ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ
ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК
АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՀ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ЦЕНА 30 К. ИНДЕКС 77735

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings Izvestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" are requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Papers in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in Armenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles of foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be underlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines above. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, and indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers and locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the author's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, the date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, the title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication should be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in square brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that would call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the final version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial office reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work has been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name in full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 3 Математика

К. Д. ЗАТУЛОВСКАЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ F-МОНОГЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Введение

Назовем алгеброй A какую-нибудь ассоциативно-коммутативную алгебру с единицей и с конечным базисом над полем комплексных чисел (или же A есть поле комплексных чисел). Мы нормируем алгебру A, полагая для всякого элемента $a \in A$: $|a| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_r|^2}$, где $a_1, \cdots, a_r$—комплексные компоненты элемента a. Имеем для любой пары элементов $a, b \in A$: $|ab| \leqslant N|a||b|$, где $N \geqslant 1$ [2]. Всюду в дальнейшем через N обозначаем только эту постоянную.

Пусть f и t—непрерывно-дифференцируемые функции многих действительных переменных

$$x_1, \cdots, x_S \qquad (S \geqslant 2) \tag{1}$$

со значениями из данной алгебры A.

Назовем функцию f F-моногенной (моногенной в смысле В. С. Федорова [1], [2]) в области Δ, если найдется функция переменных (1), которую мы обозначим через $f^{(1)}$, такая, что в данной области Δ $df = f^{(1)} dt$; $f^{(1)}$ называется F-производной функции f.

Для однозначного выбора функции $f^{(1)}$ допустим возможность деления элемента алгебры A на какую-нибудь одну частную производную первого порядка от t всюду в Δ.

Множество всех F-моногенных относительно t функций в области Δ обозначаем через (t, Δ, A).

Аналогично определяются F-производные различных порядков, обозначаемые $f^{(n)}$, $n = 2, 3, \cdots$, а именно, имеем

$$df^{(n)} = f^{(n+1)} dt,$$

если $f^{(n)} \in (t, \Delta, A)$.

Примеры

1) Пусть $f = z^5$, $t = z^3$, $z = x_1 + ix_2$, $i^2 = -1$, $S = 2$. Здесь $f^{(1)} = \frac{5}{3} z^2$; f—многозначная функция от t в любой окрестности точки $z = 0$, F—моногенная по t в этой окрестности.

2) Пусть $f = x_1 + \cdots + x_S$, $t = ae^{f i}$, $i^2 = -1$, где a—постоянная, принадлежащая A и имеющая обратный — a^{-1}.

Имеем
$$df = \frac{1}{ti}\,dt, \quad f^{(1)} = \frac{1}{ti}.$$

f—многозначная функция от t, так как t имеет одно и то же значение на всех следующих гиперплоскостях:

$$x_1 + \cdots + x_s = \alpha + 2k\pi, \quad k = 0,\ 1, \cdots,$$

α—действительное число, а f принимает разные значения на различных плоскостях.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для каждой точки области Δ найдется координата из (1), которую обозначим через x, такая, что в этой точке существует $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1}$.

Одним из основных и мало разработанных вопросов в теории F—моногенных функций является вопрос о характере зависимости функции f от функции t, если $f \in (t,\ \Delta,\ A)$.

Определение. Функция f, моногенная по t в области Δ, называется аналитической однозначной функцией от t в этой области, если существуют F-производные от f любого порядка* и в некоторой окрестности $\Delta(P)$ каждой точки $P \in \Delta$

$$f^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f_0^{(n)} (t - t_0)^{k-n}}{(k-n)!}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \cdots$$

($f_0^{(k)}$, t_0—значения $f^{(k)}$ и t в точке P), причем все эти ряды абсолютно и равномерно сходятся в $\Delta(P)$.

В. С. Федоров [1], считая все компоненты функций f и t аналитическими (в обычном смысле) от координат (1) в Δ, доказал, что f—однозначная аналитическая функция от t в этой области при следующем дополнительном условии:

$$\left|\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right| < AB^n, \quad n = 0,\ 1, \cdots, \quad U = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^{-1}, \quad A, B = \text{const}.$$

В настоящей работе мы обобщаем эту теорему В. С. Федорова, освобождаясь от этого дополнительного условия (§ 2, „Основная теорема").

Заметим, что функция f может быть аналитической однозначной функцией от t (в вышеуказанном смысле) и в том случае, когда f и t не имеют непрерывных частных производных порядка выше первого по переменным (1). Например, f—любой полином от t, причем t в некоторой области Δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным (1).

---

* Это будет иметь место, если все компоненты функций f и t бесконечно дифференцируемы по переменным (1) в Δ. Условие это достаточное, но не необходимое [2].

1° Пусть $f \in (t, \Delta, A)$. Всюду в дальнейшем полагаем

$$D = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial t}{\partial x}, \qquad D^{0}\lambda = \lambda.$$

Пусть все компоненты функций f и t аналитичны относительно координат (1) в Δ. Тогда, как известно, для всякой заданной ограниченной и замкнутой области Δ_0, расположенной строго внутри Δ, найдутся для данных f и t такие постоянные $a > 1$, $b > 1$, $C > 1$, что в Δ_0

$$|D^k\lambda| < ab^k k!, \quad |D^k f| < ab^k k!, \quad |\lambda^{-1}| < C, \quad k = 0, 1, \cdots. \tag{2}$$

Всюду в дальнейшем рассматриваем значения изучаемых функций и их производных в такой области Δ_0, что́ всякий раз не оговариваем.

Назовем произведением класса „k“ произведение вида

$$\prod_{j=1}^{k} D^{m_j} v_j \qquad (v_1 = f,\ v_j = \lambda,\ j = 2, \cdots, k), \tag{3}$$

взятое со знаком $+$ или $-$, где m_1—целое положительное число, $m_2, \cdots, m_k$—целые неотрицательные числа (не обязательно попарно различные), подчиненные единственному условию: $m_1 + \cdots + m_k = k$. Отметим очевидное свойство F-производных функции f

$$\left.\begin{aligned} &f^{(n)} = \frac{1}{\lambda} Df^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \cdots, \\ &f^{(1)} = \frac{1}{\lambda} Df, \\ &f^{(2)} = \frac{1}{\lambda^3} (\lambda^2 D^2 f - D\lambda \cdot Df) \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Справедливо следующее представление:*

$$\left.\begin{aligned} &f^{(n)} = \lambda^{1-2n} \varphi_n, \\ &\varphi_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j, \quad n = 1, 2 \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где каждое α_j есть произведение класса „n“, m—некоторое натуральное число, большее или равное единице.

Доказательство. 1) Теорема верна для $n = 1$, что следует из (4).

2) Пусть теорема справедлива для некоторого n, докажем ее для $n + 1$.

Из (4) и (5) имеем

$$f^{(n+1)} = \frac{1}{\lambda} Df^{(n)} = \lambda^{1-2n-2} [\lambda D\varphi_n - (2n-1) \varphi_n D\lambda]. \tag{6}$$

Легко видеть, поскольку теорема верна для n, что выражение внутри прямых скобок в правой части уравнения (6) есть сумма произведений класса „$n+1$". Из представления (6) следует также справедливость теоремы для $n+1$. Теорема доказана.

2°. Основная теорема. *Если все компоненты f и t есть аналитические функции переменных* (1) *в некоторой области* Δ, *в которой f—F-моногенна относительно t, тогда в некоторой окрестности каждой точки указанной области f есть аналитическая функция от t.*

Доказательство. 1. Из (4) и (5) следует, что

$$\varphi_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} [\lambda D\alpha_j - (2n-1)\,\alpha_j D\lambda]. \tag{7}$$

Исходя из выражения $\varphi_1 = Df$ строим для $n = 2, 3, \cdots$, с помощью равенства (7), упорядоченную систему $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ произведений класса „n", которая определяет функцию φ_n формулы (5): $\varphi_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$.

Пусть, теперь, P_k—любое произведение вида (3) класса „k" $(k=1, 2, \cdots)$. Введем обозначения:

$$\sigma(P_k) = m_1!\, m_2! \cdots m_k!,$$

$$\sigma(\varphi_k) = \sigma(\alpha_1) + \cdots + \sigma(\alpha_m), \tag{8}$$

$$\sigma(\lambda DP_k) = \sum_{q=1}^{k} \sigma(\beta_q),$$

где

$$\beta_1 = \lambda(D^{m_1+1}V_1)\prod_{j=2}^{k} D^{m_j}V_j, \quad \beta_k = \lambda(D^{m_k+1}V_k)\prod_{j=1}^{k-1} D^{m_j}V_j,$$

$$\beta_q = \lambda(D^{m_q+1}V_q)\prod_{j=1}^{q-1} D^{m_j}V_j \prod_{j=q+1}^{k} D^{m_j}V_j, \quad q = 2, \cdots, k-1.$$

Очевидно, имеем

$$\sigma(\beta_q) = (m_q+1)\,\sigma(P_k), \quad q = 1, \cdots, k, \quad \sum_{q=1}^{k}(m_q+1) = 2k,$$

а поэтому $\sigma(\lambda DP_k) = 2k\sigma(P_k)$, откуда

$$\sigma(\lambda D\alpha_j) = 2n\sigma(\alpha_j).$$

Легко также видеть, что $\sigma(\alpha_j D\lambda) = \sigma(\alpha_j)$, $j = 1, \cdots, m$.

Из (7), (8) получаем

$$\sigma(\varphi_{n+1}) < 4n\,\sigma(\varphi_n), \qquad n = 1, 2, \cdots. \tag{9}$$

Так как, в силу (4), $\sigma(\varphi_1) = \sigma(Df) = 1$, то из неравенства (9) получим, полагая последовательно $n=2, 3, \cdots$,

$$\sigma(\varphi_n) < 4^{n-1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

Далее, из (2) и (8) следует, что для всякого произведения класса „k" имеем

$$|P_k| < (ab)^k N^{k-1} \sigma(P_k),$$

откуда, в силу теоремы 1 и равенства (8), получим

$$|\varphi_n| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| < (ab)^n N^{n-1} \sigma(\varphi_n).$$

Из последнего неравенства и из (10) находим

$$|\varphi_n| < (4N)^{n-1} (ab)^n (n-1)!, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

а так как из (2) и (5) имеем

$$|f^{(n)}| < N^{2n} C^{2n-1} |\varphi_n|, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

то

$$|f^{(n)}| < M^n n!, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

где M—некоторая постоянная, не зависящая от n.

II. Из последних неравенств следует, что для каждой данной точки $P \in \Delta$ найдется такая ее окрестность $\Delta(P)$, в которой абсолютно и равномерно сходятся ряды

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} U_k, \quad S_n = \sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(n)}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

где $U_k = f_0^{(k)} \dfrac{(t-t_0)^k}{k!}$, $f_0^{(k)}$, t_0—значения F-производных функции f порядка k и функции t в точке P, соответственно, а $U_k^{(n)}$ — F-производная порядка n от U_k, $k = 1, 2, \cdots$. В самом деле, полагая $|t - t_0| = \rho$, получим

$$|U_k| < N^k M^k \rho^k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Пусть $\tilde{\Delta}$—область, содержащаяся в Δ, такая, что для всех ее точек $\rho < CR$, $R = \dfrac{1}{MN}$, $0 < C < 1$, $C = \mathrm{const}$. При $\rho < R$ сходится ряд: $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (B\rho)^k$, где $B = MN$. Пусть $\rho = CR$. Найдется такое число $\delta > 0$, что $\rho_1 + \delta < R$. Таким образом, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (B\rho_1)^k < \infty$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k (\rho_1 + \delta)^k < \infty,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{\infty} B^k [(\rho_1 + \delta)^k - \rho_1^k] < \infty.$$

Из очевидного неравенства

$$(\rho_1+\sigma)^k-\rho_1^k > \frac{k!}{n!\,(k-n)!}\,\rho_1^{k-n}\sigma^n \qquad (k\geqslant n)$$

имеем

$$\frac{k!}{(k-n)!}\,\rho_1^{k-n} < \frac{n!}{\delta^n}\,[(\rho_1+\delta)^k-\rho_1^k] \quad (k\geqslant n),$$

и потому ряд

$$\sum_{k=n}^{\infty} B^k\,\frac{k!}{(k-n)!}\,\rho_1^{k-n} < \infty, \qquad n=1,\,2,\cdots,$$

откуда следует равномерная сходимость ряда

$$\sigma_n \equiv \sum_{k=n}^{\infty} B^k\,\frac{k!}{(k-n)!}\,\rho^{k-n} \quad \text{для} \quad \rho\leqslant\rho_1, \quad n=1,\,2,\cdots.$$

В качестве области $\tilde{\Delta}$ возьмем достаточно малый фиксированный шар с центром в точке P. Пусть $\Delta(P)$ есть этот шар. Ряд σ_n, равномерно сходящийся в этом шаре, мажорирует ряд S_n. Следовательно, в этом шаре абсолютно и равномерно сходится ряд S_n для всякого n. В этом шаре сходится равномерно и абсолютно и ряд S, ибо сходится там равномерно ряд σ, мажорирующий S.

Поэтому, полагая

$$\theta=\sum_{k=0}^{\infty} U_k,$$

получим, что θ моногенна по t в $\Delta(P)$ и для ее F-производной порядка n имеем

$$\theta^{(n)}=\sum_{k=n}^{\infty} U_k^{(n)}, \qquad n=1,\,2,\cdots.$$

Этот результат вытекает из следующей теоремы автора.

Пусть S—бесконечный ряд функций класса $(t,\,\Delta,\,A)$ и пусть σ—ряд их F-производных. Если ряд σ сходится равномерно в Δ, а ряд S сходится хотя бы в одной точке области Δ, тогда S сходится равномерно в области Δ, его сумма принадлежит классу $(t,\,\Delta,\,A)$ и ее F-производная равна сумме ряда σ [3].

Очевидно, имеем

$$\theta_0^{(n)}=f_0^{(n)}, \qquad n=0,\,1,\,2,\cdots. \tag{11}$$

Как известно (см. [2], стр. 366), из (11) следует, что f и θ совпадают в $\Delta(P)$.

Теорема доказана.

Ивановский энергетический институт

Поступило 30. III. 1965

Կ. Դ. ԶԱՏՈՒԼՈՎՍԿԱՅԱ

F-ՄՈՆՈԳԵՆ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Ամփոփում

Դիցուք f-ը և t-ն հիպերկոմպլեքս ֆունկցիաներ են $x_1,\cdots,x_s$ $(s > 2)$ իրական փոփոխականներից, որոնց արժեքները ընկած են ինչ որ միավորված զուգորդա-տեղափոխական գծային հանրահաշվում, իրական թվերի դաշտում։

Ապացուցվում է, որ եթե f-ի և t-ի կոմպոնենտները անալիտիկ ֆունկցիաներ են մի տիրույթում, որտեղ f-ը t-ի նկատմամբ մոնոգեն է Ֆեոդորովի իմաստով, ապա նշված տիրույթի յուրաքանչյուր կետի մի ինչ որ շրջակայքում f-ը միարժեք անալիտիկ ֆունկցիա է t-ից։

K. D. ZATULOVSKAYA

F-MONOGENIC ANALYTIC FUNCTIONS

Summary

Let f and t be hypercomplex functions of several real variables $x_1 \cdots x_s$ $(s > 2)$ with their values in an associative-commutative linear algebra over the real number field with an identity element.

Here we prove that if the components of f and t are analytic functions in a domain where f is monogenic with respect to t in the sense of Feodorov then f is a single-valued analytic function in a neighbourhood of each point of that domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Федоров.* Моногенность, Мат. сб., 18/60, 1946, 353—378.
2. *В. С. Федоров.* Основные свойства обобщенных моногенных функций, Изв. высш. учебн. зав., Математика, 1958, № 6 (7), 257—265.
3. *К. Д. Затуловская.* Об уравнениях в полных дифференциалах и моногенных функциях в смысле В. С. Федорова, Bull. math. soc. Roum. Sci, 4 (52), № 2, 1960, 109—119.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 1, 1966, № 3 Математика

Н. У. АРАКЕЛЯН

ПОСТРОЕНИЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, РАВНОМЕРНО УБЫВАЮЩИХ В УГЛЕ

Настоящая работа посвящена построению целых функций, равномерно и в определенном смысле максимально быстро убывающих в угле и имеющих минимальный рост в плоскости. Откладывая постановку задачи и формулировку полученных результатов до параграфа 2 отметим только, что эти целые функции имеют важные применения в теории приближений и в других вопросах теории функций комплексного переменного.

Работа состоит из двух параграфов. В первом параграфе доказываются несколько вспомогательных утверждений, относящихся к геометрической теории функций комплексного переменного, затем, во втором параграфе эти утверждения используются для построения указанных выше целых функций.

§ 1. Оценка граничных производных при конформном отображении

Рассмотрим область D, ограниченную кривой Жордана C, обладающей непрерывной кривизной, начинающейся и оканчивающейся в бесконечности. Пусть функция $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$, отображает область D конформно и однолистно на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$. Из геометрической теории функций комплексного переменного хорошо известно [1], что $f(z)$ непрерывна вплоть до границы C и имеет непрерывную и отличную от нуля производную $f'(z)$ на C по области D.

В этом параграфе нас интересует вопрос о том, при каких дополнительных ограничениях на C существуют положительные константы k_1 и k_2 такие, что

$$k_1 < |f'(z)| < k_2 \quad \text{для} \quad z \in C.$$

В теоремах 1 и 2 настоящего параграфа указываются некоторые ограничения на кривую C, гарантирующие существование констант k_1 и k_2.

1°. *Некоторые вариационные леммы.* Введем следующие обозначения. Пусть $D(C)$—область, ограниченная кривой Жордана C, начинающейся и оканчивающейся в бесконечности. Через $w = f(z, C)$ обозначим функцию, реализующую конформное и однолистное отображение области $D(C)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, причем так, что $f(\infty, C) = \infty$.

В известном вариационном принципе Линделефа [2] для случая полуплоскости утверждается, в частности, что если $D(C) \subseteq D(\tilde{C})$ и кривые C и $\tilde{C}$ удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, а отображения $f(z, C)$ и $f(z, \tilde{C})$ соответствующим образом нормированы на бесконечности, то неравенство

$$|f'(z, C)| \leqslant |f'(z, \tilde{C})|$$

выполняется во всех общих точках z кривых C и $\tilde{C}$, где эти производные существуют.

Однако, для приложений, ограничения на C и $\tilde{C}$ довольно жесткие. В нижеследующей лемме 1 все необходимые ограничения на C и $\tilde{C}$ выражены в терминах отображающих функций.

Лемма 1. *Пусть* $D(C) \subseteq D(\tilde{C})$ *и*

$$\varlimsup_{\substack{z \to \infty \\ z \in D(C)}} \left| \frac{f(z, C)}{f(z, \tilde{C})} \right| \leqslant 1. \tag{1.1}$$

Тогда неравенство

$$|f'(z, C)| \leqslant |f'(z, \tilde{C})| \tag{1.2}$$

выполняется во всех точках $z \in C \cap \tilde{C}$, *где эти производные существуют.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(w) = f(f^{-1}(w, C), \tilde{C}),$$

которая определена и непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Re} w \geqslant 0$, голоморфна при $\operatorname{Re} w > 0$ и $\operatorname{Re} \varphi(w) \geqslant 0$. В силу одной теоремы Вольфа [3] $\varphi(w)$ представляется в виде

$$\varphi(w) = \alpha w + \Phi(w), \tag{1.3}$$

где

$$\alpha = \inf_{\operatorname{Re} w > 0} \frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w}, \tag{1.4}$$

и равномерно в любом угле $|\arg w| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеем

$$\lim_{w \to \infty} \frac{\Phi(w)}{w} = 0. \tag{1.5}$$

Из (1.3), (1.5) и (1.1) следует, что

$$\alpha \geqslant \varliminf_{w \to \infty} \left| \frac{\varphi(w)}{w} \right| = \varliminf_{z \to \infty} \left| \frac{f(z, \tilde{C})}{f(z, C)} \right| \geqslant 1,$$

так что, в силу (1.4), имеем

$$\frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w} \geqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} w > 0. \tag{1.6}$$

При доказательстве оценки (1.2) достаточно ограничиться такими точками $z_0 \in C \cap \tilde{C}$, в которых $f'(z_0, C) \neq 0$. В соответствующей точке $w_0 = f(z_0, C)$, $\operatorname{Re} w_0 = 0$, функция $\varphi(w)$ имеет конечную производную $\varphi'(w_0)$, причем $\operatorname{Re} \varphi(w_0) = 0$. Если, теперь, точка w лежит на прямой $\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} w_0$, то, в силу (1.6), имеем

$$\left| \frac{\varphi(w) - \varphi(w_0)}{w - w_0} \right| \geqslant \frac{\operatorname{Re} \varphi(w)}{\operatorname{Re} w} > 1,$$

откуда, переходя к пределу при $w \to w_0$, получим

$$|\varphi'(w_0)| \geqslant 1. \tag{1.7}$$

В замкнутой области $\overline{D(C)}$ имеем

$$f(z, \tilde{C}) = \varphi(f(z, C)),$$

откуда

$$f'(z_0, \tilde{C}) = \varphi'(w_0) f'(z_0, C).$$

Неравенство (1.2) следует теперь из (1.7). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что нижний предел

$$\varliminf_{z \to \infty} \left| \frac{f(z, \tilde{C})}{f(z, C)} \right|$$

всегда конечен. Поэтому особый интерес представляют те ограничения на C и $\tilde{C}$, при которых

$$\varliminf_{z \to \infty} \left| \frac{f(z, \tilde{C})}{f(z, C)} \right| > 0. \tag{1.8}$$

Выполнение условия (1.8) не зависит от выбора отображений $f(z, C)$ и $f(z, \tilde{C})$, поскольку любая другая пара таких же отображений выражается линейно через $f(z, C)$ и $f(z, \tilde{C})$. Таким образом, выполнение условия (1.8) зависит лишь от областей $D(C)$ и $D(\tilde{C})$, а условие (1.1) является при этом условием нормировки. Из теорем типа Альфорса [4] и [5] или Варшавского [6] можно получить ряд довольно общих ограничений на области $D(C)$ и $D(\tilde{C})$, при которых условие (1.8) выполняется. Эти ограничения в общем выражают тот факт, что $D(C)$ и $D(\tilde{C})$ должны быть „близки" друг к другу (а не полуплоскости!). Конечно, при желании условие (1.1) можно заменить более прозрачным (но зато и более жестким) условием

$$\varlimsup_{z \to \infty} \left| \frac{f(z, C)}{z} \right| \leqslant 1, \quad \varliminf_{z \to \infty} \left| \frac{f(z, \tilde{C})}{z} \right| \geqslant 1, \tag{1.9}$$

что для наших целей вполне достаточно.

Следующая лемма показывает, что в некоторых случаях имеют место оценки, противоположные неравенству (1.2).

Лемма 2. *Пусть $D(C) \subseteq D(\breve{C})$, а кривые C и $\breve{C}$ имеют общую дугу γ, соединяющую некоторую точку z_0 с бесконечностью. Если при этом*

$$f(z_0, C) = f(z_0, \breve{C}) = 0, \tag{1.10}$$

то имеет место неравенство

$$\left|\frac{f'(z, \breve{C})}{f'(z, C)}\right| \leqslant \left|\frac{f(z, \breve{C})}{f(z, C)}\right| \tag{1.11}$$

во всех точках $z \neq z_0$ дуги γ, где эти производные существуют и отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть функция $w = f(z, C)$, для определенности, переводит дугу γ на верхнюю мнимую полуось $\Gamma: \operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w > 0$. Из условий леммы следует, что функция $w = f(z, \breve{C})$ тоже отображает γ на Γ, переводя при этом область $D(C)$ на некоторую область G, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Re} w > 0$ и содержащую на своей границе полуось Γ.

Рассмотрим теперь, как и в лемме 1, функцию

$$\varphi(w) = f(f^{-1}(w, C), \breve{C}), \tag{1.12}$$

нормированную условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$. Она отображает полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ на область G, причем полуось Γ переходит на Γ. В силу принципа симметрии функция $\varphi(w)$ продолжима на всю плоскость с разрезом Γ' вдоль отрицательной мнимой полуоси и отображает внешность Γ' на некоторую симметричную относительно мнимой оси область, не содержащую точек Γ'. Образуем теперь функцию

$$\psi(\zeta) = [-i\varphi(i\zeta^2)]^{1/2}, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(\infty) = \infty, \tag{1.13}$$

отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > 0$ на некоторую область, лежащую в правой полуплоскости и симметричную относительно действительной оси, так что

$$\operatorname{Im} \psi(\zeta) = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \zeta = 0. \tag{1.14}$$

Для функции $\psi(\zeta)$ имеет место фундаментальное неравенство Жулиа

$$\left|\frac{\psi(\zeta') - \psi(\zeta)}{\psi(\zeta') + \overline{\psi(\zeta)}}\right| \leqslant \left|\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta' + \overline{\zeta}}\right|,$$

где ζ' и ζ—произвольные точки из правой полуплоскости.

---

* Нетрудно видеть, что в условиях леммы 2 производные $f'(z, C)$ и $f'(z, \breve{C})$ в некоторой точке $z \in \gamma$, $z \neq z_0$ существуют одновременно и обращаются в нуль тоже одновременно. Впрочем, это будет видно также из хода доказательства леммы 2.

Переходя здесь к пределу при $\zeta' \to \zeta$, получим

$$|\psi'(\zeta)| \leqslant \frac{\operatorname{Re}\psi(\zeta)}{\operatorname{Re}\zeta},$$

откуда, учитывая (1.14), в частности, имеем

$$|\psi'(\zeta)| \leqslant \left|\frac{\psi(\zeta)}{\zeta}\right| \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\zeta = 0.$$

Далее, в силу (1.13) и (1.14), отсюда следует оценка

$$|\varphi'(w)| \leqslant \left|\frac{\varphi(w)}{w}\right| \quad \text{для} \quad w \in \Gamma,\ w \neq 0. \tag{1.15}$$

Заметим теперь, что, в силу (1.12), имеет место тождество

$$f(z, \tilde{C}) = \varphi(f(z, C)), \quad z \in \overline{D(C)},$$

и, так как $\varphi(w)$ аналитична, $\varphi'(w) \neq 0$ при $w \in \Gamma$, то в некоторой точке $z \in \gamma$ производные $f'(z, \tilde{C})$ и $f'(z, C)$ существуют одновременно и обращаются в нуль также одновременно. Пусть $z \in \gamma$ —точка, где эти производные существуют. Тогда

$$f'(z, \tilde{C}) = \varphi'(w) f'(z, C),$$

где $w = f(z, C)$. Учитывая (1.15) получим отсюда требуемую оценку (1.11). Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 непосредственно следует

Лемма 3. *Пусть $D(C) \subseteq D(\tilde{C})$, кривые C и $\tilde{C}$ имеют общую дугу γ, соединяющую некоторую точку z_0 с бесконечностью. Пусть при этом*

$$\varlimsup_{\substack{z \to \infty \\ z \in D(C)}} \left(\left|\frac{f(z, C)}{f(z, \tilde{C})}\right| + \left|\frac{f(z, \tilde{C})}{f(z, C)}\right|\right) < +\infty. \tag{1.16}$$

Тогда существуют константы $k_3 > 0$ и $k_4 > 0$ такие, что во всех точках $z \in \gamma$, $|z - z_0| > 1$, где существуют отличные от нуля производные $f'(z, C)$ и $f'(z, \tilde{C})$, выполняется оценка

$$k_3 < \left|\frac{f'(z, C)}{f'(z, \tilde{C})}\right| < k_4. \tag{1.17}$$

Правая часть этой оценки следует из леммы 1. Для получения левой оценки достаточно к отображениям $f(z, C) - f(z_0, C)$ и $f(z, \tilde{C}) - f(z_0, \tilde{C})$ применить лемму 2, учитывая (1.16) и условие $f(\infty, C) = f(\infty, \tilde{C}) = \infty$.

2°. Леммы о линиях Жордана. Рассмотрим кривую Жордана в плоскости z, $z = x + iy = re^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, представимую уравнением в полярных координатах r, θ:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi(r)}{r}, \qquad r \geqslant r_0 > 0, \tag{1.18}$$

где $\varphi(t) \geqslant 0$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $t \geqslant r_0$.

Нам сначала необходимо выяснить, при каких условиях эту кривую можно, начиная с некоторого места, представить в декартовых координатах уравнением вида

$$x = -\psi(y), \quad y \geqslant y_0, \tag{1.19}$$

где функция $\psi(t) \geqslant 0$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $t \geqslant y_0$, и как при этом связаны свойства функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ около точки $t = +\infty$? Следующая лемма дает ответ на этот вопрос и показывает, что эти функции имеют одинаковые во многих отношениях качественные и количественные свойства.

Лемма 4. *При условии* $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$ *кривая* Γ *вида* (1.18) *представима в виде* (1.19), *где* $\lim\limits_{t\to\infty}\psi'(t) = 0$, *и для* $z = x + iy = re^{i\theta} \in \Gamma$, $z \to \infty$, *имеют место равенства*

$$\lim_{r\to\infty} y'_r = \lim_{r\to\infty}\frac{y}{r} = 1, \tag{1.20}$$

$$\psi(y) = \varphi(r)\left[1 + o\left(\frac{\varphi(r)}{r}\right)\right], \tag{1.21}$$

$$\psi'(y) = \varphi'(r) + \left(\frac{\varphi(r)}{r}\right), \tag{1.22}$$

$$\psi''(y) = [1 + o(1)]\varphi''(r) + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{1.23}$$

Если дополнительно предположить, что $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ *не растет, то не растет и* $\dfrac{\psi(t)}{t}$. *При этом, если* $\varphi(t)$ *не убывает (выпукла), то не убывает (выпукла) и* $\psi(t)$.

Доказательство. В силу (1.18) кривая Γ представляется в параметрическом виде

$$x = -r\sin\alpha(r), \quad y = r\cos\alpha(r), \quad r \geqslant r_0, \tag{1.24}$$

где $\alpha(r) = \dfrac{\varphi(r)}{r}$. Из условия $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = \lim_{t\to\infty} t\alpha'(t) = 0, \tag{1.25}$$

откуда немедленно следует (1.20). Далее, из (1.20) вытекает, что функция $y = r\cos\alpha(r)$ при $r \geqslant r_1 \geqslant r_0$ является строго растущей к $+\infty$ функцией, так что существует обратная функция $r = r(y)$, тоже строго растущая. Подставляя $r = r(y)$ в (1.24), получим требуемое представление (1.19).

Равенства (1.21) и (1.22) следуют из тождества

$$\psi(y) = \varphi(r)\frac{\sin\alpha(r)}{\alpha(r)}, \quad r = r(y), \tag{1.26}$$

если учитывать (1.25) и (1.20). Аналогично, из формулы

$$\psi''(y) = (y'_r)^{-3}\{\varphi''(r) + r^2[\alpha'(r)]^3\} \tag{1.27}$$

следует (1.23). Последние три утверждения леммы вытекают соответственно из тождества $\frac{\psi(y)}{y} = \operatorname{tg}\alpha(r)$ и из формул (1.26) и (1.27). Лемма доказана.

Некоторые утверждения леммы 4 обратимы. Справедлива

Лемма 5. *При условии* $\lim\limits_{t\to\infty}\psi'(t) = 0$ *кривая* Г *вида* (1.19) *представима в виде* (1.18), где $\lim\varphi'(t) = 0$. *Кроме того, остаются в силе равенства* (1.20)—(1.23) *с заменой в них* $\varphi(t)$ *на* $\psi(t)$ *и* y *на* r. *Если дополнительно предположим, что* $\frac{\psi(t)}{t}$ *не растет, то и* $\frac{\varphi(t)}{t}$ *не будет расти.*

Доказательство. В самом деле, кривая Г представляется в параметрическом виде

$$r = [y^2 + \psi^2(y)]^{1/2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\psi(y)}{y}, \quad y > y_0. \tag{1.28}$$

Используя условия $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty}\psi'(t) = 0$, получим

$$\lim_{y\to\infty}\frac{r}{y} = \lim_{y\to\infty} r'_y = 1,$$

откуда следует, что функция $r = [y^2 + \psi^2(y)]^{1/2}$ строго растет при $y > y_1 \geqslant y_0$ и разрешима относительно y, т. е. $y = y(r)$.

Подставляя $y = y(r)$ в (2.28), получим представление (1.18), где

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \operatorname{arctg}\frac{\psi(y)}{y}, \quad y = y(r). \tag{1.29}$$

Из (1.29) следует, что функции $\frac{\psi(t)}{t}$ и $\frac{\varphi(t)}{t}$ убывают одновременно и что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\varphi'(t)=0,$$

$$\frac{\varphi(r)}{r}=[1+o(1)]\frac{\psi(y)}{y}. \tag{1.30}$$

Таким образом, кривая Г удовлетворяет условиям леммы 4, так что справедливы равенства (1.20)—(1.23). Лемма будет доказана, если в этих равенствах учитывать (1.30).

Для дальнейших лемм настоящего пункта нам нужны некоторые термины и обозначения. Пусть кривая Г имеет вид (1.19). Мы скажем, что точка $z=x+iy$ лежит *правее (левее)* кривой Г, если $y\geqslant y_0$ и $x>-\psi(y)$ $(x<-\psi(y))$. Некоторое множество точек лежит правее (левее) Г, если все его точки лежат правее (левее) Г. Эти термины мы сохраняем для любой кривой вида (1.19), даже если $y_0=-\infty$.

Возьмем теперь произвольную точку $\zeta=\xi+i\eta\in\Gamma$ и проведем через ζ нормаль n_ζ к кривой Г. Обозначим через $K^+(\zeta, R)$ $(K^-(\zeta, R))$ открытый круг, ограниченный окружностью радиуса R, проходящей через точку ζ, центр которого лежит на части нормали n_ζ, направленной правее (левее) Г. Кроме того, для произвольного вещественного числа γ рассмотрим точку пересечения $z_\zeta=x_\zeta+iy_\zeta$ прямой $x=\gamma y$ с n_ζ. Вокруг точки z_ζ опишем открытый круг $K_\gamma(\zeta)$ радиуса $R_\zeta=|\zeta-z_\zeta|$. Справедлива следующая

Лемма 6. *Пусть кривая Г представима в виде* (1.19), *где*

$$\lim_{t\to\infty}\psi'(t)=0, \tag{1.31}$$

$$\varliminf_{t\to\infty}t\psi''(t)>-\infty\ \left(\varlimsup_{t\to\infty}t\psi''(t)<+\infty\right). \tag{1.32}$$

Тогда существуют числа $\rho>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что при $|\zeta|\geqslant\rho$ круги $K_\gamma(\zeta)$ лежат правее Г, если $0<\gamma\leqslant\varepsilon$ (левее, если $-\varepsilon\leqslant\gamma<0$). При этом

$$\lim_{\zeta\to\infty}\frac{R_\zeta}{|x_\zeta|}=1. \tag{1.33}$$

Если дополнительно предположить, что $\psi(t)=O\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)$ *при* $t\to\infty$, *то имеем*

$$\psi(\eta)=[1+o(1)]\psi(y_\zeta),\quad \zeta\to\infty. \tag{1.34}$$

Доказательство. Ограничимся случаем $\gamma>0$, так как рассуждения для случая $\gamma<0$ аналогичны. Пусть $\alpha(r)$—угол между положительным направлением действительной оси с нормалью к кривой Г в точке $\zeta=-\psi(\eta)+i\eta$, направленной в сторону прямой $x=\gamma y$. Центр круга $K_\gamma(\zeta)$—точка $z_\zeta=x_\zeta+iy_\zeta$ связана с R_ζ соотношениями

$$y_\zeta=\eta+R_\zeta\sin\alpha(\eta),\quad x_\zeta=-\psi(\eta)+R_\zeta\cos\alpha(\eta), \tag{1.35}$$

откуда, учитывая равенства

$$\lim_{\eta\to\infty} \alpha(\eta) = \lim_{\eta\to\infty} \operatorname{arctg} \psi'(\eta) = 0,$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{|\zeta|}{\eta} = 1, \quad x_\zeta = \gamma y_\zeta,$$

получим

$$\lim_{\eta\to\infty} \frac{R_\zeta}{\eta} = \gamma, \quad \lim_{\zeta\to\infty} \frac{R_\zeta}{y_\zeta} = \gamma, \quad \lim_{\zeta\to\infty} \frac{R_\zeta}{x_\zeta} = 1. \tag{1.36}$$

Докажем теперь, что существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\rho > 0$ такие, что круги $K_\gamma(\zeta)$ при $0 < \gamma \leqslant \varepsilon$ и $|\zeta| \geqslant \rho$ лежат правее кривой Γ, причем ясно, что можно ограничиться случаем $\gamma = \varepsilon$.

В силу условия (1.32), имеем

$$t\psi''(t) > -A, \tag{1.37}$$

где $A \geqslant 1$. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{4A}$, а число ρ выберем так, чтобы (см. (1.36))

$$\frac{1}{2}\varepsilon < \frac{R_\zeta}{y_\zeta} < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad |\zeta| \geqslant \rho. \tag{1.38}$$

Отсюда имеем, во-первых, что $R_\zeta < y_\zeta$ при $|\zeta| \geqslant \rho$, так что круги $K_\varepsilon(\zeta)$ лежат в верхней полуплоскости. Далее, уравнение границы $C_\varepsilon(\zeta)$ круга $K_\varepsilon(\zeta)$ имеет вид

$$x = x_\zeta \pm [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/2}, \quad |y - y_\zeta| \leqslant R_\zeta,$$

и нам надо доказать, что при $|\zeta| \geqslant \rho$ имеет место неравенство

$$g(y) \equiv \psi(y) + x_\zeta - [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/2} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leqslant R_\zeta. \tag{1.39}$$

С этой целью заметим сначала, что, в силу (1.35), $|\eta - y_\zeta| < R_\zeta$. Кроме того, тот факт, что окружность $C_\varepsilon(\zeta)$ проходит через точку ζ и имеет общую касательную с кривой Γ, означает, что $g(\eta) = 0$ и $g'(\eta) = 0$. По формуле Тейлора имеем

$$g(y) = \frac{(y-\eta)^2}{2} g''(c) \geqslant \frac{(y-\eta)^2}{2}\left(\psi''(c) + \frac{1}{R_\zeta}\right), \quad |c - y_\zeta| < R_\zeta.$$

Отсюда, учитывая (1.37), (1.38), получим (1.39).

Докажем теперь (1.34). В силу (1.35) и (1.36) имеем

$$y_\zeta - \eta = O(\eta\alpha(\eta)) = O(\eta\psi'(\eta)).$$

Кроме того, воспользовавшись теоремой о среднем, получим

$$\psi(y_\zeta) - \psi(\eta) = \psi'(c)(y_\zeta - \eta),$$

где $c = \eta + \theta(y_\zeta - \eta)$, $0 < \theta < 1$, так что $c = \eta[1 + o(1)]$, следовательно

$$\psi(y_\zeta) - \psi(\eta) = o(y_\zeta - \eta) = o(\eta\psi'(\eta)) = o(\psi(\eta)),$$

откуда следует (1.34). Лемма доказана.

В случае $\gamma = 0$, т. е. когда центры кругов $K_\gamma(\zeta) \equiv K_0(\zeta)$ лежат на прямой $x = 0$, имеет место следующая лемма с несколько более слабыми ограничениями на функцию $\psi(t)$.

Лемма 7. *Пусть кривая* Г *представима в виде* (1.19), где $\psi(t) > 0$ *и*

$$\lim_{t\to\infty} \psi'(t) = 0,$$

$$\varliminf_{t\to\infty} \psi(t)\psi''(t) > -1. \tag{1.40}$$

Тогда существует число $\rho > 0$ *такое, что круги* $K_0(\zeta)$ *при* $|\zeta| \geqslant \rho$ *лежат правее* Г.

Доказательство. Повторяя рассуждения леммы 6, сначала доказываем, что

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{R_\zeta}{y_\zeta} = 0, \tag{1.41}$$

так что $R_\zeta < y_\zeta$ при $|\zeta| \geqslant \rho_0$ и нам надо установить, что

$$\psi(y) - [R_\zeta^2 - (y - y_\zeta)^2]^{1/2} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leqslant R_\zeta, \quad |\zeta| \geqslant \rho \geqslant \rho_0.$$

Для этого достаточно доказать неравенство

$$g(y) \equiv \psi^2(y) + (y - y_\zeta)^2 - R_\zeta^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |y - y_\zeta| \leqslant R_\zeta, \quad |\zeta| \geqslant \rho.$$

Учитывая условия $g(\eta) = 0$, $g'(\eta) = 0$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ согласно формуле Тейлора имеем

$$g(y) = \frac{(y-\eta)^2}{2} g''(c) = (y - \eta)^2 [1 + \psi(c)\psi''(c)], \quad |c - y_\zeta| < R_\zeta. \tag{1.42}$$

Из условия (1.40) следует, что $\lim\limits_{\zeta\to\infty} c = \infty$, а тогда из (1.40) и (1.42) получаем, что $g(y) \geqslant 0$ при $|\zeta| \geqslant \rho$. Лемма доказана.

Ослаблением в лемме 6 условия (1.32), аналогично, доказывается

Лемма 8. *Пусть кривая* Г *представима в виде* (1.19), *где*

$$\lim_{t\to\infty} \psi'(t) = 0, \ \varliminf_{t\to\infty} \psi''(t) > -\infty \ (\varlimsup_{t\to\infty} \psi''(t) < +\infty).$$

Тогда существуют числа $R > 0$ *и* $\rho > 0$ *такие, что при* $|\zeta| \geqslant \rho$ *круги* $K^+(\zeta, R)$ $(K^-(\zeta, R))$ *лежат правее (левее) кривой* Г.

3°. *Оценка граничных производных при конформном отображении.* В настоящем пункте приводится решение поставленной в начале настоящего параграфа задачи о поведении граничных производных около изолированной точки.

Мы воспользуемся обозначениями пункта 1°. Пусть $D(C)$ означает область, ограниченную кривой C Жордана, которая начинается и оканчивается в бесконечности и имеет непрерывную кривизну. Обозначим через $f(z, C)$ функцию, осуществляющую конформное и однолистное отображение области $D(C)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, причем так, что $f(\infty, C) = \infty$. Для оценки граничных производных функции $f(z, C)$ мы предполагаем, что кривая C представима, начиная с некоторого места, уравнением в полярных координатах (r, θ) $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, а область $D(C)$ определяется соответствующими неравенствами.

Именно, мы предполагаем, что точки $z = re^{i\theta}$ области $D(C)$, начиная с некоторого места, определяются одним из следующих двух неравенств:

$$-\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}\right) < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_2(r)}{r} \tag{1.43}$$

или

$$-\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1(r)}{r}\right) < \theta < \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_2(r)}{r}, \tag{1.44}$$

где $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$—неотрицательные и дважды непрерывно дифференцируемые функции при $r \geqslant r_0$, причем

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_1'(r) = \lim_{r\to\infty} \varphi_2'(r) = 0, \tag{1.45}$$

$$\int^{\infty} \frac{\varphi_1(r) + \varphi_2(r)}{r^2}\, dr < +\infty. \tag{1.46}$$

Из теорем искажения Альфорса [4] и [5] следует, при указанных выше условиях, оценка

$$|f(z, C)| > k_5 |z|, \quad |z| \geqslant r_1 \geqslant r_0, \tag{1.47}$$

где k_5—положительная константа*. Если же дополнительно предположить, что функции $\frac{\varphi_1(r)}{r}$ и $\frac{\varphi_2(r)}{r}$ имеют ограниченную вариацию (в частности, если они не растут), тогда имеем также

$$|f(z, C)| < k_6 |z|, \quad |z| \geqslant r_2 \geqslant r_0, \tag{1.48}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая простая

Лемма 9. *Пусть функция $U(z)$ гармонична и неотрицательна в круге $|z - z_0| < R$. Если она непрерывна в граничной точке ζ, причем $U(\zeta) = 0$ и существует производная $\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n}$ по внутренней нормали, то справедлива оценка*

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} \geqslant \frac{U(z_0)}{2R}. \tag{1.49}$$

В самом деле, из неравенств Гарнака имеем

$$U(z) \geqslant U(z_0) \frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} \quad \text{при} \quad |z - z_0| < R.$$

* Всюду в этой работе через k_i $(i = 1, 2, \cdots)$ мы обозначаем только положительные константы.

Если точка z находится на нормали, проходящей через ζ, то $R - |z - z_0| = |\zeta - z|$, и мы получим

$$\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n} = \lim_{z\to\zeta} \frac{U(z) - U(\zeta)}{|z - \zeta|} \geqslant \lim_{z\to\zeta} \frac{U(z_0)}{R + |z - z_0|} = \frac{U(z_0)}{2R}.$$

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основных теорем настоящего параграфа.

Теорема 1. *Пусть область* $D(C)$ *представима в виде* (1.43).
а) *Если* $\underline{\lim}_{r\to\infty} r\varphi_i''(r) > -\infty$ $(i = 1, 2)$, *то*

$$|f'(z, C)| > k_7, \quad z \in C. \tag{1.50}$$

б) *Если же функции* $\varphi_i(r)$ *растут, а функции* $\frac{\varphi_i(r)}{r}$ *убывают и* $\overline{\lim}_{r\to\infty} \varphi_i''(r) < +\infty$, *то*

$$|f'(z, C)| < k_8, \quad z \in C. \tag{1.51}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку (1.50). Так как граница C области $D(C)$ имеет непрерывную кривизну, то функция

$$f(z, C) = U(z, C) + iV(z, C)$$

непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D(C)}$. Пусть n есть нормаль к C, направленная в сторону области $D(C)$. Из существования граничных производных $f'(z, C)$ и из условия $U(z, C) = 0$ на C следует, что

$$|f'(z, C)| = \frac{\partial U(z, C)}{\partial n}, \quad z \in C,$$

и нам, следовательно, нужно оценить снизу производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$.

С этой целью выберем число $a \geqslant 0$ так, чтобы полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$ лежала целиком в $D(C)$. Согласно теореме Вольфа, о которой говорится в доказательстве леммы 1, при $\operatorname{Re} z > a$

$$U(z, C) \geqslant \alpha(\operatorname{Re} z - a), \quad \text{где} \quad \alpha \geqslant 0,$$

и равномерно в любом угле $|\arg z| \leqslant \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha}{2}$

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z, C)}{z} = \alpha.$$

Сопоставляя это с оценкой (1.47), мы получим, что $\alpha \geqslant k_5 > 0$, поэтому

$$U(z, C) \geqslant k_5(\operatorname{Re} z - a), \quad \operatorname{Re} z > a. \tag{1.52}$$

Производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$ оценим снизу, например, на кривой

$$\Gamma:\ \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_2(r)}{r},\quad r \geqslant r_0, \tag{1.53}$$

имеющей вид (1.18).

В силу (1.45) и леммы 4 кривая Γ представима в виде (1.19), где функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям (1.31) и (1.32) леммы 6, если учитывать (1.23) и условие $\varliminf_{r\to\infty} r\varphi_2'(r) > -\infty$ теоремы. Поэтому, в силу леммы 6, при $\zeta\in\Gamma$, $|\zeta|\geqslant\rho$ функция $U(z, C)$ гармонична и неотрицательна в круге $K_1(\zeta)$, причем $U(\zeta, C)=0$.

По лемме 6 и, в силу (1.52), имеем оценку

$$\frac{\partial U(\zeta, C)}{\partial n} > \frac{U(z_\zeta, C)}{2R_\zeta} \geqslant \frac{k_5}{2}\,\frac{x_\zeta - a}{R_\zeta},$$

откуда и получается требуемая оценка (1.50), если учесть (1.33).

б) Докажем теперь оценку (1.51), например, на части (1.53) кривой C. Выберем число $R_0>0$ таким образом, чтобы вне круга $|z|<R_0$ область $D(C)$ определялась неравенствами (1.43), а кривая (1.53) была, в силу леммы 4, представима в виде (1.19). Рассмотрим область

$$D(C_0):\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_0(r)}{r},\quad r>0,$$

где

$$\varphi_0(r) = \begin{cases} \varphi_2(R_0)\dfrac{r}{R} & \text{для}\quad 0\leqslant r\leqslant R_0,\\ \varphi_2(r) & \text{для}\quad r\geqslant R_0. \end{cases}$$

Учитывая оценки (1.47) и (1.48), а также лемму 3, получаем

$$|f'(z, C)| < k_6 |f'(z, C_0)| \quad \text{при}\quad z\in\Gamma,\quad |z|\geqslant R_0+1,$$

так что достаточно доказать оценку (1.51) для функции $f'(z, C_0)$ при достаточно больших $z\in\Gamma$.

Кривая C_0 в декартовых координатах представляется уравнением вида

$$x = -\psi_0(y),\quad -\infty < y < +\infty, \tag{1.54}$$

где $\psi_0(y)\equiv 0$ при $y\leqslant 0$, а при $y\geqslant 0$ функция $\psi_0(y)$ не убывает, функция $\dfrac{\psi_0(y)}{y}$ не растет, причем, в силу (1.20)—(1.23) и (1.46),

$$\lim_{y\to+\infty}\psi_0'(y) = 0,\quad \varlimsup_{y\to+\infty}\psi_0''(y) < +\infty, \tag{1.55}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\psi_0(y)}{y^2}\,dy < +\infty. \tag{1.56}$$

На оси $-\infty<y<+\infty$ определим новую функцию $\psi(y)$ формулой

$$\psi(y)=\int\limits_0^y \frac{\psi_0(t)}{t}\,dt,$$

так что $\psi(y)\equiv 0$ при $y<0$. Учитывая равенства

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\psi(y)}{y}=\lim_{y\to\infty}\psi'(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{\psi_0(y)}{y}=\lim_{y\to\infty}\psi_0'(y)=0 \qquad (1.57)$$

и (1.56), интегрированием по частям находим, что

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\psi(y)}{y^2}\,dy=\psi(1)+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\psi_0(y)}{y^2}\,dy<+\infty. \qquad (1.58)$$

Кривая $\Gamma\subset C_0$ удовлетворяет, в силу (1.55), условиям леммы 8.

Пусть $R>0$—число, существование которого доказано в лемме 8. Обозначим через $D(C^*)$ часть области

$$x+\psi(y)>0,\quad -\infty<y<+\infty,$$

лежащую вне круга $|z|\leqslant R$, так что кривая C^* содержит полуокружность $|z|=R$, $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$. Функция $f(z, C^*)$ аналитична на этой полуокружности и, во всяком случае,

$$|f'(z, C^*)|<k_{10}\quad \text{при}\quad z\in\gamma:|z|=R,\quad 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}. \qquad (1.59)$$

Кроме того, функцию $f(z, C^*)$ мы подчиняем условию

$$\varliminf_{z\to\infty}\left|\frac{f(z, C^*)}{z}\right|\geqslant 1. \qquad (1.60)$$

Возможность такой нормировки следует из того, что для $f(z, C^*)$ имеет место оценка (1.47). В самом деле, учитывая (1.57), (1.58) и лемму 5, мы получим, что область $D(C^*)$, начиная с некоторого места, представима в виде (1.43), где $\varphi_1(r)\equiv 0$, причем условия (1.45) и (1.46) выполняются.

Сопоставим теперь каждой достаточно удаленной точке $\zeta\in\Gamma$ точку $z\in\gamma:|z|=R$, $0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}$ следующим образом. Проведем через точку ζ нормаль к Γ, направленную в сторону области $D(C_0)$, и пусть $\alpha=\alpha(\zeta)$ означает угол между этой нормалью и положительным направлением действительной оси. Можно считать, что $0\leqslant\alpha(\zeta)\leqslant\frac{\pi}{4}$, так как, в силу (1.54) и (1.55), имеем

$$\alpha(\zeta)=\operatorname{arctg}\psi_0'(\eta)\geqslant 0\quad (\zeta=\xi+i\eta),\quad \alpha(\zeta)\to 0\quad \text{при}\quad \zeta\to\infty.$$

Положим $z_\zeta = Re^{i\alpha(\zeta)}$ и осуществим сдвиг плоскости z так, чтобы точка z_ζ перешла в точку ζ. Область $D(C^*)$ перейдет при этом в некоторую область $D(C_\zeta)$, а функция

$$w = f(z, C_\zeta) = f(z - \zeta + z_\zeta, C^*)$$

отобразит $D(C_\zeta)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ и, в силу (1.60), будет удовлетворять условию

$$\varliminf_{z\to\infty} \left| \frac{f(z, C)}{z} \right| \geqslant 1. \tag{1.61}$$

Докажем, что область $D(C_0)$ содержится в $D(C_\zeta)$.

В самом деле, при указанном сдвиге, окружность $|z| = R$ переходит в некоторую окружность, проходящую через точку ζ, внешняя нормаль к которой в этой точке совпадает с нормалью к кривой Γ, направленной в сторону $D(C_0)$. Согласно лемме 8 и выбору числа R, внутренность этой окружности лежит вне области $D(C_0)$. Следовательно, вне области $D(C_0)$ лежит также образ точки $z = 0$—точка $\zeta - z_\zeta = x_0 + iy_0$, так что

$$x_0 + \psi(x_0) < 0. \tag{1.62}$$

Теперь нам достаточно доказать, что вне области $D(C_0)$ лежит образ кривой $x = -\psi(y)$, $-\infty < y < +\infty$. Пусть L^1_ζ—часть этого образа, соответствующая значениям $-\infty < y \leqslant 0$, а L^2_ζ—остальная часть образа. Точки $z = x + iy \in L^1_\zeta$ определяются условиями $x = x_0$, $y \leqslant y_0$, так что, в силу (1.62) и монотонности функции $\psi_0(y)$, имеем

$$x + \psi_0(y) \leqslant x_0 + \psi_0(y_0) < 0,$$

и z лежит вне $D(C_0)$. Пусть теперь $z = x + iy \in L^2_\zeta$. Тогда

$$x = -\psi(y - y_0) + x_0, \quad y \geqslant y_0,$$

нужно доказать, что $x + \psi_0(y) < 0$, т. е. что

$$\psi(y - y_0) > \psi_0(y) + x_0 \quad \text{при} \quad y \geqslant y_0.$$

Последнее неравенство немедленно следует из монотонности функции $\frac{\psi_0(y)}{y}$, если учитывать, что

$$\psi'(y - y_0) = \frac{\psi_0(y - y_0)}{y - y_0} \geqslant \frac{\psi_0(y)}{y} \geqslant \psi_0'(y).$$

Таким образом, мы доказали, что $D(C_0) \subset D(C_\zeta)$. Так как функция $f(z, C_0)$ удовлетворяет оценке вида (1.46), можно считать, что

$$\varlimsup_{z\to\infty} \left| \frac{f(z, C_0)}{z} \right| \leqslant 1.$$

Учитывая это, а также (1.61) и (1.9), мы можем к областям $D(C_0)$ и

$D(C_z)$ применить лемму 1. Воспользовавшись, наконец, оценкой (1.59), получим

$$|f'(\zeta, C_0)| \leqslant |f'(\zeta, C_z)| = |f'(z_\zeta, C^*)| < k_{10}.$$

Теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть область $D(C)$ представима в виде (1.44), где функции $\frac{\varphi_i(r)}{r}$ $(i = 1, 2)$ имеют ограниченную вариацию.*

а) *Если* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r\varphi_i''(r) < +\infty$, *то*

$$|f'(z, C)| > k_{11}, \quad z \in C; \tag{1.63}$$

б) *Если же* $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, \varphi_i(r)\,\varphi_i''(r) > -1$, *то имеем*

$$|f'(z, C)| < k_{12}, \quad z \in C. \tag{1.64}$$

Доказательство. Докажем оценки (1.63) и (1.64), например, на части $\theta = -\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}$ кривой C. Не ограничивая общности можно считать, что область $D(C)$ симметрична относительно действительной оси и, после поворота на угол π, лежит целиком в левой полуплоскости, т. е. имеет вид

$$|\theta| > \frac{\pi}{2} + \frac{\varphi_1(r)}{r}, \qquad r > 0. \tag{1.65}$$

Этого можно добиться, используя оценки (1.47), (1.48) и лемму 3.

Для доказательства оценки (1.63) нам нужно, как и в пункте а) предыдущей теоремы, оценить снизу нормальную производную $\frac{\partial U(z, C)}{\partial n}$ на границе C, где $U(z, C) = \operatorname{Re} f(z, C)$. В силу симметричности области $D(C)$ на полуоси $x < 0$ имеем

$$f(x, C) = U(x, C) + \text{const}.$$

Откуда, учитывая (1.47), получаем оценку

$$U(x, C) > k_{13}|x|, \quad |x| \geqslant |x_0|. \tag{1.66}$$

Покажем, что аналогичная оценка для $U(z, C)$ верна в любом угле $\Delta_\alpha : |\arg z| \geqslant \frac{\alpha}{2} > \frac{\pi}{2}$. В самом деле, Δ_α лежит, начиная с некоторого места, в области $D(C)$, так как

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi_1(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \varphi_1'(r) = 0.$$

Из точки $t < 0$ опустим перпендикуляры на стороны угла Δ_β, где $\pi < \beta < \alpha$, и пусть R_t — длина каждого из этих перпендикуляров, а l_t — их части, лежащие в Δ_α. При $z \in l_t$ имеем, что $|z| \leqslant t$ и $|z - t| \leqslant$ $\leqslant k_{14} R_t$, где $k_{14} < 1$ — константа, зависящая лишь от α и β. Кроме того, когда t пробегает всю полуось, l_t заполняют весь угол Δ_α, поэтому функцию $U(z, C)$, гармоническую и неотрицательную в круге $|z-t|<R_t$ при больших t, достаточно оценить на l_t. Из неравенств Гарнака, с учетом (1.66), получаем оценку

$$U(z, C) \geqslant U(t, C)\frac{R_t-|z-t|}{2R_t} > k_{15}|z|,$$

где $k_{15}=\frac{k_{13}}{2}(1-k_{14})$. Заметив теперь, что граница области (1.65) при $\theta>0$ имеет вид (1.18) и пользуясь леммами 4 и 6, мы проведем доказательство (1.63) так же, как и в заключении пункта а) теоремы 1.

Теперь докажем оценку (1.64). Через точку $\zeta\in C$ проведем нормаль к кривой C до пересечения с осью $x=0$ в некоторой точке y_ζ. Учитывая условия теоремы и леммы 4 и 7, мы получим, что круг

$$K_\zeta:\ |z-y_\zeta|<|\zeta-y_\zeta|,\quad |\zeta|\geqslant\rho$$

лежит целиком вне области $D(C)$. Обозначим через $D(C_\zeta)$ общую часть полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$ и внешности круга $\overline{K}_\zeta$. Вышесказанное означает, что $D(C)\subset D(C_\zeta)$, причем кривые C и C_ζ имеют общую точку ζ. Функция

$$w=f(z, C_\zeta)=-(z-y_\zeta)+\frac{|\zeta-y_\zeta|^2}{z-y_\zeta}$$

отображает область $D(C_\zeta)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w>0$.

Считая, в силу (1.48), что

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\left|\frac{f(z, C)}{z}\right|\leqslant 1$$

и применяя лемму 1, получим оценку

$$|f'(\zeta, C)|\leqslant|f'(\zeta, C_\zeta)|\leqslant 2,$$

завершающую доказательство теоремы 2.

Замечание. Из процесса доказательства теорем 1 и 2 легко усмотреть, что оценки (1.50), (1.51) и (1.63), (1.64) остаются в силе, начиная с некоторого места, если кривая C, начиная с некоторого места, имеет непрерывную кривизну, удовлетворяя при этом всем остальным условиям.

Возьмем теперь произвольное число α, $0<\alpha<2\pi$, и в плоскости $z=re^{i\theta}$ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ рассмотрим две области

$$D(C_\alpha^\pm):\ |\theta|<\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\varphi_\alpha(r)}{r^{\frac{\pi}{\alpha}}},\quad r>0, \tag{1.67}$$

где функция $\varphi_\alpha(r)$ дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $r>0$ и

$$0 \leqslant \frac{\varphi_\alpha(r)}{r^{\frac{\pi}{\alpha}}} < \min\left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Из всех результатов настоящего параграфа в дальнейшем нам понадобится только следующая

Теорема 3. *Пусть области $D(C_\alpha^\pm)$ представимы в виде* (1.67), *где функция $\varphi_\alpha(r)$ не убывает, функция $r^{-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_\alpha(r)$ не растет, причем*

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} \varphi_\alpha(r)\,dr < +\infty, \tag{1.68}$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{2-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha''(r) = 0. \tag{1.69}$$

Тогда имеют место оценки

$$k_{16}(|z|+1)^{\frac{\pi}{\alpha}} < |f(z, C_\alpha^\pm)| < k_{17}(|z|+1)^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad z \in \overline{D(C_\alpha^\pm)}, \tag{1.70}$$

$$k_{18}|z|^{\frac{\pi}{\alpha}-1} < |f'(z, C_\alpha^\pm)| < k_{19}|z|^{\frac{\pi}{\alpha}-1}, \quad z \in C_\alpha^\pm, \quad |z| \geqslant 1, \tag{1.71}$$

$$\operatorname{Re} f(z, C_\alpha^+) \geqslant k_{20}[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + \varphi_\alpha(|z|)], \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geqslant 1. \tag{1.72}$$

Для доказательства теоремы заметим сначала, что из свойств функции $\varphi_\alpha(r)$ следует неравенство

$$0 \leqslant r\varphi_\alpha'(r) \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\varphi_\alpha(r),$$

откуда, учитывая (1.68), получим

$$\lim_{r\to\infty} r^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha'(r) = \lim_{r\to\infty} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = 0. \tag{1.73}$$

Теперь осуществим преобразование плоскости, заменяя z на $z^{\frac{\alpha}{\pi}}$. Области $D(C_\alpha)$ преобразуются при этом следующим образом:

$$D(C_\pi^\pm): \ |\theta| < \frac{\pi}{2} \pm \frac{\varphi_\pi(r)}{r}, \quad r > 0,$$

где $\varphi_\pi(r) = \frac{\pi}{\alpha}\varphi_\alpha(r^{\frac{\alpha}{\pi}})$. Области $D(C_\pi^\pm)$ имеют вид (1.43) и (1.44) и удовлетворяют, в силу (1.68), (1.69), (1.73) и свойств функции $\varphi_\alpha(r)$, всем условиям теорем 1 и 2. Оценки (1.70) и (1.71) получаются, если к функциям $f(z, C_\varkappa^\pm) = f(z^{\frac{\varkappa}{\pi}}, C_\varkappa^\pm)$ применить неравенства (1.47), (1.48) и оценки теорем 1 и 2. Для доказательства оценки (1.72) достаточно показать, что

$$\operatorname{Re} f(z, C_\varkappa^+) \geqslant k_{21} \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Re} f(z, C_\varkappa^+) \geqslant k_{22}\, \varphi_\varkappa(|z|)$$

при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, $|z| \geqslant 1$. Первая из этих оценок следует, как и (1.52), из теоремы Вольфа и из (1.47). Для доказательства второй оценки заметим, что кривая $C_\varkappa^+$ при $\theta > 0$ представляется, согласно лемме 4, в виде (1.19) и удовлетворяет всем условиям леммы 6. Пусть $\varepsilon > 0$—число, существование которого доказано в лемме 6, а точка $z = x + iy$ лежит в угле $\varepsilon |y| \leqslant x$. Учитывая, что $\frac{\varphi_\varkappa(r)}{r}$ не растет, имеем

$$\operatorname{Re} f(z, C_\varkappa^+) \geqslant k_{21} x > \frac{\varepsilon}{2} k_{21} |z| \geqslant k_{23}\, \varphi_\varkappa(|z|).$$

Пусть теперь точка $z = x + iy$ лежит вне угла $\varepsilon |y| \leqslant x$ и в полуплоскости $x \geqslant 0$. Считая $y > 0$, проведем через z нормаль к кривой $C_\varkappa^+$, пересекающую $C_\varkappa^+$ в точке $\zeta = \xi + i\eta$, $\eta > 0$. В обозначениях леммы 6 функция $\operatorname{Re} f(z, C_\varkappa^+)$ гармонична и положительна в круге $|z - z_\zeta| < R_\zeta$, $z_\zeta = x_\zeta + iy_\zeta$, так что, учитывая неравенства Гарнака и (1.33), имеем

$$\operatorname{Re} f(z, C_\varkappa^+) \geqslant \operatorname{Re} f(z_\zeta, C_\varkappa^+) \frac{R_\zeta - |z - z_\zeta|}{2R_\zeta} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{k_{21}}{2} \frac{x_\zeta}{R_\zeta} |\zeta - z| \geqslant k_{24} |\zeta - z| \geqslant k_{24}\, \psi(\eta),$$

где функция $\psi(t)$ не убывает, а функция $\frac{\psi(t)}{t}$ не растет (это следует, согласно лемме 4, из аналогичных свойств функции $\varphi_\varkappa(r)$). Из указанного свойства вытекает, в частности, что $\psi'(t) = O\left(\frac{\psi(t)}{t}\right)$. Учитывая далее (1.34) и (1.21), окончательно получим

$$\psi(\eta) \geqslant k_{25}\, \psi(y_\zeta) \geqslant k_{25}\, \psi(y) \geqslant k_{26}\, \varphi_\varkappa(|z|).$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. Построение убывающих в угле целых функций конечного порядка.

Задача о возможности асимптотического приближения целыми функциями сводится [7] к задаче о построении целых функций $\omega(z)$, не имеющих нулей на заданном замкнутом неограниченном множестве

E, равномерно и предельно быстро (в определенном смысле) убывающих на E к нулю при $z \to \infty$*.

В связи с задачей о наилучшей асимптотической аппроксимации встает также вопрос об оценке роста функций $\omega(z)$.

Однако последняя задача имеет и вполне самостоятельный интерес: построить нетривиальную целую функцию, которая равномерно и по возможности быстро стремится к нулю на E и имеет минимальный рост в плоскости.

Что можно сказать в общем случае о росте функций $\omega(z)$? Пусть E—неограниченный континуум, $z = 0 \in E$ и пусть целая функция $\omega(z) \not\equiv 0$ удовлетворяет на E неравенству

$$|\omega(z)| < \varepsilon(|z|), \tag{2.1}$$

где функция $\varepsilon(r) > 0$ монотонно стремится к нулю на полуоси $r > 0$.

Обозначим $M(r) = \max\limits_{|z| < r} |\omega(z)|$. Из известной теоремы Валирона [9] следует, что в круге $|z| \leqslant r$ и вне некоторых исключительных кружков, сумма радиусов которых меньше $\frac{r}{2}$, выполняется неравенство

$$\ln M(2er) > k \ln \left| \frac{1}{\omega(z)} \right|, \tag{2.2}$$

где $k > 0$—абсолютная константа. Исключительные кружки не могут полностью покрыть часть континуума E, лежащую в кольце $\frac{r}{2} \leqslant |z| \leqslant r$. Учитывая (2.1) и (2.2), окончательно получим оценку

$$\ln M(r) > k \ln \frac{1}{\varepsilon\left(\frac{r}{4e}\right)}.$$

В этом неравенстве метрические свойства множества E отражаются в скорости убывания $\varepsilon(r)$. Однако для более полной характеристики возможного роста функций $\omega(z)$ нужно учитывать также теоремы типа Фрагмена-Линделефа для дополнения к E.

В настоящей работе подробно рассматривается случай, когда E является замкнутым углом $\Delta_\alpha : |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ произвольного раствора α, $0 < \alpha < 2\pi$. М. В. Келдыш сконструировал [7] целые функции порядка $\rho = \max\left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha}\right]$ и нормального типа, с нулями вне Δ_α, которые убывают в Δ_α, как функции $z^{\text{const}} e^{-z^{\frac{\pi}{\alpha}}}$. В связи с этим результатом М. М. Джрбашяном было высказано предположение, что

* Подробнее об этом см. [8].

должны существовать целые функции $\omega_\alpha(z)$ порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющие в Δ_α неравенству (2.1), где функция $\varepsilon(r)$ подчинена условию*

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} \ln \varepsilon(r)\, dr > -\infty. \tag{2.3}$$

Справедливость этого предположения в случае $\alpha=\pi$ следует, например, из результатов книги [10]. Более того, М. М. Джрбашян построил [11] функцию $\omega_\pi(z)$ с дополнительным условием, что все ее нули лежат на границе полуплоскости Δ_π.

В общем случае конструирование целых функций $\omega_\alpha(z)$ осуществляется ниже, в пунктах 1 и 2 настоящего параграфа. В наших построениях мы следуем общей схеме к задачам подобного характера, предложенной М. В. Келдышем [7]. Сущность метода М. В. Келдыша заключается в том, что для построения функции $\omega(z)$ строится некоторая функция $H(z)$, гармоничная вне конечного числа линий Жордана, непрерывная и субгармоничная во всей конечной плоскости и имеющая примерно такие же свойства, как и предполагаемая функция $\ln|\omega(z)|$. Затем построение $\omega(z)$ завершается заменой в $H(z)$ логарифмического потенциала простого слоя хорошо подобранной дискретной суммой**. Отметим, что в отличие от рассмотренного М. В. Келдышем случая, когда функцию $H(z)$ можно выписать сразу и в явном виде, в нашем случае основная трудность заключается именно в построении $H(z)$. Специально для этой цели и была доказана „геометрическая" теорема 3.

1°. *Построение субгармонической мажоранты* $H(z)$. Пусть α— произвольное число, $0<\alpha<2\pi$, и пусть $p(r)$—неотрицательная на полуоси $r\geqslant 1$ функция такая, что

$$r^{-\frac{\pi}{\alpha}} p(r) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad r\uparrow+\infty, \tag{2.4}$$

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} p(r)\, dr < k < +\infty. \tag{2.5}$$

Продолжим функцию $p(r)$ на интервал $0\leqslant r\leqslant 1$, полагая

$$p(r)=p(1)\, r^{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{2.6}$$

и введем новую функцию $\varphi_\alpha(r)$ формулой

$$\varphi_\alpha(r)=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{p(rt_1t_2t_3)}{t_1t_2t_3}\, dt_1dt_2dt_3. \tag{2.7}$$

* В работе [8] доказывается, что условие (2.3) является необходимым и достаточным для существования целой функции $\omega(z)$, удовлетворяющей в Δ_α неравенству (2.1).

** Подробнее см. в пункте 2.

Функция $\varphi_\alpha(r)$ определена, неотрицательна и дважды непрерывно дифференцируема на полуоси $r \geqslant 0$. Кроме того, в силу (2.4) и (2.7), имеем

$$\varphi_\alpha(r) \geqslant p(r) \quad \text{при} \quad r \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Докажем, что $\varphi_\alpha(r)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.

В самом деле, учитывая (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\int_1^\infty r^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} \varphi_\alpha(r)\, dr = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (t_1t_2t_3)^{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{t_1t_2t_3}^\infty \tau^{-\left(\frac{\pi}{\alpha}+1\right)} p(\tau)\, d\tau dt_1dt_2dt_3 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^3 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (t_1t_2t_3)^{\frac{\pi}{\alpha}} \left[k + p(1)\ln\frac{1}{t_1t_2t_3}\right] dt_1dt_2dt_3 < +\infty,$$

что доказывает справедливость (1.68). Далее, функция $\varphi_\alpha(r)$ не убывает, а функция $r^{-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_\alpha(r)$, в силу (2.4) и (2.7), не растет, поэтому

$$0 \leqslant r\varphi_\alpha'(r) \leqslant \frac{\pi}{\alpha}\varphi_\alpha(r).$$

Отсюда, учитывая (1.68), получим

$$\lim_{r\to\infty} r^{1-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha'(r) = \lim_{r\to\infty} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = 0. \tag{2.9}$$

Кроме того, из равенства

$$r\varphi_\alpha'(r) = \int_0^1\int_0^1 \frac{p(rt_1t_2)}{t_1t_2}\, dt_1dt_2$$

следует, что функция $r\varphi_\alpha'(r)$ не убывает, а функция $r^{1-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_\alpha'(r)$ не растет, в силу (2.4), так что

$$-\varphi_\alpha'(r) \leqslant r\varphi_\alpha''(r) \leqslant \left(\frac{\pi}{\alpha}-1\right)\varphi_\alpha'(r).$$

Отсюда и из (2.9) следует справедливость (1.69). Наконец, в силу (2.6) и (2.7), учитывая монотонность функции $r^{-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_\alpha(r)$, получим

$$\max_{r \geqslant 0} r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = \varphi_\alpha(1) = p(1).$$

Это позволяет нам, не ограничивая общности, считать, что

$$r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) < \min\left(\pi - \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{при} \quad r > 0,$$

поскольку убывающую в угле $|\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ целую функцию $\omega(z)$ мы можем построить сначала для функции $\frac{1}{n} p(r)$, где n—достаточно большое натуральное число, а затем рассматривать функцию $\omega^n(z)$.

Таким образом, области $D(C_\alpha^\pm)$, определяемые по формуле (1.67), будут удовлетворять всем условиям теоремы 3, если функцию $\varphi_\alpha(r)$ определить раз и навсегда формулой (2.7).

Теперь, наряду с областями $D(C_\alpha^\pm)$, рассмотрим дополнительные к ним области $G(C_\alpha^\pm)$, которые после поворота на угол π определяются неравенствами

$$|\theta| < \frac{\beta}{2} \mp \frac{\varphi_\beta(r)}{r^{\frac{\pi}{\beta}}}, \tag{2.10}$$

где $\beta = 2\pi - \alpha$, $\varphi_\beta(r) = r^{\frac{\pi}{\beta} - \frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r)$.

Легко проверить, что в случае $\alpha \geqslant \pi$ функция $\varphi_\beta(r)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 с заменой там α на β, т. е. области (2.10) являются областями типа $D(C_\alpha^\mp)$. Кроме того, в силу (2.6) и (2.7), имеем

$$r^{-\frac{\pi}{\beta}} \varphi_\beta(r) = r^{-\frac{\pi}{\alpha}} \varphi_\alpha(r) = p(1), \quad \text{если} \quad 0 < r \leqslant 1. \tag{2.11}$$

Перейдем к построению субгармонической мажоранты $H(z)$. Обозначим через $w = f(z, C_\alpha^\pm)$ $(w = f_G(z, C_\alpha^+))$ фиксированные функции, осуществляющие конформное и однолистное отображение областей $D(C_\alpha^\pm)$ $(G(C_\alpha^+))$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$, переводящие точки $z = 0$ и $z = \infty$, соответственно, в $w = 0$ и $w = \infty$. В плоскости z определим функции $U^\pm(z)$ и $V(z)$ формулами

$$U^\pm(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} f(z, C_\alpha^\pm) & \text{для} \quad z \in \overline{D(C_\alpha^\pm)}, \\ 0 & \text{для} \quad z \in G(C_\alpha^\pm), \end{cases} \tag{2.12}$$

$$V(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} f_G(z, C_\alpha^+) & \text{для} \quad z \in \overline{G(C_\alpha^+)}, \\ 0 & \text{для} \quad z \in D(C_\alpha^+). \end{cases} \tag{2.13}$$

Наконец, искомую функцию $H(z)$ определим формулой

$$H(z) = \begin{cases} k^2 U^-(e^{i\alpha} z) + k^2 U^-(e^{-i\alpha} z) - kU^+(z), & \text{если} \quad 0 < \alpha < \pi, \\ k^2 V(z) - kU^+(z), & \text{если} \quad \pi \leqslant \alpha < 2\pi, \end{cases} \tag{2.14}$$

где k—достаточно большая положительная константа.

Функция $H(z)$ непрерывна во всей плоскости и гармонична вне некоторого контура Γ, который определяется следующим образом: в случае $0 < \alpha < \pi$ Γ означает совокупность двух кривых, которые получаются из кривой C_α^- при помощи вращений $e^{\pm i\alpha}z$, а в случае $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$ полагаем $\Gamma = C_\alpha^+$, так что всегда $C_\alpha^+ \subseteq \Gamma$. Функция $H(z)$ имеет на Γ двусторонние нормальные производные $\dfrac{\partial H(\zeta)}{\partial n_1}$ и $\dfrac{\partial H(\zeta)}{\partial n_2}$. Полагая

$$\mu(\zeta) = \frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_1} + \frac{\partial H(\zeta)}{\partial n_2}$$

и учитывая (2.12), (2.13) и (2.14), имеем,
если $0 < \alpha < \pi$, то

$$\mu(\zeta) = \begin{cases} k^2|f'(e^{i\alpha}\zeta, C_\alpha^-)| + k^2|f'(e^{-i\alpha}\zeta, C_\alpha^-)| - k|f'(\zeta, C_\alpha^+)| & \text{для } \zeta \in C_\alpha^+, \\ k^2|f'(e^{\pm i\alpha}\zeta, C_\alpha^-)| & \text{для } \zeta \in \Gamma \setminus C_\alpha^+, \end{cases} \tag{2.15}$$

а в случае $\pi \leqslant \alpha < 2\pi$

$$\mu(\zeta) = k^2|f_0(\zeta, C_\alpha^+)| - |f'(\zeta, C_\alpha^+)|, \quad \zeta \in \Gamma. \tag{2.16}$$

Из (2.15), (2.16) и оценки (1.71) следует, что

$$|\zeta|^{\rho-1} < \mu(\zeta) < k_{27}|\zeta|^{\rho-1}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad |\zeta| \geqslant 1, \tag{2.17}$$

где $\rho = \max\left[\dfrac{\pi}{\alpha}, \dfrac{\pi}{2\pi - \alpha}\right]$. Для того чтобы оценить $\mu(\zeta)$ в случае $|\zeta| \leqslant 1$ заметим, что, в силу (2.11), области $D(C_\alpha^+)$ и $G(C_\alpha^+)$ являются угловыми областями при $|z| \leqslant 1$. Поэтому существует константа $\gamma > \dfrac{1}{2}$ такая, что

$$|\mu(\zeta)| \leqslant k_{28}|\zeta|^{\gamma-1}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad |\zeta| \leqslant 1, \tag{2.18}$$

$$|H(z)| \leqslant k_{29}|z|^{\gamma}, \quad \left|\frac{\partial H(z)}{\partial |z|}\right| \leqslant k_{30}|z|^{\gamma-1}, \quad |z| \leqslant 1. \tag{2.19}$$

Из (1.70) при $|z| \geqslant 1$ получаем оценки

$$H(z) < k_{31}|z|^{\rho}, \tag{2.20}$$

$$H(z) > -k_{32}|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad z \in \overline{D(C_\alpha^+)}. \tag{2.21}$$

Далее из (2.12), (2.13) и (2.14) непосредственно следует, что

$$H(z) \equiv 0 \text{ в области } |\theta| \geqslant \frac{3\alpha}{2} - r^{-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_\alpha(r), \tag{2.22}$$

где $z = re^{i\theta}$, $0 < \alpha \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$.

Наконец, из (1.72) следует важное свойство функции $H(z)$

$$H(z) < -2[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + \varphi_\alpha(|z|)] \quad \text{при} \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geqslant 1. \tag{2.23}$$

Пусть теперь D—ограниченная область с кусочно-гладкой границей L, а функция $U(z)$ гармонична в D, непрерывна на $\overline{D}$ и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial U(\zeta)}{\partial n}$ на L по внутренней нормали. Тогда имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\left[\ln|\zeta-z|\frac{\partial U(\zeta)}{\partial n}-U(\zeta)\frac{\partial\ln|\zeta-z|}{\partial n}\right]ds=\begin{cases}U(z), & \text{если } z\in D,\\ 0, & \text{если } z\overline{\in}\overline{D}.\end{cases}$$

Возьмем произвольные числа $0<\varepsilon<R$ и применим эту формулу к функциям $U^{\pm}(z)$ и $V(z)$, когда в качестве D фигурируют соответственно части областей $D(C_\varepsilon^{\pm})$ и $G(C_\varepsilon^{+})$, лежащие в кольце $\varepsilon<|z|<R$. Затем, учитывая (2.14), оценку (2.19) и устремив ε к нулю, получим

$$H(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\ln|\zeta-z|\,\mu(\zeta)\,ds_\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=R}\left[H(\zeta)\frac{\partial\ln|\zeta-z|}{\partial|\zeta|}-\ln|\zeta-z|\frac{\partial U(\zeta)}{\partial|\zeta|}\right]ds_\zeta,$$

где Γ_R—часть контура Γ, лежащая в круге $|z|\leqslant R$. Отсюда, учитывая, что $H(0)=0$, окончательно получаем формулу

$$H(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\mu(\zeta)\,ds_\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=R}\left[H(\zeta)\frac{\partial}{\partial|\zeta|}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|-\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\frac{\partial H(\zeta)}{\partial|\zeta|}\right]ds_\zeta, \qquad (2.24)$$

справедливую в любом круге $|z|<R$. Поскольку второй интеграл гармоничен в круге $|z|<R$, из этой формулы, учитывая (2.17), получаем, что $H(z)$ субгармонична вне круга $|z|<1$.

2°. *Построение убывающей целой функции* $\omega_\tau(z)$. Теперь мы, следуя М. В. Келдышу [7], „стираем" особенности функции $H(z)$, сосредотачивая „массу" $\dfrac{1}{2\pi}\mu(\zeta)$ на дискретной совокупности точек из Γ, сгущающихся к бесконечности.

Для любой точки $\zeta\in\Gamma\setminus\Gamma_1$ обозначим через L_ζ дугу Γ, лежащую в кольце $1\leqslant|z|\leqslant|\zeta|$, содержащую ζ, и рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_\zeta}\mu(t)\,ds_t.$$

Обозначив через $\{g(\zeta)\}$ дробную часть $g(\zeta)$, покажем, что

$$I(z)=I_1(z)+I_2(z)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_1}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\mu(\zeta)\,ds_\zeta-\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_1}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|d\{g(\zeta)\} \qquad (2.25)$$

сходится равномерно в любом круге $|z| \leqslant R$, за исключением точек z, где $g(z)$ целая, и оценим $I(z)$.

Функция $I_1(z)$ всюду непрерывна. Учитывая неравенство

$$\left|\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\right| \leqslant \ln(1+|z|)+\ln\frac{1}{|\zeta|} \quad \text{при} \quad |\zeta|\leqslant 1, \quad |z|\geqslant 2$$

и оценку (2.18), мы получим, что

$$|I_1(z)| \leqslant k_{33}\ln(1+|z|)+k_{33}.$$

Для того чтобы оценить $I_3(z)$ заметим, что $\Gamma\setminus\Gamma_1$ состоит из нескольких изолированных неограниченных ветвей, и все оценки достаточно провести для интеграла $I_3(z)$ по одной из них, например, по кривой

$$\Gamma_0: \theta = \frac{\alpha}{2} + r^{-\frac{\pi}{\alpha}}\varphi_2(r), \quad r \geqslant 1.$$

С этой целью на Γ_0 возьмем последовательность точек ζ_n, $|\zeta_n| \uparrow +\infty$, определяемых из условия

$$g(\zeta_n) = n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.26}$$

и обозначим через γ_n дугу кривой Γ_0, соединяющую точки ζ_{n-1} и ζ_n. Учитывая (2.26) получим

$$I_3(z) = -\int_{\Gamma_0}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\{g(\zeta)\} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left|1-\frac{z}{\zeta_n}\right| - \right.$$

$$\left. -\int_{\gamma_n}\ln\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| dg(\zeta)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_n}\ln\left|\frac{\zeta(\zeta_n-z)}{\zeta_n(\zeta-z)}\right|\mu(\zeta)\,ds_\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}U_n(z).$$

Для доказательства равномерной сходимости и для оценки этого ряда заметим сначала, что при $\zeta\in\gamma_n$ из (2.17) и (2.26) имеем

$$|\zeta_n-\zeta| \leqslant \int_{\widetilde{\zeta\zeta_n}} ds < \frac{1}{|\zeta|^{\rho-1}}\int_{\gamma_n}\mu(\zeta)\,ds_\zeta = \frac{2\pi}{|\zeta|^{\rho-1}}. \tag{2.27}$$

Отсюда, полагая

$$1+w_n = \frac{\zeta(\zeta_n-z)}{\zeta_n(\zeta-z)},$$

для любого z получим

$$|w_n| = \left|\frac{z(\zeta_n-\zeta)}{\zeta_n(\zeta-z)}\right| \leqslant \frac{2\pi|z|}{|\zeta|^{\rho}\,\big||\zeta|-|z|\big|}. \tag{2.28}$$

В частности, пусть $|z|\leqslant R$, $R>2$. Выберем номер N так, чтобы при $n>N$ иметь $|\zeta_{n-1}|\geqslant 2R$. Тогда

$$|w_n| < \frac{2\pi}{|\zeta|^{\rho+1}}, \quad |w_n| < \frac{1}{2},$$

$$|\ln|1+w_n|| \leqslant |w_n|\left(1+\frac{1}{1-|w_n|}\right) \leqslant 3|w_n| < \frac{6\pi}{|\zeta|^{\rho+1}},$$

и, в силу (2.17), имеем

$$|U_n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_n} |\ln|1+w_n|| \mu(\zeta)\, ds_\zeta < 3k_{27} \int\limits_{\gamma_n} \frac{ds_\zeta}{|\zeta|^2}.$$

Учитывая теперь неравенство

$$ds_\zeta < k_{34} d|\zeta|, \tag{2.29}$$

которое следует из (2.29), при $k > N$ и любом $m > 1$ получим

$$\sum_{n=k+1}^{k+m} |U_n(z)| < k_{35} \int\limits_{|\zeta_k|}^{|\zeta_{k+m}|} \frac{d|\zeta|}{|\zeta|^2} < \frac{k_{35}}{|\zeta_k|} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty,$$

что доказывает равномерную сходимость $I_3(z)$ в любом круге $|z| \leqslant R$.

Перейдем к оценке $I_1(z)$. Пусть сначала точка z лежит вне 1-окрестности кривой Γ_0. Тогда, в силу (2.27), имеем

$$|\zeta_n - \zeta| < 2\pi, \quad \left|\frac{1}{1+w_n}\right| = \left|\frac{\zeta_n}{\zeta}\right| \left|\frac{\zeta - z}{\zeta_n - z}\right| < (2\pi + 1)^2,$$

$$|\ln|1+w_n|| \leqslant \ln(1+|w_n|) + \ln\left(1 + \frac{|w_n|}{|1+w_n|}\right) \leqslant 2\ln(1 + k_{36}|w_n|).$$

Отсюда, обозначив $|z| = r$, $|\zeta| = t$, а также учитывая (2.28), (2.17) и (2.29), получим

$$|I_3(z)| \leqslant k_{37} \int\limits_1^\infty \ln\left(1 + \frac{k_{37} r}{t^\rho |t-r|}\right) t^{\rho-1} dt = I_4(r).$$

Если же z произвольно, то из неравенства $\ln|1+w_n| \leqslant \ln(1+|w_n|)$ вполне аналогично имеем, что $I_3(z) \leqslant I_4(r)$, и в обоих случаях нам надо оценить $I_4(r)$. Разобьем его на два интеграла $I_4'(r)$ и $I_4''(r)$, когда соответственно $|t-r| \geqslant \frac{t+r}{2}$ и $|t-r| < \frac{t+r}{2}$. Первый интеграл оценивается просто

$$I_4'(r) \leqslant \int\limits_1^\infty \frac{2k_{37}^2 r}{t(t+r)} dt = 2k_{37}^2 \ln(1+r).$$

Во втором интеграле $\frac{r}{3} < t < 3r$. Поэтому

$$I_4''(r) \leqslant k_{38} \int\limits_{\frac{r}{3}}^{3r} \ln\left(1 + \frac{k_{38}}{r^{\rho-1}|t-r|}\right) r^{\rho-1} dt \leqslant 2k_{38} \int\limits_0^{2r^\rho} \ln\left(1 + \frac{k_{38}}{\tau}\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant k_{39} \ln(1+r) + k_{39}.$$

Таким образом, в конечном счете, мы доказали сходимость $I(z)$ и получили соответствующие оценки. Обозначив

$$U_\alpha(z) = H(z) + I(z)$$

для всех z имеем

$$U_\alpha(z) < H(z) + k_{40}\ln(2+|z|). \tag{2.30}$$

Если же z лежит вне 1-окрестности кривой $\Gamma\setminus\Gamma_1$, то

$$|U_\alpha(z) - H(z)| < k_{41}\ln(2+|z|). \tag{2.31}$$

Обозначим теперь через z_k все те точки кривой $\Gamma\setminus\Gamma_1$, где функция $g(z)$ принимает натуральные значения, число которых в любом круге $|z|<R$ конечно. Из (2.24) и (2.25) при $|z|<R$ имеем

$$U_\alpha(z) = \sum_{|z_k|<R} \ln\left|1 - \frac{z}{z_k}\right| + U_R(z),$$

где $U_R(z)$ гармонична при $|z|<R$. Таким образом, функция $U_\alpha(z)$ гармонична во всей плоскости, за исключением точек z_k, где она имеет логарифмические особенности. Существует целая функция $\omega_\alpha(z)$ с нулями в точках z_k такая, что

$$|\omega_\alpha(z)| = \varepsilon e^{U_\alpha(z)}, \tag{2.32}$$

где $\varepsilon>0$—достаточно малое число. Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть* $0<\alpha<2\pi$, $\rho = \max\left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi-\alpha}\right]$, *функция* $p(r)$ *удовлетворяет условиям* (2.4) *и* (2.5). *Тогда существует целая функция* $\omega_\alpha(z)$ *порядка* ρ *и нормального типа, все нули которой лежат вне угла* $|\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ *и которая удовлетворяет неравенствам*

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}} < |\omega_\alpha(z)| < e^{-\left[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + p(|z|)\right]}, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geqslant 1. \tag{2.33}$$

Указанный порядок или тип нельзя понизить.

При доказательстве теоремы мы можем, очевидно, ограничиться случаем, когда

$$\lim_{r\to\infty} \frac{p(r)}{\ln r} = +\infty.$$

Тогда функция (2.32) является искомой. В самом деле, левое неравенство в (2.33) следует из (2.21) и (2.31), а правое—из (2.8), (2.23) и (2.30). Кроме того, из (2.20) и (2.30) следует, что

$$\ln|\omega_\alpha(z)| \leqslant k_{42}(|z|+1)^\rho.$$

Пусть теперь $\omega(z)$—некоторая целая функция, $\omega(0)\neq 0$, удовлетворяющая неравенству

$$\ln|\omega(z)| < -\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \text{если} \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad |z| > 1.$$

Поскольку $\omega(z)$ ограничена на линии $|\arg z| = \frac{\alpha}{2}$, из теоремы Фрагмена-Линделефа следует, что она имеет, по крайней мере, порядок $\frac{\pi}{2\pi - \alpha}$ и нормальный тип. Полагая далее

$$M(r) = \max_{|z|=r} |\omega(z)|$$

и учитывая субгармоничность функции $\ln|\omega(z)|$, при любом $r > 1$ получим

$$\ln|\omega(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\omega(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \ln M(r) - \frac{\alpha}{\pi^2} r^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

откуда следует, что $\omega(z)$ имеет, по крайней мере, порядок $\frac{\pi}{\alpha}$ и нормальный тип. Теорема полностью доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 2. III. 1966

Ն. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ԱՆԿՅԱՆ ՄԵՋ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՆՎԱԶՈՂ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՐԳԻ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ապացուցվում է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ. Ենթադրենք, որ $0 < \alpha < 2\pi$, $\rho = \max\left[\frac{\pi}{\alpha}, \frac{\pi}{2\pi - \alpha}\right]$, իսկ $p(r)$ ֆունկցիան բավարարում է (2.4) և (2.5) պայմաններին:

Գոյություն ունի ρ կարգի ու նորմալ տիպի $\omega_\alpha(z)$ ամբողջ ֆունկցիա, որի բոլոր զերոները ընկած են $|\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}$ անկյունից դուրս և որը բավարարում է

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}} < |\omega_\alpha(z)| < e^{-\left[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}} + p(|z|)\right]}, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad |z| \geqslant 1$$

անհավասարություններին: Նշված կարգը կամ տիպը հնարավոր չէ ցածրացնել:

Այս թեորեմն ապացուցելու համար հարկ է լինում ստանալ որոշ գնահատականներ կոնֆորմ արտապատկերող ֆունկցիաների եզրային ածանցյալների համար:

N. H. ARAKELIAN

THE CONSTRUCTION OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE ORDER DECREASING UNIFORMLY IN THE ANGLE

Summary

The following proposition is stated:

Theorem. *Let* $0<\alpha<2\pi$, $\rho=\max\left[\frac{\pi}{\alpha};\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\right]$ *and* $p(r)$ *be any function satisfying* (2.4) *and* (2.5). *Then, there exists an entire function* $\omega_\alpha(z)$ *of finite order and of mean type satisfying the inequalities*

$$e^{-k|z|^{\frac{\pi}{\alpha}}}<|\omega_\alpha(z)|<e^{-[\operatorname{Re} z^{\frac{\pi}{\alpha}}+p(|z|)]},\quad |\arg z|<\frac{\alpha}{2},\quad |z|\geqslant 1$$

its zeros being situated outside the angle $|\arg z|\leqslant\frac{\alpha}{2}$.

In order to prove this proposition it has been necessary to obtain some estimations of boundary derivatives of conformal mapping functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. *М. А. Лаврентьев* и *Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
3. *Ж. Валирон.* Аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
4. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
5. *С. Мандельбройт.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции, ИЛ, М., 1962.
6. *С. Е. Варшавский.* Конформное отображение бесконечных полос, Математика, 2:4 (1958), 67—116.
7. *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН VII, вып. 2 (48) (1952), 31—122.
8. *Н. У. Аракелян.* Об асимптотическом приближении целыми функциями в бесконечных областях, Мат. сборник, 53 (95), № 4 (1961), 515—538.
9. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1956.
10. *С. Мандельбройт.* Квазианалитические классы функций, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
11. *М. М. Джрбашян.* Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости, ДАН СССР, 111, № 4 (1956), 749—752.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 3 Математика

Р. М. МАРТИРОСЯН

О СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Статья посвящена исследованию спектра несамосопряженных возмущений $T = A + S^2$ самосопряженного дифференциального оператора A, где S—оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q}(x)$. В тех случаях, когда A есть произвольный обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $L_2(-\infty, \infty)$ или полигармонический оператор $A = (-\Delta)^k$ в $L_2(E_n)$ ($n \geqslant 3$ нечетно и $2k > n$), основной результат состоит в том, что если $q(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то множество собственных значений возмущенного оператора T (с учетом и тех, которые лежат на спектре невозмущенного оператора A) может быть лишь конечным. Это предложение можно обобщить на случай более общих дифференциальных операторов.

Чтобы пояснить простую методику доказательства, основанную на теореме A и леммах 1.1 и 1.2, мы иллюстрируем на одном примере идею предлагаемого способа в конце § 1.

§ 1. О спектре несамосопряженных возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть T—несамосопряженный замкнутый оператор с плотной областью определения D_T в гильбертовом пространстве H. Всюду в дальнейшем мы будем называть точку λ_0 точкой непрерывного спектра оператора T, если λ_0 не является собственным значением оператора T, многообразие $(T - \lambda_0 E) D_T$ плотно в H и незамкнуто. Как известно, точка λ_0, не являющаяся собственным значением оператора T, может принадлежать и остаточному спектру этого оператора, т. е. многообразие $(T - \lambda_0 E) D_T$ может быть неплотным.

Первая из приводимых ниже лемм доказана, по существу, в работе автора [1]. Поскольку не все ее утверждения явно сформулированы, мы, для полноты изложения, приведем доказательство.

Лемма 1.1. *Пусть A—самосопряженный оператор, определенный на плотном многообразии D_A гильбертова пространства H, а T—замкнутый оператор, определенный формулой* $T = A + S^2$

$(D_T = D_A)$, где S—ограниченный (несамосопряженный) оператор. Пусть R_λ—резольвента оператора A. Тогда

а) если λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A, и для некоторой последовательности $\lambda_n \to \lambda_0$ операторы $SR_{\lambda_n}S$ существуют и вполне непрерывны, то λ_0—точка спектра оператора T;

б) если λ_0 не принадлежит спектру оператора A и оператор $SR_{\lambda_0}S$ вполне непрерывен, то λ_0—или собственное значение или регулярная точка оператора T;

в) пусть λ_0 не принадлежит спектру оператора A и пусть оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен для всех λ из односвязной области, содержащей точку λ_0, а также точки вида $z = \sigma + i\tau$ со сколь угодно большими вещественными τ. Тогда λ_0 не может быть предельной точкой собственных значений оператора T.

Доказательство. Для доказательства предложения а) заметим, что если оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен и если существует ограниченная резольвента $B_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T, то можно показать, пользуясь теорией Фредгольма, что

$$B_\lambda = R_\lambda - R_\lambda S (E + SR_\lambda S)^{-1} SR_\lambda,$$

где оператор $(E + SR_\lambda S)^{-1}$ определен на всем H и ограничен, а поэтому оператор $SB_\lambda S$ вполне непрерывен. Далее, если допустить, что λ_0 не принадлежит спектру оператора T, то уравнения $Au - \lambda_0 u = f$ и $u = B_\lambda S^2 u + B_\lambda f$ окажутся эквивалентными; но уравнение $u = B_{\lambda_0} S^2 u$ имеет лишь тривиальное решение, а поэтому, как нетрудно видеть, и уравнение $\varphi = SB_\lambda S\varphi$ имеет лишь тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма уравнение $\varphi = SB_{\lambda_0} S\varphi + SB_{\lambda_0} f$ оказывается разрешимым при всех $f \in H$, но тогда, как нетрудно видеть, и уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо при всех $f \in H$ в противоречие с предположением.

Переходя к доказательству предложения б) заметим, что если λ_0—не собственное значение оператора A, то уравнение $u + R_{\lambda_0} S^2 u = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$, как нетрудно видеть, имеет лишь тривиальное решение. Отсюда следует разрешимость уравнения $u + R_{\lambda_0} S^2 u = R_{\lambda_0} f$, а следовательно и равносильного ему уравнения $Tu - \lambda_0 u = f$ при всех $f \in H$. В силу замкнутости T оператор $(T - \lambda_0 E)^{-1}$ ограничен.

Наконец, для доказательства предложения в) предположим, что λ—собственное значение оператора T. Тогда существует такое u, $\|u\| > 0$, что $u + R_\lambda S^2 u = 0$. Но в таком случае, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение. Итак, достаточно показать, что собственные значения уравнения $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ не могут сгущаться к λ_0, а это следует из известной леммы И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2], ибо $\lim\limits_{\tau \to \infty} \| R_{\sigma + i\tau} \| = 0$.

Переходя к следующей лемме, обозначим через $w_1(t)$ и $w_2(s)$ голоморфные функции, определенные, соответственно, в областях G_1 и G_2 комплексной плоскости и отображающие их на окрестности U_1 и U_2 некоторой точки λ_0. Пусть далее подобласти $G_1^+ \subset G_1$ и $G_2^- \subset G_2$ отображаются этими функциями однолистно на части $O_1 \subset U_1$ и $O_2 \subset U_2$ окрестностей U_1 и U_2, отсекаемые, соответственно, верхней и нижней полуплоскостями. Если при этом некоторая окрестность точки λ_0 (за исключением, быть может, самой точки λ_0) не содержит собственных значений оператора A и если вне спектра A оператор $SR_\lambda S$ (в обозначениях леммы 1.1) вполне непрерывен, то справедлива следующая

Лемма 1.2. *Если операторы* $SR_{w_1(t)}S$ $(t \in G_1^+)$ *и* $SR_{w_2(s)}S$ $(s \in G_2^-)$ *допускают представление*

$$SR_{w_1(t)} S = \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(\cdot, t)\varphi_k}{(t-t_0)^{n_k}} + K_t, \quad t \in G_1^+, \tag{1.1}$$

$$SR_{w_2(s)} S = \sum_{l=1}^{q} \frac{\Psi_l(\cdot, s)\psi_l}{(s-s_0)^{n_l}} + M_s, \quad s \in G_2^-, \tag{1.2}$$

где $\varphi_k, \psi_l \in H$, $w_1(t_0) = w_2(s_0) = \lambda_0$ $(t_0 \in \overline{G_1^+},\ s_0 \in \overline{G_2^-})$, *а линейные функционалы* $\Phi_k(\cdot, t)$ *и* $\Psi_l(\cdot, s)$, *равно как и линейные вполне непрерывные операторы* K_t *и* M_s, *аналитически зависят от* t *и* s, *соответственно, в* G_1 *и* G_2, *то точка* λ_0 *не является предельной точкой собственных значений (включая и лежащие на спектре оператора* A) *оператора* $T = A + S^2$.

Доказательство. Покажем сначала, что оператор $(E+\Phi_t)^{-1}$, $t \in G_1$ (соответственно, оператор $(E+\Psi_s)^{-1}$, $s \in G_2$) существует и ограничен для всех $t \in G_1$ (соответственно, для всех $s \in G_2$), за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек. Ограничимся случаем оператора Φ_t и условимся называть t собственным значением этого оператора, если уравнение $(E+\Phi_t)u = 0$ имеет отличное от нулевого решение. Поскольку оператор Φ_t вполне непрерывен, то, очевидно, что если t не является собственным значением оператора Φ_t, то оператор $(E+\Phi_t)^{-1}$ существует и ограничен (в силу альтернативы Фредгольма). Итак, надо лишь доказать конечность числа собственных значений оператора Φ_t. Для этого заметим, что при любом фиксированном $\tau \in G_1$ повторное применение теоремы Банаха-Штейнгауза приводит к существованию такой константы $C(\tau)$, что

$$\|K_t - K_\tau\| \leqslant C(\tau)\,|t-\tau| \quad (t \in G_1). \tag{1.3}$$

Далее, при любом фиксированном $\tau_0 \in G_1$ существует такой конечномерный оператор

$$M = \sum_{s=1}^{m} (\cdot, \omega_s)\chi_s \quad (\omega_s, \chi_s \in H), \tag{1.4}$$

что

$$\|K_{t_0} - M\| = q_0 < 1. \tag{1.5}$$

При этом систему $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \chi_1, \cdots, \chi_m$ можно считать линейно независимой, потому что при любом $\varepsilon > 0$ и $\psi \in H$ в шаре $\|\psi - \chi\| < \varepsilon$ существуют элементы χ такие, что система $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \chi$, линейно независима, если была независимой система $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$. Положив, далее, $S(t) = K_t - K_{t_0}$ и выбрав q_1 так, чтобы $0 < q_1 < 1 - q_0$, найдем, в силу (1.3), такую окрестность $O_{t_0} \subset G_1$ точки t_0, что $\|S(t)\| < q_1$ $(t \in O_{t_0})$. Очевидно, для оператора $T(t) = K_t - M = S(t) + K_{t_0} - M$ будем иметь $\|T(t)\| \leqslant q_0 + q_1 = q < 1$ при $t \in O_{t_0}$, и поэтому существует $(\mathrm{E} + T(t))^{-1}$, причем

$$\|(\mathrm{E} + T(t))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q} \quad (t \in O_{t_0}). \tag{1.6}$$

Предположим теперь, что некоторое $t \neq t_0$ из O_{t_0} является собственным значением оператора Φ_t, т. е.

$$f + \Phi_t f = 0, \quad f \neq 0. \tag{1.7}$$

Это значит, что

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)\,\varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + K(t) f = 0,$$

т. е.

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)\,\varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + T(t) f + Mf = 0.$$

Применяя к обеим частям последнего соотношения оператор $(\mathrm{E} + T(t))^{-1}$, получим

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)}{(t - t_0)^{n_k}} (\mathrm{E} + T(t))^{-1} \varphi_k + (\mathrm{E} + T(t))^{-1} Mf = 0. \tag{1.8}$$

Обратно, легко видеть, что если $f \neq 0$ удовлетворяет уравнению (1.8), то оно удовлетворяет и уравнению (1.7). Положим

$$\begin{aligned} (\mathrm{E} + T(t))^{-1} \varphi_k &= \varphi_k(t), \\ (\mathrm{E} + T(t))^{-1} \chi_s &= \chi_s(t). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Заметим далее что, в силу (1.4),

$$(\mathrm{E} + T(t))^{-1} Mf = \sum_{s=1}^{m} (f, \omega_s)\, \chi_s(t).$$

Таким образом, задача о собственных значениях оператора Φ_t эквивалентна задаче о собственных значениях уравнения

$$f + \sum_{k=1}^{p} \frac{\Phi_k(f, t)}{(t-t_0)^{n_k}} \varphi_k(t) + \sum_{s=1}^{m} (f, \omega_s) \chi_s(t) = 0. \tag{1.10}$$

Пусть уравнение (1.10) имеет решение f. Полагая

$$\frac{\Phi_k(f, t)}{(t-t_0)^{n_k}} = \xi_k, \quad (f, \omega_s) = \eta_s$$

и применяя к обеим частям (1.10) функционалы $\dfrac{\Phi_l(\cdot, t)}{(t-t_0)^{n_l}}$ и $(\cdot, \omega_j)$,

получаем

$$\left.\begin{aligned} &\xi_l + \sum_{k=1}^{p} \xi_k \frac{\Phi_l(\varphi_k(t), t)}{(t-t_0)^{n_l}} + \sum_{s=1}^{m} \eta_s \frac{\Phi_l(\chi_s(t), t)}{(t-t_0)^{n_l}} = 0 \quad (l = 1, \cdots, p), \\ &\eta_j + \sum_{k=1}^{p} \xi_k (\varphi_k(t), \omega_j) + \sum_{s=1}^{m} \eta_s (\chi_s(t), \omega_j) = 0 \qquad (j = 1, \cdots, m) \end{aligned}\right| . \tag{1.11}$$

Легко видеть, что и обратно, если при некотором $t \in O_{\tau_0}$ числа ξ_l и η_j удовлетворяют системе алгебраических уравнений (1.11), то элемент

$$f = \sum_{l=1}^{p} \xi_l \varphi_l(t) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j \chi_j(t) \tag{1.12}$$

удовлетворяет уравнению (1.10). Более того, поскольку элементы $\varphi_1, \cdots, \varphi_p, \chi_1, \cdots, \chi_m$ выбраны линейно независимыми, то, согласно (1.9), элементы $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_p(t), \chi_1(t), \cdots, \chi_m(t)$ также линейно независимы при любом $t \in O_{\tau_0}$. Поэтому (1.12) показывает, что уравнение (1.10) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает система алгебраических уравнений (1.11). Итак, задача о собственных значениях оператора Φ_t в области O_{τ_0} (τ_0 может совпадать и с t_0) эквивалентна задаче о нетривиальных решениях системы (1.11) и поскольку элементы определителя этой системы аналитичны в окрестности точки $t = \tau_0$, причем τ_0 может быть лишь полюсом, то или все точки из O_{τ_0} являются собственными значениями оператора Φ_t, или этот оператор имеет лишь конечное число собственных значений в O_{τ_0}. Наконец, очевидно, что первый случай невозможен, ибо, по условию, оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен вне спектра оператора A и, очевидно, аналитически зависит от параметра λ, причем, как известно, $\lim\limits_{\tau \to \infty} \| R_{\sigma+i\tau} \| = 0$ (если $\| SR_{\sigma+i\tau} S \| < 1$, то из $v + SR_{\sigma+i\tau} Sv = 0$ следует $\| v \| \leqslant \| SR_{\sigma+i\tau} S \| \| v \|$ и $v = 0$). Этим и доказано, что оператор $(E + \Phi_t)^{-1}$, $t \in G_1$ существует и ограничен для всех $t \in G_1$ за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек.

Докажем теперь, что $\lambda_0 = w_1(t_0)$ не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T, лежащих в верхней полуплоскости. В самом деле, если $\lambda_n \in O_1$ и $\lambda_n \to \lambda_0$, то $\lambda_n = w_1(t_n)$ и $t_n \to t_0$, $t_n \in G_1^+$. Пусть v_n—соответствующие собственные элементы, т. е. $Tv_n - \lambda_n v_n = Tv_n - w_1(t_n)\, v_n = 0$ или $Av_n + S^2 v_n - w_1(t_n)\, v_n = 0$, а поэтому $v_n + R_{w_1(t_n)} S^2 v_n = 0$ и, следовательно, $Sv_n + SR_{w_1(t_n)} S \cdot Sv_n = 0$. Но $Sv_n \neq 0$, ибо в противном случае $v_n = - R_{w_1(t_n)} S \cdot Sv_n = 0$. Итак, оператор $\mathrm{E} + SR_{w_1(t)} S$ не обратим для всех этих t_n, в противоречие с доказанным выше, ибо $SR_{w_1(t)} S \equiv \Phi_t$ в G_1^+. Точно так же убеждаемся, привлекая к рассмотрению оператор Ψ_λ, что λ_0 не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T, лежащих в нижней полуплоскости. Наконец, чтобы убедиться в том, что λ_0 не может оказаться предельной точкой вещественных собственных значений оператора T (лежащих на спектре оператора A), достаточно показать, что если λ^* принадлежит непрерывному спектру оператора A и является собственным значением оператора T, то

$$\lim_{\tau \to 0} (\mathrm{E} + SR_{\lambda^* + i\tau} S)\, v = 0 \qquad (\operatorname{Im} \tau = 0)$$

при некотором $v \in H$, $v \neq 0$, ибо это означает, что $(\mathrm{E} + \Phi_{t^*})\, v = 0$ $(w_1(t^*) = \lambda^*)$. Это является следствием следующего факта, установленного в работе автора [3]: если λ_0 является точкой непрерывного спектра некоторого самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H и если уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо, то $u = \lim\limits_{\tau \to 0} R_{\lambda_0 + i\tau} f$ $(\operatorname{Im} \tau = 0)$. Поэтому, если предположить, что $Av + S^2 v - \lambda^* v = 0$, $v \neq 0$, то $v = - \lim\limits_{\tau \to 0} R_{\lambda^* + i\tau} S^2 v$ или $Sv + \lim\limits_{\tau \to 0} SR_{\lambda^* + i\tau} S \times Sv = 0$, причем, очевидно, $Sv \neq 0$, т. е. действительно $(\mathrm{E} + \Phi_{t^*}) Sv = 0$, $Sv \neq 0$. Этим лемма полностью доказана.

Приведем также следующую теорему, на которую будем опираться ниже и доказательство которой дано в работе автора [4].

Теорема А. *Пусть A и V—замкнутые линейные операторы (вообще говоря, несамосопряженные и неограниченные) с плотными областями определения в гильбертовом пространстве H, а U—ограниченный линейный оператор (несамосопряженный), причем $D_A \subseteq D_V$. Тогда:*

1) *если λ_0 является регулярной точкой оператора A и*

$$\| VR_{\lambda_0} U \| < 1, \tag{1.13}$$

где R_λ—резольвента оператора A, то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 является его регулярной точкой;

2) *если точка спектра λ_0 оператора A не является собственным значением и если существует такая последовательность $\lambda_n \to \lambda_0$, что*

$$\sup \|(\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n}\| < \infty, \tag{1.14}$$

$$\lim\inf \| V R_{\lambda_n} U \| = q < 1, \tag{1.15}$$

то оператор $T = A + UV$ *замкнут и* λ_0 *принадлежит его спектру, не являясь собственным значением;*

3) *если* $(A + UV)^* = A^* + (UV)^*$ *и выполнены условия* (1.14) *и* (1.15), *то точка* λ_0 *непрерывного спектра оператора* A *остается точкой непрерывного спектра оператора* $T = A + UV$.

Теперь мы в состоянии пояснить идею предлагаемого в статье способа изучения спектра некоторых возмущений самосопряженных операторов. С этой целью приведем, основанное на леммах 1, 2 и теореме А, доказательство следующего предложения, принадлежащего, в основном, М. М. Гехтману [5].

Теорема. *Если комплекснозначная функция* $q(x)$ *удовлетворяет оценке*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \text{const} \tag{1.16}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, *то собственные значения оператора* $T = A + S^2$, *где* $A = (-1)^n \dfrac{d^{2n}}{dx^{2n}}$ *в* $L_2(-\infty, \infty)$, *а* S *есть оператор умножения на функцию* $\sqrt{q(x)}$, *могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса*

$$R = \left(\pi \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|\, dx\right)^{\frac{2n}{2n-1}} \tag{1.17}$$

нет собственных значений оператора T.

Доказательство. В самом деле, ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ оператора A, как известно, записывается в виде

$$K(x, y, \lambda) = \frac{\pi i}{nt^{2n-1}} \sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\frac{\pi}{n}} e^{ite^{ir\frac{\pi}{n}}|x-y|},$$

где положено $\lambda = t^{2n}$, $0 < \arg t < \dfrac{\pi}{n}$. В силу того, что $\operatorname{Im}\left(te^{ir\frac{\pi}{n}}\right) > 0$ из этой формулы и условия (1.16) сразу следует, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T (в силу п. а) леммы 1.1); что вне положительной полуоси оператор T может иметь лишь собственные значения (в силу п. б) леммы 1.1), не имеющие предельных точек вне этой полуоси (в силу п. в) леммы 1.1). Кроме того, из теоремы А следует, что вне круга радиуса R, определяемого формулой (1.17) (в этом случае самая грубая и очевидная оценка показывает, что все условия теоремы А выполнены), нет собственных значений оператора T. Наконец, лемма 1.2 показывает, что ни одна точка положительной полуоси (включая наиболее „опасную" точку $\lambda = 0$) не является предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!) оператора T. В самом деле, из очевидного тождества

$$K(x, y, \lambda) = \frac{\pi i}{n} \frac{\sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\frac{\pi}{n}} \left\{ e^{ite^{ir\frac{\pi}{n}}|x-y|} - \sum_{k=0}^{2n-2} \left(ite^{ir\frac{\pi}{n}}|x-y|\right)^k \right\}}{t^{2n-1}} -$$

$$- \frac{2\pi i}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{|x-y|^{2p}}{1-e^{i(2p+1)\frac{\pi}{n}}} \frac{1}{t^{2(n-p)-1}},$$

первый член которого аналитически зависит от t, а второй член содержит лишь четные степени $|x-y|$, немедленно следует, что выполняются условия леммы 1.2, что и доказывает теорему.

§ 2. О спектре некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов

В этом параграфе будет доказано предложение, аналогичное теореме, приведенной в конце § 1, для случая дифференциальных операторов более общего вида.

Мы начнем со случая, когда самосопряженный оператор A, рассматриваемый в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$, имеет вид

$$A = P\left(i\frac{d}{dx}\right), \tag{2.1}$$

где $P(t)$ — произвольный многочлен с вещественными коэффициентами, точнее, A есть замыкание оператора $P\left(i\frac{d}{dx}\right)$, рассматриваемого на многообразии всех финитных и неограниченно дифференцируемых функций, по метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$ (как известно, это замыкание существует и является самосопряженным оператором).

Условимся далее резольвенту этого оператора обозначать через

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1},$$

а оператор Фурье-Планшереля — через

$$Vu = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{N} e^{isx} u(s)\, ds, \quad u \in L_2(-\infty, \infty).$$

Наконец, введем в рассмотрение оператор

$$T_\lambda = qR_\lambda q, \tag{2.2}$$

сводящийся к тому, что элементы пространства $L_2(-\infty, \infty)$ умножаются сперва на функцию $q(x)$, к полученному произведению применяется оператор R_λ и результат снова умножается на $q(x)$.

Нетрудно видеть, что если $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ограничен, то при всех $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ и всех λ, не принадлежащих спектру оператора A,

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt, \tag{2.3}$$

где

$$M_{u,v}(t) = V^{-1}(qV\bar{v})\cdot V(qV^{-1}u). \tag{2.4}$$

Для доказательства будем сперва считать функцию $q(x)$ финитной и заметим, что для любой функции $u(x) \in L_2(-\infty, \infty)$

$$V(qu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(s-t)\,\tilde{u}(t)\,dt, \tag{2.5}$$

где $\tilde{q} = Vq$, $\tilde{u} = Vu$. Условившись далее свертку двух функций обозначать звездочкой, будем иметь, в силу (2.5),

$$V(qR_\lambda q)\,V^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,V_q * VR_\lambda qV^{-1}u =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,Vq * \frac{VqV^{-1}u}{P(x)-\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,V_q * \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{Vq * u}{P(x)-\lambda}\right\}$$

или

$$VT_\lambda V^{-1}u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(t-s)\,u(s)\,ds\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}(x-t)\,\tilde{q}(t-s)}{P(t)-\lambda}\,dt\right\} u(s)\,ds.$$

Будем считать, что u и v—финитные функции. Тогда

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(x-t)\,\overline{v(x)}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(t-s)\,u(s)\,ds}{P(t)-\lambda}\,dt,$$

т. е. формулы (2.3) и (2.4) доказаны при финитных u, v и q.

Заметим теперь, что если при некоторой ограниченной измеримой функции $q(x)$ формулы (2.3) и (2.4) справедливы для всех $u \in G_1$ и всех $v \in G_2$, где G_1 и G_2—плотные многообразия в $L_2(-\infty, \infty)$, то они остаются справедливыми и при любых $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\,V^{-1}(qV\bar{v})\cdot V(qV^{-1}u) - V^{-1}(qV\bar{v}_k)\cdot V(qV^{-1}u_k)\,|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|qV\bar{v}\|\cdot\|qV^{-1}(u-u_k)\|+\|qV^{-1}u_k\|\cdot\|qV(v-v_k)\|,$$

и достаточно в обеих частях (2.3) перейти к пределу при $u_k \to u$, $v_k \to v$. Пусть теперь $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и ограничена, G_1—совокупность тех $u \in L_2(-\infty, \infty)$, для которых $V^{-1}u$—ограниченная функция, а G_2—совокупность тех $v \in L_2(-\infty, \infty)$, для которых $V\bar{v}$ ограничена. Если $q_k(x)$ финитна, $u \in G_1$, $v \in G_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V^{-1}(qV\bar{v})\cdot V(qV^{-1}u) - V^{-1}(q_kV\bar{v})\cdot V(q_kV^{-1}u)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \|qV\bar{v}\|\cdot\|(q-q_k)V^{-1}u\|+\|q_kV^{-1}u\|\cdot\|(q-q_k)V\bar{v}\|,$$

и, переходя к пределу в обеих частях (2.3) при $q_k \to q$ (на этот раз оператор T_λ непрерывно зависит от q), находим, учитывая предыдущее замечание (G_1 и G_2, очевидно, плотны в $L_2(-\infty, \infty)$), что формулы (2.3) и (2.4) справедливы при любой ограниченной $q(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и всех $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, что и утверждалось.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей элементарной леммой.

Лемма 2.1. *Пусть при некотором $\varepsilon > 0$ измеримая комплекснозначная функция $q(s)$ допускает оценку*

$$|q(s)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|s|}, \quad C = \text{const}. \tag{2.6}$$

Тогда при любых заданных $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$ интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(t-x)}ds\right)u(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(x-t)}ds\right)\overline{v(x)}\,dx \tag{2.7}$$

аналитически зависят от t в полосе $|\operatorname{Im} t| < \varepsilon$, причем производные их можно находить путем формального дифференцирования под знаком внутреннего интеграла. Далее, если последовательности $u_k \in L_2(-\infty, \infty)$ и $v_k \in L_2(-\infty, \infty)$ слабо сходятся, соответственно, к $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, то интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(t-x)}ds\right)u_k(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(x-t)}ds\right)\overline{v_k(x)}\,dx,$$

рассматриваемые как функции от t, ограниченно сходятся во всякой внутренней полосе $|\operatorname{Im} t| \leqslant \tau < \varepsilon$ к интегралам (2.7).

Доказательство. Ограничимся случаем первого из интегралов (2.7) и введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(t-x)}ds. \tag{2.7'}$$

Выберем далее числа ε_1 и δ так, чтобы

$$0<\varepsilon_1<\varepsilon, \quad 0<\delta<\varepsilon_1,$$

где через ε обозначено число, входящее в условие (2.6) леммы. Если $|\operatorname{Im} t|<\delta$, то из условия (2.6) следует существование такой константы C_1, что

$$|isq(s)e^{ist}|\leqslant C_1 e^{-(\varepsilon_1-\delta)|s|} \quad (|\operatorname{Im} t|<\delta). \tag{2.8}$$

Пусть далее

$$0<\delta_0<\varepsilon_1-\delta.$$

Тогда, очевидно, существует такая константа C_2, что

$$\left|isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}\right|\leqslant C_2 e^{-(\varepsilon_1-\delta-\delta_0)|s|} \quad (|\operatorname{Im} t|<\delta, \quad |\Delta t|<\delta_0). \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\chi_N(s)=\begin{cases}1, & s\in[-N,N],\\ 0, & s\overline{\in}[-N,N].\end{cases}$$

Пусть ε_0—произвольное положительное число. В силу (2.8) и (2.9) можно выбрать N столь большим, чтобы

$$\|(1-\chi_N(s))\,isq(s)e^{ist}\|<\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}},$$

$$(|\operatorname{Im} t|<\delta, \quad |\Delta t|<\delta_0)$$

$$\left\|(1-\chi_N(s))\,isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}\right\|<\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}}.$$

Поэтому, в силу изометричности оператора Фурье, будем иметь

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(1-\chi_N(s))\,isq(s)e^{ist}e^{-isx}ds\right\|<\varepsilon_0,$$

$$(|\operatorname{Im} t|<\delta, \quad |\Delta t|<\delta_0) \tag{2.10}$$

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(1-\chi_N(s))\,isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}e^{-isx}ds\right\|<\varepsilon_0.$$

С другой стороны, опять-таки в силу изометричности оператора Фурье, имеем, очевидно,

$$\underset{\Delta t\to 0}{\text{l. i. m.}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_N(s)\,isq(s)e^{ist}\frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t}e^{-isx}ds=\int_{-\infty}^{\infty}\chi_N(s)\,isq(s)e^{ist}e^{-isx}ds.$$

Отсюда и из (2.10) следует, что при заданном $\varepsilon_0>0$ существует такое δ^* $(\delta^*\leqslant\delta_0)$, что при $|\Delta t|<\delta^*$ имеем

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} \frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t} e^{-isx} ds - \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} e^{-isx} ds \right\| < 3\varepsilon_0.$$

Но в силу обозначения (2.7)

$$\frac{\Phi(x, t+\Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} \frac{e^{is\Delta t}-1}{is\Delta t} e^{-isx} ds,$$

и предыдущее неравенство показывает, что

$$\underset{\Delta t \to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{\Phi(x, t+\Delta t) - \Phi(x, t)}{\Delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} isq(s)\, e^{ist} e^{-isx} ds. \quad (|\operatorname{Im} t| < \delta).$$

Из этого предельного соотношения и следует, как легко видеть, первая часть леммы.

Перейдем к доказательству второй части леммы. Если $|\operatorname{Im} t| \leqslant \leqslant \tau < \varepsilon$, то из условия (2.6) вытекает оценка

$$\| q(s)\, e^{ist} \| \leqslant C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}}.$$

Поэтому, в силу изометричности оператора Фурье,

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{is(t-x)} ds \right\| \leqslant \sqrt{2\pi}\, C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}}$$

и, следовательно,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{is(t-x)} ds \right\} u(x)\, dx \right| \leqslant \sqrt{2\pi}\, C \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - \tau^2}} \| u \|.$$

Отсюда и следует вторая часть леммы, ибо всякая слабо сходящаяся последовательность u_k ограничена.

Чтобы сформулировать следующую теорему удобно ввести в рассмотрение оператор

$$T = A + S^2, \tag{2.11}$$

где оператор A определен формулой (2.1), а S есть оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$ ($q(x)$ определена на всей вещественной оси и ограничена).

Теорема 2.1. *Если комплекснозначная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2.6), то точка λ_0 спектра оператора A, определенного формулой (2.1), не может быть предельной точкой собственных значений (включая и вещественные) оператора T, определенного формулой (2.11).*

Доказательство. Пусть λ_0 принадлежит спектру оператора A, т. е. пусть при некотором вещественном $s = s^*$ имеем $P(s^*) - \lambda_0 = 0$. Пусть $s_1, s_2, \cdots, s_r$ — все вещественные корни уравнения $P(s) - \lambda_0 = 0$, расположенные в порядке возрастания, а $\mu_1, \cdots, \mu_r$ — их кратности. При заданном $\sigma > 0$ (σ будет выбрано надлежащим образом позже) положим

$$K_0^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{-\infty}^{s_1-\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt, \qquad K_r^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{s_r+\sigma}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt,$$

$$K_j^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{s_j+\sigma}^{s_{j+1}-\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt \qquad (j = 1, 2, \cdots, r-1), \tag{2.12}$$

где $u, v \in L_2(-\infty, \infty)$, а $M_{u,v}(t)$ определено формулой (2.4). Введем далее обозначение

$$\Gamma_l^\sigma = \{z:\ |z - s_l| = \sigma;\quad \pi \leqslant \arg z \leqslant 2\pi\} \tag{2.13}$$

и положим

$$K^\sigma(u, v, \lambda) = \sum_{j=0}^{r} K_j^\sigma(u, v, \lambda) + \sum_{j=1}^{r} \int_{\Gamma_j^\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt, \tag{2.14}$$

где контур Γ_j^σ следует проходить в направлении от $s_j - \sigma$ к $s_j + \sigma$. Наконец, обозначим через S_j^σ замкнутый контур, проходимый против часовой стрелки и состоящий из дуги Γ_j^σ и отрезка $[s_j - \sigma, s_j + \sigma]$. Пусть

$$I_j^\sigma(u, v, \lambda) = \int_{S_j^\sigma} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt. \tag{2.15}$$

Ясно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u,v}(t)}{P(t)-\lambda}\,dt = K^\sigma(u, v, \lambda) - \sum_{j=1}^{r} I_j^\sigma(u, v, \lambda). \tag{2.16}$$

Рассмотрим функцию $I_j^\sigma(u, v, \lambda)$. По условию s_j является корнем кратности μ_j уравнения $P(s) - \lambda_0 = 0$. Так как производная левой части уравнения $P(s) - \lambda = 0$ по λ отличная от нуля, то как известно ([6], стр. 30), если положить

$$\lambda = \lambda_0 + z^{\mu_j}, \tag{2.17}$$

тогда при достаточно малых по модулю z все корни уравнения $P(s) - \lambda = 0$, расположенные в окрестности точки s_j, можно получить по формуле

$$w_j(z) = s_j + b_j^1 z + b_j^2 z^2 + \cdots, \tag{2.18}$$

($w_j(z)$ — аналитическая функция в окрестности точки $z = 0$), подставляя в нее все те z, полученные при однократном обходе начала координат, при которых $\lambda_0 + z^{\mu_j} = \lambda$. Будем в дальнейшем считать, что λ достаточно близки к λ_0 и лежат в верхней полуплоскости. Очевидно, таким λ соответствуют z, удовлетворяющие любому из следующих условий:

$$\frac{2\pi k}{\mu_j} < \arg z < \frac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\mu_j} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ \mu_j - 1).$$

Таким образом, если при заданном λ обозначить через z то значение, которое удовлетворяет (2.17) и условию

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j}, \tag{2.19}$$

то все остальные z имеют вид

$$z,\ ze^{i\frac{2\pi}{\mu_j}}, \cdots,\ ze^{i\frac{2\pi(\mu_j - 1)}{\mu_j}}. \tag{2.20}$$

Нас, однако, будут интересовать лишь те значения из ряда (2.20), при которых функция (2.18) принимает значения из нижней полуплоскости. В этой связи заметим следующее. Легко видеть, что всякий угол $\dfrac{2\pi k}{\mu_j} < \arg z < \dfrac{2\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\mu_j}$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ \mu_j - 1)$ целиком расположен или в верхней или в нижней полуплоскости. Отсюда следует, что каждая из функций

$$w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ \mu_j - 1)$$

принимает значения, лежащие целиком (при всех z, удовлетворяющих условию (2.19)) в верхней или целиком в нижней полуплоскости. В самом деле, если при $0 < \arg z_1 < \dfrac{\pi}{\mu_j}$ и $0 < \arg z_2 < \dfrac{\pi}{\mu_j}$ точки $w_j\left(z_1 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ и $w_j\left(z_2 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ лежат в разных полуплоскостях, то в угле (2.19) найдется такая точка z_3, что $w_j\left(z_3 e^{i\frac{2\pi k}{\mu_j}}\right)$ лежит на вещественной оси, что невозможно, потому что при вещественном w_j величина $P(w_j)$ также вещественна и не может совпадать с невещественным числом $\lambda = \lambda_0 + z_3^{\mu_j}$.

Обозначим теперь через $k_{j,m}$ те значения $k\,(m=1, 2,\cdots, l_j)$, при которых значения

$$w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)$$

лежат в нижней полуплоскости, если z удовлетворяет условию (2.19). Очевидно, что если z достаточно малы, то все $w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)$ различны и поэтому, считая

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j}, \quad |z| < \sigma, \tag{2.21}$$

и определяя λ по формуле (2.17), на основании леммы 2.1, будем иметь

$$I_j^a(u, v, \lambda) = 2\pi i \sum_{m=1}^{l_j} \frac{M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}. \tag{2.22}$$

Введем обозначение (опуская зависимость от u и v):

$$M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\} = A_{j,m}(z)\cdot B_{j,m}(z) = M_{j,m}(z), \tag{2.23}$$

где

$$A_{j,m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s)\, e^{-isx} e^{isw_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)} ds\right) u(x)\,dx, \tag{2.24}$$

$$B_{j,m}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} q(s) e^{isx} e^{-isw_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)} ds\right) \overline{v(x)}\,dx. \tag{2.25}$$

Заметим далее что, как нетрудно видеть,

$$(e^{\varphi(z)})^{(n)} = \sum_{m_1+2m_2+\cdots+qm_q=n} \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_q!}\left(\frac{\varphi'(z)}{1!}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{\varphi^{(q)}(z)}{q!}\right)^{m_q} e^{\varphi(z)}, \tag{2.26}$$

где $m_1 m_3\cdots m_q > 0$. Положим теперь

$$2\pi e^{i(x-s_j)s}\cdot\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)=$$

$$=\sum_{m_1+\cdots+qm_q=r}\frac{r!}{m_1!m_2!\cdots m_q!}(is)^{m_1+\cdots+m_q}\left(\frac{w_j'(0)}{1!}\right)^{m_1}\cdots$$

$$\cdots\left(\frac{w_j^{(q)}(0)}{q!}\right)^{m_q}e^{i\frac{2\pi r\cdot k_{j,m}}{\mu_j}}. \tag{2.27}$$

Из (2.26) и (2.27) следует, что

$$A_{j,m}^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\cdot\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)\,ds\right)u(x)\,dx, \tag{2.28}$$

$$B_{j,m}^{(r)}(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(-s,\ x;\ j,\ m)\,ds\right)\overline{v(x)}dx. \tag{2.29}$$

Далее, в силу (2.23),

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\sum_{p=0}^{l}\frac{z^l}{p!\,(l-p)!}A_{j,m}^{(l-p)}(0)\cdot B_{j,m}^{(p)}(0).$$

Легко видеть, что эта формула может быть записана в виде

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{p=0}^{\mu_j-2}\left\{\sum_{l=p}^{\mu_j-2}\frac{z^l}{p!\,(l-p)!}A_{j,m}^{(l-p)}(0)\right\}\cdot B_{j,m}^{(p)}(0). \tag{2.30}$$

Наконец, введя обозначения

$$\xi_{r,j,m}(x)=\frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(s,\ x;\ j,\ m)\,ds, \tag{2.31}$$

$$\eta_{r,j,m}(x)=\frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty}q(s)\,\alpha_r(-s,\ x;\ j,\ m)\,ds, \tag{2.32}$$

перепишем (2.30) в следующей форме:

$$\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_{j,m}^{(l)}(0)}{l!}z^l=\sum_{p=0}^{\mu_j-2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j,m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx. \tag{2.33}$$

Заметим, далее, что $z=0$ является нулем порядка μ_j-1 как для функции

$$M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}-\sum_{l=0}^{\mu_j-2}\frac{M_j^{(l)}(0)}{l!}z^l, \tag{2.34}$$

так и для функции

$$P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}. \tag{2.35}$$

Последнее следует из того, что $w_j(0)=s_j$, s_j — нуль порядка μ_j для $P(t)$ и в формуле (2.18) $b_j^1\neq 0$ ([6], стр. 30).

Таким образом, полагая

$$I_j^0(u,\ v,\ \lambda)=R_j(u,\ v;\ \lambda_0+z^{\mu_j})+P_j(u,\ v;\ \lambda_0+z^{\mu_j}), \tag{2.36}$$

где

$$R_j(u,\ v;\ \lambda_0+z^{\mu_j})=$$
$$=2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{M_{u,v}\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}-$$
$$-2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{\sum\limits_{p=0}^{\mu_j-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum\limits_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j;m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\overline{v(x)}\,dx}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}} \tag{2.37}$$

и

$$P_j(u,\ v,\ \lambda_0+z^{\mu_j})=$$
$$=2\pi i\sum_{m=1}^{l_j}\frac{\sum\limits_{p=0}^{\mu_j-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum\limits_{l=p}^{\mu_j-2}\xi_{l-p,j,m}(x)\cdot z^l\right\}u(x)\,dx\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\eta_{p,j,m}(x)\overline{v(x)}\,dx}{P'\left\{w_j\left(ze^{i\frac{2\pi k_{j,m}}{\mu_j}}\right)\right\}}, \tag{2.38}$$

получаем разложение $I_j^0(u,\ v,\ \lambda)$ в сумму двух слагаемых, первое из которых $R_j(u,\ v;\ \lambda_0+z^{\mu_j})$ является регулярной функцией от z в окрестности начала координат, а второе: $P(u,\ v;\ \lambda_0+z^{\mu_j})$ имеет полюс при $z=0$. Теперь мы перейдем от переменной z к новой переменной ζ следующим образом. Пусть

$$0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{\mu_1 \cdots \mu_r} \tag{2.39}$$

Если обозначить

$$z = \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_{j-1} \mu_{j+1} \cdots \mu_r}, \tag{2.40}$$

то

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{\mu_j} \tag{2.41}$$

Поэтому соотношение (2.17) принимает вид

$$\lambda = \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}, \tag{2.42}$$

а вместо (2.36) получаем разложение

$$\Gamma_j(u, v; \lambda) = R_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) + P_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}), \tag{2.43}$$

причем из (2.37), (2.38) и (2.40) вытекает, что первое слагаемое аналитически продолжается по ζ из области угла (2.39) в полную окрестность начала координат, а второе слагаемое в начале координат может иметь лишь полюс. Таким образом, при всех λ из верхней полуплоскости, достаточно близких к точке $\lambda = \lambda_0$, формула (2.16) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{u, v}(t)}{P(t) - \lambda} dt = K^a(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) - \sum_{j=1}^{r} R_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) -$$

$$- \sum_{j=1}^{r} P_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}). \tag{2.44}$$

Заметим, что здесь и первое слагаемое K^a допускает аналитическое по ζ продолжение в полную окрестность точки $\zeta = 0$, как это легко следует из (2.12) и (2.14). Наконец, из (2.12), (2.14), (2.37), (2.38), (2.23)—(2.25) и леммы 2.1 следует, что билинейные формы $K^a(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r})$ и $R_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r})$ обладают следующим свойством: если $u_k \xrightarrow{\text{сл.}} u$, $v_k \xrightarrow{\text{сл.}} v$, то

$$\lim_{k \to \infty} R_j(u_k, v_k; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) = R_j(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}),$$

$$\lim_{k \to \infty} K^a(u_k, v_k; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}) = K^a(u, v; \lambda_0 + \zeta^{\mu_1 \cdots \mu_r}).$$

Следовательно, порождающие их операторы вполне непрерывны. Таким образом, выполняется условие (1.1) леммы 1.2. Точно таким же образом можно удовлетворить и условию (1.2) леммы 1.2. Для этого надо выбрать λ из нижней полуплоскости и контуры интегрирования в (2.14) и (2.15) брать в верхней полуплоскости. Применение леммы 1.2 доказывает теорему.

Чтобы сформулировать следующую теорему, введем обозначения. Пусть числа K и R определяются следующим образом:

$$|P'(t)| > n\|q\|^2, \quad (|t| > K); \tag{2.45}$$

где n — степень полинома $P(t)$; и

$$|(P(t)-\lambda| > 0, \qquad (|\lambda| > R, \ |t| \leqslant K), \tag{2.46}$$

где K определено условием (2.45).

Теорема 2.2. *Если комплекснозначная функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2.6), то все точки спектра оператора A, определенного формулой (2.1), принадлежат спектру оператора $T = A + S^2$, определенного формулой (2.11), причем оператор T может иметь лишь конечное число собственных значений (включая и вещественные). Вне круга радиуса R, подчиненного условию (2.46), оператор T не имеет собственных значений.*

Доказательство. Из (2.3) и (2.4), т. е. из

$$M_{u,v}(t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(x-t)}\,ds\right)\overline{v(x)}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(s)e^{is(t-x)}\,ds\right)u(x)dx \tag{2.47}$$

следует, что оператор $VT_\lambda V^{-1}$ (T_λ определено формулой (2.2), а V — преобразование Фурье-Планшереля), а следовательно и оператор T_λ, вполне непрерывен (на основании второй части леммы 2.1). Ясно также, что при невещественных λ этот оператор аналитически зависит от λ. Поэтому, согласно теореме 2.1 и лемме 1.1, достаточно доказать лишь последнее утверждение теоремы. С этой целью оценим норму оператора $VT_\lambda V^{-1}$. Из (2.3) и (2.47) без труда получаем, что

$$(VT_\lambda V^{-1}u, v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right\}u(s)\overline{v(x)}dsdx,$$

где $\tilde{q}(t)$ обозначает преобразование Фурье функции $q(t)$. Отсюда

$$|(VT_\lambda V^{-1}u, v)|^2 \leqslant \left(\frac{\|u\|\cdot\|v\|}{2\pi}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2 dsdx.$$

Пользуясь равенством Парсеваля и теоремой о преобразовании Фурье свертки двух функций, получаем следующую цепь равенств:

$$\|VT_\lambda V^{-1}\|^2 \leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\tilde{q}(x-t)}{P(t)-\lambda}\,dt\right\}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\tilde{q}(t-s)}\,\overline{\tilde{q}(x-t)}}{\overline{P(t)}-\overline{\lambda}}\,dt\right\}dsdx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{q}(t-s)\,\overline{\tilde{q}(x-t)}\,\overline{\tilde{q}(\xi-s)}\,\tilde{q}(x-\xi)}{(P(t)-\lambda)\,(\overline{P(\xi)}-\overline{\lambda})}\,dt\,d\xi\right\}ds\,dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(t-s)\,\overline{\tilde{q}(\xi-s)}\,ds\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{q}(x-t)\,\overline{\tilde{q}(x-\xi)}\,dx}{(P(t)-\lambda)\,(\overline{P(\xi)}-\overline{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta)|^2 e^{i(t-\xi,\,\eta)}d\eta\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta)|^2 e^{i(\xi-t,\,\eta)}d\eta}{(P(t)-\lambda)\,(\overline{P(\xi)}-\overline{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)\,q(-\zeta)|^2 d\zeta\right\}e^{i(\xi-t,\,\eta)}d\eta}{(P(t)-\lambda)\,(\overline{P(\xi)}-\overline{\lambda})}\,dt\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)\,q(-\zeta)|^2 d\zeta\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}\,e^{i\xi\eta}}{(P(t)-\lambda)\,(\overline{P(\xi)}-\overline{\lambda})}\,d\xi\,dt\right\}d\eta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)\,q(-\zeta)|^2 d\zeta\cdot\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2\right\}d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^2}\sup_{\eta}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|q(\eta-\zeta)\,q(-\zeta)|^2 d\eta\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\,\|q\|^4\cdot\sup_{\eta}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|^2.$$

Таким образом,

$$\|VT_\lambda V^{-1}\| \leqslant \frac{\|q\|^2}{2\pi}\sup_{\eta}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt\right|. \qquad (2.48)$$

Заметим далее, что если $\eta > 0$ и λ невещественно, то, пользуясь теорией вычетов и леммой Жордана, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\eta}}{P(t)-\lambda}\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{r} \frac{e^{-it_k\eta}}{P'(t_k)},$$

где t_k — корни уравнения $P(t)-\lambda=0$, расположенные в нижней полуплоскости. Аналогичная формула справедлива и при $\eta<0$, только суммирование распространяется на те корни уравнения $P(t)-\lambda=0$, которые лежат в верхней полуплоскости (в силу (2.45) и (2.46) все указанные корни простые при $|\lambda|>R$). Ясно, что при $|\lambda|>R$ все корни уравнения $P(t)-\lambda=0$ лежат вне круга радиуса K, а поэтому $|P'(t_k)|>n\|q\|^2$. Отсюда следует, что при $|\lambda|>R$ имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-it\eta}\,dt}{P(t)-\lambda}\right| < \frac{2\pi n}{n\|q\|^2} = \frac{2\pi}{\|q\|^2},$$

и на основании (2.48)

$$\|T_\lambda\| = \|VT_\lambda V^{-1}\| < 1, \quad |\lambda|>R.$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой А из § 1.

Перейдем, наконец, к изучению спектра несамосопряженных возмущений оператора

$$A=(-\Delta)^k \tag{2.49}$$

в $L_2(E_n)$, где Δ — оператор Лапласа, E_n — евклидово пространство нечетной размерности $n\geqslant 3$, k — целое положительное число, причем $2k>n$. Как известно, оператор $A=(-\Delta)^k$ — самосопряженный и его спектр непрерывен и совпадает с положительной полуосью. Более того, как это следует из вычислений, приведенных в работе автора [4], ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ

$$R_\lambda f = \int_{E_n} K(x, y, \lambda) f(y)\,dy, \qquad f\in L_2(E_n), \tag{2.50}$$

этого оператора имеет вид

$$K(x, y, \lambda) = \frac{2i\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} e^{imn\frac{\pi}{k}}\, \Phi\left(te^{im\frac{\pi}{k}},\ x-y\right), \tag{2.51}$$

где положено $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$$\lambda = t^{2k}, \qquad 0<\arg t<\frac{\pi}{k} \tag{2.52}$$

и

$$\Phi(r, x) = \int_0^1 e^{ir|x|s}(1-s^2)^{\frac{n-3}{2}}\,ds, \tag{2.53}$$

причем $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Справедлива следующая

Теорема 2.3. *Если размерность n пространства E_n нечетна, причем $n \geqslant 3$ и $2k > n$, то собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и положительные), где A определен формулой (2.49), а S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию*

$$|q(x)| \leqslant Ce^{-\varepsilon|x|}, \quad C = \text{const}, \tag{2.54}$$

при некотором $\varepsilon > 0$, могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int\limits_{E_n} |q(x)|\, dx \right\}^{\frac{2k}{2k-n}} \tag{2.55}$$

собственных значений нет, и все остальные точки положительной полуоси принадлежат непрерывному спектру оператора T.

Доказательство. В самом деле, поскольку $\operatorname{Im}\left(te^{im\frac{\pi}{k}}\right) > 0$, то формулы (2.50)—(2.53), а также условие (2.54) показывают, что оператор $SR_\lambda S$ вполне непрерывен при невещественных λ. Поэтому из леммы 1.1 вытекает, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T и вне ее этот оператор может иметь лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне положительной полуоси. Из теоремы А § 1 вытекает далее, что вне круга радиуса (2.55) нет собственных значений оператора T, поскольку, как легко видеть,

$$\| SR_\lambda S \| \leqslant \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{t^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int\limits_{E_n} |q(x)|\, dx.$$

Остается показать, что ни одна точка положительной полуоси не может быть предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!), т. е. что мы находимся в условиях применимости леммы 1.2. С этой целью введем обозначения (в предположении $2k - n > 0$)

$$\psi(r, x) = \int\limits_0^1 \left\{ e^{ir|x|s} - \sum_{l=0}^{2k-n-1} \frac{(ir|x|s)^l}{l!} \right\} (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds$$

и

$$a_l = \frac{1}{l!} \int\limits_0^1 s^l (1 - s^2)^{\frac{n-3}{2}}\, ds.$$

Таким образом,

$$\Phi(r, x) = \sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l (ir|x|)^l + \psi(r, x).$$

Положим, наконец,

$$\Psi(t, x) = i\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{m=0}^{k-1}\psi\left(te^{im\frac{\pi}{k}}, x\right)e^{imn\frac{\pi}{k}}.$$

Ясно, что при всех x функция $\Psi(t, x)$ — целая по t и что ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты оператора A представляется в виде

$$K(x, y, \lambda) = i\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{l+n}{k}\pi} + \Psi(t, x-y).$$

С другой стороны,

$$\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{l+n}{k}\pi} = \sum_{l=0}^{2k-n-1}\frac{1-e^{i(l+n)\pi}}{1-e^{i\frac{l+n}{k}\pi}} a_l(i|x-y|)^l t^l.$$

Поскольку $l \leqslant 2k-n-1$, то $\frac{l+n}{2} \leqslant 2-\frac{1}{k}$ и, следовательно, $1-e^{i\frac{l+n}{k}\pi} \neq 0$. Но при четных l имеем, $1-e^{i(l+n)\pi} = 2$, а при нечетных l получаем $1-e^{i(l+n)\pi} = 0$. Поэтому

$$\sum_{m=0}^{k-1}\sum_{l=0}^{2k-n-1} a_l(i|x-y|)^l t^l e^{im\frac{n+l}{k}\pi} = -2\sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}}\frac{a_{2p}}{1-e^{i\frac{2p+n}{k}\pi}}|x-y|^{2p} t^{2p}.$$

Окончательно имеем

$$K(x, y, \lambda) = -i\frac{4\pi^{\frac{n+1}{2}}}{kt^{2k-n}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}\sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}}\frac{a_{2p}}{1-e^{i\frac{2p+n}{k}\pi}}|x-y|^{2p} t^{2p} + \Psi(t, x-y).$$

Поскольку первый член правой части содержит лишь четные степени $|x-y|$, а второй член $\Psi(t, x-y)$ — целая функция по t, то условия леммы 1.2 выполняются, что и доказывает теорему.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР и
Ереванский государственный
университет.

Поступило 5.III.1966

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՈՐՈՇ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐԻ ՈՉ-ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկվում է անընդհատ սպեկտր ունեցող ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների մի դասի «փոքր» գրգռումների սպեկտրի ուսումնասիրման մի պարզ եղանակ։

Այդ եղանակը լուսաբանվում է 1) լրիվ առանցքի վրա տրված, իրական գործակիցներով, դիֆերենցման օպերատորից կամայական $P\left(i\frac{d}{dx}\right)$ *բազմանդամի օրինակով, ինչպես նաև 2) կենտ չափանի* $(n \geqslant 3)$ *էվկլիդյան տարածության մեջ տրված* $(-\Delta)^k$ $(2k > n)$ *պոլիհարմոնիկ օպերատորի օրինակով։*

Հիմնական արդյունքը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ. այդ օպերատորները որոշ բազմապատկման օպերատորներով (անվերջում էքսպոնենցիալ նվազման կարգ ունեցող կոմպլեքսարժեք ֆունկցիաներով) գրգռելիս կարող են առաջ գալ միայն վերջավոր թվով սեփական արժեքներ։

H. M. MARTIROSIAN

ON THE SPECTRUM OF NON-SELF-ADJOINT PERTURBATIONS OF SOME SELF-ADJOINT DIFFERENTIAL OPERATORS

Summary

The paper offers a simple way for studying the spectrum of „small" perturbations of a class of non-self-adjoint operators with continuous spectra.

This is well illustrated 1) in the case of an arbitrary polynomial $P\left(i\frac{d}{dx}\right)$ of differentiation operator with real coefficients and 2) in the case of the polyharmonic operator $(-\Delta)^k$ given in an odd-dimensional $(3 \leqslant n < 2k)$ Eucledean space.

The main result may be worded as follows: when perturbing these operators with a multiplication operator (by a complex-valued function exponentially decreasing at infinity) only a finite number of eigenvalues may arise.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. М. Мартиросян.* О спектре некоторых несамосопряженных операторов, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. науки, XIV, № 5, 1961.

2. *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII, вып. 4 (76), 1957.
3. *Р. М. Мартиросян*. О спектре несамосопряженных возмущений бигармонического оператора в трехмерном пространстве, Изв. АН Арм.ССР, физ.-мат. науки, XVI, № 4, 1963.
4. *Р. М. Мартиросян*. Об инвариантности спектра малых возмущений полигармонического оператора, Изв. АН СССР, серия матем., 28, I, 1964.
5. *М. М. Гехтман*, О спектре несамосопряженного дифференциального оператора четного порядка, ДАН СССР, 150, № 4, 1963.
6. *Р. Неванлинна*. Униформизация, М., 1955.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS