О КОНТАКТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕПОДВИЖНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ВРАЩАЮЩИМСЯ ЖЕСТКИМ ЦИЛИНДРОМ

УДК 539.3
DOI: 10.56246/18294480-2024.16-91

ШЕКЯН АРТЁМ
Кандидат физико-математических наук, доцент
Преподаватель ГГУ
электронная почта: artyom.sh.83@mail.ru

Приведены результаты теоретического исследования одной пространственной контактной задачи теории упругости для упругого полупространства и жесткого цилиндра конечной длины, когда цилиндр, под действием заданных внешних сил, вдавливается в неподвижное полупространство вдоль своей боковой цилиндрической поверхности и равномерно вращается вокруг своей оси, вызывая износ в области соприкосновения этих тел.

Контактные задачи теории упругости, где учитывается износ в подвижных соединениях инженерных сооружений, представляют большой теоретический и практический интерес. Теоретический интерес этих задач обусловлен тем, что такие задачи, по сравнению с обычными задачами классической теории упругости, математически описываются в виде достаточно сложных систем уравнений [1,2], решение которых требует применения наиболее мощных математических методов. Практический интерес таких задач обусловлен тем, что даже незначительный износ в одном из узлов трения инженерного сооружения может привести к остановке работы сооружения из-за потери его точности, снижения производительности, увеличения затрат, появления шума, или других подобных негативных явлений [3].

Рассмотренная здесь задача математически форулируется в виде замкнутой системы нелинейных интегральных уравнений относительно трех функций, характеризующих форму и размеры контактной области, а также закона распределения контактных напряжений, действующих между цилиндром и полупространством.

Исследование полученной системы уравнений проводится согласно разработанной в [4] методике, основанной на принципе сжатых

отображений в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой [5]. Получено приближенное аналитическое решение задачи.

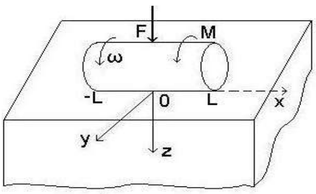
Отметим, что в монографии Л. А. Галина [1] приведено решение соотетствующих плоской и осесимметричной контактных задач теории упругости, при предположении, что величина контактной области задана и не меняется со временем.

Следует также отметить работу И. Я. Штаермана [6], где проведено теоретическое исследование контакта упругости тел, первоначально соприкасающихся по прямолинейному отрезку, что является частным случаем рассмотренной здесь пространственной контактной задачи теории упругости, когда фактор износа отсутствует.

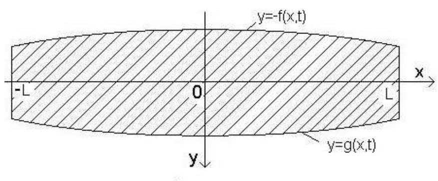
Ключевые слова: *вращающийся жесткий цилиндр, упругое полупространство, контактные напряжения, износ.*

1. Постановка задачи. Пусть жесткий цилиндр радиуса R и длины $2L$ соприкасается с упругим неподвижным полупространством вдоль отрезки $[-L, L]$ горизонтальной оси Ox (фиг.1.). Пусть далее, с момента времени $t = 0$, цилиндр находится под действием симметрично расположенных относительно плоскости Oyz заданных внешних сил, которые вдавливают цилиндр в полупространство и равномерно вращают вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. При этом предполагается, что ось цилиндра остается горизонтальной, параллельной оси Ox, а смещения точек оси цилиндра в направлениях горизонтальных осей Ox и Oy отсутствуют.

Вследствие упругих деформаций и износа полупространства, первоначальная область соприкасания этих тел, от отрезки $[-L, L]$ превращается в зависящую от времени некоторую двухмерную область $\Omega(t)$ (фиг.2.), ограниченную линиями $x = \pm L$ и кривыми $y = -f(x,t)$, $y = g(x,t)$ плоскости $z = 0$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Требуется определить упомянутые выше положительные и четные по координате x функции $f(x,t)$ и $g(x,t)$, характеризующие форму и размеры контактной области $\Omega(t)$, законы распределения действующих в $\Omega(t)$ нормальных и касательных контактных напряжений, величину погружения цилиндра в полупространство, а также мощность энергии, израсходованной на вращение цилиндра в каждый момент времени t.

2. Вывод системы нелинейных уравнений задачи. Рассмотрим упругое равновесие неподвижного полупространства, находящаяся под действием контактных давлений $p(x,y,t)$ и контактных касательных напряжений $\tau(x,y,t)$, приложенных в области $\Omega(t)$ его граничной плоскости $z=0$. Вертикальное в направлении оси Oz перемещение $W_{\text{упр}}(x,y,t)$, которое получает в момент времени t находящаяся на плоскости $z=0$ каждая граничная точка полупространства с координатами $(x,y,0)$ за счет ее упругих деформаций, определяется формулой [7]

$$W_{\text{упр}}(x,y,t) = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint_{\Omega(t)} \frac{p(\xi,\eta,t)d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E}\iint_{\Omega(t)} \frac{(y-\eta)\tau(\xi,\eta,t)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} d\xi d\eta,\ (t>0) \qquad (1)$$

где E и ν – упругие постоянные полупространства. При этом, контактные давления $p(x,y,t)$ и контактные касательные напряжения $\tau(x,y,t)$ связаны между собой законом Амонтона-Кулона

$$\tau(x,y,t) = fp(x,y,t), \qquad (x,y)\in\Omega(t), \qquad (t>0)$$

(2)

где f - коэффициент трения.

Вследствие износа полупространства, находящаяся в области контакта $\Omega(t)$ каждая граничная точка полупространства получает дополнительное вертикальное вниз перемещение $W_{\text{из}}(x,y,t)$. Скорость этого перемещения, согласно экспериментам [3], определяется формулой

$$\frac{\partial}{\partial t}W_{\text{из}}(x,y,t) = K_1\omega R[p(x,y,t)]^n, \qquad (x,y)\in\Omega(t), \quad (t>0) \qquad (3)$$

где K_1 и n - постоянные, притом $n\geq 1$. Пренебрегая инерциальными членами, условие контакта цилиндра с полупространством выражается соотношением

$$W_{\text{упр}}(x,y,t) + W_{\text{из}}(x,y,t) = \delta(t) - R + \sqrt{R^2-y^2}, \ (x,y)\in\Omega(t),(t>0)$$

(4)

где $\delta(t)$ - мера погружения цилиндра в полупространство.

Учитывая формулы (1)- (3), из условия контакта (4) получим

$$\theta\int_{-L}^{L}\{\int_{-f(x,t)}^{g(x,t)}[K(x-\xi,y-\eta)p(\xi,\eta,t)d\eta]\}d\xi+$$
$$+\omega RK_1\int_0^t[p(x,y,\zeta)]^n d\zeta=\delta(t)-R+\sqrt{R^2-y^2},(x,y)\in\Omega(t)$$

(5)

где

$$K(u,v)=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[1+f_0\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right],\quad \theta=\frac{1-\nu^2}{\pi E},\quad f_0=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}f. \qquad (6)$$

При решении задачи воспользуемся также условием непрерывности контактных напряжений и условием равновесия цилиндра.

Условия непрерывности нормальных и касательных контактных напряжений на поверхности цилиндра имеют место в каждый момент времени $\zeta\ (0<\zeta\le t)$ и только на точках линий $y=-f(x,t)$ и $y=g(x,t)$ границы контактной области $\Omega(t)$. Из этих условий имеем

$$p[x,-f(x,\zeta),\zeta]=0,\quad p[x,g(x,\zeta),\zeta]=0,\quad (0<\zeta\le t,\ -L\le x\le L). \qquad (7)$$

Условия равновесия цилиндра имеют вид

$$\iint_{\Omega(\zeta)}p(x,y,\zeta)dxdy=F(\zeta),\ (0<\zeta\le t), \qquad (8)$$

$$R\iint_{\Omega(\zeta)}\tau(x,y,\zeta)dxdy=M(\zeta),(0<\zeta\le t), \qquad (9)$$

где $F(\zeta)$- проекция в направление оси Oz главного вектора действующих на цилиндр заданных внешних сил, а $M(\zeta)$ - главный вращающий момент внешних сил в момент времени $\zeta\ (0<\zeta\le t)$.

Теперь, учитывая (5), из условий непрерывности контактных напряжений (7) получим

$$\theta\int_{-L}^{L}\{\int_{-f(x,\zeta)}^{g(x,\zeta)}[K(x-\xi,-f(x,\zeta)-\eta)p(\xi,\eta,\zeta)d\eta]\}d\xi=$$
$$=\delta(\zeta)-R+\sqrt{R^2-f^2(x,\zeta)},\quad(-L\le x\le L,0<\zeta\le t) \qquad (10)$$

$$\theta\int_{-L}^{L}\{\int_{-f(x,\zeta)}^{g(x,\zeta)}[K(x-\xi,g(x,\zeta)-\eta)p(\xi,\eta,\zeta)d\eta]\}d\xi=$$
$$=\delta(\zeta)-R+\sqrt{R^2-g^2(x,\zeta)},\quad(-L\le x\le L,0<\zeta\le t) \qquad (11)$$

Следует отметить, что на основе (2), (8) и (9), непосредственно определяются вращающий момент $M(t)$ и мощность энергии $N(t)$, израсходованной при вращении цилиндра

$$M(t)=fRF(t),\qquad N(t)=\omega fRF(t).$$

(12)

Таким образом, задача сводится к определению функций $p(x,y,t)$, $f(x,t)$, $g(x,t)$ и $\delta(t)$ из уравнений (5), (8), (10) и (11), которые, как показывает исследование, образуют замкнутую систему уравнений относительно указанных неизвестных функций.

3. Исследование системы уравнений (5), (8), (10) и (11). Для проведения исследования системы уравнений (5), (8), (10) и (11), воспользуемся разработанной в [4] методикой, основанной на принципе сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой. Сначала заметим, что функция $p(x,y,t)$, которая характеризует контактное давление между цилиндром и полупространством и удовлетворяет уравнениям (5), (8), (10) и (11), не может иметь особенность в точках контактной области $\Omega(t)$, в частности, в окрестности точек отрезок $(\pm L, y)$, $[-f(L,t) < y < g(x,t)]$, на линии $x = \pm L$ границы контактной области $\Omega(t)$. В противном случае, значения левой части уравнения (5), в точках контактной области $\Omega(t)$ вблизи точек, имеющих особенность, будут неограниченно возрастать, в то время, как значения правой части этого же уравнения ограниченно. Далее, ведя новые неизвестные безразмерные функции

$$q(\xi,\eta,t) = K_1\omega\int_0^t [p(\xi R,\eta R,\zeta)]^n\, d\zeta, \tag{13}$$

$$\Delta(t) = \frac{\delta(t)}{R} < 1, \quad \phi(\xi,t) = \frac{f(\xi R,t)}{R} < 1, \quad \psi(\xi,t) = \frac{g(\xi R,t)}{R} < 1 \tag{14}$$

и считая, что изменение функции $p(x,y,t)$ со временем невелико, из (13) можно получить

$$p(x,y,t) = [\frac{1}{K_1\omega t} q(\frac{x}{R},\frac{y}{R},t)]^{\frac{1}{n}}. \tag{15}$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде

$$q(\xi,\eta,t) = \Delta(t) - \frac{1}{2}\eta^2 - \theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}[\int_{-\phi(u,t)}^{\psi(u,t)} K(\xi-u,\eta-v)[q(u,v,t)]^{\frac{1}{n}}\, dv]\, du$$

$$(\xi,\eta)\in\Omega_0(t) \qquad , \tag{16}$$

где

$\theta_0 = \theta(K_1\omega t)^{\frac{-1}{n}}$, $\alpha = \dfrac{L}{R}$,

$$\Omega_0(t) = \left(-\alpha \le \xi \le \alpha, -\phi(\xi,t) \le \eta \le \psi(\xi,t)\right). \tag{17}$$

Учитывая (13)-(15), из уравнений (10) и (11) получим

$$\phi(\xi,t) = \sqrt{2}\Delta(t) -$$

$$-\theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\phi(\xi,t)}^{\psi(\xi,t)} K(\xi-u,\ -\phi(\xi,t)\text{-}v)[q(u,v,t)]^{\frac{1}{n}}dv\right]du\}^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

$$\psi(\xi,t) = \sqrt{2}\{\Delta(t) -$$

$$-\theta_0\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\int_{-\phi(\xi,t)}^{\psi(\xi,t)} K(\xi-u,\ \psi(\xi,t)\text{-}v)[q(u,v,t)]^{\frac{1}{n}}dv\right]du\}^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

а условие равновесия (8) принимает вид

$$\iint_{\Omega_0(t)}[q(\xi,\eta,t)]^{\frac{1}{n}}d\xi d\eta = F_0(t), \tag{20}$$

где

$$F_0(t) = F(t)R^2(\omega k_1 t)^{\frac{1}{n}}. \quad (21)$$

Аналогично [4] можно показать, что соотношения (16), (18)-(20) образуют замкнутую систему уравнений относительно $q(\xi,\eta,t)$, $\phi(\xi,t)$, $\psi(\xi,t)$ и $\Delta(t)$. При этом, система (16), (18)-(20) имеет наиболее удобную форму для применения метода последовательного приближения в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой.

Для получения эффективного решения системы уравнений (16), (18)-(20), временно считая неизвестным также $F_0(t)$, но $\Delta(t)$ известным. Тогда для каждого конкретного $\Delta(t)$ можно из (16), (18) и (19) методом последовательных приближений определить $q(\xi,\eta,t)$, $\phi(\xi,t)$, $\psi(\xi,t)$. Затем, для заданного $\Delta(t)$, из (20), также методом последовательных приближений определяем $F_0(t)$, тем самым устанавливая необходимую зависимость $\Delta(t)$ от $F_0(t)$. Таким же способом установим искомые зависимости $q(\xi,\eta,t)$, $\phi(\xi,t)$, $\psi(\xi,t)$ и $\Delta(t)$ от $F_0(t)$. Доказательство сходимости использованного здесь метода последовательных приближений, аналогично [4], проводится принципом сжимающих отображений в пространстве непрерывных функций с чебышевской метрикой [5].

Принимая $q_0(\xi,\eta,t) \equiv 0$ в качестве нулевого приближения, из (16), (18)-(20) в первом приближении получим

$$q_1(\xi,\eta,t) = \Delta(t) - \frac{1}{2}\eta^2, \quad \phi_1(\xi,t) = \psi_1(\xi,t) = \sqrt{2\Delta(t)} \quad (22)$$

$$\Delta(t) = \{\frac{F_0(t)}{4\alpha}[\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{n}}]^{-1}\}^{\frac{2n}{n+1}}. \quad (23)$$

Как видно из (22) и (23), решение задачи в первом приближении соответствует решению задачи, когда упругие деформации полупространства пренебрегаются. При этом, как видно из второй формулы (22), область контакта $\Omega(t)$ в первом приближении имеет форму прямоугольника.

Список использованной литературы

1. Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М., Наука, 1980, 302 с.
2. Горячева И.Г., Механика фрикционного взаимодействия, М., Наука, 2001, 478 с.
3. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С., Основы расчетов на трение и износ М., Машиностроение, 1977, 576 с.

4. Мхитарян С. М., Шекян Л. А., Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН Арм ССР, Механика, 1977, т. 30, № 3, с. 15 – 32.

5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., ФИЗМАТЛИТ, 2009, 572 с.

6. Штаерман И. Я., Сжатие упругих тел, соприкасающихся по прямолинейному отрезку / Проблемы механики сплошной среды, М., Изд. Ан СССР, 1961, с. 564 – 571.

7. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1955. 492с.

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱՆՇԱՐԺ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՊՏՏՎՈՂ ԿՈՇՏ ԳԼԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

ՇԵԿՅԱՆ ԱՐՏՅՈՄ
Գավառի պետական համալսարանի դասախոս,
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ
էլփոստ՝ artyom.sh.83@mail.ru

Բերված է առաձգական կիսատարածության և վերջավոր երկարության կոշտ գլանի համար առաձգականության տեսության կոնտակտային տարածական մի խնդրի տեսական հետազոտության արդյունքները, երբ գլանը գտնվելով տրված արտաքին ուժերի ազդեցության տակ, իր ծնիչների երկայնքով սեղմվում է կիսատարածությանը և միաժամանակ հավասարաչափ պտտվում իր առանցքի շուրջը՝ առաջացնելով կիսատարածության մաշում այս մարմինների միմյանց հետ հպման տեղամասում:

Առաձգականության տեսության այսպիսի կոնտակտային խնդիրները, որտեղ հաշվի են առնվում ճարտարագիտական կառույցների շարժական հանգույցներում մաշումը, ունեն տեսական և գործնական մեծ հետաքրքրություն: Դրանց տեսական հետաքրքրությունը պայմանավորված է նրանով, որ նման խնդիրներն ունեն կոռեկտ մաթեմատիկական ձևակերպում և առաձգականության տեսության դասական հավասարումների համեմատ նկարագրվում են բավականին բարդ տեսքի հավասարումների համակարգի տեսքով [1,2], որոնց լուծման համար պահանջվում է կիրառել ավելի հզոր մաթեմատիկական ապարատ: Այդ խնդիրների գործնական հետաքրքրությունն էլ պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ մեխանիկական կառույցների շփական հանգույցում նույնիսկ չնչին մաշումը հաճախ հանգեցնում է ամբողջ կառույցի շահագործման դադարեցմանը նրա ճշտության բացակայության, հզորության կորուստի, էներգիայի ծախսերի անհամեմատ ավելացման, առաջացած աղմուկի և նման այլ բացասական երևույթների առաջացման պատճառով [3]:

Խնդիրը հանգեցված է ոչգծային ինտեգրալ հավասարումների փակ համակարգի լուծմանը երեք անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ, որոնք բնութագրում են գլանի և կիսատարածության միջև գործող կոնտակտային լարումների բաշխման օրենքը և այդ մարմինների հպման տեղամասի ձևն ու չափերը: Նշված հավասարումների համակարգի հետազոտությունը կատարված է [4] աշխատանքում մշակված եղանակով, որը հիմնված է սեղմած արտապատկերումների սկզբունքի վրա անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ [5]: Ստացված է խնդրի մոտավոր վերլուծական լուծումը:

Կարևոր է նշել, որ Լ. Ա. Գալինի [1] մենագրության մեջ ներկայացված է այստեղ դիտարկված խնդրի համապատասխան հարթ ու առանցքահամաչափ խնդիրների լուծումն այն ենթադրությամբ, որ շփման տարածքի ձևն ու չափերը նախապես տրված են և ժամանակի ընթացքում չեն փոխվում: Կարևոր է նշել նաև, որ առաձգականության տեսության այստեղ դիտարկված տարածական կոնտակտային խնդրի մասնավոր դեպքը, երբ մաշման գործոնը բացակայում է, հետազոտված է Ի.Յա. Շտաերմանի [5] աշխատանքում:

Բանալի բառեր՝ *պտտվող կոշտ գլան, առաձգական կիսատարածություն, կոնտակտային լարումներ, մաշում:*

ON THE CONTACT INTERACTION OF A MOTIONLESS ELASTIC HALF-SPACE WITH A ROTATING RIGID CYLINDER

SHEKYAN ARTYOM
PhD, associate professor
Lecturer of Gavar State University
e-mail: artyom.sh.83@mail.ru:

The results of a theoretical study of one spatial contact problem of the theory of elasticity for an elastic half-space and a rigid cylinder of finite length are presented when the cylinder, under the action of given external forces, presses against the motionless half-space with its lateral cylindrical surface and rotates uniformly around its axis, causing it wear in the area of contact between these bodies.

Such contact problems of the theory of elasticity, where the wear of mobile contact joints of engineering structures is taken into account, are of great theoretical

and practical interest. The theoretical interest of these problems is due to the fact that such problems, in comparison with the usual problems of the classical theory of elasticity, are mathematically described in the form of rather complicated systems of equations [1,2], the solution of which requires the use of the most powerful mathematical methods. The practical interest of such problems is due to the fact that even a slight wear in one of the friction joints of an engineering structure can lead to a stoppage of the structure due to a loss of its accuracy, a decrease in productivity, an increase in costs, and due to the generation of annoying noise or other similar negative phenomena [3].

The problem is reduced to the solution of a closed system of nonlinear integral equations with respect to three functions, which describe the distribution law of the contact stresses acting between the cylinder and the half-space and determine the shape and dimensions of the contact area of these bodies.

The study of the resulting system of equations is carried out according to the technique developed in the work [4] based on the principle of compressed mappings in the space of continuous functions with the Chebyshev metric [5]. An approximate analytical solution of the problem is obtained.

It is noteworthy that in the monograph L. A. Galin [1] presented the solution of the corresponding plane and axisymmetric contact problems of the theory of elasticity, under the assumption that the size of the contact area is given and does not change with time. It is also important to note that the special case of the spatial contact problem in the theory of elasticity considered here, when the wear factor is absent, was investigated in the work by I. Ya. Staerman [5].

Keywords: *rotating rigid cylinder, elastic half-space, contact stresses, wear.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 11.02.2024թ.:
Հոդվածը գրախոսվել է 24.02.2024թ.:
Ընդունվել է տպագրության 17.05.2024թ.: