каждом контуре $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ функция $\omega(\zeta)$ такая, что для $f \in B_M(R)$ имеем

$$l(Nf) = \int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta.$$

Теорема 1. *Пусть область R ограничена аналитическими контурами $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, а относительно пространства X выполнены перечисленные выше условия. Тогда для любого элемента $\varphi \in X$ существует единственная функция $f^*(z) \in B_M(R)$, для которой*

$$\|\varphi - Nf^*\| = \inf_{f \in B_M(R)} \|\varphi - Nf\|. \tag{2}$$

Функция $f^*(z)$ аналитична в замкнутой области R и, либо $f^*(z) \equiv e^{i\alpha} M$, либо $f^*(z)$ дает отображение R на m — листный круг радиуса M $(m \geqslant n)$.

Доказательство. В заметке [3] из соотношений двойственности Гаркави [4] мы вывели следующий критерий.

Пусть X — банаховское пространство и A — выпуклое множество в X. Для того чтобы элемент $f^* \in A$ доставлял наилучшее приближение элементу $\varphi \overline{\in} \overline{A}$ среди всех элементов A, т. е., чтобы

$$\|\varphi - f^*\| = \inf_{f \in A} \|\varphi - f\|,$$

необходимо и достаточно существования функционала $l \in X^*$, $\|l\| = 1$, для которого

$$l(f^* - \varphi) = -\|f^* - \varphi\|, \ \mathrm{Re}\, l(f^* - f) \geqslant 0, \ f \in A.$$

При этом функционал l является одним и тем же для всех элементов наилучшего приближения.

Рассматриваемая теорема 1 является простым следствием при веденного критерия. В самом деле, множество A образов $B_M(R)$ при отображении N является выпуклым, так как $B_M(R)$ выпукло, а оператор N удовлетворяет условию а). Существование функции $f^*(z)$ наилучшего приближения в (2) следует из компактности $B_M(R)$ и условия в). Пусть теперь $l \in X^*$ $(\|l\| = 1)$ — функционал, для которого выполняются требования

$$l(Nf^* - \varphi) = -\|Nf^* - \varphi\|, \ \mathrm{Re}\, l(Nf^* - Nf) \geqslant 0, \quad f \in B_M(R). \tag{3}$$

Существование такого функционала немедленно вытекает из цитированного критерия. В силу c) мы можем переписать соотношение $\mathrm{Re}\, l(Nf^* - Nf) \geqslant 0$ следующим образом:

$$\mathrm{Re} \int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta \leqslant \mathrm{Re} \int_\Gamma f^*(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta, \ f \in B_M(R), \tag{4}$$

где $\omega(\zeta)$ — аналитическая на контурах $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ функция, определяемая функционалом l. Так как вместе с $f(z)$ и $e^{i\alpha} f(z)$ входит в $B_M(R)$ при любом вещественном α, то (4) приводит к неравенству

$$\left|\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant \operatorname{Re}\int_\Gamma f^*(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta, \quad f \in B_M(R). \tag{5}$$

Из (5) следует, что $f^*(z)$ является в классе $B_M(R)$ экстремальной для задачи о

$$\sup\left|\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right| \tag{6}$$

и, кроме того, нормированной так, что

$$\int_\Gamma f^*(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta = \operatorname{Re}\int_\Gamma f^*(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta > 0. \tag{7}$$

В заметке [5] было сформулировано, а в статье [6] подробно доказано, что экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (6), нормированная условием (7), единственна. Кроме того, экстремаль $f^*(z)$ аналитична в замкнутой области и, либо $f^*(z) \equiv Me^{i\alpha}$, либо дает отображение R на m-листный круг радиуса M $(m \geqslant n)$. Теорема 1 полностью доказана.

Для задачи Уолша, с которой мы начали, из теоремы 1 и приводившегося в ходе ее доказательства критерия элемента наилучшего приближения следует

Теорема 2. *Пусть R — область, ограниченная аналитическими контурами $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, а S — замкнутое множество, лежащее внутри R. Пусть $F(z)$ — непрерывная функция на S. Для того чтобы $f^*(z) \in B_M(R)$ была экстремальной в задаче (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая борелевская комплексная мера μ на S, для которой выполняются следующие условия*

а) *замкнутый носитель μ содержится во множестве, где*

$$|f^*(z) - F(z)| = E_M(F);$$

в) *мера $(f^*(z) - F(z))\,d\mu$ совпадает с мерой $-E_M(F)\,|d\mu|$, $|d\mu|$ — вариация $d\mu$;*

с) $\operatorname{Re}\int_S (f^*(z) - f(z))\,d\mu \geqslant 0, \quad f \in B_M(R).$

Функция $f^*(z)$ единственна и, либо является константой $Me^{i\alpha}$, либо $f^*(z)$ дает отображение R на m-листный круг радиуса M $(m \geqslant n)$.

Доказательство. Пусть l — тот линейный функционал над $X = C(S)$, о котором говорится в критерии (3). Тогда $l(\varphi) = \int_S \varphi(z)\,d\mu$, где μ — борелевская мера на S. Имеем

$$\operatorname{Re}\left[\int_S (f^*(z) - F(z))\, d\mu\right] \geq -\int_S |f^*(z) - F(z)|\, |d\mu| \geq -E_M(F).$$

Но так как, согласно (3), в этой цепочке должны быть равенства, то это немедленно влечет утверждение в) нашей теоремы. Утверждение а) есть следствие в). Наконец, так как для любой борелевской меры λ на S имеем для $f(z) \in B_M(R)$

$$\int_S f(z)\, d\lambda = \int_\Gamma f(\zeta)\, \omega(\zeta)\, d\zeta,$$

где $\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{d\lambda}{\zeta - z}$, то мы находимся в условиях выполнения п. с) требований к пространству X. Это означает справедливость высказанных относительно $f^*(z)$ утверждений.

Замечание 1. Характеристическое свойство, высказанное в теореме 2 для $f^*(z)$, не зависит от хороших свойств границы Γ и имеет место всегда. Кроме того, и единственность $f^*(z)$ может быть установлена в случае, если граница Γ содержит хотя бы одну свободную жорданову дугу.

Замечание 2. В качестве других примеров пространства X из теоремы 1 можно брать, например, пространства $L_p(S, \nu)$, где $\overline{S} \subset R$, $p \geq 1$, ν — положительная борелевская мера на S.

Рассмотрим теперь другую задачу, родственную (1). Пусть $k > 0$ — произвольное фиксированное число. Возьмем, как и в теореме 1, пространство X и линейный оператор N из $B(R)$ в X, обладающий свойствами в) и с). Поставим следующую задачу: найти для $\varphi \in X$

$$\inf_{f \in B(R)} [\|\varphi - Nf\| + k \sup_{z \in R} |f(z)|] = \mathrm{E}_k(\varphi). \tag{8}$$

Эта задача является специальным случаем экстремальной проблемы, рассмотренной в нашей заметке [7]. Мы сформулируем последнюю проблему в несколько менее общем варианте, чем в [7]. Пусть E и E_1 — пространства Банаха с нормами элементов, обозначаемыми $\| \|$ и $\| \|_1$ соответственно. Так же будут обозначаться нормы функционалов из E^* и E_1^* соответственно. Пусть N — линейный непрерывный оператор из E_1 в E. Обозначим через T множество линейных функционалов $l \in E^*$, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\|l\| \leq 1, \ \|N^* l\|_1 \leq 1. \tag{8'}$$

Здесь N^* — оператор, сопряженный к N (N^* действует из E^* в E_1^*).

Теорема 3. ([7]). *Для произвольного элемента* $\varphi \in E$ *имеем*

$$\inf_{f \in E_1} [\|\varphi - Nf\| + \|f\|_1] = \max_{l \in T} |l(\varphi)|. \tag{9}$$

(Мы пишем max и min вместо sup и inf, там где грани достигаются).

Из теоремы 3 немедленно следует.

Теорема 4. *Для того чтобы для элемента $f^* \in E_1$ достигалась нижняя грань в (9) необходимо и достаточно, чтобы для некоторого функционала $l_0 \in T$ выполнялись условия*

$$l_0(\varphi - Nf^*) = e^{i\theta} \| \varphi - Nf^* \|,$$
$$l_0(Nf^*) = e^{i\theta} \| f \|_1, \tag{10}$$

где θ — *вещественное постоянное число.*

Доказательство. Пусть l_0 — тот функционал из T, для которого достигается max в (9). Имеем тогда

$$|l_0(\varphi)| = |l_0(\varphi - Nf^*) + l_0(Nf^*)| \leqslant$$
$$\leqslant |l_0(\varphi - Nf^*)| + |l_0(Nf^*)| =$$
$$= |l_0(\varphi - Nf^*)| + |(N^* l_0)(f^*)| \leqslant$$
$$\leqslant \| \varphi - Nf^* \| + \| f^* \|_1.$$

Однако в силу (9) в этой цепочке всюду должны быть равенства. Это немедленно ведет к (10). Обратная часть теоремы доказывается аналогичным рассуждением.

Для задачи (8) с помощью теорем 3 и 4 получаем такие утверждения.

Теорема 5. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{E}_k(\varphi) = \sup_{l \in T} |l(\varphi)|, \tag{11}$$

$$T = \{l;\ l \in X^*, \|l\| \leqslant 1;\ \|N^* l\| \leqslant k\}.$$

Для того чтобы функция $f^*(z) \in B(R)$ реализовала нижнюю грань в (8) необходимо и достаточно, чтобы для некоторого функционала $l_0 \in T$ имели место соотношения

$$l_0(\varphi - Nf^*) = e^{i\theta} \| \varphi - Nf^* \|,$$
$$l_0(Nf^*) = e^{i\theta} k \sup_{z \in R} |f^*(z)|, \tag{12}$$

$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. *Любая экстремальная функция $f^*(z)$, либо дает отображение R на многолистный круг, или же $f^*(z) \equiv \mathrm{const}$. Две различные экстремальные функции могут отличаться друг от друга только постоянным положительным множителем.*

Доказательство. Доказательство утверждений (11) и (12) следует немедленно из теорем 3 и 4, если положить там $E = X$, $E_1 = B(R)$ с нормой, определяемой равенством $\| f \|_{E_1} = k \sup_{z \in R} |f(z)|$.

Утверждения о свойствах $f^*(z)$ вытекают из того, что по предположению c)

$$l_0(Nf) = \int_{\Gamma} f(\zeta)\, \omega(\zeta)\, d\zeta \tag{13}$$

и в силу (12) функция $f^*(z)$ является экстремальной для этого функционала. Теперь следует привлечь снова результаты из [6] о свойствах экстремальных функций. Две экстремальные функции для функционала (13) $f_1^*(z)$ и $f_2^*(z)$ могут отличаться лишь постоянным множителем N. При этом из условий (12) легко следует, что $N > 0$. Должна ли иметь место на самом деле единственность $f^*(z)$ $(N=1)$ в случае, когда, например, $X = C(S)$ — мы не знаем.

Московский инженерно-строительный
институт

Поступило 3.II.66

Ս. Յա. ԽԱՎԻՆՍՈՆ

ՈՒՈԼՇԻ ՄԻ ԱՊՐՈԿՍԻՄԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

1938 թ. Ուոլշի կողմից դրվել է հետևյալ խնդիրը։

Դիցուք R տիրույթում դիտարկվում է R-ում անալիտիկ $f(z)$ ֆունկցիաների $B_M(R)$ դասը, որոնց համար $|f(z)| \leqslant M$. $S \subset R$ փակ ենթատիրույթում տրված է $F(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան։ Դիտարկվում է հետևյալ մեծությունը

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|$$

Պահանջվում է. նախ հետազոտել $f^*(z) \in B_M(R)$ ֆունկցիայի հատկությունները, որը թույլ է տալիս լավագույն մոտարկումը և երկրորդը $E_M(F)$-ի զրոյի ձգտելու արագությունը, երբ $M \to \infty$։ 2-րդ խնդիրը բավական մանրամասն է ուսումնասիրված, իսկ 1-ին խնդրի մասին շատ քիչ է հայտնի։ Աշխատանքում հետազոտված են $f^*(z)$ ֆունկցիայի հատկությունները, հայտնաբերված են նրա բնութագրող հատկանիշները և միակությունը։

Ստացված արդյունքը ընդգրկում է ավելի ընդհանուր բնագավառ։

S. J. KHAVINSON

ON A PROBLEM OF APPROXIMATION OF WALSH

Summary

In 1938 Walsh formulated the following problem. Let $B_M(R)$ be the class of analytic functions $f(z)$ given in the domain R with the property $|f(z)| \leqslant M$. On a closed subregion $S \subset R$ let us consider an analytic function $F(z)$.

Suppose

$$E_M(F) = \inf_{f \in B_M(R)} \max_{z \in S} |F(z) - f(z)|.$$

The problem is: 1) to investigate the properties of the function $f^*(z)$ which gives the best approximation and 2) to investigate the rate of

$E_M(F) \to 0$ when $M \to \infty$. The second problem has been dealt with in many papers, yet very little is known of the first problem. Our paper considers the investigation of the properties of $f^*(z)$ and establishes its characteristic property and uniqueness.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Walsh*. On interpolation and approximation by functions analytic and bounded in a given region, Proceedings of the National Academie of Sciences, 24 (1938), 477—486.
2. *Дж. Л. Уолш*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., Издательство иностр. литературы (1961).
3. *С. Я. Хавинсон*. Об аппроксимации элементами выпуклых множеств (в печати).
5. *А. Л. Гаркави*. Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств, УМН, 16, вып. 4 (100) (1961), 141—145.
4. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных свойствах функций, отображающих область на многолистный круг, ДАН 88, 6 (1953), 957—959.
6. *С. Я. Хавинсон*. Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в многосвязных областях, Матем. сб. 36 (78), 3 (1955), 445—478.
7. *С. Я. Хавинсон*. Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области и применении этих задач к вопросам аппроксимации, ДАН 135, 2 (1960), 270—273.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4. 1966 Математика

Г. В. ГЕНДЖОЯН

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИИ ГРИНА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть Ω—ограниченная область с границей σ в трехмерном эвклидовом пространстве. $\Gamma(x, \xi)$—функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в этой области. В работе [1] Д. М. Эйдус при предположении, что $\sigma \in C^{1,\lambda}$, установил оценку

$$\left|\frac{\partial\Gamma(x, \xi)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_1}{|x-\xi|^2}; \quad x \text{ и } \xi \in \Omega \quad (i = 1, 2, 3).$$

При более жестком предположении: $\sigma \in C^{2,\lambda}$ в этой работе получены оценки и для второй производной:

$$\left|\frac{\partial^2\Gamma(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c_2}{|x-\xi|^3}, \quad x \text{ и } \xi \in \Omega,$$

c_1 и c_2—постоянные, зависящие лишь от области Ω.

Цель настоящей работы—получить аналогичные оценки для функции Грина $G(x, t, \xi, \tau)$ первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре $D = \Omega \times (0, T]$.

Именно, в § 1 при предположении $\sigma \in C^{1,\lambda}$ для значений переменных x и $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ устанавливаются оценки

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_3(\varepsilon)}{(t-\tau)^2} e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}. \tag{1.1}$$

В § 2 для произвольной пары $(x, x') \in \Omega$, $\xi \in \Omega$ и $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ при предположении $\sigma \in C^{2,\lambda}$ доказываются неравенства

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial G(x', t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_4(\nu, \alpha) \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\left(e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right). \tag{1.2}$$

В этих оценках ε и α—произвольные положительные числа, $0 < \alpha < 1$, ν—некоторое число, $0 < \nu < \dfrac{1}{4}$.

При этом мы исходим из представления G

$$G(x, t, \xi, \tau) = h(x, t, \xi, \tau) + g(x, t, \xi, \tau),$$

где $h(x, t, \xi, \tau) = \dfrac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{[4\pi(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}}$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности, а g определяется интегральным соотношением

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta)\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_{\zeta}}\,d\zeta d\theta.$$

Введем обозначения, используемые в дальнейшем. Через n_{ζ} будем обозначать внешнюю нормаль в точке ζ поверхности σ, через T_{ζ}—касательную плоскость к поверхности в этой точке. $\Sigma_{x\delta}$—часть поверхности σ, заключенная внутри сферы радиуса δ с центром в точке x. Через q обозначаем радиус сферы Ляпунова, при этом он предполагается столь малым, что выполняются условия:

1) Площадь любого куска поверхности σ, заключенного в сфере Ляпунова с центром в точке $y\in\sigma$ не превышает удвоенной площади проекции этого куска на плоскость T_y;

2) Проекция $\Sigma_{y\delta}$, где $\delta<q$, на плоскость T_y содержит круг радиуса $\frac{\delta}{2}$ с центром в точке y.

Через $\bar{x}$ обозначаем ближайшую к x $(x\in\Omega)$ точку поверхности σ; очевидно, x лежит на $n_{\bar{x}}$. Через $\sigma_{y\delta}$, где $\delta<\frac{q}{2}$, обозначим часть поверхности σ, вырезанную круговым цилиндром радиуса δ с осью n_y, содержащую точку y. $T_{y\delta}$—проекция $\sigma_{y\delta}$ на T_y, r_{xy}—вектор длины $|x-y|$, направленный от y в точку x, (l, r_{xy})—угол между направлениями l и r_{xy}.

Всюду в дальнейшем временные переменные t и τ будем считать связанными соотношениями $0\leqslant\tau<t\leqslant T$. Через t_1 обозначаем полусумму $\frac{t+\tau}{2}$, через t_2—разность $t-\frac{t-\tau}{3}$. Через $D_{x_i}u$ $(i=1, 2, 3)$ обозначаются производные функции $u(x)$ по x_i, $D_x u$—обозначает любую из этих производных. Постоянные, зависящие от области D, обозначаются обычно через c, иные постоянные—через k, α, β, δ, μ, ν и т. д.

§ 1. Всюду в этом параграфе будем предполагать, что $\sigma\in C^{1,\lambda}$. Пусть x и $\xi\in\Omega$, а μ и α фиксированные положительные числа $(\alpha<1)$.

Лемма 1. *Функция $u(x, t, \xi, \tau)$, определенная формулой*

$$u(x, t, \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} \frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}}\,\frac{e^{-\mu\frac{|\varsigma-\xi_1|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}\,|\varsigma-\xi|\cos(n_{\varsigma}r_{\varsigma\xi})\,d\varsigma d\theta, \quad (1.3)$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_5(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\alpha}{2}}}, \quad x \text{ и } \xi \in \Omega,$$

где $\varepsilon > 0$*—произвольное число.*

Доказательство. Разобьем интеграл (1.3) на слагаемые

$$u(x, t, \xi, \tau) =$$

$$= \left(\int_{\tau}^{t_1} + \int_{t_1}^{t}\right) \int_{\sigma} \frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\zeta - \xi| \cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})\, d\zeta d\theta = u_1 + u_2.$$

Используя неравенство $|x|^p e^{-sx^2} \leqslant k_1(\varepsilon, p)\, e^{-(s-\varepsilon)x^2}$ $(p > 0)$, оценим сначала интеграл u_2.

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant k_2(\varepsilon) \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta =$$

$$= k_2(\varepsilon) \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - (\mu-\varepsilon)\frac{t-\tau}{(t-\theta)(\theta-\tau)}\left[\zeta - \frac{t-\theta}{t-\tau}(\zeta-\xi) - \frac{\theta-\tau}{t-\tau}(\zeta-x)\right]^2}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}} (\theta-\tau)^2} d\zeta d\theta.$$

Обозначая $\beta = \frac{t-\tau}{(t-\theta)(\theta-\tau)}$, $z = \frac{\theta-\tau}{t-\tau} x + \frac{t-\theta}{t-\tau} \xi$, и вводя новую пространственную переменную $\zeta' : \zeta' = \zeta \sqrt{\beta}$, придем к неравенству

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant k_2(\varepsilon) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)} \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma'} \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)|\zeta'-z'|^2}}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}} (\theta-\tau)} d\zeta' d\theta.$$

Но интеграл $\int_{\sigma'} e^{-s|\zeta'-z'|^2} d\zeta' \leqslant c_6(s)$ $(s > 0)$, так что

$$|u_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_7(\varepsilon, \mu) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau} \int_{t_1}^{t} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\alpha}{2}} (\theta-\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant c_8(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\alpha}{2}}}. \tag{1.4}$$

Докажем важное для дальнейшего неравенство

$$\left|\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^s}\frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\xi}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})\,d\zeta\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_0(\varepsilon, \mu, s)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s} \quad (s>0). \tag{1.5}$$

Из него и из (1.4) непосредственно будет вытекать утверждение леммы. Имеем

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^s}\frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta \leqslant k_3(s)\frac{e^{-\mu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}\times$$

$$\times\int_{\tau}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta. \tag{1.6}$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta$. Разобьем поверхность σ на части $\sigma_1=\Sigma_{\xi\delta}$ и $\sigma_2=\sigma\setminus\sigma_1$, где $\delta=\frac{3}{4}|x-\xi|$, и представим последний интеграл в виде суммы

$$\int_{\tau}^{t_1}d\theta\left(\int_{\sigma_2}+\int_{\sigma_1}\right)\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\cdot|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta. \tag{1.7}$$

Оценим отдельно эти слагаемые. При $\tau<\theta<t_1$ имеем $|z-\xi|=$ $=\frac{\theta-\tau}{t-\tau}|x-\xi|\leqslant\frac{1}{2}|x-\xi|$. Отсюда для $\zeta\in\sigma_2$ получим $\frac{1}{3}|\zeta-\xi|\leqslant$ $\leqslant|\zeta-z|\leqslant\frac{5}{3}|\zeta-\xi|$, следовательно

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_2}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{\mu}{9}\cdot\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta, r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta.$$

В последнем интеграле, производя интегрирование сначала по θ, а затем по ς, будем иметь

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_2}\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\sigma}\int_{\frac{|\varsigma-\xi|^2}{t-\tau}}^{\infty}\frac{e^{-\mu\frac{y}{4}}\sqrt{y}}{|\varsigma-\xi|^2}|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,dyd\varsigma\leqslant$$

$$\leqslant k_4(\mu)\int_{\sigma}\frac{|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|}{|\varsigma-\xi|^2}d\varsigma\leqslant c_{10}(\mu). \tag{1.8}$$

Перейдем к оценке второго интеграла суммы (1.7). Пусть $a>0$—фиксированное число. Из выражения

$$\beta|\varsigma-z|^2=\frac{1}{t-\tau}\left[\frac{\theta-\tau}{t-\theta}|\varsigma-x|^2+\frac{t-\theta}{\theta-\tau}|\varsigma-\xi|^2+\right.$$

$$\left.+2|\varsigma-x||\varsigma-\xi|\cos(r_{\varsigma\xi}, r_{\varsigma x})\right]$$

следует, что при выполнении неравенства

$$\frac{|\varsigma-x||\varsigma-\xi|}{t-\tau}<a \tag{1.9}$$

справедлива оценка $e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}\leqslant k_5(\mu, a)\,e^{-\frac{\mu}{2}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}$ $(\tau<\theta<t_1)$. Часть поверхности σ_1, точки которой удовлетворяют условию (1.9), обозначим через σ_0, $\breve{\sigma}_0=\sigma_1\setminus\sigma_0$. Легко убедиться в справедливости неравенств

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_0}\frac{e^{-\mu\beta|\varsigma-z|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi||\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta\leqslant k_5\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma_0}\frac{e^{-\frac{\mu}{2}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi|\times$$

$$\times|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})|\,d\varsigma d\theta\leqslant c_{11}(\mu). \tag{1.10}$$

Из выражения $\varsigma-z=(\varsigma-x)\dfrac{\theta-\tau}{t-\tau}+(\varsigma-\xi)\dfrac{t-\theta}{t-\tau}$ следует, что при условии

$$\theta-\tau\leqslant\frac{1}{2}\frac{|\varsigma-\xi|}{|\varsigma-x|}(t-\theta) \tag{1.11}$$

имеют место соотношения $\dfrac{|\varsigma-\xi|}{4}\leqslant|\varsigma-z|\leqslant\dfrac{3}{2}|\varsigma-\xi|$. В области

$\tilde{\sigma}_0$, в силу неравенств $|\zeta-\xi|>a\dfrac{t-\tau}{|\zeta-x|}$ и $\dfrac{1}{4}|x-\xi|\leqslant|x-\zeta|\leqslant$ $\leqslant\dfrac{7}{4}|x-\xi|$, имеем

$$\frac{t-\theta}{2}>\frac{1}{6}\frac{|\zeta-\xi|}{|\zeta-x|}(t-\theta)>\frac{a}{6}\frac{(t-\theta)(t-\tau)}{|\zeta-x|^2}>k_6\frac{(t-\tau)^2}{|x-\xi|^2}=t^*-\tau.$$

Откуда в частности следует, что $t^*<t_1$ и что условие (1.11) выполнено для $\theta\leqslant t^*$. Далее имеем

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\tilde{\sigma}_0}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-x|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})|\,d\zeta\,d\theta=\left(\int_{\tau}^{t^*}+\int_{t^*}^{t_1}\right)\int_{\tilde{\sigma}_0}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-x|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\times|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta\leqslant\int_{\tau}^{t^*}\int_{\tilde{\sigma}_0}\frac{e^{-\frac{\mu}{16}\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta+$$

$$+\int_{t^*}^{t_1}\int_{\tilde{\sigma}_0}k_7\frac{|x-\xi|^5}{(t-\tau)^5}e^{-\mu\beta|\zeta-x|^2}|\zeta-\xi|\,d\zeta d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{\mu}{16}\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta+$$

$$+k_8\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma'}\frac{e^{-\mu|\zeta'-x'|^2}}{(t-\tau)^2}(\theta-\tau)\,d\zeta'\,d\theta\leqslant c_{12}(\mu)+c_{13}(\mu)\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}.$$

Отсюда, из (1.7), (1.8) и (1.10) следует неравенство

$$\int_{\tau}^{t_1}\int_{\sigma}\frac{e^{-\mu\beta|\zeta-x|^2}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\,|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})|\,d\zeta d\theta\leqslant c_{11}(\mu)+c_{13}(\mu)\frac{|\xi-x|^6}{(t-\tau)^3}.$$

Последнее, с учетом (1.6), приводит к оценке (1.5). Лемма доказана.

Замечание. Если в интегральном выражении (1.3) для $u(x,t,\xi,\tau)$ заменить функцию

$$\varphi(\mu,\zeta,\theta,\xi,\tau)=\frac{e^{-\mu\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-\xi|\cos(n_\zeta,r_{\zeta\xi})$$

функцией $\psi(\zeta,\theta,\xi,\tau)$, удовлетворяющей при $\xi\in\Omega$ и $\zeta\in\sigma$ неравенству

$$|\psi(\varsigma, \theta, \xi, \tau)| \leqslant c_{15} \frac{e^{-\mu \frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\nu}}, \quad \text{где} \quad \nu < 2,$$

то, как это легко следует из доказательства леммы, для новой функции $u_\psi(x, t, \xi, \tau)$ справедлива оценка

$$|u_\psi(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{16}(\mu, \nu, \alpha) \frac{e^{-\mu \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2\nu-\alpha}{2}}}.$$

Лемма 2. *Пусть x и $\xi \in \Omega$, $y \in \sigma$, $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha < \lambda$. Для функции $\Phi(y, t, \xi, \tau)$, представимой в виде*

$$\Phi(y, t, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\mu \frac{|y-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |y-\varsigma| \cos(n_y, r_{y\varsigma}) \varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\, d\varsigma d\theta, \tag{1.12}$$

определим функцию $\breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)$ следующим образом:

$$\breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\mu \frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |x-\varsigma| \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\varsigma}) \varphi(\mu, \varsigma, \theta, \xi, \tau)\, d\varsigma d\theta. \tag{1.12'}$$

Тогда имеет место соотношение

$$|\Phi(y, t, \xi, \tau) - \breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{17}(\varepsilon, \mu, \alpha) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}} |x-y|^{\alpha}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $a > 0$—некоторое фиксированное число. Для пары точек (x, y) разделим интервал (τ, t) на части $(\tau, \bar{t})$ и $(\bar{t}, t)$, где

$$\bar{t} = \begin{cases} t - \dfrac{|x-y|^2}{a}, & \text{если } \dfrac{|x-y|^2}{a} \leqslant t-\tau, \\ \tau, & \text{если } \dfrac{|x-y|^2}{a} > t-\tau. \end{cases}$$

Запишем разность $|\Phi - \breve{\Phi}|$ в виде

$$|\Phi(y, t, \xi, \tau) - \breve{\Phi}(x, t, \xi, \tau)| =$$

$$
=\int_{\tau}^{\bar t}\int_{\sigma}\Bigg\{\Bigg[\frac{e^{-\mu\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|y-\zeta|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\Bigg]\cos(n_y, r_{y\zeta})+
$$

$$
+\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\left[\cos(n_y, r_{y\zeta})-\cos(n_{\bar x}, r_{\bar x\zeta})\right]\Bigg\}\varphi(\mu,\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta+
$$

$$
+\int_{\bar t}^{t}\int_{\sigma}\Bigg[\frac{e^{-\mu\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-y|\cos(n_y, r_{y\zeta})-
$$

$$
-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|\zeta-x|\cos(n_{\bar x} r_{\bar x\zeta})\Bigg]\varphi(\mu,\zeta,\theta,\xi,\tau)\,d\zeta d\theta.
$$

Используя неравенство $e^{-\mu|x-x_0|^2}\leqslant k_9(\varepsilon,\mu,\rho)\,e^{-(\mu-\varepsilon)x^2}$ при $|x_0|<\rho$, нетрудно получить оценку

$$
\left|\frac{e^{-\mu\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|y-\zeta|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\zeta|\right|\leqslant
$$

$$
\leqslant k_{10}(\varepsilon)\,\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{[y-\zeta+\eta(y-x)]^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-y|\leqslant
$$

$$
\leqslant k_{11}(\mu,\varepsilon,a)\,\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-y|\qquad(\tau<\theta<\bar t).\tag{1.14}
$$

Далее, для y, z и $\zeta\in\sigma$ верно неравенство (см. [2])

$$
|\cos(n_y, r_{y\zeta})-\cos(n_z, r_{z\zeta})|\leqslant c_{18}|z-y|^{\lambda}.\tag{1.15}
$$

С помощью оценок (1.14), (1.15) и соотношения $|\bar x-y|\leqslant 2|x-y|$ получим

$$
|\Phi(y,t,\xi,\tau)-\tilde\Phi(x,t,\xi,\tau)|\leqslant c_{19}(\mu,\varepsilon,a)\int_{\tau}^{\bar t}\int_{\sigma}\Bigg[\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5-\lambda}{2}}}|x-y|+
$$

$$+\frac{e^{-\mu\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma||x-y|^\lambda\Bigg]|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)\,d\varsigma d\theta+$$

$$+k_{12}(\varepsilon,a,\alpha)|x-y|^\alpha\int_\tau^t\int_\sigma\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-y|^2}{t-\theta}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-x|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}}|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)|d\varsigma d\theta\leqslant$$

$$\leqslant c_{20}(\mu,\varepsilon,a,\alpha)|x-y|^\alpha\int_\tau^t\int_\sigma\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-y|^2}{t-\theta}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|\varsigma-x|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}}|\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)|d\varsigma d\theta.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 1 непосредственно приходим к неравенству (1.13).

Замечание 2. Если в выражениях (1.12) и (1.12′) заменить $\varphi(\mu,\varsigma,\theta,\xi,\tau)$ функцией $\psi(\varsigma,\theta,\xi,\tau)$, фигурирующей в замечании 1, то для новых функций Φ и $\overline{\Phi}$ верны неравенства

$$|\Phi_\psi(y,t,\xi,\tau)-\overline{\Phi}_\psi(x,t,\xi,\tau)|\leqslant$$

$$\leqslant c_{21}(\mu,\nu,\varepsilon,\alpha)\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2\nu+\alpha-\lambda}{2}}}|x-y|^\alpha.$$

Введем обозначение: $\gamma_1(\varsigma,\theta,\xi,\tau)=2\dfrac{\partial h(\varsigma,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\varsigma}$.

Лемма 3. *Производные функции*

$$u(x,t,\xi,\tau)=\int_\tau^t\int_\sigma h(x,t,\varsigma,\theta)\gamma_1(\varsigma,\theta,\xi,\tau)\,d\varsigma d\theta,\quad \xi \text{ и } x\in\Omega \qquad (1.16)$$

удовлетворяют неравенству

$$|D_xu|\leqslant c_{22}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Доказательство. Пусть x—произвольная точка, принадлежащая Ω. Рассмотрим сначала производную в этой точке по направлению n_x

$$\frac{\partial u(x,t,\xi,\tau)}{\partial n_x}=\frac{1}{128\pi^3}\int_\tau^t\int_\sigma\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(n_x,r_{x\varsigma})\times$$

$$\times \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right) d\varsigma d\theta.$$

Оценим интеграл в правой части этого равенства.

$$\left| \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |x-\varsigma| [\cos(n_{\bar{x}}, r_{x\varsigma}) - \cos(n_{\varsigma}, r_{x\varsigma}) + \right.$$

$$\left. + \cos(n_{\varsigma}, r_{x\varsigma})] \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right) d\varsigma\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{23}(\varepsilon) \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\lambda}{2}}} \left|\varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right)\right| d\varsigma d\theta +$$

$$+ \left| \int_{\tau}^{t} \int_{\sigma} \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right) d\varsigma d\theta \right|.$$

Здесь первый интеграл правой части, согласно лемме 1, не превосходит функции

$$c_{24}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}};$$

второй интеграл оценивается через

$$\int_{\tau}^{t_1} \int_{\sigma} \left| \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right) \right| d\varsigma d\theta +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \left| \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, t, x, \theta\right) \varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right) \right| d\varsigma d\theta.$$

Отсюда, на основании неравенства (1.5) и оценки

$$\left| \int_{t_1}^{t} \int_{\sigma} \varphi(\mu, \varsigma, t, x, \theta) \frac{e^{-\mu\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^s} d\varsigma\, d\theta \right| \leqslant c_{25}(\mu, s, \varepsilon) \frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}, \quad (1.17)$$

будем иметь

$$\left|\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, t, x, \theta\right)\varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right)d\varsigma d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{26}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Неравенство (1.17) доказывается совершенно так же, как неравенство (1.5). Таким образом, получена оценка

$$\left|\frac{\partial u(x, t, \xi, \tau)}{\partial n_{\bar{x}}}\right| \leqslant c_{27}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.18}$$

Пусть l—некоторое направление, касательное к поверхности σ в точке $\bar{x}$.

$$\frac{\partial w(x, t, \xi, \tau)}{\partial l} = \frac{1}{128\pi^3}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\times$$

$$\times\cos(l, r_{x\varsigma})\varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right)d\varsigma d\theta.$$

Перепишем последний интеграл в виде суммы

$$\left(\int\limits_{\tau}^{t_1}+\int\limits_{t_1}^{t}\right)\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l, r_{x\varsigma})\varphi\left(\frac{1}{4}, \varsigma, \theta, \xi, \tau\right)d\varsigma d\theta = I_1+I_2.$$

С помощью неравенства (1.5) получим

$$|I_1| \leqslant c_{28}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.19}$$

Преобразуем интеграл I_2.

$$I_2 = \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l, r_{x\varsigma})\left\{\left[\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|\varsigma-\xi|\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\right]+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\overline{x}}, r_{\overline{x}\xi})\Bigg\} d\tau d\theta =$$

$$=\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l, r_{x\varsigma})\times$$

$$\times\Bigg\{\Bigg[e^{-\frac{1}{4}\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}|\varsigma-\xi|-e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}|x-\xi|\Bigg]\frac{\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|[\cos(n_\varsigma, r_{\varsigma\xi})-\cos(n_{\overline{x}}, r_{\overline{x}\xi})]+$$

$$+\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\overline{x}}, r_{\overline{x}\xi})\Bigg\} d\varsigma d\theta = I_2^{(1)}+I_2^{(2)}+I_2^{(3)}.$$

Исходя из легко проверяемого неравенства

$$\left|\frac{e^{-\mu\frac{|x-y|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}|x-y|-\frac{e^{-\mu\frac{|x-z|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^s}|x-z|\right|\leqslant$$

$$\leqslant k_{13}(\varepsilon, \mu)|y-z|^\alpha\cdot\frac{e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-y|^2}{t-\tau}}+e^{-(\mu-\varepsilon)\frac{|x-z|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{2s+\alpha-1}{2}}},$$

где $\varepsilon>0$—произвольное число, $0<\alpha\leqslant 1$, для $I_2^{(1)}$ получим

$$|I_2^{(1)}|\leqslant k_{14}(\varepsilon)\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\varsigma-\xi|^2}{\theta-\tau}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}d\varsigma\, d\theta\leqslant$$

$$\leqslant c_{29}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.20}$$

Установим нужное при оценке интеграла $I_2^{(2)}$ неравенство

$$I_0 = |x-\xi|\,|\cos(n_\xi, r_{\varsigma\xi}) - \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})| < 12|x-\varsigma| + c_{30}|x-\xi|\,|x-\varsigma|^\lambda. \tag{1.21}$$

Если $|x-\bar{x}| > \frac{1}{3}|x-\xi|$, то требуемая оценка очевидна. Если

$$|x-\bar{x}| < \frac{1}{3}|x-\xi|, \text{ то } I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|\varsigma-x|^\lambda + |x-\xi|\,|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\varsigma\xi}) - \cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})|,$$

и для $\varsigma \in \Sigma_{\bar{x}\delta}$, где $\delta = \frac{|x-\xi|}{2}$, имеем $I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|x-\varsigma|^\lambda + 12|x-\varsigma|$.

Для $\varsigma \in \sigma\setminus\Sigma_{\bar{x}\delta}$ получим неравенство $I_0 \leqslant c_{30}|x-\xi|\,|x-\varsigma|^\lambda + 8|x-\varsigma|$.

Таким образом, соотношение (1.21) установлено. Используя его, будем иметь

$$|I_2^{(2)}| \leqslant \int_{t_1}^{t}\int_\sigma \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\,\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}\times$$

$$\times[12|x-\varsigma| + c_{30}|x-\xi|\,|x-\varsigma|^\lambda]\,d\varsigma d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{31}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} + c_{32}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}. \tag{1.22}$$

При оценке интеграла $I_2^{(3)}$ рассмотрим отдельно случаи $|x-\bar{x}| > \frac{1}{2}q$ и $|x-\bar{x}| < \frac{1}{2}q$. Если $|x-\bar{x}| \geqslant \frac{1}{2}q$, то $|x-\xi| \geqslant \frac{1}{2}q$ и справедливость неравенства

$$I_2^{(3)} < c_{33}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \tag{1.23}$$

очевидна. В случае $|x-\bar{x}| < \frac{1}{2}q = \delta$ разобьем интеграл $I_2^{(3)}$ на слагаемые вида

$$I_2^{(3)} = \int_{t_1}^{t} d\theta\left(\int_{\sigma-\Sigma_{\bar{x}\delta}} + \int_{\Sigma_{\bar{x}\delta}}\right)\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\varsigma|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}}|x-\varsigma|\cos(l, r_{x\varsigma})\times$$

$$\times\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}|x-\xi|\cos(n_{\bar{x}}, r_{\bar{x}\xi})\,d\varsigma d\theta.$$

Для первого слагаемого, как и в случае $|x - \bar{x}| > \frac{1}{2} q$, получим оценку типа (1.23). Оценим второе слагаемое. Введя в точке $\bar{x}$ локальную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, направляя при этом ось α_3 по $n_{\bar{x}}$, для направления $l\,(l_1, l_2, 0)$ будем иметь

$$\int_{t_1}^{t}\int_{\sigma_{\bar{x}\delta}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} |x-\zeta| \cos(l, r_{x\zeta}) \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |\xi - x| \cos(n_{\bar{x}} r_{\bar{x}\xi})\, d\zeta d\theta =$$

$$= \int_{t_1}^{t} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |x-\xi| \cos(n_{\bar{x}} r_{\bar{x}\xi}) \int_{T_{\bar{x}\delta}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} (l_1\zeta_{\alpha_1} + l_2\zeta_{\alpha_2}) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta}{\cos(n_\zeta n_{\bar{x}})}.$$

Обозначая через ζ' проекцию ζ на плоскость $T_{\bar{x}}$, преобразуем интеграл по кругу $T_{\bar{x}\delta}$ следующим образом:

$$\int_{T_{\bar{x}\delta}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} (l_1\zeta_{\alpha_1} + l_2\zeta_{\alpha_2}) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{\cos(n_\zeta n_{\bar{x}})} =$$

$$= \int_{T_{\bar{x}\delta}} \left(\frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} - e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta'|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \right) \frac{l_1\zeta_{\alpha_1} + l_2\zeta_{\alpha_2}}{\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})}\, d\alpha_1 d\alpha_2 +$$

$$+ \int_{T_{\bar{x}\delta}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta'|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} (l_1\zeta_{\alpha_1} + l_2\zeta_{\alpha_2}) \frac{1-\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})}{\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})}\, d\alpha_1 d\alpha_2.$$

Нетрудно проверить справедливость неравенств

$$\left| e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} - e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta'|^2}{t-\theta}} \right| \leqslant c_{34}(\varepsilon)\, e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta''|^2}{t-\theta}} \frac{|x-\zeta''|\,|\bar{x}-\zeta'|^{1+\lambda}}{t-\theta} \leqslant$$

$$\leqslant c_{35}(t-\theta)^{\frac{\lambda}{2}} e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\zeta'|^2}{t-\theta}}, \qquad \left| \frac{1-\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})}{\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})} \right| \leqslant c_{36}|\bar{x}-\zeta'|^{\lambda}.$$

Здесь ζ''—точка отрезка, соединяющего точки ζ и ζ'. Из них вытекает оценка

$$\left| \int_{t_1}^{t} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}} |x-\xi| \cos(n_{\bar{x}} r_{\bar{x}\xi}) \times \right.$$

$$\times\left|\int\limits_{T_{\bar{x}t}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \frac{l_1\zeta_{\alpha_1}+l_2\zeta_{\alpha_2}}{\cos(n_\zeta, n_{\bar{x}})} d\alpha_1 d\alpha_2 d\theta\right| \leqslant c_{37}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Этим завершается доказательство неравенства (1.23) в случае, когда $|x-\bar{x}|<\frac{1}{2}q$.

Из (1.19), (1.20), (1.22) и (1.23) получаем оценку

$$\left|\frac{\partial u(x, t, \xi, \tau)}{\partial l}\right| \leqslant c_{38}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}.$$

Утверждение леммы вытекает отсюда и из (1.18).

Замечание 3. Как легко проследить, из доказательства леммы следует, что если в интегральном представлении (1.16) заменить функцию $\gamma_1(\zeta, \theta, \xi, \tau)$ на $\Phi(\zeta, \theta, \xi, \tau)$, определенную формулой (1.12), то производная таким образом полученной функции $u(x, t, \xi, \tau)$ будет удовлетворять неравенству

$$|D_x u| \leqslant c_{39}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Теорема 1. *Производные функции Грина $G(x, t, \xi, \tau)$ для значений переменных x и $\xi\in\Omega$, $0\leqslant\tau<t\leqslant T$ удовлетворяют неравенству* (1.1).

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать справедливость неравенства (1.1) лишь для функции $g(x, t, \xi, \tau)$. Из представления

$$G(x, t, \xi, \tau)=h(x, t, \xi, \tau)+\int\limits_\tau^t\int\limits_\sigma h(x, t, \zeta, \theta)\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}d\zeta d\theta,$$

согласно формуле о разрыве нормальной производной теплового потенциала простого слоя [3] будем иметь

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}=2\frac{\partial h(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}+2\int\limits_\tau^t\int\limits_\sigma \frac{\partial h(y, t, \zeta, \theta)}{\partial n_y}\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}d\zeta d\theta=$$

$$=\gamma_1(y, t, \xi, \tau)+\int\limits_\tau^t\int\limits_\sigma \gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}d\zeta d\theta \quad (y\in\sigma,\ \xi\in\Omega). \qquad (1.24)$$

Методом итераций отсюда получим

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}=\gamma_1(y, t, \xi, \tau)+\gamma_2(y, t, \xi, \tau)+\cdots+\gamma_p(y, t, \xi, \tau)+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\gamma_p(y, t, \zeta, \theta)\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta,$$

где

$$\gamma_l(y, t, \xi, \tau) = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma}\gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\,\gamma_{l-1}(\zeta, \theta, \xi, \tau)\,d\zeta d\theta. \tag{1.25}$$

Оценим функции $\gamma_l(y, t, \xi, \tau)$. Для $\gamma_1(y, t, \xi, \tau)$, очевидно, выполнено неравенство

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant k_{15}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.26}$$

Если $\xi \in \sigma$, то

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}. \tag{1.27}$$

Используя эти неравенства, из формулы (1.25), с помощью леммы 1 и замечания к ней, последовательно получим

$$|\gamma_2(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}},$$

$$|\gamma_3(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma} c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\left[\frac{|y-\zeta|^2}{t-\theta}+\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}\right]}}{(t-\theta)^{\frac{4-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}\,d\zeta d\theta =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau}\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{\sigma'} c_{40}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)|\zeta'-z'|^2}}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-\lambda}{2}}}\,d\zeta' d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau}\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-\lambda}{2}}} =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-2\lambda}{2}}}\int\limits_{0}^{1}(1-z)^{\frac{\lambda}{2}-1}z^{\frac{\lambda}{2}-1}\,dz =$$

$$= c_{41}(\varepsilon)\,c_{42}(\varepsilon)\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{\lambda}{2}\right)}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-2\lambda}{2}}}.$$

$$|\gamma_4(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\, c_{42}^2(\varepsilon)\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{t-\tau} \frac{\Gamma^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(2\cdot\frac{\lambda}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_\tau^t \frac{d\theta}{(t-\theta)^{\frac{2-\lambda}{2}}(\theta-\tau)^{\frac{2-2\lambda}{2}}} = \frac{c_{41}(\varepsilon)\, c_{42}^2(\varepsilon)}{(t-\tau)^{\frac{4-3\lambda}{2}}} \frac{\Gamma^3\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(3\cdot\frac{\lambda}{2}\right)} e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

И вообще для любого i

$$|\gamma_i(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{41}(\varepsilon)\, c_{42}^{i-2}(\varepsilon)\, \frac{\Gamma^{i-1}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i-1}{2}\lambda\right)} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{2-\frac{i-1}{2}\lambda}} \quad (i=2, 3, \cdots), \tag{1.28}$$

где $\Gamma(\lambda)$—гамма функция Эйлера.

Из оценок (1.28) следует, что $\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i(y, t, \xi, \tau) = \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \varphi_0(y, t, \xi, \tau). \tag{1.29}$$

При этом $\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ и $\varphi_0(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{43}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}, \tag{1.30}$$

$$|\varphi_0(y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{44}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{2-\frac{\lambda}{2}}}. \tag{1.31}$$

Функция φ_0, очевидно, выражается через $G(y, t, \xi, \tau)$ следующим образом:

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta. \tag{1.32}$$

Возвращаясь к функции $g(x, t, \xi, \tau)$ перепишем ее в виде

$$g(x, t, \xi, \tau) = \int_\tau^t \int_\sigma h(x, t, \zeta, \theta)\,[\gamma_1(\zeta, \theta, \xi, \tau) + \varphi_0(\zeta, \theta, \xi, \tau)]\, d\zeta d\theta =$$

$$= g_1(x, t, \xi, \tau) + g_2(x, t, \xi, \tau).$$

Из леммы 3 непосредственно вытекает неравенство

$$|Dg_1(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{45}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{1.33}$$

В силу оценки (1.28) из леммы 2 и замечания 2 следует, что функции $\gamma_i(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяют соотношениям

$$|\gamma_i(y, t, \xi, \tau) - \tilde{\gamma}_i(x, t, \xi, \tau)| < c_{46}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-(i-1)\lambda}{2}}} \times$$

$$\times |x-y|^{\alpha}, \quad i = 2, 3, \cdots. \tag{1.34}$$

Отметим следующий факт, которым неоднократно будем пользоваться. Из представления (1.29), оценки (1.31) и из замечания к лемме 1 следует, что лемма 1 остается в силе при замене функции $\varphi(\mu, \zeta, \theta, \xi, \tau)$ функцией $\dfrac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_{\zeta}}$.

Имея это в виду из выражения

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) = \gamma_2(y, t, \xi, \tau) + \int_{\tau}^{t}\int_{\sigma} \gamma_2(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_{\zeta}} d\zeta d\theta$$

и из неравенств (1.34) легко получить, что

$$|\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \tilde{\varphi}_0(x, t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{47}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha-\lambda}{2}}} |x-y|^{\alpha}.$$

Отсюда, в силу оценки (1.31) и замечания 3, будем иметь

$$|D_x g_2(x, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{48}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4-\lambda}{2}}}.$$

Эта оценка вместе с (1.33) приводит к неравенству (1.1).

§ 2. В этом параграфе будем предполагать, что $\sigma \in C^{2,\lambda}$ и, следовательно, является поверхностью Ляпунова с показателем, равным единице. Пусть $\psi(y)$ — функция, определенная лишь на поверхности σ. Через $\overline{D}_{x_i}\psi(y)$ обозначим проекции ее поверхностного градиента (см. [2]) на координатные оси x_i, $\overline{D}_y\psi(y)$ будет обозначать любую из этих проекций.

Лемма 4. *Пусть $y \in \sigma$, ε — произвольное число. Тогда справедливы оценки*

$$|\overline{D}_y \gamma_1 (y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{49}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}, \text{ если } \xi \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$\text{и } |\overline{D}_y \gamma_1 (y, t, \xi, \tau)| \leqslant c_{50}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}, \text{ если } \xi \in \sigma. \tag{2.2}$$

Утверждение леммы легко проверяется, на этом останавливаться не будем.

Лемма 5. *Пусть y и $y' \in \sigma$, $|t'-t| \leqslant \frac{t-\tau}{3}$, $\xi \in \Omega$, ε и α — произвольные числа, $0 < \alpha < 1$. Справедливо соотношение*

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y', t', \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{51}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \left[|y-y'|^\alpha + |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}\right].$$

Доказательство. Из леммы 4 вытекают неравенства

$$|\gamma_1 (y, t, \xi, \tau) - \gamma_1 (y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{52}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha, \tag{2.3}$$

если $\xi \in \Omega$ и

$$|\gamma_1 (y, t, \xi, \tau) - \gamma_1 (y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{53}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha,$$

если $\xi \in \sigma$ $(0 < \alpha < 1)$.

Последнее из них, в силу леммы 1, приводит к следующему неравенству для функции φ_0, определенной формулой (1.32):

$$|\varphi_0 (y, t, \xi, \tau) - \varphi_0 (y', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{54}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |y-y'|^\alpha.$$

Отсюда, с учетом (1.29) и (2.3), получим неравенство

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y', t, \xi, \tau}{\partial n_y}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{55}(\varepsilon, \alpha)|y-y'|^{\alpha} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.4}$$

Докажем оценку

$$\left|\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} - \frac{\partial G(y, t', \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{56}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |t-t'|^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.5}$$

Пусть для определенности $0 < t - t' < \frac{t-\tau}{3}$. Исходим из вида (1.29) функции $\frac{\partial G}{\partial n_y}$. Слагаемое $\gamma_1(y, t, \xi, \tau)$ удовлетворяет неравенству

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y, \tilde{t}, \xi, \tau)| \leqslant k_{16}|t-\tilde{t}| \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{|y-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{9}{2}}} |y-\xi|^3 |\cos(n_y, r_{y\xi})| \leqslant$$

$$\leqslant k_{17}(\alpha, \varepsilon)|t-\tilde{t}|^{\frac{\alpha}{2}} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \quad \left(|t-\tilde{t}| \leqslant \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{2.6}$$

если $\xi \in \Omega$ и неравенству

$$|\gamma_1(y, t, \xi, \tau) - \gamma_1(y, \tilde{t}, \xi, \tau)| \leqslant c_{57}(\varepsilon, \alpha) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}} |\tilde{t}-t|^{\frac{\alpha}{2}} \left(|t-\tilde{t}| \leqslant \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{2.7}$$

если $\xi \in \sigma$. Как и выше α здесь — произвольное число $(0 < \alpha < 1)$, а θ — промежуточное значение между $\tilde{t}$ и t.

Разность $\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \varphi_0(y, t', \xi, \tau)$ представим в виде

$$\varphi_0(y, t, \xi, \tau) - \varphi_0(y, t', \xi, \tau) = \int_{\tau}^{t-2(t-t')} \int_{\sigma} [\gamma_1(y, t, \zeta, \theta) - \gamma_1(y, t', \zeta, \theta)] \times$$

$$\times \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta + \int_{t-2(t-t')}^{t'} \int_{\sigma} [\gamma_1(y, t, \zeta, \theta) - \gamma_1(y, t', \zeta, \theta)] \times$$

$$\times \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta + \int_{t'}^{t} \int_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Оценивая второй и третий интегралы непосредственно, а к первому применяя лемму 1, с учетом неравенства (2.7), получим

$$|\varphi_0(y,t,\xi,\tau)-\varphi_0(y,t',\xi,\tau)|\leqslant c_{58}(\varepsilon,\alpha)\,e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}\left[\frac{(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}+\right.$$

$$\left.+\frac{(t-t')^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^2}\right]\leqslant c_{59}(\varepsilon,\alpha)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{3+\alpha}{2}}}\,(t-t')^{\frac{\alpha}{2}}\quad(0<\alpha<1).$$

Отсюда, из (2.6) и (1.29) следует неравенство (2.5), а из него и из неравенства (2.4) — утверждение леммы.

Введем обозначение

$$\varphi_1(x,t,\xi,\tau)=\int_\tau^t\int_\sigma\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\,\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta.$$

Лемма 6. *Функция $\varphi_1(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяет для произвольной пары (x,x') и ξ из Ω неравенству*

$$|\varphi_1(x,t,\xi,\tau)-\varphi_1(x',t,\xi,\tau)|\leqslant c_{60}(\nu,\alpha)\times$$

$$\times|x-x'|^\alpha\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}},\tag{2.8}$$

где α — произвольное число из интервала $(0,1)$, ν — некоторое число $\left(0<\nu<\frac{1}{4}\right)$.

Доказательство. Перепишем $\varphi_1(x,t,\xi,\tau)$ в виде

$$\varphi_1(x,t,\xi,\tau)=\left(\int_\tau^{t_2}+\int_{t_2}^t\right)\int_\sigma\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\,\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta.\tag{2.9}$$

С помощью неравенств (2.3) и (1.5) (последнее остается в силе, если заменить t_1 на t_2) получим

$$\left|\int_\tau^{t_2}\int_\sigma\left(\frac{\partial h(x,t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}-\frac{\partial h(x',t,\zeta,\theta)}{\partial n_\zeta}\right)\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta\right|\leqslant$$

$$\leqslant c_{61}(\varepsilon,\alpha)\int_\tau^{t_2}\int_\sigma|x-x'|^\alpha\left|\frac{\partial G(\zeta,\theta,\xi,\tau)}{\partial n_\zeta}\right|\times$$

$$\times\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}+e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\,d\zeta d\theta\leqslant c_{62}(\varepsilon,\alpha)\times$$

$$\times |x - x'|^{\alpha} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.10}$$

Предположим, не умоляя общности, что $|x - \bar{x}| \leqslant |x' - \bar{x}'|$. Будем различать два случая: а) $|x - \bar{x}| \geqslant \frac{1}{2}|x - \xi|$ и б) $|x - \bar{x}| < \frac{1}{2}|x - \xi|$.

Второй член правой части равенства (2.9) преобразуем следующим образом:

$$\int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left(\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right)\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta =$$

$$= \int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left[\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right] \times \left\{\left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\right] + \frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\right\} d\zeta d\theta = I_1 + I_2. \tag{2.11}$$

Рассмотрим сначала слагаемое I_2. Установим для него оценку

$$|I_2| \leqslant c_{63}(\alpha, \nu)\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}|x - x'|^{\alpha}. \tag{2.12}$$

Введем вместо θ новую переменную $\beta = \frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-\theta}}$, тогда

$$\int_{t_2}^{t}\int_{\sigma}\left[\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right] d\zeta d\theta = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\sigma}\left[\frac{\cos(n_\zeta, r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2 d\beta - \frac{\cos(n_\zeta, r_{\zeta x'})}{|x'-\zeta|^2}\int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2 d\beta\right] d\zeta = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \int_{\sigma}\frac{\cos(n_\zeta r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2}\left[\int_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2 d\beta - \int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2 d\beta\right] d\zeta + \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \int_{\sigma}\left(\frac{\cos(n_\zeta, r_{\zeta x})}{|x-\zeta|^2} - \frac{\cos(n_\zeta, r_{\zeta x})}{|x'-\zeta|^2}\right)\int_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2}\beta^2 d\beta\, d\zeta = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}.$$

Используя неравенство $\int_{a}^{\infty} e^{-x^2}dx \leqslant e^{-\frac{a^2}{2}}$ нетрудно придти к соотношению

$$\left| \int\limits_{\frac{|x-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta - \int\limits_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{64}(\nu, \alpha)\, |x-x'|^{\alpha} \frac{e^{-\nu\frac{|x-\zeta|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, \tag{2.13}$$

где $0<\alpha<1$ и $0<\nu<\frac{1}{4}$.

В случае а) отсюда получим оценку

$$|I_2^{(1)}| \leqslant c_{65}(\nu, \alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}. \tag{2.14}$$

$I_2^{(2)}$ представляет собой разность потенциалов двойного слоя с плотностью $\int\limits_{\frac{|x'-\zeta|}{\sqrt{t-t_2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}\beta^2} \beta^2 d\beta$ в точках x и x'. Эта плотность, как легко видеть из соотношения (2.13), удовлетворяет по ζ условию Гельдера, и, следовательно, $I_2^{(2)}$ удовлетворяет неравенству

$$|I_2^{(2)}| < c_{66}(\nu, \alpha)\, |x-x'|^{\alpha} \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{2.15}$$

Из оценок (2.14) и (2.15) приходим к неравенству (2.12).

В случае б) из (2.13) имеем

$$|I_2^{(1)}| \leqslant c_{67}(\alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad |I_2^{(2)}| \leqslant c_{68}(\alpha) \frac{|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}}. \tag{2.16}$$

Из оценки (1.30), условия $|\bar{x}-\xi| > \frac{1}{2}|x-\xi|$, а также из неравенств (2.16) получим (2.12).

Оценим теперь I_1. Будем предполагать, что $|x-x'|<\frac{q}{4}$ и $|x-\bar{x}|<\frac{q}{2}$, так как при $|x-x'|>\frac{q}{4}$ или $|x-\bar{x}|>\frac{q}{2}$ в справедливости неравенства (2.8) нетрудно убедиться. Обозначим $\Sigma = \Sigma_{\bar{x}q}$ и разобьем I_1 на сумму вида

$$I_1 = \int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{\sigma\setminus\Sigma} + \int\limits_{\Sigma}\right)\left(\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right)\left(\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \right.$$

$$- \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \Big) d\zeta d\theta = I_1^{(1)} + I_1^{(2)}.$$

Для интеграла $I_1^{(1)}$ имеем $|x - \zeta| > \frac{q}{2}$, и, аналогично случаю $|x - \bar{x}| > \frac{q}{2}$, получим для него нужную нам оценку. Остается оценить интеграл $I_1^{(2)}$. Пусть $\Sigma_1 = \Sigma_{\bar{x}\delta}$, $\Sigma_2 = \Sigma \setminus \Sigma_1$, где $\delta = 2|x - x'|$.

Перепишем $I_1^{(2)}$ в виде

$$I_1^{(2)} = \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_2} \left[\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \right] \left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial G(\bar{x}, t, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} \right] d\zeta d\theta = J_1 + J_2 + J_3.$$

Из леммы 5 для J_1 получим

$$|J_1| < c_{69}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^2} \, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$[|\zeta - x|^\alpha + (t-\theta)^{\frac{\alpha}{2}}] \, d\zeta d\theta. \tag{2.17}$$

Отсюда, в случае а) имеет место неравенство

$$|J_1| \leqslant \frac{c_{70}(\nu, \alpha)}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} d\zeta d\theta,$$

а из него, интегрированием сначала по θ, а затем по ζ придем к соотношению

$$|J_1| \leqslant c_{71}(\nu, \alpha) \frac{|x - x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

В случае б) из (2.17) имеем

$$|J_1| \leqslant c_{72}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x - x'|^\alpha + c_{73}(\varepsilon, \alpha) \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} d\zeta d\theta.$$

Разбивая последний интеграл на сумму двух слагаемых, в которых интегрирование производится по пересечениям Σ_1 соответственно с областями $|x-\zeta| < \frac{|x-\xi|}{2}$ и $|x-\zeta| > \frac{|x-\xi|}{2}$, и, оценивая каждое слагаемое в отдельности, придем к неравенству

$$|J_1| \leqslant c_{74}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^\alpha.$$

Для J_2 из леммы 5 и оценки (1.17) вытекает, что

$$|J_2| \leqslant c_{75}(\varepsilon, \alpha) \int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x' t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \times$$

$$\times [|\bar{x}-\zeta|^\alpha + (t-\theta)^{\frac{\alpha}{2}}] d\zeta d\theta \leqslant c_{76}(\varepsilon, \alpha) \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}} +$$

$$+ c_{77}(\varepsilon, \alpha) \int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_1} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4-\alpha}{2}}} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} d\zeta d\theta +$$

$$+ c_{78}(\varepsilon, \alpha) \int\limits_{t_2}^{t}\int\limits_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^\alpha d\zeta d\theta.$$

Так же, как при оценке J_1, можно показать, что первый интеграл правой части этого неравенства не превосходит по абсолютной величине функции

$$c_{79}(\nu, \alpha) \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} |x-x'|^\alpha.$$

Второй интеграл в случае б) оценивается непосредственно, а именно по абсолютной величине он не превосходит функции

$$c_{80}(\nu, \alpha) \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

В случае а) имеем

$$\int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\, \frac{|x-x'|^\alpha\, e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_1} \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta \leqslant c_{81}(\nu)\, \frac{|x-x'|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Итак, для J_1+J_2 получим

$$|J_1+J_2| \leqslant c_{82}(\nu, \alpha)\, \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, |x-x'|^\alpha. \tag{2.18}$$

Перейдем к оценке интеграла J_1. Для $\zeta \in \Sigma_2$ имеем $|x-\zeta| < 3|x'-\zeta|$. Используя это, получим

$$|J_3| \leqslant c_{83}(\varepsilon, \alpha, \alpha') \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_2} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha'}{2}}}\, |x-x'|^\alpha \times$$

$$\times \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, \left[|x-\zeta|^\alpha + (t-\theta)^{\frac{\alpha}{2}}\right] d\zeta d\theta \leqslant$$

$$\leqslant c_{84}(\varepsilon, \alpha, \alpha')\, |x-x'|^\alpha \times$$

$$\times \int_{t_2}^{t}\int_{\Sigma_2} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha'-\alpha}{2}}}\, \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\bar{x}-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, d\zeta d\theta.$$

Здесь α и α' — произвольные числа, $0<\alpha'<\alpha<1$. Отсюда, в обоих случаях а) и б), получим неравенство

$$|J_3| \leqslant c_{85}(\nu, \alpha)\, \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\, |x-x'|^\alpha. \tag{2.19}$$

Из неравенства (2.18) и (2.19) следует оценка

$$|I_1^{(2)}| \leqslant c_{86}(\nu, \alpha)\, |x-x'|^\alpha\, \frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.20}$$

Утверждение леммы вытекает из (2.11), (2.12) и (2.20).

Лемма 7. *Функция $F(y, t, \tau)$, определенная для $y \in \sigma$ формулой*

$$F(y, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} \gamma_1 (y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta,$$

вдоль поверхности σ дифференцируема по y; при этом производные, которые могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, ограничены

$$|\overline{D}_y F(y, t, \tau)| \leqslant c_{67}.$$

Доказательство. Пусть $\delta = \frac{q}{2}$ и $\Sigma = \sigma_{y\delta}$. Запишем $F(y, t, \tau)$ в виде

$$F(y, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\Bigl(\int_{\Sigma} + \int_{\sigma\setminus\Sigma}\Bigr)\gamma_1 (y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Для доказательства леммы достаточно установить, что функция

$$\varphi (z, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{\Sigma} \gamma_1 (z, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta, \quad z \in \Sigma,$$

обладает в $\sigma_{y\frac{\delta}{2}}$ ограниченными производными по z.

Введем в точке y локальную систему координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, направляя ось α_3 по n_y. Пусть при этом $\alpha_3 = f(\alpha_1, \alpha_2)$ — уравнение поверхности Σ, а точки $v(v_1, v_2)$ и $u(u_1, u_2)$ — проекции, соответственно, точек z и ζ на круг $T_{y\delta}$. Тогда

$$\varphi (z, t, \tau) = \Phi (v, t, \tau) = \frac{\cos (n_v, n_y)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t}\int_{T_{y\delta}} A (v, u, t, \theta)\, du d\theta,$$

где

$$A (v, u, t, \theta) =$$
$$\frac{f(u_1, u_2) - f(v_1 v_2) - (u_1 - v_1) f'_{\alpha_1}(v_1 v_2) - (u_2 - v_2) f'_{\alpha_2}(v_1, v_2)}{(t-\theta)^{\frac{5}{2}}} \times$$
$$\times \sqrt{1 + f'^2_{\alpha_1}(u_1, u_2) + f'^2_{\alpha_2}(u_1, u_2)} \times$$
$$\times e^{-\frac{[f(u_1, u_2) - f(v_1, v_2)]^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}{4(t-\theta)}}.$$

Покажем, что функция

$$\psi (v, t, \tau) = \int_{t_0}^{t}\int_{T_{y\delta}} A (v, u, t, \theta)\, du d\theta$$

обладает ограниченными в $T_{y\frac{\delta}{2}}$ производными по v, получаемыми дифференцированием под знаком интеграла. Этим теорема будет доказана. С этой целью, введя вместо u_1, u_2 новые переменные интегрирования ω, ρ: $u_1 = v_1 + \rho\cos\omega$, $u_2 = v_2 + \rho\sin\omega$, перепишем ψ в виде

$$\psi(v, t, \tau) = \int_{t_1}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l(\omega, v)} B(v, \rho, \omega, t, \theta)\, \rho d\rho.$$

Здесь функция $l(\omega, v)$ определяется соотношением

$$l(\omega, v) = \sqrt{(v_1\cos\omega + v_2\sin\omega)^2 + \delta^2 - v_1^2 - v_2^2} - (v_1\cos\omega + v_2\sin\omega).$$

Легко убедиться в справедливости оценок

$$\left|\frac{\partial l(\omega, v)}{\partial v}\right| \leqslant k_{18}, \quad |B| \leqslant c_{88}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{\rho^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left|\frac{\partial B}{\partial v}\right| \leqslant c_{89}\left(1 + \frac{1}{(t-\theta)^{\lambda}}\right)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{\rho^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Из них вытекает равномерная в $T_{y_{\frac{\delta}{2}}}$ сходимость по v интегралов правой части формулы

$$\frac{\partial\psi(v, t, \tau)}{\partial v} = \int_{t_1}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} B(v, l, \omega, t, \theta)\frac{\partial l}{\partial v}\, l d\omega + \int_{t_1}^{t} d\theta \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{l} \frac{\partial B}{\partial v}\rho d\rho,$$

что доказывает наше утверждение.

Лемма 8. *Пусть* $y \in \sigma$, $\xi \in \Omega$. *Тогда функция* $\dfrac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}$ *дифференцируема по* y *вдоль поверхности* σ *и имеет место неравенство*

$$\left|\overline{D}_y\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right| \leqslant c_{90}(\varepsilon)\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}.$$

Доказательство. Исходя из представления (1.24) функции $\dfrac{\partial G}{\partial n_\zeta}$ будем иметь

$$\overline{D}_y\frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} = \overline{D}_y\gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \overline{D}_y\int_{\tau}^{t}\int_{\sigma}\gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\, d\zeta d\theta. \tag{2.21}$$

Из леммы 4 следует неравенство

$$\left|\overline{D}_y \gamma_1(y, t, \xi, \tau) + \right.$$

$$\left. + \overline{D}_y \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta \right| \leqslant c_{91}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{5}{2}}}. \tag{2.22}$$

Остается оценить функцию

$$\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Используя лемму 7 легко прийти к формуле

$$\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \overline{D}_y \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \left[\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y}\right] d\zeta d\theta +$$

$$+ \frac{\partial G(y, t, \xi, \tau)}{\partial n_y} D_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta)\, d\zeta d\theta.$$

Отсюда, с помощью лемм 4, 5 и 7, получим

$$\left|\overline{D}_y \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\sigma} \gamma_1(y, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta\right| \leqslant c_{92}(\varepsilon) \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2}. \tag{2.23}$$

Утверждение леммы следует из (2.21), (2.22) и (2.23).

Теорема 2. *Для произвольной пары* (x, x') *и* $\xi \in \Omega$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$ *производные функции Грина* $D_x G(x, t, \xi, \tau)$ *удовлетворяют соотношению* (1.2), *где* α — *произвольное число из интервала* $(0, 1)$, ν — *некоторое число из интервала* $\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

Доказательство. Достаточно доказать соотношение (1.2) лишь для функции $g(x, t, \xi, \tau)$, которую мы представим в виде суммы

$$g(x, t, \xi, \tau) = \left(\int\limits_{\tau}^{t_0} + \int\limits_{t_0}^{t}\right)\int\limits_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta) \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta = g^*(x, t, \xi, \tau) + $$

$$+ g^{**}(x, t, \xi, \tau). \tag{2.24}$$

Имеем

$$|D_x g^*(x, t, \xi, \tau) - D_x g^*(x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{93}(\varepsilon)|x - x'|^\alpha \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{\sigma} \frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{4+\alpha}{2}}} \frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} d\zeta d\theta.$$

Правая часть здесь оценивается аналогично интегралу (1.5), именно

$$|D_x g^*(x, t, \xi, \tau) - D_x g^*(x', t, \xi, \tau)| \leqslant$$

$$\leqslant c_{94}(\varepsilon)\,|x - x'|^{\alpha}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.25}$$

Для производной функции $g^{**}(x, t, \xi, \tau)$— теплового потенциала простого слоя, используя лемму 8, можно вывести формулу

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{t_0}^{t}\int_{\sigma} h(x, t, \zeta, \theta)\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta = \int_{t_0}^{t}\int_{\sigma}\Big\{ h(x, t, \zeta, \theta)\times$$

$$\times\left[\overline{D}_{\zeta_1}\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \varkappa\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\cos(n_\zeta, x_1)\right] - \frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\times$$

$$\times\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\cos(n_\zeta, x_1)\Big\}\,d\zeta d\theta. \tag{2.26}$$

Здесь $\varkappa$ — средняя кривизна поверхности.

На основании леммы 8 имеем

$$\left|\int_{t_0}^{t}\int_{\sigma}[h(x, t, \zeta, \theta) - h(x', t, \zeta, \theta)]\left[\overline{D}_{\zeta_1}\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta} - \varkappa\,\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\cos(n_\zeta, x_1)\right]d\zeta d\theta\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} c_{95}(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\zeta|^2}{t-\theta}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\zeta|^2}{t-\theta}}}{(t-\theta)^{\frac{3+\alpha}{2}}}\,|x-x'|^{\alpha}\times$$

$$\times\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|\zeta-\xi|^2}{\theta-\tau}}}{(\theta-\tau)^{\frac{5}{2}}}\,d\zeta d\theta \leqslant c_{96}(\varepsilon)\,|x - x'|^{\alpha}\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.27}$$

Из леммы 6 непосредственно выводим

$$\left|\int_{t_0}^{t}\int_{\sigma}\left(\frac{\partial h(x, t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta} - \frac{\partial h(x', t, \zeta, \theta)}{\partial n_\zeta}\right)\frac{\partial G(\zeta, \theta, \xi, \tau)}{\partial n_\zeta}\,d\zeta d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_{97}(\nu, \alpha)\,|x - x'|^{\alpha}\,\frac{e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}. \tag{2.28}$$

Из (2.24)—(2.28) следует доказываемое утверждение для функции $g(x, t, \xi, \tau)$. Теорема доказана.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 6.II.66

Գ. Վ. ԳԵՆՋՈՅԱՆ

ՋԵՐՄԱՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՋԻՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԳՐԻՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՐՈՇ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիցուկ Ω-ն եռաչափ էվկլիդյան տարածության տիրույթ է, սահմանափակված σ ողորկ մակերևույթով։ $D = \Omega \times (0, T]$ գլանում ջերմահաղորդականության հավասարման առաջին եզրային խնդրի Գրինի ֆունկցիայի ածանցյալների համար հոդվածում ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

ա) Եթե σ մակերևույթը պատկանում է $C^{1,\lambda}$ դասին, ապա D գլանում տեղի ունի

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

գնահատականը, որտեղ ε-ը կամայական թիվ է.

բ) Եթե σ մակերևույթը պատկանում է $C^{2,\lambda}$ դասին, ապա Ω-ին պատկանող կամայական x, x', ξ, և $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$-ի համար տեղի ունի

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i} - \frac{\partial G(x', t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{c_2(\nu, \alpha)\,|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\left(e^{-\frac{\nu|x-\xi|^2}{t-\tau}} + e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right)$$

անհավասարությունը, որտեղ α-ն կամայական թիվ է (0,1) միջակայքից, իսկ $\nu \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$-որոշակի թիվ է։

G. V. GENJOYAN

ON SOME ESTIMATES FOR THE GREEN'S FUNCTION OF TNE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION

Summary

Let Ω be a domain bounded by a smooth surface σ in the three dimensional Euclidean space.

For the Green's function of the first boundary value problem for the heat equation in the cylinder $D = \Omega \times (0, T]$ the paper proves the following results:

a) If the surface σ belongs to the class $C^{1,\lambda}$ the following inequality holds in D

$$\left|\frac{\partial G(x, t, \xi, \tau)}{\partial x_i}\right| \leqslant c_1(\varepsilon)\,\frac{e^{-\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

where ε is an arbitrary number.

b) If the surface σ belongs to the class $C^{2,\lambda}$ then

$$\left|\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial x_i}-\frac{\partial G(x',t,\xi,\tau)}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{c_2(\nu,\alpha)\,|x-x'|^{\alpha}}{(t-\tau)^{\frac{4+\alpha}{2}}}\times$$

$$\times\left(e^{-\nu\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}}+e^{-\nu\frac{|x'-\xi|^2}{t-\tau}}\right)$$

at every point $x, x', \xi\in\Omega$ and for $0<\tau<t\leqslant T$, α and ν being numbers from the intervals (0,1) and $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$ respectively.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. М. Эйдус*, Неравенства для функции Грина, Математический сборник, 45, № 4, 1958 г.
2. *Н. М. Гюнтер*, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Москва, Гостехиздат, 1953 г.
3. *Г. Н. Положий*, Уравнения математической физики, Москва, издательство „Высшая школа", 1964 г.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, № 4, 1966 Математика

Р. И. ОСИПОВ

О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ УОЛША

Как известно исследованию рядов по системе Уолша посвящены работы многих математиков (Уолш, Файн, Шнейдер и др.), причем оказывается, что большинство результатов, полученных для тригонометрических рядов, переносятся на ряды по системе Уолша.

В настоящей статье доказывается, что хорошо известная теорема Меньшова об усиленном C-свойстве функций имеет свой аналог для системы Уолша, а именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть $f(x)$ *— измеримая функция, конечная почти всюду на* $[0, 1]$. *Каково бы ни было* $\sigma > 0$ *можно построить непрерывную функцию* $g(x)$, *совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E, $mE > 1 - \sigma$ *и такую, что ее ряд Фурье по системе Уолша сходится равномерно на* $[0,1]$.

Доказательство этой теоремы в основном существенно отличается от доказательства теоремы Меньшова.

Определим сначала систему Уолша [3].

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\varphi_1(x) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(1)}(x) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{4}, \ \frac{3}{4} < x \leqslant 1, \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}, \end{cases}$$

$$\varphi_2^{(2)}(x \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \frac{1}{4}, \ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}, \ \frac{3}{4} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

. . . .
. . . .
. . . .

$$\varphi_{n+1}^{(2k-1)}(x) \equiv \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(2x), & 0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^{k+1}\varphi_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{I}$$

$$\varphi_{n+1}^{(2k)}(x) \equiv \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ (-1)^k \varphi_n^{(k)}(2x-1), & \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{II}$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots, \quad k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}.$$

Функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ в точке разрыва полагается равной среднему арифметическому значению ее левого и правого пределов в этой точке. Все функции $\varphi_n^{(k)}(x)$ берутся положительными в интервале $(0,2^{-n})$; $\varphi_n^{(k)}(0) = 1$; $\varphi_n^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}$. Из (I) и (II)) видно, что функции $\varphi_{n+1}^{(2k-1)}(x)$, $\varphi_{n+1}^{(2k)}(x)$, где $n > 0$, получаются из $\varphi_n^{(k)}(x)$, причем первая из них четна, а вторая—нечетна относительно точки $x = \frac{1}{2}$; кроме того, эти функции на интервале $(0,2^{-1})$ имеют такую же структуру, что и функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ на интервале $(0,1)$.

Введем некоторые обозначения.

Разобьем сегмент $[0,1]$ на 2^m равных частей и обозначим эти отрезки через $\Delta_m^{(i)}$, где i — порядковый номер отрезка, считая слева.

Положим

$$K_n^{(k)}(x, y) \equiv \varphi_0(x)\varphi_0(y) + \varphi_1(x)\varphi_1(y) + \cdots + \varphi_n^{(k)}(x)\varphi_n^{(k)}(y),$$

$$Q_n^{(k)}(x, y) \equiv \varphi_n^{(1)}(x)\varphi_n^{(1)}(y) + \cdots + \varphi_n^{(k)}(x)\varphi_n^{(k)}(y).$$

Сразу же отметим следующее свойство функции $K_n^{(k)}(x, y)$, которое впоследствии будет нами использовано.

А. Для любой ограниченной измеримой функции $\psi(x)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 \psi(y) K_n^{2^n-1}(x, y)\, dy \right| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi(x)|, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Это вытекает из того факта, что аналогичное неравенство верно для системы Хаара, а также из того, что 2^n-ые частные суммы рядов Фурье по системе Хаара и по системе Уолша совпадают [2].

§ 1. Доказательство вспомогательных предложений

Лемма 1. *Пусть нам даны функция $\varphi_n^{(k)}(x)$ и интервалы $\Delta_m^{(i)}$, $\Delta_m^{(j)}$, $i < j$, $m \leqslant n$. Тогда выполнено одно из следующих соотношений*

$$а)\quad \varphi_n^{(k)}[x + (j-i)2^{-m}] \equiv \varphi_n^{(k)}(x), \quad x \in \Delta_m^{(i)},$$

$$б)\quad \varphi_n^{(k)}[x + (j-i)2^{-m}] \equiv -\varphi_n^{(k)}(x), \quad x \in \Delta_m^{(i)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы очевидно для $n = 1$. Предположим, что оно верно для $n \leqslant N$, и докажем его справедливость для $n = N + 1$.

Допустим сначала, что $\Delta_m^{(i)} \subset [0,2^{-1}]$, $\Delta_m^{(j)} \subset [0,2^{-1}]$, $i<j$, $m \leqslant N+1$. Как для четных $k=2l$, так и для нечетных $k=2l-1$ имеем: $\varphi_{N+1}^{(k)}(x) \equiv \varphi_N^{(l)}(2x)$, $x \in [0,2^{-1}]$. Произведем замену переменной $2x=y$, где $x \in [0,2^{-1}]$, тогда $y \in [0,1]$ и $\varphi_{N+1}^{(k)}\left(\frac{y}{2}\right) \equiv \varphi_N^{(l)}(y)$, а интервалы $\Delta_m^{(i)}$ и $\Delta_m^{(j)}$ перейдут соответственно в интервалы $\Delta_{m-1}^{(i)}$ и $\Delta_{m-1}^{(j)}$, $m-1 \leqslant N$. Но тогда по предположению индукции $\varphi_N^{(l)}(y) \equiv \varphi_N^{(l)}[y+(j-i)2^{-m+1}]$ при $y \in \Delta_{m-1}^{(i)}$ или, что то же самое,

$$\varphi_N^{(l)}(2x) \equiv \varphi_N^{(l)}\{2[x+(j-i)2^{-m}]\}, \quad x \in \Delta_m^{(i)},$$

а из этого соотношения следует

$$\varphi_{N+1}^{(k)}(x) \equiv \varphi_{N+1}^{(k)}[x+(j-i)2^{-m}], \quad x \in \Delta_m^{(i)},$$

что и требовалось доказать.

Доказательство аналогично в том случае, когда интервалы $\Delta_m^{(i)}$, $\Delta_m^{(j)}$ $(i<j)$ лежат на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Теперь предположим, что $\Delta_m^{(i)} \subset [0,2^{-1}]$ и $\Delta_m^{(j)} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Пусть $k=2l-1$, тогда в силу четности функции $\varphi_{N+1}^{(k)}(x)$ относительно точки $x=\frac{1}{2}$, справедливо соотношение

$$\varphi_{N+1}^{(k)}(x) = \varphi_{N+1}^{(k)}[x+\alpha \cdot 2^{-m}], \quad x \in \Delta_m^{(i)}, \ \alpha = 2^m-2i+1.$$

Если $j=\alpha$, то утверждение доказано, если же $j \neq \alpha$, то имеем $\Delta_m^{(j)} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\Delta_m^{(\alpha)} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ и рассматриваемый случай сводится к предыдущему. Аналогично поступаем и в случае четного k. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть даны целые положительные числа n, i и m, причем $m \leqslant n$, $i \leqslant 2^m$. Тогда число функций $\varphi_n^{(k)}(x)$, совпадающих на интервале $\Delta_m^{(i)}$, не превышает числа 2^m.*

Доказательство. Утверждение леммы легко проверить для $n=2$. Предположим, что оно справедливо для любого $n \leqslant N$, и докажем, что оно верно и для $n=N+1$.

Пусть $\Delta_m^{(i)} \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$, тогда $\varphi_{N+1}^{(2k-1)}(x) = \varphi_N^{(k)}(2x)$ и $\varphi_{N+1}^{(2k)}(x) = \varphi_N^{(k)}(2x)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. После замены переменной $2x=y$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ получим

$$\varphi_{N+1}^{(2k-1)}\left(\frac{y}{2}\right) \equiv \varphi_N^{(k)}(y) \text{ и } \varphi_{N+1}^{(2k)}\left(\frac{y}{2}\right) = \varphi_N^{(k)}(y)$$

при $y \in [0,1]$; интервал $\Delta_m^{(i)}$ перейдет в интервал $\Delta_{m-1}^{(i)}$. Поскольку

$m-1 < N$, то, по предположению, существует не больше, чем 2^{m-1} функций $\varphi_N^{(k)}(y)$, совпадающих на интервале $\Delta_{m-1}^{(l)}$. Отсюда следует, что существует не больше, чем 2^{m-1} функций $\varphi_n^{(k)}(2x)$ $\left(x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$, совпадающих на интервале $\Delta_{m-1}^{(l)}$. Но поскольку каждая функция $\varphi_n^{(k)}(2x)$ порождает две функции $\varphi_{N+1}^{(2k-1)}(x)$, $\varphi_{N+1}^{(2k)}(x)$, то ясно, что число функций $\varphi_{N+1}^{(k)}(x)$, совпадающих на интервале $\Delta_m^{(l)}$, не превышает числа $2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$.

Если $\Delta_m^{(l)} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, то поступаем аналогично $\left(\text{в этом случае}\right.$ производим замену переменной $2x-1=y$, $\left.x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть дан интервал* $(c, d) \equiv \Delta_m^{(l)}$, *тогда для любого натурального числа* n, $n \geqslant m$, *максимальное число* N *функций* $\varphi_n^{(l)}(x)$, *попарно отличных на интервале* (c, d), *не больше, чем* 2^{n-m+1}.

Доказательство. Предположим сначала, что $i=1$. Как известно утверждение леммы справедливо при $m=0$, причем в этом случае $N=2^n$. Допустим, что $N=2^{n-m}$ при $m \leqslant \mu$, и докажем, что $N=2^{n-\mu-1}$ при $m=\mu+1$. По условию леммы $n \geqslant \mu+1$.

Из (I) и (II) следует, что функции $\varphi_n^{(2k-1)}$ и $\varphi_n^{(2k)}$ совпадают на интервале $(0,2^{-1})$, а следовательно и на интервале (c, d), откуда вытекает, что число попарно различных на интервале (c, d) функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ $(l=1, 2, \cdots, 2^{n-1})$ равно числу отличных друг от друга на том же интервале функций $\varphi_{n-1}^{(k)}(2x)$ $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $k=1, 2, \cdots, 2^{n-2}$.

Произведем замену: $2x=y$, тогда $\varphi_{n-1}^{(k)}(2x) \equiv \varphi_{n-1}^{(k)}(y)$, $x \in [0, 2^{-1}]$, $y \in [0,1]$, интервал $\Delta_{\mu+1}^{(1)}$ перейдет в интервал $\Delta_\mu^{(1)}$. Поскольку $n-1 \geqslant \mu$, то по предположению индукции число попарно отличных на интервале $\Delta_\mu^{(1)}$ функций $\varphi_{n-1}^{(k)}(y)$ $(y \in [0,1])$ равно числу $2^{n-1-\mu}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь число i удовлетворяет условию $1 < i \leqslant 2^m$. Тогда, согласно лемме 1, для любой функции $\varphi_n^{(l)}(x)$ выполнено одно из следующих условий:

а) $\varphi_n^{(l)}[x+(i-1)\,2^{-m}] = \varphi_n^{(l)}(x)$, $\quad x \in \Delta_m^{(1)}$,

б) $\varphi_n^{(l)}[x+(i-1)\,2^{-m}] = -\varphi_n^{(l)}(x)$, $x \in \Delta_m^{(1)}$.

Обозначим через M множество функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, попарно отличных на интервале $\Delta_m^{(l)}$. Ясно, что число функций из множества M, для которых выполнено условие а), не больше, чем 2^{n-m}, количество функций из M, удовлетворяющих условию б), также ограничено числом 2^{n-m}, откуда следует, что число функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, принадлежащих множеству M, не превышает числа 2^{n-m+1}. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $[a, b] \subset [0, 1]$. *Тогда для любых* n, k *и* $x \in [0, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\left| \int_a^b K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 2.$$

Доказательство. В силу свойства A достаточно доказать следующее неравенство

$$\left| \int_a^b Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 1, \tag{1}$$

для чего в свою очередь достаточно получить оценку

$$\left| \int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{2}$$

для любой точки $\xi \in [0, 1]$.

Пусть $\xi \in \Delta_{n-1}^{(\nu)}$. Интервалами постоянства для функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ являются интервалы $\Delta_n^{(j)}$ и следовательно любая функция $\varphi_n^{(l)}(x)$ меняет знак на каждом интервале вида $\Delta_{n-1}^{(l)}$, откуда следует, что

$$\int_{\Delta_{n-1}^{(l)}} \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0, \tag{3}$$

$$i \leqslant 2^{n-1};\ l \leqslant 2^{n-1}.$$

Но поскольку $[0, \xi] \equiv \sum_{l=1}^{\nu-1} \Delta_{n-1}^{(l)} + E$, где $E \equiv [0, \xi] \cap \Delta_{n-1}^{(\nu)}$, то из (3) имеем

$$\int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy = \int_E Q_n^{(k)}(x, y)\, dy. \tag{4}$$

С другой стороны, ясно, что

$$\left| \int_E \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует

$$\left| \int_0^\xi Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant \frac{k}{2^n} \leqslant \frac{1}{2},$$

чем и завершается доказательство леммы.

Лемма 5. *Пусть* $\lambda(x)$ — *непрерывная ломаная на некотором отрезке* $\Delta_m^{(l)}$, *если* $|\lambda(x)| \leqslant M$ *и число звеньев ломаной равно* μ, *то для любых целых* $n > 0$, $k > 0$ *и* $x \in [0, 1]$

$$\left| \int\limits_{\Delta_m^{(l)}} \lambda(y)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 4\mu M.$$

Доказательство. В самом деле, если $(\alpha, \beta) \subset \Delta_m^{(l)}$ такой отрезок, на котором $\lambda(x)$ прямолинейна, то по второй теореме о среднем и по лемме 4 получим

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda(y)\, K_n^{(k)}(x,y)\, dy\right| \leqslant \left|\lambda(\alpha) \int\limits_{\alpha}^{\xi} K_n^{(k)}(x,y)\, dy\right| + \left|\lambda(\beta)\int\limits_{\xi}^{\beta} K_n^{(k)}(x,y)\, dy\right| \leqslant 4M \tag{6}$$

для любых целых n, k $(k \leqslant 2^{n-1})$ и $x \in [0, 1]$.

Справедливость утверждения леммы 5 следует из (6) и из того, что отрезок $\Delta_m^{(l)}$ разбивается на μ отрезков, на каждом из которых $\lambda(x)$ прямолинейна.

Лемма 6. *Пусть отрезок* $[c, d]$ *совпадает с одним из* $\Delta_m^{(l)}$ *и*

$$c_s = c + s\cdot 2^{-m-m_1},\quad a_s = c_s - 2^{-m-m_1-m_2},$$
$$c_s' = c_s - 2^{-m-m_1-m_2-2},\quad a_s' = a_s + 2^{-m-m_1-m_2-2},$$
$$x_s = c_s' - 2^{-m-m_1-m_2-2} = a_s' + 2^{-m-m_1-m_2-2},$$

m, m_1, m_2 — *целые положительные числа;* $s = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}$.

Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} \sum\limits_{s=1}^{2^{m_1}} [a_s', c_s'], \\ 1, & x = x_s, \\ \text{линейно интерполирована на } [a_s', x_s] \text{ и на } [x_s, c_s'], \\ \qquad s = 1, 2, \cdots, 2^{m_1}. \end{cases}$$

Тогда для функции $\psi(x)$ *справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\, K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant C$$

при любых целых положительных n, k $(k \leqslant 2^{n-1})$ *и* $x \in [0, 1]$, C — *абсолютная постоянная.*

Доказательство. Определенная нами функция $\psi(x)$ обладает свойством A, причем $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\psi(x)| \leqslant 1$. В силу сделанного замечания для установления справедливости леммы достаточно доказать неравенство

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant C_1,\quad n = 1, 2, \cdots;\ k \leqslant 2^{n-1}. \tag{7}$$

Возможны следующие 3 случая:

1) $n \leqslant m$. Поскольку $|\varphi_n^{(l)}(x)\,\varphi_n^{(l)}(y)| \leqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}$, $x; y \in [0, 1]$, то

$$\left|\int_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| = \left|\int_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant \frac{k}{2^m} \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^m} \leqslant \frac{1}{2}; \quad (8)$$

2) $m < n \leqslant m + m_1$. В этом случае для любого целого положительного l, $l \leqslant 2^{n-1}$,

$$\int_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0. \quad (9)$$

В самом деле, интервалами постоянства для функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ являются интервалы $\Delta_n^{(l)}$, и следовательно любая функция $\varphi_n^{(l)}$, $l \leqslant 2^{n-1}$, меняет знак на каждом интервале вида $\Delta_{n-1}^{(j)}$; с другой стороны, функция $\psi(x)$ имеет один и тот же вид на всех интервалах $\Delta_{m+m_1}^{(\cdot)} \subset \Delta_m^{(l)}$, а следовательно и на всех интервалах $\Delta_n^{(j)} \subset \Delta_m^{(l)}$. Отсюда следует, что

$$\int_{\Delta_{n-1}^{(j)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0 \quad (10)$$

при любом $j \leqslant 2^{n-1}$, $l \leqslant 2^{n-1}$.

Остается учесть, что интервал $\Delta_m^{(l)}$ равен сумме интервалов вида $\Delta_{n-1}^{(j)}$.

Из (9) получаем

$$\int_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy = 0; \quad (11)$$

3) $m + m_1 < n$. Если для функции $\varphi_n^{(l)}(x)$ существует такой интервал $\Delta_p^{(\cdot)} \subset \Delta_m^{(l)}$, $m \leqslant p < m + m_1$, что $\varphi_n^{(l)}(x + 2^{-p-1}) = -\varphi_n^{(l)}(x)$ для любой точки x, лежащей на левой половине интервала $\Delta_p^{(\cdot)}$ (см. лемму 1), то, поскольку $\psi(x)$ одинакова на всех интервалах $\Delta_{p+1}^{(j)}$,

$$\int_{\Delta_p^{(\cdot)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0,$$

откуда

$$\int_{\Delta_m^{(l)}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(x)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = 0,$$

т. е. такие функции не влияют на значение интеграла (7). Выбросим все такие функции, а оставшиеся функции обозначим через $\varphi_n^{(j)}(x)$. В силу леммы 1 каждая из функций $\varphi_n^{(j)}(x)$ будет одинакова на всех интервалах $\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m$. Значит график каждой такой функции на отрезке $\Delta^{(l)}_m$ однозначно определяется ее графиком на каком-нибудь фиксированном интервале $\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m$.

Но в силу леммы 2 число функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, совпадающих на интервале $\Delta^{(l)}_m$, не превышает числа 2^m. С другой стороны, в силу сделанного выше замечания, число функций $\varphi_n^{(j)}(x)$, отличающихся друг от друга на интервале $\Delta^{(l)}_m$, равно числу функций $\varphi_n^{(l)}(x)$, отличных попарно на интервале $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$. Но если ограничиться рассмотрением функций $\varphi_n^{(l)}(x)$ только на интервале $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$, то их число, согласно лемме 3, не больше, чем $2^{n+1-m-m_1}$.

Пусть

$$\Delta^{(\tau)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m, \quad \Delta^{(\nu)}_{m+m_1} \subset \Delta^{(l)}_m, \quad \tau \neq \nu.$$

Из способа выбора функций $\varphi_n^{(j)}(x)$ и того, что функция $\psi(x)$ одинакова на этих интервалах, следует

$$\int\limits_{\Delta^{(\tau)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi_n^{(j)}(y)\, dy = \int\limits_{\Delta^{(\nu)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi_n^{(l)}(y)\, dy = \alpha. \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant 2^{m_1}\cdot 2^{n+1-m_1}|\alpha| = 2^{n+1}\cdot|\alpha|, \tag{13}$$

где 2^{m_1} — число интервалов вида $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$, лежащих на интервале $\Delta^{(l)}_m$. Теперь оценим $|\alpha|$. Рассмотрим два случая:

а) $n \leqslant m + m_1 + m_2$. Поскольку в этом случае $|\varphi_n^{(j)}(x)| = 1$, $x \in [a_s, c_s]$, то

$$|\alpha| = \left|\int\limits_{\Delta^{(\tau)}_{m+m_1}} \psi(y)\, \varphi_n^{(j)}(y)\, dy\right| = \int\limits_{a_s}^{c_s} |\psi(y)|\, dy \leqslant c_s - a_s = 2^{-m-m_1-m_2}. \tag{14}$$

Учитывая (13) и (14), получим для нашего случая

$$\left|\int\limits_0^1 \psi(y)\, Q_n^{(k)}(x,y)\, dy\right| \leqslant 2^{n+1}\cdot 2^{-m-m_1-m}; \tag{15}$$

б) $n > m + m_1 + m_2$. Функция $\psi(x)$ имеет следующий график на отрезке $[a_s, c_s]$

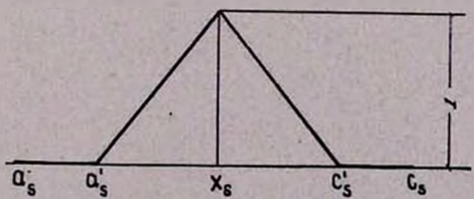

Рис. 1.

Но поскольку при $n=m+m_1+m_2+1$ $\varphi_n^{(l)}(x)$ постоянны на интервалах (a_s, x_s), (x_s, c_s), но разного знака, то ясно, что

$$|\alpha| = \left| \int\limits_{\Delta_{m+m_1}^{(\nu)}} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\, dy \right| = 0$$

и следовательно

$$\int\limits_0^1 \psi(y)\ Q_n^{(k)}(x, y)\, dy = 0,\ n = m + m_1 + m_2 + 1. \tag{16}$$

При $n > m + m_1 + m_2 + 1$ имеем

$$|\alpha| = \int\limits_{\Delta_{m+m_1}^{(\nu)}} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\, dy \leqslant 2 \left| \int\limits_{a_s'}^{x_s} \psi(y)\ \varphi_n^{(l)}(y)\, dy \right| \cdot \tag{17}$$

Из рисунка 2 видно, что $\frac{|\alpha|}{2}$ не больше, чем площадь заштрихованной части рисунка (рисунок сделан для $n = m + m_1 + m_2 + 4$). Но это значит, что $|\alpha| \leqslant 2 \cdot 2^{-n}$, а это вместе с (13) дает неравенство

$$\left| \int\limits_0^1 \psi(y)\ Q_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant 2^{n+1} \cdot 2^{-n+1} \leqslant 4. \tag{18}$$

(18)

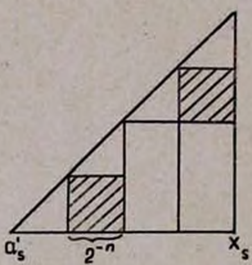

рис 2

Рис. 2.

Из (8), (11), (15), (16) и (18) следует справедливость утверждения леммы при $C=5$.

Лемма 7. *Пусть даны отрезок* $[c, d] \equiv \Delta_m^{(l)}$, $\varepsilon > 0$, $\gamma \neq 0$. $\nu = 2$ *и* N, *где* l *и* N — *натуральные числа больше единицы. Тогда существует такое множество* E *и функция* $F(x)$, *что*

1°. $E \subset [c, d]$, $\text{mes}\, E > \left(1 - \frac{2}{\nu}\right)(d - c)$;

2°. $F(x)$ — *непрерывная ломаная на отрезке* $[0, 1]$, *равная нулю вне отрезка* $[c, d]$ *и* γ *на множестве* E;

3°. $|F(x)| \leqslant 5\, |\gamma|\, \nu$;

4°. $\left| \int\limits_0^1 F(y)\ K_n^{(k)}(x, y)\, dy \right| \leqslant B\, |\gamma|\, \nu$,

$x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \cdots$, B — *абсолютная постоянная*;

5°. $\left| \int\limits_0^1 F(x)\ \varphi_n^{(k)}(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots. N$, Доказательство. Возьмем натуральное число m_1 настолько большим, что

$$|\gamma|\cdot 2^{-m-m_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m+m_1 > N \tag{19}$$

и положим $m_2 = l$.

Определим множество A следующим образом:

$$A \equiv [c, c+2^{-m-m_1-l-2}] + \sum_{s=1}^{2^{m_1}} [a_s, c_s], \tag{20}$$

где a_s и c_s — числа, определенные в формулировке леммы 6.

Положим

$$E \equiv [c, d] - A. \tag{21}$$

Определим функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ следующим образом:

$$F_1(x) = 4\gamma 2^l \psi(x), \tag{22}$$

где $\psi(x)$ — функция, определенная в формулировке леммы 6.

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \overline{\in} [c, d], \\ \gamma, & x \in (c+p, d-p), \\ \text{линейно интерполируется на интервалах} \\ (c, c+p) \text{ и } (d-p, d), \end{cases} \tag{23}$$

где $p = 2^{-m-m_1-l-2}$.

Положим

$$F(x) \equiv F_2(x) - F_1(x). \tag{24}$$

Докажем, что определенные нами множество E и функция $F(x)$, удовлетворяют условиям леммы.

Из (22), (23) и (24) и из того, что $|\psi(x)| \leqslant 1$ при $x \in [0, 1]$ легко следует, что выполнены условия 2° и 3°.

Функция $F(x)$ обладает также свойством 4°.

В самом деле, если в лемме 5 положить $\lambda(x) = F_2(x)$ и $\Delta_m^{(l)} \equiv [c, d]$, то, имея в виду, что для функции $F_2(x)$ $\mu = 3$, получим

$$\left|\int_0^1 F_2(y) K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant 12|\gamma|, \tag{25}$$

$$n = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}; \ x \in [0, 1].$$

С другой стороны, из (22) и леммы 6 следует

$$\left|\int_0^1 F_1(y) K_n^{(k)}(x, y)\, dy\right| \leqslant 4C|\gamma| 2^l, \tag{26}$$

$$n = 1, 2, \cdots; \ k = 1, 2, \cdots; 2^{n-1}, \ x \in [0, 1].$$

Объединив (25) и (26), получим

$$\left|\int_0^1 F(y)\ K_n^{(k)}(x, y)\ dy\right| \leqslant (4C + 12\cdot 2^{-l})|\gamma| 2^l, \tag{27}$$

откуда следует, что выполено условие 4°, если положить $B = 4C + 12$.

Пусть $\Delta^{(r)}_{m+m_1} \subset [c, d]$, причем левый конец этого интервала не совпадает с точкой c, а правый конец—с точкой d; обозначим этот интервал через (α, β).

Из (22) и (23) следует, что

$$\int_\alpha^\beta F_2(x)\,dx = \gamma \cdot (\beta - \alpha) = 2^{-m-m_1} \cdot \gamma, \tag{28}$$

$$\int_\alpha^\beta F_1(x)\,dx = 4\gamma \cdot 2^p \cdot \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx = 4\gamma \cdot 2^l 2^{-m-m_1-l-2}, \tag{29}$$

а из последних двух равенств получим

$$\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_\alpha^\beta F_2(x)\,dx - \int_\alpha^\beta F_1(x)\,dx. \tag{30}$$

Легко проверить, что из (22) и (23) вытекает

$$\left|\int_c^{c_1} F(x)\,dx\right| = \left|\int_c^{c+p} F(x)\,dx\right| \leqslant |\gamma| \cdot 2^{-m-m_1-l-2} < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{31}$$

$$\left|\int_{c_{2m_1-1}}^{d} F(x)\,dx\right| = \left|\int_{d-p}^{d} F(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{32}$$

Но в силу выбора числа m_1 любая из функций $\varphi^{(k)}_{n_i}(x)$, $n=1, 2, \cdots, N$, $k=1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ постоянна на каждом из интервалов $\Delta^{(l)}_{m+m_1}$.

Из сделанного замечания и из (30), (31) и (32) следует, что условие 5° также выполнено.

Лемма доказана.

§ 2. Теорема доказывается по такой же схеме, что и теорема Меньшова [1], мы опишем только конструкцию функции $g(x)$. Отметим прежде всего, что можно вести доказательство для непрерывной функции $\Phi(x)$.

Действительно, пусть $\sigma > 0$ задано. Допустим, что мы умеем найти такое множество E_1 и такую функцию $G(x)$, что

$$G(x) = \Phi(x) \text{ на } E, \text{ где } \operatorname{mes} E_1 > 1 - \frac{\sigma}{2} \tag{33}$$

и $\sigma(G)$ равномерно сходится.

Пусть теперь $f(x)$ — любая измеримая и конечная почти всюду на [0,1] функция. Так как $f(x)$ обладает C-свойством на [0,1], то можно найти такое $P \subset [0,1]$, $\operatorname{mes} P > 1 - \frac{\sigma}{2}$, что $f(x) = \Phi(x)$ на P, где $\Phi(x)$ — функция, непрерывная на [0,1]. Предполагается, что мы уже умеем найти $G(x)$, удовлетворяющую условию (33) и с равномерно сходящимся рядом Фурье.

Полагая $E = E_1 \cdot P$, мы видим, что $G(x) = f(x)$ на E, при этом $\mathrm{mes}\, E > 1 - \varepsilon$.

Теперь опишем конструкцию для случая непрерывной функции $\Phi(x)$. Представим $\Phi(x)$ в виде ряда

$$\Phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(x), \tag{34}$$

где все функции $\Phi_l(x)$ — ступенчатые (причем интервалы постоянства являются интервалами вида $\Delta_m^{(l)}$); ряд сходится равномерно и

$$|\Phi_l(x)| \leqslant \frac{2^{-p}}{2^{2l}} \quad (l = 2, 3, \cdots),\ 2^{-p} < \varepsilon. \tag{35}$$

В силу непрерывности $\Phi(x)$ это всегда возможно.

Для каждой функции $\Phi_l(x)$ отрезок [0,1] распадается на конечное число сегментов вида $\Delta_m^{(l)}$, на каждом из которых она постоянна пусть $\Delta_{m_l}^{(l)}$ — эти сегменты, перенумерованные слева направо ($i = 1, 2, \cdots \cdots, 2^{m_l}$, $m_1 < m_2 < \cdots$). Перенумеруем сначала все $\Delta_{m_1}^{(l)}$, затем все $\Delta_{m_2}^{(l)}$ и т. д., получим последовательность сегментов

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_s, \cdots,$$

причем, если ν_l — число всех интервалов постоянства функций $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x), \cdots, \Phi_l(x)$, то для s, удовлетворяющего условию

$$\nu_{l-1} < s \leqslant \nu_l, \tag{36}$$

имеем

$$\Delta_s = \Delta_{m_l}^{(l)}$$

при некотором значении i и

$$\Phi_l(x) = \gamma_s \text{ для } x \in \Delta_s, \tag{37}$$

где

$$|\gamma_s| \leqslant \frac{2^{-p}}{2^{2l}}, \tag{38}$$

в силу (35).

Пусть теперь

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_s < \cdots \tag{39}$$

—последовательность натуральных чисел, которые подбираются определенным способом [1].

Положим

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2^s}. \tag{40}$$

На основании леммы 7, в которой положим

$$[c, d] = \Delta_s,\ \varepsilon = \varepsilon_s,\ \gamma = \gamma_s,\ \nu = 2^p \cdot 2^l \text{ и } N = n_s, \tag{41}$$

мы можем для каждого s, удовлетворяющего условию (36), найти такую непрерывную ломаную $\psi_s(x)$ и множество E_s, что а) $E_s \subset [c, d]$; mes $E_s > (1-\sigma\cdot 2^{-l+1})$ mes Δ_s;

б) $\psi_s(x) = 0$ вне Δ_s;

в) $\psi_s(x) = \gamma_s$ на E_s;

г) $|\psi_s(x)| \leqslant 5\,|\gamma_s|\cdot\nu \leqslant 5\cdot\dfrac{2^{-p}}{2^{2l}}\cdot 2^p\cdot 2^l \leqslant \dfrac{5}{2^l}$,

д) $$\left|\int_0^1 \psi_s(x)\,K_n^{(k)}(x, y)\,dy\right| \leqslant \frac{B}{2^l},$$

$x \in [0,1]$, $n = 1, 2, \cdots$, B — абсолютная постоянная;

е) $$\left|\int_0^1 \psi_s(x)\,\varphi_n^{(k)}(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon_s = \frac{1}{2^s},$$

$$1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1},\quad n = 1, 2, \cdots, n_s.$$

Заметим еще, что можно брать γ_s всегда отличным от нуля.

Функция

$$g(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \psi_s(x)$$

является искомой.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что равномерно на $[0,1]$ будет сходиться также ряд

$$a_0\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}} a_n^{(l_k)}\,\varphi^{(l_k)}(x),$$

т. е. ряд Фурье функции $g(x)$, переставленный определенным образом.

Аналогичный результат для тригонометрической системы не известен.

Институт математики и
механики АН Армянской ССР

Поступило 22.II.66

Ռ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՈՒՈԼՇԻ ՍԻՍՏԵՄՈՎ ԳՐՎԱԾ ՇԱՐՔԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Սույն հոդվածում ապացուցվում է, որ տեղի ունի ուժեղացրած C-հատկությունը Ուոլշի սիստեմի համար։

Այդ փաստը եռանկյունաչափական սիստեմի համար ապացուցված էր Դ. Ե. Մենշովի կողմից։

R. G. OSIPOV

ON THE CONVERGENCE OF WALSH-FOURIER SERIES

Summary

The paper proves that the Walsh system exhibits strong C-property.

This result has previously been stated by D. E. Menshov for the trigonometric system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, 438—457.
2. *С. Качмаж и Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, 142—143, 155.
3. *I. L. Walsh.* A closed set of normal orthogonal functions, American Mathematical Societi, 1922.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա • I, № 4, 1966 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

КРИТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА ДЛЯ РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА

В последнее время возник интерес к рандомизированным задачам переноса в рассеивающей среде [1, 2]. Задачи, связанные с распространением излучения внутри одномерной среды, решаются сравнительно просто, что объясняется физически обоснованной возможностью предполагать экспоненциальность распределения длины свободного пробега частицы. Известно также, что многомерные задачи переноса могут быть сведены к рассмотрению одномерных задач, в которых, однако, это предположение не выполняется.

Вместе с тем представляет интерес вопрос, насколько далеко может быть продвинуто решение одномерной задачи при самой общей (анизотропной) модели рандомизации элементарных актов рассеяния, с сохранением предположения об экспоненциально распределенной длине пробега. Задание модели рандомизации должно, в частности, включать задание закона размножения при элементарном акте рассеяния.

Отметим две группы вопросов, возникающих при рассмотрении рандомизированных задач: во-первых, вопросы, касающиеся различных усредненных характеристик отраженного или пропущенного потока и событий, осуществляющихся с вероятностью единица; во-вторых, вопросы, касающиеся флюктуационной картины диффузно отраженного или пропущенного средой потока частиц, что имеет существенное значение при слабых падающих пучках.

Понятие критической толщины (одномерного) слоя, которое можно определить в терминах первой группы, является одной из важнейших характеристик процесса переноса. Определению критической толщины и посвящена предлагаемая работа.

1°. Рассмотрим одномерную среду оптической глубины τ $(0 < \tau \leqslant +\infty)$, в которую слева проникает частица.

В дальнейшем закон случайных блужданий и размножения этой частицы и ее потомков следующий:

1) вероятность того, что частица, двигающаяся в среде, распадется прежде, чем пройдет расстояние x, равна $1 - e^{-x}$;

2) если в некоторой точке распалась двигающаяся частица, то с вероятностью p_{ik} $(i,\ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ вместо нее образуется i частиц, двигающихся в прежнем направлении и k частиц — в противоположном направлении. В частном случае, когда $i + k = 1$, происходит простое рассеяние;

3) если частица подходит к границе среды, то с вероятностью θ она отразится (т. е. изменит направление движения) и с вероятностью $1-\theta$ навсегда покинет среду.

Будем считать также, что частицы движутся с одной и той же постоянной скоростью и при распаде образуется конечное число частиц, т. е.

$$\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}=1,$$

а также, что конечны моменты

$$\sum_{k,\,l}^{\infty} l\, p_{lk}, \quad \sum_{l,\,k}^{\infty} k\, p_{lk}.$$

Отметим, что указанная рандомизация в упрощенной форме введена в работе 1.

В предлагаемой работе нас будет интересовать вероятность $P(\tau)$ возникновения в среде бесконечного числа частиц (в течение неограниченного времени) после того, как в среду извне вступила одна и только одна частица.

В частности будет полностью решена задача о нахождении критической толщины среды, т. е. числа τ_0, для которого

$$P(\tau)=\begin{cases} 0 & \text{при } \tau<\tau_0, \\ >0 & \text{при } \tau>\tau_0. \end{cases} \tag{1}$$

2°. Обозначим

$$U(\alpha,\beta)=\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}\alpha^l\beta^k \quad (|\alpha|,\ |\beta|\leqslant 1). \tag{2}$$

Теперь представим себе, что в некоторой точке x среды $(0,\tau)$ возникла частица, двигающаяся направо (налево). Через $\alpha(x)$ $(\beta(x))$ обозначим вероятность возникновения в среде бесконечного числа потомков этой частицы. Ясно, что

$$P(\tau)=\alpha(+0)=\beta(-0). \tag{3}$$

Зададим x некоторое приращение $\Delta x>0$. Тогда двигающаяся направо частица либо распадется в интервале $(x,\ x+\Delta x)$ при первом прохождении через него, либо нет.

Поскольку вероятности этих двух событий равны, соответственно, $1-e^{-\Delta x}$ и $e^{-\Delta x}$, то при малых Δx получим

$$\alpha(x)=(1-\Delta x)\,\alpha(x+\Delta x)+\Delta x\,[1-$$
$$-\sum_{l,\,k=0}^{\infty} p_{lk}(1-\alpha(x))^l\,(1-\beta(x))^k]+0\,(\Delta x)^2).$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\alpha'(x)=\alpha(x)+U(1-\alpha(x),\ 1-\beta(x))-1 \quad (0<x<\tau). \tag{4}$$

Аналогично получим уравнение

$$\beta'(x)=-\beta(x)-U(1-\beta(x),\ 1-\alpha(x))+1. \tag{5}$$

(Так как, очевидно, $\beta(x) = \alpha(\tau - x)$, то уравнение (5) является следствием уравнения (4)).

Условие 3) об отражении частицы от концов среды запишется в форме

$$\beta(+0) = \theta\alpha(+0), \quad \alpha(\tau -) = \theta\beta(\tau -), \tag{6}$$

причем, естественно, второе из этих условий имеет смысл при $\tau < \infty$.

Таким образом, нам нужно исследовать задачу (4)—(6). Эта задача всегда имеет тривиальное (нулевое) решение, однако, если $P(\tau) > 0$, то она должна иметь также и ненулевое решение.

3°. Прежде, чем приступить к вычислению критической толщины заметим, что (это легко следует из физических соображений) $\alpha(+0)$ непрерывно зависит от τ. Предположим теперь, что $\tau > \tau_0$, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\tau) = \alpha(+0) > 0$, $\beta(+0) = \theta\varepsilon$.

Перепишем систему (4)—(5) в виде

$$\alpha'(x) = a_1\alpha + a_2\beta + A(\alpha, \beta), \tag{4'}$$

$$\beta'(x) = -a_2\alpha - a_1\beta + B(\alpha, \beta), \tag{5'}$$

где

$$a_1 = 1 - \left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha, \beta = 1}, \tag{7}$$

$$a_2 = -\left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial \beta}\right|_{\alpha, \beta = 1},$$

а функции A и B представляются рядами, слагаемые которых содержат произведения вида $\alpha^i\beta^j$, $i + j \geqslant 2$.

Таким образом, при малых ε

$$\alpha'(+0) = (a_1 + a_2\theta)\varepsilon + 0(\varepsilon^2),$$

$$\beta'(+0) = -(a_2 + a_1\theta)\varepsilon + 0(\varepsilon^2). \tag{8}$$

Из формул (4′)—(5′) имеем

$$\alpha'' = a_2\beta' + a_1\alpha' + \frac{\partial A}{\partial \alpha}(a_1\alpha + a_2\beta + A) + \frac{\partial A}{\partial \beta}(-a_2\alpha - a_1\beta + B).$$

Подставив это выражение в уравнение (5′), получим

$$\alpha'' + (a_2^2 - a_1^2)\alpha = A_1(\alpha, \beta) \tag{9}$$

и, аналогично,

$$\beta'' + (a_2^2 - a_1^2)\beta = B_1(\alpha, \beta), \tag{10}$$

где функции A_1 и B_1 обладают теми же свойствами, что и A и B.

Обозначим теперь $k = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}$ и рассмотрим два случая.

а) Пусть $a_1^2 \neq a_2^2$, т. е. $k \neq 0$. Тогда, применив метод вариации произвольных постоянных, перепишем систему (9)—(10) в виде

$$\alpha(x) = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx} + \int_0^x K(x, t)\, A_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \tag{11}$$

$$\beta(x) = d_1 e^{kx} + d_2 e^{-kx} + \int_0^x K(x, t)\, B_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \tag{12}$$

где

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2k} e^{k(x-t)} & \text{при } x > t, \\ \dfrac{1}{2k} e^{k(t-x)} & \text{при } x < t. \end{cases}$$

Учитывая условие (8), получим, что при $\varepsilon \to +0$

$$c_1 = \varepsilon \frac{a_1 + a_2\theta - k}{2k} + 0(\varepsilon^2), \quad c_2 = \varepsilon \frac{k - a_1 - a_2\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2)$$

$$d_1 = \varepsilon \frac{k\theta - a_2 - a_1\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2), \quad d_2 = \varepsilon \frac{\theta k + a_2 + a_1\theta}{2k} + 0(\varepsilon^2). \tag{13}$$

Система (11) — (12) является системой (вообще говоря, нелинейной) уравнений Вольтерра второго рода и поэтому существование и единственность решения при заданных c_1, c_2, d_1 и d_2 очевидны, а само решение можно найти обычным методом последовательных приближений.

Нам понадобится лишь оценка

$$\alpha(x) \leqslant \text{const} \cdot \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant \tau), \tag{14}$$

в справедливости которой легко можно убедиться.

Из второго условия (6) и из системы (11)—(12) применением оценки (14) получим, что при малых $\varepsilon = \alpha\ (+0)$

$$c_1 e^{k\tau} + c_2 e^{-k\tau} = \theta\,(d_1 e^{k\tau} + d_2 e^{-k\tau}) + 0(\varepsilon^2) \tag{15}$$

или

$$e^{2k\tau} = \frac{\theta d_2 - c_2}{c_1 - \theta d_1} + 0(\varepsilon). \tag{15'}$$

Поскольку при $\varepsilon \to +0$ $\tau \to \tau_0$, то

$$e^{2\tau_0 \sqrt{a_1^2 - a_2^2}} = \frac{(1+\theta^2)\, a_1 + 2\theta a_2 - (1-\theta^2)\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}{(1+\theta^2)\, a_1 + 2\theta a_2 + (1-\theta^2)\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}. \tag{16}$$

Эта формула дает явное выражение для критической толщины τ_0 при $a_1^2 \neq a_2^2$. Из физических соображений следует, что при $a_1^2 < a_2^2$ τ_0 является наименьшим положительным решением уравнения (16). Если же $a_1^2 > a_2^2$, то случай $\tau_0 < 0$ означает отсутствие критической толщины (т. е. $P(+0) = 0$).

б) Пусть $a_1^2 = a_2^2$, т. е. $k = 0$. Тогда соображения предыдущего параграфа приводят к системе

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= c_1 + c_2 x + \int_0^x K_1(x, t)\, A_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \\ \beta(x) &= d_1 + d_2 x + \int_0^x K_1(x, t)\, B_1(\alpha(t), \beta(t))\, dt, \end{aligned} \tag{17}$$

где ядро K_1 имеет вид

$$K_1(x, t) = \begin{cases} x & \text{при } x > t, \\ t & \text{при } x < t. \end{cases} \qquad (17')$$

Так же, как и в случае а), при $\varepsilon \to +0$ имеем

$$c_1 = \varepsilon, \quad c_2 = \varepsilon(a_1 + a_2\theta) + 0(\varepsilon^2),$$
$$d_1 = \theta\varepsilon, \quad d_2 = -\varepsilon(a_2 + a_1\theta) + 0(\varepsilon^2),$$

откуда при $x = \tau$ (см. (17)) и $\varepsilon \to +0$ получим

$$\tau_0 = \frac{1-\theta^2}{(1+\theta^2)a_1 + 2\theta a_2}. \qquad (18)$$

Формулы (16) и (18) дают в явном виде полное решение задачи нахождения критической толщины.

4°. Поскольку формула (18) применима лишь в исключительном случае $|a_1| = |a_2|$, основное решение задачи нахождения критической толщины дает формула (16).

Однако эта формула показывает, что зависимость τ_0 от рандомизации качественно зависит от знака $a_1^2 - a_2^2$. Именно, при $a_1^2 - a_2^2 < 0$ эта зависимость в явном виде выражается через функцию arctg, а при $a_1^2 - a_2^2 > 0$ — через логарифм.

Заметим также, что, вообще говоря, τ_0 зависит не только от общего „коэффициента размножения" задачи

$$\overline{i+k} = \sum_{i,k=0}^{\infty} (i+k)p_{ik},$$

но и в отдельности от его компонент

$$\bar{i} = \sum_{i,k=0}^{\infty} ip_{ik} \quad \text{и} \quad \bar{k} = \sum_{i,k=0}^{\infty} k\,p_{ik}.$$

Однако интересно отметить, что при $\theta = 0$ и $\bar{i} + \bar{k} < 1$ $P(\tau) = 0$ при любом $0 < \tau \leqslant \infty$.

Действительно, в этом случае правая часть формулы (16) вещественна и меньше единицы и, следовательно, (так как $a_1^2 > a_2^2$) $\tau_0 < 0$.

В случае когда $\bar{k} = 0$ (или $a_2 = 0$, т. е. все потомки частицы летят в том же направлении, что и породившая их частица) и $\bar{i} > 1$, мы получаем следующую формулу:

$$\tau_0 = \frac{\log\theta^2}{2(1-\bar{i})}.$$

Вместе с тем следует отметить, что если коэффициент размножения

$$\overline{i+k} > 1, \text{ то } P(+\infty) > 0.$$

5°. Следуя указанному выше методу можно решить задачу нахождения критической толщины и при следующем, более общем законе случайных блужданий и размножения частицы:

1) вероятность того, что частица, двигающаяся направо (налево), распадется прежде, чем пройдет расстояние x, равна

$$1-e^{-x} \quad (1-e^{-\omega x},\ \omega>0);$$

2) если в некоторой точке распалась частица, двигающаяся направо (налево), то с вероятностями p_{ik} (p'_{ik}) $(i, k=0, 1, 2, \cdots)$ вместо нее образуется i частиц, двигающихся направо, и k частиц—налево;

3) если частица подходит к точке 0 (или к τ при $\tau<\infty$), то с вероятностью θ_1 (θ_2) она отразится (т. е. изменит направление движения), а с вероятностью $1-\theta_1$ $(1-\theta_2)$ навсегда покинет среду.

В остальном предположения те же, что и ранее. В частности,

$$\Sigma\, p_{ik}=\Sigma\, p'_{ik}=1,\ \max\,(\Sigma\, ip_{ik},\ \ \Sigma\, k p_{ik},\ \Sigma\, ip'_{ik},\ \ \Sigma\, k p'_{ik})<\infty.$$

Таким образом, в данном случае среда, вообще говоря, анизотропна.

Если мы введем обозначения

$$U(\alpha, \beta)=\Sigma\, p_{ik}\alpha^i\beta^k,\ V(\alpha, \beta)=\Sigma\, p'_{ik}\,\alpha^i\,\beta^k,$$

$$a_1=1-\left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=1},\quad b_1=\omega\left.\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial\alpha}\right|_{\alpha,\beta=1},$$

$$a_2=-\left.\frac{\partial U(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=1},\quad b_2=\omega\left(\left.\frac{\partial V(\alpha, \beta)}{\partial\beta}\right|_{\alpha,\beta=1}-1\right),$$

$$k_\pm=\frac{a_1+b_2}{2}\pm\sqrt{\frac{(a_1+b_2)^2}{4}-a_2b_1-b_2a_1}=s\pm\sqrt{r},$$

то для критической толщины τ_0 в этом, более общем, случае получим следующие явные выражения:

а) при $r\neq0$, т. е. $k_+\neq k_-$

$$e^{2\sqrt{r}\tau_0}=\frac{a_1+a_2\theta_1-b_1\theta_2-b_2\theta_1\theta_2-(1-\theta_1\theta_2)\,k_+}{a_1+\theta_2\theta_1-b_1\theta_2-b_2\theta_1\theta_2-(1-\theta_1\theta_2)\,k_-};$$

б) при $r=0$, т. е. $k_1=k_2=s$

$$\tau_0=\frac{1-\theta_1\theta_2}{(1-\theta_1\theta_2)\,s-a_1-a_2\theta_1+b_1\theta_2+b_2\theta_1\theta_2}.$$

Разумеется, физический смысл имеет лишь случай $\tau_0\geqslant0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17.III.66

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՌԱՆԴՈՄԻԶԱՑՎԱԾ ՄԻԱՉԱՓ ՄՈԴԵԼԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՍՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ճառագայթման տեղափոխման որոշ եռաչափ խնդիրները կարող են բերվել միաչափ դեպքին մասնիկի ազատ վազքի էքսպոնենցիալ բաշխվածությունից հրաժարվելու գնով։

Սակայն բաց է մնում այն հարցը, թե ինչպիսի արդյունքներ կարելի է ստանալ միաչափ խնդրի լուծման ուղղությամբ, երբ դիտարկվում է ցրման էլեմենտար ակտի ռանդոմիզացիայի ամենաընդհանուր մոդելը՝ ուժի մեջ թողնելով մասնիկի ազատ վազքի էքսպոնենցիալ բաշխվածության ենթադրությունը։

Տվյալ հոդվածում լուծվում է միջավայրի կրիտիկական հաստությունը գտնելու այսպես դրված խնդիրը՝ ինչպես իզոտրոպ, այնպես էլ անիզոտրոպ դեպքերում։

R. V. AMBARTZUMIAN and A. B. NERSESSIAN

THE CRITICAL THICKNESS OF A ONE-DIMENTIONAL MODEL OF TRANSFER

Summary

The critical thicknees for a one-dimensional transfer problem is found under most general assumptions made about the elementary act of scattering.

The free path distribution of a particle is assumed to be exponential.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. В. Амбарцумян.* Рандомизированная задача диффузного отражения, Труды астрофизической школы (г. Пушкин, 1964), (в печати).
2. *R. Bellman.* Invariant imbedding time-dependent processes, vol. 2, New York (1964).

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS