ISSN 0370—8691

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԲՅՈՒՐԱԿԱՆԻ ԱՍՏՂԱԴԻՏԱՐԱՆԻ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СООБЩЕНИЯ БЮРАКАНСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

ՊՐԱԿ LXII ВЫПУСК

ԵՐԵՎԱՆ 1989 ЕРЕВАН

$С \frac{1705010000}{703(02)-89}$ 13—88

ISBN 5—8080

УДК 530.12.550.831

Г. Т. ТЕР-КАЗАРЯН

ТЕОРИЯ ИСКАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА

Предложено восприятие пространства-времени, основанное на новых физических понятиях. В первой главе описываются многообразие $G(2.3)$ и протекающие в нем процессы. Предложена теория гравитации. Во второй главе описываются обобщенное многообразие $G(2.2.3)$ и протекающие в нем процессы. Совершается переход от $G(2.2.3)$ к пространство-временно-внутреннему континууму. В третьей главе построена теория искажения пространство-временного континуума. В четвертой главе исследуются физические следствия. Показано, что теория искажения пространства-времени в области малых интервалов предсказывает существование новых явлений: приобретение частицей массы покоя и ее изменение; асимптотическая свобода взаимодействия. Получено общее соотношение между энергией и массой частицы, являющееся обобщением эйнштейновского соотношения. Приводится новая формулировка квантовой теории поля. В рамках новой формулировки теории получена функция обрезания, которая совпадает с фейнмановским множителем сходимости в области больших импульсов виртуальной частицы. Рассмотрена обобщенная модель калибровочных взаимодействий. Рассмотрены отдельные вопросы физики сверхплотной конфигурации газа, находящегося в искаженном пространство-временном континууме.

Введение. Современное понимание физической сущности явлений основывается преимущественно на концепции локальных симметрий и непосредственно связанных с ними калибровочных полей. С их помощью описываются все виды взаимодействия элементарных частиц. Достигнуты большие успехи в объединении слабых и электромагнитных взаимодействий. А теории великого объединения открывают путь к включению в более широкую калибровочную теорию и сильных взаимодействий, описываемых квантовой хромодинамикой. Предпринимаются также усилия для создания единой теории всех сил, включая и гравитацию. Однако гравитация упорно не поддается попыткам истолкования с точки зрения квантовой теории на малых пространственно-временных интервалах. Наибольшие надежды в настоящее время возлагаются на теории супергравитации, в которых гравитон представляется как равноправный член мультиплета калибровочных частиц, включающего как бозоны, так и фермионы. Супергравитация является сверхъединой калибровочной теорией с планковской массой в качестве масштаба объединения. Здесь все взаимодействия имеют геометрическое происхождение, а различия между материальными и калибровочными полями незначительны. Объединяющая структура, преобразующая бозоны в фермионы и наоборот, достигается с помощью суперсимметрии.

Наконец, следует отметить различные теории суперструн. Первоначальная теория суперструны возникла при исследовании феноменологии адронов, но заставила рассматривать себя как фундаментальную единую теорию элементарных частиц. Характерный масштаб длимы теории порядка планковской длины ($l \sim 10^{-33}$ см; напомним, что для струнной модели адронов $l \sim 10^{-13}$ см). Эта теория способна естественно ответить на многие вопросы физики элементарных частиц. Между тем, проблема количественного описания взаимодействия элементарных частиц продолжает оставаться нерешенной.

Несмотря на огромные успехи, достигнутые за последние годы в исследовании фундаментальных составных частей материи и сил, физическая теория еще далека от завершенности и не свободна от известных трудностей принципиального характера. Особо следует отметить трудности, которые возникают в астрофизических задачах при исследовании сверхплотных конфигураций, неразрешимые в рамках привычных представлений: 1) наличие гравитационного радиуса космических тел в качестве минимального радиуса, присущего любой гравитирующей массе в гидростатическом равновесии (в рамках общей теории относительности (ОТО)); 2) отсутствие необходимых для расширения из сверхплотного состояния источников энергии; 3) трудность, связанная с ограничением на сжимаемость совокупности барионов и 4) проблема углового момента космических объектов.

Отсутствие жизнеспособной физической теории стимулирует поиски и разработки новых.

Нижепредлагаемую теорию искажения пространство-временного континуума следует рассматривать как одну из возможных.

В первую очередь строится основанное на новых физических понятиях восприятие пространство-временного континуума. Затем предлагается теория гравитационного взаимодействия, в которой отсутствуют характерные сингулярности ОТО. Как известно, в рамках ОТО отсутствует согласованное определение энергии гравитационного поля, а следовательно, отсутствует четкая формулировка законов сохранения для системы гравитационно взаимодействующих полей. В предложенной теории гравитации эти законы четко сформулированы. При этом гравитационное поле является единственным полем, непосредственно связанным с геометрической структурой пространство-временного континуума. Материальные поля связаны с геометрией косвенным образом (посредством гравитационного поля). Гравитационное поле рассматривается как векторное поле, определенное в плоском пространство-временном континууме. Его присутствие реально искривляет континуум, и материальные поля двигаются в уже искривленном континууме.

Классические эффекты ОТО—объяснение сдвига перигелия Меркурия, отклонение луча света, уменьшение частот спектров, запаздывание радиосигналов—подтверждаются. Это значит, что предложенная теория гравитации и ОТО неразличимы с точки зрения постньютоновских экспериментов. Существенные различия выявляются лишь при сильных гравитационных полях.

Рассмотрена квантовая теория гравитации в терминах плоского пространство-временного континуума.

Описаны обобщенное многообразие G(2.2.3) и протекающие в нем процессы. Эта задача имеет первостепенное значение для теории искажения пространство-временного континуума на малых пространственно-временных интервалах. Описание физических процессов в таких условиях приобретает чрезвычайную актуальность для теории взаимодействия элементарных частиц. На примерах простейших полей показана возможность введения в теорию понятия массы покоя частицы как функцию внутренних степеней свободы. Строится теория искажения пространство-временного континуума и описывается динамика протекающих в нем процессов. В этих условиях рассмотрены простейшие свободные поля. При этом вводятся функции искаженных масс покоя этих полей. Исследовано взаимодействие полей. Выявлено, что нарушение локальных калибровочных симметрий является прямым следствием внутреннего искажения пространство-временного континуума. Описана квантовая теория искажения.

Исследованы физические следствия искажения пространства-времени. Показано, что теория предсказывает существование новых явлений, проявляющихся на малых пространственно-временных интервалах. Одно из них—явление приобретения элементарной частицей массы покоя и ее изменение. Получено общее соотношение между энергией и массой частицы, являющееся обобщением эйнштейновского соотношения, и справедливое также в случае искажения пространство-временного континуума. Второе—явление асимптотической свободы взаимодействия элементарных частиц. То есть, сила взаимодействия полей, определенных в плоском пространство-временном континууме, в области высоких энергий, вследствие внутреннего искажения континуума стремится к нулю.

Исследованы причины появления в стандартной квантовой теории поля ультрафиолетовых расходимостей, и предложен новый путь их устранения. В этой связи приводится новая формулировка квантовой теории поля, в которой учитывается явление перенормировки вакуумного состояния. В последней отражается чисто внутреннее искажение пространство-временного континуума.

Объединение явлений перенормировки вакуума и асимптотической свободы взаимодействия полей полностью решает вопрос устранения ультрафиолетовых расходимостей. В рамках новой формулировки теории получена функция обрезания, математический смысл которой сводится к тому, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, по импульсам виртуальных частиц производится интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области импульсного пространства. Она в точности совпадает с фейнмановским множителем сходимости в области больших импульсов виртуальных частиц. В рамках новой формулировки квантовой электродинамики, в качестве примера, произведены вычисления массового и поляризационного операторов второго порядка, а также получена радиационная поправка наименьшего ненулевого порядка теории возмущений к закону Кулона.

Наконец, в заключении, рассмотрена обобщенная модель калибровочных взаимодействий полей и симметрий. Приведены примеры взаимодействий со скрытыми симметриями.

Рассмотрены отдельные вопросы физики равновесной сверхплотной конфигурации газа, находящегося в искаженном пространство-временном континууме (при сверхвысоких плотностях порядка ядерной и выше $\rho \geqslant 10^{14}$ г см$^{-3}$ и при нулевой температуре). При этом намечены пути преодоления вышеуказанных трудностей, возникающих при исследовании сверхплотных конфигураций. Более общему и детальному изучению этой задачи, имеющей большое значение для астрофизики, будет посвящена отдельная работа в «Астрофизике».

ГЛАВА I

ДИНАМИКА ПРОЦЕССОВ, ПРОТЕКАЮЩИХ В МНОГООБРАЗИЯХ $G(2.3)$ И $\hat{G}(2.3)$

В настоящей главе строится восприятие пространства-времени, основанное на новых физических понятиях. С точки зрения нового восприятия рассматриваются задачи и динамика процессов из области исследований специальной и общей теории относительности [1] и квантовой теории. При этом пространственные и временные понятия должным образом заменяются соответствующими им новыми понятиями.

§ 1. Многообразие $G(2.3)$. Рассмотрим паракомпактные связные хаусдорфовые многообразия $G(m.n)$ со структурой

$$G(m.n) = {}^{*}G(m) \times G(n). \tag{1.1}$$

Здесь $G(n)$ — вещественное линейное n-мерное пространство с заданным в нем базисом $\{\varepsilon_\alpha\}$

$$<\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta> = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

а ${}^{*}G(m)$ — вещественное линейное m-мерное псевдопространство с заданным в нем базисом, которым является совокупность псевдовекторов $\{O_i\}$. Причем,

$$<O_i, O_\gamma> = {}^{*}\delta_{i\gamma} = \begin{cases} 1 & i = \gamma, \\ 0 & i \neq \gamma, \end{cases} \quad i, \gamma = 1, \ldots, m. \tag{1.3}$$

По аналогии теории линейных вещественных пространств [2], можно построить основы теории линейных вещественных псевдопространств. Не вдаваясь в детали этой теории остановимся лишь на некоторых определениях и докажем теорему единственности разложения псевдовектора.

Для любой упорядоченной пары точек (P_1, P_2) множества ${}^{*}G$ определен псевдовектор ${}^{*}\hat{\eta}$. Псевдовекторы можно складывать и умножать на действительные числа $q_1, q_2, \ldots$. Причем:

а) $({}^{*}\hat{\eta}_1 + {}^{*}\hat{\eta}_2) + {}^{*}\hat{\eta}_3 = {}^{*}\hat{\eta}_1 + ({}^{*}\hat{\eta}_2 + {}^{*}\hat{\eta}_3)$ (ассоциативность);

б) ${}^{*}\hat{\eta}_1 + {}^{*}\hat{\eta}_2 = {}^{*}\hat{\eta}_2 + {}^{*}\hat{\eta}_1$ (коммутативность);

в) Существует вектор ${}^{*}\hat{\eta}_0$, для которого ${}^{*}\hat{\eta}_0 + 0 = 0$;

г) $(q_1 + q_2)\,{}^{*}\hat{\eta}_i = q_1{}^{*}\hat{\eta}_i + q_2{}^{*}\hat{\eta}_i$;

д) $q({}^{*}\hat{\eta}_1 + {}^{*}\hat{\eta}_2) = q\,{}^{*}\hat{\eta}_1 + q\,{}^{*}\hat{\eta}_2$;

е) $q_1(q_2{}^{*}\hat{\eta}_i) = (q_1 q_2)\,{}^{*}\hat{\eta}_i$;

ж) $1 \cdot {}^{*}\hat{\eta}_i = {}^{*}\hat{\eta}_i$;

з) $0 \cdot {}^*\hat{\eta}_l = {}^*\hat{\eta}_{l0}$.

Для точек и псевдовекторов ${}^*\hat{\eta}_l \in {}^*G$ выполняются аксиомы Вейля:

1) Для каждой точки P_1 и каждого псевдовектора ${}^*\hat{\eta}_l$ существует единственная точка P_2, для которой $\overrightarrow{P_1 P_2} = {}^*\hat{\eta}_l$.

2) Если $\overrightarrow{P_1 P_2} = {}^*\hat{\eta}_{l1}$, $\overrightarrow{P_2 P_3} = {}^*\hat{\eta}_{l2}$, то $\overrightarrow{P_1 P_3} = {}^*\hat{\eta}_{l1} + {}^*\hat{\eta}_{l2}$.

Определение 1. Множество вещественных псевдовекторов ${}^*G$, рассматриваемое вместе с заданными в нем действиями сложения и умножения на число, при выполнении аксиом Вейля, называется линейным вещественным псевдопространством.

Определение 2. Линейное псевдопространство называется m-мерным, если в нем имеется линейно независимая система, состоящая из m-псевдовекторов, а всякая система, состоящая из большего числа псевдовекторов, является линейно зависимой. Размерность псевдопространства—это наибольшее число его линейно независимых псевдовекторов. Совокупность m-мерных псевдопространств ($m = 0, 1, \ldots$) образует класс конечномерных псевдопространств.

Определение 3. Линейное псевдопространство называется бесконечномерным, если для всякого целого числа $N > 0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N псевдовекторов. Псевдопространство ${}^*G(m)$ является топологическим метрическим пространством.

Определение 4. Система псевдовекторов $O_1, \ldots, O_m$ в псевдопро странстве ${}^*G(m)$ образует базис, если:

1) псевдовекторы $O_1, \ldots, O_m$ линейно независимы (1.3);

2) всякий псевдовектор ${}^*\hat{\eta} \in {}^*G(m)$ можно представить в виде разложения ${}^*\hat{\eta}_l = O_\lambda {}^*\eta_l^\lambda$.

Пусть имеется псевдопространство ${}^*G(m)$ с базисом в нем $O_1, \ldots, O_m$. Тогда справедлива следующая теорема: разложение псевдовектора по данному базису единственно. Действительно, пусть псевдовектор $\hat{\eta} \in {}^*G(m)$ имеет два разложения:

$$ {}^*\hat{\eta}_l = O_\lambda {}^*\eta_l^\lambda, \tag{1.4} $$

$$ {}^*\hat{\eta} = O_\lambda {}^*\tilde{\eta}^\lambda. \tag{1.5} $$

Отсюда вытекает, что

$$ O_\lambda({}^*\eta_l^\lambda - {}^*\tilde{\eta}_l^\lambda) = {}^*\hat{\eta}_{l0}. \tag{1.6} $$

Поскольку псевдовекторы базиса линейно независимые, то получим

$$ {}^*\eta_l^\lambda = {}^*\tilde{\eta}^\lambda. \tag{1.7} $$

В самом деле, с помощью формул (1.3) и (1.6) находим:

$$ ({}^*\eta_l^2 - {}^*\tilde{\eta}_l^2) + ({}^*\eta_l^3 - {}^*\tilde{\eta}^3) + \ldots + ({}^*\eta_l^m - {}^*\tilde{\eta}^m) = 0, \tag{1.8} $$

$$ ({}^*\eta_l^1 - {}^*\tilde{\eta}_l^1) + ({}^*\eta_l^3 - {}^*\tilde{\eta}^3) + \ldots + ({}^*\eta^m + {}^*\tilde{\eta}^m) = 0, $$

. . . .

$$({}^{\circ}\xi^{1}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{1})+({}^{\circ}\xi^{2}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{2})+\ldots+({}^{\circ}\xi^{m-1}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{m-1})=0.$$

Поэтому

$$ {}^{\circ}\xi^{1}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{1}={}^{\circ}\xi^{2}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{2}=\ldots={}^{\circ}\xi^{m}-{}^{\circ}\tilde{\xi}^{m}=0. \qquad (1.9)$$

Метрикой на ${}^{\circ}G(m)$ называется локальное, симметричное и положительно определенное билинейное отображение

$$ {}^{\circ}\tilde{g}^{0}:{}^{\circ}G(m)\otimes{}^{\circ}G(m)\to C^{\infty}({}^{\circ}G(m)). \qquad (1.10)$$

Компоненты ${}^{\circ}\tilde{g}^{0}$ относительно базиса $\{O_i\}$ имеют вид:

$$ {}^{\circ}g^{0}_{ik}={}^{\circ}\tilde{g}^{0}(O_i,\ O_k)={}^{\circ}\tilde{g}^{0}(O_k,\ O_i). \qquad (1.11)$$

Согласно определению (1.1), элементы

$$\tilde{e}^{0}_{(i\alpha)}=O_i\otimes\tilde{e}_{\alpha} \qquad (1.12)$$

являются базисом в $G(m.n)$.

Метрикой на $G(m.n)$ называется билинейное отображение

$$\tilde{g}^{0}:\ T_p\otimes T_p\to C^{\infty}(G(m.n)). \qquad (1.13)$$

а) локальное, т. е. $\tilde{g}^{0}(\varphi\tilde{U},\Psi\tilde{V})=\varphi\Psi\tilde{g}^{0}(\tilde{U},\tilde{V})$ для $\tilde{U},\tilde{V}\in T_p$ и $\varphi,\Psi\in C^{\infty}(G(m.n))$;

б) симметричное, т. е. $\tilde{g}^{0}(\tilde{U},\tilde{V})=\tilde{g}^{0}(\tilde{V},\tilde{U})$ для $\tilde{U},\tilde{V}\in T_p$;

в) положительно определенное, т. е. $\tilde{g}^{0}(\tilde{U},\tilde{U})\geq 0$ и $\tilde{g}^{0}(\tilde{U},\tilde{U})=0\Rightarrow\tilde{U}=0$.

Здесь T_p — множество всех векторных полей на $G(m.n)$. С помощью метрического тензора определяется норма $|\tilde{g}^{0}(\tilde{U},\tilde{U})|^{1/2}$ любого вектора $\tilde{U}\in T_p$. Компоненты $\tilde{g}^{0}$ относительно базиса $\{\tilde{e}^{0}_{(i\alpha)}\}$ определяются следующим образом:

$$g^{0}_{(i\alpha)(k\beta)}=\tilde{g}^{0}(\tilde{e}^{0}_{(i\alpha)},\tilde{e}^{0}_{(k\beta)})=\tilde{g}^{0}(\tilde{e}^{0}_{(k\beta)},\tilde{e}^{0}_{(i\alpha)}). \qquad (1.14)$$

В голономном базисе имеем:

$$\tilde{g}^{0}=g^{0}_{(i\alpha)(k\beta)}d\eta^{(i\alpha)}\otimes d\eta^{(k\beta)}. \qquad (1.15)$$

Многообразие $G(m.n)$ является метризуемым проективным пространством, которое содержит в себе совокупность всех образов рассмотренного в [3] объекта (A). Последний представляет собой предикативно неограниченный экземпляр, причем установлено внутреннее отображение, приводящее образы (A) в соответствие с прообразом (A). В данном случае, метрическая протяженность совпадает целиком со всей проективной протяженностью. Следовательно, она является замкнутой. Теперь, если предполагать, что процессы рождения конфигураций многообразия $G(m.n)$ различного числа измерений подчиняются закону векторных случайных величин, то следует: наиболее вероятное число измерений конфигурации достигается при минимуме математического ожидания случайных переходов $m^{m'm}(\nu)$, где ν—частота перехода. Воспользуемся конкретным выражением дифференциальной функции распределения

$$\varphi(\nu)=\nu^{n}\exp[-\alpha\nu^{2}]. \qquad (1.16)$$

При $n \gg 1$, имеем:

$$m(\nu) = \frac{\int\limits_0^\infty \nu^n \exp[-\pi\nu^2] d\nu}{2\int\limits_0^\infty \exp[-\pi\nu^2] d\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}. \tag{1 17}$$

Согласно [3], наиболее вероятное распределение элементарных образов объекта (A) соответствует шестимерной конфигурации $G(2.3)$. Последняя, как мы убедимся в § 6, равнозначна пространство-временному континууму $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$. Как отмечено в [3], уравнения физики принимают простой вид, если в качестве системы измерения принять кинетическую систему LT, единицами которой являются два аспекта радиуса инверсии областей континуума $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)(L \in \underset{x}{P}(3)$, $T \in \underset{x}{T}(3))$. Более того, использование указанной системы позволяет свести теоремы проективной геометрии к алгебраическим эквивалентам. Этим путем геометрические соотношения сводятся к кинетическим связям и устанавливаются аналитические соотношения между основными физическими константами. При этом физические константы выражаются определенными аспектами вероятностной и конфигурационной реализаций абстрактного комплекса (A). Указанные достоинства шестимерной конфигурации освобождают теорию от логических трудностей, созданных концепцией четырехмерной конфигурации. В дальнейшем, будем рассматривать многообразие $G(2.3)$.

§ 2. Однородная К-группа. Определим однородные K преобразования в $G(2.3)$ как линейные преобразования ковариантного $\eta_{(\lambda\alpha)}$ и контравариантного $\eta^{(\lambda\alpha)}$ векторов посредством матрицы $(K^{(\tau\beta)}_{(\lambda\alpha)})$:

$$\eta'_{(\lambda\alpha)} = K^{(\tau\beta)}_{(\lambda\alpha)} \eta_{(\tau\beta)}, \quad \lambda,\tau = \pm, \tag{2.1}$$

$$\eta'^{(\lambda\alpha)} = K^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)} \eta^{(\tau\beta)}, \quad \alpha,\beta = 1,2,3, \tag{2.2}$$

оставляющие неизменной норму вектора

$$\eta'^{(\lambda\alpha)}\eta'_{(\lambda\alpha)} = K^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)} \eta^{(\tau\beta)} K^{(\rho\gamma)}_{(\lambda\alpha)} \eta_{(\rho\gamma)} = \delta^{(\rho\gamma)}_{(\tau\beta)} \eta^{(\tau\beta)} \eta_{(\rho\gamma)} = \eta^{(\tau\beta)} \eta_{(\tau\beta)} = inv. \tag{2.3}$$

Условие неизменности интервала между двумя векторами допускает также преобразования трансляций

$$\eta'_{(\lambda\alpha)} = \eta_{(\lambda\alpha)} + a_{(\lambda\alpha)}, \tag{2.4}$$

$$\eta'^{(\lambda\alpha)} = \eta^{(\lambda\alpha)} + a^{(\lambda\alpha)}.$$

Неоднородные K преобразования, объединяющие однородные K преобразования с преобразованиями трансляций, отражают присущие многообразию $G(2.3)$ свойства симметрии (однородность и изотропность). Многообразие $G(2.3)$ распадается на три инвариантных относительно K преобразований подмногообразий: подмногообразие нулевых векторов $(\eta^{(\lambda\alpha)}\eta_{(\lambda\alpha)} = 0)$ — поверхность нулевого конуса, подмногообразие положительных векторов $(\eta^{(\lambda\alpha)}\eta_{(\lambda\alpha)} > 0)$ — область внутри нулевого конуса и подмногообразие отрицательных векторов ($\eta^{(\lambda\alpha)}\eta_{(\lambda\alpha)} <$ < 0) -- область вне нулевого конуса.

В дальнейшем следует ограничиться рассмотрением лишь таких преобразований, каждое из которых можно свести к трем гиперболическим вращениям в плоскостях $(\eta_{(+3)}, \eta_{(-3)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+1)}, \eta_{(-1)})$ и к трем обычным вращениям одновременно в плоскостях $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+2)})$ и $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+3)})$ и $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-3)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(+3)})$ и $(\eta_{(-2)}, \eta_{(-3)})$.
То есть, в общем случае удовлетворяются условия

$$K^{(-2)}_{(+1)} = K^{(-3)}_{(+1)} = K^{(-1)}_{(+2)} = K^{(-3)}_{(+2)} = K^{(-1)}_{(+3)} = K^{(-2)}_{(+3)} = 0 \tag{2.5}$$

для гиперболических, и

$$K^{(+2)}_{(+1)} = K^{(-2)}_{(-1)}, \; K^{(+3)}_{(+1)} = K^{(-3)}_{(-1)}, \; K^{(+3)}_{(+2)} = K^{(-3)}_{(-2)} \tag{2.6}$$

для обычных вращений, соответственно. Из определения однородного К-преобразования следует, что на 36 (коэффициентов $K^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)}$ ($\lambda, \tau = \pm$; $\alpha, \beta = 1,2,3$)) элементов 6×6 матрицы K-преобразования — накладывается 21 условие

$$K^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)} K^{(\tau\beta)}_{(\mu\gamma)} = \delta^{(\lambda\alpha)}_{(\mu\gamma)}, \tag{2.7}$$

а также 9 дополнительных условий (2.5—6). Поэтому любое однородное К-преобразование общего вида определяется шестью независимыми параметрами, а K матрица является ортогональной 6×6 матрицей:

$$K\tilde{K} = \tilde{K}K = E_6, \; E_6 = (\delta^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)}), \tag{2.8}$$

$$\tilde{K} = K^{-1}.$$

Совокупность 6×6 ($K^{(\lambda\alpha)}_{(\tau\beta)}$) матриц, удовлетворяющая условиям ортогональности (2.7), унимодулярности

$$|K| = 1, \tag{2.9}$$

и условиям (2.5,6), образует собственную группу $SO(3.3)$ — однородную собственную группу K .

При выполнении условия

$$K^{(+\alpha)}_{(+\alpha)} + K^{(-\alpha)}_{(-\alpha)} \geq 2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{2.10}$$

преобразования $K^{(+)}$ называются ортохронными. Для таких матриц определитель равняется $+1$ или -1. В первом случае совокупность преобразований образует собственную ортохронную группу $K^{(+)}_{+}$. Во втором случае имеем несобственные ортохронные преобразования $K^{(+)}_{-}$, которые не образуют группу. При выполнении условия

$$K^{(+\alpha)}_{(+\alpha)} + K^{(-\alpha)}_{(-\alpha)} \leq -2, \tag{2.11}$$

преобразования называются неортохронными и не образуют группу.

Наряду с непрерывными преобразованиями можно рассматривать также дискретные преобразования:

а) Положительное ко-контра преобразование I_+

$$(\eta'^{(\lambda\alpha)}) = I_+ (\eta^{(\lambda\alpha)}) = (\eta_{(\lambda\alpha)}). \tag{2.12}$$

$$(\gamma'_{i(\lambda\alpha)}) = I_+(\gamma_{i(\lambda\alpha)}) = (\gamma_i^{(\lambda\alpha)}),$$

где

$$\tilde{I}_+ = I_+^* = (I_+)^+ = I_+, \quad (I_+)^2 = 1,$$
$$\tilde{I}_+ I_+ = 1, \quad |I_+| = -1. \tag{2.13}$$

Преобразование I_+ является частным несобственным ортохронным преобразованием.

б) Отрицательное ко-контра преобразование I_-

$$(\gamma_i'^{(\lambda\alpha)}) = I_-(\gamma_i^{(\lambda\alpha)}) = -(\gamma_{i(\lambda\alpha)}),$$
$$(\gamma'_{i(\lambda\alpha)}) = I_-(\gamma_{i(\lambda\alpha)}) = -(\gamma_i^{(\lambda\alpha)}), \tag{2.14}$$

то есть

$$I_- = -I_+, \quad (I_-)^2 = 1,$$
$$\tilde{I}_- = I_-^* = (I_-)^+ = I_-. \tag{2.15}$$

Преобразование I_- является собственным неортохронным преобразованием.

в) Полное ко-ко или контра-контра преобразование I_{+-}

$$I_{+-} = I_+ I_- = -1 \in K_-^{(-)}. \tag{2.16}$$

Таким образом, входящая в полную группу K, группа дискретных преобразований I состоит из тождественного E, а также преобразований I_+, I_-, I_{+-}. Поскольку группа I является абелевой, то каждый ее элемент сам образует класс. С другой стороны, она состоит из четырех элементов, поэтому содержит четыре класса. Следовательно, группа I имеет только четыре однозначных неприводимых представления, причем все они являются одномерными.

Инфинитезимальные генераторы собственной группы $\widetilde{SO}(3.3)$ имеют вид:

$$h_\alpha = i H^{[(-\alpha)(+\alpha)]} = i\left[-(\delta_{(-\alpha)(+\alpha)}) + (\delta_{(+\alpha)(-\alpha)})\right],$$
$$H_\alpha = \frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\{H^{[(-\beta)(+\gamma)]} + H^{[(+\beta)(-\gamma)]}\} = \tag{2.17}$$
$$= \frac{i}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\{[(\delta_{(-\beta)(+\gamma)}) - (\delta_{(-\gamma)(+\beta)})] + [(\delta_{(+\beta)(-\gamma)}) - (\delta_{(+\gamma)(-\beta)})]\},$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, а $(\delta_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)})$ — матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении $(\lambda\alpha)$-ой строки и $(\tau\beta)$-го столбца равен 1, а все остальные элементы равны 0.

Генераторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[h_\alpha, h_\beta] = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma,$$
$$[H_\alpha, h_\beta] = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}h_\gamma, \tag{2.18}$$
$$[H_\alpha, H_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma.$$

При этом выявляется важное свойство алгебры Ли группы $\bar{SO}(3.3)$, согласно которому инфинитезимальные генераторы группы сводятся к независимым вектор-операторам

$$A_a^{(\pm)} = \frac{1}{2}(H_a \pm 2ik_a). \tag{2.19}$$

Последние удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [A_a^{(\pm)}, \ A_b^{(\pm)}] &= i\varepsilon_{abc}A_c^{(\pm)}, \\ [A_a^{(\pm)}, \ A_b^{(\mp)}] &= 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

моментов количества движений.

§ 3. Конечномерные неприводимые представления собственной ортохронной группы $\bar{SO}(3.3)$. Конечномерные неприводимые представления группы $\bar{SO}(3.3)$ определяются из соответствия

$$x_i' = Kx_i \to \psi'(x') = S\psi(x), \quad (\psi_i' = S_{ij}\psi_j; \ i, j = 1, \ldots, n)$$

$$K(\vec{\xi}) = e^{i\vec{\xi}\vec{H}} = e^{iQ_{(\dots)}H^{(\dots)}} \to \tag{3.1}$$

$$\to S(\vec{\omega}) = e^{i\vec{\omega}\vec{J}} = e^{iQ_{(\dots)}J^{(\dots)}},$$

$$\vec{H} = (h_a, H_a), \quad K^{-1} = \tilde{K} = K(-\vec{\omega}) \to S^{-1} = S(-\vec{\omega}),$$

$$\vec{\omega} = (\omega_q), \quad \omega_q = \delta Q_{(\dots)}, \quad q = 1, \ldots, 6,$$

где $J^{(\dots)}$ — инфинитезимальные генераторы представления. Они антиэрмитовы:

$$(J^{(\dots)})^{+} = -(J^{(\dots)}). \tag{3.2}$$

По аналогии (2.19), введя генераторы

$$J_a^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{i}{2}\varepsilon_{abc}(J^{(\dots)} + J^{(\dots)}) \pm 2iJ^{(\dots)}\right\} \tag{3.3}$$

со свойствами

$$\begin{gathered} [J_a^{(\pm)}, \ J_b^{(\pm)}] = i\varepsilon_{abc}J_c^{(\pm)}, \quad [J_a^{(\pm)}, \ J_b^{(\mp)}] = 0, \\ [J_3^{(\pm)}, \ (\vec{J}^{(\pm)})^2] = 0, \\ (\vec{J}^{(\pm)})^2 = (J_1^{(\pm)})^2 + (J_2^{(\pm)})^2 + (J_3^{(\pm)})^2, \end{gathered} \tag{3.4}$$

можно определить базис в пространстве представлений

$$\begin{gathered} (\vec{J}^{(+)})^2 e_{pp_3} = P(P+1)e_{pp_3}, \quad J_3^{(+)}e_{pp_3} = P_3 e_{pp_3}, \\ P = 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots; \quad p_3 = -P, -(P-1), \ldots, P-1, P, \\ (\vec{J}^{(-)})^2 e_{qq_3} = q(q+1)e_{qq_3}, \quad J_3^{(-)}e_{qq_3} = q_3 e_{qq_3}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

$$q=0, \frac{1}{2}, 1 \ldots; \quad q_3=-q, -(q-1), \ldots, q-1, q.$$

Следовательно, неприводимое представление $D(P, q)$ группы $\widehat{SO}(3.3)$, которое можно рассматривать как приводимое представление $D(P) \otimes \otimes D(q)$ группы обычных трехмерных вращений $SO(3.R)$, распадается на неприводимые представления группы $SO(3.R)$

$$D(P, q)=D(P) \otimes D(q)=\sum_{j=|P-q|}^{P+q} \oplus D(j). \tag{3.6}$$

Представления $D(P, q)$, для которых числа P и q одновременно целые или полуцелые, называются тензорными (однозначными $K \rightleftarrows S$), а когда одно целое, а другое полуцелое— спинорными (двузначными $K \rightleftarrows \pm S$). Элемент пространства, преобразующийся по представлению $\left(D\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^{m_1} \otimes \left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)^{m_2}$, называется спинором ранга m_1+m_2.

Ковариантным или контравариантным тензором ранга n называется элемент пространства, который преобразуется по приводимому представлению $\left(D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)^n$ группы $\widehat{SO}(3.3)$.

§ 4. Накрытие специальной группы K. Ввиду важности применения группового подхода к квантованным полям, небезынтересно обратиться к вопросу накрытия группы K в рамках спинорной алгебры. Для этого необходимо рассматривать полную матричную алгебру $M(n, C)$ в n -мерном пространстве C^n. При этом обычно приходится основываться на то, что любой автоморфизм ассоциативной алгебры $M(n, C)$ является внутренним (под автоморфизмом $h: M(n, C) \to M(n, C)$ алгебры понимается ее изоморфизм на себя, а внутренним является автоморфизм $h(u)=gug^{-1}$, где $g \in GL(n. C)$). Сначала определим формулы сопоставляющие ковариантным векторам $\eta_{(\lambda\alpha)}(\lambda=\pm, \alpha=1, 2, 3)$ многообразия $G(2\ 3)$ спин-тензоры $(S^{\mu\dot{\nu}})$ $(\mu, \nu=1, 2)$ валентности (1.1) [4]:

$$(S^{\mu\dot{\nu}})=\begin{pmatrix} S^{1\dot{1}} & S^{1\dot{2}} \\ S^{2\dot{1}} & S^{2\dot{2}} \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

$$\eta_{(\pm 1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\varkappa_1(S^{1\dot{1}}+S^{2\dot{2}}) \pm (S^{1\dot{2}}+S^{2\dot{1}})\right],$$

$$\eta_{(\pm 2)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\varkappa_2(S^{1\dot{1}}+S^{2\dot{2}}) \pm i(S^{1\dot{2}}-S^{2\dot{1}})\right],$$

$$\eta_{(\pm 3)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\varkappa_3(S^{1\dot{1}}+S^{2\dot{2}}) \pm (S^{1\dot{1}}-S^{2\dot{2}})\right], \tag{4.2}$$

где

$$\varkappa_\alpha \eta_0=\eta_{(+\alpha)}+\eta_{(-\alpha)},$$

$$\eta_0=<\eta_{(+\alpha)}+\eta_{(-\alpha)},\ \eta_{(+\alpha)}+\eta_{(-\alpha)}>^{1/2}. \tag{4.3}$$

Компоненты спин-тензора S с нижними индексами запишем в виде

$$S_{\alpha\dot\beta} = C_{\alpha\alpha'} C_{\dot\beta\dot\beta'} S^{\alpha'\dot\beta'}, \tag{1.4}$$

где оператор C антилинеен и приводит спиноры в коспиноры. Поэтому

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{22} & -S^{21} \\ -S^{12} & S^{11} \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Введем следующие матрицы:

$$\sigma^{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 & \pm 1 \\ \pm 1 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(\pm 2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2 & \mp i \\ \pm i & x_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(\pm 3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_3 \pm 1 & 0 \\ 0 & x_3 \mp 1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\bar\sigma^{(\pm 1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 & \mp 1 \\ \mp 1 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \bar\sigma^{(\pm 2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_2 & \pm i \\ \mp i & x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar\sigma^{(\pm 3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_3 \mp 1 & 0 \\ 0 & x_3 \pm 1 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$(S^{\alpha\dot\beta}) = \bar\sigma^{(\pm a)} x_{i(\pm a)} = \bar\sigma_{(\pm a)} x_i^{(\pm a)} = \tilde{x}_i, \tag{1.7}$$

$$(S_{\alpha\dot\beta}) = \sigma^T_{(\pm a)} x_i^{(\pm a)} = \sigma^{(\pm a)T} x_{i(\pm a)}.$$

Свертывание векторов x_1 и x_2 сводится к свертыванию соответствующих спин-тензоров:

$$x_1^{(\pm a)} x_{2(\pm a)} = \frac{1}{2} S_1^{\alpha\dot\beta} S_{2\alpha\dot\beta}. \tag{1.8}$$

Нетрудно проверить, что $\tilde{x}_i^{+} = \tilde{x}_i$, если $x_{i(\pm a)}$ вещественный вектор. Можно также установить, что компоненты вектора $x_{i(\pm a)}$ выражаются через матрицу $\tilde{x}_i$ следующим образом:

$$x_{i(\pm a)} = \frac{1}{2} S_p(\sigma_{(\pm a)} \tilde{x}_i), \tag{1.9}$$

а квадрат вектора $x_{i(\pm a)}$ равен:

$$x_i^2 = \det \tilde{x}_i = x_i^{(\pm a)} x_{i(\pm a)}. \tag{1.10}$$

Соответствие $x_i \to \tilde{x}_i$ было построено с помощью произвольно фиксированных базисов $(\overset{0}{e}_{(\pm a)})$ в многообразии $G(2.3)$, относительно которого берутся координаты $x_{i(\pm a)}$ и (ε_α) в пространстве C^2 спиноров, относительно которых берутся компоненты спин-тензоров $S^{\alpha\dot\beta}$. Это соответствие не имеет инвариантный характер.

Все соотношения тензорной алгебры могут быть представлены как соотношения между соответствующими спин-тензорами. Следовательно, тензорная алгебра над плоским многообразием $G(2.3)$ может быть полностью сведена к спин-тензорной.

Пусть задано представление группы $SL(2)$ в пространстве спин-тензоров $S^{\alpha\dot\beta}$ валентности (1.1). Тогда имеем:

$$S'^{\mu\nu} = U^{\mu}_{\kappa} U^{\nu}_{\lambda} S^{\kappa\lambda} = (USU^{T})^{\mu\nu} \tag{4.11}$$

или

$$S' = U S U^{+}. \tag{4.12}$$

В случае эрмитовой матрицы $S = \tilde{\eta}$, S' также является эрмитовой матрицей

$$S^{+\prime} = (U S U^{+})^{+} = U S^{+} U^{+} = S', \tag{4.13}$$

то есть S' имеет форму $\tilde{\eta}'$, где η' — другой вектор многообразия $G(2.3)$:

$$\tilde{\eta}' = U\tilde{\eta}U^{+}. \tag{4.14}$$

Переходя к определителям и замечая, что $\det|U| = \det|U^{+}| = 1$, имеем:

$$\det|\tilde{\eta}'| = \eta'^{(\lambda\alpha)}\eta'_{(\lambda\alpha)} = \det|\tilde{\eta}| = \eta^{(\lambda\alpha)}\eta_{(\lambda\alpha)}. \tag{4.15}$$

До тех пор, пока преобразование (4.14) остается неоднозначным, ясно, что, определенная бинарной матрицей U, матрица $K^{(\varkappa\beta)}_{(\lambda\alpha)}$:

$$\eta'_{(\lambda\alpha)} = K^{(\varkappa\beta)}_{(\lambda\alpha)}\eta_{(\varkappa\beta)} \tag{4.16}$$

не может быть отождествлена со специальным K-преобразованием. Однако эта неоднозначность устраняется с помощью дополнительных условий (2.5,6). Таким образом, мы задали представление группы $SL(2)$ в многообразии $G(2.3)$. При этом, K-преобразования получаются путем выделения действительного инвариантного подпространства, состоящего из спин-тензоров с эрмитовыми матрицами $(S^{\mu\nu})$.

Обозначим соответствие $U \to K$ через $h: h(U) = K$. Отображение $h(U)$ обладает гомоморфизмом.

Все собственные вращения (с определителем 1) получаются посредством унитарной матрицы $U = r$, $rr^{+} = 1$,

$$r = \cos\frac{\theta}{2} + i(\vec{n}\vec{\sigma})\sin\frac{\theta}{2}, \tag{4.17}$$

где $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули, $\vec{n} = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ — «пространственный» вектор единичной длины, θ — произвольный угол. В этом случае r задает вращение R вокруг оси $\vec{n}$ на угол θ. Эрмитовая матрица

$$b = \operatorname{ch}\frac{\theta}{2} + (\vec{n}\vec{\sigma})\operatorname{sh}\frac{\theta}{2} \tag{4.18}$$

задает буст $B(\eta)$ (гиперболические вращения). Когда U пробегает всю группу $SL(2)$, соответствующее преобразование $K = h(U)$ пробегает всю специальную ортохронную группу $K^{(+)}_{+}$. В качестве образующих алгебры Ли для группы $SL(2)$ можно взять бесследные матрицы Паули σ_k и $\tau_k = i\sigma_k$ ($k = 1, 2, 3$). Все бесследные матрицы второго порядка линейно выражаются через эти матрицы. Образующие алгебры Ли для группы K могут быть получены из образующих для группы $SL(2)$ с помощью накрытия h. При этом, матрицам ε_1 и ε_2 соответствуют однопараметрические семейства бинарных матриц

$$e^{h\varepsilon} = \cos\delta + i\sin\delta, \qquad e^{H\varepsilon} = \mathrm{ch}\delta - \varepsilon_1\,\mathrm{sh}\delta,$$

$$e^{2\delta h_{\varepsilon}}, \quad e^{2\delta H_{\varepsilon}}, \tag{4.19}$$

где h_ε и H_ε принадлежат алгебре Ли группы $K_+^{(+)}$. (2.17)

Поскольку

$$< K\tilde{\varepsilon}_1, K\tilde{\varepsilon}_2 > = g^0_{(\ldots)(\ldots)}(K\tilde{\varepsilon}_1)^{(\ldots)}(K\tilde{\varepsilon}_2)^{(\ldots)} = \tag{4.20}$$

$$= g^0_{(\ldots)(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)} \varepsilon_1^{(\ldots)} \varepsilon_2^{(\ldots)} = < \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2 > = g^0_{(\ldots)(\ldots)} \varepsilon_1^{(\ldots)} \varepsilon_2^{(\ldots)},$$

то есть

$$g^0_{(\ldots)(\ldots)} = g^0_{(\ldots)(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)}, \tag{4.21}$$

$$(g^0) = (K)^T (g^0)(K),$$

то отсюда находим соотношения для матриц соответствующей алгебры Ли. Эти матрицы с чисто мнимыми элементами, для которых

$$g^0_{(\ldots)(\ldots)} a^{(\ldots)}_{(\ldots)} = - g^0_{(\ldots)(\ldots)} a^{(\ldots)}_{(\ldots)}. \tag{4.22}$$

Образующие алгебру Ли группы K все чисто мнимые матрицы, подчиняющиеся условиям (4.22), линейно выражаются через матрицы (2.17).

§ 5. Накрытие полной группы K. Перейдем к расширению накрытия группы $K_+^{(+)}$ бинарной группой $Sl(2)$ до накрытия полной группы K. То есть включим в построенный выше аппарат также дискретные преобразования. Для этого необходимо расширить пространство спиноров до пространства биспиноров $C^4 = C^2 \oplus C^2$. Оно разлагается на два подпространства. При этом базисы $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ в совокупности составляют базис для биспиноров. В этом случае можно задать линейные преобразования посредством сопряженных представлений группы $SL(2)$, $\{u\}$ и $\{v\}$. То есть представление $\{U\}$ группы $Sl(2)$ приводимо и разлагается на неприводимые представления $\{u\}$ и $\{v\}$. Имеется взаимно однозначное соответствие между бинарными матрицами и преобразованиями U. Иными словами, последние осуществляют другую реализацию группы $SL(2)$. В этой новой реализации можно осуществить расширение группы $SL(2)$ до большей группы, накрывающей полную группу K. Построим в пространстве биспиноров линейные преобразования, накрывающие операторы $P_a = I_+, I_-, I_{+-}$. Пусть (a) — единичный или антиединичный вектор, т. е. $(a, a) = \pm 1$. Обозначим через $\gamma(a)$ преобразование, накрывающее операторы P_a, соответствующие векторам (a). Поскольку $P_a^2 = 1$, то $\gamma(a)^2 = \gamma(a)\gamma(a)$ должно накрывать I (свойство гомоморфизма). Предположим, что для полной группы K, как и для специальной, накрывающие одного и того же K преобразования могут различаться только знаком

$$\gamma(a)^2 = I^4, \text{ или } \gamma(a)^2 = -I^4, \tag{5.1}$$

где I^4 — единичная матрица четвертого порядка. Простейшая зависимость $\gamma(a)$ линейная

$$\gamma(\lambda a+\mu b)=\lambda\gamma(a)+\mu\gamma(b). \tag{5.2}$$

С помощью формул (5.1,2) для любого неизотропного вектора $a=\lambda a_0$ (где λ — число, $(a_0,\ a_0)=\pm 1$) получим, что $\gamma(a)^2=\pm(a,\ a)$.

Если выбрать для определенности знак плюс и искать такую линейную зависимость $\gamma(a)$, для которой $\gamma(a)^2=(a,\ a)$ при всех (a), будем иметь

$$\gamma(a+b)^2=(\gamma(a)+\gamma(b))^2=\gamma(a)^2+\gamma(a)\gamma(b)+\gamma(b)\gamma(a)+\gamma(b)^2,$$

$$\gamma(a-b)^2=(\gamma(a)-\gamma(b))^2=\gamma(a)^2-\gamma(a)\gamma(b)-\gamma(b)\gamma(a)+\gamma(b)^2. \tag{5.3}$$

Отсюда получим

$$\gamma(a)\gamma(b)+\gamma(b)\gamma(a)==\frac{1}{2}\{(a+b,\ a+b)-(a-b,\ a-b)\}=2(a,\ b). \tag{5.4}$$

В частности, когда a и b — векторы ортонормированного базиса $\hat{e}^0_{(\lambda\alpha)}$ или $\hat{e}^{(\lambda\alpha)}_0$ многообразия $G(2.3)$

$$g^0_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}=g^0(\hat{e}^0_{(\lambda\alpha)},\quad \hat{e}^0_{(\tau\beta)}),$$

$$g^{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}_0=g^0(\hat{e}^{(\lambda\alpha)}_0,\ \hat{e}^{(\tau\beta)}_0), \tag{5.5}$$

из (5. 4) находим

$$\gamma_{(\lambda\alpha)}\gamma_{(\tau\beta)}+\gamma_{(\tau\beta)}\gamma_{(\lambda\alpha)}=2g^0_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)} \tag{5.6}$$

$$\gamma^{(\lambda\alpha)}\gamma^{(\tau\beta)}+\gamma^{(\tau\beta)}\gamma^{(\lambda\alpha)}=2g^{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}_0,$$

где $\gamma_{(\lambda\alpha)}=\gamma(\hat{e}^0_{(\lambda\alpha)})$, $\gamma^{(\lambda\alpha)}=\gamma(\hat{e}^{(\lambda\alpha)}_0)$. Поскольку зависимость $\gamma(a)$ линейна, то достаточно задать шесть матриц, удовлетворяющих соотношениям (5.6), а остальные матрицы $\gamma(a)$ выразить через них. Если $\tilde{\gamma}(a)$ — другая система линейно зависящих от a матриц, также удовлетворяющая соотношениям (5.6), то для всех a будем иметь

$$\tilde{\gamma}(a)=w\gamma(a)w^{-1}, \tag{5.7}$$

где матрица w не зависит от a. Теперь обратимся к построению двулистного накрытия полной группы K. Следуя [5] можно истолковать смешанный спин-тензор валентности (1.1) как линейную функцию биспинора

$$S=S^{\mu\dot\nu}\xi_\mu\eta_{\dot\nu}=S^{1\dot1}\xi_1\eta_{\dot1}+S^{1\dot2}\xi_1\eta_{\dot2}+S^{2\dot1}\xi_2\eta_{\dot1}+S^{2\dot2}\xi_2\eta_{\dot2}=$$

$$=S^{1\dot1}\xi^2\eta_{\dot1}+S^{1\dot2}\xi^2\eta_{\dot1}-S^{2\dot1}\xi^1\eta_{\dot1}-S^{2\dot2}\xi^1\eta_{\dot2}. \tag{5.8}$$

Пусть задано представление группы $SL(2)$ в пространстве спин-тензоров S

$$S'(\xi,\ \dot\eta)=S(u^{-1}\xi,\ v^{-1}\dot\eta). \tag{5.9}$$

Причем

$$S'^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\beta_1\ldots\dot\beta_l} =$$

$$= U^{\alpha_1}_{\gamma_1}\ldots U^{\alpha_k}_{\gamma_k}\bar U^{\dot\beta_1}_{\dot\delta_1}\ldots \bar U^{\dot\beta_l}_{\dot\delta_l} S^{\gamma_1\ldots\gamma_k\dot\delta_1\ldots\dot\delta_l}. \tag{5.10}$$

Проследим, каким образом действуют на спин-тензоры S преобразования биспиноров $\gamma_i = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\}$, где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — матрицы Дирака в стандартном представлении.

Тогда

$$S'(\psi) = S(\gamma_i^{-1}\psi), \tag{5.11}$$

и учитывая отождествление координат

$$(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}), \tag{5.12}$$

находим

$$\begin{aligned} &\gamma_0(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}) = (-i\eta_{\dot 2}, -i\eta_{\dot 1}, -i\xi^1, -i\xi^2),\\ &\gamma_1(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}) = (i\eta_{\dot 2}, i\eta_{\dot 1}, -i\xi^2, -i\xi^1),\\ &\gamma_2(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}) = (\eta_{\dot 2}, -\eta_{\dot 1}, -\xi^2, \xi^1),\\ &\gamma_3(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}) = (i\eta_{\dot 1}, -i\eta_{\dot 2}, -i\xi^1, i\xi^2),\\ &\gamma_5(\xi^1, \xi^2, \eta_{\dot 1}, \eta_{\dot 2}) = (\xi^1, \xi^2, -\eta_{\dot 1}, -\eta_{\dot 2}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

В результате для преобразованного биспинора имеем соответственно

$$\begin{aligned} &S'^{1\dot1} = S^{2\dot2},\quad S'^{1\dot2} = -S^{1\dot2},\quad S'^{2\dot1} = -S^{2\dot1},\quad S'^{2\dot2} = S^{1\dot1},\quad (i=0),\\ &S'^{1\dot1} = S^{1\dot1},\quad S'^{1\dot2} = -S^{2\dot1},\quad S'^{2\dot1} = -S^{1\dot2},\quad S'^{2\dot2} = S^{2\dot2},\quad (i=1),\\ &S'^{1\dot1} = S^{1\dot1},\quad S'^{1\dot2} = S^{2\dot1},\quad S'^{2\dot1} = S^{1\dot2},\quad S'^{2\dot2} = S^{1\dot1}\quad (i=2),\\ &S'^{1\dot1} = S^{1\dot1},\quad S'^{1\dot2} = S^{1\dot2},\quad S'^{2\dot1} = S^{2\dot1},\quad S'^{2\dot2} = S^{2\dot2}\quad (i=3),\\ &S'^{1\dot1} = -S^{1\dot1},\quad S'^{1\dot2} = -S^{1\dot2},\quad S'^{2\dot1} = -S^{2\dot1},\quad S'^{2\dot2} = -S^{2\dot2}\quad (i=5). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Отсюда видно, что $\gamma_k (k=1, 2, 3)$ накрывает положительное ко-контра преобразование относительно k-ой оси, γ_0 накрывает положительные ко-контра преобразования всего многообразия, и наконец, γ_5 накрывает полное ко-ко или контра-контра преобразования. Следовательно, $\gamma_5\gamma_0$ накрывает отрицательные ко-контра преобразования. Поэтому следует присоединить к группе $SL(2)$, действующей на биспиноры посредством представления $\{\bar U\}$, дискретные операторы $\bar I_+ = \gamma_0$, $\bar I_- = \gamma_5\gamma_0$. В группе $SL(2)$ имеется матрица $-I$, следовательно, в расширенной группе $\bar L$ находятся также операторы $-\bar I_+, -\bar I_-$. То есть двулистный характер накрытия сохраняется. Полная группа $\bar K$ объединяет однородные $\bar K$-преобразования, дискретные преобразования $\bar I$ и преобразования трансляций. Она состоит из пар $(a, \bar K)$ (где a—сдвиг). Поэтому элементами накрывающей группы $\bar K$ будут пары $(a, \mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$—элемент группы $\widetilde{L}$, которая является присоединением группы $SL(2)$ и двух дискретных операторов γ_0, $\gamma_5\gamma_0$. Каждый элемент полной группы K накрывается в точности двумя элементами $(a, \pm\mathscr{K})$ группы $\widetilde{K}$. При этом группа $\widetilde{K}$ распадается на компоненты связности $\widetilde{K}_+^{(+)}$, $\widetilde{K}_+^{(-)}$, $\widetilde{K}_-^{(+)}$, $\widetilde{K}_-^{(-)}$, накрывающие соответственно компоненты связности $K_+^{(+)}$, $K_+^{(-)}$, $K_-^{(+)}$, $K_-^{(-)}$, группы K.

§ 6. **Пространство-временной континуум** $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$. Переопределим псевдовекторы посредством обычных векторов

$$\oplus = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 + \xi), \quad \ominus = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0 - \xi), \tag{6.1}$$

где

$$\begin{gathered} \xi_0^* = \xi_0, \quad \xi^* = \xi, \\ \xi_0^2 = -\xi^2 = 1, \\ \langle \xi_0, \xi \rangle = 0. \end{gathered} \tag{6.2}$$

В этом случае имеем

$$\hat{e}^0_{(\pm\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}^0_{0\alpha} \pm \hat{e}^0_\alpha) \tag{6.3}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3),$$

где

$$\begin{gathered} \hat{e}^0_{0\alpha} = \xi_0 \otimes \sigma_\alpha, \\ \hat{e}^0_\alpha = \xi \otimes \sigma_\alpha. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Таким образом, многообразие $G(2.3)$ расщепляется на обычное трехмерное пространство $\underset{x}{P}(3)$ и трехмерное временное пространство $\underset{x}{T}(3)$, в которых базисами являются векторы $\{\hat{e}^0_\alpha\}$ и $\{\hat{e}^0_{0\alpha}\}$ соответственно. Поскольку в пространстве $\underset{x}{T}(3)$ все направления времени равнозначны, то под термином «время» будем подразумевать временную компоненту x^0 в фиксированном направлении $\vec{n}_0 \in \underset{x}{T}(3)$.

Согласно этому совершается переход к четырехмерному пространству Минковского

$$\begin{gathered} G(2.3) = {}^*G(2) \otimes G(3) = G(+3) \oplus G(-3) = \\ = \underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3) \Rightarrow \underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(1). \end{gathered} \tag{6.5}$$

При этом скорость распространения взаимодействия постоянна во всех инерциальных системах отсчета

$$x^0 = ct, \; x^{0\prime} = ct', \; x^{0\prime\prime} = ct'', \ldots \tag{6.6}$$

§ 7. Вариационный принцип. Плотность лагранжиана свободных полей дается посредством формулы

$$L = L\left\{\psi(\eta),\ \psi^{*}(\eta),\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta^{(i\alpha)}},\ \frac{\partial\psi^{*}}{\partial\eta^{(i\alpha)}}\right\}. \tag{7.1}$$

Она является скаляром относительно K-преобразований. Причем функции поля ψ и ψ^{*} реализуют некоторое представление собственной группы $\widetilde{SO}$ (3.3). Функция действия записывается в виде

$$S=\int_{G} L\left\{\psi,\ \psi^{*},\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta^{(i\alpha)}},\ \frac{\partial\psi^{*}}{\partial\eta^{(i\alpha)}}\right\} d\eta^{(i\alpha)}\wedge\ldots\wedge d\eta^{(n)}. \tag{7.2}$$

Согласно принципу наименьшего действия, для реального движения должно выполняться

$$\delta S=0. \tag{7.3}$$

Отсюда стандартным методом получаются уравнения Лагранжа. Они допускают неоднозначность в выборе лагранжиана системы

$$L \to L' = L + \frac{\partial \chi^{(i\alpha)}(\eta)}{\partial\eta^{(i\alpha)}}, \tag{7.4}$$

где $\chi^{(i\alpha)}(\psi, \psi^{*})$ — произвольный вектор относительно K-преобразований.

К примеру рассмотрим биспинорное поле, лагранжиан которого имеет вид

$$L=\frac{i}{2}\left[\overline{\psi(\eta)}\,\gamma^{(i\alpha)}\partial_{(i\alpha)}\psi(\eta)-\partial_{(i\alpha)}\overline{\psi(\eta)}\,\gamma^{(i\alpha)}\psi(\eta)\right]-m\overline{\psi(\eta)}\,\psi(\eta). \tag{7.5}$$

С помощью (7.5) получаются уравнения движения

$$\begin{gathered}(i\gamma^{(i\alpha)}\partial_{(i\alpha)}-m)\psi(\eta)=0,\\ \overline{\psi(\eta)}\left(i\gamma^{(i\alpha)}\overleftarrow{\partial}_{(i\alpha)}+m\right)=0.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Последние инвариантны по отношению к собственным K-преобразованиям.

§ 8. Теорема Нетер и ее следствия. В лагранжевой формулировке классической полевой теории эта теорема гласит: инвариантности функции действия относительно группы произвольных координатных непрерывных преобразований и связанных с ними изменений полевых функций соответствует закон сохранения физической величины. Эта теорема справедлива для любых непрерывных преобразований, относительно которых инвариантен интеграл действия. Нетрудно доказать справедливость этой теоремы и в случае, когда физическая система определена в многообразии G_{η}(2.3) (мы опускаем доказательство). К примеру, потребуем, чтобы действие системы оставалось неизменным по отношению к бесконечно малым преобразованиям трансляций. Стандартные вычисления показывают, что в этом случае сохраняется вектор «энергии-импульса» полей

$$P_{(\lambda\alpha)} = \int\limits_{\Sigma} T^{(\gamma\beta)}_{(\lambda\alpha)}\, d\sigma_{(\gamma\beta)}\,, \tag{8.1}$$

где тензор плотности энергии-импульса имеет вид

$$T^{(\gamma\beta)}_{(\lambda\alpha)} = \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_A}{\partial\eta^{(\gamma\beta)}}\right)}\,\frac{\partial\psi_A}{\partial\eta^{(\lambda\alpha)}} - L\delta^{(\gamma\beta)}_{(\lambda\alpha)}\,. \tag{8.2}$$

В другом примере, из условия инвариантности действия относительно преобразований собственной группы $\widehat{SO}(3.3)$ следует сохранение «полного момента импульса»

$$M_{[(\gamma\beta)(\sigma k)]} = \int\limits_{\Sigma} M^{(\lambda\alpha)}_{[(\gamma\beta)(\sigma k)]}\, d\sigma_{(\lambda\alpha)} = \int\limits_{\Sigma}\Bigg\{ T^{(\lambda\alpha)}_{(\gamma\beta)}\eta_{(\sigma k)} - T^{(\lambda\alpha)}_{(\sigma k)}\eta_{(\gamma\beta)} -$$

$$- \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_A}{\partial\eta^{(\lambda\alpha)}}\right)}\left(J_{[(\gamma\beta)(\sigma k)]}\right)_{AB}\psi_B\Bigg\}\, d\sigma_{(\lambda\alpha)}\,. \tag{8.3}$$

Теорема Нетер справедлива и в том случае, когда преобразования функций не зависят от преобразований координат. Например, инвариантности лагранжиана комплексного поля относительно калибровочных преобразований первого рода

$$\psi'(\eta) = e^{i\alpha}\psi(\eta), \tag{8.4}$$

$$\psi^{*\prime}(\eta) = e^{-i\alpha}\psi^*(\eta),$$

соответствует закон сохранения заряда поля

$$Q = \int\limits_{\Sigma} j^{(\lambda\alpha)} d\sigma_{(\lambda\alpha)} = i\int\limits_{\Sigma}\left\{\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_A}{\partial\eta^{(\lambda\alpha)}}\right)}\psi_A - \psi_A^*\,\frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_A^*}{\partial\eta^{(\lambda\alpha)}}\right)}\right\} d\sigma_{(\lambda\alpha)}\,.$$

Можно рассмотреть также случай, когда интеграл действия инвариантен относительно преобразований внутренних симметрий, связанных с унитарной унимодулярной группой $SU(n)$. Тогда необходимым требованием является инвариантность лагранжиана поля, кроме группы K, также относительно группы $SU(n)$. Это означает, что полевые функции должны осуществлять представления как группы $\widehat{SO}(3.3)$, так и группы $SU(n)$.

§ 9. Взаимодействующие поля. Известно, что если интеграл действия физической системы инвариантен относительно глобальных симметрий, то более сильное требование инвариантности относительно локальных симметрий можно удовлетворять с помощью введения новых (калибровочных) полей. Причем кванты этих полей безмассовые. Эти поля описываются набором матричнозначных функций в пространстве R^6 со значениями в алгебре Ли $\hat{g}$ группы G. Калибровочное поле $(A_{(\lambda\alpha)}(\eta);\ b^a_{(\lambda\alpha)}(\eta))$ интерпретируется в качестве локальной формы записи связности в расслоении со структурной группой G. При этом

$\xi \in U$, где U — область базы главного расслоения $\pi: \xi \to G(2.3)$, на которой определяется разложение $\pi^{-1}(U) = U \otimes G$. Физическая система состоит из полей $\{\psi(\xi)\}$, где $\psi(\xi)$ — поле со значениями в векторном пространстве V, на котором задано линейное представление группы G. В простейшем случае группа G реализуется в виде коммутативной группы $G = U(1) = SO(2)$ с одномерной алгеброй $\hat{g}_1 = R^1$ (тривиальной). Инвариантность лагранжиана системы относительно локальных преобразований

$$\psi'(\xi) = U(\xi)\psi(\xi) = e^{i\alpha(\xi)}\psi(\xi),$$
$$\bar{\psi}'(\xi) = \bar{\psi}(\xi)U^{-1}(\xi) = \bar{\psi}(\xi)e^{-i\alpha(\xi)}, \quad (9.1)$$

осуществляется введением электромагнитных полей. Если для абелевой группы $U(1)$ учесть явный вид преобразований $U(\xi)$ и $U^{-1}(\xi)$, то преобразование калибровочных полей представляется в форме

$$A'_{(\lambda\alpha)}(\xi) = A_{(\lambda\alpha)}(\xi) + e\,\frac{\partial\alpha(\xi)}{\partial\xi^{(\lambda\alpha)}}. \quad (9.2)$$

В другом случае, когда рассматривается группа $G = SU(n)$ и база $U = R^n \subset G(2.3)$, инвариантность лагранжиана относительно локальных преобразований

$$\psi'(\xi) = U(\xi)\psi(\xi), \quad \bar{\psi}'(\xi) = \bar{\psi}(\xi)U^{-1}(\xi), \quad (9.3)$$
$$U(\xi) = U(u(\xi)) = e^{ig\,\vec{u}\,\vec{T}},$$

где $\vec{T}$ — генераторы группы $SU(n)$ в присоединенном представлении, g - константа взаимодействия, осуществляется введением Янг-Миллсовских полей $b^a_{(\lambda\alpha)}(\xi)$. К примеру, локально $SU(2)$ инвариантный лагранжиан для неабелевых калибровочных векторных полей $b^a_{(\lambda\alpha)}(\xi)$ $(a = 1, 2, 3)$ записывается в виде

$$L_0 = -\frac{1}{4}b^a_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}b^{a(\lambda\alpha)(\mu\beta)} = \frac{1}{4}b^a_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}b^{a(\lambda\alpha)(\mu\beta)} - \quad (9.4)$$
$$-\frac{1}{2}b^{a(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\left(\partial_{(\lambda\alpha)}b^a_{(\mu\beta)} - \partial_{(\mu\beta)}b^a_{(\lambda\alpha)} + g\varepsilon_{abc}\,b^b_{(\lambda\alpha)}b^c_{(\mu\beta)}\right),$$

который приводит к следующей системе нелинейных уравнений первого порядка

$$\partial_{(\lambda\alpha)}b^a_{(\mu\beta)} - \partial_{(\mu\beta)}b^a_{(\lambda\alpha)} - b^a_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)} = -g\varepsilon_{abc}\,b^b_{(\lambda\alpha)}\,b^c_{(\mu\beta)}, \quad (9.5)$$
$$\partial^{(\lambda\alpha)}b^a_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)} = -g\varepsilon_{abc}b^b_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}b^{c(\lambda\alpha)}.$$

§ 10. Общее описание искривленного многообразия $G(2.3)$

Искривленное $m \cdot n$ -мерное многообразие $G(mn)$ класса C^r есть множество $G(mn)$ вместе с атласом $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ класса C^r. Здесь U_α — подмножества $G(mn)$, а Φ_α — взаимооднозначные отображения множеств U_α на открытые множества в $R^{m \cdot n}$, причем:

1) U_a образуют покрытие $G(mn)(G(mn)\underset{a}{U}\ U_a)$;

2) если пересечение $U_a \cap U_b$ не пусто, то отображение $\Phi_a \circ \Phi_b^{-1} : \Phi_b(U_a \cap U_b) \to \Phi_a(U_a \cap U_b)$ является дифференцируемым C^r — отображением областей в $R^{m \cdot n}$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь паракомпактные связные хаусдорфовые многообразия $G(mn)$ класса C^r без края.

С помощью математического аппарата дифференциальной геометрии [6—9] можно построить геометрические объекты, определенные на многообразии $G(mn)$. Мы ограничимся лишь рассмотрением некоторых из них.

Множества U_a называются координатными окрестностями в $G(mn)$. Они образуют базис топологии $G(mn)$, поскольку открытое подмножество координатной окрестности — снова координатная окрестность. Локальные координаты $\{\eta^{(\lambda\alpha)}\}$ на U_a задаются посредством $m \cdot n$ вещественнозначных функций $\eta^{(\lambda\alpha)}$. Пусть $\{\eta^{(\lambda\alpha)}\}$ — локальные координаты в некоторой окрестности точки P. Тогда любой касательный к C^1 кривой вектор в точке P представляется линейной комбинацией производных $\left(\left(\frac{\partial}{\partial\eta^{(\lambda\alpha)}}\right)_P\right)$. Пространство T_p всех касательных к $G(mn)$ в точке P векторов есть $m \cdot n$ - мерное векторное пространство. В последнем удобно использовать систему базисных касательных векторов $\{\hat{e}_{(\lambda\alpha)}\}$. Линейная форма $\hat{\omega}$ в P есть вещественная линейная функция на пространстве T_p, которая ставит в соответствие вектору $\hat{X}$ в точке P число $<\hat{\omega}, \hat{X}>$. Множество всех линейных форм в точке P образует $m \cdot n$ - мерное векторное пространство T^*_p, дуальное касательному пространству.

Базисом в первом является $\{\hat{e}^{(\lambda\alpha)}\}$, дуальный базису $\{\hat{e}_{(\lambda\alpha)}\}$. Тогда имеем

$$<\hat{\omega}, \hat{X}> = <\omega_{(\lambda\alpha)}\,\hat{e}^{(\lambda\alpha)}, X^{(\tau\beta)}\,\hat{e}_{(\tau\beta)}> = \omega_{(\lambda\alpha)}X^{(\lambda\alpha)}. \tag{10.1}$$

Поле $\hat{T}$ является тензорным полем типа (r, s) класса C^k на множестве $U \in G(mn)$, если в каждой точке $P \in U$ задан элемент пространства

$$T^r_s(P) = \underbrace{T_p \otimes \ldots \otimes T_p}_{r} \otimes \underbrace{T^*_p \otimes \ldots \otimes T^*_p}_{s}, \tag{10.2}$$

такой, что компоненты $\hat{T}$ относительно любого координатного базиса, определенного на U, являются функциями класса C^k. Совершенно антисимметричные тензоры $(P, 0)$ и $(0, q)$ называются P-и q-формами соответственно. Обычно их разлагают по косым произведениям соответствующих базисов.

Оператор внешнего дифференцирования d линейно отображает поле r - формы

$$\hat{A} = A_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)\ldots(\gamma\delta)}\,d\eta^{(\lambda\alpha)} \wedge d\eta^{(\tau\beta)} \wedge \ldots \wedge d\eta^{(\gamma\delta)}, \tag{10.3}$$

где $A_{\ldots} = A_{\ldots}$, в поле $(r+1)$-формы

$$d\hat{A} = dA_{\ldots} \wedge d\eta^{(\cdot)} \wedge d\eta^{(\cdot)} \wedge \ldots \wedge d\eta^{(\cdot)}. \tag{10.4}$$

Производная Ли $L_{\vec{X}}\hat{T}$ тензорного поля $\hat{T}$ относительно $\vec{X}$ определяется как величина равная $L_{\vec{X}}\hat{T}\Big|_P = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big\{\hat{T}\Big|_P - \Phi_{t*}\hat{T}\Big|_{\lambda(t)}\Big\}$. Здесь $\lambda(t)$ интегральная кривая, проходящая через точку $\lambda(0) = P$, причем $\vec{X}_{\lambda(t)}$ — ее касательный вектор в точке $\lambda(t)$, и наконец, $\Phi_* : \hat{T} \in T^0_1(P) \to \Phi_* \hat{T} \in T^0_1(\Phi(P))$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $\nabla_{\vec{X}}$, который отображает векторное C^r поле в векторное поле $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}$. При этом:

1) для любых функций f, g и векторных C^1 полей $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$

$$\nabla_{f\vec{X}+g\vec{Y}}\vec{Z} = f\nabla_{\vec{X}}\vec{Z} + g\nabla_{\vec{Y}}\vec{Z}; \tag{10.5}$$

2)

$$\nabla_{\vec{X}}(\alpha\vec{Y} + \beta\vec{Z}) = \alpha\nabla_{\vec{X}}\vec{Y} + \beta\nabla_{\vec{X}}\vec{Z}, \tag{10.6}$$

для любых чисел α, β;

3)

$$\nabla_{\vec{X}}(f\vec{Y}) = \vec{X}f\vec{Y} + f\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}. \tag{10.7}$$

Если удовлетворяются условия (10.5 — 7), тогда $\nabla_{\vec{X}}\vec{Y}$ является ковариантной производной.

К примеру

$$\nabla_{\vec{e}_{(m)}}\vec{e}^{(n)} = -\Gamma^{(n)}_{(m)(p)}\vec{e}^{(p)}, \tag{10.8}$$

где $\Gamma^{(n)}_{(m)(p)}$ — коэффициенты связности.

Если заданы векторные C^{r+1}-поля $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ и C^r-связность ∇, то тензоры кручения и кривизны определяются следующим образом:

$$\hat{T}(\vec{X}, \vec{Y}) = \nabla_{\vec{X}}\vec{Y} - \nabla_{\vec{Y}}\vec{X} - [\vec{X}, \vec{Y}], \tag{10.9}$$

$$\hat{R}(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \nabla_{\vec{X}}(\nabla_{\vec{Y}}\vec{Z}) - \nabla_{\vec{Y}}(\nabla_{\vec{X}}\vec{Z}) - \nabla_{[\vec{X}, \vec{Y}]}\vec{Z}. \tag{10.10}$$

C^k-расслоение над C^r-многообразием $G(mn)(r \geq k)$ включает в себя:

а) пространство расслоения — C^k-многообразие ε;

б) базу расслоения — C^r-многообразие $G(mn)$;

в) проекцию — C^k-отображение $\pi : \varepsilon \to G(mn)$, дифференциал которого имеет во всех точках ранг $N = \dim G(mn)$;

г) слой $\mathcal{F}$ — гладкое многообразие;

д) структурную группу — группу G гладких преобразований слоя $\mathcal{F}$;

е) структуру расслоения: существует окрестность U каждой точки $q \in G(mn)$ такая, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфна $U \otimes \mathcal{F}$, т. е. для каждой точки $P \in U$ существует диффеоморфизм Φ_P точки $\pi^{-1}(P)$ на $\mathcal{F}$

такой, что отображение $\psi(U)=(\pi(U),\ \Phi_{(U)})$ есть диффеоморфизм $\psi(U):\pi^{-1}(U)\to U\otimes\mathcal{F}$.
Преобразование

$$\lambda_{ab}=\Phi_b^{-1}\Phi_a:\mathcal{F}\otimes U_{ab}\to\mathcal{F}\otimes U_{ab},$$

где $U_{ab}=U_a\cap U_a$ называется функцией склейки расслоения.

К примеру, касательное расслоение $T_p(G(mn))$ есть расслоенное пространство над C^r - многообразием $G(mn)$, если множество $\varepsilon=\bigcup\limits_{P\in G}T_P$ наделено структурой многообразия и проекцией на $G(mn)$. Другим примером расслоения является тензорное расслоение $T_s^r(G(mn))$ типа (r,s) над $G(mn)$.

Расслоение линейных реперов $L(G(mn))$ понимается в следующем смысле: полное пространство ε состоит из всевозможных базисов $\{\hat e_{(\lambda a)}\}$, $\hat e_{(\lambda a)}\in T_P$ для каждого $P\in G(mn)$.

Метрический тензор $\hat g$ в точке $P\in G(mn)$ есть симметричный тензор типа (0,2) в P. С его помощью определяется норма $|g(\hat X,\hat X)|^{1/2}$ любого вектора $\hat X\in T_P$. Компоненты $\hat g$ относительно базиса $\{\hat e_{(\lambda a)}\}$ определяются следующим образом:

$$g_{(\lambda a)(\tau\beta)}=g(\hat e_{(\lambda a)},\ \hat e_{(\tau\beta)})=g(\hat e_{(\tau\beta)},\ \hat e_{(\lambda a)}). \tag{10.11}$$

голономном базисе имеем

$$\hat g=g_{(\lambda a)(\tau\beta)}\,d\eta^{(\lambda a)}\otimes d\eta^{(\tau\beta)}. \tag{10.12}$$

Пусть $\{\hat e_{(\lambda a)}\}$ — гладкие векторные ля, определенные в некоторой координатной окрестности U, прич $g(\hat e_{(\lambda a)},\ \hat e_{(\tau\beta)})=g_{(\lambda a)(\tau\beta)}$. Пусть 1- форма $\hat e^{(\lambda a)}$ задана равенством

$$<\hat e^{(\lambda a)},\ \hat e_{(\tau\beta)}>=\delta^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}. \tag{10.13}$$

Тогда структурные уравнения Картана имеют вид

$$d\hat e^{(\lambda a)}=-\hat\omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}\wedge\hat e^{(\tau\beta)}, \tag{10.14}$$

$$d\hat\omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}=\hat\omega^{(\lambda a)}_{(\rho\gamma)}\wedge\hat\omega^{(\rho\gamma)}_{(\tau\beta)}-\hat\Omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}, \tag{10.15}$$

$$\hat\Omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}=\frac{1}{2}R^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)(\rho\gamma)(\sigma k)}\,\hat e^{(\rho\gamma)}\wedge\hat e^{(\sigma k)}, \tag{10.16}$$

где

$$\nabla\hat e_{(\tau\beta)}=\hat\omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}\otimes\hat e_{(\lambda a)},$$

$$\hat\Omega^{(\lambda a)}_{(\tau\beta)}(\hat Y,\hat X)=<\hat e^{(\lambda a)},\hat R(\hat Y,\hat X)\,\hat e_{(\tau\beta)}>. \tag{10.17}$$

Здесь $\hat X$ и $\hat Y$ — векторные поля на U.

В дальнейшем будем рассматривать многообразие $G(2,3)$. При этом имеется однозначное соответствие между многообразием $G(2,3)$ и искривленным пространство-временным шестимерным континуумом. Последующая фиксация направления времени приводит к четырехмерной римановой геометрии. Действительно, в этом случае имеем

$$A_{\alpha\beta}B^{\beta} = A_{\beta}B^{\beta} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{10.18}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \hat X, \hat Y \rangle_{u} &= g_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} + g_{\alpha 0} X^{\alpha} Y^{0} + \\ &+ g_{0\beta} X^{0} Y^{\beta} + g_{00} X^{0} Y^{0} = g_{00} X^{0} Y^{0} + \\ &+ g_{0\beta} X^{0} Y^{\beta} + g_{\alpha 0} X^{\alpha} Y^{0} + g_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} = \langle \hat X, \hat Y \rangle_{u'}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \hat X, \hat Y \rangle_{u} &= \langle \hat X, \hat Y \rangle_{u'} = \\ &= \langle \hat X', \hat Y' \rangle_{u} = \langle \hat X', \hat Y' \rangle_{u'} = \ldots \end{aligned} \tag{10.20}$$

§ 11. Локальная группа искажения. До сих пор негласно было принято, что оси образующих многообразие $G(2,3)$ пространств $G(\pm 3)$ совпадают

$$\sigma_{(+\alpha)} = \sigma_{(-\alpha)} \equiv \sigma_{\alpha}. \tag{11.1}$$

Теперь допустим, что возможны вращения этих осей на определенные углы. При этом должна сохраняться плоская трехмерность каждого из пространств. К примеру, в пространстве $G(-3)$ плоскость, составленная осями $\sigma_{(-1)}, \sigma_{(-2)}$ как целое, может вращаться вокруг оси $\sigma_{(-3)}$ на угол $\theta_{(-3)}$ и т. п. То есть здесь имеем преобразования из группы движения метрики трехмерного эвклидова пространства.

Если в точке $\tau_p \in G(2,3)$ определено векторное гравитационное поле $a^{\rho}_{(\pm\alpha)}(\tau_p)$, типа Фарадей-Максвелловского поля, то базис $e^{\rho}_{(\pm\alpha)}$ (1.10) искажается. Во-первых, псевдовекторы $\oplus$ и $\ominus$ локально приобретают свойства обычных векторов

$$\begin{aligned} \oplus &\to \bigcirc_{(+\alpha)} = \oplus + \varkappa a^{\rho}_{(+\alpha)} \ominus, \\ \ominus &\to \bigcirc_{(-\alpha)} = \ominus + \varkappa a^{\rho}_{(-\alpha)} \oplus. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Поэтому для каждого $\alpha = 1, 2, 3$, уже имеем

$$\langle \bigcirc_{(\pm\alpha)}, \bigcirc_{(\mp\alpha)} \rangle = 2\varkappa a^{\rho}_{(\pm\alpha)} \neq 0. \tag{11.3}$$

В свою очередь, семейство единичных векторов $\{\sigma_{\alpha}\}$ распадается на два $(\pm)$ семейства векторов $\{\sigma_{(+\alpha)}\}$, $\{\sigma_{(-\alpha)}\}$, каждое из которых ведет себя подобно псевдовектору по отношению к другому

$$\langle \sigma_{(+\alpha)}, \sigma_{(-\beta)} \rangle \neq 0, \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta. \tag{11.4}$$

Потребуем, чтобы пространства $G(\pm 3)$ оставались плоскими трехмерными пространствами. То есть здесь мы имеем вышеприведенные вращения. Таким образом, совершается переход

$$\widehat{e}^0_{(+\alpha)} = \oplus \otimes \sigma_\alpha \xrightarrow{a^p} \widehat{e}_{(+\alpha)}(a^p) = \bigcirc_{(+\alpha)}(a^p) \otimes \sigma_{(+\alpha)}(a^p),$$

$$\widehat{e}^0_{(-\alpha)} = \ominus \otimes \sigma_\alpha \xrightarrow{a^p} \widehat{e}_{(-\alpha)}(a^p) = \bigcirc_{(-\alpha)}(a^p) \otimes \sigma_{(-\alpha)}(a^p). \tag{11.5}$$

Введем функции искажения

$$f^0_{(\lambda\alpha)\tau} = \frac{\xi_{(\lambda\alpha)\lambda}}{\xi_{(\lambda\alpha)\tau}}, \quad f^\beta_{(\lambda\alpha)\beta} = \frac{R_{(\lambda\alpha)\beta}}{R_{(\lambda\alpha)\alpha}}, \tag{11.6}$$

где $\xi_{(\lambda\alpha)\tau}\,(\lambda \neq \tau)$ и $R_{(\lambda\alpha)\alpha}$ (для заданных значений $\lambda, \tau = \pm$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$) описывают нормальную часть смешанных векторов

$$\xi_{(\lambda\alpha)\tau} = < \bigcirc_{(\lambda\alpha)}, \quad \bigcirc_\tau >,$$

$$R_{(\lambda\alpha)\alpha} = < \sigma_{(\lambda\alpha)}, \ \sigma_\alpha >, \tag{11.7}$$

а $\xi_{(\lambda\alpha)\lambda}$ и $R_{(\lambda\alpha)\beta}(\alpha \neq \beta)$ — искаженную часть

$$\xi_{(\lambda\alpha)\lambda} = < \bigcirc_{(\lambda\alpha)}, \quad \bigcirc_\lambda >,$$

$$R_{(\lambda\alpha)\beta} = < \sigma_{(\lambda\alpha)}, \quad \sigma_\beta >. \tag{11.8}$$

Потребуем, чтобы каждая из полных функций искажения, соответствующая пространствам $G(\pm 3)$ в отдельности, оставалась равной нулю (как при отсутствии гравитационного поля)

$$f^0_{(\lambda\alpha)\tau} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f^\beta_{(\lambda\beta)\gamma} = 0. \tag{11.9}$$

Отсюда определяются значения углов допустимых вращений. В общем случае имеем

$$\mathrm{tg}\theta_{(\lambda\alpha)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{tg}\theta_{(\lambda\beta)(\lambda\gamma)} = -\varkappa\, a^p_{(\lambda\alpha)}(\eta_p). \tag{11.10}$$

Определим преобразования искажения ξ и R как линейные преобразования псевдовекторов $\bigcirc_\tau$ и векторов σ_β посредством матриц $(\xi^\tau_{(\lambda\alpha)})$ и $(R^\beta_{(\lambda\alpha)})$ соответственно.

$$\bigcirc_{(\lambda\alpha)} = \xi^\tau_{(\lambda\alpha)} \bigcirc_\tau,$$

$$\sigma_{(\lambda\alpha)} = R^\beta_{(\lambda\alpha)}\sigma_\beta. \tag{11.11}$$

или

$$\bigcirc^{(\lambda\alpha)} = \xi^{(\lambda\alpha)}_\tau \bigcirc^\tau, \tag{11.12}$$

$$\sigma^{(\lambda\alpha)} = R^{(\lambda\alpha)}_\beta \sigma^\beta.$$

Совокупность матриц $\{R\}$ образует группу обычных вращений $SO(3.R_\pm)$. Матрица преобразования R не должна зависеть от выбора последовательности осей, вокруг которых совершаются вращения, поэтому

$$R^\beta_{(\lambda\alpha)} = \frac{1}{6}\sum_{i \neq j \neq k} (R^\beta_{(\lambda\alpha)})^{ijk}, \tag{11.13}$$

$$(i, j, k = 1, 2, 3).$$

Здесь матрица $(R^{l}_{(\lambda\alpha)})^{ijk}$ соответствует преобразованию $e_{l} \to e_{(\lambda\alpha)}$, когда вращения совершаются в последовательности i, j, k.

Совокупность матриц $\{\xi\}$ также образует группу. Построим матрицы

$$D = \xi \underset{(\lambda\alpha)}{\otimes} R, \quad (D^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} = \xi_{(\lambda\alpha)} R_{(\lambda\alpha)}),$$

$$D^{T} = \xi^{T} \underset{(\lambda\alpha)}{\otimes} R^{T}, \quad (D^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} = \xi^{(\lambda\alpha)} R^{(\lambda\alpha)}), \tag{11.14}$$

посредством которых преобразуются смешанные векторы (1.10). При этом

$$(\hat{e}_{(\lambda\alpha)}) = D(\hat{e}_{(\lambda\alpha)}), \quad (\hat{e}_{(\lambda\alpha)}) = D^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} \hat{e}_{(\lambda\alpha)} = (\sigma_{(\lambda)} \otimes e_{(\alpha)}) \tag{11.15}$$

$$(\hat{e}^{(\lambda\alpha)}) = D^{T}(\hat{e}^{(\lambda\alpha)}), \quad (\hat{e}^{(\lambda\alpha)}) = D^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} \hat{e}^{(\lambda\alpha)} = (\sigma^{(\lambda)} \otimes e^{(\alpha)}).$$

Осуществляющая искажение базиса (1.10) совокупность матриц 6×6 D(11.14) образует локальную группу искажения $D^{loc}(2.3)$, если только полные функции искажения для пространств $G(\pm 3)$ остаются равными нулю (11.9).

§ 12. Локальная группа искривления. Гравитационное векторное поле $a^{p}_{(\lambda\alpha)} = a^{p}_{(\lambda\alpha)}(\tau_{\mu})$ определено в плоском многообразии $G(2.3)$. При преобразовании координат оно преобразуется по векторному представлению собственной ортохронной группы $\widetilde{SO}(3.3)$ $\left(D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$, а как поле Фарадей-Максвелловского типа подвергается также калибровочным преобразованиям второго рода χ^{p}:

$$a'^{p}_{(\lambda\alpha)} = K^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} a^{p}_{(\lambda\alpha)}, \quad K \in \widetilde{SO}(3.3),$$
$$a'^{p}_{(\lambda\alpha)} = a^{p}_{(\lambda\alpha)} + \partial^{p}_{(\lambda\alpha)} \chi^{p}(\tau_{\mu}). \tag{12.1}$$

Построим диффеоморфизм $\tau^{(\lambda\alpha)}_{l}(\tau_{\mu}) : G(2.3) \to G(23)$, т. е. взаимно однозначное и гладкое в обе стороны отображение класса C^{k}

$$\tau^{(\lambda\alpha)}_{l}(\tau_{\mu}) : G(2.3) \to G(23),$$
$$\tau^{(\lambda\alpha)}_{\mu}(\tau_{l}) : G(23) \to G(2.3). \tag{12.2}$$

Определение 1. В случае, когда источник поля искривления не зависит от координаты $\tau^{(\lambda\alpha)}_{l}$, отображение $\tau_{\mu} \leftrightarrow \tau_{l}$ называется ориентированным, если поле искривления не зависит от координаты $\tau^{(\lambda\alpha)}_{\mu}$. То есть в рассматриваемом случае имеем

$$\xi^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} = \xi^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)}, \quad \xi^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} = \xi^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)}, \tag{12.3}$$

где

$$\xi^{(\lambda\alpha)}_{(\lambda\alpha)} = \frac{\partial \tau^{(\lambda\alpha)}_{l}}{\partial \tau^{(\lambda\alpha)}_{\mu}}.$$

Определение 2. Множеством физических отображений называется множество отображений $\{\eta_p \leftrightarrow \eta\}$, где η_p подвергается всевозможным преобразованиям из группы $\widetilde{SO}(3.3)$, если среди отображений имеется хотя бы одно ориентированное отображение.

Функции $\eta^{(\lambda\alpha)}(\eta_p)$ определим из соотношений

$$g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta_p,\ a^p)\,\psi^{(\lambda\alpha)}_{(\rho\gamma)}\,\psi^{(\tau\beta)}_{(\sigma k)} = g^0_{(\rho\gamma)(\sigma k)} + \Phi_{(\rho\gamma)(\sigma k)}(a^p). \tag{12.4}$$

При этом должны удовлетворяться условия интегрируемости (условия совместности)

$$\frac{\partial}{\partial\eta_p^{(\rho\gamma)}}\,\psi^{(\lambda\alpha)}_{(\sigma k)} = \frac{\partial}{\partial\eta_p^{(\sigma k)}}\,\psi^{(\lambda\alpha)}_{(\rho\gamma)}, \tag{12.5}$$

и невырожденности $\det|\psi^{(\lambda\alpha)}_{(\rho\gamma)}| \neq 0$. [6,10].

Наличие в (12.4) симметрического тензора ориентации $\Phi_{(\rho\gamma)(\sigma k)}$, определенного в $G(2.3)$, обеспечивает ориентируемость отображения $\eta_p \leftrightarrow \eta$. Можем рассматривать случай **полной ориентации**, когда всюду $\psi^{(\lambda\alpha)}_{(\rho\gamma)} \equiv \delta^{(\lambda\alpha)}_{(\rho\gamma)}$. Тогда из (12.4) определим

$$\Phi_{(\rho\gamma)(\sigma k)} = g_{(\rho\gamma)(\sigma k)} - g^0_{(\rho\gamma)(\sigma k)}.$$

Очевидно, что $(\Phi_{(\rho\gamma)(\sigma k)})_{a^p=0} = 0$. Из (12.4) находим

$$g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}\,d\eta^{(\lambda\alpha)}d\eta^{(\tau\beta)} = (g^0_{(\rho\gamma)(\sigma k)} + \Phi_{(\rho\gamma)(\sigma k)})\,d\eta_p^{(\rho\gamma)}d\eta_p^{(\sigma k)}. \tag{12.6}$$

Постулируем следующее: истинно искривленные координаты η, η', η'', ... определяются из соотношений (12.4, 5), если только множество отображений $\{\eta_p \leftrightarrow \eta\}$ является множеством физических отображений. Соответствующие координатные системы $Q, Q', Q'', \ldots$, назовем истинно криволинейными. Согласно (12.6) имеем

$$g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta)d\eta^{(\lambda\alpha)}d\eta^{(\tau\beta)} = g'_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta')d\eta'^{(\lambda\alpha)}d\eta'^{(\tau\beta)} = \ldots = inv, \tag{12.7}$$

где $g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta) \equiv g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta_p(\eta))$, и т. п. Следовательно, функции $\eta^{(\lambda\alpha)}(\eta_p)$ могут быть отождествлены с координатами точки $\widetilde{P}$ искривленного многообразия $G(23)$. При этом $g_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}(\eta)$ является метрическим тензором в точке $\widetilde{P}$. Непосредственным следствием такого определения является следующее: если многообразие $G(23)$ плоское в некоторой системе Q, то оно такое же и в остальных системах $Q', Q'', \ldots$. Справедливо и обратное — если метрика не плоская в системе Q, то она не плоская и в остальных системах Q', Q'', ... Следует отметить, что каждой отдельной калибровке (χ^p) векторного поля $a^p_{(\lambda\alpha)}(\eta_p)$ соответствует своя реализация набора искривленных координат.

Введем локальную группу искривления

$$G^{lor}(2.3) = \widetilde{SO}(3.3) \otimes D^{lor}(2.3). \tag{12.8}$$

Бесконечно малый интервал является инвариантом этой группы.

§ 13. Лагранжева формулировка. Полное действие системы гравитационно взаимодействующих полей представим в виде

$$S=S_p+S_g=\int L_{ap}d\xi_p^{(+0)}\wedge\ldots\wedge d\xi_p^{(-3)}+\int L_g\sqrt{-g}\,d\xi^{(+0)}\wedge\ldots\wedge d\xi^{(-3)}. \tag{13.1}$$

Посредством лагранжиана L_{ap} описывается определенное в $G(2.3)$ калибровочное поле $a^p_{(\lambda\alpha)}(\xi_p)$, а посредством лагранжиана L_g — остальные поля $\varphi_A(\xi)=\varphi_1(\xi),\ldots,\varphi_n(\xi)$; $\bar\varphi_A(\xi)=\bar\varphi_1(\xi),\ldots,\bar\varphi_n(\xi)$, определенные в $G(2.3)$. Лагранжиан L_{ap} инвариантен относительно преобразований группы $\widetilde{SO}(3.3)\otimes U^{loc}(1)$. Присутствие поля $a^p_{(\lambda\alpha)}(\xi_p)$, в свою очередь, обеспечивает инвариантность лагранжиана L_g относительно локальной группы искривления $G^{loc}(2.3)$ (12.8).

Уравнения движения гравитационного поля и вещества имеют вид

$$\frac{\delta^p L_{ap}}{\delta^p a^p_{(\lambda\alpha)}}=j^{(\lambda\alpha)}=-\frac{\delta^p(L_gJ_\Phi)}{\delta^p a^p_{(\lambda\alpha)}}, \tag{13.2}$$

$$\frac{\delta L_g}{\delta\varphi_A}=0,\quad \frac{\delta L_g}{\delta\bar\varphi_A}=0, \tag{13.3}$$

где $\dfrac{\delta^p L}{\delta^p\Phi}$ и $\dfrac{\delta L}{\delta\Phi}$ — вариации Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\delta^p L}{\delta^p\Phi}=\frac{\partial L}{\partial\Phi}-\partial^p_{(\lambda\alpha)}\frac{\partial L}{(\partial^p_{(\lambda\alpha)}\Phi)}, \tag{13.4}$$

$$\frac{\delta L}{\delta\Phi}=\frac{\partial L}{\partial\Phi}-\left(\frac{\partial L}{\partial\Phi_{;(\lambda\alpha)}}\right)_{;(\lambda\alpha)}.$$

$(\ldots)_{;(\lambda\alpha)}$ — ковариантная производная, $J_\Phi=\sqrt{-g}\,\det|\rho^{(\lambda\alpha)}_{(\mu\beta)}|$. Калибровочно инвариантный лагранжиан L_{ap} записывается в виде

$$L_{ap}=-\frac{1}{4}\mathcal{F}^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}_p\mathcal{F}^p_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}, \tag{13.5}$$

где

$$\mathcal{F}^p_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}=\partial^p_{(\lambda\alpha)}a^p_{(\mu\beta)}-\partial^p_{(\mu\beta)}a^p_{(\lambda\alpha)}. \tag{13.6}$$

Из (13.2) получим

$$\Box_p a^{(\lambda\alpha)}_p-\partial^{(\lambda\alpha)}_p\partial^p_{(\mu\beta)}a^{(\mu\beta)}_p=j^{(\lambda\alpha)}=-\frac{\delta^p(L_gJ_\Phi)}{\delta^p a^p_{(\lambda\alpha)}}, \tag{13.7}$$

где

$$j^{(\lambda\alpha)}=-\frac{\partial g^{(\mu\beta)(\nu\gamma)}}{\partial a^p_{(\lambda\alpha)}}\frac{\delta^p(L_gJ_\Phi)}{\delta^p g^{(\mu\beta)(\nu\gamma)}}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{(\mu\beta)(\nu\gamma)}}{\partial a^p_{(\lambda\alpha)}}T_{(\mu\beta)(\nu\gamma)}. \tag{13.8}$$

Неоднозначность в выборе потенциалов поля $a^{(\lambda\alpha)}_p$ устраняется фиксацией калибровки

$$\partial^p_{(\lambda\alpha)}a^{(\lambda\alpha)}_p=0.$$

При этом, тензор энергии-импульса системы, находящейся в многообразии $G(2.3)$, задается посредством формулы

$$T_{(\alpha)(\beta)}=2\frac{\delta^{p}(L_{g}J_{\Phi})}{\delta^{p}g^{(\alpha)(\beta)}}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta^{g}(\sqrt{-g}\,L_{g})}{\delta^{g}g^{(\alpha)(\beta)}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}L_{g})}{\partial g^{(\alpha)(\beta)}}-\partial_{(\gamma k)}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_{g})}{\partial(\partial_{(\gamma k)}g^{(\alpha)(\beta)})}\right). \qquad (13.9)$$

Отметим, что аргументация Вайнберга [11]—а именно, предсказание притяжения частиц и античастиц, и отталкивание частиц между собой (справедливая для векторной теории в чистом виде) теряет свою силу в рамках предложенной теории гравитации. В последней присутствует только гравитационное притяжение.

§ 14. Закон сохранения полной энергии-импульса. Для формулировки законов сохранения полной энергии-импульса системы гравитационно взаимодействующих полей, воспользуемся отображением

$$\eta_{i}^{(\pm s)}=\eta_{i}^{(\pm s)}(\eta_{i_p}^{(+1)},\ldots,\eta_{i_p}^{(-3)}), \qquad (14.1)$$

и представим лагранжиан L_g в виде

$$L_{g}=L_{g}(a^{p},\psi_{A},\overline{\psi}_{A})=L_{g}(a^{p},\psi_{A}^{p},\overline{\psi}_{A}^{p})\equiv L_{p}, \qquad (14.2)$$

где

$$\psi_{A}^{p}\equiv\psi_{A}(\eta_{i}(\eta_{ip})),$$
$$\overline{\psi}_{A}^{p}\equiv\overline{\psi}_{A}(\eta_{i}(\eta_{ip})). \qquad (14.3)$$

Тогда полное действие записывается в форме

$$S=\int(L_{a^{p}}+L_{p}J_{\Phi})d\eta_{i_p}^{(+1)}\wedge\ldots\wedge d\eta_{i_p}^{(-3)}, \qquad (14.4)$$

с помощью которой получаются законы сохранения полной энергии-импульса системы гравитационно взаимодействующих полей, определенных в плоском многообразии $G(2.3)$. Существование соответствующих векторов Киллинга в $G(2.3)$ обеспечивает двенадцатипараметрическую группу движений, состоящую из шестипараметрической подгруппы трансляций и шестипараметрической подгруппы поворотов. Им соответствуют законы сохранения энергии-импульса и момента импульса замкнутой системы взаимодействующих полей. Следует отметить важное свойство величины $L_p J_\Phi$ при отображении (14.1). А именно, величина $L_p J_\Phi$ инвариантна в любой инерциальной системе отсчета K, K', K'', ..., Действительно, это утверждение вытекает из соответствия

$$L_{p/\eta_{i_p}}=L_{g/\eta_i}=L'_{g/\eta'_i}=L'_{p/\eta'_{i_p}}=L''_{g/\eta''_i}=L''_{p/\eta''_{i_p}}=\ldots,$$
$$\sqrt{-g}\,d\Omega_{6}=J_{\Phi}\,d\eta_{i_p}^{6}=\sqrt{-g'}\,d\Omega'_{6}=J'_{\Phi}\,d\eta_{i_p}^{\prime 6}=\ldots, \qquad (14.5)$$
$$J_{\Phi}=J'_{\Phi}=J''_{\Phi}=\ldots$$

Здесь η_i, η'_i, η''_i, ... относятся к истинно криволинейным координатным системам Q, Q', Q'', ...

§ 15. Центрально-симметрическое гравитационное поле. Поле, создаваемое неподвижным в пространстве центрально-симметрическим распределением материи, обладает центральной симметрией. Если вещество двигается, то скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу. Центральная симметрия статического по-

...ая означает, что потенциалы имеют вид $a^p_{0\alpha} = a^p_{0\alpha}(r_\alpha)(\alpha = 1, 2, 3)$. В этом случае с помощью формул (10.5) и (13.11.12) нетрудно получить уравнение гравитационного поля

$$\Delta_p a^p_{0\alpha} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial a^p_{0\alpha}} T_{ij},$$
$$(i, j = 01, 02, 03, \ 1, 2, 3) \qquad (15.1)$$
$$a^p_{(+\alpha)} = a^p_{(-\alpha)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} a^p_{0\alpha}(r_p).$$

Из (11.10) находим

$$\theta_{(+\alpha)} = -\mathrm{arctg}(\varkappa a^p_{(+\alpha)}) = -\mathrm{arctg}(\varkappa a^p_{(-\alpha)}) = \theta_{(-\alpha)}, \qquad (15.2)$$

т. е.

$$\theta_\alpha = \theta_{(+\alpha)} - \theta_{(-\alpha)} = 0. \qquad (15.3)$$

Следовательно, $\sigma_{(+\alpha)} = \sigma_{(-\alpha)} = \sigma_\alpha$. В рассматриваемом случае удобно пользоваться сферическими координатами

$$\sigma_1 = \sigma_r, \quad \sigma_2 = \sigma_\theta, \quad \sigma_3 = \sigma_\varphi. \qquad (15.4)$$

Воспользуемся плоской (K) и криволинейной (Q) координатными системами отсчета, в которых временные компоненты определены следующим образом

$$x^{0\alpha}_p = x^{0\alpha'}_p = 0, \quad x^{0'}_p = x^0_p \ (a^p_{0\alpha} = a_{0\alpha'} = 0, \quad a^p_{0'} = a^p_0) \qquad (15.5)$$
$$x^{0\alpha} = x^{0\alpha'} = 0, \quad x^{0'} = x^0.$$

Тогда определим

$$\hat{e}_0 = \xi_0 \otimes \sigma_1(1 - \varkappa a^p_0) = \hat{e}^0_0(1 - \varkappa a^p),$$
$$\hat{e}_r = \xi \otimes \sigma_1(1 + \varkappa a^p_0) = \hat{e}^0_r(1 + \varkappa a^p_0), \qquad (15.6)$$
$$\hat{e}_\theta = \hat{e}^0_\theta = \xi \otimes \sigma_\theta, \quad \hat{e}_\varphi = \hat{e}^0_\varphi = \xi \otimes \sigma_\varphi.$$

Поэтому метрическая квадратическая форма имеет вид

$$dS^2 = (1 - \varkappa a^p_0)^2 c^2 dt^2 - (1 + \varkappa a^p_0)^2 dr^2 - r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (15.7)$$

В рассматриваемом случае искривленное многообразие M^4 обладает группой движений $SO(3)$ с двумерными пространственно-подобными орбитами S^2. Стационарная подгруппа группы $SO(3)$ действует на касательном пространстве к точке сферы S^2 изотропно. Причем имеется следующее расслоение: $\pi: M^4 \to M^2$ со слоем $S^2 = \pi^{-1}(x)$, $x \in M^2$, где M^2 — фактор-пространство $M^4 / SO(3)$. Из (15.1) получим

$$\Delta_p a^p_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial a^p_0} T_{\mu\nu}. \qquad (15.8)$$

Вне распределения материи имеем

$$\Delta_p a^p_0 = 0, \qquad (15.9)$$

Следовательно, $\varkappa a_0^0 = \dfrac{\text{const}}{r_p}$, где постоянная интегрирования определяется сравнением этого результата со значением при слабом гравитационном поле $g_{00} \simeq 1 + \dfrac{2\varphi}{c^2}$ ($\varphi = -\dfrac{KM}{r_p}$ —ньютоновский потенциал). То есть

$$\varkappa a_0^0 = \frac{KM}{c^2 r_p}. \tag{15.10}$$

Заметим, что всюду сохраняется ток. Теперь определим связь координат r и r_p из соотношений

$$g_{\mu\nu}\psi_e^\mu \psi_k^\nu = g_{ek}^0 + \Phi_{ek}, \tag{15.11}$$

где

$$\psi_e^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x_p^e}.$$

Причем

$$\frac{\partial}{\partial x_p^e}\psi_k^\mu = \frac{\partial}{\partial x_p^k}\psi_e^\mu. \tag{15.12}$$

Соотношения (15.11, 12) получаются из (12.4, 5). При реализации истинно криволинейных координат используется множество физических отображений. Поэтому (рассматривается случай полной ориентации)

$$\psi_0^0 = \psi_1^1 = \psi_2^2 = \psi_3^3 = 1, \tag{15.13}$$

$$\psi_e^\mu = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq e.$$

Нетрудно убедиться, что удовлетворяются соотношения (15.12). Тогда

$$\Phi_{00} = g_{00} - g_{00}^0, \quad \Phi_{11} = g_{11} - g_{11}^0,$$

$$\Phi_{22} = \Phi_{33} = 0. \tag{15.14}$$

Следовательно,

$$r_p = \left| r - \frac{r_g}{4} \right|, \tag{15.15}$$

где r_g — гравитационный радиус распределения

$$r_g = \frac{2KM}{c^2}, \tag{15.16}$$

K — гравитационная постоянная, M — масса распределения.

Скорости движения планет вокруг Солнца намного меньше по сравнению со скоростью света в пустоте. Этому соответствует $\dfrac{r_g}{r} \ll 1$, поэтому во втором приближении теории возмущений имеем

$$\varkappa a_0^0 = \frac{r_g}{2r_p} \simeq \frac{r_g}{2r}\left(1 + \frac{r_g}{4r}\right). \tag{15. 17}$$

Метрический тензор имеет форму

$$g'_{00}=1-\frac{r_g}{r},\quad g'_{22}=-r^2,$$

$$g'_{11}=-\left(1+\frac{r_g}{r}+\frac{r_g^2}{2r^2}\right),\quad g'_{33}=-r^2\sin^2\theta, \tag{15.18}$$

(остальные компоненты равны нулю).

Поэтому предложенная гравитационная теория и ОТО не различимы с точки зрения постньютоновских экспериментов. Существенные различия выявляются лишь при сильных полях.

§ 16. Квантовая гравитация. Мы уже определили выражение для действия системы гравитационно взаимодействующих полей в плоском пространстве-времени (см. (14.14)). С его помощью нетрудно определить квантовую теорию в терминах интегралов по траекториям [12]. При этом, производящий функционал для функций Грина с учетом взаимодействия записывается в виде

$$Z[J]=\int D[\Phi_A^p]\exp\left\{i\int L_1^p\,dx_p^0\wedge dx_p^1\wedge\ldots\wedge dx_p^3\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{i\int\left[L_0^p[\Phi_A^p]+J[\Phi_A^p]\right]dx_p^0\wedge dx_p^1\wedge\ldots\wedge dx_p^3\right\}, \tag{16.1}$$

где $\Phi_A^p=\hat{a}_p^p,\ \hat{\psi}_p,\ \hat{\bar{\psi}}_p$. Их вычисляют по пространству функций $[\Phi_A^p]$ с подлежащей мерой. Величина Z дает амплитуду перехода из начального вакуумного состояния $|0,i>$ в конечное вакуумное состояние $|0,f>$ в присутствии источника частиц J. Здесь возникает добавочный вклад от дополнительных фиктивных полей, связанных с калибровочной симметрией. Однако они не связаны с векторным полем a_p^p, поэтому их можно не рассматривать в квантовой теории поля в плоском пространстве-времени.

Плотность лагранжиана взаимодействия L_1^p является полиномиальной функцией полей, поэтому выражение (16.1) можно переписать в виде

$$Z[J]=\exp\left\{i\int L_1^p\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]d^4x_p\right\}\cdot Z_0[J], \tag{16.2}$$

где свободный производящий функционал $Z_0[J]$ имеет форму

$$Z_0[J]=\int D[\Phi_A^p]\exp\{i\int\left[L_0^p[\Phi_A^p]+J^A\Phi_A^p\right]d^4x_p\}. \tag{16.3}$$

С помощью выражения (16.2) вычисляются функции Грина.

Отметим, что отсутствует трудность, связанная с определением асимптотических условий для произвольной калибровки, в системах с бесконечномерной неабелевой калибровочной группой. В предложенной теории гравитации эти асимптотические условия хорошо определены $H_1^p(t_p=\pm\infty)=0$ (H_1^p — гамильтониан взаимодействия).

Рассмотренная в настоящей главе модель гравитационного взаимодействия является лишь простейшей из возможных. Более сложные примеры гравитационного взаимодействия будем рассматривать в последующих главах.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕННОЕ МНОГООБРАЗИЕ G(2.2.3) И ОПРЕДЕЛЕННЫЕ В НЕМ ПОЛЯ

На малых пространственно-временных интервалах пространство-временной континуум искажен. Описание физических процессов в таких условиях приобретает чрезвычайную актуальность для теории элементарных частиц. Для построения теории искажения пространство-временного континуума необходимо иметь представление об обобщенном многообразии $G(2.2.3)$ и о характере протекающих в нем процессов. Решению этой задачи посвящена настоящая глава.

§ 1. Бипсевдопространства. *Определение.* Совокупность линейно независимых единичных бипсевдовекторов есть величины $\{O_{\lambda,\mu}\}$ $(\lambda = 1, \ldots, m;\ \mu = 1, \ldots, k)$, удовлетворяющие условию бипсевдоортогональности

$$< O_{\lambda,\mu},\ O_{\tau,\nu} > = {}^*\delta_{\lambda\tau}\, {}^*\delta_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

где ${}^*\delta_{\lambda\tau}$ — псевдосимвол

$$ {}^*\delta_{\lambda\tau} = \begin{cases} 1 & \lambda \neq \tau, \\ 0 & \lambda = \tau. \end{cases}$$

Совокупность единичных бипсевдовекторов $\{O_{\lambda,\mu}\}$ является базисом в вещественном $m \cdot k$ - мерном бипсевдопространстве ${}^*G(m.k)$, а каждый бипсевдовектор ${}^{**}\hat{\xi} \in {}^*G(m.k)$ представляется разложением

$$ {}^{**}\hat{\xi} = O_{\lambda,\mu}\, {}^*\xi^{(\lambda,\mu)}. \tag{1.3}$$

Вещественные коэффициенты ${}^*\xi^{(\lambda,\mu)}$ называются координатами бипсевдовектора в данном базисе $\{O_{\lambda,\mu}\}$.

По аналогии теории линейных вещественных псевдопространств можно построить основы теории линейных вещественных бипсевдопространств. Не вдаваясь в детали этой теории остановимся лишь на теореме единственности разложения: разложение бипсевдовектора по данному базису единственно. В этом можно убедиться следующим образом. Воспользуемся формулой (1.1) и представим координаты ${}^*\xi^{(\lambda,\nu)}$ в виде

$$ {}^*\xi^{(\lambda,\nu)} = \frac{1}{(k-1)} \sum_{j}^{k} < O_{\tau,j},\ {}^{**}\hat{\xi}^{\lambda} > - < O_{\tau,\nu},\ {}^{**}\hat{\xi}^{\lambda} >, \tag{1.4}$$

где $\tau \neq \lambda$, $\nu = 1, \ldots, k$ и ${}^{**}\hat{\xi}^{\lambda} = \sum_{\mu}^{k} O_{\lambda,\mu}\, {}^*\xi^{(\lambda,\mu)}$.

Из (1.4) видно, что задача сводится к тому, что необходимо показать единственность разложения бипсевдовектора ${}^{**}\hat{\xi}^{\lambda}$ по базису $O_{\lambda,1}, O_{\lambda,2}, \ldots O_{\lambda,k}$. Пусть бипсевдовектор ${}^{**}\hat{\xi}^{\lambda}$ имеет два разложения

$$ {}^{**}\xi_{\cdot} = \sum_{\alpha}^{k} O_{\cdot\alpha}\,{}^{*}\xi^{(\cdot,\alpha)}, \quad {}^{**}\xi_{\cdot} = \sum_{\alpha}^{k} O_{\cdot\alpha}\,{}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,\alpha)}. \tag{1.5} $$

Отсюда вытекает

$$ \sum_{\alpha}^{k} O_{\cdot\alpha}({}^{*}\xi^{(\cdot,\alpha)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,\alpha)}) = 0. \tag{1.6} $$

Поскольку бипсевдовекторы базиса линейно независимы, то получим

$$ {}^{*}\xi^{(\cdot,\alpha)} = {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,\alpha)}. \tag{1.7} $$

Действительно, с помощью (1.1) и (1.6) находим

$$ \begin{gathered} ({}^{*}\xi^{(\cdot,2)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,2)}) + ({}^{*}\xi^{(\cdot,3)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,3)}) + \ldots = 0, \\ ({}^{*}\xi^{(\cdot,1)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,1)}) + ({}^{*}\xi^{(\cdot,3)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,3)}) + \ldots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ({}^{*}\xi^{(\cdot,1)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,1)}) + \ldots + ({}^{*}\xi^{(\cdot,k-1)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,k-1)}) = 0. \end{gathered} \tag{1.8} $$

Следовательно,

$$ {}^{*}\xi^{(\cdot,1)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,1)} = \ldots = {}^{*}\xi^{(\cdot,k)} - {}^{*}\tilde{\xi}^{(\cdot,k)} = 0. \tag{1.9} $$

§ 2. Обобщенное многообразие G(2.2.3). Рассмотрим паракомпактные связные хаусдорфовые многообразия без края со структурой

$$ G(m.k.n) = {}^{*}G(m.k) \otimes G(n). \tag{2.1} $$

Здесь $G(n)$ — вещественное линейное n-мерное пространство с заданным в нем базисом

$$ \langle \sigma_\alpha, \sigma_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta, \\ 0 & \alpha \neq \beta, \end{cases} \tag{2.2} $$

$$ \alpha, \beta = 1, \ldots, n. $$

Элементы

$$ \hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)} = O_{\lambda\mu} \otimes \sigma_\alpha \tag{2.3} $$

являются базисом в $m \cdot k \cdot n$-мерном обобщенном многообразии (2.1). Метрикой на $G(m.k.n)$ называется билинейное отображение

$$ \hat{g} : T_p \otimes T_p \to C^\infty(G(m.k.n)) \tag{2.4} $$

а) локальное, т. е. $\hat{g}(\varphi \hat{U}, \psi \hat{V}) = \varphi\psi\hat{g}(\hat{U}, \hat{V})$ для $\hat{U}, \hat{V} \in T_p$ и $\varphi, \psi \in C^\infty(G(m.k.n))$;

б) симметричное, т. е. $\hat{g}(\hat{U}, \hat{V}) = \hat{g}(\hat{V}, \hat{U})$ для $\hat{U}, \hat{V} \in T_p$;

в) положительно определенное, т. е. $\hat{g}(\hat{U}, \hat{U}) \geq 0$ и

$$ \hat{g}(\hat{U}, \hat{U}) = 0 \Leftrightarrow \hat{U} = 0. $$

Здесь T_p — множество всех векторных полей на $G(m.k.n)$. С помощью метрического тензора определяется норма $|g(\hat{U}, \hat{U})|^{1/2}$ любого вектора $\hat{U} \in T_p$. Компоненты $\hat{g}$ относительно базиса $\{\hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)}\}$ имеют вид

$$g_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)} = g(\hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)}, \hat{e}_{(\tau,\nu,\beta)}) = g(\hat{e}_{(\tau,\nu,\beta)}, \hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)}). \tag{2.5}$$

В голономном базисе имеем

$$\hat{g} = g_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)} d\xi^{(\lambda,\mu,\alpha)} \otimes d\xi^{(\tau,\nu,\beta)} \tag{2.6}$$

В дальнейшем будем рассматривать обобщенное многообразие $G(2.2.3)$.

§ 3. Пространство-временно-внутренний континуум. При рассмотрении динамики процессов можно воспользоваться также только обычными векторами. Для этого необходимо переопределить бипсевдовекторы посредством обычных:

$$\begin{aligned}
O_{1,1} &= \frac{1}{2}(\xi_{1,1} + \xi_{1,2} + \xi_{2,1} + \xi_{2,2}),\\
O_{1,2} &= \frac{1}{2}(\xi_{1,1} - \xi_{1,2} - \xi_{2,1} + \xi_{2,2}),\\
O_{2,1} &= \frac{1}{2}(\xi_{1,1} + \xi_{1,2} - \xi_{2,1} - \xi_{2,2}),\\
O_{2,2} &= \frac{1}{2}(\xi_{1,1} - \xi_{1,2} + \xi_{2,1} - \xi_{2,2}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

При этом

$$\begin{gathered}
\xi^2_{1,1} = -\xi^2_{1,2} = \xi^2_{2,1} = -\xi^2_{2,2} = 1,\\
\langle \xi_{1,1}, \xi_{1,2} \rangle = \langle \xi_{1,1}, \xi_{2,1} \rangle = \langle \xi_{1,1}, \xi_{2,2} \rangle =\\
= \langle \xi_{1,2}, \xi_{2,1} \rangle = \langle \xi_{1,2}, \xi_{2,2} \rangle = \langle \xi_{2,1}, \xi_{2,2} \rangle = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

В этом случае базис преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{(1,1,\alpha)} &= \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(1,1,\alpha)} + \hat{\xi}_{(1,2,\alpha)} + \hat{\xi}_{(2,1,\alpha)} + \hat{\xi}_{(2,2,\alpha)}),\\
\hat{e}_{(1,2,\alpha)} &= \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(1,1,\alpha)} - \hat{\xi}_{(1,2,\alpha)} - \hat{\xi}_{(2,1,\alpha)} + \hat{\xi}_{(2,2,\alpha)}),\\
\hat{e}_{(2,1,\alpha)} &= \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(1,1,\alpha)} + \hat{\xi}_{(1,2,\alpha)} - \hat{\xi}_{(2,1,\alpha)} - \hat{\xi}_{(2,2,\alpha)}),\\
\hat{e}_{(2,2,\alpha)} &= \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(1,1,\alpha)} - \hat{\xi}_{(1,2,\alpha)} + \hat{\xi}_{(2,1,\alpha)} - \hat{\xi}_{(2,2,\alpha)}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\hat{\xi}_{(\lambda,\mu,\alpha)} = \xi_{\lambda,\mu} \otimes \sigma_\alpha, \qquad \hat{\xi}^{(\lambda,\mu,\alpha)} = \xi^{\lambda,\mu} \otimes \sigma_\alpha, \tag{3.4}$$

$$\xi^{1,1} = \xi_{1,1}, \quad \xi^{1,2} = -\xi_{1,2}, \quad \xi^{2,1} = \xi_{2,1}, \quad \xi^{2,2} = -\xi_{2,2}.$$

Всякий вектор $\hat{\zeta} \in G(2.2.3)$ можно разложить по новому базису

$$\hat{\zeta} = \zeta_{(\lambda,\mu,\alpha)} Z^{(\lambda,\mu,\alpha)} = \zeta^{(\lambda,\mu,\alpha)} Z_{(\lambda,\mu,\alpha)}, \tag{3.5}$$

где числовые коэффициенты $Z_{(\lambda,\mu,\alpha)}$ и $Z^{(\lambda,\mu,\alpha)}$ являются ковариантными и контравариантными компонентами вектора в базисе (3.4).

Согласно вышеприведенным формулам имеем

$$G(2.2.3) = {}^{1}G(2.2) \otimes G(3) = \underset{11}{G}(3) \oplus \underset{12}{G}(3) \oplus \underset{21}{G}(3) \oplus \underset{22}{G}(3) = \tag{3.6}$$

$$= \underset{s}{P}(3) \oplus \underset{s}{T}(3) \oplus \underset{u}{P}(3) \oplus \underset{u}{T}(3).$$

То есть совершается переход от многообразия $G(2.2.3)$ к пространственно-временно-внутреннему континууму.

В трехмерных пространствах $\underset{s}{P}(3)$, $\underset{s}{T}(3)$, $\underset{u}{P}(3)$, $\underset{u}{T}(3)$ определены положительные метрические формы

$$|\vec{x}|^2 = (x_s, x_s) = (Z_{(1,1,\alpha)}, Z_{(1,1,\alpha)}) > 0,$$

$$|\vec{x}_0|^2 = (x_{0s}, x_{0s}) = (Z_{(1,2,\alpha)}, Z_{(1,2,\alpha)}) > 0,$$

$$|\vec{u}|^2 = (u_s, u_s) = (Z_{(2,1,\alpha)}, Z_{(2,1,\alpha)}) > 0, \tag{3.7}$$

$$|\vec{u}_0|^2 = (u_{0s}, u_{0s}) = (Z_{(2,2,\alpha)}, Z_{(2,2,\alpha)}) > 0.$$

Постулируем, что бесконечно малый интервал равен нулю

$$d\hat{\zeta} = d\hat{\eta} + d\hat{u} = 0, \tag{3.8}$$

где

$$d\hat{\eta} = \xi_{(1,\mu,\alpha)} Z^{(1,\mu,\alpha)},$$

$$d\hat{u} = \xi_{(2,\mu,\alpha)} Z^{(2,\mu,\alpha)}. \tag{3.9}$$

При этом

$$d\hat{\eta} \in \underset{\eta}{G}(2.3) = \underset{s}{P}(3) \oplus \underset{s}{T}(3),$$

$$d\hat{u} \in \underset{u}{G}(2.3) = \underset{u}{P}(3) \oplus \underset{u}{T}(3). \tag{3.10}$$

Как было отмечено в предыдущей главе, при переходе к четырехмерному континууму $\underset{s}{P}(3) \oplus \underset{s}{T}(1)$ в выборе направления времени существует произвол. Поэтому мы ограничились рассмотрением лишь таких преобразований координат, каждое из которых можно свести к трем гиперболическим вращениям в плоскостях $(\eta_{(+1)}, \eta_{(-1)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+3)}, \eta_{(-3)})$ и к трем обычным вращениям одновременно в плоскостях $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+2)})$ и $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+3)})$ и $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-3)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(+3)})$ и $(\eta_{(-2)}, \eta_{(-3)})$. Причем

$$\eta_{(\pm\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_{(1,1,\alpha)} \pm Z_{(1,2,\alpha)}). \tag{3.11}$$

Поэтому линейные преобразования $\underset{\eta}{K}$ удовлетворяют условиям

$$\underset{\eta}{K}{}^{(-2)}_{(+1)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-3)}_{(+1)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-1)}_{(+2)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-3)}_{(+2)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-1)}_{(+3)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-2)}_{(+3)} = 0 \tag{3.12}$$

для гиперболических, и

$$\underset{\eta}{K}{}^{(+2)}_{(+1)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-2)}_{(-1)}, \quad \underset{\eta}{K}{}^{(+3)}_{(+1)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-3)}_{(-1)}, \quad \underset{\eta}{K}{}^{(+3)}_{(+2)} = \underset{\eta}{K}{}^{(-3)}_{(-2)} \tag{3.13}$$

для обычных вращений, соответственно.

Аналогично для линейных преобразований

$$u_{(\lambda\alpha)} = \underset{u}{K}{}^{(\tau\beta)}_{(\lambda\alpha)} u_{(\tau\beta)} \qquad \begin{matrix} \lambda, \tau = \pm, \\ \alpha, \beta = 1, 2, 3, \end{matrix} \tag{3.14}$$

где

$$u_{(\pm\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Z_{(2,2,\alpha)} \pm Z_{(2,1,\alpha)}), \tag{3.15}$$

требуется, чтобы

$$\underset{u}{K}{}^{(-2)}_{(+1)} = \underset{u}{K}{}^{(-3)}_{(+1)} = \underset{u}{K}{}^{(-1)}_{(+2)} = \underset{u}{K}{}^{(-3)}_{(+2)} = \underset{u}{K}{}^{(-1)}_{(+3)} = \underset{u}{K}{}^{(-2)}_{(+3)} = 0, \tag{3.16}$$

$$\underset{u}{K}{}^{(+2)}_{(+1)} = \underset{u}{K}{}^{(-2)}_{(-1)}, \quad \underset{u}{K}{}^{(+3)}_{(+1)} = \underset{u}{K}{}^{(-3)}_{(-1)}, \quad \underset{u}{K}{}^{(+3)}_{(+2)} = \underset{u}{K}{}^{(-3)}_{(-2)}. \tag{3.17}$$

§ 4. Однородная группа $\hat{K}$. Определим однородные $\hat{K}$ преобразования в обобщенном многообразии $G(2.2.3)$ как линейные преобразования ковариантного $(\zeta_{(\lambda,\mu,\alpha)})$ и контравариантного $(\zeta^{(\lambda,\mu,\alpha)})$ векторов посредством матрицы $(K^{(\tau,\nu,\beta)}_{(\lambda,\mu,\alpha)})$:

$$\begin{aligned} \zeta'_{(\lambda,\mu,\alpha)} &= K^{(\tau,\nu,\beta)}_{(\lambda,\mu,\alpha)} \zeta_{(\tau,\nu,\beta)}, \\ \zeta'^{(\lambda,\mu,\alpha)} &= K^{(\lambda,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)} \zeta^{(\tau,\nu,\beta)}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

оставляющие неизменным норму вектора

$$\begin{aligned} \zeta'^{(\lambda,\mu,\alpha)} \zeta'_{(\lambda,\mu,\alpha)} &= K^{(\lambda,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)} \zeta^{(\tau,\nu,\beta)} K^{(\rho,\omega,\gamma)}_{(\lambda,\mu,\alpha)} \zeta_{(\rho,\omega,\gamma)} = \\ &= K^{(\lambda,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)} K^{(\rho,\omega,\gamma)}_{(\lambda,\mu,\alpha)} \zeta^{(\tau,\nu,\beta)} \zeta_{(\rho,\omega,\gamma)} = \delta^{(\rho,\omega,\gamma)}_{(\tau,\nu,\beta)} \zeta^{(\tau,\nu,\beta)} \zeta_{(\rho,\omega,\gamma)} = \zeta^{(\rho,\omega,\gamma)} \zeta_{(\rho,\omega,\gamma)} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Условие неизменности интервала допускает также преобразования трансляций

$$\begin{aligned} \zeta'_{(\lambda,\mu,\alpha)} &= \zeta_{(\lambda,\mu,\alpha)} + a_{(\lambda,\mu,\alpha)}, \\ \zeta'^{(\lambda,\mu,\alpha)} &= \zeta^{(\lambda,\mu,\alpha)} + a^{(\lambda,\mu,\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Если запретить переходы между координатами η и u

$$\eta_{(\lambda\alpha)} (\in \underset{\eta}{G}(2.3)) \Leftrightarrow u_{(\lambda\alpha)} (\in \underset{u}{G}(2.3)), \tag{4.4}$$

то многообразие $G(2.2.3)$ распадается на три инвариантные относительно $\hat{K}$ преобразований подмногообразия: подмногообразие нуленых векторов ($v^{(\lambda\alpha)} v_{(\lambda\alpha)} = u^{(\lambda\alpha)} u_{(\lambda\alpha)} = 0$) — поверхность нулевого конуса; многообразие положительных векторов ($v^{(\lambda\alpha)} v_{(\lambda\alpha)} > 0$, $u^{(\lambda\alpha)} u_{(\lambda\alpha)} > 0$) — область внутри нулевого конуса и многообразие отрицательных векторов ($v^{(\lambda\alpha)} v_{(\lambda\alpha)} < 0$, $u^{(\lambda\alpha)} u_{(\lambda\alpha)} < 0$) — область вне нулевого конуса.

Из определения однородного $\hat{K}$ преобразования следует, что на 144 коэффициентов $K^{(i,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}$ ($i, \mu, \tau, \nu = 1,2$; $\alpha, \beta = 1,2,3$) — элементов 12×12 матрицы $\hat{K}$ преобразования — накладываются 78 условий

$$K^{(i,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)} K^{(\tau,\nu,\beta)}_{(j,\lambda,\gamma)} = \delta^{(i,\mu,\alpha)}_{(j,\lambda,\gamma)}. \qquad (4.5)$$

К ним присоединяются 36 условий, соответствующих запрету (2.4) и дополнительных 18 условий (3.12, 13) и (3.16, 17). Последние равнозначны следующим условиям

$$K^{(1,1,2)}_{(1,1,1)} = K^{(1,2,2)}_{(1,2,1)}, \quad K^{(1,1,3)}_{(1,1,1)} = K^{(1,2,3)}_{(1,2,1)}, \quad K^{(1,1,3)}_{(1,1,2)} = K^{(1,2,3)}_{(1,2,2)},$$

$$K^{(2,1,2)}_{(1,1,1)} = K^{(2,2,2)}_{(1,2,1)}, \quad K^{(2,1,3)}_{(1,1,1)} = K^{(2,2,3)}_{(1,2,1)}, \quad K^{(2,1,3)}_{(1,1,2)} = K^{(2,2,3)}_{(1,2,2)}, \qquad (4.6)$$

$$K^{(1,2,2)}_{(1,1,1)} = K^{(1,2,3)}_{(1,1,1)} = K^{(1,2,1)}_{(1,1,2)} = K^{(1,2,3)}_{(1,1,2)} = K^{(1,2,1)}_{(1,1,3)} = K^{(1,2,2)}_{(1,1,3)} =$$

$$= K^{(2,2,2)}_{(1,1,1)} = K^{(2,2,3)}_{(1,1,1)} = K^{(2,2,1)}_{(1,1,2)} = K^{(2,2,3)}_{(1,1,2)} = K^{(2,2,1)}_{(1,1,3)} = K^{(2,2,2)}_{(1,1,3)} = 0.$$

Поэтому любое однородное $\hat{K}$ преобразование определяется двенадцатью независимыми параметрами, а матрица $\hat{K}$ является ортогональной 12×12 матрицей

$$\hat{K}\,\bar{\hat{K}} = \bar{\hat{K}}\,\hat{K} = E_{12}, \quad E_{12} = (\delta^{(i,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}),$$

$$|\hat{K}| \cdot |\bar{\hat{K}}| = |\hat{K}|^2 = 1, \quad |\hat{K}| = \pm 1. \qquad (4.7)$$

Совокупность 12×12 ($K^{(i,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}$) матриц, удовлетворяющих условиям ортогональности (4.5), унимодулярности

$$|\hat{K}| = 1 \qquad (4.8)$$

и дополнительным условиям (4.6), (4.4), образует собственную группу $SO(6,6)$ — однородную собственную группу $\hat{K}_+$. Собственная группа $\hat{K}_+$ является подгруппой полной группы $\hat{K}$, которая объединяет все преобразования (4.1,3), для которых справедливы — (4.4, 6,8). При выполнении условий

$$K^{(1,1,\alpha)}_{(1,1,\alpha)} + K^{(2,1,\alpha)}_{(1,1,\alpha)} + K^{(2,2,\alpha)}_{(2,2,\alpha)} + K^{(1,2,\alpha)}_{(2,2,\alpha)} \geq 2,$$

$$K^{(1,1,\alpha)}_{(1,1,\alpha)} - K^{(2,1,\alpha)}_{(1,1,\alpha)} - K^{(2,2,\alpha)}_{(2,2,\alpha)} + K^{(1,2,\alpha)}_{(2,2,\alpha)} \geq 2, \qquad (4.9)$$

преобразования K^{++} называются ортохронно-ортохронными. Это название обусловлено тем, что при преобразовании вектора посредством матрицы K^{++} знаки компонентов $Z_{(1,1,\alpha)}$ и $Z_{(2,2,\alpha)}$ не меняются. Для таких матриц определитель равняется ± 1.

В первом случае совокупность преобразований образует собственную ортохронно-ортохронную группу $K_{+}^{(++)}$. Во втором случае имеем несобственные ортохронно-ортохронные $K_{-}^{(++)}$ преобразования, которые не образуют группу. При выполнении условий

$$
\begin{gathered}
K_{(1.1.\alpha)}^{(1.1.\alpha)} + K_{(1.1.\alpha)}^{(2.1.\alpha)} + K_{(2.2.\alpha)}^{(2.2.\alpha)} + K_{(2.2.\alpha)}^{(1.2.\alpha)} \leqslant -2, \\
K_{(1.1.\alpha)}^{(1.1.\alpha)} - K_{(1.1.\alpha)}^{(2.1.\alpha)} - K_{(2.2.\alpha)}^{(2.2.\alpha)} + K_{(2.2.\alpha)}^{(1.2.\alpha)} \leqslant -2,
\end{gathered} \tag{4.10}
$$

преобразования называются неортохронно-неортохронными $K^{(--)}$ и не образуют группу. При таких преобразованиях компоненты $Z_{(1.1.\alpha)}$ и $Z_{(2.2.\alpha)}$ меняют свои знаки.

В общем случае группа $\hat{K}$ разбивается на восемь компонентов связности $K_{+}^{(++)}, K_{-}^{(++)}, K_{+}^{(+-)}, K_{+}^{(-+)}, K_{-}^{(+-)}, K_{-}^{(-+)}, K_{+}^{(--)}, K_{-}^{(--)}$.

Инфинитезимальные генераторы собственной группы $\widehat{SO}(6.6)$ имеют вид

$$
\begin{gathered}
\underset{\eta}{h_\alpha} = \underset{\eta}{e} \otimes h_\alpha, \quad \underset{u}{h_\alpha} = \underset{u}{e} \otimes h_\alpha, \\
\underset{\eta}{H_\alpha} = \underset{\eta}{e} \otimes H_\alpha, \quad \underset{u}{H_\alpha} = \underset{u}{e} \otimes H_\alpha,
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

где h_α и H_α — генераторы группы $\widehat{SO}(3.3)$ (гл. 1), а матрицы $\underset{\eta}{e}$ и $\underset{u}{e}$ представлены посредством формул

$$
\underset{\eta}{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{u}{e} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}
$$

Нетрудно убедиться, что

$$
\begin{gathered}
[\underset{\eta}{h_\alpha}, \underset{\eta}{h_\beta}] = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{\eta}{H_\gamma}, \ [\underset{\eta}{H_\alpha}, \underset{\eta}{h_\beta}] = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{\eta}{h_\gamma}, \\
[\underset{\eta}{H_\alpha}, \underset{\eta}{H_\beta}] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{u}{H_\gamma}, \ [\underset{u}{h_\alpha}, \underset{u}{h_\beta}] = -\frac{i}{4}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{u}{H_\gamma}, \\
[\underset{u}{H_\alpha}, \underset{u}{h_\beta}] = -i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{u}{h_\gamma}, [\underset{u}{H_\alpha}, \underset{u}{H_\beta}] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\underset{u}{H_\gamma}, \\
[\underset{\eta}{h_\alpha}, \underset{u}{h_\beta}] = [\underset{\eta}{h_\alpha}, \underset{u}{H_\beta}] = [\underset{\eta}{H_\alpha}, \underset{u}{h_\beta}] = [\underset{\eta}{H_\alpha}, \underset{u}{H_\beta}] = 0.
\end{gathered} \tag{4.13}
$$

Следовательно, генераторы группы $\widehat{SO}(6.6)$ можно свести к независимым вектор-операторам

$$
\begin{gathered}
\underset{\eta}{A_\alpha^{(\pm)}} = \frac{1}{2}(\underset{\eta}{H_\alpha} \pm 2i\underset{\eta}{h_\alpha}) = \frac{1}{2}\underset{\eta}{e} \otimes (H_\alpha \pm 2ih_\alpha), \\
\underset{u}{A_\alpha^{(\pm)}} = \frac{1}{2}(\underset{u}{H_\alpha} \pm 2i\underset{u}{h_\alpha}) = \frac{1}{2}\underset{u}{e} \otimes (H_\alpha \pm 2ih_\alpha).
\end{gathered} \tag{4.14}
$$

Последние удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$
\begin{gathered}
[A_i^{(\pm)}, A_k^{(\pm)}] = i\varepsilon_{ikl} A_l^{(\pm)}, \\
[A_\alpha^{(\pm)}, A_\beta^{(\pm)}] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma^{(\pm)}, \\
[A_i^{(\pm)}, A_\alpha^{(\pm)}] = [A_i^{(\mp)}, A_\alpha^{(\pm)}] = [A_i^{(\pm)}, A_\alpha^{(\mp)}] = [A_i^{(\mp)}, A_\alpha^{(\mp)}] = 0,
\end{gathered}
\tag{4.15}
$$

обычных моментов количества движений.

Наряду с непрерывными преобразованиями, имеются также дискретные преобразования:

а) Положительное ко-контра преобразование $\hat{I}_+$:

$$
\begin{gathered}
(C_{(p,q,r)}) = \hat{I}_+ (C^{(p,q,r)}) = (C_{(p,q,r)}), \\
(C^{(p,q,r)}) = \hat{I}_+ (C_{(p,q,r)}) = (C^{(p,q,r)}).
\end{gathered}
\tag{4.16}
$$

Поскольку

$$
\begin{gathered}
\hat{I}_+ = \hat{I}_+^* = (\hat{I}_+)^{-1} = \hat{I}_+^T, \quad (\hat{I}_+)^2 = 1, \quad \hat{I}_+ \hat{I}_+ = 1, \\
|\hat{I}_+| = 1, \quad (\hat{I}_+)_{(1,2,3)(1,2,3)} = (\hat{I}_+)_{(2,1,3)(2,1,3)} = 0, \\
(\hat{I}_+)_{(1,2,3)(2,1,3)} + (\hat{I}_+)_{(2,1,3)(1,2,3)} = 2,
\end{gathered}
\tag{4.17}
$$

то преобразование $\hat{I}_+$ является частным собственным ортохронно-ортохронным преобразованием $K_+^{(++)}$.

б) Отрицательное ко-контра преобразование $\hat{I}_-$:

$$
(C_{(p,q,r)}) = \hat{I}_- (C^{(p,q,r)}) = -(C_{(p,q,r)}),
$$

т. е.

$$
(C^{(p,q,r)}) = \hat{I}_- (C_{(p,q,r)}) = -(C^{(p,q,r)}), \tag{4.18}
$$

$$
\hat{I}_- = -\hat{I}_+ . \tag{4.19}
$$

Преобразование $\hat{I}_-$ — является несобственным неортохронно-неортохронным преобразованием $K_-^{(--)}$.

в) Полное ко-ко или контра-контра преобразование $\hat{I}_{+-}$:

$$
\hat{I}_{+-} = \hat{I}_+ \hat{I}_- , \quad \hat{I}_{+-} = -1, \quad \hat{I}_{+-} \in K_-^{(--)}. \tag{4.20}
$$

Группа дискретных преобразований $\hat{I}$ состоит из тождественного E и $\hat{I}_+$, $\hat{I}_-$, $\hat{I}_{+-}$ преобразований. Группа $\hat{I}$ имеет всего четыре однозначных неприводимых представления, причем все — одномерные.

§ 5. Конечномерные неприводимые представления собственной группы $\overline{SO}(6,6)$. Нетрудно показать, что неприводимое представление $D(P_1, q_1, P_2, q_2)$ группы $\overline{SO}(6,6)$, которое можно рассматривать как приводимое представление $D(P_1) \otimes D(q_1) \otimes D(P_2) \otimes D(q_2)$ группы обычных вращений $SO(3, R)$, распадается на неприводимые представления группы $SO(3, R)$:

$$D(P_1, q_1, P_2, q_2) =$$

$$= \Big(\sum_{j_1=|P_1-q_1|}^{P_1+q_1} \oplus D(j_1) \Big) \otimes \Big(\sum_{j_2=|P_2-q_2|}^{P_2+q_2} \oplus D(j_2) \Big). \tag{5.1}$$

В одном случае представления $D(P_1, q_1, P_2, q_2)$, для которых пары чисел P_1 и q_1; P_2 и q_2 одновременно являются целыми или полуцелыми, называются тензорными (однозначными $\hat{K} \Leftrightarrow \hat{S}$). При условии, когда одно из двух P_1 и q_1 (P_2 и q_2) целое, а другое полуцелое — называются спинорными (двузначными $\hat{K} \Leftrightarrow \pm \hat{S}$).

Элемент пространства, преобразующийся по представлению $\left(D\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^{m_1} \otimes \left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)^{m_2} \otimes \left(D\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^{m_3} \otimes \left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)^{m_4}$, называется спинором ранга $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

Ковариантным или контравариантным тензором ранга $n_1 + n_2$ называется элемент пространства, который преобразуется по приводимому представлению $\left(D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)^{n_1} \otimes \left(D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)^{n_2}$ группы $\widehat{SO}(6.6)$.

Наконец, в остальных случаях имеем смешанные элементы.

§ 6. Связь между тензорами в обобщенном многообразии G(2.2.3) и спин-тензорами. Связь между векторами $\tilde{\zeta}_{(\rho,\omega,\gamma)}(\rho, \omega = 1,2; \quad \gamma = 1, 2, 3)$ многообразия $G(2.2.3)$ и спин-тензорами $\tilde{\zeta}^{\mu\lambda\dot{\nu}\dot{\tau}}(\mu,\lambda,\dot{\nu},\dot{\tau}=1,2)$ валентности (2.2) (см. [4]) дается следующими соотношениями

$$\tilde{\zeta}_{(\rho,\omega,\gamma)} \leftrightarrow \tilde{\zeta}^{\mu\lambda\dot{\nu}\dot{\tau}}, \tag{6.1}$$

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_1 \otimes \tilde{\zeta}_2,$$

$$\tilde{\zeta}_1 = \begin{pmatrix} \zeta_1^{1\dot{1}} & \zeta_1^{1\dot{2}} \\ \zeta_1^{2\dot{1}} & \zeta_1^{2\dot{2}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} \zeta_2^{1\dot{1}} & \zeta_2^{1\dot{2}} \\ \zeta_2^{2\dot{1}} & \zeta_2^{2\dot{2}} \end{pmatrix}.$$

Причем

$$\zeta_1^{1\dot{1}} = \frac{1}{2}\left[x_\alpha^1(\tilde{\zeta}_{(1,1,\alpha)} + \tilde{\zeta}_{(1,2,\alpha)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,\alpha)} + \tilde{\zeta}_{(2,2,\alpha)}) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\zeta}_{(1,1,3)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,3)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,3)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,3)}\right],$$

$$\zeta_1^{1\dot{2}} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\zeta}_{(1,1,1)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,1)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,1)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,1)} - \right.$$

$$\left. - i(\tilde{\zeta}_{(1,1,2)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,2)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,2)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,2)})\right],$$

$$\zeta_1^{2\dot{1}} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\zeta}_{(1,1,1)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,1)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,1)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,1)} + \right.$$

$$\left. + i(\tilde{\zeta}_{(1,1,2)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,2)} + \tilde{\zeta}_{(2,1,2)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,2)})\right],$$

$$\zeta_1^{2\dot{2}} = \frac{1}{2}\left[x_\alpha^1(\tilde{\zeta}_{(1,1,\alpha)} - \tilde{\zeta}_{(1,2,\alpha)} - \tilde{\zeta}_{(2,1,\alpha)} - \tilde{\zeta}_{(2,2,\alpha)}) - \right.$$

$$\left. - \tilde{\zeta}_{(1,1,3)} + \tilde{\zeta}_{(1,2,3)} - \tilde{\zeta}_{(2,1,3)} + \tilde{\zeta}_{(2,2,3)})\right],$$

$$\varphi_3^{11} = \frac{1}{2} x_s^3(\psi^*_{(1,1,s)} + \psi^*_{(1,2,s)} - \psi^*_{(2,1,s)} - \psi^*_{(2,2,s)}) + \tag{6.2}$$

$$+ \psi^*_{(1,1,3)} - \psi^*_{(1,2,3)} - \psi^*_{(2,1,3)} + \psi^*_{(2,2,3)}],$$

$$\varphi_1^{12} = \frac{1}{2} [\psi^*_{(1,1,1)} - \psi^*_{(1,2,1)} - \psi^*_{(2,1,1)} + \psi^*_{(2,2,1)} -$$

$$- i(\psi^*_{(1,1,2)} - \psi^*_{(1,2,2)} - \psi^*_{(2,1,2)} + \psi^*_{(2,2,2)})],$$

$$\varphi_1^{21} = \frac{1}{2} [\psi^*_{(1,1,1)} - \psi^*_{(1,2,1)} - \psi^*_{(2,1,1)} + \psi^*_{(2,2,1)} +$$

$$+ i(\psi^*_{(1,1,2)} - \psi^*_{(1,2,2)} - \psi^*_{(2,1,2)} + \psi^*_{(2,2,2)})],$$

$$\varphi_2^{22} = \frac{1}{2} [x_s^3(\psi^*_{(1,1,s)} + \psi^*_{(1,2,s)} - \psi^*_{(2,1,s)} - \psi^*_{(2,2,s)}) -$$

$$- \psi^*_{(1,1,3)} + \psi^*_{(1,2,3)} + \psi^*_{(2,1,3)} - \psi^*_{(2,2,3)}].$$

Здесь обозначены

$$x_s^1 = \frac{\psi^*_{(1,1,s)} + \psi^*_{(1,2,s)} + \psi^*_{(2,1,s)} + \psi^*_{(2,2,s)}}{<(\psi^*_{(1,1,j)} + \psi^*_{(1,2,j)} + \psi^*_{(2,1,j)} + \psi^*_{(2,2,j)}) \cdot (\psi^*_{(1,1,j)} + \psi^*_{(1,2,j)} + \psi^*_{(2,1,j)} + \psi^*_{(2,2,j)})>^{1/2}},$$

$$x_s^2 = \frac{\psi^*_{(1,1,s)} + \psi^*_{(1,2,s)} - \psi^*_{(2,1,s)} - \psi^*_{(2,2,s)}}{<(\psi^*_{(1,1,j)} + \psi^*_{(1,2,j)} - \psi^*_{(2,1,j)} - \psi^*_{(2,2,j)}) \cdot (\psi^*_{(1,1,j)} + \psi^*_{(1,2,j)} - \psi^*_{(2,1,j)} - \psi^*_{(2,2,j)})>^{1/2}}.$$

Введем следующие матрицы

$$\sigma_1^{(1,1,1)} = \sigma_1^{(2,1,1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^1 & -1 \\ -1 & x_1^1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(1,1,2)} = \sigma_1^{(2,1,2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2^1 & i \\ -i & x_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(1,1,3)} = \sigma_1^{(2,1,3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3^1 - 1 & 0 \\ 0 & x_3^1 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(1,2,1)} = \sigma_1^{(2,2,1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^1 & 1 \\ 1 & x_1^1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(1,2,2)} = \sigma_1^{(2,2,2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2^1 & -i \\ i & x_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1^{(1,2,3)} = \sigma_1^{(2,2,3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3^1 + 1 & 0 \\ 0 & x_3^1 - 1 \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

$$\sigma_2^{(1,1,1)} = -\sigma_2^{(2,1,1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1^2 & -1 \\ -1 & x_1^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2^{(1,1,2)} = -\sigma_2^{(2,1,2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_2^2 & i \\ -i & x_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2^{(1,1,3)} = -\sigma_2^{(2,1,3)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3^2 - 1 & 0 \\ 0 & x_3^2 + 1 \end{pmatrix},$$

$$-\overset{\cdot}{\sigma}_2^{(1,2,1)} = \overset{\cdot}{\sigma}_2^{(2,2,1)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varkappa_1^2 & 1 \\ 1 & \varkappa_1^2 \end{pmatrix},$$

$$-\overset{\cdot}{\sigma}_2^{(1,2,2)} = \overset{\cdot}{\sigma}_2^{(2,2,2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varkappa_2^2 & -i \\ i & \varkappa_2^2 \end{pmatrix},$$

$$-\overset{\cdot}{\sigma}_2^{(1,2,3)} = \overset{\cdot}{\sigma}_2^{(2,2,3)} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varkappa_3^2+1 & 0 \\ 0 & \varkappa_3^2-1 \end{pmatrix}.$$

Тогда будем иметь

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_1 \otimes \tilde{\zeta}_2 = \tilde{\sigma}^{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)}\, \zeta_{(\lambda,\mu,\alpha)}\zeta_{(\tau,\nu,\beta)}\,, \tag{6.5}$$

где

$$\tilde{\sigma}^{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)} = \overset{\cdot}{\sigma}_1^{(\lambda,\mu,\alpha)} \otimes \overset{\cdot}{\sigma}_2^{(\tau,\nu,\beta)}\,. \tag{6.6}$$

Свертывание векторов η, η' и u, u' сводится к свертыванию соответствующих спин-тензоров

$$\begin{aligned} \eta^{(\lambda\alpha)}\eta'_{(\lambda\alpha)} &= \frac{1}{2}\zeta_1^{\nu\dot{\mu}}\zeta'^{1}_{\nu\dot{\mu}}\,, \\ u^{(\lambda\alpha)}u'_{(\lambda\alpha)} &= \frac{1}{2}\zeta_2^{\nu\dot{\mu}}\zeta'^{2}_{\nu\dot{\mu}}\,, \end{aligned} \tag{6.7}$$

где μ, $\dot{\mu}$, ν, $\dot{\nu} = 1, 2$: $\lambda = \pm$, $\alpha = 1, 2, 3$.

При этом

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \det \tilde{\zeta}_1 = \eta^{(\lambda\alpha)}\eta_{(\lambda\alpha)}\,, \\ u^2 &= \det \tilde{\zeta}_2 = u^{(\lambda\alpha)}u_{(\lambda\alpha)}\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Следовательно, имеется соответствие между векторами $\zeta \in G(2.2.3)$ и смешанными спин-тензорами $\tilde{\zeta}$ валентности (2.2), изображаемыми (в дуальных базисах) эрмитовыми матрицами. Соответствие $\zeta \leftrightarrow \tilde{\zeta}$ построено с помощью произвольно фиксированных базисов $(\hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)})$ в многообразии $G(2.2.3)$, и базисов (ε_μ^1), (ε_μ^2) в пространстве спиноров $C^4 = C^2 \otimes C^2$, относительно которых берутся компоненты спин-тензоров $\zeta^{\mu\dot{\lambda}\nu\dot{\tau}}$.

Таким образом, тензорная алгебра над многообразием $G(2.2.3)$ полностью сводится к спин-тензорной.

§ 7. Накрытие специальной группы $\hat{K}$. Пусть задано представление группы $SL(2)$ в пространствах C^2, C^2 спин-тензоров $\zeta_1^{\dot{\mu}\nu}$ и $\zeta_2^{\dot{\mu}\nu}$ валентности (1.1). Тогда имеем

$$\begin{gathered} \tilde{\zeta}'_1 = U_1\tilde{\zeta}_1U_1^+, \quad \tilde{\zeta}'_2 = U_2\tilde{\zeta}_2U_2^+, \\ \tilde{\zeta}' = U\tilde{\zeta}\,U^+, \\ \tilde{\zeta}' = \tilde{\zeta}'_1 \otimes \tilde{\zeta}'_2\,, \end{gathered} \tag{7.1}$$

$$U = U_1 \otimes U_2.$$

В случае эрмитовой матрицы $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}'$ также будет эрмитовой. В (7.1) переходя к определителям и принимая, что $\det|U_1| = \det|U_1^+| = \det|U_2| = \det|U_2^+| = 1$, имеем

$$\det|\tilde{\tau}_1| = \tau_1^2 = \tau^{(1\alpha)}\tau_{(1\alpha)} = \det|\tilde{\tau}'_1| = \tau_1'^2 = \tau'^{(1\alpha)}\tau'_{(1\alpha)},$$

$$\det|\tilde{u}_2| = u_2^2 = u^{(2\alpha)}u_{(2\alpha)} = \det|\tilde{u}'_2| = u_2'^2 = u'^{(2\alpha)}u'_{(2\alpha)}. \qquad (7.2)$$

Пока преобразования (7.1) остаются неоднозначными, определенные матрицами U_1, U_2, U матрицы $\underset{\tau}{K}$, $\underset{u}{K}$, $\hat{K}$

$$\tau'_{(1\alpha)} = \underset{\tau}{K}{}^{(1\beta)}_{(1\alpha)}\tau_{(1\beta)},$$

$$u'_{(2\alpha)} = \underset{u}{K}{}^{(2\beta)}_{(2\alpha)}u_{(2\beta)}, \qquad (7.3)$$

$$\tau'_{(1\alpha 2\alpha)} = \hat{K}^{(1\beta 2\beta)}_{(1\alpha 2\alpha)}\tau_{(1\beta 2\beta)},$$

нельзя отождествлять со специальными преобразованиями $\underset{\tau}{K}$, $\underset{u}{K}$, $\hat{K}$. Однако эта неоднозначность устраняется с помощью дополнительных условий (4.4, 6). В этом случае, каждой матрице U сопоставляется преобразование $\hat{K}$.

Таким образом, задано представление группы $SL(2) \otimes SL(2)$ в многообразии $G(2.2.3)$. $\hat{K}$- преобразования получаются путем выделения действительного инвариантного подпространства, состоящего из спин-тензоров с эрмитовыми матрицами $\tilde{\tau}$. Последняя в свою очередь получается путем выделения действительных инвариантных подпространств, состоящих из спин-тензоров $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{u}_2$ с эрмитовыми матрицами.

Отображение $\hat{h}(U) = \hat{K}$ обладает гомоморфизмом:

$$\hat{h}(U^{(1)}U^{(2)}) = \hat{h}(U^{(1)})\,\hat{h}(U^{(2)}). \qquad (7.4)$$

Все собственные вращения получаются посредством унитарной матрицы

$$U = r = r_1 \otimes r_2,$$

$$rr^+ = 1, \qquad \det|r| = 1, \qquad (7.5)$$

где

$$r_1 = \cos\theta_\tau / 2 + i(\vec{n}_\tau\vec{\sigma})\sin\theta_\tau / 2,$$

$$r_1 r_1^+ = 1, \quad \det|r_1| = 1, \qquad (7.6)$$

$$r_2 = \cos\theta_u / 2 + i(\vec{n}_u\vec{\sigma})\sin\theta_u / 2,$$

$$r_2 r_2^+ = 1 \quad \det|r_2| = 1.$$

Здесь $\vec{\sigma}$ — матрицы Паули, r_1 и r_2 относятся к многообразиям $\underset{\tau_i}{G}(2.3)$, $\underset{u}{G}(2.3)$ и задают вращения $R_1 = h(r_1)$, $R_2 = h(r_2)$ вокруг осей $\vec{n}_{\tau_i}$, $\vec{n}_u$ на углы θ_{τ_i}, θ_u.

Эрмитовая матрица

$$b = b_1 \otimes b_2, \tag{7.7}$$

где

$$b_1 = \mathrm{ch}\theta_{\tau_i}/2 + (\vec{n}_{\tau_i}\vec{\sigma})\mathrm{sh}\theta_{\tau_i}/2,$$

$$\tag{7.8}$$

$$b_2 = \mathrm{ch}\theta_u/2 + (\vec{n}_u\vec{\sigma})\mathrm{sh}\theta_u/2,$$

задает буст $B(\zeta)$ в многообразии $G(2.2.3)$. При этом, матрицы (7.8) соответствуют многообразиям $\underset{\tau_i}{G}(2.3)$, $\underset{u}{G}(2.3)$.

Когда U пробегает всю группу $SL(2) \otimes SL(2)$, соответствующее преобразование $\hat{K} = \hat{h}(U)$ пробегает всю группу $K_+^{(++)}$. Действительно,

$$\hat{K} = \hat{h}(U) = \hat{h}(b_1 r_1 \otimes b_2 r_2). \tag{7.9}$$

Каждому преобразованию $\hat{K}$ из группы K_+^{++} соответствуют в точности две матрицы $\pm U(U \in SL(2) \otimes SL(2))$. Таким образом, $\hat{h}$ является двулистным накрытием группы $K_+^{(++)}$ группой $SL(2) \otimes SL(2)$.

При этом матрицам σ_k и $\tau_k = i\sigma_k (k = 1, 2, 3)$ соответствуют двухпараметрические семейства матриц

$$e^{i\theta_{\tau_i}\sigma_k^{(1)}} \otimes e^{i\theta_u\sigma_k^{(2)}}, \quad e^{i\theta_{\tau_i}\tau_k^{(1)}} \otimes e^{i\theta_u\tau_k^{(2)}}. \tag{7.10}$$

Здесь

$$e^{i\theta_{\tau_i}\sigma_k^{(1)}} = \cos\theta_{\tau_i} + i\sigma_k^{(1)}\sin\theta_{\tau_i}, \quad e^{i\theta_{\tau_i}\tau_k^{(1)}} = \mathrm{ch}\theta_{\tau_i} - \sigma_k^{(1)}\mathrm{sh}\theta_{\tau_i} \tag{7.11}$$

$$e^{i\theta_u\sigma_k^{(2)}} = \cos\theta_u + i\sigma_k^{(2)}\sin\theta_u, \quad e^{i\theta_u\tau_k^{(2)}} = \mathrm{ch}\theta_u - \sigma_k^{(2)}\mathrm{sh}\theta_u.$$

С помощью формулы (7.1) нетрудно установить, что соответствующие семейства $\hat{K}$ преобразований суть

$$e^{2i\theta_{\tau_i}\underset{\tau_i}{h_k}}, \quad e^{2i\theta_{\tau_i}\underset{\tau_i}{H_k}}, \quad e^{2i\theta_u\underset{u}{h_k}}, \quad e^{2i\theta_u\underset{u}{H_k}}, \tag{7.12}$$

где $\underset{\tau_i}{h_k}$, $\underset{\tau_i}{H_k}$, $\underset{u}{h_k}$, $\underset{u}{H_k}$ $(k = 1, 2, 3)$ принадлежат алгебре Ли группы $K_+^{(++)}$ (4.11).

При преобразованиях $\hat{K}$ должно выполняться условие

$$< \hat{K}\xi_1, \hat{K}\xi_2 > = g_{(\ldots)(\ldots)} (\hat{K}\xi_1)^{(\ldots)} (\hat{K}\xi_2)^{(\ldots)} =$$
$$= g_{(\ldots)(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)} K^{(\ldots)}_{(\ldots)} \xi_1^{(\ldots)} \xi_2^{(\ldots)} = \tag{7.13}$$
$$= < \xi_1, \xi_2 > = g_{(\ldots)(\ldots)} \xi_1^{(\ldots)} \xi_2^{(\ldots)} .$$

То есть

$$(g) = (\hat{K})^T (g)(\hat{K}). \tag{7.14}$$

Отсюда находим соотношения для матриц соответствующей алгебры Ли. Эти матрицы, с чисто мнимыми элементами, удовлетворяют условиям

$$g_{(\ldots)(\ldots)} A^{(\ldots)}_{(\ldots)} = - g_{(\ldots)(\ldots)} A^{(\ldots)}_{(\ldots)} . \tag{7.15}$$

Образующие алгебру Ли группы $\hat{K}$ все чисто мнимые матрицы, подчиняющиеся условиям (7.15), линейно выражаются через матрицы (4.11).

§ 8. Накрытие полной группы $\hat{K}$. Расширим накрытие группы $K_+^{(+)}$ группой $SL(2) \otimes SL(2)$ до накрытия полной группы $\hat{K}$. Для этого необходимо включить в аппарат дискретные преобразования. С этой целью расширим пространство $C^4 = C^2 \otimes C^2$ до пространства $C^{16} = C^4 \otimes C^4$. В последнем, базисом служит совокупность базисов $(\varepsilon, \varepsilon)$, $(\varepsilon, \varepsilon_i)$, $(\varepsilon^i, \varepsilon^j)$, $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$. При этом линейные преобразования

$$\xi'_1 = u_1 \xi_1, \quad \eta'_1 = v_1 \eta_1,$$
$$\xi'_2 = u_2 \xi_2, \quad \eta'_2 = v_2 \eta_2, \tag{8.1}$$

задаются посредством сопряженных представлений $\{u\}$, $\{v\}$ группы $SL(2)$. Здесь ξ_1 ξ_2 — спиноры, а η_1, η_2 — коспиноры, причем $u_1, v_1 \in (SL(2))_1$, $u_2, v_2 \in (SL(2))_2$. В матричной форме в дуальных базисах имеем

$$\psi' = \hat{U} \psi, \tag{8.2}$$

где

$$\psi(\zeta) = \psi_{\zeta}(\zeta) \otimes \psi_{u}(\zeta), \quad \psi'(\zeta') = \psi'_{\zeta}(\zeta') \otimes \psi'_{u}(\zeta'),$$
$$\psi_{\zeta} = \{\xi_1, \eta_1\}, \quad \psi_{u} = \{\xi_2, \eta_2\}$$

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2 , \tag{8.3}$$
$$\hat{U}_1 = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & (U_1^+)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_2 = \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & (U_2^+)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому представление $\{\hat{U}\}$ группы $SL(2) \otimes SL(2)$ приводимо и состоит из приводимых представлений $\{\hat{U}_1\}$, $\{\hat{U}_2\}$. Последние разлагаются на неприводимые представления $\{u_1\}$, $\{v_1\}$, $\{u_2\}$, $\{v_2\}$. Следовательно, преобразования $\{\hat{U}\}$ осуществляют другую реализацию группы $SL(2) \otimes SL(2)$. В этой новой реализации можно осуществлять расширение группы $SL(2)\otimes SL(2)$ до большой группы, накрывающей полную группу $\hat{K}$. Проследим, каким образом действуют на спин-тензор S преобразования $\hat{\gamma}_l=\{\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_5\}$. Причем, $\hat{\gamma}_0=\gamma_0\otimes\gamma_0$, $\hat{\gamma}_k = \gamma_k\otimes\gamma_k$, $\hat{\gamma}_5=-\hat{\gamma}_0\hat{\gamma}_1\hat{\gamma}_2\hat{\gamma}_3$, где $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — матрицы Дирака в стандартном представлении [13].

В этом случае имеем

$$S'(\psi)=S(\hat{\gamma}_l^{-1}\psi). \tag{8.4}$$

Учитывая отождествление координат

$$\begin{gathered}\underset{\eta}{(\psi)}=(\underset{\eta}{\psi_1}, \underset{\eta}{\psi_2}, \underset{\eta}{\psi_3}, \underset{\eta}{\psi_4})=(\underset{\eta}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^2}, \underset{\eta}{\eta_{\dot 1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot 2}}),\\ \underset{u}{(\psi)}=(\underset{u}{\psi_1}, \underset{u}{\psi_2}, \underset{u}{\psi_3}, \underset{u}{\psi_4})=(\underset{u}{\xi^1}, \underset{u}{\xi^2}, \underset{u}{\eta_{\dot 1}}, \underset{u}{\eta_{\dot 2}}),\end{gathered} \tag{8.5}$$

находим

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_0(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{16}) = (&-\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^2},\\
&-\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot2}},\\
&-\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^2}),\\
\hat{\gamma}_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{16}) = (&-\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^1},\\
&-\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot1}},\\
&-\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^1}),\\
\hat{\gamma}_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{16}) = (&\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^1},\\
&-\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot1}},\\
&\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^1}),\\
\hat{\gamma}_3(\psi_1\psi_2, \ldots, \psi_{16}) = (&-\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^2},\\
&\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^2}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot2}},\\
&-\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^2}),\\
\hat{\gamma}_5(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{16}) = (&\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^1}\underset{u}{\eta_{\dot2}},\\
&\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^1}, \underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, -\underset{\eta}{\xi^2}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\xi^2},\\
&\underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot1}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^1}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\xi^2}, -\underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot1}}, \underset{\eta}{\eta_{\dot2}}\underset{u}{\eta_{\dot2}}).
\end{aligned} \tag{8.6}$$

Для преобразованного биспинора имеем соответственно

$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \qquad (i=0)$$
$$S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \qquad (6.7)$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = -S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \qquad (i=1)$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \qquad (i=2)$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \qquad (i=3)$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots},$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \qquad i = 5)$$
$$S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}, \quad S'^{\cdots} = S^{\cdots}.$$

Посредством формулы (6.2) устанавливаем, что $\hat{\gamma}_k (k = 1, 2, 3)$ накрывает положительное ко-контра преобразование относительно k-ой оси, γ_0 накрывает положительные ко-контра преобразования всего многообразия $G(2.2.3)$, и наконец, $\hat{\gamma}_5$ накрывает полное ко-ко или контра-контра преобразования.

Следовательно, $\hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_0$ накрывает отрицательные ко-контра преобразования. Поэтому следует присоединить к группе $SL(2) \otimes SL(2)$ дискретные операторы $\hat{I}_+ = \hat{\gamma}_0$, $\hat{I}_- = \hat{\gamma}_5 \hat{\gamma}_0$. Поскольку в группе $SL(2) \otimes SL(2)$ имеется матрица -1, то в расширенной группе $\hat{I}$ находятся также операторы $-\hat{I}_+, -\hat{I}_-$. То есть двулистный характер накрытия сохраняется. Группа $\hat{K}$ состоит из пар $(a, \hat{K})$. Поэтому элементами накрывающей группы $\hat{K}$ будут пары $(a, \hat{\varkappa})$ (где a — сдвиг, $\hat{\varkappa}$ —

элемент группы $\tilde{L}$). Таким образом, каждый элемент полной группы $\hat{K}$ накрывается в точности двумя элементами $(a, \pm \hat{\mathscr{K}})$ группы $\tilde{K}$. При этом, группа $\tilde{K}$ распадается на компоненты связности

$$\tilde{K}_{+}^{(++)},\ \tilde{K}_{-}^{(++)},\ \tilde{K}_{+}^{(+-)},\ \tilde{K}_{-}^{(+-)},\ \tilde{K}_{+}^{(-+)},\ \tilde{K}_{-}^{(-+)},\ \tilde{K}_{+}^{(--)},\ \tilde{K}_{-}^{(--)},$$

накрывающие соответствующие компоненты связности $K_{+}^{(++)}, K_{-}^{(++)}, K_{+}^{(+-)}$, $K_{-}^{(+-)}$, $K_{+}^{(-+)}$, $K_{-}^{(-+)}$, $K_{+}^{(--)}$, $K_{-}^{(--)}$ группы $\hat{K}$.

§ 9. Вариационный принцип. Плотность лагранжиана свободных полей дается посредством формулы

$$L = L\left\{\psi(\zeta);\ \psi^{+}(\zeta),\ \frac{\partial\psi}{\partial\zeta_{(\lambda,\mu,\alpha)}},\ \frac{\partial\psi^{+}}{\partial\zeta_{(\tau,\nu,\beta)}}\right\}. \tag{9.1}$$

Лагранжиан поля является скаляром относительно $\hat{K}$- преобразований. Функции ψ и ψ^{+} реализуют некоторое представление собственной группы $\tilde{SO}(6.6)$. Для реального движения должно выполняться

$$\delta S = 0, \tag{9.2}$$

где S — функция действия

$$S = \int\limits_{\zeta} L\{\psi(\zeta), \psi^{+}(\zeta), \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi, \partial_{(\tau,\nu,\beta)}\psi^{+}\}\,\partial^{12}\zeta, \tag{9.3}$$

$\partial^{12}\zeta$ — элемент объема: $\partial^{12}\zeta = \partial\zeta^{(1,1,1)} \wedge \ldots \wedge \partial\zeta^{(2,2,3)}$.
Стандартным методом выводятся уравнения Лагранжа

$$\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi_l)} - \frac{\partial L}{\partial\psi_l} = 0,$$

$$\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi_l^{+})} - \frac{\partial L}{\partial\psi_l^{+}} = 0. \tag{9.4}$$

Имеется неоднозначность в выборе лагранжиана системы

$$L \to L' = L + \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)} F^{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta). \tag{9.5}$$

Здесь $F^{(\lambda,\mu,\alpha)}(\psi, \psi^{+})$ — произвольный вектор относительно $\hat{K}$- преобразований.

В качестве примера рассмотрим скалярное комплексное поле, которое реализует представление $D(O, O, O, O)$:

$$L = \varphi^{*}{}_{,(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta)\varphi'^{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta), \tag{9.6}$$

где $\varphi_{,(\lambda,\mu,c)} \equiv \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\varphi$, $\varphi'^{(\lambda,\mu,\alpha)} \equiv \partial^{(\lambda,\mu,\alpha)}\varphi$.

С помощью (9.6) получим

$$(\underset{\eta}{\Box} - \underset{u}{\Box})\varphi(\zeta) = 0, \tag{9.7}$$

$$(\underset{\zeta}{\square} - \underset{u}{\square})\varphi^*(\zeta) = 0,$$

где $\underset{\zeta}{\square} = -\underset{\zeta}{\partial}_{(\ldots)}\underset{\zeta}{\partial}^{(\ldots)}$, $\underset{u}{\square} = -\underset{u}{\partial}_{(\ldots)}\underset{u}{\partial}^{(\ldots)}$. Решение уравнений (9.7) ищем в виде

$$\varphi(\zeta) = \underset{\zeta}{\varphi}(\eta)\underset{u}{\varphi}(u), \quad \varphi^*(\zeta) = \underset{\zeta}{\varphi}^*(\eta)\underset{u}{\varphi}^*(u) \tag{9.8}$$

Введем функцию массы покоя скалярного комплексного поля

$$\underset{u}{\square}\,\underset{u}{\varphi}(u) = m^2\underset{u}{\varphi}(u),$$
$$\underset{u}{\square}\,\underset{u}{\varphi}^*(u) = m^2\underset{u}{\varphi}^*(u). \tag{9.9}$$

Тогда имеем

$$(\underset{\zeta}{\square} - m^2)\underset{\zeta}{\varphi}(\eta) = 0,$$
$$(\underset{\zeta}{\square} - m^2)\underset{\zeta}{\varphi}^*(\eta) = 0. \tag{9.10}$$

Последние описывают определенное в $\underset{\zeta}{G}(2.3)$ скалярное комплексное поле с массой покоя m.

Рассмотрим векторное комплексное поле $D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$

$$L = -\frac{1}{2}F^{*(\ldots)(\ldots)}F_{(\ldots)(\ldots)} \tag{9.11}$$

где $F_{(\ldots)(\ldots)} = \partial_{(\ldots)}\varphi_{(\ldots)} - \partial_{(\ldots)}\varphi_{(\ldots)}$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} d(F_{(\ldots)(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)} \wedge d\zeta^{(\ldots)}) = 0 \\ \partial_{(\ldots)}F^{(\ldots)(\ldots)} = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} d(F^*_{(\ldots)(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)} \wedge d\zeta^{(\ldots)}) = 0, \\ \partial_{(\ldots)}F^{*(\ldots)(\ldots)} = 0. \end{cases} \tag{9.12}$$

Потребуем выполнения инвариантных условий

$$\partial_{(\ldots)}\varphi^{(\ldots)} = \partial_{(\ldots)}\varphi^{*(\ldots)} = 0. \tag{9.13}$$

Тогда из (9.12) получим

$$\underset{\zeta}{\square}\,\varphi^{(\ldots)}(\zeta) = 0,$$
$$\underset{\zeta}{\square}\,\varphi^{*(\ldots)}(\zeta) = 0. \tag{9.14}$$

Потребуем выполнения дополнительных условий

$$\varphi^{(1,1,\alpha)} = \varphi^{(2,1,\alpha)}, \quad \varphi^{(2,2,\alpha)} = \varphi^{(1,2,\alpha)},$$
$$\varphi^{*(1,1,\alpha)} = \varphi^{*(2,1,\alpha)}, \quad \varphi^{*(2,2,\alpha)} = \varphi^{*(1,2,\alpha)}, \tag{9.15}$$

Будем иметь

$$(\underset{\eta}{\Box} - \underset{u}{\Box})\underset{\eta}{\varphi}^{(\lambda\alpha)}(\zeta) = 0, \quad (\underset{\eta}{\Box} - \underset{u}{\Box})\underset{\eta}{\varphi}^{*(\lambda\alpha)}(\zeta) = 0, \tag{9.16}$$

где $\underset{\eta}{\varphi}^{(+\alpha)} = \sqrt{2}\,\varphi^{(1,1,\alpha)}$, $\underset{\eta}{\varphi}^{(-\alpha)} = \sqrt{2}\,\varphi^{(2,2,\alpha)}$. Решения уравнений (9.16) представим в виде

$$\begin{aligned} \underset{\eta}{\varphi}^{(\lambda\alpha)}(\zeta) &= \varphi^{(\lambda\alpha)}(\eta)\varphi(u), \\ \underset{\eta}{\varphi}^{*(\lambda\alpha)}(\zeta) &= \varphi^{*(\lambda\alpha)}(\eta)\varphi^{*}(u), \end{aligned} \tag{9.17}$$

и введем функцию массы покоя векторного комплексного поля $\varphi^{(\lambda\alpha)}(\eta)$, $\varphi^{*(\lambda\alpha)}(\eta)$, определенного в $\underset{\eta}{G}(2.3)$

$$\begin{aligned} \underset{u}{\Box}\,\varphi(u) &\equiv m^2\varphi(u), \\ \underset{u}{\Box}\,\varphi^{*}(u) &\equiv m^2\varphi^{*}(u). \end{aligned} \tag{9.18}$$

Полевые уравнения (9.16) принимают форму

$$\begin{aligned} (\underset{\eta}{\Box} - m^2)\varphi^{(\lambda\alpha)}(\eta) &= 0, \\ (\underset{\eta}{\Box} - m^2)\varphi^{*(\lambda\alpha)}(\eta) &= 0. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Наконец, рассмотрим биспинорное поле $\psi(\zeta)$, реализующее приводимое представление $D\left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes D\left(0, \frac{1}{2}\right) \otimes D(0,0)$ группы $\widehat{SO}(6.6)$. Биспиноры представляются в виде

$$\psi(\zeta) = \underset{\eta}{\psi}(\zeta)\varphi(\zeta), \tag{9.20}$$

где $\psi(\zeta)$ — биспинор, а $\varphi(\zeta)$ скаляр. Сопряженный биспинор $\overline{\psi}(\zeta)$ определяется соотношением $\overline{\psi}(\zeta) = \psi^{+}(\zeta)\gamma_0$. Лагранжиан биспинорного поля выберем в виде

$$L = \frac{i}{2}\left\{ \overline{\psi}(\zeta)\gamma^{(\lambda,\mu,\alpha)}\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi(\zeta) - \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\overline{\psi}(\zeta)\gamma^{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi(\zeta) \right\}, \tag{9.21}$$

где $\{\gamma^{(\lambda,\mu,\alpha)}\}$ матричная реализация базиса $\{\widehat{e}^{(\lambda,\mu,\alpha)}\}$:
С помощью (9.21) получаются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} i\gamma^{(\lambda,\mu,\alpha)}\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi(\zeta) &= 0, \\ i\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\overline{\psi}(\zeta)\gamma^{(\lambda,\mu,\alpha)} &= 0. \end{aligned} \tag{9.22}$$

Нетрудно убедиться, что последние инвариантны относительно собстченных $\overset{\Delta}{K}$-преобразований. Отсюда можно получить уравнения биспинорного поля $\psi(\eta)$, определенного в $\underset{\xi}{G}(2.3)$. Для этого выделим компоненты η и u

$$i\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)}\underset{\xi}{\partial}_{(+a)}\psi(\zeta) = -i\underset{u}{\gamma}^{(-a)}\underset{u}{\partial}_{(-a)}\psi(\zeta),$$

$$i\underset{\xi}{\partial}_{(+a)}\overline{\psi}(\zeta)\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)} = -i\underset{u}{\partial}_{(-a)}\overline{\psi}(\zeta)\underset{u}{\gamma}^{(-a)}, \tag{9.23}$$

где

$$\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^{(1,1,a)} + \gamma^{(2,1,a)}\right),$$

$$\underset{\xi}{\gamma}^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^{(1,2,a)} + \gamma^{(2,2,a)}\right),$$

$$\underset{u}{\gamma}^{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^{(1,1,a)} - \gamma^{(2,1,a)}\right), \tag{9.24}$$

$$\underset{u}{\gamma}^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma^{(1,2,a)} - \gamma^{(2,2,a)}\right).$$

Рассмотрим случай, когда

$$\underset{\xi}{\psi}(\zeta) = \psi(\xi), \quad \underset{u}{\varphi}(\zeta) = \varphi(u). \tag{9.25}$$

Уравнения (9.23) записываются в виде

$$\varphi(u)i\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)}\underset{\xi}{\partial}_{(+a)}\psi(\xi) = -i\underset{u}{\partial}_{(-a)}\varphi(u)\underset{u}{\gamma}^{(-a)}\psi(\xi), \tag{9.26}$$

$$\varphi^*(u)i\underset{\xi}{\partial}_{(+a)}\overline{\psi}(\xi)\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)} = -i\underset{u}{\partial}_{(-a)}\varphi^*(u)\overline{\psi}(\xi)\underset{u}{\gamma}^{(-a)}.$$

Введем функцию массы покоя биспинорного поля $\psi(\eta)$

$$m\varphi(u)I_4\psi(\xi) = -i\underset{u}{\partial}_{(-a)}\varphi(u)\underset{u}{\gamma}^{(-a)}\psi(\xi), \tag{9.27}$$

$$m\varphi^*(u)\overline{\psi}(\xi)I_4 = i\underset{u}{\partial}_{(-a)}\varphi^*(u)\overline{\psi}(\xi)\underset{u}{\gamma}^{(-a)}.$$

Уравнения (9.26) принимают окончательную форму

$$\left(i\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)}\underset{\xi}{\partial}_{(+a)} - m\right)\psi(\xi) = 0,$$

$$\overline{\psi}(\xi)\left(i\underset{\xi}{\gamma}^{(+a)}\overleftarrow{\partial}_{(+a)} + m\right) = 0. \tag{9.28}$$

§ 10. Теорема Нетер и ее следствия. Теорема Нетер (лагранжевой формулировки классической полевой теории) справедлива также в случае, когда физическая система определена в многообразии $G(2.2.3)$ (мы опускаем доказательство). К примеру, потребуем, чтобы действие системы оставалось неизменным относительно преобразований трансляций (4.3). В этом случае сохраняется вектор «энергии-импульса» полей

$$P_{(\lambda,\mu,\alpha)}=\int\limits_{\Sigma} T_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)}\, d\sigma^{(\tau,\nu,\beta)}, \tag{10.1}$$

где тензор плотности энергии-импульса имеет вид

$$T_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)}=\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial^{(\tau,\nu,\beta)}\psi_A)}\,\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi_A-\mathrm{L}\delta_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)}. \tag{10.2}$$

Рассмотрим второй тип преобразований собственной группы $S\widehat{O}(6.6)$. Из условия инвариантности действия относительно группы $S\widehat{O}(6.6)$ следует сохранение «полного момента импульса»

$$M_{|(\tau,\nu,\beta)(\gamma,\varkappa,k)|}=\int\limits_{\Sigma}\Big\{\big(T^{(\lambda,\mu,\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}x_{(\gamma,\varkappa,k)}-T^{(\lambda,\mu,\alpha)}_{(\gamma,\varkappa,k)}x_{(\tau,\nu,\beta)}\big)-$$

$$-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi_A)}\,Y_{A|(\tau,\nu,\beta)(\gamma,\varkappa,k)|}\Big\}\,d\sigma_{(\lambda,\mu,\alpha)}. \tag{10.3}$$

Далее, инвариантности лагранжиана комплексного поля относительно калибровочных преобразований первого рода

$$\psi'(\zeta)=e^{i\alpha}\psi(\zeta),$$
$$\psi^{*\prime}(\zeta)=e^{-i\alpha}\psi^{*}(\zeta), \tag{10.4}$$

соответствует сохранение заряда

$$Q=\int\limits_{\Sigma} j^{(\lambda,\mu,\alpha)}\,d\sigma_{(\lambda,\mu,\alpha)}= \tag{10.5}$$

$$=i\int\limits_{\Sigma}\Big\{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi_j)}\psi_j-\psi_j^{*}\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\psi^{*}}\Big\}\,d\sigma_{(\lambda,\mu,\alpha)}.$$

Полученный результат можно обобщить для случая, когда интеграл действия инвариантен относительно преобразований группы $SU(n)$. Причем, полевые функции должны осуществлять представления как группы $S\widehat{O}(6.6)$, так и группы $SU(n)$.

§ 11. **Взаимодействующие поля.** Если действие системы инвариантно относительно глобальных симметрий, то более сильное требование инвариантности относительно локальных симметрий может удовлетворяться введением новых матричнозначных функций (калибровочных полей— $A_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta)$, $b^{a}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta)$) в пространстве R^{18} со значениями в алгебре Ли $\widehat{g}$ группы G. При этом $\zeta\in U$, где U — область базы главного расслоения $\pi:\varepsilon\to G(2.2.3)$, над которой определяется разложение $\pi^{-1}(U)=U\otimes G$. Физическая система — это набор полей $\{\psi(\zeta)\}$, где $\psi(\zeta)$ — поле со значениями в векторном пространстве V, на котором задано линейное представление группы G. Обычно считается, что V — это также алгебра Ли группы G, на котором алгебра Ли действует согласно правилу присоединенного представления

$$b\leftrightarrow \mathrm{ad}b:\psi\to[b,\psi].$$

В случае преобразований абелевой группы $U(1) = SO(2) = G$

$$\begin{gathered}\psi'(\zeta) = U(\zeta)\psi(\zeta) = e^{i\alpha(\zeta)}\psi(\zeta),\\ \bar{\psi}'(\zeta) = \bar{\psi}(\zeta)\,U^{-1}(\zeta) = \bar{\psi}(\zeta)e^{-i\alpha(\zeta)},\end{gathered} \tag{11.1}$$

вводятся электромагнитное поле.

Янг-Миллсовские неабелевые калибровочные поля ассоциируют с локальной $SU(n)$ инвариантностью. При этом

$G = SU(n)$, база — $U = R^{12} = G$ (2.2.3.) и

$$U = U(\zeta) = e^{ig\vec{\alpha}(\zeta)\vec{T}}, \tag{11.2}$$

где $\vec{T}$ — генераторы группы $SU(n)$ в присоединенном представлении, g — константа взаимодействия.

К примеру, локально $SU(2)$ инвариантный лагранжиан неабелевых калибровочных векторных полей $b^a_{(\lambda,\alpha)}(\zeta)$ имеет форму

$$\begin{aligned} L_b = \frac{1}{4}\, & b^a_{[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta)\, b^{a[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta) - \\ - \frac{1}{2}\, & b^{a[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta)\big(\partial_{(\lambda,\alpha)} b^a_{(\mu,\beta)}(\zeta) - \\ & - \partial_{(\mu,\beta)} b^a_{(\lambda,\alpha)}(\zeta) + g\varepsilon_{abc}\, b^b_{(\lambda,\alpha)}(\zeta)\, b^c_{(\mu,\beta)}(\zeta)\big). \end{aligned} \tag{11.3}$$

Последний приводит к следующей системе нелинейных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} \partial_{(\lambda,\alpha)} b^a_{(\mu,\beta)}(\zeta) - \partial_{(\mu,\beta)} b^a_{(\lambda,\alpha)}(\zeta) - \\ - b^a_{[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta) = - g\varepsilon_{abc}\, b^b_{(\lambda,\alpha)}(\zeta)\, b^c_{(\mu,\beta)}(\zeta), \\ \partial^{(\lambda,\alpha)} b^a_{[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta) = - g\varepsilon_{abc}\, b^b_{[(\lambda,\alpha)(\mu,\beta)]}(\zeta)\, b^{c(\lambda,\alpha)}(\zeta). \end{gathered} \tag{11.4}$$

§ 12. Квантовая теория взаимодействия. С помощью выражения действия системы взаимодействующих полей нетрудно дать формулировку квантовой теории в терминах континуального интеграла по фазовому пространству.

Производящий функционал для функций Грина с учетом взаимодействия записывается в виде

$$\begin{aligned} Z[J] = \int D[\Phi_A]\exp\Big\{ i\int L_I\, d^{12}\zeta \Big\} \times \\ \times \exp\Big\{ i\int\Big[L_0[\Phi_A] + J[\Phi_A]\Big] d^{12}\zeta \Big\}, \end{aligned} \tag{12.1}$$

где $\Phi_A = \hat{\varphi}_B, \hat{\varphi}_A$. Их вычисляют по пространству функций $[\Phi_A]$ с подлежащей мерой. Величина Z дает амплитуду перехода из начального вакуумного состояния $|0, i>$ в конечное вакуумное состояние $|0, f>$ в присутствии источника частиц J.

Плотность лагранжиана взаимодействия L_I является полиномиальной функцией полей, поэтому выражение (12.1) можно переписать в виде

$$Z[J]=\exp\left\{i\int \mathrm{L}_I\left[\frac{\delta}{i\delta J}\right]d^{12}\zeta\right\}\cdot Z_0[J], \tag{12.2}$$

где свободный производящий функционал $Z_0[J]$ имеет следующую форму:

$$Z_0[J]=\int D[\Phi_A]\exp\left\{i\int\left[\mathrm{L}_0[\Phi_A]+J^A\Phi_A\right]d^{12}\zeta\right\}. \tag{12.3}$$

Фейнмановский пропагатор $G_F(\zeta)$ обычно выбирают в виде

$$\begin{aligned} iG_F(\zeta_1,\zeta_2) &= \theta(x_1^0-x_2^0)\theta(u_1^0-u_2^0)\sum_i \psi_i(\zeta_1)\psi_i^*(\zeta_2)+ \\ &+\theta(x_2^0-x_1^0)\theta(u_2^0-u_1^0)\sum\psi_i^*(\zeta_1)\psi_i(\zeta_2) \end{aligned} \tag{12.4}$$

с целью получения функции Грина, соответствующей одному определению положительно-частотных мод $\psi_i(\zeta)$. Тогда для функции Грина

$$\tau(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_m)=\frac{\langle f,0|T_p(\varphi(\zeta_1)\varphi(\zeta_2)\ldots\varphi(\zeta_m))\,|0,i\rangle}{\langle f,0|0,i\rangle} \tag{12.5}$$

получится соотношение

$$\tau_c(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_m)=i^{-m}\left.\frac{\delta^m\ln Z[J]}{\delta J(\zeta_1)\delta J(\zeta_2)\ldots\delta J(\zeta_m)}\right|_{J=0}. \tag{12.6}$$

В последней формуле индекс «с» означает, что в разложении по теории возмущений учтены лишь связанные фейнмановские диаграммы.

Выражение (12.2) можно представить в виде

$$Z[J]=\underset{\eta}{Z}[\underset{\eta}{J}]\cdot\underset{u}{Z}[\underset{u}{J}], \tag{12.7}$$

где $\underset{\eta}{Z}[\underset{\eta}{J}]$ относится к многообразию $\underset{\eta}{G}(2.3)$, а $\underset{u}{Z}[\underset{u}{J}]$ — к $\underset{u}{G}(2.3)$. При этом полное действие системы имеет вид

$$\mathrm{S}=\underset{\eta}{\mathrm{S}}+\underset{u}{\mathrm{S}}, \tag{12.8}$$

где

$$\underset{\eta}{\mathrm{S}}=\int(\underset{\eta}{\mathrm{L}_0}+\underset{\eta}{\mathrm{L}_I})\,d^6u\,d^6\eta,$$

$$\underset{u}{\mathrm{S}}=\int(\underset{u}{\mathrm{L}_0}+\underset{u}{\mathrm{L}_I})\,d^6\eta\,d^6u. \tag{12.9}$$

Отметим важное свойство теории: **действия** $\underset{\eta}{\mathrm{S}}$ и $\underset{u}{\mathrm{S}}$ **принимают независимые друг от друга значения.** К примеру, пусть действие $\underset{\eta}{\mathrm{S}}$ соизмеримо с $\hbar$, а действие $\underset{u}{\mathrm{S}}$ намного больше чем $\hbar(\underset{u}{\mathrm{S}}\gg\hbar)$. Тогда движения полей в континууме $\underset{x}{P}(3)\oplus\underset{x}{T}(3)$ определяются законами квантовой теории, в то время как движения полей в континууме $\underset{u}{P}(3)\oplus\underset{u}{T}(3)$ остаются классическими.

ГЛАВА 3

ИСКАЖЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ $G(2.2.3)$

В предыдущей главе рассмотрена динамика процессов, протекающих в многообразии $G(2.2.3)$. При этом выявлено соответствие между $G(2.2.3)$ и пространство-временно-внутренним континуумом.

Настоящая глава посвящена вопросам искажения многообразия $G(2.2.3)$ (следовательно, пространство-временно-внутреннего континуума) и описанию динамики протекающих в нем процессов.

§ 1. Общее описание искаженного многообразия $G(mkn)$. Искаженное $m \cdot k \cdot n$ -мерное многообразие $G(mkn)$ класса C^r есть множество $G(mkn)$ вместе с атласом $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ класса C^r, U_α — подмножества $G(mkn)$, а Φ_α — взаимно-однозначные отображения множеств U_α на открытые множества в $R^{m \cdot k \cdot n}$, причем:

1) U_α образует покрытие $G(mkn)$

$$G(mkn) = \bigcup_\alpha U_\alpha;$$

2) если пересечение $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ не пусто, то отображение

$$\Phi_\alpha \cdot \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta U_{\alpha\beta} \to \Phi_\alpha U_{\alpha\beta} \tag{1.1}$$

является дифференциальным C^r -отображением областей в $R^{m \cdot k \cdot n}$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь паракомпактные связные хаусдорфовые многообразия $G(mkn)$ класса C^r без края $\partial G(mkn)$ (край множества $G(mkn)$ есть множество всех точек многообразия $G(mkn)$, образы которых при отображении Φ_α лежат на границе нижней половины области $R^{m \cdot k \cdot n}$).

С помощью аппарата дифференциальной геометрии можно построить геометрические объекты, определенные на многообразии $G(mkn)$. Мы остановимся лишь на отдельных вопросах.

C^l-расслоение над C^r-многообразием $G(mkn)(r \geq l)$ включает в себя:

а) пространство расслоения — C^l -многообразие ε;

б) базу расслоения — C^r - многообразие $G(mkn)$;

в) проекцию — C^l -отображение $\pi : \varepsilon \to G(mkn)$, дифференциал которого имеет во всех точках ранг $N = \dim G(mkn)$;

г) слой $\mathcal{F}$ — гладкое многообразие;

д) структурную группу — группу G гладких преобразований слоя $\mathcal{F}$;

е) структуру расслоения: существует окрестность U каждой точки $q \in G(mkn)$ такая, что $\pi^{-1}(U)$ изоморфна $U \otimes \mathcal{F}$, т. е. для каждой точки $P \in U$ существует диффеоморфизм Φ_p точки $\pi^{-1}(P)$ на $\mathcal{F}$ такой, что отображение $\psi(U) = (\pi(U), \Phi\pi(U))$ есть диффеоморфизм $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \otimes \mathcal{F}$.

Преобразование $t_{ab}=\Phi_b^{-1}\Phi_a: \mathcal{F}\otimes U_{ab}\to\mathcal{F}\otimes U_{ab}$ называется функцией склейки расслоения.

Сечением расслоения $\pi:\varepsilon\to G(mkn)$ называется такое отображение $\psi: G(mkn)\to\varepsilon$, что $\pi\psi(\cdot)=\cdot$ для любой точки $\cdot\in G(mkn)$. Касательное расслоение $T_p(G(mkn))$ есть расслоенное пространство над C^r- многообразием, если множество $\varepsilon\bigcup\limits_{P\in G}T_p$ наделено структурой многообразия и проекцией на $G(mkn)$.

Если T_p — касательное расслоение многообразия $G(mkn)$, то тогда сечения расслоения T_p — это векторные поля; сечения сопряженного расслоения T_p^* — это ковекторные поля.

Тензоры типа (p, q) — это сечения расслоений

$$\underbrace{T_p\otimes\ldots\otimes T_p}_{p}\otimes\underbrace{T_p^*\otimes\ldots\otimes T_p^*}_{q}. \tag{1.2}$$

Дифференциальные формы на многообразии $G(mkn)$ определяются как сечения расслоения $\Lambda^k T_p^*$ (кососимметрическая часть тензорной степени).

Расслоение линейных реперов $L(G(mkn))$ понимается в следующем смысле: полное пространство ε состоит из всевозможных базисов $\{\hat e_{(\lambda\mu\alpha)}\}$, $\hat e_{(\lambda\mu\alpha)}\in T_p$ для каждого $P\in G(mkn)$.

Метрика, которая является квадратичной формой на векторах — это сечение расслоения $S^2T_p^*$ (симметрическая часть тензорной степени).

Метрический тензор $\hat g$ в точке $P\in G(mkn)$ есть симметрический тензор типа (0.2) в P. С его помощью определяется норма $|g(\hat X, \hat X)|^{1/2}$ любого вектора $\hat X\in T_p$. Компоненты $\hat g$ относительно базиса $\{\hat e_{(\lambda\mu\alpha)}\}$ определяются следующим образом

$$g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}=g(\hat e_{(\lambda\mu\alpha)}, \hat e_{(\tau\nu\beta)})=g(\hat e_{(\tau\nu\beta)}, \hat e_{(\lambda\mu\alpha)}). \tag{1.3}$$

В голономном базисе имеем

$$\hat g=g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}\,d\zeta^{(\lambda\mu\alpha)}\otimes d\zeta^{(\tau\nu\beta)}. \tag{1.4}$$

Пусть $\hat e_{(111)},\ldots\ldots,\hat e_{(mkn)}$ — гладкие векторные поля, определенные в некоторой координатной окрестности U, причем $g(\hat e_{(\lambda\mu\alpha)}, \hat e_{(\tau\nu\beta)})=g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}$.

Пусть 1-форма $\hat e^{(\lambda\mu\alpha)}$ задана равенством

$$<\hat e^{(\lambda\mu\alpha)}, \hat e_{(\tau\nu\beta)}>=\delta^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)}. \tag{1.5}$$

Тогда структурные уравнения Картана имеют вид

$$d\hat e^{(\lambda\mu\alpha)}=-\hat\omega^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)}\wedge\hat e^{(\tau\nu\beta)}, \tag{1.6}$$

$$d\hat\omega^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)}=\hat\omega^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\rho\sigma\gamma)}\wedge\hat\omega^{(\rho\sigma\gamma)}_{(\tau\nu\beta)}-\hat\Omega^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)}, \tag{1.7}$$

$$\hat\Omega^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)}=\frac{1}{2}R^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau\nu\beta)(\rho\sigma\gamma)(\varkappa\epsilon k)}\,\hat e^{(\rho\sigma\gamma)}\wedge\hat e^{(\varkappa\epsilon k)}, \tag{1.8}$$

где

$$\nabla \hat{e}_{(\lambda\mu\alpha)} = \omega^{(\kappa\nu\beta)}_{(\lambda\mu\alpha)} \otimes \hat{e}_{(\kappa\nu\beta)},$$

$$\Omega^{(\kappa\nu\beta)}_{(\lambda\mu\alpha)}(\hat{Y}, \hat{X}) = \langle \hat{e}^{(\kappa\nu\beta)}, \hat{R}(\hat{Y}, \hat{X})\, \hat{e}_{(\lambda\mu\alpha)} \rangle. \qquad (1.9)$$

Здесь $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ — векторные поля на U. В дальнейшем будем рассматривать искаженное многообразие $G(2\,2\,3)$. В этом случае квадратичная функция от дифференциалов координат записывается в виде

$$d\zeta^2 = g_{(\lambda\mu\alpha)(\nu\sigma\beta)}(\zeta)\, d\zeta^{(\lambda\mu\alpha)}\, d\zeta^{(\nu\sigma\beta)} \quad (\lambda, \mu, \sigma, \nu = 1, 2;\ \alpha, \beta = 1, 2, 3). \qquad (1.10)$$

Между многообразием $G(2\,2\,3)$ и искаженным пространство-временно-внутренним континуумом имеется однозначное соответствие

$$d\hat{\zeta} = \hat{e}_{(\lambda\mu\alpha)}\, d\zeta^{(\lambda\mu\alpha)} = \hat{\xi}_{(\lambda\mu\alpha)}\, dZ^{(\lambda\mu\alpha)} = \hat{\xi}^{(\lambda\mu\alpha)}\, dZ_{(\lambda\mu\alpha)}. \qquad (1.11)$$

Здесь $\hat{\xi}_{(\lambda\mu\alpha)}$, $\hat{\xi}^{(\lambda\mu\alpha)}$ и $\hat{Z}^{(\lambda\mu\alpha)}$, $\hat{Z}_{(\lambda\mu\alpha)}$ определены в искаженном пространство-временно-внутреннем континууме $R(3, 3, 3, 3)$. Причем

$$\hat{e}_{(11\alpha)} = \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(11\alpha)} + \hat{\xi}_{(12\alpha)} + \hat{\xi}_{(21\alpha)} + \hat{\xi}_{(22\alpha)}),$$

$$\hat{e}_{(12\alpha)} = \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(11\alpha)} - \hat{\xi}_{(12\alpha)} - \hat{\xi}_{(21\alpha)} + \hat{\xi}_{(22\alpha)}),$$

$$\hat{e}_{(21\alpha)} = \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(11\alpha)} + \hat{\xi}_{(12\alpha)} - \hat{\xi}_{(21\alpha)} - \hat{\xi}_{(22\alpha)}), \qquad (1.12)$$

$$\hat{e}_{(22\alpha)} = \frac{1}{2}(\hat{\xi}_{(11\alpha)} - \hat{\xi}_{(12\alpha)} + \hat{\xi}_{(21\alpha)} - \hat{\xi}_{(22\alpha)}).$$

Поэтому

$$\xi_{(+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{(11\alpha)} + Z_{(22\alpha)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{(11\alpha)} + \zeta_{(22\alpha)}) \in \underset{\xi}{G}(2\,3),$$

$$\xi_{(-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{(11\alpha)} - Z_{(22\alpha)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{(12\alpha)} + \zeta_{(21\alpha)}) \in \underset{\xi}{G}(23),$$

$$u_{(+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{(12\alpha)} + Z_{(21\alpha)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{(11\alpha)} - \zeta_{(22\alpha)}) \in \underset{u}{G}(2\,3), \qquad (1.13)$$

$$u_{(-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Z_{(12\alpha)} - Z_{(21\alpha)}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_{(12\alpha)} - \zeta_{(21\alpha)}) \in \underset{u}{G}(23).$$

Здесь $\underset{\xi}{G}(23)$ и $\underset{u}{G}(23)$ — искаженные многообразия, в которых базисами служат следующие векторы

$$\underset{\xi}{\hat{e}}_{(+\alpha)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{(11\alpha)}(\zeta) + \hat{e}_{(22\alpha)}(\zeta)),$$

$$\underset{\xi}{\hat{e}}_{(-\alpha)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{(12\alpha)}(\zeta) + \hat{e}_{(21\alpha)}(\zeta)),$$

$$\hat{e}_{\underset{u}{(+\alpha)}}(\overset{\cdot}{\cdot}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{(11\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot}) - \hat{e}_{(21\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot})), \tag{1.14}$$

$$\hat{e}_{\underset{u}{(-\alpha)}}(\overset{\cdot}{\cdot}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_{(12\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot}) - \hat{e}_{(22\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot})),$$

соответственно.

§ 2. Локальная группа истинного искажения— $D^{loc}(2.2.3)$. Познакомимся с новым свойством обобщенного многообразия $G(2.2.3)$. До сих пор было принято, что оси образующих многообразие $G(2.2.3)$ пространств $\underset{11}{G}(3)$, $\underset{12}{G}(3)$, $\underset{21}{G}(3)$ и $\underset{22}{G}(3)$ совпадают, то есть

$$\sigma_{(\lambda,\mu,\alpha)} \equiv \sigma_\alpha \ (\lambda, \mu = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3). \tag{2.1}$$

Теперь допускаем, что возможны вращения этих осей на определенные углы таким образом, чтобы плоская трехмерность каждого из пространств сохранялась. К примеру, пусть пространства $\underset{12}{G}(3)$, $\underset{21}{G}(3)$, $\underset{22}{G}(3)$ остаются неизменными ($\sigma_{(1,2,\alpha)} = \sigma_{(2,1,\alpha)} = \sigma_{(2,2,\alpha)} = \sigma_\alpha$), в то время как в пространстве $\underset{11}{G}(3)$ плоскость, составленная осями $\sigma_{(1,1,1)}$ и $\sigma_{(1,1,2)}$ как целое поворачивается вокруг третьей оси $\sigma_{(1,1,3)}$ на угол $\theta_{(1,1,3)}$, и т. п. То есть здесь имеем преобразования из группы движения метрики трехмерного эвклидова пространства.

При наличии в точке $\overset{\cdot}{\cdot}{}^p \in G(2.2.3)$ векторного поля искажения $a_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot}{}^p)$, базис $\{\hat{e}_{(\lambda,\mu,\alpha)}\}$ искажается. Во-первых, бипсевдовекторы $\{O_{\lambda,\mu}\}$ $(\lambda, \mu = 1,2)$ локально приобретают свойства обычных векторов

$$\begin{aligned}
O_{1.1} &\to O_{(11\alpha)} = O_{1.1} + \varkappa_f a_{(1.1.\alpha)} O_{2.2}, \\
O_{1.2} &\to O_{(12\alpha)} = O_{1.2} + \varkappa_f a_{(1.2.\alpha)} O_{2.1}, \\
O_{2.1} &\to O_{(21\alpha)} = O_{2.1} + \varkappa_f a_{(2.1.\alpha)} O_{1.2}, \\
O_{2.2} &\to O_{(22\alpha)} = O_{2.2} + \varkappa_f a_{(2.2.\alpha)} O_{1.1}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

При этом, для каждого $\alpha = 1, 2, 3$ имеем

$$O^2_{(\lambda\mu\alpha)} = 2\varkappa_f a_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\overset{\cdot}{\cdot}{}^p) \neq 0. \tag{2.3}$$

В свою очередь, семейство единичных векторов $\{\sigma_{(\lambda,\mu,\alpha)} \equiv \sigma_\alpha\}$ распадается на четыре семейства векторов $\{\sigma_{(11\alpha)}\}$, $\{\sigma_{(12\alpha)}\}$, $\{\sigma_{(21\alpha)}\}$, $\{\sigma_{(22\alpha)}\}$, каждое из которых ведет себя по отношению к другому подобно псевдовектору

$$< \sigma_{(\lambda\mu\alpha)}, \sigma_{(\tau\nu\beta)} > \neq 0 \tag{2.4}$$

при $\lambda \neq \tau$, или $\mu \neq \nu$ и $\alpha \neq \beta$.

Потребуем, чтобы при этом плоская трехмерность пространств $\underset{\lambda\mu}{G}(3)$ не нарушалась. То есть мы имеем дело с вращениями (согласно введенному свойству многообразия $G(2.2.3)$). Следовательно, происходит переход

$$\hat{e}_{(\lambda\alpha)} = O_{\lambda\alpha} \otimes \sigma_{\alpha} \to \hat{e}_{(\lambda\alpha)}(\eta^{\beta}) = O_{(\lambda\alpha)} \otimes \sigma_{(\lambda\alpha)},$$

$$\hat{e}^{(\lambda\alpha)} = O^{\lambda\alpha} \otimes \sigma_{\alpha} \to \hat{e}^{(\lambda\alpha)}(\eta^{\beta}) = O^{(\lambda\alpha)} \otimes \sigma^{(\lambda\alpha)}. \tag{2.5}$$

Введем функции искажения

$$f^{\mu}_{(\lambda\alpha)\tau\nu} = \frac{C_{(\lambda\alpha)\mu\nu}}{C_{(\lambda\alpha)\tau\nu}}, \quad f^{\beta}_{(\lambda\alpha)\alpha} = \frac{R_{(\lambda\alpha)\beta}}{R_{(\lambda\alpha)\alpha}}. \tag{2.6}$$

Здесь $C_{(\lambda\alpha)\tau\nu}$ ($\lambda = \tau, \mu = \nu$) и $R_{(\lambda\alpha)\alpha}$ (при заданных значениях λ, $\mu, \tau, \nu = 1, 2$; $\alpha = 1, 2, 3$) — описывают нормальные части смешанных векторов $O_{(\lambda\alpha)}$ и $\sigma_{(\lambda\alpha)}$ соответственно

$$C_{(\lambda\alpha)\tau\nu} = \langle O_{(\lambda\alpha)}, O_{\tau\nu} \rangle, \tag{2.7}$$

$$R_{(\lambda\alpha)\alpha} = \langle \sigma_{(\lambda\alpha)}, \sigma_{\alpha} \rangle,$$

а $C_{(\lambda\alpha)\mu\nu}$ и $R_{(\lambda\alpha)\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) — искаженные части

$$C_{(\lambda\alpha)\mu\nu} = \langle O_{(\lambda\alpha)}, O_{\mu\nu} \rangle,$$

$$R_{(\lambda\alpha)\beta} = \langle \sigma_{(\lambda\alpha)}, \sigma_{\beta} \rangle. \tag{2.8}$$

Постулируем следующее: каждая из полных функций искажения, соответствующая пространствам $\underset{\lambda\alpha}{G}(3)$ в отдельности, остается равной нулю, как и при отсутствии поля искажения

$$f^{0}_{(\lambda\alpha)\tau\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} f^{\beta}_{(\lambda\alpha)\gamma} = 0, \tag{2.9}$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга. Отсюда определяются значения углов допустимых вращений

$$\operatorname{tg}\vartheta_{(\lambda\alpha)} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\operatorname{tg}(\widehat{\sigma_{(\lambda\alpha)}\,\sigma_{(\lambda\beta)}}) = -x_{\lambda}\omega_{(\lambda\alpha)}(\eta^{\beta}). \tag{2.10}$$

Определим преобразования искажения C и R как линейные преобразования бипсевдовекторов и векторов посредством матриц (C) и (R) соответственно:

$$O_{(\lambda\alpha)} = C^{\tau\nu}_{(\lambda\alpha)} O_{\tau\nu}, \tag{2.11}$$

$$\sigma_{(\lambda\alpha)} = R^{\beta}_{(\lambda\alpha)} \sigma_{\beta},$$

или

$$O^{(\lambda\alpha)} = C^{(\lambda\alpha)}_{\tau\nu} O^{\tau\nu},$$

$$\sigma^{(\lambda\alpha)} = R^{(\lambda\alpha)}_{\beta} \sigma_{\beta}. \tag{2.12}$$

Здесь $O_{\tau\nu}$ и $O^{\tau\nu}$ — ко- и контравариантный бипсевдовекторы, которым соответствуют следующие матричные записи

$$\left(O_{\tau,\nu}\right)=\begin{pmatrix} O_{1\cdot 1} \\ O_{1\cdot 2} \\ O_{2\cdot 1} \\ O_{2\cdot 2} \end{pmatrix}, \quad \left(O^{\tau,\nu}\right)=\begin{pmatrix} O_{2\cdot 2} \\ O_{2\cdot 1} \\ O_{1\cdot 2} \\ O_{1\cdot 1} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Совокупность матриц $\{R\}$ образует группу $SO(3.R_{\lambda,\mu})$. Причем, матрица R не должна зависеть от выбора последовательности осей, вокруг которых совершаются вращения. Поэтому она имеет вид

$$R^{\beta}_{(\lambda\mu\alpha)}=\frac{1}{6}\sum_{i\neq j\neq k}(R^{\beta}_{(\lambda\mu\alpha)})^{ijk}, \tag{2.14}$$

$$(i, j, k=1, 2, 3).$$

Матрица $(R^{\beta}_{(\lambda\mu\alpha)})^{ijk}$ соответствует преобразованию $\sigma_\beta\to\sigma_{(\lambda\mu\alpha)}$, когда вращения совершаются в последовательности i, j, k.

Совокупность матриц $\{C\}$ также образует группу. Введем матрицы

$$\hat{D}=C\underset{(\lambda\mu\alpha)}{\otimes}R\ \left(D^{(\tau,\nu,\beta)}_{(\lambda\mu\alpha)}=C^{\tau,\nu}_{(\lambda\mu\alpha)}R^{\beta}_{(\lambda\mu\alpha)}\right),$$

$$\hat{D}^T=C^T\underset{(\lambda\mu\alpha)}{\otimes}R^T\ \left(D^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}=C^{(\lambda\mu\alpha)}_{\tau,\nu}R^{(\lambda\mu\alpha)}_{\beta}\right), \tag{2.15}$$

посредством которых преобразуются смешанные векторы

$$(\hat{e}_{(\lambda\mu\alpha)})=\hat{D}(\hat{e}_{(\tau,\nu,\beta)}),$$

$$(\hat{e}_{(\lambda\mu\alpha)}=D^{(\tau,\nu,\beta)}_{(\lambda\mu\alpha)}\,\hat{e}_{(\tau,\nu,\beta)}=O_{(\lambda\mu\alpha)}\otimes\sigma_{(\lambda\mu\alpha)}),$$

$$(\hat{e}^{(\lambda\mu\alpha)})=\hat{D}^T(\hat{e}^{(\tau,\nu,\beta)}), \tag{2.16}$$

$$(\hat{e}^{(\lambda\mu\alpha)}=D^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\tau,\nu,\beta)}\,\hat{e}^{(\tau,\nu,\beta)}=O^{(\lambda\mu\alpha)}\otimes\sigma^{(\lambda\mu\alpha)}).$$

Осуществляющая искажение (2.16) совокупность матриц 12×12 $\{\hat{D}\}$ (2.15) образует локальную группу истинного искажения $D^{loc}(2.2.3)$, если только полные функции искажения для пространств $G(3)$ остаются равными нулю (2.9).

§. 3. Локальная полная группа искажения $\hat{G}^{loc}(2.2.3)$. Векторное поле искажения $a_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\overset{\circ}{r}{}^{P})$ определено в плоском многообразии $G(2.2.3)$. При преобразовании координат оно преобразуется по векторному представлению собственной группы $\widetilde{SO}(6.6)$, а как калибровочное поле подвергается также калибровочным преобразованиям второго рода $\chi^P(\overset{\circ}{r}{}^{P})$:

$$a'_{(\lambda,\mu,\alpha)}=K^{(\tau,\nu,\beta)}_{(\lambda,\mu,\alpha)}a_{(\tau,\nu,\beta)},\quad \hat{K}\in\widetilde{SO}(6.6). \tag{3.1}$$

$$a'_{(\lambda,\mu,\alpha)}=a_{(\lambda,\mu,\alpha)}+\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\chi^P(\overset{\circ}{r}{}^{P}).$$

Построим диффеоморфизм

$$\zeta^{(\ldots)}(\zeta^F) : G(2.2.3) \to G(2.2.3),$$
$$\zeta^{(\ldots)}(\zeta) : G(2.2.3) \to G(2.2.3). \tag{3.2}$$

Определение 1. В случае, когда источник поля искажения не зависит от координаты $\zeta^{(\ldots)}$, отображение $\zeta^F \to \zeta$ называется ориентированным, если поле искажения не зависит от координаты $\zeta^{(\ldots)}$. То есть имеем

$$\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = \zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}, \quad \zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = \zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}, \tag{3.3}$$

где

$$\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = \frac{\partial \zeta^{(\ldots)}}{\partial \zeta^{(\ldots)}}.$$

Определение 2. Множеством физических отображений называется множество отображений $\{\zeta^F \to \zeta\}$, где ζ^F подвергается всевозможным преобразованиям из группы $\widetilde{SO}(6.6)$, если среди отображений имеется хотя бы одно ориентированное отображение.

Функции $\zeta^{(\ldots)}(\zeta^F)$ определим из соотношений

$$g_{(\ldots)}(\zeta^F, a^F)\,\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}\,\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = g_{(\ldots)(\ldots)} + \Phi_{(\ldots)(\ldots)}(a^F). \tag{3.4}$$

Причем

$$\frac{\partial}{\partial \zeta^{(\ldots)}}\,\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = \frac{\partial}{\partial \zeta^{(\ldots)}}\,\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}, \tag{3.5}$$

и $\det|\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}| \neq 0$.

Можем рассматривать случай **полной ориентации** $\zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)} = \zeta^{(\ldots)}_{(\ldots)}$. Тогда

$$\Phi_{(\ldots)(\ldots)} = g_{(\ldots)(\ldots)} - g_{(\ldots)(\ldots)}.$$

Очевидно, что $(\Phi_{(\ldots)(\ldots)})_{a^F=0} = 0$. Из (3.4) находим

$$g_{(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)} = (g_{(\ldots)(\ldots)} + \Phi_{(\ldots)(\ldots)})\,d\zeta^{(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)}. \tag{3.6}$$

Постулируем следующее: истинно искаженные координаты ζ, ζ', ζ'', ..., определяются из соотношений (3.4,5), если только множество отображений $\{\zeta^F \to \zeta\}$ является множеством физических отображений. Соответствующие координатные системы F, F', F'', ..., назовем истинно искаженными. Согласно (3.6) имеем

$$g_{(\ldots)}(\zeta)\,d\zeta^{(\ldots)}\,d\zeta^{(\ldots)} = g'_{(\ldots)}(\zeta')\,d\zeta'^{(\ldots)}\,d\zeta'^{(\ldots)} = \ldots = \ldots = inv, \tag{3.7}$$

где $g_{(\ldots)}(\zeta) = g_{(\ldots)}(\zeta^F(\zeta))$, и т. п. Поэтому функции $\zeta^{(\ldots)}(\zeta^F)$ могут быть отождествлены с координатами точки P искаженного многообразия $G(2.2.3)$. Следовательно, если многообразие $G(2.2.3)$ плоское в некоторой системе F, то оно такое же и в остальных системах F', F'', ..., и наоборот, если метрика искаженная в системе F, то она искаженная и в остальных системах F', F'', ... Следует заметить, что каждой отдельной калибровке (γ^F) векторного поля $a_{(\ldots)}(\zeta^F)$ соответствует свой реализация набора искаженных координат.

Введем локальную полную группу искажения

$$\hat{G}^{loc}(2.2.3) = \widetilde{SO}(6.6) \otimes \hat{D}^{loc}(2.2.3). \tag{3.8}$$

Бесконечно малый интернал является инвариантом этой группы.

§ 4 Лагранжева формулировка. Полное действие системы взаимодействующих искажением полей складывается из двух частей

$$S = S_p + S_F = \int L_{ap}\, d\zeta^{(1,1,1)} \wedge \ldots \wedge d\zeta^{(2,2,3)} +$$

$$+ \int L_F \sqrt{g}\, d\zeta^{(111)} \wedge \ldots \wedge d\zeta^{(223)}. \tag{4.1}$$

Посредством лагранжиана L_{ap} описывается определенное в плоском многообразии $G(2.2.3)$ калибровочное векторное поле $a_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^p)$, а посредством лагранжиана L_F — остальные поля $\psi_A = \psi_1(\zeta), \ldots, \psi_n(\zeta)$; $\overline{\psi}_A = \overline{\psi}_1(\zeta), \ldots, \overline{\psi}_n(\zeta)$, определенные в искаженном многообразии $G(223)$. Лагранжиан L_{ap} инвариантен относительно преобразований группы $S\widehat{O}(6.6) \otimes U^{loc}(1)$. В свою очередь, наличие калибровочного поля $a_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^p)$ обеспечивает инвариантность L_F относительно локальной полной группы искажения $\hat{G}^{loc}(2.2.3)(3.8)$.

Уравнения поля искажения и остальных полей следующие

$$\frac{\delta^p L_{ap}}{\delta^p a_{(\lambda,\mu,\alpha)}} = j^{(\lambda,\mu,\alpha)} = -\frac{\delta^p (L_F \hat{J}_\Phi)}{\delta^p a_{(\lambda,\mu,\alpha)}}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\delta L_F}{\delta \psi_A} = 0, \quad \frac{\delta L_F}{\delta \overline{\psi}_A} = 0, \tag{4.3}$$

где $\dfrac{\delta^p L}{\delta^p \Phi}$ и $\dfrac{\delta L}{\delta \Phi}$ — вариации Эйлера—Лагранжа

$$\frac{\delta^p L}{\delta^p \Phi} = \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)} \frac{\partial L}{\partial(\partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\Phi)}, \tag{4.4}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} = \frac{\partial L}{\partial \Phi} - \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_{;(\lambda\mu\alpha)}}\right)_{;(\lambda\mu\alpha)},$$

$(\ldots)_{;(\lambda\mu\alpha)}$ — ковариантная производная, $\hat{J}_\Phi \equiv \sqrt{g} \det\left|\psi^{(\lambda\mu\alpha)}_{(\rho,\omega,\gamma)}\right|$. Калибровочно инвариантный лагранжиан L_{ap} имеет следующий вид

$$L_{ap} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}^{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)} \mathcal{F}_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)}, \tag{4.5}$$

где

$$\mathcal{F}_{(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)} = \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)} a_{(\tau,\nu,\beta)} - \partial_{(\tau,\nu,\beta)} a_{(\lambda,\mu,\alpha)}. \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.2) получим уравнение движения поля искажения

$$\underset{\zeta^p}{\Box} a^{(\lambda,\mu,\alpha)} - \partial^{(\lambda,\mu,\alpha)} \partial_{(\tau,\nu,\beta)} a^{(\tau,\nu,\beta)} = j^{(\lambda,\mu,\alpha)} = -\frac{\delta^p (L_F \hat{J}_\Phi)}{\delta^p a_{(\lambda,\mu,\alpha)}}, \tag{4.7}$$

где

$$j^{(\lambda,\mu,\alpha)} = -\frac{\delta^p (L_F \hat{J}_\Phi)}{\delta^p a_{(\lambda,\mu,\alpha)}} = -\frac{\partial g^{(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)}}{\partial a_{(\lambda,\mu,\alpha)}} \frac{\delta^p (L_F \hat{J}_\Phi)}{\delta^p g^{(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)}}{\partial a_{(\lambda,\mu,\alpha)}} T_{(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)}. \tag{4.8}$$

При этом, тензор энергии-импульса системы, находящейся в искаженном многообразии $\bar{G}(223)$, задается посредством формулы

$$T_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)} = 2\,\frac{\partial^{\delta}(L_F \mathcal{J}_{\Phi})}{\partial^{\delta} g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}} = \frac{2}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial^{\delta}(\sqrt{g}\,L_F)}{\partial^{\delta} g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{g}L_F)}{\partial g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}} - \partial_{(\nu\gamma)}\,\frac{\partial(\sqrt{g}\,L_F)}{\partial(\partial_{(\nu\gamma)}\,g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)})}\right) \tag{4.9}$$

Неоднозначность в выборе потенциалов $a^{(\lambda\alpha)}$ устраняется фиксацией калибровки

$$\partial_{(\lambda\alpha)}\,a^{(\lambda\alpha)} = 0.$$

§ 5. Законы сохранения полной энергии-импульса. Для формулировки законов сохранения полной энергии-импульса системы полей, взаимодействующих посредством поля искажения, обратимся к формуле (4.1), в которой представим лагранжиан L_F в виде

$$L_F = L_F(a^p,\ \varphi_A,\ \overline{\varphi}_A) = L_F(a^p,\ \varphi_A^p,\ \overline{\varphi}_A^p) \equiv L_F^p, \tag{5.1}$$

где

$$\varphi_A^p = \varphi_A(\zeta(\zeta^p)),$$

$$\overline{\varphi}_A^p = \overline{\varphi}_A(\zeta(\zeta^p)). \tag{5.2}$$

Следовательно,

$$S = \int (L_{a^p} + L_F^p \mathcal{J}_{\Phi})\, d\zeta^{(1,1,1)} \wedge \ldots \wedge d\zeta^{(3,2,3)}. \tag{5.3}$$

С помощью последнего, стандартным методом, выводим законы сохранения полной энергии-импульса системы взаимодействующих искажением полей, отображенных на плоском многообразии $G(2.2.3)$.

§ 6. Определенные в $G(223)$ простейшие свободные поля.

а) Лагранжиан определенного в $G(223)$ скалярного комплексного поля записывается в виде

$$\sqrt{g}\,L_F^{\varphi} = \sqrt{g}\,g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\,\partial_{(\lambda\alpha)}\,\varphi^{*}(\zeta)\,\partial_{(\mu\beta)}\,\varphi(\zeta), \tag{6.1}$$

которому соответствуют уравнения движения

$$-g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\,\partial_{(\lambda\alpha)}\,\partial_{(\mu\beta)}\,\varphi(\zeta) = 0,$$

$$-g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\,\partial_{(\lambda\alpha)}\,\partial_{(\mu\beta)}\,\varphi^{*}(\zeta) = 0, \tag{6.2}$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)} = \partial_{(\lambda\alpha)}\,\varphi^{*}\,\partial_{(\mu\beta)}\,\varphi + \partial_{(\mu\beta)}\,\varphi^{*}\,\partial_{(\lambda\alpha)}\,\varphi -$$

$$-\,g_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\,\partial^{(\nu\gamma)}\,\varphi^{*}\,\partial_{(\nu\gamma)}\,\varphi. \tag{6.3}$$

б) Комплексному векторному полю соответствует лагранжиан

$$\sqrt{g}\,L_F^{\vec{\varphi}} = -\frac{\sqrt{g}}{2}\,g^{(\lambda\alpha)(\nu\gamma)}\,g^{(\mu\beta)(\tau\delta)}\,F_{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\,F^{*}_{(\nu\gamma)(\tau\delta)}. \tag{6.4}$$

уравнения

$$\begin{cases} d(F_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}\, d\zeta^{(\lambda\mu\alpha)} \wedge d\zeta^{(\tau\nu\beta)}) = 0, \\ \nabla_{(\tau\nu\beta)}\, F^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d(F^{*}_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}\, d\zeta^{(\lambda\mu\alpha)} \wedge d\zeta^{(\tau\nu\beta)}) = 0, \\ \nabla_{(\tau\nu\beta)}\, F^{*(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

и тензор энергии-импульса

$$T_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} = F^{*}_{(\lambda\mu\alpha)(\sigma\varkappa k)}\, \partial_{(\tau\nu\beta)}\, \varphi^{(\sigma\varkappa k)} + \partial_{(\tau\nu\beta)}\, \varphi^{*(\sigma\varkappa k)}\, F_{(\lambda\mu\alpha)(\sigma\varkappa k)} - g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}\, L^{\vec{\varphi}}_{F}\,. \tag{6.6}$$

в) Биспинорное поле описывается лагранжианом

$$\sqrt{g}\, L^{\psi}_{F} = \frac{i\sqrt{g}}{2} \Big\{ \overline{\psi}(\zeta)\, \gamma^{(\lambda\mu\alpha)}\, (\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - \Gamma_{(\lambda\mu\alpha)})\, \psi(\zeta) - \tag{6.7}$$

$$- \overline{\psi}(\zeta)\, (\overleftarrow{\partial_{(\lambda\mu\alpha)}} - \overline{\Gamma}_{(\lambda\mu\alpha)})\, \gamma^{(\lambda\mu\alpha)}\, \psi(\zeta) \Big\},$$

где $\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}$ — матричная реализация базисных векторов $\hat{e}^{(\lambda\mu\alpha)}$

$$(\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}) = D^{T}(\gamma^{(\tau,\nu,\beta)}),\ (\gamma_{(\lambda\mu\alpha)}) = D(\gamma_{(\tau,\nu,\beta)}). \tag{6.8}$$

Величины Γ и $\overline{\Gamma}$ выражаются через коэффициенты Риччи

$$\Gamma_{(\lambda\mu\alpha)} = \frac{1}{4}\, \Delta_{(\lambda\mu\alpha)(i,j,l)(m,n,p)}\, \gamma^{(i,j,l)}\, \gamma^{(m,n,p)},$$

$$\overline{\Gamma}_{(\lambda\mu\alpha)} = \frac{1}{4}\, \Delta_{(\lambda\mu\alpha)(i,j,l)(m,n,p)}\, \gamma^{(m,n,p)}\, \gamma^{(i,j,l)}, \tag{6.9}$$

где

$$\Delta_{(\lambda\mu\alpha)(i,j,l)(m,n,p)} = \Delta_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)}\, h^{(\tau\nu\beta)}_{(i,j,l)}\, h^{(\rho\omega\gamma)}_{(m,n,p)},$$

$$\Delta_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)(\rho\omega\gamma)} = \frac{1}{2} (\partial_{(\tau\nu\beta)}\, g_{(\lambda\mu\alpha)(\rho\omega\gamma)} - \partial_{(\rho\omega\gamma)}\, g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} -$$

$$- \partial_{(\lambda\mu\alpha)}\, g_{(\rho\omega\gamma)(\tau\nu\beta)}) + h^{(i,j,l)}_{(\tau\nu\beta)}\, \partial_{(\lambda\mu\alpha)}\, h_{(\rho\omega\gamma)(i,j,l)}, \tag{6.10}$$

$$g_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} = h^{(i,j,l)}_{(\lambda\mu\alpha)}\, h_{(i,j,l)(\tau\nu\beta)} = g_{(i,j,l)(m,n,p)}\, h^{(i,j,l)}_{(\lambda\mu\alpha)}\, h^{(m,n,p)}_{(\tau\nu\beta)}\,.$$

$$\gamma_{(\lambda\mu\alpha)}\, h^{(\lambda\mu\alpha)}_{(i,j,l)} = \gamma_{(i,j,l)},\quad \gamma^{(\lambda\mu\alpha)} = \gamma^{(i,j,l)}\, h^{(\lambda\mu\alpha)}_{(i,j,l)}\,.$$

Уравнения движения следующие

$$i\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}\, (\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - \Gamma_{(\lambda\mu\alpha)})\, \psi(\zeta) = 0,$$

$$i\overline{\psi}(\zeta)(\overleftarrow{\partial}_{(\lambda\mu\alpha)} - \overline{\Gamma}_{(\lambda\mu\alpha)})\gamma^{(\lambda\mu\alpha)} = 0, \tag{6.11}$$

где

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_{(\lambda\mu\alpha)}\, (\sqrt{g}\, j^{(\lambda\mu\alpha)}) = 0,$$

$$j^{(\pm a)} = \overline{\psi}(\zeta)\gamma^{(\pm a)}\psi(\zeta). \tag{6.12}$$

В уравнениях (6.11) выделим компоненты η и u

$$i\underset{\eta}{g}^{(\pm a)}(\underset{\eta}{\partial}_{(\pm a)} - \underset{\eta}{\Gamma}_{(\pm a)})\psi(\zeta) = -i\underset{u}{g}^{(\pm a)}(\underset{u}{\partial}_{(\pm a)} - \underset{u}{\Gamma}_{(\pm a)})\psi(\zeta).$$

$$i\overline{\psi}(\zeta)(\overleftarrow{\underset{\eta}{\partial}}_{(\pm a)} - \underset{\eta}{\overline{\Gamma}}_{(\pm a)})\underset{\eta}{g}^{(\pm a)} = -i\overline{\psi}(\zeta)(\overleftarrow{\underset{u}{\partial}}_{(\pm a)} - \underset{u}{\overline{\Gamma}}_{(\pm a)})\underset{u}{g}^{(\pm a)}. \tag{6.13}$$

Здесь

$$\underset{\eta}{g}^{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{(11a)} + \gamma^{(21a)}), \quad \underset{u}{g}^{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{(11a)} - \gamma^{(21a)}),$$

$$\underset{\eta}{g}^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{(12a)} + \gamma^{(22a)}), \quad \underset{u}{g}^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^{(12a)} - \gamma^{(22a)}). \tag{6.14}$$

$$\underset{\eta}{\Gamma}_{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(11a)} + \Gamma_{(21a)}), \quad \underset{u}{\Gamma}_{(+a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(11a)} - \Gamma_{(21a)}),$$

$$\underset{\eta}{\Gamma}_{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(12a)} + \Gamma_{(22a)}), \quad \underset{u}{\Gamma}_{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_{(12a)} - \Gamma_{(22a)}). \tag{6.15}$$

Точно таким же образом величины $\underset{\eta}{\overline{\Gamma}}_{(\pm a)}$ и $\underset{u}{\overline{\Gamma}}_{(\pm a)}$ выражаются через $\overline{\Gamma}_{(\lambda\mu a)}$.

§ 7. Искривление как частное искажение. Рассмотрим частный случай искажения, когда

$$a^{(1,1,a)}(\zeta^p) = a^{(2,1,a)}(\zeta^p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\eta}{a}^{(+a)}(\zeta^p),$$

$$a^{(1,2,a)}(\zeta^p) = a^{(2,2,a)}(\zeta^p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\eta}{a}^{(-a)}(\zeta^p). \tag{7.1}$$

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\eta}{a}^{(\pm a)}(\zeta^p) = a^{(\pm a)}(\eta^p)\varphi(u^p), \tag{7.2}$$

$$\underset{u^p}{\Box}\varphi(u^p) = 0.$$

С помощью формул (7.1) и (2.10) получим

$$\sigma^{(11a)} = \sigma^{(21a)} = \sigma^{(+a)}, \tag{7.3}$$

$$\sigma^{(12a)} = \sigma^{(22a)} = \sigma^{(-a)}.$$

Поэтому

$$\underset{\eta}{\hat{e}}^{(\pm a)} = \underset{\eta}{O}^{(\pm a)} \otimes \sigma^{(\pm a)}, \qquad \underset{u}{\hat{e}}^{(\pm a)} = \underset{u}{O}^{(\pm a)} \otimes \sigma^{(\pm a)}, \tag{7.4}$$

где

$$\underset{\eta}{O}^{(\pm\alpha)}=\underset{\eta}{O}^{\pm}+\frac{\varkappa_f}{\sqrt{2}}\underset{\eta}{a}^{(\pm\alpha)}\underset{\eta}{O}^{\mp},$$

$$\underset{u}{O}^{(\pm\alpha)}=\underset{u}{O}^{\pm}-\frac{\varkappa_f}{\sqrt{2}}\underset{\eta}{a}^{(\pm\alpha)}\underset{u}{O}^{\mp},$$

$$(7.5)$$

$$\underset{\eta}{O}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{11}+\xi^{21}),\quad \underset{u}{O}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{11}-\xi^{21}),$$

$$\underset{\eta}{O}^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{12}+\xi^{22}),\quad \underset{u}{O}^{-}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^{12}-\xi^{22}).$$

Здесь $\underset{\eta}{\widehat{e}}^{(\lambda\alpha)}$ и $\underset{u}{\widehat{e}}^{(\lambda\alpha)}$ — компоненты базисных векторов искривленных многообразий $\underset{\eta}{G}(2\,3)$ и $\underset{u}{G}(23)$. Выберем независимые компоненты тензора ориентации $\Phi_{(\rho,\omega,\gamma)(\sigma,\varkappa,k)}$ (3.6) в виде

$$\Phi_{(1,1,\alpha)(1,1,\beta)}=\Phi_{(2,1,\alpha)(2,1,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(+\alpha)(+\beta)}+\underset{u}{\Phi}_{(+\alpha)(+\beta)}),$$

$$\Phi_{(1,2,\alpha)(1,1,\beta)}=\Phi_{(2,2,\alpha)(2,1,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(-\alpha)(+\beta)}+\underset{u}{\Phi}_{(-\alpha)(+\beta)}),$$

$$\Phi_{(1,2,\alpha)(2,1,\beta)}=\Phi_{(2,2,\alpha)(1,1,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(-\alpha)(+\beta)}-\underset{u}{\Phi}_{(-\alpha)(+\beta)}),\qquad(7.6)$$

$$\Phi_{(1,2,\alpha)(1,2,\beta)}=\Phi_{(2,2,\alpha)(2,2,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(-\alpha)(-\beta)}+\underset{u}{\Phi}_{(-\alpha)(-\beta)}),$$

$$\Phi_{(1,1,\alpha)(2,1,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(+\alpha)(+\beta)}-\underset{u}{\Phi}_{(+\alpha)(+\beta)}),$$

$$\Phi_{(1,2,\alpha)(2,2,\beta)}=\frac{1}{2}(\underset{\eta}{\Phi}_{(-\alpha)(-\beta)}-\underset{u}{\Phi}_{(-\alpha)(-\beta)}),$$

где $\underset{\eta}{\Phi}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}$ и $\underset{u}{\Phi}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}$ — тензоры ориентации, определенные в многообразиях $\underset{\eta}{G}(2.3)$ и $\underset{u}{G}(2.3)$ (см. гл.1) соответственно. Следует заметить, что преобразования из группы $\widehat{SO}(6.6)$ не нарушают структуру (7.6) тензора ориентации. Из (3.6), с учетом (7.6), находим

$$d\eta^2=\underset{\eta}{g}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}\,d\eta^{(\lambda\alpha)}\,d\eta^{(\tau\beta)}=(\underset{\eta}{g}^{0}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}+\underset{\eta}{\Phi}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)})\,d\eta_p^{(\lambda\alpha)}\,d\eta_p^{(\tau\beta)}=inv,\qquad(7.7)$$

$$du^2=\underset{u}{g}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}\,du^{(\lambda\alpha)}\,du^{(\tau\beta)}=(\underset{u}{g}^{0}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)}+\underset{u}{\Phi}_{(\lambda\alpha)(\tau\beta)})\,du_p^{(\lambda\alpha)}\,du_p^{(\tau\beta)}=inv.$$

То есть, в рассматриваемом частном случае имеем

$$G(2\,2\,3)=\underset{\eta}{G}(2\,3)\oplus\underset{u}{G}(2\,3).\qquad(7.8)$$

§ 8. Чисто внутреннее искажение многообразия G(2.2.3). Поле чисто внутреннего искажения определяется следующим образом:

$$a^{(1,2,+)}(\zeta^p) = -a^{(2,2,+)}(\zeta^p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^{(+)}_{u}(\zeta^p), \qquad (8.1)$$

$$a^{(1,2,-)}(\zeta^p) = -a^{(2,2,-)}(\zeta^p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^{(-)}_{u}(\zeta^p).$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\, a^{(+)}_{u}(\zeta^p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^{(-)}_{u}(\zeta^p) = a^{0}_{u} = a^{0}_{u}(x^p)\,\xi_u(u^p). \qquad (8.2)$$

В этом случае, посредством формул (2.2.5.14) и (1.14) находим искажение базисных векторов

$$\hat{e}{}^{(+1)}_{\xi} = \cos\delta^{(2)}\cos\delta^{(1)}\left(\hat{e}^{(+1)}_{0\,\xi} + \operatorname{tg}\delta^{(1)}\,\hat{e}^{(+1)}_{0\,u}\right) - \hat{e}^{(+2)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(-2)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(2)}\right),$$

$$\hat{e}{}^{(-1)}_{\xi} = \cos\delta^{(2)}\cos\delta^{(1)}\left(\hat{e}^{(-1)}_{0\,\xi} + \operatorname{tg}\delta^{(1)}\,\hat{e}^{(-1)}_{0\,u}\right) - \hat{e}^{(-2)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(+2)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(2)}\right), \qquad (8.3)$$

$$\hat{e}{}^{(+2)}_{\xi} = \cos\delta^{(1)}\cos\delta^{(2)}\left(\hat{e}^{(+2)}_{0\,\xi} + \operatorname{tg}\delta^{(2)}\,\hat{e}^{(+2)}_{0\,u}\right) - \hat{e}^{(+1)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(1)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(2)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(-1)}_{0\,u}\,\frac{\sin\delta^{(1)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right),$$

$$\hat{e}{}^{(\pm 1)}_{u} = \cos\delta^{(2)}\cos\delta^{(1)}\left(\hat{e}^{(\pm 1)}_{0\,u} - \operatorname{tg}\delta^{(1)}\,\hat{e}^{(\mp 1)}_{0\,\xi}\right) - \hat{e}^{(+2)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(-2)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(2)}\right),$$

$$\hat{e}{}^{(+2)}_{u} = \cos\delta^{(1)}\cos\delta^{(2)}\left(\hat{e}^{(+2)}_{0\,u} - \operatorname{tg}\delta^{(2)}\,\hat{e}^{(-2)}_{0\,\xi}\right) - \hat{e}^{(+1)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(1)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(-1)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(1)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right),$$

$$\hat{e}{}^{(-2)}_{u} = \cos\delta^{(1)}\cos\delta^{(2)}\left(\hat{e}^{(-2)}_{0\,u} - \operatorname{tg}\delta^{(2)}\,\hat{e}^{(+2)}_{0\,\xi}\right) - \hat{e}^{(+2)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(1)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(2)}\right) +$$

$$+ \hat{e}^{(\pm 1)}_{0\,\xi}\,\frac{\sin\delta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\delta^{(1)}\right).$$

Здесь

$$\delta^{(1)} = \delta^{(+1)} = -\delta^{(-1)}, \qquad (8.4)$$

$$\operatorname{tg}\theta^{(\alpha)} = -\underset{j}{x}\,\underset{u}{a}^{0\alpha}.$$

То есть чисто внутреннее искажение многообразия $G(2.2.3)$ приводит к преобразованию импульсов

$$\begin{aligned} \underset{\eta_f}{P}_{(\lambda\alpha)} &= (\underset{\eta}{P}_{(\lambda\alpha)} + \underset{\eta}{S}_{(\lambda\alpha)} + \underset{u}{q}_{(\lambda\alpha)}) \backsim \underset{\eta_f}{G}(2.3), \\ \underset{u_f}{P}_{(\lambda\alpha)} &= (\underset{u}{P}_{(\lambda\alpha)} + \underset{u}{S}_{(\lambda\alpha)} + \underset{\eta}{q}_{(\lambda\alpha)}) \backsim \underset{u_f}{G}(2.3). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Импульсы $\underset{\eta}{P}_{(\lambda\alpha)}$ и $\underset{u}{P}_{(\lambda\alpha)}$ соответствуют многообразиям $\underset{\eta}{G}(2.3)$ и $\underset{u}{G}(2.3)$, а $\underset{\eta}{S}_{(\lambda\alpha)}$, $\underset{u}{q}_{(\lambda\alpha)}$ и $\underset{u}{S}_{(\lambda\alpha)}$, $\underset{\eta}{q}_{(\lambda\alpha)}$ их искажения. В случае (8.1,2) из (8.3) определим

$$\begin{aligned}
&\underset{\eta}{S}_{(\pm1)} = (\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)} - 1)\underset{\eta}{P}_{(\pm1)}, \quad \underset{u}{q}_{(\pm1)} = -\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}\underset{u}{P}_{(\mp1)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{u}{P}_{(\pm3)} - \frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{u}{P}_{(\pm2)}, \\
&\underset{\eta}{S}_{(\pm2)} = (\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)} - 1)\underset{\eta}{P}_{(\pm2)}, \quad \underset{u}{q}_{(\pm2)} = -\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(2)}\underset{u}{P}_{(\mp2)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{u}{P}_{(\pm1)} - \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{u}{P}_{(\pm3)}, \\
&\underset{\eta}{S}_{(\pm3)} = (\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)} - 1)\underset{\eta}{P}_{(\pm3)}, \quad \underset{u}{q}_{(\pm3)} = -\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{u}{P}_{(\mp3)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{u}{P}_{(\pm2)} - \frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{u}{P}_{(\pm1)}, \\
&\underset{u}{S}_{(\pm1)} = (\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)} - 1)\underset{u}{P}_{(\pm1)}, \quad \underset{\eta}{q}_{(\pm1)} = \cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}\underset{\eta}{P}_{(\mp1)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{\eta}{P}_{(\pm3)} - \frac{\sin\theta^{(3)}}{3}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{\eta}{P}_{(\pm2)}, \\
&\underset{u}{S}_{(\pm2)} = (\cos^{(3)}\cos\theta^{(1)} - 1)\underset{u}{P}_{(\pm2)}, \quad \underset{\eta}{q}_{(\pm2)} = \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(2)}\underset{\eta}{P}_{(\mp2)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{\eta}{P}_{(\pm1)} - \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{\eta}{P}_{(\pm3)}, \\
&\underset{u}{S}_{(\pm3)} = (\cos\theta^{(1)}\cos^{(2)} - 1)\underset{u}{P}_{(\pm3)}, \quad \underset{\eta}{q}_{(\pm3)} = \cos\theta^{(1)}\cos^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{\eta}{P}_{(\mp3)} + \\
&\quad + \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{\eta}{P}_{(\pm2)} - \frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{\eta}{P}_{(\pm1)}.
\end{aligned} \tag{8.6}$$

§ 9. Простейшие свободные поля при чисто внутреннем искажении многообразия $G(2.2.3)$.

а) Уравнения движения (6.2) скалярного комплексного поля в рассматриваемом случае записываются в виде

$$-g_0^{(\rho\alpha)(\sigma\beta)}(\underset{\eta_f}{\partial}_{(\rho\alpha)}\underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)} - \underset{u_f}{\partial}_{(\rho\alpha)}\underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)})\,\varphi(\zeta) =$$

$$-(\Box_{x_f} - \Box_{u_f})\varphi(\cdot) = (\Box_{x_f} - \Box_{u_f})\varphi(\cdot) = 0, \tag{9.1}$$

$$-g^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}(\partial_{(\lambda\alpha)x_f}\partial_{(\mu\beta)x_f} - \partial_{(\lambda\alpha)u_f}\partial_{(\mu\beta)u_f})\overset{*}{\varphi}(\cdot) =$$

$$= (\Box_{x_f} - \Box_{u_f})\overset{*}{\varphi}(\cdot) = (\Box_{x_f} - \Box_{u_f})\overset{*}{\varphi}(\cdot) = 0.$$

Здесь

$$<\hat{e}_0^{(\lambda\alpha)}, \hat{e}_0^{(\mu\beta)}> = g_0^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)},$$

$$\Box_{x_f} = -g_0^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\partial_{(\lambda\alpha)x_f}\partial_{(\mu\beta)x_f} = \Box_{x_f} = -\partial^2_{0x_f} + \partial^2_{3x_f},$$

$$\Box_{u_f} = -g_0^{(\lambda\alpha)(\mu\beta)}\partial_{(\lambda\alpha)u_f}\partial_{(\mu\beta)u_f} = \Box_{u_f} = -\partial^2_{0u_f} + \partial^2_{3u_f}, \tag{9.2}$$

$$\partial_{0x_f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{(+s)x_f} + \partial_{(-s)x_f}), \quad \partial_{0u_f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{(+s)u_f} + \partial_{(-s)u_f}),$$

$$\partial_{3x_f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{(+s)x_f} - \partial_{(-s)x_f}), \quad \partial_{3u_f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_{(+s)u_f} - \partial_{(-s)u_f}).$$

С помощью (8.6) нетрудно установить, что

$$\frac{\partial x_f^{(\lambda\alpha)}}{\partial x_f^{(\mu\beta)}} = \frac{\partial u_f^{(\lambda\alpha)}}{\partial u_f^{(\mu\beta)}} = \delta^{(\lambda\alpha)}_{(\mu\beta)}, \quad \frac{\partial x_f^{(\lambda\alpha)}}{\partial u_f^{(\mu\beta)}} = \frac{\partial u_f^{(\lambda\alpha)}}{\partial x_f^{(\mu\beta)}} = 0,$$

или

$$\frac{\partial x_f^i}{\partial x_f^j} = \frac{\partial u_f^i}{\partial u_f^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial x_f^i}{\partial u_f^j} = \frac{\partial u_f^i}{\partial x_f^j} = 0.$$

Решения уравнений (9.1) ищем в виде

$$\varphi(\cdot) = \varphi(x_f^{(\lambda\alpha)})\varphi_0(u_f^{(\lambda\alpha)}), \tag{9.3}$$

или

$$\varphi(\cdot) = \varphi(x_f^0, x_f^3)\varphi_0(u_f^0, u_f^3). \tag{9.4}$$

Введем функцию искаженной массы покоя скалярного поля

$$\Box_{u_f}\varphi_0(u_f) = m_f^2\varphi_0(u_f),$$

(9.5)

$$\Box_{u_f}\overset{*}{\varphi}_0(u_f) = \overset{*}{m}{}_f^2\overset{*}{\varphi}_0(u_f).$$

Тогда уравнения движения скалярного комплексного поля, определенного в чисто внутренне искаженном многообразии $G_{x_f}(2.3)$ или в континууме $R_{f^x}(3) \otimes T_{x_f}(3)$, имеют вид

$$(\underset{\eta_f}{\Box} - m_f^2)\varphi(\eta_f) = 0, \quad (\underset{\eta_f}{\Box} - m_f^2)\varphi^*(\eta_f) = 0. \tag{9.6}$$

или

$$(\underset{x_f}{\Box} - m_f^2)\varphi(x_f) = 0, \quad (\underset{x_f}{\Box} - m_f^2)\varphi^*(x_f) = 0. \tag{9.7}$$

б) Компонентам $\underset{\eta_f, u_f}{\varphi^{(\lambda\alpha)}}$, $\underset{\eta_f, u_f}{\varphi^{*(\lambda\alpha)}}$, $\underset{x_f, u_f}{\varphi^{\mu}}$, $\underset{x_f, u_f}{\varphi^{*\mu}}$ комплексного векторного поля, согласно (6.5) и (8.3), соответствуют следующие уравнения

$$\begin{gathered}(\underset{\eta_f}{\Box} - \underset{u_f}{\Box})\underset{\eta_f, u_f}{\varphi^{(\lambda\alpha)}} = 0, \quad (\underset{\eta_f}{\Box} - \underset{u_f}{\Box})\underset{\eta_f, u_f}{\varphi^{*(\lambda\alpha)}} = 0. \\ (\underset{x_f}{\Box} - \underset{u_f}{\Box})\underset{x_f, u_f}{\varphi^{\mu}} = 0, \quad (\underset{x_f}{\Box} - \underset{u_f}{\Box})\underset{x_f, u_f}{\varphi^{*\mu}} = 0.\end{gathered} \tag{9.8}$$

$$(\lambda = \pm; \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad \mu = 01, 02, 03, 1, 2, 3).$$

При выводе учитывали инвариантные условия

$$\begin{gathered}\underset{\eta_f}{\partial_{(\lambda\alpha)}}\underset{\eta_f}{\varphi^{(\lambda\alpha)}} - \underset{u_f}{\partial_{(\lambda\alpha)}}\underset{u_f}{\varphi^{(\lambda\alpha)}} = 0, \\ \underset{\eta_f}{\partial_{(\lambda\alpha)}}\underset{\eta_f}{\varphi^{*(\lambda\alpha)}} - \underset{u_f}{\partial_{(\lambda\alpha)}}\underset{u_f}{\varphi^{*(\lambda\alpha)}} = 0.\end{gathered} \tag{9.9}$$

Решения ищем в виде

$$\begin{gathered}\underset{\eta_f}{\varphi^{(\lambda\alpha)}}(\cdot) = \varphi^{(\lambda\alpha)}(\eta_f)\,\varphi(u_f), \quad \underset{\eta_f}{\varphi^{*(\lambda\alpha)}}(\cdot) = \varphi^{*(\lambda\alpha)}(\eta_f)\varphi(u_f), \\ \underset{x_f}{\varphi^{\mu}}(\cdot) = \varphi^{\mu}(x_f)\,\varphi(u_f), \quad \underset{x_f}{\varphi^{*\mu}}(\cdot) = \varphi^{*\mu}(x_f)\,\varphi(u_f).\end{gathered} \tag{9.10}$$

Введем функцию искаженной массы покоя векторного поля, определенного в $\underset{\eta_f}{G}(2.3)$ или $\underset{x_f}{I}(3) \oplus \underset{x_f}{T}(3)$

$$\begin{gathered}\underset{u_f}{\Box}\varphi(u_f) = m_f^2\varphi(u_f), \\ \underset{u_f}{\Box}\varphi^*(u_f) = m_f^2\varphi^*(u_f).\end{gathered} \tag{9.11}$$

Окончательно получим

$$\begin{gathered}(\underset{\eta_f}{\Box} - m_f^2)\varphi^{(\lambda\alpha)}(\eta_f) = 0, \\ (\underset{\eta_f}{\Box} - m_f^2)\varphi^{*(\lambda\alpha)}(\eta_f) = 0,\end{gathered} \tag{9.12}$$

или

$$(\underset{x_\gamma}{\Box} - m_\gamma^2)\,\varphi^{*}(x_\gamma) = 0,$$

$$(\underset{x_\gamma}{\Box} - m_\gamma^2)\,\varphi^{**}(x_\gamma) = 0. \tag{9.13}$$

в) Уравнения движения (6.11) принимают вид

$$i\gamma^{(\lambda\alpha)}(\partial_{(\lambda\alpha)} - \Gamma_{(\lambda\alpha)})\,\psi(\cdot) =$$
$$= i\{\underset{\eta}{g}^{(\lambda\alpha)}(\underset{\eta}{\partial}_{(\lambda\alpha)} - \underset{\eta}{\Gamma}_{(\lambda\alpha)}) - \underset{u}{g}^{(\lambda\alpha)}(\underset{u}{\partial}_{(\lambda\alpha)} - \underset{u}{\Gamma}_{(\lambda\alpha)})\}\,\psi(\cdot) =$$
$$= i\{\hat{\xi}^{(1,1,0)}\underset{x_1}{\partial}_{0x} + \hat{\xi}^{(1,2,0)}\underset{x_1}{\partial}_{x} + \hat{\xi}^{(2,2,0)}\underset{u_1}{\partial}_{0u} + \hat{\xi}^{(2,1,0)}\underset{u_1}{\partial}_{u}\}\,\psi(\cdot) = 0,$$

$$i\bar{\psi}(\cdot)(\overleftarrow{\partial}_{(\lambda\alpha)} - \bar{\Gamma}_{(\lambda\alpha)})\,\gamma^{(\lambda\alpha)} =$$
$$= i\bar{\psi}(\cdot)\{(\underset{\eta}{\overleftarrow{\partial}}_{(\lambda\alpha)} - \underset{\eta}{\bar{\Gamma}}_{(\lambda\alpha)})\underset{\eta}{g}^{(\lambda\alpha)} - (\underset{u}{\overleftarrow{\partial}}_{(\lambda\alpha)} - \underset{u}{\bar{\Gamma}}_{(\lambda\alpha)})\underset{u}{g}^{(\lambda\alpha)}\} =$$
$$= i\bar{\psi}(\cdot)\{\hat{\xi}^{(1,1,0)}\underset{x_1}{\overleftarrow{\partial}}_{0x} + \hat{\xi}^{(1,2,0)}\underset{x_1}{\overleftarrow{\partial}}_{x} + \hat{\xi}^{(2,2,0)}\underset{u_1}{\overleftarrow{\partial}}_{0u} + \hat{\xi}^{(2,1,0)}\underset{u_1}{\overleftarrow{\partial}}_{u}\} = 0. \tag{9.14}$$

Решения представим в виде

$$\psi(\cdot) = \psi(\eta_1^{(\lambda\alpha)})\,\varphi(u_1^{(\lambda\alpha)}), \tag{9.15}$$

$$\psi(\cdot) = \psi(x_1^{\mu})\,\varphi(u_1^{\mu}). \tag{9.16}$$

Здесь $\varphi(u_1^{(\lambda\alpha)})$ и $\varphi(u_1^{\mu})$ — скаляры, определенные в $\underset{u_1}{G}(2.3)$ и $\underset{u_1}{P}(3) \oplus \underset{u_1}{T}(3)$; $\psi(\eta_1^{(\lambda\alpha)})$ и $\psi(x_1^{\mu})$ — биспиноры, определенные в $\underset{\eta_1}{G}(2.3)$ и $\underset{x_1}{P}(3) \oplus \underset{x_1}{T}(3)$; $\{\hat{\xi}^{(\lambda,\mu,\alpha)}\}$ — матричная реализация базисных векторов (3.4) (гл. 1).

Введем функцию искаженной массы покоя биспинорного поля

$$m_1\varphi(u_1)\,I_4\,\psi(\eta_1) = -i\underset{u_1}{\partial}_{(\lambda\alpha)}\varphi(u_1)\,\underset{u}{\gamma}^{(\lambda\alpha)}\,\psi(\eta_1),$$

$$m_1\varphi^{*}(u_1)\,\bar{\psi}(\eta_1)\,I_4 = i\underset{u_1}{\partial}_{(\lambda\alpha)}\varphi^{*}(u_1)\,\bar{\psi}(\eta_1)\,\underset{u}{\gamma}^{(\lambda\alpha)}, \tag{9.17}$$

или

$$m_1\varphi(u_1)\,\underset{1}{I}\,\psi(x_1) = -i\underset{u_1}{\partial}_{\mu}\varphi(u_1)\,\underset{u}{\gamma}^{\mu}\,\psi(x_1),$$

$$m_1\varphi^{*}(u_1)\,\bar{\psi}(x_1)\,\underset{1}{I} = i\underset{u_1}{\partial}_{\mu}\varphi^{*}(u_1)\,\bar{\psi}(x_1)\,\underset{u}{\gamma}^{\mu}. \tag{9.18}$$

Тогда будем иметь

$$(i\gamma^{(\mu\alpha)}_{i}\partial_{(\mu\alpha)}_{\tau_{if}} - m_f)\psi(\tau_{if}) = 0;$$

$$\bar{\psi}(\tau_{if})(i\overleftarrow{\partial}_{(\mu\alpha)}_{\tau_{if}}\gamma^{(\mu\alpha)}_{\tau_i} + m_f) = 0, \tag{9.19}$$

$$(i\gamma^{\mu}_{\tau_i}\partial_{\mu}_{x_f} - m_f)\psi(x_f) = 0,$$

$$\bar{\psi}(x_f)(i\overleftarrow{\partial}_{\mu}_{x_f}\gamma_{\mu}_{\tau_i} + m_f) = 0. \tag{9.20}$$

§ 10. Определенные в чисто внутренне искаженном многообразии G (223) взаимодействующие поля.

а) Исследуем электромагнитно взаимодействующую физическую систему, определенную в чисто внутренне искаженном многообразии

$$G(223) = G_{\tau_f}(2.3) \oplus G_{u_f}(2.3) =$$

$$= P_{x_f}(3) \oplus T_{x_f}(3) \oplus P_{u_f}(3) \oplus T_{u_f}(3). \tag{10.1}$$

Для определенности рассмотрим случай биспинорного и заряженного бозонного полей

$$L_F = \frac{i}{2}\Big\{\bar{\psi}(\cdot)\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}(\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)} - \Gamma_{(\lambda\mu\alpha)})\psi(\cdot) -$$

$$- \bar{\psi}(\cdot)(\overleftarrow{\partial}_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)} - \bar{\Gamma}_{(\lambda\mu\alpha)})\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}\psi(\cdot)\Big\} -$$

$$- \frac{1}{4}F^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}F_{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)} + \tag{10.2}$$

$$+ g^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}(\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)})\varphi^*(\cdot)(\partial_{(\tau\nu\beta)} - ieA_{(\tau\nu\beta)})\varphi(\cdot).$$

С помощью стандартного вариационного метода находим уравнения движения

$$i\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}(\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)} - \Gamma_{(\lambda\mu\alpha)})\psi(\cdot) = 0,$$

$$i\bar{\psi}(\cdot)(\overleftarrow{\partial}_{(\lambda\mu\alpha)} + ieA_{(\lambda\mu\alpha)} - \bar{\Gamma}_{(\lambda\mu\alpha)})\gamma^{(\lambda\mu\alpha)} = 0,$$

$$g^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}(\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)})(\partial_{(\tau\nu\beta)} - ieA_{(\tau\nu\beta)})\varphi(\cdot) = 0,$$

$$g^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}(\partial_{(\lambda\mu\alpha)} - ieA_{(\lambda\mu\alpha)})(\partial_{(\tau\nu\beta)} - ieA_{(\tau\nu\beta)})\varphi^*(\cdot) = 0, \tag{10.3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{(\tau\nu\beta)}(\sqrt{g}\,F^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}) = j^{(\lambda\mu\alpha)}_{\psi} + j^{(\lambda\mu\alpha)}_{\varphi},$$

$$j^{(\lambda\mu\alpha)}_{\psi} = e\bar{\psi}(\cdot)\gamma^{(\lambda\mu\alpha)}\psi(\cdot),$$

$$j^{(\lambda\mu\alpha)}_{\varphi} = eg^{(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)}[(\partial_{(\tau\nu\beta)}\varphi^*)\varphi - \varphi^*\partial_{(\tau\nu\beta)}\varphi],$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{(\nu)}\left(\sqrt{g}\, j_{\psi}^{(\nu)}+\sqrt{g}\, j_{\varphi}^{(\nu)}\right)=0.$$

Отсюда получаются уравнения движения биспинорного $\psi(\xi_f)$, $\bar{\psi}(\xi_f)$, бозонного $\varphi(\xi_f)$, $\varphi^*(\xi_f)$ и электромагнитного $A_{(\nu)}(\xi_f)$ полей, определенных в $\underset{\xi_f}{G}(2.3)$:

$$\left[i\underset{\xi}{\gamma}^{(\nu)}\left(\underset{\xi_f}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{\xi_f}{A}_{(\nu)}\right)-m_f^{\psi}\right]\psi(\xi_f)=0,$$

$$\bar{\psi}(\xi_f)\left[\left(i\overleftarrow{\underset{\xi_f}{\partial}}_{(\nu)}+ie\underset{\xi_f}{A}_{(\nu)}\right)\underset{\xi}{\gamma}^{(\nu)}+m_f^{\psi}\right]=0,$$

$$\left[\left(\underset{\xi_f}{\partial}^{(\nu)}-ie\underset{\xi_f}{A}^{(\nu)}\right)\left(\underset{\xi_f}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{\xi_f}{A}_{(\nu)}\right)-(m_f^{\varphi})^2\right]\varphi(\xi_f)=0,$$

$$\left[\left(\underset{\xi_f}{\partial}^{(\nu)}-ie\underset{\xi_f}{A}^{(\nu)}\right)\left(\underset{\xi_f}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{\xi_f}{A}_{(\nu)}\right)-(m_f^{\varphi})^2\right]\varphi^*(\xi_f)=0,$$

$$\left[\underset{\xi_f}{\Box}-(m_f^{A})^2\right]\underset{\xi_f}{A}^{(\nu)}=j_{\psi}^{(\nu)}+j_{\varphi}^{(\nu)},\quad j_{\psi}^{(\nu)}=e\bar{\psi}(\xi_f)\gamma^{(\nu)}\psi(\xi_f), \tag{10.4}$$

$$j_{\varphi}^{(\nu)}=e\left[\left(\underset{\xi_f}{\partial}^{(\nu)}\varphi^*\right)\varphi-\varphi^*\underset{\xi_f}{\partial}^{(\nu)}\varphi\right],$$

$$\underset{\xi_f}{\partial}_{(\nu)}\left(j_{\psi}^{(\nu)}+j_{\varphi}^{(\nu)}\right)=0.$$

Здесь полагали

$$\underset{\xi_f}{A}_{(\nu)}=A_{(\nu)}(\xi_f)\varphi_A(u_f),\quad \varphi=\varphi(\xi_f)\varphi_{\varphi}(u_f),$$

$$\psi=\psi(\xi_f)\varphi_{\psi}(u_1),\quad \underset{u_1}{\Box}\varphi_A(u_1)=(m_1^{A})^2\varphi_A(u_1),$$

$$\left(\underset{u_1}{\partial}^{(\nu)}-ie\underset{u_1}{A}^{(\nu)}\right)\left(\underset{u_1}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{u_1}{A}_{(\nu)}\right)\varphi_{\varphi}(u_1)=(m_1^{\varphi})^2\varphi_{\varphi}(u_1),$$

$$\left(\underset{u_1}{\partial}^{(\nu)}-ie\underset{u_1}{A}^{(\nu)}\right)\left(\underset{u_1}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{u_1}{A}_{(\nu)}\right)\varphi_{\varphi}^*(u_1)=(m_1^{\varphi})^2\varphi_{\varphi}^*(u_1), \tag{10.5}$$

$$m_1^{\psi}\cdot\varphi_{\psi}(u_1)I_4\psi(\xi_f)=-i\left(\underset{u_1}{\partial}_{(\nu)}-ie\underset{u_1}{A}_{(\nu)}\right)\varphi_{\psi}(u_1)\underset{u}{\gamma}^{(\nu)}\psi(\xi_f),$$

$$m_1^{\psi}\cdot\varphi_{\psi}^*(u_1)\bar{\psi}(\xi_f)I_4=i\left(\underset{u_1}{\partial}_{(\nu)}+ie\underset{u_1}{A}_{(\nu)}\right)\varphi_{\psi}^*(u_1)\bar{\psi}(\xi_f)\underset{u}{\gamma}^{(\nu)}.$$

Причем

$$\underset{\xi_f}{A}_{(\pm1)}=\cos\vartheta^{(2)}\cos\vartheta^{(3)}\underset{\xi}{A}_{(\pm1)},\quad \underset{\xi_f}{A}_{(\pm2)}=\cos\vartheta^{(3)}\cos\vartheta^{(1)}\underset{\xi}{A}_{(\pm2)},$$

$$\underset{\xi_f}{A}_{(\pm3)}=\cos\vartheta^{(1)}\cos\vartheta^{(2)}\underset{\xi}{A}_{(\pm3)},$$

$$\underset{u_1}{A}_{(\pm1)}=\cos\vartheta^{(2)}\cos\vartheta^{(3)}\operatorname{tg}\vartheta^{(1)}\underset{\xi}{A}_{(\pm1)}+\frac{\sin\vartheta^{(2)}}{2}\left(1+\cos\vartheta^{(3)}\right)\underset{\xi}{A}_{(\pm3)}-$$

$$- \frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{\tau_i}{A}_{(\pm 2)},$$

$$\underset{u_i}{A}_{(\pm 2)} = \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\,\mathrm{tg}\,\theta^{(2)}\underset{\tau_i}{A}_{(\mp 2)} + \frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{\tau_i}{A}_{(\pm 1)} -$$

$$- \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{\tau_i}{A}_{(\pm 3)}, \tag{10.6}$$

$$\underset{u_i}{A}_{(\pm 3)} = \cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\,\mathrm{tg}\,\theta^{(3)}\underset{\tau_i}{A}_{(\mp 3)} + \frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{\tau_i}{A}_{(\pm 2)} -$$

$$- \frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{\tau_i}{A}_{(\pm 1)}.$$

б) В природе, по-видимому, существуют симметрии, которые не являются точными симметриями. В современной физике имеются методы, позволяющие восстановить формы симметрии, которые даже будучи разрушенными, являются точными принципами, управляющими явлениями природы. Этот тип симметрии получается из лагранжиана с точной симметрией, если только вакуум неинвариантен относительно группы симметрии (спонтанно нарушенные симметрии). Согласно теореме Голдстоуна [14], бозоны с нулевой массой будут появляться неизбежно, если симметрия реализуется так, чтобы лагранжиан полностью инвариантен относительно некоторой непрерывной группы, а вакуум неинвариантен относительно этой же группы. Объединенное рассмотрение лагранжианов со спонтанно нарушенными симметриями и локальной калибровочной инвариантностью, приводит к исключению из теоремы Голдстоуна. К такому классу теорий относятся перенормируемые модели слабых и электромагнитных взаимодействий [12].

Если нарушенная симметрия является локальной симметрией, то несмотря на то, что голдстоуновские бозоны формально существуют, они могут быть устранены калибровочными преобразованиями. Пропавшие голдстоуновские бозоны, согласно механизму Хиггса [15], проявляются как состояния векторных частиц, приобретающих таким путем массу.

Теперь постараемся понять явление нарушения локальных симметрий с точки зрения искажения многообразия $G(2.2.3)$.

Рассмотрим физическую систему, определенную в $G(2.2.3)$. Инвариантность лагранжиана относительно локальных преобразований группы $SU(n)$

$$\psi'(\zeta^p) = U(\zeta^p)\,\psi(\zeta^p) = e^{i\vec{g}\omega(\zeta^p)\vec{T}}\,\psi(\zeta^p),$$

$$\tag{10.7}$$

$$\overline{\psi}'(\zeta^p) = \overline{\psi}(\zeta^p)\,U^{-1}(\zeta^p) = \psi(\zeta^p)\,e^{-\vec{g\omega}(\zeta^p)\vec{T}},$$

осуществляется введением неабелевых калибровочных векторных полей $b^a_{(\lambda,\mu,a)}(\zeta^p)$ (гл. 2). Будем рассматривать частный случай, когда

$$\underset{u}{b}^p_{(pa)} = 0, \quad \vec{\omega}(\zeta^p) \equiv \vec{\omega}(\eta^p), \tag{10.8}$$

$$b^{a}_{\eta(\lambda\alpha)}(\zeta^{\mu}) = b^{a}_{(\lambda\alpha)}(\eta^{\mu}),$$

где $b^{a}_{(\lambda\alpha)}(\eta^{\mu})$ определено в $\underset{\eta}{G}(2.3)$. Тогда лагранжиан физической системы, определенной в $\underset{\eta}{G}(2.3)$, также локально $SU(n)$ инвариантен

$$\psi'(\eta^{\mu}) = U(\eta^{\mu})\psi(\eta^{\mu}) = e^{i\vec{\omega}(\eta^{\mu})\vec{T}}\psi(\eta^{\mu}),$$

$$\bar{\psi}'(\eta^{\mu}) = \bar{\psi}(\eta^{\mu})U^{-1}(\eta^{\mu}) = \bar{\psi}(\eta^{\mu})e^{-i\vec{\omega}(\eta^{\mu})\vec{T}}. \tag{10.9}$$

Следовательно, если удовлетворяются условия (10.8), то из локальной $SU(n)$ инвариантности лагранжиана системы, определенной в $G(2.2.3)$, следует локальная $SU(n)$ инвариантность лагранжиана системы, определенной в $\underset{\eta}{G}(2.3)$.

Пусть многообразие $G(2.2.3)$ подвергается чисто внутреннему искажению (10.1).

Тогда преобразования (10.7) заменяются следующими

$$\psi'(\zeta_{\eta}) = U_{\eta}\psi(\zeta_{\eta}), \quad \bar{\psi}'(\zeta_{\eta}) = \bar{\psi}(\zeta_{\eta})U_{\eta}^{-1},$$

$$U_{\eta} = U(\zeta_{\eta}) = e^{i\vec{\omega}(\zeta_{\eta})\vec{T}}. \tag{10.10}$$

Инвариантность относительно локальных преобразований (10.10) осуществляется введением Янг-Миллсовских полей $b^{a}_{\eta(\lambda\alpha)}(\zeta)$. Отметим весьма важный факт: **вследствие чисто внутреннего искажения многообразия $G(2.2.3)$ (10.1), приводящего к образованию искаженного многообразия $\underset{\eta}{G}(2.3)$, неабелевые калибровочные векторные поля подвергаются преобразованию.**

В случае (8.1, 2) имеем

$$b'^{a}_{\eta_1(\pm 1)} = \cos\vartheta^{(3)}\cos\vartheta^{(2)}\, b^{a}_{\eta(\pm 1)}, \quad b'^{a}_{\eta_1(\pm 2)} = \cos\vartheta^{(3)}\cos\vartheta^{(1)}\, b^{a}_{\eta(\pm 2)},$$

$$b'^{a}_{\eta_1(\pm 3)} = \cos\vartheta^{(1)}\cos\vartheta^{(2)}\, b^{a}_{\eta(\pm 3)},$$

$$b'^{a}_{\eta_1(\pm 1)} = \cos\vartheta^{(3)}\cos\vartheta^{(2)}\,\mathrm{tg}\,\vartheta^{(1)}\, b^{a}_{\eta(\pm 1)} + \frac{\sin\vartheta^{(3)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(2)})\, b^{a}_{\eta(\pm 2)} -$$

$$- \frac{\sin\vartheta^{(2)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(3)})\, b^{a}_{\eta(\pm 3)}, \tag{10.11}$$

$$b'^{a}_{\eta_1(\pm 2)} = \cos\vartheta^{(3)}\cos\vartheta^{(1)}\,\mathrm{tg}\,\vartheta^{(2)}\, b^{a}_{\eta(\pm 2)} + \frac{\sin\vartheta^{(1)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(3)})\, b^{a}_{\eta(\pm 3)} -$$

$$- \frac{\sin\vartheta^{(3)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(1)})\, b^{a}_{\eta(\pm 1)},$$

$$b'^{a}_{\eta_1(\pm 3)} = \cos\vartheta^{(1)}\cos\vartheta^{(2)}\,\mathrm{tg}\,\vartheta^{(3)}\, b^{a}_{\eta(\pm 3)} + \frac{\sin\vartheta^{(2)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(1)})\, b^{a}_{\eta(\pm 1)} -$$

$$- \frac{\sin\vartheta^{(1)}}{2}(1+\cos\vartheta^{(2)})\, b^{a}_{\eta(\pm 2)}.$$

Здесь положено $\underset{u_f}{b}{}^{a}_{(\rho\alpha)}=0$. Из инвариантности (10.10) вовсе не следует инвариантность лагранжиана системы, определенной в $\underset{\eta_f}{G}(2.3)$, относительно локальных преобразований группы $SU(n)$. Действительно, из (10.11) видно, что

$$\underset{u_f}{b}{}^{u}_{(\rho\alpha)} \neq 0. \tag{10.12}$$

То есть, если локальная $SU(n)$ симметрия является точной симметрией в чисто внутренне искаженном многообразии $G(223)$, она нарушена в многообразии $\underset{\eta_f}{G}(2.3)$.

Таким образом, **явление нарушения локальных калибровочных симметрий является прямым следствием внутреннего искажения многообразия G(2.2.3) (или континуума $\underset{x}{P}(3)\oplus\underset{x}{T}(3)\oplus\underset{u}{P}(3)\oplus\underset{u}{T}(3)$).**

При этом, калибровочные поля $\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}$, как и остальные поля, приобретают массу покоя. Чтобы найти затравочный спектр масс этих полей, запишем в явном виде уравнения движения

$$\begin{aligned}&(\underset{\eta_f}{\square} - \underset{u_f}{\square})\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)} + \underset{\eta_f}{\partial}_{(\rho\alpha)} (\underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)} \underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)} - \underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)} \underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}) - \\ &- ig \underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)}] + ig \underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}] + \\ &+ ig[\underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)}, \underset{\eta_f\,\eta_f}{b}_{[(\rho\alpha)(\sigma\beta)]}] - ig[\underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}, \underset{\eta_f\,u_f}{b}_{[(\rho\alpha)(\sigma\beta)]}] = 0,\end{aligned} \tag{10.13}$$

где

$$\begin{aligned}&\underset{\eta_f\,\eta_f}{b}_{[(\rho\alpha)(\sigma\beta)]} = \underset{\eta_f}{\partial}_{(\rho\alpha)}\underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)} - \underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)} - ig[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)}], \\ &\underset{\eta_f\,u_f}{b}_{[(\rho\alpha)(\sigma\beta)]} = \underset{\eta_f}{\partial}_{(\rho\alpha)}\underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)} - \underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)} - ig[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}].\end{aligned} \tag{10.14}$$

Решения ищем в представлении

$$\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}(\zeta_f) = b_{(\rho\alpha)}(\eta_f)\,\varphi_b(u_f). \tag{10.15}$$

Введем функцию искаженной массы покоя поля

$$\underset{u_f}{\square}\,\varphi_b(u_f) = (m_f^b)^2\varphi_b(u_f), \tag{10.16}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}&(\underset{\eta_f}{\square} - (m_f^b)^2)\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)} + \underset{\eta_f}{\partial}_{(\rho\alpha)} (\underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)} \underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)} - \underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)} \underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}) - \\ &- ig \underset{\eta_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{\eta_f}{b}_{(\sigma\beta)}] + ig \underset{u_f}{\partial}_{(\sigma\beta)}[\underset{\eta_f}{b}_{(\rho\alpha)}, \underset{u_f}{b}_{(\sigma\beta)}] +\end{aligned} \tag{10.17}$$

$$-ig[b_{(\ldots)}, b_{(\ldots)}] - ig[b_{(\ldots)}, b_{(\ldots)}] = 0.$$

§ 11. Квантовая теория искажения. С помощью выражения действия (5.3) можно дать формулировку квантовой теории в терминах континуального интеграла.

Производящий функционал для функций Грина записывается в виде

$$Z[J] = \int D[\Phi^{\rho}_{A}] \exp\{i \int L^{\rho}_{1} d^{2n}\zeta^{\rho}\} \times$$

$$\times \exp\left\{ i \int \left[L^{\rho}_{0}[\Phi^{\rho}_{A}] + J\Phi^{\rho}_{A} \right] d^{2n}\zeta^{\rho} \right\}, \qquad (11.1)$$

где $\Phi^{\rho}_{A} = \hat{a}_{(\ldots)}, \hat{\psi}^{\rho}_{A}, \hat{\bar{\psi}}^{\rho}_{A}$ [illegible]. Их вычисляют по пространству функций $[\Phi^{\rho}_{A}]$ с подлежащей мерой. Величина Z дает амплитуду перехода из начального вакуумного состояния $|0, i>$ в конечное вакуумное состояние $|f, 0>$ в присутствии источника частиц J. При этом возникает добавочный вклад от дополнительных фиктивных полей, связанных с калибровочной симметрией. Однако они не связаны с векторным полем $\hat{a}_{(\ldots)}$, поэтому эти поля можно не рассматривать в квантовой теории поля в плоском многообразии $\hat{G}(2.2.3)$.

Учитывая полиномиальность лагранжиана взаимодействия L^{ρ}_{1}, имеем

$$Z[J] = \exp\left\{ i \int L^{\rho}_{1} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] d^{2n}\zeta^{\rho} \right\} \cdot Z_0[J], \qquad (11.2)$$

где свободный производящий функционал $Z_0[J]$ имеет следующую форму:

$$Z_0[J] = \int D[\Phi^{\rho}_{A}] \exp\{i \left[L^{0}_{\rho}[\Phi^{A}_{\rho}] + J^{A}\Phi^{\rho}_{A} \right] d^{2n}\zeta^{\rho}\}. \qquad (11.3)$$

С помощью выражения (11.2), стандартным образом вычисляются функции Грина. При этом, в разложении по теории возмущений учитываются лишь связанные фейнмановские диаграммы.

Отметим, что асимптотические условия для произвольной калибровки, в рассматриваемой системе с бесконечномерной неабелевой калибровочной группой, хорошо определены $H^{\rho}_{1}(\zeta^{\rho} \to \pm\infty) \to 0$ (H^{ρ}_{1} — — гамильтониан взаимодействия).

ГЛАВА 4

ФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ ИСКАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА. ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЕЙ

В предыдущей главе исследованы искаженное многообразие $G(223)$ (или континуум $\underset{x_i}{P}(3) \oplus \underset{x_i}{T}(3) \ominus \underset{u_i}{P}(3) \ominus \underset{u_i}{T}(3))$ и протекающие в нем процессы. В частности, детально рассмотрен случай чисто внутреннего искажения, описаны простейшие свободные и взаимодействующие поля в этих физических условиях.

Основываясь на этих результатах, в настоящей главе показано, что теория искажения пространство-временного континуума предсказывает существование новых явлений, проявляющихся на малых пространственно-временных интервалах. Первое—**явление приобретения элементарной частицей массы покоя и ее изменения. То есть определенная в плоском многообразии $\underset{\eta}{G}(2.3)$ или в плоском континууме $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$ частица, вследствие их внутреннего искажения (что, в свою очередь, связано с внутренним искажением многообразия $G(2.2.3)$) приобретает искаженную массу покоя.** При описании этого явления, получено общее соотношение между энергией и массой частицы, являющееся обобщением эйнштейновского соотношения [1], справедливое также в случае искажения пространство-временного континуума.

Второе—**явление асимптотической свободы взаимодействий элементарных частиц, осуществляемой калибровочными векторными полями. То есть сила взаимодействия полей, определенных в плоском многообразии $\underset{\eta}{G}(2.3)$ (или в плоском континууме $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$) в области высоких энергий (чему соответствуют малые пространственно-временные интервалы), вследствие внутреннего искажения многообразия, стремится к нулю. Речь идет о взаимодействии, которое осуществляется посредством калибровочных векторных полей.**

Здесь же исследованы причины появления в стандартной квантовой теории поля ультрафиолетовых расходимостей и предложен новый метод их устранения. В этой связи приводится новая формулировка теории квантованных полей. В последней использована идея перенормировки вакуума. В основу рассмотрения положен тот факт, что, согласно результатам предыдущей главы, **определенная в плоском пространство-временном континууме виртуальная частица равнозначна реальной, если только последняя определена в чисто внутренне искаженном пространство-временном континууме.**

Объединение явлений перенормировки вакуума и асимптотической свободы взаимодействия полей, полностью решает вопрос устранения вышеуказанных расходимостей. В рамках новой квантовой теории поля получена функция обрезания, математический смысл которой сводится к тому, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, по импульсам виртуальных частиц производится интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области импульсного пространства. Интересно отметить, что в области больших импульсов виртуальных частиц, эта функция с точности совпадает с априори введенным Фейнманом [17] множителем сходимости. В качестве примера, в рамках новой формулировки квантовой электродинамики, произведены вычисления массового и поляризационного операторов второго порядка. С помощью последнего получена радиационная поправка наименьшего ненулевого порядка теории возмущений к закону Кулона.

В заключение мы применим развитые в настоящей работе методы для рассмотрения некоторой обобщенной модели взаимодействия полей.

§ 1. Явление приобретения частицей массы покоя и ее изменение. Согласно уравнениям движения простейших свободных полей (9.6, 7, 12, 13, 20, 21) и (10.17) (см. гл. 3), определенных в чисто внутренне искаженном многообразии (10.1)

$$G(2.2.3) = \underset{x_f}{G}(2.3) \oplus \underset{u_f}{G}(2.3) = \underset{x_f}{P}(3) \oplus \underset{x_f}{T}(3) \oplus \underset{u_f}{P}(3) \oplus \underset{u_f}{T}(3). \tag{1.1}$$

между импульсом и массой покоя частицы имеется следующее соотношение

$$\underset{x_f}{P}{}^{(\mu)} \underset{x_f}{P}{}_{(\mu)} = \underset{u_f}{P}{}^{\mu} \underset{u_f}{P}{}_{\mu} = m_f^2. \tag{1.2}$$

При этом

$$m_f^2 = \underset{u_f}{P}{}^{(\mu)} \underset{u_f}{P}{}_{(\mu)} = \underset{u_f}{P}{}^{\mu} \underset{u_f}{P}{}_{\mu}. \tag{1.3}$$

Импульсы $\underset{x_f}{P}{}^{\mu}$ и $\underset{u_f}{P}{}^{\mu}$ ($\mu = 01, 02, 03, 1, 2, 3$) соответствуют искаженным континуумам $\underset{u_f}{P}(3) \oplus \underset{x_f}{T}(3)$ и $\underset{u_f}{P}(3) \oplus \underset{u_f}{T}(3)$. По аналогии (8.5) (гл. 3), представим их в виде

$$\underset{x_f}{P}{}_{\mu} = (\underset{x}{P}{}_{\mu} + \underset{u}{q}{}_{\mu} + \underset{x}{S}{}_{\mu}) \backsim \underset{x_f}{P}(3) \oplus \underset{x_f}{T}(3), \tag{1.4}$$

$$\underset{u_f}{P}{}_{\mu} = (\underset{u}{P}{}_{\mu} + \underset{x}{q}{}_{\mu} + \underset{u}{S}{}_{\mu}) \backsim \underset{u_f}{P}(3) \oplus \underset{u_f}{T}(3).$$

К примеру, в случае чисто внутреннего искажения (8.1, 2) (гл. 3), с помощью (8.6) (гл. 3) имеем

$$\underset{x}{S}{}_{01} = (\cos\theta^{(1)} \cos\theta^{(3)} - 1) \underset{x}{P}{}_{01}, \quad \underset{u}{q}{}_{01} = -\cos\theta^{(3)} \cos\theta^{(2)} \operatorname{tg}\theta^{(1)} \underset{u}{P}{}_{01} +$$

$$+ \frac{\sin\theta^{(2)}}{2} (1 + \cos\theta^{(3)}) \underset{u}{P}{}_{03} - \frac{\sin\theta^{(3)}}{2} (1 + \cos\theta^{(2)}) \underset{u}{P}{}_{02},$$

$$\underset{x}{S}{}_{02} = (\cos\theta^{(3)} \cos\theta^{(1)} - 1) \underset{x}{P}{}_{02}, \quad \underset{u}{q}{}_{02} = -\cos\theta^{(3)} \cos\theta^{(1)} \operatorname{tg}\theta^{(2)} \underset{u}{P}{}_{02} +$$

$$+ \frac{\sin\theta^{(3)}}{2} (1 + \cos\theta^{(1)}) \underset{u}{P}{}_{01} - \frac{\sin\theta^{(1)}}{2} (1 + \cos\theta^{(3)}) \underset{u}{P}{}_{03},$$

$$\begin{aligned}
&\underset{x}{S}_{03}=(\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}-1)\underset{x}{P}_{03},\quad \underset{u}{q}_{03}=-\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{u}{P}_{03}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{u}{P}_{02}-\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{u}{P}_{01},\\
&\underset{x}{S}_{1}=(\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}-1)\underset{x}{P}_{1},\quad \underset{u}{q}_{1}=\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}\underset{u}{P}_{1}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{u}{P}_{3}-\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{u}{P}_{2},\\
&\underset{x}{S}_{2}=(\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}-1)\underset{x}{P}_{2},\quad \underset{u}{q}_{2}=\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(2)}\underset{u}{P}_{2}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{u}{P}_{1}-\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{u}{P}_{3},\\
&\underset{x}{S}_{3}=(\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}-1)\underset{x}{P}_{3},\quad \underset{u}{q}_{3}=\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{u}{P}_{3}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{u}{P}_{2}-\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{u}{P}_{1},\\
&\underset{u}{S}_{01}=(\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}-1)\underset{u}{P}_{01},\quad \underset{x}{q}_{01}=\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}\underset{x}{P}_{01}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{x}{P}_{03}-\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{x}{P}_{02},\\
&\underset{u}{S}_{02}=(\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}-1)\underset{u}{P}_{02},\quad \underset{x}{q}_{02}=\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(2)}\underset{x}{P}_{02}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{x}{P}_{01}-\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{x}{P}_{03},\qquad\qquad (1.5)\\
&\underset{u}{S}_{03}=(\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}-1)\underset{u}{P}_{03},\quad \underset{x}{q}_{03}=\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{x}{P}_{03}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{x}{P}_{02}-\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{x}{P}_{01},\\
&\underset{u}{S}_{1}=(\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}-1)\underset{u}{P}_{1},\quad \underset{x}{q}_{1}=-\cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\operatorname{tg}\theta^{(1)}\underset{x}{P}_{1}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{x}{P}_{3}-\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{x}{P}_{2},\\
&\underset{u}{S}_{2}=(\cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}-1)\underset{u}{P}_{2},\quad \underset{x}{q}_{2}=-\cos\theta^{(3)}\cos^{(1)}\operatorname{tg}\theta^{(2)}\underset{x}{P}_{2}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(3)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{x}{P}_{1}-\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(3)})\underset{x}{P}_{3},\\
&\underset{u}{S}_{3}=(\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}-1)\underset{u}{P}_{3},\quad \underset{x}{q}_{3}=-\cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{x}{P}_{3}+\\
&\qquad+\frac{\sin\theta^{(1)}}{2}(1+\cos\theta^{(2)})\underset{x}{P}_{2}-\frac{\sin\theta^{(2)}}{2}(1+\cos\theta^{(1)})\underset{x}{P}_{1}.
\end{aligned}$$

С помощью (8.5) (гл. 3) и (1.3, 4) получим

$$m_f^2 = m^2 + \underset{\xi}{q}^{(\alpha)}(2\underset{x}{P}_{(\alpha)} + \underset{\xi}{q}_{(\alpha)}) + \underset{u}{S}^{(\alpha)}(2\underset{u}{P}_{(\alpha)} + 2\underset{\xi}{q}_{(\alpha)} + \underset{u}{S}_{(\alpha)}) = \tag{1.6}$$

$$= m^2 + \underset{x}{q}^{\alpha}(2\underset{u}{P}_{\alpha} + \underset{x}{q}_{\alpha}) + \underset{u}{S}^{\alpha}(2\underset{u}{P}_{\alpha} + 2\underset{x}{q}_{\alpha} + \underset{u}{S}_{\alpha}),$$

где

$$m^2 = \underset{u}{P}^{(\alpha)}\underset{u}{P}_{(\alpha)} = \underset{u}{P}^{\alpha}\underset{u}{P}_{\alpha}. \tag{1.7}$$

При $m = 0$, имеем

$$m_f^2 = \underset{\xi}{q}^{(\alpha)}(2\underset{u}{P}_{(\alpha)} + \underset{\xi}{q}_{(\alpha)}) + \underset{u}{S}^{(\alpha)}(2\underset{u}{P}_{(\alpha)} + 2\underset{\xi}{q}_{(\alpha)} + \underset{u}{S}_{(\alpha)}) =$$

$$= \underset{x}{q}^{\alpha}(2\underset{u}{P}_{\alpha} + \underset{x}{q}_{\alpha}) + \underset{u}{S}^{\alpha}(2\underset{u}{P}_{\alpha} + 2\underset{x}{q}_{\alpha} + \underset{u}{S}_{\alpha}). \tag{1.8}$$

Иными словами, определенная в плоском многообразии $\underset{\xi}{G}(2.3)$ (или в континууме $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$) частица с нулевой массой покоя приобретает массу покоя m_f, при условии, если $\underset{\xi}{G}(2.3)$ (или $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$) подвергается чисто внутреннему искажению. В общем случае, из (1.2) находим

$$E_f = M_f c^2. \tag{1.9}$$

Здесь для наглядности восстановили скорость распространения света в вакууме, а также ввели обозначения

$$c^{-1}E_f = \underset{x_f}{P_0} = \langle \underset{x_f}{P}_{0\lambda}, \underset{x_f}{P}_{0\lambda} \rangle^{1/2},$$

$$M_f = m_f(1-\beta_f^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta_f = E_f^{-1}\langle \underset{x_f}{P}_{\lambda}, \underset{x_f}{P}_{\lambda} \rangle^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

Из (1.10) следует ($c=1$).

$$E_f = E + \underset{u}{q}^{0\lambda}(2\underset{x}{P}_{0\lambda} + \underset{u}{q}_{0\lambda}) + \underset{\lambda}{S}^{0\lambda}(2\underset{\lambda}{P}_{0\lambda} + 2\underset{u}{q}_{0\lambda} + \underset{\lambda}{S}_{0\lambda}). \tag{1.11}$$

К примеру, в случае $\theta^{(1)} = \theta^{(2)} = 0$, $\theta^{(3)} \neq 0$, из (1, 4, 5, 6, 11) получим

$$E_f = E + \sin^2\theta^{(3)}(\underset{u}{P}^{01}\underset{u}{P}_{01} + \underset{u}{P}^{02}\underset{u}{P}_{02} - \underset{\lambda}{P}^{01}\underset{\lambda}{P}_{01} - \underset{\lambda}{P}^{02}\underset{\lambda}{P}_{02}) + \operatorname{tg}^2\theta^{(3)}\underset{u}{P}^{03}\underset{u}{P}_{03} +$$

$$+ \sin 2\theta^{(3)}(\underset{u}{P}^{01}\underset{x}{P}_{02} - \underset{u}{P}^{02}\underset{x}{P}_{01}) - 2\operatorname{tg}\theta^{(3)}\underset{u}{P}^{03}\underset{x}{P}_{03}, \tag{1.12}$$

и

$$m_f^2 = m^2 + \sin^2\theta^{(3)}(\underset{x}{P}^{01}\underset{x}{P}_{01} + \underset{x}{P}^{02}\underset{x}{P}_{02} + \underset{x}{P}^{1}\underset{x}{P}_{1} + \underset{x}{P}^{2}\underset{x}{P}_{2} - \underset{u}{P}^{01}\underset{u}{P}_{01} - \underset{u}{P}^{02}\underset{u}{P}_{02} -$$

$$- \underset{u}{P}^{1}\underset{u}{P}_{1} - \underset{u}{P}^{2}\underset{u}{P}_{2}) + \sin 2\theta^{(3)}(\underset{x}{P}^{01}\underset{u}{P}_{02} - \underset{x}{P}^{02}\underset{u}{P}_{01} - \underset{x}{P}^{2}\underset{u}{P}_{1} + \underset{x}{P}^{1}\underset{u}{P}_{2}) +$$

$$+ \operatorname{tg}^2\theta^{(3)}(\underset{x}{P}^{03}\underset{x}{P}_{03} + \underset{x}{P}^{3}\underset{x}{P}_{3}) + 2\operatorname{tg}\theta^{(3)}(\underset{x}{P}^{03}\underset{u}{P}_{03} - \underset{x}{P}^{3}\underset{u}{P}_{3}). \tag{1.13}$$

Таким образом, определенная в плоском многообразии $\underset{\xi}{G}(2.3)$ или в плоском континууме $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(3)$ частица, вследствие их внутреннего искажения (что, в свою очередь, связано с внутренним искажением многообразия $G(2.2.3)$) приобретает искаженную массу покоя $m_f(1.6)$.

§ 2. Явление асимптотической свободы. Согласно § 10 (гл. 3), определенные в чисто внутренне искаженном многообразии $G(223)$ электромагнитное и неабелевые калибровочные поля подвергаются перенормировке.

Для вышеназванных полей

$$\underset{u}{V}_{(\pm\alpha)} = 0, \tag{2.1}$$

где

$$V_{(\pm\alpha)} \equiv A_{(\pm\alpha)}, \quad b^a{}_{(\pm\alpha)}.$$

Поэтому компоненты $\underset{\eta}{V}_{(\pm\alpha)}$ преобразуются согласно (10.6) (гл. 3)

$$\begin{aligned} \underset{\eta_f}{V}_{(\pm1)} &= \cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\,\underset{\eta}{V}_{(\pm1)}, \\ \underset{\eta_f}{V}_{(\pm2)} &= \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\,\underset{\eta}{V}_{(\pm2)}, \\ \underset{\eta_f}{V}_{(\pm3)} &= \cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\,\underset{\eta}{V}_{(\pm3)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Представим компоненты $\underset{\eta_f}{V}_{(\pm\alpha)}$ в виде

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\underset{\eta_f}{V}_{(\pm\alpha)} = \underset{f}{V}_{(\pm\alpha)}(\eta_f)\,\underset{f}{\varphi}_V(u_f), \tag{2.3}$$

где $\underset{f}{V}_{(\pm\alpha)}(\eta_f)$ векторное поле в $\underset{\eta_f}{G}(2.3)$, $\underset{f}{\varphi}_V(u_f)$—скалярное поле в $\underset{u_f}{G}(2.3)$.

Тогда

$$\underset{f}{V}_{(\pm1)} = \cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\,V_{(\pm1)}, \quad \underset{f}{V}_{(\pm2)} = \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\,V_{(\pm2)}, \tag{2.4}$$

$$\underset{f}{V}_{(\pm3)} = \cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\,V_{(\pm3)}.$$

То есть

$$\begin{aligned} &\underset{f}{V}_{01} = \cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\,V_{01}, \quad \underset{f}{V}_1 = \cos\theta^{(2)}\cos\theta^{(3)}\,V_1, \\ &\underset{f}{V}_{02} = \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\,V_{02}, \quad \underset{f}{V}_2 = \cos\theta^{(3)}\cos\theta^{(1)}\,V_2, \\ &\underset{f}{V}_{03} = \cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\,V_{03}, \quad \underset{f}{V}_3 = \cos\theta^{(1)}\cos\theta^{(2)}\,V_3, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$(\underset{f}{V}_{0\alpha}, \underset{f}{V}_\alpha) \backsim \underset{x_f}{P}(3) \oplus \underset{x_f}{T}(3).$$

Радиус действия поля искажения конечен. Он определяется комптоновской длиной волны поля

$$r_f \leqslant \frac{\mathrm{h}}{m_a c}, \tag{2.6}$$

где

$$\underset{a}{a}^{0a} = \underset{a}{a}^{0a}(x^\gamma)\,\varphi_a(a^\gamma),$$

$$\underset{a^\gamma}{\Box}\,\varphi_a(a^\gamma) = \frac{c^2 m_a^2}{\hbar^2}\,\varphi_a(a^\gamma). \tag{2.7}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда

$$\underset{a}{a}^{01} = \underset{a}{a}^{02} = \underset{a}{a}^{03} = \underset{a}{a}^{0}(x^\gamma) \tag{2.8}$$

Тогда, при $\varkappa_f \underset{a}{a}^0(x^\gamma) \gg 1$, имеем

$$\underset{f}{V}_{\varphi} = \cos^2\vartheta\, V_{\varphi} \simeq (\varkappa_f \underset{a}{a}^0)^{-2}\, V_{\varphi},$$

$$\underset{f}{V}_{a} = \cos^2\vartheta\, V_{a} \simeq (\varkappa_f \underset{a}{a}^0)^{-2}\, V_{a}. \tag{2.9}$$

Последнее равнозначно перенормировке соответствующего коэффициента взаимодействия

$$\underset{s_f}{e} \simeq (\varkappa_f \underset{a}{a}^0)^{-2}\, e,$$

$$\underset{s_f}{g} \simeq (\varkappa_f \underset{a}{a}^0)^{-2}\, g. \tag{2.10}$$

Таким образом, **сила взаимодействия полей, определенных в плоском многообразии $\underset{s}{G}(2.3)$ (или в плоском континууме $\underset{s}{P}(3) \otimes \underset{s}{T}(3)$) в области высоких энергий (чему соответствуют малые пространственно-временные интервалы), вследствие внутреннего искажения многообразия, стремится к нулю. Речь идет о взаимодействии, которое осуществляется посредством калибровочных векторных полей.**

§ 3. Виртуальные частицы. В дальнейшем мы рассмотрим величины, относящиеся к четырехмерному пространственно-временному континууму. Стандартная квантовая теория теряет свою предсказательную силу в области малых пространственно-временных интервалов. Причиной этого является неполное описание состояний виртуальных частиц (введенными в рамках указанной теории). Им сопоставляются внутренние линии диаграмм Фейнмана. В инвариантной теории в промежуточных состояниях сохраняется весь 4-импульс. При этом нарушается присущая реальным частицам связь между энергией, импульсом и массой покоя ($P^2 = m^2 c^4$). С другой стороны, согласно результатам § 1, определенная в плоском континууме $\underset{1}{P}(3) \otimes \underset{1}{T}(1)$ реальная частица ($P^2 = m^2 c^4$), вследствие внутреннего искажения первого, приобретает искаженную массу покоя $m_f \neq m$. То есть

$$P_f^2 = m_f^2 \neq m^2 = P_R^2. \tag{3.1}$$

Следовательно, **определенная в плоском континууме $\underset{1}{P}(3) \otimes \underset{1}{T}(1)$ виртуальная частица равнозначна реальной, если только последняя определена в чисто внутренне искаженном континууме $\underset{1_f}{F}(3) \otimes \underset{1_f}{T}(1)$.**

Постулируем, что вышеуказанное искажение происходит под влиянием поля $\underset{u}{a^0}$ (2.7, 8). При этом естественно полагать, что

$$P_* = (P^2 - m^2)^{1/2} \sim \varkappa_f \underset{u}{a^0}. \qquad (3.2)$$

Введем коэффициент пропорциональности L, физический смысл которого проясняется в дальнейшем

$$P_* = L\varkappa_f \underset{u}{a^0}. \qquad (3.3)$$

Тогда из (8.4) (гл. 3) определим

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{P_*}{L} = -\frac{(P^2 - m^2)^{1/2}}{L}. \qquad (3.4)$$

§ 4. Перенормировка вакуума. При описании квантованных систем, существование коммутирующих интегралов движения позволяет характеризовать стационарные состояния определенным значением энергии, импульса и заряда. При этом, пространство всех векторов состояния распадается на сумму пространств, векторы каждого из которых изображают состояния системы с определенным числом частиц. Поэтому существует наинизшее энергетическое состояние Φ_0 системы без частиц (вакуумное состояние). Вектор Φ_0 инвариантен относительно группы Пуанкаре. Описание состояний виртуальных частиц требует более полного подхода. А именно, результат § 3 должен быть включен в новую формулировку квантовой теории поля. В этой связи нами рассматривается явление перенормировки вакуумного состояния: **для каждой частицы с 4-импульсом P_μ, определенного в плоском континууме $\underset{x}{P}(3) \oplus \underset{x}{T}(1)$ происходит перенормировка вакуумного состояния**

$$\Phi_0 \to \underset{f}{\Phi_0} = f(\theta) \cdot \Phi_0, \qquad (4.1)$$

где θ—инвариантный угол чисто внутреннего искажения (3.4), а перенормировочная функция удовлетворяет условию

$$0 \leqslant f(\theta) \leqslant f(0) = 1. \qquad (4.2)$$

Согласно теореме Вайнберга, для частиц положительной массы существуют операторы рождения и уничтожения, которые связаны с полевыми операторами линейными соотношениями [16]. Обычно исходят из квантованных полей, заданных их фурье-образами, и операторы рождения и уничтожения строят по этим полям. Вид различных коэффициентов пропорциональности для различных полей с точностью до тривиальной нормировки, определяется методами теории групп и трансформационных свойств квантованных полей. Перенормировка вакуума (4.1) (происходящая независимо для каждой частицы в отдельности) равнозначна введению обобщенных операторов рождения и уничтожения частиц:

$$\begin{aligned} \underset{f}{a^+_{\vec p\, l}}\, \Phi_0 &= a^+_{\vec p\, l}\, \underset{f}{\Phi_0}, \\ \underset{f}{a^-_{\vec p\, l}}\, \Phi_0 &= a^-_{\vec p\, l}\, \underset{f}{\Phi_0}. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

То есть

$$\underset{f}{a^+_{\vec p\, l}} = f(\theta) a^+_{\vec p\, l}, \quad \underset{f}{a^-_{\vec p\, l}} = f(\theta) a^-_{\vec p\, l}. \qquad (4.4)$$

То же самое справедливо и для античастиц

$$b^{+}_{p\,s\,l} = f(5)\, b^{+}_{p\,l}, \quad b_{p\,s\,l} = f(5)\, b_{p\,l}, \tag{4.5}$$

где индекс l — описывает поляризационное состояние частицы или античастицы.

Таким образом, явление чисто внутреннего искажения континуума $\underset{s}{P}(3) \otimes \underset{s}{T}(1)$ отражается в перенормировке вакуумного состояния, а следовательно, и в перенормировке других стационарных состояний. Определим перенормировочную функцию $f(5)$. Допустим, что $P_{\nu} = f^{2}(5) P_{\mu}$ — 4-импульс виртуальной частицы, определенной в $\underset{\nu}{P}(3) \otimes \underset{\nu}{T}(1)$. Вследствие чисто внутреннего искажения континуума $\underset{s}{P}(3) \otimes \underset{s}{T}(1) \to \underset{f}{P}(3) \otimes \underset{f}{T}(1)$, 4-импульс P_{μ} реальной частицы подвергается перенормировке $P_{\mu} \to (P_{\mu})^{f}$.

Постулируем следующее: **определенная в $\underset{\nu}{P}(3) \otimes \underset{\nu}{T}(1)$ виртуальная частица, с 4-импульсом $\underset{\nu}{P_{\mu}}$, тождественна реальной, с перенормированным 4-импульсом $(P_{\mu})^{f}$, определенной в чисто внутренне искаженном континууме $\underset{f}{P}(3) \otimes \underset{f}{T}(1)$. При этом, инвариантный угол искажения определяется формулой (3.4).**

Согласно постулату имеем

$$\underset{\nu}{P_{\mu}} = (P_{\mu})^{f}, \tag{4.6}$$

т. е.

$$f^{2}(5) = \frac{(P_{0})^{f}}{P_{0}} = \frac{(P_{1})^{f}}{P_{1}} = \frac{(P_{2})^{f}}{P_{2}} = \frac{(P_{3})^{f}}{P_{3}}. \tag{4.7}$$

§ 5. Новая формулировка квантовой теории поля. В новой формулировке квантовой теории поля учитывается явление перенормировки вакуума. Стандартные операторы рождения и уничтожения частиц и античастиц заменяются соответствующими обобщенными операторами. В новой формулировке взаимодействие полей описывается перенормированной матрицей рассеяния $\underset{f}{S}$, которая получается из стандартной матрицы рассеяния путем замены в ней обычных полей на перенормированные.

Последние, следуя общим правилам вторичного квантования, необходимо с помощью обобщенных операторов разлагать по собственным функциям полного набора возможных состояний свободных частиц и античастиц. Приводимые выше рассуждения справедливы также для Янг-Миллсовских полей, однако в этом случае калибровочная инвариантность вносит специфические черты в процедуру квантования. Известно, что сами классические уравнения движения этих полей имеют определенную специфику, которая проявляется и при их квантовании. Некоторые из функций, параметризующих классическое решение, произвольным образом зависят от времени и не подчиняются обычным законам динамики. В этой связи, при квантовании приходится разделить истинные динамические переменные и групповые параметры. Поскольку поле Янга-Миллса представляет собой обобщенную гамильтонову систему, то теория возмущений в стандартном варианте не проходит, и приходится представить $\underset{f}{S}$-матрицу через континуальный интеграл. Разложение последнего в ряд теории возмущений приводит к диаграммной технике. К примеру, безмассовый пропагатор Янг-Миллсовского поля в произвольной калибровке имеет вид

$$\langle 0|T\,\underset{f}{b^a_\mu}(x_1)\,\underset{f}{b^b_\nu}(x_2)|0\rangle = i\delta^{ab}\,\underset{f}{G^\alpha_{\mu\nu}}(x_1-x_2), \tag{5.1}$$

где

$$\underset{f}{G^\alpha_{\mu\nu}}(x)=(2\pi)^{-4}\int f^2(\theta)G^\alpha_{\mu\nu}(P)e^{-iPx}d^4P,$$

$$G^\alpha_{\mu\nu}(P)=\frac{1}{i}\,\frac{1}{P^2+i\varepsilon}\left|g^0_{\mu\nu}-(1-\alpha)\frac{P_\mu P_\nu}{P^2+i\varepsilon}\right|. \tag{5.2}$$

Здесь α фиксирует калибровку поля $\underset{f}{b^a_\mu}(x)$. Пропагатор духов изображается внутренней линией

$$\langle 0|\,T\underset{f}{C^a}(x_1)\underset{f}{C^b}(x_2)|0\rangle = -i\delta^{ab}\,\underset{f}{\Delta_c}(x_1-x_2), \tag{5.3}$$

где

$$\underset{f}{\Delta_c}(x)=(2\pi)^{-4}\int f^2(\theta)\Delta_c(P)e^{-iPx}\,d^4P,$$

$$\Delta_c(P)=\frac{i}{P^2+i\varepsilon}. \tag{5.4}$$

§ 6. Устранение ультрафиолетовых расходимостей, функция обрезания. Сначала определим явный вид перенормировочной функции $f(\theta)$.

Согласно (1.5) имеем

$$\underset{x}{P_0}\to(\underset{x}{P_0})'=\cos^2\theta\,\underset{x}{P_0},\quad \underset{x}{\vec P}\to(\underset{x}{\vec P})'=\cos^2\theta\,\underset{x}{\vec P}. \tag{6.1}$$

Сравнение формул (6.1) и (4.6) дает

$$f(\theta)=\cos\theta. \tag{6.2}$$

В рамках стандартной квантовой теории поля при вычислении элементов матрицы рассеяния в высших приближениях встречаемся с интегралами, расходящимися в области больших импульсов виртуальных частиц. Однако эти расходимости отсутствуют в новой формулировке теории. В последней используются перенормированные пропагаторы виртуальных частиц, которые отличаются от стандартных пропагаторов содержанием дополнительной степени (—2) импульса виртуальной частицы. Кроме этого, на малых пространственно-временных интервалах (в области больших значений импульсов виртуальных частиц) континуум $\underset{x}{R}(3)\oplus\underset{x}{T}(1)$ подвергается внутреннему искажению. Следовательно, все поля находятся вне массовой поверхности. Поэтому необходимо использовать описанный в § 10 (см. гл. 3) аппарат взаимодействия полей, в котором учитывается явление асимптотической свободы.

Рассмотрим, к примеру, имеющиеся в стандартной квантовой электродинамике ультрафиолетовые расходимости, для устранения которых достаточно учесть одно лишь явление перенормировки вакуума. Пусть имеется некоторая неприводимая диаграмма Фейнмана, которой соответствует многократный интеграл по импульсам виртуальных частиц

$$J = \int^{\infty} \Phi(P_1, \ldots, P_n)\, d^4P_1 \ldots d^4P_n, \tag{6.3}$$

где $\Phi(P_1, \ldots, P_n)$ – некоторая рациональная функция. Сходимость интеграла (6.3) определяется разностью

$$r = 4 - \frac{3}{2} N_e - N_\gamma. \tag{6.4}$$

Здесь N_e и N_γ – числа внешних электронных и фотонных линий. Если $r \geqslant 0$, то интеграл расходится. Перечислим простейшие неприводимые диаграммы, для которых $r \geqslant 0$ (см. рис. 1).

В рамках новой формулировки теории, эти числа заменяются соответственно следующими

$$\underset{f}{r_1} = -6, \quad \underset{f}{r_2} = -3, \quad \underset{f}{r_3} = -8, \quad \underset{f}{r_4} = -5,$$

$$\underset{f}{r_5} = -2, \quad \underset{f}{r_6} = -5, \quad \underset{f}{r_7} = -2.$$

То есть рассматриваемым неприводимым диаграммам соответствуют сходящиеся интегральные величины. Однако, в общем случае, условие $\underset{f}{r} < 0$ недостаточно для сходимости интеграла. Для этого должны быть отрицательными также аналогичные числа $\underset{f}{r'}$ и для внутренних блоков, которые можно было бы выделить из диаграммы. В рамках новой формулировки, указанное условие удовлетворяется, поскольку прибавление внутренних линий лишь улучшает сходимость интегралов.

Функцию

$$F^{(1)}(P_*, L) = f(P_*, L) = \frac{L^2}{P_*^2 + L^2} \tag{6.5}$$

назовем функцией обрезания первого порядка. В общем случае, соответствующие фейнмановским диаграммам интегральные величины содержат функцию обрезания n-го порядка

$$F^{(n)}(P_{*1}, \ldots, P_{*n}, L) = \prod_{i=1}^{n} f(P_{*i}, L) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{L^2}{P_{*i}^2 + L^2} \right). \tag{6.6}$$

Она имеет следующие асимптотики

$$F^{(n)}(P_{*1}, \ldots, P_{*n}, L) = \begin{cases} 1 & P_{*1}, \ldots, P_{*n} \ll L, \\ 0 & P_{*1}, \ldots, P_{*n} \gg L. \end{cases} \tag{6.7}$$

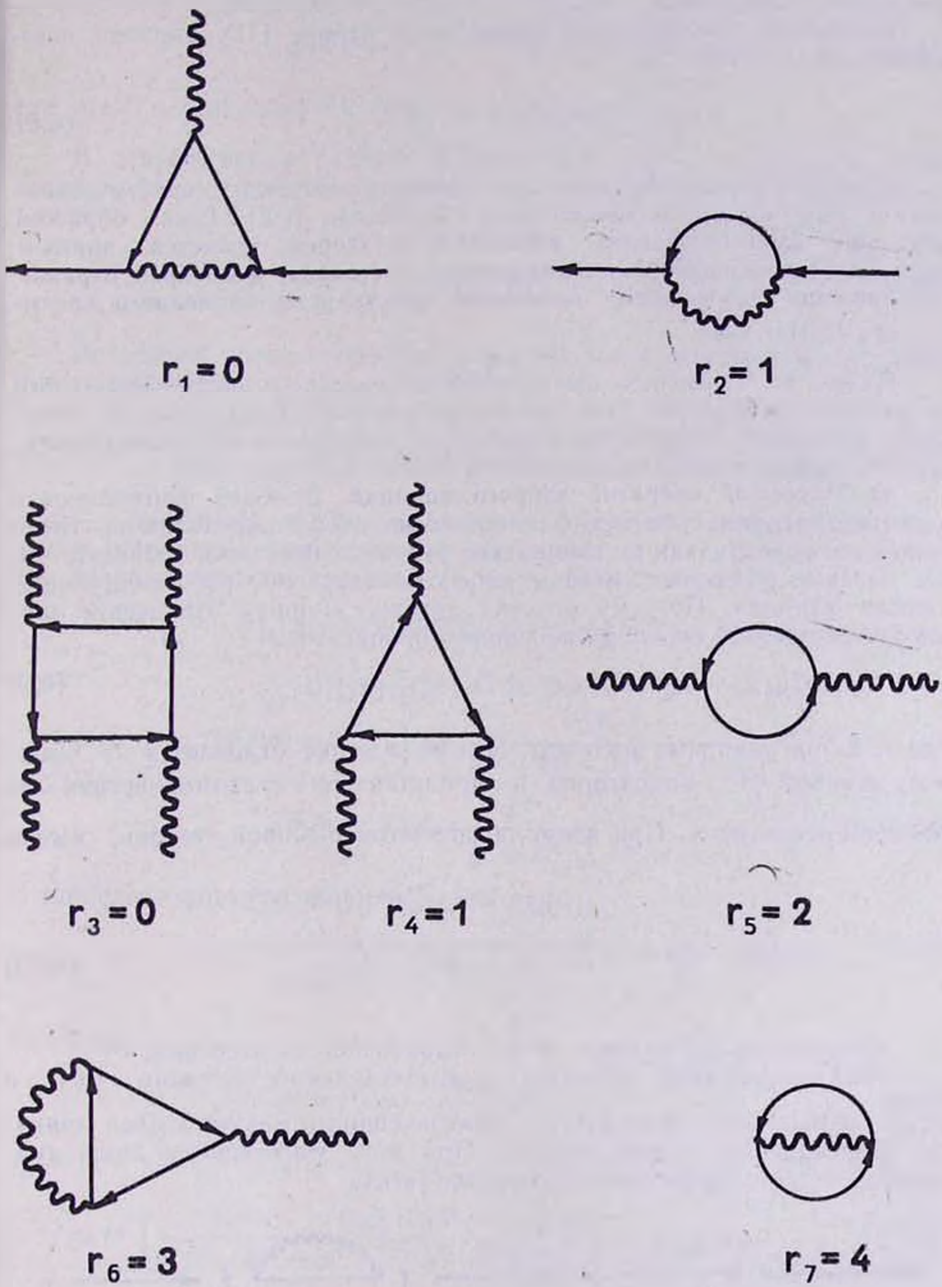

Рис. 1

Отсюда ясен физический смысл функции обрезания. Ее введение означает, что при вычислении интегральных величин, сопоставляемых диаграммам Фейнмана, фактически производится интегрирование не по бесконечной, а по некоторой конечной области 4-импульсного пространства. При этом L является граничным импульсом для области импульсов виртуальных частиц.

Интересно отметить, что Фейнман в работе [17] априори ввел множитель сходимости

$$F_F^{(n)}(P_1, \ldots, P_n, L) = \prod_{i=1}^{n} \frac{L^2}{P_i^2 + L^2}. \tag{6.8}$$

Функция обрезания (6.6), при больших импульсах, просто совпадает с фейнмановским множителем сходимости (6.8). Таким образом, **появление фейнмановского множителя в теории, является прямым следствием перенормировки вакуумного состояния, в которой отражается явление внутреннего искажения пространство-временного континуума** $P_s(3) \to T_s(1)$.

Ниже, на примерах вычислений массового и поляризационного операторов второго порядка продемонстрируем новый метод. С помощью последнего получим радиационную поправку наименьшего ненулевого порядка теории возмущений к закону Кулона.

а) **Массовый оператор второго порядка.** В новой формулировке квантовой теории поля все физические величины определяются точно таким же образом как в стандартной теории, лишь с той разницей, что все полевые функции заменены на соответствующие им перенормированные функции. Поэтому опустив детали, запишем выражение точного электронного перенормированного пропагатора

$$\underset{f}{G}_{ik}(x_1 - x_2) = -i < 0 \mid T \underset{f}{\psi}_i(x_1) \underset{f}{\bar\psi}_k(x_2) \mid 0 >, \tag{6.9}$$

где i, k—биспинорные индексы. Это выражение отличается от обычной, заменой $\underset{f}{\psi}^{int}$ -операторов в представлении взаимодействия на гейзенберговские $\underset{f}{\psi}$. При этом, по аналогии обычной теории, имеем

$$\underset{f}{G}_{ik}(x_1 - x_2) = -\frac{< 0 | T \underset{f}{\psi}_i^{int}(x_1) \underset{f}{\bar\psi}_k^{int}(x_2) \underset{f}{S} | 0 >}{< 0 | \underset{f}{S} | 0 >}. \tag{6.10}$$

Произведем разложение этого выражения по степеням e^2.

Такая процедура приводит к представлению функции $\underset{f}{G}(x)$ в виде совокупности диаграмм с двумя внешними электронными линиями и различным числом вершин. При этом учитываются лишь диаграммы без изолированных вакуумных петель

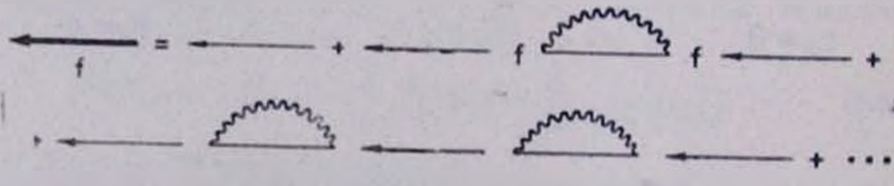

Рис. 2

В импульсном представлении имеем

$$G_f(P) = G^0_f(P) + G^0_f(P) M_f(P) G_f(P), \tag{6.11}$$

где $M_f(P)$ —перенормированный массовый оператор.

В первом неисчезающем приближении теории возмущений перенормированному массовому оператору соответствует интегральное выражение

$$-iM^{(2)}_f(P) = (-ie)^2 \int \gamma^\mu G^0_f(P-k)\, \gamma^\nu D_{f\,\mu\nu}(k)\, \frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{6.12}$$

Подставив соответствующие выражения пропагаторов и сведя вместе множители $\gamma^\mu \ldots \gamma_\mu$, получим

$$M^{(2)}_f(P) = -\frac{8\pi i e^2}{(2\pi)^4} \int F^{(2)}\big((P-k)_*, k_*, L\big)\, \frac{2m - \gamma P + \gamma k}{[(P-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)}. \tag{6.13}$$

Здесь, в фотонный пропагатор введена фиктивная масса фотона λ, с целью устранения инфракрасной расходимости. Для функции обрезания второго порядка, согласно формуле (6.6), имеем

$$F^{(2)}\big((P-k)_*, k_*, L\big) = F^{(1)}\big((P-k)_*, L\big)\, F^{(1)}(k_*, L), \tag{6.14}$$

где

$$F^{(1)}\big((P-k)_*, L\big) = \frac{L^2}{(P-k)^2 - m^2 + L^2},$$

$$F^{(1)}(k_*, L) = \frac{L^2}{k^2 + L^2}. \tag{6.15}$$

В последней формуле учитывали, что

$$(P-k)^2_* = (P-k)^2 - m^2, \tag{6.16}$$

$$k^2_* = k^2.$$

Поэтому

$$M^{(2)}_f(P) = -\frac{8\pi i}{(2\pi)^4}\, e^2 I, \tag{6.17}$$

где

$$I = L^4 \int \frac{(2m - \gamma P + \gamma k)\, d^4k}{[(P-k)^2 - m^2 + L^2](k^2 + L^2)[(P-k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)}. \tag{6.18}$$

Вычисление этого интеграла удобно производить методом параметризации [17]. Опустив детали стандартных вычислений, приведем окончательный результат

$$M^{(2)}_f(P) = \frac{\alpha L^2}{2} \int_0^1 dx_1 \left\{ \left(2m + \frac{\gamma P \beta_1}{2P^2}\right) \int_0^{x_1} \frac{dx_2}{\rho(x_2)} - \right.$$

$$-\left[2m+\frac{\gamma P}{2P^2}(\beta_1+L^2)\int_0^{x_1}\frac{dx_2}{\tau(x_2)}+\frac{\gamma P}{2P^2}\ln\left|\frac{\tau(x_1)}{\eta(x_1)}\right|\right]\Bigg\}, \tag{6.19}$$

где

$$\begin{aligned}\eta(x) &= P^2x^2+\beta_1 x+\beta_0,\\ \tau(x) &= \eta(x)+L^2x,\\ \beta_1 &= k^2-P^2-m^2-L^2,\\ \beta_0 &= L^2(x_1-1)-m^2.\end{aligned} \tag{6.20}$$

б) **Поляризационный оператор второго порядка.** Точный фотонный перенормированный пропагатор имеет вид

$$\underset{t}{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(x_1-x_2)=i<0\,|\,T\underset{t}{A}_\mu(x_1)\underset{t}{A}_\nu(x_2)\,|\,0>, \tag{6.21}$$

где $\underset{t}{A}_\mu(x)$ — гейзенберговские перенормированные операторы. По аналогии (6.10), выражение (6.21) можно представить в форме

$$\underset{t}{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(x_1-x_2)=i\,\frac{<0\,|\,T\underset{t}{A}{}^{in}_\mu(x_1)\underset{t}{A}{}^{in}_\nu(x_2)\underset{t}{S}\,|\,0>}{<0\,|\,\underset{t}{S}\,|\,0>}. \tag{6.22}$$

Стандартным методом производим разложение $\underset{t}{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(x)$ по степеням e^2. Для этого подставляем в (6.22) разложение для $\underset{t}{S}$ и с помощью теоремы Вика производим усреднение. В результате в импульсном представлении будем иметь

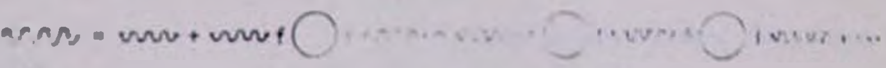

Рис. 3

т. е.

$$\underset{t}{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)=\underset{t}{D}_{\mu\nu}(k)+\underset{t}{D}_{\mu\lambda}(k)\,\frac{\underset{t}{\mathcal{P}}{}^{\lambda\sigma}(k)}{4\pi}\,\underset{t}{\mathcal{D}}_{\sigma\nu}(k), \tag{6.23}$$

где $\underset{t}{\mathcal{P}}{}^{\lambda\sigma}(k)$ — перенормированный поляризационный оператор. Представим точный фотонный перенормированный пропагатор в виде суммы поперечной и продольной частей

$$\underset{t}{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)=\underset{t}{\mathcal{D}}(k^2)\left(g^0_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\underset{t}{\mathcal{D}}{}^{(l)}(k^2)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{6.24}$$

Аналогичное представление справедливо для приближенного пропагатора

$$\underset{t}{D}_{\mu\nu}(k)=\underset{t}{D}(k^2)\left(g^0_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\underset{t}{D}{}^{(l)}(k^2)\,\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \tag{6.25}$$

С помощью условий обратимости

$$\underset{f}{\mathscr{D}}{}^{-1}_{\mu\nu}\,\underset{f}{\mathscr{D}}{}^{\lambda\nu}=\delta^{\lambda}_{\mu};\quad \underset{f}{D}{}^{-1}_{\mu\nu}\,\underset{f}{D}{}^{\lambda\nu}=\delta^{\lambda}_{\mu}, \tag{6.26}$$

для обратных тензоров получаем

$$\begin{gathered}\underset{f}{\mathscr{D}}{}^{-1}_{\mu\nu}=\underset{f}{\mathscr{D}}{}^{-1}\left(g^{0}_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right)+\underset{f}{\mathscr{D}}{}^{(l)-1}\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}},\\ \underset{f}{D}{}^{-1}_{\mu\nu}=\underset{f}{D}{}^{-1}\left(g^{0}_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right)+\underset{f}{D}{}^{(l)-1}\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}.\end{gathered} \tag{6.27}$$

С учетом представления (6.23) имеем

$$\underset{f}{\mathscr{P}}_{\mu\nu}=\underset{f}{\mathscr{P}}(k^{2})\left(g^{0}_{\mu\nu}-\frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^{2}}\right). \tag{6.28}$$

То есть, перенормированный оператор $\underset{f}{\mathscr{P}}_{\mu\nu}(k)$ является поперечным тензором. Причем

$$\underset{f}{\mathscr{P}}(k^{2})=k^{2}-\frac{4\pi}{\underset{f}{\mathscr{D}}(k^{2})}. \tag{6.29}$$

В первом неисчезающем приближении теории возмущений перенормированному поляризационному оператору соответствует следующая диаграмма

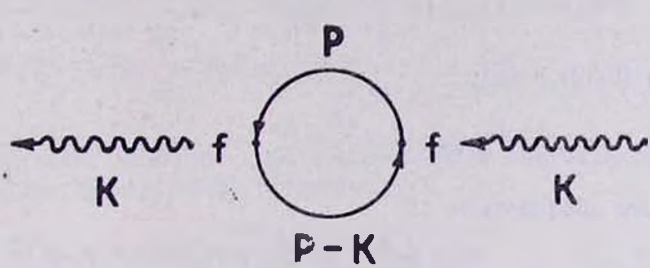

Рис.4

которой отвечает интеграл

$$\frac{i\underset{f}{\mathscr{P}}{}^{\mu\nu}_{(2)}(k)}{4\pi}\rightarrow-e^{2}\int S_{p}\gamma^{\mu}\underset{f}{G}{}^{c}(P)\gamma^{\nu}\underset{f}{G}{}^{c}(P-k)\frac{d^{4}P}{(2\pi)^{4}}. \tag{6.30}$$

Подставляя выражения перенормированных пропагаторов, получаем

$$\frac{i\underset{f}{\mathscr{P}}{}^{\mu\nu}_{(2)}(k)}{4\pi}\rightarrow-\frac{e^{2}}{(2\pi)^{4}}\int F^{(2)}(P_{*},(P-k)_{*},L)\times$$

$$\times\frac{S_{p}\gamma^{\mu}(\gamma P+m)\gamma^{\nu}(\gamma P-\gamma k+m)d^{4}P}{(P^{2}-m^{2})\left[(P-k)^{2}-m^{2}\right]}=$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int F^{(2)}(P_\alpha, (P-k)_\alpha, L) \times \tag{6.31}$$

$$\times \frac{g_0^{\mu\nu}(P^2 - m^2 - Pk) - 2P^\mu P^\nu + (P^\mu k^\nu + P^\nu k^\mu)}{(P^2 - m^2)[(P-k)^2 - m^2]}\, d^4P.$$

Согласно формуле (6.28), необходимо вычислить только поперечную часть этого тензора. Для этого достаточно выделить из (6.31) часть, пропорциональную тензору $g_0^{\mu\nu}$. Кроме первого слагаемого в числителе подынтегрального выражения (6.31), вклад в указанную часть дает также второе слагаемое. Поэтому

$$\frac{\mathcal{P}^{\mu\nu}_{t(2)}(k)}{4\pi} \to \frac{e^2}{(2\pi)^4} \int F^{(2)}(P_\alpha, (P-k)_\alpha, L) \times \tag{6.32}$$

$$\times \frac{g_0^{\mu\nu}(m^2 - P^2 - Pk) - 2P^\mu P^\nu}{(P^2 - m^2)[(P-k)^2 - m^2]}\, d^4P,$$

где

$$F^{(2)}(P_\alpha, (P-k)_\alpha, L) = F^{(1)}(P_\alpha, L) F^{(1)}((P-k)_\alpha, L),$$

$$F^{(1)}(P_\alpha, L) = \frac{L^2}{P_\alpha^2 + L^2} = \frac{L^2}{P^2 - m^2 + L^2}, \tag{6.33}$$

$$F^{(1)}((P-k)_\alpha, L) = \frac{L^2}{(P-k)_\alpha^2 + L^2} = \frac{L^2}{(P-k)^2 - m^2 + L^2}.$$

Представим (6.32) в виде

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}_{t(2)}(k) \to \frac{e^2}{4\pi^3} I^{\mu\nu}. \tag{6.34}$$

Здесь принято обозначение

$$I^{\mu\nu} = L^4 \int \frac{[g_0^{\mu\nu}(m^2 + P^2 - Pk) - 2P^\mu P^\nu]\, d^4P}{(P^2 - m^2 + L^2)(P^2 - m^2)[(P-k)^2 - m^2 + L^2][(P-k)^2 - m^2]}. \tag{6.35}$$

После стандартных вычислений получим

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}_{t(2)}(k) = \alpha L^2 g_0^{\mu\nu} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2\, [m^2 + k^2 x_2(1 - x_2)] \times$$

$$\times \left[\ln\left|\frac{L^2 x_2 + \beta}{\beta}\right| - \frac{L^2 x_2}{\beta(L^2 x_2 + \beta)} \right], \tag{6.36}$$

где

$$\beta = k^2 x_2^2 - (L^2 + k^2) x_2 + m^2 + L^2(x_1 - 1). \tag{6.37}$$

в) Модификация закона Кулона. После включения в фотонную линию, отвечающую реальному фотону всех собственно энергетических поправок, получим эффективную внешнюю фотонную линию. Ей отвечает в импульсном представлении следующая замена:

$$e_\mu \to e_\mu + \underset{f}{\mathcal{D}_{\mu\rho}}(k)\,\frac{\underset{f}{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}(k)}{4\pi}\,e_\lambda\,. \tag{6.38}$$

Если рассматривается линия внешнего поля, то вместо e_μ необходимо писать $A_\mu^{(e)}$:

$$A_\mu^{(e)} \to A_\mu^{(e)} + \underset{f}{\mathcal{D}_{\mu\rho}}(k)\,\frac{\underset{f}{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}(k)}{4\pi}\,A_\lambda^{(e)}\,. \tag{6.39}$$

Используя это выражение и результат пункта б), получим радиационную поправку к закону Кулона в первом неисчезающем приближении теории возмущений. Как известно, кулоновский скалярный потенциал имеет вид $\Phi(r) \equiv A_0^{(e)} = Q\,/\,r$.

Причем

$$\Phi(\vec{k}) = A_0^{(e)}(\vec{k}) = \frac{4\pi Q}{(\vec{k})^2}\,, \tag{6.40}$$

где $\Phi(\vec{k})$ —компоненты трехмерного разложения Фурье. Для эффективного потенциала, согласно (6.39), имеем

$$\mathcal{A}_0^{(e)} = A_0^{(e)} + \underset{f}{\mathcal{D}_{0\rho}}\,\frac{\underset{f}{\mathcal{P}^{\rho\lambda}}}{4\pi}\,A_\lambda^{(e)} = A_0^{(e)} + \frac{1}{4\pi}\,\underset{f}{\mathcal{P}}\,\underset{f}{\mathcal{D}}\,A_0^{(e)}\,. \tag{6.41}$$

Второй член дает искомую добавку. В первом неисчезающем приближении теории возмущений получим

$$\underset{f}{\delta\Phi}(\vec{k}) = -\,4\pi Q\,\frac{F^{(1)}(k_*, L)}{(\vec{k}^2)^2}\,\underset{f}{\mathcal{P}^{(2)}}\,(-\vec{k}^2), \tag{6.42}$$

где

$$\underset{f}{\mathcal{D}}(k^2) \simeq \underset{f}{D}(k^2) = -\,\frac{4\pi}{\vec{k}^2}\,F^{(1)}(k_*, L), \tag{6.43}$$

$$F^{(1)}(k_*, L) = \frac{L^2}{-\vec{k}^2 + L^2}.$$

Тогда

$$\underset{f}{\delta\Phi}(\vec{r}) = \int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\underset{f}{\delta\Phi}(\vec{k})\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,. \tag{6.44}$$

Если учесть, что $\underset{f}{\delta\Phi}(\vec{k})$ является функцией лишь от $t = -\vec{k}^2$, то после интегрирования по углам находим

$$\underset{f}{\delta\Phi}(r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \underset{f}{\delta\Phi}(t)\,\frac{\sin(r\sqrt{-t})}{r}\,d(-t). \tag{6.45}$$

Следовательно

$$\underset{f}{\Phi}(r) = \frac{Q}{r}\left(1 + \frac{1}{4\pi^2 Q}\int_0^\infty \underset{f}{\delta\beta}(t)\sin(r\sqrt{-t})\,d(-t)\right) \tag{6.46}$$

Подставляя значение оператора $\underset{f}{\mathcal{F}}^{(m)}(k^2)$, имеем

$$\underset{f}{\Phi}(r) = \frac{Q}{r}\Bigg\{1 - \frac{4\pi L^4}{\pi}\int_0^\infty \frac{d(-t)}{t^2}\,\frac{1}{t+L^2}\sin(r\sqrt{-t})\times$$

$$\times\int_0^1 dx_1\int_0^{x_1} dx_2\,[m^2 - tx_2(1-x_2)]\Bigg[\ln\left|\frac{L^2x_2+\beta(t)}{\beta(t)}\right| - \tag{6.47}$$

$$-\frac{L^2x_2}{\beta(t)(L^2x_2+\beta(t))}\Bigg]\Bigg\}.$$

где

$$\beta(t) = tx_2^2 - (L^2 - t)x_2 + m^2 + L^2(x_1 - 1). \tag{6.48}$$

§ 7. Объединенные калибровочные поля и симметрии. В заключение мы применим развитые методы для рассмотрения некоторой обобщенной модели взаимодействия полей.

В плоском многообразии $G(2.2.3)$ определим объединенные калибровочные поля $W_\rho\ (\overset{1}{W}_\rho,\ \overset{2}{W}_\rho) = W_\rho(\overset{1}{W}_{(\lambda,\mu,\alpha)},\ \overset{2}{W}_{(\tau,\nu,\beta)})$ ($\lambda, \mu, \tau, \nu = 1, 2$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$).

Пусть калибровочные векторные поля $\overset{2}{W}_\rho$ ассоциируют с локальной калибровочной симметрией $\overset{2}{G}{}^{loc}$ ($\overset{2}{W}_\rho \subset \overset{2}{G}{}^{loc}$). Компоненты тензоров полей $\overset{2}{W}{}^{\varphi}_{(\tau,\nu,\beta)}$ определяются следующим образом:

$$\overset{2}{W}{}^{\varphi}_{[(\lambda,\mu,\alpha)(\tau,\nu,\beta)]} = \partial_{(\lambda,\mu,\alpha)}\overset{2}{W}{}^{\varphi}_{(\tau,\nu,\beta)}(\zeta^P) - \tag{7.1}$$

$$-\partial_{(\tau,\nu,\beta)}\overset{2}{W}{}^{\varphi}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^P) + ig_2C_{[\varphi\sigma\kappa]}\overset{2}{W}{}^{\sigma}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^P)\overset{2}{W}{}^{\kappa}_{(\tau,\nu,\beta)}(\zeta^P),$$

где $C_{[\varphi\sigma\kappa]}$ — структурные константы алгебры Ли группы $\overset{2}{G}{}^{loc}$. При калибровочных преобразованиях, поля $\overset{2}{W}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^P)$ преобразуются согласно правилу

$$\overset{2}{W}{}'_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^P) = -\frac{1}{ig_2}U_2(\zeta^P)\left(D^{(-)}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\overset{2}{W}_\rho)U_2^{-1}(\zeta^P)\right) = \tag{7.2}$$

$$=\frac{1}{ig_2}\left(U_2(\zeta^p)\overleftarrow{D}^{(+)}_{(\lambda\mu\alpha)}(\overset{2}{W}{}^{-}_p)U_2^{-1}(\zeta^p)\right),$$

где приняты следующие обозначения:

$$D^{(-)}_{(\lambda\mu\alpha)}(\overset{2}{W}_p)=\partial_{(\lambda\mu\alpha)}-ig_2\overset{2}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p),$$

$$\overleftarrow{D}^{(+)}_{(\lambda\mu\alpha)}(\overset{2}{W}_p)=\overleftarrow{\partial}_{(\lambda\mu\alpha)}+ig_2\overset{2}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p), \tag{7.3}$$

$$\overset{2}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p)=\overset{2}{W}{}^{q_2}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p)T_2^{q_2},$$

$$U_2(\zeta^p)=e^{ig_2\vec{\omega}(\zeta^p)\vec{T}_2}.$$

Здесь $\vec{T}_2$ — ортонормированные генераторы глобальной группы $\overset{2}{G}$ в присоединенном представлении.

Пусть калибровочные поля $\overset{2}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p)$ искажают многообразие $G(2.2.3)$

$$G(2.2.3)\xrightarrow{\overset{2}{W}_p}G(2\,2\,3),$$

$$\widehat{e}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p,\overset{2}{W}_p)=D^{(\rho,\omega,\gamma)}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p,\overset{2}{W}_p)\,\widehat{e}_{(\rho,\omega,\gamma)}= \tag{7.4}$$

$$=O_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p,\overset{2}{W}_p)\otimes\sigma_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta^p,\overset{2}{W}_p).$$

Тогда локальную симметрию $\overset{2}{G}{}^{loc}$ назовем **скрытой калибровочной симметрией,** поскольку в этом случае она экранирована локальной калибровочной группой

$$G^{loc}_f(\overset{2}{W}_p\subset\overset{2}{G}{}^{loc})=\widetilde{SO}(6.6)\otimes D^{loc}_f(\overset{2}{W}_p\subset\overset{2}{G}{}^{loc}). \tag{7.5}$$

Пусть отображенные калибровочные векторные поля $\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta)$ ассоциируют с локальной калибровочной симметрией $\overset{1}{G}{}^{loc}(\overset{1}{W}\subset\overset{1}{G}{}^{loc})$. Отображенные поля $\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta)$ получаются из $\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^p)$ посредством отображения $\zeta^p(\zeta):G(2.2.3)\to G(2\,2\,3)$

$$\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^p)=\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda,\mu,\alpha)}(\zeta^p(\zeta))\equiv\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta), \tag{7.6}$$

где

$$\zeta^p(\zeta)\leftrightarrow\zeta^{(\rho,\omega,\gamma)}=\zeta^{(\rho,\omega,\gamma)}(\zeta^{(\lambda\mu\alpha)}). \tag{7.7}$$

Компоненты тензоров полей $\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta)$ записываются в виде

$$\overset{1}{W}{}^{q_1}_{[(\lambda\mu\alpha)(\tau\nu\beta)]}(\zeta)=\partial_{(\lambda\mu\alpha)}\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\tau\nu\beta)}(\zeta)-\partial_{(\tau\nu\beta)}\overset{1}{W}{}^{q_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta)+$$

$$+igC_{[q_1r_1s_1]}\overset{1}{W}{}^{r_1}_{(\lambda\mu\alpha)}(\zeta)\overset{1}{W}{}^{s_1}_{(\tau\nu\beta)}(\zeta), \tag{7.8}$$

где $C_{(\alpha\beta\gamma)}$ — структурные константы алгебры Ли группы $\overset{1}{G}{}^{loc}$. Присутствие калибровочных полей $\overset{1}{W}{}^{\lambda}_{(\alpha\beta)}(\zeta)$ обеспечивает инвариантность лагранжиана физической системы $\{\varphi_A, \bar{\varphi}_A\}$ $(\varphi_A = \varphi_1(\zeta), \ldots, \varphi_n(\zeta)$, $\bar{\varphi}_A = \bar{\varphi}_1(\zeta), \ldots, \bar{\varphi}_n(\zeta))$, определенной в искаженном многообразии $G(223)$, относительно локальных преобразований группы $\overset{1}{G}{}^{loc}$

$$\varphi'_A(\zeta) = U(\zeta)\varphi_A(\zeta), \quad \bar{\varphi}'_A(\zeta) = \bar{\varphi}_A(\zeta)U^{-1}(\zeta),$$

$$U(\zeta) = e^{i\vec{\omega}_\lambda(\zeta)\vec{T}_\lambda}, \tag{7.9}$$

где $\vec{T}_\lambda$ — ортонормированные генераторы глобальной группы $\overset{1}{G}$ в присоединенном представлении.

В рассматриваемой модели компоненты $\overset{2}{W}_p$ и $\overset{1}{W}$ не смешиваются. То есть поля-партнеры $\overset{2}{W}_p$ и $\overset{1}{W}$ совместимы:

$$[\overset{2}{W}_p, \overset{1}{W}] = 0. \tag{7.10}$$

Полное действие системы взаимодействующих полей представим суммой

$$S = \overset{2}{S}_p + S_f = \int L_{\overset{2}{W}_p}\, d\zeta^{(1,1,1)} \wedge \ldots \wedge d\zeta^{(3,3,3)} + \tag{7.11}$$

$$+ \int (L_f^{\overset{1}{W}} + L_f^M)\sqrt{g(\overset{2}{W}_p)}\, d\zeta^{(111)} \wedge \ldots \wedge d\zeta^{(223)}.$$

Посредством локально $\overset{M}{G}{}^{loc}$ инвариантного лагранжиана $L_{\overset{2}{W}_p}$ описываются калибровочные поля $\overset{2}{W}_p$, а посредством лагранжианов $L_f^{\overset{1}{W}}$ и L_f^M — поля $\overset{1}{W}$; $\varphi_A, \bar{\varphi}_A$. Лагранжиан $L_{\overset{2}{W}_p}$ инвариантен относительно преобразований локальной группы $\widetilde{SO}(6.6) \otimes \overset{2}{G}{}^{loc}$. В свою очередь, наличие калибровочных полей $(\overset{2}{W}_p, \overset{1}{W})$ обеспечивает инвариантность лагранжиана $L_f = L_f^{\overset{1}{W}} + L_f^M$ относительно локальной объединенной группы

$$\underset{f}{G}{}^{loc}(W) = \underset{f}{G}{}^{loc}(\overset{2}{W}_p) \otimes \overset{1}{G}{}^{loc}(\overset{1}{W}) = \underset{f}{G}{}^{loc}(\overset{2}{W}_p \subset \overset{2}{G}{}^{loc}) \otimes \overset{1}{G}{}^{loc}(\overset{1}{W}), \tag{7.12}$$

Уравнения полей получаются стандартным образом

$$\frac{\partial^p L_{\overset{2}{W}_p}}{\partial^p \overset{2}{W}_{(\lambda,\alpha,\alpha)}} = \overset{2}{j}{}^{(\lambda,\alpha,\alpha)} = -\frac{\partial^p (L_f J_\Phi)}{\partial^p \overset{2}{W}_{(\lambda,\alpha,\alpha)}},$$

$$\frac{\partial \overset{1}{L}{}^{W}_{F}}{\partial \overset{1}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}} = \overset{1}{j}{}^{(\lambda\mu\alpha)} = -\frac{\partial L^{M}_{F}}{\partial \overset{1}{W}_{(\lambda\mu\alpha)}}, \tag{7.13}$$

$$\frac{\partial L^{M}_{F}}{\partial \psi_{A}} = 0, \quad \frac{\partial L^{M}_{F}}{\partial \overline{\psi}_{A}} = 0.$$

Здесь $\dfrac{\partial^{p} L}{\partial^{p} \Phi}$ и $\dfrac{\partial L}{\partial \Phi}$ — вариации Эйлера-Лагранжа, определенные в многообразиях $G(2.2.3)$ и $G(223)$ соответственно.

Рассмотрим частные примеры.

а)
$$\overset{1}{W}_{p} = 0,$$

$$\overset{2}{W}{}^{(1,1,\alpha)}(\zeta^{p}) = \overset{2}{W}{}^{(2,1,\alpha)}(\zeta^{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\eta}{\overset{2}{W}}{}^{(+\alpha)}(\zeta^{p}),$$

$$\overset{2}{W}{}^{(1,2,\alpha)}(\zeta^{p}) = \overset{2}{W}{}^{(2,2,\alpha)}(\zeta^{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\eta}{\overset{2}{W}}{}^{(-\alpha)}(\zeta^{p}). \tag{7.14}$$

Тогда имеем

$$G(223) = \underset{\eta}{G}(23) \oplus \underset{u}{G}(23), \tag{7.15}$$

где $\underset{\eta}{G}(23)$ и $\underset{u}{G}(23)$ — искривленные многообразия, в которых базисами являются $\{\underset{\eta}{\hat{e}}{}^{(\lambda\alpha)}(\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p})\}$ и $\{\underset{u}{\hat{e}}{}^{(\lambda\alpha)}(\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p})\}$ соответственно (см. гл. 3). Гравитационное взаимодействие, осуществляемое посредством калибровочных полей $\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p} \subset \overset{2}{G}{}^{loc}$ назовем **гравитационным взаимодействием со скрытой симметрией** $\overset{2}{G}{}^{loc}$. В гл. 1, 3 нами было рассмотрено **гравитационное взаимодействие со скрытой симметрией** $U^{loc}(1)$:

$$\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p} \equiv a^{p} \subset U^{loc}(1).$$

В этом случае объединенная группа (7.12) имеет вид

$$\underset{1}{\mathcal{G}}{}^{loc}(W) = G^{loc}(\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p}) = G^{loc}(a^{p} \subset U^{loc}(1)) =$$

$$= \widetilde{SO}(6.6) \otimes D^{loc}(a^{p} \subset U^{loc}(1)). \tag{7.16}$$

В другом случае, когда

$$\underset{\eta}{\overset{2}{W}}_{p} \subset SU^{loc}(n) \quad (n \geqslant 2), \tag{7.17}$$

имеем **гравитационное взаимодействие со скрытой симметрией** $SU^{loc}(n)$. Тогда объединенная группа (7.12) записывается в виде

$$\mathcal{G}^{loc}(W) = G^{loc}(\overset{2}{W}_{\rho} \subset SL^{loc}(n)) = \widetilde{SO}(6.6) \otimes D^{loc}(\overset{2}{W}_{\rho} \subset SL^{loc}(n)). \tag{7.18}$$

б) Рассмотрим другой пример объединенных полей

$$\overset{2}{W}{}^{(1,1,0)}(\zeta) = -\overset{2}{W}{}^{(2,1,0)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{2}{W}{}^{(+0)}(\zeta),$$

$$\overset{2}{W}{}^{(1,2,0)}(\zeta) = -\overset{2}{W}{}^{(2,2,0)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\overset{2}{W}{}^{(-0)}(\zeta), \tag{7.19}$$

$$\overset{1}{W} \subset \overset{1}{G}{}^{loc}, \quad \overset{2}{W}_{\rho} \subset \overset{2}{G}{}^{loc}.$$

В этом случае, чисто внутрение искаженное многообразие $G(2\,2\,3)$ распадается следующим образом

$$G(2\,2\,3) = \underset{\zeta_1}{G}(2\,3) \otimes \underset{\eta_1}{G}(2,3) = \underset{\zeta_1}{P}(3) \otimes \underset{\zeta_1}{T}(3) \otimes \underset{\eta_1}{P}(3) \otimes \underset{\eta_1}{T}(3). \tag{7.20}$$

Объединенная группа имеет вид

$$\underset{1}{\mathcal{G}}{}^{loc}(W) = \underset{1}{G}{}^{loc}(\overset{2}{\underset{\eta}{W}}_{\rho} \subset \overset{2}{G}{}^{loc}) \otimes \overset{1}{G}{}^{loc}(\overset{1}{W}) = \underset{1}{\overset{1}{G}}{}^{loc}(\underset{1}{\overset{1}{W}}_{\rho}). \tag{7.21}$$

В рассматриваемом примере в конечной стадии остается локальная калибровочная группа (7.21). Это значит, что лагранжиан физической системы, определенной в $G(2\,2\,3)$ (7.20), инвариантен относительно локальных преобразований

$$\psi_A(\zeta_1) = U_1\psi_A(\zeta_1), \quad \bar{\psi}_A(\zeta_1) = \bar{\psi}_A(\zeta_1)\,U_1^{-1},$$

$$U_1 = U(\zeta_1) = e^{(\varepsilon_1 - i\theta_1)\,\vec{T}_1}. \tag{7.22}$$

Вследствие чисто внутреннего искажения многообразия (7.20), компоненты калибровочных полей подвергаются преобразованию (2.2). Поэтому, хотя локальная $\underset{1}{\overset{1}{G}}{}^{loc}$ симметрия остается точной симметрией в $G(223)$, она нарушена в $\underset{\zeta_1}{G}(2.3)$. Причем поля $\underset{\zeta_1}{\overset{1}{W}}{}^{\rho}_{(\eta_1)}$ приобретают массу $m_{\frac{1}{W}} = m_{\frac{1}{W}}(\overset{2}{\underset{\eta}{W}}_{\rho})$ (см. гл. 3).

§ 8. Некоторые вопросы физики сверхплотных равновесных конфигураций. В уравнения, определяющих строение равновесной конфигурации сверхплотного вещества, состоящей из газа, находящегося в искаженном континууме $\underset{f}{P}(3) \otimes \underset{f}{T}(1)$, при нулевой температуре, входят уравнения полей гравитации и внутреннего искажения, уравнения гидростатического равновесия и уравнения состояния сверхплотного вещества. Нас здесь не интересует явный вид этих уравнений. Они будут рассмотрены в отдельной работе, посвященной астрофизической задаче о конфигурациях дозвездного сверхплотного вещества.

Весь диапазон плотностей вещества разделяется на области плотностей выше, порядка и ниже ядерной. В области плотности выше ядерной появляются различные стабильные гипероны, что обеспечивается принципом Паули. При сверхвысоких плотностях ($\rho \gtrsim 10^{14}$ гсм^{-3}), вследствие чисто внутреннего искажения континуума $P(3) \oplus T(1) \rightarrow \underset{\iota}{P}(3) \oplus \underset{\iota}{T}(1)$, каждая отдельная частица газа претерпевает фазовый переход:

$$
\begin{aligned}
&E_k \rightarrow E_k^{\iota}, \quad (E_k, \vec{P}_k, m_k) \backsim P(3) \oplus T(1),\\
&\left.\begin{aligned}&\vec{P}_k \rightarrow \vec{P}_k^{\iota},\\ &m_k \rightarrow m_k^{\iota},\end{aligned}\right. \quad (E_k^{\iota}, \vec{P}_k^{\iota}, m_k^{\iota}) \backsim \underset{\iota}{P}(3) \oplus \underset{\iota}{T}(1),
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

где E_k, $\vec{P}_k$, m_k —энергия, импульс и масса покоя частицы k-го типа. Далее, поскольку ядерные силы передаются посредством обмена квантами Янг-Миллсовского калибровочного векторного поля, то ядерная потенциальная энергия $U(N)$ для одной частицы подвергается перенормировке вследствие искажения континуума $P(3) \oplus T(1)$:

$$
U(N) \rightarrow U^{\iota}(N^{\iota}, \tilde{\theta}),
\tag{8.2}
$$

где $\tilde{\theta}$ —инвариантный угол чисто внутреннего искажения. Следует заметить, что при внутреннем искажении пространство-временного континуума не изменяются те характеристики частицы, которые непосредственно не связаны с геометрией. В частности, не изменяется спиновое состояние частицы. Это обстоятельство имеет первостепенное значение для рассматриваемой задачи. Для полноты системы уравнений, определяющих строение сверхплотной равновесной конфигурации при указанных физических условиях, необходимо иметь явный вид функций

$$
\begin{aligned}
&g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(a_{03}, a_3, \tilde{a}_{0\alpha}, \tilde{a}_{\alpha}),\\
&E_k^{\iota} = E_k^{\iota}(E_k, m_k c^2, \vec{P}_k c, \tilde{\theta}),\\
&\vec{P}_k^{\iota} = \vec{P}_k^{\iota}(\vec{P}_k, m_k c, E_k c^{-1}, \tilde{\theta}),\\
&m_k^{\iota} = m_k^{\iota}(m_k, E_k c^{-2}, \vec{P}_k c^{-1}, \tilde{\theta}).
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

в конкретных физических случаях. Здесь $g_{\mu\nu}$ —метрический тензор искривленного и внутренне искаженного пространство-временного континуума $\underset{\iota}{P}(3) \oplus \underset{\iota}{T}(1)$.

Ниже мы рассмотрим лишь несколько частных примеров.

1) **Случай центрально-симметрического статического гравитационного поля ($a_0 \neq 0$) при одномерном времениподобном внутреннем искажении** ($\tilde{a}_{03} \equiv \tilde{a}_0 \neq 0, \tilde{a}_{01} = \tilde{a}_{02} = \tilde{a}_{\alpha} = 0$).

Компоненты метрического тензора имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&g_{00} = (1 - \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2 \tilde{a}_0^2,\\
&g_{33} = -\left[(1 + \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2 \tilde{a}_0^2\right],
\end{aligned}
$$

$$g_{11} = -r^2\cos(\vartheta^{(+3)} - \vartheta^{(-3)}),\quad g_{22} = -r^2\sin^2\vartheta\cos(\vartheta^{(+3)} - \vartheta^{(-3)}), \tag{8.4}$$
$$g_{\mu\nu} = 0\ (\mu \neq \nu),$$

где

$$\operatorname{tg}\vartheta^{(\pm 3)} = -\varkappa(-a_3 \pm \tilde a_0) \tag{8.5}$$

В рассматриваемом случае, находящаяся в чисто внутренне искаженном ($\tilde\vartheta_3 = \vartheta_3 = 0$, $\tilde\vartheta_0 = \vartheta_0$, $\operatorname{tg}\tilde\vartheta_0 = -\varkappa\tilde a_0$) континууме $\underset{i}{P}(3) \otimes \underset{i}{R}(1)$ частица претерпевает фазовый переход:

$$E_i = E + \varkappa a_0 mc^2, \tag{8.6}$$
$$\underset{i}{P}_{1,2} = \underset{0}{P}_{1,2}\cos\tilde\vartheta_0,\quad \underset{i}{P}_3 = P_3,$$

$$m_i = \left[\left(m + \operatorname{tg}\tilde\vartheta_0\frac{E}{c}\right)^2 - \sin^2\tilde\vartheta_0\frac{P_1^2 + P_2^2}{c^2} - \operatorname{tg}^2\tilde\vartheta_0\frac{P_3^2}{c^2}\right]^{1/2}. \tag{8.7}$$

2) Случай центрально-симметрического статического гравитационного поля ($a_0 \neq 0$) при трехмерном времениподобном внутреннем искажении ($\tilde a_{01} = \tilde a_{02} = \tilde a_{03} \equiv \tilde a_0 \neq 0$, $\tilde a_3 = 0$).

Метрика имеет вид:

$$g_{00} = \cos^4\tilde\vartheta_0[(1 - \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2\tilde a_0^2],\quad g_{0i} = 0,$$
$$g_{ij} = -\tau_i\tau_j(\mu_i^a\mu_j^a + \tilde\mu_i^a\tilde\mu_j^a)\quad (i, j = 1, 2),$$

$$g_{33} = -\cos^4\tilde\vartheta_0[(1 + \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2\tilde a_0^2] - \frac{\varkappa^2\sin^2\tilde\vartheta_0(1 + \cos\tilde\vartheta_0)^2(\tilde a_0^2 - a_0^2)}{2}, \tag{8.8}$$

$$\tau_1 = r,\quad \tau_2 = r\sin\vartheta,$$

$$g_{i3} = -\tau_i\Big\{\cos^2\tilde\vartheta_0[\mu_i^3(1 + \varkappa a_0) - \tilde\mu_i^3\varkappa\tilde a_0] +$$
$$+ \varkappa\frac{\sin\tilde\vartheta_0(1 + \cos\tilde\vartheta_0)}{2}[a_0(\tilde\mu_i^1 - \tilde\mu_i^2) - \tilde a_0(\mu_i^1 - \mu_i^2)]\Big\},$$

где $\operatorname{tg}\tilde\vartheta_0 = -\varkappa\tilde a_0$, и

$$\mu_1^1 = \frac{\cos\tilde\vartheta_0}{2}[\cos\vartheta^{(+3)}(1 - \varkappa\tilde a_0) + \cos\vartheta^{(-3)}(1 + \varkappa\tilde a_0)],\ \mu_2^1 = -\mu_1^2,$$

$$\mu_1^3 = \frac{1 + \cos\tilde\vartheta_0}{4}[\sin\vartheta^{(+3)}(1 - \varkappa\tilde a_0) + \sin\vartheta^{(-3)}(1 + \varkappa\tilde a_0)],\ \mu_2^3 = \mu_1^3,$$

$$\mu_1^2 = \frac{\sin\tilde\vartheta_0}{4}[(1 + \cos\vartheta^{(-3)})(1 + \varkappa\tilde a_0) - (1 + \cos\vartheta^{(+3)})(1 - \varkappa\tilde a_0)],\ \mu_2^1 = -\tilde\mu_1^2,$$

$$\tilde\mu_1^1 = \frac{\cos\tilde\vartheta_0}{2}[\cos\vartheta^{(+3)}(1 + \varkappa a_0) - \cos\vartheta^{(-3)}(1 - \varkappa\tilde a_0)],\ \tilde\mu_2^1 = -\mu_1^2,$$

$$\tilde{\mu}_1^1 = \frac{1+\cos\tilde{\theta}_0}{4}\left[\sin\theta^{(+3)}(1+\varkappa\tilde{a}_0) - \sin\theta^{(-3)}(1-\varkappa\tilde{a}_0)\right], \quad \tilde{\mu}_2^2 = \tilde{\mu}_1^1, \tag{8.9}$$

$$\tilde{\mu}_3^1 = -\frac{\sin\tilde{\theta}_0}{4}\left[(1+\cos\theta^{(-3)})(1-\varkappa\tilde{a}_0) - (1+\cos\theta^{(+3)})(1+\varkappa\tilde{a}_0)\right],$$

$$\tilde{\mu}_1^3 = -\tilde{\mu}_3^1, \quad \operatorname{tg}\theta^{(\pm 3)} = -\varkappa(-a_0 \pm \tilde{a}_0).$$

Частица претерпевает фазовый переход

$$E_{\rm f} = E\cos^2\tilde{\theta}_0 - \frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}_0 mc^2, \tag{8.10}$$

$$\vec{P}_{\rm f} = \vec{P}\cos^2\tilde{\theta}_0,$$

$$m_{\rm f} = \left[\left(m\cos^2\tilde{\theta}_0 + \frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}_0\frac{E}{c^2}\right)^2 + \frac{\sin^2\tilde{\theta}_0(1+\cos\tilde{\theta}_0)^2}{2}\frac{E^2}{c^4} - c^{-2}\underset{\rm f}{\tilde{\vec{P}}^2}\right]^{1/2}, \tag{8.11}$$

где

$$\underset{f}{\tilde{P}_1} = -\frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}_0 P_1 + \frac{\sin\tilde{\theta}_0(1+\cos\tilde{\theta}_0)}{2}(P_3 - P_2),$$

$$\underset{f}{\tilde{P}_2} = -\frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}_0 P_2 + \frac{\sin\tilde{\theta}_0(1+\cos\tilde{\theta}_0)}{2}(P_1 - P_3), \tag{8.12}$$

$$\underset{f}{\tilde{P}_3} = -\frac{1}{2}\sin 2\tilde{\theta}_0 P_3 + \frac{\sin\tilde{\theta}_0(1+\cos\tilde{\theta}_0)}{2}(P_2 - P_1).$$

3) Случай центрально-симметрического статического гравитационного поля ($a_0 \neq 0$) при одномерном пространственноподобном внутреннем искажении ($\tilde{a}_0 = \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$, $\tilde{a}_3 = \tilde{a} \neq 0$).

Метрика записывается в виде:

$$\begin{aligned} g_{00} &= (1-\varkappa a_0)^2 + \varkappa^2\tilde{a}^2, \quad g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu), \\ g_{33} &= -[(1+\varkappa a_0)^2 + \varkappa^2\tilde{a}^2], \\ g_{11} &= -r^2, \quad g_{22} = -r^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Находящаяся в чисто внутренне искаженном ($\tilde{\theta}^1 = \tilde{\theta}^2 = 0$, $\tilde{\theta}^3 = \tilde{\theta}$, $\operatorname{tg}\tilde{\theta} = -\varkappa\tilde{a}$) континууме $\underset{f}{P}(3) \oplus \underset{f}{T}(1)$ частица претерпевает фазовый переход

$$E_{\rm f} = E, \tag{8.14}$$

$$\underset{f}{P}_{1,2} = P_{1,2}\cos\tilde{\theta}, \quad \underset{f}{P}_3 = P_3 - \operatorname{tg}\tilde{\theta}\, mc, \tag{8.15}$$

$$m_{\rm f} = \left|\left(m - \operatorname{tg}\tilde{\theta}\frac{P_3}{c}\right)^2 + \sin^2\tilde{\theta}\frac{P_1^2 + P_2^2}{c^2} - \operatorname{tg}^2\tilde{\theta}\frac{E^2}{c^4}\right|^{1/2}. \tag{8.16}$$

4) Случай центрально-симметрического статического гравитационного поля ($a_0 \neq 0$) при трехмерном пространственноподобном внутрен-

при исхлажении ($\bar\varepsilon_{\gamma} = 0,\ \bar a_1 = \bar a_2 = \bar a_3 = \bar a \neq 0$).

Имеем:

$$g_{00} = \cos^4\bar\theta[(1-\varkappa a_0)^2 - \varkappa^2\bar a^2],\quad g_{0i} = 0,$$

$$g_{ij} = -\eta_i\eta_j(\nu_i^1\nu_j^1 + \nu_i^2\nu_j^2),$$

$$g_{33} = -\cos^4\bar\theta[(1+\varkappa a_0)^2 + \varkappa^2\bar a^2] - \frac{\sin^2\bar\theta(1+\cos\bar\theta)^2}{2}\varkappa^2(a_0^2+\bar a^2),$$

$$g_{i3} = -\eta_i[\cos^2\bar\theta\,\nu_i^1(1+\varkappa a_0) + \varkappa\bar a\,\nu_i^2] +$$

$$+\frac{\sin\bar\theta(1+\cos\bar\theta)}{2}\varkappa[a_0(\nu_i^1-\nu_i^2) - \bar a(\nu_i^1-\nu_i^2)], \tag{8.17}$$

где $\operatorname{tg}\bar\theta = -\varkappa\bar a$, и

$$\nu_1^1 = \frac{\cos\bar\theta}{2}[\cos\theta^{(+)}(1+\varkappa\bar a) + \cos\theta^{(-)}(1-\varkappa\bar a)],\quad \nu_2^1 = -\nu_1^1,$$

$$\nu_1^2 = \frac{1+\cos\bar\theta}{4}[\sin\theta^{(+)}(1+\varkappa\bar a) + \sin\theta^{(-)}(1-\varkappa\bar a)],\quad \nu_2^2 = \nu_1^2,$$

$$\nu_1^3 = \frac{\sin\bar\theta}{4}[(1+\cos\theta^{(-)})(1-\varkappa\bar a) - (1+\cos\theta^{(+)})(1+\varkappa\bar a)],\quad \nu_2^3 = -\nu_1^3,$$

$$\bar\nu_1^1 = \frac{\cos\bar\theta}{2}[\cos\theta^{(+)}(1-\varkappa\bar a) - \cos\theta^{(-)}(1+\varkappa\bar a)],\quad \bar\nu_2^1 = -\bar\nu_1^1,$$

$$\bar\nu_1^2 = \frac{1+\cos\bar\theta}{4}[\sin\theta^{(+)}(1-\varkappa\bar a) - \sin\theta^{(-)}(1+\varkappa\bar a)],\quad \bar\nu_2^2 = \bar\nu_1^2, \tag{8.18}$$

$$\bar\nu_1^3 = -\frac{\sin\bar\theta}{4}[(1+\cos\theta^{(-)})(1+\varkappa\bar a) - (1+\cos\theta^{(+)})(1-\varkappa\bar a)],$$

$$\bar\nu_2^3 = -\bar\nu_1^3,$$

$$\operatorname{tg}\theta^{(\pm)} = \varkappa(a_0 \pm \bar a).$$

Частица претерпевает фазовый переход

$$\underset{f}{E} = E\cos^2\bar\theta,$$

$$\underset{f}{P_1} = P_1\cos^2\bar\theta - \frac{\sin\bar\theta}{2}(1+\cos\bar\theta)mc,\quad \underset{f}{P_2} = \overset{i}{\underset{i}{P_2}}\cos^2\bar\theta + \tag{8.19}$$

$$+\frac{\sin\bar\theta}{2}(1+\cos\bar\theta)mc,\quad \underset{f}{P_3} = P_3\cos^2\bar\theta - \frac{1}{2}\sin 2\bar\theta\, mc,$$

$$\underset{f}{m} = \left\{\frac{1}{c^2}\underset{f}{\bar P_0^2} - \frac{\sin^2_0\bar\theta}{2}(1+2\cos\bar\theta + 3\cos^2\bar\theta)\frac{E^2}{c^4}\right\}^{1/2}. \tag{8.20}$$

5) Случай центрально-симметрического статического гравитационного поля ($a_0 \neq 0$) при одномерном времениподобном и пространственноподобном внутреннем искажении ($\tilde{a}_{01} = \tilde{a}_{02} = \tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$, $\tilde{a}_{03} \equiv \tilde{a}_0 \neq 0$, $\tilde{a}_3 \equiv \tilde{a} \neq 0$).

Метрика записывается в виде:

$$g_{00} = (1 - \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2 \tilde{a}_0^2 + \varkappa^2 \tilde{a}^2, \quad g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu),$$

$$g_{33} = - \left[(1 + \varkappa a_0)^2 - \varkappa^2 \tilde{a}_0^2 + \varkappa^2 \tilde{a}^2 \right],$$

$$g_{11} = - \frac{r^2}{2} \left[\cos(\theta^{11} - \theta^{22}) + \cos(\theta^{21} - \theta^{12}) \right],$$

$$g_{22} = - \frac{r^2}{2} \sin^2\theta \left[\cos(\theta^{11} - \theta^{22}) + \cos(\theta^{21} - \theta^{12}) \right], \tag{8.21}$$

где

$$\operatorname{tg}\theta^{11} = -\varkappa(-a_0 + \tilde{a}_0 + \tilde{a}), \quad \operatorname{tg}\theta^{12} = -\varkappa(-a_0 + \tilde{a}_0 - \tilde{a}),$$

$$\operatorname{tg}\theta^{21} = \varkappa(a_0 + \tilde{a}_0 + \tilde{a}), \quad \operatorname{tg}\theta^{22} = -\varkappa(-a_0 - \tilde{a}_0 + \tilde{a}). \tag{8.22}$$

В рассматриваемом случае чисто внутреннего искажения ($\tilde{\theta}_0^1 = \tilde{\theta}_0^2 = \tilde{\theta}^1 = \tilde{\theta}^2 = 0$, $\tilde{\theta}_0^3 \equiv \tilde{\theta}_0$, $\tilde{\theta}^3 \equiv \tilde{\theta}$) частица претерпевает фазовый переход

$$E_f = E - mc^2 \operatorname{tg}\tilde{\theta}_0,$$

$$\underset{f}{P}_{1,2} = C_+ P_{1,2}, \quad \underset{f}{P}_3 = P_3 - mc \operatorname{tg}\tilde{\theta},$$

$$m_f = \left\{ \left(m + \operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 \frac{E}{c^2} - \operatorname{tg}\tilde{\theta} \frac{P_3}{c} \right)^2 + \right. \tag{8.23}$$

$$\left. + \frac{P_1^2 + P_2^2}{c^2} (S_-^2 - S_+^2) - \left(\operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 \frac{P_3}{c} + \operatorname{tg}\tilde{\theta} \frac{E}{c^2} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

где

$$C_+ = \frac{1}{2} (\cos\theta^+ + \cos\theta^-), \quad \operatorname{tg}\tilde{\theta}_0 = -\varkappa\tilde{a}_0, \tag{8.24}$$

$$S_\pm = \frac{1}{2} (\sin\theta^+ \pm \sin\theta^-), \quad \operatorname{tg}\tilde{\theta} = -\varkappa\tilde{a}, \quad \operatorname{tg}\theta^\pm = -\varkappa(\tilde{a}_0 \pm \tilde{a}). \tag{8.25}$$

Таким образом, приходим к следующему заключению: при внутреннем искажении континуума $R(3) \oplus T(1) \to \underset{f}{R}(3) \oplus \underset{f}{T}(1)$, каждая отдельная частица газа претерпевает фазовый переход, при котором происходит сдвиг спектра масс, энергий-импульсов частиц, а следовательно, и энергии (плотности масс) газа в целом, вверх по энергетической шкале. Ядерные силы отталкивания между барионами неренормируются. Вследствие этого, когда напряженности полей внутреннего искажения неограниченно растут, силы отталкивания соответствующим образом стремятся к нулю. Несмотря на то, что обычный угловой момент отдельной частицы газа, а следовательно и компактного распределения сверхплотного вещества, мал, тем не менее искаженный угловой момент частицы и газа в целом, могут принимать достаточно большие значения.

Автор выражает искреннюю признательность академику В. А. Амбарцумяну за полезные обсуждения, а также академику С. П. Новикову за ценные замечания по конкретизации используемого математического аппарата.

Գ. Տ. ՏԵՐ-ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱ-ԺԱՄԱՆԱԿԱՅԻՆ ԿՈՆՏԻՆՈՒՈՒՄԻ ԱՂԱՎԱՂՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

Առաջին գլխում առաջարկված է տարածության և ժամանակի ընկալողություն, հիմնված ֆիզիկական նոր հասկացությունների վրա։ Նոր ընկալողության դիրքերից են նկարագրվում մասնակի հարաբերականության տեսության, քվանտային տեսության և ԸՀՏ-ն ուսումնասիրության ոլորտում գտնվող խնդիրները և երևույթների շարժընթացքը։ Ընդ որում, տարածաժամանակային հասկացությունները պատշաճ կերպով փոխարինվում են իրենց համարժեք հասկացություններով։

Դիտարկված է հաուզդորֆյան պարակոմպակտ $G(m.n)$ բազմակերպությունը։ Մշակված է K-խմբի և դրա ներկայացումների տեսության հիմունքները, որն արտացոլում է $G(2.3)$ բազմակերպությանը հատուկ համաչափությունների հատկությունները։

$G(2.3)$ բազմակերպության մեջ անընդհատ ձևափոխությունների (K-ձևափոխություններ, վեցաչափ տեղաշարժեր) հետ մեկտեղ կարելի է դիտարկել նաև ընդհատ ձևափոխություններ։ Այդպիսիք են, դրական կո-կոնտրա- (I_+), բացասական կո-կոնտրա (I_-) և լրիվ կո-կո կամ կոնտրա-կոնտրա I_{+-} ձևափոխությունները։

Բացահայտված է $\widehat{SO}(3.3)$-խմբի (համասեռ սեփական օրթոքրոն K խմբի) Լիի հանրահաշվի կարևոր հատկությունը, ինչի համաձայն $\widehat{SO}(3.3)$-խմբի ինֆինիտեզիմալ ծնիչները բերվում են անկախ վեկտոր-օպերատորների։ Վերջիններս բավարարում են մոմենտների տեղափոխական առնչություններին։ Ուստի չբերվող $D(P, q)$ ներկայացումը դիտարկելով որպես $SO(3.R)$ խմբի բերվող $D(P) \otimes D(q)$ ներկայացում, տրոհվում է $SO(3.R)$-խմբի չբերվող ներկայացումների։ Տարածության տարրը, որը ձևափոխվում է $(D(1/2, 0))^{m_1} \otimes (D(0,1/2))^{m_2}$ ներկայացմամբ, կոչվում է $m_1 + m_2$ ռանգի սպինոր։ n-րդ ռանգի կո-կամ կոնտրավարիանտ թենզոր կոչվում է տարածության տարրը, որը ձևափոխվում է $(D(1/2, 1/2))^n$ ներկայացմամբ։

Ուսումնասիրված է լրիվ K խմբի և սպինորական հանրահաշվի միջև կապը։ Դյուրին է ստանալ թենզորները սպին—թենզորներով արտահայտելու ընդհանուր օրենքը։ Այս կերպ $G(2.3)$ բազմակերպության մեջ կառուցված թենզորական հանրահաշիվը փոխարինվում է սպին-թենզորական հանրահաշվով։ Ունիտար մատրիցի միջոցով ստացվում են բոլոր սեփական պտույտները։ Բինար էրմիտական մատրիցով նկարագրվում է բուստը (հիպերբոլական պտույտը)։ Երբ U-ի փոփոխման տիրույթը ամբողջ $SL(2)$ խումբն է, համապատասխան $K = h(U)$ հոմոմորֆիզմի փոփոխման տիրույթը սեփական օրթոքրոն $K_+^{(+)}$ խումբն է։ h-ը $K_+^{(+)}$ խմբի երկտակ ծածկումն է $SL(2)$ խմբով։ K խմբի Լիի հանրահաշվի հենքային մատրիցները ստացվում են $SL(2)$ խմբի Լիի հանրահաշվի հենքային մատրիցներից։ Լրիվ K խմբի ծածկումը ստա-

Ինչը նշանակում. հարկ է $SL(2)$ խմբին միացնել նաև $\bar{I}_+ = i\varepsilon$, $\bar{I}_- = i\varepsilon i$ օպերատորները։ $-\bar{I}_3$ օպերատորները ևս պատկանում են ընդլայնված $\bar{L}$ խմբին։ Ըստ այդմ լրիվ K խումբը երկուսով ծածկվում է ընդլայնված $\bar{K}$ խմբով։ Վերջինս ընդգրկում է $\bar{L}$-ը և անդրադարձների խումբը։ Ըստ որում $\bar{K}$ խումբը տրոհվում է կապակցվածության $\bar{K}_{\uparrow}^{(+)}$, $\bar{K}^{(-)}$, $\bar{K}^{(\pm)}$, $\bar{K}_{\downarrow}^{(-)}$ բաղադրիչների, որոնք ծածկում են լրիվ K խմբի կապակցվածության համապատասխան բաղադրիչները։ Բացահայտված է $G(2.3)$ բազմակերպության և Մինկովսկու քառաչափ տարածության համապատասխանությունը։ $G(2.3)$ բազմակերպությունը տրոհվում է եռաչափ $P(3)$ տարածության և $T(3)$ եռաչափ ժամանակային տարածության։ Քանի որ $T(3)$-ի մեջ բոլոր ուղղությունները համարժեք են, ապա ժամանակ հասկացությամբ ի նկատի կունենանք ակնհայտ ուղղության վրա ժամանակային կոորդինատը։ Այդուհանդերձ, վերջապես $G(2.3)$ բազմակերպությունից անցնում ենք Մինկովսկու քառաչափ տարածությանը։ $G(2.3)$ բազմակերպության մեջ որոշված քվանտային դաշտերի համար ձևակերպված է նվազագույն գործողության սկզբունքը և ստացված են համապատասխան դաշտային հավասարումները։ Հետազոտված են Նյոթերի թեորեմը և դրա հետևանքները։ Ձևակերպված են պահպանության օրենքները։ Դիտարկված են փոխազդող դաշտերը։ Եթե ֆիզիկական համակարգի գործողությունը ինվարիանտ է որևէ գլոբալ համաչափության նկատմամբ, ապա տեղային համաչափությունների հանդեպ ինվարիանտության առավել խիստ պահանջը բավարարվում է տրամաչափական դաշտ ներմուծելով։

Գրավիտացիայի խնդրի լուծման համար մշակված է նաև նոր մոտեցում։ Եթե $\eta^{\circ} \in G(2.3)$ կետում առկա է գրավիտացիոն դաշտ, ապա այդտեղ $\{e\}$ հենքը աղավաղվում է։ Նախ պսևդովեկտորները տեղային կերպով ձեռք են բերում վեկտորների հատկություններ, ապա միավոր վեկտորների ξ_{α} ընտանիքը տրոհվում է $\xi_{(\pm)}$ երկու ընտանիքների, որոնցից յուրաքանչյուրը մյուսի նկատմամբ իրեն դրսևորում է պսևդովեկտորի պես։ Պահանջենք, որ $G(\pm 3)$ տարածությունների եռաչափությունը չխախտվի։ Գրավիտացիոն $a^{p} = a^{p}(\eta^{p})$ Ֆարադեյ-Մաքսվելյան տեսքի դաշտը որոշված է հարթ $G(2.3)$ բազմակերպության մեջ։ Դրա ազդեցությամբ $G(2.3)$ բազմակերպությունը կորանում է։ Հարկ է կատարել (12.2) դիֆեոմորֆիզմը։ Ներմուծված է կորացման տեղային $G^{loc}(2.3)$ խումբը։ Գրավիտացիոն փոխազդող դաշտերի համակարգի լրիվ գործողության ինտեգրալը ներկայացվում է (13.1) տեսքով։ L_{a^p}-լագրանժիանով նկարագրվում է տրամաչափական a^{p} դաշտը, իսկ L_{φ}-լագրանժիանը նկարագրում է կորացած $G(23)$ բազմակերպության մեջ շարժվող մնացած դաշտերը՝ φ_{λ}, $\bar{\varphi}_{\lambda}$։ Տրամաչափական a^{p} դաշտի առկայությունը ապահովում է L_{φ} լագրանժիանի ինվարիանտությունը կորացման տեղային $G^{loc}(2.3)$ խմբի նկատմամբ։ Գրավիտացիոն փոխազդող դաշտերի համակարգի լրիվ էներգիա-շարժման քանակի պահպանման օրենքների ձևակերպման համար օգտվենք (14.4) ներկայացումից։ Համաձայն Նյոթերի թեորեմի էներգիա-շարժման քանակի լրիվ թենզորը պահպանվում է։

Որպես մասնավոր խնդիր, դիտարկված է կենտրոնահամաչափ գրավիտացիոն դաշտի դեպքը։ Նյուտոնյան փորձերի տեսանկյունից սույն տեսությունը անզանազանելի է ԸՀՏ-ից։

Նշված տեսությունների միջև էական տարբերությունը ի հայտ է գալիս ուժեղ դաշտերի դեպքում։ Դիտարկված է տարածա-ժամանակային հարթ կոնտինուումին հատուկ հասկացություններով ձևակերպված քվանտային գրավիտացիայի տեսությունը։

Տարածա-ժամանակային կոնտինուումի աղավաղման տեսության մշակման համար հույժ կարևոր է պատկերացում ունենալ G(2.2.3) *բազմակերպության մասին։* Երկրորդ գլխում *նկարագրված է հաուզդորֆյան պարակոմպակտ* G(2.2.3) *հարթ բազմակերպությունը։ Կատարված է անցում* G(2.2.3) *-ից դեպի ժամանակա-տարածային-ներքին կոնտինուումը։ Պարզագույն դաշտերի օրինակների վրա ցույց է տրված տեսության մեջ մասնիկի հանգստի զանգվածի գաղափարի ներմուծման հնարավորությունը։ Մշակված են* G(2.2.3) *բազմակերպությանը հատուկ համաչափությունները արտացոլող* $\hat{K}$ *-խմբի հիմունքները։ Բացահայտված է* $\widehat{SO}(6.6)$ *խմբի (համասեռ սեփական օրթոքրոն-օրթոքրոն* $K^{(++)}_{+}$ *խմբի) Լիի հանրահաշվի կարևոր հատկությունը, ինչի համաձայն,* $\widehat{SO}(6\ 6)$ *խմբի ինֆինիտեզիմալ ծնիչները բերվում են անկախ վեկտոր-օպերատորների։ Վերջիններս բավարարում են մոմենտների տեղափոխային առնչություններին։ Տարածության տարրը, որը ձևափոխվում է* $(D(1/2, 0))^{m_1}\otimes(D(0, 1/2))^{m_2}\otimes(D(1/2, 0))^{m_3}\otimes(D(0, 1/2))^{m_4}$ *ներկայացմամբ, կոչվում է* $m_1+m_2+m_3+m_4$ *ռանգի սպինոր։* (n_1+n_2)*-րդ ռանգի թենզոր կոչվում է տարածության տարրը, որը ձևափոխվում է* $(D(1/2, 1/2))^{n_1}\otimes(D(1/2, 1/2))^{n_2}$ *ներկայացմամբ։*

Ուսումնասիրված է լրիվ $\hat{K}$ *խմբի և սպինորական հանրահաշվի միջև կապը։* G(2.2.3) *բազմակերպության մեջ կառուցված թենզորական հանրահաշիվը փոխարինվում է սպին-թենզորական հանրահաշվով։ Երբ* U*-ի փոփոխման տիրույթը* $SL(2)\otimes SL(2)$ *խումբն է, համապատասխան* $\hat{K}=\hat{h}(U)$ *հոմոմորֆիզմի փոփոխման տիրույթը սեփական օրթոքրոն-օրթոքրոն* $K^{(++)}_{+}$ *խումբն է։* $\hat{h}$*-ը* $K^{(++)}_{+}$ *խմբի երկտակ ծածկումն է* $SL(2)\otimes SL(2)$ *խմբով։* $\hat{K}$ *խմբի Լիի հանրահաշվի հենքային մատրիցները ստացվում են* $SL(2)\otimes SL(2)$ *խմբի Լիի հանրահաշվի հենքային մատրիցներից։*

Լրիվ $\hat{K}$ *խմբի ծածկումը ստանալու նպատակով հարկ է* $SL(2)\otimes SL(2)$ *խմբին միացնել նաև* $\hat{\hat{I}}_{+}=\gamma_0\otimes\gamma_0$, $\hat{\hat{I}}_{-}=\gamma_0\gamma_5\otimes\gamma_0\gamma_5$ *օպերատորները։ Լրիվ* $\hat{K}$ *խումբը երկտակ ծածկվում է ընդլայնված* $\hat{\hat{K}}$ *խմբով։ Վերջինս ընդգրկում է* $\hat{\hat{L}}$*-ը* $(SL(2)\otimes SL(2)\oplus\{\hat{\hat{I}}\})$ *և տասներկու չափանի տեղաշարժերի խումբը։* $\hat{\hat{K}}$ *խումբը տրոհվում է կապակցվածության* $\tilde{K}^{(++)}_{+}$, $\tilde{K}^{(+-)}_{+}$, $\bar{K}^{(-+)}_{+}$, $\tilde{K}^{(--)}_{+}$, $\tilde{K}^{(++)}_{-}$, $\tilde{K}^{(+-)}_{-}$, $\bar{K}^{(-+)}_{-}$, $\bar{K}^{(--)}_{-}$ *բաղադրիչների, որոնք ծածկում են լրիվ* $\hat{K}$ *խմբի կապակցվածության համապատասխան բաղադրիչները։*

G(2.2.3) *բազմակերպության մեջ որոշված քվանտային դաշտերի համար ձևակերպված է նվազագույն գործողության սկզբունքը և ստացված են համա-*

պատասխան դաշտային հավասարումները։ Ձևակերպված են նյութերի թերմոդինամիկայի հիմունքները։ Դիտարկված են փոխազդող դաշտերը։

Երրորդ գլխում դիֆֆերենցիալ երկրաչափության մաթեմատիկական ապարատի միջոցով տրված է ապավազված G(223) բազմակերպության ընդհանուր նկարագիրը։ Առաջարկված է ապավազման փոխազդեցության տեսությունը։ Ընդհանրացված G(2.2.3) բազմակերպության ապավազման տեսությունը G(2.3) բազմակերպության կորացման տեսության համանմանն է։ Ապավազմամբ փոխազդող դաշտերի համակարգի լրիվ գործողությունը ներկայացվում է (4.1) տեսքով։ $L_{\mathcal{F}}$-լագրանժիանով նկարագրվում է ապավազման տրամաչափական a^{μ} դաշտը, իսկ L_{F}-լագրանժիանը նկարագրում է ապավազված G(223) բազմակերպության մեջ շարժվող մնացած դաշտերը։ Տրամաչափական a^{μ} դաշտի առկայությունը ապահովում է L_{F} լագրանժիանի ինվարիանտությունը լրիվ ապավազման տեղային $G^{loc}(223)$ խմբի նկատմամբ։ Բազմակերպության կորացումը ներկայացված է որպես մասնակի ապավազում։ Հետազոտված է մաքուր ներքին ապավազման ռեժիմը։ Այս դեպքի համար դիտարկված են պարզագույն դաշտերի օրինակներ։ Ներմուծված է մասնիկի հանգստի ապավազված զանգվածի գաղափարը։ Ցույց է տրված, որ տեղային տրամաչափական համաչափությունների խախտման երևույթը ուղղակի հետևանքն է տարածա-ժամանակային կոնտինուումի մաքուր ներքին ապավազման։ Ընդ որում, տրամաչափական դաշտերը ենթարկվում են վերաչափարկման։ Դիտարկված է ապավազման քվանտային տեսությունը։

Չորրորդ գլխում ուսումնասիրված են նոր ֆիզիկական երևույթներ, որոնք ուղղակի հետևանքն են տարածա-ժամանակային կոնտինուումի։

Ցույց է տրված, որ փոքր հեռավորությունների վրա տարածա-ժամանակային կոնտինուումի ապավազման տեսությունը կանխորոշում է երկու նոր երևույթների գոյությունը։ Առաջինը՝ մասնիկի հանգստի զանգվածի ձեռք բերման և դրա փոփոխության երևույթն է, երկրորդը՝ դաշտերի փոխազդեցության (որն իրագործվում է տրամաչափական դաշտերով) ասիմպտոտական ազատության երևույթն է։ Դուրս է բերված մասնիկի էներգիայի և զանգվածի միջև կապ, որն ընդհանրացումն է քաջ հայտնի էյնշտեյնյան կապի։ Բերված է քվանտային դաշտի տեսության նոր ձևակերպումը, որի շրջանակներում ստացված է կարիչ ֆունկցիան։ Վերջինս համընկնում է Ֆեյնմանյան կարիչ արտադրիչի հետ, վիրտուալ մասնիկի շարժման թափի մեծ արժեքների տիրույթում։ Քվանտային էլեկտրադինամիկայի նոր ձևակերպման շրջանակներում, որպես օրինակներ հաշվարկված են զանգվածի և բևեռացման երկրորդ կարգի օպերատորները։ Ստացված է Կուլոնի օրենքի ռադիացիոն լրացումը խոտորումների տեսության առաջին կարգում։ Վերջնամասում դիտարկված է դաշտերի տրամաչափական փոխազդեցությունների և համաչափությունների ընդհանրացված մոդելը։ Բերված են թաքնված համաչափություններով փոխազդեցությունների օրինակներ։

Քննարկված են հավասարակշիռ գերխիտ գազի, որը գտնվում է ապավազված տարածա-ժամանակային կոնտինուումում (միջուկայինից բարձր խտությունների դեպքում), փոխդասավորվածության ֆիզիկայի մի շարք հարցեր։

Կոնտինուումի ապավազման հետևանքով գազի յուրաքանչյուր մասնիկը ենթարկվում է փուլային անցման։ Դրա շնորհիվ գազի ամբողջ էներգիան *(զանգվածի խտությունը) կտրուկ մեծանում է։ Խտության գերաճի հետ մեկտեղ բարիոնների միջև միջուկային ուժերը ձգտում են զրոյի։*

Չնայած, որ կոմպակտ փոխդասավորվածության շարժման քանակի մոմենտը փոքր է, աղավաղված մոմենտը կարող է ընդունել բավականաչափ մեծ արժեք, շնորհիվ տարածա-ժամանակային կոնտինուումի մաքուր ներքին ուժեղ աղավաղման։

Վերոհիշյալ երևույթները կապված են տարածա-ժամանակային կոնտինուումի գլոբալ հատկությունների հետ, ուստի կախված չեն գերխիտ փոխդասավորվածության մոդելավորումից։

G. T. TER-KAZARIAN

THE THEORY OF DISTORTION OF SPACE TIME CONTINUUM

Chapter 1

The perception of the space-time based on the new physical conceptions has been canstructed. The problems and the dynamics of the processes from the field of investigations of special Relativity (SRT), General Relativity (GRT) and quantum theory have been considered from the point of view of new perception. Whilst the spatial-time conceptions have been properly substituted for the equivalent, appropriate new conceptions.

The Hausdorffian paracompact manifold $G(m.n)$ with the structure (1.1) has been described, where $G(n)$ — is a real linear n — dimensional space, and $^{*}G(m)$ — is a real linear m — dimensional pseudospace. A set of vectors (1.2) is the basis in space $G(n)$, but a set of pseudo-vectors (1.3) is the basis in $^{*}G(m)$. The principles of the theory of pseudo-space $^{*}G(m)$ are treated in § 1. The set of elements (1.12) is the basis in manifold $G(m.n)$. Later on only the manifold $G(2.3)$ will be considered.

The § 2 § 3 dealt with the treatment of principles of the theory of K- group and its representations. K- group refers to continuous and discrete transformations of symmetry of the manifold $G(2.3)$. A homogeneous K-transformation in the manifold $G(2.3)$ are given by means of formulae (2.1, 2). While (2.3) holds. The unification of homogeneous K-transformations with the six-dimensional transfers (2.4) have been reflected the properties of symmetry of the manifold $G(2.3)$. Since there is some arbitrariness upon the choice of time direction (see § 6), it is worth while later on to limit oneself by consideration only the transformations of coordinates, each of which can be reduced to the three hyperbolic rotations in the planes of $(\eta_{(+1)}, \eta_{(-1)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+3)}, \eta_{(-3)})$ and three ordinary rotations in the planes of $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+2)})$ and $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-2)})$, $(\eta_{(+1)}, \eta_{(+3)})$ and $(\eta_{(-1)}, \eta_{(-3)})$, $(\eta_{(+2)}, \eta_{(+3)})$ and $(\eta_{(-2)}, \eta_{(-3)})$, simultaneously. Thus, in general, the conditions (2.5) and (2.6) hold for hyperbolic and ordinary rotations, respectively. A set of 6×6 matrices (K) satisfying the conditions of (2.5, 6), of orthogonality (2.7) and of unimodularity (2.9), generates a homogeneous special group $SO(3.3)$. Satisfying (2.10) the transformations $K^{(+)}$ are called orthochronous. For such matrices the determinant $|K^{(+)}|$ is equal to 1 or — 1. In the first case the set of transformations generates special orthochronous group $K^{(+)}_{+}$. In the second case we have non-special orthochronous transformations $K_{-}^{(+)}$, which do not generate any group. Satisfying (2.11) the transformations are called non-orthochronous and do not generate any group.

Alongside with the continuous transformations some discrete transformations can also be discerned. A positive co-co tra transformation I_{+} (2.12), a negative co-contra transformation I_{-} (2.14) and a complete co-co or contra-contra transformations I_{+-} (2.16). Thus, belonging to the group K, the group of discrete transformations (I) consists of identical E and also I_{+}, I_{-} and I_{+-} — transformations.

An important property of Lie algebra of the group $\widetilde{SO}(3.3)$ has been revealed. According to this, the infinitesimal generators of group $\widetilde{SO}(3.3)$ is reduced to the independent vector operators (2.19), which satisfy the transpositional relations (2.20) of the angular momentum. Hence the irreducible representation $D(p, q)$ of the group $\widetilde{SO}(3.3)$ which can be treated as the reducible representation $D(p) \otimes D(q)$ of ordinary three-dimensional rotation group $SO(3. R)$ is decomposed into irreducible representations of the group $SO(3. R)$ (3.6).

The element of the space transforming according to the representation $(D(1/2, 0))^{m_1} \otimes (D(0,1/2))^{m_2}$ is called the spinor of the rank $m_1 + m_2$.

The element of the space is called the tensor of the rank n which transforms according to the reducible representation $(D(1/2, 1/2)^n$.

The relation between the general group K and the spinor algebra has been investigated in §§ 4,5. The formulae which compare the spin-tensors $(S^{\mu\nu})$ $(\mu, \nu = 1,2)$ of the valency (1.1) to the covariant sixvectors $\eta_{(k\alpha)}$ of the manifold $G(2.3)$ are given by terms of (4.1 — 3). It is readily determined the general expression of the tensors by means of the spin-tensors. Hence, the tensor algebra on the manifold $G(2.3)$ can be completely reduced to the spin-tensor algebra. All special rotations (with the determinant 1) are obtained by means of unitary matrix (4.17), where θ is a rotation angle about the axis specified by the unit vector $\vec{n}$ and $\vec{\sigma}$ are the Pauli matrices. The binar Hermitian matrix (4.18) prescribes the boost (the hyperbolic rotation).

The transformation $K = h(U)$ runs upon the special orthochronous group $K_{+}^{(+)}$, if (U) runs upon the binary group $SL(2)$. The $h(U)$ is the double-sheet covering of special group $K_{+}^{(+)}$ by means of binary group $SL(2)$. The basis of Lie algebra of the group K can be obtained from the basis of the group $SL(2)$. Thereby, the one-parameter set of binary matrices (4.19) corresponds to the matrices σ_k and $\tau_k = i\sigma_k$. It is readily determined that the corresponding set of K-transformations are $e^{2i\theta h_k}$, $e^{2i\theta H_k}$ where h_k and H_k belong to the algebra Lie of the group $K_{+}^{(+)}$.

In the construction of double-sheet covering of general group K the mixed spin-tenssor of valency (1.1) can be interpreted as a linear function upon the bispinor (5.8). Taking into account the identification of the coordinates (5.12) we got (5.13). Hence (5.14) holds for the transformed bispinor. That is why it is proper to add the discrete operators $\bar{I}_+ =$ [illegible], $\bar{I}_- =$ [illegible] to the group $SL(2)$, which acts upon the bispinors by means of representations $\{\bar{U}\}$. The operators $-\bar{I}_\pm$ are also belonged to the expanded group $\bar{L}$, which includes the binary group $SL(2)$ and the operators of discrete transformations $\bar{I}_\pm$. Hence the method of double-sheet covering of the group K by means of expanded group $\bar{K}$ has been worked out. The latter includes the group $\bar{L}$ and the group of transfers in the manifold $G(2.3)$. While the group $\bar{K}$ is decomposed to the components of the connectedness $\bar{K}^{(+)}_{+}$, $\bar{K}^{(-)}_{+}$, $\bar{K}^{(+)}_{-}$, $\bar{K}^{(-)}_{-}$ which cover the components $K^{(+)}_{+}$, $K^{(-)}_{+}$, $K^{(+)}_{-}$, $K^{(-)}_{-}$ of the group K, respectively.

A passage from the manifold $G(2.3)$ to the four-dimensional Minkowski space has been performed in § 6. Thereby, such conceptions as a space, a time, the states of rest and motion, etc have been represented in terms of the function upon the new physical conceptions. According to the formulae (6.1 — 5) the manifold $G(2.3)$ is decomposed into the ordinary three-dimensional space $P(3)$ and three-dimensional time-space $T(3)$. Since all directions of time in $T(3)$ are equal, under the term "time" we shall imply the time coordinates in the fixed direction. Whilst a complete conformity between the manifold $G(2.3)$ and the four-dimensional Minkowski space is established.

A relativistic covariant formulation of the principle of the least action for the quantum fields in manifold $G(2.3)$ has been introduced in § 7. It is dedicated to the invariant functions of the action and deduction of corresponding field equations. Noether theorem has been discussed and its consequences have been investigated in § 8. Here, the conservation laws of dynamic quantities have been formulated.
The principles of the theory of interacting fields in the manifold $G(2.3)$ have been dealt with in § 9. Hence, if the action integral of physical system is invariant under the global symmetries, then enhanced requirement of invariance under the local symmetries may be satisfied by means of introduction of gauge fields. In this case the quantas of these fields should be of zero rest mass.

The general description of curved manifold $G(23)$ by means of mathematical apparatus of differential geometry has been introduced in § 10. A conformity between curved manifold $G(23)$ and four-dimensional Riemannian geometry holds. If time components of metric six-vector are chosen as (10.18), then the metric form is written as (10.19). Consequently the (10.20) holds.

To solve the gravitation problem, quite a new approach has been worked out in §§ 11 — 1[illegible]. It has been mutely accepted till now that the axes of spaces $G(\pm 3)$ forming the manifold $G(2.3)$ are coincided (11.1). Now let us assume that the rotations of these axes about each other by definite angles are possible. Meantime the three-dimensionality of each space should not be violated.

If there is a gravitational field at the point $\eta^p \in G(2.3)$ the basis $\{\hat{e}\}$ is distorted. Firstly, pseudo-vectors locally acquire the property of ordinary vectors (11.2,3). Then, the set of unit vectors $\{\sigma_a\}$ is decomposed into two sub-sets of vectors $\{\sigma_{(\pm\eta)}\}$ each of which behaves as a pseudo-vector with respect to the other (11.1). We demand that the three-dimensionality of the spaces $G(\pm 3)$ should not be violated. That is, here we have the rotations according to the above-mentioned property of the menifold $G(2.3)$. The distortion function in terms of (11.6—8) are introduced. It is demanded that each of the total distortion functions corresponding to the spaces $G(\pm)$should remain equal to zero separately (as for the plane manifold $G(2.3)$) (11.9).

We determine the distertion transformations as the linear transformations by means of matrices ξ and R(11.11,12). Inasmuch as the transformation matrix R must be independent upon the choice of the sequence of the axis about which the rotations are carried out it has the form (11.13). Realizing the distortion of basis $\{\hat{e}\}$ the set of matrices D(11.14) generates a local group of true distortion $D^{loc}(2.3)$ if only the (11.9) holds.

The gravitational vector field $a^p = a^p(\eta^p)$ is defined in the plane manifold $G(2.3)$. It is transformed according to the vector representation of the special orthochronous group $\widehat{SO}(3.3)$. But as a Faraday-Maxwell field it also undergoes gauge transformations.

It is necessary to construct the diffeomorphisms (12, 2—7). Out of the set of every possible curved coordinates we shall choose only the true ones, which satisfy the relations (12. 4,5). The corresponding coordinate frames of reference will be called true curvilinear Q, Q', Q'', ... The immediate consequence of such a definition is as follows: if a manifold is plane in some frame of reference Q, then it is such in the others Q', Q'', ..., and vice versa.

We shall introduce the local curvature group $G^{loc}(2.3)$ (12.8). A total action of the gravitational interacting fields is represented in terms (13.1). The field $a^p(\eta^p)$ are discribed by means of Lagrangian L_{ar}(13.5) but the fields ψ_A, $\bar{\psi}_A$ defined in the curved manifold — by Lagrangian L_g. The presence of gauge fields a^p provides the invariance of Lagrangian L_g under the local curvature group $G^{loc}(2.3)$..

The equations of the fields are written down by (13.2 — 9).

To formulate the conservaton laws of the total energy-momentum of gravitational interacting fields we make use of (14.1). The Lagrangian L_g will be presented in terms of (14.2,3). Hence the total action is written down by (14.4), through which the conservation laws are obtained.

We have § 15 for the central symmetrical static gravitational field. The metric form is written down in terms (15.7). The velocities of the planet motions around the Sun is by far less compared with the velocity of light in the vacuum. That is why (15.18) holds. Hence, suggested theory of gravitation and GRT are indiscernable from the point of view of post-Newtonian experiments. The essential differences arise only at the strong fields.

The quantization theory of gravitation in terms of plane space-time continuum has been worked out in § 16. Having the expression of the gravitational interacting fields in the plane space-time it is readily to formulate the theory by means of Feynman's path-integral or sum-over-histories. Therewith taking into account the interaccation, the generating functional for Green function is written down in terms of (16.2,3).

Chapter 2

For the complete theory of distortion of space-time it is necessary to have a notion of manifold G(2.2.3) and of nature of processes proceeding in it. The present chapter is dedicated to this problem. The dynamics of the physical system defined in G(2.2.3) has been considered. Upon the examples of simple fields it has been shown the possibility of introduction to the theory a conception of mass of particle at rest as a function upon the inner degree of freedom.

The Hausdorffian paracompact manifold $G(m.k.n)$ with the structure (2.1) has been described, where $\overset{\circ}{G}(n)$ — is a real linear n-dimensional space, and $^*G(m.k)$ — is a real linear $m \cdot k$ — dimensional bipseudo — space. A set of bipseudo-vectors (1.1) is the basis in $^*G(m.k)$. The principles of the theory of bispeudo-space are treated in § 1. The set of elements (2.3) is the basis in the manifold $G(m.k.n)$. Later on only the manifold $G(2.2.3)$ will be considered.

A passage from the manifold $G(2.2.3)$ to the space-time-inner continuum has been performed in § 3. The manifold $G(2.2.3)$ is decomposed as follows (3.5).

The §§ 3 – 5 dealt with the treatment of the principles of the theory of group K and its representations. K-group refers to the continuous and discrete transformations of the symmetry of the manifold $G(2.2.3)$. An important property of Lie algebra of the group $\widehat{SO}(6.6)$ (a special orthochronous – orthochronous group $K_{+}^{(++)}$) has been revealed. According to this, the infinitesimal generators (4.11) of the group $\widehat{SO}(6.6)$ is reduced to the independent vector operators (4.14), which satisfy the transpositional relations (4.15)

The element of the space transforming according to the representation $\left(D\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^{m_1} \otimes \left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)^{m_2} \otimes \left(D\left(\frac{1}{2}, 0\right)\right)^{m_3} \otimes \left(D\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)^{m_4}$ is called the spinor of the rank $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$.

The element of the space is called the tensor of the rank $n_1 + n_2$ which transforms according to the reducible representation $\left(D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)^{n_1} \otimes$ $\otimes \left(D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)^{n_2}$. We have the mixed representations in other cases.

The relation between the general group $\hat{K}$ and the spinor algebra has been investigated in §§ 6—8.

The tensor algebra on the manifold $G(2.2.3)$ can be comletely reduced to the spin-tensor algebra. The transformation $\hat{K} = \hat{h}(U)$ runs upon the group $K_+^{(++)}$ if (U) runs upon the group $SL(2) \otimes S(2)$.

That is, $h(U)$ is the double-sheet covering of group $K_+^{(++)}$ by means of binary group $SL(2) \otimes SL(2)$. The one-parameter set of binary matrices (7.11) corresponds to the matrices $\sigma_k^{(1,2)}$ and $\tau_k^{(1,2)} = i\sigma_k^{(1,2)}$. The corresponding set of $\hat{K}$-transformations are (7.12), where $\underset{I}{h_k}$, $\underset{I}{H_k}$, $\underset{II}{h_k}$, and $\underset{II}{H_k}$ belong to the algebra Lie of the group $K_+^{(++)}$.

In the construction of double-sheet covering of general group $\hat{K}$ the mixed spin-tensor of valency (2.2) can be treated as a linear function upon the bispinors (8.3,4). In terms of the identificatinon of coordinates (8.5) we got (8.6). Hence (8.7) holds.

The operators $-\hat{\hat{I}}_\pm$ are also belonged to the expanded group $\tilde{L}$, which includes the binary group $SL(2) \otimes SL(2)$ and the operators of discrete transformations $\hat{\hat{I}}_+ = \hat{\gamma}_0$, $\hat{\hat{I}}_- = \hat{\gamma}_5\hat{\gamma}_0$ (where $\hat{\gamma}_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0$, $\hat{\gamma}_5 = \gamma_5 \otimes \gamma_5$, γ_0 and γ_5 are Dirac's matrices) Hence, the method of double-sheet covering of group $\hat{K}$ by means of expanded group $\hat{\hat{K}}$ has been worked out. The group $\hat{\hat{K}}$ includes the group $\hat{\hat{L}}$ and the group of transfers (4.3). While the group $\hat{\hat{K}}$ is decomposed to the components of the connectedness $\tilde{K}_+^{(++)}$, $\tilde{K}_+^{(+-)}$ $\tilde{K}_+^{(-+)}$, $\tilde{K}_+^{(--)}$, $\tilde{K}_-^{(++)}$, $\tilde{K}_-^{(+-)}$, $\tilde{K}_-^{(-+)}$, $\tilde{K}_-^{(--)}$ which cover the components $K_+^{(++)}$, $K_+^{(+-)}$, $K_+^{(-+)}$, $K_+^{(--)}$, $K_-^{(++)}$, $K_-^{(+-)}$, $K_-^{(-+)}$, $K_-^{(--)}$.

A relativistic covariant formulation of the principle of the least action for the fields defined in $G(2.2.3)$ has been introduced in § 9. The latter is dedicated to the invariant functions of the actions and deduction of corresponding field equations.

Upon the examples of simple fields it has been shown the possibility of introduction to the theory a conception of the mass of particle at rest, as a function upon the inner degree of freedom.

Noether theorem has been discussed and its consequences have been investigated in § 10.

The interacting fields in the manifold $G(2.2.3)$ have been dealt with in § 11.

The quantization theory of interaction in terms of $G(2.2.3)$ has been worked out (by means of sum-over-histories) in § 12.

Chapter 3

The problem of distortion of space-time continuum on the smal space-time intervals has been discussed. The theory of the interactio of distortion has been constructed. The curvature of manifold G(2.3 is considered as a familiar case of distortion. The pure-inner-distortio of manifold G(2.2.3) has been discussed. The simple free fields hav been considered at these conditions. The functions of the mass of thes fields at rest have been introduced. It has been shown that the pheno mena of the violation of local gauge symmetries is a direct consequenc of the pure-inner-distortion of G(2.2.3). Whilst the vector gauge field undergo to the renormalization.

By means of mathematical apparatus of differential geometry the ge neral description of distored manifold $G(223)$ has been introduced in § 1 It has been shown that there is a conformity between the $G(223)$ an the distorted space-time-inner continuum (1.10 — 11).

Let us assume that the rotations of axes of the spaces $G(3(\lambda, \eta =$ $=1,2)$ about each other by definite angles are possible. Meantime th three-dimensionality of each space should not be violated. If there is field of disstortion $a^{F}(\mathcal{F})$ at the point $\mathcal{F} \in G(2.2.3)$, then the basis $\{e\}$ is distorted. The bipseudo-vectors locally acquire the property of ordinar vectors (2.2.3). Then, the set of unit vectors $\{e_{(\ldots)}\}$ is decomposed in- to four-sub-sets of vectors $\{e_{(\lambda\eta)}\}$, each of which behaves as a pseudo- vecter with respect to the other (2.4). We demand that th three-dimensionality of the spaces $G(3)$ should not be violated. That is, he- re we have above-mentioned rotations.

The distortion function in terms of (2.6 — 8) are introduced. It is demanded that (2.9) holds.

Analogous to gravitational theory we construct the theory of the in- teraction of distortion of the manifold $G(2.2.3)$. We determine the dis- tortion transformations as the linear transformations by means of matri- ces C and R (2. 11, 12, 14).

Realizing the distortion of basis $\{e\}$ the set of matrices (2.15) gene- rates a local group of true distortion $D^{lm}(2.2.3)$, if only (2.9) holds.

The diffeomorphism (3.2) has been constructed in § 3.

Out of the set of every possible distorted coordinates we shall cho- ose only the true ones, which satisfy the relations (3.4,5). The total distortion group G^{lm} (2.2.3) (3.8) has been introduced.

A total action of the fields which are interacting with the distortion is represented in terms of (4.1). The field of distortion $a^{F}(\mathcal{F})$ are des- cribed by means of Lagrangian L_{a^F} (4.5) but the fields $\varphi_{A}, \bar{\varphi}_{A}$ defined in the distorted manifold $G(223)$ — by Lagrangian L_{f}. The Lagrangian L_{f} remains invariant under the transformations of local total distortion group (3.8).

The equations of fields are written down by (4.2—9)

To formulate the conservation laws of total energy-momentum, the Lagrangian L_f will be presented in terms of (5.1), where (5.2) holds. Through the action (5.3) the conservation laws are obtained.

The § 6 is dedicated to the invariant functions of action and deduction of corresponding field equations.

The curvature of manifold $G(2.3)$ (see chapter 1) is considered as a familiar case of distortion (§ 7). The pure-inner-distortion of manifold $G(2.2.3)$ has been discussed in § 8.

The simple free fields have been considered at these conditions (§ 9). The functions of distorted mass of these fields at rest have been introduced.

The interacting fields are considered in § 10. It has been shown that the phenomena of vilation of local gauge symmetries is a direct consequence of the pure-inner-distortion of the manifold $G(2.2.3)$. Whilst the vector gauge flleds undergo to the transformation (renormalization) (10.6, 11).

The quantization theory of distortion has been discussed in § 11. Having the expression of the action in terms of plane manifold $G(2.2.3)$ (5.3) it is readily to formulete the theory by means of sum-over-histories. Therewith, the generating functional for the Green function is written down in terms of (11.2,3).

Chapter 4

It has been shown that the theory of distortion of space-time continuum in the region of small space-time intervals predicts the existence of new phenomenon. The first one—the acquisition of the mass at rest of particle; the second one—the asymptotical freedom of the interaction of fields, which is carried out by means of the vector gauge fields. The new formulation of the quantum field theory, which takes into account the phenomena of renormalization of the vacuum (which is due to the pure-inner-distortion of space-time continuum) has been introduced. The problem of ultraviolet divergences is completely solved by initial consideration of phenomenon of renormalization of vacuum and asymptotical freedom. In the frame of new formulation of the theory the cut-off function has been obtained, which coincides with Feynman's cut-off multiplier in the region of high momentum of virtual particle. The general model of the interaction of the fields has been discussed. The physics of the configuration of superdense matter, when one takes into account the phenomena of the distortion of space-time continuum, at the superdensity $\rho \gtrsim 10^{14}$ g cm^{-3}, has been discussed.

The phenomena of acquisition of the mass at rest of the particle and its change has been discussed in § 1. It has been shown that the particle which defined in the plane manifold $G(2.3)$ or continuum $P(3) \oplus T(3)$, due to their pure-inner-distortion, acquires the distorted mass at reast (1.3).

The general relation (1.9.10) between the energy and mass of the particle, which is the generalization of Einstein's ordinary relation, is obtained. This relation is valid in the case of inner distortion of the space-time too.

The phenomena of asymptotical freedom of interaction of the fields has been discussed in § 2. It has been shown that the lanse of interaction of field which are defined in plane manifold $G(2.3)$ or plane continuum $P(3)$ $7(3)$, due to their pure-inner-distortion in the region of high energy, is damping down to the zero, with the increase of distortion (2.10).

The new formulation of the quantum field theory, which takes into account the phenomena of renormalization of vacuum (§ 4), worked out in the §§3—6. Here we make use of the idea that defined in the plane space-time continuum a virtual particle is completely identical to the real one, if only the latter is defined in the pure-inner-distorted space-time continuum (§ 3). The renormalization of the vacuum took place for each particle separately (4.1,2). That is why the generalized operators of creation and annihilation of the particles are introduced (4.3—5). In the new formulation of quantum field theory for the fields one makes use of the generalized operators. The renormalization function is geven by terms of (6.2). In the frame of new formulation of the theory the cut-off function (6.6) has been obtained which coincides with Feynman's cut-off multiplier (6.8) in the region of high momentum of virtual particle. The problem of ultraviolet divergences is completely solved by initial consideration of phenomenon of the renormalization of the vacuum and the asymptotical freedom.

For an example, the divergences which arise in quantum electrodynamics are discussed in § 6. In the frame of new formulation the mass and polarization operators of second-order have been calculated (6.19,36). The radiation correction of first-order of perturbation theory to the Coulomb's potential has been obtained (6.48).

The general model of interaction of the fields has been discussed in § 7. The examles of the gravitational interactions with the hidden local symmetries $U^{loc}(1)$ and $SU^{loc}(n)$ and of gauge interactions with the broken local symmetries have been considered.

Some questions of the physics of the configuration of superdense matter, when one takes into account the phenomena of distortion of space-time continuum at the superdensity $\rho \gtrsim 10^{14}$ gcm^{-3} has been discussed in § 8.

It has been shown that each particle of gas undergoes to the phase transition and the shift of the mass, the energy-momentum spectra and due to it the shift of the energy (the density of mass) of the gas as a whole upwards along the energy scale took place.

The nuclear repulsive forces between the baryons are damping down to the zero with the above increase of density of the configuration. The mentioned phenomenon directly due to the global properties of space-time continuum, therefore they exist independently upon the choice of the model of the configuration of superdense matter.

In spite of the fact that the ordinary angular momenta of compact distribution of superdense matter is small, nevertheless, in special cases, due to the strong pure-inner-distortion of space-time continuum, the distorted angular momenta acquires sufficiently large amount. The more detailed study of this problem will be accomplished in the other work dedicated to the astrophysical problem of physics of primordial superdense matter (see, Астрофизика).

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Эйнштейн*, Собрание научных трудов, т. 1, 2, М.: Наука, 1965.
2. *Б. Л. ван дер Варден*, Алгебра, М.: Наука, 1979.
3. *Р. О. ди Бартини*, ДАН СССР, 163, 4, 1965.
4. *Ю. Б. Румер, А. И. Фет*, Теория групп и квантованные поля, М.: Наука, 1977.
5. *Б. Л. ван дер Варден*, Метод теории групп в квантовой механике, НТВУ, Харьков, 1938.
6. *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*, Современная геометрия: Методы и приложения, М.: Наука, 1986.
7. *Ш. Кобаяси, К. Номидзу*, Основы дифференциальной геометрии, т. 1, 2, М.: Наука, 1981.
8. *Дж. Шварц*, Дифференциальная геометрия и топология, М.: Мир, 1970.
9. *Ш. Кобаяси*, Группы преобразований в дифференциальной геометрии, М.: Наука, 1986.
10. *Л. С. Понтрягин*, Непрерывные группы, М.: Наука, 1984.
11. *S. Weinberg*, Phys. Rev. B 135, 1049, 1964.
12. *E. S. Abers, B. W. Lee*, Phys. Rep. C. 9, 1, 1973.
13. *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков*, Введение в теорию квантованных полей, М.: Наука, 1973.
14. *J. Goldstone*, Nuovo Cimento, 19, 15, 1964.
15. *P. W. Higgs*, Phys. Res. Lett., 12, 132, 1964.
16. *S. Weinberg*, Phys. Rev., B 133, 1318, 1964.
17. *R. P. Feynman*, Phys. Rev., 76, 769, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

1

ԲՅՈՒՐԱԿԱՆԻ ԱՍՏՂԱԴԻՏԱՐԱՆԻ ՀԱՂՈՐԴՈՒՄՆԵՐ

СООБЩЕНИЯ БЮРАКАНСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

ՊՐԱԿ LXII ВЫПУСК

ТЕОРИЯ ИСКАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЕННОГО КОНТИНУУМА

Г. Т. ТЕР-КАЗАРЯН

ԵՐԵՎԱՆ 1989 ЕРЕВАН

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

CONTENTS

СООБЩЕНИЯ БЮРАКАНСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

ВЫПУСК LXII

Печатается по решению ученого совета Бюраканской астрофизической обсерватории АН Армянской ССР

Редактор издательства *Н. Г. Анкарян*
Тех. редактор *Л. А. Саркисян*
Корректор *Л. Н. Сашкян*

ИБ № 1392
Сдано в набор 6.06.1988 г. Подписано к печати 7.02.1989 г. ВФ 02375.
Формат 70×100 1/16. Бумага № 2. Шрифт «литературный», высокая печать.
Печ. л. 7,75. Усл. печ. л. 10,85. Учетно-изд. л. 9,85.
Тираж 1032. Зак. № 819. Изд. № 7550. Цена 1 р. 35 коп.
Издательство АН АрмССР, 375019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24 г.
Типография Издательства АН АрмССР, 378310, г. Эчмиадзин.