E-mail: **journalmechanics@mechins.sci.am, www.flib.sci.am/eng/Mech**

Հայաստանի Հանրապետություն, Երևան, 0019 Բաղրամյան պող. 24/2, Հեռ. 52-48-02

Республика Армения, Ереван,0019 пр. Баграмяна 24 /2, Тел. 52-48-02

24/2, Baghramyan Ave. Yerevan 0019 Republic of Armenia Tel. 52-48-02

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-3

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ С КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ И ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: динамическая смешанная краевая задача, включение, трещина, вынужденные колебания

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A.

Forced vibrations of a semi-infinite plate with collinear cracks and rigid inclusions

Keywords: dynamic mixed boundary value problem, inclusion, crack, forced vibrations

The forced vibrations of an elastic semi-infinite plate containing internal, collinear finite cracks and absolutely rigid inclusions parallel to the boundary are considered. Based on the method of discontinuous solutions of the motion equations of the plane theory of elasticity, a governing system of singular integral equations of the problem is derived. The solution of this system is constructed by the numerical-analytical method of mechanical quadratures. In the case when the semi-infinite plate contains one crack and one inclusion, numerical calculations are carried out and the dependences the main physical and mechanical characteristics of the problem as the intensity factors at the end points of the crack, jumps in contact stresses under the inclusion and the angle of rotation of the rigid inclusion on the frequency of forced vibrations, the depth of the crack and inclusion and the distance between them are determined.

Հակոբյան Վ.Ն, Ամիրջանյան Հ.Ա.

Եզրին զուգահեռ համազիծ ճաքեր և ներդրակներ պարունակող կիսաանվերջ սալի ստիպողական տատանումները

Հիմնաբառեր. դինամիկ խառը եզրային խնդիր, ներդրակ, ճաքեր, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկված է եզրին զուգահեռ, համազիծ ներքին ճաքեր և բարակ կոշտ ներդրակներ պարունակող առաձգական կիսահարթության ստիպողական տատանումները: Առաձգականության տեսության շարժման հավասարումների խզվող լուծումների մեթոդի օգնությամբ ստացված է խնդրի որոշիչ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգը, որի լուծումները կառուցված են մեխանիկական քառակուսացման բանաձևերի թվային-վերլուծական մեթոդով: Այն դեպքում, երբ կիսահարթությունը պարունակում է մեկ ճաք և մեկ կոշտ ներդրակ, կատարվել են թվային հաշվարկներ և պարզվել են խնդրի գլխավոր ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչների՝ ներդրակի ափերի գործող լարումների թռիչքների, ներդրակի պտտման անկյան և ճաքի ծայրակետերում քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակիցների փոփոխության օրինաչափությունները՝ կախված ստիպողական տատանումների հաճախականությունից, եզրագծից ունեցած հեռավորությունից ու ճաքի և ներդրակի հարաբերական դիրքից:

Рассмотрены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины, содержащей внутренние, параллельные к границе коллинеарные конечные трещины и абсолютно жесткие включения. На основе метода разрывных решений уравнений движения плоской теории упругости выведена определяющая система сингулярных интегральных уравнений задачи, решение которой построено численно-аналитическим методом механических квадратур. В случае, когда полубесконечная пластина содержит одну трещину и одно включение проведены численные расчеты и определены закономерности изменения главных физико-механических характеристик задачи, каковыми являются коэффициенты интенсивности в концевых точках трещины, скачки контактных напряжений под включением и угол поворота жесткого включения, в зависимости от частоты вынужденных колебаний, глубины залегания трещины и включения и расстояния между ними.

Введение. Смешанные и контактные задачи теории упругости как в статической, так и динамической постановках всегда были и продолжают оставаться одной из развивающихся и важных, с практической точки зрения, областей математической теории упругости. Разработке многих эффективных методов решения динамических смешанных задач для слоистых сред с межфазными дефектами посвящены монографии [1-3], где подытожены многие основополагающие результаты в этом направлении. Укажем также на монографию [4] и работы [5-12], в которых приведены решения ряда плоских и пространственных динамических контактных и смешанных задач для плоскостей, полуплоскостей и полупространств. Отметим, что в монографии [4] и в работах [13-16] решены различные задачи о динамическом взаимовлиянии различных концентраторов напряжений типа трещин, тонких включений и штампов, одновременно находящихся в массивных однородных или кусочно-однородных телах. Настоящая работа также относится к указанному классу задач и является весьма важной для различных областей науки и техники.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений.

Рассмотрим обобщенное плоско-напряженное состояние упругой полуплоскости с коэффициентами Ламе λ_* и μ, которая отнесена к декартовой системе координат Oxy, ось Ox которой параллельна границе полуплоскости и проходит на некоторой глубине h от границы. Пусть на линии $y=0$ по системе непересекающихся интервалов $L_1=\bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$ полуплоскость расслаблена системой параллельных границе трещин конечной длины, а на системе отрезков $L_2=\bigcup_{k=1}^{M}(c_k,d_k)$, которые не пересекаются как между собой, так и с отрезками системы L_1, полуплоскость усилена абсолютно жесткими тонкими включениями. Будем полагать при этом, что полубесконечная пластина деформируется под действием гармонически изменяющихся во времени сосредоточенных сил $P_k e^{i\omega t}$, приложенных к включениям в некоторых точках $x=x_0^{(k)}$ и составляющих с осью Oy углы α_k. Принимается также, что на берега трещин действуют равные по величине и противоположно направленные нормальные нагрузки $-q(x)$, исключающие смыкание берегов трещин при деформировании пластины. Исходя из линейности поставленной задачи, как и в [16], представим ее в виде суммы двух задач, в первой из которых берега трещин будем считать свободными от напряжений, а во второй задаче будем считать, что пластина деформируется под воздействием только статических нагрузок, приложенных к берегам трещин. Сначала будем рассматривать только первую, динамическую задачу. Для этого полубесконечную пластину представим как составную, составленную из полосы высоты h и полуплоскости, с линией раздела $y=0$ и, снабдив индексами 1 и 2 соответственно компоненты напряжений и смещений полосы и полуплоскости, поставленную задачу математический представим в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,h,t)=0 & (-\infty<x<\infty); \\ \tau_{xy}^{(1)}(x,h,t)=0 & (-\infty<x<\infty); \end{cases} \tag{1a}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t)=\sigma_y^{(2)}(x,0,t);\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0,t) & x\notin L_1\cup L_2; \\ v_1(x,0,t)=v_2(x,0,t);\ u_1(x,0,t)=u_2(x,0,t) & x\notin L_1\cup L_2; \end{cases} \tag{1b}$$

$$\begin{cases} \sigma_y^{(1)}(x,0,t)=\sigma_y^{(2)}(x,0,t)=0;\ \tau_{xy}^{(1)}(x,0,t)=\tau_{xy}^{(2)}(x,0,t)=0 \quad x\in L_1; \\ v_1(x,0,t)=v_2(x,0,t)=(v_n+\gamma_n x)e^{i\omega t} \quad (c_n<x<d_n) \quad (n=\overline{1,N}); \\ u_1(x,0,t)=u_2(x,0,t)=u_n e^{i\omega t} \quad (c_n<x<d_n) \quad (n=\overline{1,N}). \end{cases} \tag{1c}$$

Здесь, и далее, $\sigma_y^{(j)}(x,y,t)$ $(j=1,2)$ и $\tau_{xy}^{(j)}(x,y,t)$ $(j=1,2)$ - нормальные и касательные компоненты напряжений, действующие в полосе и в полуплоскости соответственно, $v_j(x,\mathrm{y},t)$ $(j=1,2)$ и $u_j(x,\mathrm{y},t)$ $(j=1,2)$ - нормальные и горизонтальные смещения точек полосы и полуплоскости соответственно, удовлетворяющие уравнениям движения в смещениях, γ_n углы поворотов включений, v_n, u_n $(n=\overline{1,N})$ амплитуды нормальных и горизонтальных смещений включений. Учитывая гармонический характер напряженно-деформированного состояния, в (1) по формулам $f(x,y,t)=f(x,y)e^{i\omega t}$ перейдем к амплитудам и введём в рассмотрение амплитуды неизвестных функций разности смещений точек берегов трещин $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и скачков напряжений на длинных сторонах включений $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$:

$$\begin{gathered} v_1(x,0)-v_2(x,0)=\varphi_1(x);\ \ u_1(x,0)-u_2(x,0)=\varphi_2(x);\ \ (x\in L_1); \\ \sigma_y^{(1)}(x,0)-\sigma_y^{(2)}(x,0)=\varphi_3(x)\,;\tau_{xy}^{(1)}(x,0)-\tau_{xy}^{(2)}(x,0)=\varphi_4(x)\ \ (x\in L_2). \end{gathered} \tag{2}$$

Затем рассмотрим вспомогательную задачу, состоящую из условий (1.1а), (1.1б) и (1.2). Решив указанную вспомогательную задачу, мы построим разрывные решения уравнений движения для полуплоскости с дефектами типа трещин и включений и определим амплитуды компонент напряжений и смещений на линии полуплоскости $y=0$ через введённые функции скачков. Для этого будем использовать представления для амплитуд смещений и амплитуд напряжений в виде интегралов Фурье, приведенные в [16]. При помощи этих представлений удовлетворим условиям вспомогательной граничной задачи (1.1а), (1.1б) и (1.2). В итоге, для определения неизвестных коэффициентов придем к следующей системе уравнений

$$
\begin{cases}
-2ik\chi_1\left(B_1^{(1)}(k)-A_1^{(2)}(k)\right)+\left(k^2+\chi_2^2\right)\left(C_1^{(1)}(k)-C_1^{(2)}(k)\right)=\overline{\varphi}_4(k)\\
\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[A_1^{(1)}(k)-A_1^{(2)}(k)\right]+2ik\chi_2\left[D_1^{(1)}(k)-C_1^{(2)}(k)\right]=\overline{\varphi}_3(k)\\
-ikA_1^{(1)}(k)+\chi_2D_1^{(1)}(k)+ikA_1^{(2)}(k)-\chi_2C_1^{(2)}(k)=\overline{\varphi}_2(k)\\
\chi_1B_1^{(1)}(k)+ikC_1^{(1)}(k)-\chi_1A_1^{(2)}(k)-ikC_1^{(2)}(k)=\overline{\varphi}_1(k)\\
\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[A_1^{(1)}(k)ch(\chi_1h)+B_1^{(1)}(k)sh(\chi_1h)\right]+\\
+2ik\chi_2\left[C_1^{(1)}(k)sh(\chi_2h)+D_1^{(1)}(k)ch(\chi_2h)\right]=0;\\
-2ik\chi_1\left[A_1^{(1)}(k)sh(\chi_1h)+B_1^{(1)}(k)ch(\chi_1h)\right]+\\
+\left(k^2+\chi_2^2\right)\left[C_1^{(1)}(k)ch(\chi_2h)+D_1^{(1)}(k)sh(\chi_2h)\right]=0
\end{cases}
\qquad (3)
$$

где $A_1^{(j)}(k),\ B_1^{(1)}(k),\ C_1^{(j)}(k)$ и $D_1^{(1)}(k)\ (j=1,2)$ неизвестные постоянные, подлежащие определению,

$$\chi_m=\sqrt{k^2-(\omega/c_m)^2}\quad (m=1,2)\ ;\ (j=1,2);\ c_1^{\ 2}=c_2^{\ 2}/\theta;\ \ \theta=(1-\nu)/2,$$

$$c_1=\sqrt{\frac{\lambda_*+2\mu}{\rho}};\quad c_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}};\ \lambda_*=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-\nu)};\ \mu=\frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\overline{\varphi}_j(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_j(x)e^{ikx}dx\quad (j=1-4).$$

а $c_i\ \ (j=1,2)$ – скорости распространения упругих волн в полуплоскости. При этом выбраны те ветви функций $\chi_i(k)\quad (i=1,2)$, которые обеспечивают затухание волн на бесконечности, т.е. ведут себя как $|k|$ [17].

Решим систему (5) и определим неизвестные постоянные через образы Фурье скачков напряжений на берегах включений и компоненты дислокаций смещений на трещинах. После чего определим напряжения на берегах трещин и производные от смещений на длинных сторонах включений через неизвестные функции скачков напряжений и дислокации смещений. Получим:

$$\frac{\sigma_y^{(2)}(x,0)}{\mu}=-\frac{1}{2}\varphi_3(x)+\frac{1-\theta}{\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}+\frac{\theta}{2\pi\mu}\int_{L_2}\frac{\varphi_4(s)ds}{s-x}+$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_{L_1}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{L_2}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds\quad (-\infty<x<\infty)$$

$$
\frac{\tau_{xy}^{(2)}(x,0)}{\mu}=-\frac{1}{2}\varphi_4\left(x\right)+\frac{1-\theta}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_2\left(s\right)ds}{s-x}-\frac{\theta}{2\pi\mu}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi_3\left(s\right)ds}{s-x}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{L_1}Q_{2,i}\left(x-s\right)\varphi_i\left(s\right)ds+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int\limits_{L_2}Q_{2,i}\left(x-s\right)\varphi_i\left(s\right)ds;\ \left(-\infty<x<\infty\right) \tag{4}
$$

$$
\mathrm{v}_2'(x,0)=-\frac{1}{2}\varphi_1\left(x\right)-\frac{\theta}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_2\left(s\right)ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi_3\left(s\right)ds}{s-x}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{L_1}Q_{3,i}\left(x-s\right)\varphi_i\left(s\right)ds+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int\limits_{L_2}Q_{3,i}\left(x-s\right)\varphi_i\left(s\right)ds\ ;\ \left(-\infty<x<\infty\right)
$$

$$
u_2'(x,0)=-\frac{1}{2}\varphi_2\left(x\right)+\frac{\theta}{2\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi_1\left(s\right)ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi_4\left(s\right)ds}{s-x}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{L_1}Q_{4,i}\left(x-s\right)\varphi_1\left(s\right)ds+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int\limits_{L_2}Q_{4,i}\left(x-s\right)\varphi_3\left(s\right)ds\quad\left(-\infty<x<\infty\right). \tag{5}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
Q_{1,1}\left(x\right)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{-R_2^+\left(\beta^2\mathrm{e}^{-2\alpha_1hk}+\alpha_1\alpha_2\mathrm{e}^{-2\alpha_2hk}\right)+4\alpha_1\alpha_2\beta^2\mathrm{e}^{-hk\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}+\left(R_2^-\right)^2}{\alpha_1\eta R_2^-}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1-\theta}{2}\right\}\sin kxdk;
$$

$$
Q_{1,2}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{2\beta R_2^+\left(\mathrm{e}^{-\alpha_1hk}-\mathrm{e}^{-\alpha_2hk}\right)^2}{\eta R_2^-}\right\}\cos kxdk;
$$

$$
Q_{1,3}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{4\beta R_1^+\mathrm{e}^{-hk\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}-2R_2^+\left(\beta\mathrm{e}^{-2\alpha_1hk}+\mathrm{e}^{-2\alpha_2hk}\right)+\eta R_2^-}{2\eta R_2^-}\right\}\cos kxdk;
$$

$$
Q_{1,4}\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\{\frac{R_2^+\left(\beta\mathrm{e}^{-2\alpha_1hk}+\alpha_1\alpha_2\mathrm{e}^{-2\alpha_2hk}\right)-2\alpha_1\alpha_2\beta\left(\beta+1\right)\mathrm{e}^{-hk\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}-R_1^-R_2^-}{\alpha_1\eta R_2^-}+\frac{\theta}{2}\right\}\sin kxdk
$$

$$
Q_{3,1}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\left\{1-\frac{-4\beta R_1^+\mathrm{e}^{-hk\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}+2R_2^+\left(\beta\mathrm{e}^{-2\alpha_1hk}+\mathrm{e}^{-2\alpha_2hk}\right)+\eta R_2^-}{\eta R_2^-}\right\}\cos kxdk;
$$

$$Q_{3,2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{-R_2^+\left(\beta e^{-2\alpha_2 hk}+\alpha_1\alpha_2 e^{-2\alpha_1 hk}\right)+2\alpha_1\alpha_2\beta(\beta+1)e^{-hk(\alpha_1+\alpha_2)}+R_1^-R_2^-}{\alpha_2\eta R_2^-}-\frac{\theta}{2}\right\}\sin kx dk;$$

$$Q_{3,3}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{R_2^+\left(\alpha_1\alpha_2 e^{-2\alpha_1 hk}+e^{-2\alpha_2 hk}\right)-4\alpha_1\alpha_2\beta e^{-hk(\alpha_1+\alpha_2)}-R_0^-R_2^-}{\alpha_2\eta R_2^-}+\frac{1+\theta}{2}\right\}\sin kx dk;$$

$$Q_{3,4}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{R_2^+\left(e^{-2\alpha_1 hk}+e^{-2\alpha_2 hk}\right)-2\beta R_0^+e^{-hk(\alpha_1+\alpha_2)}}{2\eta R_2^-}\right\}\cos kx dk;$$

$$Q_{1,1}(x)=Q_{22}(x);\ Q_{1,2}(x)=-Q_{2,1}(x);\ Q_{1,3}(x)=Q_{2,4}(x);\ Q_{1,4}(x)=-Q_{2,3}(x);$$

$$Q_{3,1}=Q_{4,2}(x);\ Q_{3,2}=-Q_{4,1}(x);\ Q_{3,3}=Q_{44}(x);\ Q_{3,3}=Q_{44}(x);\ \eta=\left(\omega/k\,c_2\right)^2;$$

$$\beta=1-\eta/2;\ \alpha_1=\sqrt{1-\theta\eta};\ \alpha_2=\sqrt{1-\eta};\ R_i^\pm=\beta^i\pm\alpha_1\alpha_2\ \ (i=0,1,2).$$

Далее, при помощи представлений (4) и (5), удовлетворим условиям на дефектах (1c), предварительно продифференцировав последние два из них. В итоге, учитывая, что $\varphi_j(x)=0\ (j=1,2)$ на включениях и $\varphi_j(x)=0\ (j=3,4)$ на трещинах равны нулю, для определения компонентов дислокации смещений на трещинах и скачков напряжений на длинных сторонах включений придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{aligned}
&\frac{1-\theta}{\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}+\frac{\theta}{2\pi\mu}\int_{L_2}\frac{\varphi_4(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{L_1}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+\\
&+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{L_2}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=0 \qquad (x\in L_1)\\
&\frac{1-\theta}{\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}-\frac{\theta}{2\pi\mu}\int_{L_2}\frac{\varphi_3(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{L_1}Q_{2,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+\\
&+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{L_2}Q_{2,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=0;\quad (x\in L_1)\\
&-\frac{\theta}{\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi\mu}\int_{L_2}\frac{\varphi_3(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{L_1}Q_{3,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+\\
&+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{L_2}Q_{3,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=\gamma_n \qquad (c_n<x<d_n;\ n=1-M)
\end{aligned}\tag{6}$$

$$\frac{\theta}{2\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi_1(s)\,ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi\mu}\int_{L_2}\frac{\varphi_4(s)\,ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{L_1}Q_{4,i}(x-s)\varphi_i(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{L_2}Q_{4,i}(x-s)\varphi_i(s)\,ds=0 \quad (x\in L_2)$$

Систему (6) будем рассматривать при условиях непрерывности смещений в концевых точках трещин

$$\int_{a_k}^{b_k}\varphi_j(x)\,dx=0 \qquad (j=1,2;\ k=1-N) \tag{7}$$

и условиях равновесия включений, которые, без учета их масс, можно написать следующим образом:

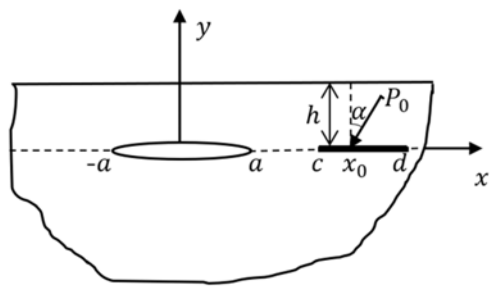
$$\begin{gathered}\int_{c_k}^{d_k}\varphi_3(x)\,dx=P_k\cos\alpha;\ \int_{c_k}^{d_k}\varphi_4(x)\,dx=P_k\sin\alpha_k;\\ \int_{c_k}^{d_k}x\varphi_3(x)\,dx=x_0^{(k)}P_k\cos\alpha_k\ \ (k=1-M.)\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы сингулярных интегральных уравнений (6) при условиях (7) и (8). Что же касается второй, статической задачи, то ее определяющую систему уравнений можно получить из системы (6), приняв в ней $\omega=0$ и приравнивая правую часть первого уравнения (6) к $-q(x)$. При этом условия (7) не изменяются, а в условиях (8) правые части нужно приравнять к нулю.

В дальнейшем, для простоты, будем рассматривать случай, когда полуплоскость содержит только одну трещину и одно включение и берега трещины свободны от напряжений.

2. Вынужденные колебания полубесконечной пластины с одной трещиной и одним коллинеарным включением

Рассмотрим случай, когда полуплоскость на некоторой глубине h от границы содержит одну трещину на интервале $L_1=(-a,a)$ и одно включение на интервале $L_2=(c,d)$, $(a<c)$ и деформируется под воздействием гармонически изменяющейся во времени сосредоточенной силы $P_0e^{i\omega t}$, приложенной к включению в некоторой точке $x=x_0$ и составляющей с осью Oy угол α (Фиг.1).



Фиг.1

В указанном случае система (6) и условия (7) и (8) примут вид:

$$\frac{1-\theta}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}+\frac{\theta}{2\pi\mu}\int_{c}^{d}\frac{\varphi_4(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-a}^{a}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{c}^{d}Q_{1,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=0 \quad (-a<x<a)$$
$$\frac{1-\theta}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}-\frac{\theta}{2\pi\mu}\int_{c}^{d}\frac{\varphi_3(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-a}^{a}Q_{2,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{c}^{d}Q_{2,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=0; \quad (-a<x<a) \tag{9}$$
$$-\frac{\theta}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_2(s)ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi\mu}\int_{c}^{d}\frac{\varphi_3(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-a}^{a}Q_{3,i}(x-s)\varphi_i(s)ds+$$
$$+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{c}^{d}Q_{3,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=\gamma \quad (c<x<d)$$
$$\frac{\theta}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varphi_1(s)ds}{s-x}-\frac{1+\theta}{4\pi\mu}\int_{c}^{d}\frac{\varphi_4(s)ds}{s-x}+\sum_{i=1}^{2}\int_{-a}^{a}Q_{4,i}(x-s)\varphi_i(s)ds$$
$$+\frac{1}{\mu}\sum_{i=3}^{4}\int_{c}^{d}Q_{4,i}(x-s)\varphi_i(s)ds=0 \quad (c<x<d)$$

$$\int_{-a}^{a}\varphi_j(x)dx=0 \quad (j=1,2); \int_{c}^{d}\varphi_3(x)dx=P_0\cos\alpha;$$
$$\int_{c}^{d}\varphi_4(x)dx=P_0\sin\alpha; \quad \int_{c}^{d}x\varphi_3(x)dx=x_0P_0\cos\alpha. \tag{10}$$

Решение системы (9) будем строить численно аналитическим методом механических квадратур [18]. Для этого при помощи замены переменных $x = a\eta$, в первых двух уравнениях (9) и $x = c_0 + d_0\eta$, $c_0 = (c+d)/2$, $d_0 = (d-c)/2$ в последних двух уравнениях (9), перейдем на интервал $(-1,1)$ и введя обозначения

$$\psi_j(\eta) = \varphi_j(a\eta)\ \ (j=1,2);\ \ \psi_j(\eta) = \varphi_j(c_0 + d_0\eta)/\mu\ \ (j=3,4),$$

придем к системе

$$\frac{q_j}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_j(\xi)d\xi}{\xi-\eta} + \sum_{i=1}^{4}\int_{-1}^{1}Q_{1,i}^*(\eta,\xi)\psi_i(\xi)d\xi = f_j(\eta)\ \ (j=1,4), \tag{11}$$

где введены обозначения:

$$Q_{1,i}^*(\eta,\xi) = aQ_{1,i}(a(\eta-\xi))\ (j=1,2);\ \ Q_{1,3}^*(\eta,\xi) = d_0 Q_{1,3}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{1,4}^*(\eta,\xi) = \frac{\theta d_0}{2\pi(c_0 + d_0\xi - a\eta)} + d_0 Q_{1,4}(a\eta - d_0\xi a - c_0);$$

$$Q_{2,i}^*(\eta,\xi) = aQ_{2,i}(a(\eta-\xi))\ (i=1,2); Q_{2,4}^*(\eta,\xi) = d_0 Q_{2,4}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{2,3}^*(\eta,\xi) = -\frac{\theta\mu_* d_0}{2\pi(c_0 + d_0\xi - a\eta)} + \mu_* d_0 Q_{2,3}(a\eta - d_0\xi - c_0);$$

$$Q_{3,1}^*(\eta,\xi) = aQ_{3,1}(d_0\xi - a\eta + c_0);\ Q_{3,i}^*(\eta,\xi) = \mu_* d_0 Q_{3,i}(d_0(\eta-\xi))(j=1,2);$$

$$Q_{3,2}^*(\eta,\xi) = aQ_{3,2}(d_0\eta - a\xi + c_0) - \frac{\theta}{2\pi(\xi - d_0^*\eta - c_0^*)};$$

$$Q_{4,1}^*(\eta,\xi) = aQ_{4,1}(d_0\eta - a\xi + c_0) + \frac{a\theta}{2\pi(a\xi - d_0\eta - c_0)};$$

$$Q_{4,2}^*(\eta,\xi) = aQ_{4,2}(d_0\eta - a\xi + c_0); Q_{4,i}^*(\eta,\xi) = d_0 Q_{4,i}(d_0(\eta-\xi))\ (j=3,4);$$

$$q_1 = q_2 = 1-\theta;\ q_3 = q_4 = -(1+\theta);\ d_0^* = d_0/a;\ c_0^* = c_0/a;\ x_0^* = x_0/a;$$

$$P_0^* = P_0/\mu a;\ \ f_j(\eta) = 0\ \ (j=1,2,4);\ \ f_3(\eta) = \gamma\ .$$

Условия (10) , при этом, примут вид:

$$\int_{-1}^{1}\psi_j(\xi)d\xi = 0\ \ (j=1,2);\ \int_{-1}^{1}\psi_3(\xi)d\xi = \frac{P_0^*\cos\alpha}{d_0^*};$$
$$\int_{-1}^{1}\psi_4(\xi)d\xi = \frac{P_0^*\sin\alpha}{d_0^*};\ \ \int_{-1}^{1}\xi\psi_3(\xi)d\xi = \frac{(x_0^* - c_0^*)P_0^*\cos\alpha}{(d_0^*)^2}\ . \tag{12}$$

Очевидно, что искомые функции в концевых точках интервала интегрирования имеют обычную корневую особенность. Поэтому их представим в виде:

$$\psi_i(\eta)=\frac{\psi_i^*(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (i=1,4)\ , \tag{13}$$

где $\psi_i^*(\eta)\ (i=1,4)$- регулярные, гладкие и ограниченные на замкнутом интервале $[-1,1]$ функции.

Далее, подставляя значение функций $\psi_i(\eta)\ (i=1,4)$ из (13) в систему (11) и условия (12), по обычной процедуре [18], для определения значений функций $\psi_i^*(\eta)\ (i=1,4)$ в точках коллокации $\xi_i\ (i=1,2,...n)$ придём к системе алгебраических уравнений. После определения решения полученной системы функции $\psi_i^*(\xi_j)\ (i=1,4;\ j=1,n)$, по формулам

$$\psi_j(\eta)=\frac{1}{n\sqrt{1-\eta^2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi_j^*(\xi_i)T_n(\eta)}{(\eta-\xi_i)U_{n-1}(\xi_i)}\ , \tag{14}$$

где $\xi_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$ - корни полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$, можно восстановить функции $\psi_i(t)\ (i=1,4)$ и определить все необходимые физико-механические величины, представляющие интерес. В частности, безразмерное раскрытие трещины определится по формуле :

$$v_*(\eta)=v(a\eta)/a=\int_{-1}^{\eta}\psi_1(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Для определения модулей динамических коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины используем формулы для модулей напряжений (4), рассматривая их вне трещины и включения, которые в новых обозначениях можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_*(\eta)&=\frac{\sigma_y^{(2)}(a\eta,0)}{\mu}=\frac{(1-\theta)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+F_1(\eta)\quad (|\eta|>1)\\ \tau_*(\eta)&=\frac{\tau_{xy}^{(2)}(a\eta,0)}{\mu}=\frac{1-\theta}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2(\xi)d\xi}{\xi-\eta}+F_2(\eta)\quad (|\eta|>1)\end{aligned} \tag{16}$$

где функции $F_j(\eta)\ (j=1,2)$ ограничены на концах трещины $\eta=\pm1$.

Подставляя в (16) значения функций $\psi_j(\eta)\ (j=1,2)$ из (14) и учитывая значение интеграла [19]

$$\int_{-a}^{a}\frac{ds}{\sqrt{a^2-s^2}(s-x)}=-\frac{\pi\,\mathrm{sign}\,x}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad (|x|>a)$$

для приведенных компонентов разрушающих напряжений получим следующие выражения:

$$\sigma_*(\eta) = -\frac{(1-\theta)\operatorname{sign}(\eta)\psi_1(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_1(\eta) \quad (|\eta|>1,\ j=1,2)$$

$$\tau_*(\eta) = -\frac{(1-\theta)\operatorname{sign}(\eta)\psi_2(\pm 1)}{\sqrt{\eta^2-1}} + F_2(\eta) \quad (|\eta|>1,\ j=1,2), \tag{17}$$

Отсюда, для определения коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений получим формулы:

$$K_I(\pm 1) = 2\pi \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta\mp 1|}\,\sigma_*(\eta) = \mp\sqrt{2}(1-\theta)\psi_1(\pm 1);$$

$$K_{II}(\pm 1) = 2\pi \lim_{t\to\pm 1\pm 0} \sqrt{|\eta\mp 1|}\,\tau_*(\eta) = \mp\sqrt{2}(1-\theta)\psi_2(\pm 1). \tag{18}$$

Напишем также формулы для определения контактных напряжений на длинных сторонах включений. Для этого опять используем формулы (4) на включениях, которые при помощи функций $\psi_j(\eta)$ $(j=1,4)$ записываются так:

$$\frac{a\sigma_y^{(j)}(a\eta,0)}{P_0} = (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\psi_3(\eta) + \frac{1-\theta}{\pi\mu_*}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1(\xi)\,d\xi}{\xi-d_0^*\eta-c_0^*} + \frac{\theta}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_4(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta} +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{a}{\mu_*}\int_{-1}^{1}Q_{1,i}(d_0\eta-a\xi+c_0)\psi_i(\xi)\,d\xi + \sum_{i=3}^{4}d_0\int_{-1}^{1}Q_{1,i}(d_0(\eta-\xi))\psi_i(\xi)\,d\xi$$

$$\frac{a\tau_{xy}^{(j)}(c_0+d_0\eta,0)}{P_0} = (-1)^{j+1}\frac{1}{2}\psi_4(\eta) + \frac{1-\theta}{\pi\mu_*}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2(\xi)\,d\xi}{\xi-d_0^*\eta-c_0^*} - \frac{\theta}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_3(\xi)\,d\xi}{\xi-\eta} +$$

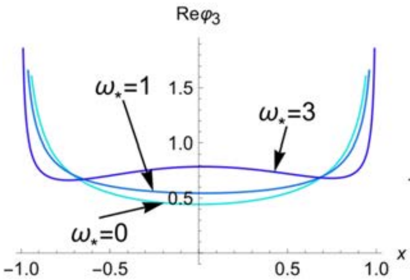
$$+\sum_{i=1}^{2}\frac{a}{\mu_*}\int_{-1}^{1}Q_{2,i}\left(a\left(d_0^*\eta-\xi+c_0^*\right)\right)\psi_i(\xi)\,d\xi + \sum_{i=3}^{4}d_0\int_{-1}^{1}Q_{2,i}(d_0(\xi-\eta))\varphi_i(s)\,ds;$$

$$(|\eta|<1;\ j=1,2)$$

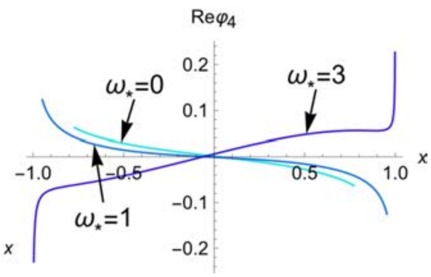
3. Численные расчеты

В случае, когда полуплоскость содержит одну трещину и одно включение проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения действительных частей скачков амплитуд приведенных нормальных и касательных контактных напряжений, действующих на длинные стороны включения, $\operatorname{Re}\psi_j(x)$ $(j=3,4)$, модуля угла поворота включения $\gamma_* = |\gamma|$ и безразмерных динамических коэффициентов интенсивности $\left|K_I^*(\pm 1)\right|$ и $\left|K_{II}^*(\pm 1)\right|$, в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний $\omega_* = \omega / ac_2$, расстояния между включением и трещиной, описываемого приведенным параметром $k_0 = c_0 / a$, и от приведенной глубины залегания трещины и включения $h_* = h / a$ в моменты времени $t_k = 2\pi k / \omega$ $(k = 1, 2, ..)$. При этом считается, что включение, как и трещина, имеет ширину $2a$, сосредоточенная нагрузка приложена в точке с приведенной координатой k_0, т.е. в центре включения, $q(x) = 0,$ $\nu = 0.3$, $P_0^* = P / \mu a = 0.5$.

На Фиг.2 и 3 соответственно приведены графики действительных частей амплитуд скачков нормальных и касательных контактных напряжений на длинных сторонах включения в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $\alpha = 0$ и $h_* = 2$,



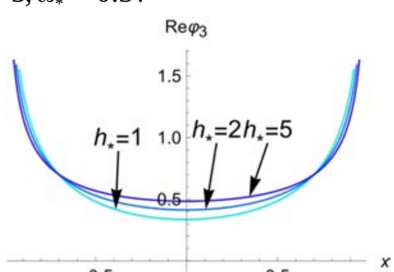
Фиг.2



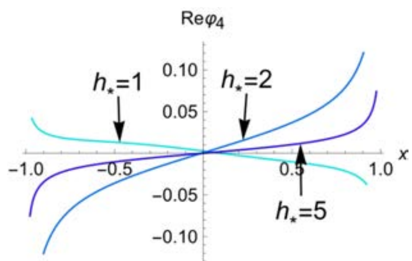
Фиг.3

Из них видно, что действительная часть скачка нормальных контактных напряжений при увеличении приведенной частоты колебаний в средней части включения увеличивается. Скачок касательных напряжений при этом сначала меняет знак, а затем по абсолютной величине увеличивается.

На Фиг. 4 и 5 приведены графики действительных частей амплитуд контактных напряжений в зависимости от приведенной глубины залегания трещины h_*, когда $k_0 = 3, \omega_* = 0.3$.



Фиг..4



Фиг..5

Из них явствует**,** что амплитуды скачков нормальных контактных напряжений с увеличением глубины залегания трещины в центральной части включения также увеличиваются, стремясь к определенному предельному распределению, соответствующему случаю, когда трещина и включение находятся в бесконечной пластине. Скачок касательных напряжений, при этом сначала меняет направление и далее также стремится к указанному предельному распределению.

В таблицах 1 и 2 соответственно приведены значения абсолютной величины угла поворота включения в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $h_* = 2$, $k_0 = 3$ и в зависимости от расстояния включения от трещины k_0, когда $h_* = 2$, $\omega_* = 0.5$.

Таблица 1. Модули угла поворота включений γ_* в зависимости от ω_*

ω_*	0	0.3	0.5	1	2	3
γ_*	0.0050	0.0095	0.0099	0.0102	0.0054	0.0122

Таблица 2. Модули угла поворота включений γ_* в зависимости от k_0

k_0	2.25	3	5	7	10	20
γ_*	0.0211	0.0099	0.0056	0.0028	0.0023	0.0018

Они показывают, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютной величины угла поворота включений γ_* носит волнообразный характер (таб.1). При увеличении же расстояния между трещиной и включением, как и следовало ожидать, абсолютная величина угла поворота включений уменьшаясь стремится к нулю (таб.2).

В таблице 3 приведены значения модулей приведенных динамических коэффициентов интенсивности в концевых точках трещины в зависимости от приведенной частоты вынужденных колебаний ω_*, когда $h_* = 2$, $k_0 = 3$.

Таблица 3.Модули динамических коэффициентов интенсивности

ω_*	0.3	0.5	1	2	5
$\left\|K_I(1)\right\|$	0.0437	0.1025	0.0325	0.0117	0.0305
$\left\|K_I(-1)\right\|$	0.0732	0.0995	0.0644	0.0091	0.0537
$\left\|K_{II}(1)\right\|$	0.0506	0.0124	0.0592	0.0804	0.0373
$\left\|K_{II}(-1)\right\|$	0.0733	0.0995	0.0644	0.0090	0.0537

Из них видно, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютных величин динамических коэффициентов интенсивности, также, как и угла поворота включений γ_*, носит волнообразный характер (таб.3).

Заключение

Таким образом изучены вынужденные колебания упругой полубесконечной пластины с параллельной к границе системой коллинеарных трещин и абсолютно жестких, тонких включений, деформируемой под действием периодически изменяющейся во времени сосредоточенной нагрузки, приложенной к включениям. В случае, когда имеется только одна трещина и одно тонкое включение проведены численные расчеты и выявлены закономерности изменения действительных частей скачков контактных напряжений, действующих на длинных сторонах включения, абсолютной величины угла поворота включения и абсолютных величин динамических коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины в зависимости от частоты вынужденных колебаний, приведенной глубины залегания концентраторов напряжения, а также от расстояния между трещиной и включением. Показано, что при увеличении частоты вынужденных колебаний изменение абсолютных величин как динамических коэффициентов интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках трещины, так и угла поворота включения носят волнообразный характер.

Исследование выполнено при финансовой поддержке КН МОН РА в рамках научного проекта 21T-2C257

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович Н.Н., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984.
3. Абрамян Б.Л. Пространственные задачи теории упругости // НАН РА Ереван, 1998, 274с.
4. Hakobyan V.N. Stress Concentrators in Continuous Deformable Bodies, Advanced Structured Materials, Volume 181, Springer 2022, 397p.
5. Бабешко В.А. К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел //ДАН СССР. 1989. Т.207. No2. С.324–327.
6. Бабешко В.А. Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. No3. С.5–9
7. Бабешко В.А., Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.Т. К решению задачи о виб-рации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // Докл. РАН. 2002. Т.382. No5.С.625–628.
8. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т.68. Вып.3.С.500–507.
9. Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №6, с. 155-159.
10. Григорян Э.Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. МТТ, Изв.АН СССР, 1972, №5, с. 101-116.

11. Зильберглейт А.С., Златина И.Н. Динамическая контактная задача для полуплоскости и полупространства. Изв. АН АрмССР, 1978, т.31, №3, с. 18-30.
12. Brock, L.M., Georgiadis, H.G., 1994. Dynamic frictional indentation of an elastic half-plane by a rigid punch. J. Elasticity 35, 223-249.
13. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading. Труды V Межд. конф. “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”, Горис, 1-7 октября, 2005.p.56-60.
14. Акопян Л.В., Амирджанян А.А., Саакян А.В. Влияние колеблющегося на границе упругой полуплоскости жесткого штампа на напряженное состояние вокруг внутреннего жесткого тонкого включения, Труды XX -ой межд. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», Ростов наДону, 18-21 июня 2020, ст. 29-33.
15. Акопян В.Н., Амирджанян А.А., Акопян Л.В. Вынужденные сдвиговые колебания штампа на границе составного полупространства с межфазными дефектами. Известия НАН РА, Механика, т.72, № 2, 2019г, с. 6-23.
16. Акопян В.Н., Амирджанян А.А Вынужденные колебания полубесконечной пластины с системой параллельных к границе коллинеарных трещин // Известия НАН РА, Механика, т.77, № 2, 2024г, с. 12-24.
17. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа.- Н: Мир, 1962. 279ст.
18. A.V.Sahakyan and H.A.Amirjanyan, Method of mechanical quadratures for solving singular integral equations of various types. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 991 (2018) 012070 doi :10.1088/1742-6596/991/1/012070
19. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды.- М.: Наука, 1981.- 738с. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integrals and series.// Moscow. Nauka. 1981. 738p. (in Russian)

Сведения об авторах:
Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук., проф., гл.н.с. Института механики НАН РА, тел.: (37491) 350222, e-mail: vhakobyan@sci.am
Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук., в.н.с. Института механики НАН РА, тел.: (37410) 52-48-90, e-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 08.10.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-18

BROADENING FREQUENCY BANDGAPS IN A BEAM WITH PERIODIC INTERNAL HINGES, EXTERNAL SUPPORTS AND ATTACHED MASSES

Ghazaryan K.B.

Key words: periodic structure, Floquet theory, multi span beams, hinges, bandgaps, attached masses.

Казарян К. Б.

Расширение запретных зон частот в балке с периодическими внутренними шарнирами, внешними опорами и присоединенными массами

Представлен сравнительный анализ механизма формирования запретных зон частот в однородных предварительно напряженных балках с периодическими внешними опорами, шарнирами и прикрепленными массами. На основе теории Флоке получены аналитические выражения для функции, определяющей структуру запретных зон. Рассмотрено несколько периодических топологических систем: мета балка с промежуточными внешними опорами и прикрепленными массами, мета балка с внутренними шарнирами в паре с массами. Для периодических структур выведены дисперсионные уравнения запретных зон, построены и проанализированы дисперсионные кривые. В статье новизной являются результаты, касающиеся расширения резонансной полосы фононных запрещенных зон мета балки за счет слияния раздельных множеств запретных зон, генерируемых внутренними шарнирами или внешними промежуточными опорами с прикрепленными массами.

Ключевые слова: периодические структуры, теория Флоке, многопролетные балки, шарниры, запретные зоны, присоединенные массы.

Ղազարյան Կ. Բ.

Պարբերական ներքին հոդակապերով, արտաքին հենարաններով և կցված զանգվածներով հեծանում հաճախությունների արգելված գոտիների ընդլայնումը

Ներկայացված է հաճախությունների արգելված գոտիների ձևավորման մեխանիզմի համեմատական վերլուծությունը նախապես լարված համասեռ, պարբերական հենարաններով, հոդակապերով և կցված զանգվածներով հեծաններում:

Դիտարկված է մի քանի պարբերական տոպոլոգիական համակարգեր. մետա հեծան միջանկյալ արտաքին հենարաններով և կցված զանգվածներով և մետահեծաններ՝ ներքին հոդակապերով՝ զանգվածների հետ:

Պարբերական կառուցվածքների համար դուրս են բերված արգելված գոտիների դիսպերսիոն հավասարումները, կառուցված և վերլուծված են դիսպերսիոն կորերը: Հոդվածում նորություն են այն արդյունքները, որոնք վերաբերում են մետա հեծանի ֆոնոն արգելված գոտիների ռեզոնանսային շերտի ընդլայնմանը՝ այն իրարից բաժան արգելված գոտիների միաձուլման հաշվին, որոնց առաջացումը պայմանավորված է ներքին հոդակապերով, միջանկյալ արտաքին հենարաններով և կցված զանգվածներով:

Բանալի բառեր. պարբերական կառուցվածքներ, Ֆլոկեի տեսություն, բազմաթռիչք հեծաններ, հոդակապեր, արգելված գոտիներ, կցված զանգվածներ:

A comparative analysis is presented of bandgap formation mechanism in homogeneous prestressed beams with periodic external supports, hinges and attached local masses. Based on the Floquet theory the analytical expressions are derived for deviation functions defining bandgap structure. Several periodic topological structures are considered: meta beams with intermediate external supports and attached masses, internal hinges paired with masses. For periodic structures the band gap dispersion equations are derived, dispersion curves are plotted and analyzed. The innovation in this paper is the results concerning widening of the resonant bandwidth of a meta beam phononic bandgaps by merging of multiple separated bandgaps generated by the internal hinges or external intermediate supports with attached masses.

Introduction

In this paper, we investigate the problem of bandgaps for flexural waves in infinite homogeneous pre tensioned meta beam with periodically attached masses, internal hinges and external support for the purpose of using such meta beams in energy harvesting applications.

In recent years has been growing interest in meta material thin-walled structures as plates and beams widely used in piezoelectric energy harvesting systems [1-13].

The problems of localization of electro elastic waves in periodic piezoelectric beams and applications in vibration energy harvesting are studied in [11,12] where it is shown that the flexural vibration energy within bandgaps may be localized in the cells and can be used for energy harvesting.

Locally resonant meta beams usually have narrow bandgaps, which significantly limits its applications in engineering devices. Various approaches have been proposed to broaden the frequency range of meta materials ‘bandgaps.

Among them is an optimization method based on the genetic algorithm proposed in [14] to broaden bandgaps in multi-resonant piezoelectric metamaterial through the merging of multiple separated bandgaps.

The hybrid metastructure consists of a piezoelectric bimorph cantilever with segmented electrodes shunted to resonant circuits and flexural resonators is considered in [15] were is fixed the possibility of increasing gap bandwidth by merging separate mechanical and electromechanical bandgaps.

The new approach suggested in [16] concerning widening of the resonant bandwidth of a piezoelectric harvester based on phononic band gaps generated by internal hinges.

In [17 it is shown that in a multi-span beam rested on periodic rigid and elastic supports the tensive and compressive axial forces sufficiently widening the multiple bandgaps of the flexural waves. The widening of the bandgaps occurs also with increasing the stiffness of the rotational spring attached to an elastic support.

The problem of reducing vibration transmittance in low-frequency regimes and over a broad frequency range through the resonance-Bragg band gap coupling phenomena in metamaterial rod is considered in [18].

Flexural frequency multiple bandgaps in metamaterial beams can be generated in many ways.

Bandgap formation due to Bragg’s scattering in periodic beam consisting of two or more kinds of materials are discussed in [19,20].

Bandgap formation in strings and beams with periodic local resonators or periodic supports are considered in [21-23].

Effects caused by bandgaps in the piezoelectric periodic meta beams are studied in [24,25].

The review of the most recent developments in piezoelectric energy harvesting methods for converting localized mechanical wave energy into electrical energy using artificially designed mechanical structures are given in [26].

Governing equations and solutions

This section presents the basic dynamics equations, interface relations and solutions of an Euler meta beam tensioned by an axial force. Tthree configurations of a periodic infinite meta beam are considered: beam with periodic attached masses (**M**), beam with periodic internal hinges paired with masses (**MH**), beam rested on periodic external supports when at equal distance from suppoorts attached masses are located (**MS**).

Transverse vibration of the Euler beam is given by the following equation

$$EI\frac{\partial^4 W}{\partial z^4} - Q\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \rho A\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0; \tag{1}$$

where $W(z,t)$ is the defection of beam, EI, ρ, A denote the flexural rigidity, the mass density per unit volume and the cross-sectional area, respectively, $Q > 0$ is the axial tension force .

Consider $W(z,t)$ in the form

$$W(z,t) = U(z)\exp(i\omega t) \tag{2}$$

where ω is the circular frequency, $U(z)$ is the amplitude function.

Introducing the dimensionless coordinate $x = zd^{-1}$, solutions for amplitude functions in a beam repeated elementary unit cell $x \in (n-1, n)$ can be written as

$$U_{\pm}(x) = A_{\pm 1}\sin(px) + A_{\pm 2}\sinh(qx) + A_{\pm 3}\cos(px) + A_{\pm 4}\cosh(qx)$$

$$q = \frac{\sqrt{\sqrt{F^2 + 4\Omega^2} + F}}{\sqrt{2}},\ p = \frac{\sqrt{\sqrt{F^2 + 4\Omega^2} - F}}{\sqrt{2}}; \tag{3}$$

Here Ω and F

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 d^4 \rho A}{EI}; F = \frac{d^2 Q}{EI} \tag{4}$$

are dimensionless notations of frequency and tensile force.

In (3) superscripts $(\pm)$ denote segments

$$(-) \to x \in (n-1, n-1/2), \qquad (+) \to x \in (n-1/2, n)$$

Beam with periodic attached masses (M)

Consider the beam in the basic unit cell $x \in (n-1, n)$ with masses m located at points $x_0 = n - 1/2$. Contact conditions at point $x_0 = n - 1/2$ are the conditions of the continuity in displacement, slope and moment of beam

$$U_+(x_0) = U_-(x_0), \qquad \frac{dU_+(x_0)}{dx} = \frac{dU_-(x_0)}{dx}, \quad \frac{d^2U_+(x_0)}{dx^2} = \frac{d^2U_-(x_0)}{dx^2} \tag{5}$$

and the balance of shear force

$$\frac{d^3U_+(x_0)}{dx^3} - \frac{d^3U_-(x_0)}{dx^3} = \frac{md^3\omega^2}{EY}U_\pm(x_0) = \mu\Omega^2 U_\pm(x_0) \tag{6 }$$

Here the dimensionless parameter $\mu = m(\rho A d)^{-1}$ determines the ratio of the attached mass to the mass of a beam of length d .

At the end points of the periodic basic unit cell the Floquet conditions will be applied [19]

$$\begin{aligned} &\frac{d^3U_+(n)}{dx^3} = \lambda \frac{d^3U_-(n-1)}{dx^3}, \qquad \frac{d^2U_+(n)}{dx^2} = \lambda \frac{d^2U_-(n-1)}{dx^3} \\ &\frac{dU_+(n)}{dx} = \lambda \frac{dU_-(n-1)}{dx}, \qquad U_+(n) = \lambda U_-(n-1) \end{aligned} \tag{7}$$

Here $\lambda = \exp(ikd)$, k is the Floquet wave number.

Applying to the solutions (3) the contact (5,6) and the Floquet conditions (7) we get the equation determining the Floquet wave number

$$\beta(1+\lambda^4) + \gamma(\lambda^3 + \lambda) + \alpha\lambda^2 = 0 \tag{8}$$

where

$$\alpha = -2p\left(p^2 q + \mu\Omega^2 \cos(p)\sinh(q) + q^3\right) - 4pq\left(p^2 + q^2\right)\cos(p)\cosh(q) +$$

$$+2\mu q\Omega^2 \sin(p)\cosh(q),$$

$$\beta = -pq\left(p^2 + q^2\right),$$

$$\gamma = 2pq\left(p^2 + q^2\right)\cos(p) + 2pq\left(p^2 + q^2\right)\cosh(q) + \mu(-q)\Omega^2 \sin(p) + \mu p\Omega^2 \sinh(q);$$

A similar type of this equation has been obtained and discussed in [27] for a vibrating piecewise bi-material periodic beam.

Taking into account $\lambda = \exp(ikd)$ the equations (8) can be written as

$$\alpha + 2\beta\cos(2kd) + 2\gamma\cos(kd) = \alpha - 2\beta + 4\beta\cos^2(kd) + 2\gamma\cos(kd) = 0$$

Solving it we get

$$\cos(kd) = \eta(\Omega, Q, \mu)$$

$$\eta(\Omega, Q, \mu) = \frac{-\gamma \pm \sqrt{-4\alpha\beta + 8\beta^2 + \gamma^2}}{4\beta} \tag{9}$$

Solutions (9) define the two Floquet spectrum of beam frequencies. When there are no masses $\mu = 0$ then solutions are $\cos(kd) \to \cos(p), \cos(kd) \to \cosh(q)$

Since the Euler–Bernoulli beam vibration equation is not hyperbolic, one of the spectrum is the Floquet pseudo spectrum [27] which corresponds to the limiting case

$\cos(kd) \to \cosh(q)$.

Beam with periodic internal hinges paired with attahed masses (MH)

Consider the beam in the basic unit cell $x \in (n-1, n)$ with internal hinges and paired masses m located at points $x_0 = n - 1/2$.

In this case the contact conditions at point $x_0 = n - 1/2$ are conditions of the continuity in displacement, namely the first of equation (5), and the balance of shear force (6). Besides these conditions we have the conditions that at the hinges are zero moments

$$\frac{d^2U_+(x_0)}{dx^2} = 0, \ \frac{d^2U_-(x_0)}{dx^2} = 0 \tag{10}$$

Applying to the solutions (3) contact conditions (5,6) and the Floquet conditions (7) and condition (10) we get the equation determining the Floquet wave number λ

$$\begin{gathered}\left(\lambda^2+1\right)pq\left(pq^3\sinh(q) - p^3q\sin(p)\right) + \\ +\lambda\left(2p^4q\sin(p)\cosh(q) + \mu\Omega^2\left(p^2+q^2\right)\sin(p)\sinh(q) - 2pq^4\cos(p)\sinh(q)\right) = 0\end{gathered} \tag{11}$$

Solving it we get

$$\begin{gathered}\cos(kd) = \eta(\Omega, Q, \mu) \\ \eta(\Omega, Q, \mu) = \frac{2p^4q\sin(p)\cosh(q) - 2pq^4\cos(p)\sinh(q) + \mu\Omega^2\left(p^2+q^2\right)\sin(p)\sinh(q)}{2p^4q\sin(p) - 2pq^4\sinh(q)}\end{gathered} \tag{12}$$

Beam rested on periodic external supports with periodic masses (MS)

Consider the beam in the basic unit cell $x \in (n-1, n)$ rested at points $x = n-1, x = n$ on external supports, when at $x_0 = n - 1/2$ the masses are attached.

In this case the contact conditions (5,6) are valid, together with these conditions we have to consider the following Floquet conditions

$$\begin{gathered}U_+(n) = 0, U_-(n-1) = 0 \\ \frac{dU_+(n)}{dx} = \lambda\frac{dU_-(n-1)}{dx}, \frac{d^2U_+(n)}{dx^2} = \lambda\frac{d^2U_-(n-1)}{dx^3}\end{gathered} \tag{13}$$

Applying conditions (5,6,13) to solutions (3) we have the equation determining the Floquet wave number

$$\left(\lambda^2+1\right)f + g\lambda = 0 \tag{14}$$

Solving (14) we get

$$\cos(kd) = \eta(\Omega, Q, \mu),\ \eta(\Omega, Q, \mu) = -\frac{g}{2f} \tag{15}$$

where

$$f = 2pq\left(p^2+q^2\right)\left(p\sinh(q) - q\sin(p) + 2\mu\Omega^2\left(q\sin\left(\frac{p}{2}\right) - p\sinh\left(\frac{q}{2}\right)\right)\right)$$

$$g = 4pq\left(p^2+q^2\right)\left(q\sin(p)\cosh(q) - p\cos(p)\sinh(q)\right) +$$

$$+2\mu\Omega^2\left(\cosh(q)\left((q^2-p^2)\cos(p) - q^2\right) + p\left(-4q\sin\left(\frac{p}{2}\right)\sinh\left(\frac{q}{2}\right) + 2q\sin(p)\sinh(q) + p\cos(p)\right)\right);$$

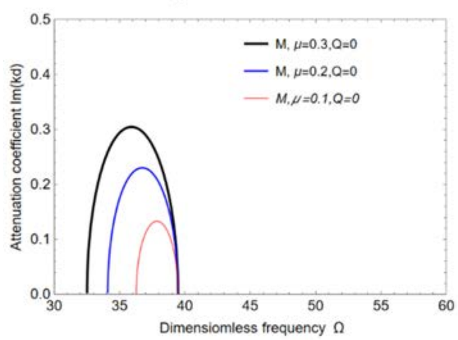
Deviations functions $\eta(\Omega, Q, \mu)$ in (9),(12),(15) define the bandgaps of eigenfrequencies Ω were the flexural waves cannot propagate, when $\left|\eta(\Omega, Q, \mu)\right| > 1$ (values of k are complex). The stopband edges of eigenfrequencies are given by condition $\left|\eta(\Omega, Q, \mu)\right| = 1$

Discussion, numerical results

The imaginary parts of the Floquet wave number $\mathrm{Im}(kd)$ define the attenuation of the flexible waves whose frequencies are inside the bandgaps, while the real part of the Floquet wave number $\mathrm{Re}(kd)$ defines the dispersion of the flexible waves, whose frequencies are outside the bandgaps. The lowest contours of the attenuation curves, where $\mathrm{Im}(kd) \to 0$ define the maps of the first bandgap frequencies.

On Figures 1,2,3 the attenuation curves $\mathrm{Im}(kd)$ versus frequency Ω are plotted, illustrating the variation of bandgap widths for **M**, **MH** and **MS** configurations. For these configurations the two different plots are presented when tension is $Q = 0$ or $Q = 40$.

(*For interpretation of the references to color in the figure's legend, the reader is referred to the web version of this article.*)



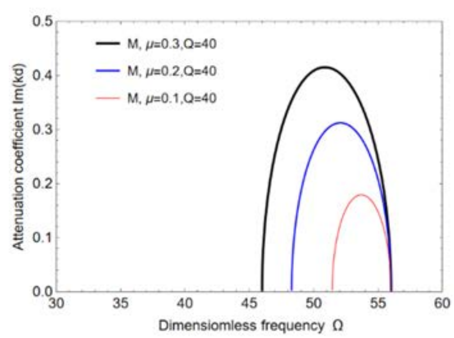


Fig1. Maps of the first bandgaps of **M** *beams*

As follows from the plots of Fig.1 in the case of **M** beams the increase of attached mass sufficiently widens the first gap widths (approximately two times) shifting the gap to the low frequency band. The increase of tensile force also expands the first gap widths but dislocating it to the high frequency band.

In the cases of **MH** and **MS** beams the increase of the attached mass slightly widens the first gap widths. Increasing the tensile force expands the first gap width shifting it to the high frequency band.

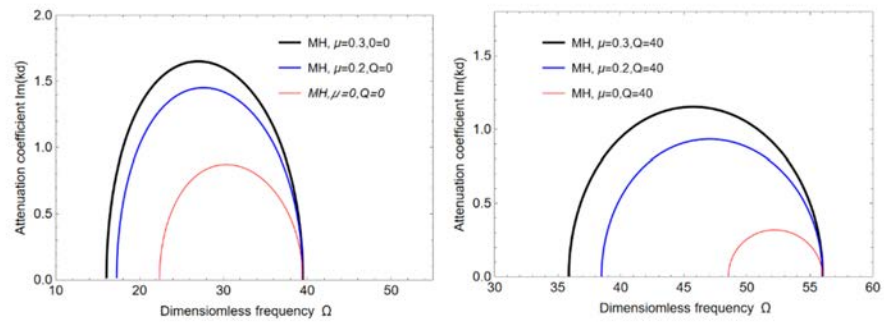


Fig2. Maps of the first bandgaps of **MH** *beams*

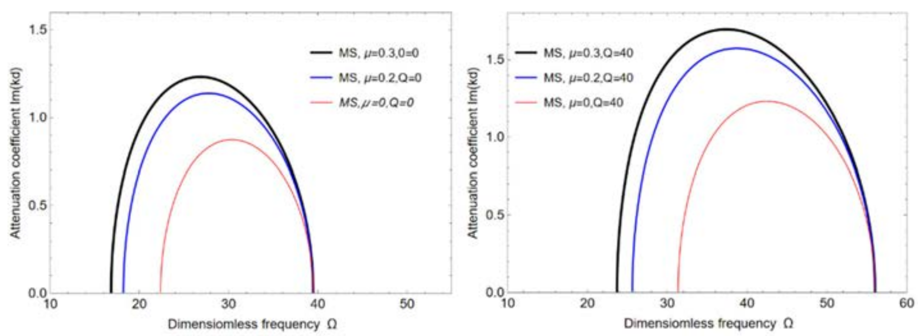


*Fig.3 Maps of the first bandgaps of **MS** beams*

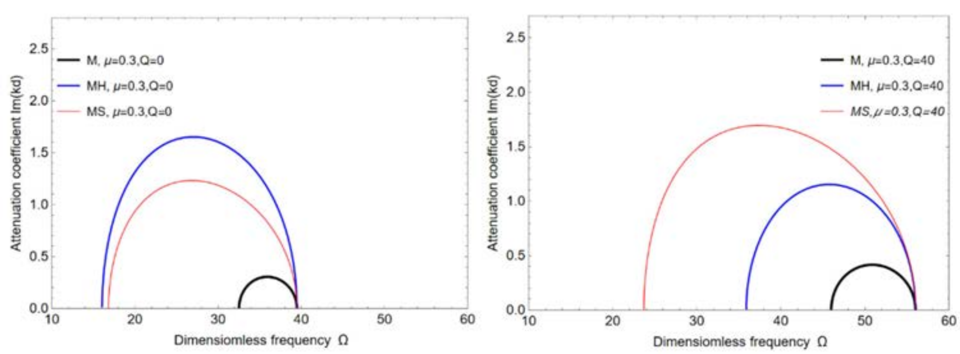


Fig.4 Maps of the first bandgaps of M,MH, MS beams

On the Fig.4 for comparison the maps of first bandgaps of **M**, **MH** and **MS** beams are presented when tensions are $Q = 0$ and $Q = 40$. On Fig.5 maps of the first, second and third bandgaps of **M,MH, MS** beams are presented.

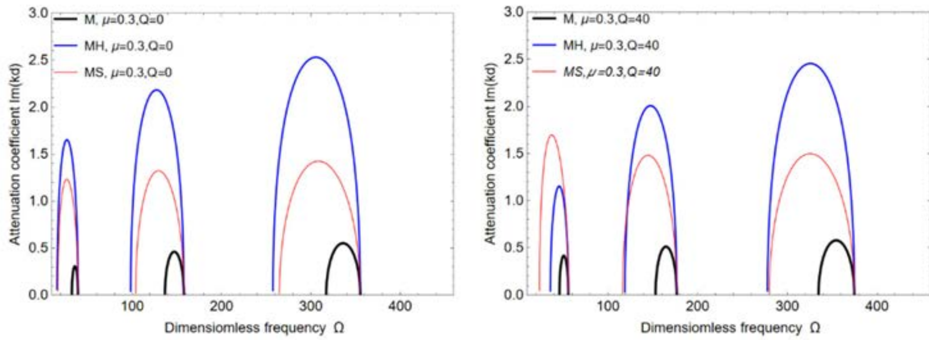


*Fig.5 Maps of the first, second and third multiple bandgaps of **M,MH, MS** beams*

Obviously as follows from Fig.5 the results obtained for first bandgap are valid for all multiple subsequent gaps of M, MS, MH beams

Conclusions

The analysis of the band gaps structures of the meta beams based on the plots of Fig. 1-5 can be summarized as follows:

- In **M** beams increasing the attached mass sufficiently widening the gap bandwidth and shifting the vibration band gaps to low-frequency regions.
- Increasing tensile force magnitude slightly increases the bandwidth of **M**, **MH** and **MS** beams shifting the vibration band gaps to high-frequency regions.
- The bandwidth of the **MS** beams can be wider than the bandwidth of the **MH** beams depending of tensile force magnitude.
- All gaps of the **M** beams are located within the gaps of the **MH** and **MS** beams
- Widening the resonant bandwidths of a meta beam harvester with phononic band gaps generated by internal hinges and external supports is more significant than widening of the resonant bandwidths due to increase of the attached masses values.
- The impact of the masses on the gap formation is insignificant in this meta structure with internal hinges and support.
- All results obtained for first bandgap are valid for all subsequent bandgaps of **M**, MS and **MH** beams

Acknowledgments

The work was supported by the State Committee of Science of RA, in the framework of the research project 21T-2C299.

References

1. Salman E., Lustig S., & Elata D. (2024). On the optimal planform of a cantilever unimorph piezoelectric vibrating energy harvester. Smart Materials and Structures. Volume 33, Number 3, p.34-41.
2. Ma T,X, Fan Q.S., Zhang C.,Wang Y.S.: Flexural wave energy harvesting by the topological interface state of a phononic crystal beam. Extreme Mech. Lett. 50, 101578 (2022)
3. Chen Z, Yang Y., Lu Z., & Luo, Y. (2013). Broadband characteristics of vibration energy harvesting using one-dimensional phononic piezoelectric cantilever beams. Physica B: Condensed Matter, 410, 5-12.
4. Wang Q.,Wu N.: Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. Smart Mater. Struct. 21(8), 085013 (2012)
5. Tol S., Degertekin F.L., Erturk A. (2016) Piezoelectric power extraction from bending waves: Electroelastic modeling, experimental validation, and performance enhancement, Wave Motion, Vol. 60, pp. 20-34.
6. Thein, C. K., Ooi, B. L., Liu, J. S., & Gilbert, J. M. (2016). Modelling and optimisation of a bimorph piezoelectric cantilever beam in an energy harvesting application. J. Eng. Sci. Technol, 11(2), 212-227.
7. Piliposian, G., Hasanyan, A., Piliposyan, G., Jilavyan, H.: On the sensing. Actuating and energy harvesting properties of a composite plate with piezoelectric patches. Int. J. Precision Eng. Manuf.-Green Technol. 7, 657–668 (2020)
8. Li, H., WeiYang, Q. Dynamics and coherence resonance of a laminated piezoelectric beam for energy harvesting. Nonlinear Dyn. 81(4), 1751–1757 (2015)
9. Erturk,A., Inman, D.J. An experimentally validated bimorph cantilevermodel for piezoelectric energy harvesting from base excitations. Smart Mater. Struct. 18(2), 025009 (2009)
10. Wang, Q.,Wu, N.: Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. Smart Mater. Struct. 21(8), 085013 (2012)
11. Piliposian, G., Hasanyan, A., Piliposyan, D.: The effect of the location of piezoelectric patches on the sensing, actuating and energy harvesting properties of a composite plate. J. Phys. D: Appl. Phys. 52(44), 445501 (2019)
12. Sugino C., Leadenham S., Ruzzene M., Erturk A. (2017) An investigation of electroelastic bandgap formation in locally resonant piezoelectric metastructures Smart Mater. Struct, Vol.26, 055029.
13. Machu, Zdenek, Ondrej Rubes, Oldrich Sevecek, and Zdenek Hadas. "Experimentally verified analytical models of piezoelectric cantilevers in different design configurations." Sensors 21, no. 20 (2021): 6759.
14. Li, Yuhao, Zhiyuan Liu, Hao Zhou, Kaijun Yi, and Rui Zhu. "Broadening bandgaps in a multi-resonant piezoelectric metamaterial plate via bandgap merging phenomena." Scientific Reports 14, no. 1 (2024): 16127.
15. Sugino, C., Ruzzene, M., & Erturk, A. (2018). Merging mechanical and electromechanical bandgaps in locally resonant metamaterials and metastructures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 116, 323-333.
16. K.Ghazaryan, S. Jilavyan, D. Piliposyan, and D. Aznaurov. "Band Gaps of Metastructure with Periodically Attached Piezoelectric Patches and Internal Hinges." In Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep, pp. 101-113. Cham: Springer International Publishing, 2023.

17. K. Ghazaryan, Bandgaps, dynamics and stability of multi- span beam rested on periodically arranged exterior supports, Report NAN Armenia, 2,2024
18. Tai, W. C., Nimmagadda, C., & Tardiff, J. (2020, April). Broadening band gaps in an electromechanical metamaterial rod by resonant electromagnetic shunt and inter-resonator coupling. In Behavior and Mechanics of Multifunctional Materials IX (Vol. 11377, pp. 35-44). SPIE.
19. Adams, S., Craster, R.V., Guenneau, S.: Bloch waves in periodic multi-layered acoustic layers.In: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 464, no. 2098 (2008)
20. Hussein, M.I., Leamy, M.J., Ruzzene, M.: Dynamics of phononic materials and structures:historical origins, recent progress, and future outlook. Appl. Mech. Rev. **66**, 040802/1-38,(2014)
21. Xiao, Yong, Brian R. Mace, Jihong Wen, and Xisen Wen. "Formation and coupling of band gaps in a locally resonant elastic system comprising a string with attached resonators." Physics Letters A 375, no. 12 (2011): 1485-1491.
22. Ghazaryan, K, Piliposyan, G, Jilavyan, S and Piliposian, G (2024) “Forced vibrations of a finite length metabeam with periodically arranged internal hinges and external supports” European Journal of Mechanics - A/Solids, 103. p. 105194.
23. K. Ghazaryan, G. Piliposyan // Band Gap Formation in A Beam With Attached Local Resonators and Periodically Arranged Intermediate External Supports / Mechanics - Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia, 2023, 3, 6-18
24. Wang Q.,Wu N.: Optimal design of a piezoelectric coupled beam for power harvesting. Smart Mater. Struct. 21(8), 085013 (2012)
25. Zhao, Xi-Ning, Xiao-Dong Yang, Wei Zhang, and Huayan Pu. "Active tuning of elastic wave propagation in a piezoelectric metamaterial beam." AIP Advances 11, no. 6 (2021).
26. Lee G., Lee, D., Park J., Jang, Y., Kim, M., Rho, J.: Piezoelectric energy harvesting using mechanical metamaterials and phononic crystals. Commun. Phys. 5(1), 1–16 (2022)
27. Papanicolaou V. The periodic Euler-Bernoulli equation. Trans. Am. Math. Soc. 355(9), 3727–3759 (2003)].

Karen Ghazaryan
Department of Dynamics of Deformable Systems and Coupled fields, Institute of Mechanics of NAS of Armenia, Yerevan
E-mail: ghkarren@gmail.com

Received 12.08.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-28

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО СЛОЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С КОЛЛИНЕАРНОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕЩИН И СТРИНГЕРОМ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Мкртчян М. М., Мкртчян М.С.

Ключевые слова: напряжение, слой, трещина, стрингер, система сингулярных интегральных уравнений, коэффициент интенсивности напряжений, раскрытие трещины.

Mkrtchyan M.M., Mkrtchyan M.S.

On the stress state of a piecewise homogeneous layer interacting with a collinear system of cracks and a stringer under antiplane deformation

Keywords: stress, layer, crack, stringer, system of singular integral equations, stress intensity factor, crack opening.

This paper considers the problem of determining the components of the stress-strain state of a piecewise homogeneous layer under antiplane deformation, the upper face of which is reinforced by a stringer, the lower face is rigidly clamped, and a collinear system of cracks is located on the horizontal weld line of dissimilar materials.

Մկրտչյան Մ.Մ., Մկրտչյան Մ.Ս.

Հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում ճաքերի համագիծ համակարգի և ստրինգերի հետ փոխազդող կտոր առ կտոր համասեռ շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի մասին

Հիմնաբառեր՝ լարում, շերտ, ճաք, ստրինգեր, սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգ, լարումների ինտենսիվության գործակից, ճաքի բացվածք:

Հոդվածում դիտարկվում է առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրը հակահարթ դեֆորմացիայի պայմաններում, երբ շերտի վերին եզրը ուժեղացված է ստրինգերով, ստորին եզրը կոշտ ամրակցված է, իսկ տարասեռ նյութերի միացման հորիզոնական գծի վրա դասավորված է համագիծ ճաքերի համակարգ:

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного слоя при антиплоской деформации, верхняя грань которого усилена стрингером, нижняя грань жестко защемлена, а на горизонтальной линии спая разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин.

1. Введение. В механике композитов при проектировании различных строительных и авиационных конструкций, в тензометрии и во многих других отраслях прикладной механики и инженерной практики весьма важным представляется исследование вопросов взаимодействия концентраторов напряжений типа трещин и стрингеров с массивными телами различных геометрических форм. Это объясняется тем, что вокруг этих концентраторов напряжений образуются локальные поля напряжений с большими и интенсивно изменяющимися градиентами, которые существенно снижают уровень прочности инженерных конструкций и их деталей. Поэтому качественное и количественное исследование вопросов концентрации напряжений представляет как теоретический, так и практический интерес. Такие задачи стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-6], а также на статьи [7-9].

В настоящей статье рассматривается задача об определении напряженного состояния упругого кусочно однородного слоя при антиплоской деформации, когда на линии спая разнородных материалов расположена коллинеарная система трещин, нижняя грань слоя жестко защемлена, а его верхняя грань усилена стрингером конечной длины. Предполагается, что под действием приложенных касательных сил система упругий слой с трещинами и стрингером находится в условиях антиплоской деформации (продольного сдвига), причем для стрингера принята известная модель Мелана. При этих предположениях решение задачи методом интегрального преобразования Фурье сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений (СИУ) из двух уравнений. Решение определяющей системы СИУ построено известным численно аналитическим методом [12-14], позволяющим свести его к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Физические характеристики задачи представлены явными аналитическими формулами, произведен их численный анализ.

2. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Пусть отнесенный к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$ кусочно-однородный упругий слой, находящийся в условиях антиплоской деформации в направлении оси Oz с базовой плоскостью Oxy, состоит из верхнего слоя $\Omega_+ = \{-\infty < x, z < \infty, 0 \le y \le h_+\}$ с модулем сдвига G_+ и нижнего слоя $\Omega_- = \{-\infty < x, z < \infty, -h_- \le y \le 0\}$ с модулем сдвига G_-. Слой в плоскости $y = 0$ содержит систему сквозных трещин, следы которых в плоскости Oxy составляют систему интервалов L:

$$L = \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k]; \;\; a_k < b_k \;\; (k = 1, 2, ..., N); \;\; b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N-1})$$

Пусть, далее, нижняя грань слоя жестко закреплена: $u_z^-(x, y)\big|_{y=-h_-} = 0$, где $u_z^-(x, y)$ - перемещение точек слоя по оси Oz. Кроме того, верхняя грань $y = h_+$ слоя на отрезке $[c, d]$ усилена стрингером высотой h_1 с модулем сдвига G_1 в виде полосы-ленты $\omega_+ = \{c \le x \le d; h_+ \le y \le h_+ + h_1; -\infty < z < \infty\}$. Предположим, что на верхней грани $y = h_+ + h_1$ полосы ω_+ в направлении оси Oz действуют равномерно распределенные по оси Oz касательные силы интенсивности $T_1(x)$:

$$\tau_{yz}\big|_{y=h_+ + h_1} = -T_1(x) \;\; (c < x < d), \tag{1}$$

где τ_{yz} – компонента касательных напряжений. Кроме этого, будем предполагать, что на кромках $x = c, x = d$ стрингера в направление оси Oz действуют равномерно распределенные касательные сосредоточенные силы P_1, P_2.

Требуется определить плотность дислокаций на берегах трещин, их раскрытие, коэффициент интенсивности напряжений (КИН), разрушающие касательные напряжения вне системы трещин на их линии расположения, а также действующие под стрингером касательные контактные напряжения. При этом для стрингера принимается модель одномерного упругого континуума Мелана [1, 10].

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородную упругую полосу в плоскости Oxy вдоль оси Ox разрежем на верхнюю (Ω_1) и нижнюю (Ω_2) полосы, а затем для действующих на их гранях $y=\pm 0$ напряжений введем следующие обозначения $\left(L' = R/L;\, R = (-\infty,\infty)\right)$:

$$-\tau_{yz}\Big|_{y=+0} = T_+(x) = \begin{cases} \tau_+(x) & (x\in L); \\ \tau(x) & (x \in L'); \end{cases} \qquad -\tau_{yz}\Big|_{y=-0} = T_-(x) = \begin{cases} \tau_-(x) & (x\in L); \\ \tau(x) & (x \in L'); \end{cases} \tag{2}$$

Граничное условие при $y=h_+$ имеет вид:

$$\tau_{yz}^+\Big|_{y=h_+} = G_+\frac{\partial u_z^+(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=h_+} = -H_+(x) = \begin{cases} -h_+(x) & \left(x\in[c,d]\right); \\ 0 & \left(x\notin[c,d]\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $u_z^\pm(x,y)$- смещения точек в направлении оси Oz, соответственно, верхней и нижней полос, которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta u_z^\pm(x,y) = \frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z^\pm(x,y)}{\partial y^2} = 0. \tag{4}$$

Далее введем в рассмотрение следующие функции:

$$\chi_\pm(x) = \frac{T_+(x)\pm T_-(x)}{2}; \tag{5}$$

$$w(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{du_z^+(x,+0)}{dx} - \frac{du_z^-(x,-0)}{dx}\right) = \begin{cases} \varphi(x) & (x\in L); \\ 0 & (x\in R/L). \end{cases}$$

С помощью метода преобразования Фурье по переменной x, из уравнения (4) и граничных условий (2)-(3) в соответствии с обозначениями (5) приходим к ключевому уравнению задачи:

$$\chi_+(x) = -\frac{2G_+G_-}{\pi(G_+ + G_-)}\int_L \frac{w(s)\,ds}{s-x} - \frac{2G_+G_-}{\pi(G_+ + G_-)}\int_L K(s-x)w(s)\,ds +$$
$$+\frac{G_+ - G_-}{G_+ + G_-}\chi_-(x) - \frac{2G_+G_-}{\pi(G_+ + G_-)}\int_L R(s-x)\chi_-(s)\,ds + \tag{6}$$
$$+\frac{G_-}{\pi}\int_L Q(s-x)H_+(s)\,ds \qquad (x\in R)$$

$$K(x)=\int_0^\infty \frac{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)[1-\mathrm{th}(\lambda h_-)]-G_-[1-\mathrm{th}(\lambda h_+)]}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$R(x)=\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\cos(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$Q(x)=\int_0^\infty \frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda h_+)\left[G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-\right]}\cos(\lambda x)\,d\lambda;$$

Теперь, для производных смещений на границе полосы $y=h_+$ будем иметь

$$\frac{du_z^+(x,h_+)}{dx}=\frac{2G_-}{\pi}\int_L Q(s-x)\,w(s)\,ds+\frac{2}{\pi}\int_L R_1(s-x)\,\chi_-(s)\,ds-$$
$$-\frac{1}{\pi G_+}\int_c^d \frac{h_+(s)\,ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_+}\int_c^d M_1(s-x)\,h_+(s)\,ds;\qquad (x\in R) \tag{7}$$

где

$$R_1(x)=\int_0^\infty \frac{\mathrm{th}(\lambda h_-)}{\mathrm{ch}(\lambda h_+)\left[G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-\right]}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

$$M_1(x)=\int_0^\infty \frac{\left(1-\mathrm{th}(\lambda h_-)\right)\left(G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)-G_-\right)}{G_+\,\mathrm{th}(\lambda h_+)\,\mathrm{th}(\lambda h_-)+G_-}\sin(\lambda x)\,d\lambda;$$

Далее, для стрингера воспользуемся дифференциальным уравнением деформирования стрингера с учетом (1) по модели Мелана при антиплоской деформации [10]

$$h_1G_1\frac{d^2w_1}{dx^2}=h_+(x)-T_1(x)\quad (c<x<d); \tag{8}$$

где $w_1=w_1(x)$ компонента смещений точек стрингера в направлении оси Oz. При этом условие равновесия стрингера имеет вид

$$\int_c^d h_+(x)\,dx=P_1+P_2+\int_c^d T_1(x)\,dx. \tag{9}$$

Интегрированием (8) легко находим

$$h_1G_1\frac{dw_1}{dx}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)+\frac{1}{2}\int_c^d \mathrm{sign}(x-s)\left[h_+(s)-T_1(s)\right]ds. \tag{10}$$

Теперь в условие контакта упругой полосы и стрингера

$$u_z^+(x,h_+)=w_1(x)\ \text{или}\ \frac{du_z^+(x,h_+)}{dx}=\frac{dw_1(x)}{dx}\quad (c<x<d);$$

подставим выражения из (7), (9) и (10) соответственно. После простых преобразований относительно неизвестных контактных напряжений $h_+(x)$ придем к следующему интегральному уравнению:

$$\frac{G_-}{\pi}\int_L Q_1(s-x)\varphi(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int_c^d\frac{h_+(s)\,ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_+}\int_L M_1(s-x)h_+(s)\,ds- \tag{11}$$

$$-\frac{1}{2h_1G_1}\int_c^d \operatorname{sign}(x-s)h_+(s)\,ds=-\frac{1}{\pi}\int_c^d R_1(x-s)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds+$$

$$+\frac{1}{2h_1G_1}\left[P_1+P_2\right]-\frac{1}{2h_1G_1}\int_c^d \operatorname{sign}(x-s)T_1(s)\,ds;\quad \left(x\in(c,d)\right)$$

Из рассмотрения уравнения (6) на L совместно с (11), получаем определяющую СИУ задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x}+\frac{1}{\pi}\int_L K(x-s)\varphi(s)\,ds-\frac{G_++G_-}{\pi G_+}\int_c^d Q(x-s)h_+(s)\,ds=\\ =-\dfrac{1}{G_+}\tau_+(x)-\dfrac{1}{G_-}\tau_-(x)-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L R(x-s)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds;\qquad (x\in L)\\ \dfrac{G_-}{\pi}\displaystyle\int_L Q(s-x)\varphi(s)\,ds-\frac{1}{\pi G_+}\int_c^d\frac{h_+(s)\,ds}{s-x}-\frac{1}{\pi G_+}\int_L M_1(s-x)h_+(s)\,ds-\\ -\dfrac{1}{2h_1G_1}\displaystyle\int_c^d \operatorname{sign}(x-s)h_+(s)\,ds=-\frac{1}{\pi}\int_c^d R_1(x-s)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds+\\ +\dfrac{1}{2h_1G_1}\left[P_1+P_2\right]-\dfrac{1}{2h_1G_1}\displaystyle\int_c^d \operatorname{sign}(x-s)T_1(s)\,ds;\quad \left(x\in(c,d)\right)\end{cases} \tag{12}$$

Систему (12) рассматриваем при условиях

$$\int_{a_k}^{b_k}\varphi(x)\,dx=0,\qquad (k=\overline{1,N}), \tag{13}$$

эквивалентных условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а также при условии равновесия стрингера (9):

Рассматривая же уравнение (6) вне разрезов, будем иметь:

$$\tau(x)=-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_L\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x}-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_L K(s-x)\varphi(s)\,ds- \tag{14}$$

$$-\frac{G_+G_-}{\pi(G_++G_-)}\int_L R(s-x)\left[\tau_+(s)-\tau_-(s)\right]ds+\frac{G_-}{\pi}\int_L Q(x-s)h_+(s)\,ds\ \left(x\in L'\right)$$

Таким образом, поставленная задача о напряженном состоянии упругой полосы с трещинами и стрингером сводится к решению системы (12) при условиях (9), (13). После решения (12), (9), (13) разрушающее напряжение определяется формулой (14).

3. Решение определяющей СИУ. Для решения определяющей СИУ (12), (9), (13) сначала введем безразмерные координаты и величины:

$$\xi=\frac{x}{|a_1|},\ \eta=\frac{s}{|a_1|};\ \bar{h}_+=\frac{h_+}{|a_1|},\ \bar{h}_-=\frac{h_-}{|a_1|};\ \bar{h}_1=\frac{h_1}{|a_1|};\ \alpha_k=\frac{a_k}{|a_1|}, \tag{15}$$

$$\beta_k=\frac{b_k}{|a_1|};\ (k=\overline{1,N})\quad \gamma=\frac{c}{|a_1|},\ \delta=\frac{d}{|a_1|};\ \mu=G_+/G_-;\ \mu_1=G_1/G_+;$$

$$L_0=\bigcup_{k=1}^{N_1}(\alpha_k;\beta_k);\ \ \varphi_0(\xi)=\varphi(|a_1|\xi);\ \ \tau_\pm^{(0)}(\xi)=\frac{\tau_\pm(|a_1|\xi)}{G_++G_-};\ \bar{h}_+(\xi)=\frac{h_+(|a_1|\xi)}{G_1};$$

$$P_1^{(0)}=\frac{P_1}{|a_1|G_1};P_2^{(0)}=\frac{P_2}{|a_1|G_1};\ T_1^{(0)}(\xi)=\frac{T_1(|a_1|\xi)}{G_1}.$$

после чего (12) преобразуется в следующее СИУ:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}\frac{\varphi_0(\eta)d\eta}{\eta-\xi}+\frac{1}{\pi}\int_{L_0}K_0(\eta-\xi)\varphi_0(\eta)d\eta-\\ -\dfrac{\mu_1(\mu+1)}{\pi}\displaystyle\int_\gamma^\delta Q_0(\eta-\xi)\bar{h}_+(\eta)d\eta=F_1(\xi) \qquad\qquad (\xi\in L_0)\\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{L_0}Q_0(\eta-\xi)\varphi_0(\eta)d\eta-\frac{\mu_1}{\pi}\int_\gamma^\delta\frac{\bar{h}_+(\eta)d\eta}{\eta-\xi}-\frac{\mu_1}{\pi}\int_\gamma^\delta K_{10}(\eta-\xi)\bar{h}_+(\eta)d\eta+\\ +\dfrac{1}{2\bar{h}_1}\displaystyle\int_\gamma^\delta \operatorname{sign}(\eta-\xi)\bar{h}_+(\eta)d\eta=F_2(\xi)\ \ (\xi\in(\gamma,\delta))\end{cases} \tag{16}$$

$$K_0(\xi)=\int_0^\infty\frac{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)[1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)]-[1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)]}{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)+1}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$Q_0(\xi)=\int_0^\infty\frac{1}{\mathrm{ch}(\lambda\bar{h}_+)\left[\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)+1\right]}\cos(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$R_0(\xi)=\int_0^\infty\frac{1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)}{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)+1}\cos(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$K_{10}(\xi)=\int_0^\infty\frac{\left(1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)\right)\left(\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)-1\right)}{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)+1}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$R_{10}(\xi)=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)}{\mathrm{ch}(\lambda\bar{h}_+)\left[\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_+)\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_-)+1\right]}\sin(\lambda\xi)d\lambda;$$

$$F_1(\xi)=-\frac{(\mu+1)}{\mu}\tau_+^{(0)}(\xi)-(\mu+1)\tau_-^{(0)}(\xi)-$$

$$-\frac{(\mu+1)}{\mu}\int_{L_0}R_0(\eta-\xi)\left[\tau_+^{(0)}(\eta)-\tau_-^{(0)}(\eta)\right]d\eta;\ \ (\xi\in L_0)$$

$$F_2(\xi)=-\frac{\mu+1}{\pi}\int_{L_0}R_{10}(\eta-\xi)\left[\tau_+^{(0)}(\eta)-\tau_-^{(0)}(\eta)\right]d\eta+\frac{1}{2\bar{h}_1}\left[P_1^{(0)}+P_2^{(0)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2\bar{h}_1}\int_{\gamma}^{\delta}\mathrm{sign}(\eta-\xi)T_1^{(0)}(\eta)d\eta;\qquad (\xi\in(\gamma,\delta))$$

Далее, каждый интервал $(\alpha_k,\beta_k),(\gamma,\delta)$ системы СИУ (16) преобразуем в интервал $(-1,1)$, полагая

$$\xi=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2},\ \eta=\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}u+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\ (k=\overline{1,N}),\ (-1<t,u<1),$$

$$\xi=\frac{\delta-\gamma}{2}t+\frac{\delta+\gamma}{2},\ \eta=\frac{\delta-\gamma}{2}u+\frac{\delta+\gamma}{2}\quad(-1<t,u<1)$$

в результате СИУ (16) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций

$$\varphi_k(t)=\varphi_0\left(\frac{\beta_k-\alpha_k}{2}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);\ (-1<t<1;\ k=\overline{1,N})$$

$$\psi(t)=\bar{h}_+\left(\frac{\delta-\gamma}{2}t+\frac{\delta+\gamma}{2}\right)\ (-1<t<1)$$

на интервале (-1,1):

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\dfrac{\varphi_k(u)du}{u-t}+\dfrac{1}{\pi}\sum_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\int_{-1}^{1}K_{km}^{(1)}(t,u)\varphi_m(u)du+\dfrac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1}K_{km}(t,u)\varphi_m(u)du- \\
\quad -\dfrac{\mu_1\left(\mu+1\right)}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}Q_k(t,u)\psi(u)du=l_{1k}(t); \qquad (-1<t<1;\ k=\overline{1,N}) \\
\quad -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{m=1}^{N}\int_{-1}^{1}\hat{Q}_m(t,u)\varphi_m(u)du-\dfrac{\mu_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{\psi(u)du}{u-t}-\dfrac{\mu_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\hat{K}(t,u)\psi(u)du+ \\
\qquad +\dfrac{\delta-\gamma}{4\bar{h}_1}\displaystyle\int_{-1}^{1}sign\left(u-t\right)\psi(u)du=l_2(t), \qquad (-1<t<1)
\end{cases}
\tag{17}
$$

где

$$K_{km}^{(1)}(t,u)=\left(u-\frac{\beta_k-\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}t+\frac{\beta_m+\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}-\frac{\beta_k+\alpha_k}{\beta_m-\alpha_m}\right)^{-1}; \qquad (m,k=\overline{1,N})$$

$$K_{km}(t,u)=\lambda_m^{(1)}K_0\left(\lambda_m^{(1)}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}-\lambda_k^{(1)}t-\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right); \quad \left(m,k=\overline{1,N}\right)$$

$$Q_k(t,u)=\lambda^{(2)}Q_0\left(\lambda^{(2)}u+\frac{\delta+\gamma}{2}-\lambda_k^{(2)}t-\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right); \quad \left(k=\overline{1,N}\right)$$

$$\tau_k^{(1)}\left(t\right)=\tau_-^{(0)}\left(\lambda_k^{(1)}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right);\ \tau_k^{(2)}\left(t\right)=\tau_+^{(0)}\left(\lambda_k^{(1)}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right)\left(-1<t<1;k=\overline{1,N}\ \right)$$

$$R_{km}(t,u)=\lambda_m^{(1)}R_0\left(\lambda_m^{(1)}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}-\lambda_k^{(1)}t-\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right); \quad \left(m,k=\overline{1,N}\right)$$

$$\hat{R}_m(t,u)=\lambda_m^{(1)}R_{10}\left(\lambda_m^{(1)}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}-\lambda^{(2)}t-\frac{\delta+\gamma}{2}\right); \quad \left(m=\overline{1,N}\right)$$

$$\hat{Q}_m(t,u)=\lambda_m^{(1)}Q_0\left(\lambda_m^{(1)}u+\frac{\beta_m+\alpha_m}{2}-\lambda^{(2)}t-\frac{\delta+\gamma}{2}\right); \quad \left(m=\overline{1,N}\right)$$

$$\hat{K}_m(t,u)=\lambda^{(2)}K_{10}\left(\lambda^{(2)}\left(u-t\right)\right);\ \tilde{T}_1(u)=T_1^{(0)}\left(\lambda^{(2)}u+\frac{\delta+\gamma}{2}\right);$$

$$l_{1k}(t)=F_1\left(\lambda_k^{(1)}t+\frac{\beta_k+\alpha_k}{2}\right); \quad (k=\overline{1,N};\ t\in(-1,1))$$

$$l_2(t)=F_2\left(\lambda^{(2)}t+\frac{\delta+\gamma}{2}\right);\ (\ t\in(-1,1))$$

$\lambda_m^{(1)} = \left(\beta_m - \alpha_m\right)\big/2, \quad (m = \overline{1, N}); \quad \lambda^{(2)} = (\delta - \gamma)/2,$

а условия (9), (13) - в следующие условия:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_k(u)du = 0; (k = \overline{1, N});$$

$$\int_{-1}^{1} \psi(u)du = P_0 + T_0; \; P_0 = \frac{2\left(P_2^{(0)} - P_1^{(0)}\right)}{\delta - \gamma}; \; T_0 = \int_{-1}^{1} \tilde{T}_1(u)du. \tag{18}$$

К системе СИУ (17) при условиях (18) применим изложенный в [12–14] метод решения СИУ, полагая

$$\varphi_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \; (-1 < t < 1, \; k = \overline{1, N}); \; \psi(t) = \frac{y(t)}{\sqrt{1-t^2}} \; (-1 < t < 1),$$

где $x_k(t)$ и $y(t)$-функции, принадлежащие гельдеревскому классу функций на отрезке $\left[-1, 1\right]$, а затем выберем произвольное натуральное число M. Далее, следуя известной процедуре [11], систему (17) при условиях (18) сведем к следующей СЛАУ:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M}\sum\limits_{n=1}^{M}\dfrac{x_k(u_n)}{u_n - t_r} + \dfrac{1}{M}\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N}\sum\limits_{n=1}^{M} K_{km}^{(1)}(t_r, u_n)x_m(u_n) + \dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{M} K_{km}(t_r, u_n)x_m(u_n) - \\ \qquad - \dfrac{\mu_1\left(\mu+1\right)}{M}\sum\limits_{n=1}^{M} Q_k(t_r, u_n)y(u_n) = l_{1k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N}; \quad r = \overline{1, M-1}) \\ \qquad \sum\limits_{n=1}^{M} x_k(u_n) = 0; \qquad\qquad (k = \overline{1, N}) \\ \dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{N}\sum\limits_{n=1}^{M}\hat{Q}_m(t_r, u_n)x_m(u_n) - \dfrac{\mu_1}{M}\sum\limits_{n=1}^{M}\dfrac{y(u_n)}{u_n - t_r} - \dfrac{\mu_1}{M}\sum\limits_{\substack{m=1\\ m\neq k}}^{N_2}\sum\limits_{n=1}^{M}\hat{K}(t_r, u_n)y(u_n) + \\ \qquad + \dfrac{\pi\left(\delta-\gamma\right)}{4\bar{h}_1 M}\sum\limits_{n=1}^{M}\operatorname{sign}(u_n - t_r)y(u_n) = l_2(t_r); \qquad (r = \overline{1, M-1}) \\ \qquad \dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{n=1}^{M} y(u_n) = P_0 + T_0, \end{cases}$$

отсюда определяются неизвестные $\left\{x_k(u_n)\right\}$ $(k = \overline{1, N}; \; n = \overline{1, M})$ и $\left\{y(u_n)\right\}$ $(n = \overline{1, M})$. Здесь

$$u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\pi\right); \quad \left(n=\overline{1,M}\right), \qquad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right); \quad \left(r=\overline{1,M-1}\right) \tag{19}$$

чебышевские узлы, т.е. корни, соответственно, уравнений $T_M(u)=0$, $U_{M-1}(t)=0$ где $T_M(u)$ и $U_{M-1}(t)$ - многочлены Чебышева первого и второго родов соответственно.

Перейдем к определению КИН разрушающих касательных напряжений в концевых точках a_k, b_k трещин $(a_k;b_k)(k=\overline{1,N})$. Если в известных формулах для КИН однородного тела в случае антиплоской деформации [15] модуль сдвига заменить приведенным модулем сдвига, то для КИН кусочно-однородного тела получим следующие формулы [15]:

$$\begin{aligned} K_{III}(a_k) &= \frac{G_+}{1+\mu}\lim_{x\to a_k+0}\sqrt{2\pi\left(x-a_k\right)}\phi(x); \\ K_{III}(b_k) &= -\frac{G_+}{1+\mu}\lim_{x\to b_k-0}\sqrt{2\pi\left(b_k-x\right)}\phi(x). \qquad (\mu = G_+/G_-) \end{aligned} \tag{20}$$

В безразмерной форме формула (20), в соответствии с (15) примет вид

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi|a_1|}G_+} = \frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1+\mu}x_k(-1); \quad (k=1,N), \tag{21}$$

$$K_{III}^0(b_k) = \frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi|a_1|}G_+} = -\frac{\sqrt{\lambda_k^{(1)}}}{1+\mu}x_k(1); \quad (k=1,N).$$

Входящие в (21) значения $x_k(\pm1)$ функции $x_k(t)$ определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам (19) и выражаются формулами [12]:

$$x_k(1) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{n+1}x_k(u_n)\operatorname{ctg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right);$$

$$x_k(-1) = \frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M}(-1)^{M+n}x_k(u_n)\operatorname{tg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right); \quad (k=1,N).$$

Для безразмерных раскрытий трещин $w_k(t)$ с учетом (15) можем записать [12]:

$$w_k(t) = \int_{-1}^{t}\frac{x_k(\eta)d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{M}\sum_{u_n\le t}x_k(u_n); \qquad (-1\le t\le 1). \tag{22}$$

$$w_k(t) = \frac{2}{b_k-a_k}\hat{w}_k\left(\frac{b_k-a_k}{2}t+\frac{b_k+a_k}{2}\right); \qquad (-1\le t\le 1).$$

где $\hat{w}_k(x)$ раскрытия k-того трещины.

Рассмотрим частный случай, когда на линии соединения разнородных полос содержится одна трещина $L=\left(-a,a\right)$, $(a>0)$. Предположим, что на берегах трещины действуют одинаковые напряжения $\tau_{+}^{(1)}(x)=\tau_{-}^{(1)}(x)=\tau\left(x\right)$ $(x\in L)$. В этом частном случае система (17) запишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{\varphi}(u)du}{u-t}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\tilde{K}(u-t)\tilde{\varphi}(u)du- \\ \qquad -\dfrac{\mu_1\left(\mu+1\right)}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\tilde{Q}(t,u)\tilde{\psi}(u)du=-\frac{(\mu+1)^2}{\mu}\tau_0(t); \qquad (t\in(-1,1)) \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\hat{Q}(t,u)\tilde{\varphi}(u)du-\frac{\mu_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{\psi}(u)du}{u-t}-\frac{\mu_1}{\pi}\int_{-1}^{1}\hat{K}(u-t)\tilde{\psi}(u)du+ \quad (t\in(-1,1)) \\ +\dfrac{\delta-\gamma}{4\bar{h}_1}\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{sign}(u-t)\tilde{\psi}(u)du=\frac{P_1^{(0)}+P_2^{(0)}}{2\bar{h}_1}+\frac{\delta-\gamma}{4\bar{h}_1}\int_{-1}^{1}\mathrm{sign}(u-t)\tilde{T}_1(u)du. \end{cases} \tag{23}$$

где

$$\tilde{\varphi}(t)=\varphi\left(at\right);\quad \tilde{\psi}(t)=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\psi\left(at\right);\ \tau_0(t)=\frac{1}{G_{+}+G_{-}}\tau\left(at\right);\quad (-1<t<1)$$

$$\tilde{K}(u-t)=\int_0^\infty\frac{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})[1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{-})]-[1-\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})]}{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{-})+1}\sin\lambda(u-t)d\lambda;$$

$$\tilde{Q}(t,u)=\frac{\rho_1}{2}\int_0^\infty\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\lambda\bar{h}_{+}\right)\left[\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{-})+1\right]}\cos\lambda\left(\rho_1u-t+\rho_2\right)d\lambda;$$

$$\hat{Q}(t,u)=\int_0^\infty\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\lambda\bar{h}_{+}\right)\left[\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{-})+1\right]}\cos\lambda\left(u-\rho_1t-\rho_2\right)d\lambda;$$

$$\hat{K}(u-t)=\int_0^\infty\frac{\left(1-\mathrm{th}\left(\lambda\bar{h}_{-}\right)\right)[\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})-1)]}{\mu\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{+})\,\mathrm{th}(\lambda\bar{h}_{-})+1}\sin\lambda(u-t)d\lambda;$$

а

$$\mu=\frac{G_{+}}{G_{-}};\ \mu_1=\frac{G_1}{G_{+}};\ \rho=\frac{\delta-\gamma}{4\bar{h}_1};\ \rho_1=\frac{\delta-\gamma}{2};\ \varepsilon=\frac{\delta+\gamma}{2},$$

Далее, как и в общем случае, из системы (23) и условий на щели $(-a,a)$ и стрингере (c,d), из (9) и (13) будем иметь СЛАУ:

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\dfrac{1}{u_m-t_r}-\tilde K(u_m-t_r)\right]x(u_m)-\dfrac{\mu_1\left(\mu+1\right)}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\tilde Q(t_r,u_m)y(u_m)= \\
\qquad\qquad =-\dfrac{(\mu+1)^2}{\mu}\tau_0(t_r); \quad (r=\overline{1,M-1}) \\
\sum\limits_{m=1}^{M}x(u_m)=0; \\
\dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\hat Q(t_r,u_m)x(u_m)+\dfrac{1}{M}\sum\limits_{m=1}^{M}\left[\dfrac{\mu_1}{u_m-t_r}+\mu_1\hat K(u_m-t_r)-\right. \quad (r=\overline{1,M-1}) \\
\left.-\dfrac{\pi\rho}{M}\operatorname{sign}(u_m-t_r)\right]y(u_m)=\dfrac{P_1^{(0)}+P_2^{(0)}}{2\bar h_1}+\rho\int\limits_{-1}^{1}\operatorname{sign}(u-t)\tilde T_1(u)du; \\
\dfrac{\pi}{M}\sum\limits_{n=1}^{M}y(u_n)=P_0+T_0.
\end{cases}
\qquad (24)
$$

где u_m и t_r соответствующие чебышевские узлы из (19). В этом случае формулы (21) для безразмерных КИН в точках $-a$ и a преобразуются к виду:

$$
K_{III}^{(0)}(-a)=\frac{1}{\mu+1}x(-1); \quad K_{III}^{(0)}(a)=-\frac{1}{\mu+1}x(1). \qquad (25)
$$

Далее, для простоты примем $\tau_0(t)=0.01$ и $P_1^{(0)}\big/\bar h_1=P_2^{(0)}\big/\bar h_1=0.01$ $\tilde T_1(t)\equiv 0.01$. Тогда, после решения системы (24), при разных значениях параметров $\bar h_+,\bar h_-,\mu,\mu_1,\rho,\rho_1,\varepsilon$, находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (25) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (22).

Таблица 1. Значения КИН $K_{III}^{0}(\pm a)$ $(\mu=0.5,\mu_1=10,\bar h_+=5,\bar h_-=1,\rho=\rho_1=1)$

ε	-15	-10	-7	-4	-2	0
$K_{III}^{0}(-a)$	0.0282	0.0263	0.0232	0.0175	0.0141	0.0131
$K_{III}^{0}(a)$	0.0284	0.027	0.0245	0.0197	0.0156	0.0131

ε	2	4	7	10	15	18
$K_{III}^{0}(-a)$	0.01517	0.01927	0.02434	0.0269	0.0284	0.02865
$K_{III}^{0}(a)$	0.0137	0.0171	0.02291	0.0262	0.0282	0.02858

Вычисленные по формулам (25) значения КИН $K_{III}^{0}(-a)$ и $K_{III}^{0}(a)$ в зависимости от параметра ε $\left(\varepsilon\in\left[-15,18\right]\right)$ (при этом длина стрингера является постоянной) при фиксированных значениях параметров $\overline{h}_+, \overline{h}_-, \mu, \mu_1, \rho, \rho_1$ приведены в таблице 1. Следует отметить, что увеличение параметра ε можно интерпретировать как перемещение стрингера слева направо.

Значения КИН $K_{III}^0(-a)$, $K_{III}^0(a)$ имеют минимальное значение при $\varepsilon = 0, [c, d] = [-a, a]$, т.е. когда трещина и стрингер расположены одинаковы, притом оба значения КИН при возрастании параметра $\varepsilon < 0$ уменьшаются, и $K_{III}^0(-a)$ всегда меньше, чем $K_{III}^0(a)$, а при возрастании параметра $\varepsilon > 0$ значение КИН возрастают и $K_{III}^0(-a)$ всегда больше, чем $K_{III}^0(a)$.

Вычисленные по формуле (22) безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра ε и при фиксированных значениях $\mu = 0.5, \mu_1 = 10$, $\overline{h}_+ = 5, \overline{h}_- = 1, \rho = \rho_1 = 1$ графически изображены на рис. 1. По мере изменения $\varepsilon \to 0$ эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при $\varepsilon = 0$. На рис. 2 также изображены безразмерные раскрытия трещины $w_1(t)$ для различных значений параметра μ при фиксированных значениях $\mu_1 = 10, \overline{h}_+ = 5, \overline{h}_- = 1,$ $\rho = \rho_1 = 1, \varepsilon = 5$. В этом случае получается, что раскрытие трещины минимальное, когда полоса однородная.

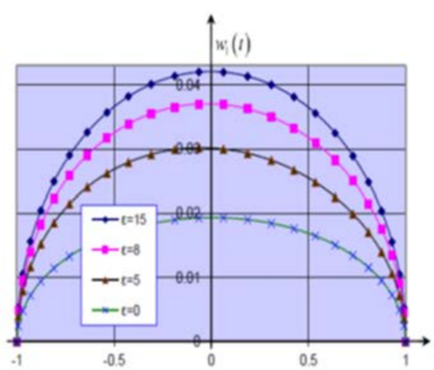


Рис. 1

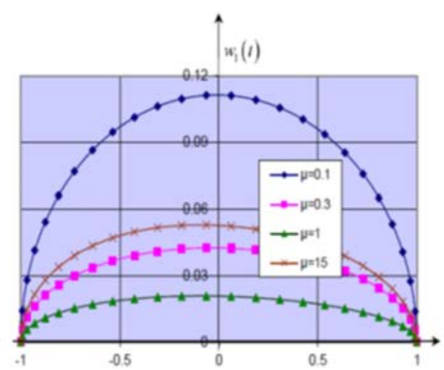


Рис. 2

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweister Verbindungen. – Ingr. Arch., 1932, Bd. 3, No 2, S. 123–129.
2. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, 640с.
3. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.-М.: Наука, 1982, 344с.

4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М: Наука, 1974, 456с.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983, 488с.
6. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies. LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany, 2011, 148p.
7. Grigoryan N.V., Mkrtchyan M.M. On the Interaction at Anti-Flat Deformation of Stress Concentrators of the Type of Cracks and Stringers with Regard to the Layer Manufactured from Miscellaneous Materials. Key Engineering Materials, 2019, v. 828, pp. 81-88.
8. Zhang B. et al. Stress intensity factors and plastic zones of stiffened panels with multiple collinear cracks. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2020, Т. 110, С. 102816.
9. Matur M. S. et al. Numerical Analysis of Flat Panel Composite Material for Two-Bay Crack Arrest Competency with Fractured Central Longeron. Journal of The Institution of Engineers (India), Series D, 2024, С. 1-12.
10. Мхитарян С.М. О двух смешанных задачах, связанных с вопросами взаимодействия концентраторов напряжений различных типов с массивными телами при антиплоской деформации. В.сб.: Механика деформируемого твердого тела, Ереван. Изд–во НАН Армении, 1993, Стр. 129–143.
11. Манукян Э.А., Мкртчян М.С. Об антиплоской задаче кусочно–однородного упругого слоя, содержащего на линии спая систему щелей и абсолютно жестких тонких включений. Известия НАН РА Механика, т.63, № 2, 2010, стр. 21-33.
12. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976, 443с.
13. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1973.
14. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. Quart. Appl. Math., vol XXXV, No1, pp. 173-185, 1977.
15. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.- Механика разрушения и прочность материалов. Спр. пособие под общей редакции В.В. Панасюка, т. 2, Киев: Наукова думка, 1988, 619с.

Сведения об авторах:
Мкртчян Мгер Мушегович, млад. науч. сотр. Института механики НАН РА,
E-mail: mmher628@gmail.com

Мкртчян Мушег Сережаевич, – к.ф.м.н., вед. науч.сотр. Института механики НАН РА, Тел.: +374 98 801956, E-mail: muscheg-mkrtchyan@rambler.ru

Поступила в редакцию 7 июня 2024г.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 539.3 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-42

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ШИРОКОЙ ПАНЕЛИ С ОДНИМ СВОБОДНЫМ КРАЕМ, НАГРУЖЕННОЙ ПО ДВУМ НАПРАВЛЕНИЯМ: СЖАТОЙ ПО СВЕРХЗВУКОВОМУ ПОТОКУ ГАЗА И РАСТЯНУТОЙ В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: достаточно широкая прямоугольная пластинка, полубесконечная пластина–полоса, сверхзвуковое обтекание, первоначальные сжимающие силы и силы растяжения, сосредоточенные инерционные массы и моменты, аэроупругая устойчивость, локализованная дивергенция, аналитическое решение

Martirosyan S.R.

On the dynamic stability of a sufficiently wide panel with a free edge, loaded in two directions: compressed in a supersonic gas flow and stretched in the perpendicular direction

Key words: sufficiently wide rectangular plate, semi-infinite plate-strip, initial compressive and tensile forces, concentrated inertial masses and moments, supersonic flow, aeroelastic stability, localized divergence, analytical solution method

In the article, in a linear formulation, we study the influence of the initial stressed state of a sufficiently wide rectangular elastic plate, loaded in two directions: compressed along the supersonic gas flow and stretched in the perpendicular direction, on the stability of the dynamic system “plate-flow” under the assumption that at the free edge plates there are concentrated inertial masses and moments. An analytical solution to the stability problem is found. The possibility of loss of system stability only in the form of localized divergence in the vicinity of the free edge is shown. An accurate assessment of the influence of the ratio of initial compressive and tensile forces on the stability threshold of the “plate-flow” system is given, with the aim of subsequent analysis of the possibility of controlling it.

Ս.Ռ.Մարտիրոսյան

Գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ նախնական սեղմված և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ մեկ ազատ եզրով բավականի լայն սալի դինամիկ կայունության մի խնդրի մասին

Հիմնաբառեր՝ բավականի լայն ուղղանկյուն սալ, կիսաանվերջ սալ–շերտ, սեղմող և ձգող ուժեր, գերձայնային շրջհոսում, աերոառաձգական կայունություն, կենտրոնացված իներցիոն զանգվածներ և մոմենտներ, տեղայնացված դիվերգենցիա, անալիտիկ լուծման եղանակ

Ուսումնասիրված է նախնական սեղմված գերձայնային գազի հոսքի ուղղությամբ և միաժամանակ ձգված ուղղահայաց ուղղությամբ լայն ուղղանկյուն սալի լարվածային վիճակի ազդեցությունը ՞սալ – հոսք՞ գծային դինամիկ համակարգի կայունության շեմի վրա, սալի ազատ եզրին կենտրոնացված իներցիոն զանգվածների և մոմենտների առկայությանբ: Ստացված է կայունության խնդրի անալիտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ համակարգը կորցնում է միայն ստատիկ կայունությունը՝ տեղայնացված դիվերգենցիայի տեսքով: Գտնված են կրիտիկական արագությունները:

В статье, в линейной постановке, исследуется влияние первоначального напряжённого состояния достаточно широкой прямоугольной упругой пластинки, нагруженной по двум направлениям: сжатой по сверхзвуковому потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости динамической системы «пластинка–поток» в предположении, что на свободном крае пластинки имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты. Найдено аналитическое решение задачи устойчивости. Показана возможность потери устойчивости системы только лишь в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки. Дана точная оценка влиянию соотношения первоначальных сжимающих и растягивающих усилий на порог устойчивости системы «пластинка–поток», с целью последующего анализа возможности управления им.

Введение. Теоретические исследования задач аэроупругой устойчивости позволяют выявить различные виды потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы, обусловленные характером деформаций, а также, позволяют дать оценку влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им [1–4].

В предлагаемой статье, являющейся продолжением работ [18, 19], исследуется влияние первоначального напряжённого состояния упругой достаточно широкой прямоугольной пластинки с одним свободным и с тремя шарнирно закреплёнными краями, нагруженной по двум направлениям:сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» при набегании сверхзвукового потока газа на её свободный край, на котором имеются сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости динамической системы «пластинка–поток». Получена формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

Исследована граница области устойчивости. Установлено, что невозмущённое состояние равновесия системы «пластинка–поток» при меньших значениях относительной толщины пластинки теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности её свободного края, подобно системе «полубесконечная пластина–полоса – поток»; а при больших значениях относительной толщины пластинки – устойчиво.

Найдены критические скорости локализованной дивергенции в предположении, что в момент «выпучивания» в пластинке возникают только напряжения изгиба. Показана существенная зависимость критической скорости локализованной дивергенции от первоначальных усилий, а также, от коэффициента Пуассона.

Дана точная оценка влиянию комбинированных нагрузок на порог устойчивости, с целью последующего анализа возможности управления им.

Результаты работы могут быть использованы при обработке данных экспериментальных исследований дивергенции и флаттера панелей обшивки сверхзвуковых летательных аппаратов на этапе проектирования и при эксплуатации.

1. Постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая достаточно широкая прямоугольная пластинка ($ab^{-1} \geq 2.9$), которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$ [19]. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа принимается плоским и потенциальным.

Пусть край пластинки $x=0$ – свободен, а края $x=a$, $y=0$ и $y=b$ – закреплены идеальными шарнирами. Вдоль свободного края $x=0$ приложены сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c, интенсивность которых на много превосходит интенсивность распределенной массы пластинки [2, 9, 10].

Будем полагать, что первоначально пластинка подвержена действию сжимающих $N_x = 2h\sigma_x$ и растягивающих $N_y = 2h\sigma_y$ сил, распределённых равномерно по кромкам пластинки $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ соответственно, являющимися результатом нагрева, или каких – либо других причин; усилия σ_x и σ_y предполагаются постоянными во всей срединной поверхности панели и неменяющимися с изменением прогиба $w = w(x, y, t)$ [1, 2,18, 19].

Прогиб пластинки $w = w(x, y, t)$ вызовет избыточное давление δp на верхнюю обтекаемую поверхность пластинки со стороны обтекающего потока газа, которое учитывается приближённой формулой «поршневой теории» $\delta p = -a_0\rho_0 V \dfrac{\partial w}{\partial x}$, где a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде, ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа [7, 8]. Будем полагать, что прогибы $w = w(x, y, t)$ малы относительно толщины пластинки $2h$ [1, 2].

Выясним условия, при которых возможна потеря устойчивости состояния невозмущённого равновесия динамической системы «пластинка–поток» в случае, в котором изгиб широкой прямоугольной пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками δp, сжимающими σ_x и σ_y растягивающими усилиями в срединной поверхности пластинки и сосредоточенными инерционными массами m_c и моментами I_c, приложенными вдоль её свободного края $x=0$, в предположении, что усилия σ_x и σ_y малы по сравнению с критическими значениями $(\sigma_x)_{cr.}$ и $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$, где $(\sigma_x)_{cr.}$ – критические значения сжимающих усилий, которые могут произвести «выпучивание» упругой поверхности пластинки в отсутствии обтекания [16, 17]; $\left(\sigma_y\right)_{pr.}$ – растягивающие усилия, начиная с которых имеет место явление потери устойчивости цилиндрической формы пластинки [11].

Тогда, дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний точек срединной поверхности прямоугольной пластинки около невозмущённой формы равновесия в рамках справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» в предположении малости интенсивности $m\partial^2 w/\partial t^2$ распределённой массы пластинки m в сравнении с интенсивностями $m_c\,\partial^2 w/\partial t^2$ и $I_c\,\partial^2 w/\partial t^2$, учитываемых в граничных условиях, будет описываться соотношением [1, 2, 18, 19]:

$$D\Delta^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_0\rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,,\ w = w\left(x, y, t\right); \tag{1.1}$$

$\Delta^2 w = \Delta(\Delta w)$, Δ – дифференциальный оператор Лапласа; D – цилиндрическая жёсткость.

Граничные условия, в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок пластинки, будут вида [1, 2, 9,18,19]:

$$D\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = I_c\,\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}\,, \tag{1.2}$$

$$D\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + N_x\frac{\partial w}{\partial x} = -m_c\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x = 0\,;$$

$$w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = a \text{ и } w = 0\,,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.3}$$

ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти критическую скорость V_{cr} – наименьшую скорость потока газа – в интервале сверхзвуковых и гиперзвуковых скоростей [1, 2]:

$$V \in (a_0 M_0, a_0 M_{2\cos m.})\,,\ M_0 = \sqrt{2}\,,\ M_{2\cos m.} \approx 33.85\,; \tag{1.4}$$

приводящую к потере устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» (1.1) – (1.3) в предположении:

$$\sigma_x < (\sigma_x)_{cr.}\,,\ \sigma_y < (\sigma_y)_{pr.} \tag{1.5}$$

Анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.3) сводится к исследованию дифференциального уравнения (1.1) с соответствующими краевыми условиями (1.2) и (1.3) для прогиба $w(x, y, t)$ в интервале (1.4) при условии (1.5).

Задачу устойчивости (1.1) – (1.5) будем исследовать в случае достаточно широких прямоугольных пластинок [19]:

$$\gamma = ab^{-1} \in \left[2.9;\infty\right), \tag{1.6}$$

γ – отношение ширины пластинки a (сторона пластинки по потоку) к её длине b.

Согласно обозначению (1.6) значению $\gamma = \infty$ соответствует полубесконечная пластина–полоса, как один из предельных случаев прямоугольной пластинки.

Заметим, что в работе [15] получено аналитическое решение задачи (1.1) – (1.3) для всех значений $\gamma \in \left[0, \infty\right]$ в отсутствии первоначальных усилий в срединной поверхности пластинки $\left(\sigma_x = \sigma_y = 0\right)$. В работе [17] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для всех $\gamma \in \left[0, \infty\right]$ в статической постановке $\left(m_c = 0, I_c = 0\right)$ по методу Эйлера. Показано, что система «пластинка-поток» теряет статическую устойчивость или в виде эйлеровой дивергенции панели, или в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, в зависимости от её существенных параметров. Исследована граница перехода из области эйлеровой дивергенции панели в область локализованной дивергенции. Найдены критические скорости дивергенции панели и локализованной дивергенции. В работах [18] и [19] получено решение задачи (1.1) – (1.5) для $\gamma \le 0.193$ и $\gamma \in \left(0.193; 2.9\right)$ соответственно. В работе [20] исследована исходная задача устойчивости, при условии наличия первоначальных сил растяжения $\left(-N_x\right)$, направленных по потоку газа. Показано, что невозмущённое состояние равновесия пластинки теряет устойчивость только в виде локализованной дивергенции, подобно полубесконечной пластине–полосе [5, 6, 14]. При этом растягивающие усилия σ_x приводят к существенному повышению устойчивости системы.

2. Общее решение задачи устойчивости (1.1) – (1.5). Сведём задачу устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы (1.1) – (1.5) к задаче на собственные значения λ для обыкновенного дифференциального уравнения. Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) и (1.3), будем искать в виде гармонических колебаний:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\mu_n r x + \lambda t) \cdot \sin(\mu_n y)\,,\ \mu_n = \pi n b^{-1}, \tag{2.1}$$

C_n – произвольные постоянные; n – число полуволн вдоль стороны b пластинки.

Невозмущённое состояние равновесия системы (1.1) – (1.3) асимптотически устойчиво, если все собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda < 0$), и неустойчиво, если хотя бы одно собственное значение λ находится в правой части комплексной плоскости ($\operatorname{Re}\lambda > 0$) [13]. Критическая скорость V_{cr} потока газа, характеризующая переход от устойчивости к неустойчивости, определяется условием равенства нулю вещественной части одного или нескольких собственных значений ($\operatorname{Re}\lambda = 0$) [1, 2, 13].

Подставляя выражение (2.1) в дифференциальное уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение системы «пластинка–поток» в виде [17– 19]:

$$r^4 - 2 \cdot (1 - \beta_x^2) \cdot r^2 + \alpha_n^3 \cdot r + (1 + \beta_y^2) = 0\,, \tag{2.2}$$

где α_n^3 – параметр, характеризующий неконсервативную составляющую нагрузки:

$$\alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \mu_n^{-3} \in (a_0^2 \rho_0 M_0 D^{-1} \mu_n^{-3},\ a_0^2 \rho_0 M_{2\cos m.} D^{-1} \mu_n^{-3})\,; \tag{2.3}$$

β_x^2 и β_y^2 – коэффициенты, характеризующие консервативную составляющую нагрузки:

$$\beta_x^2 = 1/2 N_x\, D^{-1} \mu_n^{-2} = h \sigma_x D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_x^2)_{cr}\,,\ (\beta_x^2)_{cr} = h(\sigma_x)_{cr.} D^{-1} \mu_n^{-2}\,; \text{ (табл. 1)} \tag{2.4}$$

$$\beta_y^2 = N_y D^{-1} \mu_n^{-2} = 2h \sigma_y D^{-1} \mu_n^{-2} < (\beta_y^2)_{pr.}\,,\ (\beta_y^2)_{pr.} = 2h(\sigma_y)_{pr.} D^{-1} \mu_n^{-2}\,;$$

согласно условиям (1.4) , (1.5).

Корни уравнения (2.2) в соответствии с известным решением Феррари определяются выражениями [17– 19]:

$$r_{1,2} = -0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm \sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} - 0.5(q-1+\beta_x^2)}\,,\quad r_1<0\,,\quad r_2<0\,; \quad (2.5)$$

$$r_{3,4} = 0.5\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)} \pm i\sqrt{\sqrt{q^2-1-\beta_y^2} + 0.5(q-1+\beta_x^2)} \in W\,. \quad (2.6)$$

Здесь, $q = q(V) \in R$ – параметр скорости V потока газа – единственный действительный корень кубического уравнения [18, 19}:

$$8\cdot(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2) - \alpha_n^6 = 0\,. \quad (2.7)$$

С помощью графоаналитических методов исследования характеристического уравнения (2.2), в силу условия (1.4), можно показать, что [18, 19]

$$q = q(V) \in \left(q_0,\ q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right) \subseteq \left(q\left(a_0 M_0\right), q\left(a_0 M_{2\cos m.}\right)\right), \quad (2.8)$$

$$q_0 = \left((\beta_x^2-1) + 2\sqrt{(\beta_x^2-1)^2 + 3(1+\beta_y^2)}\right)\Big/3 \text{ (табл. 2).} \quad (2.9)$$

При значениях (2.9) характеристическое уравнение (2.2) имеет два отрицательных корня $r_1<0$, $r_2<0$ и пару $r_{3,4}\in W$ комплексно сопряжённых корней с положительной вещественной частью [17 – 19].

Значения $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ при $n=1$, $\beta_y^2=0$, $m_c=0, I_c=0$. Таблица 1.

γ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
1.80	1.3670	1.2180	1.1543	1.0541	0.8747
1.96	1.3671	1.2188	1.1550	1.0547	0.8749
$\geq$ 2.90	1.3672	1.2189	1.1550	1.0547	0.8750

Значения $q_0 = q_0\left(\beta_x^2,\beta_y^2\right)$ при $n=1$. Таблица 2.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	1.000	1.001	1.005	1.012	1.022	1.035	1.052
0.5	1.230	1.236	1.245	1.256	1.270	1.286	1.305
1.0	1.431	1.440	1.451	1.465	1.481	1.500	1.521
2.0	1.552	1.788	1.803	1.820	1.839	1.861	1.884
3.0	1.878	2.086	2.103	2.123	2.144	2.167	2.191
5.0	2.415	2.591	2.611	2.633	2.656	2.681	2.708

В таблице 1 приведены некоторые критические значения $(\beta_x^2)_{cr} = (\beta_x^2)_{cr}\left(n,\gamma,\nu\right)$ коэффициента напряжения β_x^2– решения дисперсионного уравнения исходной задачи устойчивости в отсутствии обтекания для $\gamma \in \left[2.9,\infty\right)$ и $\gamma=\infty$ [16, 17]:

$$F_1\left(n,\gamma,\nu,\beta_x^2\right)=\sqrt{0.5\beta_x^2}\left(4-2\beta_x^2-\left(1+\nu\right)^2\right)sh\left(2\pi n\gamma\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\right)- \qquad (2.10)$$

$$-\sqrt{1-0.5\beta_x^2}\left(2\beta_x^2-\left(1-\nu\right)^2\right)\sin\left(2\pi n\gamma\sqrt{0.5\beta_x^2}\right)=0\,,\ \beta_x^2\in\left(0,2\right);$$

найденные с точностью до порядка 10^{-4} при $n=1$, $\beta_y^2=0$ и $m_c=0, I_c=0$.

Из данных таблицы 2 очевидно, что $q_0=q_0\left(\beta_x^2,\beta_y^2\right)$ – монотонно возрастающая функция от коэффициентов напряжений β_x^2 и β_y^2, определяемых выражениями (2.4).

Таблица 3.

β_x^2	0	0.1	0.2	≥ 0.3
γ_{gr}	1.96	2.4	2.8	2.9

Как показано в работах [17 и 19], начиная с значения $\gamma_{gr}=\gamma_{gr}\left(\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$(табл.3), зависящего от параметра β_y^2 и коэффициента Пуассона ν исчезающе мало, для всех $\gamma\in\left[\gamma_{gr.},\infty\right)$, в частности, для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)\subset\left[\gamma_{gr.},\infty\right)$, зависящих от параметров β_x^2,β_y^2 и ν исчезающе мало, невозмущённое состояние равновесия динамической системы теряет только статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x=0$ пластинки, подобно системе с полубесконечной пластиной–полосой $\left(\gamma=\infty\right)$: эйлерова и неэйлерова дивергенция панели, а также, панельный флаттер отсутствуют.

Из данных таблицы 3 очевидно, что граница $\gamma_{gr}=\gamma_{gr}\left(\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)\approx\gamma_{gr}\left(\beta_x^2\right)$ между подобластями эйлеровой дивергенции панели и локализованной дивергенции, с ростом β_x^2 смещается в направлении больших значений параметра γ, что приводит к сужению подобласти локализованной дивергенции – к снижению устойчивости системы. А, начиная с значения $\gamma=\gamma_{gr.}\approx 2.9$, можно принять её неподвижной: для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)$ невозмущённое состояние равновесия системы теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки при всех значениях параметров β_x^2,β_y^2 и ν.

А тогда, в соответствии с условием затухания колебаний на краю $x=a$ пластинки, в силу схожести поведения возмущённого движения системы «пластинка–поток» для всех $\gamma\in\left[2.9,\infty\right)$ и $\gamma=\infty$, общее решение (2.1) уравнения (1.1) запишется в виде двойного ряда [5, 6 , 14, 17, 19]:

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}C_{nk}\cdot\exp(\mu_n r_k x+\lambda t)\cdot\sin(\mu_n y)\,,\ \ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]; \qquad (2.11)$$

где r_k, $k=1,2$ определены выражениями (2.5).

Подставляя выражение (2.3) в кубическое уравнение (2.7), после простых преобразований получаем формулу зависимости скорости потока газа V от «существенных» параметров системы «пластинка–поток»:

$$V(q)=2\sqrt{2(q+1-\beta_x^2)(q^2-1-\beta_y^2)}\cdot\pi^3 n^3 D(a_0\rho_0 b^3)^{-1},\gamma\in\left[2.9,\infty\right]; \qquad (2.12)$$

позволяющую по известному значению параметра $q=q\left(n,\gamma,\beta_x^2,\beta_y^2,\nu\right)$ определить приведённую скорость потока газа $V\left(q\right)\cdot D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$.

Так как невозмущённое состояние равновесия системы в случае достаточно широких пластинок $\gamma\in\left[2.9,\infty\right]$ устойчиво вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) [16, 17, 19], то очевидно, что

$$V\left(q\right)\in\left(V\left(q_0\right),\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right)\subset\left(a_0 M_0\,,\, a_0\, M_{2cos\,m.}\right). \qquad (2.13)$$

Согласно формуле цилиндрической жёсткости $D=E\cdot(2h)^3\Big/\left(12\left(1-\nu^2\right)\right)$ отсюда следует [16–19]:

$$V\left(q\right)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)\in(V(q_0)D^{-1}(a_0\rho_0 b^3),a_0 M_{2\cos m}\Psi)\subset\left(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m.}\right)\Psi\,,$$

$$\Psi=12(1-\nu^2)a_0\rho_0 E^{-1}(2hb^{-1})^{-3},\ \gamma\in\left[2.9,\infty\right]. \qquad (2.14)$$

Подставляя значения коэффициента Пуассона ν и относительной толщины пластинки $2hb^{-1}\in\left[0.006,\ 0.015\right]$ в выражения (2.14), получаем интервалы $d\left(\nu,2hb^{-1}\right)=(a_0 M_0,\ a_0 M_{2\cos m})\Psi$ допустимых значений приведённой скорости потока $V\left(q\right)D^{-1}\left(a_0\rho_0 b^3\right)$, представленные для стальных пластинок в таблице 4.

Таблица 4.

$2hb^{-1}$ \ ν	0.125	0.25	0.3	0.375	0.5
0.006	(54.8,1311.7)	(52.0,1245.2)	(50.5,1209.0)	(47.7,1141.6)	(41.6,996.3)
0.007	(34.5, 811.1)	(32.7, 769.4)	(32.0, 753.4)	(30.0, 705.3)	(26.2,615.5)
0.008	(23.1, 544.3)	(22.0, 516.4)	(21.5, 505.6)	(20.1, 473.3)	(17.6,413.1)
0.009	(16.2, 381.8)	(15.4, 362.1)	(15.1, 354.6)	(14.1, 332.0)	(12.3, 289.7)
0.010	(11.8, 283.5)	(11.2, 269.1)	(10.9, 261.3)	(10.3, 246.7)	(9.0, 215.3)
0.011	(8.9, 209.4)	(8.4, 198.7)	(8.1, 190.4)	(7.74, 182.1)	(6.75,158.9)
0.012	(6.85, 164.0)	(6.5, 155.7)	(6.3, 151.2)	(5.96, 142.7)	(5.2, 124.6)
0.013	(5.39, 126.9)	(5.11,120.34)	(5.0,117.84)	(4.69,110.32)	(4.09, 96.3)
0.014	(4.3, 101.5)	(4.09, 96.24)	(4.0, 94.24)	(3.75, 88.22)	(3.27, 77.0)
0.015	(3.5, 84.04)	(3.33, 79.73)	(3.23,77.33)	(3.05, 73.10)	(2.67, 63.81)

3. Достаточный признак потери устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) для $\gamma \in [2.9, \infty]$.

Подставляя общее решение дифференциального уравнения (1.1) в виде (2.11) в граничные условия (1.2), получаем однородную систему алгебраических уравнений второго порядка относительно произвольных постоянных C_{nk}. Приравненный нулю определитель этой системы уравнений приводит к характеристическому определителю – биквадратному уравнению относительно собственного значения λ:

$$\tilde{F}(\lambda) = \chi_n \delta_n \tilde{A}_0 \lambda^4 + \left(\chi_n \tilde{A}_1 + \delta_n \tilde{A}_2\right)\lambda^2 + \tilde{A}_3 = 0 \ , \ \ \gamma = \infty \, , \tag{3.1}$$

$$\delta_n = m_c D^{-1} b^3 (\pi n)^{-3} \, , \ \ \chi_n = I_c D^{-1} b (\pi n)^{-1} , \ \delta_n > 0 \, , \ \chi_n > 0 \, ; \tag{3.2}$$

δ_n и χ_n – приведённые значения, соответственно, сосредоточенных инерционных масс m_c и моментов поворота I_c, приложенных вдоль свободного края пластинки;

$$\tilde{A}_0 = 1 \, , \ \tilde{A}_1 = \sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)} \cdot \left(q - \sqrt{q^2 - 1 - \beta_y^2}\right), \ \tilde{A}_2 = \sqrt{2\left(q+1-\beta_x^2\right)} \ , \tag{3.3}$$

$$\tilde{A}_3 = \left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2\left(q+1\right)\nu - \left(1-\nu\right)^2 - 2\beta_x^2\left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right). \tag{3.4}$$

Отсюда очевидно, что

$$\tilde{A}_0 > 0, \tilde{A}_1 > 0, \tilde{A}_2 > 0 \tag{3.5}$$

при всех $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right)$ (табл. 1), $\beta_y^2 < \left(\beta_y^2\right)_{pr.}$, $q \in \left(q_{0,} \ q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ (табл. 2).

Вводя обозначение

$$k_n = \chi_n \cdot \delta_n^{-1} = I_c \left(\pi n\right)^2 \cdot \left(m_c b^2\right)^{-1} , \ k_n > 0 \, , \tag{3.6}$$

характеристический определитель (3.1), в соответствии с условиями (3.2) и (3.5), перепишется в виде

$$\lambda^4 + (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\chi_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \lambda^2 + \chi_n^{-1} \delta_n^{-1} \tilde{A}_0^{-1} \tilde{A}_3 = 0 \, , \ (k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) > 0 \, . \tag{3.7}$$

Легко показать, что дискриминант уравнения (3.7)

$$\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}\left(q, n, \nu, \beta_x^2, k_n\right) = \left(k_n \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\right)^2 - 4 k_n \tilde{A}_0 \tilde{A}_3 > 0 \tag{3.8}$$

при всех $q \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$, $\beta_x^2 \in \left[0, \left(\beta_x^2\right)_{cr}\right), n, \nu$ и $k_n > 0$.

В самом деле, подставляя в формулу (3.8) выражения (3.3) и (3.4), после несложных преобразований получаем

$$\tilde{\Delta} = 2\left(q+1-\beta_x^2\right)\left(k_n\left(q - \sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right) - 1\right)^2 + 4k_n\left(2\left(q+1\right)\nu + \left(1-\nu\right)^2\right) > 0 \, .$$

Соответственно, для всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ анализ устойчивости невозмущённого состояния равновесия динамической системы «пластинка–поток» будет сводиться к исследованию поведения корней λ_k характеристического определителя (3.7) при условии (3.8), определяющих собственные движения системы в пространстве «существенных» параметров $\Im = \left\{ q(V), n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2, k_n \right\}$. Значения остальных параметров системы – «несущественных» – принимаются фиксированными.

4. Разбиение пространства параметров системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Здесь, также, как и в работах [18 и 19], введём в рассмотрение в пространстве параметров $\Im$ системы «пластинка–поток» область устойчивости $\Im_0\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 > 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$ и области неустойчивости: $\Im_1\left(\tilde{A}_3 < 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$, $\Im_2\left(k_n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < 0,\ \tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} > 0\right)$ и $\Im_3\left(\tilde{A}_3 > 0,\ \tilde{\Delta} < 0\right)$.

где $\tilde{A}_i$, i =1,2,3, k_n и $\tilde{\Delta}$ – определены выражениями (3.5), (3.6) и (3.8).

Отсюда очевидно, что границей области устойчивости $\Im_0$ системы для всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ является гиперповерхность $\tilde{A}_3 = 0$, которая, в соответствии с выражением (3.4), описывается соотношением

$$\left(q+1-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right)^2 - 2(q+1)\nu - (1-\nu)^2 - 2\beta_x^2\left(q-\sqrt{q^2-1-\beta_y^2}\right) = 0. \quad (4.1)$$

На гиперповерхности (4.1) определитель (3.7) имеет один нулевой корень $\lambda_0 = 0$ кратности 2: уравнение (4.1), определяет границу «апериодической устойчивости», при переходе через которую невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) при скоростях потока газа $V \geq V_{locdiv} = V\left(q_{locdiv}\right)$ для всех $\gamma \in [2.9, \infty]$ теряет устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

Критические скорости $V_{loc.div.} = V_{loc.div.}\left(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2\right)$ потока газа разграничивают область устойчивости $\Im_0$ и область локализованной дивергенции $\Im_{locdiv}$ [19]. При скоростях $V \geq V_{loc.div}$ потока происходит «мягкий переход» через точку $\lambda_0 = 0$ в правую часть комплексной плоскости собственных значений λ_k, вызывающий плавное изменение характера невозмущённого состояния равновесия системы от устойчивости к статической неустойчивости в виде локализованной дивергенции: прогибы пластинки локализованы в окрестности её свободного края $x = 0$. Граница «апериодической устойчивости» (4.1) является «безопасной» в смысле Н.Н. Баутина [12]: малое превышение критической скорости локализованной дивергенции соответствует малым дивергентным деформациям, локализованным в окрестности свободного края $x = 0$ пластинки.

А также, из уравнения (4.1) очевидно, что его решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ не зависит от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$. Соответственно, приведённые значения критической скорости локализованной дивергенции $V_{locdiv.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, определяемые подстановкой единственного корня $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.1) в формулу (2.12), также не зависят от $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$, а зависят лишь от параметров n, ν, β_x^2 и β_y^2. Из независимости функции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ от параметра $k_n = \chi_n \delta_n^{-1}$ следует, что коэффициенты χ_n и δ_n, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты поворота I_c и массы m_c соответственно, влияют лишь только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [15, 20].

Следует отметить, что уравнение (4.1) тождественно дисперсионному уравнению, полученному в работе [17] при исследовании исходной задачи в статической постановке по методу Эйлера.

Таким образом, невозмущённое состояние равновесия динамической системы (1.1) – (1.5) в случае достаточно широких прямоугольных пластинок $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$ теряет только лишь статическую устойчивость в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, в отличие от удлинённых прямоугольных пластинок [18] и пластинок умеренных размеров [19].

5. Численные результаты. В данной работе с помощью методов графо–аналитического и численного анализа строились семейства кривых $\{q(n, \nu, \beta_x^2, \beta_y^2)\} \in \mathfrak{I}$, параметризованных в пространстве $\mathfrak{I}$ надлежащим образом.

В этом случае так же, как и в работах [14, 15, 20], критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.}$ является возрастающей функцией от числа полуволн n: её наименьшему значению соответствует $n = 1$.

Результаты численных исследований показали, что невозмущённое состояние равновесия системы является устойчивым вблизи $a_0\sqrt{2}$ – начала интервала сверхзвуковых скоростей (1.4) при всех допустимых значениях её «существенных» параметров, в частности, для стальных пластинок относительной толщины $2h^{-1}b \in \left(0.006,\ 0.015\right]$.

Подставляя решение $q_{loc.div.} \in \left(q_0, q\left(a_0 M_{2\cos m}\right)\right)$ уравнения (4.1) в формулу (2.12), получаем значения приведённой критической скорости локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$, представленные для некоторых допустимых значений параметров системы β_x^2, β_y^2 и ν в таблице 5 при $n = 1$.

Из данных таблицы 5 следует, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции $V_{loc.div.} D^{-1}\left(a_0 \rho_0 b^3\right)$ является монотонно убывающей функцией от коэффициента напряжения β_x^2 и от коэффициента Пуассона ν, а от β_y^2 – возрастающей функцией: на промежутке $\beta_x^2 \in \left[0, 0.6\right]$ убывает, примерно, в 1.6

– 3.3 раза, а в пластинах из материалов с большим значением ν – примерно, в 3 – 6.4 раза; на промежутке $\beta_y^2 \in [0,5]$ возрастает, примерно, 3.9 – 9.5 раз.

Значения $V_{locdiv} D^{-1}(a_0 \rho_0 b^3)$ при $n = 1$, $\nu = 0.125; 0.25; 0.3; 0.375; 0.5.$ Таблица 5.

β_y^2 \ β_x^2	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0.0	296.256 169.912 143.922 114.697 79.677	272.431 151.675 130.123 103.307 70.235	248.446 137.923 117.083 91.706 60.772	223.925 124.337 103.705 80.068 50.813	199.756 108.793 90.398 68.296 42.075	175.549 94.415 77.218 57.271 32.826	150.734 80.069 64.299 46.075 –
0.5	398.015 230.546 196.570 157.617 113.240	367.372 211.702 178.425 143.722 117.821	336.738 192.420 162.591 129.176 89.528	304.434 173.603 145.685 114.981 77.348	274.533 154.319 129.062 99.887 66.314	243.736 135.202 112.042 86.143 54.767	212.339 116.170 95.770 71.524 43.026
1.0	489.147 288.543 246.022 199.402 146.541	455.001 264.696 225.670 182.385 131.947	418.960 241.160 206.007 165.194 116.508	381.167 219.110 185.783 148.036 103.911	343.575 197'308 165.935 130.841 89.534	307.970 174.524 145.413 114.576 76.244	272.550 151.879 126.845 98.347 63.214
1.5	582.775 342.934 293.345 239.628 177.343	541.211 316.504 270.624 220.182 161.324	497.766 290.408 247.364 200.840 145.803	456.987 263.380 224.308 180.764 129.540	413.415 239.143 202.433 161.750 113.598	372.579 212.666 179.901 142.930 98.516	330.113 186.371 157.901 123.338 83.191
2.0	668.793 394.762 339.548 278.047 206.721	622.466 365.817 313.698 256.166 190.144	575.582 336.706 288.367 234.680 172.345	528.761 308.465 261.422 213.005 154.406	481.255 279.508 238.092 191.905 137.150	434.194 251.281 213.056 170.480 120.187	382.745 222.919 188.340 149.446 103.379
3.0	837.017 496.528 428.478 351.735 267.045	780.495 461.219 397.956 327.227 246.461	724.155 427.456 367.735 301.447 225.550	667.784 393.811 337.790 275.789 204.921	610.560 359.168 312.625 250.200 184.312	553.060 325.977 278.578 226.058 164.136	498.919 292.805 249.186 200.955 144.216
5.0	1149.753 689.702 596.008 495.494 382.409	1077.651 645.346 557.678 463.859 355.484	1005.085 602.115 521.240 430.893 328.580	932.786 557.867 482.099 398.730 302.947	860.492 515.594 444.800 367.017 277.896	787.959 472.275 407.779 335.080 252.023	716.482 429.366 370.374 303.456 226.543

При этом, «падение» критического значения коэффициента напряжения $\left(\beta_x^2\right)_{cr}$ вследствие обтекания равно, примерно, 1.6 – 2 раза (табл. 1 и 5): с ростом β_y^2 влияние параметра β_x^2 ослабевает. А из сопоставления данных таблиц 4 и 5 следует, что невозмущённое состояние равновесия системы в случае пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$ – устойчиво при всех допустимых значениях остальных параметров.

Соответственно, цепочки переходов состояний системы будут вида [18, 19]:

$\Im_0 \xrightarrow{V_{loc.div}} \Im_{locdiv}$, когда $\beta_y^2 < 1.5$ для всех $2h^{-1}b$ и $\beta_y^2 \geq 1.5$, $2h^{-1}b < 0.012$; (5.1)

$\Im_0$ для $2h^{-1}b \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$.

Для всех $\gamma \geq 2.9$ при определённом соотношении сжимающих сил N_x и сил растяжения N_y, имеет место эффект их «взаимокомпенсации»: $V_{locdiv}D^{-1}(a_0\rho_0 b^3)$ одна и та же, что и при их отсутствии ($N_x = N_y$ =0) (табл.6).

Таблица 6.

β_{xc}^2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
β_{yc}^2	0.063	0.134	0.210	0.301	0.380	0.476

При $\beta_x^2 > \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 < \beta_{yc}^2$ преимущественное влияние оказывают сжимающие силы N_x, с ростом которых устойчивость системы понижается, и наоборот, при $\beta_x^2 < \beta_{xc}^2$ и $\beta_y^2 > \beta_{yc}^2$ – силы растяжения N_y, приводящие к повышению устойчивости системы.

Из анализа данных таблиц 5 и 6 легко показать, что начиная с $\beta_y^2 \approx 1.26$ имеет место повышение устойчивости системы примерно в 1.1 – 4.14 раза, в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями ($N_x = N_y = 0$).

Заметим, что первоначальные силы растяжения $\left(-N_x\right)$ достаточно широкой пластинки, направленные по потоку газа, приводят к повышению устойчивости невозмущённого состояния равновесия системы примерно в 1.75 – 3 раза в сравнении с широкой панелью с ненагруженными краями [20].

6. Основные результаты и заключение.

В работе исследуется влияние первоначальных сжимающих сил N_x и сил растяжения N_y, направленных, соответственно, по сверхзвуковому потоку газа и в перпендикулярном направлении, на порог устойчивости невозмущённого состояния равновесия линейной динамической системы «пластинка–поток» на примере достаточно широких прямоугольных пластинок и «полубесконечной пластины–полосы» $\gamma \in \left[2.9, \infty\right]$, в предположении наличия сосредоточенных инерционных масс и моментов поворота на их свободном краю, с целью последующего анализа возможности управления им.

Найдено аналитическое решение задачи устойчивости системы «пластинка–поток».

Получены явное выражение дисперсионного уравнения, характеризующего достаточные признаки потери устойчивости и формула, связывающая характеристики собственных колебаний пластинки со скоростью обтекающего потока газа.

С помощью графоаналитических и численных методов анализа произведено разбиение многопараметрического пространства состояний системы «пластинка–поток» на области устойчивости и неустойчивости. Показано, что граница области устойчивости определяется только гиперповерхностью, характеризующей потерю «апериодической устойчивости» в виде локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки, что свидетельствует о «безопасности» границы в смысле Баутина Н.Н. [12]. Отсюда, очевидно, следует, что в исходной задаче, как и в [15, 17, 20], критическая скорость локализованной дивергенции не зависит от параметра отношения коэффициентов, характеризующих сосредоточенные инерционные массы m_c и моменты поворота I_c. Сосредоточенные инерционные массы и моменты поворота влияют только на показатель экспоненты собственного движения пластинки, которым определяется интенсивность нарастания «выпучивания» в окрестности её свободного края $x = 0$ [15, 20].

Найдены критические скорости локализованной дивергенции, в предположении, что в пластинке в момент «выпучивания» возникают только напряжения изгиба. Показано, что приведённая критическая скорость локализованной дивергенции является монотонно убывающей функцией от коэффициента сжимающих сил β_x^2 и от коэффициента Пуассона ν, а от коэффициента сил растяжения β_y^2 – монотонно возрастающей функцией: силы сжатия N_x приводят к понижению устойчивости системы, а силы растяжения N_y – наоборот, к повышению устойчивости системы. Определены взаимокомпенсирующие значения коэффициентов напряжений β_x^2 и β_y^2, при которых соответствующие первоначальные силы N_x и N_y не влияют на порог устойчивости системы.

Установлено, что начиная с значения $\beta_y^2 \approx 1.26$ силы растяжения N_y полностью компенсируют влияние сжимающих сил N_x при всех значениях коэффициента Пуассона ν: имеет место повышение устойчивости системы. А также, для всех достаточно широких стальных пластинок относительной толщины $2hb^{-1} \geq 0.012$, когда $\beta_y^2 \geq 1.5$, невозмущённое состояние равновесия системы устойчиво во всём интервале сверхзвуковых скоростей.

Как оказалось, первоначальные силы N_x, направленные по потоку, существенно влияют не только на величину критической скорости, но и на границу области устойчивости, в отличие от сил N_y, направленных в перпендикулярном направлении к скорости потока газа, оказывающим влияние только на величину критической скорости.

Сравнительный анализ результатов данной работы и работ [15, 17, 20] позволяет установить границы применимости метода Эйлера, наряду с применением динамического метода. Сопоставление результатов решения задачи устойчивости динамических систем «пластинка–поток» в случае достаточно широких пластинок и полубесконечной пластины–полосы, полученных применением обоих методов, указывает на их хорошее совпадение. Поэтому, при решении подобных задач применение метода Эйлера, как наиболее удобного и простого, вполне оправдано.

Изложенный в данной работе графоаналитический метод исследования может быть применён для получения аналитического решения широкого класса задач устойчивости упругих систем, в частности, при комбинированном нагружении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. – М.: Физматгиз. 1963. 880 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Наука. 1961. 329 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. – М.: Наука. 2006. 247 с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек // Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел.– М: Наука. 1978. Т. 11. С. 67–122.
5. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «релеевского» типа // Акустический журнал. 1960. Т. 6. . № 1. С. 124–126.
6. Ишлинский А.Ю. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 38– 46.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях // ПММ. 1956. Т. 20. № 6. С. 733–755.
8. Ashley G H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // J.Aeronaut. Sci. 1956. Vol. 23. N12. P. 1109–1118.
9. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой // Изв. НАН Армении, Механика. 1985. Т.38. № 5. С. 33–44.
10. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука. 1979. 384 с.
11. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.– М.: ИЛ. 1954. 647 с.
12. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – М.: Наука. 1984. 176 с.
13. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.– Л.: Гостехиздат. 1950. 471 с.
14. *Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.* The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip, Streamlined by Supersonic Gas Flow. // Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т. 65(1). С. 29–34.
15. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О флаттере упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2014, т. 67, № 2, с. 12 - 42.

16. Белубекян М.В., Мартиросян С.Р. О сверхзвуковой дивергенции панели, сжатой по направлению потока газа, набегающим на её свободный край // Изв. НАН Армении, Механика. 2018, т.71, № 4, с.44–68.
17. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковая дивергенция панели с одним свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в направлении, перпендикулярном скорости потока газа // Труды VIII международной научной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”; 1-5 октября, Цахкадзор–2023 (Армения), с. 176–180.
18. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер удлинённой панели со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (1), с. 40-55.
19. Мартиросян С.Р. Сверхзвуковой флаттер прямоугольной пластинки умеренных размеров со свободным краем, первоначально нагруженной по двум направлениям: сжатой по потоку газа и растянутой в перпендикулярном направлении // Изв. НАН Армении, Механика. 2024. Т.77 (2), с.
20. Мартиросян С.Р. Об устойчивости широкой панели со свободным краем, растянутой по сверхзвуковому потоку газа, при наличии сосредоточенных инерционных масс и моментов // Изв. НАН Армении, Механика. 2023. Т.76 (1), с. 37–55. DOI: 10.54503/0002-3051-2023.76.1-37.

Сведения об авторе:
Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения, (+374 10) 524890.
E-mail: mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

УДК 531.8 DOI: 10.54503/0002-3051-2024.77.3-58

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГОЗАТРАТАМ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМ МАНИПУЛЯТОРОМ

Аветисян В.В.

Ключевые слова: электромеханическая система, оптимальное управление, минимальные энергозатраты

Optimal Control of an Electromechanical Manipulator with Minimal Energy Consumption
Avetisyan V.V.

Key words: electromechanical system, optimal control, minimal energy consumption

For the system modeling the dynamics of a single-link electromechanical manipulator, the problem of constructing a control voltage law is considered. The law is optimal with respect to a functional that accounts for the energy consumption of the motor during the manipulator's transport movement. It is assumed that the control voltage is constrained in magnitude. Using the maximum principle method, optimal controls are found, which ensure the movement of the system from a given initial rest state to an arbitrary terminal rest state in a specified time, while minimizing the given quality functional. On the plane of final times and terminal positions, regions are constructed, such that depending on which region a point belongs to, the system moves from the initial rest state to the terminal state under the derived optimal controls with one or two switching moments or without switching moments. Numerical simulation results of the manipulator's movement under a control regime with two switching moments are presented.

Էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի օպտիմալ ղեկավարումն ըստ նվազագույն էներգածախսերի
Ավետիսյան Վ.Վ.

Հիմնաբառեր: էլեկտրամեխանիկական համակարգ, օպտիմալ ղեկավարում, նվազագույն էնրեգածախսեր

Մեկ օղակով էլեկտրամեխանիկական մանիպուլյատորի դինամիկան նկարագրող համակարգի համար դիտարկվում է օպտիմալ ղեկավարող լարման ֆունկցիայի կառուցման խնդիրը: Որպես օպտիմալության ցուցանիշ դիտարկվում է ֆունկցիոնալ, որը հաշվի է առնում մանիպուլյատորի տրանսպորտային տեղափոխման ժամանակ էլեկտրաշարժիչի էներգածախսերը։ Ենթադրվում է, որ ղեկավարող լարումը մոդուլով սահմանափակ է։ Մաքսիմումի սկզբունքի մեթոդով գտնվել են այն օպտիմալ ղեկավարումները, որոնք ապահովում են համակարգի տեղափոխումը տրված սկզբնական հանգստի վիճակից կամայական վերջնական հանգստի վիճակ տրված ժամանակում՝ դիտարկվող որակի ֆունկցիոնալի մինիմալացմամբ։ Վերջնական ժամանակների և դիրքերի հարթության մեջ կառուցվել են տիրույթներ, որոնց յուրաքանչյուր կետ, կախված նրանից թե որ տիրույթին է այն պատկանում, համակարգի տեղափոխումը տրված սկզբնական հանգստի վիճակից տեղի է ունենում կառուցված օպտիմալ ղեկավարումներով՝ մեկ կամ երկու փոխարկման պահերով կամ առանց փոխարկման։ Բերված են մանիպուլյատորի շարժման թվային մոդելավորման արդյունքները երկու փոխարկման պահերով օպտիմալ ղեկավարման դեպքում։

Для системы, моделирующей динамику однозвенного электромеханического манипулятора, рассматривается задача построения закона изменения управляющего напряжения, оптимальное по отношению к функционалу, который учитывает энергозатраты электродвигателя за время выполнения манипулятором транспортного перемещения. Предполагается, что управляющее напряжение ограничено по модулю. Методом принципа максимума найдены оптимальные управления, которые обеспечивают перемещение системы из заданного начального состояния покоя в произвольное терминальное состяние покоя за заданное время с минимизацией рассматриваемого функционала качества. На плоскости конечных времен и терминальных положений построены области, в любую точку которых, в зависимости от ее принадлежности той или иной области, перемещение системы из начального состояния покоя происходит при построенных оптимальных управлениях с одним или двумя моментами переключения или без моментов переключения. Приводятся результаты численного моделирования движения манипулятора при режиме управления с двумя моментами переключения.

Введение. Важными эксплуатационными показателями манипуляционных роботов являются время выполнения транспортной операций, потребляемая энергия и точность позиционирования. Эти показатели зависят как от конструктивных характеристик робота, так и от используемых режимов управления. Одним из подходов к рациональному расчету режимов управления является их оптимизация по отношению к одному из перечисленных показателей - критерию функционирования. В ряде случаев целесообразно в качестве оптимизируемого критерия рассматривать функционал, который учитывает энергозатраты двигателя при выполнении манипулятором требуемой транспортной операции. В данной работе рассматривается электромеханическая система второго порядка, которая приближенно описывает динамику отдельного звена руки многозвенного манипулятора, если каждое звено управляется напряжением, подаваемым электродвигателем независимого привода, а динамическое взаимовлияние различных степеней свободы достаточно мало [1]. Для такой модели в [2,3] изучены задачи построения оптимального управляющего напряжения, обеспечивающего перемещение системы из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние покоя с минимизацией энергозатрат в двигателе, но без учета ограничения на напряжение. На основе методики, разработанной в [4], в [5-7] в классе непрерывных функций построены управляющие напряжения, при которых вышеуказанный переход системы происходит за конечное время без нарушения заданного ограничения на напряжение. По виду эти управления совпадают с оптимальным управлением, полученным в [2,3], и реализуются при достаточно большом интервале времени процесса управления. В [8,9] использован метод параметрической оптимизации для построения субоптимального и не ограниченного управления двузвенным манипулятором с учетом типа начальной и конечной конфигураций манипулятора [8], а в [9] - для построения закона движения и нахождения параметров однозвенного манипулятора, выполняющего циклическую транспортную операцию. В качестве критерия оптимальности взят квадратичный по управлению функционал, характеризующий, при определенных предположениях, энергозатраты системы при выполнении транспортной операции. Различным задачам минимизации энергозатрат при выполнении электромеханическим манипулятором транспортных и поисковых операций посвящены работы [10-12] и [13-15] соответственно.

В данной работе для модели однозвенного электромеханического манипулятора [1] рассматривается задача построения закона изменения управляющего напряжения, при котором схват манипулятора из заданного начального состояния покоя перемещается в произвольное конечное состояние покоя и функционал, учитывающий тепловые потери в двигателе (энергозатраты) за время выполнения заданного транспортного перемещения, принимает минимальное возможное значение. Предполагается, что управляющее напряжение ограничено по модулю. Наличие ограничения на управление составляет основное отличие рассматриваемой задачи от задач, рассмотренных в [2-12]. Используя методику принципа максимума, в классе кусочно-непрерывных функций построены оптимальные режимы управления с одним или двумя моментами переключений, а также управление без переключений. На плоскости конечных времен и положений системы построены области, в любую точку которых перемещение управляемой системы из начального состояния покоя происходит при соответствующем оптимальном режиме управления.

1. Расчетная модель электромеханической системы и постановка задачи. Рассмотрим простую модель электромеханического манипулятора, состоящую из электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением, редуктора и руки с грузом (закрепленным в его схвате), вращающейся в горизонтальной плоскости. Такую систему можно трактовать как модель простейшего манипулятора с одной степенью свободы Движение описанной электромеханической системы определяется уравнениями [1]

$$\left(I + Jn^2\right)\ddot{\varphi} = n\mu\,, \tag{1.1}$$

$$Ri + kn\dot{\varphi} = u\,, \tag{1.2}$$

$$\mu = ki\,. \tag{1.3}$$

Здесь φ – угол поворота руки относительно неподвижной оси; I – момент инерции руки (вместе с ведомой шестерней редуктора) относительно оси ее вращения; J – момент инерции якоря электродвигателя (вместе с ведущей шестерней редуктора) относительно оси его вращения; μ – момент (относительно оси вращения якоря) электромагнитных сил, создаваемый двигателем; n – передаточное число редуктора; R – электрическое сопротивление обмотки якоря двигателя; i – ток в цепи якоря; k – постоянная (параметр электродвигателя); u – управляющее электрическое напряжение, подаваемое на вход двигателя.

Уравнение (1.1) описывает динамику механической части системы, уравнение (1.2) описывает баланс электрических напряжений в цепи якоря, а соотношение (1.3) отражает пропорциональность крутящего момента двигателя и тока в цепи его якоря. Уравнение (1.2) справдливо в предположении, что электромагнитная постоянная времени системы много меньше как длительности рабочей операции робота, так и времени выхода электродвигателя на стационарный режим вращения (при постоянном напряжении). В противном случае в левую часть уравнения (1.2) следовало бы добавить слагаемое $L(di/dt)$, где L - индуктивность обмотки якоря. Для большинства промышленных электромеханических роботов отмеченное выше предположение выполняется [1,2].

Исключив переменные μ и i из совокупности уравнений (1.1) - (1.3), движение манипулятора можно описать одним дифференциальным уравнением

$$R\left(I + Jn^2\right)\ddot{\varphi} + k^2 n^2 \dot{\varphi} = knu \,. \qquad (1.4)$$

Рассмотрим задачу оптимального управления системой (1.1) - (1.3) или, что то же, (1.4).

Задача. Найти программный закон изменения управляющего напряжения $u(t)$, обеспечивающий приведение манипулятора (1.4) из заданного начального состояния покоя

$$\varphi(0) = \varphi^0, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \qquad (1.5)$$

в произвольное терминальное состояние покоя в конечный момент времени T

$$\varphi(T) = \varphi^T, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0 \qquad (1.6)$$

и минимизирующий функционал

$$Q = R^{-1}\int_0^T \left(u - k\dot{\varphi}\right)^2 dt \,, \qquad (1.7)$$

при условии, что управляющее напряжение по модулю ограничено заданной постоянной U :

$$|u| \le U \,. \qquad (1.8)$$

Время окончания процесса T задается в ходе решения задачи.

Поясним функционал (1.7). Известно, что количество «джоулева» тепла q, выделяющееся в проводнике в единицу времени, равно $q = i^2 R$, где i - сила тока, R - омическое сопротивление проводника. Выразив i через $u, k, n\dot{\varphi}$ из уравнения (1.2), получим следующее выражение для количества тепла, выделяющегося в обмотке ротора электровигателя: $q = R^{-1}\left(u - k\dot{\varphi}\right)^2$. Интеграл этой функции по времени процесса дает полное выделение тепла в обмотке электродвигателя. Таким образом, приходим к функционалу (1.7), который характеризует энергозатраты (тепловые потери) в электродвигателе.

В (1.4) - (1.8) перейдем к безразмерным единицам (с последующим опусканием штрихов) и обозначениям

$$t' = t/\bar{T}, \quad u' = u/U, \quad k' = kn/\left(U\bar{T}\right), \quad R' = RA/\left(knU\bar{T}^2\right),$$
$$Q' = \bar{T}^2 A^{-1} Q, \quad A = I + Jn^2, \qquad (1.9)$$

где $\bar{T}$ - принятое за единицу измерения характерное время рабочей операции робота, которое будет конкретизировано ниже.

Тогда уравнение (1.4), функционал (1.7) и ограничение (1.8) принимают соответственно вид

$$R\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} = u \,, \qquad (1.10)$$

$$|u| \le 1, \qquad (1.11)$$

$$Q = (kR)^{-1}\int_0^T \left(u - k\dot{\varphi}\right)^2 dt\,. \qquad (1.12)$$

После перехода к новым переменным

$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_1^0, \quad \varphi_2 = \dot{\varphi}, \quad S = QkR \qquad (1.13)$$

Систему (1.10) - (1.12) и краевые условия (1.5), (1.6) можно записать в таком виде

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2, \qquad (1.14)$$

$$\varphi_1(0) = 0, \qquad \varphi_2(0) = 0, \qquad (1.15)$$

$$\varphi_1(T) = \varphi_1^T, \quad \varphi_2(T) = 0, \qquad (1.16)$$

$$|u| \le 1, \qquad (1.17)$$

$$S = \int_0^T \left(u - k\dot{\varphi}\right)^2 dt\,. \qquad (1.18)$$

Таким образом, сформулированная выше задача переходит к равносильной задаче (1.14) - (1.18).

Не ограничивая общности, будем полагать, что в (1.16) $\varphi_1^T > 0$.

2. Нахождение оптимальных режимов управления. Для решения задачи (1.14)–(1.18) будем использовать принцип максимума [16]. Гамильтониан системы (1.14)–(1.18) имеет вид

$$H = -(u - k\varphi_2)^2 + p_1\varphi_2 + p_2(uR^{-1} - kR^{-1}\varphi_2)\,, \qquad (2.1)$$

где p_1, p_2 – сопряженные переменные, определяемые из сопряженных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{p}_1 = -\partial H / \partial \varphi_1 = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ &\dot{p}_2 = -\partial H / \partial \varphi_2 = -2ku + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2, \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Максимизация функции H по управлению u при ограничении (1.17) приводит к решению следующей экстремальной задачи:

$$\bar{H} = -u^2 + 2k\varphi_2 u + p_2 R^{-1} u \to \max_{-1 \le u \le 1}\,. \qquad (2.3)$$

Максимум в (2.3) без учета ограничения (1.17) определяется из условия $d\bar{H} / du = 0$ и достигается в точке

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) + p_2(t)(2R)^{-1}\,. \qquad (2.4)$$

С учетом этого оптимальное управление, доставляющее максимум в (2.3), определяется следующим образом:

$$u^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & u^*(t) > 1, \\ u^*(t), & |u^*(t)| \le 1, \qquad 0 \le t \le T\,. \\ -1, & u^*(t) < -1. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Неизвестные переменные φ_2 и p_2 в (2.4) определяются после разрешения краевой задачи принципа максимума при управлении (2.4)

$$\dot{\varphi}_1 = \varphi_2, \quad \dot{\varphi}_2 = R^{-1}u\Big|_{u=u^*} - kR^{-1}\varphi_2, \tag{2.6}$$

$$\dot{p}_1 = 0, \quad \dot{p}_2 = -2ku\Big|_{u=u^*} + 2k^2\varphi_2 - p_1 + kR^{-1}p_2 = -p_1. \tag{2.7}$$

Интегрируя (2.6), (2.7) и учитывая краевые условия (1.15), (1.16), получим

$$\varphi_1(t) = \left(-2T^{-3}t^3 + 3T^{-2}t^2\right)\varphi_1^T, \qquad \varphi_2(t) = \left(-6T^{-3}t^2 + 6T^{-2}t\right)\varphi_1^T, \tag{2.8}$$

$$p_1(t) = 12R^2T^{-2}\varphi_1^T, \qquad p_2(t) = -24T^{-3}R^2\varphi_1^T t + 12T^{-2}R^2\varphi_1^T. \tag{2.9}$$

Подставив в (2.4) выражения для φ_2 и p_2 из (2.8) и (2.9), найдем

$$\begin{aligned} u^*(t) &= k(-6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}\varphi_1^T t) - 12RT^{-1}\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T = \\ &= -6kT^{-3}\varphi_1^T t^2 + 6T^{-2}(k - 2RT)\varphi_1^T t + 6RT^{-2}\varphi_1^T. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что квадратичная функция $u^*(t)$ максимального значения по t достигает в точке $t_* = T/2 - k^{-1}R$:

$$u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6R^2k^{-1}T^{-3}\varphi_1^T. \tag{2.11}$$

При этом имеются следующие два случая.

А) Пусть $t_* = T/2 - k^{-1}R < 0$, т.е. $0 < T < 2k^{-1}R$.

Тогда функция $u^*(t)$ монотонно убывает на $[0, T]$, принимая на концах этого интервала максимальное $u^*(0) = 6T^{-2}R\varphi_1^T$ и минимальное значения $u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T$. Следовательно,

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^*(t)\right| = 6T^{-2}R\varphi_1^T, \quad 0 < T < 2k^{-1}R. \tag{2.12}$$

1) Если в (2.12) $6T^{-2}R\varphi_1^T > 1$, то, в соответствии с (2.5) и учитывая (2.10), для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_1^{(1)}$,

$$\Phi_1^{(1)} = \left\{(T, \varphi_1^T): \ 0 < T < 2k^{-1}R; \ T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\right\} \tag{2.13}$$

оптимальное управление, выраженное через моменты переключения, принимает вид

$$u_1^{opt}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_1, \\ u^*(t), & t_1 \le t \le t_2, \\ -1, & t_2 < t \le T. \end{cases} \tag{2.14}$$

В (2.14) моменты переключения t_1, t_2 - положительные корни уравнений $u^*(t) = 1$ и $u^*(t) = -1$ соответственно (здесь и в дальнейшем при нахождении моментов переключения, управление $u^*(t)$ задается формулой (2.10)), и имеют вид

$$t_1 = T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2},$$
$$t_2 = T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 + T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}. \qquad (2.15)$$

2) Если в (2.12) $6T^{-2}R\varphi_1^T \le 1$, то для любой точки

$$(T,\varphi_1^T) \in \Phi_3^{(1)}, \quad \Phi_3^{(1)} = \left\{(T,\varphi_1^T):\ 0 < T < 2k^{-1}R;\ \ 0 < \varphi_1^T \le T^2(6R)^{-1}\right\}, \qquad (2.16)$$

в соответствии с (2.4), имеем

$$u_3^{opt}(t) = u^*(t), \qquad (2.17)$$

где $u^*(t)$ определяется с помощью (2.10).

В) Пусть $0 \le t_* = T/2 - k^{-1}R < \infty$, т.е. $2k^{-1}R \le T < \infty$.

Тогда на интервале $[0,T]$ максимальное значение функции $u^*(t)$ равно $u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T$, а минимальное - $u^*(T) = -6T^{-2}R\varphi_1^T$. При этом $u^*(t_*) = u^*(0) = \left|u^*(T)\right|$, когда $2k^{-1}R = T$ и $u^*(t_*) > u^*(0) = \left|u^*(T)\right|$, когда $2k^{-1}R < T < \infty$. В обоих случаях

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u^*(t)\right| = u^*(t_*) = 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T, \quad 2k^{-1}R \le T < \infty. \qquad (2.18)$$

Здесь возможны следующие случаи.

1) Пусть $u^*(t_*) \ge u^*(0) = \left|u^*(T)\right| > 1$, т.е. удовлетворяется система неравенств

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T > 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T > 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T > 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T > T^2(6R)^{-1}. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Поскольку для правых частей второй системы (2.19) при всех T, $2k^{-1}R \le T < \infty$ выполняется соотношение

$$T^2(6R)^{-1} \ge 2kT^3\left(3k^2T^2 + 12R^2\right)^{-1},$$

то для любой точки $(T,\varphi_1^T) \in \Phi_1^{(2)}$,

$$\Phi_1^{(2)} = \left\{(T,\varphi_1^T):\ 2k^{-1}R \le T < \infty;\ \ T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\right\} \qquad (2.20)$$

оптимальное программное управление задается с помощью (2.14), (2.15).

2) Пусть $u^*(t_*) > 1$ и $u^*(0) = \left|u^*(T)\right| \le 1$, т.е. точка экстремума функции (2.10), $t_* = T/2 - k^{-1}R > 0$. Указанные условия выполняются при соблюдении следующей системы неравенств

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T > 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T \le 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T > 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T \le T^2(6R)^{-1}. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $(T,\varphi_1^T) \in \Phi_2$,

$$\Phi_2 = \left\{ \begin{aligned} &(T, \varphi_1^T): \quad 2k^{-1}R < T < \infty, \\ &\qquad\qquad 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} < \varphi_1^T \le T^2(6R)^{-1} \end{aligned} \right\} \tag{2.21}$$

соответствующее оптимальное управление задается в виде

$$u_2^{opt}(t) = \begin{cases} u^*(t), & 0 \le t < t_1, \\ 1, & t_1 \le t \le t_2, \\ u^*(t), & t_2 < t \le T. \end{cases} \tag{2.22}$$

Заметим, что если точка (T, φ_1^T) находится на границе области Φ_2, т.е.

$$(T, \varphi_1^T) \in \left\{ 2k^{-1}R \le T < \infty; \quad \varphi_1^T = T^2(6R)^{-1} \right\} \subset \Phi_2,$$

то в (2.22) интервал $t_2 < t \le T$ вырождается в точку: $t_2 = T$.

В (2.22) моменты переключения t_1, t_2 - корни уравнения $u^*(t) = 1$ и имеют вид

$$\begin{aligned} t_1 &= T/2 - R/k - \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}, \\ t_2 &= T/2 - R/k + \sqrt{T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Так как $T/2 - R/k > 0$, то оба корня t_1, t_2 действительны и, следовательно, положительны для тех точек $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$, для которых подкоренная функция $T^2/4 - T^3/(6k\varphi_1^T) + R^2/k^2 \ge 0$ или, что то же самое, выполняется неравенство

$$2kT^3 - 3k^2\varphi_1^T T^2 - 12\varphi_1^T R^2 \le 0, \qquad 2k^{-1}R < T < \infty. \tag{2.24}$$

В соответствии с (2.24) решение кубического уравнения

$$\begin{aligned} &aT^3 + bT^2 + d = 0, \\ &a = 2k > 0, \quad b = -3k^2\varphi_1^T, \quad d = -12R^2\varphi_1^T \end{aligned} \tag{2.25}$$

находится с помощью формулы Кардано

$$T^{(2)} = \sqrt[3]{-(q/2) + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-(q/2) - \sqrt{D}} - b/(3a), \tag{2.26}$$

где

$$p = -b^2/(3a^2) = -3k^2(\varphi_1^T)^2/4,$$

$$q = 2b^3/(27a^3) + d/a = -k^3(\varphi_1^T)^3/4 - 6R^2\varphi_1^T/k,$$

$$b/(3a) = -k\varphi_1^T/2,$$

$$D = (p/3)^3 + (q/2)^2 = 3k^2R^2(\varphi_1^T)^4/4 + 9R^4(\varphi_1^T)^2/k^2 > 0.$$

Из (2.26) следует, что $T^{(2)}$ - единственный действительный положительный корень уравнения (2.25). Таким образом, неравенство (2.24) выполняется для тех точек $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$, для которых $T \in \left(2k^{-1}R,\, T^{(2)}\right]$. Этот интервал непустой, т.е.

$2k^{-1}R < T^{(2)}$. Действительно, из геометрии области Φ_2 следует, что любому значению φ_1^T, удовлетворяющему неравенству

$$2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} < \varphi_1^T \le T^2(6R)^{-1}, \tag{2.27}$$

соответствует любое T из интервала

$$A = \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right], \tag{2.28}$$

где

$$T^{(1)} = \sqrt{6R\varphi_1^T} \tag{2.29}$$

- решение уравнения $T^2 = 6R\varphi_1^T$, а $T^{(2)}$ - решение кубического уравнения (2.25), определяемое формулой (2.26).

Поскольку в (2.27)

$$\lim_{T\to 2k^{-1}R} 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1} = \lim_{T\to 2k^{-1}R} T^2(6R)^{-1} = 2k^{-2}R/3,$$

то при $T \to 2k^{-1}R$ отрезок $\left(2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, T^2(6R)^{-1}\right]$ стягивается в точку $\varphi_1^T = 2k^{-2}R/3$, а интервал (2.28), соответственно, в точку $T^{(1)} = T^{(2)} = 2k^{-1}R$.

Таким образом, для любого φ_1^T (2.27) выполняется соотношение

$$2k^{-1}R < T^{(1)} < T^{(2)}. \tag{2.30}$$

3) Пусть $1 \ge u^*(t_*) > u^*(0) = \left|u^*(T)\right|$, т.е.

$$\begin{cases} 1.5kT^{-1}\varphi_1^T + 6k^{-1}R^2T^{-3}\varphi_1^T \le 1, \\ 6T^{-2}R\varphi_1^T < 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi_1^T \le 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, \\ \varphi_1^T < T^2(6R)^{-1}. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_3^{(2)}$,

$$\Phi_3^{(2)} = \left\{(T, \varphi_1^T):\ 2k^{-1}R \le T < \infty;\ \ 0 < \varphi_1^T \le 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}\right\} \tag{2.31}$$

оптимальное управление имеет вид (2.17).

Подытожим полученные результаты.

Введем обозначения:

$$\Phi_1 = \Phi_1^{(1)} \cup \Phi_1^{(2)} = \left\{(T, \varphi_1^T):\ \ 0 < T < \infty;\ T^2(6R)^{-1} < \varphi_1^T < \infty\right\}, \tag{2.32}$$

$$\Phi_3 = \Phi_3^{(1)} \cup \Phi_3^{(2)} = \left\{(T, \varphi_1^T):\ \ 0 < T < \infty;\ \ 0 < \varphi_1^T \le F(T)\right\}, \tag{2.33}$$

где

$$F(T) = \begin{cases} T^2\left(6R\right)^{-1}, & 0 < T < 2k^{-1}R, \\ 2kT^3(3k^2T^2 + 12R^2)^{-1}, & 2k^{-1}R \le T < \infty. \end{cases}$$

Тогда, в зависимости от принадлежности точки (T, φ_1^T) той или иной области

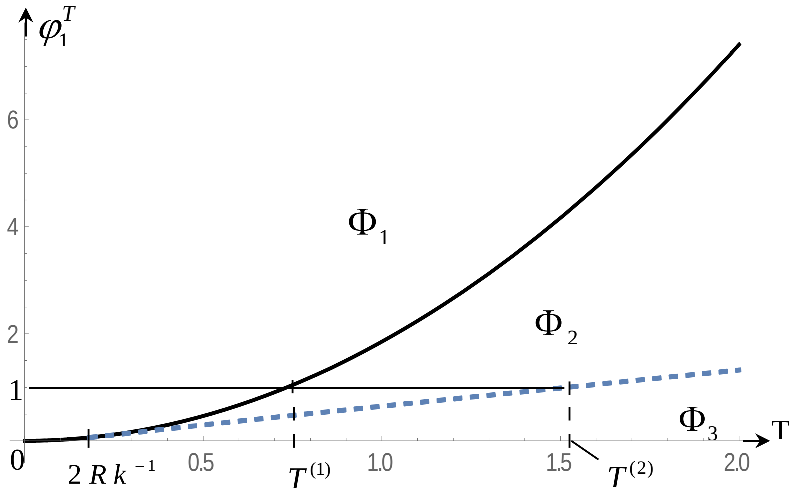


Рис. 1

Φ_i, $i = 1, 2, 3$, ((2.21), (2.32), (2.33)) (рис. 1), оптимальный режим управления определяется следующим образом:

$$u^{opt}(t) = \begin{cases} u_1^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_1, \\ u_2^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_2, \\ u_3^{opt}(t), & (T, \varphi_1^T) \in \Phi_3, \end{cases} \tag{2.34}$$

где $u_i^{opt}(t)$, $i = 1, 2, 3$, задаются с помощью формул (2.14), (2.17), (2.22).

3. Алгоритм построения оптимального программного управления и соответствующей фазовой траектории. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда $(T, \varphi_1^T) \in \Phi_2$. Тогда в задаче (1.14) - (1.18), согласно (2.34), следует использовать режим управления $u^{opt}(t) = u_2^{opt}(t)$ (2.22). Перейдем к построению оптимального программного режима управления (2.22) в явном виде и соответствующей фазовой траектории на плоскости (φ_1, φ_2).

Зафиксируем любое значение терминального положения φ_1^T (2.27). Этому значению, согласно конструкции области Φ_2 (2.21), соответствует любое T из интервала (2.28). Выберем некоторое $T^* \in \operatorname{int} A$, $A = \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right]$ и проинтегрируем систему (1.14) с начальными условиями (1.15) при непрерывном управлении $u^*(t, T)\big|_{T=T^*}$ (2.10) на интервале $0 \le t \le t_1$, где $t = t_1$ вычисляется по формуле (2.23) при $T = T^*$. В области Φ_2 ограничение на управление (1.17) на интервале $0 \le t \le t_1$ не нарушается по построению и решение системы (1.14) определяется с помощью (2.8) при $T = T^*$.

При $t = t_1$ из (2.8) получим конечное состояние $(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)})$ на интервале $[0, t_1]$:

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(1)} &= \varphi_1(t_1) = \left(-2T^{-3}t_1^3 + 3T^{-2}t_1^2\right)\Big|_{T=T^*} \varphi_1^T,\\ \varphi_2^{(1)} &= \varphi_2(t_1) = \left(-6T^{-3}t_1^2 + 6T^{-2}t_1\right)\Big|_{T=T^*} \varphi_1^T.\end{aligned} \tag{3.1}$$

(3.1) служит начальным состоянием для системы (1.14) на втором интервале $[t_1, t_2]$, где t_2 определяется формулой (2.23) при $T = T^*$. Интегрируя систему (1.14), (3.1) при управлении $u^{opt} = 1$ (2.22), получим

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= k^{-1}(t - t_1) + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^{(1)})[\exp(-kR^{-1}(t - t_1)) - 1] + \varphi_1^{(1)},\\ \varphi_2(t) &= k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^{(1)})\exp(-kR^{-1}(t - t_1)).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.2) получим конечное состояние $(\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$ в момент $t = t_2$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(2)} &= \varphi_1(t_2) = k^{-1}(t_2 - t_1) + Rk^{-1}(k^{-1} - \varphi_2^{(1)})[\exp(-kR^{-1}(t_2 - t_1)) - 1] + \varphi_1^{(1)},\\ \varphi_2^{(2)} &= \varphi_2(t_2) = k^{-1} - (k^{-1} - \varphi_2^{(1)})\exp(-kR^{-1}(t_2 - t_1)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Состояние (3.3) служит начальным для системы (1.14) на третьем интервале $[t_2, T]$, где T пока не задано.

Интегрируя уравнения движения (1.14) совместно с сопряженными уравнениями (2.7) при управлении $u^*(t)$ (2.4) на интервале $t_2 \le t \le T$ и учитывая краевые условия (1.16), (3.3), получим

$$\varphi_1(t) = -\alpha(t - t_2)^3 + \beta(t - t_2)^2 + \varphi_2^{(2)}(t - t_2) + \varphi_1^{(2)}, \tag{3.4}$$

$$\varphi_2(t) = -3\alpha(t - t_2)^2 + 2\beta(t - t_2) + \varphi_2^{(2)}, \tag{3.5}$$

$$u^*(t) = k\varphi_2(t) - 6R\alpha(t - t_2) + 2R\beta, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha &= \left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3},\\ \beta &= \left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Функцию (3.6), с учетом выражений (3.5), (3.7), представим в виде

$$\begin{aligned}u^*(t) = &-3k\left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3}(t - t_2)^2\\ &+2\left\{\begin{matrix} k\left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2} - \\ -3R\left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-3}\end{matrix}\right\}(t - t_2) +\\ &+k\varphi_2^{(2)} + 2R\left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

В (3.8) все величины $t_i(T^*)$, $\varphi_i^{(j)}(T^*)$, $i, j = 1, 2$, $T^* \in \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right)$, кроме T, известны.

Таким образом, управление (3.9) при любом T, $T > t_2$ переводит систему (1.14) из состояния (3.3) в терминальное состояние покоя (1.16). Однако это управление, вообще говоря, не удовлетворяет ограничению

$$\left|u^*(t)\right| \le 1, \qquad t_2 \le t \le T. \tag{3.9}$$

Покажем, что выбором времени T можно учесть ограничение (3.9). Для этого заметим, что функция (3.8) достигает экстремального значения по t в точке

$$t_* = t_2 + \beta\left(3\alpha\right)^{-1} - k^{-1}R. \tag{3.10}$$

Достаточно потребовать, чтобы $t_* < t_2$. Тогда на $[t_2, T]$ функция (3.8), в зависимости от знака α, является убывающей или возрастающей. В обоих случаях на левом и правом концах интервала $[t_2, T]$ она принимает, соответственно, значения

$$u(t_2) = k\varphi_2^{(2)} + 2R\left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2} \tag{3.11}$$

$$u(T) = 2R(T - t_2)^{-2}\left[-3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) + \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right]. \tag{3.12}$$

Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha > 0$. В этом случае на интервале $[t_2, T]$ функция (3.8) является убывающей.

Из (2.23) следует, что $t_2 < T$ для всех $T \in \left[2k^{-1}R, T^{(2)}\right)$. Однако, поскольку выполняется соотношение (2.30), то $t_2 < T$ для всех $T \in \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right)$.

Выберем время T из интервала

$$B_1 = \left(T^*, T^{(2)}\right] \subset \left[T^{(1)}, T^{(2)}\right] \tag{3.13}$$

так, чтобы не нарушались неравенства

a) $\beta\left(3\alpha\right)^{-1} - k^{-1}R \le 0$, b) $u(t_2) \le 1$, c) $u(T) \ge -1$,

или, учитывая (3.7) и (3.8), соответственно, неравенства

$$\text{a) } \frac{\left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)}{3\left[2(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right]} - k^{-1}R \le 0, \tag{3.14}$$

$$\text{b) } k\varphi_2^{(2)} + 2R\left[3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) - 2\varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right](T - t_2)^{-2} \le 1, \tag{3.15}$$

$$\text{c) } 2R(T - t_2)^{-2}\left[-3(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) + \varphi_2^{(2)}(T - t_2)\right] \ge -1, \tag{3.16}$$

Решение неравенства (3.14) относительно T представляется в виде

$$T \in B_2 = \left(0, T^-\right] \cup \left[T^+, \infty\right), \tag{3.17}$$

$$T^- = t_2 + 3\left[\gamma + k^{-1}R\right]/4 - \sqrt{D}, \qquad T^+ = t_2 + 3\left[\gamma + k^{-1}R\right]/4 + \sqrt{D},$$

$\gamma = (\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) / \varphi_2^{(2)} > 0$,

где дискриминант

$\bar{D} = 9\left[\gamma + k^{-1}R\right]^2 / 16 - 3k^{-1}R\gamma \ge 0$,

когда

$\gamma \in \left(0, \gamma_1\right] \cup \left[\gamma_2 .\infty\right), \quad \gamma_1 = R / 3k > 0, \quad \gamma_2 = 3R / k > 0$.

Решение неравенства (3.15) следующее:

$$T \in B_3 = \left[T', \infty\right), \tag{3.18}$$

$$T' = t_2 - 2R\varphi_2^{(2)}(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1} + \sqrt{D'},$$

$$D' = \left[2R\varphi_2^{(2)}(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1}\right]^2 + 6R(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)})(1 - k\varphi_2^{(2)})^{-1} > 0,$$

$$\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)} > 0, \; 1 - k\varphi_2^{(2)} > 0,$$

а решение неравенства (3.16) определяется так

$$T \in B_4 = \left[T'', \infty\right), \tag{3.19}$$

$$T'' = t_2 - R\varphi_2^{(2)} + \sqrt{D''}, \quad D'' = \left(R\varphi_2^{(2)}\right)^2 + 6R(\varphi_1^T - \varphi_1^{(2)}) > 0.$$

Таким образом, в соответствиии с включениями (3.13), (3.17)-(3.19), неравенства (3.14)-(3.16) выполняются для всех T из интервала

$$B = \bigcap_{i=1}^{4} B_i \,. \tag{3.20}$$

Как показывают расчеты для конкретных числовых параметров задачи, интервал (3.20) непустой.

Приведем численный пример реализации предложенного алгоритма построения оптимального управления. Примем, что электромеханический манипулятор характеризуется следующими размерными параметрами [1,2], фигурирующими в (1.1)-(1.3), (1.7), (1.8):

$$I = 5.9\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \quad J = 2.45\cdot 10^{-4}\,\text{кг}\cdot\text{м}^2, \quad n = 163, \tag{3.21}$$

$$R = 3.6\,\text{Ом}, \quad k = 0.233\,\text{Н}\cdot\text{м/А}, \quad j = 5.7\,\text{А}, \quad U = 110\,\text{В}.$$

При переходе к безразмерным переменным (1.3) за единицу измерения времени примем величину $\bar{T} = nkU^{-1} \approx 0.345c$, равную времени поворота руки на угол в один радиан при движении руки манипулятора со стационарной угловой скоростью $\dot{\varphi} = (nk)^{-1}U \approx 2.9c^{-1}$. Безразмерные параметры уравнения (1.10) следующие:

$$R \approx 0.09, \quad k \approx 1. \tag{3.22}$$

При нулевом начальном значении угла поворота руки манипулятора, равном $\varphi_1^0 = 0$ рад (1.5), зададим конечное значение угла поворота (1.6), равное

$$\varphi_1^T = 1\,\text{рад}, \tag{3.23}$$

которое удовлетворяет неравенству (2.27) при значениях (3.22).

Выбор конечного времени T, а также построение оптимального режима управления (2.22) и соответствующей оптимальной траектории на фазовой плоскости системы (1.14) осуществляется по следующему алгоритму:

1) определяем диапазон изменения времени T (2.28): $A=[0.735,\ 1.520]$;

2) фиксируем некоторое значение, например, $T^*=1$ из интервала $\operatorname{int} A$;

3) определяем интервалы (3.13), (3.17) - (3.19):

$B_1=(1,\ 1.520]$, $B_2=(0,\ 0.912]\cup[1.243,\ \infty)$, $B_3=[1.312,\ \infty)$, $B_4=[1.173,\ \infty)$ и интервал (3.20): $B=[1.312;\ 1.520]$, для любой точки которого выполняются неравенства (3.14) - (3.16);

4) выбираем конечное время процесса, например, $T=1.51$ из интервала B;

5) для выбранного T строим оптимальный режим управления (2.22), в котором моменты переключения $t_1=0.108$ и $t_2=0.712$ вычисляются по формулам (2.23), и соответствующая оптимальная фазовая траектория - по формулам (2.8) на интервале $0\le t\le 0.108$, по формулам (3.2) на интервале $0.108\le t\le 0.712$ и по формулам (3.4), (3.5) на интервале $0.712\le t\le 1.51$.

На рис. 2 и рис. 3 представлены графики функции $u_2^{opt}(t)$ и соответствующей фазовой траектории на плоскости (φ_1,φ_2). Минимальное значение тепловыделения в двигателе при построенном режиме управления на интервале $[0,\ 1.51]$ подсчитывается по формуле (1.8): $Q=0.48$.

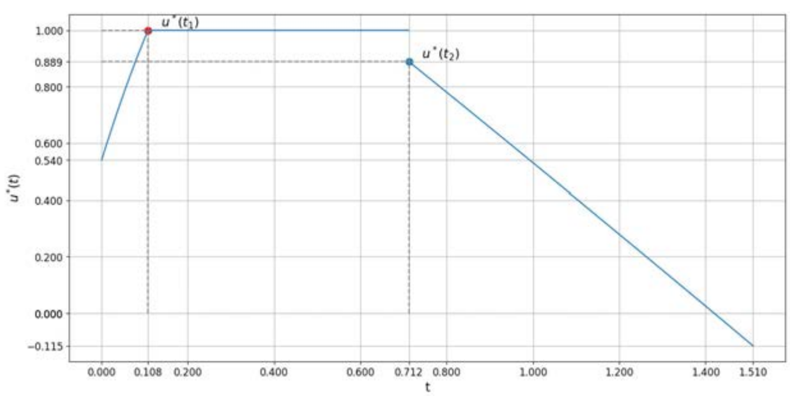


Рис. 2

В исходных размерных переменных (1.9), (1.12) моменты переключения, конечное время и минимальное тепловыделение имеют следующие значения: $t_1=0.04$ с, $t_1=0.24$ с, $T=0.52$ с, $Q=49.64$ Дж. Так как полное тепловыделение в обмотке ротора электродвигателя за 0.52 с составляет 49.64 Дж, то средняя мощность тепловыделения равна $q_{\text{ср.}} = 95.5\,\text{Вт}$. Для сравнения отметим, что максимально допустимая мощность тепловыделения для электродвигателя с параметрами (3.1) составляет $q_{\text{макс.}} = 117\,\text{Вт}$. Следовательно, за время $0.52\,\text{с}$ тепловые потери в обмотке ротора двигателя будут значительно больше и составят $Q_{\text{макс.}} = 60.84\,\text{Дж}$.

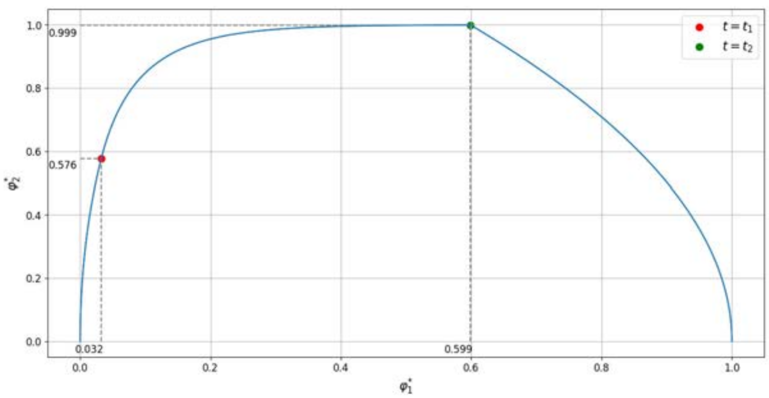


Рис. 3

Таким образом, применение оптимального режима управления уменьшает рабочую мощность двигателя до уровня, который значительно ниже максимальной мощности рассматриваемого электромеханического манипулятора (3.1), что позволяет сократить тепловые потери и избежать перегрева. Это особенно важно в условиях непрерывной или длительной работы двигателя при выполнении манипулятором транспортных операций, когда из-за теплового повреждения двигатель может выйти из строя.

Заключение. В статье с использованием метода принципа максимума построено оптимальное управление, которое обеспечивает перемещение системы, моделирующей динамику однозвенного манипулятора, из заданного состояния покоя в произвольное терминальное состояние покоя за конечное время и минимизирует функционал, учитывающий тепловые потери в электродвигателе манипулятора. На плоскости конечных времен и положений системы построены области, в любую точку которых, в зависимости от ее принадлежности той или иной области, перемещение управляемой системы в терминальное состояние покоя происходит в оптимальном режиме управления различной структуры: с одним, двумя переключениями или без переключений. По изложенному алгоритму проведено численное моделирование движения электромеханического манипулятора при оптимальном режиме управления с двумя переключениями и вычислено соответствующее минимальное значение тепловых потерь в электродвигателе. Расчетами установлено, что построенный режим управления позволяет заметно уменьшить энергозатраты двигателя по сравнению с существующими показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Gradetsky V. G. . Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization. — Boca Raton: CRC Press, 1994. 268 p.
2. Аветисян В.В., Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н. Оптимальное управление электроприводами промышленных роботов. – М.: ИПМ АН СССР. 1986, 71с.
3. Avetisyan V.V., Akulenko L.D., Bolotnik N.N. Optimization of control modes of manipulation robots with regard of the energy consumption // Soviet J. Comput. Syst. Sci. 1987. Vol. 25. No. 3. P. 100-107.
4. Chernousko F. L., Ananievski I. M., Reshmin S. A. Control of Nonlinear Dynamical Systems. Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. — 396 p.
5. Аветисян В.В. Управление электромеханическим манипулятором при ограничениях на напряжение и ток // Изв. НАН РА. Механика. 2002. Т. 55. № 1. С. 68-74.
6. Аветисян А.С., Аветисян В.В. О построении ограниченного управления электромеханической системой // Докл. НАН РА. 2017. Т. 117. № 1. С. 121-131.
7. Avetisyan V.V. Control of a second-order electromechanical system under mixed constraints. // Mechanics - Proceedings of NAS PA. 2023. Vol. 76. Issue 2. P. 32-43.
8. Demydyuk M.V., Hoshovs'ka N.V. Parametric Optimization of the Transport Operations of a Two-Link manipulator // J. Math. Sci. 2019. Vol. 238. No. 2. P. 174-188.
9. Demydyuk M.V., Demydyuk P.M., Shyrko M. I.Parametric optimization of the cyclic pick-and-place operations of a single-link manipulator with active and passive actuators // Prykladni Problemy Mekhaniky i Matematyk. 2023(21). P. 64-71.
10. Oršanský P., Ftorek B., Vittek J. Energy optimal trajectories for electro-mechanical systems // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 776 (2020) 012113
11. Galicki M. Energy optimal control of mobile manipulators subject to compensation of external disturbance forces // J. Mech. Mach. Theory. 2022, Vol. 167. P. 63-65.
12. Abdullah Mohammed, Bernard Schmidt, Lihui Wang, Liang Gao. Minimizing Energy Consumption for Robot Arm Movement // 8th International Conference on Digital Enterprise Technology - Procedia CIRP 25 (2014). P. 400-405.
13. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Управление гарантированным поиском подвижного объекта при минимальных световых энергозатратах // Изв. НАН РА. Механика. 2007. Т. 60, № 2. С. 100-109.
14. Avetisyan V.V., Martirosyan, S.R. Guaranteed Search for a Target Object by an Electromechanical System with Minimal Light Power Costs // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2009. Vol. 48. No. 5. P. 814-826.
15. Avetisyan V.V. Controlled dynamic search for a mobile object with minimum cost of light energy // Automation and Remote Control. 2020. Vol. 81. Issue 4, pp. 624–631.
16. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. 393с.

Сведения об авторе:

Аветисян Ваган Вардгесович – в.н.с. Института механики НАН РА, д.ф.м.н., профессор, **Тел.**: +374 94 449560, **E-mail**: vanavet@yahoo.com

Поступила в редакцию 29. 09. 2024

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 №3

.

CONTENTS 2024, v. 77 №3

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 77, №3, 2024 Механика

СОДЕРЖАНИЕ 2024 г., том 77 №3

.

CONTENTS 2024, v. 77 №3

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, h.77, №3

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 2024, h.77, №3

Сдано в производство 27.03.2024 г.
Формат 70 x 100 $^{1}/_{16}$. Печ. лист – 3 3/8
Заказ № 1301. Тираж 150.
Цена договорная.
Типография Издательства НАН РА
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24