ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ԽՄԲԱԳՐԱԿԱՆ ԿՈԼԵԳԻԱ

Գլխավոր խմբագիր Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ
Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ
Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ
Ս. Ն. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ
Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ
Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՌ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор М. М. ДЖРБАШЯН

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН
И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ
Р. М. МАРТИРОСЯН
С. Н. МЕРГЕЛЯН
А. А. ТАЛАЛЯН
Р. Л. ШАХБАГЯН

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ЕРА 30 к. индекс 77735

EDITORIAL BOARD

Editor-in-chief: N. M. DZHRBASHIAN

F. A. ALEXANDRIAN
H. M. MARTIROSIAN
S. N. MERGELIAN
A. A. TALALIAN
R. L. SHAKHBAGIAN
I. D. ZASLAVSKII

TO THE AUTHOR'S NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings
ventia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika"
e requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, double-spaced, in duplicate. Pe-
rs in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in
rmenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles,
foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding character, should be
derlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines
ove. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a wavy line,
d indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers
d locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books the au-
rs initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher,
e date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name,
e title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication
ould be marked. Reference to a quoted source will be indicated by a numeral in
uare brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that
ould call for resetting of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the
al version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial
fice reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work
s been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address, and the name
full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

Г. Ц. ТУМАРКИН

ОПИСАНИЕ КЛАССА ФУНКЦИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДРОБЯМИ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

Пусть задана таблица $\{\alpha_{kj}\}$ комплексных чисел

$$\begin{matrix} \alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1N_1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kN_k} \\ \cdots\cdots \end{matrix}, \qquad N_k \leqslant \infty, \quad k=1, 2, \cdots, \tag{1}$$

подчиненных лишь единственному условию: $|\alpha_{kj}| \neq 1$.

В ряде работ Уолша, а также других математиков, рассматривалась задача о нахождении необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять заданная на $|z|=1$ функция $F(e^{i\theta})$, чтобы ее можно было с любой точностью приблизить в метрике соответствующего пространства последовательностью рациональных дробей $\{R_k(z)\}$, имеющих своими полюсами лишь точки таблицы (1). Последнее означает, что полюсами k-ой дроби $R_k(z)$ могут быть только числа из k-ой строки таблицы (1). Так что, если в k-ой строке нет повторяющихся чисел α_{kj} и все $\alpha_{kj} \neq \infty$, то $R_k(z)$ можно представить в виде $R_k(z) = c_{k0} + \sum\limits_j \frac{c_{kj}}{z-\alpha_{kj}}$, где c_{kj}—комплексные числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля (при $N_k = \infty$). Некоторые числа α_{kj} в k-ой строке могут встречаться более одного раза, что означает допущение у $R_k(z)$ в точке α_{kj} полюса соответствующего порядка. Кроме того не исключается случай, когда $\alpha_{kj} = \infty$.

Обозначим те из чисел α_{kj}, для которых $|\alpha_{kj}| < 1$, через α_{kj}^+, а для которых $|\alpha_{kj}| > 1$—через α_{kj}^-. Положим

$$S_k^+ = \sum_j (1 - |\alpha_{kj}^+|), \qquad S_k^- = \sum_j \left(1 - \frac{1}{|\alpha_{kj}^-|}\right), \tag{2}$$

где суммирование распространяется на все числа α_{kj}^+ и α_{kj}^-, соответственно, из k-ой строки таблицы (1).

Хорошо известно [1], что если для таблицы (1)

$$\lim_{k\to\infty} S_k^+ = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} S_k^- = \infty, \tag{3}$$

то для любой функции $F(e^{i\theta}) \in C$ (или L^p, $p > 1$) найдется последовательность рациональных дробей $\{R_k(z)\}$ с полюсами, заданными таб-

лицей (1), для которой $\|F(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})\|\to 0$ при $k\to\infty$. С другой стороны, если для всех чисел таблицы (1) $|\alpha_{kj}|>1$, т. е. $S_k^+=0$, $k=1, 2,\cdots$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^-=\infty$, то последовательностями $\{R_k(z)\}$ можно в метрике C приблизить те и только те функции $F(e^{i\theta})$, которые являются граничными значениями непрерывных в $|z|\leqslant 1$ и аналитических в $|z|<1$ функций (см., напр., [10], [1]).

В заметке [5] мы указали необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$, которые приближаются рациональными дробями в следующем случае:

$$\varliminf_{k\to\infty} S_k^+<\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} S_k^-=\infty. \tag{4}$$

Функции $F(e^{i\theta})$ обязаны тогда совпадать почти всюду на $|z|=1$ с угловыми граничными значениями некоторого подкласса мероморфных функций ограниченного вида, имеющих специальное представление. В дальнейшем, используя полученные нами результаты о последовательностях произведений Бляшке [5], мы установили необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$ (в случае (4)) в терминах, непосредственно связанных с расположением чисел в таблице (1). Соответствующие результаты были получены также для пространств L_σ^p с $\int\limits_0^{2\pi} \ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty$ при любом $p>0$ (см. [6]).

Далее, изучается случай, когда

$$\varliminf S_k^+<\infty, \qquad \varliminf S_k^-<\infty. \tag{5}$$

(Случай $\lim S_k^+=\infty$, $\varliminf S_k^-<\infty$ аналогичен случаю (4), поэтому мы на нем здесь не останавливаемся.)

В теореме 1 мы устанавливаем необходимые и достаточные условия для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимацию в метрике L^p, $p>1$, при выполнении условия (5). Функции $F(e^{i\theta})$, которые при указанных условиях могут быть аппроксимированы дробями, обязаны являться угловыми граничными значениями мероморфных в $|z|<1$ и $|z|>1$ функций, составляющих подклассы функций с ограниченной неванлинновской характеристикой, которые полностью описываются.

Примененный при доказательстве теоремы 1 метод позволяет доказать необходимость аналогичных условий и для аппроксимации в более общих пространствах L_σ^p (теоремы 2 и 3).

Для формулировки результатов нам понадобятся две функции $B^+(z)$ и $B^-(z)$, аналитические, соответственно, внутри и вне $|z|=1$. Обозначим через $b_k^+(z)$ произведение Бляшке, нулями которого служат все числа α_{kj}^+ из k-ой строки таблицы (1):

$$b_k^+(z)=\prod_j \frac{\alpha_{kj}^+-z}{1-z\bar{\alpha}_{kj}^+}\,\frac{|\alpha_{kj}^+|}{\alpha_{kj}^+} \tag{6}$$

(если окажется, что для чисел α_{kj}^+ из k-ой строки $\sum_j (1-|\alpha_{kj}^+|)=\infty$, то полагаем $b_k^+(z)\equiv 0$).

Рассмотрим всевозможные равномерно сходящиеся внутри круга $|z|<1$ подпоследовательности $\{b_{k_l}^+(z)\}$ последовательности $\{b_k^+(z)\}$. Предельные для таких подпоследовательностей функции $b^+(z)$ аналитичны в $|z|<1$ и ограничены здесь по модулю единицей; среди них заведомо имеются функции, не равные тождественно нулю. В самом деле, если взять $\{b_{k_l}^+(z)\}$, для которой $\overline{\lim\limits_{k_l\to\infty}}\sum_j(1-|\alpha_{k_lj}^+|)<\infty$, то $\lim b_{k_l}^+(z)\not\equiv 0$ (см. напр. [8]).

Обозначим теперь через $B^+(z)$ наилучшую аналитическую мажоранту семейства $\{b^+(z)\}$ всевозможных предельных функций для подпоследовательностей $\{b_{k_l}^+(z)\}$. Это означает, что, во-первых, $B^+(z)$ мажорирует по модулю в $|z|<1$ все предельные функции $b^+(z)$:

$$|b^+(z)|\leqslant|B^+(z)|,\quad |z|<1,\quad \text{для всех } b^+(z), \tag{7}$$

и, во-вторых, что $B^+(z)$ имеет наименьший модуль по сравнению со всякой другой аналитической мажорантой $\tilde{B}(z)$ семейства $\{b^+(z)\}$. (По поводу существования и свойств аналитической мажоранты см. нашу работу [9]). В силу свойств функций $b^+(z)$, очевидно, следует:

$$B^+(z)\not\equiv 0,\quad |B^+(z)|\leqslant 1\quad \text{при}\quad |z|<1. \tag{8}$$

Нетрудно, пользуясь сделанными выше замечаниями, доказать следующее равенство, непосредственно определяющее $B^+(z)$ через числа $\{\alpha_{kj}\}$ таблицы (1):

$$\ln|B^+(z)|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ln|b_k^+(z)|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sum_j\ln\left|\frac{z-\alpha_{kj}^+}{1-z\bar{\alpha}_{kj}^+}\right|. \tag{9}$$

Функция $B^-(z)$ вводится аналогично: по числам $\{\alpha_{kj}^-\}$ при помощи построения последовательности $\{b_k^-(z)\}$ — произведений Бляшке для $|z|>1$ с нулями в точках α_{kj}^- из k-ой строки таблицы (1). Условие (5) позволяет заключить, что $B^-(z)$, будучи наилучшей аналитической мажорантой семейства предельных функций для подпоследовательностей $\{b_{k_l}^-(z)\}$, обязана быть аналитической и ограниченной в $|z|>1$ по модулю единицей функцией $\not\equiv 0$. Функция $B^-(z)$ определяется по числам таблицы (1) равенством:

$$\ln|B^-(z)|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ln|b_k^-(z)|=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sum_j\ln\left|\frac{z-\alpha_{kj}^-}{1-z\bar{\alpha}_{kj}^-}\right|. \tag{10}$$

Теорема 1. *Чтобы функция $F(e^{i\theta})\in L^p$, $p>1$, допускала аппроксимацию на $|z|=1$ в метрике L^p последовательностями рацио-*

нальных дробей $\{R_k(z)\}$ с заданными таблицей (1) полюсами $\{z_{kj}\}$, удовлетворяющими условию (5), необходимо и достаточно, чтобы $F(e^{i\theta})$ являлась одновременно угловыми граничными значениями мероморфных, соответственно, внутри и вне $|z|=1$, функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, имеющих в соответствующих областях ограниченные характеристики и таких, что их произведения $F^+(z)B^+(z)$ и $F^-(z)B^-(z)$ на ранее определенные нами функции $B^+(z)$ и $B^-(z)$ обязаны входить в классы H_p, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$.

Замечание. Условия совпадения почти всюду на $|z|=1$ функций $F(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})$ и $F(e^{i\theta})B^-(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями аналитических в $|z|<1$ и $|z|>1$ функций из классов H_p могут быть, в силу известных результатов о функциях классов H_p, выражены следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})e^{in\theta}\,d\theta=0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots, \tag{11}$$

$$\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})B^-(e^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta=0, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\cdots. \tag{12}$$

В самом деле, эти условия равносильны совпадению рассматриваемых функций с граничными значениями функций из H_1. Но, как известно, из вхождения в класс H_1 и суммируемости граничных значений в степени $p>1$ вытекает принадлежность соответствующих функций классам H_p.

Для доказательства нам понадобится одна лемма функционального анализа, являющаяся некоторым обобщением хорошо известного необходимого и достаточного условия для возможности приближения в банаховом пространстве X элемента x_0 последовательностью элементов $\{x_k\}$, принадлежащих заданному линейному многообразию (см., напр., [3]). В рассматриваемом нами случае последовательность $\{x_k\}$, аппроксимирующая элемент x_0, набирается не из одного и того же линейного многообразия, а из заранее заданной последовательности $\{X_k\}$ линейных многообразий, натянутых на простейшие рациональные дроби с полюсами в числах k-ой строки таблицы (1).

Лемма. *Для того чтобы элемент x_0 из сепарабельного банахова пространства X мог быть аппроксимирован последовательностью $\{x_k\}$ элементов, принадлежащих заданной последовательности линейных многообразий $\{X_k\}$, $X_k\subset X$:*

$$\lim_{k\to\infty}\|x_0-x_k\|=0, \quad \text{где} \quad x_k\in X_k, \quad k=1,\ 2,\cdots,$$

необходимо и достаточно, чтобы у всякой последовательности линейных функционалов $\{y_k(x)\}$, нормы которых равномерно ограничены: $\|y_k\|\leqslant C$, $k=1,\ 2,\cdots$, и для которых

$$y_k(x) = 0, \quad x \in X_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{13}$$

предельный функционал $y(x)$ для произвольной слабо сходящейся подпоследовательности $\{y_{k_l}(x)\}$ ($y(x) = \lim y_{k_l}(x)$ при любом $x \in X$) должен обращаться в нуль на элементе x_0.

Необходимость проверяется немедленно переходом к пределу при $k_l \to \infty$ в очевидном неравенстве:

$$|y_{k_l}(x_0)| = |y_{k_l}(x_0 - x_{k_l})| \leqslant \|y_{k_l}\| \cdot \|x_0 - x_{k_l}\|.$$

Доказательство достаточности можно легко провести методом от противного, используя хорошо известный факт существования функционалов $y_k^*(x)$ со свойствами $y_k^*(x_0) = 1$, $y_k^*(x) = 0$ при $x \in X_k$ и $\|y_k\| = \dfrac{1}{\rho_k}$, где $\rho_k = \inf\limits_{x \in X_k} \|x_0 - x\|$.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Начинаем с доказательства необходимости. Чтобы воспользоваться леммой, возьмем специальным образом построенные последовательности линейных функционалов $\{y_k(x)\}$, обращающихся в нуль на линейных многообразиях X_k, натянутых в нашем случае на элементы $\left\{1, \dfrac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{k1}}, \cdots\right\}$. Каждому из функционалов $y_k(x)$ пространства L^p будет соответствовать функция $g_k(\theta) \in L^q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. При этом

$$y_k(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, g_k(\theta)\, d\theta, \qquad \|y_k\| = \sqrt[q]{\int_0^{2\pi} |g_k(\theta)|^q d\theta}. \tag{14}$$

Покажем, что в качестве $\{g_k(\theta)\}$, порождающих последовательность линейных функционалов с требуемыми в лемме свойствами, можно брать $\{e^{i\theta} b_k^+(e^{i\theta})\}$. Здесь $b_k^+(e^{i\theta})$—граничные значения произведения Бляшке $b_k^+(z)$, нулями которого служат все числа α_{kj}^+ из k-ой строки таблицы (1). Как и для всякого произведения Бляшке $|b_k^+(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду на $|z| = 1$. Поэтому остается лишь убедиться, что каждый из функционалов

$$y_k^+(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{i\theta}\, b_k^+(e^{i\theta})\, d\theta \tag{15}$$

обращается в нуль на всех простейших дробях $\left\{1, \dfrac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{k1}}, \cdots\right\}$, порождающих линейное многообразие X_k. Убедимся теперь, что

$$y_k^+\left(\frac{1}{e^{i\theta} - \alpha_{kj}}\right) = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \frac{b_k^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta} - \alpha_{kj}} d\theta = 0. \tag{16}$$

В самом деле, функция $\frac{b_k^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\alpha_{kj}}$ является граничными значениями функции $\frac{b_k^+(z)}{z-\alpha_{kj}}$, которая аналитична в $|z|<1$. Аналитичность этой функции внутри $|z|<1$ в случае, когда $|\alpha_{kj}|>1$, очевидна; в случае же, когда $|\alpha_{kj}|<1$, достаточно заметить, что $b_k^+(z)$ будет обращаться в нуль в α_{kj}.

Теперь достаточно учесть, что если $f(z)$ аналитична и ограничена в $|z|<1$, то $\int\limits_0^{2\pi} e^{im\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta = 0$ при всех $m = 1, 2, \cdots$. Тем самым установлены равенства (16).

Приведенные рассуждения очевидным образом распространяются на случай кратных полюсов, соответствующих повторяющимся в строках таблицы (1) числам α_{kj}.

Выберем теперь из $\{y_k^+(x)\}$ какую-либо слабо сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_l}^+(x)\}$. Соответствующая этим функционалам последовательность $\{b_{k_l}^+(z)\}$ произведений Бляшке, граничные значения которых $b_{k_l}^+(e^{i\theta})$ фигурируют в определении $y_{k_l}^+(x)$, будет равномерно сходиться внутри $|z|<1$. Действительно, в силу слабой сходимости, существует $\lim y_{k_l}(x)$ при любой $x(\theta)\in L^p$. Взяв в качестве $x(\theta)$ функции $x(\theta)=\frac{1}{e^{i\theta}-z}$ с фиксированным z, $|z|<1$, убедимся, что будет существовать

$$\lim_{k_l\to\infty}\int\limits_0^{2\pi}\frac{b_{k_l}^+(e^{i\theta})\,d(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}, \qquad |z|<1.$$

Обозначим предельную функцию для подпоследовательности $\{b_{k_l}^+(z)\}$ через $b^+(z)$. Изложенные только что соображения показывают, что в представлении функционала $y^+(x)$, к которому слабо сходилась последовательность $\{y_{k_l}^+(x)\}$, будет участвовать функция $b^+(e^{i\theta})$ — граничные значения $b^+(z)=\lim b_{k_l}^+(z)$, $|z|<1$, (см. также [4] стр.171) т. е.

$$y^+(x) = \int\limits_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{i\theta} b^+(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{17}$$

Пусть теперь $F(e^{i\theta})$—какая-либо функция, допускающая аппроксимацию дробями в метрике L^p, $p>1$, с заданными таблицей (1) полюсами. Применяя тогда лемму, заключаем, что

$$y^+(F) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\, e^{i\theta}\, b^+(e^{i\theta})\, d\theta = 0.$$

Заметим теперь, что мы могли бы с самого начала брать в качестве последовательности функционалов, удовлетворяющих условиям леммы, последовательность $\{y^+_{k,m}(x)\}$ вида:

$$y^+_{k,m}(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{im\theta}\, b^+_k(e^{i\theta})\, d\theta. \tag{18}$$

Здесь m—фиксированное целое число $\geqslant 1$. Из слабой сходимости последовательности функционалов $\{y^+_{k_l}(x)\}$ вида (15) к функционалу $y^+(x)$, определяемому формулой (17), немедленно вытекает слабая сходимость $\{y^+_{k_l,m}(x)\}$. Причем предельным функционалом будет, очевидно, функционал

$$y^+_{[m]}(x) = \int_0^{2\pi} x(\theta)\, e^{im\theta}\, b^+(e^{i\theta})\, d\theta.$$

Но, по лемме, предельный функционал должен обращаться в нуль на элементе $F(e^{i\theta})$, допускающем аппроксимацию последовательностями элементов из заданных линейных многообразий. Откуда следует, что

$$y^+_{[m]}(F) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\, e^{im\theta}\, b^+(e^{i\theta})\, d\theta = 0, \quad m \geqslant 1. \tag{19}$$

Функция $F(e^{i\theta})\, b^+(e^{i\theta})$ входит, очевидно, в класс L^p, $p > 1$, ибо $|b^+(e^{i\theta})| \leqslant 1$ почти всюду на $|z| = 1$, а по условию, $F(e^{i\theta}) \in L^p$. Из обращения в нуль моментов (19) вытекает, как известно (см., напр., [4]), что $F(e^{i\theta})\, b^+(e^{i\theta})$—граничные значения функции класса H_1. Суммируемость этой функции в степени $p > 1$ дает теперь возможность заключить, что $F(e^{i\theta})\, b^+(e^{i\theta})$ является на самом деле угловыми граничными значениями функции класса H_p (см. там же).

Перед тем как формулировалась теорема, отмечалось существование равномерно сходящихся подпоследовательностей произведений Бляшке $\{b^+_{k_l}(z)\}$, предельные функции $b^+(z)$ которых $\not\equiv 0$ в $|z| < 1$. Очевидно, можно было с самого начала считать, что взятым слабо сходящимся подпоследовательностям функционалов $\{y^+_{k_l}(x)\}$ соответствуют произведения Бляшке $\{b^+_{k_l}(z)\}$, для которых $\lim b^+_{k_l}(z) = b^+(z) \not\equiv 0$. Учитывая теперь, что функцию

$$F(e^{i\theta}) = \frac{F(e^{i\theta})\, b^+(e^{i\theta})}{b^+(e^{i\theta})}$$

можно рассматривать как частное угловых граничных значений функции класса H_p и ограниченной в $|z|<1$ аналитической функции $b^+(z)\not\equiv 0$, заключаем о совпадении функции $F(e^{i\theta})$ почти всюду на $|z|=1$ с угловыми граничными значениями мероморфной в $|z|<1$ функции $F^+(z)$ с ограниченной характеристикой.

Остается проверить, что из вхождения функции $F(e^{i\theta})b^+(e^{i\theta})$ в класс H_p вытекает принадлежность классу H_p и произведения $F(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})$, где $B^+(e^{i\theta})$—угловые граничные значения функции $B^+(z)$—наилучшей аналитической мажоранты семейства всех предельных функций $\{b^+(z)\}$.

Суммируемость на $|z|=1$ функций $|F(e^{i\theta})|^p$ (по условию) и $\ln|F(e^{i\theta})|$ (вытекающая из того, что $F(e^{i\theta})$, по доказанному, является угловыми граничными значениями мероморфной функции ограниченного вида) дает возможность построить функцию

$$D(z)=\exp\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln|F(e^{i\theta})|\,d\theta \tag{20}$$

Функция $D(z)$ будет по теореме Сеге входить в класс H_p (см., напр., [4]).

Из выполнения неравенства $|F(e^{i\theta})b^+(e^{i\theta})|\leqslant|F(e^{i\theta})|$ почти всюду на $|z|=1$ вытекает, в силу хорошо известного свойства класса H_p, что аналитические в $|z|<1$ функции $F^+(z)b^+(z)$ класса H_p с угловыми граничными значениями $F(e^{i\theta})b^+(e^{i\theta})$ не превосходят по модулю функции „максимального модуля“ $D(z)$:

$$|F^+(z)b^+(z)|\leqslant|D(z)|,\quad |z|<1. \tag{21}$$

Это означает, что $D(z)$ является аналитической мажорантой семейства функций $\{F^+(z)b^+(z)\}$, получающихся умножением $F^+(z)$ на всевозможные предельные функции $b^+(z)$ равномерно сходящихся подпоследовательностей, выбранных из $\{b_k^+(z)\}$. Но тогда, учитывая (21), получаем, что произведение $F^+(z)B^+(z)$, которое, очевидно, будет наилучшей аналитической мажорантой семейства $\{F^+(z)b^+(z)\}$, удовлетворяет неравенству:

$$|F^+(z)B^+(z)|\leqslant|D(z)|,\qquad |z|<1.$$

Отсюда, используя включение $D(z)\in H_p$, следует принадлежность $F^+(z)B^+(z)$ классу H_p. Это в сущности завершает доказательство необходимости. Действительно, проверка вхождения $F^-(z)B^-(z)$ в класс H_p в $|z|>1$ проводится применением леммы к последовательности $\{y_k^-(x)\}$, построенной с помощью $\{b_k^-(z)\}$ совершенно аналогично.

Доказательство достаточности. В силу леммы, нам достаточно показать, что на функции $F(e^{i\theta})$, удовлетворяющей условию теоремы, будет обращаться в нуль всякий функционал $y(x)$:

$$y(x)=\int_0^{2\pi} x(\theta)\,g(\theta)\,d\theta, \quad \text{где} \quad g(\theta)\in L^q, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{22}$$

Этот функционал является пределом слабо сходящейся последовательности функционалов $\{y_{k_l}(x)\}$, обращающихся в нуль на функциях системы

$$\left\{1,\ \frac{1}{e^{i\theta}-\alpha_{k_l j}}\right\}, \quad j=1,\cdots,N_{k_l}, \quad l=1,\ 2,\cdots. \tag{23}$$

Используя хорошо известную форму линейных функционалов в L^p:

$$y_k(x)=\int_0^{2\pi} x(\theta)\,g_k(\theta)\,d\theta, \qquad g_k(\theta)\in L^q, \tag{24}$$

запишем условия обращения в нуль наших функционалов на функциях системы (23)

$$\int_0^{2\pi} g_k(\theta)\,d\theta=0, \qquad \int_0^{2\pi}\frac{g_k(\theta)}{e^{i\theta}-\alpha_{kj}}\,d\theta=0, \qquad j=1,\cdots,N_k,$$

$$k=1,\ 2,\cdots. \tag{25}$$

Введем теперь интегралы типа Коши-Лебега

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g_k(\theta)\,d\theta}{e^{i\theta}-z}, \qquad \Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\theta)\,d\theta}{e^{i\theta}-z}. \tag{26}$$

Условия (25) обращения в нуль функционалов на функциях системы (23) означают наличие нулей в соответствующих точках у интегралов типа Коши. Будем в дальнейшем использовать для определяемых интегралами типа Коши (26) аналитических внутри и вне $|z|=1$ функций дополнительные индексы $+$ и $-$. Тогда из (25) имеем:

$$\Phi_k^+(\alpha_{kj}^+)=0, \quad \Phi_k^-(\alpha_{kj}^-)=0, \quad j=1,\cdots,N_k, \ k=1,\ 2,\cdots. \tag{27}$$

Нормы $\{\|y_{k_l}\|\}$ слабо сходящейся последовательности $\{y_{k_l}(x)\}$ линейных функционалов равномерно ограничены. Поэтому

$$\int_0^{2\pi}|g_{k_l}(\theta)|^q\,d\theta\leqslant C, \qquad l=1,\ 2,\cdots. \tag{28}$$

Применим теперь к последовательности $\{e^{-i\theta}g_{k_l}(\theta)\}$ теорему Рисса, утверждающую, что если функция $f=\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{in\theta}\in L^p$, $p>1$, то ряд

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ является рядом Фурье функции $f^+ \in L^p$ и $\|f^+\|_p \leqslant K_p \|f\|_p$, где K_p—постоянная, зависящая только от p, но не зависящая от f (см., напр., [2], стр. 125). Опираясь на (28), получаем тогда, что $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ и $\{\Phi^-_{k_l}(z)\}$ являются последовательностями функций, аналитических, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$ с равномерно ограниченными H_q нормами:

$$\|\Phi^+_{k_l}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \qquad \|\Phi^-_{k_l}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_2 \tag{29}$$

$$(l = 1, 2, \cdots).$$

Подобные оценки имеют место и для аналитических функций $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, соответствующих предельному функционалу. Из слабой сходимости последовательности $\{y_{k_l}(x)\}$ к $y(x)$ следует равномерная сходимость внутри $|z|<1$ последовательности $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ к $\Phi^+(z)$ и равномерная сходимость внутри $|z|>1$ последовательности $\{\Phi^-_{k_l}(z)\}$ к $\Phi^-(z)$. Используя хорошо известное свойство интеграла типа Коши-Лебега

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}[e^{-i\theta}g(\theta)]}{e^{i\theta}-z}\,d\theta = \begin{cases} \Phi^+(z), & |z|<1, \\ \Phi^-(z), & |z|>1, \end{cases}$$

получаем, что

$$e^{-i\theta}g(\theta) = \Phi^+(e^{i\theta}) - \Phi^-(e^{i\theta}) \text{ почти всюду на } |z| = 1.$$

Теперь интересующее нас значение функционала $y(F)$ можно выразить следующим образом:

$$y(F) = \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})\,g(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})\,d\theta - \int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})\,d\theta. \tag{30}$$

Мы докажем, что каждый из интегралов в правой части (30) обращается в нуль, что, в силу леммы, достаточно для завершения доказательства теоремы. Вначале рассмотрим $\int_0^{2\pi} e^{i\theta}F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})\,d\theta$. Нам понадобится дополнительная информация о свойствах $F(e^{i\theta})\,\Phi^+(e^{i\theta})$. Ранее уже отмечалось, что $\Phi^+(e^{i\theta})$ является угловыми граничными значениями функции $\Phi^+(z) \in H_q$. В дополнение к этому установим возможность представления функции $\Phi^+(z)$ в виде

$$\Phi^+(z) = b^+(z)\,\varphi^+(z), \quad |b^+(z)| \leqslant 1 \quad \text{при } |z|<1, \ \varphi^+(z) \in H_q. \tag{31}$$

Здесь $b^+(z) = \lim_{k_m\to\infty} b^+_{k_m}(z)$ — предельная функция какой-либо равно-

мерно сходящейся подпоследовательности, выбранной из $\{b^+_{k_l}(z)\}$. Для этого воспользуемся следующим представлением функций $\Phi^+_{k_l}(z)$, входящих, как уже отмечалось, в класс H_q.

$$\Phi^+_{k_l}(z) = b^+_{k_l}(z)\varphi^+_{k_l}(z), \quad |b^+_{k_l}(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad |z| < 1, \quad \|\varphi^+_{k_l}\|_{H_q} \leqslant C_1. \tag{32}$$

В этом представлении $b^+_{k_l}(z)$—произведения Бляшке с нулями в точках $\{\alpha^+_{k_l j}\}$, являющимися, в силу (27), нулями функций $\Phi^+_{k_l}(z)$. Из равномерной ограниченности норм в пространстве H_q функций $\{\Phi^+_{k_l}(z)\}$ (см. (29)) и свойств произведений Бляшке иметь почти всюду на $|z|=1$ модуль граничных значений равный единице: $|b^+_{k_l}(e^{i\theta})| = 1$ следует принадлежность функций $\{\varphi^+_{k_l}(z)\}$ классу H_q и отмеченная в (32) равномерная оценка для норм в H_q этих функций. Перейдем теперь к рассмотрению подпоследовательности $\{\Phi^+_{k_m}(z)\}$, для которой равномерно бы сходились внутри $|z|<1$ последовательности $\{b^+_{k_m}(z)\}$ и $\{\varphi^+_{k_m}(z)\}$, образованные, соответственно, из первых и вторых множителей в представлении (32). Обозначим:

$$b^+(z) = \lim b^+_{k_m}(z), \quad \varphi^+(z) = \lim \varphi^+_{k_m}(z). \tag{33}$$

Переходя к пределу при $k_m \to \infty$ при фиксированном $|z| = r < 1$, получаем, опираясь на (32), равенство (31). В самом деле, по хорошо известному свойству функций класса H_q имеем:

$$\|\varphi^+_{k_m}(re^{i\theta})\|_q \leqslant \|\varphi^+_{k_m}(e^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \quad 0 < r < 1.$$

Откуда, устремляя $k_m \to \infty$, имеем:

$$\|\varphi^+(re^{i\theta})\|_q \leqslant C_1, \quad 0 < r < 1.$$

что и доказывает включение $\varphi^+(z) \in H_q$. Теперь мы можем установить обращение в нуль первого интеграла в правой части (30). Чтобы убедиться в отмеченном свойстве, представим, опираясь на (31), стоящую под первым интегралом функцию следующим образом:

$$F(e^{i\theta})\Phi^+(e^{i\theta}) = [F(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})]\varphi^+(e^{i\theta})\left[\frac{b^+(e^{i\theta})}{B^+(e^{i\theta})}\right]. \tag{34}$$

Равенство

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\Phi^+(e^{i\theta})\,d\theta = 0$$

будет немедленным следствием совпадения функции $F(e^{i\theta})\Phi^+(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями функции класса H_1.

По условию теоремы, первый из множителей в правой части (34) $F(e^{i\theta})B^{+}(e^{i\theta})$ является граничными значениями функции класса H_p. Функция $\frac{b^{+}(e^{i\theta})}{B^{+}(e^{i\theta})}$ является угловыми граничными значениями функции $\frac{b^{+}(z)}{B^{+}(z)}$, которая аналитична и ограничена в $|z|<1$. Наконец, $\varphi^{+}(e^{i\theta})$— угловые граничные значения функции $\varphi^{+}(z)\in H_q$ (см. (31)). Учитывая, что произведение двух аналитических функций $f(z)\in H_p$ и $\varphi(z)\in H_q$ в случае, когда $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ принадлежит классу H_1, а умножение на ограниченную аналитическую функцию не выводит из этого класса, заключаем о совпадении почти всюду на $|z|=1$ функции (34) с угловыми граничными значениями аналитической в $|z|<1$ функции класса H_1. Теперь достаточно воспользоваться хорошо известным свойством класса H_1:

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta})\,d\theta=0,\quad n=1,\,2,\cdots,\quad f\in H_1.$$

Применяя этот факт при $n=1$ к функции $F(e^{i\theta})\Phi^{+}(e^{i\theta})\in H_1$, получаем:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\,\Phi^{+}(e^{i\theta})\,d\theta=0. \tag{35}$$

Равенство нулю второго интеграла в правой части (30) проверяется аналогично. Но в этом случае, кроме доказательства совпадения функции $F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})$ с угловыми граничными значениями аналитической в $|z|>1$ функции класса H_1, мы должны еще убедиться, что рассматриваемая функция имеет в $z=\infty$ нуль по крайней мере второго порядка. Если это будет показано, то, используя выражения коэффициента при $\frac{1}{z}$ в разложении функции $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\frac{F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-z}\,d\theta$ по отрицательным степеням z, будем иметь:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta} F(e^{i\theta})\,\Phi^{-}(e^{i\theta})\,d\theta=0. \tag{36}$$

Существование в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у рассматриваемой функции вытекает из наличия в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у функции $\varphi^{-}(z)$ и аналогичного (34) представления $F(e^{i\theta})\Phi^{-}(e^{i\theta})$ в виде произведения

$$F(e^{i\theta})\,\Phi^{-}(e^{i\theta})=[F(e^{i\theta})\,B^{-}(e^{i\theta})]\cdot\left[\frac{b^{-}(e^{i\theta})}{B^{-}(e^{i\theta})}\right]\varphi^{-}(e^{i\theta}). \tag{37}$$

В соответствии с представлением (37) мы заключаем, что $F(e^{i\theta})\,\Phi^-(e^{i\theta})$ можно рассматривать как граничные значения произведения трех аналитических в $|z|>1$ функций: $F^-(z)\,B^-(z)$ (аналитична по условию), $\frac{b^-(z)}{B^-(z)}$ (аналитична согласно определению $B^-(z)$) и $\varphi^-(z)$ (аналитична в силу тех же соображений, что и для $\varphi^+(z)$).

Теперь достаточно проверить, что один из множителей, а именно: $\varphi^-(z)$, имеет в бесконечности нуль по крайней мере второго порядка. Вначале установим подобный факт для функций $\Phi^-_{k_l}(z)$. Функции

$$\Phi^-_{k_l}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g_{k_l}(\theta)\,d\theta}{e^{i\theta}-z},\qquad |z|>1,$$

обращающиеся при $z=\infty$ в нуль, имеют в разложении по отрицательным степеням z при $\frac{1}{z}$ коэффициенты, равные $-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0$, в силу условий (25).

Существование нуля по крайней мере второго порядка в $z=\infty$ у функций $\Phi^-_{k_l}(z)$ дает возможность установить аналогичное свойство для функций $\varphi^-_{k_l}(z)$. В самом деле, $\Phi^-_{k_l}(z)=b^-_{k_l}(z)\,\varphi^-_{k_l}(z)$, причем по определению $b^-_{k_l}(z)$—произведение Бляшке с нулями в точках $\{\alpha^-_{k_l j}\}$. В случае, когда среди чисел $\{\alpha^-_{k_l j}\}$ в k_l-ой строке нет равных ∞, наше утверждение очевидно. Пусть теперь в k_l-ой строке было m чисел, равных ∞. Тогда, используя обращение в нуль функционалов $y_{k_l}(x)$ на соответствующих элементах $z,\cdots,z^m$

$$\int\limits_0^{2\pi}e^{i\theta}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0,\cdots,\int\limits_0^{2\pi}e^{im\theta}g_{k_l}(\theta)\,d\theta=0,$$

заключаем о существовании в $z=\infty$ у функции $\Phi^-_{k_l}(z)$ нуля по крайней мере $m+2$ порядка. Но $b^-_{k_l}(z)$ будет иметь в $z=\infty$ нуль m-го порядка. Далее, можно воспользоваться тем, что $\varphi^-_{k_l}(z)=\frac{\Phi^-_{k_l}(z)}{b^-_{k_l}(z)}$, чтобы установить наличие в $z=\infty$ нуля по крайней мере второго порядка у функций $\varphi^-_{k_l}(z)$. Из предельного равенства $\varphi^-(z)=\lim\varphi^-_{k_l}(z)$ вытекает аналогичное свойство функции $\varphi^-(z)$, достаточное для заключения об обращении в нуль интеграла (36). Тем самым установлено, в силу (35) и (30), равенство $y(F)=0$ и завершено доказательство теоремы.

Примененный при доказательстве теоремы метод позволяет установить необходимые условия для функций, допускающих приближение рациональными дробями в более общих пространствах, чем рассматривавшиеся в теореме 1.

Теорема 2. *Пусть для функции $F(e^{i\theta})$ найдется последовательность рациональных дробей $\{R_k(z)\}$ такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})|^p\,d\sigma(\theta)=0, \tag{38}$$

где $\sigma(\theta)$—неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция с

$$\int_0^{2\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty, \tag{39}$$

$p\geqslant 1$, а полюса $\{R_k(z)\}$, расположенные внутри $|z|<1$, принадлежат таблице $\{\alpha_{kj}^+\}$ чисел с условием

$$\varliminf_{k\to\infty}\sum_j(1-|\alpha_{kj}^+|)<\infty. \tag{40}$$

Тогда функция $F(e^{i\theta})$ совпадает с угловыми граничными значениями мероморфной в $|z|<1$ функции $F^+(z)$ с ограниченной характеристикой и такой, что произведение

$$F^+(z)\,B^+(z)\,\Omega^+(z)\in H_p,\qquad |z|<1.$$

Здесь $B^+(z)$—функция, определявшаяся при формулировке теоремы 1 (см. (9)); $\Omega^+(z)$—аналитическая в $|z|<1$ функция, заданная формулой

$$\Omega(z)=\exp\frac{1}{2\pi p}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta. \tag{41}$$

(Из определения следует, что $\Omega^+(z)$ также $\in H_p$.)

Доказательство. Из (38), учитывая, что $|\Omega^+(e^{i\theta})|=\sqrt[p]{\sigma'(\theta)}$ имеем:

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})|^p\,\sigma'(\theta)\,d\theta=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi}|F(e^{i\theta})\,\Omega^+(e^{i\theta})-R_k(e^{i\theta})\,\Omega^+(e^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

Далее, слово в слово повторяем доказательство необходимости в теореме 1, взяв в качестве последовательности линейных многообразий—

линейные многообразия, натягиваемые на $\left\{\Omega^+(e^{i\theta}), \frac{\Omega^+(e^{i\theta})}{e^{i\theta}-\alpha_{kj}}\right\}$, $j=1,\cdots$ $\cdots, N_k$. Нетрудно убедиться, что та же самая последовательность функционалов $\{y_k^+(x)\}$ удовлетворяет всем условиям леммы. В результате применения леммы к функции $F(e^{i\theta})\Omega^+(e^{i\theta})$ мы покажем, что произведение $F(e^{i\theta})\Omega^+(e^{i\theta})B^+(e^{i\theta})$ является граничным значением функции класса H_p.

Замечание. Утверждаемый теоремой 2 факт был доказан нами не только при $p\geqslant 1$, но и при всех $p>0$ (см. [6]). В этом случае мы не можем уже воспользоваться леммой, так как пространства L_σ^p, $0<p<1$, уже не являются банаховыми. Метод, позволяющий обосновать справедливость теоремы при любом $p>0$, основан на использовании наших результатов о сходимости последовательностей мероморфных функций.

Соответствующие результаты были установлены нами в связи с получением необходимых и достаточных условий для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимацию в пространствах L_σ^p, $p>0$, в случае, когда таблица $\{\alpha_{kj}\}$, задающая расположение полюсов, удовлетворяет условию (4).

Из теоремы 2 немедленно выводится следствие, распространяющее обоснованные теоремой 1, необходимые условия для функций $F(e^{i\theta})$, допускающих аппроксимации в L^p, $p>1$, рациональными дробями с полюсами, удовлетворяющими условию (5), на приближение в более общих метриках L_σ^p, в которых для $\sigma(\theta)$ выполняется (39).

Теорема 3. *Пусть для $\sigma(\theta)$ найдется последовательность рациональных дробей $\{R_k(z)\}$, удовлетворяющая* (38), *где для $\sigma(\theta)$ выполняется* (39). *Если при этом таблица $\{\alpha_{kj}\}$, задающая расположение полюсов аппроксимирующих дробей, такова, что*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_j(1-|\alpha_{kj}^+|)<\infty,\quad \lim_{k\to\infty}\sum_j\left(1-\frac{1}{|\alpha_{kj}^-|}\right)<\infty,$$

то $F(e^{i\theta})$ является одновременно угловыми граничными значениями функций $F^+(z)$ и $F^-(z)$, мероморфных и имеющих ограниченные характеристики, соответственно, в областях $|z|<1$ и $|z|>1$, и таких, что произведения

$$F^+(z)\,\Omega^+(z)\,B^+(z)\in H_p \quad \text{в} \quad |z|<1,$$

$$F^-(z)\,\Omega^-(z)\,B^-(z)\in H_p \quad \text{в} \quad |z|>1.$$

Здесь $B^+(z)$ и $B^-(z)$—те же самые, что и в теореме 1, а $\Omega^+(z)$ и $\Omega^-(z)$—аналитические, соответственно, в $|z|<1$ и $|z|>1$ функции, определенные формулой (41).

Пока остается открытым вопрос об исчерпывающей характеристике тех, рассматриваемых в теореме 3 пространств, в которых со-

ответствующие условия будут также и достаточными. Последнее сделано в теореме 1 при весьма сильных дополнительных ограничениях: $p > 1$, $d\sigma(\theta) \equiv d\theta$.

Московский геологоразведочный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 18. I. 1966

Գ. Ց. ՏՈՒՄԱՐԿԻՆ

ՖԻՔՍՎԱԾ ԲԵՎԵՌՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿՈՏՈՐԱԿՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿՎՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԻ ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $|z| = 1$ շրջանագծի վրա տրված $F(z)$ ֆունկցիաների մոտարկման պրոբլեմը $\{R_k(z)\}$ ռացիոնալ ֆունկցիաներով, որոնց բևեռները կարող են գտնվել միայն տված $\{\alpha_{kj}\}$ $k = 1, 2, \cdots$ $\cdots; j = 1, 2, \cdots)$ աղյուսակի կետերում։ Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ $\{\alpha_{kj}\}$ կետերը բավարարում են $\varliminf_{k\to\infty} \sum_j (1 - |\alpha_{kj}^+|) < \infty$; $\varliminf_{k\to\infty} \sum_j \left(1 - \frac{1}{|\alpha_{kj}^-|}\right) < \infty$ պայմաններին, որտեղ α_{kj}^+-ները այն α_{kj} կետերն են, որոնց համար $|\alpha_{kj}| < 1$, իսկ α_{kj}^--ների համար՝ $|\alpha_{kj}^-| > 1$։

1 թեորեմում տրվում են $|z| = 1$ շրջանագծի վրա L_p $(p > 1)$ մետրիկայում ֆունկցիայի ռացիոնալ ֆունկցիաներով մոտարկման անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։ 2 և 3 թեորեմներում մոտարկման անհրաժեշտ պայմանները տարածվում են ավելի ընդհանուր՝ L_σ^p տարածությունների վրա այն ենթադրությամբ, որ $\sigma(\theta)$ ֆունկցիան բավարարում է $\int_0^{2\pi} \ln \sigma'(\theta)\, d\theta > -\infty$ պայմանին։

G. C. TUMARKIN

THE DESCRIPTION OF THE CLASS OF FUNCTIONS WHICH CAN BE APPROXIMATED BY RATIONAL FUNCTIONS WITH PREASSIGNED POLES

Summary

We study the problem of approximating the functions $F(z)$ on $|z| = 1$ by rational functions $\{R_k(z)\}$, whose poles may lie only at preassigned points $\alpha_{k1}, \cdots, \alpha_{kj}, \cdots$ $(k = 1, 2, \cdots)$. In this paper we consider the case when the points $\{\alpha_{kj}\}$ satisfy the conditions

$\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(j)}(1-|\alpha_{kj}^{+}|)<\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{(j)}\left(1-\frac{1}{|\alpha_{kj}^{-}|}\right)<\infty$ where we mark α_{kj} by α_{kj}^{+} when $|\alpha_{kj}|<1$ and by α_{kj}^{-} when $|\alpha_{kj}|>1$.

In theorem I we give necessary and sufficient conditions so that the function $F(z)$ might be approximated on $|z|=1$ in the sense of L^p, $p>1$, by rational functions with poles at $\{\alpha_{kj}\}$. In theorems 2 and 3 we extend the necessary conditions to approximation in the sense of L_σ^p under the condition that $\int\limits_0^{2\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta>-\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации, Москва, Изд. Наука, 1965.
2. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, Москва, Изд. ин. лит., 1963.
3. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, Москва, Гостехиздат, 1951.
4. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, Москва, Гостехиздат, 1951.
5. *Г. Ц. Тумаркин.* Приближение функций рациональными дробями с заранее заданными полюсами, ДАН СССР, 98, № 6, 1954, 909—912.
6. *Г. Ц. Тумаркин.* Граничные свойства последовательностей аналитических функций, Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, Ленинград, 1961.
7. *Г. Ц. Тумаркин.* Последовательности произведений Бляшке, ДАН СССР, 129, № 1, 1959, 40—43.
8. *Г. Ц. Тумаркин.* Сходящиеся последовательности произведений Бляшке, Сибирский математический журнал, 5, № 1, 1964, 201—233.
9. *Г. Ц. Тумаркин.* Условия существования аналитической мажоранты семейства аналитичесиих функций, Известия АН АрмССР, XVII, № 6, 1964, 3—25.
10. *Дж. Л. Уолш.* Интерполяция рациональными функциями в комплексной области, Москва, Изд. ин. лит., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ*

§ 3. Формула типа Кристоффеля. Рекуррентные формулы

3.1. Согласно лемме 5, для ядер

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\zeta)}\, \varphi_k(z) \quad (n \geqslant 0) \tag{3.1}$$

системы Мальмквиста справедливо представление:

$$S_n(\zeta; z) = \frac{1 - \overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z)}{1 - \bar{\zeta} z}. \tag{3.2}$$

Преобразуем правую часть формулы (3.2). С этой целью заметим сначала, что

$$\varphi_{n+1}(z) = \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_{n+1} z} \prod_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} =$$

$$= \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_{n+1} z} B_{n+1}(z) = \frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}} \frac{(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{\alpha_{n+1} - z} B_{n+2}(z).$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$\overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z) = \frac{(1 - \alpha_{n+1}\bar{\zeta})\,(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}\, \varphi_{n+1}(z) \tag{3.3}$$

и, во-вторых, так как

$$\overline{B}_{n+2}\left(\frac{1}{z}\right) = B_{n+2}^{-1}(z),$$

то

$$1 = \frac{(1 - \alpha_{n+1}\bar{\zeta})\,(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \left\{ \overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta} \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right\} \frac{B_{n+2}(z)}{z} \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.4}$$

Подставляя значения (3.3) и (3.4) в правую часть формулы (3.2), будем иметь:

---

* Окончание. Начало статьи см. в № 1, 1966 г.

$$S_n(\zeta; z) = \frac{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}{1-|\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta} - \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\left[\frac{B_{n+2}(z)}{z} - \bar{\varphi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right] - \overline{\varphi_{n+1}(\zeta)}\,\varphi_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \qquad (3.5)$$

3.2. Докажем теперь, что формула (3.5) остается справедливой и для ядер $S_n(\zeta; z)$ произвольного распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Теорема 2. *При любом $n \geqslant 0$, z и ζ для ядра $S_n(\zeta; z)$ любого распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ справедлива формула:*

$$S_n(\zeta; z) = \frac{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}{1-|\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta} - \bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Заметим сначала, что, в силу формулы (2.40),

$$\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = -\{k_{n+1}\varphi_0^{(n+1)}(z) + \cdots + \bar{l}_{n+1}\varphi_{n+1}^{(n+1)}(z)\}, \qquad (3.7)$$

где $\{\varphi_k^{(n+1)}(z)\}_0^{n+1}$ есть система Мальмквиста, ассоциированная с упорядоченной группой чисел $\{\alpha_{n+1}, \alpha_n, \cdots, \alpha_0\}$.

Из (3.7), ввиду определения системы функций $\{\varphi_k^{(n+1)}(z)\}_0^{n+1}$ (см. формулы (2.21)), очевидно, вытекает, что рациональная функция

$$\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)$$

имеет полюсы лишь для значений $z = 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n+1)$, лежащих вне единичного круга.

Обозначая

$$U_n(\zeta; z) = \overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)}\,(1-\bar{\alpha}_{n+1}z) \times$$

$$\times \left\{\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta} - \Phi_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\left[\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z)\right]\right\}, \qquad (3.8)$$

можем утверждать, что рациональная функция $U_n(\zeta; z)$ непрерывна на единичной окружности $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$, если на параметр ζ наложить ограничения:

$$|\zeta| \neq 1 \quad \zeta \neq 1/\bar{\alpha}_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n). \qquad (3.9)$$

В предположении (3.9) обозначим, далее;

$$V_n(\zeta; g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; g)}{1-\zeta z} g(z)\, d\alpha(x), \quad z = e^{ix}, \tag{3.10}$$

где

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(z) \tag{3.11}$$

—произвольный „полином порядка n" от функций Мальмквиста.

Однако, при $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ справедливо тождество:

$$\overline{g(z)} = \frac{\overline{g(\zeta)}}{1-\bar{\zeta} z} + \left\{\frac{\overline{g(z)-g(\zeta)}}{z-\zeta}\right\}\bar{z},$$

откуда для функций $V_n(\zeta; g)$ получим представление:

$$V_n(\zeta; g) = \overline{g(\zeta)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{1-\zeta z}\, d\alpha(x) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U_n(\zeta; z)\left\{\frac{\overline{g(z)-g(\zeta)}}{z-\zeta}\right\}\bar{z}\, d\alpha(x) \equiv V_n^{(1)}(\zeta; g) + V_n^{(2)}(\zeta; g). \tag{3.10'}$$

Отсюда, во-первых, видно, что

$$V_n^{(1)}(\zeta; g) = C_n^{(1)}(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}, \tag{3.12}$$

где $C_n^{(1)}(\zeta)$ не зависит от функции $g(\zeta)$*. Далее, ввиду определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ имеем:

$$V_n^{(2)}(\zeta; g) = \left\{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\Phi_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\left\{\frac{\overline{g(z)}-\overline{g(\zeta)}}{z-\zeta}\right\}d\alpha(x) -$$

$$-\left\{\overline{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\Phi_{n+1}(\zeta)}\right\}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\left\{\overline{(z-\alpha_{n+1})\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}}\right\}d\alpha(x) \equiv$$

$$\equiv V_n^{(3)}(\zeta; g) + V_n^{(4)}(\zeta; g). \tag{3.13}$$

Ради упрощения дальнейших этапов доказательства на время будем полагать, что в группе $\{\alpha_k\}_0^n$ все числа отличны друг от друга и от нуля.

При этом предположении из (3.11) следует, что функции $g(z)$ представляются в виде

---

* В дальнейшем такого рода функции от ζ будут обозначены через $C_n^{(j)}(\zeta)$ $(j = 1, 2, \cdots)$.

$$g(z)=\frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.14}$$

где $P_n(z)$—обычный полином степени не выше, чем n.

Полагая вновь, что параметр ζ удовлетворяет условию (3.9), из представления (3.14) будем иметь:

$$\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{P_n(z)\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)-P_n(\zeta)\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}{(z-\zeta)\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}, \tag{3.15}$$

причем, очевидно, что числитель дроби, стоящей справа, без остатка делится на $z-\zeta$.

Однако, при нашем предположении о совокупности чисел $\{\alpha_k\}_0^n$ числитель дроби (3.15) есть полином степени $n+1$ от z вида

$$\left[(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\bar{\alpha}_k\right]P_n(\zeta)\,z^{n+1}+b_n z^n+\cdots+b_0.$$

Поэтому, разделив его на $z-\zeta$, из (3.14′) будем иметь:

$$\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=\frac{Q_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}, \tag{3.16}$$

где $Q_n(z)$—полином степени n вида

$$Q_n(z)=\left[(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\bar{\alpha}_k\right]P_n(\zeta)\,z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_0. \tag{3.16′}$$

Из (3.16) и (3.16′) следует, что

$$(z-\alpha_{n+1})\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}=-\frac{P_n(\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)}+\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.17}$$

где $\Omega_n(z,\zeta)$—некоторый полином от z степени не выше, чем n.

Заметим теперь, что правильная рациональная дробь

$$\Omega_n(z;\zeta)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)^{-1}$$

разлагается на простые дроби вида

$$\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k(\zeta)}{1-\bar{\alpha}_k z}. \tag{3.18}$$

С другой стороны, система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^n$ представляет собой результат ортогонализации упорядоченной системы функций $\left\{\frac{1}{1-\bar{\alpha}_k z}\right\}_0^n$ на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$. Поэтому, очевидно, что вместе с (3.18) справедливо также представление:

$$\frac{\Omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)} = \sum_{k=0}^{n} B_k(\zeta)\,\Phi_k(z). \tag{3.18'}$$

Из (3.14), (3.18′) и (3.17), наконец, следует представление:

$$(z-\alpha_{n+1})\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = -g(\zeta) + \sum_{k=0}^{n} B_k(\zeta)\,\Phi_k(z). \tag{3.17'}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\overline{\Phi_k(z)}\,d\alpha(x) = 0 \qquad (k=0,\,1,\cdots,\,n),$$

то, подставляя значение (3.17′) в выражение для функции $V_n^{(4)}(\zeta;g)$, получим:

$$V_n^{(4)}(\zeta;g) = \overline{g(\zeta)}\;\overline{\{(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)\,\Phi_{n+1}(\zeta)\}}\;\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{n+1}(z)\,d\alpha(x).$$

Итак, имеем:

$$V_n^{(4)}(\zeta;g) = C_n^{(2)}(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}. \tag{3.19}$$

Займемся, наконец, функцией $V_n^{(3)}(\zeta;g)$.

С этой целью сначала заметим, что при $z=e^{ix}$

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{B_{n+2}(z)}{z} = -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}\,(1-\alpha_{n+1}\bar{z})\,B_{n+2}(z),$$

откуда следует, что

$$V_n^{(3)}(\zeta;g) = C_n^{(3)}(\zeta)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\Phi_{n+1}(z)}\,B_{n+2}(z)\,\bar{z}\,\times$$

$$\times\left\{(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\right\}d\alpha(x). \tag{3.20}$$

Однако, из (3.16) и (3.16′) имеем:

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta} = \bar{\alpha}_{n+1}\,\frac{P_n(\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k\zeta)} + \frac{\omega_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

где $\omega_n(z;\zeta)$—полином от z степени не выше, чем n.

Поэтому, с учетом (3.14), при $z = e^{ix}$ мы имеем:

$$\left\{(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\frac{g(z)-g(\zeta)}{z-\zeta}\right\} = \alpha_{n+1}\overline{g(\zeta)} - \frac{z r_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k - z)}, \qquad (3.21)$$

где $r_n(z;\zeta) = (-1)^{n+1} z^n \bar{\omega}_n\left(\frac{1}{z};\bar{\zeta}\right)$ есть полином от z степени не выше, чем n.

Подставляя значение (3.21) в интеграл (3.20), получим:

$$V_n^{(3)}(\zeta; g) = C_n^{(4)}(\zeta)\overline{g(\zeta)} +$$

$$+ C_n^{(3)}(\zeta)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\overline{\Phi_{n+1}(z)}\,B_{n+1}(z)\frac{r_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k - z)}\,d\alpha(x). \qquad (3.22)$$

Далее, очевидно, что

$$B_{n+1}(z)\frac{r_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\alpha_k - z)} = \frac{\gamma_n(z;\zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

где $\gamma_n(z;\zeta)$—полином степени не выше, чем n относительно z.

Поэтому имеем представление:

$$V_n^{(3)}(\zeta; g) = C_n^{(4)}(\zeta)\overline{g(\zeta)}. \qquad (3.23)$$

Наконец, принимая во внимание формулы (3.10′) и (3.13), в силу (3.12), (3.19) и (3.23), окончательно получим:

$$V_n(\zeta; g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta}z}\overline{g(z)}\,d\alpha(x) = C_n(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}, \qquad (3.24)$$

где функция $C_n(\zeta)$ конечна для значений параметра ζ, удовлетворяющих условиям (3.9), и не зависит от функции $g(\zeta)$.

Докажем теперь, что $C_n(\zeta) \not\equiv 0$.

С этой целью отметим сначала, что

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\,\Phi_{n+1}(z) = \frac{\tau_{n+1}(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}$$

и

$$(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\varkappa_{n+1}(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

в результате чего имеем представление:

$$U_n(\zeta; z) = \frac{u_{n+1}(z; \zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{3.25}$$

где $\tau_{n+1}(z)$, $\varkappa_{n+1}(z)$ и $u_{n+1}(z; \zeta)$ суть полиномы от z степени не выше, чем $n+1$.

С другой стороны, так как

$$\overline{B_{n+2}(\zeta)}\, B_{n+2}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \equiv 1,$$

то из определения (3.8) самой функции $U_n(\zeta; z)$ следует, что $U_n\left(\zeta; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \equiv 0$.

Это значит, что при любом ζ рациональная дробь (3.25) без остатка делится на $1-\bar{\zeta} z$, поэтому будем иметь:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z} = \frac{v_n(z; \zeta)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)} = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(\zeta)\, \Phi_k(z), \tag{3.26}$$

где $v_n(z; \zeta)$—полином от z степени не выше, чем n.

Полагая, что $C_n(\zeta) \equiv 0$, и применяя формулу (3.24) последовательно к функциям

$$g(z) = \Phi_k(z) \qquad (k = 0, 1, \cdots, n),$$

будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z}\, \overline{\Phi_k(z)}\, d\alpha(x) \equiv 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

Отсюда и из представления (3.26) вытекает, что $\gamma_k(\zeta) = 0$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$, и, следовательно, $U_n(\zeta; z) \equiv 0$.

Но тогда, ввиду определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$, получим, что тождественно относительно переменных z и ζ

$$\overline{\left[\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\, \frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\, \Phi_{n+1}(z).$$

Следовательно, положив в частности $\zeta = z$, будем иметь:

$$\left|\frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 = |\Phi_{n+1}(z)|^2. \tag{3.27}$$

Заметим теперь, что из формул (2.34) и (2.34′) леммы 6 вытекает, что

$$\lim_{z \to \alpha_{n+1}} \left|\frac{B_{n+2}(z)}{z}\, \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2 = S_{n+1}^2(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1})\, \frac{1-|\alpha_{n+1}|^2}{k_{n+1}^2} =$$

$$= S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}). \tag{3.28}$$

Поэтому, переходя к пределу в тождестве (3.27) при $z \to \alpha_{n+1}$, получим:

$$S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = |\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2,$$

откуда следует, что

$$S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\alpha_{n+1})|^2 = 0. \tag{3.29}$$

Однако, по (1.9) и (1.10)

$$\Phi_0(z) = \frac{\varphi_0(z)}{\sqrt{D_0}} = (\varphi_0, \varphi_0)^{-1/2} \frac{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

ввиду чего $|\Phi_0(\alpha_{n+1})|^2 > 0$, т. е. $S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) > 0$, что противоречит равенству (3.29).

Итак, предположение $C_n(\zeta) \equiv 0$ приводит нас к противоречию.

С другой стороны, из определения (3.8) функции $U_n(\zeta, z)$ следует также, что выражение

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z}$$

является рациональной функцией от $\bar{\zeta}$ с полюсами в точках $\bar{\zeta} = 1/\alpha_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ при $|z| = 1$.

Поэтому из интегральной формулы (3.24) вытекает также, что произведение $C_n(\zeta)\overline{g(\zeta)}$ является рациональной функцией от $\bar{\zeta}$ с полюсами быть может лишь в точках $\bar{\zeta} = 1/\alpha_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

Так как $C_n(\zeta) \not\equiv 0$, то всюду, за исключением не более чем конечного числа точек, $C_n(\zeta) \neq 0$, для таких ζ формула (3.24) может быть записана в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{U_n(\zeta; z)}{C_n(\zeta)(1-\bar{\zeta} z)} \overline{g(z)}\, d\alpha(x) \equiv \overline{g(\zeta)}.$$

Но тогда, согласно лемме 4, будем иметь:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\bar{\zeta} z} \equiv C_n(\zeta) S_n(\zeta; z), \tag{3.30}$$

тождественно относительно z и ζ.

Убедимся теперь, что $C_n(\zeta)$ от ζ не зависит.

С этой целью, заметив, что

$$\overline{S_n(\zeta; z)} = S_n(z; \zeta), \quad \overline{U_n(\zeta; z)} = U_n(z; \zeta),$$

и переходя в (3.30) к сопряженным величинам, будем иметь:

$$\frac{U_n(z; \zeta)}{1-\bar{z}\zeta} \equiv \overline{C_n(\zeta)} S_n(z; \zeta).$$

Поменяв в этом тождестве переменные z и ζ местами, приходим к тождеству:

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\zeta z} \equiv \overline{C_n(z)}\, S_n(\zeta; z). \tag{3.31}$$

Сравнивая тождества (3.30) и (3.31), получим:

$$C_n(\zeta) \equiv \overline{C_n(z)},$$

откуда вытекает, что $C_n(\zeta) \equiv c_n = \text{const}$.

Итак, из (3.30) имеем

$$\frac{U_n(\zeta; z)}{1-\zeta z} \equiv c_n\, S_n(\zeta; z), \tag{3.30'}$$

где c_n не зависит от z и ζ.

Чтобы определить значение постоянной c_n, заметим, что в силу определения (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ и ввиду формулы (3.28), имеем:

$$U_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \lim_{z\to\alpha_{n+1}} U_n(z; z) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^2 \{S_{n+1}(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) -$$

$$-|\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})|^2\} = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^2\, S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}).$$

Поэтому, положив в (3.30′) $\zeta = z$, при $z \to \alpha_{n+1}$ получим:

$$(1-|\alpha_{n+1}|^2)\, S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) = c_n\, S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}).$$

Отсюда, поскольку

$$S_n(\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}) \geqslant |\Phi_0(\alpha_{n+1})|^2 > 0,$$

получим:

$$c_n = (1-|\alpha_{n+1}|^2). \tag{3.32}$$

Подставляя значение (3.32) в (3.30′) и имея в виду значение (3.8) функции $U_n(\zeta; z)$ мы приходим к формуле (3.6) теоремы, однако пока лишь при условии, что все числа группы $\{\alpha_k\}_0^n$ отличны друг от друга и от нуля.

Освободимся, наконец, от этого ограничения. С этой целью поступим так же, как это уже было сделано в ходе доказательства теоремы 1. Именно: имея произвольную группу чисел $\{\alpha_k\}_0^{n+1}$, рассмотрим новую группу $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^{n+1}$ $(0<|\tilde{\alpha}_k|<1)$, удовлетворяющую поставленным выше ограничениям.

Пусть $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^{n+1}$ — система Мальмквиста, ассоциированная с упорядоченной группой чисел $\{\alpha_k\}_0^{n+1}$, а $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^{n+1}$ — результат ортогонализации этой системы на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Наконец, пусть

$$\tilde{S}_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\tilde{\Phi}_k(\zeta)}\, \tilde{\Phi}_k(z)$$

есть ядро системы $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$.

Так как все числа группы $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^{n+1}$ отличны друг от друга и от нуля, то формула (3.6) теоремы справедлива для ядра $\tilde{S}_n(\zeta; z)$, т. е.

$$\tilde{S}_n(\zeta; z) = \frac{(1-\tilde{\alpha}_{n+1}\bar{\zeta})(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}{1-|\tilde{\alpha}_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\left[\frac{\tilde{B}_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\bar{\tilde{\Phi}}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]}\frac{\tilde{B}_{n+2}(z)}{z}\bar{\tilde{\Phi}}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)-\overline{\tilde{\Phi}_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}, \qquad (3.6')$$

где

$$\tilde{B}_{n+2}(z) = \prod_{k=0}^{n+1}\frac{\tilde{\alpha}_k - z}{1-\bar{\tilde{\alpha}}_k z}\,\frac{|\tilde{\alpha}_k|}{\tilde{\alpha}_k}.$$

Однако, если*

$$\lim \tilde{\alpha}_k = \alpha_k \qquad (k=0,\ 1,\cdots,\ n+1),$$

то, как легко видеть,

$$\lim \tilde{\varphi}_k(z) = \varphi_k(z) \qquad (k=0,\ 1,\cdots,\ n+1),$$

$$\lim \tilde{B}_{n+2}(z) = B_{n+2}(z),$$

и поэтому

$$\lim \tilde{\Phi}_k(z) = \Phi_k(z) \qquad (k=0,\ 1,\cdots,\ n+1).$$

Следовательно, переходя к пределу в тождестве (3.6′), получим требуемую формулу (3.6) теоремы уже без каких-либо ограничений на совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^{n+1}$. Итак, теорема полностью доказана.

Из этой теоремы при $\alpha_k = 0$ $(k = 0,\ 1,\cdots)$, в частности, следует известная формула Г. Сеге.

Следствие. *Для ядра $S_n(\zeta; z)$ системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^n$ справедлива формула:*

$$S_n(\zeta; z) = \frac{\overline{\zeta^{n+1}\bar{P}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,z^{n+1}\bar{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)-\overline{P_{n+1}(\zeta)}\,P_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}. \qquad (3.33)$$

---

* Отметим, что с самого начала мы могли взять $\tilde{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1}$.

§·4. Рекуррентное соотношение, важный пример распределения

4.1. Выведем теперь рекуррентные формулы для ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$.

С этой целью запишем тождество (3.6) теоремы в виде

$$R_n(\zeta; z) = \overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\frac{B_{n+2}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(z) =$$

$$= (1 - |\alpha_{n+1}|^2)\,\frac{1 - \bar{\zeta} z}{(1 - \alpha_{n+1}\bar{\zeta})(1 - \bar{\alpha}_{n+1} z)}\,S_n(\zeta; z). \tag{4.1}$$

Рассмотрим интеграл:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n(\zeta; z)\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt, \quad \zeta = e^{it} \tag{4.2}$$

и вычислим его двумя способами, пользуясь тождеством (4.1).

Заметим сначала, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\Phi_{n+1}(\zeta)}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\{k_{n+1}\varphi_{n+1}(\zeta) + \cdots + l_{n+1}\varphi_0(\zeta)\}}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt = k_{n+1}, \tag{4.3}$$

ввиду ортонормальности системы Мальмквиста.

Далее, заметим еще, что при $\zeta = e^{it}$

$$\overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\varphi_{n+1}(\zeta) = \zeta\,\overline{B_{n+2}(\zeta)}\,\Phi_{n+1}(\zeta)\,\varphi_{n+1}(\zeta) =$$

$$= \frac{\zeta(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_{n+1}\zeta}\,\overline{B_{n+2}(\zeta)}\,B_{n+1}(\zeta)\,\Phi_{n+1}(\zeta) =$$

$$= -\zeta\,\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}\,(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\,\frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{\zeta - \alpha_{n+1}},$$

и поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\frac{B_{n+2}(\zeta)}{\zeta}\,\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt =$$

$$= -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}\,(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1} \frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{\zeta - \alpha_{n+1}}\,d\zeta =$$

$$= -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}}\,(1 - |\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\,\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1}). \tag{4.4}$$

Имея в виду значение интегралов (4.3) и (4.4) и пользуясь правой частью формулы (4.1), будем иметь:

$$J_n(z) = -\frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\Phi_{n+1}(\alpha_{n+1})\frac{B_{n+2}(z)}{z}\overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)-$$
$$-k_{n+1}\Phi_{n+1}(z). \qquad (4.4')$$

Чтобы вычислить тот же интеграл вторым способом, положим пока, что $\alpha_{n+1} \neq 0$. Тогда, ввиду тождества

$$\frac{1-\bar{\zeta}z}{1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta}} = \frac{1}{\alpha_{n+1}}\left\{z+\frac{\alpha_{n+1}-z}{1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta}}\right\},$$

из (4.1) будем иметь:

$$R_n(\zeta; z) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)\frac{z}{\alpha_{n+1}(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}S_n(\zeta; z)+$$
$$+(1-|\alpha_{n+1}|^2)\frac{\alpha_{n+1}-z}{\alpha_{n+1}(1-\alpha_{n+1}\bar{\zeta})(1-\bar{\alpha}_{n+1}z)}S_n(\zeta; z)=$$
$$=R_n^{(1)}(\zeta; z)+R_n^{(2)}(\zeta; z). \qquad (4.5)$$

Так как, очевидно, справедливо представление:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} d_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},$$

то

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^{(1)}(\zeta; z)\varphi_{n+1}(\zeta)\,dt = 0, \qquad \zeta = e^{it}. \qquad (4.6)$$

Далее, заметив, что при $\zeta = e^{it}$

$$\overline{\left(\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\right)}\varphi_{n+1}(\zeta) = \zeta\frac{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta},$$

и пользуясь тождеством (2.14) теоремы 1, из определения (4.5) функции $R_n^{(2)}(\zeta; z)$ мы получим:

$$R_n^{(2)}(\zeta; z)\varphi_{n+1}(\zeta) = (1-|\alpha_{n+1}|^2)^{3/2}\frac{B_{n+2}(z)}{|\alpha_{n+1}|\,z}\frac{\zeta S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \zeta\right)}{(1-\alpha_{n+1}\zeta)(1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta)}.$$

Следовательно, с учетом (4.6) из (4.2) и (4.5) будем иметь:

$$J_n(z) = \frac{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{3/2}}{|\alpha_{n+1}|}\frac{B_{n+2}(z)}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{\zeta S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \zeta\right)}{1-\bar{\alpha}_{n+1}\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta-\alpha_{n+1}} =$$
$$= \frac{|\alpha_{n+1}|}{\bar{\alpha}_{n+1}}(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}\frac{B_{n+2}(z)}{z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \alpha_{n+1}\right), \qquad (4.7)$$

причем от ограничения $\alpha_{n+1} \neq 0$ и здесь можно освободиться путем обычного предельного перехода.

Сравнивая два представления (4.4) и (4.7) функции $J_n(z)$ приходим к следующей формуле для системы функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$:

$$-\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}} \frac{k_{n+1}}{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}} \Phi_{n+1}(z) =$$

$$= \frac{B_{n+2}(z)}{z} \left\{ \Phi_{n+1}(\alpha_{n+1}) \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(\alpha_{n+1}) \overline{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}\right) \right\}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{4.8}$$

Если $\alpha_{n+1} \neq 0$, то формулу (4.7) можно видоизменить, пользуясь функциональным тождеством (2.14) для ядра $S_n(\zeta; z)$.

Таким образом, после соответствующих преобразований будем иметь также при $\alpha_{n+1} \neq 0$:

$$-\frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}} \frac{k_{n+1}}{(1-|\alpha_{n+1}|^2)^{1/2}} \Phi_{n+1}(z) = \Phi_{n+1}(\alpha_{n+1}) \frac{B_{n+2}(z)}{z} \overline{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) +$$

$$+ \frac{|\alpha_{n+1}|}{\alpha_{n+1}} \frac{B_{n+1}(\alpha_{n+1})}{\alpha_{n+1}} \frac{\alpha_{n+1}-z}{1-\bar{\alpha}_{n+1} z} \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi}_k\left(\frac{1}{\bar{\alpha}_{n+1}}\right) \Phi_k(z)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{4.9}$$

В предельном случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$, для системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^\infty$ из (4.8) будем иметь:

$$k_{n+1} P_{n+1}(z) = z^{n+1} \left\{ P_{n+1}(0) \overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^{n} P_k(0) \overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right) \right\}. \tag{4.10}$$

Однако, пользуясь первой из формул (2.44), получим:

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(0) \overline{P}_k\left(\frac{1}{z}\right) = S_n\left(0, \frac{1}{z}\right) = k_n z^{-n} P_n(z).$$

Но по определению чисел l_k в рассматриваемом случае $P_{n+1}(0) = l_{n+1}$, поэтому из (4.10) приходим к первой рекуррентной формуле Г. Сеге

$$k_{n+1} P_{n+1}(z) = l_{n+1} z^{n+1} \overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + k_n z P_n(z) \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{4.11}$$

Заменив в (4.11) z на $\frac{1}{z}$ и переходя к сопряженным величинам, после исключения $z^{n+1} \overline{P}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right)$ получим вторую рекуррентную формулу Г. Сеге:

$$k_{n+1} P_{n+1}(z) = k_{n+1} z P_n(z) + l_{n+1} z^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right) \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots). \tag{4.11'}$$

Можно записать также аналог этой формулы для общей ортогональной системы рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$, что, однако, мы приводить не будем.

4.2. В заключение установим явные формулы для ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ и для соответствующих ядер $S_n(\zeta; z)$ в случае некоторых частных, но важных классов функций распределения.

Полагая, что при данном $p \geqslant 0$ постоянные

$$A_p > 0 \quad \text{и} \quad \{\gamma_k\}_0^p \quad (0 \leqslant \gamma_k < 1) \tag{4.12}$$

произвольны, введем в рассмотрение функции:

$$\omega_p(z) = A_p^{-1/2} \prod_{k=0}^{p} \frac{z - \gamma_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}, \qquad D_p(z) = A_p^{1/2} \prod_{k=0}^{p} \frac{1 - \bar{\alpha}_k z}{1 - \bar{\gamma}_k z}, \tag{4.13}$$

а также функцию распределения $d\alpha(x) = w_p(x)\,dx$, где

$$w_p(x) = |D_p(e^{ix})|^2 \qquad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \tag{4.14}$$

Докажем теорему.

Теорема 3. 1°. *Ортогональная система рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированная с последовательностью $\{\alpha_k\}_0^\infty (|\alpha_k| < 1)$ и с распределением $(2\pi)^{-1} w_p(x)\,dx$, допускает представление:*

$$\Phi_n(z) = e^{i\varkappa_n} \omega_p(z) \frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_n z} \prod_{k=p+1}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}$$

$$(n = p + 1,\ p + 2, \cdots), \tag{4.15}$$

где $\varkappa_n$ $(\operatorname{Im} \varkappa_n = 0)$ — постоянные.

2°. *Справедливы формулы:*

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\, \Phi_k(z) =$$

$$= \frac{1}{(1 - \bar{\zeta} z)\, \overline{D_p(\zeta)}\, D_p(z)} - \frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\, B_{n+1}(z)}{(1 - \bar{\zeta} z)\, \overline{D_p\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}\, \overline{D_p\left(\frac{1}{z}\right)}}$$

$$(n = p,\ p + 1, \cdots). \tag{4.16}$$

Доказательство. 1°. Заметим, что согласно (4.13) и (4.14)

$$w_p(x)\, |\omega_p(z)|^2 \equiv 1 \qquad (z = e^{ix},\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi). \tag{4.17}$$

Поэтому, обозначая

$$\tilde{\Phi}_n(z) = \omega_p(z) \frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_n z} \prod_{k=p+1}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = p + 1,\ p + 2, \cdots), \tag{4.18}$$

при $n, m \geqslant p + 1$ будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\tilde{\Phi}_n(z)\,\overline{\tilde{\Phi}_m(z)}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\times$$

$$\times\overline{\left\{\frac{(1-|\alpha_m|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_m z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}}\,dx = \delta_{n,m}\quad (z=e^{ix}), \tag{4.19}$$

ввиду ортонормальности системы Мальмквиста, ассоциированной с последовательностью $\{\alpha_k\}_{p+1}^{\infty}$.

Итак, система функции $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_{p+1}^{\infty}$ ортонормальна на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}w_p(x)\,dx$.

Покажем теперь, что при любом $n \geqslant p+1$ и $0 \leqslant m \leqslant n-1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\,\tilde{\Phi}_n(z)\,\overline{\Phi_m(z)}\,dx = 0, \qquad z = e^{ix}. \tag{4.20}$$

В самом деле, из (4.17) и (4.18) при $n \geqslant p+1$ имеем:

$$J_m^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} w_p(x)\,\tilde{\Phi}_n(x)\,\overline{\Phi_m(x)}\,dx =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\,\overline{\left\{z\frac{\Phi_m(z)}{\omega_p(z)}\right\}}\,dz. \tag{4.21}$$

С другой стороны, так как справедливы представления:

$$\Phi_m(z) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,m}\,\varphi_k(z), \qquad c_{m,m} > 0, \tag{4.22}$$

где $\{\varphi_k(z)\}_0^{\infty}$—система функций Мальмквиста, то имеем также:

$$\Phi_m(z) = \frac{P_m(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)},$$

причем $P_m(z)$—полином степени не выше, чем m.

Поскольку при $|z|=1$

$$\overline{\left\{z\frac{\Phi_m(z)}{\omega_p(z)}\right\}} = A_p^{1/2} z^m \overline{P}_m\left(\frac{1}{z}\right)\prod_{k=0}^{m}(z-\alpha_k)^{-1}\prod_{k=0}^{p}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\gamma}_k z},$$

то при $0 \leqslant m \leqslant n-1$ функция, стоящая под вторым из интегралов (4.21), представима в виде

$$Q_m(z) \prod_{k=p+1}^{n} (1-\bar{\alpha}_k z)^{-1} \prod_{k=0}^{p} (1-\bar{\gamma}_k z)^{-1} \prod_{k=m-1}^{n-1} (z-\alpha_k), \tag{4.23}$$

где $Q_m(z)$—полином степени не выше, чем m (при этом и здесь для $m=n-1$ символ $\prod\limits_{k=m+1}^{n-1}$ следует заменить единицей).

Однако, функция (4.23) голоморфна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, и поэтому из (4.21) следует справедливость формул (4.20).

Наконец, из очевидного представления:

$$\tilde{\Phi}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} \Phi_k(z) \qquad (n \geqslant p+1),$$

ввиду условий (4.19), заключаем, что

$$a_{k,n} = 0 \qquad (k=0,\ 1, \cdots, n-1).$$

Итак, при $n \geqslant p+1$

$$\tilde{\Phi}_n(z) = a_{n,n} \Phi_n(z),$$

откуда, ввиду равенства:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_p(x) |\Phi_p(z)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w_p(x) |\tilde{\Phi}_p(z)|^2 dx = 1,$$

получим, что $|a_{n,n}| = 1$.

Отсюда следует, что

$$\Phi_n(z) = e^{i\varkappa_n} \tilde{\Phi}_n(z) \qquad (n \geqslant p+1),$$

где вещественная постоянная $\varkappa_n$ определяется из условия, что в представлении (4.22) $c_{n,n} > 0$. Таким образом, формулы (4.15) установлены.

2°. Согласно формулам (4.15), в частности, имеем:

$$\Phi_{p+1}(z) = e^{i\varkappa_{p+1}} \omega_p(z) \frac{(1-|\alpha_{p+1}|^2)^{1/2}}{1-\bar{\alpha}_{p+1} z},$$

и поэтому

$$\bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) = e^{-i\varkappa_{p+1}} z\, \bar{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) \frac{(1-|\alpha_{p+1}|^2)^{1/2}}{z-\alpha_{p+1}}.$$

Из этих формул следуют тождества:

$$\overline{\frac{(1-\bar{\alpha}_{p+1}\zeta)(1-\bar{\alpha}_{p+1} z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2}}\, \overline{\Phi_{p+1}(\zeta)}\, \Phi_{p+1}(z) = \overline{\omega_p(\zeta)}\, \omega_p(z), \tag{4.24}$$

$$\overline{\frac{(1-\bar{\alpha}_{p+1}\zeta)(1-\bar{\alpha}_{p+1} z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2}}\, \overline{\left\{\frac{B_{p+2}(\zeta)}{\zeta}\, \bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}}\, \frac{B_{p+2}(\zeta)}{z}\, \bar{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) =$$

$$= \overline{\left\{\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right) B_{p+1}(\zeta)\right\}} \overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) B_{p+1}(z). \tag{4.25}$$

Заметив теперь, что, согласно теореме 2,

$$S_p(\zeta; z) = \frac{\overline{(1-\overline{\alpha}_{p+1}\zeta)}(1-\overline{\alpha}_{p+1} z)}{1-|\alpha_{p+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\left\{\frac{B_{p+2}(\zeta)}{\zeta}\overline{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}} \frac{B_{p+2}(z)}{z}\overline{\Phi}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\Phi_{p+1}(\zeta)}\,\Phi_{p+1}(z)}{1-\overline{\zeta} z},$$

из тождеств (4.24) и (4.25) получим:

$$S_p(\zeta; z) = \frac{\overline{\left\{\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right) B_{p+1}(\zeta)\right\}} \overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) B_{p+1}(z) - \overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z)}{1-\overline{\zeta} z}. \tag{4.26}$$

Обозначим, далее,

$$\beta_j = \alpha_{p+1+j} \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

и введем в рассмотрение систему $\{\psi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированную с последовательностью комплексных чисел $\{\beta_k\}_0^\infty$:

$$\psi_k(z) = \frac{(1-|\beta_k|^2)^{1/2}}{1-\overline{\beta}_k z} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\beta_j - z}{1-\overline{\beta}_j z} \frac{|\beta_j|}{\beta_j} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Тогда, согласно (4.15),

$$\Phi_{p+1+k}(z) = e^{i\varkappa_{p+1+k}} \omega_p(z)\,\psi_k(z) \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

и поэтому

$$\sum_{k=p+1}^{p+n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z) = \overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z) \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\psi_k(\zeta)}\,\psi_k(z). \tag{4.27}$$

Однако, согласно лемме 5, для системы функций $\{\psi_k(z)\}_0^\infty$ имеет место формула:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\psi_k(\zeta)}\,\psi_k(z) = \frac{1-\overline{\widetilde{B}_n(\zeta)}\widetilde{B}_n(z)}{1-\overline{\zeta} z},$$

где

$$\widetilde{B}_n(z) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta_j - z}{1-\overline{\beta}_j z} \frac{|\beta_j|}{\beta_j} = \frac{B_{n+p+1}(z)}{B_{p+1}(z)}.$$

Следовательно, формулу (4.27) можно записать в виде

$$S_{n+p}(\zeta; z) - S_p(\zeta; z) = \overline{\omega_p(\zeta)}\,\omega_p(z) \frac{1-\overline{\left\{\frac{B_{n+p+1}(\zeta)}{B_{p+1}(\zeta)}\right\}} \frac{B_{n+p+1}(z)}{B_{p+1}(z)}}{1-\overline{\zeta} z}. \tag{4.28}$$

Наконец, из (4.24) и (4.28) будем иметь для всех $n = 0, 1, 2, \cdots$:

$$S_{n+p}(\zeta; z) = \frac{\overline{\left\{B_{p+1}(\zeta)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}} B_{p+1}(z)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) - \overline{\left\{\omega_p(\zeta)\,\frac{B_{n+p+1}(\zeta)}{\overline{B}_{p+1}(\zeta)}\right\}}\,\omega_p(z)\,\frac{B_{n+p+1}(z)}{B_{p+1}(z)}}{1 - \bar{\zeta} z}. \tag{4.29}$$

Заметим теперь, что из определения (4.13) функций $\omega_p(z)$ и $D_p(z)$ будем иметь:

$$B_{p+1}(z)\,\overline{\omega}_p\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{c_p}{\overline{D}_p(z)} \qquad (|c_p| = 1), \tag{4.30}$$

откуда, в силу очевидного тождества $B_{p+1}(z)\,\overline{B}_{p+1}\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 1$, имеем также:

$$\omega_p(z) = \frac{\bar{c}_p}{\overline{D}_p\left(\frac{1}{z}\right)} B_{p+1}(z). \tag{4.31}$$

Пользуясь, наконец, тождествами (4.30) и (4.31), формулы (4.24) и (4.29) можно объединить и записать в виде

$$S_{n+p}(\zeta; z) = \frac{1}{(1 - \bar{\zeta} z)\,\overline{D}_p(\zeta)\,D_p(z)} - \frac{\overline{B_{n+p+1}(\zeta)}\,B_{n+p+1}(z)}{(1 - \bar{\zeta} z)\,\overline{\overline{D}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,\overline{D}_p\left(\frac{1}{z}\right)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

что эквивалентно формуле (4.16) теоремы.

4.3. Из предыдущей теоремы следует, далее,

Теорема 4. *Если*

$$\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) = +\infty, \tag{4.32}$$

то при любых z и ζ ($|z| < 1$ и $|\zeta| < 1$) справедлива формула:

$$S_n(\zeta; z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z) = \frac{1}{(1 - \bar{\zeta} z)\,\overline{D}_p(\zeta)\,D_p(z)}. \tag{4.33}$$

2°. *Если*

$$\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty, \tag{4.34}$$

то при любых z и ζ ($|z| \neq 1$ и $|\zeta| \neq 1$), отличных от чисел последовательности $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^{\infty}$, справедлива формула:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z) =$$

$$= \frac{1}{(1-\bar{\zeta}z)\,\overline{D_p(\zeta)}\,D_p(z)} - \frac{\overline{B(\zeta)}\,B(z)}{(1-\bar{\zeta}z)\,\overline{D_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,D_p\left(\frac{1}{z}\right)}, \tag{4.35}$$

где

$$B(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1-\bar{\alpha}_k z}\,\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \tag{4.36}$$

—сходящееся произведение Бляшке.

В самом деле, чтобы получить утверждения 1° и 2° теоремы достаточно совершить предельный переход в формуле (4.16) при $n \to +\infty$. При этом надо лишь учитывать то обстоятельство, что при $\mathrm{B} = +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(z) = 0 \qquad (|z| < 1),$$

а при условии $\mathrm{B} < +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} B_n(z) = B(z) \qquad (|z| \neq 1,\ z = 1/\bar{\alpha}_k,\ k = 0,\ 1, \cdots).$$

На рассмотренном примере распределения $(2\pi)^{-1} w_p(x)\,dx$ становится ясным принципиальное различие как между множествами точек сходимости, так и в значениях суммы билинейного ряда

$$S(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Phi_k(\zeta)}\,\Phi_k(z)$$

в зависимости от расходимости или сходимости ряда

$$\mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|).$$

Оказывается, что в общем случае произвольного распределения $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$ природа сходимости и значение суммы ряда $S(\zeta; z)$ существенно зависят от того, конечны или нет значения

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \log \alpha'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \mathrm{B} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - |\alpha_k|).$$

На этом, однако, мы здесь останавливаться не будем и этому вопросу в последующем посвятим отдельную статью.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30. XII. 1965

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում ստացված են ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների հանրահաշվական հատկությունները, որոնց բոլոր հնարավոր բևեռները գտնվում են միավոր շրջանից դուրս տված հաջորդականության կետերում և օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$ *կշռով։*

Սահմանային դեպքում, երբ դիտարկվող սիստեմի բոլոր բևեռները համընկնում են անվերջ հեռու կետի հետ, այստեղ ստացված թեորեմները համապատասխանաբար հանգում են միավոր շրջանագծի վրա կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների տեսության լավ հայտնի պնդումներին, որոնք ժամանակին զարգացվել էին Սեգյոի [2], [3] աշխատանքներում։

M. M. DŽRBAŠIAN

ORTHONORMAL SETS OF RATIONAL FUNCTIONS ON THE UNIT CIRCLE

Summary

This paper reveals the algebraic properties of sets of rational functions which are orthonormal on the unit circle with respect to the weight $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$, and their poles lie on a given sequence of points situated outside the unit circle.

In case when all the poles of the set under consideration coincide with the point at infinity, the theorems proved here concur with the well known assertions of the theory of orthogonal (with respect to the weight function) polynomials developed by Szegö [2], [3].

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

К. А. АБГАРЯН

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений вида

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t), \tag{1}$$

где $A(\tau, \varepsilon)$, $B(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n, допускающие разложения:

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau), \qquad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau), \quad (0 \leqslant \tau \leqslant L). \tag{2}$$

В предположении, что $f(t, \tau, \varepsilon)$ есть вектор-функция вида $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(\tau) e^{i\theta(t, \varepsilon)}$ (в частности, нуль), где $\frac{d\theta}{dt} = k(\tau)$, причем, $k(\tau)$, $p_k(\tau)$ имеют на сегменте $0 \leqslant \tau \leqslant L$ достаточное число производных по τ, в работах [1]—[6] показано существование преобразований, приводящих к асимптотическому расщеплению системы (1) на независимые подсистемы меньшего порядка и указаны соответствующие способы построения формального процесса для такого расщепления.

В настоящей статье рассматривается общий случай, когда $f(t, \tau, \varepsilon)$ — произвольная непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Так же как и в цитированных выше работах мы пользуемся асимптотическими методами, разработанными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [7], [8].

2. Квадратную матрицу $u(\tau)$, собственные числа которой разбиты на p групп $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ $\left(\sigma = 1, \cdots, p;\ \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ так, что на сегменте $[0, L]$ выполняются условия

$$|\lambda_i^{(\sigma)} - \lambda_j^{(s)}| \geqslant c > 0 \quad (\sigma \neq s;\ i = 1, \cdots, k_\sigma;\ j = 1, \cdots, k_s), \tag{3}$$

при каждом фиксированном $\tau \in [0, L]$ можно представить так [9]:

$$u = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma, \tag{4}$$

где K_σ, Λ_σ, M_σ — матрицы типа, соответственно, $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$, $k_\sigma \times n$, удовлетворяющие равенствам:

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} E_{k_\sigma} & (s = \sigma), \\ 0 & (s \neq \sigma). \end{cases} \tag{5}$$

(E_r — единичная матрица порядка r).

Собственные числа матрицы Λ_σ суть собственные числа матрицы u, включенные в группу σ.

Введя коагулированные матрицы

$$K = (K_1 \cdots K_p), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix},$$

будем также иметь:

$$u = K\Lambda M, \tag{6}$$

$$MK = KM = E_n. \tag{7}$$

В качестве матрицы K_σ может быть взята любая матрица, составленная из k_σ линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы

$$\Delta_\sigma(u) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma}}^{p} \prod_{j=1}^{k_s} (u - \lambda_j^{(s)} E_n), \tag{8}$$

ранг которой равен k_σ и, в частности, из k_σ линейно независимых столбцов этой матрицы. Зная матрицу K легко определить M и Λ, используя соотношения (6) и (7).

Пусть K_σ, Δ_σ, M_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ — построенные таким путем матрицы. Тогда выражения $K_\sigma N_\sigma$, $N_\sigma^{-1} M_\sigma$, $N_\sigma^{-1} \Lambda_\sigma N_\sigma$, где N_σ — произвольная невырожденная матрица порядка k_σ, представляют общий вид матриц, осуществляющих разложение (4). Соответственно, если N — квазидиагональная матрица, составленная из матриц N_σ, то KN является общим выражением матриц, преобразующих матрицу u к квазидиагональному виду.

Для дальнейшего представляют интерес те матрицы K_σ, которые нужное число раз дифференцируемы на $[0, L]$. Вопрос о дифференцируемости матрицы K_σ тесно связан с дифференцируемостью матрицы $\Delta_\sigma(u)$. Покажем, что матрица $\Delta_\sigma(u)$ дифференцируема на $[0, L]$ по крайней мере столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$.

Рассмотрим многочлен с коэффициентами, зависящими от параметра τ,

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1(\tau)\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\tau)\lambda + a_n(\tau). \tag{9}$$

Допустим, что корни этого многочлена, не обязательно разные, разбиты каким-нибудь образом на две группы: $\lambda_1^{(1)}, \cdots, \lambda_k^{(1)}$ и $\lambda_1^{(2)} \cdots, \lambda_m^{(2)}$. В соответствии с этим, многочлен $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = \Delta_1(\lambda) \cdot \Delta_2(\lambda), \tag{10}$$

где $\Delta_1(\lambda)$ — многочлен степени k с корнями $\lambda_1^{(1)}, \cdots, \lambda_k^{(1)}$, а $\Delta_2(\lambda)$ — многочлен степени m с корнями $\lambda_1^{(2)}, \cdots, \lambda_m^{(2)}$. Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &\equiv \lambda^k + \alpha_1(\tau)\lambda^{k-1} + \cdots + \alpha_{k-1}(\tau)\lambda + \alpha_k(\tau), \\ \Delta_2(\lambda) &\equiv \lambda^m + \beta_1(\tau)\lambda^{m-1} + \cdots + \beta_{m-1}(\tau)\lambda + \beta_m(\tau). \end{aligned} \tag{11}$$

Имеет место следующая

Лемма. *Если на сегменте* $[0, L]$

1) *коэффициенты* a_j $(j = 1, \cdots, n)$ *многочлена* $\Delta(\lambda)$ *являются* l *раз дифференцируемыми функциями от* τ $(l \geqslant 1)$ *и*

2) $|\lambda_i^{(1)}(\tau) - \lambda_j^{(2)}(\tau)| \geqslant c > 0 \quad (i = 1, \cdots, k;\ j = 1, \cdots, m),$ (12)

то коэффициенты α_j $(j = 1, \cdots, k)$ *и* β_j $(j = 1, \cdots, m)$ *многочленов* $\Delta_1(\lambda)$ *и* $\Delta_2(\lambda)$ *также являются* l *раз дифференцируемыми на* $[0, L]$ *функциями от* τ.

Для доказательства леммы подставим многочлены (11) в равенство (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ. Получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\equiv \alpha_1 + \beta_1 - a_1 = 0, \\ \varphi_2 &\equiv \alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2 - a_2 = 0, \\ \varphi_3 &\equiv \alpha_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_3 - a_3 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1} &\equiv \alpha_k\beta_{m-1} + \alpha_{k-1}\beta_m - a_{n-1} = 0, \\ \varphi_n &\equiv \alpha_k\beta_m - a_n = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Функциональный определитель системы (13) имеет вид:

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(\alpha_1, \cdots, \beta_m)} = \begin{vmatrix} 1 & 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 & 0 \\ \beta_1 & 1\cdots0 & \alpha_1 & 1\cdots0 & 0 \\ \beta_2 & \beta_1\cdots0 & \alpha_2 & \alpha_1\cdots0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots\beta_{m-1} & 0 & 0\cdots\alpha_k & \alpha_{k-1} \\ 0 & 0\cdots\beta_m & 0 & 0\cdots0 & \alpha_k \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Определитель в правой части равенства (14) в точности равен результанту $R(\Delta_1, \Delta_2)$ многочленов (11), который, в силу условия 2) леммы, на $[0, L]$ нигде не обращается в нуль. Следовательно,

$$\frac{D(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)}{D(\alpha_1, \cdots, \beta_m)} \neq 0 \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant L). \tag{15}$$

Пусть τ_0 — произвольная точка на сегменте $[0, L]$. В силу (15) в некоторой окрестности точки $(a_1(\tau_0), \cdots, a_n(\tau_0))$ существуют непрерывные функции

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= f_1(a_1, \cdots, a_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_k &= f_k(a_1, \cdots, a_n),\\
\beta_1 &= f_{k+1}(a_1, \cdots, a_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\beta_m &= f_n(a_1, \cdots, a_n),
\end{aligned} \tag{16}$$

удовлетворяющие системе (13) и условиям

$$\begin{aligned}
\alpha_1(\tau_0) &= f_1(a_1(\tau_0), \cdots, a_n(\tau_0)),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\beta_m(\tau_0) &= f_n(a_1(\tau_0), \cdots, a_n(\tau_0)),
\end{aligned}$$

причем эти функции имеют непрерывные производные в некоторой окрестности точки $(a_1(\tau_0), \cdots, a_n(\tau_0))$.

Поскольку a_j $(j = 1, \cdots, n)$ — дифференцируемые функции от τ, то из равенств (16) следует существование производных по τ от $\alpha_1, \cdots, \beta_m$ в окрестности точки τ_0. Учитывая это, продифференцируем равенства (13) по τ. Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_1}{d\tau} + \frac{d\beta_1}{d\tau} = \frac{da_1}{d\tau},\\
&\frac{d\alpha_2}{d\tau} + \alpha_1\frac{d\beta_1}{d\tau} + \beta_1\frac{d\alpha_1}{d\tau} + \frac{d\beta_2}{d\tau} = \frac{da_2}{d\tau},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d\alpha_k}{d\tau}\beta_m + \alpha_k\frac{d\beta_m}{d\tau} = \frac{da_n}{d\tau}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Решая эту систему, будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{d\tau} &= \frac{1}{R(\Delta_1, \Delta_2)}\psi_1\left(\alpha_1, \cdots, \beta_m; \frac{da_1}{d\tau}, \cdots, \frac{da_n}{d\tau}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d\beta_m}{d\tau} &= \frac{1}{R(\Delta_1, \Delta_2)}\psi_n\left(\alpha_1, \cdots, \beta_m; \frac{da_1}{d\tau}, \cdots, \frac{da_n}{d\tau}\right),
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь ψ_j — функции, дифференцируемые по своим аргументам любое число раз.

Если существуют вторые производные $\frac{d^2a_1}{d\tau^2}, \cdots, \frac{d^2a_n}{d\tau^2}$, то из (18) можно непосредственно получить выражения для $\frac{d^2\alpha_1}{d\tau^2}, \cdots, \frac{d^2\beta_m}{d\tau^2}$. Для этого достаточно продифференцировать равенства (18) по τ и в правых частях исключить $\frac{d\alpha_1}{d\tau}, \cdots, \frac{d\beta_m}{d\tau}$ с помощью тех же равенств (18). Этим путем можно получить все производные по τ от $\alpha_1, \cdots, \beta_m$ вплоть до $\frac{d^l\alpha_1}{d\tau^l}, \cdots, \frac{d^l\beta_m}{d\tau^l}$. Итак, в произвольной точке $\tau_0 \in [0, L]$ коэф-

фициенты многочленов Δ_1 и Δ_2 дифференцируемы столько раз, сколько раз дифференцируемы коэффициенты многочлена Δ. Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь Δ — характеристический многочлен матрицы $u(\tau)$. Коэффициенты этого многочлена дифференцируемы по τ по крайней мере столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$. Коэффициенты матричного многочлена (8) равны коэффициентам многочлена $\Delta_\sigma(\lambda)$, корнями которого являются собственные числа матрицы u, не включенные в группу σ. Многочлен $\Delta_\sigma(\lambda)$ является множителем многочлена $\Delta(\lambda)$, причем имеют место неравенства (3). Условия леммы, таким образом, выполняются. Согласно лемме, коэффициенты многочленов $\Delta_\sigma(\lambda)$ и $\Delta(\lambda)$ дифференцируемы одинаковое число раз. Отсюда следует, что матрица $\Delta_\sigma(u)$ дифференцируема по τ по крайней мере столько раз, сколько раз дифференцируема матрица $u(\tau)$. То же самое, очевидно, справедливо и для любой линейной комбинации столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ с соответствующим числом раз дифференцируемыми коэффициентами.

Из вышеизложенного ясно, что если на рассматриваемом сегменте $[0, L]$ линейная независимость каких-нибудь фиксированных k_σ столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ не нарушается, то в качестве искомой матрицы K_σ (дифференцируемой столько же раз, сколько раз дифференцируема матрица u) можно взять матрицу, составленную из этих k_σ столбцов. Если же таких k_σ столбцов не окажется, то матрицу K_σ следует набрать из k_σ линейных комбинаций столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ с соответствующим числом раз дифференцируемыми коэффициентами, выбор которых должен быть подчинен условию линейной независимости этих k_σ линейных комбинаций.

Последний случай проиллюстрируем на следующем простом примере.

Пусть u — r раз дифференцируемая на $[0, L]$ матрица третьего порядка, собственные числа которой разбиты на две непересекающиеся группы.

Допустим, что первый столбец матрицы

$$\Delta_1(u) = (\delta_{11}\delta_{12}\delta_{13}),$$

ранг которой равен двум, не обращается в нуль на $[0, L]$, но два других столбца (δ_{12} и δ_{13}) в некоторых точках этого промежутка (но конечно разных) обращаются в нуль. Искомую матрицу $K_1 = (k_{11}k_{22})$ можно построить следующим образом.

Положим

$$k_{11} = \delta_{11},$$
$$k_{12} = \alpha_1\delta_{11} + \alpha_2\delta_{12} + \alpha_3\delta_{13},$$

где α_j — некоторые произвольные функции из класса $C^{(r)}$.

Линейная независимость столбцов k_{11} и k_{12} будет обеспечена, если α_j $(j = 1, 2, 3)$ будут выбраны так, что

$$k_{12}(\tau) \neq 0 \qquad (\tau \in [0. L]), \tag{19}$$

и что, например, скалярное произведение k_{11} и k_{12} равно нулю, т. е.

$$k_{11}^*(\tau)\cdot k_{12}(\tau)=0 \quad (\tau\in[0,\ L]) \tag{20}$$

(через a^* обозначена эрмитова сопряженная матрица).

Используя условие (20), получим:

$$k_{12}=\alpha_2\left[\delta_{12}-\frac{\delta_{11}^*\cdot\delta_{12}}{\|\delta_{11}\|^2}\delta_{11}\right]+\alpha_3\left[\delta_{13}-\frac{\delta_{11}\cdot\delta_{13}}{\|\delta_{11}\|^2}\delta_{11}\right].$$

Поскольку выражения, заключенные в квадратные скобки, не могут одновременно обратиться в нуль (это противоречило бы тому, что ранг матрицы $\Delta_1(u)$ на сегменте $[0,\ L]$ равен 2), ясно, что соответствующим выбором $\alpha_2(\tau)$ и $\alpha_3(\tau)$ всегда можно добиться выполнения условия (19).

В последующих разделах при использовании формул (4)—(7), не оговаривая особо, будем предполагать, что матрицы u и K_σ $(\sigma=1,\cdots,p)$ на сегменте $[0,\ L]$ имеют одинаковое число производных по τ.

3. Теорема. *Если на сегменте* $[0,\ L]$ *матрицы* $A_k(\tau)$, $B_k(\tau)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ *имеют нужное число производных по* τ, *а* $A_0(\tau)$, *кроме того, является невырожденной матрицей, то, предполагая, что собственные числа матрицы* $u(\tau)=A_0^{-1}(\tau)B_0(\tau)$ *разбиты на* p *групп при условии (3), формальное решение системы (1) может быть представлено так:*

$$x=\sum_{\sigma=1}^{p}\tilde{K}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)y_\sigma, \tag{21}$$

где

$$\frac{dy_\sigma}{dt}=\tilde{\Lambda}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)y_\sigma+\tilde{M}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)R(\tau,\ \varepsilon)f(t,\ \tau,\ \varepsilon)\quad(\sigma=1,\cdots,\ p), \tag{22}$$

а $\tilde{K}_\sigma$, $\tilde{\Lambda}_\sigma$, $\tilde{M}_\sigma$, R — *матрицы типа, соответственно,* $n\times k_\sigma$, $k_\sigma\times k_\sigma$, $k_\sigma\times n$, $n\times n$, *представляемые формальными рядами*

$$\begin{aligned}\tilde{K}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k K_\sigma^{[k]}(\tau), & \tilde{\Lambda}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\Lambda_\sigma^{[k]}(\tau),\\ \tilde{M}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k M_\sigma^{[k]}(\tau), & R(\tau,\ \varepsilon)&=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k R_k(\tau).\end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя формулы (21), (22), определяющие вектор x, в систему (1) и отделяя в полученном тождестве коэффициенты при y_σ $(\sigma=1,\cdots,\ p)$ и свободный член, будем иметь:

$$A(\tau,\ \varepsilon)\left[\varepsilon\frac{d\tilde{K}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)}{d\tau}+\tilde{K}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)\tilde{\Lambda}_\sigma(\tau,\ \varepsilon)\right]=B(\tau,\ \varepsilon)\tilde{K}_\sigma(\tau,\ \varepsilon) \tag{24}$$

$$(\sigma=1,\cdots,\ p),$$

$$\left[A[\tau, \varepsilon] \sum_{\sigma=1}^{p} \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon) \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) R(\tau, \varepsilon) - E_n\right] f(t, \tau, \varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Подставим в равенство (24) разложения (2) и (23) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим:

$$uK_\sigma^{[0]} = K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[0]},$$

$$uK_\sigma^{[k]} = K_\sigma^{[k]} \Lambda_\sigma^{[0]} + K_\sigma^{[0]} \Lambda_\sigma^{[k]} + D_\sigma^{[k-1]} \tag{26}$$

$$(\sigma = 1, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots),$$

где

$$D_\sigma^{[k-1]} = \sum_{j=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-j]} \Lambda_\sigma^{[j]} + A_0^{-1}\left[\sum_{\nu=1}^{k}\left(A_{\nu-1} \frac{dK_\sigma^{[k-\nu]}}{d\tau} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B_\nu K_\sigma^{[k-\nu]} + \sum_{j=0}^{k-\nu} A_\nu K_\sigma^{[k-\nu-j]} \Lambda_\sigma^{[j]}\right)\right]. \tag{27}$$

Положим

$$K_\sigma^{[k]}(\tau) \equiv K_\sigma(\tau), \qquad \Lambda_\sigma^{[0]}(\tau) \equiv \Lambda_\sigma(\tau). \tag{28}$$

При этом первое равенство (26) выполняется тождественно.

Пусть $K_\sigma^{[0]}, \Lambda_\sigma^{[0]}, \cdots, K_\sigma^{[k-1]}, \Lambda_\sigma^{[k-1]}$ уже найдены. Определим $K_\sigma^{[k]}$ и $\Lambda_\sigma^{[k]}$. Отметим, что теперь $D_\sigma^{[k-1]}$ является известной матрицей.

Умножим $k+1$-ое равенство (26) слева на M. Получим:

$$\Lambda Q_\sigma^{[k]} = Q_\sigma^{[k]} \Lambda_\sigma + MK_\sigma \Lambda_\sigma^{[k]} + MD_\sigma^{[k-1]}, \tag{29}$$

где

$$Q_\sigma^{[k]} = MK_\sigma^{[k]}. \tag{30}$$

Коагулируем матрицу $Q_\sigma^{[k]}$, состоящую из n строк и k_σ столбцов, следующим образом:

$$Q_\sigma^{[k]} = \begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]} \\ \vdots \\ Q_{p\sigma}^{[k]} \end{pmatrix},$$

где $Q_{s\sigma}^{[k]}$ — субматрица типа $k_s \times k_\sigma$ ($Q_{s\sigma}^{[k]} = M_s K_\sigma^{[k]}$). Тогда, так как Λ имеет квазидиагональную структуру, то равенство (29) распадается на следующие p независимых матричных равенств:

$$\Lambda_\sigma Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = Q_{\sigma\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + \Lambda_\sigma^{[k]} + M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}, \tag{31}$$

$$\Lambda_s Q_{s\sigma}^{[k]} = Q_{s\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma + M_s D_\sigma^{[k-1]} \quad (s \neq \sigma). \tag{32}$$

Из (31) непосредственно находим:

$$\Lambda_\sigma^{[k]} = \Lambda_\sigma Q_{\sigma\sigma}^{[k]} - Q_{\sigma\sigma}^{[k]} \Lambda_\sigma - M_\sigma D_\sigma^{[k-1]}. \tag{33}$$

Здесь $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая квадратная матрица порядка k_σ. В частности, можно принять $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$.

Равенства же (32) однозначно определяют $Q_{s\sigma}^{[k]}$ $(s=1,\cdots,p;\ s\neq\sigma)$, так как Λ_s и Λ_σ не имеют общих собственных чисел.

Определив из (32) $Q_{s\sigma}^{[k]}$ $(s\neq\sigma)$ и задавшись матрицей $Q_{\sigma\sigma}^{[k]}$, найдем $Q_\sigma^{[k]}$, после чего легко получить $K_\sigma^{[k]}$ по формуле

$$K_\sigma^{[k]}=KQ_\sigma^{[k]} \tag{34}$$

(см. (30)).

Таким образом, с помощью, рекуррентных формул (33), (32), (34) можно последовательно определить $\Lambda_\sigma^{[1]}$, $K_\sigma^{[1]}$, $\Lambda_\sigma^{[2]}$, $K_\sigma^{[2]},\cdots$.

Теперь о построении матриц $\bar{M}_\sigma$ и R, фигурирующих в соотношении (25).

Это соотношение можно представить в виде

$$[A(\tau,\varepsilon)\bar{K}(\tau,\varepsilon)\bar{M}(\tau,\varepsilon)R(\tau,\varepsilon)-E_n]f(t,\tau,\varepsilon)=0, \tag{35}$$

где

$$\bar{K}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k K^{[k]},\qquad \bar{M}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k M^{[k]},$$

$$K^{[k]}=(K_1^{[k]}\cdots K_p^{[k]}),\quad M^{[k]}=\begin{pmatrix}M_1^{[k]}\\ \vdots\\ M_p^{[k]}\end{pmatrix}. \tag{36}$$

Легко проверить, что если члены формальных рядов $\bar{M}$ и R определить посредством рекуррентных формул

$$\begin{gathered}M^{[0]}=M,\qquad M^{[k]}=-M\sum_{l=1}^{k}K^{[l]}M^{[k-l]}\quad (k=1,2,\cdots),\\ R_0=A_0^{-1},\ R_k=-A_0^{-1}\sum_{l=1}^{k}A_l R_{k-l}\quad (k=1,2,\cdots),\end{gathered} \tag{37}$$

то будут иметь место равенства

$$\begin{gathered}\bar{K}(\tau,\varepsilon)\bar{M}(\tau,\varepsilon)=E_n,\\ A(\tau,\varepsilon)R(\tau,\varepsilon)=E_n,^*\end{gathered} \tag{38}$$

а значит, будет выполняться и равенство (25).

---

* Эти равенства следует понимать в том смысле, что для любого m

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k K^{[k]}\cdot\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k M^{[k]}-E_n=O(\varepsilon^{m+1}),$$

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k A_k\cdot\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k R_k-E_n=O(\varepsilon^{m+1}).$$

4. Через $x_m(t, \varepsilon)$ обозначим вектор, определенный равенствами (21) и (22), если в формулах (23) ограничиться членами порядка не выше m относительно ε.

Используя метод построения асимптотической оценки, приведенный в [8], можно показать, что если

$$x|_{t=t_1} = x_m|_{t=t_1},$$

то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для некоторых постоянных c_m и ε_1 $(\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0)$ на сегменте $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, $t_1, t_2 \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon_1}\right]$ имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m+1} \quad (\varepsilon < \varepsilon_1,\ t \in [t_1, t_2]). \tag{39}$$

Если, помимо сделанных выше предположений, все собственные числа эрмитовой матрицы $P = \frac{1}{2}(\Lambda + \Lambda^*)$ неположительны, то

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m-1} \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\quad t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

В случае однородной системы имеет место оценка

$$\|x - x_m\| \leqslant c_m \varepsilon^{m} \quad \left(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\quad t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right]\right).$$

Таким образом, формальное решение x_m имеет асимптотический характер.

Замечание. Матрицы $\bar{K}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ не зависят от $f(t, \tau, \varepsilon)$. Поэтому для получения решения однородной системы достаточно в приведенных выше соотношениях положить $f(t, \tau, \varepsilon) = 0$.

5. Интересно отметить связь введенных выше матриц $\bar{M}_\sigma$ с асимптотическим решением сопряженной однородной системы.

Пусть, для простоты, $A(\tau, \varepsilon) \equiv E_n$. Тогда решение системы (1) представляется в виде

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \bar{K}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma, \tag{40}$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \bar{\Lambda}_\sigma(\tau, \varepsilon)\, y_\sigma + \bar{M}_\sigma(\tau, \varepsilon) f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\sigma = 1, \cdots, p). \tag{41}$$

Нетрудно показать, что формальное решение сопряженной однородной системы

$$\frac{dz}{dt} = -B^*(\tau, \varepsilon)\, z \tag{42}$$

может быть представлено равенствами

$$z = \sum_{\sigma=1}^{p} \bar{M}_\sigma^* v_\sigma, \tag{43}$$

$$\frac{dv_\sigma}{dt} = -\bar{\Lambda}_\sigma^* v_\sigma, \tag{44}$$

где $\bar{M}_\sigma$ и $\bar{\Lambda}_\sigma$ — матрицы, фигурирующие в формуле (41).

6. Покажем, наконец, что в случае системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами применение метода, изложенного выше, приводит к известным результатам классической теории линейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему уравнений

$$A\frac{dx}{dt} = Bx + f(t), \tag{45}$$

где A и B — постоянные матрицы, причем A — невырожденная матрица. Согласно вышеизложенному, решение этой системы представляется равенствами

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} \tilde{K}_\sigma y_\sigma, \tag{46}$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \tilde{\Lambda}_\sigma y_\sigma + \tilde{M}_\sigma A^{-1} f(t) \quad (\sigma = 1, \cdots, p). \tag{47}$$

Так как в данном случае $u = A^{-1}B$ — постоянная матрица, то K_σ, Λ_σ, M_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ — также постоянные матрицы. Учитывая это, из (32) последовательно при $k = 1, 2, \cdots$ получаем:

$$Q_{s\sigma}^{[k]} = 0, \quad (s \neq \sigma;\ k = 1, 2, \cdots),$$

так как $\frac{dK_\sigma}{dt} = 0$. Полагая и $Q_{\sigma\sigma}^{[k]} = 0$ $(\sigma = 1, \cdots, p)$, будем иметь:

$$\Lambda_\sigma^{[k]} = 0,$$

$$K_\sigma^{[k]} = 0,$$

$$M_\sigma^{[k]} = 0 \quad (\sigma = 1, \cdots, p;\ k = 1, 2, \cdots).$$

Таким образом,

$$\tilde{K}_\sigma = K_\sigma, \quad \tilde{\Lambda}_\sigma = \Lambda_\sigma, \quad \tilde{M}_\sigma = M_\sigma.$$

Поэтому равенства (46) и (47) принимают вид:

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma y_\sigma, \tag{46'}$$

$$\frac{dy_\sigma}{dt} = \Lambda_\sigma y_\sigma + M_\sigma A^{-1} f(t) \quad (\sigma = 1, \cdots, p). \tag{47'}$$

Решая (47′), находим

$$y_\sigma = e^{\Lambda_\sigma t} C_\sigma + \int_0^t e^{\Lambda_\sigma (t-t')} M_\sigma A^{-1} f(t')\, dt',$$

где C_σ — матрица произвольных постоянных.

В соответствии с этим

$$x = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma e^{\Lambda_\sigma t} C_\sigma + \int_0^t \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma e^{\Lambda_\sigma (t-t')} M_\sigma A^{-1} f(t')\, dt'.$$

Преобразуем последнее выражение. Полагая

$$C_\sigma = M_\sigma x(0)$$

и учитывая, что

$$\sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma e^{\Lambda_\sigma t} M_\sigma = e^{K\Lambda M t} = e^{ut},$$

получим

$$x = e^{ut} x(0) + \int_0^t e^{u(t-t')} A^{-1} f(t')\, dt',$$

что представляет собой известное выражение для общего решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Московский ордена Ленина авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило 10. IV. 65

Կ. Ա. ԱԲԳԱՐՅԱՆ

ԴԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ԱՍԻՄՊՏՈՏԻԿ ՃԵՂՔՄԱՆ ՄԵԹՈԴԸ

Ամփոփում

Հոդվածում շարադրված է ասիմպտոտիկ ճեղքման մեթոդը հետևյալ դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի համար։

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)\, x + f(t, \tau, \varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t),$$

որտեղ $A(\tau, \varepsilon)$-ը և $B(\tau, \varepsilon)$-ը n կարգի քառակուսային մատրիցաներ են, որոնք թույլ են տալիս հետևյալ վերածումը՝

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau), \qquad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau),$$

իսկ $f(t, \tau, \varepsilon)$-ը անընդհատ վեկտոր-ֆունկցիա է, ε-ի նկատմամբ, ռեգուլյար $\varepsilon = 0$ կետի շրջակայքում։

K. A. ABGARIAN

THE METHOD OF ASYMPTOTICAL SPLITTING OF A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

In the paper we set forth the method of asymptotical splitting for the following system of differential equations

$$A(\tau, \varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)x + f(t, \tau, \varepsilon) \qquad (\tau = \varepsilon t),$$

where A and B are square matrices of order n permitting the expan sions

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(\tau)$$

$$B(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k B_k(\tau)$$

while f is an arbitrary vector function regular with respect to ε in a neighbourhood of $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. З. Штокало.* Критерии устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, Матем. сб., 19 (61), № 2, 1946.
2. *С. Ф. Фещенко.* Малые колебания системы с конечным числом степеней свободы, Уч. зап. Киевск. пед. инст., 9, № 4, 1949.
3. *С. Ф. Фещенко.* Об асимптотическом приведении интегралов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Доклады АН УРСР, № 1, 1949.
4. *Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн.* О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, Укр. матем. журн., 2, № 4, 1950.
5. *Ю. Л. Далецкий.* Об асимптотическом решении одного векторного дифференциального уравнения, ДАН СССР, 92, № 5, 1953.
6. *Н. И. Шкиль.* Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, ДАН СССР, 150, № 5, 1963.
7. *Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.* Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, 1937.
8. *Н. Н. Боголюбов.* О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945.
9. *К. А. Абгарян.* Приведение квадратной матрицы к квазидиагональному виду и разложение ее на составляющие, Известия АН АрмССР, 18, № 2, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕАКТИВНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

1°. В статье рассматривается аналитическая матрица-функция, удовлетворяющая условиям:

$$W(\lambda) J W^*(\lambda) - J \geqslant 0 \quad (\operatorname{Re}\lambda > 0), \tag{1.1}$$

$$\overline{W(\lambda)} = W(\bar{\lambda}), \tag{1.2}$$

$$W'(\lambda) Jj W(\lambda) \equiv Jj, \tag{1.3}$$

которую мы будем в дальнейшем называть цепной. Здесь $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ и $j = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ связаны соотношением $Jj = -jJ^*$.

Цепную матрицу-функцию $W(\lambda)$ назовем реактивной, если она аналитическая и J-унитарная на мнимой оси, то есть если

$$W(\lambda) J W^*(\lambda) = J \quad (\operatorname{Re}\lambda = 0). \tag{1.4}$$

Из (1.2) и (1.4) вытекает возможность аналитического продолжения реактивной матрицы-функции $W(\lambda)$ в левую полуплоскость, где она будет J-нерастягивающей, и справедливость тождества

$$W(-\lambda) J W'(\lambda) = J \tag{1.5}$$

во всей расширенной комплексной плоскости, после чего из (1.5) и (1.3) легко следует:

$$jW(-\lambda) j = W(\lambda).$$

В связи с этим, реактивная матрица-функция $W(\lambda)$, имеющая полюс порядка k в точке λ_0, будет одновременно иметь полюсы того же порядка и в точках $\bar{\lambda}_0$, $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$, и разложения в ряд Лорана в окрестностях этих полюсов имеют вид:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 c}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \cdots,$$

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 \bar{c}}{(\lambda - \bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

* Материал, излагаемый в этой статье, тесно связан с [2]. Однако, дополнительное по сравнению с условиями (1), (2) работы [2], условие

$$W'(\lambda) Jj W(\lambda) = Jj$$

значительно усложняет вопрос о расщеплении цепной матрицы-функции на множители.

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0(-1)^k j\bar{c}j}{(\lambda+\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0(-1)^k jcj}{(\lambda+\lambda_0)^k} + \cdots.$$

Простейшую реактивную матрицу-функцию $R(\lambda)$, голоморфную во всех точках расширенной комплексной плоскости за исключением четырех точек λ_0, $\bar{\lambda}_0$, $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$, в которых она имеет полюсы первого порядка, и нормированную условием $R(\infty) = I$, будем называть элементарным реактивным множителем и записывать так:

$$R(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0 A}{\lambda-\lambda_0} + \frac{2\sigma_0 \bar{A}}{\lambda-\bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 j\bar{A}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 jAj}{\lambda+\lambda_0}.$$

Здесь мы считаем, что $\operatorname{Re}\lambda_0 > 0$, $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$.

Элементарный реактивный множитель можно, очевидно, разложить на произведение четырех комплексных множителей:

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right) \times$$

$$\times \left(I - \frac{2\sigma_0 j\bar{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right) = b_{\lambda_0}(\lambda)\, b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\lambda_0}(\lambda),$$

где $P^2 = P$, $PJ \geqslant 0$, $\bar{P}^2 = \bar{P}$, $\bar{P}J \geqslant 0$, $Q^2 = Q$, $QJ \geqslant 0$, $\bar{Q}^2 = \bar{Q}$, $\bar{Q}J \geqslant 0$.

При этом произведения $b_{\lambda_0}(\lambda)\, b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ и $b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\, b_{-\lambda_0}(\lambda)$ на основании (1.2) и [2] будут вещественными элементарными множителями.

2°. Рассмотрим разложение цепной матрицы-функции $W(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности точки λ_0:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 c}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \cdots.$$

Тогда справедливы и разложения:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 \bar{c}}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots,$$

$$W^{-1}(\lambda) = \frac{2\sigma_0 jJc'Jj}{(\lambda-\lambda_0)^k} + \cdots,$$

$$W^{-1}(\lambda) = \frac{2\sigma_0 jJc^*Jj}{(\lambda-\bar{\lambda}_0)^k} + \cdots.$$

Будем отщеплять от матрицы-функции $W(\lambda)$ друг за другом четыре множителя, пользуясь формулами отщепления

$$c^*Jcx = c^*, \qquad P = cxJ.$$

Множители $b_{\lambda_0}(\lambda)$, $b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ отщепим от матрицы-функции $W(\lambda)$ слева:

$$b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,W(\lambda)=W_1(\lambda),$$

$$b_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)\,W_1(\lambda)=b_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,W(\lambda)=W_2(\lambda).$$

Легко проверить, что повышение порядка полюсов λ_0, $\bar{\lambda}_0$ матрицы-функции $W_2^{-1}(\lambda)=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ является лишь кажущимся. Отщепим от $W_2^{-1}(\lambda)$ последовательно элементарные множители $\beta_{\lambda_0}(\lambda)$, $\beta_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$ справа.

Тогда

$$W_2^{-1}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)=W_3^{-1}(\lambda),$$

$$W_3^{-1}(\lambda)\,\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=W_2^{-1}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\,\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,\beta_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\beta_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda)=$$

$$=W^{-1}(\lambda)\,b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)=W_4^{-1}(\lambda)$$

и

$$W(\lambda)=b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)\,W_4(\lambda).$$

Можно доказать, что произведение

$$b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\bar{\lambda}_0}(\lambda)\,b_{-\lambda_0}(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\bar{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\times$$

$$\times\left(I-\frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

является элементарным реактивным множителем, а $W_4(\lambda)$ остается цепной матрицей-функцией.

Этот процесс отщепления приводит к основной теореме.

Теорема 1. *Реактивная рациональная матрица-функция $W(\lambda)$ разлагается на произведение конечного числа элементарных реактивных множителей:*

$$W(\lambda)=R_1(\lambda)\,R_2(\lambda)\cdots R_k(\lambda)\,V$$

где V — постоянная, J — унитарная вещественная матрица, удовлетворяющая равенству $V'JjV=Jj$.*

3°. Таким образом, изучение реактивной матрицы-функции $W(\lambda)$ сводится к описанию структуры элементарного реактивного множителя $R(\lambda)$.

Однако, структура элементарного реактивного множителя настолько сложна, что удовлетворительное описание его можно получить лишь для реактивного множителя первого ранга:

---

* Теорема 1 для матрицы $W(\lambda)$ второго порядка известна давно в теории цепей [5]. Здесь удобно описание и реализацию элементарного множителя $R(\lambda)$ осуществлять с помощью так называемой матрицы сопротивлений $Z(\lambda)$, связанной с $R(\lambda)$ преобразованием $Z(\lambda)=\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}R(\lambda)+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}R(\lambda)+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}$. В общем случае этот прием неприемлем, так как матрицы $Z(\lambda)$ и $Z^{-1}(\lambda)$ могут не иметь смысла.

$$r(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0 A}{\lambda - \lambda_0} + \frac{2\sigma_0 \bar{A}}{\lambda - \bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 j\bar{A}j}{\lambda + \bar{\lambda}_0} - \frac{2\sigma_0 jAj}{\lambda + \lambda_0},$$

где A — матрица первого ранга. Множитель такого вида будем также называть примарным.

Затем, как и в статье [2], мы покажем, что произвольный элементарный реактивный множитель разлагается на произведение реактивных множителей первого ранга.

Рассмотрим примарный реактивный множитель

$$r(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right),$$

записанный в виде произведения двух вещественных множителей.

Очевидно, что p, $\tilde{p}$, q, $\tilde{q}$ — проекторы первого ранга, то есть

$$p = Jg^*g, \quad gJg^* = 1, \quad \tilde{p} = J\bar{g}^*\bar{g}, \quad \bar{g}J\bar{g}^* = 1, \quad q = Jh^*h,$$

$$hJh^* = 1, \quad \tilde{q} = J\bar{h}^*\bar{h}, \quad \bar{h}J\bar{h}^* = 1.$$

В [2] показано, что орты g и h, порождающие проекторы p и q удовлетворяют условиям:

$$|\bar{g}Jg^*| < \sec\theta, \qquad |\bar{h}Jh^*| < \sec\theta \quad (\theta = \arg\lambda_0).$$

Будем считать, что g и h правильно нормированы, то есть

$$\bar{g}Jg^* = \operatorname{th} a \sec\theta e^{i\theta},$$

$$\bar{h}Jh^* = -\operatorname{th} b \sec\theta e^{i\theta}.$$

Тогда векторы $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$, порождающие проекторы $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ запишутся так:

$$\tilde{g} = \operatorname{ch} a\bar{g} - \operatorname{sh} a\, g,$$

$$\tilde{h} = \operatorname{ch} b\bar{h} + \operatorname{sh} b\, h.$$

Введем, кроме того, дополнительно параметры

$$gjJg^* = i\alpha \operatorname{tg}\theta,$$

$$hjJh^* = i\beta \operatorname{tg}\theta.$$

Легко видеть, что α и β являются действительными числами.

Доказана следующая

Теорема 2. *Для того чтобы примарный множитель*

$$r(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

был реактивным, необходимо и достатачно, чтобы между векторами g и h существовала следующая двусторонняя связь:*

* Из доказательства необходимости вытекает, что $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$.

$$h = x(\bar{g} - \alpha \bar{g} j) + y \tilde{g} j,$$
$$\tilde{g} = x_1(\tilde{h} - \beta \tilde{h} j) + y_1 \bar{h} j. \tag{3.1}$$

Следствие. *Если между векторами g и h существует двусторонняя связь, то она может быть записана в следующей уточненной форме:*

$$h = \operatorname{ch} s e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \tilde{g} j,$$

$$\tilde{g} = \operatorname{ch} s e^{-i\varphi} \frac{\tilde{h} - \beta \tilde{h} j}{\sqrt{1-\beta^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \bar{h} j,$$

причем между параметрами α, β, $\operatorname{th} a$, $\operatorname{th} b$ векторов g и h и параметрами связи s, φ, ψ имеют место соотношения:

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\operatorname{th}^2 a} = \frac{1-\beta^2}{1-\operatorname{th}^2 b}, \tag{3.2}$$

$$0 \leqslant \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th} b - \operatorname{th} a}{\operatorname{th} b + \operatorname{th} a} < 1, \tag{3.3}$$

$$\operatorname{th}^2 s = \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2 \operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi}, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b} \operatorname{tg} \psi. \tag{3.5}$$

Отметим, что теорема 2 носит условный характер, так как пока неясно, являются ли требования двусторонне совместимыми. Имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы из равенства*

$$h = \operatorname{ch} s e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \tilde{g} j$$

вытекало

$$\tilde{g} = \operatorname{ch} s e^{-i\varphi} \frac{\tilde{h} - \beta \tilde{h} j}{\sqrt{1-\beta^2}} + \operatorname{sh} s e^{i\psi} \bar{h} j,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3.2), (3.4), (3.5).

Пусть теперь задан примарный вещественный множитель с полюсами в точках λ_0, $\bar{\lambda}_0$:

$$z_1(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

Будем среди примарных вещественных множителей с полюсами в точках $-\bar{\lambda}_0$, $-\lambda_0$ искать множитель, дополняющий $z_1(\lambda)$ до реактивного.

Правила отыскания дополняющего множителя сформулированы и доказаны в следующей теореме.

Теорема 4. *Для любого примарного вещественного множителя*

$$z_1(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

удовлетворяющего условию $|\alpha| < 1$, *существует и притом бесконечное множество, вещественных множителей первого ранга*

$$z_2(\lambda) = \left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

таких, что произведение

$$r(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

будет примарным реактивным множителем.

Построение любого правильно нормированного вектора h, порождающего дополняющий вещественный множитель, проводится следующим образом:

1. *По паре чисел (действительных)* α, $\operatorname{th} a$ *выбирается произвольно вторая пара чисел* β, $\operatorname{th} b$, *удовлетворяющая соотношениям:*

$$\frac{1-\alpha^2}{1-\operatorname{th}^2 a} = \frac{1-\beta^2}{1-\operatorname{th}^2 b},$$

$$0 \leqslant \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th} b - \operatorname{th} a}{\operatorname{th} b + \operatorname{th} a} < 1.$$

2. *Выбираем произвольно* ψ, *удовлетворяющее неравенству*

$$\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2\operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi} < 1.$$

3. *Определяем* $\operatorname{th} s$ *и* $\operatorname{tg}\varphi$ *по формулам*

$$\operatorname{th}^2 s = \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \cdot \frac{\operatorname{th}^2 b - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{th}^2 a + \operatorname{th}^2 b - 2\operatorname{th} a \operatorname{th} b \cos 2\psi},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b} \operatorname{tg}\psi.$$

4. *Строим вектор h, полагая*

$$h = \operatorname{ch} s\, e^{i\varphi} \frac{\bar{g} - \alpha \bar{g} j}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \operatorname{sh} s\, e^{i\psi} \tilde{g} j.$$

4°. В заключение докажем, что элементарный реактивный множитель $R(\lambda)$ разлагается на произведение примарных реактивных множителей. Рассмотрим

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{P}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}j}{\lambda + \lambda_0}\right) =$$
$$= Z_1(\lambda)\, Z_2(\lambda),$$

записанный в виде произведения двух вещественных элементарных множителей. Отщепим от $Z_1(\lambda)$, на основании теоремы 4 [2], примарный вещественный множитель, порожденный правильно нормированным ортом $g \in HP$, а от $Z_2(\lambda)$ — примарный вещественный множитель, порожденный ортом $h \in HQ$:

$$Z_1(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{P}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

$$Z_2(\lambda) = \left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQ_1 j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1 j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

и, следовательно,

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{P}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) \times$$

$$\times \left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQ_1 j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1 j}{\lambda + \lambda_0}\right).$$

Переставим местами второй и третий вещественные множители:

$$R(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\hat{q}j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\hat{\tilde{q}}j}{\lambda + \lambda_0}\right) \times$$

$$\times \left(I + \frac{2\sigma_0 \hat{P}_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \hat{\tilde{P}}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jQ_1 j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}_1 j}{\lambda + \lambda_0}\right).$$

Для того чтобы множитель

$$\left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\hat{q}j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\hat{\tilde{q}}j}{\lambda + \lambda_0}\right)$$

был реактивным, необходимо и достаточно, чтобы между векторами g и $\hat{h}$ $(\hat{q} = j\hat{h}^* \hat{h})$ существовала двусторонняя связь (3.1).

Таким образом, вопрос сводится к существованию вектора $h \in HQ$ такого, что g и $\hat{h}$ удовлетворяют соотношениям (3.1).

Однако, здесь целесообразнее воспользоваться другим критерием реактивности примарного множителя.

Из тождества $r(\lambda) \equiv Jjr^{-1'}(\lambda)\, j\, J$

$$\left(I + \frac{2\sigma_0 p}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{p}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda + \lambda_0}\right) =$$

$$= \left(I - \frac{2\sigma_0 j\bar{p}j}{\lambda + \bar{\lambda}_0}\right)\left(I - \frac{2\sigma_0 j\tilde{\bar{p}}j}{\lambda + \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{q}}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \tilde{\bar{q}}}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)$$

видно, что второй вещественный множитель, дополняющий первый до примарного реактивного, после перестановки его на первое место имеет вид:

$$\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{p}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{p}j}{\lambda+\lambda_0}\right).$$

Существенно то, что это условие является не только необходимым, но и достаточным для реактивности $r(\lambda)$.

Имея в виду этот критерий реактивности $r(\lambda)$ и производя над вещественными множителями перестановки, аналогичные перестановкам в теореме 4 [2], приходим к теореме.

Теорема 5. *Пусть дан элементарный реактивный множитель*

$$R(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{P}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 jQj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\times$$

$$\times\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{Q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)=Z_1(\lambda)\,Z_2(\lambda).$$

Для любого наперед заданного примарного вещественного множителя $\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$, *отщепляемого от* $Z_1(\lambda)$, *найдется один и только один вещественный примарный множитель* $\left(I-\frac{2\sigma_0 jqj}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\times$ $\times\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{q}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$, *отщепляемый от* $Z_2(\lambda)$, *такой, что после перестановки произведение*

$$r(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\tilde{p}}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\bar{p}j}{\lambda+\bar{\lambda}_0}\right)\left(I-\frac{2\sigma_0 j\tilde{p}j}{\lambda+\lambda_0}\right)$$

будет примарным реактивным множителем и будет отщепляться от $R(\lambda)$.

Повторяя $m-1$ раз $\{r(P_1)=m\}$ процесс отщепления, получаем разложение элементарного реактивного множителя на произведение m примарных множителей.

Таким образом, реактивная матрица-функция $W(\lambda)$ может быть разложена на произведение примарных реактивных множителей*.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступило 12. VI. 65

* Задача о разложении цепной матрицы-функции на примарные множители рассматривалась и в работах А. Г. Руткаса [3], [4]. Однако, ему удалось получить расщепление лишь в некоторых частных случаях.

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՌԵԱԿՏԻՎ ՄԱՏՐԻՑԱ-ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՒԼՏԻՊԼԻԿԱՏԻՎ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է J—երկայնող $W(\lambda)$ մատրիցա-ֆունկցիաների առաջին կարգի պարզագույն արտադրիչների վերլուծությանը։

Տրվում է պարզագույն իրական արտադրիչի $Z(\lambda)$ դաղափարը և ապացուցվում է թեորեմա J—երկայնող իրական ռացիոնալ մատրիցա-ֆունկցիալի պարզագույն իրական արտադրիչների վերլուծության մասին։

Դիտարկված են $z(\lambda)$ իրական լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

Նկարագրված է առաջին կարգի $z(\lambda)$ արտադրիչի ստրուկտուրան և նշված են նրա իրական լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանները։

Ապացուցված է կամայական պարզագույն իրական արտադրիչի՝ առաջին կարգի իրական արտադրիչների վերլուծելիության մասին թեորեման։

I. V. KOVALISHINA

MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF ANALYTICAL REACTANCE MATRIX—FUNCTIONS

Summary

This paper deals with the decomposition of J—stretching matrix functions into elementary factors of the first order.

The notion of elementary real factor ($Z(\lambda)$) is given and a theorem, concerning the decomposition of J-stretching real rational matrix functions into those factors, is proved.

Necessary and sufficient conditions are also stated under which $Z(\lambda)$ should be real.

We describe the structure of $Z(\lambda)$—a factor of first order—and point out necessary and sufficient conditions for the latter to be real.

We also prove a theorem relating to the decomposibility of an arbitrary elementary real factor into similar ones of the first order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Московского математического общества, 4, 1955.
2. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Мультипликативная структура аналитических вещественных J-растягивающих матриц-функций, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 6, 1965.
3. *А. Г. Руткас.* О цепочечном синтезе реактивного многополюсника, Труды Харьковского горного ин-та, XI, 1962, 89—94.
4. *А. Г. Руткас.* Передаточная матрица пассивного многополюсника, Труды Харьковского горного ин-та, XI, 1962.
5. *W. Cauer.* Theorie der linearen Wechselstroms-cha ltungen, Academie—Verlag Berlin, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 2 Математика

Г. А. ДАВТЯН

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ РЕГУЛЯРНЫХ Р-ГРУПП

В работе П. Е. Дюбюка [2] установлены оценки автоморфизмов, группы автоморфизмов устойчивых и правильно построенных р-групп.

Целью настоящей заметки является получение аналогичных оценок для регулярных р-групп.

Введем следующие определения.

Определение 1. Пусть Ф-подгруппа Фраттини конечной р-группы P, а $a_1, a_2, \cdots, a_r$ — базис фактор-группы P/Φ. Множество элементов $x_1, x_2, \cdots, x_r$, являющихся прообразами элементов $a_1, a_2, \cdots, a_r$, соответственно, при гомоморфизме $P \to P/\Phi$, называется минимальным базисом р-группы P.

Определение 2. Упорядоченное множество отличных от единицы элементов $y_1, y_2, \cdots, y_s$ группы G порядков $n_1, n_2, \cdots, n_s$, соответственно, называется базой единственности группы G, если каждый элемент x из G можно единственным образом представить в виде

$$x = y_1^{\alpha_1} \cdot y_2^{\alpha_2} \cdots y_s^{\alpha_s},$$

где

$$0 \leqslant \alpha_i < n_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, s).$$

Определение 3. Мы скажем, что минимальный базис р-группы P: $x_1; x_2, \cdots, x_r$ удовлетворяет условию А, если при любом $i \geqslant 0$ коммутант группы, порожденной элементами $x_1^{p^i}, x_2^{p^i}, \cdots, x_r^{p^i}$ принадлежит подгруппе, порожденной элементами $x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}}, \cdots, x_r^{p^{i+1}}$.

Из условия A и из регулярности р-группы P легко получается следующее равенство: $P^{(\alpha)} = \{x_1^{p^\alpha}, x_2^{p^\alpha}, \cdots, x_r^{p^\alpha}\}$, где $P^{(\alpha)}$ — подгруппа, состоящая из элементов группы P, возведенных в степень p^α.

Лемма. *Если некоторый минимальный базис $x_1, x_2, \cdots, x_r$ регулярной р-группы P удовлетворяет условию A, то всякий минимальный базис этой группы также удовлетворяет условию A.*

Доказательство. Пусть элементы $y_1, y_2, \cdots, y_r$ образуют произвольный минимальный базис группы P. Выразим элементы минимального базиса $x_1, x_2, \cdots, x_r$ через элементы минимального базиса $y_1, y_2, \cdots, y_r$:

$$x_j = y_{q_j} \cdot y_{r_j} \cdots y_{t_j}, \tag{1}$$

где $q_j, r_j, \cdots, t_j$ — целые числа, принадлежащие последовательности $1, 2, \cdots, r$. Пусть элементы $x_1, x_2, \cdots, x_r$ имеют порядки $p^{m_1}, p^{m_2}, \cdots, p^{m_r}$, соответственно, и $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r$.

Возведя обе части равенства (1) в степень p^{m_1-1} и воспользовавшись регулярностью группы P, получим:

$$x_j^{p^{m_1-1}} = y_{q_j}^{p^{m_1-1}} \cdot y_{r_j}^{p^{m_1-1}} \cdot \ldots \cdot y_{t_j}^{p^{m_1-1}} \cdot s^{p^{m_1-1}},$$

где $s \in K(P) \subseteq \{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_r^p\}$ на основании условия A, следовательно, $s^{p^{m_1-1}} = 1$.

Таким образом, для любого $j = 1, 2, \cdots, r$ имеем:

$$x_j^{p^{m_1-1}} = y_{q_j}^{p^{m_1-1}} \cdot y_{r_j}^{p^{m_1-1}} \cdot \ldots \cdot y_{t_j}^{p^{m_1-1}},$$

то есть

$$\{x_1^{p^{m_1-1}}, x_2^{p^{m_1-1}}, \cdots, x_r^{p^{m_1-1}}\} = \{y_1^{p^{m_1-1}}, y_2^{p^{m_1-1}}, \cdots, y_r^{p^{m_1-1}}\},$$

ибо

$$\{x_1^{p^{m_1-1}}, x_2^{p^{m_1-1}}, \cdots, x_r^{p^{m_1-1}}\} = P^{(m_1-1)}.$$

Далее, возведя обе части равенства (1) в степень p^{m_1-2}, получаем:

$$x_j^{p^{m_1-2}} = y_{q_j}^{p^{m_1-2}} \cdot y_{r_j}^{p^{m_1-2}} \cdot \ldots \cdot y_{t_j}^{p^{m_1-2}} \cdot s^{p^{m_1-2}}.$$

Аналогично предыдущему устанавливаем, что элемент $s^{p^{m_1-2}}$ принадлежит подгруппе

$$P^{(m_1-1)} = \{x_1^{p^{m_1-1}}, x_2^{p^{m_1-1}}, \cdots, x_r^{p^{m_1-1}}\} = \{y_1^{p^{m_1-1}}, y_2^{p^{m_1-1}}, \cdots, y_r^{p^{m_1-1}}\}.$$

Следовательно, элементы $x_j^{p^{m_1-2}}$ принадлежат подгруппе $\{y_1^{p^{m_1-2}}, y_2^{p^{m_1-2}}, \cdots, y_r^{p^{m_1-2}}\}$ и потому

$$\{x_1^{p^{m_1-2}}, x_2^{p^{m_1-2}}, \cdots, x_r^{p^{m_1-2}}\} = \{y_1^{p^{m_1-2}}, y_2^{p^{m_1-2}}, \cdots, y_r^{p^{m_1-2}}\}.$$

Продолжая таким же образом получим, что при любом i

$$\{x_1^{p^i}, x_2^{p^i}, \cdots, x_r^{p^i}\} = \{y_1^{p^i}, y_2^{p^i}, \cdots, y_r^{p^i}\}.$$

Это и есть необходимое и достаточное условие того, чтобы минимальный базис $y_1, y_2, \cdots, y_r$ группы P удовлетворял условию A [2]. Для краткости будем говорить, что p-группа удовлетворяет условию A, если ее минимальные базисы удовлетворяют условию A.

Теорема 1. *Регулярная p-группа P тогда и только тогда удовлетворяет условию A, когда число элементов минимального базиса равно числу элементов базы единственности.*

Доказательство. Пусть регулярная p-группа P удовлетворяет условию A, тогда

$$\Phi(P) = \{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_r^p\},$$

где $\Phi(P)$ — подгруппа Фраттини группы P, а $x_1, x_2, \cdots, x_r$ — некоторый минимальный базис этой группы.

Но $P^{(1)} \subseteq \Phi(P)$, поэтому имеет место также следующее равенство:

$$P^{(1)} = \{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_r^p\}.$$

Составим ряд подгрупп группы P:

$$P^{(1)} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_r = P, \tag{2}$$

где подгруппа L_i порождена элементами

$$x_1, x_2, \cdots, x_i, x_{i+1}^p, \cdots, x_r^p \quad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

Покажем, что при любом i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ множество смежных классов группы L_i по подгруппе L_{i-1} порождает фактор-группу L_i / L_{i-1} порядка p. Так как $K(L_i) \subset L_0 \subset L_{i-1}$ (на основании условия A), то подгруппа L_{i-1} инварианта в L_i. Далее, любой элемент z подгруппы L_i является конечным произведением из элементов вида

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \cdots, x_i^{\alpha_i}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}p}, \cdots, x_r^{\alpha_r p},$$

а так как элементы

$$x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \cdots, x_i^{\alpha_i p}, x_{i+1}^{\alpha_{i+1}p}, \cdots, x_r^{\alpha_r p}$$

принадлежат подгруппе L_{i-1}, а L_{i-1} инвариантна в L_i, то смежный класс zL_{i-1} имеет вид $x_i^{\alpha_i} L_{i-1}$. Тем самым доказано, что порядок фактор-группы L_i / L_{i-1} не выше p.

Но подгруппа L_i не может совпасть с L_{i-1}, ибо, исключив из ряда (2) повторяющиеся члены, мы получили бы отрезок композиционного ряда с циклическими факторами порядка p, а подгруппа имела бы базу единственности, состоящую из меньшего числа элементов, чем r, что не верно.

Таким образом, число элементов базы единственности равно r [3].

Обратно, пусть база единственности $x_1, x_2, \cdots, x_r$ регулярной p-группы P является также ее минимальным базисом. Тогда любой элемент группы единственным образом выражается в виде

$$x_r^{\alpha_r} \cdot x_{r-1}^{\alpha_{r-1}} \cdots x_2^{\alpha_2} \cdot x_1^{\alpha_1}. \tag{3}$$

Если хотя бы одно из чисел α было бы не сравнимо с нулем по модулю p, то элемент (3) был бы образующим элементом этой группы. Поэтому для того чтобы элемент (3) принадлежал подгруппе Фраттини группы P необходимо, чтобы все числа α были бы сравнимы с нулем по модулю p. Но такой элемент принадлежит подгруппе $\{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_r^p\}$. Таким образом, $\Phi(P) = \{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_r^p\} = P^{(1)}$. Отсюда следует, что $K(P) \subseteq P^{(1)}$.

Пусть элементы $x_1, x_2, \cdots, x_r$ имеют порядки, соответственно, $p^{m_1}, p^{m_2}, \cdots, p^{m_r}$ $(m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_r)$. Если $m_1 = m_2 = \cdots = m_r = 1$, то группа P является элементарной абелевой группой и доказывать

нечего. В противном случае, пусть m_s — последний показатель, превосходящий 1, тогда $P^{(1)} = \{x_1^p, x_2^p, \cdots, x_s^p\}$, где элементы $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_s^p$ составляют базу единственности для группы $P^{(1)}$ [3].

Докажем, что эти элементы составляют также минимальный базис группы $P^{(1)}$. Допустим, что для некоторого k $(1 \leqslant k \leqslant s)$

$$x_k^p \in \{x_1^p, \cdots, x_{k-1}^p, x_{k+1}^p, \cdots, x_s^p\}, \quad \text{то есть}$$

$$P^{(1)} = \{x_1^p, \cdots, x_{k-1}^p, x_{k+1}^p, \cdots, x_s^p\}.$$

Составим ряд с циклическими факторами:

$$P^{(1)} \subset \{x_1, x_2^p, \cdots, x_{k-1}^p, x_{k+1}^p, \cdots, x_s^p\} \subset \cdots$$

$$\cdots \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_s\}.$$

Таким образом, получаем, что группа

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_s\}$$

удовлетворяет условию A, а указанные элементы составляют ее минимальный базис. Построенный ряд показывает, что элементы $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_s$ составляют также базу единственности группы $\{x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_s\}$, откуда следует, что элементы $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_{k-1}^p, x_{k+1}^p, \cdots, x_s^p$ составляют базу единственности группы $P^{(1)}$, что противоречит теореме об инвариантности числа элементов базы единственности [4], так как выше было доказано, что элементы $x_1^p, \cdots, x_k^p, \cdots, x_s^p$ также составляют базу единственности группы $P^{(1)}$. Группа $P^{(1)}$ удовлетворяет условиям сформулированной теоремы. Повторяя для нее те же рассуждения, мы получим, что $\Phi(P^{(1)}) = P^{(2)}$, причем минимальный базис и база единственности группы $P^{(2)}$ состоят из элементов $x_1^{p^2}, x_2^{p^2}, \cdots, x_{s_1}^{p^2}$ $(s_1 \leqslant s)$, где $x_{s_1}^{p^2} \neq 1$, а следующие за ним элементы минимального базиса группы P имеют порядок не больший, чем p^2, и вообще: $\Phi(P^{(l)}) = P^{(l+1)} = \{x_1^{p^{l+1}}, \cdots, x_{s_l}^{p^{l+1}}\}$, где элементы $x_1^{p^{l+1}}, \cdots, x_{s_l}^{p^{l+1}}$ составляют минимальный базис и базу единственности группы $P^{(l+1)}$. Учитывая, что при любом $i \geqslant 0$ $K(P^{(l)}) \subseteq \Phi(P^{(l)})$, доказательство теоремы можно считать законченным.

Для доказательства следующей теоремы удобно записать базис группы P в следующем виде:

$$x_{m_1 1}, \cdots, x_{m_1 n_1}, \cdots, x_{m_l 1}, \cdots, x_{m_l n_l}, \cdots x_{m_r 1}, \cdots x_{m_r n_r}, \tag{4}$$

где элемент $x_{m_l j}$ имеет порядок p^{m_l}, а n_l — число таких элементов. Причем для любого $i = 1, 2, \cdots, r-1$ мы считаем $p^{m_l} > p^{m_{l+1}}$.

Теорема 2. *Пусть элементы (4) составляют минимальный базис регулярной p-группы P, удовлетворяющий условию A. Тогда*

порядок автоморфизма этой группы или делится на p, или является делителем числа

$$(p^{n_k}-1)\cdot(p^{n_k}-p)\cdots(p^{n_k}-p^{n_k-1}).$$

где n_k — наибольшее из чисел $n_1, n_2, \cdots, n_r$.

Для доказательства этой теоремы нужно составить ряд характеристических подгрупп $1 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P$ с элементарными абелевыми фактор-группами. Тогда если обозначить максимальный индекс этого ряда через p^x, то, как известно [1], порядок автоморфизма этой группы или делится на p или является делителем числа $(p^x-1)\times$ $\times(p^x-p)\cdots(p^x-p^{x-1})$.

Нетрудно заметить, что для регулярных p-групп такой ряд достаточно составить начиная с группы $P^{(1)}$. Для регулярной p-группы P, удовлетворяющей условию A, с минимальным базисом (4) составим следующий ряд:

$$P^{(1)}=P_r \subset P_{r-1} \subset \cdots \subset P_{s+1} \subset P_s \subset \cdots \subset P_0=P,$$

где подгруппа P_s порождена элементами

$$x^p_{m_1 1}, \cdots, x^p_{m_1 n_1}, \cdots, x^p_{m_s 1}, \cdots, x^p_{m_s n_s}, x_{m_{s+1} 1}, \cdots, x_{m_r n_r}.$$

Тот факт, что фактор-группы P_s/P_{s+1} — элементарные абелевые группы, вытекает из изоморфизма

$$P_s/P_{s+1} \approx P_s/P_r \,/\, P_{s+1}/P_r.$$

Следовательно, остается доказать, что подгруппы P_s являются характеристическими подгруппами группы P. Докажем это методом индукции. Очевидно, что подгруппа $P_r=P^{(1)}$ является характеристической подгруппой. Пусть P_{s+1} является характеристической подгруппой. Докажем, что тогда подгруппа P_s также будет характеристической. Фактор-группа P_s/P_{s+1} порождается элементами $x_{m_{s+1}1}P_{s+1}$, $x_{m_{s+1}2}P_{s+1}, \cdots, x_{m_{s+1}n_{s+1}}P_{s+1}$, поэтому любой элемент x подгруппы P_s имеет вид:

$$x=x^{\alpha_p}_{m_{s+1}p}\cdot x^{\alpha_q}_{m_{s+1}q}\cdots x^{\alpha_t}_{m_{s+1}t}\cdot b,$$

где $p, q, \cdots, t$—целые числа, принадлежащие последовательности $1, 2, \cdots, n_{s+1}$, а числа α_i — некоторые положительные целые числа. Любой автоморфизм α группы P переводит этот элемент в элемент

$$x^\alpha=x^{\alpha_p\alpha}_{s+1p}\cdot x^{\alpha_q\alpha}_{m_{s+1}q}\cdots x^{\alpha_t\alpha}_{m_{s+1}t}\cdot b^\alpha,$$

где $b^\alpha \in P_{s+1}$, ибо P_{s+1} — характеристическая подгруппа (по допущению). Отсюда, для завершения доказательства теоремы, достаточно показать, что при любом i $(1 \leqslant i \leqslant n_{s+1})$ элемент $x^{\alpha_i\alpha}_{m_{s+1}i}$ принадлежит

подгруппе P_s. Можно доказать, что элемент $x_{m_{s+1}l}^{a_{l'}^{2}}$, являясь элементом порядка $p^{m_{s+1}}$, принадлежит подгруппе

$$P_{(m_{s+1})} = \{x_{m_1 1}^{p^{m_1-m_{s+1}}}, \ldots, x_{m_1 n_1}^{p^{m_1-m_{s+1}}}, \ldots, x_{m_r 1}^{p^{m_1-m_{s+1}}}, \ldots, x_{m_r n_r}^{p^{m_1-m_{r+1}}}\}.$$

Отсюда вытекает, что $x_{m_{s+1}l}^{a_{l'}^{2}}$ принадлежит также подгруппе P_s, ибо $P_{(m_{s+1})} \subset P_s$, что и требовалось доказать.

Из того, что группы P_s являются характеристическими, а фактор-группы

$$P/P^{(1)}, \quad P_1/P^{(1)}, \ldots, P_{r-1}/P^{(1)},$$

элементарно-абелевыми группами, вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть P — регулярная группа порядка p^n, удовлетворяющая условию А. Тогда порядок группы автоморфизмов $A(P)$ группы P есть делитель числа*

$$p^{d(n-d)} \cdot (p^d - p^{d-n_1}) \cdot (p^d - p^{d-n_1+1}) \cdots (p^d - p^{d-1}) \cdot$$
$$\cdot (p^{d-n_1} - p^{d-n_1-n_2}) \cdot (p^{d-n_1} - p^{d-n_1-n_2+1}) \cdots (p^{d-n_1} - p^{d-n_1-1}) \cdot$$
$$\cdot \cdot \cdot \

In the present paper we give necessary and sufficient conditions so that these numbers should be equal.

We also point out estimates (like those for Abelian p-groups) of automorphism and automorphism group order for p-groups satisfying the above-mentioned conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *О. Ю. Шмидт*. Абстрактная теория групп, М., Гостехиздат, 1933 г.
2. *П. Е. Дюбюк*. Об автоморфизмах p-групп, Мат. сборник 18(60), № 2, 1964 г.
3. *Ш. С. Кемхадзе*. Базы единственности в бесконечных регулярных p-группах, Укр. мат. журнал, 4, 1952 г.
4. *P. Hall*. A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc. (2) 36, 1933 г.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Էջ

Հ. Ց. Տումարկին. *Ֆիքսված բևեռներ ունեցող կոտորակներով մոտարկվող ֆունկցիաների դասի նկարագրումը* 89

Մ. Մ. Ջրբաշյան. *Ռացիոնալ ֆունկցիաների օրթոգոնալ սիստեմները շրջանագծի վրա* 106

Կ. Ա. Արգարյան. *Գծային դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի ասիմպտոտիկ ճեղքման մեթոդը* 126

Ի. Վ. Կովալիշինա. *Անալիտիկ ռեակտիվ մատրիցա-ֆունկցիաների մուլտիպլիկատիվ ստրուկտուրան* 138

Գ. Հ. Դավթյան. *Ռեգուլյար p-խմբերի ավտոմորֆիզմների մասին* 147

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Г. Ц. Тумаркин. Описание класса функций, допускающих приближение дробями с фиксированными полюсами 89

М. М. Джрбашян. Ортогональные системы рациональных функций на окружности 106

К. А. Абгарян. Метод асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений 126

И. В. Ковалишина. Мультипликативная структура аналитических реактивных матриц-функций 138

Г. А. Давтян. Об автоморфизмах регулярных p-групп 147

CONTENTS

Page

G. C. Tumarkin. The description of the class of functions which can be approximated by rational functions with preassigned poles 89

M. M. Džrbašian. Orthonormal sets of rational functions on the unit circle . . 106

K. A. Abgarian. A method of asymptotical splitting of a linear differential equations system 126

I. V. Kovalishina. Multiplicative structure of analytical matrix—functions . . . 138

G. H. Davtian. On the automorphism of regular p-groups 147

Технический редактор Л. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04213. Подписано к печати 12/VII 1966 г. Тираж 730 экз. Изд. № 2701. Зак. 170.
Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Печ. л. 4¹/₈. Бум. л. 2,06. Усл. печ. л. 5,65.
Уч. изд. лист. 4,8.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, ул. Барекамутян, 24