ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ
МАТЕМАТИКА

Ի ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ ՀԵՂԻՆԱԿՆԵՐԻ

Խմբագրությունը խնդրում է այն անձանց, որոնք ցանկանում են հոդվածներ հրապարակել Հայկական ՍՍՌ գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր սերիա «Մաթեմատիկա» ամսագրում, հաշվի առնել հետևյալ կանոնները՝

1. Հոդվածները պետք է ներկայացվեն գրամեքենագրված, երկու օրինակով։ Ռուսերեն (հայերեն) ներկայացված հոդվածին անհրաժեշտ է կցել ամփոփումներ հայերեն և անգլերեն (ռուսերեն և անգլերեն) լեզուներով։

Օտարերկրյա հեղինակների հոդվածները, իրենց ցանկությամբ, կարող են հրապարակվել համապատասխան լեզվով։

2. Մեծատառ լատինական տառերը, որոնք միանման են համանուն փոքրատառերին, պետք է ընդգծվեն սև մատիտով երկու գծիկով ներքևում, իսկ փոքրատառերը՝ երկու գծիկով վերևում։

Հունական տառերը պետք է ընդգծվեն կարմիր մատիտով, ինդեքսները շրջանցվեն սև մատիտով, իսկ կուրսիվ տառերը ընդգծվեն ալիքաձև գծով։

3. Գծագրերը ներկայացվում են առանձին էջերի վրա, երկու օրինակով, նշելով նրանց համարը և տեղը տեքստում էջի ձախ մասում։

4. Գրականությունը տեղավորվում է հոդվածի վերջում, ընդ որում, գրքերի համար նշվում է՝ հեղինակը, գրքի անունը, հրատարակման տեղը, հրատարակչությունը, հրատարակման տարեթիվը և էջերը, հոդվածների համար նշվում է՝ հեղինակը, հոդվածի անունը, ամսագիրը, համարը և տարեթիվը։

Օգտագործված գրականությունը նշվում է քառակուսի փակագծերում, տեքստի համապատասխան տեղում։

5. Սրբագրության ժամանակ հեղինակի կողմից կատարված քիչ թե շատ զգալի փոփոխությունները (օրիգինալի նկատմամբ) չեն թույլատրվում։

6. Հոդվածը վերամշակման նպատակով հեղինակին վերադարձնելու դեպքում, որպես հոդվածի ստացման ժամկետ համարվում է վերջնական տեքստի ստացման օրը։

7. Հոդվածի մերժման դեպքում հեղինակին վերադարձվում է ձեռագրի մեկ օրինակը և խմբագրությունը իրավունք է վերապահում չզբաղվել մերժման պատճառների պարզաբանումով։

8. Հոդվածի վերջում անհրաժեշտ է նշել այն հիմնարկի լրիվ անունը, որտեղ կատարված է տվյալ աշխատանքը։

9. Հեղինակը պետք է ստորագրի հոդվածը, նշի իրեն լրիվ հասցեն, անունը և հայրանունը։

10. Հեղինակներին ուղարկվում է անվճար նրանց հոդվածի 25 առանձնատիպեր։

Խմբագրության հասցեն՝ Երևան, Բարեկամության 24, գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագիր, սերիա «Մաթեմատիկա»։

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция просит авторов, желающих опубликовать статьи в журнале Известия АН Армянской ССР, серия «Математика», придерживаться следующих правил.

1. Статьи должны быть представлены в двух экземплярах, отпечатанные на машинке. К статьям, представленным на русском (армянском) языке должны быть приложены резюме на армянском и английском (русском и английском) языках.

Статьи зарубежных авторов, по их желанию, могут быть опубликованы на соответствующем языке

2. Прописные латинские буквы, одинаковые по начертанию со строчными, должны быть подчеркнуты черным карандашом двумя черточками снизу, а строчные — двумя черточками сверху. Греческие буквы должны быть подчеркнуты красным карандашом, а индексы обведены соответствующими дужками черным карандашом, курсивные буквы должны быть подчеркнуты волнистой линией.

3. Чертежи представляются на отдельных листах в двух экземплярах с указанием их номеров и места в тексте на левом поле страницы.

4. Цитированная литература помещается в конце статьи, при этом должны быть указаны: для книг—инициалы и фамилия автора, название, место издания, издательство, год издания, страницы; для статей—инициалы и фамилия автора, название статьи, журнал, том, выпуск (номер) и год издания. Ссылка на какой-нибудь из цитируемых источников указывается цифрой в квадратных скобках в соответствующем месте текста.

5. В корректуре не допускается сколько-нибудь сложная авторская правка (против оригинала), могущая повлечь за собой переверстку статьи.

6. В случае возвращения автору его рукописи для доработки датой поступления считается день получения редакцией окончательного варианта статьи.

7. В случае, если статья отклонена редакцией, автору возвращается один экземпляр рукописи, и редакция оставляет за собой право не вести дискуссию по мотивам ее отклонения.

8. В конце статьи должно быть указано полное название учреждения, где выполнена работа.

9. Рукопись подписывается автором с указанием его адреса, фамилии, имени и отчества.

10. Авторам бесплатно высылается 25 отдельных оттисков статьи.

Адрес редакции: Ереван, ул. Барекамутян, 24, Редакция Известий АН Армянской ССР, серия «Математика».

ЦЕНА 30 К. ИНДЕКС 77735

TO THE AUTHORS NOTICE

Contributors who desire to have their articles published in the proceedings ...vestia of the Academy of Sciences of the Armenian S.S.R., series „Matematika" ...e requested to abide by the following regulations:

1. The articles to be submitted should be typed, doublespace, in duplicate. Pa...rs in Russian should be provided with summaries in Armenian and English, and, if in ...rmenian, they should be furnished with Russian and English summaries. The articles ...foreign contributors could be published in the respective foreign language.

2. Latin capital letters, identical with the corresponding characters, should be ...derlined twice in black pencil, whereas small letters should carry two similar lines ...ove. Greek letters are to be underlined in red pencil, italics—with a heavy line, ...d indexes should be supplied with appropriate arcs in black pencil.

3. Draughts are to be submitted on separate sheets in duplicate with numbers ...d locations indicated on the left-hand margin of the text.

4. The reference list should supplement the article. In case of books, the aut...r's initials and name, the title of the book, the place of publication, the publisher, ...e date and page must be indicated. If it is an article, the author's initials and name, ...e title of the article, the journal, the volume, the number and date of the publication ...ould be marked. Reference to a quoted source is to be indicated by a numeral in ...uare brackets properly inserted in the text.

5. No substantial corrections by authors are allowed on the proofsheet, that ...ould call for repaging of the article.

6. In case a manuscript is returned to its author for elaboration, the day the ...al version arrives at the editorial office is considered the date of receipt.

7. Only one copy of a declined article is returned to its author, the editorial ...fice reserving the right to discuss the motives thereof.

8. The article should contain the full name of the establishment where the work ...s been carried out.

9. Every manuscript is to bear its author's signature, address and the name ...full.

10. Authors are entitled to twenty-five free reprints of their articles.

Editorial address:
Izvestia, series „Matematika",
Academy of Sciences of Armenia,
24, Barekamutian St.,
Yerevan, Soviet Armenia

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОКРУЖНОСТИ

В настоящей статье* устанавливаются алгебраические свойства систем рациональных функций, всевозможные полюсы которых лежат на заданной последовательности точек вне единичного круга, и ортонормальных на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$. В предельном случае, когда все полюсы системы отождествляются с бесконечно удаленной точкой, установленные здесь теоремы сводятся к соответствующим хорошо известным утверждениям теории ортогональных с весом на единичной окружности полиномов, развитой в работах Г. Сеге [2]—[3].

§ 1. Построение ортогональной системы. Функциональные свойства ядер распределения $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$

1.1. Пусть $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной или даже бесконечной кратности (причем не обязательно подряд).

С последовательностью $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ассоциируем две последовательности целых положительных чисел $\{\nu_k\}_0^\infty$ и $\{p_k\}_0^\infty$, где при данном $k\geqslant 0$ ν_k означает кратность появления числа α_k в группе чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$, а p_k определяется из условий

$$p_k=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha_k\neq 0\\ \nu_k, & \text{если } \alpha_k=0\end{cases}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{1.1}$$

Наконец, последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ ставим в соответствие последовательность рациональных функций

$$\left\{\frac{z^{p_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{\nu_k}}\right\}_0^\infty. \tag{1.2}$$

Отметим, что при данном $k\geqslant 0$ функция $z^{p_k-1}(1-\bar{\alpha}_k z)^{-\nu_k}$ имеет только один полюс порядка ν_k в точке $z=\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\left(\left|\frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right|>1\right)$, если

* Содержащиеся здесь результаты без доказательств были анонсированы в заметке [1].

$\alpha_k \neq 0$; если же $\alpha_k = 0$, то полюс этот лежит в точке $z = \infty$ и имеет порядок $p_k - 1$.

Заметим также, что в крайнем случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, очевидно, $\nu_k = p_k = k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, ввиду чего у нас нулевой последовательности $\{0\}_0^\infty$ будет ставиться в соответствие последовательность степеней $\{z^k\}_0^\infty$.

Назовем системой Мальмквиста, ассоциированной с последовательностью чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$, систему рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, где

$$\varphi_0(z) = \frac{(1 - |\alpha_0|^2)^{1/2}}{1 - \bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z) = \frac{(1 - |\alpha_n|^2)^{1/2}}{(1 - \bar{\alpha}_n z)} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - z}{1 - \bar{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1.3}$$

полагая при этом, что при $\alpha_k = 0$ $\dfrac{|\alpha_k|}{\alpha_k} = \dfrac{\bar{\alpha}_k}{|\alpha_k|} = -1.$

Известно, что эта система ортонормальна на единичной окружности в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)}\, dx = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots; z = e^{ix}). \tag{1.4}$$

Элементарными рассуждениями легко убедиться в том, что система функций $\{\varphi_n(z)\}_0^\infty$ представляет собой результат ортогонализации упорядоченной последовательности рациональных функций (1.2) на единичной окружности $z = e^{ix}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ при наличии веса $\dfrac{1}{2\pi} dx$. Отсюда легко следует, что при любом $n \geqslant 0$ справедливы представления вида

$$\frac{z^{p_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_n z)^{\nu_k}} = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \varphi_k(z), \quad a_n^{(n)} \neq 0,$$

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} \frac{z^{p_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^{\nu_k}}, \quad b_n^{(n)} \neq 0. \tag{1.5}$$

1.2. Пусть $\alpha(x)$—произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[-\pi, \pi]$ с бесконечным множеством точек роста.

Мы будем ортогонализировать упорядоченную последовательность рациональных функций (1.2) на окружности $z = e^{ix}$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ при наличии веса $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$.

Но из формул (1.5), очевидно, следует, что применение процесса ортогонализации с весом $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$ на единичной окружности соответственно к упорядоченным последовательностям функций

$$\left\{\frac{z^{p_k-1}}{(1-\bar{a}_k z)^{\nu_k}}\right\}_0^\infty \quad \text{и} \quad \{\varphi_k(z)\}_0^\infty,$$

приведет нас к одной и той же ортонормальной системе.

Таким образом, мы получим последовательность рациональных функций $\{\Phi(z)\}_0^\infty$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции нашей системы единственным образом:

а) $\Phi_n(z)$ есть „полином порядка n" от первых $n+1$ функций Мальмквиста

$$\Phi_n(z)=\sum_{k=0}^{n} c_{k,n}\varphi_k(z), \quad c_{1,n}>0, \tag{1.6}$$

б)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\,d\alpha(x)=\delta_{n,m}, \quad z=e^{ix} \quad (n, m=0, 1, 2,\cdots). \tag{1.7}$$

Обозначим

$$(\varphi_p, \varphi_q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p(z)\overline{\varphi_q(z)}\,d\alpha(x), \quad z=e^{ix} \quad (p, q=0, 1, 2,\cdots) \tag{1.8}$$

и введем в рассмотрение определители Грамма

$$D_0=(\varphi_0, \varphi_0), \quad D_n=\begin{vmatrix}(\varphi_0, \varphi_0)\cdots(\varphi_0, \varphi_n)\\(\varphi_1, \varphi_0)\cdots(\varphi_1, \varphi_n)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\varphi_n, \varphi_0)\cdots(\varphi_n, \varphi_n)\end{vmatrix} \quad (n=1, 2,\cdots). \tag{1.9}$$

Ввиду того, что каждая конечная часть $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ счетной системы функций $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ линейно-независима, можно утверждать, что все определители D_n $(n=0, 1, 2,\cdots)$ положительны.

Следовательно, пользуясь формулами ортогонализации Э. Шмидта, искомые функции системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ можно представить в виде:

$$\Phi_0(z)=\frac{\varphi_0(z)}{\sqrt{D_0}},$$

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}}\begin{vmatrix}(\varphi_0, \varphi_0)\cdots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & (\varphi_0, \varphi_n)\\(\varphi_1, \varphi_0)\cdots & (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & (\varphi_1, \varphi_n)\\\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\(\varphi_{n-1}, \varphi_0)\cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) & (\varphi_{n-1}, \varphi_n)\\\varphi_0(z)\cdots & \varphi_{n-1}(z) & \varphi_n(z)\end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

Для дальнейших наших целей мы введем специальные обозначения для крайних коэффициентов функции $\Phi_n(z)$ в ее разложении (1.6) по функциям Мальмквиста. А именно: положим

$$k_n = c_{n,n} \quad \text{и} \quad l_n = c_{0,n}. \tag{1.11}$$

Из формул (1.10), очевидно, имеем

$$k_n = (D_{n-1}/D_n)^{1/2} \tag{1.12}$$

$$l_n = (-1)^n (D_{n-1} D_n)^{-1/2} \begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_1) \cdots (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_1) \cdots (\varphi_1, \varphi_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_1) \cdots (\varphi_{n-1}, \varphi_n) \end{vmatrix}, \tag{1.13}$$

где следует положить $D_{-1} = 1$.

В заключение отметим, что так как в частном случае, когда $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, система Мальмквиста переходит в систему степеней $\{z^k\}_0^\infty$, то при этом ортогональная с весом $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$ система рациональных функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ переходит в систему полиномов Г. Сеге — $\{P_k(z)\}$, ортогональных с тем же весом

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \overline{P_m(z)} \, d\alpha(x) = \delta_{n,m}, \quad z = e^{ix} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.14}$$

1.3. Приведем теперь несколько лемм об экстремальных свойствах ортогональной системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ и ассоциированных с нею так называемых *ядер распределения* $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$:

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)} \, \Phi_k(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Отметим, что эти свойства представляют собой аналоги соответствующих хорошо известных экстремальных свойств полиномов Г. Сеге.

Предварительно условимся обозначать через $M\{\alpha_k\}_0^n$ всевозможные линейные комбинации от системы функций Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, где $n \geqslant 0$ фиксировано, т. е. множество рациональных функций вида

$$R_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z), \tag{1.16}$$

где $\{c_k\}_0^n$ — произвольные комплексные числа, называя также эти функции *обобщенными полиномами Мальмквиста порядка n*.

Заметим, далее, что из общих положений теории ортогональных систем вытекает, что не только при любом $n \geqslant 0$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_{k,n} \varphi_k(z), \qquad c_{n,n} > 0, \tag{1.17'}$$

но и обратно:

$$\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{n} d_{k,n}\Phi_k(z),\qquad d_{n,n}\neq 0. \tag{1.17''}$$

Поэтому любая функция $R_n(z)\in M\{\alpha_k\}_0^n$ представима также в виде

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{n} d_k\Phi_k(z). \tag{1.18}$$

Лемма 1. *В классе функций* $M\{\alpha_k\}_0^n$ *вида*

$$Q_n(z)=\varphi_n(z)+a_1\varphi_{n-1}(z)+\cdots+a_n\varphi_0(z) \tag{1.19}$$

минимум функционала

$$\mu(Q_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Q_n(z)|^2\,d\alpha(x),\qquad z=e^{ix}, \tag{1.20}$$

реализует функция

$$Q_n^{(0)}(z)=k_n^{-1}\Phi_n(z), \tag{1.21}$$

причем

$$\min\mu(Q_n)=\mu(Q_n^{(0)})=\mu_n=k_n^{-2}=\frac{D_n}{D_{n-1}}. \tag{1.22}$$

В самом деле, пользуясь формулами (1.17''), заключаем, что функция $Q_n(z)$ представима также в виде

$$Q_n(z)=\sum_{p=0}^{n} v_p\Phi_p(z), \tag{1.19'}$$

где коэффициенты $\{v_p\}_0^{n-1}$ произвольны, а $v_n=k_n^{-1}$.

Ввиду ортонормальности системы $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ в смысле (1.7) из представления (1.19') следует:

$$\mu(Q_n)=\sum_{k=0}^{n-1}|v_p|^2+k_n^{-2}>k_n^{-2},$$

причем неравенство переходит в равенство лишь при условии $v_0=v_1=\cdots=v_{n-1}=0$. Этим, очевидно, и завершается доказательство.

Лемма 2. *Пусть* $\zeta\neq 1/\bar{\alpha}_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$*—произвольное фиксированное число.*

В семействе функций $\{P(z)\}\in M\{\alpha_k\}_0^n$, *удовлетворяющих дополнительному условию*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|P_n(z)|^2\,d\alpha(x)=1,\qquad z=e^{ix}, \tag{1.23}$$

максимум функционала

$$L(P_n) = |P_n(\varsigma)|^2 \tag{1.24}$$

реализует функция

$$P_n^{(0)}(z) = \varepsilon \frac{S_n(\varsigma; z)}{\sqrt{S_n(\varsigma; \varsigma)}} \quad (|\varepsilon| = 1), \tag{1.25}$$

где, согласно (1.15),

$$S_n(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z),$$

причем

$$L(P_n^{(0)}) = \max L(P_n) = S_n(\varsigma; \varsigma). \tag{1.26}$$

Действительно, представляя функцию $P_n(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ в виде

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} p_k \Phi_k(z),$$

в силу условия (1.23), получим

$$\sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 = 1.$$

Но тогда по неравенству Коши

$$|P_n(\varsigma)|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |p_k|^2 \cdot \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = S_n(\varsigma; \varsigma),$$

причем здесь знак равенства возможен лишь в том случае, когда

$$p_k = c\, \overline{\Phi_k(\varsigma)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

т. е. при

$$P_n(z) = P_n^{(0)}(z) = c \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z) = c\, S_n(\varsigma; z),$$

где c—постоянная.

Значение этой постоянной определяется из условия (1.23)

$$\mu(P_n^{(0)}) = |c|^2 \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = 1,$$

откуда следует, что

$$c = \frac{\varepsilon}{\sqrt{S_n(\varsigma; \varsigma)}} \quad (|\varepsilon| = 1).$$

Этим и завершается доказательство леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\varsigma \neq 1/\overline{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ *и* A_0*—произвольные, но фиксированные постоянные.*

В семействе функций $R(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$, *удовлетворяющих дополнительному условию*

$$R_n(\varsigma) = A_0, \tag{1.26'}$$

минимум функционала

$$\mu(R_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |R_n(z)|^2 d\alpha(x), \qquad z = e^{ix}, \tag{1.27}$$

реализует функция

$$R_n^{(0)}(z) = A_0 \frac{S_n(\varsigma; z)}{S_n(\varsigma; \varsigma)}, \tag{1.28}$$

причем

$$\mu(R_n^{(0)}) = \min_{\{R_n\}} \mu(R_n) = \frac{|A_0|^2}{S_n(\varsigma; \varsigma)}. \tag{1.29}$$

Представляя функцию $R_n(z) \in M\{a_k\}_0^n$ в виде (1.19′), имеем

$$\mu(R_n) = \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2,$$

причем условие (1.26) означает, что

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \Phi_k(\varsigma) = A_0.$$

Отсюда по неравенству Коши получим

$$|A_0|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} |v_k|^2 \sum_{k=0}^{n} |\Phi_k(\varsigma)|^2 = \mu(R_n) S_n(\varsigma; \varsigma),$$

т. е.

$$\mu(R_n) \geqslant \frac{|A_0|^2}{S_n(\varsigma; \varsigma)},$$

причем здесь знак равенства возможен лишь при

$$v_k = c\,\overline{\Phi_k(\varsigma)} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

Следовательно, экстремальная функция имеет вид

$$R_n(z) = R_n^{(0)}(z) = c \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\, \Phi_k(z) = c\, S_n(\varsigma; z).$$

Значение постоянной c определяется из условия (1.26′):

$$R_n^{(0)}(\varsigma) = c\, S_n(\varsigma; \varsigma) = A_0,$$

т. е.

$$c = \frac{A_0}{S_n(\varsigma; \varsigma)},$$

и лемма доказана.

Ядра $S_n(\varsigma; z)$ распределения $(2\pi)^{-1} d\alpha(x)$, участвующие в решении двух последних экстремальных задач, могут быть охарактеризованы следующим их важным свойством.

Лемма 4. *Пусть для любого значения параметра*

$$\varsigma \neq \frac{1}{\bar{\alpha}_k} \quad (k=0, 1, \cdots, n), \qquad \rho(\varsigma; z) \in M\{\alpha_k\}_0^n.$$

Для того, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{g(z)}\,d\alpha(x) = \overline{g(\varsigma)}, \quad z = e^{ix}, \tag{1.30}$$

для любой функции $g(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\rho(\varsigma; z) \equiv S_n(\varsigma; z). \tag{1.31}$$

Заметив, что любая функция $g(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ представима также в виде

$$g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_k(z),$$

при условии (1.31) мы приходим к тождеству (1.30), так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{g(z)}\,d\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\,\Phi_k(z)\right\}\overline{\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\Phi_k(z)\right\}}\,d\alpha(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \overline{\Phi_k(\varsigma)} = \overline{g(\varsigma)}.$$

Итак, для выполнения тождества (1.30) условие (1.31) достаточно.

Заметим теперь, что функция $\rho(\varsigma; z)$, очевидно, представима в виде

$$\rho(\varsigma; z) = \sum_{k=0}^{n} C_k(\varsigma)\,\Phi_k(z).$$

Далее, если условие (1.30) выполнено, то в частности оно справедливо и для функций

$$g(z) = \Phi_p(z) \in M\{\alpha_k\}_0^n \qquad (p = 0, 1, \cdots, n).$$

Поэтому из (1.30) следуют формулы:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varsigma; z)\overline{\Phi_p(z)}\,d\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k(\varsigma)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(z)\,\overline{\Phi_p(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= C_p(\varsigma) \equiv \overline{\Phi_p(\varsigma)} \quad (p = 0, 1, \cdots, n),$$

то есть

$$\rho(\varsigma; z) \equiv \sum_{k=0}^{n} \overline{\Phi_k(\varsigma)}\,\Phi_k(z) = S_n(\varsigma; z).$$

§ 2. Функциональное уравнение для ядер распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$

2.1. Докажем сначала одно важное тождество*, имеющее место для системы Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$, ассоциированной с данной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$.

Обозначая всюду в дальнейшем

$$B_{n+1}(z)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\ ^{**}, \tag{2.1}$$

установим лемму.

Лемма 5. *Для произвольных значений переменных z и ζ справедливы тождества*

$$\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z)+\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{1-\overline{\zeta}z}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно установить справедливость тождества (2.2) в случае, когда $|z|<1$ и $|\zeta|<1$.

Заметим, что при $|\zeta|<1$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{1-\overline{\zeta}t}|dt|=\overline{\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\varphi_\nu(t)}{t-\zeta}dt\right\}}=\overline{\varphi_\nu(\zeta)}\qquad (\nu=0,\ 1,\cdots,\ n),$$

откуда, обозначая

$$\Phi_n(\zeta;z)=\frac{1}{1-\overline{\zeta}z}-\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z), \tag{2.3}$$

получим равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\Phi_n(t;\zeta)\overline{\varphi_\nu(t)}\,|dt|=0\qquad (\nu=0,\ 1,\cdots,\ n). \tag{2.4}$$

Но в силу (1.3), при $|t|=1$ имеем

$$\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{t}=\frac{(1-|\alpha_\nu|^2)^{1/2}}{t-\alpha_\nu}\prod_{k=0}^{\nu-1}\frac{1-\overline{\alpha}_k t}{\alpha_k-t}\frac{|\alpha_k|}{\overline{\alpha}_k}\qquad (\nu=0,\ 1,\cdots), \tag{2.5}$$

---

* Такими и аналогичными тождествами более общей природы обычно пользуются в интерполяционных задачах теории функций (см., напр., Дж. Уолш [5], Р. Лагранж [6], Э. Ломмель [7]).

Приводимое нами тождество послужило основой в нашем исследовании, посвященном сходимости рядов типа Фурье по системам Мальмквиста [8].

** Как и в формулах (1.3), при $\alpha_k=0$ здесь следует положить

$$\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}=\frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|}=-1.$$

причем для значения $\nu=0$ символ произведения $\prod\limits_{k=0}^{\nu-1}$ следует заменить единицей.

Так как при $|t|=1$ $|dt|=\dfrac{dt}{it}$, то, ввиду (2.5), условия (2.4) запишутся в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\Phi_n(t;\varsigma)\frac{\prod\limits_{k=0}^{\nu-1}(1-\bar{\alpha}_k t)}{\prod\limits_{k=0}^{\nu}(\alpha_k-t)}\,dt=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\cdots,\ n). \tag{2.4'}$$

Отметив, далее, что при любом $\nu\geqslant 0$ рациональная дробь, стоящая под интегралом в (2.4')—правильная, легко заключаем, что условия (2.4) эквивалентны следующим:

$$\Phi_n^{(r)}(\alpha_\nu;\varsigma)=\frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)}{(t-\alpha_\nu)^{1+r}}\,dt=0 \qquad \left(\begin{array}{l} r=0,\ 1,\cdots,p_\nu-1\\ \nu=0,\ 1,\cdots,n\end{array}\right), \tag{2.6}$$

где $p_\nu\geqslant 1$, как уже было выше условлено, означает кратность появления числа α_ν в группе чисел $\{\alpha_0,\ \alpha_1,\cdots,\alpha_\nu\}$.

Однако из равенств (2.6), если принять во внимание определение (2.1) функции $B_{n+1}(z)$, заключаем, что отношение

$$\Phi_n(z;\varsigma)/B_{n+1}(z)$$

голоморфно в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$. Поэтому справедлива интегральная формула

$$\Phi_n(z;\varsigma)=\frac{B_{n+1}(z)}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)\,B_{n+1}^{-1}(t)}{1-z\bar{t}}\,|dt| \qquad (|z|<1). \tag{2.7}$$

Заметив, что при $|t|=1$

$$B_{n+1}^{-1}(t)=\overline{B_{n+1}(t)},$$

в силу (2.3) имеем далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\varsigma)\,B_{n+1}^{-1}(t)}{1-z\bar{t}}\,|dt|=\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)}{(1-\bar{z}t)(t-\varsigma)}\,dt\right\}}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(\varsigma)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)\,\overline{\varphi_k(t)}}{t(1-\bar{z}t)}\,dt\right\}. \tag{2.8}$$

Так как функция

$$\frac{B_{n+1}(t)}{1-\bar{z}t} \qquad (|z|<1)$$

голоморфна в замкнутом круге $|t|\leqslant 1$, то

$$\overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)}{(1-\bar{z}t)(t-\zeta)}dt\right\}}=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{2.9}$$

С другой стороны, в силу формул (2.1) и (2.5) при $|t|=1$

$$B_{n+1}(t)\frac{\overline{\varphi_\nu(t)}}{t}=-\left\{(1-|\alpha_\nu|^2)^{1/2}\prod_{k=\nu}^{n}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\right\}\frac{\prod\limits_{k=\nu+1}^{n}(\alpha_k-t)}{\prod\limits_{k=\nu}^{n}(1-\bar{\alpha}_k t)}\quad(\nu=0,1\cdots n),$$

причем правая часть голоморфна в замкнутом круге $|t|\leqslant 1$.

Отсюда следует, что при $|z|<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{B_{n+1}(t)\overline{\varphi_k(t)}}{t(1-\bar{z}t)}dt=0\qquad(k=0,1,\cdots,n). \tag{2.10}$$

Наконец, из (2.8), (2.9) и (2.10) вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\frac{\Phi_n(t;\zeta)B_{n+1}^{-1}(t)}{1-\bar{z}t}|dt|=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}. \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.11) имеем

$$\Phi_n(z;\zeta)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{1-\bar{\zeta}z}.$$

Отсюда и из формулы (2.3) следует тождество (2.2). Лемма доказана.

Обозначим теперь через

$$S_n(\zeta;z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z) \tag{2.12}$$

ядро распределения $(2\pi)^{-1}dx$.

Из леммы 5, в частности, вытекает

Следствие. *Для произвольных значений переменных z и ζ ядро $S_n(\zeta;z)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_n(\zeta;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{\bar{\zeta}z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}},\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.13}$$

2.2. Докажем теперь, что функциональное уравнение (2.13) остается в силе также для ядер произвольного распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Теорема 1. *При любом $n\geqslant 0$, z и ζ ядро $S_n(\zeta;z)$ распределения $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$S_n(\zeta;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{\bar{\zeta}z}S_n\left(\frac{1}{\bar{z}};\frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.14}$$

Доказательство. Согласно лемме 4, в частности, справедливы тождества:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(\zeta; z)\,\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\alpha(x) = \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n) \tag{2.15}$$

при любом $\zeta \neq 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

Заметим теперь, что при любом $\zeta \neq 1/\bar{\alpha}_k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ имеем $S_n(\zeta; z) \in M\{\alpha_k\}_0^n$ и, следовательно, имеет место представление

$$S_n(\zeta; z) = \sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z). \tag{2.16}$$

Отсюда и из формул (2.15) следует, что коэффициенты $\{A_k(\zeta)\}_0^n$ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z)\right\}\overline{\varphi_\nu(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,(\varphi_k, \varphi_\nu) = \overline{\varphi_\nu(\zeta)} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n). \tag{2.17}$$

Записывая теперь формулы (2.16) и (2.17) в виде

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,(\varphi_k, \varphi_\nu) - \overline{\varphi_\nu(\zeta)} = 0, \\ &\sum_{k=0}^{n} A_k(\zeta)\,\varphi_k(z) - S_n(\zeta; z) = 0 \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n), \tag{2.18}$$

мы, таким образом, можем утверждать, что система линейных однородных уравнений (2.18) имеет нетривиальное решение

$$\{A_0, A_1, \cdots, A_n, -1\}.$$

Следовательно, определитель этой системы должен быть тождественно равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) \cdots (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\zeta)} \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) \cdots (\varphi_n, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\zeta)} \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & (\varphi_1, \varphi_n) \cdots (\varphi_n, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\zeta)} \\ \varphi_0(z) & \varphi_1(z) \cdots \varphi_n(z) & S_n(\zeta; z) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Далее, имея в виду определение (1.9) определителя D_n, отсюда получим следующее представление для функции $S_n(\zeta; z)$:

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\zeta)} \\ (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\zeta)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\zeta)} \\ \varphi_0(z) & \cdots & \varphi_n(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.19}$$

Теперь для фиксированного значения $n \geqslant 0$ введем в рассмотрение следующую систему рациональных функций:

$$\varphi_k^{(n)}(z) = -\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\varphi}_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (k=0, 1, \cdots, n), \tag{2.20}$$

заметив, что тогда будем иметь

$$\varphi_0^{(n)}(z) = \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\,\frac{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_n z},$$

$$\varphi_k^{(n)}(z) = \prod_{p=n-k}^{n}\left\{\frac{|\alpha_p|}{\alpha_p}\right\}\frac{(1-|\alpha_{n-k}|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}_{n-k}z}\sum_{p=n-k+1}^{n}\frac{\alpha_p - z}{1-\overline{\alpha}_p z}\,\frac{|\alpha_p|}{\alpha_p}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n). \tag{2.21}$$

Из определения (2.20) следует:

$$(\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_p^{(n)}(z)\,\overline{\varphi_q^{(n)}(z)}\,d\alpha(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{n-q}(z)\,\overline{\varphi_{n-p}(z)}\,d\alpha(x) = (\varphi_{n-q}, \varphi_{n-p}) \qquad (p, q=0, 1, \cdots, n), \tag{2.22}$$

так как $|B_{n+1}(z)| = 1$ при $|z| = 1$.

Из формул (2.22), в частности, при $\alpha(x) \equiv x$ следует, что система рациональных функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ ортонормальна на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}dx$ и поэтому представляет собой конечную систему Мальмквиста, ассоциированную с последовательностью чисел $\{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots, \alpha_0\}$.

Ортогонализируем теперь эту новую конечную систему функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ на единичной окружности с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$. Тогда получим конечную систему рациональных функций $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, удовлетворяющую условиям:

а) $\Phi_k^{(n)}(z)$ есть „полином порядка k“ от первых $k+1$ функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, т. е.

$$\Phi_k^{(n)}(z)=\sum_{p=0}^{k} c_p^{(n)}\,\varphi_p^{(n)}(z),\qquad c_k^{(n)}>0;$$

б)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_p(z)\overline{\Phi_q^{(n)}(z)}\,d\alpha(x)=\delta_{p,q},\quad z=e^{ix}\quad(p,q=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Обозначив, далее,

$$S_n^{(n)}(\zeta;z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\Phi_k^{(n)}(\zeta)}\,\Phi_k^{(n)}(z),\tag{2.23}$$

по аналогии с формулой (2.19) будем иметь

$$S_n^{(n)}(\zeta;z)=-\frac{1}{D_n^{(n)}}\begin{vmatrix}(\varphi_0^{(n)},\ \varphi_0^{(n)})\cdots(\varphi_n^{(n)},\ \varphi_0^{(n)}) & \overline{\varphi_0^{(n)}(\zeta)}\\ (\varphi_0^{(n)},\ \varphi_1^{(n)})\cdots(\varphi_n^{(n)},\ \varphi_1^{(n)}) & \overline{\varphi_1^{(n)}(\zeta)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\ (\varphi_0^{(n)},\ \varphi_n^{(n)})\cdots(\varphi_n^{(n)},\ \varphi_n^{(n)}) & \overline{\varphi_n^{(n)}(\zeta)}\\ \varphi_0^{(n)}(z)\quad\cdots\quad\varphi_n^{(n)}(z) & 0\end{vmatrix},\tag{2.19'}$$

где

$$D_n^{(n)}=\begin{vmatrix}(\varphi_0^{(n)},\ \varphi_0^{(n)})\cdots(\varphi_0^{(n)},\ \varphi_n^{(n)})\\ (\varphi_1^{(n)},\ \varphi_0^{(n)})\cdots(\varphi_1^{(n)},\ \varphi_n^{(n)})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\varphi_n^{(n)},\ \varphi_0^{(n)})\cdots(\varphi_n^{(n)},\ \varphi_n^{(n)})\end{vmatrix}\tag{1.9}$$

есть определитель Грамма для совокупности функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$.

Докажем, что справедливо тождество

$$S_n^{(n)}(\zeta;z)\equiv S_n(\zeta;z).\tag{2.24}$$

С этой целью, ради упрощения дальнейших рассуждений, положим пока, что группа чисел $\{\alpha_0,\cdots,\alpha_n\}$ удовлетворяет условию

$$\alpha_i\neq 0,\quad \alpha_i\neq\alpha_j\quad(i\neq j;\quad i,j=0,\ 1,\cdots,\ n),\tag{2.25}$$

т. е., что все эти числа отличны друг от друга и от нуля.

Тогда соответствующая конечная система Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ представляет собой результат ортогонализации системы рациональных функций

$$\left\{\frac{1}{1-\overline{\alpha}_k z}\right\}_0^n$$

на окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}dx$.

Это значит, что в рассматриваемом случае множество $M\{\alpha_k\}_0^n$ совпадает с множеством линейных комбинаций—„полиномов порядка n“ вида

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{1-\overline{a}_k z}. \tag{2.26}$$

Очевидно, далее, что построенная выше конечная система Мальмквиста $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$, ортогональная на окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}dx$, есть результат ортогонализации упорядоченной системы рациональных функций

$$\left\{\frac{1}{1-\overline{\alpha}_{n-k}z}\right\}_0^n.$$

Следовательно, множество $M\{\alpha_{n-k}\}_0^n$ всех обобщенных „полиномов порядка n“ вида

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k^{(n)}(z)$$

также совпадает с множеством рациональных функций (2.26), т. е. $M\{\alpha_{n-k}\}_0^n\equiv M\{\alpha_k\}_0^n$.

Обратимся теперь к экстремальной задаче, решение которой было приведено в лемме 3, полагая, что параметр $A_0=1$.

Так как $M\{\alpha_k\}_0^n\equiv M\{\alpha_{n-k}\}_0^n$, то экстремальные функции и соответствующие минимумы для обоих семейств функций должны быть одинаковыми.

Это значит, что

$$R_n^{(0)}(z)=\frac{S_n(\varsigma;z)}{S_n(\varsigma;\varsigma)}\equiv\frac{S_n^{(n)}(\varsigma;z)}{S_n^{(n)}(\varsigma;\varsigma)},$$

а также

$$\mu(R_n^{(0)})=\frac{1}{S_n(\varsigma;\varsigma)}\equiv\frac{1}{S_n^{(n)}(\varsigma;\varsigma)}$$

для всех z и $\varsigma\neq 1/\overline{\alpha}_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$.

Отсюда и следует требуемое тождество (2.24), но пока лишь при ограничении (2.25) на совокупность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^n$.

Чтобы освободиться от этого ограничения, имея совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^n$, рассмотрим другую совокупность $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ $(0<|\tilde{\alpha}_k|<1)$, подчиненную уже условиям (2.25).

Пусть $\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\varphi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ суть системы Мальмквиста, ассоциированные, соответственно, с упорядоченными группами чисел $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ и $\{\tilde{\alpha}_{n-k}\}_0^n$.

Пусть, далее, $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ суть, соответственно, системы функций, которые получаются в результате ортогонализации систем

$\{\tilde{\varphi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\varphi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ на единичной окружности $z=e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$.

Наконец, пусть

$$\tilde{S}_n(\zeta; z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\tilde{\Phi}_k(\zeta)}\,\tilde{\Phi}_k(z) \text{ и } \tilde{S}_n^{(k)}(\zeta; z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(\zeta)}\,\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)$$

есть ядра систем $\{\tilde{\Phi}_k(z)\}_0^n$ и $\{\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)\}_0^n$ соответственно. Тогда, ввиду того, что для группы чисел $\{\tilde{\alpha}_k\}_0^n$ условие (2.25) предполагалось выполненным, согласно предыдущему, тождество

$$\tilde{S}_n^{(n)}(\zeta; z)\equiv\tilde{S}_n(\zeta; z) \tag{2.24'}$$

справедливо, если ζ и $z\neq 1/\tilde{\bar{\alpha}}_k$ $(k=0, 1, 2,\cdots, n)$.

Но очевидно, что при

$$\lim\tilde{\alpha}_k=\alpha_k \qquad (k=0, 1,\cdots, n) \tag{2.27}$$

справедливы предельные соотношения

$$\lim\tilde{\varphi}_k(z)=\varphi_k(z),\quad \lim\tilde{\varphi}_k^{(n)}(z)=\varphi_k^{(n)}(z) \qquad (k=0, 1,\cdots, n),$$

притом равномерно относительно всех z, лежащих вне достаточно малых окрестностей отличных друг от друга точек $\{1/\bar{\alpha}_k\}_0^n$ плоскости z, т. е. в частности и на окружности $z=e^{ix}$.

Следовательно, будем иметь также

$$\lim(\tilde{\varphi}_p, \tilde{\varphi}_q)=(\varphi_p, \varphi_q)$$

и $\qquad\qquad (p, q=0, 1,\cdots, n).$

$$\lim(\tilde{\varphi}_p^{(n)}, \tilde{\varphi}_q^{(n)})=(\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)})$$

Поэтому для соответствующих ортогональных с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ систем и ядер при условии (2.27) справедливы предельные соотношения

$$\lim\tilde{\Phi}_k(z)=\Phi_k(z) \qquad (k=0, 1,\cdots, n),$$

а также

$$\lim\tilde{\Phi}_k^{(n)}(z)=\Phi_k^{(n)}(z),$$

$$\lim\tilde{S}_n(\zeta; z)=S_n(\zeta; z), \tag{2.28}$$

$$\lim\tilde{S}_n^{(n)}(\zeta; z)=S_n^{(n)}(\zeta; z).$$

Достаточно перейти теперь к пределу в тождестве (2.24′) при условии (2.27), чтобы в силу формул (2.28) убедиться в справедливости тождества (2.24) уже без каких-либо дополнительных ограничений на совокупность чисел $\{\alpha_k\}_0^n$.

Заметим теперь, что определитель Грамма $D_n^{(n)}$ для системы функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ также положителен, и поэтому, пользуясь формулами (2.22)

$$(\varphi_p^{(n)}, \varphi_q^{(n)}) = (\varphi_{n-q}, \varphi_{n-p}) = \overline{(\varphi_{n-p}, \varphi_{n-q})} \quad (p, q = 0, 1, 2, \cdots, n),$$

из (1.9′) получим

$$D_n^{(n)} = \overline{D}_n^{(n)} = \begin{vmatrix} \overline{(\varphi_n, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_n, \varphi_0)} \\ \overline{(\varphi_{n-1}, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_{n-1}, \varphi_0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{(\varphi_0, \varphi_n)} & \cdots & \overline{(\varphi_0, \varphi_0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) \end{vmatrix}.$$

Повернув последний определитель вокруг его побочной диагонали, что, очевидно, не изменит его значения, в силу (1.9) получим равенство

$$D_n^{(n)} = D_n. \tag{2.29}$$

Наконец, из (2.19′), (2.24) и (2.29), воспользовавшись формулами (2.22), приходим к следующему представлению для ядра

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \overline{\varphi_0^{(n)}(\zeta)} \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \overline{\varphi_1^{(n)}(\zeta)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_n^{(n)}(\zeta)} \\ \varphi_0^{(n)}(z) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(z) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.30}$$

Но согласно определению (2.21) системы функций $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$,

$$\varphi_k^{(n)}(z) = -\frac{B_{n+1}(z)}{z}\overline{\varphi}_{n-k}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$(k = 0, 1, \cdots, n).$$

$$\overline{\varphi_k^{(n)}(\zeta)} = -\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}}{\overline{\zeta}}\varphi_{n-k}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)$$

Отсюда и из (2.30) следует:

$$S_n(\zeta; z) = -\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}\,B_{n+1}(z)}{\overline{\zeta}\,z\,D_n} \begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_0) & \varphi_n\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \varphi_{n-1}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_0) & \varphi_0\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right) \\ \overline{\varphi}_n\left(\frac{1}{z}\right) & \cdots & \overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{z}\right) & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.30′}$$

Заметив теперь, что при любом z справедливо тождество

$$B_{n+1}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\overline{B_{n+1}(z)} \equiv 1,$$

из (2.30′) получим, далее,

$$\frac{\overline{B_{n+1}(\varsigma)}\,B_{n+1}(z)}{\bar{\varsigma}\, z}\, S_n\left(\frac{1}{\bar{z}};\ \frac{1}{\bar{\varsigma}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_n, \varphi_0) & \varphi_n(z) \\ (\varphi_{n-1}, \varphi_n) & \cdots (\varphi_{n-1}, \varphi_0) & \varphi_{n-1}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_0, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \varphi_0(z) \\ \overline{\varphi_n(\varsigma)} & \cdots \overline{\varphi_0(\varsigma)} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.31}$$

С другой стороны, из (2.19) имеем

$$S_n(\varsigma; z) = -\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\varsigma)} \\ (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots (\varphi_0, \varphi_1) & \overline{\varphi_1(\varsigma)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\varsigma)} \\ \varphi_n(z) & \cdots \varphi_0(z) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} (\varphi_n, \varphi_n) & \cdots (\varphi_0, \varphi_n) & \overline{\varphi_n(\varsigma)} \\ (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \cdots (\varphi_0, \varphi_{n-1}) & \overline{\varphi_{n-1}(\varsigma)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots (\varphi_0, \varphi_0) & \overline{\varphi_0(\varsigma)} \\ \varphi_n(z) & \cdots \varphi_0(z) & 0 \end{vmatrix}.$$

Наконец, повернув последний определитель вокруг его главной диагонали и имея в виду формулу (2.31), получим тождество (2.14). Итак, теорема полностью доказана.

Заметим теперь, что в частном случае, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \cdots = 0$, система функций (1.2) либо система соответствующих функций Мальмквиста $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$ сводится к системе степеней $\{z^k\}_0^\infty$.

Поэтому очевидно, что в случае

$$\alpha_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ переходит в систему полиномов Г. Сеге— $\{P_k(z)\}_0^\infty$, ортогональных на окружности $z = e^{ix}$ с тем же весом $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$.

Наконец, так как при $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$B_{n+1}(z) = z^{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

то из теоремы 1, в частности, вытекает хорошо известная формула Г. Сеге, доказательство которой весьма просто.

Следствие. *Для системы полиномов* $\{P_k(z)\}_0^\infty$, *ортогональной на единичной окружности с весом* $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$, *соответствующее ядро*

$$\sigma_n(\zeta; z) = (\bar{\zeta} z)^n S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \tag{2.32}$$

удовлетворяет функциональному уравнению

$$\sigma_n(\zeta; z) = (\bar{\zeta} z)^n S_n\left(\frac{1}{\bar{z}}; \frac{1}{\bar{\zeta}}\right). \tag{2.33}$$

2.3. В дополнение к основному тождеству (2.14) в данном пункте приведем несколько важных для дальнейшего формул для ядра $S_n(\zeta; z)$ произвольного распределения $(2\pi)^{-1}\,d\alpha(x)$.

Лемма 6. *При любом* $n \geqslant 0$ *справедливы формулы:*

1°.
$$S_n(\alpha_n; z) = -\frac{|\alpha_n|}{\bar{\alpha}_n}\,\frac{k_n}{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}\,\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.34}$$

$$S_n(\alpha_n; \alpha_n) = \frac{k_n^2}{1-|\alpha_n|^2}, \tag{2.34'}$$

где $k_n > 0$ — *коэффициент при* $\varphi_n(z)$ *в представлении*

$$\Phi_n(z) = k_n \varphi_n(z); \tag{2.35}$$

2°.
$$S_n(\alpha_0; z) = \frac{|\alpha_0|}{\bar{\alpha}_0}\,\frac{k_n^{(n)}}{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}\,\frac{B_{n+1}(z)}{z}\,\overline{\Phi}_n^{(n)}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{2.36}$$

$$S_n(\alpha_0; \alpha_0) = \frac{(k_n^{(n)})^2}{1-|\alpha_0|^2}, \tag{2.36'}$$

где $k_p^{(n)}$ — *коэффициент при* $\varphi_p^{(n)}(z)$ *в представлении*

$$\Phi_p^{(n)}(z) = k_p^{(n)}\varphi_p^{(n)}(z) + \cdots + l_p^{(n)}\varphi_0^{(n)}(z) \quad (p = 0, 1, \cdots, n); \tag{2.37}$$

3°. *Между коэффициентами* $\{l_p^{(n)}\}_0^n$ *и* k_n, *а также между* $\{l_p\}_0^n$ *и* $k_n^{(n)}$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{p=0}^{n} |l_k^{(n)}|^2 = k_n^2, \tag{2.38}$$

$$\sum_{p=0}^{n} |l_k|^2 = (k_n^{(n)})^2. \tag{2.39}$$

Доказательство. 1°. Из формулы (2.20) следует, что при любом $p \geqslant 0$

$$\overline{\varphi}_k\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{z}{B_{p+1}(z)}\varphi_{p-k}^{(p)}(z) \qquad (k=0,\ 1,\cdots,p),$$

где

$$B_{p+1}(z)=\prod_{k=0}^{p}\frac{\alpha_k-z}{1-\overline{\alpha}_k z}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}.$$

Следовательно, из (2.35) следует также представление

$$\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=k_p\overline{\varphi}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\cdots+\overline{l}_p\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)=$$

$$=-\frac{\zeta}{B_{p+1}(\zeta)}\{k_p\varphi_0^{(p)}(\zeta)+\cdots+\overline{l}_p\varphi_p^{(p)}(\zeta)\},$$

откуда получим при $0\leqslant p\leqslant n$

$$\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\prod_{k=p+1}^{n}\frac{\alpha_k-\zeta}{1-\overline{\alpha}_k\zeta}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k}\{k_p\varphi_0^{(p)}(\zeta)+\cdots+\overline{l}_p\varphi_p^{(p)}(\zeta)\}, \tag{2.40}$$

где символ $\prod\limits_{k=p+1}^{n}$ при $p=n$ следует заменить единицей.

Из формул (2.40), очевидно, имеем

$$\lim_{\zeta\to\alpha_n}\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)=0 \qquad (p=0,\ 1,\cdots,n-1). \tag{2.41}$$

Далее, так как из явных выражений (2.21) системы $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ следует, что

$$\varphi_0^{(n)}(\alpha_n)=\frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}\frac{1}{(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}, \qquad \varphi_k^{(n)}(\alpha_n)=0 \qquad (k=1,\ 2,\cdots n), \tag{2.42}$$

то из (2.40) при $p=n$ получим

$$\lim_{\zeta\to\alpha_n}\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\overline{\Phi}_n\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{|\alpha_n|k_n}{\alpha_n(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}. \tag{2.43}$$

Наконец, согласно тождеству (2.14) теоремы 1,

$$S_n(\zeta;z)=\frac{\overline{B_{n+1}(\zeta)}B_{n+1}(z)}{\overline{\zeta}z}\sum_{p=0}^{n}\overline{\Phi_p\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\Phi_p\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)=$$

$$=\frac{B_{n+1}(z)}{z}\sum_{p=0}^{n}\overline{\left\{\frac{B_{n+1}(\zeta)}{\zeta}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right\}}\overline{\Phi}_p\left(\frac{1}{z}\right),$$

откуда, пользуясь соотношениями (2.41) и (2.43), предельным переходом при $\zeta\to\alpha_n$ получим формулу (2.34) леммы. Далее, из (2.34), в силу соотношения (2.43), предельным переходом при $z\to\alpha_n$ получим (2.34′).

2°. Отметим, что система функций $\{\Phi_k(z)\}_0^n$ была ассоциирована с упорядоченной группой чисел $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, в то время как система $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ была ассоциирована с упорядоченной группой $\{\alpha_n, \alpha_{n-1}, \cdots \cdots, \alpha_0\}$.

Поэтому очевидно, что соответствующей заменой параметров, входящих в формулы (2.34) и (2.34′), для ядра $S_n^{(n)}(\zeta; z)$ системы $\{\Phi_k^{(n)}(z)\}_0^n$ получим формулы

$$S_n^{(n)}(\alpha_0; z) = -\frac{|\alpha_0|}{\alpha_0}\frac{k_n^{(n)}}{(1-|\alpha_0|^2)^{1/2}}\frac{B_{n+1}(z)}{z}\overline{\Phi_n^{(n)}}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$S_n^{(n)}(\alpha_0; \alpha_0) = \frac{(k_n^{(n)})^2}{1-|\alpha_0|^2}.$$

Следовательно, достаточно воспользоваться тождеством (2.24), чтобы получить формулы (2.36) и (2.36′) леммы и, наконец, формулу (2.52).

3°. Из (2.37), пользуясь формулами (2.42), мы получим

$$\Phi_p^{(n)}(\alpha_n) = l_p^{(n)}\varphi_0^{(n)}(\alpha_n) = \frac{l_p^{(n)}|\alpha_n|}{\alpha_n(1-|\alpha_n|^2)^{1/2}}.$$

Поэтому и ввиду тождества (2.24), установленного в ходе доказательства теоремы 1, мы будем иметь

$$S_n(\alpha_n; \alpha_n) = S_n^{(n)}(\alpha_n; \alpha_n) = \sum_{p=0}^{n}|\Phi_p^{(n)}(\alpha_n)|^2 = \frac{1}{1-|\alpha_n|^2}\sum_{p=0}^{n}|l_p^{(n)}|^2.$$

Отсюда и из (2.34) следует формула (2.38).

Итак, лемма полностью доказана.

Из этой леммы в частном случае, когда $\alpha_k = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$, вытекает

Следствие. *Для системы полиномов Г. Сеге $\{P_k(z)\}_0^\infty$, ортогональной на окружности $z = e^{ix}$ с весом $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$, ядро $\sigma_n(\zeta; z)$ удовлетворяет условиям*

$$\sigma_n(0; z) = \sum_{k=0}^{n}\overline{P_k(0)}P_k(z) = \sum_{k=0}^{n}l_kP_k(z) = k_nz^n\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\sigma_n(0; 0) = \sum_{k=0}^{n}|P_k(0)|^2 = \sum_{k=0}^{n}|l_k|^2 = k_n^2 = \frac{D_{n-1}}{D_n}. \tag{2.44}$$

В самом деле, в рассматриваемом случае

$$\varphi_k(z) = z^k, \qquad B_{n+1}(z) = z^{n+1}, \qquad P_k(0) = l_k.$$

Поэтому из формул (2.34) и (2.34′) следуют, в частности, утверждения (2.44).

(*Продолжение статьи—в следующем номере*)

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30.XII.1965

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԸ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում ստացված են այն ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների հանրահաշվական հատկությունները, որոնց բոլոր հնարավոր բևեռները գտնվում են միավոր շրջանից դուրս տված հաջորդականության կետերում և օրթոնորմալ են միավոր շրջանագծի վրա $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$ *կշռով։*

Սահմանային դեպքում, երբ դիտարկվող սիստեմի բոլոր բևեռները համընկնում են անվերջ հեռու կետի հետ, այստեղ ստացված թեորեմները համապատասխանաբար հանգում են միավոր շրջանագծի վրա կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների տեսության լավ հայտնի պնդումներին, որոնք ժամանակին զարգացվել էին Սեգյոի [2], [3] աշխատանքներում։

M. M. DŽRBAŠIAN

ORTHONORMAL SETS OF RATIONAL FUNCTIONS ON THE UNIT CIRCLE

Summary

This paper deals with the algebraic properties of sets of rational functions which are orthonormal on the unit circle with respect to the weight $(2\pi)^{-1}d\alpha(x)$, and their poles lie on a given sequence of points situated outside the unit circle.

In case when all the poles of the set under consideration coincide with the point at infinity, the theorems proved here concur with the well known assertions of the theory of orthogonal (with respect to the weight function) polynomials developed by Szegö [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов. ДАН СССР, т. 147, № 6 (1962).
2. *Г. Сеге.* Ортогональные многочлены. Гл. X и XI, М. (1962).
3. *У. Гренандер, Г. Сеге.* Теплицевы формы и их приложение. Гл. 2 и 3, М. (1961).
4. *F. Malmquist.* Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dansun ensemble donné de points. C. R. du VI Congrès (1925) des Mathématiciens Scandinaves. Kopenhagen (1926).
5. *Дж. Уолш.* Интерполяция и аппроксимация.... М., § 10.7 (1961).
6. *R. Lagrange, Mémoire sur les séries d'interpolation. Acta Mathematica, V. 64 (1935).*
7. *E. Lammel.* Approximation regulärer Funktionen eines komplexen Argumentes durch rationale Funktionen. Math. Zeitschr., Bd. 46 (1940).
8. *М. М. Джрбашян.* К теории рядов Фурье по рациональным функциям. Изв. АН АрмССР, физ.-мат. сер., т. 9, № 7 (1956).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ СПЕКТР САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА В АБСТРАКТНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. В работах [1], [2] указана процедура, позволяющая строить полную систему собственных функционалов самосопряженных операторов при любом характере их спектров, не прибегая к предварительному построению соответствующего спектрального семейства проекционных операторов.

Проведенные в этих работах построения позволили также сделать некоторые заключения о характере спектра этих операторов в терминах асимптотического поведения резольвенты при приближении к точкам вещественной оси.

Настоящая работа посвящена получению некоторых новых результатов в этом направлении.

Попутно доказывается утверждение, представляющее собой развитие известной леммы Привалова о скачках интегралов типа Коши.

2. Пусть A— самосопряженный оператор с областью определения D_A, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а E_λ—соответствующее этому оператору спектральное семейство.

Для упрощения изложения предположим, что спектр оператора A простой.

Образуем выражение

$$I_\tau(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, g) = \frac{\tau}{\pi}\| R_{\lambda+i\tau}\, g\|^2, \tag{1}$$

где R_z—резольвента, g—порождающий элемент, тогда, очевидно,

$$I_\tau(\lambda) = \frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \tag{1*}$$

где, как обычно, введено обозначение $\rho(t) = \| E_t g\|^2$, и всюду в дальнейшем $\rho(t)$ предполагается непрерывной слева.

Асимптотическое поведение $I_\tau(\lambda)$ при $\tau \to +0$, очевидно, зависит от локальной структуры функции $\rho(t)$, и в работе [2] упомянуты некоторые случаи, когда это поведение, в свою очередь, характеризует локальную структуру $\rho(t)$.

Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы подробнее изучить зависимость локальной структуры функции $\rho(t)$ в окрестности точки $t=\lambda$ от асимптотического поведения функции $I_\tau(\lambda)$ при $\tau \to +0$.

Лемма 1. *Пусть в точке* λ *существуют односторонние (необязательно конечные) производные неубывающей функции* $\rho(t)$, *тогда*

$$\lim_{\tau\to+0} I_\tau(\lambda) = \frac{\rho'(\lambda-0)+\rho'(\lambda+0)}{2}.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $0<\rho'(\lambda-0)<+\infty$. Пусть $y=y_\varepsilon(t)$—уравнение прямой, где $y_\varepsilon(t)=\rho(\lambda)+\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right](t-\lambda)$, тогда, очевидно, существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что в интервале $[\lambda-\delta, \lambda)$ имеет место неравенство $y_{2\varepsilon}(t)>y_\varepsilon(t)>\rho(t)$. Построим последовательность точек с помощью рекуррентных соотношений

$$\rho(t_{k+1})\leqslant y_\varepsilon(t_k)\leqslant\rho(t_{k+1}+0), \tag{2}$$

где положено $t_0=\lambda-\delta$. Легко видеть, что неравенство (2) однозначно определяет t_{k+1} при заданном t_k, если только $y_\varepsilon(t_k)$ не равно значению функции $\rho(t)$ в некотором интервале (в последнем случае в качестве t_{k+1} возьмем, например, левый конец этого интервала). Очевидно, что при всех $k=0, 1, 2,\cdots$ имеем $t_k<t_{k+1}$. Легко доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\lambda$. В самом деле, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n}=t^*<\lambda$, тогда, поскольку $\rho(t^*+0)<y_\varepsilon(t^*)$, то в силу непрерывности $y_\varepsilon(t)$ будем иметь $y_\varepsilon(t)>\rho(t^*+0)$ для всех $t\in[t_{k_{n_0}}, t^*]$, поэтому $t_{k_{n_0}+p}>t^*$ для всех $p>1$, что противоречит $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n}=t^*$. Построим вспомогательную, кусочно постоянную функцию $\tilde\rho(t)$, полагая $\tilde\rho(t)=y_\varepsilon(t_k)$ при $t_k\leqslant t<t_{k+1}$ ($k=0, 1, 2,\cdots$), а $\tilde\rho(\lambda)=\rho(\lambda-0)$.

Докажем, что для всех $\tau>0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\tilde\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{3}$$

В самом деле, путем представления этих интегралов в виде счетного числа интегралов по частичным промежуткам $[t_k, t_{k+1})$, придадим неравенству (3) следующий вид:

$$\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_\varepsilon(t_{k+1})-y_\varepsilon(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}.$$

Последнее неравенство очевидно, поскольку

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{s}{2}\right]\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<$$

$$<\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{s}{2}\right]\frac{(t_{k+1}-t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_{k+1})-y_s(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}.$$

Теперь докажем, что для всех $\tau>0$ справедливо неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\tilde{\rho}(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4}$$

Обозначим точки разрыва функции $\rho(t)$ в промежутке $[\lambda-\delta,\lambda)$ через η_k и представим интеграл в правой части (4) в виде суммы интегралов по частичным промежуткам $[t_n, t_{n+1})$, тогда будем иметь

$$\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\sum_{n=0}^{\infty}I_n, \tag{4.1}$$

где

$$I_n=\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\sum_{\eta_k\in[t_n,\,t_{n+1})}\frac{\tau}{\pi}\frac{\rho(\eta_k+0)-\rho(\eta_k)}{(\eta_k-\lambda)^2+\tau^2}+$$

$$+\sum_{\Delta_l\subset[t_n,\,t_{n+1})}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\Delta_l}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4.2}$$

В последней сумме через Δ_l обозначены счетное число взаимно неперекрывающихся открытых интервалов, на которые разбивается промежуток $[\lambda-\delta,\lambda]$ точками разрыва $\{\eta_k\}$ и построенными выше точками $\{t_k\}$. Легко видеть, что при всех $\tau>0$ справедливо неравенство

$$I_n+\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_n)-\rho(t_{n+1})}{(t_{n+1}-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{\tau}{\pi}\frac{\operatorname*{Var}\limits_{t_n<t<t_{n+1}}\rho(t)+y_s(t_n)-\rho(t_{n+1})}{(t_n-\lambda)^2}=$$

$$=\frac{\tau}{\pi}\frac{y_s(t_n)-\rho(t_n)}{(t_n-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{4.3}$$

Теперь мы можем переписать неравенство (4) в виде

$$\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_s(t_{k+1})-y_s(t_k)}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}<\sum_{n=0}^{\infty}I_n \tag{4*}$$

и, добавляя к обеим частям один и тот же сходящийся ряд, получим

$$\frac{\tau}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y_\varepsilon(t_{k+1})-\rho(t_{k+1})}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}<\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\tau}{\pi}\frac{y_\varepsilon(t_k)-\rho(t_{k+1})}{(t_{k+1}-\lambda)^2+\tau^2}+I_k\right\}. \tag{4.4}$$

Тогда, сравнивая в неравенстве (4.4) каждый член ряда слева со следующим членом ряда справа и пользуясь (4.3), легко убеждаемся в справедливости (4*) для всех $\tau>0$.

Таким образом, сопоставляя неравенства (3) и (4), мы получаем, что для всех $\tau>0$ имеет место неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\frac{\varepsilon}{2}\right]\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \tag{5}$$

С другой стороны, можно указать такое $\tau_0(\varepsilon)$, что для всех $\tau<\tau_0$ имеет место неравенство $\frac{1}{\pi}\int_{\lambda-\delta}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}>\frac{1}{3}$, поэтому из (5) получаем

$$\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)-\varepsilon\right]\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \tag{6}$$

для всех $\tau\leqslant\min\{\tau_0(\varepsilon),\ \tau_1(\varepsilon)\}$, где $\tau_1(\varepsilon)$ выбрано так,чтобы

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda-\delta}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\varepsilon}{6\rho'(\lambda-0)}.$$

Проводя через точку $(\lambda,\rho(\lambda-0))$ две прямые с угловыми коэффициентами, равными, соответственно, $\rho'(\lambda-0)+\varepsilon$ и $\rho'(\lambda-0)+\frac{\varepsilon}{2}$, путем совершенно аналогичных построений можно установить неравенство

$$\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<\frac{\tau}{\pi}\left[\rho'(\lambda-0)+\varepsilon\right]\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \tag{6*}$$

для всех $\tau\leqslant\min\{\tau_0'(\varepsilon),\ \tau_1'(\varepsilon)\}$. Сопоставляя неравенства (6) и (6*), легко заключить, что для всех достаточно малых $\tau>0$ имеют место двусторонние оценки

$$\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}\left[\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-1\right]-\frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}<$$

$$<\frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}<$$

$$< \frac{\rho'(\lambda-0)}{2}\left[\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-1\right]+\frac{\varepsilon}{2}\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}. \qquad (7)$$

Принимая во внимание, что $\lim\limits_{\tau\to+0}\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{\tau dt}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=1$, из неравенства (7) заключаем, что

$$-\varepsilon<\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}-\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}<+\varepsilon, \qquad (7^*)$$

если только τ достаточно мало. Таким образом, в силу произвольности ε,

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\rho'(\lambda-0)}{2}.$$

Совершенно так же, предполагая, что $0<\rho'(\lambda+0)<+\infty$, можно доказать, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=\frac{\rho'(\lambda+0)}{2}.$$

Теперь предположим, что $\rho'(\lambda-0)=0$. В этом случае, поскольку $\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}$ неотрицательно, то достаточно получить оценку этого интеграла только сверху, что может быть сделано аналогично предыдущему случаю.

Предположим, наконец, что $\rho'(\lambda-0)=+\infty$. Будем исходить из очевидного неравенства

$$\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\tau}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\geqslant\frac{1}{2\pi}\frac{\rho(\lambda)-\rho(\lambda-\tau)}{\tau}, \qquad (8)$$

откуда непосредственно заключаем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}=+\infty.$$

Таким образом, лемма 1 доказана полностью.

Замечание 1. Представляя любую функцию ограниченной вариации в виде разности двух неубывающих, из доказанной леммы 1 непосредственно заключаем, что скачок $\lim\limits_{\operatorname{Im} z\to+0}[\Phi(z)-\Phi(\bar z)]$ интеграла типа Коши-Стильтьеса

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{t-z}$$

существует почти всюду по мере Лебега, какова бы ни была функция ограниченной вариации $\rho(t)$, и равен производной $\rho'(\lambda)$, безотносительно к тому, суммируема ли эта производная или нет. Более того, из этой леммы следует, что этот скачок существует во всех тех точках, где каждая из неубывающих компонент функции $\rho(t)$ обладает производной, хотя бы одна из которых конечна. В том частном случае, когда $\rho(t)$ абсолютно непрерывна по Лебегу, $\Phi(z)$ превращается в интеграл типа Коши, поэтому существование скачка почти всюду по мере Лебега следует из известной леммы Привалова [3]. Таким образом, лемму 1 можно рассматривать, как развитие упомянутой леммы Привалова, в случае, когда кривая L есть отрезок прямой.

Лемма 2. *Функция $I_\tau(\lambda)$ стремится к нулю при $\tau\to+0$ тогда и только тогда, когда $\rho'(\lambda)$ существует и равна нулю.*

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из леммы 1, а необходимость из нижеследующего неравенства

$$I_\tau(\lambda)>\frac{\tau}{\pi}\int_{\lambda-\tau}^{\lambda+\tau}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}>\frac{1}{2\pi}\frac{\rho(\lambda+\tau)-\rho(\lambda-\tau)}{2\tau}.$$

Лемма 3. *Для того, чтобы функция $I_\tau(\lambda)=O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ при фиксированном λ и $\tau\to+0$, необходимо и достаточно, чтобы точка $t=\lambda$ была точкой разрыва функции $\rho(t)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda-0)>0$, тогда из нижеприведенного соотношения

$$I_\tau(\lambda)=\frac{\tau}{\pi}\frac{\rho(\lambda+0)-\rho(\lambda)}{\tau^2}+\frac{\tau}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\lambda-0}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}+\int_{\lambda+0}^{+\infty}\frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}\right]$$

следует, что $I_\tau(\lambda)\to+\infty$ не медленнее, чем $\frac{1}{\tau}$, а, с другой стороны, очевидно, что $I_\tau(\lambda)\leqslant\frac{\operatorname{Var}\rho(t)}{\pi\tau}$, поэтому достаточность установлена. Теперь предположим, что точка $t=\lambda$ является точкой непрерывности $\rho(t)$, и докажем, что $\lim\limits_{\tau\to+0}\tau\cdot I_\tau(\lambda)=0$. Предположим противное, тогда существует последовательность $\tau_n\to+0$ такая, что $\tau_n\cdot I_{\tau_n}(\lambda)>c>0$.

Из непрерывности $\rho(t)$ в точке λ следует, что $\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)<$ $<\frac{c}{3}$ при достаточно малом $\delta>0$. Представим $I_\tau(\lambda)$ в виде

$$L_\tau(\lambda) = \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\lambda-\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} + \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} +$$

$$+ \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda+\delta}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2}, \tag{9}$$

тогда при достаточно малом τ первый и третий интегралы вместе не будут превосходить $\frac{c}{3}$ и для таких τ будем иметь неравенство

$$L_\tau(\lambda) \leqslant \frac{c}{3} + \frac{\tau}{\pi}\int\limits_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2+\tau^2} \leqslant \frac{c}{3\tau} + \frac{\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)}{\pi\tau} \leqslant \frac{2c}{3\tau},$$

что противоречит неравенству $L_{\tau_n}(\lambda) \geqslant \frac{c}{\tau_n}$ для достаточно больших n. Лемма доказана.

Пусть неубывающая функция $\rho(t)$ представлена в виде

$$\rho(t) = \rho_0(t) + \rho_1(t) + \rho_2(t), \tag{10}$$

где $\rho_0(t)$—функция скачков, $\rho_1(t)$—абсолютно непрерывна по Лебегу, а $\rho_2(t)$—чисто сингулярна, т. е. $\rho_2'(t) = 0$ почти всюду по мере Лебега.

Лемма 4. *Пусть $\rho(t)$ чисто сингулярна в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и пусть M_∞—совокупность таких точек, в которых производная $\rho'(t)$ существует и равна $+\infty$, тогда ρ-мера множества CM_0 равна нулю.*

Доказательство. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением конечного интервала $(-R, +R)$. Пусть M_0—совокупность точек, где $\rho'(t) = 0$, тогда по определению чисто сингулярной функции имеем, что $\operatorname{mes} CM_0 = 0$. Пусть M_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$—совокупность таких точек из CM_0, в которых все производные числа $D\rho(t) \leqslant n$, а N_n—множество таких точек из CM_0, в которых производные числа $D\rho(t)$ неограничены, но одно из них не превосходит n. Тогда легко убедиться, что

$$CM_0 = MUNUM_\infty, \tag{11}$$

где $M = \underset{n}{U} M_n$, $N = \underset{n}{U} N_n$. Составим функцию $\sigma(t) = \rho(t) + t$, которая уже строго возрастающая, поэтому, в силу известной леммы [4], следовательно, в силу непрерывности $\rho(t)$, заключаем, что σ-мера множества M_n равна нулю. Легко убедиться, далее, что ρ-мера множества M_n также равна нулю.

Аналогично убеждаемся, что ρ-мера множества N_n равна нулю при всех n, поэтому объединение всех этих множеств, т. е. MUN, также имеет ρ-меру, равную нулю. Поскольку в представлении (11) множества M, N, M_∞ без общих точек, то $\rho(CM_0) = \rho(M_\infty)$ и так как $\rho(M_0) = 0$, то лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Какова бы ни была неубывающая в промежутке $[-\infty, +\infty]$ функция $\rho(t)$, интеграл $I_\tau(\lambda)$ стремится к конечному (положительному) или бесконечному пределу на множестве точек, которое обладает полной ρ-мерой.*

Доказательство. Пусть E_0—точки разрыва функции $\rho(t)$, E_1-множество тех точек, в которых производная $\rho_1'(t)$ положительна и меньше бесконечности. Легко видеть, что

$$\rho_1([-\infty, +\infty]) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_1'(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{E_1} \rho_1'(t)\, dt = \rho_1(E_1), \quad \rho_0([-\infty, +\infty]) = \rho_0(E_0),$$

а, в силу леммы 4, $\rho_2([-\infty, \infty]) = \rho_2(M_\infty)$, поэтому получим

$$\rho([-\infty, +\infty]) = \rho_0(E_0) + \rho_1(E_1) + \rho_2(M_\infty),$$

откуда легко заключить, что

$$\rho([-\infty, +\infty]) = \rho(E_0 U E_1 U M_\infty). \tag{12}$$

Теперь уже, принимая во внимание лемму 1, из соотношения (12) убеждаемся в справедливости леммы 5.

3. В работе [2] было введено понятие ядра спектра или, так называемого, существенного спектра самосопряженного оператора A следующим образом.

Определение 1. Точка λ_0 принадлежит существенному спектру $S_l(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого элемента $g \in H$

$$\liminf_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda_0 + i\tau}\, g \|^2 > 0.$$

Другими словами, в существенный спектр входят лишь те точки λ_0, в которых для некоторого g $\| R_{\lambda_0+i\tau}\, g \| \to +\infty$ не медленнее $\frac{c}{\sqrt{\tau}}$, тогда как в точках спектра в смысле классической теории этому выражению позволяется стремиться к бесконечности как угодно медленно. Установленная выше лемма 5 позволяет усовершенствовать определение существенного спектра.

Определение 1*. Точка λ_0 принадлежит существенному спектру $S_l^*(A)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $g \in H$ существует и больше нуля $\lim\limits_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda_0+i\tau}\, g \|^2$.

Очевидно, $S_l^*(A)$ является частью $S_l(A)$, тем не менее из леммы 5 следует, что $S_l^*(A)$ также обладает полной спектральной мерой.

4. В этом пункте мы сформулируем несколько теорем, которые позволяют судить о характере спектра, т. е. о свойствах спектральной

меры в терминах асимптотического поведения выражения $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2$ при $\tau\to+0$.

Теорема 1. *Для чистой точечности спектра самосопряженного оператора A с простым спектром достаточно, чтобы для каждого $\lambda\in S_l^*(A)$ (за исключением, быть может, счетного числа) существовал такой элемент $g_\lambda\in H$, что $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g_\lambda\|^2=O\left(\frac{1}{\tau}\right)$.*

В самом деле, если в некоторой точке λ_0 выражение

$$\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda_0+i\tau}g\|^2=o\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

для всех $g\in H$, то точка λ_0 должна быть точкой непрерывности $\rho(t)$, ибо в противном случае, в силу леммы 3, это выражение было бы $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ для некоторого g.

Таким образом, в указанных в теореме 1 счетном числе исключительных точках сосредоточена нулевая спектральная мера.

Из доказательства той же леммы 3 легко заключить *, что все точки λ, в которых это выражение есть $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ для некоторого $g_\lambda\in H$, являются точками разрыва.

Таким образом, доказательство закончено, поскольку вся спектральная мера оказывается сосредоточенной в точках разрыва $\rho(t)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы спектр оператора A был чисто сингулярным, необходимо и достаточно, чтобы лебеговская мера $S_l^*(A)$ была равна нулю, и ни при одном $\lambda\in S_l^*(A)$, и ни при каком $g\in H$ выражение $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2\neq O\left(\frac{1}{\tau}\right)$.*

Пусть спектр—чисто сингулярный, тогда, по определению, нет точек разрыва, а по лемме 3 выражение $\frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2\neq O\left(\frac{1}{\tau}\right)$ ни при одном $g\in H$. С другой стороны, по лемме 5 вся спектральная мера сосредоточена в $S_l^*(A)$, а, по определению чистой сингулярности, лебеговская мера множества $S_l^*(A)$ должна равняться нулю.

Доказательство достаточности также просто, поскольку из леммы 3 следует, что точек разрыва нет, а из леммы 5 следует, что вся спектральная мера сосредоточена на множестве $S_l^*(A)$, которое по условию имеет лебеговскую меру нуль. Теорема доказана.

* Для этого достаточно выбрать $\delta>0$ так, чтобы

$$\rho(\lambda+\delta)-\rho(\lambda-\delta)<\frac{c}{3\|g_\lambda\|^2}.$$

Пусть g— так называемый порождающий элемент, тогда, в силу леммы 1, для почти всех λ по мере Лебега существует предел

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\pi}\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2 = \Phi(\lambda),$$

поэтому, в силу той же леммы 1, очевидна следующая

Теорема 3. *Для того, чтобы спектр оператора A был лебеговским в интервале (α, β), необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi(\lambda)$ была суммируема по Лебегу в этом интервале.*

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 5. I. 1966.

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Ջ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱԲՍՏՐԱԿՏ ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍՊԵԿՏՐԸ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՂ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ կատարելագործվում է ինքնահամալուծ օպերատորի սպեկտրի կորիզի սահմանումը և գտնված են անհրաժեշտ ու բավարար պայմաններ, օպերատորի ռեզոլվենտի ասիմպտոտիկ վարքի տերմիններով, որպեսզի օպերատորի սպեկտրը լինի կետային, սինգուլյար և լեբեգյան։ Միաժամանակ ստացված է Կոշու տիպի ինտեգրալների թռիչքի վերաբերյալ Պրիվալովի հայտնի լեմմայի, որոշ իմաստով, ընդհանրացումը։

R. A. ALEXANDRIAN, R. J. MEKRCHIAN

SOME TESTS CHARACTERIZING THE SPECTRUM OF A SELF-ADJOINT OPERATOR IN ABSTRACT HILBERT SPACES

Summary

In this paper we improve the definition of the kernel of the spectrum of a self-adjoint operator and give necessary and sufficient conditions (in terms of „asymptotic behaviour of the resolvent of the operator“) for the spectrum of an operator to be point, singular or Lebesgue.

In some sense we also generalize of Privalov's well known lemma concerning the limiting values of Cauchy type integrals.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян*, ДАН АрмССР, 11, № 5, 1965.
2. *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.
3. *И. И. Привалов*, Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950, 190.
4. *И. П. Натансон*, Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957, 226.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

А. А. ТАЛАЛЯН

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НУЛЬ-РЯДОВ

§ 1. Введение

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{1.1}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$—ортогональная и нормированная система на отрезке $[0, 1]$, называется нуль-рядом в смысле сходимости почти всюду (в смысле сходимости по мере), если не все коэффициенты a_n, $n = 1, 2, \cdots$, равны нулю и ряд (1.1) сходится к нулю почти всюду на $[0, 1]$ (соответственно по мере на $[0, 1]$). Существование нуль-рядов в смысле сходимости почти всюду для тригонометрической системы было установлено Д. Е. Меньшовым в 1916 г. ([1], стр. 804), а именно: им был построен ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{1.2}$$

не все коэффициенты которого равны нулю и который сходится к нулю почти всюду на $[0, 2\pi]$.

До сих пор неизвестно, существует ли нуль-ряд, в смысле сходимости почти всюду, по произвольной полной ортонормированной системе (см. [2], стр. 25)?

Существование же нуль-рядов в смысле сходимости по мере для любой полной ортогональной системы было доказано в [3]:

если $\{\varphi_n(x)\}$—полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система, то существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{1.3}$$

не все коэффициенты которого равны нулю и который сходится к нулю по мере на $[0, 1]$.

В настоящей работе исследуется поведение коэффициентов рядов (1.3) по полным системам, являющихся нуль-рядами в смысле сходимости по мере. Ясно, что если на рост коэффициентов наложить очень сильные ограничения, то они не могут быть коэффициентами нуль-рядов по ортогональным системам. Например, при условии $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, если ряд (1. 3) сходится к нулю по мере на отрезке $[0, 1]$, то $a_n = 0$,

$n=1, 2, \cdots$. Оказывается, что условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$ дает, в некотором смысле, окончательную оценку снизу коэффициентов рядов по любой полной ортонормированной системе, являющихся нуль-рядами. Доказывается следующая

Теорема 1. *Для любой последовательности действительных чисел* $\{b_k\}$, *где*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = +\infty, \tag{1.4}$$

и для любой ортонормированной и полной в пространстве $L_2[0, 1]$ *системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1.5}$$

такой, что

α) *не все коэффициенты* a_n, $n=1, 2, \cdots$, *равны нулю и ряд (1.5) сходится к нулю по мере на отрезке* $[0, 1]$;

β) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ *и для любого натурального* n *имеют место неравенства*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \qquad n=1, 2, \cdots. \tag{1.6}$$

Отметим, что аналогичная теорема для тригонометрических нуль-рядов была доказана Н. К. Бари (см. [1], стр. 841), которая, в отличие от других авторов, рассматривала условия на коэффициенты тригонометрического нуль-ряда, выраженные неравенствами (1.6).

Ясно, что неравенства (1.6) представляют собой условия на рост не самих коэффициентов a_n, $n=1, 2, \cdots$, нуль-ряда, а на частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ и что в этих терминах окончательны как указанная теорема Н. К. Бари, так и теорема 1. В том случае, когда вместо условий вида (1.6) рассматриваются условия, налагающие ограничения на рост самих коэффициентов, задача становится более трудной и для тригонометрических рядов она до сих пор не решена даже при следующей простой и естественной постановке (см. [2], стр. 24):

существует ли для всякой последовательности $\{\rho_n\}$

$$\rho_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 = \infty \tag{1.7}$$

тригонометрический нуль-ряд вида (1.2), для которого имели бы:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant \rho_n \qquad \text{при всех } n^*. \tag{1.8}$$

* В этом направлении наиболее существенные результаты получены Ивашевым-Мусатовым [3].

Однако легко доказать, что в классе всех полных ортонормированных систем этот вопрос имеет отрицательный ответ. Более того, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *— ортонормированная система функций на отрезке* $[0, 1]$ *и* $w(i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots$, *такова, что* $\liminf_{i\to\infty} w(i) = 0$. *Тогда функции системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *можно переставить так, чтобы вновь полученная система* $\{\varphi_{\nu_i}(x)\}$ *обладала следующим свойством:*

если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{\nu_i}(x)$ *сходится по мере к нулю на* $[0, 1]$ *и* $|a_i| \leqslant w(i)$, *то* $a_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Применяется следующая лемма, доказанная в работе [4] (см. также [5], стр. 375).

Лемма 1. *Пусть* $\psi_0(x)$ *— произвольная функция, определенная на отрезке* $\Delta \equiv [\alpha, \beta]$, *принадлежащая классу* $L_2(\Delta)$ *и равная нулю вне некоторого измеримого множества* $E_0 \subset \Delta$.

Пусть $\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x)$ *— произвольное конечное число функций, определенных на* $\Delta \equiv [\alpha, \beta]$ *и принадлежащих классу* $L_2(\Delta)$.

Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ *и* $\delta > 0$ *можно определить ограниченную функцию* $\psi(x)$ *и множество* e, *обладающие следующими свойствами:*

1) $\psi(x) = 0$ *при* $x \overline{\in} e$, *где* $e \subset E_0$, $\operatorname{mes} e < \varepsilon_0 \cdot |\Delta|$,

2) $$\int_\Delta \psi^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0}\int_\Delta \psi_0^2(x)\,dx,$$

3) $$\left|\int_\Delta [\psi_0(x) - \psi(x)]\,\psi_k(x)\,dx\right| < \delta, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

При помощи леммы 1 можно доказать лемму о свойствах полиномов по функциям произвольной ортогональной системы, представляющую усиление доказанной в работе [4] леммы 3, когда в последней вместо базисов пространства L_p рассматриваются ортогональные системы. Эта лемма формулируется так.

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ *— полная в* $L_2[0, 1]$ *ортонормированная система и* $f(x) \in L_2[0, 1]$.

Тогда для любых положительных чисел η, ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, *и для любого натурального* n *можно определить полином* $\sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x)$ *по функциям системы* $\{\varphi_n(x)\}$ *и измеримое множество* e *так, чтобы выполнялись условия*

1°. $e \subset [0, 1], \qquad \text{mes}\, e \leqslant \varepsilon.$

2°. $\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{ce} \leqslant \eta,$ *где* $ce = [0, 1] - e$*.

3°. $\left\| \sum_{k=n+1}^{\tau} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant \eta + \| f(x) \|_E$ *для любого измеримого множества* $E \subset ce$ *и для любого* τ, $n+1 \leqslant \tau \leqslant m$.

4°. $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \frac{4}{\varepsilon} \int_0^1 f^2(x)\, dx.$

5°. $|a_k| \leqslant \eta, \qquad n+1 \leqslant k \leqslant m.$

Доказательство. Разделим отрезок $[0, 1]$ на равные интервалы $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int_{\Delta_k} f^2(x)\, dx \leqslant \frac{\eta^2 \cdot \varepsilon}{8}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{2.1}$$

Применим лемму 1, полагая в ее формулировке $\psi_0(x) = f(x)$, $x \in \Delta_1$,

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x), \quad x \in \Delta_1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\eta}{4n}.$$

Тогда определим множество e_1 и функцию $\psi_1(x)$, которые обладают свойствами:

$$\psi_1(x) = 0, \quad x \overline{\in} e_1, \; e_1 \subset \Delta_1, \; \text{mes}\, e_1 \leqslant \varepsilon \cdot \text{mes}\, \Delta_1, \tag{2.2}$$

$$\int_{\Delta_1} \psi_1^2(x)\, dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Delta_1} f^2(x)\, dx, \tag{2.3}$$

$$\left| \int_{\Delta_1} [f(x) - \psi_1(x)]\, \varphi_k(x)\, dx \right| < \frac{\eta}{4n}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.4}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)} \varphi_k(x), \tag{2.5}$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_{\Delta_1} [f(x) - \psi_1(x)]\, \varphi_k(x)\, dx, \qquad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.6}$$

---

* Если $f(x) \in L_2[0, 1]$ — некоторая функция и $E \subset [0, 1]$ измеримое множество, мы обозначаем $\| f \|_E = \left(\int_E f^2(x)\, dx \right)^{1/2}$.

Так как он является разложением функции, равной $f(x)-\psi_1(x)$ на интервале Δ_1 и нулю на множестве $[0, 1]-\Delta_1$, то в силу полноты системы $\{\varphi_k(x)\}$ мы можем взять номер $n_1>n$ настолько большим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) - [f(x)-\psi_1(x)] \right\|_{\Delta_1} < \frac{\eta}{4} \tag{2.7}$$

и

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right\|_{[0, 1]-\Delta_1} < \frac{\eta}{4}. \tag{2.8}$$

Из условий (2.4) и равенств (2.6) немедленно вытекает неравенство

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k^{(1)}| < \frac{\eta}{4}. \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.7) и (2.8) с (2.9), получаем

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) - [f(x)-\psi_1(x)] \right\|_{\Delta_1} < \frac{\eta}{2} \tag{2.10}$$

и

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x) \right\|_{[0, 1]-\Delta_1} < \frac{\eta}{2}. \tag{2.11}$$

Предполагая, что уже определены полиномы

$$\sum_{k=n+1}^{n_1} a_k^{(1)} \varphi_k(x), \quad \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^{(2)} \varphi_k(x), \quad \ldots, \quad \sum_{k=n_{j-2}+1}^{n_{j-1}} a_k^{(j)} \varphi_k(x),$$

где

$$n<n_1<\cdots<n_{j-1}, \quad j-1<N, \tag{2.12}$$

определим полином $\displaystyle\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^{(j)} \varphi_k(x)$.

Для этого применим лемму 1, полагая в ее формулировке

$$\psi_0(x)=f(x), \quad x\in\Delta_j, \quad \psi_k(x)=\varphi_k(x), \quad x\in\Delta_j, \quad 1\leqslant k\leqslant n_{j-1}, \quad \varepsilon_0=\varepsilon$$

и $\quad \delta=\dfrac{\eta}{2^{j+1}\cdot n_{j-1}}$.

Согласно лемме 1, можно определить измеримое множество e_j и функцию $\psi_j(x)$, которые обладают свойствами

$$\psi_j(x)=0, \quad x\overline{\in} e_j, \ e_j\subset\Delta_j, \quad \operatorname{mes} e_j\leqslant\varepsilon\cdot\operatorname{mes}\Delta_j, \tag{2.13}$$

$$\int_{\Delta_j} \psi_j^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Delta_j} f^2(x)\,dx, \tag{2.14}$$

$$\left|\int\limits_{\Delta_j}[f(x)-\psi_j(x)]\,\varphi_k(x)\,dx\right|<\frac{\eta}{2^{j+1}\cdot n_{j-1}},\qquad k=1,\,2,\cdots,\,n_j. \tag{2.15}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(j)}\varphi_k(x),\qquad a_k^{(j)}=\int\limits_{\Delta_j}[f(x)-\psi_j(x)]\,\varphi_k(x)\,dx;\quad k=1,\,2,\cdots. \tag{2.16}$$

Так как этот ряд является разложением функции, равной $f(x)-\psi_j(x)$ на интервале Δ_j и нулю на $[0, 1]-\Delta_j$, то в силу полноты системы $\{\varphi_n(x)\}$ можно взять $n_j>n_{j-1}$ настолько большим, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_j}a_k^{(j)}\varphi_k(x)-[f(x)-\psi_j(x)]\right\|_{\Delta_j}<\frac{\eta}{2^{j+1}} \tag{2.17}$$

и

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_j}a_k^{(j)}\varphi_k(x)\right\|_{[0,\,1]-\Delta_j}<\frac{\eta}{2^{j+1}}. \tag{2.18}$$

Из неравенств (2.15) и из определения $a_k^{(j)}$ (см. (2.16)) получаем

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_{j-1}}a_k^{(j)}\varphi_k(x)\right\|_{[0,\,1]}\leqslant\sum_{k=1}^{n_{j-1}}|a_k^{(j)}|<\frac{\eta}{2^{j+1}}. \tag{2.19}$$

Сравнивая (2.19) с неравенствами (2.17) и (2.18), будем иметь

$$\left\|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}a_k^{(j)}\varphi_k(x)-[f(x)-\psi_j(x)]\right\|_{\Delta_j}<\frac{\eta}{2^j}, \tag{2.20}$$

$$\left\|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}a_k^{(j)}\varphi_k(x)\right\|_{[0,\,1]-\Delta_j}<\frac{\eta}{2^j}. \tag{2.21}$$

Таким образом, будут определены полиномы $\sum\limits_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}a_k^{(j)}\varphi_k^{(j)}(x)$, $j=1,\,2,\cdots,\,N$, удовлетворяющие условиям (2.20) и (2.21) для всех $j=1,\,2,\cdots,\,N^*$, где

$$a_k^{(j)}=\int\limits_{\Delta_j}[f(x)-\psi_j(x)]\cdot\varphi_k(x)\,dx \tag{2.22}$$

$$(j=1,\,2,\cdots N,\quad n_{j-1}+1\leqslant k\leqslant n_j).$$

При этом имеют место также неравенства

* При $j=1$ полагаем $n_0=n$, и тогда (2.20) и (2.21) выполнены в силу (2.10) и (2.11).

$$n < n_1, \quad n_j < n_{j+1}, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{2.23}$$

Положим

$$a_k = a_k^{(j)}, \quad n_{j-1} + 1 \leqslant k \leqslant n_j, \quad j = 1, 2, \cdots, N, \quad n_N = m, \tag{2.24}$$

и покажем, что полином

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^{(j)} \varphi_k(x), \qquad n_0 = n, \tag{2.25}$$

и множество

$$e = \sum_{j=1}^{N} e_j \tag{2.26}$$

удовлетворяют условиям $1^\circ, \cdots, 5^\circ$ леммы 2.

Выполнение условия 1° вытекает из неравенства (2.13), где $j = 1, 2, \cdots, N$, так как

$$\text{mes}\, e = \sum_{j=1}^{N} \text{mes}\, e_j \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{j=1}^{\Lambda} \text{mes}\, \Delta_j = \varepsilon.$$

Далее, так как

$$\left(\int_{\Delta_j} |f(x) - \psi_j(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\Delta_j} f^2(x)\, dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Delta_j} \psi_j^2(x)\, dx \right)^{1/2}$$

и $0 < \varepsilon < 1$, из неравенства (2.14) получаем

$$\left(\int_{\Delta_j} |f(x) - \psi_j(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_{\Delta_j} f^2(x)\, dx \right)^{1/2}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N. \tag{2.27}$$

Сравнивая (2.1) и (2.27), будем иметь

$$\int_{\Delta_j} |f(x) - \psi_j(x)|^2\, dx \leqslant \eta^2, \qquad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{2.28}$$

С другой стороны, из (2.27) вытекает также, что

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Delta_j} |f(x) - \psi_j(x)|^2\, dx \leqslant \frac{4}{\varepsilon} \int_0^1 f^2(x)\, dx. \tag{2.29}$$

В силу (2.22) и (2.24) имеем

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^2 \leqslant \int_{\Delta_j} |f(x) - \psi_j(x)|^2\, dx, \qquad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad n_0 = n. \tag{2.30}$$

Выполнение условия 4° следует из (2.29) и (2.30), а условие 5° вытекает из (2.28) и (2.30).

Теперь докажем, что выполнены также условия 2° и 3°.

Положим $\psi_j(x) = 0$ при $x \in [0, 1] - \Delta_j$, $1 \leqslant j \leqslant N$, и определим функции $F_j(x)$ и $\Phi_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, следующим образом:

$$F_j(x) = \begin{cases} f(x) - \psi_j(x), & x \in \Delta_j, \\ 0, & x \in [0, 1] - \Delta_j, \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x), & x \in \Delta_j, \\ 0, & x \in [0, 1] - \Delta_j. \end{cases} \tag{2.32}$$

Положим

$$A_i = \sum_{j=1}^{i} \Delta_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant N. \tag{2.33}$$

Для любого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, очевидно, имеет место равенство

$$\int\limits_{A_i} \left| \sum_{j=1}^{i} \Phi_j(x) - \left[f(x) - \sum_{j=1}^{i} \psi_j(x) \right] \right|^2 dx = \int\limits_{A_i} \left| \sum_{j=1}^{i} \Phi_j(x) - \sum_{j=1}^{i} F_j(x) \right|^2 dx. \tag{2.34}$$

Из (2.31), (2.32) и (2.33) имеем

$$\left(\int\limits_{A_i} \left| \sum_{j=1}^{i} \Phi_j(x) - \sum_{j=1}^{i} F_j(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{i} \left(\int\limits_{\Delta_j} |\Phi_j(x) - F_j(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \tag{2.35}$$

Из (2.31), (2.32), (2.24) и из неравенств (2.20) следует

$$\left(\int\limits_{\Delta_j} \left| \Phi_j(x) - F_j(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = \left\| \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^{(j)} \varphi_k(x) - [f(x) - \psi_j(x)] \right\|_{\Delta_j} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{2^j}.$$

Отсюда, в силу (2.35) и (2.34), получаем

$$\left(\int\limits_{A_i} \left| \sum_{j=1}^{i} \Phi_j(x) - \left[f(x) - \sum_{j=1}^{i} \psi_j(x) \right] \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \eta. \tag{2.36}$$

С другой стороны,

$$\left(\int\limits_{A_i} \left| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) - \sum_{j=1}^{i} \Phi_j(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{i} \left(\int\limits_{A_i} \left| \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) - \Phi_j(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \tag{2.37}$$

и, в силу (2.32), имеем

$$\left(\int\limits_{A_i}\left|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)-\Phi_j(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}=\left(\int\limits_{A_i-\Delta_j}\left|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{2.38}$$

Из (2.21) и (2.24) следует, что

$$\left(\int\limits_{A_i-\Delta_j}\left|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^{(j)}\varphi_k(x)\right\|_{[0,\,1]-\Delta_j}\leqslant\frac{\eta}{2^j}. \tag{2.39}$$

Сравнивая (2.37), (2.38) и (2.39), получаем

$$\left(\int\limits_{A_i}\left|\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)-\sum_{j=1}^{i}\Phi_j(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant\eta. \tag{2.40}$$

Из (2.36) и (2.40) следует, что

$$\left(\int\limits_{A_i}\left|\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)-\left[f(x)-\sum_{j=1}^{i}\psi_j(x)\right]\right|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant 2\eta \tag{2.41}$$

$$(i=1,\ 2,\cdots,N).$$

Отсюда, так как $\psi_j(x)=0$ при $x\overline{\in} e_j$, учитывая (2.26), получаем

$$\left(\int\limits_{A_i-e}\left|\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)-f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant 2\eta \tag{2.42}$$

$$(i=1,\ 2,\cdots,N).$$

Так как $A_N=[0,1]$, то из (2.25), (2.24) и (2.42), где положено $i=N$, вытекает, что

$$\left(\int\limits_{ce}\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\varphi_k(x)-f(x)\right|^2 dx\right)^{1/2}\leqslant 2\eta, \tag{2.42$'$}$$

т. е. условие 2° выполнено. Остается проверить выполнение условия 3°. Пусть E—измеримое множество, $E\subset ce$ и τ—натуральное число $n+1\leqslant\tau\leqslant m$. Если $n+1\leqslant\tau\leqslant n_1$, то из (2.30), где $j=1$ и (2.28) получаем

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\tau} a_k\varphi_k(x)\right\|\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\tau} a_k^2\right)^{1/2}\leqslant\eta,\quad \tau\leqslant n_1. \tag{2.43}$$

Неравенство (2.43) показывает, что при $\tau\leqslant n_1$ справедливо условие 3°. Пусть теперь $n_1<\tau\leqslant m$.

Из (2.23) вытекает, что для некоторого $i \leqslant N-1$ имеем

$$n_i < \tau \leqslant n_{i+1}, \qquad i \leqslant N-1 \tag{2.44}$$

и

$$\sum_{k=n+1}^{\tau} a_k \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_i+1}^{\tau} a_k \varphi_k(x), \quad n_i < \tau \leqslant n_{i+1}, \tag{2.45}$$

а из (2.28) и (2.30) при $j = i+1$ получаем

$$\left\| \sum_{k=n_i+1}^{\tau} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant \left(\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} a_k^2 \right)^{1/2} \leqslant \eta, \quad i \leqslant N-1, \quad n_i < \tau \leqslant n_{i+1}. \tag{2.46}$$

Представим множество E в виде суммы

$$E = A_i \cdot E + E \cdot CA_i, \quad \text{где} \quad CA_i = [0, 1] - A_i. \tag{2.47}$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_{A_i E} +$$
$$+ \left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E \cdot CA_i}. \tag{2.48}$$

Так как $E \cdot CA_i \subset [0, 1] - \Delta_j$, $1 \leqslant j \leqslant i$ (см. 2.33), то из неравенств (2.39) получаем

$$\left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E \cdot CA_i} \leqslant \sum_{j=1}^{i} \left\| \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k^{(j)} \varphi_k(x) \right\|_{[0, 1]-\Delta_j} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{i} \frac{\eta}{2^j} \leqslant \eta. \tag{2.49}$$

С другой стороны, из того, что $E \cdot A_i \subset A_i - e$ и из неравенства (2.42) непосредственно вытекает неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_{A_i \cdot E} \leqslant 2\eta + \|f\|_{A_i \cdot E} \leqslant 2\eta + \|f\|_E, \tag{2.50}$$

которое вместе с (2.48) и (2.49) влечет

$$\left\| \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k \varphi_k(x) \right\|_E \leqslant 3\eta + \|f\|_E. \tag{2.51}$$

Так как, в силу (2.45),

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\tau} a_k\varphi_k(x)\right\|_E \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{l}\sum_{n=n_{j-1}+1}^{n_j} a_k\varphi_k(x)\right\|_E + \left\|\sum_{k=n_l+1}^{\tau} a_k\varphi_k(x)\right\|_E,$$

то из (2.46) и (2.51) получаем

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{\tau} a_k\varphi_k(x)\right\|_E \leqslant 4\eta + \|f\|_E, \quad n_1 \leqslant \tau \leqslant m. \tag{2.52}$$

Таким образом, условие 3° леммы 2 выполнено для всех τ, $n+1 \leqslant \leqslant \tau \leqslant m$, и лемма доказана*.

Докажем сформулированную во введении теорему 1. Пусть $\{b_k\}$ — произвольная последовательность действительных чисел, где

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = +\infty \tag{2.53}$$

и $\{\varphi_k(x)\}$ — полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система. Возьмем последовательность положительных чисел ε_k, $k = 1, 2, \cdots$, удовлетворяющих условиям

$$\varepsilon_k < 1, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty. \tag{2.54}$$

Пусть n_1 — такое натуральное число, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} b_k^2 > 0 \tag{2.55}$$

и a_{n_1+1} — действительное число, удовлетворяющее условиям:

$$a_{n_1+1} \neq 0, \tag{2.56}$$

$$a_{n_1+1}^2 + \frac{4a_{n_1+1}^2}{\varepsilon_1} < \sum_{k=1}^{n_1} b_k^2. \tag{2.57}$$

Для построения ряда, удовлетворяющего условиям теоремы 1, на первом шагу мы применяем лемму 2 к функции $f(x) = a_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x)$, полагая в формулировке этой леммы $n = n_1 + 1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$ и $\eta = \varepsilon_1$. Тогда определяются полином $\sum\limits_{k=n_1+2}^{n_2} c_k\varphi_k(x)$ и множество e_1, которые удовлетворяют условиям 1°—5° леммы 2.

Рассмотрим полином $\sum\limits_{k=1}^{n_2} a_k\varphi_k(x)$, где $a_k = 0$ при $k \leqslant n_1$ и $a_k = -c_k$ при $n_1 + 2 \leqslant k \leqslant n_2$. Легко видеть, что выполняются неравенства

---

* Число η следует заменить числом $\frac{\eta}{4}$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_2. \tag{2.58}$$

В самом деле, при $n \leqslant n_1$ неравенство (2.58) выполнено, так как его левая часть обращается в нуль. С другой стороны, в силу условия 4° леммы 2, имеем

$$\sum_{k=n_1+2}^{n_2} c_k^2 \leqslant \frac{4}{\varepsilon} a_{n_1+1}^2 \tag{2.59}$$

и, следовательно, из (2.57) получаем

$$\sum_{k=n_1+1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad n_1+1 \leqslant n \leqslant n_2. \tag{2.60}$$

Отсюда ясно, что неравенство (2.58) выполняется также при $n_1+1 \leqslant \leqslant n \leqslant n_2$.

Далее, так как, в силу условия 2° леммы 2, имеет место неравенство

$$\left\| a_{n_1+1}\varphi_{n_1+1}(x) - \sum_{k=n_1+2}^{n_2} c_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_1} \leqslant \varepsilon_1, \tag{2.61}$$

где

$$\operatorname{mes} e_1 < \varepsilon_1, \quad ce_1 = [0, 1] - e_1, \tag{2.62}$$

то получаем, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_2} a_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_1} \leqslant \varepsilon_1. \tag{2.63}$$

Пусть определены полином $\sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x)$ и множество e_i, $i \geqslant 2$, удовлетворяющие условиям

$$e_i \subset [0, 1], \quad \operatorname{mes} e_i < \varepsilon_i, \tag{2.64}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad 1 \leqslant n \leqslant n_i, \tag{2.65}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_i} \leqslant \varepsilon_i. \tag{2.66}$$

Пользуясь равенством (2.53), возьмем натуральное число n_0 настолько большим, что

$$n_0 > n_i \tag{2.67}$$

и

$$\sum_{k=n_i+1}^{n_0} b_k^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n_i} a_k^2 + \frac{4}{\varepsilon_{i+1}} \cdot \sum_{k=1}^{n_i} a_k^2. \tag{2.68}$$

Применим лемму 2 к функции $f(x)=\sum_{k=1}^{n_l} a_k\varphi_k(x)$, полагая в ее формулировке $\varepsilon=\varepsilon_{l+1}$, $\eta=\eta_{l+1}$, $n=n_0$. Тогда определяются полином $\sum_{k=n_0+1}^{n_{l+1}} c_k\varphi_k(x)$ и множество e_{l+1}, которые удовлетворяют всем требованиям леммы 2.

Рассмотрим полином $\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k\varphi_k(x)$, где

$$a_k=\begin{cases}0, & n_l+1\leqslant k\leqslant n_0,\\ -c_k, & n_0<k<n_{l+1}.\end{cases} \tag{2.69}$$

Очевидно, будут выполнены следующие условия

$$\left\|\sum_{k=1}^{n_{l+1}} a_k\varphi_k(x)\right\|_{ce_{l+1}}\leqslant\varepsilon_{l+1},\text{ где } \operatorname{mes} e_{l+1}\leqslant\varepsilon_{l+1} \text{ и } ce_{l+1}=[0,1]-e_{l+1}, \tag{2.70}$$

$$\left\|\sum_{k=n_l+1}^{\tau} a_k\varphi_k(x)\right\|_E\leqslant\varepsilon_{l+1}+\left\|\sum_{k=1}^{n_l} a_k\varphi_k(x)\right\|_E \tag{2.71}$$

для любого измеримого $E\subset ce_{l+1}$.

$$\sum_{k=n_l+1}^{n_{l+1}} a_k^2\leqslant\frac{4}{\varepsilon_{l+1}}\cdot\sum_{k=1}^{n_l} a_k^2 \tag{2.72}$$

и

$$|a_k|\leqslant\varepsilon_{l+1},\quad n_l+1\leqslant k\leqslant n_{l+1}. \tag{2.73}$$

Легко видеть, что имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n} b_k^2,\quad 1\leqslant n\leqslant n_{l+1}. \tag{2.74}$$

В самом деле, для $n\leqslant n_0$ выполнение неравенств (2.74) вытекает из (2.65) и из того, что $a_k=0$, $n_l+1\leqslant k\leqslant n_0$, а при $n_0<n\leqslant n_{l+1}$ оно вытекает из (2.68) и (2.72).

Продолжая описанный выше процесс неограниченно, что возможно в силу (2.70) и (2.74), мы определяем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$ и последовательность измеримых множеств e_i, $i=1,2,\cdots$, так, что для любого $i\geqslant 2$ выполнены условия (2.70), (2.71), (2.73) и (2.74).

Из (2.73) и (2.74) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \qquad n = 1,\ 2, \cdots, \tag{2.75}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Таким образом, построенный ряд удовлетворяет условию β) теоремы 1, и для доказательства теоремы нужно проверить выполнение условия α). При этом, в силу (2.56), не все коэффициенты a_n, $n = 1, 2, \cdots$, равны нулю и остается доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ по мере на [0, 1] сходится к нулю.

Пусть ε—произвольное положительное число. Пользуясь условием (2.54), возьмем i_0 так, чтобы

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon. \tag{2.76}$$

Положим

$$E_\varepsilon = [0, 1] - \sum_{i=i_0}^{\infty} e_i. \tag{2.77}$$

Легко видеть, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ на множестве E_ε сходится к нулю в метрике L_2. В самом деле, если $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ и число n удовлетворяет неравенству

$$n_i \leqslant n < n_{i+1}, \quad \text{где} \quad i > i_0, \tag{2.78}$$

то имеем

$$\| S_n(x) \|_{E_\varepsilon} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E_\varepsilon} + \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E_\varepsilon}. \tag{2.79}$$

С другой стороны, из (2.77) следует, что $E_\varepsilon \subset ce_i$, $i > i_0$. Поэтому на основании (2.79) и неравенств (2.70), (2.71) получаем

$$\| S_n(x) \|_{E_\varepsilon} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_i} + \left\| \sum_{k=n_i+1}^{n} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E_\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{ce_i} + \varepsilon_{i+1} + \left\| \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(x) \right\|_{E_\varepsilon} \leqslant \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_i. \tag{2.80}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n(x) \|_{E_\varepsilon} = 0. \tag{2.81}$$

Так как, очевидно, mes $E_\varepsilon > 1 - \varepsilon$ (см. (2.76) и (2.77)), где $\varepsilon > 0$ произвольно, то из (2.81) непосредственно следует, что построенный ряд по мере сходится к нулю на отрезке [0, 1]. Тем самым теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Предположим, что ортонормированная на отрезке [0, 1] система $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\,dx > 0. \tag{3.1}$$

В работе Марцинкевича [6] было доказано, что из любой системы $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей условию (3.1), можно выбрать подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, такую, что если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_{n_k}(x)$ сходится почти всюду на [0, 1], то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$.

Почти дословным повторением доказательства этой теоремы можно установить следующий результат.

Для любой последовательности положительных чисел $u(n)$, $n = 1, 2, \cdots$, из ортонормированной на [0, 1] системы $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющей условию (3.1), можно выбрать подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ такую, что если $|a_k| \leqslant u(k)$, $k = 1, 2, \cdots$, и некоторая подпоследовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_{n_k}(x)$ сходится почти всюду на [0, 1], то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty.$$

Отсюда легко вытекает теорема 2 для систем, удовлетворяющих условию (3.1). В самом деле, пусть $w(n) > 0$, $n = 1, 2, \cdots$,

$$\liminf_{n\to\infty} w(n) = 0. \tag{3.2}$$

Возьмем последовательность натуральных чисел i_k, $k = 1, 2, \cdots$, такую, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} w(i_k) < +\infty, \tag{3.3}$$

и обозначим через j_k, $k = 1, 2, \cdots$, остальные натуральные числа. Из системы $\{\varphi_n(x)\}$ выберем подсистему $\{\varphi_{m_k}(x)\}$ такую, что если некоторая подпоследовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_{m_k}(x)$ сходится почти всюду на $[0, 1]$ и $|a_k| \leqslant w(j_k)$, то $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$. Пусть $\{\varphi_{l_k}(x)\}$—подсистема, оставшаяся из системы $\{\varphi_n(x)\}$ после удаления из нее функций $\varphi_{m_k}(x)$, $k = 1, 2, \cdots$. Систему $\{\varphi_{\nu_i}(x)\}$, полученную после перестановки системы $\{\varphi_n(x)\}$, определим следующим образом:

$$\varphi_{\nu_i}(x) = \varphi_{m_k}(x), \qquad i = j_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.4}$$

$$\varphi_{\nu_i}(x) = \varphi_{l_k}(x), \qquad i = i_k, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.5}$$

Предположим, что

$$|a_i| \leqslant w(i), \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{3.6}$$

и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{\nu_i}(x) \tag{3.7}$$

по мере на отрезке $[0, 1]$ сходится к нулю. Тогда некоторая подпоследовательность его частных сумм сходится к нулю почти всюду на отрезке $[0, 1]$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} \varphi_{\nu_{i_k}}(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ сходится (см. (3.3), (3.6)), то некоторая подпоследовательность частных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} \varphi_{\nu_{j_k}}(x)$ сходится почти всюду на $[0, 1]$.

Отсюда, в силу (3.4) и (3.6), следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k}^2 < +\infty. \tag{3.8}$$

С другой стороны, из (3.3) и (3.6) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k}^2 < +\infty. \tag{3.9}$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$ и, следовательно, $a_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots$.

Теперь теорему 2 докажем для систем $\{\varphi_n(x)\}$, не удовлетворяющих условию (3.1), т. е. когда

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |\varphi_n(x)|\, dx = 0. \tag{3.10}$$

Покажем, что справедлива следующая

Лемма 3.1. *Если система $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условию (3.10), то для любой последовательности $u(k) > 0$, $k = 1, 2, \cdots$, можно выбрать подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, обладающую свойствами:*

г) Для любой последовательности $\{a_k\}$, *где* $|a_k|\leqslant u(k)$, $k=1, 2,\cdots$, *ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}(x) \tag{3.11}$$

сходится почти всюду на $[0, 1]$.

д) *Для любой последовательности* $\{a_k\}$, *где* $|a_k|\leqslant u(k)$, $k=1, 2,\cdots$, *и* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2=+\infty$, *сумма ряда* (3.11) *не принадлежит классу* $L_2[0, 1]$.

Доказательство. Возьмем последовательность положительных чисел ε_k, $k=1, 2,\cdots$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k<+\infty, \qquad \varepsilon_k<1, \tag{3.12}$$

и, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} r_k \sum_{i=1}^{k-1} u(i)<+\infty, \tag{3.13}$$

где

$$r_k=\sum_{l=k+1}^{\infty} \varepsilon_l. \tag{3.14}$$

Пользуясь равенством (3.10), для $0<\delta_1<\varepsilon_1$ определим натуральное число n_1 такое, что

$$u(1)\,|\varphi_{n_1}(x)|\leqslant\varepsilon_1, \qquad x\in E_1, \tag{3.15}$$

где

$$E_1\subset[0, 1], \ \operatorname{mes} E_1>1-\frac{\delta_1}{2}\cdot \tag{3.16}$$

Далее, возьмем положительное δ_2, удовлетворяющее условиям

$$\delta_2<\varepsilon_2, \tag{3.17}$$

$$\int_e |a_1\varphi_{n_1}(x)|^2 dx<\varepsilon_2, \text{ если } \operatorname{mes} e<\delta_2 \text{ и } |a_1|\leqslant u(1), \tag{3.18}$$

$$\left|\int_e |a_2\varphi_n(x)|^2 dx-\int_e |a_1\varphi_{n_1}(x)+a_2\varphi_n(x)|^2 dx\right|<\varepsilon_2, \text{ если } \operatorname{mes} e<\delta_2, \tag{3.19}$$

для всех $n=1, 2,\cdots$, $|a_1|\leqslant u(1)$, $|a_2|\leqslant u(2)$.

Последнее условие при достаточно малом δ_2 выполняется, так как

$$\left|\int_e |a_2\varphi_n(x)|^2 dx-\int_e |a_1\varphi_{n_1}(x)+a_2\varphi_n(x)|^2 dx\right|\leqslant\int_e a_1^2\varphi_{n_1}^2(x)\,dx+$$

$$+2|a_1a_2|\left(\int_e \varphi_{n_1}^2(x)\,dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_e |\varphi_n^2(x)|\,dx\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant u^2(1)\cdot\int_e |\varphi_{n_1}^2(x)|\,dx+2u(1)\cdot u(2)\left(\int_e \varphi_{n_1}^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Пусть выбраны функции $\varphi_{n_1}(x), \varphi_{n_2}(x), \cdots, \varphi_{n_k}(x)$; $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, и числа $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k$. Число $\delta_{k+1} > 0$ выберем так, чтобы

$$\delta_{k+1} < \varepsilon_{k+1}, \tag{3.20}$$

$$\int_e \left|\sum_{l=1}^{k} a_l \varphi_{n_l}(x)\right|^2 dx < \varepsilon_{k+1} \text{ при } |a_l| \leqslant u(i),\ i \leqslant k, \text{ и } \operatorname{mes} e < \delta_{k+1}, \tag{3.21}$$

$$\left|\int_e \left[a_{k+1}\varphi_n(x)+\sum_{l=1}^{k} a_l\varphi_{n_l}(x)\right]^2 dx-\int_e |a_{k+1}\varphi_n(x)|^2\,dx\right| < \varepsilon_{k+1}$$

$$\text{при } \operatorname{mes} e < \delta_{k+1} \tag{3.22}$$

для всех натуральных $n = 1, 2, \cdots$, и $|a_l| \leqslant u(i)$, $i \leqslant k+1$. После этого возьмем $n_{k+1} > n_k$ настолько большим, что

$$|u(k+1)\varphi_{n_{k+1}}(x)| < \varepsilon_{k+1}, \qquad x \in E_{k+1}, \tag{3.23}$$

где

$$E_{k+1} \subset [0, 1], \quad \operatorname{mes} E_{k+1} > 1-\frac{\delta_{k+1}}{2}. \tag{3.24}$$

Таким образом, определяется последовательность функций $\varphi_{n_1}(x), \cdots$ $\cdots, \varphi_{n_k}(x), \cdots$, множества $E_1, E_2, \cdots, E_k \cdots$, и числа $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k, \cdots$, которые удовлетворяют условиям (3.20)—(3.24) для всех $k = 1, 2, \cdots$. В частности, условие (3.22) выполняется при $n = n_{k+1}$. Очевидно, можно потребовать, чтобы числа δ_k удовлетворяли также неравенству

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} \delta_l < \frac{\delta_k}{2}, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.25}$$

Теперь докажем, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ системы $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяет условиям леммы (3.1).

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{n_k}(x), \quad |a_k| \leqslant u(k), \tag{3.26}$$

почти всюду сходится на [0, 1], ибо, как легко следует из неравенств (3.12), (3.20), (3.23) и (3.24), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u(k)\varphi_k(x)|$ почти всюду сходится. Таким образом условие α) леммы (3.1) выполнено. Проверим условие β).

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = +\infty, \quad |a_k| \leqslant u(k), \tag{3.27}$$

и ряд (3.26) почти всюду на [0, 1] сходится к функции $f(x)$. Покажем, что

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = +\infty. \tag{3.28}$$

Положим

$$A_{k+1} = \prod_{l=k+2}^{\infty} E_l \cdot CE_{k+1}, \quad CE_{k+1} = [0, 1] - E_{k+1}. \tag{3.29}$$

Так как (см. (3.24), (3.25))

$$\operatorname{mes} \prod_{l=k+2}^{\infty} E_l > 1 - \sum_{l=k+2}^{\infty} \frac{\delta_l}{2} > 1 - \delta_{k+2}, \tag{3.30}$$

то

$$\operatorname{mes}(CE_{k+1} - A_{k+1}) = \operatorname{mes} CE_{k+1} - \operatorname{mes} A_{k+1} < \delta_{k+2}. \tag{3.31}$$

С другой стороны, из (3.24) имеем

$$\operatorname{mes} A_{k+1} \leqslant \operatorname{mes} CE_{k+1} < \delta_{k+1}. \tag{3.32}$$

Поскольку (см. (2.23) и (2.24))

$$\int_{E_{k+1}} |a_{k+1}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^2\,dx < \varepsilon_{k+1}^2 < \varepsilon_{k+1},$$

то

$$\int_{CE_{k+1}} |a_{k+1}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^2\,dx > a_{k+1}^2 - \varepsilon_{k+1}. \tag{3.33}$$

С другой стороны, из неравенства (3.21), где вместо k взято $k+1$ и $a_i = 0$ при $i \neq k+1$, и из (3.31) следует, что

$$\int_{A_{k+1}} |a_{k+1}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^2\,dx > \int_{CE_{k+1}} |a_{k+1}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^2\,dx - \varepsilon_{k+2}. \tag{3.34}$$

Сравнивая (3.33) и (3.34), получаем

$$\int_{A_{k+1}} |a_{k+1}\varphi_{n_{k+1}}(x)|^2\,dx > a_{k+1}^2 - (\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2}). \tag{3.35}$$

Далее, из неравенств (3.22), где $n = n_{k+1}$, и (3.32) следует

$$\int\limits_{A_{k+1}} \left[\sum_{l=1}^{k+1} a_l \varphi_{n_l}(x)\right]^2 dx > \int\limits_{A_{k+1}} a_{k+1}^2 \varphi_{n_{k+1}}^2(x)\,dx - \varepsilon_{k+1}. \tag{3.36}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{A_{k+1}} \left[\sum_{l=1}^{k+1} a_l \varphi_{n_l}(x)\right]^2 dx > a_{k+1}^2 - 2\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k+2}. \tag{3.37}$$

Наконец, из определения множества A_{k+1} (см. (3.29)) и из неравенств (3.23) вытекает, что сумма $f(x)$ ряда (3.26) на множестве A_{k+1} удовлетворяет равенству

$$f(x) = \sum_{l=1}^{k+1} a_l \varphi_{n_l}(x) + \psi_{k+2}(x), \quad x \in A_{k+1}, \tag{3.38}$$

где

$$|\psi_{k+2}(x)| \leqslant \sum_{l=k+2}^{\infty} \varepsilon_l = r_{k+2}, \quad x \in A_{k+1}. \tag{3.39}$$

Поэтому, как легко видеть,

$$\int\limits_{A_k} f^2(x)\,dx > \int\limits_{A_k} \left(\sum_{l=1}^{k+1} a_l \varphi_{n_l}(x)\right)^2 dx - 2r_{k+2} \sum_{l=1}^{k+1} u(i) - r_{k+2}^2. \tag{3.40}$$

Следовательно, учитывая (3.37), имеем

$$\int\limits_{A_{k+1}} f^2(x)\,dx > a_{k+1}^2 - 2r_{k+1} \sum_{l=1}^{k+1} u(i) + r_{k+2}^2 + 2\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2}. \tag{3.41}$$

Из условий (3.12) и (3.13) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[2r_{k+2} \sum_{l=1}^{k+1} u(i) + r_{k+2}^2 + 2\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_{k+2}\right] < +\infty. \tag{3.42}$$

Но множества A_k, $k = 1, 2 \cdots$, попарно не пересекаются и поэтому

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx > \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_{k+1}} f^2(x)\,dx. \tag{3.43}$$

Из (3.27), (3.33), (3.34) и (3.35) непосредственно следует (3.28), и тем самым лемма 3.1 доказана.

Теорема 2 для систем, удовлетворяющих условию (3.10), доказывается так же, как и в случае систем, удовлетворяющих условию (3.1). Если i_k, $k = 1, 2, \cdots$,—последовательность натуральных чисел, для которых выполнено (3.3), а j_k, $k = 1, 2, \cdots$, — остальные натуральные числа, то, полагая

$$u(k) = w(j_k), \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.44}$$

выбирается подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, удовлетворяющая условию леммы 3.1. Пусть $\varphi_{l_k}(x)$—остальные функции системы $\{\varphi_n(x)\}$. Переставленная система $\{\varphi_{\nu_i}(x)\}$ определяется так же, как и раньше:

$$\varphi_{\nu_i}(x) = \varphi_{n_k}(x), \quad i = j_k, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.45}$$

$$\varphi_{\nu_i}(x) = \varphi_{l_k}(x), \quad i = i_k, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{3.46}$$

Если $|a_i| \leqslant w(i)$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} \varphi_{\nu_{j_k}}(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_{j_k} \varphi_{n_k}(x) \tag{3.47}$$

почти всюду сходится, так как $|a_{j_k}| \leqslant u(k)$ и система $\{\varphi_{n_k}(x)\}$ удовлетворяет условиям леммы 3.1.

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{l_k} \varphi_{l_k}(x) \tag{3.48}$$

почти всюду сходится, и $\sum a_{l_k}^2 < +\infty$ в силу условия (3.3). Поэтому ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{\nu_i}(x)$ почти всюду сходится и из требования его сходимости к нулю по мере следует, что сумма ряда (3.47) принадлежит $L_2[0, 1]$. Но тогда $\sum a_{j_k}^2 < +\infty$ согласно лемме 3.1. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$ и, следовательно, $a_i = 0$, $i = 1, 2, \cdots$. Теорема 2 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 7. I. 1966

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ԶՐՈ-ՇԱՐՔԵՐԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատությունում ապացուցված է, որ կամայական $\{\varphi_n(x)\}$ լրիվ օրթոնորմալ սիստեմի և իրական թվերի կամայական $\{b_k\}$ հաջորդականության համար, որտեղ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2 = +\infty$, գոյություն ունի $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ շարք, որը ըստ չափի զուգամիտում է զրոյի.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

ընդ որում շարքի ոչ բոլոր գործակիցներն են հավասար զրոյի։

A. A. TALALIAN

ON COEFFICIENTS OF ORTHOGONAL NULL-SERIES

S u m m a r y

In the present paper it is proved that for every complete orthonormal system $\{\varphi_n(x)\}$ and for an arbitrarily given sequence of real numbers $\{b_k\}$, where $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = +\infty$, there exists such a series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ that

1. Not all the coefficients vanish identically.
2. It converges to zero in measure.
3. $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 < \sum_{k=1}^{n} b_k^2$ for $n = 1, 2, \cdots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Москва, Физматгиз, 1961.
2. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19 (1964), 3—70.
3. *О. С. Ивашев-Мусатов.* О коэффициентах тригонометрических нуль-рядов, ИАН, 21 (1957), 559—578.
4. *А. А. Талалян.* Представление измеримых функций рядами, УМН, 15 (1960), 77—141.
5. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.
6. *J. Marcinkiewicz.* Sur les series orthogonales, Studia Math. 8 (1939), 1—27.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

С. А. АКОПЯН

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В работах М. М. Джрбашяна [1]—[3] установлен ряд результатов о параметрическом представлении некоторых общих классов целых функций произвольного конечного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и нормального типа, интегрируемых с квадратом модуля вдоль специальных систем лучей.

Эти результаты представляли дальнейшее широкое обобщение классической теоремы Винера-Пэли о представлении целых функций экспоненциального типа, интегрируемых в квадрате модуля на всей вещественной оси. Приведем одну из типичных теорем такого рода [2].

Класс $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ целых функций порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho} < |\varphi| < \pi} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty \quad (-1 < \omega < 1), \tag{1}$$

совпадает с совокупностью функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} E_\rho(zt; \mu)\, \varphi(t)\, t^{\mu\rho-1} dt, \quad \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}, \tag{2}$$

где

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \tag{3}$$

—целая функция типа Миттаг-Леффлера, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ и $\varphi(t)$—произвольная функция из класса

$$\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} |\varphi(t)|^2 t^{\rho-1} dt < +\infty. \tag{4}$$

С другой стороны, в работах [4]—[6], в частности, было установлено, что при построении теории интегральных преобразований в комплексной области наряду с функцией типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)$ можно, например, использовать также обобщенную гипергеометрическую функцию вида

$$ {}_pF_q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}z^k \tag{5}$$

при определенных ограничениях, налагаемых на параметры.

В связи с этим естественно возникает также вопрос: возможно ли в представлении (2) класса $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ функцию типа Миттаг-Леффлера заменить другой родственной целой функцией, например функцией ${}_pF_q(z)$? В настоящей статье, существенно опираясь на вышеприведенную теорему М. М. Джрбашяна, мы увидим, что поставленная задача имеет положительное решение.

Заметим, что функция ${}_pF_q(z)$—целая, если $\rho_1^{-1}+\cdots+\rho_{q+1}^{-1}-\delta_1^{-1}-\cdots-\delta_p^{-1}>0$, причем порядка

$$\rho=\left(\frac{1}{\rho_1}+\cdots+\frac{1}{\rho_{q+1}}-\frac{1}{\delta_1}-\cdots-\frac{1}{\delta_p}\right)^{-1} \tag{6}$$

и типа

$$\sigma_F=\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1}}\cdots\left(\frac{\rho_{q+1}}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_{q+1}}}\left(\frac{\delta_1}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_1}}\cdots\left(\frac{\delta_p}{\rho}\right)^{-\frac{\rho}{\delta_p}}. \tag{7}$$

Обозначим

$$\mu=\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\nu_1-\cdots-\nu_p+\frac{p-q}{2} \tag{8}$$

и впредь будем предполагать, что все параметры, входящие в определение (5) функции ${}_pF_q(z)$, положительны, причем

$$\nu_j\delta_j\geqslant 1\qquad (j=1,2,\cdots,p), \tag{9}$$

$$\rho\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho} \tag{10}$$

$\left(\text{при } \rho_j=\infty \text{ или } \delta_j=\infty \text{ полагается } \mu_j=\frac{1}{2} \text{ или } \nu_j=\frac{1}{2}\right)$. Доказывается следующая

Теорема 1. *Класс $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ совпадает с совокупностью функций $f(z)$, допускающих представление вида*

$$f(z)=\int_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}}{}_pF_q(zt)\,t^{\mu\rho-1}\psi(t)\,dt, \tag{11}$$

где $\mu=\dfrac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, *а $\psi(t)$—произвольная функция из класса*

$$\int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |\psi(t)|^2 t^{\rho-1}\,dt < \infty. \tag{12}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем ряд вспомогательных предложений.

1°. Пусть $f(z) \in B_{\rho,\sigma}(\omega)$, тогда из (2) имеем

$$f(re^{i\varphi}) = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} E_\rho(rte^{i\varphi};\mu)\,\varphi(t)\,t^{\mu\rho-1}\,dt,$$

что равносильно равенству

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} = \frac{1}{\rho}\,r^{\mu-1}\int\limits_0^{\sigma} E_\rho(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi};\mu)\,\varphi(\tau^{1/\rho})\tau^{\mu-1}\,d\tau, \tag{13}$$

где

$$\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}, \quad \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}, \quad \varphi(\tau^{1/\rho}) \in L_2(0,\sigma).$$

Условие (1) в свою очередь означает, что

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} \in L_2(0,\infty) \tag{14}$$

для всех φ из отрезка $\left[\frac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}\right]$.

Обозначим

$$\varphi_1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\rho}\varphi(\tau^{1/\rho}) & \text{при}\quad 0<\tau<\sigma, \\ 0 & \text{при}\quad \tau>\sigma, \end{cases} \tag{15}$$

тогда, принимая во внимание равенство

$$\frac{d}{dr}\{r^{\mu}E_\rho(\lambda r^{1/\rho};\mu+1)\} = r^{\mu-1}E_\rho(\lambda r^{1/\rho};\mu),$$

запишем (13) в виде

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1} = \frac{d}{dr}\left\{r^{\mu}\int\limits_0^{\infty} E_\rho(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi};\mu+1)\,\varphi_1(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right\}. \tag{13'}$$

Пусть $F_\rho(s;\varphi)$—преобразование Меллина функции $f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1}$ в смысле

$$F_\rho(s;\varphi) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\int\limits_{1/a}^{a} f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1}\,r^{s-1}\,dr, \qquad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}, \tag{16}$$

а $\Phi_1(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varphi_1(\tau) \in L_2(0,\infty)$, т. е.

$$\Phi_1(s) = \underset{a\to+\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int\limits_{1/a}^{a} \varphi_1(\tau)\, \tau^{-s-1}\, d\tau, \quad \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}\,. \tag{17}$$

Известно [2], что преобразование Меллина функции

$$E_\rho(x^{1/\rho} e^{i\varphi};\, \mu+1) x^{\mu-1} \in L_2(0, \infty) \quad \left(\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho},\ \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

представляется в виде

$$\frac{\widetilde{E}_\rho(s;\varphi)}{1-s}, \text{ где } \widetilde{E}_\rho(s;\varphi) = \frac{\pi\rho e^{i(\pi-\varphi)(s+\mu-1)}}{\Gamma(1-s)\sin\pi\rho(s+\mu-1)}. \tag{18}$$

В силу равенства Парсеваля, из (13′) получим:

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^r f(t^{1/\rho} e^{i\varphi})\, t^{\mu-1}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\widetilde{E}_\rho(s;\varphi)}{1-s}\, \Phi_1(1-s)\, r^{-s} ds. \tag{19}$$

Преобразование Меллина левой части (19) равняется $\dfrac{F_\rho(s;\varphi)}{1-s}$, следовательно, из (19) имеем, что почти всюду на прямой $\mathrm{Re}\, s = \dfrac{1}{2}$ справедливо равенство

$$F_\rho(s;\varphi) = \widetilde{E}_\rho(s;\varphi)\,\Phi_1(1-s) \quad \left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{20}$$

Обратно, имея равенство (20), легко получить представление (2). Таким образом, в терминах преобразований Меллина равенство (2) равносильно равенству (20), где $\widetilde{E}_\rho(s;\varphi)$ определяется формулой (18), а $\Phi_1(s)$, как легко усмотреть, можно записать в виде

$$\Phi_1(s) = \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon^\rho}} \varphi(t)\, t^{s\rho-1}\, dt, \quad \mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}, \tag{21}$$

с $\varphi(t)$, удовлетворяющей условию (4).

2°. В работе [4] было доказано, что при вышепринятых условиях справедливо равенство

$$k_\rho(x;\varphi) = \int\limits_0^x {}_pF_q(t^{1/\rho} e^{i\varphi})\, t^{\mu-1}\, dt =$$

$$= x\, \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{K_\rho(s;\varphi)}{1-s}\, x^{-s} ds \quad \left(x > 0,\ \frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{22}$$

где

$$K_\rho(s;\varphi)=\frac{\pi\rho e^{i\rho(\pi-\varphi)(s+\mu-1)}\,\Psi(s)}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)},\tag{23}$$

а

$$\Psi(s)=\frac{\Gamma\left(\nu_1-\frac{\rho}{\delta_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p-\frac{\rho}{\delta_p}(s+\mu-1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1-\frac{\rho}{\rho_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1}-\frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s+\mu-1)\right)}.\tag{24}$$

Заметим теперь, что из (20) и (23) следует равенство

$$F_\rho(s;\varphi)=K_\rho(s;\varphi)\frac{\Phi_1(1-s)}{\Gamma(1-s)\Psi(s)},\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho},$$

откуда, обозначая $\chi(s)=\dfrac{\Phi_1(s)}{\Gamma(s)\Psi(1-s)}$, имеем

$$F_\rho(s;\varphi)=K_\rho(s;\varphi)\chi(1-s),\qquad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2}.\tag{25}$$

Из (9) и из формулы Стирлинга

$$|\Gamma(r+it)|=O\left(|t|^{r-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\right),\qquad |t|\to\infty,$$

имеем

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)\Psi\left(\frac{1}{2}-it\right)\right|^{-1}=O(1).$$

Следовательно, $\chi\left(\frac{1}{2}+it\right)\in L_2(-\infty,\infty)$, так как

$$\Phi_1(s)\in L_2\left(\frac{1}{2}-i\infty,\ \frac{1}{2}+i\infty\right).$$

Обозначим

$$\varkappa(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\chi(s)\tau^{-s}ds=\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}\int\limits_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\chi(s)}{1-s}\tau^{1-s}ds\tag{26}$$

и докажем лемму.

Лемма. *Почти всюду в промежутке* $\left(\frac{\sigma}{\sigma_F},\ \infty\right)$

$$\varkappa(\tau)=0.$$

Доказательство. Заметим сначала, что функция $\Phi_1(s)$ аналитически продолжается на полуплоскость $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$ формулой

$$\Phi_1(s) = \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} \varphi(t)\, t^{s\rho-1}\, dt.$$

Отсюда, полагая $s = \mathrm{R}e^{i\varphi}$, в силу неравенства Шварца-Буняковского получим

$$|\Phi_1(\mathrm{R}e^{i\varphi})| \leqslant \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} |\varphi(t)|\, t^{\rho R\cos\varphi - 1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} |\varphi(t)|^2 t^{\rho-1}\, dt \right\}^{1/2} \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{\sigma^\rho}} t^{2\rho R\cos\varphi - \rho - 1}\, dt \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{\sigma^{R\cos\varphi - \frac{1}{2}}}{\sqrt{2R\cos\varphi - 1}} \quad \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} - \delta,\ \sin\delta = \frac{1}{2R} \right), \tag{27}$$

где C не зависит от R и φ.

Далее, функция

$$\frac{\Phi_1(s)\, \tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)} \quad (\tau > 0) \tag{28}$$

аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс с вычетом $-\frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)}$. Нули функции $\Psi(1-s)$ находятся левее прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ в силу условия (9). Пусть D_R есть область, являющаяся пересечением полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ с кругом $|s| = R > 2$, а C_R—дуга $|\arg s| < \frac{\pi}{2} - \delta$ $\left(\sin\delta = \frac{1}{2R} \right)$ окружности $|s| = R$.

Интегрируя функцию (28) по контуру области D_R, получим

$$-\int\limits_{\frac{1}{2} - iR_1}^{\frac{1}{2} + iR_1} \frac{\Phi_1(s)\, \tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\, ds + \int\limits_{C_R} \frac{\Phi_1(s)\, \tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\, ds =$$

$$= -2\pi i \frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} \quad \left(R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} \right), \tag{29}$$

т. е.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_1}^{\frac{1}{2}+iR} \frac{\chi(s)\,\tau^{1-s}}{1-s}\,ds = \int\limits_{C_R} \frac{\Phi_1(s)\,\tau^{1-s}}{(1-s)\,\Gamma(s)\,\Psi(1-s)}\,ds +$$

$$+ 2\pi i \frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} = I_R(\tau) + 2\pi i \frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)}. \tag{29'}$$

Оценим интеграл $I_R(\tau)$ при $R \to \infty$. Имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant R\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{|\Phi_1(Re^{i\varphi})|\,\tau^{-R\cos\varphi}}{|1-Re^{i\varphi}|\,|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant 2\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{|\Phi_1(Re^{i\varphi})|\,\tau^{-R\cos\varphi}}{|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|}\,d\varphi. \tag{30}$$

Пользуясь асимптотическим поведением гамма-функции

$$|\Gamma(a+Re^{i\varphi})| = O\left(R^{R\cos\varphi + a - \frac{1}{2}} e^{-R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)}\right), \quad \begin{array}{l} |\varphi| \leqslant \pi - \delta \ (\delta > 0), \\ a \in (-\infty, +\infty), \end{array}$$

а также обозначениями (6), (7), (8), получаем

$$|\Gamma(Re^{i\varphi})\,\Psi(1-Re^{i\varphi})|^{-1} = O(\sigma_F^{-R\cos\varphi}), \tag{31}$$

причем порядок правой части равномерен относительно $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Из (30), в силу (27) и (31), имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant c_1\tau \int\limits_{-\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\sigma^{R\cos\varphi}\,\sigma_F^{-R\cos\varphi}}{\sqrt{2R\cos\varphi - 1}}\,\tau^{-R\cos\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 2c_1\tau \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\cos\varphi}}{\sqrt{2R\cos\varphi - 1}} = 2c_1\tau \int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\sin\varphi}}{\sqrt{2R\sin\varphi - 1}}\,d\varphi. \tag{32}$$

(Через c_i $(i = 1, 2, \cdots)$ обозначим постоянные, не зависящие от R и φ).

Так как $\sin\delta = \frac{1}{2R}$, то из (32) имеем

$$|I_R(\tau)| \leqslant \frac{2c_1\tau}{\sqrt{2R}} \int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-R\sin\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi - \sin\delta}}\,d\varphi \leqslant \frac{c_2\tau}{\sqrt{R}} \int\limits_\delta^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}R\varphi}}{\sqrt{\varphi - \delta}}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_3\tau}{\sqrt{R}}\int\limits_0^\infty \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}Rt}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{c_3\tau}{R}\int\limits_0^\infty \frac{\left(\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau\right)^{-\frac{2}{\pi}v}}{\sqrt{v}}\,dv. \tag{33}$$

Из (33) при $\frac{\sigma_F}{\sigma}\tau > 1$

$$|I_R(\tau)| \leqslant \frac{c_1\tau}{R} \quad (\tau > 0). \tag{33'}$$

Переходя к пределу в тождестве (29′) при $R \to \infty$, в силу (33′), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{R_1\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-iR_1}^{\frac{1}{2}+iR_1} \frac{\chi(s)}{1-s}\tau^{1-s}ds = \frac{\Phi_1(1)}{\Psi(0)} \quad \text{при} \quad \tau > \frac{\sigma}{\sigma_F}. \tag{34}$$

Из определения (26) и из (34) следует утверждение леммы. Из доказанной леммы вытекает, что в равенстве (25) $\chi(s)$ есть преобразование Меллина некоторой функции $\varkappa(\tau)$, равной нулю почти всюду вне промежутка $\left(0, \frac{\sigma}{\sigma_F}\right)$.

3°. *Доказательство теоремы.* а) Функция $f(z)$, определенная формулой (11), принадлежит классу $B_{\rho,\sigma}(\omega)$. Действительно, по неравенству Шварца-Буняковского из (11) имеем

$$|f(z)| \leqslant \left\{\int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |\psi(t)|^2 t^{\rho-1}dt\right\}^{1/2}\left\{\int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} |{}_pF_q(zt)|^2 t^{2\mu\rho-\rho-1}\,dt\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C\left|{}_pF_q\left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_F}\right)^{1/\rho}|z|\right]\right|, \tag{35}$$

где C—постоянная. Из (35) видно, что $f(z)$—целая функция порядка ρ и типа $\leqslant\sigma$.

Из (11) имеем также

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi}) = \int\limits_0^{(\sigma/\sigma_F)^{1/\rho}} {}_pF_q(r^{1/\rho}e^{i\varphi}t)\,t^{\mu\rho-1}\psi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int\limits_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(t^{1/\rho}r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,\psi(t^{1/\rho})\,t^{\mu-1}\,dt,$$

где

$$\psi(t^{1/\rho}) \in L_2\left(0, \frac{\sigma}{\sigma_F}\right).$$

Обозначим

$$\varkappa(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\psi(t^{1/\rho}), & 0 < t < \dfrac{\sigma}{\sigma_F}, \\ 0, & t > \dfrac{\sigma}{\sigma_F}. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varkappa(t) \in L_2(0, \infty)$.

Пусть $\chi(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varkappa(t)$

$$\chi\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L_2(-\infty, \infty).$$

В силу леммы 1 работы [5] имеем

$$\sup_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} |K_\rho(s; \varphi)| < \infty \quad \left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Так что

$$K_\rho(s; \varphi)\chi(1-s) \in L_2\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right).$$

Обозначим далее через $g(r, \varphi) \in L_2(0, \infty)$ $\left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ преобразование Меллина функции $K_\rho(s; \varphi)\chi(1-s)$. Тогда

$$\int_0^r g(t, \varphi)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{K_\rho(s; \varphi)}{1-s} \chi(1-s) r^{1-s}\, ds$$

и, в силу равенства Парсеваля,

$$\int_0^r g(t, \varphi)\, dt = \int_0^\infty \frac{k_\rho(xr; \varphi)}{x} \varkappa(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\rho} \int_0^{\sigma/\sigma_F} \frac{k_\rho(xr; \varphi)}{x} \psi(x^{1/\rho})\, dx. \tag{36}$$

Дифференцируя (36) по r и учитывая, что согласно (22)

$$\frac{d}{dr} k_\rho(r; \varphi) = {}_pF_q(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1},$$

получим

$$g(r, \varphi) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\sigma/\sigma_F} {}_pF_q(r^{1/\rho} x^{1/\rho} e^{i\varphi}) x^{\mu-1} \psi(x^{1/\rho})\, dx,$$

т. е.

$$g(r,\varphi)=f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1},$$

так что $f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})\,r^{\mu-1}\in L_2(0,\infty)$, т. е. $f(z)\in B_{\rho,\sigma}(\omega)$.

б) Пусть $f(z)\in B_{\rho,\sigma}(\omega)$. Тогда, как уже мы видели, справедливо равенство

$$F_\rho(s;\varphi)=K_\rho(s;\varphi)\,\chi(1-s),\quad \operatorname{Re}s=\frac{1}{2},\tag{37}$$

где $\chi(s)$ есть преобразование Меллина функции $\varkappa(\tau)$, равной нулю почти всюду в промежутке $\left(\frac{\sigma}{\sigma_F},\infty\right)$. Разделим равенство (37) на $2\pi i(1-s)\,r^{s-1}$ $(r>0)$ и проинтегрируем по линии $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$. Тогда, в силу равенства Парсеваля, получим

$$\int\limits_0^r f(t^{1/\rho}e^{i\varphi})\,t^{\mu-1}\,dt=\int\limits_0^\infty\frac{k_\rho(r\tau;\mu)}{\tau}\,\varkappa(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{\sigma/\sigma_F}\frac{k_\rho(r\tau;\mu)}{\tau}\,\varkappa(\tau)\,d\tau$$

или, дифференцируя по r, будем иметь

$$f(r^{1/\rho}e^{i\varphi})=\int\limits_0^{\sigma/\sigma_F}{}_pF_q(r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}e^{i\varphi})\,\tau^{\mu-1}\,\varkappa(\tau)\,d\tau,$$

т. е.

$$f(z)=\int\limits_0^{\sigma/\sigma_F}{}_pF_q(z\tau^{1/\rho})\,\tau^{\mu-1}\,\varkappa(\tau)\,d\tau,\tag{38}$$

где $\varkappa(\tau)\in L_2\left(0,\frac{\sigma}{\sigma_F}\right)$.

Равенство (38) в свою очередь равносильно равенству (11) теоремы. Теорема доказана.

4°. Выделим один частный случай этой теоремы. Пусть $p=0$, $q=1$, $\mu_1=1$, $\mu_2=\nu+1$, $\rho_1=\rho_2=1$, тогда $\rho=\frac{1}{2}$, $\mu=\nu+\frac{3}{2}$ и, так как $\frac{1}{2}<\mu<\frac{5}{2}$, то имеем $-1<\nu<1$; кроме того, $\sigma_F=2$, $\omega=\nu$. Класс $B_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ представляет совокупность целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant\sigma$, для которых

$$\int\limits_0^\infty|f(-t)|^2\,t^\nu\,dt<\infty\qquad(-1<\nu<1).$$

Следствие. Класс $B_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида

$$f(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} \int_0^{\frac{\sigma^2}{4}} I_\nu(2\sqrt{zt})\,\varphi(t)\,dt,$$

где $I_\nu(z)$ — видоизмененная функция Бесселя

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \quad \text{и} \quad \varphi(t) \in L_2\left(0, \frac{\sigma^2}{4}\right).$$

Эквивалентная формулировка этого результата следующая: пусть $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ — класс целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^\nu dx < \infty \qquad (-1 < \nu < 1).$$

Класс $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = z^{-\frac{\nu}{2}} \int_0^{\frac{\sigma^2}{4}} J_\nu(2\sqrt{zt})\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) \in L_2\left(0, \frac{\sigma^2}{4}\right) \quad \text{и} \quad J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}$$

— функция Бесселя.

При преобразовании $z = w^2$ $\widetilde{B}_{\frac{1}{2},\sigma}(\nu)$ переходит в класс четных целых функций $F(w)$ порядка 1 и типа $\leqslant \sigma$, для которых

$$\int_0^\infty |F(u)|^2 u^{2\nu+1} du < \infty \qquad (-1 < \nu < 1).$$

Обозначим этот класс через $B_\sigma(\nu)$.

Тогда получим, что $B_\sigma(\nu)$ *совпадает с множеством функций $F(w)$, допускающих представление вида*

$$F(w) = w^{-\nu} \int_0^\sigma J_\nu(w\tau)\sqrt{\tau}\,\varkappa(\tau)\,d\tau, \tag{39}$$

где $\varkappa(\tau) \in L_2(0, \sigma)$.

В работе [7] установлено, что утверждение, заключающееся в том, что любая функция из класса $B_\sigma(\nu)$ допускает представление (39) при некотором $\nu = \lambda + \alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$, есть следствие его справедливости при одном лишь значении $\lambda \left(> -\frac{1}{2}\right)$. Тем самым в этой работе установлена справедливость представления (39) при любом ν из промежутка $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Таким образом, если *класс* $B_\sigma(\nu)$ *рассматривается для любого* $-1 < \nu < \infty$, *то для него также справедливо параметрическое представление (39).*

Отметим также, что параметрическое представление класса $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ можно осуществлять и при помощи ядра

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{k/\rho_1+\mu_1}\left[\Gamma(k\rho_2^{-1}+\mu_2)\right]^{1/\rho_3}},$$

преобразование Меллина лучевых значений которого дано в работе [6]. А именно: справедлива

Теорема 2. *Класс* $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ *совпадает с совокупностью функций* $f(z)$, *допускающих представление вида*

$$f(z) = \int_0^{(\sigma/\tilde{\sigma})^{1/\rho}} F(zt)\, t^{\mu\rho-1}\, \psi(t)\, dt,$$

где

$$\rho = (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}\rho_3^{-1})^{-1} \geqslant \frac{1}{2}; \quad \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_3}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho};$$

$\vartheta \geqslant 1$; $\tilde{\sigma} = \frac{1}{\rho e}(\rho_2 e)^{\frac{\rho}{\rho_2\rho_3}}$ *и* $\psi(t)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^{(\sigma/\tilde{\sigma})^{1/\rho}} |\psi(t)|^2\, t^{\rho-1}\, dt < \infty.$$

И, наконец, отметим, что в представлении М. М. Джрбашяна [3] класса $W_\sigma^{(\rho)}\{\omega, \{\vartheta_k\}, \{\sigma_k\}\}$ вместо фигурирующей там целой функции типа Миттаг-Леффлера можно взять функции, рассмотренные нами выше, так как каждое слагаемое в представлении класса $W_\sigma^{(\rho)}\{\omega, \{\vartheta_k\}, \{\sigma_k\}\}$ допускает также представление с ядрами указанных видов.

В заключение выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 3. I. 1966

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մ. Մ. Ջրբաշյանը [1], [2] *դիտարկել է*

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty \qquad (-1<\omega<1)$$

պայմանին բավարարող, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ կարգի և σ-ից ոչ բարձր տիպի ամբողջ ֆունկցիաների $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ դասը և տվել է այդ դասի պարամետրական ներկայացումը։ Այդ ներկայացման մեջ որպես կորիզ հանդես է եկել Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան։ Ներկա աշխատանքում մենք ցույց ենք տվել, որ $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ դասի պարամետրական ներկայացման մեջ, որպես կորիզ կարելի է օգտագործել նաև ընդհանրացրած հիպերերկրաչափական ֆունկցիաները։

S. A. HAKOPIAN

ON PARAMETRIC REPRESENTATION OF A CLASS OF ENTIRE FUNCTIONS

Summary

M. M. Džrbašian [1]—[2] has considered the class $B_{\rho,\sigma}(\omega)$ of entire functions of finite order $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ and of type $\leqslant \sigma$ for which

$$\sup_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi} \left\{ \int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < \infty \qquad (-1<\omega<1)$$

giving at the same time the parametric representation of the class.

In that representation the entire function of Mittag-Lefler type serves as a Kernel function.

In the present paper we have shown that the hypergeometric function could serve the purpose equally well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Об интегральном представлении и единственности некоторых классов целых функций, Матем. сборник, 33 (75): 3 (1953), 485—530.

2. *М. М. Джрбашян.* Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем, 19 (1955), 133—190.
3. *М. М. Джрбашян.* О представлении некоторых классов целых и квазицелых функций, ДАН СССР, 159, № 1, 9—12.
4. *М. М. Джрбашян.* Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Леффлера, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 13, № 3 (1960), 21—63.
5. *С. А. Акопян.* Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 15, № 1 (1962), 13—36.
6. *С. А. Акопян.* Об одном интегральном преобразовании, ДАН АрмССР, 34, № 1 (1962), 3—12.
7. *Н. И. Ахиезер.* К теории спаренных интегральных уравнений, Записки мат. отделения физ.-мат. факультета ХГУ и Харьковского мат. общества, 25, 1957, 5—31.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

Р. А. ШАХБАГЯН

ОПЕРАТОРЫ СВЕРТКИ С НЕОДНОРОДНЫМИ СИМВОЛАМИ

В настоящей заметке изучается некоторый класс уравнений в свертках, зависящих от точки x, а именно: уравнения вида

$$Ku \equiv \int\limits_{R_n^+} K(x, x-y)\, u(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

где ядро $K(x, z)$, вообще говоря,—обобщенная функция z, преобразование Фурье которой по $z: \tilde{K}(x, \xi) = F_z K(x, z)$ является неоднородной функцией, а R_n^+—подпространство $x_n > 0$ n—мерного евклидова пространства R_n.

Функцию $\tilde{K}(x, \xi)$ будем называть символом оператора K. При некоторых условиях, налагаемых на ядра $K(x, z)$, устанавливается *нетеровость* соответствующих операторов в определенных функциональных пространствах. Исследуется также вопрос о гладкости операторов свертки.

Постановка краевых задач для уравнений вида (1) существенно зависит от некоторого числа ν, возникающего при факторизации символа $\tilde{K}$.

Теория общих краевых задач для уравнений в свертках вида (1) в ограниченной области G с однородными символами, удовлетворяющими условию эллиптичности: $\tilde{K}(x, \xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, $x \in G$, широко развита в работах М. И. Вишика и Г. И. Эскина [1]—[3].

При доказательстве теорем о нормальной разрешимости мы воспользовались методикой, выработанной С. Агмоном, А. Дуглисом и Л. Ниренбергом [4[, М. И. Вишиком и Г. И. Эскином [1], М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком [5].

Введем и вкратце опишем ряд функциональных пространств, в которых будут вестись наши рассмотрения. Для произвольных вещественных s и r через $H_{s,r} = H_{s,r}(R_n)$ обозначим пространство функций $f(x)$ (обобщенных при s или r отрицательных) таких, что

$$|||f|||_{s,r}^2 = \int\limits_{R_n} (1+|\xi'|^2)^s (1+|\xi_n|^2)^r\, |\tilde{f}(\xi', \xi_n)|^2\, d\xi' d\xi_n < +\infty, \tag{2}$$

где $\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$, $\tilde{f}(\xi) = Ff(x)$—преобразование Фурье функции

$f(x)$. Через $\widetilde{H}_{s,r}$ будем обозначать образ Фурье пространства $H_{s,r}$. Норма в пространстве $\widetilde{H}_{s,r}$ также задается формулой (2).

Обозначим через $R_n^+ (R_n^-)$ полупространство $x_n > 0$ $(x_n < 0)$ евклидова пространства R_n. $\overset{\circ}{H}{}^+_{s,r} = \overset{\circ}{H}{}^+_{s,r}(R_n^+)$, по определению, есть подпространство пространства $H_{s,r}$, состоящее из функций, носитель которых сосредоточен в $\overline{R}_n^+$. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^-_{s,r}$ определяется аналогично. Образ Фурье пространства $\overset{\circ}{H}{}^-_{s,r}$ обозначим через $\widetilde{\overset{\circ}{H}}{}^+_{s,r}$. $\widetilde{\overset{\circ}{H}}{}^+_{s,r}$ состоит из функций $\widetilde{f}_+(\xi', \xi_n)$, аналитически продолжающихся в полуплоскость $\tau = \operatorname{Im} \xi_n > 0$.

Через $H_{s,r}(R_n^+)$ обозначим пространство функций, заданных в R_n^+, являющихся сужениями на R_n^+ функций из $H_{s,r}(R_n)$.

Для произвольных вещественных s и r через $W_{s,r} = W_{s,r}(R_n)$ обозначим пространство Соболева-Слободецкого функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|^2_{s,r} = \int\limits_{R_n} [(1 + |\xi'|^2)^s + (1 + |\xi_n|^2)^r] |\widetilde{f}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi' d\xi_n < +\infty.$$

Пространства $\overset{\circ}{W}{}^+_{s,r}$, $\widetilde{\overset{\circ}{W}}{}^+_{s,r}$, $W_{s,r}(R_n^+)$ вводятся аналогично введенным выше пространствам $\overset{\circ}{H}{}^+_{s,r}$, $\widetilde{\overset{\circ}{H}}{}^+_{s,r}$, $H_{s,r}(R_n^+)$. Норма в пространстве $W_{s,r}(R_n^+)$ вводится по формуле

$$'\|f\|^+_{s,r} = \inf \| lf \|_{s,r}, \tag{3}$$

где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $lf(x) \in W_{s,r}(R_n)$ функции $f(x)$. В пространстве $W_{s,r}(R_n^+)$ введем норму, эквивалентную норме (3), по формуле (ср. [6])

$$\|f\|^+_{s,r} = \| \Pi^+ [(1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} + (\xi_n - i)^r] \widetilde{lf}(\xi) \|_0, \tag{4}$$

где $\| \ \|_0$—норма в $H_0(R_n)$, а $\Pi^+ \widetilde{\varphi}(\xi', \xi_n) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\varphi}(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n} d\eta_n =$

$= iV \cdot p \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\varphi}(\xi', \eta_n)}{\xi_n - \eta_n} d\eta_n + \pi \widetilde{\varphi}(\xi', \xi_n)$ для любой функции $\widetilde{\varphi}(\xi) \in \widetilde{H}_0(R_n)$.

Пространство $W^+_{s,r}$ определяется следующим образом: продолжим $f(x) \in W_{s,r}(R_n^+)$ нулем для $x \in R_n^-$ и обозначим это продолжение через $f_+(x)$. Пространство таких функций $f_+(x)$ обозначим через $W^-_{s,r}$.

$\widetilde{W}^{+}_{s,r}$ — образ Фурье пространства $W^{+}_{s,r}$. Норма в пространстве $\widetilde{W}^{+}_{s,r}$ задается формулой (4).

В полупространстве R_n^+ рассмотрим уравнение вида

$$u(x) - \int\limits_{R_n^+} K_0(x-y)\,u(y)\,dy = f(x), \quad x_n > 0. \tag{5}$$

Пусть функция $\widetilde{K}_0(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\widetilde{K}_0(\xi', \xi_n)$ — положительно-однородная функция от ξ' нулевого порядка: $\widetilde{K}_0(t\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n)$ $(t > 0)$;

б) $K_0(x', x_n) = F^{-1}\widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \in L_1(R_1)$ при всех $x' \neq 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{\xi_n \to \pm\infty} \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) = 0$ для $\xi \in \widetilde{R}_n$, $\xi' \neq 0$;

в) $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = 1 - \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \neq 0$ для всех $\xi \in \widetilde{R}_n$, $\xi' \neq 0$;

г) функция $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$ бесконечно дифференцируема по ξ' при $\xi' \neq 0$.

Класс функций $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$, удовлетворяющих условиям а)—г), обозначим через O_0.

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{K}_1(\xi) \in O_0$, тогда $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$ допускает единственную, однородную по ξ' нулевого порядка, факторизацию по ξ_n $(n > 1)$, то есть представление вида:*

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}^{+}_{\nu}(\xi', \xi_n)\,\widetilde{K}^{-}_{-\nu}(\xi', \xi_n), \tag{6}$$

где

$$\widetilde{K}^{+}_{\nu}(\xi', \xi_n) = (\xi_n + i)^{\nu}\,\widetilde{K}_{+}(\xi', \xi_n), \quad \widetilde{K}^{-}_{-\nu}(\xi', \xi_n) = \frac{\widetilde{K}_{-}(\xi', \xi_n)}{(\xi_n - i)^{\nu}},$$

$$\lim_{\xi_n \to \pm\infty} \widetilde{K}_{\pm}(\xi', \xi_n) = 1,$$

$\widetilde{K}_{+}$ ($\widetilde{K}_{-}$) аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_n > 0$ ($\operatorname{Im}\xi_n < 0$) и отлична там от нуля.

Доказательство. Пусть

$$\operatorname{ind}_{\xi_n} \widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \frac{1}{2\pi}\Big[\arg \widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)\Big]_{\xi_n = -\infty}^{\xi_n = +\infty} = \nu \tag{7}$$

(ν — целое). Тогда, как легко видеть, приращение аргумента функции $K_2(\xi', \xi_n) = \dfrac{(\xi_n - i)^{\nu}\,\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)}{(\xi_n + i)^{\nu}}$ при ξ_n изменяющемся от $+\infty$ до $-\infty$ равно нулю. Можно показать, воспользовавшись формулами скачка интеграла типа Коши, что функция $\ln \widetilde{K}_2(\xi', \xi_n)$ представима в виде:

$$\ln \widetilde{K}_2(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_+(\xi', \xi_n) - \widetilde{K}_-(\xi', \xi_n), \tag{8}$$

где функция $\widetilde{K}_+(\xi', \xi_n)$ $(\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n))$ аналитически продолжима в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n > 0$ $(\operatorname{Im} \xi_n < 0)$. Из представления (8) вытекает, что функцию $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n)$ можно записать в виде:

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = (\xi_n + i)^{\nu} e^{\widetilde{K}_+(\xi', \xi_n)} (\xi_n - i)^{-\nu} e^{-\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n)} = \widetilde{K}_{\nu}^{+}(\xi) \widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi),$$

причем функции $\widetilde{K}_{\nu}^{+}(\xi)$ и $\widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi)$ обладают требуемыми свойствами. Легко проверить, что факторизация (6) единственна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\widetilde{K}_1(\xi) \in O_0$, *тогда при любой правой части* $f(x) \in H_{s,\nu}(R_n^+)$ (s—*любое*) *уравнение (5) имеет единственное решение* $u_+(x) \in H_{s,\nu}^{+}$, *задаваемое формулой*

$$u_+(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{\widetilde{K}_{\nu}^{+}(\xi', \xi_n)} \Pi^+ \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi', \xi_n)}\right), \tag{9}$$

где $lf \in H_{s,\nu}(R_n)$—*любое продолжение функции* $f(x)$ *на* R_n.

Доказательство. Уравнение (5) можно записать в следующем виде

$$P^+(K_1(x) * u_+(x)) = f(x), \qquad x \in R_n^+, \tag{10}$$

где P^+—оператор сужения на R_n^+. Обозначим продолжение $f(x)$ на все R_n через $lf \in H_{s,\nu}(R_n)$. Существование такого продолжения следует из определения пространства $H_{s,\nu}(R_n^+)$. Тогда уравнение (10) можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$K_1(x) * u_+(x) = lf(x) + u_-(x), \tag{11}$$

где $u_-(x) \in H_{s,\nu}^{-}$—произвольная функция. Образ Фурье уравнения (11) имеет вид:

$$\widetilde{K}_1(\xi) \widetilde{u}_+(\xi) = \widetilde{lf}(\xi) + \widetilde{u}_-(\xi). \tag{12}$$

Так как $\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) \in O_0$, то ее можно представить в виде

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_{\nu}^{+}(\xi', \xi_n) \widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi', \xi_n). \tag{13}$$

Пользуясь (13), из (12) получим

$$\widetilde{K}_{\nu}^{+}(\xi', \xi_n) \widetilde{u}_+(\xi', \xi_n) = \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi', \xi_n)} + \frac{\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)}{\widetilde{K}_{-\nu}^{-}(\xi', \xi_n)}. \tag{14}$$

При почти всех ξ' $\dfrac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\widetilde{K}^-_{-\nu}(\xi', \xi_n)} \in H_0(R_1)$ по ξ_n. Из (14) имеем

$$\widetilde{K}^+_\nu(\xi)\widetilde{u}_+(\xi) - \prod^+ \frac{\widetilde{lf}(\xi)}{\widetilde{K}^-_{-\nu}(\xi)} = \prod^- \frac{\widetilde{lf}(\xi)}{\widetilde{K}^-_{-\nu}(\xi)} + \frac{\widetilde{u}_-(\xi)}{\widetilde{K}^-_{-\nu}(\xi)} = P(\xi', \xi_n). \quad (15)$$

Поскольку левая часть соотношения (15) как функция вещественного ξ_n принадлежит пространству $H_0(R_1)$, пользуясь теоремой Лиувилля, получаем, что для почти всех ξ' $P(\xi', \xi_n) = 0$. Таким образом, для решения $\widetilde{u}_+(\xi) \in \overset{\circ}{\widetilde{H}}{}^+_{s,\nu}$ получаем формулу

$$\widetilde{u}_+(\xi) = \frac{1}{\widetilde{K}^+_\nu(\xi', \xi_n)} \prod^+ \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\widetilde{K}^-_{-\nu}(\xi', \xi_n)}.$$

Очевидно это решение единственно в пространстве $\overset{\circ}{\widetilde{H}}{}^+_{s,\nu}$. Теорема доказана.

Определение 1. Оператор $\widetilde{K} \in O_0$ назовем гладким в R^+_n, если для любых s, $r \geqslant 0$ $P^+Ku_+ \in W_{s,r}(R^+_n)$, коль скоро $u_+ \in W^+_{s,r}$ (P^+ — оператор сужения функций, заданных в R_n, на R^+_n).

Определение 2. Мы скажем, что функция $\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n)$ принадлежит классу O^-_α, если она однородна по ξ' степени нуль, по ξ_n имеет степенной рост порядка α и допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n < 0$ при всех ξ'.

Сформулируем условие, обеспечивающее гладкость оператора K.

Функция $\widetilde{K}(\xi', \xi_n) \in O_0$, по определению, удовлетворяет условию А), если при любом вещественном r имеет место разложение

$$(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_-(\xi', \xi_n) + R_{0,-1}(\xi', \xi_n),$$

где $\widetilde{K}_-(\xi) \in O^-_r$, а для $R_{0,-1}(\xi', \xi_n)$ справедлива оценка:

$$|R_{0,-1}(\xi', \xi_n)| \leqslant \frac{C}{|\xi_n| + 1}.$$

Класс функций $\widetilde{K}(\xi) \in O_0$, удовлетворяющих условию А), обозначим A_0.

Теорема 3 *(теорема гладкости). Пусть $\widetilde{K}(\xi) \in A_0$. Тогда при любых s, $r \geqslant 0$ справедлива оценка:*

$$\|K * u_+\|^+_{s,r} = \|\widetilde{K}\widetilde{u}\|^+_{s,r} \leqslant C\|u_+\|^+_{s,r},$$

где $u_+(x)$—любая функция, принадлежащая пространству $W^+_{s,r}$, а C—постоянная, не зависящая от $u_+(x)$.

Доказательство. Пусть $lu(x)$—некоторое продолжение функции $u(x)$ на все пространство R_n, принадлежащее $W_{s,r}(R_n)$, причем $\|lu\|_{s,r} \leqslant C\|u_+\|^+_{s,r}$ где C—постоянная, не зависящая от u_+. Функцию $lu(x)$ представим в виде:

$$lu(x) = u_+(x) + u_-(x), \quad \text{где} \quad u_-(x) \in W^-_{s,r}.$$

Поскольку $\widetilde{K}(\xi', \xi_n) \in A_0$, ее можно представить в следующем виде:

$$(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_-(\xi', \xi_n) + R_{0,-1}(\xi', \xi_n), \tag{16}$$

где $\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n) \in O^-_r$, а $|R_{0,-1}(\xi', \xi_n)| \leqslant \dfrac{C}{|\xi_n| + 1}$. Оценим Ku_+ следующим образом:

$$\|Ku_+\|^+_{s,r} \leqslant \|\Pi^+(1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Поскольку $\widetilde{K} \in O_0$ и $r \geqslant 0$, имеем

$$I = \|\Pi^+(1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant M\|\Pi^+(1 + |\xi'|^2)^{\frac{s}{2}} \widetilde{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 = M\|u_+\|^+_{s,0} \leqslant M\|u_+\|^+_{s,r}. \tag{17}$$

Оценим теперь II.

$$II = \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_+(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{lu}(\xi', \xi_n)\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 = II_1 + II_2. \tag{18}$$

$$II_1 = \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{lu}(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{lu}(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant C\|lu\|_{s,r} \leqslant C_1\|u_+\|^+_{s,r}. \tag{19}$$

Оценим II_2, воспользовавшись разложением (16).

$$II_2 = \|\Pi^+(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|\Pi^+\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 + \|\Pi^+ R_{0,-1}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|R_{0,-1}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_-(\xi', \xi_n)\|_0. \tag{20}$$

При выводе неравенства (20) мы воспользовались тем, что

$$\Pi^{+}\widetilde{K}_{-}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_{-}(\xi', \xi_n) = 0.$$

Далее, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{lu}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{u}_{+}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n + \int_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{u}_{-}(\xi', \xi_n)|^2 d\xi_n, \tag{21}$$

то, интегрируя (21) по ξ', получим

$$\|\widetilde{lu}(\xi', \xi_n)\|_0^2 = \|\widetilde{u}_{+}(\xi', \xi_n)\|_0^2 + \|\widetilde{u}_{-}(\xi', \xi_n)\|_0^2. \tag{22}$$

Таким образом, из (20) и (22), учитывая что $s, r \geqslant 0$, получим

$$II_2 = \|\Pi^{+}(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_{-}(\xi', \xi_n)\|_0 \leqslant C\|\widetilde{lu}\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C\|\widetilde{lu}\|_{s,r} \leqslant C_1\|u_{+}\|_{s,r}^{+}. \tag{23}$$

Из (17), (18), (19) и (23) вытекает, что

$$\|\widetilde{K}(\xi', \xi_n)\widetilde{u}_{+}(\xi', \xi_n)\|_{s,r}^{+} \leqslant C_2\|u_{+}\|_{s,r}^{+},$$

где C_2—постоянная, не зависящая от u_{+}. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению операторов с переменными символами. Пусть функция $\widetilde{K}(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x при $\xi' \neq 0$ и принадлежит классу O_0 по ξ при всех $x \in R_n$. Предположим, далее, что $\widetilde{K}(x, \xi) = \widetilde{K}_0(\xi)$ при $|x| \geqslant l$, где $0 < l < +\infty$ — произвольное фиксированное число. Класс таких функций $\widetilde{K}(x, \xi)$ обозначим $O_0^{(1)}$.

Определение 3. Мы скажем, что функция $\widetilde{K}(x, \xi)$ принадлежит классу $A_0^{(1)}$, если при всех $x \in R_n$ $\widetilde{K}(x, \xi) \in A_0$, то есть для любого вещественного r

$$(\xi_n - i)^r \widetilde{K}(x, \xi) = \widetilde{K}_{-}(x, \xi) + R_{0,-1}(x, \xi),$$

где $\widetilde{K}_{-}(x, \xi) \in O_r^{-}$, $|R_{0,-1}(x, \xi)| \leqslant \dfrac{C}{|\xi_n| + 1}$ при всех $x \in R_n$. Рассмотрим оператор $\theta^{+}Ku$, где $\theta^{+}f(x) = \begin{cases} f(x), & x_n > 0 \\ 0, & x_n \leqslant 0 \end{cases}$. Представим его в следующем виде:

$$\theta^{+}Ku = \theta^{+}K_0 u + \psi_0(x)\theta^{+}(K - K_0)u, \tag{24}$$

где $$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leqslant l - \varepsilon \\ 0 & \text{при } |x| \geqslant l \end{cases}, \quad \psi_0(x) \in C^{\infty}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\widetilde{K}(x, \xi) \in A_0^{(1)}$, *а* $\widetilde{K}_0(\xi)$ *удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда соответствующий оператор* $P^{+}Ku_{+}$, *где*

$\mathfrak{G}^+ Ku$ *определяется формулой* (24), *является* Φ—*оператором в пространстве* $W^+_{s,v}$.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору М. И. Вишику за постановку задачи и полезные обсуждения.

Московский энергетический институт

Поступило 6. I. 1966

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

ՓԱԹԵԹԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ՈՉ-ՀԱՄԱՍԵՌ ՍԻՄՎՈԼՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Այս հոդվածում դիտարկվում է փաթեթի տիպի օպերատորների մի նոր դաս։ Ապացուցվում է, որ այդ օպերատորները հանդիսանում են Φ—*օպերատորներ որոշակի ֆունկցիոնալ տարածություններում։ Դիտարկվում է նաև այդ օպերատորների ողորկության հարցը։ Տրվում են պայմաններ, որոնք ապահովում են դիտարկվող օպերատորների ողորկությունը* $H^+_{s,v}$ *տարածությունում։*

R. L. SHAKHBAGUIAN

CONVOLUTION OPERATORS WITH NON-HOMOGENEOUS SYMBOLS

S u m m a r y

A certain class of convolution operators are considered in the paper which are proved to be Φ—operators in certain functional spaces.

Smoothness of these operators and conditions guaranteeing it in a space $H^+_{s,v}$ are also dealt with.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик* и *Г. И. Эскин*. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, 3 (1965), 99—161.
2. *М. И. Вишик* и *Г. И. Эскин*. Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области, ДАН 155, № 1 (1964), 24—27.
3. *М. И. Вишик* и *Г. И. Эскин*. Сингулярные эллиптические уравнения и системы переменного порядка, ДАН 156, № 2 (1964), 224—226.
4. *С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг*. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы, М., ИЛ, 1962.
5. *М. С. Агранович* и *М. И. Вишик*. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, вып. 3 (1964), 53—161.
6. *J. Peetre*. Another approach to elliptic boundary problems, Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 711—731.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա I, 1966, № 1 Математика

Ф. Г. АРУТЮНЯН

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ БЕЗУСЛОВНЫЙ БАЗИС В ПРОСТРАНСТВЕ $L_p(0, 1)$

1. Пусть $\{f_n(x)\}$—базис пространства $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 1$. Обозначим

$$f_n^-(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если} \quad f_n(x) < 0, \\ 0, & \text{если} \quad f_n(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{если} \quad f_n(x) > 0, \\ 0, & \text{если} \quad f_n(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

В. Я. Козловым [1] (см. также [2], стр. 341—347) была доказана следующая

Теорема. Если $\{f_n(x)\}$—ортонормированный базис пространства $L_2(0, 1)$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^2$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^2$ расходятся почти всюду на [0,1].

В настоящей работе доказываются аналогичные теоремы для безусловных базисов пространства $L_p(0, 1)$. Метод доказательства этих теорем существенно отличается от метода доказательства Козлова, который в рассматриваемом случае не применим. Кроме того, в случае $p = 2$, наш метод позволит весьма просто доказать сформулированную выше теорему Козлова.

Напомним определение безусловного базиса пространства $L_p(0, 1)$.

Система функций $\{f_n(x)\}$ называется безусловным базисом пространства $L_p(0, 1)$, если она остается базисом в $L_p(0, 1)$ при любом изменении порядка ее элементов.

Безусловный базис называется нормированным, если

$$\|f_n(x)\|_{L_p} = 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p \geqslant 2$, тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, расходятся почти всюду на [0, 1].

Теорема 2. Если $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $1<p<2$, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ расходятся почти всюду на $[0, 1]$.

Для доказательства этих теорем достаточно установить следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\{f_n(x)\}$—нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p\geqslant 1$, тогда существует функция $f(x)$ из $L_p(0, 1)$, разложение которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ по системе $\{f_n(x)\}$ абсолютно расходится почти всюду на $[0, 1]$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|=+\infty$ почти всюду на $[0, 1]$.

Лемма 2. Если $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $p>2$, и если один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^q$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^q$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ сходится на множестве E положительной меры, то разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|<+\infty$ почти всюду на E.

Лемма 3. Пусть $\{f_n(x)\}$—безусловный нормированный базис пространства $L_p(0, 1)$, $1<p<2$, и пусть один из рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ сходится на множестве E положительной меры, тогда разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n f_n(x)|<+\infty$ почти всюду на E.

Очевидно, теорема 1 вытекает из лемм 1 и 2, а теорема 2—из лемм 1 и 3.

II. Доказательство леммы 1.

Пусть $\{r_n(x)\}$—система функций Радемахера, $\{\psi_n(x)\}$—сопряженная к базису $\{f_n(x)\}$ система в $L_q(0, 1)$.

Обозначим через $\{a_i^{(m)}\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ коэффициенты разложения функции $r_m(x)$ по базису $\{f_i(x)\}$. В силу определения системы $\{\psi_n(x)\}$ имеем

$$a_i^{(m)}=\int_0^1 \varphi_i(x)\, r_m(x)\, dx, \quad i=1, 2, \cdots; \quad m=1, 2, \cdots. \tag{1.1}$$

Возьмем натуральное число n_1 настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_1} a_l^{(p_1)} f_l(x) - r_{p_1}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2}, \tag{1.2}$$

где $n_0=0$, $p_1=1$.

Пусть уже определены натуральные числа $n_1, n_2, \cdots, n_k$; $p_1, p_2, \cdots, p_k$, где

$$n_1<n_2<\cdots<n_k \quad \text{и} \quad p_1<p_2<\cdots<p_k. \tag{1.3}$$

Возьмем $p_{k+1}>p_k$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_k} \frac{1}{k+1} a_l^{(p_{k+1})} f_l(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{1.4}$$

Такое число p_{k+1} существует в силу того, что $a_l^{(m)} \to 0$ при $m \to +\infty$ $(i=1, 2, \cdots)$.

После этого выберем $n_{k+1}>n_k$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{l=n_0+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{k+1} a_l^{(p_{k+1})} f_l(x) - \frac{1}{k+1} r_{p_{k+1}}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{1.5}$$

Таким образом, определяются две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{p_k\}$ и $\{n_k\}$, которые удовлетворяют условиям (1.4) и (1.5) для любого $k=2, 3, \cdots$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x). \tag{1.6}$$

Докажем, что он удовлетворяет условию леммы. Очевидно, лемма будет доказана, если мы установим, что частные суммы

$$S_{n_j}=\sum_{k=1}^{j} \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x), \qquad j=1, 2, \cdots, \tag{1.7}$$

ряда (1.6) сходятся в метрике $L_p(0, 1)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) \right| = +\infty \tag{1.8}$$

почти всюду на $[0, 1]$.

В силу (1.2), (1.4) и (1.5) будем иметь

$$\left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^k} \tag{1.9}$$

для всех $(k=1, 2, \cdots)$.

В силу (1.9), применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \frac{1}{2^k}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| dx < +\infty. \tag{1.11}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right| - \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\| < +\infty \tag{1.12}$$

почти всюду на [0,1].

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right| = +\infty$ почти всюду на [0,1], то, в силу (1.12), равенство (1.8) имеет место почти всюду на [0,1].

Теперь докажем, что последовательность (1.7) сходится в метрике $L_p(0, 1)$. Для этого достаточно доказать, что

$$\| S_{n_m} - S_{n_j} \|_{L_p} \to 0 \quad \text{при} \quad m, j \to +\infty. \tag{1.13}$$

При $m > j$ имеем:

$$\| S_{n_m} - S_{n_j} \|_{L_p} = \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) \right\|_{L_p} =$$

$$= \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_i^{(p_k)} f_i(x) - \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) + \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} \leqslant$$

$$< \sum_{k=j+1}^{m} \left\| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} + \left\| \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p}. \tag{1.14}$$

Правая часть неравенства (1.14) стремится к нулю при $m, j \to +\infty$. Действительно, в силу (1.9),

$$\sum_{k=j+1}^{m} \left\| \sum_{l=n_{k-1}+1}^{n_k} \frac{1}{k} a_l^{(p_k)} f_l(x) - \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} < \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{2^k} \to 0 \tag{1.15}$$

при $m, j \to +\infty$.

С другой стороны, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} r_{p_k}(x)$ сходится в метрике $L_p(0,1)$ (см. [2], стр. 153—154), то

$$\left\| \sum_{k=j+1}^{m} \frac{1}{k} r_{p_k}(x) \right\|_{L_p} \to 0 \quad \text{при} \quad m, j \to +\infty. \tag{1.16}$$

Из (1.14), (1.15) и (1.16) следует (1.13). Лемма 1 доказана*.

Доказательство леммы 2.

Пусть на множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$ имеет место

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q < +\infty, \quad \text{где} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 2. \tag{2.1}$$

Докажем, что тогда разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ любой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty \quad \text{почти всюду на } E. \tag{2.2}$$

Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |f_n^-(x)| \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| f_n^+(x) + |a_n| f_n^-(x)). \tag{2.4}$$

Из определения безусловного базиса следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ без-

* В частном случае, когда $p = 2$, лемма 1 непосредственно вытекает из теоремы Ульянова (см. [3], стр. 112, теорема 6.1).

условно сходится в метрике $L_p(0, 1)$. Следовательно, по лемме Орлича [4] при $p > 2$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |a_n f_n(x)|^p dx < +\infty. \tag{2.5}$$

Но так как $\{f_n(x)\}$—нормированный базис, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty. \tag{2.6}$$

В силу неравенства Гельдера из (2.1) и (2.6) будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| |f_n^-(x)| < +\infty \quad \text{для любого } x \in E. \tag{2.7}$$

Теперь докажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) < +\infty \quad \text{почти всюду на } E. \tag{2.8}$$

Пусть это не так, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n^+(x) = +\infty \tag{2.9}$$

на некотором множестве $G \subset E$, $\operatorname{mes} G > 0$.

Тогда из (2.4), (2.7) и (2.9) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x) = +\infty \quad \text{всюду на } G, \ \operatorname{mes} G > 0. \tag{2.10}$$

Но так как $\{f_n(x)\}$—безусловный базис в $L_p(0, 1)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x)$ из $L_p(0, 1)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| f_n(x)$ тоже является разложением в $L_p(0, 1)$ и сходится в его метрике. Это противоречит равенству (2.10). Следовательно, справедливо (2.8).

Из (2.3), (2.7) и (2.8) следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)|$ сходится почти всюду на E.

Точно так же можно рассуждать при предположении, что $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q < +\infty$ на некотором множестве E положительной меры. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|$ сходится на некотором множестве E, $\operatorname{mes} E > 0$ и пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ есть разложение некоторой функции $f(x) \in L_p(0, 1)$ по базису $\{f_n(x)\}$. Из того, что $\{f_n(x)\}$—нормированный базис, будем иметь $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n^-(x)| < +\infty \text{ всюду на } E. \tag{3.1}$$

Так как $\{f_n(x)\}$—безусловный базис, то, учитывая (3.1), точно так же, как выше, доказывается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n f_n(x)| < +\infty \text{ почти всюду на } E. \tag{3.2}$$

То есть любое разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ по базису $\{f_n(x)\}$ абсолютно сходится почти всюду на E. Тем самым лемма 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 4. I. 1966

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

L_p ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՊԱՅՄԱՆԱԿԱՆ ԲԱԶԻՍԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴՐԱԿԱՆ ԵՎ ԲԱՑԱՍԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Վ. Յա. Կոզլովի կողմից ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը՝ Եթե $\{f_n(x)\}$-ը լրիվ օրթոնորմալ սիստեմ է $L_2[0, 1]$-ում, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^3$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^2$ շարքերը համարյա ամենուրեք տարամիտում են $[0, 1]$-ում, որտեղ

$$f_n^-(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{եթե } f_n(x) < 0, \\ 0, & \text{եթե } f_n(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x) = \begin{cases} f_n(x), & \text{եթե } f_n(x) > 0, \\ 0, & \text{եթե } f_n(x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե $\{f_n(x)\}$-ը ոչ պայմանական բազիս է $L_p[0, 1]$-ում, $p \geqslant 2$, ապա $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^-(x)|^q$ և $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n^+(x)|^q$ շար-

քերը համարյա ամենուրեք տարամիտում են $[0, 1]$*-ում, որտեղ* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$։ *Բացի այդ,* $1<p<2$ *դեպքում ապացուցվում է, որ* $[0, 1]$*-ում համարյա ամենուրեք կտարամիտեն* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ *և* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ *շարքերը։*

Այս թեորեմների ապացույցի եղանակը էապես տարբերվում է Կոզլովի ապացույցի եղանակից, որը դիտարկված դեպքում կիրառելի չէ։ Մասնավորապես, $p=2$ *դեպքում ստացվում է Կոզլովի վերը բերված թեորեմի պարզ ապացույց։*

F. G. HARUTYUNIAN

ON THE DISTRIBUTION OF POSITIVE AND NEGATIVE VALUES OF FUNCTIONS OF ABSOLUTE BASES IN L_p SPACE

S u m m a r y

V. J. Kozlov has proved the following theorem: If $\{f_n(x)\}$ is a complete orthonormal system in $L_2[0, 1]$ then the two series

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^2 \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^2,$$

where

$$f_n^-(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{if } f_n(x)<0, \\ 0, & \text{if } f_n(x)\geqslant 0, \end{cases}$$

$$f_n^+(x)=\begin{cases} f_n(x), & \text{if } f_n(x)>0, \\ 0, & \text{if } f_n(x)\leqslant 0, \end{cases}$$

diverge almost everywhere on $[0, 1]$.

In the present paper we prove that if $\{f_n(x)\}$ is an absolute basis in $L_p[0, 1]$, where $p\geqslant 2$, then the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|^q$ and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|^q$ diverge almost everywhere on $[0, 1]$, where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. We also prove that if $1<p<2$, then $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^-(x)|$ and $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n^+(x)|$ diverge almost everywhere on $[0, 1]$.

It should be noted that the method in use essentially from that of Kozlov's which is inapplicable in this case.

Besides, when $p=2$, our method enables us to give a simple proof of Kozlov's theorem quoted above.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. Я. Козлов.* О распределении положительных и отрицательных значений ортогональных и нормированных функций, образующих полную систему, Мат. сб., 23 (1948), 475—480.
2. *С. Качмаж* и *Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., Физматгиз (1958).
3. *П. Л. Ульянов.* Расходящиеся ряды Фурье, У. М. Н., 16 вып. 3 (99), 1961, 61—142.
4. *W. Orlicz.* Über unbedingte Konvergenz in funtionen Räumen, II studia Math. 4 (1933), 41—47.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Технический редактор Л. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04610. Подписано к печати 12/V 1966 г. Тираж 710 экз. Изд. № 2667. За
Формат бумаги $70 \times 108^1/_{16}$. Печ. л. 5,5. Бум. л. 2,75. Усл. печ. л. 7,53.
Уч. изд. лист. 6,24.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, ул. Барекамутян, 2