

И. О. Хачатрян

О параметрическом представлении и о некоторых экстремальных свойствах целых функций многих переменных

В работе М. М. Джрбашяна [1] были изучены некоторые специальные классы целых функций многих переменных, имеющих различные порядки и типы роста по отдельным переменным. В частности, было построено преобразование Бореля и интегральное представление для целых функций многих переменных.

В § 1 настоящей статьи на основании этих результатов приводится обобщение известной теоремы Палея и Винера для целых функций многих переменных, в случае, когда порядок роста по всем переменным равен единице, а типы роста, вообще говоря, могут быть различны.

В § 2 на основе обобщенной теоремы Палея и Винера приводятся оценки для целых функций многих переменных в пространстве L_2 .

Ради простоты запись изложение ведется для целых функций двух переменных.

§ 1. Обобщение теоремы Палея и Винера для целых функций двух переменных

Пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{n! m!} z_1^n z_2^m \quad (1.1)$$

целая функция двух переменных z_1 и z_2 .

Обозначим

$$M_f(r_1, r_2) = \max_{|z_1|=r_1, |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|.$$

Класс целых функций, удовлетворяющих условиям:

1°. Существует постоянная $c = c(f)$ такая, что

$$M_f(r_1, r_2) < c(f) e^{\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2}, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 \geq 0; \quad (1.2)$$

$$2°. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty, \quad (1.3)$$

обозначим через W_{σ_1, σ_2} .

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Класс W_{σ_1, σ_2} совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z_1, z_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 z_1 + iu_2 z_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2, \quad (1.4)$$

где

$$\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 < +\infty. \quad (1.5)$$

Доказательство. Докажем, что всякая функция вида (1.4), где $\varphi(u_1, u_2)$ удовлетворяет условию (1.5), принадлежит к классу W_{σ_1, σ_2} .

По теореме Планшереля для кратных интегралов Фурье из (1.4) следует равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = (2\pi)^2 \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 < +\infty,$$

т. е. условие (1.3) удовлетворяется.

С другой стороны, если $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2$), то

$$f(z_1, z_2) = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} e^{-u_1 y_1 - u_2 y_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2,$$

и, в силу неравенства Шварца и условия (1.5):

$$\begin{aligned} |f(z_1, z_2)| &\leq \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{-2u_1 y_1 - 2u_2 y_2} du_1 du_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq c e^{\sigma_1 |y_1| + \sigma_2 |y_2|} \leq c e^{\sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2}, \end{aligned}$$

т. е. условие (1.2) также выполняется.

Пусть теперь $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}$. Тогда из (1.1) будем иметь

$$\left| \frac{a_{nm}}{n! m!} \right| \leq \frac{M_f(r_1, r_2)}{r_1^n r_2^m}. \quad (1.6)$$

Из условия (1.2) теоремы и из (1.6) следует

$$|a_{nm}| \leq \frac{c_f e^{\sigma_1 r_1} n!}{r_1^n} \frac{e^{\sigma_2 r_2} m!}{r_2^m}$$

для всевозможных $r_1 > 0, r_2 > 0$.

Выбрав теперь

$$r_1 = \frac{n}{\sigma_1}, \quad r_2 = \frac{m}{\sigma_2},$$

будем иметь

$$|a_{nm}| \leq c_1 \left(\frac{\sigma_1 e}{n}\right)^n \left(\frac{\sigma_2 e}{m}\right)^m.$$

откуда

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{\sigma_1 e}\right)^n \left(\frac{m}{\sigma_2 e}\right)^m} < 1. \quad (1.7)$$

Из (1.7) по формуле Стирлинга получим:

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \sigma_1^{-n} \sigma_2^{-m}} \leq 1. \quad (1.7')$$

Из (1.7') вытекает, что функция

$$g(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} \quad (1.8)$$

голоморфна в области $|z_1| > \sigma_1$, $|z_2| > \sigma_2$.

Доказано [1], что если обозначим через Δ_{θ_k} ($k=1, 2$) полуплоскость, не содержащую точку $z_k=0$, границей которой является касательная к окружности $|z_k| = \sigma_k$ ($k=1, 2$) в точке $\sigma_k e^{i\theta_k}$ ($k=1, 2$), то

$$g(z_1, z_2) = e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1 z_1 e^{-i\theta_1} - t_2 z_2 e^{-i\theta_2}} dt_1 dt_2 \quad (1.9)$$

при $z_k \in \Delta_{\theta_k}$ ($k=1, 2$).

В формуле (1.8) положим $\theta_1 = \theta_2 = 0$; тогда будем иметь

$$g(z_1, z_2) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(+)}^{(+)}(z_1, z_2) \quad (1.10_1)$$

при $x_k > \sigma_k$ ($k=1, 2$).

Пусть теперь $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, тогда

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) &= - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, -t_2) e^{-t_1 z_1 + t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(+)}^{(-)}(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (1.10_2)$$

при $x_1 > \sigma_1$, $x_2 < -\sigma_2$.

Положив $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}
 g(z_1, z_2) &= - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(-t_1, t_2) e^{t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\
 &= - \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(-)}^{(+)}(z_1, z_2) \quad (1.10_3)
 \end{aligned}$$

при $x_1 < -\sigma_1$, $x_2 > \sigma_2$.

Положив, наконец, $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, получим

$$\begin{aligned}
 g(z_1, z_2) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(-t_1, -t_2) e^{t_1 z_1 + t_2 z_2} dt_1 dt_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{-t_1 z_1 - t_2 z_2} dt_1 dt_2 \equiv g_{(-)}^{(-)}(z_1, z_2) \quad (1.10_4)
 \end{aligned}$$

при $x_k < -\sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Учитывая, что по условию $f(x_1, x_2) \in L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$ и применяя неравенство Шварца к интегралам (1.10₁)–(1.10₄), убеждаемся, что они сходятся равномерно, соответственно, при $x_1 \geq \varepsilon > 0$, $x_2 \geq \varepsilon$; $x_1 \geq \varepsilon$, $x_2 \leq -\varepsilon$; $x_1 \leq -\varepsilon$, $x_2 \geq \varepsilon$; $x_1 \leq -\varepsilon$, $x_2 \leq -\varepsilon$, т. е. преобразование Бореля дает аналитическое продолжение функции $g(z_1, z_2)$, определенной с помощью ряда (1.8) лишь при $|z_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Итак, $g(z_1, z_2)$ регулярна (и следовательно, однозначна) во всей плоскости z_k ($k = 1, 2$), разрезанной вдоль отрезка мнимой оси от точки $-i\sigma_k$ до точки $i\sigma_k$ ($k = 1, 2$).

Отсюда вытекает, что при $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$) существуют и равны $g(iy_1, iy_2)$ пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) = g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + 0, iy_2 + 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) = g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + 0, iy_2 - 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(-)}^{(+)}(iy_1 - \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) = g_{(-)}^{(+)}(iy_1 - 0, iy_2 + 0),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{(-)}^{(-)}(iy_1 - \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) = g_{(-)}^{(-)}(iy_1 - 0, iy_2 - 0).$$

Но из представления (1.10₁) видно, что $g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon)$ является, с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$, трансформацией Фурье функции

$$f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon) = \begin{cases} f(x_1, x_2) e^{-\varepsilon x_1 - \varepsilon x_2}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{для остальных значений } x_1 \text{ и } x_2, \end{cases}$$

которая принадлежит к классу $L_2(-\infty, \infty; -\infty, \infty)$; при этом, как легко видеть, выражение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; \varepsilon) - f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2; 0)|^2 dx_1 dx_2 = \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 (1 - e^{-\varepsilon x_1 - \varepsilon x_2})^2 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, используя равенство Парсеваля для кратных интегралов Фурье, будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon) - \varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) \right|^2 dy_1 dy_2 = 0. \quad (1.11)$$

где

$$\varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \text{l. i. m.}_{a, b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_0^b f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2. \quad (1.12)$$

Но по доказанному выше для $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$), функция $g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 + \varepsilon)$ имеет обычный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому из (1.9) следует, что для почти всех $|y_k| > \sigma_k$ ($k = 1, 2$)

$$\varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(+)}(iy_1 + 0, iy_2 + 0) = \frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2). \quad (1.13)$$

Функция $g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon)$ есть, с точностью до множителя $-\frac{1}{2\pi}$, трансформация Фурье функции

$$f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2; \varepsilon) = \begin{cases} f(x_1, x_2) e^{-x_1 + \varepsilon x_2}, & x_1 > 0, x_2 < 0 \\ 0 & \text{для остальных значений } x_1 \text{ и } x_2. \end{cases}$$

Поэтому, как и выше, получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(-)}(iy_1 + \varepsilon, iy_2 - \varepsilon) - \varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) \right|^2 dy_1 dy_2 = 0, \quad (1.12)$$

где

$$\varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \text{l. i. m.}_{a, b \rightarrow \infty} \int_0^a \int_{-b}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2. \quad (1.12)$$

Следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) &= -\frac{1}{2\pi} g_{(+)}^{(-)}(iy_1+0, iy_2-0) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2), \text{ при } |y_k| > \sigma_k \quad (k=1, 2).\end{aligned}\quad (1.13_2)$$

Аналогично устанавливается, что если

$$\varphi_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b \rightarrow -\infty} \int_{-a}^0 \int_0^b f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 \quad (1.12_3)$$

и

$$\varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b \rightarrow -\infty} \int_{-a}^0 \int_{-b}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2. \quad (1.12_4)$$

то при $|y_k| > \sigma_k$ ($k=1, 2$) будем иметь

$$\varphi_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2); \quad (1.13_3)$$

$$\varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) = -\frac{1}{2\pi} g(iy_1, iy_2). \quad (1.13_4)$$

Из (1.12₁)–(1.12₄) и (1.13₁)–(1.13₄) следует, что трансформация Фурье $F(y_1, y_2)$ функции $f(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}F(y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a, b, c, d \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \int_{-c}^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{a, c \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_0^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{a, d \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 \int_0^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{b, c \rightarrow \infty} \int_0^b \int_{-c}^0 f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \lim_{b, d \rightarrow \infty} \int_0^b \int_0^d f(x_1, x_2) e^{-ix_1 y_1 - ix_2 y_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) + \varphi_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) + \varphi_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) + \varphi_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) = 0,\end{aligned}$$

почти для всех $|y_k| > \sigma_k$ ($k=1, 2$).

Из (1.14) следует, что при $-\infty < x_k < +\infty$ ($k = 1, 2$)

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-z_1}^{z_1} \int_{-z_2}^{z_2} e^{iy_1 x_1 + iy_2 x_2} F(y_1, y_2) dy_1 dy_2.$$

Но тогда очевидно, что это представление сохранится и для всех z_1 и z_2 , т. е.

$$f(z_1, z_2) = \int_{-z_1}^{z_1} \int_{-z_2}^{z_2} e^{iy_1 z_1 + iy_2 z_2} \varphi(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

где $\varphi(y_1, y_2)$ удовлетворяет условию (1.5).

Теорема доказана.

§ 2. Оценки для целых функций двух переменных в пространстве L_2

Пусть $F(x)$ — произвольная функция, заданная на действительной оси. Для всякого $h > 0$ обозначим

$$\Delta_h(F) = \Delta_h(F; x) = F\left(x + \frac{h}{2}\right) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (2.1)$$

$$\Delta_h^{(k)}(F) = \Delta_h(\Delta_h^{(k-1)}(F; x); x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1')$$

Для функций двух переменных обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(F) &= \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(F; x_1, x_2) = \\ &= \Delta_{h_2}^{(q)}\{\Delta_{h_1}^{(p)}(F; x_1); x_2\} = \Delta_{h_1}^{(p)}\{\Delta_{h_2}^{(q)}(F; x_2); x_1\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В дальнейшем нам необходимы следующие простейшие леммы:

Лемма 1. Если $0 < \beta < \frac{2\pi}{\sigma}$, то

$$\frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{\sin \frac{\sigma\beta}{2}} \geq \frac{u}{\sigma} \quad \text{при } 0 \leq u \leq \sigma. \quad (2.3)$$

Доказательство. Составим функцию

$$\varphi(u) = \frac{\sin \frac{u\beta}{2}}{u} \quad 0 \leq u \leq \sigma, \quad 0 < \beta < \frac{2\pi}{\sigma}.$$

Имеем

$$\varphi'(u) = \frac{\cos \frac{u\beta}{2}}{u^2} \left[\frac{u\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \right].$$

Если $0 \leq u \leq \frac{\pi}{\beta}$, то $0 \leq \frac{u\beta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\cos \frac{u\beta}{2} \geq 0$, $\operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \geq \frac{u\beta}{2}$, т. е. $\varphi'(u) \leq 0$.

Если $\frac{\pi}{\beta} \leq u \leq \sigma$, то $\frac{\pi}{2} \leq \frac{u\beta}{2} < \pi$, и, следовательно, $\cos \frac{u\beta}{2} \leq 0$, $\operatorname{tg} \frac{u\beta}{2} \leq 0$, т. е. опять $\varphi'(u) \leq 0$. Значит функция $\varphi(u)$ убывает на отрезке $[0, \sigma]$, откуда и следует утверждение (2.3) леммы 1.

Из (2.3) с.е. ует, что

$$\sin^2 \frac{u\beta}{2} \geq \frac{1}{c^2} \quad \text{при} \quad -\sigma \leq u \leq \sigma \quad (2.3')$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(e^{ix_1+ix_2}; x_1, x_2) = \\ = e^{ix_1+ix_2} (2i)^{p+q} \sin^p \frac{h_1}{2} \sin^q \frac{h_2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. По определениям (2.1), (2.1') и (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2}^{(p, q)}(e^{ix_1+ix_2}; x_1, x_2) = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \{ \Delta_{h_2}^{(q)}(e^{ix_1+ix_2}, x_2); x_1 \} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} [\Delta_{h_2}(e^{ix_1+ix_2}, x_2); x_2]; x_1 \} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} \left[e^{ix_1+ix_2+i\frac{h_2}{2}} - e^{ix_1+ix_2-i\frac{h_2}{2}}; x_2 \right]; x_1 \right\} = \\ = \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} \left[e^{ix_1+ix_2} \left(e^{i\frac{h_2}{2}} - e^{-i\frac{h_2}{2}} \right); x_2 \right]; x_1 \right\} = \\ = 2i \sin \frac{h_2}{2} \Delta_{h_1}^{(p)} \left\{ \Delta_{h_2}^{(q-1)} [e^{ix_1+ix_2}; x_2]; x_1 \right\}. \end{aligned}$$

Применяя этот процесс $p+q$ раз, получим требуемое равенство. Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция из класса W_{σ_1, σ_2} . Тогда справедливы оценки:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2; \quad (2.5)$$

б) если $0 < \beta_k < \frac{2\pi}{\sigma_k}$ ($k=1, 2$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ \leq \frac{\sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q}}{2^{2(p+q)} \sin^{2p} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2; \quad (2.6)$$

в) если $0 < \beta_k \leq \frac{\pi}{\sigma_k}$ ($k = 1, 2$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ \leq 2^{2(p+q)} \sin^{2p} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2. \quad (2.7)$$

Доказательство. Так как по условию $f(z_1, z_2) \in W_{\sigma_1, \sigma_2}$, то имеет место представление (1.4), откуда имеем

$$f(x_1, x_2) = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (2.8)$$

при $-\infty < x_k < +\infty$ ($k = 1, 2$).

Из (2.8), с одной стороны, имеем:

$$\frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} (iu_1)^p (iu_2)^q \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (2.9)$$

С другой стороны, по лемме 2

$$\Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2) = \\ = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2}; x_1, x_2) \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} e^{iu_1 x_1 + iu_2 x_2} (2i)^{p+q} \sin^p \frac{u_1 \beta_1}{2} \sin^q \frac{u_2 \beta_2}{2} \varphi(u_1, u_2) du_1 du_2. \quad (2.10)$$

Из (2.8), (2.9) и (2.10) равенство Парсеваля дает

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \int_{-\sigma_1}^{\sigma_1} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2; \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \int_{-\tau_2}^{\tau_2} u_1^{2p} u_2^{2q} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2 \quad (2.12)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{\beta_1, \beta_2}^{(p, q)}(f; x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \\ & = 2^{2(p+q)} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \int_{-\tau_2}^{\tau_2} \sin^{2p} \frac{u_1 \beta_1}{2} \sin^{2q} \frac{u_2 \beta_2}{2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p+q} f(x_1, x_2)}{\partial x_1^p \partial x_2^q} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq \\ & \leq \sigma_1^{2p} \sigma_2^{2q} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \int_{-\tau_2}^{\tau_2} |\varphi(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2. \end{aligned} \quad (2.12')$$

Неравенство (2.5) следует из (2.12') и (2.11).

Сравнивая (2.11) с (2.12) и имея в виду лемму 1, убеждаемся в справедливости неравенства (2.6).

Неравенство (2.6) вытекает из (2.10) и (2.12), если учесть, что при $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{\sigma}$ $\sin^2 \frac{\sigma \beta}{2} \geq \sin^2 \frac{u \beta}{2}$ ($-\sigma \leq u \leq \sigma$).

Заметим, что неравенство (2.5) можно доказать и опираясь на неравенства (2.6) и (2.7).

Аналогично определяя класс $W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$ целых функций $f(z_1, \dots, z_n)$ n комплексных переменных и конечные разности

$$\Delta_{h_1, h_2, \dots, h_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n),$$

можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — целая функция из класса $W_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}$. Тогда справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq \\ & \leq \sigma_1^{2p_1} \sigma_2^{2p_2} \dots \sigma_n^{2p_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n; \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{p_1+p_2+\dots+p_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq$$

$$\leq \frac{\sigma_1^{2p_1} \sigma_2^{2p_2} \dots \sigma_n^{2p_n}}{2^{2(p_1+p_2+\dots+p_n)} \sin^{2p_1} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \sin^{2p_2} \frac{\sigma_2 \beta_2}{2} \dots \sin^{2p_n} \frac{\sigma_n \beta_n}{2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.15)$$

при $0 \leq \beta_k < \frac{2\pi}{\sigma_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$

и

$$в') \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Delta_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}^{(p_1, p_2, \dots, p_n)}(f; x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \leq \\ \leq 2^{2(p_1+p_2+\dots+p_n)} \sin^{2p_1} \frac{\sigma_1 \beta_1}{2} \dots \sin^{2p_n} \frac{\sigma_n \beta_n}{2} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \quad (2.16)$$

при $0 \leq \beta_k \leq \frac{\pi}{\sigma_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$

Доказательства этих неравенств аналогичны доказательствам неравенств (2.5), (2.6) и (2.7), поэтому мы их опускаем.

Частный случай, когда $n = 1$, $p_1 = m$, дает следующую теорему:

Теорема 3'. Пусть $f(z)$ — целая функция из класса W_σ . Тогда справедливы неравенства:

$$а') \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx \leq \sigma^{2m} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx; \quad (2.17)$$

$$б') \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(m)}(x)|^2 dx \leq \frac{\sigma^{2m}}{2^{2m} \sin^{2m} \frac{\sigma \beta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_\beta^{(m)}(f; x)|^2 dx \quad (2.18)$$

при $0 \leq \beta < \frac{2\pi}{\sigma};$

и

$$в') \int_{-\infty}^{\infty} |\Delta_\beta^{(m)}(f; x)|^2 dx \leq 2^{2m} \sin^{2m} \frac{\sigma \beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (2.19)$$

при $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{\sigma}.$

Отметим, что аналогичные неинтегральные неравенства для тригонометрических сумм были получены С. Б. Стечкиным [2], из которых, с помощью предельного перехода, С. Н. Бернштейном [3] были получены такие же неравенства для целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 28 V 1956

Ի. Հ. Խաչատրյան

ՇԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ԱՄՐՈՂՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ
ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ԵՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ՀԱՏԿՈՒՅՑՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Բ

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատանքում [1] ուսումնասիրված էին ըստ առանձին փոփոխականների աճման տարրեր կարգ ու տիպ ունեցող շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների հատուկ դասեր: Մասնավորաբար, կատարված է Բորելի ձևափոխություն և ինտեգրալ ներկայացում այդ դասերի ֆունկցիաների համար:

Ներկա աշխատանքի § 1-ում այդ արդյունքների հիման վրա բերվում է Պալեյի և Վինների հայտնի թեորեմի ընդհանրացումը շատ փոփոխականներից կախված այն ամբողջ ֆունկցիաների համար, որոնց աճման կարգը ըստ բոլոր փոփոխականների հավասար է մեկի, իսկ տիպերը, ընդհանրապես առած, կարող են տարրեր լինել:

§ 2-ում Պալեյի և Վինների ընդհանրացված թեորեմի հիման վրա բերվում են շատ փոփոխականների ամբողջ ֆունկցիաների մի քանի դնահատականներ L_2 տարածություն մեջ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

{:

1. Джрбашин М. М. К теории некоторых классов целых функций многих переменных. Известия АН Армянской ССР, т. VIII, серия ФМЕТ наук, № 4, 1955.
2. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна. ДАН СССР, т. 60, № 9, 1948.
3. Бернштейн С. Н. Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени. ДАН СССР, т. 60, № 9, 1948.

М. М. Гаспарян

Решение температурной задачи для свободно опертой по контуру выпуклой многоугольной пластинки при линейном распределении температуры по толщине

Как известно, С. П. Тимошенко [1], на основе приближенной теории изгиба пластинок, заметил аналогию в решении температурной задачи свободно опертой пластинки с прямолинейными границами с задачей кручения призматического стержня, имеющего поперечное сечение, совпадающее с видом данной пластинки.

На основе точной теории изгиба пластинки нами была установлена та же аналогия, независимо от толщины пластинки. В данной статье рассматривается решение для указанной пластинки. Как частный случай, рассмотрена задача для правильной многоугольной пластинки.

§ 1. Применение комплексного переменного

На основании указанной аналогии, во всей области пластинки должно удовлетворяться дифференциальное уравнение

$$\text{где:} \quad \nabla^2 w = - \frac{\alpha t_0 (1 + \sigma)}{h}, \quad (1.1)$$

w — вертикальное перемещение срединной плоскости,

$$t_0 = t_a - t_b,$$

α — коэффициент линейного расширения,

σ — коэффициент Пуассона.

Решение этого уравнения при помощи комплексного переменного $z = x + iy$ представим в виде

$$w = - \frac{\alpha t_0 (1 + \sigma)}{4h} z \bar{z} + \varphi_0(z) + \bar{\varphi}_0(\bar{z}), \quad (1.2)$$

или

$$w = - \frac{\alpha t_0 (1 + \sigma)}{4h} z \bar{z} + 2\text{Re}[\varphi_0(z)], \quad (1.2')$$

где

$$\bar{z} = x - iy,$$

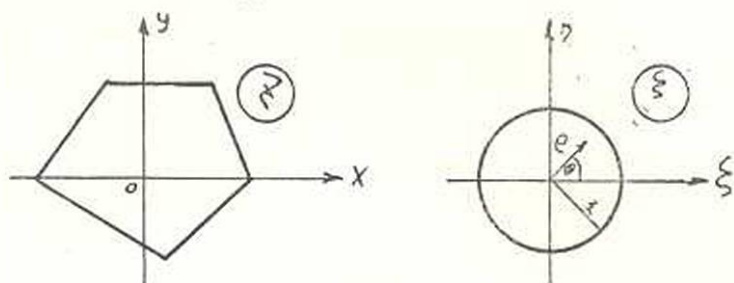
$\varphi_0(z)$ — аналитическая функция комплексного переменного z , голоморфная в области пластинки, $\bar{\varphi}_0(\bar{z})$ — аналитическая функция переменного \bar{z} , сопряженная с $\varphi_0(z)$.

Для определения w применяем метод конформного отображения [2].

Отообразим область пластинки при помощи функции

$$z = \omega(\zeta) \quad (1.3)$$

на область единичного круга.



Фиг. 1.

Примем, что при этом начало координат плоскости z переходит в начало координат плоскости ζ , которая находится в центре круга, т. е. $\omega(0) = 0$.

Введя обозначения

$$\varphi_0(z) = \varphi_0[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta),$$

$$\bar{\varphi}_0(\bar{z}) = \bar{\varphi}_0[\bar{\omega}(\bar{\zeta})] = \bar{\varphi}(\bar{\zeta})$$

и учитывая (1.3), выразим (1.2) через функции комплексных переменных ζ и $\bar{\zeta}$:

$$w = -\frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}), \quad (1.4)$$

или

$$w = -\frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + 2\text{Re}[\varphi(\zeta)]. \quad (1.4')$$

Функцию $\varphi(\zeta)$ определяем из контурного условия пластинки.

$$w = 0.$$

Так как

$$\zeta = \rho e^{i\theta},$$

то на контуре

$$\zeta = e^{i\theta} = t \quad \text{и} \quad \bar{\zeta} = e^{-i\theta} = \frac{1}{t}.$$

Внося эти значения в выражение (1.4) и приравнявая его нулю, получим контурное условие в следующем виде:

$$\varphi(t) + \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right). \quad (1.5)$$

Умножим обе части (1.5) на $\frac{dt}{2\pi i(t-\zeta)}$, где ζ лежит внутри круга, и проинтегрируем по всему контуру γ единичного круга:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-\zeta} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-\zeta)} dt = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{2\pi i 4h} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-\zeta)} dt. \quad (1.6)$$

Функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области единичного круга, поэтому, согласно интегральной теореме Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{t-\zeta} dt = \varphi(\zeta),$$

функция же $\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)$ голоморфна вне области единичного круга, и поэтому, по той же теореме,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t-\zeta} dt = \bar{\varphi}(0).$$

Подставляя эти значения в (1.6), получим:

$$\varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{2\pi i 4h} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t-\zeta} dt. \quad (1.7)$$

В этом уравнении, принимая $\zeta = 0$, получим

$$\varphi(0) + \bar{\varphi}(0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt.$$

Но

$$dt = ie^{i\theta} d\theta = itd\theta.$$

Поэтому

$$\varphi(0) + \bar{\varphi}(0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{8\pi h} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{i\theta}) d\theta.$$

Но так как мнимая часть $\varphi(0)$ произвольна, то, взяв ее равной нулю, т. е. полагая $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$, из предыдущего равенства получим

$$\varphi(0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{16\pi h} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{i\theta}) d\theta.$$



Подставляя это значение для $\varphi_0(0)$ в (1.7), окончательно получаем

$$\varphi(\zeta) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) dt}{t-\zeta} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{-i\theta}) d\theta \right]. \quad (1.8)$$

Внося, далее, (1.8) в (1.4), получим общее выражение для прогиба

$$w = -\frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \left\{ \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{-i\theta}) d\theta - \right. \\ \left. - 2R_c \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) dt}{t-\zeta} \right] \right\}. \quad (1.9)$$

Таким образом, имея отображающую функцию $\omega(\zeta)$, легко можно определить прогиб в многоугольной пластинке.

Определим значение прогиба в начале координат, для чего подставим в (1.9)

$$\zeta = 0, \quad \omega(0) = 0;$$

тогда

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{8\pi h} \int_0^{2\pi} \omega(e^{i\theta}) \bar{\omega}(e^{-i\theta}) d\theta, \quad (1.10)$$

Представляя отображающую функцию в виде степенного ряда

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k, \quad (1.11)$$

из (1.10) будем иметь:

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{8\pi h} \int_0^{2\pi} (c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{2i\theta} + \dots) (\bar{c}_1 e^{-i\theta} + \bar{c}_2 e^{-2i\theta} + \dots) d\theta.$$

Интегрирование дает:

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \bar{c}_k. \quad (1.12)$$

Этой формулой определяется значение прогиба в центре пластинки, если известны коэффициенты разложения отображающей функции.

Изгибающие и крутящие моменты определяются по формулам

$$M_x + M_y = -\frac{D\alpha t_0(1-\sigma^2)}{h}, \quad (1.13)$$

$$M_x - M_y + 2i M_{xy} = 4D(1-\sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (1.14)$$

С другой стороны, из (1.3) получаем:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\omega'(\zeta) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - \omega''(\zeta) \frac{\partial w}{\partial \zeta}}{[\omega'(\zeta)]^3}.$$

Имея в виду последнее соотношение, а также (1.4), найдем

$$M_x - M_y + 2i M_{xy} = 4D(1-\sigma) \frac{\omega'(\zeta) \varphi''(\zeta) - \varphi'(\zeta) \omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3}.$$

Заменяя $\varphi(\zeta)$ ее выражением (1.8), получим:

$$M_x - M_y + 2i M_{xy} = \frac{\alpha t_0 D (1-\sigma^2)}{h} \left\{ \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^3} \cdot \frac{1}{\pi i} \int \frac{\omega(t) \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right)}{(t-\zeta)^3} dt - \right. \\ \left. - \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(t) \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}. \quad (1.15)$$

Формулами (1.13) и (1.15) определяются изгибающие и крутящие моменты.

§ 2. Поведение угла наклона упругой поверхности в угловых точках пластинки

Исследуем поведение угла наклона упругой поверхности $\frac{\partial w}{\partial n}$ в угловых точках контура пластинки.

Используем следующее соотношение:

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = -2i \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = 2e^{i\beta} \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.1)$$

где β — угол между нормалью к контуру и осью ox . Но на контуре пластинки $w = 0$, а поэтому и $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$.

Следовательно, из (2.1) будем иметь

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 2e^{i\beta} \frac{\partial w}{\partial z} = 2e^{i\beta} \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

Подставляя в это уравнение значение w из (1.4) и имея в виду (1.3), получим:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = e^{-i\theta} \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} \left[\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) dt}{(t-\zeta)^2} \right]_{\zeta \rightarrow t^*}, \quad (2.2)$$

где t^* — произвольно фиксированная точка на контуре.

Для отображения области многоугольника на область единичного круга используем формулу Кристоффеля—Шварца:

$$z = \omega(\zeta) = c \int_0^{\zeta} (a_1 - \zeta)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (a_2 - \zeta)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\zeta, \quad (2.3)$$

где

c — постоянный параметр;

n — число сторон многоугольника;

a_1, a_2, \dots, a_n — точки на контуре единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника (фиг. 2);

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника, выраженные в радианах.

Из (2.3) получим:

$$\omega'(\zeta) = c (a_1 - \zeta)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (a_2 - \zeta)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1}. \quad (2.4)$$

Отсюда

- 1) при $0 < \alpha_k < \pi$, $\omega'(a_k) \rightarrow \infty$;
- 2) при $\pi < \alpha_k < 2\pi$, $\omega'(a_k) \rightarrow 0$.

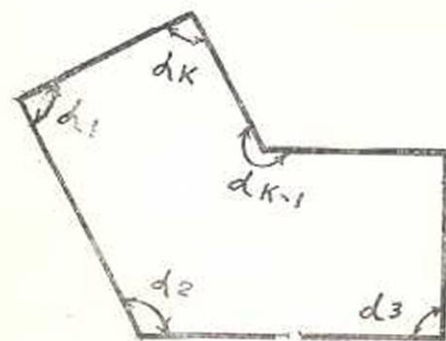
Пользуясь этими выражениями, замечаем, что соотношение (2.2) при углах больших π , стремится к бесконечности, что физически невозможно. Значит наше решение, при углах, больших π , неверно.

Теперь покажем, что, при $0 < \alpha_k < \pi$ в вершине угла, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$.

В этом случае в вершине угла $\omega'(a_k) \rightarrow \infty$. Но в этих точках производная интеграл типа Коши

$$V(a_k) = \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) dt}{(t-\zeta)^2} \right]_{\zeta \rightarrow a_k}$$

представляет неопределенность, и без дополнительного исследования невозможно сделать определенные заключения о значении $\frac{\partial w}{\partial n}$.



Фиг. 2.

Поставленную задачу легко можно решить методом, разработанным в работе О. М. Сапонджяна [3]. Представим вышеуказанный интеграл в следующем виде:

$$Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{(t-\zeta)^2} dt = \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda \omega^2(t) + \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}^2\left(\frac{1}{t}\right) - \lambda \left[\omega(t) - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right]^2}{(t-\zeta)^2} dt, \quad (2.5)$$

где

$$\lambda = \frac{\bar{\omega}(a_k)}{\omega(a_k)}.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\lambda \omega^2(t)}{t-\zeta} dt = \lambda \omega^2(\zeta); \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{\lambda} \bar{\omega}^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t-\zeta} dt = 0.$$

Следовательно,

$$Y(\zeta) = \lambda \omega'(\zeta) \omega(\zeta) - \frac{\lambda}{4\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[\omega(t) - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right]^2}{(t-\zeta)^2} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$Y(\zeta) = \lambda \omega'(\zeta) \omega(\zeta) - \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[\omega(t) - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \left[\omega'(t) + \frac{1}{\lambda t^2} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{t}\right) \right]}{t-\zeta} dt.$$

Подставляя это выражение в (2.2), имеем:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = e^{i\beta \alpha t_0(1+\sigma)} \left\{ \lambda \omega(\zeta) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[\omega(t) - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \left[\omega'(t) + \frac{1}{\lambda t^2} \bar{\omega}'\left(\frac{1}{t}\right) \right] dt}{t-\zeta} \right\}. \quad (2.6)$$

Введем обозначение

$$U(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\left[\omega(t) - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \right] \left[\omega'(t) + \frac{1}{\lambda t^2} \bar{\omega}' \left(\frac{1}{t} \right) \right]}{t - \zeta} dt.$$

$U(\zeta)$ принимает конечное значение в точке, соответствующей вершине многоугольника, и так как в такой точке (при $0 < \alpha_k < \pi$) $\omega'(a_k) \rightarrow \infty$, то

$$\left[\frac{U(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]_{\zeta=a} \rightarrow 0.$$

С другой стороны, согласно (2.4),

$$\lambda \omega(a_k) - \bar{\omega}(a_k) = 0.$$

Следовательно, окончательно получим (2.5), при

$$0 < \alpha_k < \pi. \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{a_k} = 0.$$

Таким образом, угол наклона упругой поверхности в углах выпуклого многоугольника равен нулю.

Далее, можно показать, что изгибающие и крутящие моменты обращаются в нуль в вершине острого угла, имеют конечное значение в вершине прямого угла и стремятся к бесконечности в вершине тупого угла.

§ 3. Случай правильного многоугольника

Область, ограниченная правильным многоугольником, отображается в область единичного круга при помощи следующей функции:

$$z = \omega(\zeta) = c \int_0^{\zeta} \frac{dt}{(1-t^n)^{\frac{2}{n}}}, \quad (3.1)$$

где n — число сторон многоугольника, а

c — постоянный параметр, который по данным [3] определяется по приведенной ниже таблице.

n	3	4	5	6	7	8
$\frac{c}{r_0}$	0,5661	0,7628	0,8514	0,8985	0,9442	0,9759

Здесь r_0 — радиус описанной окружности.

По известной формуле (3.1) получается

$$z = w(\zeta) = c \left[\zeta + \frac{2\zeta^{n+1}}{n(n+1)!} + \frac{2(n+2)\zeta^{2n+1}}{n^2(2n+1)2!} + \frac{2(n+2)(2n+2)\zeta^{3n+1}}{n^3(3n+1)3!} + \right. \\ \left. + \frac{2(n+2)(2n+2)(3n+2)\zeta^{4n+1}}{n^4(4n+1)4!} + \dots \right]. \quad (3.2)$$

Подставляя эти значения в (1.12), получим выражение для прогиба в центре правильной многоугольной пластинки

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} c^2 \left[1 + \frac{4}{n^2(n+1)!} + \frac{4(n+2)^2}{n^4(2n+1)(2!)^2} + \right. \\ \left. + \frac{4(n+2)^2(2n+2)^2}{n^6(3n+1)^2(3!)^2} + \frac{4(n+2)^2(2n+2)^2(3n+2)^2}{n^8(4n+1)^2(4!)^2} + \dots \right]. \quad (3.3)$$

Этот ряд — быстро сходящийся, поэтому можно взять лишь несколько первых его членов.

Например, в случае равностороннего треугольника, если взять только два первых члена ряда, то ошибка, как мы далее увидим, будет около 1%. С возрастанием числа сторон многоугольника процент ошибки уменьшается.

Для практических расчетов при $n=4$ достаточно взять лишь первый член ряда. Тогда

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} c^2, \quad (3.4)$$

где c определяется из вышеприведенной таблицы.

В случае равностороннего треугольника, как было уже отмечено, достаточно учесть первые два члена ряда (3.3):

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{4h} (0,566)^2 \left(1 + \frac{1}{36} \right) r_0^2 = 0,0823 \alpha t_0(1+\sigma) r_0^2. \quad (3.5)$$

С. П. Тимошенко [1] нашел точное решение этой же задачи. Согласно этому решению:

$$w(0,0) = \frac{\alpha t_0(1+\sigma)}{12} r_0^2 = 0,0833 \alpha t_0(1+\sigma) r_0^2. \quad (3.6)$$

Приближенное значение (3.5), по сравнению с точным значением (3.6), дает ошибку в 1,2%.

Выведем выражения для моментов в центре правильной многоугольной пластинки.

Формула (1.15) для центра координат ($\zeta = 0$) примет следующий вид:

$$(M_x - M_y + 2iM_{xy}) = - \frac{D\alpha t_0(1-\sigma^2)}{h} \left\{ \frac{1}{[w'(0)]^2} \frac{1}{\pi i} \int \frac{w(t) \bar{w} \left(\frac{1}{t} \right)}{t^2} dt - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega''(0)}{[\omega'(0)]^2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(t) \overline{\omega\left(\frac{1}{t}\right)}}{t^2} dt \right\}. \quad (3.7)$$

Подставим в (3.7) значение $t = e^{i\theta}$, замечая при этом, что, согласно (3.1) $\omega''(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & (M_x - M_y + 2iM_{xy})_0 = \\ & = - \frac{D\alpha t_0(1-\sigma^2)}{h} \cdot \frac{1}{[\omega'(0)]^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} \omega(e^{i\theta}) \overline{\omega(e^{-i\theta})} d\theta. \end{aligned}$$

Но, имея в виду (3.2), легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} \omega(e^{i\theta}) \overline{\omega(e^{-i\theta})} d\theta = 0.$$

Следовательно,

$$(M_x - M_y + 2iM_{xy}) = 0,$$

откуда

$$(M_x - M_y) = 0 \quad \text{и} \quad M_{xy} = 0.$$

Имея в виду и формулу (3.7), для центра правильной многоугольной пластинки будем иметь:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= 0; \\ M_x = M_y &= - \frac{D\alpha t_0(1+\sigma)}{2h}, \end{aligned}$$

или, подставляя значение жесткости D , получим

$$M_x = M_y = - \frac{Eh^2\alpha t_0}{24}. \quad (3.8)$$

Таким образом, расчетные величины задачи об изгибе правильной многоугольной пластинки, при распределении температуры линейным законом по толщине пластинки, определяются весьма простыми формулами (3.4) и (3.8).

Մ. Մ. Գասպարյան

ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ՈՒՌՈՒՑԻԿ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ
 ԼՈՒԾՈՒՄԸ, ԵՐԲ ԶԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԸ ԸՍՏ ՍԱԼԻ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՎՈՒՄ
 Է ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Օգտվելով կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդից և Օ. Մ. Սապոն-
 ջյանի [3] եզրագծով ազատ շենված սալի ծաման խնդրի նեոազատությունից,
 արված է եզրագծով ազատ շենված ուսուցիչի բազմանկյուն սալի ծաման
 խնդիրը, երբ ջերմութունն ըստ սալի հաստության բաշխվում է գծային
 օրենքով: Որպես մասնավոր դեպք դիտված է կանոնավոր բազմանկյուն
 սալի խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки, 1948; Теория упругости (изд. II), 1937.
2. Мухомеладзе Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упру-
 гости, 1949.
3. Сапонджян О. М. Изгиб свободно опертой полигональной плиты: Известия
 АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. V, № 2, 1952.

М. М. Манукян

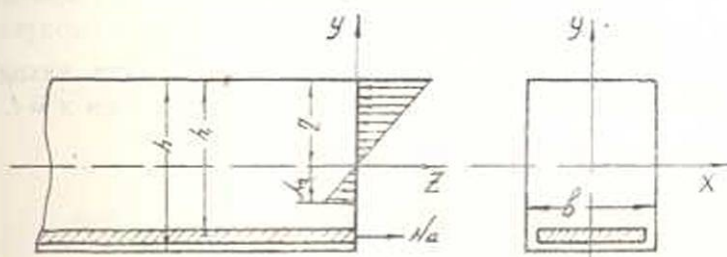
Деформация и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и, частично, растянутой зон бетона

В настоящей работе исследуются деформации и напряжения в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести сжатой и, частично, растянутой зон бетона, пользуясь линейной теорией ползучести бетона, развитой в работе [1].

При решении этой задачи пришлось предварительно разработать способ для определения положения нейтральной оси данной балки в зависимости от ее упруго-ползучих характеристик и времени t .

Результаты, полученные теоретическим путем, сравниваются с опытными данными ЦНИПС [2].

§ 1. *Постановка задачи.* Рассмотрим изгибаемую железобетонную балку с одиночной арматурой (фиг. 1). Допустим, что балка



Фиг. 1.

имеет одну плоскость симметрии, и все внешние силы действуют в этой плоскости. Положим, далее, что сжатая зона бетона работает полностью, а растянутая зона — частично, ввиду образования в ней трещин. Обозначим расстояние от сжатого края сечения до центра тяжести арматуры через h_1 , высоту сечения h , ширину b , расстояние нейтральной оси от сжатого края балки τ .

Направим координатные оси Ox и Oy по главным осям инерции поперечного сечения, а ось Oz — вдоль балки.

При изучении напряженного состояния в изгибаемой железобе-

тонной балке будем принимать, что сечения после деформации остаются плоскими.

Эта задача в случае, когда растянутая зона работает полностью, решена Н. Х. Арутюняном [1].

§ 2. *Начальное упругое состояние.* При решении данной задачи примем гипотезу плоских сечений. Тогда деформация бетона ε_0 и соответствующее напряжение σ_0 по направлению оси oz будет вычисляться формулами:

$$\varepsilon_0 = A(z)y, \quad (2.1)$$

$$\sigma_0 = E_0 A(z)y, \quad (2.2)$$

где $A(z)$ — неизвестная кривизна балки,

E_0 — модуль деформации бетона,

y — координата точки.

Из условия совместности деформации арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем:

$$\varepsilon_0|_{y=-(h_1-\eta_0)} = \varepsilon_a, \quad (2.3)$$

где ε_a — деформация арматуры,

η_0 — пока неизвестная высота сжатой зоны бетона.

Из соотношений (2.1), (2.3) и замечаем, что

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a}, \quad (2.4)$$

получим

$$\sigma_a = -E_a A(z)(h_1 - \eta_0), \quad (2.5)$$

где E_a — модуль деформации арматуры.

Напишем уравнения равновесия элемента балки, находящегося между произвольным сечением z и торцевым сечением $z = l$.

Имеем

$$\int_{-\lambda\eta_0}^{\eta_0} \sigma_0 b dy + N_a = 0; \quad (2.6)$$

$$\int_{-\lambda\eta_0}^{\eta_0} \sigma_0 b y dy - N_a (h_1 - \eta_0) = M_z, \quad (2.7)$$

где N_a — усилие в арматуре,

$$N_a = F_a \sigma_a = -F_a E_a A(z)(h_1 - \eta_0), \quad (2.8)$$

F_a — площадь поперечного сечения арматуры,

M_z — изгибающий момент в рассматриваемом сечении,

λ — постоянное число, причем $0 \leq \lambda < 1$.

Подставляя значения σ_0 и N_a из (2.2) и (2.8) в (2.6), после интегрирования приведем его к виду:

$$(1 - \lambda^2)\zeta_0^2 + 2\mu m \zeta_0 - 2\mu m = 0, \quad (2.9)$$

где $\zeta_0 = \frac{\eta_0}{h_1}$ — отношение сжатой высоты сечения данной балки в начальный момент времени к полезной высоте сечения.

$m = \frac{E_a}{E_b}$ — модульное отношение,

$\mu = \frac{F_a}{bh_1}$ — коэффициент армирования.

Решение уравнения (2.9) будет:

$$\zeta_0 = \frac{\mu m}{1 - \lambda^2} \left[\sqrt{1 + 2 \frac{1 - \lambda^2}{\mu m}} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

Здесь перед квадратным корнем взят знак плюс, исходя из физических соображений.

При $\lambda = 0$ выражение (2.10) примет вид:

$$\zeta_0 = \mu m \left[\sqrt{1 + \frac{2}{\mu m}} - 1 \right]. \quad (2.11)$$

Подставляя значения σ_0 и N_0 из (2.2) и (2.8) в уравнение (2.7), после интегрирования получим

$$A(z) = \frac{M_z}{E_b F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.12)$$

где F_0 — площадь поперечного сечения бетона.

Пользуясь выражениями (2.2), (2.5) и (2.12), находим

$$\sigma_0 = \frac{M_z y}{F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.13)$$

$$\sigma_a = - \frac{M_z m (1 - \zeta_0)}{F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1}, \quad (2.14)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки согласно (2.12) будет иметь вид

$$\frac{d^2 w_0}{dz^2} = \frac{M_z}{E_b F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m (1 - \zeta_0)^2 \right] h_1^2}, \quad (2.15)$$

где w_0 — прогиб балки.

§ 3. Напряжения и деформации в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести бетона при постоянном модуле мгновенной деформации. В предыдущем параграфе мы определили упруго-мгновенное напряженное состояние в железобетонной балке.

В настоящем параграфе приводится решение этой же задачи с учетом ползучести бетона.

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона $E_0(t)$ изменяется во времени незначительно, и практически его можно считать постоянным, т. е. $E_0 = \text{const}$.

Между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_0(t)$ и напряжением $\sigma_0(t)$ с учетом ползучести бетона, как известно, существует следующая зависимость [1]:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E_0} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3.1)$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести бетона.

Пользуясь гипотезой плоских сечений, напишем

$$\varepsilon_0(t) = A(z, t)y, \quad (3.2)$$

где $A(z, t)$ — кривизна балки в данный момент времени t .

Из соотношений (3.1) и (3.2) следует, что выражение $\sigma_0(t)$ можно представить в следующей форме:

$$\sigma_0(t) = E_0 B(z, t)y, \quad (3.3)$$

где $B(z, t)$ — неизвестная функция. Очевидно, что функции $A(z, t)$ и $B(z, t)$ связаны следующей интегральной зависимостью:

$$A(z, t) = B(z, t) - E_0 \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.4)$$

При решении поставленной задачи удобно пользоваться функцией $B(z, t)$.

Тогда (3.1) примет вид:

$$\varepsilon_0(t) = B(z, t)y - E_0 y \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.5)$$

Из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона имеем:

$$\varepsilon_0(t)|_{y=-(h_1-\tau)} = \varepsilon_a(t),$$

Пользуясь этим соотношением и замечая, что

$$\varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a},$$

приведем выражение (3.5) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(t) = & -E_a B(z, t)(h_1 - \tau) + \\ & + E_a E_0 (h_1 - \tau) \int_{\tau_1}^t B(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для определения усилий в арматуре N_a получим

$$N_a(t) = -F_a E_a V(z, t)(h_1 - \eta) + F_a E_a E_0 (h_1 - \eta) \int_{\eta}^1 V(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (3.7)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к определению двух функций $V(z, t)$ и $\eta(t)$. Для их определения воспользуемся уравнениями равновесия, которые в данном случае будут:

$$\int_{-\lambda \eta}^{\eta} \sigma_0(t) b dy + N_a(t) = 0, \quad (3.8)$$

$$\int_{-\lambda \eta}^{\eta} \sigma_0(t) b y dy - N_a(t)(h_1 - \eta) = M_x. \quad (3.9)$$

λ — постоянное число, причем $0 \leq \lambda < 1$.

Следует отметить, что приведенное здесь решение строго отвечает физической постановке задачи при $\lambda = 0$, а следовательно достаточно хорошо будет описывать картину напряженного состояния в балке при малых λ .

Подставляя значения $\sigma_0(t)$ и $N_a(t)$ из (3.2) и (3.7) в уравнения (3.8) и (3.9), после интегрирования и некоторых преобразований находим

$$V(z, t) = \frac{M_x}{E_0 F_0 \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta) \frac{\zeta^3}{2} \right] h_1^2}, \quad (3.10)$$

$$\int_{\eta}^1 V(z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[1 - \frac{(1 - \lambda^2)\zeta^2}{2\mu m(1 - \zeta)} \right] V(z, t), \quad (3.11)$$

где $\zeta = \frac{\eta}{h_1}$ есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t к полезной высоте сечения.

Таким образом, определение искомых функций $V(z, t)$ и $\zeta(t)$ свелось к совместному решению двух интегральных уравнений (3.10) и (3.11).

Заметим, что если исключить из уравнения (3.11) посредством (3.10) функцию $V(z, t)$, то получим для определения $\zeta(t)$ нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, решение которого связано с практически непреодолимой трудностью. Поэтому сперва рассмотрим интегральное уравнение (3.11) и применим к нему метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [3].

Придавая в (3.11) верхнему пределу t последовательно возрастающие конкретные значения t_1, t_2, \dots, t_n , получим:

$$\int_{\zeta_1}^{t_1} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2}{2\mu m(1-\zeta_1)} \right] B(z, t_1), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{t_2} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0} \left[1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_2^2}{2\mu m(1-\zeta_2)} \right] B(z, t_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_1}^{t_3} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_3, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_3} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_3, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ & \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} B(z, \tau) \frac{\partial C(t_k, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{E_0} \left[1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu m(1-\zeta_k)} \right] B(z, t_k), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $\zeta_i = \zeta(t_i) = \frac{\eta(t_i)}{h_1}$ есть отношение высоты сжатой зоны сечения балки в момент времени t_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) к полезной высоте сечения.

Если интегрировать уравнение (3.12) по частям и иметь в виду, что $C(t_1, t_1) = 0$, то получим:

$$\begin{aligned} & B(z, \tau_1) C(t_1, \tau_1) + \int_{\zeta_1}^{t_1} C(t_1, \tau) \frac{\partial B(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ & = - \frac{1}{E_0} \left[1 - \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2}{2\mu m(1-\zeta_1)} \right] B(z, t_1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применяя к интегралу в левой части полученного выражения теорему о среднем, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & B(z, t_1) \left[\frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1)}{2\mu m E_0(1-\zeta_1)} - C(t_1, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1} = \\ & = B(z, \tau_1) \left[C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Аналогичным образом для моментов времени $t = t_2$ и $t = t_k$ из уравнений (3.13) и (3.14) находим

$$\begin{aligned} & B(z, t_2) \left[\frac{(1-\lambda^2)\zeta_2^2 - 2\mu m(1-\zeta_2)}{2\mu m E_0(1-\zeta_2)} - C(t_2, \xi) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ & = B(z, \tau_1) \left[C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi) \right] \Big|_{\zeta_1}^{t_1} + \end{aligned}$$

$$+ B(z, t_1) \left[C(t_1, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} - C(t_2, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} \right], \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} B(z, t_k) \left[\frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 - 2\mu m(1 - \zeta_k)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_k)} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[C(t_k, \tau_1) - C(t_k, \xi) \Big|_{\tau_1}^{t_k} \right] + \\ + B(z, t_1) \left[C(t_k, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_1}^{t_2} \right] + \\ \dots + B(z, t_{k-1}) \left[C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-2}}^{t_{k-1}} - C(t_k, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Символом $C(t_m, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$ здесь обозначено среднее значение функции $C(t_m, \tau)$ в интервале изменения переменной τ , равной $(t_i - t_{i-1})$.

Формулы (3.16), (3.17) и (3.18) в общем виде являются точным решением интегрального уравнения (3.11). Для определения численных значений искомых величин необходимо применить приближенный метод определения средних величин $C(t_k, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}$. В практических расчетах эту величину с достаточной точностью можно определить с помощью следующего равенства:

$$C(t_k, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = C \left(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \right). \quad (3.19)$$

Подставляя это выражение в (3.16), (3.17) и (3.18), получим решение интегрального уравнения (3.11) в следующем виде:

$$\begin{aligned} B(z, t_1) \left[\frac{(1 - \lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1 - \zeta_1)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_1)} - C \left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[C(t_1, \tau_1) - C \left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} B(z, t_2) \left[\frac{(1 - \lambda^2)\zeta_2^2 - 2\mu m(1 - \zeta_2)}{2\mu m E_0(1 - \zeta_2)} - C \left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right] = \\ = B(z, \tau_1) \left[C(t_2, \tau_1) - C \left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ + B(z, t_1) \left[C \left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
 B(z, t_k) & \left[\frac{(1-\lambda^2)\zeta_k^2 - 2\mu m(1-\zeta_k)}{2\mu m E_0(1-\zeta_k)} - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right] = \\
 & = B(z, \tau_1) \left[C(t_k, \tau_1) - C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] + \\
 & + B(z, t_1) \left[C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] + \\
 & \dots + B(z, t_{k-1}) \left[C\left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2}\right) - \right. \\
 & \quad \left. - C\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким образом, для определения $B(z, t_1)$ и ζ_1 получаем систему двух уравнений

$$B(z, t_1) = \frac{M_x}{E_0 F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right] h_1^2}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
 B(z, t_1) & \left[\frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1)}{2\mu m E_0(1-\zeta_1)} - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] = \\
 & = B(z, \tau_1) \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right],
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

где $B(z, \tau_1) = A(z)$ и определяется формулой (2.12).

Подставляя значение $B(z, t_1)$ из (3.23) в (3.24), получим одно уравнение, из которого можно определить ζ_1 . Это уравнение будет:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1-\lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(1-\zeta_1) \left[1 + E_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]}{2\mu m E_0(1-\zeta_1) \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right]} = \\
 & = \frac{C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}{f(\zeta_0)},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$f(\zeta_0) = (1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^2}{3} + \mu m(1 - \zeta_0)^2, \tag{3.26}$$

ζ_0 — определяется формулой (2.10).

Уравнению (3.25) можно дать следующий вид:

$$a_1 \zeta_1^4 + b_1 \zeta_1^3 + c_1 \zeta_1^2 + d_1 \zeta_1 + e_1 = 0, \tag{3.27}$$

где

$$\zeta_1 = \frac{\eta_1}{h_1}, \quad \zeta_0 = \frac{\eta_0}{h_1}. \tag{3.28}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \mu m E_0 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda - 1) \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right], \\ b_1 &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda) (2 - 2\lambda - \lambda^2) \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right], \\ c_1 &= 3(1 - \lambda^2) \left\{ f(\zeta_0) - \mu m E_0 \left[C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\}, \\ d_1 &= -e_1 = 6\mu m f(\zeta_0) \left[1 + E_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Решая уравнение (3.27), определяем то значение ζ_1 , которое имеет в данном случае физический смысл. Нетрудно видеть, пользуясь теоремой Штурма, что это уравнение имеет только один корень, который для данной задачи имеет физический смысл. Подставляя значение $\zeta_1 = \frac{\eta_1}{h_1}$ в выражение (3.23), определяем $B(z, t_1)$.

Если в уравнении (3.10) заменить t через t_1 , то из полученного уравнения и из (3.19) получим

$$a_2 \zeta_2^4 + b_2 \zeta_2^3 + c_2 \zeta_2^2 + d_2 \zeta_2 + e_2 = 0, \quad (3.30)$$

где

$$\zeta_2 = \frac{\eta_2}{h_1}. \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \mu m E_0 (1 + \lambda) (2\lambda^2 + \lambda - 1) A_2, \\ b_2 &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda) (2 - 2\lambda - \lambda^2) A_2, \\ c_2 &= 3(1 - \lambda^2) [f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) - \mu m E_0 A_2], \\ d_2 &= -e_2 = 6\mu m f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \left[1 + E_0 C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

$$\varphi(\zeta_1) = (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2}, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \varphi(\zeta_1) \left[C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Здесь значение ζ_1 определяется из (3.27).

Решая (3.30), определим значение ζ_2 . После этого определяем значение $B(z, t_2)$.

Аналогично из уравнений (3.11) и (3.23) получим:

$$a_k \zeta_k^4 + b_k \zeta_k^3 + c_k \zeta_k^2 + d_k \zeta_k + e_k = 0. \quad (3.35)$$

где

$$\bar{z}_k = \frac{\eta_k}{h_1} \quad (3.36)$$

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \mu m E_0 (1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1) A_k, \\ b_k &= 2\mu m E_0 (1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2) A_k, \\ c_k &= 3(1 - \lambda^2) \{ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) - \mu m E_0 A_k \}, \\ d_k &= -e_k = 6\mu m f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \\ &\quad \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[1 + E_0 C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[C(t_k, \tau_1) - C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[C \left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_1 + t_1}{2} \right) \right] + \\ &+ f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_3) \dots \varphi(\zeta_{k-1}) \left[C \left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) - \right. \\ &\left. - C \left(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2} \right) \right] + \dots + f(\zeta_0) \varphi(\zeta_1) \varphi(\zeta_2) \dots \varphi(\zeta_{k-2}) \times \\ &\times \left[C \left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Решая уравнение (3.35), определим значение \bar{z}_k , после чего из соотношения (3.10), для определения значения $V(z, t_k)$, можем получить формулу:

$$V(z, t_k) = \frac{M_x}{F_0 E_0 \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \bar{z}_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right] h_1^2} \quad (3.39)$$

Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим общее выражение функции $V(z, t)$ при $t = \tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0 = \tau_1$.

Пользуясь соотношениями (3.2) и (3.39), для напряжений $\sigma_0(t)$ окончательно получим

$$\sigma_0(t_k) = \frac{M_x \gamma}{F_0 \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \bar{z}_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right] h_1^2}, \quad (3.40)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $t_0 = \tau_1$, а \bar{z}_k определяется из уравнения (3.35).

Аналогичным образом из соотношений (3.6), (3.11) и (3.39), для определения напряжения в арматуре $\sigma_a(t)$, находим

$$\varepsilon_a(t_k) = - \frac{M_z(1 - \lambda^2 \zeta_k^2)}{2\mu F_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} h_1, \quad (3.41)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $t_0 = \tau_1$.

Легко видеть, что если в выражениях (3.39), (3.40) и (3.41) подставить $t = \tau_1$, то они совпадут с выражениями (2.12), (2.13) и (2.14), которые имеют место при упругой задаче.

Пользуясь выражениями (3.5), (3.11) и (3.39) для определения полной продольной деформации бетона $\varepsilon_b(t)$, получим

$$\varepsilon_b(t_k) = \frac{\sigma_b(t_k)}{E_0} \cdot \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu(1 - \zeta_k)}, \quad (3.42)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $t_0 = \tau_1$.

Для деформации арматуры $\varepsilon_a(t)$ имеем:

$$\varepsilon_a(t_k) = \frac{\sigma_a(t_k)}{E_a}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (3.43)$$

Известно, что

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_b(\tau_1) &= \frac{d^2 w_0}{dz^2} y, \\ \varepsilon_b(t_k) &= \frac{d^2 w_k}{dz^2} y, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

где $w_0 = w(\tau_1)$ — прогиб балки в момент времени τ_1 ,

$w_k = w(t_k)$ — прогиб балки в момент времени t_k .

Из (3.44) легко получить

$$\frac{d^2 w_k}{dz^2} = \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu(1 - \zeta_0)^2 \right]}{2\mu(1 - \zeta_k) \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} \frac{d^2 w_0}{dz^2} \quad (3.45)$$

Интегрируя это уравнение и принимая для простоты такое закрепление опор балки, чтобы постоянные интегрирования равнялись нулю, получим:

$$\frac{w(t_k)}{w(\tau_1)} = \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu(1 - \zeta_0)^2 \right]}{2\mu(1 - \zeta_k) \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right]} \quad (3.46)$$

Полученные результаты иллюстрируются табл. 1. Механизм ползучести бетона примем в следующем виде [1]:

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) \left[1 - e^{-0,026(t-\tau)} \right] 10^{-5}$$

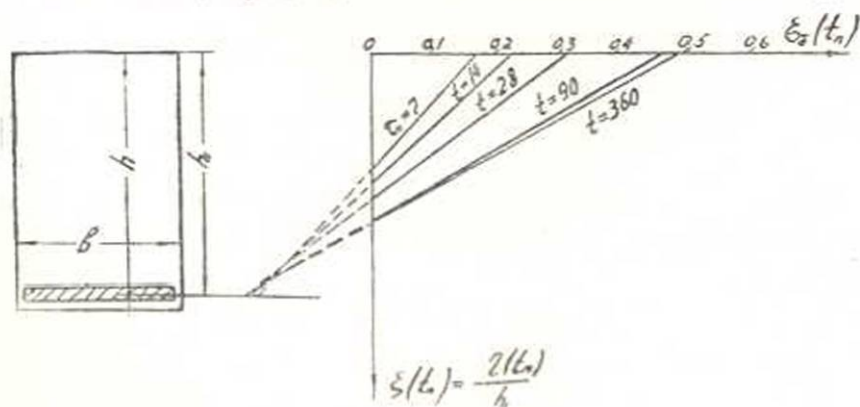
причем $\mu = 0,0165$; $E_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$; $E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\tau_1 = 7$ дней, а $\lambda = 0$.

Таблица 1

t	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
ζ	0,490226	0,548796	0,621306	0,701151	0,712789
$\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$	1	0,817014	0,656870	0,539848	0,520042
$\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$	1	1,023835	1,055120	1,063223	1,097427
$\frac{\varepsilon_b(t)}{\varepsilon_b(\tau_1)}$	1	1,156800	1,420321	1,947630	1,883662
$\frac{\varepsilon_n(t)}{\varepsilon_n(\tau_1)}$	1	1,023835	1,055120	1,093223	1,097427
$\frac{W(t)}{W(\tau_1)}$	1	1,156800	1,420321	1,883662	1,947630

Для нахождения искомых функций ζ , $\varepsilon_0(t)$, $\varepsilon_a(t)$, $\varepsilon_b(t)$, $\varepsilon_n(t)$ и $w(t)$ разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов $\tau_1 = 7$, $t_1 = 14$, $t_2 = 28$, $t_3 = 90$, $t_4 = 360$ дням.

Ниже приводится график для иллюстрации результатов, помещенных в таблице (фиг. 2).



Фиг. 2.

Сравнивая эти результаты с опытными данными, полученными Я. М. Немировским в ЦНИПСе, видим, что они достаточно близки. Например, для ζ Немировским получены значения, находящиеся между 0,48 и 0,73, а при наших расчетах — от 0,49 до 0,71. Близкие картины получаются для напряжений, а также для деформации.

§ 4. Напряжения и деформации в изгибаемой железобетонной балке с учетом ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона. Рассмотрим общий случай, когда модуль мгновенной деформации бетона зависит от времени, т. е.

$$E_s = E_0(t). \quad (4.1)$$

В этом случае связь между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_0(t)$ и напряжением $\sigma_0(t)$ с учетом ползучести бетона будет иметь вид:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E_0(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (4.2)$$

Пользуясь гипотезой плоских сечений и соотношением (4.2), будем искать $\sigma_0(t)$ в следующей форме:

$$\sigma_0(t) = E_0(t) B(z, t) y = D(z, t) y, \quad (4.3)$$

где $D(z, t)$ — неизвестная функция.

Подставляя значение $\sigma_0(t)$ из (4.3) в (4.2), получим:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{D(z, t)}{E_0(t)} y - y \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (4.4)$$

Условие совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона дает

$$\varepsilon_0(t) \Big|_{y = -(h_1 - \eta)} = \varepsilon_a(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E_a}. \quad (4.5)$$

Внося это выражение в (4.4), получим

$$\begin{aligned} \sigma_a(t) = & -m(t) D(z, t) (h_1 - \eta) + \\ & + E_a (h_1 - \eta) \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $m(t) = \frac{E_a}{E_0(t)}$ — модульное отношение.

Усилие в арматуре будет

$$\begin{aligned} N_a(t) = & -F_a m(t) D(z, t) (h_1 - \eta) + \\ & + F_a E_a (h_1 - \eta) \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставляя значения $\varepsilon_0(t)$ и $N_a(t)$ из (4.3) и (4.7) в (3.8) и (3.9), после интегрирования найдем

$$D(z, t) = \frac{M_z}{E_0 \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta^2}{3} + (1 - \lambda^2) (1 - \zeta) \frac{\zeta^2}{2} \right] h_1^2} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^t D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t)} \left[1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_1^2}{2\mu m(t)(1 - \zeta_1)} \right] D(z, t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\zeta(t) = \frac{\eta(t)}{h_1}$ — это отношение высоты сжатой зоны сечения балки к полезной высоте сечения в момент времени t .

Если к интегральному уравнению (4.9) применить метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, то его можно переписать для каждого значения t_k в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_1} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_1, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_1)} \left[1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_1^2}{2\mu m(t_1)(1 - \zeta_1)} \right] D(z, t_1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_2} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_2, \tau) \right] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_2, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_2)} \left[1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_2^2}{2\mu m(t_2)(1 - \zeta_2)} \right] D(z, t_2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau + \\ & + \int_{t_1}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau + \\ & \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} D(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + C(t_k, \tau) \right] d\tau = \\ & = \frac{1}{E_0(t_k)} \left[1 - \frac{(1 - \lambda^2) \zeta_k^2}{2\mu m(t_k)(1 - \zeta_k)} \right] D(z, t_k). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если интегрировать уравнение (4.11) по частям, применить к полученному интегралу теорему о среднем и пользоваться приближенным равенством (3.19), то, аналогично § 3, получим

$$\frac{(1 - \lambda^2)\zeta_1^2 - 2\mu m(t_1)(1 - \zeta_1)[1 + E_0(t_1)\beta_1(t_1)]}{2\mu m(t_1)E_0(t_1)(1 - \zeta_1) \left[(1 + \lambda^2)\frac{\zeta_1^2}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1)\frac{\zeta_1^2}{2} \right]} = \frac{\alpha_1(t_1)}{f_1(\zeta_0)}, \quad (4.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(t_1) &= C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}, \\ \beta_1(t_1) &= C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \left[\frac{1}{E_0(t_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right], \\ f_1(\zeta_0) &= \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_1)} \left[(1 + \lambda^2)\frac{\zeta_0^2}{3} + \mu m(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Этому уравнению можно дать следующий вид:

$$a_1 \zeta_1^4 + b_1 \zeta_1^3 + c_1 \zeta_1^2 + d_1 \zeta_1 + e_1 = 0, \quad (4.15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \mu m(t_1)E_0(t_1)(1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1)\alpha_1(t_1), \\ b_1 &= 2\mu m(t_1)E_0(t_1)(1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2)\alpha_1(t_1), \\ c_1 &= 3(1 - \lambda^2)[f_1(\zeta_0) - \mu m(t_1)E_0(t_1)\alpha_1(t_1)], \\ d_1 &= -e_1 = 6\mu m(t_1)f_1(\zeta_0)[1 + E_0(t_1)\beta_1(t_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Решая уравнение (4.15), определяем значение ζ_1 . Подставляя значение ζ_1 в выражении (4.8), определим $D(z, t_1)$.

Если в уравнении (4.8) заменить t через t_1 , то из полученного уравнения и из (4.11) получим:

$$a_2 \zeta_2^4 + b_2 \zeta_2^3 + c_2 \zeta_2^2 + d_2 \zeta_2 + e_2 = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \mu m(t_2)E_0(t_2)(1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1)\alpha_2(t_2), \\ b_2 &= 2\mu m(t_2)E_0(t_2)(1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2)\alpha_2(t_2), \\ c_2 &= 3(1 - \lambda^2)[f_2(\zeta_0)\varphi_2(\zeta_1) - \mu m(t_2)E_0(t_2)\alpha_2(t_2)], \\ d_2 &= -e_2 = 6\mu m(t_2)f_2(\zeta_0)\varphi_2(\zeta_1)[1 + E_0(t_2)\beta_2(t_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
 & z_2(t_2) = \varphi_2(\zeta_1) \left[C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right] + f_2(\zeta_0) \left[C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right], \quad (4.19) \\
 & \varphi_2(t_2) = C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) - \left[\frac{1}{E_0(t_2)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right], \\
 & f_2(\zeta_0) = \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_2)} \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu m(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2 \right], \\
 & \varphi_2(\zeta_1) = \frac{E_0(t_1)}{E_0(t_2)} \left[(1 + \lambda^2) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1^2}{2} \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично из уравнений (4,8) и (4,12), получим

$$a_k \zeta_k^4 + b_k \zeta_k^3 + c_k \zeta_k^2 + d_k \zeta_k + e_k = 0, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_k &= \mu m(t_k) E_0(t_k) (1 + \lambda)(2\lambda^2 + \lambda - 1) z_k(t_k), \\
 b_k &= 2\mu m(t_k) E_0(t_k) (1 + \lambda)(2 - 2\lambda - \lambda^2) \alpha_k(t_k), \\
 c_k &= 3(1 - \lambda^2) [f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \dots \varphi_k(\zeta_{k-1}) - \mu m(t_k) E_0(t_k) z_k(t_k)], \\
 d_k &= -l_k = 6\mu m(t_k) f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \dots \varphi_k(\zeta_{k-1}) [1 + E_0(t_k) \beta_k(t_k)].
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
 z_k(t_k) &= \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \dots \varphi_k(\zeta_{k-1}) \left[C(t_k, \tau_1) - C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0(\tau_1)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right] + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_2) \varphi_k(\zeta_3) \dots \varphi_k(\zeta_{k-1}) \times \\
 & \quad \times \left[C\left(t_k, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \right] + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_3) \dots \varphi_k(\zeta_{k-2}) \times \\
 & \quad \times \left[C\left(t_k, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) - C\left(t_k, \frac{t_2 + t_3}{2}\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{E_0\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)} - \frac{1}{E_0\left(\frac{t_2 + t_3}{2}\right)} \right] - \dots + f_k(\zeta_0) \varphi_k(\zeta_1) \varphi_k(\zeta_2) \dots \varphi_k(\zeta_{k-2}) \times
 \end{aligned}$$

$$\times \left[C \left(t_k, \frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right) - C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{E_0 \left(\frac{t_{k-2} + t_{k-1}}{2} \right)} - \frac{1}{E_0 \left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right)} \right]. \quad (4.22)$$

$$\varphi_k(t_k) = C \left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right) - \left[\frac{1}{E_0(t_k)} - \frac{1}{E_0 \left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2} \right)} \right],$$

$$f_k(\zeta_0) = \frac{E_0(\tau_1)}{E_0(t_k)} f(\zeta_0),$$

$$\varphi_k(\zeta_1) = \frac{E_0(t_1)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_1),$$

$$\varphi_k(\zeta_2) = \frac{E_0(t_2)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_2),$$

$$\varphi_k(\zeta_3) = \frac{E_0(t_3)}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_3),$$

(4.23)

$$\dots \dots \dots \varphi_k(\zeta_{k-1}) = \frac{E_0(t_{k-1})}{E_0(t_k)} \varphi(\zeta_{k-1}).$$

$f(\zeta_0), \varphi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2), \dots, \varphi(\zeta_{k-1})$ определяются формулами параграфа 3, т. е.

$$\begin{aligned} f(\zeta_0) &= (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_0^3}{3} + \mu n(\tau_1)(1 - \zeta_0)^2, \\ \varphi(\zeta_1) &= (1 + \lambda^3) \frac{\zeta_1^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_1) \frac{\zeta_1}{2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Решая уравнение (4.20), определим значение ζ_k , после чего из соотношения (4.8) и (4.3) получим:

$$V(z, t_k) = \frac{M_x}{F_0 E_0(t_k) \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k}{2} \right] h^2}. \quad (4.25)$$

Придавая индексу k значения $0, 1, 2, \dots, n$, получим общее выражение функции $V(z, t_k)$ при $t = \tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$, причем $t_0 = \tau_1$.

Пользуясь соотношениями (4.3) и (4.25), для напряжения $\sigma_0(t)$ найдем

$$\sigma_0(t_k) = \frac{M_x y}{F_0 \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k}{2} \right] h^2}, \quad (4.26)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $t_0 = \tau_1$, а ζ_k определяется из уравнения (4.20).

Аналогичным образом из (4.6), (4.9) и (4.23) находим:

$$\varepsilon_a(t_k) = - \frac{M_z(1 - \lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu F_0 \left[(1 + \lambda^3) \frac{\zeta_k^3}{3} + (1 - \lambda^2)(1 - \zeta_k) \frac{\zeta_k^2}{2} \right] h_1}, \quad (4.27)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $t_0 = \tau_1$.

Пользуясь выражениями (4.4), (4.9) и (4.25), для определения полной продольной деформации бетона $\varepsilon_0(t)$ получим

$$\varepsilon_0(t_k) = \frac{\sigma_0(t_k)}{E_0(t_k)} \frac{(1 - \lambda^2)\zeta_k^2}{2\mu n(t_k)(1 - \zeta_k)}, \quad (4.28)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $t_0 = \tau_1$.

Для деформации арматуры $\varepsilon_a(t)$ имеем:

$$\varepsilon_a(t_k) = \frac{\sigma_a(t_k)}{E_a}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (4.29)$$

Из формул (4.26)–(4.29) следует, что при переменном модуле мгновенной деформации бетона выражения напряжений и деформаций бетона и арматуры будут иметь такой же вид, как и при постоянном модуле мгновенной деформации бетона, причем, конечно, их числовые значения будут разные.

Аналогичным образом, как это сделано в параграфе 3, получим выражение прогибов балки.

Полученные результаты иллюстрируются табл. 2.

Таблица 2

t	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\sigma_0(t)$	1	0,573417	0,647457	0,736254	0,742156
$\frac{\sigma_0(t)}{\sigma_0(\tau_1)}$	1	0,866441	0,806775	0,773486	0,771469
$\frac{\sigma_a(t)}{\sigma_a(\tau_1)}$	1	1,154155	1,239502	1,292847	1,296225
$\frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(\tau_1)}$	1	1,416645	2,034918	3,372155	3,495728
$\frac{\varepsilon_a(t)}{\varepsilon_a(\tau_1)}$	1	1,154155	1,239502	1,292847	1,296225

Характеристику меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ примем такую же, как и в предыдущем примере, а модуль мгновенной деформации бетона примем в следующем виде:

$$E_0(t) = 2(1 - e^{-0.172t})10^5.$$

Для нахождения искоемых функций ζ_k , $\sigma_0(t)$, $\sigma_a(t)$, $\varepsilon_0(t)$, $\varepsilon_a(t)$ опять разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов $\tau_1 = 7$, $t_1 = 14$, $t_2 = 28$, $t_3 = 90$, $t_4 = 360$ дням.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы при выполнении этой работы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30 V 1956

Մ. Մ. Մանուկյան

ԾՌՎՈՂ ԵՐԿԱԹՎԵՏՈՆ ՆԵԾԱՆԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ
ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ ԲԵՏՈՆԻ ՍԵՂՄՎԱԾ ՈՒ ՄԱՍՆԱԿԻՈՐԵՆ ԶԳՎԱԾ
ԳՈՏԻՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգովածում զծային սողքի տեսության հիման վրա, ստույնաախրվում են ծավաղ երկաթաբետոն նեծանի լարումները և դեֆորմացիան, երբ բետոնի սեղմված գոտին աշխատում է լրիվ, իսկ ձգման գոտին՝ մասնակիորեն: Այս խնդրի լուծումը, երբ ձգման գոտին աշխատում է լրիվ, արված է Ն. Պ. Հարությունյանի կողմից:

Առաջադրված խնդիրը լուծելու համար նախապես մշակված է նեծանի չեզոք առանցքը գտնելու մեթոդ՝ կախված նեծանի տառնչական-սողքային բնութագրից և ժամանակից:

Հոգովածում ցույց է արվում, որ նեծանի չեզոք առանցքի, լարումների և դեֆորմացիայի գտնելը բերվում է (3.10) և (3.11) ինտեգրալ հավասարումների միասեղ լուծմանը: Այս խնդրի լուծման համար օգտագործված է Ն. Մ. Կոխլովի և Ն. Ն. Բոգոլյուբովի մեթոդը:

Կողմված են համապատասխան աղյուսակներ: Տեսականորեն ստացված արդյունքները համեմատված են նեմերոսիկալ փորձնական արդյունքի հետ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
2. Немировский Я. М. Жесткость изгибаемых железобетонных элементов при кратковременном и длительном нагружении. Бетон и железобетон, № 5, 1955.
3. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 6, 1954.

М. А. Задоян

Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде с учетом ползучести материала

В настоящей работе исследуется напряженное состояние цилиндрической бетонной трубы, находящейся в упругой среде, при воздействии температурных изменений, усадки бетона и внутреннего гидростатического давления с учетом ползучести материала. Задача рассматривается как плоская и симметричная, причем перемещение по направлению оси трубы считается невозможным.

Решение этой задачи в предположении упругой работы материала дано в работах акад. Б. Г. Галеркина [3], В. Л. Федорова [6], Н. Я. Панарина [5].

§ 1. Температурно-усадочные напряжения в цилиндрической трубе

Пусть бетонная цилиндрическая труба, находящаяся в упругой среде, подвергается температурным изменениям по закону

$$T = T(r, t),$$

где $T(r, t)$ — температурная функция, зависящая только от r и t .

Положим, что закон изменения усадочных деформаций бетона во времени определяется зависимостью

$$S = S(r, t).$$

Тогда, при суммарном действии температуры и усадки, относительная деформация бетона будет

$$Q(r, t) = S(r, t) - \alpha_1 T(r, t), \quad (1)$$

где α_1 — коэффициент температурного расширения.

Между нормальными компонентами напряжения и деформации при сложном напряженном состоянии, как известно, имеется зависимость [1]:

$$\varepsilon_r^*(r, t) = \frac{E(t)Q(r, t)}{1 - 2\nu} + \frac{E(t)}{1 + \nu} \left[\varepsilon_r^*(r, t) + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \theta^*(r, t) \right] +$$

$$+ E(t) \int_{\tau}^t \varepsilon_r^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau, \quad (2)$$

причем

$$\begin{aligned} \theta^*(r, t) &= \varepsilon_r^*(r, t) + \varepsilon_z^*(r, t) + \varepsilon_\varphi^*(r, t), \\ \lambda(t, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) [1 - e^{-\alpha(t-\tau)}], \\ E(\tau) &= E_0 [1 - e^{-\alpha\tau}], \\ \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau} \end{aligned} \quad (3)$$

E_0 — предельный модуль упругости бетона, α , C_0 , A_1 , γ — некоторые параметры, характеризующие деформативные свойства и условия старения бетона.

В нашей задаче, принимая $\varepsilon_z^*(r, t) = 0$, имеем

$$\theta^*(r, t) = \frac{\partial u^*(r, t)}{\partial r} + \frac{u^*(r, t)}{r},$$

где $U^*(r, t)$ — радиальное перемещение трубы.

Введем функцию напряжения ползучести $\Phi^*(r, t)$, определяемую соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^*(r, t) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^*(r, t)}{\partial r}, \\ \varepsilon_\varphi^*(r, t) &= \frac{\partial^2 \Phi^*(r, t)}{\partial r^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из (2) получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi^*(r, t) &= \frac{2E(t)Q(r, t)}{1-2\nu} + \frac{E(t)\theta^*(r, t)}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \\ &+ E(t) \int_{\tau}^t \nabla^2 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Производя операцию ∇^2 над обеими частями уравнения (5) и пользуясь соотношением

$$\nabla^2 \theta^*(r, t) = -\frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 Q(r, t),$$

получим [2]

$$\nabla^2 \Phi^*(r, t) = \frac{E(t)}{1-\nu} \nabla^2 Q(r, t) + E(t) \int_{\tau_0}^t \nabla^2 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Решение интегрального уравнения (6) можно представить в виде

$$\nabla^2 \Phi^*(r, t) = \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)], \quad (7)$$

где

$$L^*[Q(t)] = E(\tau_0)Q(\tau_0) + [Q'(\tau_0) - \gamma\varphi(\tau_0)E(\tau_0)Q(\tau_0)] \int_{\tau_0}^t E(\tau) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau + \\ + \int_{\tau_0}^t E(\tau) e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \gamma(\xi) d\xi} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} [Q''(\xi) + \gamma Q'(\xi)] d\xi, \quad (8)$$

$$\gamma(t) = \gamma[1 + \varphi(t)E(t)].$$

Тогда решение бигармонического уравнения (7) будет

$$\Phi^*(r, t) = L^*[A(t)]r^2 + L^*[B(t)] \ln r + \frac{1}{1-\nu} \int_0^r \frac{dr}{r} \int_0^r L^*[Q(r, t)] r dr, \quad (9)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — пока неизвестные функции времени t .

Согласно (4) и (9) для компонентов нормальных напряжений находим:

$$\sigma_r^*(r, t) = 2L^*[A(t)] + \frac{L^*[B(t)]}{r^2} + \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_0^r L^*[Q(r, t)] r dr,$$

$$\sigma_z^*(r, t) = 2L^*[A(t)] - \frac{L^*[B(t)]}{r^2} - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_0^r L^*[Q(r, t)] r dr + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \quad (10)$$

Из соотношений (2), (5) и (10) следует

$$\sigma_z^*(r, t) = 4L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \quad (11)$$

Неизвестные функции $A(t)$ и $B(t)$ определяем из граничных условий:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) &= 0, & \text{на внутренней поверхности } r = r_1, \\ \sigma_r^*(r, t) &= -kU^*(r, t), & \text{на наружной поверхности } r = r_2, \end{aligned} \quad (12)$$

причем k — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность кг/см^2 .

Используя первое из граничных условий (12), будем иметь:

$$\begin{aligned} z_1^*(r, t) &= 2\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r L^*[Q(r, t)] r dr, \\ z_2^*(r, t) &= 2\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) L^*[A(t)] - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r L^*[Q(r, t)] r dr + \\ &\quad + \frac{1}{1-\nu} L^*[Q(r, t)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Из соотношений (2), (11), (13) и тождества

$$\frac{L^*[A(t)]}{E(t)} - \int_{r_1}^1 L^*[A(z)] \frac{\partial}{\partial z} z(t, z) dz = A(t)$$

следует, что

$$U^*(r, t) = 2(1+\nu)\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r^2}\right) r A(t) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr. \quad (14)$$

Согласно второму граничному условию (12) имеем

$$\begin{aligned} &2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) L^*[A(t)] + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} L^*[Q(r, t)] r dr = \\ &= -2kr_2(1+\nu)\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) A(t) + kr_2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} Q(r, t) r dr. \end{aligned} \quad (15)$$

Дважды дифференцируя (15) по t , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$A''(t) + m^*(t)A'(t) = F(t), \quad (16)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{E^*(t)}{2kr_2(1-\nu^2)} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} \left[\left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} r(t) \right] \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \right] \frac{\partial^2 Q(r, t)}{\partial t^2} \right] r dr, \end{aligned} \quad (17)$$

$$E^*(t) = \frac{kr^2(1+\nu)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)}, \quad (18)$$

$$m^*(t) = \gamma[1 + \varphi^*(t)E^*(t)] - \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) E^*(t) \frac{E'(t)}{E^2(t)}, \quad (19)$$

$$\varphi^*(t) = \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \varphi(t). \quad (20)$$

Начальные условия для уравнения (16) суть:

$$A(\tau_0) = -\frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1-\nu^2)} \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right] \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} Q(r, t) r dr,$$

$$A'(\tau_0) = \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1-\nu^2)} \frac{1}{r_2^2} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ (1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)Q(r, \tau_0) - \right.$$

$$\left. - \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}\right] Q'(r, \tau_0) \right\} dr. \quad (21)$$

Решение уравнения (16) при начальных условиях (21) можно записать в форме

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau) d\tau} d\tau + \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau) d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\xi) d\xi} F(\xi) d\xi. \quad (22)$$

Вычисление интегралов в этом выражении весьма затруднительно, и в тех редких случаях, когда оно может быть произведено, приводится к весьма громоздким выкладкам. Поэтому заменяем функции $E(t)$ и $\varphi(t)$ их средними значениями в рассматриваемом интервале следующим образом:

$$E(t) \approx E_1(t) = \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t E(\tau) d\tau = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha \tau_0}}{\alpha(t - \tau_0)} \right], \quad (23)$$

$$\varphi(t) \approx \varphi_1(t) = \frac{1}{t - \tau_0} \int_{\tau_0}^t \varphi(\tau) d\tau = C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{\tau_0}}{t - \tau_0}. \quad (24)$$

Тогда

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0) \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \int_{\tau_0}^t e^{-m^*(\tau-\tau_0)} d\tau \int_{\tau_0}^{\tau} e^{m^*(\xi-\tau_0)} F(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Представим компоненты напряжения в следующем виде, удобном для дальнейшего использования:

$$\sigma_r^*(r, t) = L^*[D_r(r, t)], \quad (26)$$

(r, \varphi, z)

$$\text{где } D_r(r, t) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) A(t) + \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr, \quad (27)$$

$$D_e(r, t) = 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) A(t) - \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r Q(r, t) r dr + \frac{1}{1-\nu} Q(r, t), \quad (28)$$

$$D_z(r, t) = 4\nu A(t) + \frac{1}{1-\nu} Q(r, t). \quad (29)$$

§ 2. Напряженное состояние трубы, вызванное периодическими колебаниями температуры воздуха

Рассмотрим напряженное состояние бетонной цилиндрической трубы, помещенной в упругой среде, вызванное гармоническим колебанием температуры воздуха. Пусть с момента $t = \tau_0$ на внутренней поверхности $r = r_1$ установлена температура

$$T = T_0 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \quad \text{при } t \geq \tau_0,$$

где T_0 и θ — амплитуда и период колебания.

Предположим, что упругая среда при $r \rightarrow \infty$ имеет нулевую температуру. Решение уравнения теплопроводности при указанных граничных условиях имеется в работе С. Г. Гутмана [4]; его можно представить в следующем виде:

$$T(r, t) = a_0(r) \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + b_0(r) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0), \quad (30)$$

где

$$a_0(r) = T_0 \frac{h_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)}{h_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)} \cos \frac{\pi}{2} \left[\gamma_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) - \gamma_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) \right],$$

$$b_0(r) = T_0 \frac{h_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)}{h_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right)} \sin \frac{\pi}{2} \left[\gamma_0 \left(\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) - \gamma_0 \left(\frac{r_1}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \right) \right]. \quad (31)$$

Значения функций h_0 и γ_0 , выраженные через функции Ханкеля, приведены в известных таблицах Янке и Эмде; ω — диффузионная постоянная. При больших значениях $\frac{r}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}}$ выражения (31) имеют вид:

$$a_0(r) = T_0 \sqrt{\frac{r_1}{r}} e^{-\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1)} \cos \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1),$$

$$b_0(r) = T_0 \sqrt{\frac{r_1}{r}} e^{-\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1)} \sin \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} (r-r_1).$$

Принимая в (17) $Q(r, t) = -\alpha_1 T(r, t)$ и учитывая выражения (30), получим

$$F(t) = \frac{2\pi}{\theta} \left[a_1 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) - b_1 \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right], \quad (32)$$

где для краткости введены обозначения

$$a_1 = a_1(t) = \frac{E^*(t)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[\gamma - \frac{kr_2(1+\nu)\eta(t)}{E_1(t)} \right] \varepsilon_2(r_2) - \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E_1(t)} \right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_1(r_2) \right\}, \quad (33)$$

$$b_1 = b_1(t) = \frac{E^*(t)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E_1(t)} \right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r_2) + \left[\gamma - \frac{kr_2(1+\nu)\eta(t)}{E_1(t)} \right] \varepsilon_1(r_2) \right\},$$

$$\varepsilon_1(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r a_0(r) r dr, \quad \varepsilon_2(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^r b_0(r) r dr. \quad (34)$$

Подставляя (32) в (25) и производя интегрирование, получим

$$A(t) = A(\tau_0) + a_2 + \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} - a_2 \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + b_2 \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0), \quad (35)$$

где

$$a_2 = \frac{\frac{2\pi}{\theta} a_1 - m^* b_1}{m^{*2} + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2}, \quad b_2 = \frac{m^* a_1 + \frac{2\pi}{\theta} b_1}{m^{*2} + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \quad (36)$$

Из (27), (35) и (26) находим:

$$\sigma_r^*(t) = E(\tau_0) D_r(\tau_0) + \left[D_r'(\tau_0) - \gamma \varphi(\tau_0) E(\tau_0) D_r(\tau_0) - \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_r - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2\pi}{\theta} \cdot \frac{\eta a_r - \frac{2\pi}{\theta} b_r}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \left] E_1 \frac{1 - e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_r E_1 \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{2\pi}{\theta} a_r + \eta b_r\right) \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right] - \left(\eta a_r - \frac{2\pi}{\theta} b_r\right) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} E_1, \quad (37)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_r &= a_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2 \right) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_1(r) - \gamma \varepsilon_2(r), \\
b_r &= b_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right) + \gamma \varepsilon_1(r) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r), \quad (38)
\end{aligned}$$

$$c_r = c_r(r) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right], \quad (39)$$

$$D_r(\tau_0) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(\tau_0) - \varepsilon_1(r),$$

$$D_r(\tau_0) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r). \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
A(\tau_0) &= \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right], \\
A'(\tau_0) &= \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left\{ \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right] \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_2(r_2) - \right. \\
& \left. - 2(1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)\varepsilon_1(r_2) \right\}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Аналогичным образом составляя выражения для $D_+(r, t)$ и $D_-(r, t)$ и подставляя в (26), будем иметь

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_i(t) &= E(\tau_0)D_+(\tau_0) + \left[D_+(\tau_0) - \gamma\varphi(\tau_0)E(\tau_0)D_+(\tau_0) - \frac{1-m^*}{\eta-m^*} c_r - \right. \\
& - \frac{2\pi}{\theta} \frac{\eta a_\varphi - \frac{2\pi}{\theta} b_\varphi}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} \left] E_1 \frac{1 - e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma - m^*}{\eta - m^*} c_c \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} E_1 + \right. \\
& \left. + \frac{\left(\frac{2\pi}{\theta} a_c + \eta b_c\right) \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right] - \left(\eta a_c - \frac{2\pi}{\theta} b_c\right) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0)}{\eta^2 + \left(\frac{2\pi}{\theta}\right)^2} E_1, \quad (42)
\end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2 \right) - \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r)] + \gamma [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \\ b_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right) - \gamma [\varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r)] - \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \\ c_r &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right], \end{aligned} \right\} (43)$$

$$\left. \begin{aligned} a_z &= 4\nu \left(\frac{2\pi}{\theta} a_2 + \gamma b_2 \right) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_{01}(r) - \gamma \varepsilon_{02}(r), \\ b_z &= 4\nu \left(\gamma a_2 - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right) + \gamma \varepsilon_{01}(r) + \frac{2\pi}{\theta} \varepsilon_{02}(r), \\ c_z &= 4\nu \left[A'(\tau_0) - \frac{2\pi}{\theta} b_2 \right]. \end{aligned} \right\} (44)$$

$$\left. \begin{aligned} D_r(\tau_0) &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(\tau_0) + \varepsilon_1(r) - \varepsilon_{01}(r), \\ D_r'(\tau_0) &= 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A'(\tau_0) + \frac{2\pi}{\theta} [\varepsilon_2(r) - \varepsilon_{02}(r)], \end{aligned} \right\} (45)$$

$$\left. \begin{aligned} D_z(\tau_0) &= 4\nu A(\tau_0) - \varepsilon_{01}(r), \\ D_z'(\tau_0) &= 4\nu A'(\tau_0) - \varepsilon_{02}(r), \end{aligned} \right\} (46)$$

$$\varepsilon_{01}(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} a_0(r), \quad \varepsilon_{02}(r) = \frac{\alpha_1}{1-\nu} b_0(r). \quad (47)$$

Для радиального перемещения получим

$$\begin{aligned} U^*(r, t) &= (1 + \nu)r \left[2 \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t) + \varepsilon_1(r) \cos \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_2(r) \sin \frac{2\pi}{\theta} (t - \tau_0) \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

§ 3. Усадочные напряжения

Исследуем напряженное состояние бетонной цилиндрической трубы, помещенной в упругой среде, вызванное от усадки бетона. При плоском деформированном состоянии интенсивность усадки бетона может быть выражена зависимостью [1]:

$$S(r, t) = S_0(r) [e^{-\beta t} - e^{-\beta t_0}], \quad (49)$$

где функция $S_0(r)$ выражает закон распределения интенсивности усадки по толщине трубы, а выражение в скобках характеризует рост интенсивности усадки по времени.

Тогда, согласно (6), функция напряжения ползучести $\Phi^*(r, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^4 \Phi^*(r, t) = \frac{E(t)[e^{-s_0 t} - e^{-st}]}{1 - \nu} \nabla^2 S_0(r) + E(t) \int_{t_0}^t \nabla^4 \Phi^*(r, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (50)$$

Рассмотрим случай, когда $S_0(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 S_0(r) = 0.$$

Это позволяет нам искать компоненты напряжения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_\varphi^*(r, t)$ в виде

$$\sigma_r^*(r, t) = 2A(t) + \frac{B(t)}{r^2}, \quad (51)$$

$$\sigma_\varphi^*(r, t) = 2A(t) - \frac{B(t)}{r^2}, \quad (52)$$

где неизвестные функции $A(t)$ и $B(t)$ подлежат определению из граничных условий

$$\sigma_r^*(r, t) = 0, \quad \text{при} \quad r = r_1,$$

$$\sigma_r^*(r, t) = -kU^*(r, t), \quad \text{при} \quad r = r_2. \quad (12)$$

Удовлетворяя первому граничному условию (12), для $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_\varphi^*(r, t)$ получим следующие выражения:

$$\sigma_r^*(r, t) = 2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t), \quad (53)$$

$$\sigma_\varphi^*(r, t) = 2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) A(t). \quad (54)$$

Для определения $A(t)$ предварительно запишем выражения для радиального перемещения $U^*(r, t)$:

$$U^*(r, t) = -(1 + \nu)rS(t) + \frac{1 + \nu}{E(t)} [(1 - \nu)\sigma_\varphi^*(r, t) - \nu\sigma_r^*(r, t)] - \\ - (1 + \nu)r \int_{t_0}^t [(1 - \nu)\sigma_\varphi^*(r, \tau) - \nu\sigma_r^*(r, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (55)$$

Подставляя значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_\varphi^*(r, t)$ из (53) и (54) в (55) и удовлетворяя второму граничному условию (12), получим, что неизвестная функция $A(t)$ должна удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$A(t) = \frac{1}{2} E^*(t)S(t) + \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) E^*(t) \int_{\tau_0}^t A(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau. \quad (56)$$

Дважды дифференцируя уравнение (56), после некоторых преобразований, получим

$$A''(t) + m^*(t)A'(t) = \frac{1}{2} E^*(t)[S''(t) + \gamma S'(t)] \quad (57)$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned} A(\tau_0) &= 0, \\ A'(\tau_0) &= \frac{1}{2} E^*(\tau_0)S'(\tau_0). \end{aligned} \quad (58)$$

Решение уравнения (57) при начальных условиях (58) имеет вид:

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} E^*(\tau_0)S'(\tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\tau) d\tau} d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\tau) d\tau} d\tau \int_{\tau_0}^{\xi} e^{\int_{\tau_0}^{\xi} m^*(\tau) d\tau} E(\xi)[S''(\xi) + \gamma S'(\xi)] d\xi. \end{aligned} \quad (59)$$

Подставляя в (59) выражение $S(t) = S_0[e^{-st} - e^{-st}]$ и учитывая допущение (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{2} E^*(t)S_0 se^{-st} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Тогда компоненты напряжения (53) и (54) определяются формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) &= \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t)S_0 se^{-st} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi^*(r, t) &= \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) E^*(t)S_0 se^{-st} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma - s}{m^* - s} \right] \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ &\left. + \frac{\gamma - s}{m^* - s} \frac{1 - e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из условия задачи и (2) следует

$$\sigma_2^*(r, t) = \nu[\sigma_r^*(r, t) + \sigma_z^*(r, t)] + L^*[S(t)]. \quad (63)$$

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \sigma_r^*(r, t) = & 2\nu E^*(t) S_0 se^{-s\tau_0} \left\{ \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma-s}{m^*-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\} + \\ & + E_1(t) S_0 se^{-s\tau_0} \left\{ \frac{\eta-\gamma}{\eta-s} \frac{1-e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma-s}{\eta-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right\}. \quad (64) \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение

$$L^*[S(t)] = E_1(t) S_0 se^{-s\tau_0} \left[\frac{\eta-\gamma}{\eta-s} \frac{1-e^{-\eta(t-\tau_0)}}{\eta} + \frac{\gamma-s}{\eta-s} \frac{1-e^{-s(t-\tau_0)}}{s} \right]. \quad (65)$$

При предположении упругой работы материала получим следующие значения компонентов напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, t) &= \left(1 - \frac{r_1}{r^2}\right) E^*(t) S(t), \\ \sigma_z(r, t) &= \left(1 + \frac{r_1}{r^2}\right) E^*(t) S(t). \quad (66) \end{aligned}$$

Тогда из (61) и (62) получим окончательно следующие формулы:

$$\sigma_r^*(r, t) = \sigma_r(r, t) \left\{ \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \right\}, \quad (67)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = \sigma_z(r, t) \left\{ \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \right\}. \quad (68)$$

где функция

$$\chi(t, \tau_0) = \frac{\gamma-s}{m^*-s} + \frac{s}{m^*} \left[\frac{E^*(\tau_0)}{E^*(t)} - \frac{\gamma-s}{m^*-s} \right] \frac{1-e^{-m^*(t-\tau_0)}}{1-e^{-s(t-\tau_0)}} \quad (69)$$

характеризует влияние ползучести бетона на напряжение.

Из структуры формул (67) — (69) следует, что влияние свойства ползучести бетона одинаково по толщине трубы. Вместо формул (63) и (65), $\sigma_2^*(r, t)$ можно представить и в следующем виде:

$$\sigma_2^*(r, t) = \nu[\sigma_r(r, t) + \sigma_z(r, t)]\chi(t, \tau_0) + E_1(t)S(t)\chi_0(t, \tau_0), \quad (70)$$

где $\chi_0(t_0, \tau)$ имеет значение

$$\chi_0(t, \tau_0) = \frac{\gamma - s}{\gamma - s} + \frac{s}{\gamma} \frac{\gamma - \gamma}{\gamma - s} \frac{1 - s}{1 - e^{-\gamma(t - \tau_0)}} \quad (71)$$

Из (73) и (75) следует, что

$$\chi(\tau_0, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} \chi(t, \tau_0) = 1, \quad \chi_0(\tau_0, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \tau_0} \chi_0(t, \tau_0) = 1,$$

а с течением времени эти функции монотонно убывают.

При $t \rightarrow \infty$ (т. е. при больших t) имеем

$$\chi(\infty, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t, \tau_0) = \frac{\gamma}{m^*} \left\{ 1 - \frac{s}{\gamma} \left[1 - \frac{E^*(\tau_0)}{E^*(\infty)} \right] \right\} < 1,$$

$$\chi_0(\infty, \tau_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_0(t, \tau_0) = \frac{1}{1 + C_0 E_0} < 1.$$

Функции $\varepsilon_r(r, t)$ и $\varepsilon_z(r, t)$ возрастают более быстрыми темпами, чем убывают $\chi(t, \tau_0)$, поэтому в конечном счете $\varepsilon_r^*(r, t)$ и $\varepsilon_z^*(r, t)$ возрастают.

Численный пример. Пусть замыкание бетонного кольца, отношение радиусов которого $\frac{r_2}{r_1} = 1,25$, производилось в возрасте $\tau_0 = 7$ дней;

$kr^2 = 0,1$; $E_0 = 2 \cdot 10^4$ кг/см²; $\nu = \frac{1}{6}$; $S_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; $s = 0,0085 \frac{1}{\text{день}}$; параметры ползучести возьмем следующие: $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}$ см²/кг день; $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-3}$ см²/кг; $\alpha = 0,03 \frac{1}{\text{день}}$; $\gamma = 0,026 \frac{1}{\text{день}}$; $\tau_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Предварительно вычислим значения функции

$$m^*(t) = \gamma \left[1 + \varphi^*(t) E^*(t) \right] \quad (72)$$

для некоторых значений t . Здесь

$$\varphi^*(t) = \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \left[C_0 + A_1 \frac{\ln \frac{t}{t - \tau_0}}{t - \tau_0} \right], \quad (73)$$

$$E^*(t) = \frac{kr_2(1 + \nu)}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1 + \nu)}{E_1(t)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)}, \quad (74)$$

$$E_1(t) = E_0 \left[1 - \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\alpha \tau_0}}{\alpha(t - \tau_0)} \right]. \quad (24)$$

Ниже в табл. 1 приводятся некоторые значения m^* и E^* по формулам (72) и (73).

Таблица 1

Значения $m^*(t)$ и $E^*(t)$ по (72) и (73)

t	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$m^*(t)$	0,0358	0,0378	0,0405	0,0401	0,0404	0,0105	0,0401	0,0399
$\frac{E^*(t)}{10^5}$	0,2003	0,2517	0,2862	0,3784	0,4042	0,4317	0,4453	0,4553

Из этой таблицы следует, что $m^*(t)$ меняется в течение времени несущественно.

В табл. 2 приведены результаты вычисления по формулам (68) и (69).

Таблица 2

Значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\chi(t, \tau_0)$ по (68) и (69)

t	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$\chi(t, \tau_0)$	1,0000	0,7770	0,6591	0,5413	0,5274	0,5240	0,5410	0,5320
$\sigma_r^*(r_1, t)$	0,0000	0,4256	1,1621	2,8000	4,0565	6,5669	8,6208	9,1298
$\sigma_r^*(r_0, t)$	0,0000	0,3809	1,0402	2,5061	3,6398	5,8778	7,7162	8,1718
$\sigma_c^*(r_2, t)$	0,0000	0,3490	0,9330	2,2959	3,3315	5,3849	7,0691	7,4864

По табл. 2 приходим к следующим заключениям:

1. Напряжения, возникающие в трубе от усадки бетона, в течение времени растут и примерно через год достигают своих максимальных значений.

2. Учет ползучести уменьшает напряжения почти в 2 раза.

3. По направлению к внутренней поверхности трубы напряжения растут, но эти изменения не существенны.

§ 4. Напряжения, вызванные внутренним гидростатическим давлением

Рассмотрим напряженное состояние бетонной трубы, помещенной в упругой среде, под действием внутреннего гидростатического равномерного давления p . Функция напряжения в этом случае удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 \Phi^*(r, t) = 0.$$

Согласно с этим полагаем

$$\sigma_r^*(r, t) = 2A(t) + \frac{B(t)}{r^3}, \quad (51)$$

$$\sigma_c^*(r, t) = 2A(t) - \frac{B(t)}{r^3}. \quad (52)$$

Имеем граничные условия

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(r, t) &= -p, & \text{при } r=r_1, \\ \sigma_r^*(r, t) &= -kU^*(r, t), & \text{при } r=r_2.\end{aligned}\quad (75)$$

Используя первое условие (75), получим

$$\begin{aligned}\sigma_r^*(r, t) &= 2\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)A(t) - \frac{r_1^2}{r^2}p, \\ \sigma_r^*(r, t) &= 2\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)A(t) + \frac{r_1^2}{r^2}p,\end{aligned}\quad (76)$$

$$\sigma_z^*(r, t) = 4\nu A(t).\quad (77)$$

Последняя формула получена из (2) при $Q(r, t) = 0$ и $\varepsilon_z^*(r, t) = 0$.

Между перемещением $U^*(r, t)$ и компонентами напряжения (76) имеется зависимость

$$\begin{aligned}U^*(r, t) &= \frac{1+\nu}{E(t)} r \left[(1-\nu)\sigma_z^*(r, t) - \nu\sigma_r^*(r, t) \right] - (1+\nu)r \int_{\tau_0}^t \left[(1-\nu)\sigma_z^*(r, \tau) - \nu\sigma_r^*(r, \tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau.\end{aligned}\quad (78)$$

Подставляя в (78) значения $\sigma_r^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$ из (76), удовлетворяя второму условию (75), получим, что неизвестная функция $A(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned}2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(t) - \frac{r_1^2}{r_2^2}p &= -\frac{kr_2(1+\nu)}{E(t)} \left[2\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(t) + \frac{r_1^2}{r_2^2}p \right] + \\ &+ kr_2(1+\nu) \int_{\tau_0}^t \left[2\left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2}\right)A(\tau) + \frac{r_1^2}{r_2^2}p \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(t, \tau) d\tau.\end{aligned}$$

которое двукратным дифференцированием приводится к дифференциальному уравнению

$$A''(t) + m^*(t)A'(t) = 0,\quad (79)$$

с начальными условиями

$$A(\tau_0) = \frac{E^*(\tau_0)}{2kr_2(1+\nu)} \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right] \frac{r_1^2}{r_2^2} p,\quad (80)$$

$$\begin{aligned}A'(\tau_0) &= -\frac{1}{2} \gamma \varphi(\tau_0) E^*(\tau_0) \left\{ 1 + \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \frac{E^*(\tau_0)}{kr_2(1+\nu)} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right] \right\} \frac{r_1^2}{r_2^2} p.\end{aligned}\quad (81)$$

Решение дифференциального уравнения (79) с начальными условиями (80) и (81) будет

$$A(t) = A(\tau_0) + A'(\tau_0) \int_{\tau_0}^t e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} m^*(\tau) d\tau} d\tau.$$

Учитывая слабую изменяемость $m^*(t)$ и делая ряд преобразований, находим

$$A(t) = A(\tau_0) \left\{ 1 - \frac{2(1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)}} \cdot \frac{1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}}{m^*} \right\}. \quad (82)$$

Подставляя (82) в выражение $\sigma_r^*(r, t)$ и преобразуя, будем иметь

$$\sigma_r^*(r, t) = \sigma_r(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_r(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}, \quad (83)$$

где

$$\beta_r(r, \tau_0) = \frac{1 - \frac{kr_2(1-\nu)}{E(\tau_0)} - \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \frac{r_1^2}{r_2^2} \rho, \quad (84)$$

$$\beta_r(r, \tau_0) = \frac{2 \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) (1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{m^* \left\{ 1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} - \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] \right\}} \quad (85)$$

Подставляя (82) в выражение $\sigma_\varphi^*(r, t)$, получим

$$\sigma_\varphi^*(r, t) = \sigma_\varphi(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_\varphi(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}, \quad (86)$$

где

$$\beta_\varphi(r, \tau_0) = \frac{\frac{1 - kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} + \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \frac{r_1^2}{r_2^2} \rho, \quad (87)$$

$$\beta_\varphi(r, \tau_0) = \frac{2 \left(1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) (1-\nu)\gamma\varphi(\tau_0)E^*(\tau_0)}{m^* \left\{ 1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} + \frac{r_2^2}{r^2} \left[1 + \frac{kr_2}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right] \right\}} \quad (88)$$

Из (77) и (82) получим:

$$\sigma_z^*(r, t) = \sigma_z(r, \tau_0) \left\{ 1 - \beta_z(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}] \right\}. \quad (89)$$

где

$$\sigma_z(r, \tau_0) = \frac{2\nu \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right]}{1 - \frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \left(1 - 2\nu + \frac{r_1^2}{r_2^2} \right)} \frac{r_1^2}{r_2^2} p. \quad (90)$$

$$\beta_z(\tau_0) = \frac{2(1-\nu)\tau_0^2 E^*(\tau_0)}{m^* \left[1 - \frac{kr_2(1+\nu)}{E(\tau_0)} \right]}. \quad (91)$$

Введем в (83), (86) и (89) обозначение

$$\chi_r(r, t, \tau_0) = 1 - \beta_r(r, \tau_0) [1 - e^{-m^*(t-\tau_0)}]_{(r, \tau, z)}. \quad (92)$$

где $\beta_r, \beta_\nu, \beta_z$ определяются формулами (85), (88), (91), и сделаем некоторые замечания относительно общего характера изменения компонентов напряжения во времени. Влияние ползучести бетона на величины этих напряжений характеризуется функциями $\chi_r(r, t, \tau_0)_{(r, \tau, z)}$. Так как $m^* > 0$, то в (92) выражение, находящееся в квадратных скобках, монотонно возрастает. В зависимости от знака и значения $\beta_r(r, \tau_0)$ функция $\chi_r(r, t, \tau_0)$ может убывать или возрастать. Из условия

$$\frac{\partial \chi_r(r, t, \tau_0)}{\partial t} = -\beta_r m^* e^{-m^*(t-\tau_0)} = 0 \quad (r, \tau, z)$$

находим, что при $t \rightarrow \infty$ функция (92) принимает экстремальное значение. Далее, имеем

$$\frac{\partial^2 \chi_r}{\partial t^2} \Big|_{t=\infty} = \beta_r m^{*2} e^{-m^*(t-\tau_0)} \Big|_{t=\infty} = \beta_r m^{*2} \quad (r, \tau, z)$$

Из (88) и (91) следует, что β_ν и β_z положительны. Следовательно, χ_ν и χ_z (а поэтому и $\sigma_\nu^*(r, t)$ и $\sigma_z^*(r, t)$) монотонно убывают, стремясь к своим минимальным значениям, при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \beta_\nu(r, \tau_0) = \chi_\nu(r, \infty, \tau_0) \leq \chi_\nu(r, t, \tau_0) \leq 1,$$

$$1 - \beta_z(\tau_0) = \chi_z(r, \tau_0) < \chi_z(\infty, \tau_0) \leq 1.$$

Из (85) видно, что $\beta_r < 0$, поэтому χ_r и σ_r^* монотонно возрастают, стремясь к своим максимальным значениям при $t \rightarrow \infty$:

$$1 - \beta_r(r, \tau_0) = \chi_r(r, \infty, \tau_0) \leq \chi_r(r, t, \tau_0) \leq 1.$$

Численный пример. Пусть $\tau_0 = 180$ дн.; $\nu = 0,1$; $\frac{r_2}{r_1} = 1,5$, а остальные параметры имеют те же значения, которые приведены в численном примере предыдущего параграфа.

Для нашего примера возьмем $m^* = 0,04$.

Таблица 3

Значения γ_r и γ_z по формулам (92)

$t-\tau_0$	7	14	28	60	90	180	1 год	∞
$\gamma_r(r_1, t)$	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
$\gamma_r(r_0, t)$	1,0413	1,0792	1,1280	1,1804	1,1972	1,2060	1,2032	1,2061
$\gamma_r(r_2, t)$	1,2339	1,4176	1,6749	1,9515	2,3038	2,0861	2,0370	2,0883
$\gamma_z(r_1, t)$	0,9472	0,9058	0,8477	0,7853	0,7653	0,7549	0,7517	0,7514
$\gamma_z(r_0, t)$	0,9443	0,9006	0,8334	0,7736	0,7526	0,7416	0,7414	0,7411
$\gamma_z(r_2, t)$	0,9391	0,8913	0,8243	0,7524	0,7234	0,7173	0,7170	0,7167

Из последней таблицы приходим к заключению:

1. Напряжение $\sigma_r^*(r, t)$, вследствие ползучести бетона, загужает на 25—30 %.

2. Напряжение $\sigma_z^*(r, t)$, вследствие ползучести, растет до двух раз.

3. В толще трубы, по направлению к наружной поверхности, влияние ползучести растет, но эти изменения не существенны.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 1 X 1956

Մ. Ա. Զադոյան

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աստիճական միջավայրում գտնվող խողովակի լարվածային վիճակի մասին գոյություն ունեն մի շարք աշխատանքներ [3], [5], [6]:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է առաձգական միջավայրում գտնվող բետոնյա խողովակի ջերմության փոխախախտումներից, բետոնի կծկումից և ներքին չիզոտատարի ճնշումից առաջացած լարվածային վիճակը՝ սողքի հաշվառումով:

Օգտվելով սողքի տեսության [1] հիմնական հավասարումներից, արտածված են բանաձևեր և բերված են թվային օրինակներ, որոնք ցույց են տալիս, որ սողքի նեղեցիկով ժամանակի ընթացքում լարումները խողովակում զգալի նվազում են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., 1952.
2. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных бетонных блоках от экзотермии цемента. Сборник НИИ по строительству «Массивные и

стержневые конструкции, Министерство строительства предприятий машиностроения, М., 1952.

3. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. I, М., 1952.

4. *Гутман С. Г.* Определение тепловых напряжений при гармонических колебаниях температуры. Известия ВНИИГ, т. 47 (1952) и т. 51 (1954).

5. *Панарик Н. Я.* Расчет облицовки туннеля под воздействием температуры. Известия ВНИИГ, т. 23, 1938.

6. *Федоров В. Л.* Расчет облицовок некоторых гидротехнических туннелей на внутреннее давление. Известия ВНИИГ, т. 25, 1939.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

К вопросу о распределении атмосферного давления
на уровне моря в общей циркуляции атмосферы

§ 1. Введение

При построении моделей атмосферных движений приходится учитывать многие факторы, действующие в реальной бароклинной атмосфере, как, например, приток тепла от Солнца, силу тяжести, отклоняющую силу вращения Земли, силы внутреннего трения, топографию местности и т. д. Однако при построении математической теории, с целью получения качественных и количественных оценок, всякий раз приходится идти на различные упрощения, основанные на следующих соображениях.

Критические скорости в атмосфере весьма малы, поэтому поток воздуха в ней всегда турбулентный. Можно показать, что в известном приближении силы внутреннего трения прямо пропорциональны градиенту скорости, т. е.

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn}, \quad (1.1)$$

где τ — касательное напряжение, v — скорость, μ — коэффициент. При этом оказывается, что μ — коэффициент турбулентной вязкости — в сотни тысяч раз больше молекулярного коэффициента динамической вязкости.

Установлено, что коэффициент турбулентной вязкости (или турбулентного перемешивания) зависит от скорости ветра, от вертикального температурного градиента (т. е. от устойчивости и стратификации атмосферы), от шероховатости земной поверхности и т. д.

Далее, так как атмосферу можно рассматривать как тонкую пленку больших горизонтальных размеров, то отсюда следует, что вблизи земной поверхности всегда существует планетарный пограничный слой, в пределах которого турбулентная вязкость играет значительную роль, в то время как вне этого слоя турбулентная вязкость будет играть ничтожно малую роль.

Н. Е. Кочин в работе, посвященной упрощению уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы [1], считает, что в каждый данный момент известно распределение температуры

во всем пространстве и давления на уровне моря; далее, по этому распределению он ищет распределение давления и вектора скорости частицы воздуха во всем пространстве.

Исходными в задаче Кочина являются уравнения Навье — Стокса, которые он записывает в сферических координатах.

При использовании граничных условий на поверхности Земли и благодаря малости отношения δ/a , где δ — толщина тропосферы, а — радиус земного шара, эти уравнения весьма значительно упрощаются.

Так, пользуясь вышеуказанными условиями и уравнением неразрывности, Кочин показал, что в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы вертикальные скорости во много раз меньше горизонтальных и что силы вязкости и Кориолиса имеют один и тот же порядок величины.

Кочин произвел также оценку толщины пограничного слоя, причем полученный им результат по-новому ставит вопрос о влиянии вязкости на циркуляцию атмосферы.

Итак, для случая нестационарной незональной циркуляции атмосферы полученная Кочиним система уравнений гидродинамики имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} = 2\omega \cos \theta \rho v_{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_{\theta}}{\partial z} \right), \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial t} = -2\omega \cos \theta \rho v_{\theta} - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial z} \right), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0, \quad (1.4)$$

$$v_z = -\frac{1}{a\rho \sin \theta} \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_{\theta} \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_{\lambda}) + \frac{\partial}{\partial t} (a\rho \sin \theta) \right] dz, \quad (1.5)$$

$$p = R\rho T, \quad (1.6)$$

Здесь система координат сферическая, причем z — высота над уровнем моря, θ — дополнение широты, увеличивающееся к югу, λ — долгота, увеличивающаяся к востоку,

v_{θ} , v_{λ} , v_z — составляющие вектора скорости, соответственно, по осям θ , λ , z ,

p , ρ , T — давление, плотность, температура атмосферы,

a — радиус земного шара;

ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

g — ускорение силы тяжести.

R — газовая постоянная,

μ — коэффициент турбулентной вязкости $\left(\mu = \frac{\rho}{\rho} \right)$.

В случае стационарной незонойной циркуляции атмосферы система (1.2) — (1.6) еще более упрощается и принимает следующий вид (в случае $\mu = \text{const}$):

$$\mu \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + 2\omega \cos \theta \rho v_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (1.7)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} - 2\omega \cos \theta \rho v_\theta = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (1.4)$$

$$v_z = -\frac{1}{\rho g \sin \theta} \int_0^z \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_\lambda) \right] dz, \quad (1.9)$$

$$p = \rho RT. \quad (1.6)$$

И, наконец, в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы эта система принимает особенно простой вид, так как ни одна из входящих в нее величин не будет зависеть от λ .

Для полной определенности этих систем следует поставить следующие граничные условия: прилипание к Земле, ограниченность скорости на бесконечности; кроме того, задаются распределение давления на уровне моря и температура во всем пространстве, т. е.

$$p|_{z=0} = p_0(\theta, \lambda, t) \text{ и } T(z, \theta, \lambda, t).$$

Для первого случая задается также начальное состояние атмосферы.

Таким образом, Кочин подробно рассмотрел влияние вязкости на гидродинамические процессы в атмосфере и этим положил начало многим новым исследованиям в области математической теории общей циркуляции атмосферы.

А. А. Дородницын показал [2], что задание распределения атмосферного давления на уровне моря не обязательно, ибо оно также может быть получено теоретическим путем. Дородницын рассматривает атмосферу как пограничный слой и в качестве исходных данных считает известным зональное распределение температуры во всей атмосфере. Таким образом, по Дородницыну, в случае стационарной зональной циркуляции задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta \rho v_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta \rho v_\theta = 0, \quad (1.11)$$

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{g}{R} \int_0^z \frac{dz}{T} \right]. \quad (1.12)$$

$$v_z = - \frac{1}{a\rho \sin \theta} \int_0^z \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) dz, \quad (1.13)$$

при следующих граничных условиях: при $z = 0$, $v_\theta = v_\lambda = v_z = 0$, а при $z \rightarrow \infty$; $v_\theta = v_z = 0$, $v_\lambda \approx 3\omega H \sin \theta$.

Второе граничное условие устанавливается следующим образом: основываясь на данных наблюдений над серебристыми облаками, Дороницын предлагает учесть отставание атмосферы от Земли на больших высотах и считать на бесконечности абсолютные скорости конечными.

Тогда v_θ и v_λ из уравнений движения (1.10) и (1.11) можно выразить через ρ_θ , пользуясь (1.12).

Затем, подставляя эти выражения в (1.13), будем иметь

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) dz = 0, \quad (1.14)$$

откуда и определяется ρ_θ , а следовательно, и ρ , v_θ , v_λ , v_z .

Дороницын принял μ постоянным, равным 1 MTS, при этом распределение ρ_θ получилось качественно хорошим, однако вычисленные градиенты $d\rho_\theta/d\theta$ оказались преувеличенными.

Коэффициент μ в предыдущих случаях был принят постоянным, но мы уже отмечали его большую изменчивость. По этому поводу заметим, что для коэффициента μ предложено много различных моделей.

И. А. Кибель [3] при решении задачи о распределении ветра по высоте, принимая по Прандтлю вблизи шероховатой стенки с шероховатостью z_0 условие

$$|v| = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{k} \ln \frac{z}{z_0},$$

где $k = 0,36 \div 0,40$, z — расстояние от стенки, τ_0 — касательное напряжение на стенке, и соотношение

$$\tau_0 = \rho v \left| \frac{dv}{dz} \right|,$$

приходит к выводу, что v вблизи такой стенки растет с высотой линейно, считая, далее, что этот закон имеет место во всей толще атмосферы. Но если эта модель хорошо описывает явление вблизи земной поверхности, то на больших высотах она уже неверна. Поэтому М. И. Юдин и М. Е. Швец [4] при изучении того же вопроса предложили следующую модель:

$$v = \begin{cases} cz; & \text{при } z \leq h \\ ch; & \text{при } z > h, \end{cases} \quad (1.15)$$

где c и h — постоянные. Расчеты по этой модели дали вполне удовлетворительное согласие с наблюдениями.

Существуют еще и другие модели, на которых мы не останавливаемся, исходя из того, что для наших целей достаточно пользоваться одной из вышеприведенных. Заметим, что А. М. Обухов [5] теоретически рассмотрел вопрос об изменении коэффициента турбулентного перемешивания с высотой и пришел к выводу, что указанный коэффициент вблизи земной поверхности в некотором слое, названном им подслоем динамической турбулентности, растет с высотой линейно, а на больших высотах асимптотически приближается к некоторому предельному значению.

Е. Н. Блинова в работе [6], посвященной определению давления на уровне моря, пошла по новому пути. Так, если Кочин считал известным распределение давления на уровне моря и температуры во всем пространстве, то Блинова не вводит этих ограничений и строит свою теорию, привлекая к рассмотрению уравнения гидротермодинамики идеальной бароклининой жидкости на сфере.

Уравнения движения берутся в форме Эйлера, причем в качестве третьего уравнения берется обычное уравнение статики. Задача решается на некоторой средней (так называемой бездивергентной) высоте, на которой

$$\rho v_z \rightarrow \max, \text{ т. е. } \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \approx 0. \quad (1.16)$$

Все движение воздушных масс в атмосфере рассматривается состоящим из основного зонального потока и малых отклонений от последнего, которые будем называть возмущениями. Пусть скорость зонального потока

$$\bar{v}_\lambda(\theta, z) = \alpha(z) a \sin \theta, \quad (1.17)$$

где $\alpha(z)$ — угловая скорость вращения атмосферы относительно Земли, не зависящая от θ , а давление и температура

$$\bar{p}(\theta, z) = p_{00}(z) + a^2 \omega \alpha \rho \sin^2 \theta, \quad (1.18)$$

$$\bar{T}(\theta, z) = T_{00}(z) + M(z) \sin^2 \theta,$$

где $p_{00}(z)$ и $T_{00}(z)$ — давление и температура на полюсе, а $M(z)$ — перепад температуры от экватора к полюсу. Далее, составляется уравнение Фридмана, отвечающее оси z , и пренебрегается членами с вертикальной скоростью. Упрощенное, таким образом, уравнение применяется для определения давления на среднем уровне.

Построив стационарное решение, Блинова впервые теоретически получила так называемые „центры действия атмосферы“.

В одной из последующих работ Блинова [7] дает решение той же задачи с учетом членов с вертикальной скоростью. Заметим, что здесь температура не осредняется для нижнего слоя, а каждый уровень входит со своей температурой; кроме того, решение представ-

лено через функцию Грина, в которой одна из сумм берется в конечном виде благодаря отсутствию трения.

Таким образом, впервые теоретически было получено распределение атмосферного давления на уровне моря. Градиенты давления, как и следовало ожидать, значительно превосходили фактические, что легко объяснить отсутствием учета турбулентного перемешивания и частично орографии местности, т. е. того суммарного влияния планетарного пограничного слоя, которое он оказывает на образование термобарических полей.

Теория Е. Н. Блиновой дает возможность долгосрочного прогноза метеорологических элементов методами динамической метеорологии.

В нашей работе [8] построена теория распределения давления на уровне моря с учетом вертикального турбулентного перемешивания; при этом мы решили задачу также на среднем уровне атмосферы и, кроме того, считали коэффициент турбулентного перемешивания постоянным по высоте и делали некоторые другие упрощения.

В настоящей работе решается та же задача о нахождении распределения атмосферного давления на уровне моря при более общих предположениях. В конце работы эта задача решается другим путем.

§ 2. Вывод основного уравнения

Атмосфера рассматривается как реальная бароклинная жидкость в поле сил тяжести и Кориолиса. Чтобы произвести учет влияния приземного трения на формирование наземных и высотных барических полей, мы будем вводить в рассмотрение вертикальное и горизонтальное турбулентные перемешивания различных масштабов, причем коэффициент горизонтального обмена (ν_1) будем считать постоянным, а для коэффициента вертикального обмена ν будем пользоваться различными моделями.

Выведем, прежде всего, уравнение А. А. Фридриха, определяющее изменения вектора вихря скорости в частице воздуха в случае циркуляции реальной бароклиновой атмосферы в поле сил, указанных выше.

Будем пользоваться сферической системой координат.

Напишем уравнение движения в векторной форме:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right) + \frac{\nu_1}{a^2}\nabla\vec{V} + 2\vec{V}\times\vec{\omega}. \quad (2.1)$$

Здесь Φ — потенциал объемных сил, $\nabla\Phi$ — его градиент,

∇P — градиент давления,

t — время,

$$\Delta = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right] \quad (2.2)$$

(остальные обозначения приведены выше).

Уравнение (2.1) можно переписать так:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{V^2}{2} + \Phi \right) - \vec{V} \times \vec{\Omega} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \Delta \vec{V} + 2\vec{V} \times \vec{\omega}, \quad (2.3)$$

где $\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V}$ — вектор вихря скорости.

Возьмем операцию rot от обеих частей равенства (2.3).

Имея в виду, что

$$\text{rot} \nabla \Phi = 0,$$

получим

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = -\text{rot} \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \nabla \vec{\Omega} + 2 \text{rot} (\vec{V} \times \vec{\omega}), \quad (2.4)$$

Пользуясь уравнением состояния, легко убедиться, что

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right) = \frac{1}{\rho T} \nabla T \times \nabla P,$$

кроме того,

$$\text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \vec{\omega} \text{div} \vec{V},$$

$$\text{rot} (\vec{V} \times \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - \vec{\Omega} \text{div} \vec{V},$$

так как

$$\text{div} \vec{\omega} = \text{div} \vec{\Omega} = 0.$$

Подставляя все эти выражения в (2.4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \text{div} \vec{V} + 2(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - 2(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + \\ + 2\vec{\omega} \text{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho T} \nabla T \times \nabla P + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \nabla \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пользуясь теперь тем обстоятельством, что вектор планетарного вихря $\vec{\omega}$ стационарный, будем иметь

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\Omega} = \frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \quad (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кроме того, согласно уравнению неразрывности,

$$\text{div} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Тогда после несложных преобразований окончательно получим уравнение Фридмана в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \right) - \left(\frac{\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{V} = -\frac{1}{\rho^2 T} \nabla T \times \nabla P +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2 \rho} \Delta \vec{\Omega}. \quad (2.6)$$

Сумму $\vec{\Omega} + 2\vec{\omega}$ будем называть абсолютным вихрем; тогда уравнение (2.6) показывает, что изменение величины абсолютного вихря, поделенного на плотность воздушных масс, происходит главным образом за счет переноса этой величины горизонтальным потоком, изменения количества движения с высотой, бароклинности среды и за счет трения. В последнем учитываются горизонтальное и вертикальное перемешивания различных масштабов.

Спроектируем уравнение Фридмана на ось z ; тогда, после небольших, вполне естественных, упрощений получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + \frac{V_\theta}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (\Omega_z + 2\omega \cos \theta) + \frac{V_\lambda}{a \sin \theta} \frac{\partial \Omega_z}{\partial \lambda} - \frac{2\omega \cos \theta}{\rho} \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} = \\ = - \frac{(T, P)}{a^2 \rho \bar{T} \sin \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) + \frac{\nu_1}{a^2} \Delta \Omega_z. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь: $\omega_z = \omega \cos \theta$, $\bar{T}(z)$ — стандартная температура, $\rho = \bar{\rho}(z)$ — стандартная плотность,

$$\begin{aligned} (T, P) &= \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}, \\ \Omega_z &= \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\lambda \sin \theta) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \lambda} \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Произведем линеаризацию уравнения (2.7), пользуясь методом из работы [6], т. е. будем считать, что движение состоит из основного зонального потока и малых возмущений последнего, причем рассмотрим пока стационарную задачу.

Итак, пусть

$$\begin{aligned} V_\theta = v_\theta(\theta, \lambda, z), \quad V_\lambda = \bar{v}_\lambda(\theta, z) + v_\lambda(\theta, \lambda, z), \quad V_z = v_z(\theta, \lambda, z), \\ P = \bar{p}(\theta, z) + p(\theta, \lambda, z), \\ T = \bar{T}(\theta, z) + T'(\theta, \lambda, z). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь элементы зонального потока определяются по (1.17) и (1.18), а возмущения $v_\theta, v_\lambda, v_z, p, T'$ считаются малыми; поэтому в дальнейшем будем пренебрегать квадратичными членами.

Обратимся к уравнению неразрывности. Это уравнение вдали от земной поверхности с большой степенью точности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) + \frac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} = 0.$$

Это позволяет ввести функцию тока на всех уровнях атмосферы (кроме, конечно, пограничного слоя), так что

$$V_0 = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\sin \theta \partial \lambda}, \quad V_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}. \quad (2.10)$$

Представляя функцию тока в виде $\Psi = \bar{\psi}(\theta, z) + \psi(\theta, \lambda, z)$, легко убедиться, что отклонения скорости v_θ, v_λ выражаются через отклонение этой функции от зональных ее значений $\bar{\psi}(\theta, \lambda, z)$ по формулам, аналогичным (2.10), а пользуясь (1.17), легко найдем, что $\bar{\psi} = -\alpha a^2 \cos \theta$. Кроме того, пользуясь (2.8) и (2.10), найдем

$$\Omega_z = \frac{1}{a^2} \Delta \Psi, \quad (2.11)$$

причем отклонения Ω_z и Ψ между собой будут связаны точно таким же соотношением.

Подставляя все эти выражения в уравнение (2.7), приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2(\omega + \alpha) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi - \frac{2a^2 \omega \cos \theta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \\ = -\frac{(T, P)}{\bar{\rho} \bar{T} \sin \theta} + a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В последнем члене правой части мы не переходим к функции тока, с целью вычислить влияние трения в пограничном слое на барические образования, исходя из уравнений Кочина [1].

Упростим член с бароклинностью. Пользуясь (2.8) и (1.18), имеем

$$(T, P) \approx -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} = -\frac{\partial T'}{\partial \lambda} a^2 \alpha \omega \bar{\rho}^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Кроме того, так как $\frac{\alpha}{\omega} \ll 1$, то отбросим α во втором члене левой части (2.12). Получим

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi - \frac{2a^2 \omega \cos \theta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = \\ = \frac{2a^2 \alpha \omega \cos \theta}{\bar{T}} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} + a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Помножим обе части уравнения (2.13) на $\bar{\rho}$ и проинтегрируем по z от z_0 до бесконечности, где z_0 — высота шероховатости,

$$\int_{z_0}^{\infty} \left(\alpha \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \psi \right) \bar{\rho} dz = 2a^2 \omega \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \bar{\tau}_1}{\partial \lambda} \alpha \bar{T} \bar{\rho} dz + a^2 \bar{\rho}_c \left(\gamma \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}. \quad (2.14)$$

Здесь интеграл от последнего члена левой части обратился в нуль в силу того обстоятельства, что $v_z = 0$ при $z = z_0$ и $\rho v_z = 0$ при $z \rightarrow \infty$. ρ_0 — средняя по высоте плотность, а

$$\tau_1(\theta, \lambda, z) = \frac{\cos \theta T'(\theta, \lambda, z)}{[\tilde{T}(z)]^2}. \quad (2.15)$$

Чтобы выполнить квадратуры в левой части, мы должны пользоваться уравнением (1.4), которое мы возьмем в виде

$$\ln P = \ln P_0 - \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T}.$$

Линеаризируя это уравнение, получим (см., например, [7])

$$\frac{p}{\bar{p}} = \frac{P_0}{p_0} + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{T' dz}{T^2}. \quad (2.16)$$

Здесь \bar{p} и p_0 — соответственно, стандартные давления на высоте и на уровне моря.

Возьмем теперь линеаризованное уравнение Эйлера, отвечающее оси λ :

$$2(\omega + \alpha) \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \lambda} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (2.17)$$

Из этого уравнения легко найти p через ψ и, подставляя в (2.16), выразить ψ через $p_0(\theta, \lambda)$, а подстановка последнего выражения в (2.14) позволяет определить p_0 , т. е. решает нашу задачу до конца.

Остановимся на приближенном решении (2.17). Так как $\partial \psi / \partial \lambda$ и $\partial^2 \psi / \partial \theta \partial \lambda$ являются величинами одинакового порядка, а $\alpha \ll \omega$, то приближенно можно принять

$$p \approx 2\omega \cos \theta \rho \psi. \quad (2.18)$$

Пользуясь уравнением состояния, из (2.16) получим

$$\psi = \frac{RT}{2\omega} \left(\varphi + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \tau_2 dz \right), \quad (2.19)$$

где

$$\varphi(\theta, \lambda) = \frac{P_0}{p_0 \cos \theta}, \quad \tau_2 = \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\cos \theta [\tilde{T}(z)]^2}. \quad (2.20)$$

Подчеркиваем, что φ не зависит от высоты.

Подставляя (2.19) в (2.14), получим окончательно

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} \left[\int_{z_1}^{\infty} \alpha \bar{T} \rho dz \right] + 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \Delta \Delta \varphi = \frac{2a^2 \omega^2 \rho_c}{R \int_{z_0}^{\infty} \bar{T} \rho dz} \left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0} -$$

$$- \frac{g}{R \int_{z_0}^{\infty} \bar{T} \rho dz} \left[\alpha \int_{z_1}^{\infty} \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_{z_1}^{\infty} \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{4a^2 \omega^2 z}{g} \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_{z_0}^{\infty} \Delta \Delta \tau_2 dz \right] \bar{T} \rho dz. \quad (2.21)$$

Из этого уравнения мы должны определить $\varphi(\theta, \lambda)$; тогда из (2.20) определится $p_\theta(\theta, \lambda)$, и наша цель будет достигнута. Остается лишь вычислить первый член правой части уравнения (2.21).

§ 3. Влияние вертикального турбулентного обмена

Мы должны вычислить

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}. \quad (3.1)$$

Этот член учитывает тот суммарный эффект, который оказывает планетарный пограничный слой на барические образования. Чтобы вычислить его, необходимо иметь составляющие вектора скорости во всей толще атмосферы. Но предварительно заметим следующее. На большом расстоянии от Земли, вне планетарного пограничного слоя, влияние турбулентной вязкости исчезает; поэтому нам необходимо вычислить значение этой величины лишь в непосредственной близости от Земли. Для этого мы воспользуемся уравнениями Кочина [1], которые мы запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda = \frac{1}{\alpha \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta = \frac{1}{\alpha \rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Так как на большом расстоянии от Земли влияние трения исчезает и там существует функция тока по (2.10), то мы будем считать, что между полем давления и полем функции тока существуют следующие приближенные соотношения:

$$\frac{1}{\alpha \rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} \approx \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{\alpha \rho \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \approx \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \quad (3.3)$$

Тогда система (3.2) переищется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В тонком приземном слое мы можем считать, что горизонтальные градиенты функции тока не зависят от высоты и равняются их значению на верхней границе слоя трения; обозначим через ψ_0 значение ψ на этом уровне, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В качестве первого приближения мы примем, что ν также не зависит от z ; тогда при граничных условиях $v_\theta = v_\lambda = 0$, при $z = 0$ и, учитывая, что скорость ограничена на бесконечности, получим следующее решение (принимая $z_0 = 0$):

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \left(1 - e^{-rz} \cos rz \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} e^{-rz} \sin rz, \\ v_\lambda &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \left(1 - e^{-rz} \cos rz \right) - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} e^{-rz} \sin rz, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где
$$r = \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{\nu}}. \quad (3.6')$$

Подставляя это решение во второе из соотношений (2.8), беря производную от этого выражения по z , получим

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a^2} \sqrt{\omega \nu \cos \theta} \Delta \psi_0 + \frac{1}{2a^2} \frac{\sqrt{\omega \nu \cos \theta}}{\cos \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \right). \quad (3.7)$$

Пренебрегая первыми производными от ψ_0 по θ и λ по сравнению с значением Лапласиана от ψ_0 , получим

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a^2} \sqrt{\omega \nu \cos \theta} \Delta \psi_0. \quad (3.8)$$

Это выражение нами использовано в [8].

Однако, как отмечалось выше, именно в тонком приземном слое происходят значительные изменения коэффициента ν ; поэтому принять его постоянным по высоте в этом слое нельзя, и мы сейчас рассмотрим случай, когда ν растет с высотой по линейному закону, т. е.

$$v = c_0 z, \quad (3.9)$$

причем c_0 выбирается так, чтобы на высоте шероховатости получить молекулярный коэффициент вязкости; c_0 не зависит от z , но может зависеть от горизонтальных координат.

Воспользуемся системой (3.5); тогда, на основании модели (3.9), эта система примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} v_\lambda &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \right) - \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} v_\theta &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Эту систему можно привести к следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{k_1^2}{4} U = \frac{k_1^2}{4} \Gamma. \quad (3.11)$$

Здесь

$$U = v_\theta - i v_\lambda,$$

$$k_1^2 = 4 \frac{2i\omega \cos \theta}{c_0} = ik^2, \quad k = 2 \sqrt{\frac{2\omega \cos \theta}{c_0}},$$

$$E = E_1 + iE_2 = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \right). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) имеет решение

$$U = c_1 I_0(k\sqrt{iz}) + c_2 H_0(k\sqrt{iz}) + E, \quad (3.13)$$

где I_0 и H_0 — цилиндрические функции, а c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, зависящие от θ и λ .

Используя граничные условия $U = 0$ при $z = z_0$ и $U < \infty$ при $z \rightarrow \infty$ и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \left[1 - N_1(k\sqrt{z}) \right] - \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} N_2(k\sqrt{z}), \\ v_\lambda &= \frac{1}{a} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \left[1 - N_1(k\sqrt{z}) \right] - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} N_2(k\sqrt{z}), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} H_n(k\sqrt{iz}) &= \text{her}_n(k\sqrt{z}) + i \text{hei}_n(k\sqrt{z}), \\ N_1(k\sqrt{z}) &= \frac{\text{her}_0(k\sqrt{z_0}) \text{her}_0'(k\sqrt{z}) + \text{hei}_0(k\sqrt{z_0}) \text{hei}_0'(k\sqrt{z})}{[\text{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\text{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \\ N_2(k\sqrt{z}) &= \frac{\text{her}_0(k\sqrt{z_0}) \text{hei}_0'(k\sqrt{z}) - \text{hei}_0(k\sqrt{z_0}) \text{her}_0'(k\sqrt{z})}{[\text{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\text{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя решение (3.14) во второе из соотношений (2.8), беря производную от этого выражения по z , получим

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_z = - \frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \Delta \psi_0 - \frac{c_0 \sqrt{z_0}}{2a^2 \sqrt{2}} \left[\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (kM) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \theta} (kM_1) \right]. \quad (3.16)$$

Здесь

$$M = \frac{A + B}{[\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \quad (3.17)$$

$$M_1 = \frac{A_1 - B_1}{[\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})]^2 + [\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2},$$

где

$$A = \operatorname{her}(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$A_1 = \operatorname{her}(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$B = \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})],$$

$$B_1 = \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})].$$

Если же пренебречь производными от ψ_0 по θ и λ по сравнению с $\Delta \psi_0$, то (3.16) примет более простой вид:

$$\left(\nu \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_z = - \frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \Delta \psi_0. \quad (3.18)$$

Можно вычислить этот же член, пользуясь моделью (1.15) или другими моделями, более близкими к физической сущности явления, но все они приводят к громоздким вычислениям; поэтому для наших целей будет достаточно остановиться только на двух случаях, приведенных выше.

Но представляет интерес рассмотреть изменения выражения (3.1), если исходить из более точной системы уравнений (3.4), т. е. учесть зависимость ψ от высоты.

Систему (3.4) при ν , не зависящем от высоты, можно привести к одному уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - r_1 U = - r_1^* E. \quad (3.19)$$

Здесь

$$U = v_0 + i v_1,$$

$$r_1 = r_1 - 2i, \quad r_1^* = \frac{\rho \omega \cos \theta}{\nu}, \quad E = - \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (3.20)$$

При граничных условиях, использованных для решения системы (3.5), уравнение (3.19) имеет следующее решение:

$$\bar{U} = \frac{r_1}{2} e^{-r_1 z} \left[\int_0^z E e^{r_1 z} dz - \int_0^z E e^{-r_1 z} dz \right] - \frac{r_1}{2} e^{r_1 z} \int_0^z E e^{-r_1 z} dz. \quad (3.21)$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим выражения для скоростей. Эти выражения мы здесь приводить не будем из-за их громоздкости, но вычислим (3.1). Пользуясь (3.21), имеем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \Big|_0^\infty = -r_1 \int_0^\infty E e^{-r_1 z} dz,$$

или

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} \Big|_0^\infty = \frac{2r^2}{a} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cos rz + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \sin rz \right) e^{-rz} dz,$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial z} \Big|_0^\infty = \frac{2r^2}{a} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cos rz - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \sin rz \right) e^{-rz} dz,$$

или

$$\left(v \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty \cong -\frac{2r^2 v}{a} \int_0^\infty \Delta \psi e^{-rz} \sin rz dz. \quad (3.22)$$

Здесь мы отбросили члены с первыми производными от ψ . Если в (3.22) положить, что ψ не зависит от высоты, то оно, как легко убедиться, переходит в (3.8).

Чтобы выполнить интегрирование, мы воспользуемся выражением (2.16) и приближенным соотношением (2.18).

Считая стандартную температуру линейной функцией высоты с вертикальным температурным градиентом γ , вводя ψ_0 как значение ψ на верхней границе слоя трения и пользуясь обозначением (2.20), получим

$$\psi(\theta, \lambda, z) = \psi_0(\theta, \lambda) \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right) + \frac{g \bar{T}}{2\omega} \int_0^z \tau_2 dz. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.22), получим

$$\left(v \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{a^2} \left(\sqrt{\omega v} \cos \theta - \frac{\gamma v}{T_0} \right) \Delta \psi_0 - \frac{g r^2 v}{\omega a^2} \int_0^\infty \bar{T} \left(\int_0^z \Delta \tau_2 dz \right) e^{-rz} \sin rz dz. \quad (3.24)$$

Если же решить уравнение (3.11) с правой частью, зависящей от z при тех же граничных условиях, то получим

$$U = -V \bar{T} H_0(y \sqrt{\bar{T}}) \int_{y_0}^y \frac{E(y) I_0(y \sqrt{\bar{T}}) dy}{I_0(y \sqrt{\bar{T}}) H_1(y \sqrt{\bar{T}}) - H_0(y \sqrt{\bar{T}}) I_1(y \sqrt{\bar{T}})} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{I_0(y_0 V \bar{i})}{H_0(y_0 V \bar{i})} \int_{\infty}^{y_0} \frac{E(y) H_0(y V \bar{i}) dy}{I_0(y V \bar{i}) H_1(y V \bar{i}) - H_0(y V \bar{i}) I_1(y V \bar{i})} \Big] + \\
 & + V \bar{i} I_0(y V \bar{i}) \int_{\infty}^y \frac{E(y) H_0(y V \bar{i}) dy}{I_0(y V \bar{i}) H_1(y V \bar{i}) - H_0(y V \bar{i}) I_1(y V \bar{i})}, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

где

$$kV\bar{z} = y, \quad kV\bar{z}_0 = y_0. \quad (3.26)$$

Мы здесь тоже не будем отделять действительную и мнимую части, так как сами составляющие вектора скорости пока нам не нужны, но вычислим их производные. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} = - \frac{1}{y_0 H_0(y_0 V \bar{i})} \int_{\infty}^{y_0} E(y) H_0(y V \bar{i}) y dy, \quad (3.27)$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_0}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} &= - \frac{n_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_1 \text{her}_0(y) - E_2 \text{hei}_0(y)] y dy + \\
 & + \frac{m_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_2 \text{her}_0(y) + E_1 \text{hei}_0(y)] y dy. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_A}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} &= \frac{m_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_1 \text{her}_0(y) - E_2 \text{hei}_0(y)] y dy + \\
 & + \frac{n_0}{y_0} \int_{\infty}^{y_0} [E_2 \text{her}_0(y) + E_1 \text{hei}_0(y)] y dy;
 \end{aligned}$$

следовательно,

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial y} \Big|_{y_0}^{\infty} \approx - \frac{1}{a^2 y_0} \int_{\infty}^{y_0} [n_0 \text{her}_0(y) - m_0 \text{hei}_0(y)] \Delta \psi y dy. \quad (3.29)$$

Здесь

$$n_0 = \frac{\text{hei}_0(y_0)}{[\text{her}_0(y_0)]^2 + [\text{hei}_0(y_0)]^2}, \quad m_0 = \frac{\text{her}_0(y_0)}{[\text{her}_0(y_0)]^2 + [\text{hei}_0(y_0)]^2}. \quad (3.30)$$

Мы пользуемся некоторыми соотношениями из [9], на основании которых легко можно убедиться, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \text{her}_0(k\sqrt{z}) &= -\frac{k}{z\sqrt{2z}} [\text{her}_1(k\sqrt{z}) - \text{hei}_1(k\sqrt{z})], \\ \frac{\partial}{\partial z} \text{hei}_0(k\sqrt{z}) &= -\frac{k}{2\sqrt{2z}} [\text{her}_1(k\sqrt{z}) + \text{hei}_1(k\sqrt{z})], \\ \int_{\infty}^{y_0} y \text{her}_0(y) dy &= \frac{y_0}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)], \\ \int_{\infty}^{y_0} y \text{hei}_0(y) dy &= -\frac{y_0}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) - \text{hei}_1(y_0)], \\ \int_{\infty}^{y_0} y^3 \text{her}_0(y) dy &= \frac{y_0^3}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)] + \\ &+ \frac{4y_0}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) - \text{hei}_1(y_0)] + 2y_0^2 \text{hei}_0(y_0), \\ \int_{\infty}^{y_0} y^3 \text{hei}_0(y) dy &= -\frac{y_0^3}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) - \text{hei}_1(y_0)] + \\ &+ \frac{4y_0}{\sqrt{2}} [\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)] - 2y_0^2 \text{her}_0(y_0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Подставляя тогда (3.23) в (3.29), пользуясь соотношениями (3.31) и переходя к z по (3.26), получим окончательно

$$\begin{aligned} \left(v \frac{\partial \Omega_z}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} &\approx -\frac{M}{a^2} \sqrt{\omega c_0 z_0} \cos \theta \left(1 - \frac{\gamma z_0}{T_0} S \right) \Delta \psi_0 - \\ &- \frac{g c_0 k^2}{8 \omega a^2} \int_{z_0}^{\infty} [m_0 \text{hei}_0(y_0) - r_0 \text{her}_0(y)] \left(\int_{z_0}^z \Delta \tau_2 dz \right) dz. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь M определяется по (3.17), а

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{2\sqrt{2}}{y_0 M} + \frac{4}{y_0^2} \left(1 - \frac{2R_1}{M} \right), \\ R_1 &= \frac{\text{her}_0(y_0) \text{hei}_1(y_0) + \text{hei}_0(y_0) \text{her}_1(y_0)}{[\text{her}_0(y_0)]^2 + [\text{hei}_0(y_0)]^2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Коэффициент k по (3.12) имеет величину, не большую чем 10^{-2}М^{-1} ; поэтому, при сравнительно небольшой высоте шероховатости, y_0 будет достаточно малой величиной, и вышеприведенные постоянные могут быть значительно упрощены.

В самом деле, при малых значениях y_0 имеем

$$\begin{aligned} \text{her}_0(y_0) &\rightarrow 0,5, \quad \text{hei}_0(y_0) \rightarrow -\infty, \\ \text{her}_1(y_0) &\rightarrow -\infty, \quad \text{hei}_1(y_0) \rightarrow -\infty; \end{aligned}$$

поэтому

$$M \approx \frac{\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)}{\text{hei}_0(y_0)}, \quad (3.17')$$

$$R_1 = \frac{\text{her}_1(y_0)}{\text{hei}_0(y_0)},$$

$$\frac{R_1}{M} \approx \frac{\text{her}_1(y_0)}{\text{her}_1(y_0) + \text{hei}_1(y_0)}. \quad (3.33')$$

Таким образом, нами вычислен член (3.1), учитывающий вертикальное турбулентное перемешивание в различных случаях. В простейшем случае, когда χ и ψ рассматриваются не зависящими от z , получается выражение (3.8); когда оба зависят от z , получается (3.32); когда χ зависит от z , ψ не зависит — получается выражение (3.18), и, наконец, когда χ не зависит от z , а ψ зависит — получается (3.24). Во всех этих случаях первые производные от ψ по горизонтальным координатам отбрасываются по сравнению с $\Delta\psi$, но это упрощение несущественно, и мы, пользуясь простейшим случаем (3.7), покажем, как можно довести до конца решение задачи в этом случае.

§ 4. Решение основного уравнения

Это уравнение имеет вид (2.21), причем в различных случаях мы вычислили значение первого члена правой части в виде (3.8), (3.18), (3.24) и (3.32). Во все последние выражения входит ψ_0 ; эту функцию можно заменить функцией φ , введенной по (2.20). Используя (2.18), имеем

$$\psi_0(\theta, \lambda) = \frac{RT_0}{2\omega} \varphi(\theta, \lambda). \quad (4.1)$$

Переходя от ψ_0 к φ по (4.1) в (3.8), (3.18), (3.24) и (3.32) и подставляя полученные таким образом выражения в основное уравнение (2.21), получим:

$$\alpha_1 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} + 2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + c_1 \Delta \varphi - c_2 \Delta \Delta \varphi = F(\theta, \lambda). \quad (4.2)$$

Здесь, в первом случае (3.8), когда χ и ψ не зависят от высоты, имеем

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha T \rho \, dz}{\int_0^{\infty} T \rho \, dz} \quad (4.3)$$

$$c_1 = \frac{T_0^{\rho c}}{\int_0^{\infty} \bar{T}_p dz} \cdot \sqrt{\omega v \cos \theta}, \quad (4.4)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_0^{\infty} \bar{T}_p dz} \int_0^z \left(\alpha \int_0^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_0^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_0^z \Delta \Delta \tau_2 dz - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} \right) \bar{T}_p dz. \quad (4.5)$$

Во втором случае (3.18), когда γ — линейная функция высоты, а ψ не зависит от высоты, имеем

$$z_1 = \frac{\int_0^{\infty} \alpha \bar{T}_p dz}{\int_{z_0}^{\infty} \bar{T}_p dz}, \quad (4.6)$$

$$c_1 = \frac{T_0^{\rho c} M}{\int_{z_0}^{\infty} \bar{T}_p dz} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta}. \quad (4.7)$$

$F(\theta, \lambda)$ имеет точно такое выражение, что и (4.5), только во всех интегралах за нижний предел вместо нуля берется z_0 .

В третьем случае (3.24), когда γ не зависит от высоты, а ψ — переменная по высоте, имеем z_1 по (4.3), а

$$c_1 = \frac{T_0^{\rho c}}{\int_0^{\infty} \bar{T}_p dz} \sqrt{\omega v \cos \theta} \left(1 - \frac{\gamma}{r T_0} \right). \quad (4.8)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_0^{\infty} \bar{T}_p dz} \int_0^z \left(\alpha \int_0^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_0^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\gamma_1}{a^2} \int_0^z \Delta \Delta \tau_2 dz + 2r^2 v e^{-r z} \sin r z \int_0^z \Delta \tau_2 dz - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} \right) \bar{T}_p dz. \quad (4.9)$$

И, наконец, в четвертом случае (3.32), когда γ и ψ зависят от высоты, имеем z_1 по (4.6), а

$$c_1 = \frac{T_0^{\rho c} M}{\int_{z_0}^{\infty} \bar{T}_p dz} \sqrt{\omega c_0 z_0 \cos \theta} \left(1 - \frac{\gamma z_0}{T_0} S \right), \quad (4.10)$$

$$F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R \int_{z_0}^{\infty} \tilde{T}_p dz} \int_{z_0}^{\infty} \left\{ \alpha \int_{z_0}^z \frac{\partial \Delta \tau_2}{\partial \lambda} dz + 2\omega \int_{z_0}^z \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz - \frac{\nu_1}{a^2} \int_{z_0}^z \Delta \Delta \tau_2 dz - \right. \\ \left. - \frac{4a^2 \omega^2 \alpha}{g} \frac{\partial \tau_1}{\partial \lambda} + \frac{c_0 k^2}{4} [m_0 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z}) - n_0 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z})] \left(\int_{z_0}^z \Delta \tau_2 dz \right) \right\} \tilde{T}_p dz. \quad (4.11)$$

Во всех четырех случаях через c_2 обозначено

$$c_2 = \frac{\nu_1}{a^2}. \quad (4.12)$$

Заметим, что искомая функция φ безразмерная, а α_1 , ω , c_1 , c_2 и F все имеют одинаковую размерность $1/\text{сек}$.

Перейдем к решению уравнения (4.2). Это уравнение линейное с известной правой частью (так как во всей задаче мы температуру считаем заданной), причем один из коэффициентов, именно c_1 , переменный. Решение (4.2) представляет значительные математические затруднения. Желая получить простые количественные оценки его решений, мы будем заменять выражение $\sqrt{\nu \cos \theta}$ или $M \cdot \sqrt{c_0 z_0 \cos \theta}$ их средними по меридиану значениями. В действительности их изменения для средних широт сравнительно малы.

Решение уравнения (4.2) мы будем искать в виде ряда по шаровым функциям.

Пусть нам известно разложение

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (F_n^m \cos m\lambda + F_n^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.13)$$

где F_n^m и F_n^m — известные постоянные, $p_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Если решение для φ представить в таком же виде

$$\varphi(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.14)$$

то

$$2\omega \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 2\omega \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n m (-\varphi_n^m \sin m\lambda + \varphi_n^m \cos m\lambda) p_n^m, \\ c_1 \Delta \varphi = -c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n(n+1) (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n^m \sin m\lambda) p_n^m, \quad (4.15) \\ \alpha_1 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} = -\alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n(n+1) m (-\varphi_n^m \sin m\lambda + \varphi_n^m \cos m\lambda) p_n^m.$$

$$c_2 \Delta \Delta \varphi = c_2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n n^2 (n+1)^2 (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n^{\prime m} \sin m\lambda) p_n^m.$$

Подставляя выражения (4.13) и (4.15) в (4.2), получим следующие уравнения для определения коэффициентов φ_n^m и $\varphi_n^{\prime m}$:

$$-\alpha_1 n(n+1)m\varphi_n^{\prime m} + 2\omega m\varphi_n^{\prime m} - c_1 n(n+1)\varphi_n^m - c_2 n^2(n+1)^2 \varphi_n^m = F_n^m;$$

$$\alpha_1 n(n+1)m\varphi_n^m - 2\omega m\varphi_n^m - c_1 n(n+1)\varphi_n^{\prime m} - c_2 n^2(n+1)^2 \varphi_n^{\prime m} = F_n^{\prime m},$$

откуда

$$\varphi_n^m = \frac{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]F_n^{\prime m} - n(n+1)[c_1 + c_2 n(n+1)]F_n^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + n^2(n+1)^2[c_1 + c_2 n(n+1)]^2};$$

$$\varphi_n^{\prime m} = \frac{-m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]F_n^m - n(n+1)[c_1 + c_2 n(n+1)]F_n^{\prime m}}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + n^2(n+1)^2[c_1 + c_2 n(n+1)]^2}. \quad (4.16)$$

В случае, когда горизонтальное перемешивание не учитывается $c_2 = 0$, мы получаем из (4.16)

$$\varphi_n^m = \frac{n[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]F_n^{\prime m} - c_1 n(n+1)F_n^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [c_1 n(n+1)]^2};$$

$$\varphi_n^{\prime m} = \frac{-m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]F_n^m - c_1 n(n+1)F_n^{\prime m}}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [c_1 n(n+1)]^2}. \quad (4.17)$$

Эти выражения получены нами в [9], при одном частном значении коэффициента c_1 и $F(\theta, \lambda)$.

В случае, когда не учитывается трение, $c_1 = c_2 = 0$, и мы приходим к коэффициентам, полученным Е. Н. Блиновой [7]:

$$\varphi_n^m = \frac{F_n^{\prime m}}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]} \quad (4.18)$$

$$\varphi_n^{\prime m} = \frac{F_n^m}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]}.$$

Заметим, что $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$ 1/сек, α_1 — правильная дробь; следовательно, при известных комбинациях чисел m и n знаменатели в (4.18) могут обращаться в нуль или быть очень близкими к нулю. Это означает, что при некоторых длинах волн возмущений решение (4.18) перестает существовать. В случае, когда трение учитывается в виде только одного вертикального перемешивания (4.17) или и вертикального и горизонтального турбулентного обмена масс одновременно (4.16), то возможность такого резонанса исключается.

Пользуясь выражениями (4.4), (4.7), (4.8), (4.10) и (4.12), легко оценить коэффициенты c_1 и c_2 . Эти коэффициенты имеют значения следующих порядков:

$$c_1 \approx 3 \cdot 10^{-6} \text{ 1/сек}, \quad c_2 \approx 10^{-8} \text{ 1/сек}, \quad (\nu = 4^{ms} \text{ 1/сек}, \quad \nu_1 = 4 \cdot 10^{ms} \text{ 1/сек}).$$

Полученные оценки коэффициентов и формулы, приведенные выше, позволяют произвести сравнительную оценку роли ν и ν_z при принятых значениях.

Результаты вычислений сводим в таблицу:

n	n+1	n(n+1)	n ² (n+1) ²	c ₁ n(n+1)	c ₂ n ² (n+1) ²
1	2	2	4	6 · 10 ⁻⁶	4 · 10 ⁻⁸
5	6	3 · 10	9 · 16 ²	9 · 10 ⁻⁴	9 · 10 ⁻⁶
9	10	9 · 10	0,81 · 10 ⁴	2,7 · 10 ⁻⁴	0,81 · 10 ⁻⁴
13	14	1,82 · 10 ²	3,31 · 10 ⁴	5,46 · 10 ⁻⁴	3,31 · 10 ⁻⁴
17	18	3,06 · 10 ²	0,92 · 10 ⁵	0,93 · 10 ⁻²	0,92 · 10 ⁻²
21	22	4,62 · 10 ²	2,13 · 10 ⁵	1,39 · 10 ⁻²	2,13 · 10 ⁻²
25	26	6,5 · 10 ²	4,23 · 10 ⁵	1,95 · 10 ⁻²	4,23 · 10 ⁻²
29	30	0,87 · 10 ³	0,76 · 10 ⁶	2,61 · 10 ⁻²	7,57 · 10 ⁻²
33	34	1,12 · 10 ³	1,26 · 10 ⁶	3,36 · 10 ⁻²	1,26 · 10 ⁻²

Таблица показывает, что для принятых значений параметров и для одного и того же значения числа m вертикальное и горизонтальное турбулентные перемешивания играют одинаковую роль для волн с $n = 17-18$. Возмущения крупных размеров (малые n) затухают, главным образом, за счет вертикального перемешивания; наоборот, мелкие возмущения (большие n) затухают за счет горизонтального перемешивания.

Итак, имея разложение (4.13) и коэффициенты a_1 , c_1 и c_2 в различных случаях, по (4.16) легко подсчитать все коэффициенты φ_n^m и φ_n^m , восстанавливая ряд (4.14), получить поле функции $\varphi(\theta, \lambda)$. Тогда по первому из соотношений (2.20) определится поле давления на уровне моря, по (2.16) — давление на любом уровне. Поле температуры $T(\theta, \lambda, z)$ можно взять, например, из работы [11].

Рассмотрим теперь приближенное решение уравнения (2.21) вблизи тех точек поля функции ψ_0 , в которых пренебречь первыми производными от ψ_0 по сравнению с значением $\Delta\psi_0$ нельзя. Воспользуемся наиболее простым выражением для члена, учитывающего вертикальное турбулентное перемешивание — (3.7).

В этом случае основное уравнение (2.21) с большой степенью точности может быть представлено в следующем виде:

$$a_1 \cos \theta \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \lambda} + 2\omega \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} c_1 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + c_1 \cos \theta \Delta \varphi - c_2 \cos \theta \Delta \Delta \varphi = N(\theta, \lambda), \quad (4.19)$$

Здесь a_1 берется по (4.3), c_1 — по (4.4), c_2 — по (4.12), а $N(\theta, \lambda) = \cos \theta F(\theta, \lambda)$, где $F(\theta, \lambda)$ берется по (4.5).

Если представить функцию $N(\theta, \lambda)$ в виде

$$N(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (N_n^m \cos m\lambda + N_n'^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (4.20)$$

где $N_n^m, N_n'^m$ — известные постоянные, то решение для φ можно представить в том же виде (4.14); тогда, пользуясь соотношениями [9]

$$\begin{aligned} \cos \theta p_n^m &= \frac{n-m+1}{2n+1} p_{n+1}^m + \frac{n+m}{2n+1} p_{n-1}^m, \\ -\sin \theta \frac{dp_n^m}{d\theta} &= \sin^2 \theta (p_n^m)' = -\frac{n(n-m+1)}{2n+1} p_{n+1}^m + \frac{(n+m)(n+1)}{2n+1} p_{n-1}^m \end{aligned} \quad (4.21)$$

и выражениями типа (4.15), из уравнения (4.19) получим следующие рекуррентные формулы для определения всех коэффициентов φ_n^m и $\varphi_n'^m$:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^m &= \frac{b(m, n) \left[N_n^m + \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m + a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2} + \\ &+ \frac{a(m, n) \left[N_n'^m - \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m - a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2}, \\ \varphi_{n+1}'^m &= \frac{b(m, n) \left[N_n^m - \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m - a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2} - \\ &- \frac{a(m, n) \left[N_n'^m + \frac{1}{2} c_1 m \varphi_n^m + a_1(m, n) \varphi_{n-1}^m - b_1(m, n) \varphi_{n-1}'^m \right]}{[a(m, n)]^2 + [b(m, n)]^2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a(m, n) &= \frac{m(n+m+1)}{2n+3} [\alpha_1(n+1)(n+2) - 2\omega], \\ b(m, n) &= \frac{(n+2)(n+m+1)}{2n+3} \left[c_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) + c_2(n+2)(n+1)^2 \right], \\ a_1(m, n) &= \frac{m(n-m)}{2n-1} [\alpha_1 n(n-1) - 2\omega], \\ b_1(m, n) &= \frac{(n-m)(n-1)}{2n-1} \left[c_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) + c_2(n-1)n^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Как видно из выражений (4.22), $\varphi_n^m = \varphi_n'^m = 0$ при $n = m$.

Далее, $\varphi_1^1 = \varphi_1'^1 = 0, \quad \varphi_2^2 = \varphi_2'^2 = 0.$

$$\varphi_2^1 = \frac{b(1,1)N_1^1 + a(1,1)N_1^1}{[a(1,1)]^2 + [b(1,1)]^2}, \quad \varphi_2^1 = \frac{b(1,1)N_1^1 - a(1,1)N_1^1}{[a(1,1)]^2 + [b(1,1)]^2},$$

$$\varphi_3^1 = \frac{b(1,2) \left[N_2^1 + \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right] + a(1,2) \left[N_1^1 - \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right]}{[a(1,2)]^2 + [b(1,2)]^2},$$

$$\varphi_3^2 = \frac{b(2,2)N_2^2 + a(1,2)N_2^2}{[a(2,2)]^2 + [b(2,2)]^2},$$

$$\varphi_3^1 = \frac{b(1,2) \left[N_2^1 - \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right] - a(1,2) \left[N_2^1 + \frac{1}{2} c_1 \varphi_2^1 \right]}{[a(1,2)]^2 + [b(1,2)]^2},$$

$$\varphi_3^2 = \frac{b(2,2)N_2^2 - a(2,2)N_2^2}{[a(2,2)]^2 + [b(2,2)]^2}, \quad \varphi_3^3 = \varphi_3^3 = 0, \text{ и т. д.}$$

Можно было рассмотреть решение того же уравнения при учете первых производных от ψ_0 по θ , λ и в более общих случаях, но получаются выражения довольно громоздкие, и мы их здесь приводить не будем.

§ 5. Другой способ определения поля давления на уровне моря

Подойдем теперь к решению той же задачи о нахождении поля давления на уровне моря в стационарной незональной циркуляции атмосферы другим способом. Будем пользоваться методом Дородницына [2], изложенным выше. А. А. Дородницын решил эту задачу в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы, положив в основу систему уравнений (1.10)–(1.13) и приняв коэффициент μ постоянным.

О. С. Берлянд [12] решил ту же задачу, приняв коэффициент турбулентной кинематической вязкости линейной функцией высоты; температура считалась известной и определялась из работы [11].

В нашей статье [13] решена задача в случае незональной циркуляции атмосферы при некоторых упрощающих предположениях; в частности, коэффициент ν принят не зависящим от высоты.

В этом параграфе решается задача о нахождении поля давления на уровне моря в случае незональной циркуляции реальной атмосферы, считая процесс квазистационарным.

Исходной является система уравнений (1.7)–(1.9), которую мы перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial p_{v\theta}}{\partial z} \right) + 2\omega \cos \theta p_{v\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial \rho v_{\lambda}}{\partial z} \right) - 2\omega \cos \theta \rho v_{\theta} = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda}, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + g \rho = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho = \rho RT, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_{\theta} \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho v_{\lambda}) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (5.3)$$

Нашей целью является определение функции $\rho_0(\theta, \lambda)$, которая может параметрически зависеть также от времени.

Прежде всего проинтегрируем уравнение неразрывности (5.3) по z ; тогда, пользуясь тем, что при $z = z_0$ $v_z = 0$, а при $z \rightarrow \infty$ $\rho v_z = 0$, получим

$$\cos \theta \int_{z_0}^{\infty} \rho v_{\theta} dz + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{z_0}^{\infty} \rho v_{\theta} dz + \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{z_0}^{\infty} \rho v_{\lambda} dz = 0. \quad (5.4)$$

Это соотношение является исходным для определения искомой функции; остается лишь вычислить v_{θ} и v_{λ} , для чего воспользуемся системой уравнений (5.1) и (5.2) и моделью (3.9). Вводя функцию тока

$$\rho v_{\theta} = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \rho v_{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5.5)$$

и пользуясь приближенным соотношением

$$\rho \approx 2\omega \cos \theta \psi, \quad (5.6)$$

аналогичным (2.18), можно эту систему представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_{\theta}}{\partial z} \right) + \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} \rho v_{\lambda} &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_{\lambda}}{\partial z} \right) - \frac{2\omega \cos \theta}{c_0} \rho v_{\theta} &= \frac{2\omega \cos \theta}{c_0 a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Эта система, с переменной по высоте правой частью, аналогична (3.10); ее можно привести к виду (3.11) для $U = \rho(v_{\theta} - iv_{\lambda})$, и при граничных условиях $\rho(v_{\theta} - iv_{\lambda}) = 0$ при $z = z_0$, $\rho(v_{\theta} - iv_{\lambda}) < \infty$ при $z \rightarrow \infty$, получим решение, аналогичное (3.25), откуда

$$\begin{aligned} \left(z \frac{\partial \rho v_{\theta}}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} &= \frac{n_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \text{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz - \\ &- \frac{m_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \text{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz, \end{aligned}$$

$$\left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty} = - \frac{m_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \text{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz -$$

$$- \frac{n_0 k^2}{4} \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \text{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz. \quad (5.8)$$

Здесь n_0 и m_0 берутся по (3.30), k^2 , E_1 , E_2 — по (3.12). Перепишем теперь систему (5.7) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{k^2}{4} \rho v_\lambda = - \frac{k^2}{4} E_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{4} \rho v_\theta = - \frac{k^2}{4} E_1 \quad (5.9)$$

и проинтегрируем ее по z ; получим

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz = \int_{z_0}^{\infty} E_1 dz + \frac{4}{k^2} \left(z \frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty},$$

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\lambda dz = - \int_{z_0}^{\infty} E_2 dz - \frac{4}{k^2} \left(z \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z_0}^{\infty}. \quad (5.10)$$

Подставляя (5.8) в (5.10), получим

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\theta dz = \int_{z_0}^{\infty} E_1 dz - m_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \text{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz -$$

$$- n_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \text{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz, \quad (5.11)$$

$$\int_{z_0}^{\infty} \rho v_\lambda dz = - \int_{z_0}^{\infty} E_2 dz - n_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_1 \text{her}_0(k\sqrt{z}) - E_2 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz +$$

$$+ m_0 \int_{z_0}^{\infty} [E_2 \text{her}_0(k\sqrt{z}) + E_1 \text{hei}_0(k\sqrt{z})] dz.$$

Продифференцируем эти выражения, соответственно, по θ и λ . Для этого заметим, что n_0 , m_0 , $\text{her}_0(k\sqrt{z})$, $\text{hei}_0(k\sqrt{z})$ зависят от θ по (3.12). Имеем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\text{her}_0(k\sqrt{z})] = \frac{\sin \theta}{V \cos \theta} V \sqrt{\frac{\omega z}{c_0}} [\text{her}_1(k\sqrt{z}) - \text{hei}_1(k\sqrt{z})],$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [\text{hei}_0(k\sqrt{z})] = \frac{\sin \theta}{V \cos \theta} V \sqrt{\frac{\omega z}{c_0}} [\text{her}_1(k\sqrt{z}) + \text{hei}_1(k\sqrt{z})], \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial \theta} \approx -n_0' \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \sqrt{\frac{\omega z_0}{c_0}}, \quad \frac{\partial m_0}{\partial \theta} \approx -m_0' \frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}} \sqrt{\frac{\omega z_0}{c_0}},$$

$$n_0' \approx \frac{\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}, \quad (5.13)$$

$$m_0' \approx \frac{2\operatorname{her}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})]}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2} -$$

$$- \frac{\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z_0}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z_0})]}{[\operatorname{hei}_0(k\sqrt{z_0})]^2}. \quad (5.14)$$

Подставляя (5.11) в (5.4), воспользуясь предварительно соотношениями (5.12) и (5.13), исключая E_1 и E_2 по (3.12), после несложных преобразований получим

$$\cos \theta \int_{z_0}^{\infty} \Delta \psi D dz - \sin \theta \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}} \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} A dz - \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}} \int_{z_0}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} B dz = 0, \quad (5.15)$$

где

$$D(z, \theta) = m_0 \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z}) - n_0 \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}),$$

$$A(z, \theta) = \{n_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})] - m_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})]\} \sqrt{z} -$$

$$- [n_0' \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) - m_0' \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] \sqrt{z_0}, \quad (5.16)$$

$$B(z, \theta) = \{m_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) - \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})] + n_0[\operatorname{her}_1(k\sqrt{z}) + \operatorname{hei}_1(k\sqrt{z})]\} \sqrt{z} -$$

$$- [m_0' \operatorname{her}_0(k\sqrt{z}) + n_0' \operatorname{hei}_0(k\sqrt{z})] \sqrt{z_0}.$$

Желая вычислить интегралы, входящие в (5.15), мы должны привлечь барометрическую формулу типа (2.19). Эта формула по использованию соотношения (5.6), вместо (2.18), примет вид

$$\psi = \frac{R \bar{T}}{2\omega} \left[\varphi + \frac{g}{R} \int_{z_0}^z \tau_2 dz \right], \quad (5.17)$$

где φ и τ_2 берутся по (2.20).

Подставляя (5.17) в (5.15), получим, окончательно, уравнение нашей задачи в следующем виде:

$$\cos \theta \Delta \varphi - c_3 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - c_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = i(\theta, \lambda). \quad (5.18)$$

Здесь

$$c_3 = \frac{\int_{z_0}^{\infty} \rho T A dz}{\int_{z_0}^{\infty} \rho T D dz} \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c_0}},$$

$$c_4 = \frac{\int_{z_0}^{\bar{z}} \rho \bar{T} B dz}{\int_{z_0}^{\bar{z}} \rho \bar{T} D dz} \sqrt{\frac{m \cos \theta}{c_0}}$$

$$f(\theta, \lambda) = \frac{-g \cos \theta}{R \int_{z_0}^{\bar{z}} \rho \bar{T} D dz} \int_{z_0}^{\bar{z}} \left[D \int_{z_0}^{\bar{z}} \Delta \tau_2 dz - \right. \quad (5.19)$$

$$\left. - \sqrt{\frac{m}{c_0 \cos \theta}} \left[\sin \theta \cdot A \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} dz + B \int_{z_0}^{\bar{z}} \frac{\partial \tau_2}{\partial \lambda} dz \right] \right] \rho \bar{T} dz.$$

Заметим, что как τ , так и c_3, c_4, f безразмерны. Дадим приближенное решение уравнения (5.18).

Пусть

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (f_n^m \cos m\lambda + f_n^m \sin m\lambda) p_n^m(\cos \theta), \quad (5.20)$$

где f_n^m и f_n^m — известные постоянные.

Ищем решение для $\varphi(\theta, \lambda)$ в виде (4.14). Пользуясь выражениями типа (4.15) и соотношениями (4.21), легко получим

$$\begin{aligned} \frac{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)}{2n + 3} \varphi_{n+1}^m &= c_4 m \varphi_n^m + f_n^m + \\ &+ \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} \varphi_{n-1}^m, \\ \frac{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)}{2n + 3} \varphi_{n+1}^m &= -c_4 m \varphi_n^m + f_n^m + \\ &+ \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} \varphi_{n-1}^m, \end{aligned} \quad (5.21)$$

откуда

$$C_{n+1}^m = \frac{2n + 3}{(c_3 - n - 1)(n + 2)(n + m + 1)} \left[-c_4 m C_n^m + B_n^m + \right. \quad (5.22)$$

$$\left. + \frac{(c_3 + n)(n - 1)(n - m)}{2n - 1} C_{n-1}^m \right],$$

$$\text{г.е.} \quad C_n^m = \varphi_n^m + i \varphi_n^m, \quad B_n^m = f_n^m + i f_n^m. \quad (5.23)$$

Выпишем некоторые из коэффициентов C_n^m .

$$C_1^m = 0,$$

$$C_2^1 = -\frac{5B_1^1}{3 \cdot 3(2 - c_3)}, \quad C_2^2 = 0,$$

$$C_3^1 = \frac{7}{4 \cdot 4(3 - c_3)} [c_4 i C_2^1 - B_2^1], \quad C_3^2 = -\frac{7B_2^2}{4 \cdot 5(3 - c_3)}, \quad C_3^3 = 0,$$

$$C_4^1 = \frac{9}{5 \cdot 5(4 - c_3)} \left[c_4 i C_3^1 - B_3^1 - \frac{2 \cdot 2(c_3 + 3)}{5} C_2^1 \right],$$

$$C_4^2 = \frac{9}{5 \cdot 6(4 - c_3)} [2c_4 i C_3^2 - B_3^2], \quad C_4^3 = -\frac{9B_3^3}{5 \cdot 7(4 - c_3)}, \quad C_4^4 = 0 \text{ и т. д.}$$

Коэффициенты φ_n^m и $\varphi_n^{\prime m}$ определяются из (5.23); в остальном ход вычислений остается прежним. По коэффициентам (5.23) восстанавливается ряд (4.14), а по (2.20) находится распределение атмосферного давления на уровне моря, по (2.19) — на всех уровнях. Функция $I(\theta, \lambda)$ берется из работы [11] или из наблюдений.

В заключение заметим, что можно дать решение задачи, пользуясь более полным уравнением (2.17), вместо (2.18).

Для этого следует функции ψ, ρ, ρ_0, T' предварительно разложить в ряды по шаровым функциям и затем определить коэффициенты ряда для ψ через коэффициенты ряда для ρ_0 , одновременно используя уравнение (4.2), как в [7].

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 11 II 1956

Ա. Մ. Մխիթարյան

ԾՈՎԻ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՎՐԱ ՄՅՆՈՒՈՐՏԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԲԱՇԽՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է ծովի մակարդակի վրա մթնոլորտային ճնշման բաշխման խնդրի լուծումը՝ իրական բարակիներային մթնոլորտի ոչ գոնայ ստացիոնար ցիլիոլայացիայի դեպքում: Հաշվի է առնված պլանետար սանձանային շերտի աղբյուրվածքը ճնշման բաշխման վրա: Խնդրի լուծման համար օգտվում ենք Ֆրիդմանի համասարումից (2.6) տեսքով: Այդ համասարումը մենք պրոյեկտում ենք սֆերիկ կոորդինատային սխեմով շտապեքի վրա, որոշ պարզեցումներից և Ֆրիմանի գոնայ ցիլիոլայացիայի նկատմամբ գծայնացնելուց հետո ստանում ենք (2.13) համասարումը հասանքի ֆունկցիայի համար: Բնակերթով այդ համասարումը բառ շ-ի Z_0 -ից մինչև ∞ , որտեղ Z_0 ն խորգործարգուվյունների միջին բարձրությունն է, և օդարվելով գծայնացված լարմետրական բանաձևից, ստանում ենք մեր խնդրի Ֆրիմանի համասարումը (2.21)-ի տեսքով:

Այդ հավասարման մեջ մնում է հաշվել այ կողմի տոաջին անդամը, որը հաշվի է առնում ուղղաձիգ տարբուլենա մածուցիկության ազդեցությանը ճնշման բաշխման վրա: Հիշյալ անդամը հաշվելու համար մենք օգտվում ենք Կոչինի հավասարումներից և տարբեր դեպքերի համար ստանում ենք (3.8), (3.18), (3.24) և (3.32) արաանաչառութունները: Տեղադրելով այդ արաանաչառութունները (2.21)-ի մեջ, ստանում ենք չիմահան հավասարումը (4.2) տեսքով: Հավասարման լուծումը սրանում ենք (4.14) տեսքով, այդ դեպքում շարքի գործակիցների համար ստացվում են (4.16) արաանաչառութունները: Հորիզոնական շրջան բացակայութուն դեպքում ստացվում են (4.17) արաանաչառութունները, իսկ շրջան ընդհանուր բացակայութուն դեպքում՝ (4.18)-ը:

Հոդվածում բերվում է աղյուսակ, որը տալիս է հորիզոնական և ուղղաձիգ շրջանների դերի համեմատական գնահատականը գործակիցների մասնավոր արժեքների դեպքում: Հոդվածում բերվում է նաև (4.19) հավասարման լուծումը, որը ստացվում է (2.21)-ից, օգտվելով (1.7) արաանաչառութունից: Լուծումը ստացվում է (4.22) տեսքով: § 5-ում բերվում է նույն խնդրի լուծումն այլ եղանակով: Այսանդ ստացվում է (5.18) հավասարումը, որի լուծումն ունի (5.25) տեսքը: Հոդվածում արվում են գործակիցներից մի քանիսի արժեքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е. Труды ГГО, в. 4, 1935.
2. Дородницын А. А. Труды ГГО, в. 18, 1937.
3. Динамическая метеорология, ч. II. Гидрометеониздат. 1937, под редакцией Б. И. Извекова и Н. Е. Кочина.
4. Юдин М. И. и Швец М. Е. Труды ГГО, в. 8 (31), 1940.
5. Обухов А. М. Труды Института теорет. геофиз., № 1, 1946.
6. Блинова Е. Н. ДАН СССР, т. 39, № 7, 1943.
7. Блинова Е. Н. ДАН СССР, т. 92, № 3, 1953.
8. Мхитарян А. М. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1955.
9. Уике Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Гостехиздат, 1948.
10. Мхитарян А. М. ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 1, 1955.
11. Блинова Е. Н. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 1, 1947.
12. Берлянд О. С. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 3, 1950.
13. Мхитарян А. М. ДАН Армянской ССР, т. XXI, № 3, 1955.

О. М. Сапоиджян

К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля—Шварца

При применении метода конформного отображения часто бывает необходимо разложить отображающую функцию в степенной ряд. В случае отображения внутренней и внешней областей многоугольника на область единичного круга такое разложение осуществляется путем разложения в ряд подинтегрального выражения функции Кристоффеля—Шварца [1]. В настоящей заметке дается другой, более общий и, с точки зрения вычислений, простой способ разложения в ряд указанной функции. Сущность способа заключается в том, что разлагается в ряд не подинтегральное выражение функции Кристоффеля—Шварца, а сам интеграл.

§ 1. Случай отображения внутренней области многоугольника на область единичного круга

Отображение внутренней области многоугольника на область единичного круга осуществляется функцией Кристоффеля—Шварца

$$z = \omega(\zeta) = A \int_0^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n - 1} dt + B, \quad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты, соответственно для областей многоугольника и единичного круга, n — число сторон многоугольника, a_1, a_2, \dots, a_n — комплексные координаты точек на окружности единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника. A и B — вообще комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры.

Согласно формуле Маклорена, имеем

$$\omega(\zeta) = \omega(0) + \frac{\omega'(0)}{1} \zeta + \frac{\omega''(0)}{2!} \zeta^2 + \dots \quad (1.2)$$

Причем, в силу (1.1), $\omega(0) = B$.

Для нахождения коэффициентов ряда (1.2) заранее установим связь между производными функции $\omega(\zeta)$.

Из (1.1) получаем

$$\dot{\omega}(\zeta) = A(a_1 - \zeta)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2 - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\alpha_n - 1} \dots \quad (1.3)$$

Отсюда следует

$$\omega''(\zeta) = \dot{\omega}(\zeta) \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1 - \alpha_s}{a_s - \zeta}.$$

Применяя к этой формуле правило дифференцирования произведения двух функций, найдем связь между производными функции $\omega(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(\zeta) &= \omega^{(k-1)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s - \zeta} + (k-2) \omega^{(k-2)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^2} + \\ &+ \dots + (k-2)(k-3) \dots (k-\lambda) \omega^{(k-\lambda)}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^\lambda} + \dots + \\ &+ (k-2)! \dot{\omega}(\zeta) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{(a_s - \zeta)^{k-1}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Эта формула позволяет определить коэффициенты ряда (1.2). Для этого примем в (1.4) $\zeta = 0$, тогда

$$\begin{aligned} \omega^{(k)}(0) &= \omega^{(k-1)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s} + (k-2) \omega^{(k-2)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^2} + \\ &+ \dots + (k-2)! \dot{\omega}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^{k-1}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Далее обозначим

$$C_k = \frac{\omega^{(k)}(0)}{(k-1)! \dot{\omega}(0)}, \quad \text{причем } C_1 = 1. \quad (1.6)$$

Выразив (1.2) и (1.5) через C_k и обозначив $\dot{\omega}(0) = C$, получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{C_2}{2} \zeta^2 + \frac{C_3}{3} \zeta^3 + \dots \right) + B, \quad (1.7)$$

$$C_k = \frac{1}{k-1} \left(C_{k-1} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s} + C_{k-2} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^2} + \dots + C_1 \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s}{a_s^{k-1}} \right), \quad (1.8)$$

($k = 2, 3, \dots$),

причем $C_1 = 1$.

Таким образом, в случае отображения внутренней области многоугольника на область единичного круга отображающая функция разлагается в ряд (1.7), коэффициенты которого определяются из линейных рекуррентных уравнений (1.8) последовательными подстановками.

§ 2. Случай отображения внешней области многоугольника на область единичного круга

Внешняя область многоугольника отображается на область единичного круга с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = A \int_1^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1' - 1} (a_2 - t)^{\alpha_2' - 1} \dots (a_n - t)^{\alpha_n' - 1} dt + B', \quad (2.1)$$

где $\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_n'$ — внешние углы многоугольника.

Обозначим

$$\Omega(\zeta) = \zeta^2 \dot{\omega}(\zeta). \quad (2.2)$$

Тогда, согласно (2.1), будем иметь

$$\Omega(\zeta) = A(a_1 - \zeta)^{\alpha_1' - 1} (a_2 - \zeta)^{\alpha_2' - 1} \dots (a_n - \zeta)^{\alpha_n' - 1}. \quad (2.3)$$

Так как эта функция регулярна при $\zeta = 0$, то ее можно разложить в ряд

$$\Omega(\zeta) = \Omega(0) + \frac{\Omega'(0)}{1} \zeta + \frac{\Omega''(0)}{2!} \zeta^2 + \dots \quad (2.4)$$

Внеся (2.4) в (2.2), определяем $\dot{\omega}(\zeta)$:

$$\dot{\omega}(\zeta) = \frac{\Omega(0)}{\zeta^2} + \frac{\Omega'(0)}{1} \frac{1}{\zeta} + \frac{\Omega''(0)}{2!} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \zeta + \dots$$

Интегрируя, получаем

$$\omega(\zeta) = -\frac{\Omega(0)}{\zeta} + \frac{\Omega'(0)}{1} \ln \zeta + \frac{\Omega''(0)}{2!} \frac{\zeta}{1} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \frac{\zeta^2}{2} + \dots + B, \quad (2.5)$$

где B — вообще комплексное постоянное.

Способом, примененным при выводе формулы (1.5), из (2.3) получаем

$$\begin{aligned} \Omega^{(k)}(0) &= \Omega^{(k-1)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s} + (k-1) \Omega^{(k-2)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^2} + \\ &+ \dots + (k-1)(k-2) \dots (k+1-\lambda) \Omega^{(k-\lambda)}(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^\lambda} + \\ &+ \dots + (k-1)! \Omega(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При $k=1$ эта формула дает

$$\Omega'(0) = \Omega(0) \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s}$$

Но, как известно, для случая отображения внешней области

$$\sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s} = 0.$$

Следовательно, $\Omega'(0) = 0$.

Имея в виду это, из (2.5) получим

$$\omega(\zeta) = -\frac{\Omega(0)}{\zeta} + \frac{\Omega''(0)}{2!} \frac{\zeta}{1} + \frac{\Omega'''(0)}{3!} \frac{\zeta^2}{2} + \dots + B. \quad (2.7)$$

Обозначим

$$D_{k-1} = -\frac{\Omega^{(k)}(0)}{k! \Omega(0)}, \quad \text{причем } D_{-1} = -1, D_0 = 0. \quad (2.8)$$

Выражая (2.7) и (2.6) через коэффициенты D_k и обозначая $D = -\Omega(0)$, получаем

$$\omega(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{D_1}{1} \zeta + \frac{D_2}{2} \zeta^2 + \dots \right) + B; \quad (2.9)$$

$$D_k = \frac{1}{k+1} \left(D_{k-2} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^2} + D_{k-3} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^3} + \dots + D_{-1} \sum_1^n \frac{1 - \alpha_s'}{a_s^{k+1}} \right) \quad (2.10)$$

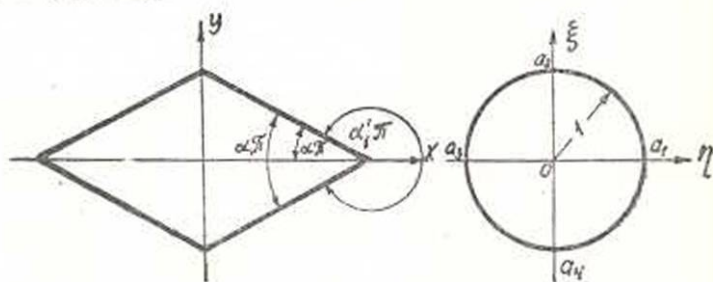
$$(k = 1, 2, \dots),$$

причем $D_{-1} = -1, D_2 = 0$.

Итак, в случае отображения внешней области многоугольника на область единичного круга отображающая функция разлагается в ряд (2.9), коэффициенты которого определяются из системы линейных рекуррентных уравнений (2.10).

§ 3. Примеры

1. Отображение внутренней области ромба на область единичного круга (фиг. 1).



Фиг. 1.

Согласно фиг. 1, имеем $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $\alpha_1 =$
 $= \alpha_3 = 2\alpha$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 1 - 2\alpha$.

Внося значения этих параметров в (1.8), получаем

$$C_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$C_1 = 1;$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left[(1 - 4\alpha)(C_{2k-1} + C_{2k-5} + \dots + C_1) + \right. \\ \left. + (C_{2k-3} + C_{2k-7} + \dots + C_1) \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.1)$$

Эту систему уравнений можно заменить более простой системой. Для этого перепишем (3.1), заменив в нем k через $k-2$:

$$C_{2k-3} = \frac{1}{k-2} \left[(1 - 4\alpha)(C_{2k-5} + C_{2k-9} + \dots + C_1) + \right. \\ \left. + (C_{2k-7} + C_{2k-11} + \dots + C_1) \right] \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (3.2)$$

Умножив (3.1) на k , а (3.2) на $k-2$ и вычитая полученные результаты один из другого, получаем

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left[(1 - 4\alpha)C_{2k-1} + (k-1)C_{2k-2} \right] \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (3.3)$$

$$C_1 = 1.$$

Из системы (3.3) легко можно определить коэффициенты C_3, C_5, \dots . Например:

$$C_3 = 1 - 4\alpha, \quad C_5 = \frac{1}{2} \left[(1 - 4\alpha)C_3 + 1 \right],$$

$$C_7 = \frac{1}{3} \left[(1 - 4\alpha)C_5 + 2C_3 \right], \dots$$

При $\alpha = \frac{1}{4}$ ромб обращается в квадрат, и тогда из (3.3) получаем

$$C_{4k-1} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$C_{4k+1} = \frac{2k-1}{2k} C_{4k-3},$$

$$C_1 = 1.$$

Решение последней системы будет

$$C_{4k+1} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4k-2)}{4^k k!}, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Внеся этот результат в (1.7), получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{\zeta^5}{10} + \frac{\zeta^9}{24} + \dots \right).$$

что совпадает с известным результатом.

При $\alpha = 0$ ромб превращается в бесконечную полосу, и тогда (3.3) даст

$$C_1 = 1,$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left[C_{2k-1} + (k-1)C_{2k-3} \right] \\ (k = 1, 2, \dots).$$

Единственное решение этой системы будет

$$C_{2k+1} = 1, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

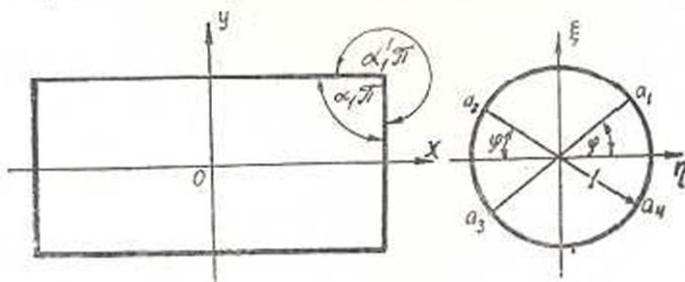
Внеся эти значения коэффициентов в (1.7), получаем

$$\omega(\zeta) = C \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \dots \right) = \frac{C}{2} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} = \frac{2b}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

где $2b$ — ширина полосы.

Полученный результат также известен.

2. Отображение внутренней области прямоугольника (фиг. 2).



Фиг. 2.

Согласно фиг. 2, имеем $a_1 = e^{i\varphi}$, $a_2 = -e^{-i\varphi}$, $a_3 = -e^{i\varphi}$, $a_4 = e^{-i\varphi}$,

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}.$$

Внеся значения этих параметров в (1.8), получаем

$$C_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$C_1 = 1,$$

$$C_{2k+1} = \frac{1}{k} \left(C_{2k-1} \cos 2\varphi + C_{2k-3} \cos 4\varphi + \dots + C_1 \cos 2k\varphi \right). \quad (3.4)$$

Выбором параметра φ определяется отношение сторон прямоугольника.

3. Отображение внешней области ромба на область единичного круга (фиг. 1).

Согласно фиг. 1, имеем $a_1 = 1$, $a_2 = i$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 2(1 - \alpha)$, $\alpha_2 = \alpha_4 = 1 + 2\alpha$.

Имея в виду эти данные, из (2.10) получаем

$$D_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1.$$

$$D_{2k+1} = -\frac{1}{k+1} \left[(1 - 4\alpha)(D_{2k+1} + D_{2k-5} + \dots + D_{-1}) + (D_{2k-3} + D_{2k-7} + \dots + D_{-1}) \right] \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.5)$$

Отсюда способом, примененным в примере 1, найдем

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{2k+1} = \frac{1}{k+1} \left[(k-2) D_{2k-3} - (1-4\alpha) D_{2k-1} \right], \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.6)$$

В случае квадрата $\left(\alpha = \frac{1}{4}\right)$ из (3.6) получаем

$$D_{4k+1} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{4k-1} = \frac{2k-3}{2k} D_{4k-5},$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Тогда, согласно (2.9), будем иметь

$$w(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3}{6} + \frac{\zeta^7}{56} + \dots \right),$$

что совпадает с известным результатом.

4. Отображение внешней области прямоугольника на единичный круг (фиг. 2).

$$\text{Имеем } a_1 = e^{i\varphi}, \quad a_2 = -e^{-i\varphi}, \quad a_3 = -e^{i\varphi}, \quad a_4 = e^{-i\varphi}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{3}{2}, \quad B = 0.$$

Из (2.10) получаем

$$D_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$D_{-1} = -1,$$

$$D_{2k+1} = -\frac{1}{k+1} \left[D_{2k-1} \cos 2\varphi + D_{2k-3} \cos 4\varphi + \dots \right. \\ \left. + D_{-1} \cos (2k+2)\varphi \right], \quad (3.7) \\ (k = 0, 1, \dots).$$

Փարամետր φ որոշում է կողմերի հարաբերակցությունը ուղղանկյանի համար, երբ $\varphi = \frac{\pi}{6}$, (3.7) կազմում է

$$D_1 = \frac{1}{2}, \quad D_3 = -\frac{3}{8}, \quad D_5 = -\frac{3}{16}, \dots$$

Վերադառնալով (3.9) և սահմանափակվելով չորս անդամով, ստանում ենք

$$\omega(\zeta) = D \left(\frac{1}{\zeta} + 0,5\zeta - 0,125\zeta^3 - 0,0375\zeta^5 \right).$$

Ուղղանկյանի կողմերի հարաբերակցությունը կլինի $a:b \approx 3,2$.

Ճշգրիտ այդպիսի արդյունք ստացվել է Մ. Մ. Սափոճյանի [1], կիրառելով Ֆուրիեի շարքի փոխարինումը Քրիստոֆելի — Շվարցի շարքով:

Երևանի փոխազգային ինստիտուտ
 Կ. Մարքսի անունով

Ստացվել է 3 VI 1956

Օ. Մ. Սափոճյան

ԿՐԻՍՏՈՖԵԼ — ՇՎԱՐՑԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ ԾԱՐՔԻ ՎԵՐԱԾԵԼՈՒ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կրիստոֆել — Շվարցի արտապատկերման մեթոդի օգտագործման շնորհիվ համարվում է լինում արտապատկերման ֆունկցիան վերածվել շարքի: Իսկ մասնական ներքին և արտաքին տիրույթները միմյանց չհարմարեցնելու փոխարինումը կիրառելի է վերաբերում է կրիստոֆել — Շվարցի արտապատկերման ֆունկցիայի ենթաինտեգրալ արտահայտությունը շարքի վերածելու միջոցով:

Այս հոդվածի մեջ նույն նպատակի համար շարքի է վերածված կրիստոֆել — Շվարցի ինտեգրալը: Ստացված արդյունքներն բնորոշում են և հետևյալ կերպով:

Լ Ի Տ Ե Ր Ա Տ Ր Ա