ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

К теории рядов Фурье по рациональным функциям

В настоящей работе исследуются вопросы разложения функций, заданных на единичной окружности, в ряд Фурье по ортогональной системе рациональных функций с заданным множеством полюсов.

В § 1 работы приводится компактное выражение для ядра Дирихле системы рациональных функций ортонормальных на единичной окружности. Полученное выражение для ядра во многом напоминает форму ядра Дирихле для обычной тригонометрической системы.

В § 2, при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на последовательность полюсов, исследуется вопрос обычной сходимости рядов Фурье по соответствующей системе ортонормальных рациональных функций. Устанавливается, что, когда полюсы не сгущаются к единичной окружности, характер сходимости соответствующих разложений в ряд Фурье по рациональным функциям не отличается от характера сходимости разложений в обычный ряд Фурье.

Таким образом, в работе выясняется, что признаки Жордана—Дирихле и Дини—Липшица остаются в силе для того случая, когда полюсы ортонормальной системы не сгущаются к единичной окружности.

§ 1. Ортогональная система рациональных функций на единичной окружности и ее ядро Дирихле

1°. Пусть $\{\alpha_k\}$, $(|\alpha_k|<1)$, $(k=0,1,2,\cdots)$ произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа конечной и даже бесконечной кратности.

Как впервые указал Уолш [1], система рациональных функций

$$\varphi_0(z)=\left(\frac{1-|\alpha_0|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_0 z},$$

$$\varphi_n(z)=\left(\frac{1-|\alpha_n|^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}, \quad (n=1,2,\cdots) \tag{1.1}$$

ортонормальна на единичной окружности $|z|=1$. Действительно, так как при $|z|=1$,

$$\left| \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \right| = 1,$$

то

$$\int\limits_{|z|=1} |\varphi_n(z)|^2 |dz| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1-|\alpha_n|^2}{|1-\bar{\alpha}_n z|^2} |dz| = 1, \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{1.2}$$

Покажем теперь, что

$$\int\limits_{|z|=1} \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,|dz| = 0 \qquad \text{при} \qquad n \neq m. \tag{1.2'}$$

Для этого достаточно лишь показать, что (1.2′) имеет место при $n \geqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, так как если $m \geqslant n+1$, то для сопряженного интеграла будем иметь

$$\int\limits_{|z|=1} \varphi_m(z)\overline{\varphi_n(z)}\,|dz| = 0, \qquad 0 \leqslant n \leqslant m-1.$$

Таким образом, пусть $n \geqslant 1$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$, тогда имеем из (1.1)

$$\int\limits_{|z|=1} \varphi_n(z)\overline{\varphi_m(z)}\,|dz| =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-|\alpha_n|^2)(1-|\alpha_m|^2)}}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \times$$

$$\times \overline{\left\{ \frac{1}{1-\bar{\alpha}_m z} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \right\}} |dz| = \sqrt{(1-|\alpha_n|^2)(1-|\alpha_m|^2)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\bar{\alpha}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \, \frac{1}{z-\alpha_m} \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1-\bar{\alpha}_k z}{z-\alpha_k}\, dz =$$

$$= \sqrt{(1-|\alpha_m|^2)(1-|\alpha_n|^2)}\, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1} (z-\alpha_k)}{\prod\limits_{k=m}^{n} (1-\bar{\alpha}_k z)}\, dz = 0^{*},$$

так как подинтегральная функция голоморфна в круге $|z| \leqslant 1$.

2°. *Положим теперь, что все числа последовательности* $\{\alpha_k\}$ *отличны друг от друга.*

Рассмотрим рациональные функции вида

$$R_n(z) = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n} (1-\bar{\alpha}_k z)}, \tag{2.1}$$

где $P_n(z)$ — произвольный полином степени n.

* Очевидно, при $m = n-1$ в подинтегральном выражении числитель нужно заменить единицей.

Для любого $\zeta\ (|\zeta|<1)$ рассмотрим функцию

$$f(z;\zeta)=\frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}, \tag{2.2}$$

голоморфную в круге $|z|\leqslant 1$, и для нее поставим интерполяционную задачу

$$R_n(\alpha_j)=f(\alpha_j;\zeta) \qquad (j=0,1,\ldots,n). \tag{2.3}$$

Докажем лемму:

Лемма 1. Интерполяционная задача (2.3) имеет единственное решение, котовое представляется в виде

$$R_n^0(z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\varphi_k(z). \tag{2.4}$$

Доказательство. Покажем сначала, что для любой функции $R_n(z)$ вида (2.1) имеет место представление

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(z), \tag{2.5}$$

где числа $c_0, c_1,\cdots, c_n$ единственны.

Пусть комплексные числа $c_j\ (j=0,1,2,\ldots,n)$ пока произвольны; тогда из (1.1) следует, что

$$\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(z)=\frac{\sum\limits_{j=0}^{n}a_j\prod\limits_{k=0}^{j-1}(z-\alpha_k)\prod\limits_{k=j+1}^{n}(1-\bar{\alpha}_kz)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_kz)}, \tag{2.5'}$$

где

$$a_j=c_j\sqrt{\frac{1-|\alpha_j|^2}{2\pi}};$$

при этом надо положить

$$\left.\prod_{k=0}^{j-1}(z-\alpha_k)\right|_{j=0}=1 \qquad \text{и} \qquad \left.\prod_{k=j+1}^{n}(1-\bar{\alpha}_kz)\right|_{j=n}=1. \tag{2.5''}$$

Учитывая формулы (2.1) и (2.5′), заключаем, что для установления тождества (2.5) достаточно показать, что любой полином $P_n(z)$ степени n единственным образом представляется в виде

$$P_n(z)=\sum_{j=0}^{n}a_j\prod_{k=0}^{j-1}(z-\alpha_k)\prod_{k=j+1}^{n}(1-\bar{\alpha}_kz), \tag{2.6}$$

где $a_0, a_1,\ldots, a_n$ вполне определенные комплексные числа. Действительно, обозначим

$$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{n}a_j\prod_{k=0}^{j-1}(z-\alpha_k)\prod_{k=j+1}^{n}(1-\bar\alpha_k z).$$

Легко заметить, что числа $a_j\,(j=0, 1, 2,\cdots, n)$ единственно определяются из интерполяционных данных

$$Q_n(\alpha_j)=P_n(\alpha_j)\quad (j=0, 1, 2,\cdots, n).$$

Но тогда, очевидно, будем иметь $Q_n(z)\equiv P_n(z)$, т. е. наше утверждение (2.6) доказано.

Далее, интерполяционная задача (2.3) сводится к определению полинома $P_n(z)$ степени n из следующих данных:

$$P_n(\alpha_j)=f(\alpha_j;\,\zeta)\prod_{k=0}^{n}(1-\bar\alpha_k\alpha_j),\quad (j=0, 1, 2,\cdots, n).$$

Поэтому задача (2.3) имеет единственное решение, которое представляется в виде

$$R_n^{\circ}(z)=\sum_{j=0}^{n}c_j\,\varphi_j(z),\tag{2.7}$$

где числа $c_0, c_1,\ldots, c_n$ единственны.

Таким образом, чтобы установить формулу (2.4) леммы, остается показать, что

$$c_j=\overline{\varphi_j(\zeta)},\quad j=0, 1, 2,\cdots, n.\tag{2.8}$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-R_n^{\circ}(z)\right\}\overline{\left(\frac{1}{1-\bar\alpha_j z}\right)}\,|dz|=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-R_n^{\circ}(z)\right\}\frac{dz}{z-\alpha_j}=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta\alpha_j)}-R_n^{\circ}(\alpha_j)\quad (j=0, 1, 2,\ldots, n),\tag{2.9}$$

так как $R_n^{\circ}(z)$ представляет решение интерполяционной задачи (2.3).

Но так как мы в этом пункте полагали, что числа $\alpha_0, \alpha_1,\ldots, \alpha_n$ отличны между собой, то имеем представление

$$\varphi_p(z)=\sum_{j=0}^{p}\frac{A_j}{1-\bar\alpha_j z},$$

откуда и из (2.7) следует

$$\int\limits_{|z|=1}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-R_n^{\circ}(z)\right\}\overline{\varphi_p(z)}\,|dz|=0,\quad (p=0, 1, 2,\cdots, n).\tag{2.10}$$

Из (2.10) имеем

$$\int\limits_{|z|=1} R_n^{\circ}(z)\overline{\varphi_p(z)}\,|dz| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1} \frac{\overline{\varphi_p(z)}}{1-\bar{\zeta} z}\,|dz| =$$

$$= \overline{\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{\varphi_p(z)}{z-\zeta}\,dz\right\}} = \overline{\varphi_p(\zeta)}\,. \qquad (2.11)$$

Но так как для функции $R_n^{\circ}(z)$ имеется представление (2.7), то из ортонормальности системы функций $\{\varphi_n(z)\}$ следует, что

$$\int\limits_{|z|=1} R_n^{\circ}(z)\overline{\varphi_p(z)}\,|dz| = c_p, \quad (p=0,\ 1,\ldots,), \qquad (2.12)$$

откуда в силу (2.11) следует утверждение (2.4) леммы.

3°. *Лемма 2. При любых z и ζ справедлива формула*

$$\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\zeta)}\,\varphi_k(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}\left\{1-\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\zeta-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\right)}\right\}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Предположим сначала, что все числа $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ отличны друг от друга. Для $|z|<1$, $|\zeta|<1$ рассмотрим интеграл

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1\uparrow} \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}t)}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k t}{t-\alpha_k}\,\frac{dt}{t-z}\,, \qquad (3.2)$$

где интегрирование совершается в положительном направлении.

С одной стороны, изменив направление интегрирования, имеем:

$$U_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1\downarrow} \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}t)}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k t}{t-\alpha_k}\,\frac{dt}{t-z} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{t\to\frac{1}{\bar{\zeta}}}\frac{t-\frac{1}{\bar{\zeta}}}{1-\bar{\zeta}t}\times\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\frac{\bar{\alpha}_k}{\bar{\zeta}}}{\frac{1}{\bar{\zeta}}-\alpha_k}\,\frac{1}{\frac{1}{\bar{\zeta}}-z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}\overline{\left\{\prod_{k=0}^{n}\frac{\zeta-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\right\}}, \qquad (3.3)$$

так как подинтегральная функция в области $|t|\geqslant 1$ имеет единственный простой полюс $t=\frac{1}{\bar{\zeta}}$ $(|\zeta|<1,\ |z|<1)$, а при $t\to\infty$ имеет порядок $O(|t|^{-2})$.

С другой стороны, из (3.2) имеем

$$U_n(z) = \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{z-\alpha_k} +$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}\alpha_j)(\alpha_j - z)}\lim_{t\to\alpha_j}\left\{(t-\alpha_j)\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k t}{t-\alpha_k}\right\}. \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) имеем

$$\frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)} = \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\zeta-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\right)} + R_n(z), \tag{3.5}$$

где

$$R_n(z) = \prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\times\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}\alpha_j)(z-\alpha_j)}\times$$

$$\times\lim_{t\to\alpha_j}\left\{(t-\alpha_j)\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k t}{t-\alpha_k}\right\} = \frac{P_n(z)}{\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\bar{\alpha}_k z)}. \tag{3.5'}$$

Но из (3.5) и (3.5′) легко следует, что рациональная функция $R_n(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным

$$R_n(\alpha_s) = \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}\alpha_s)}, \quad (s = 0, 1, \cdots, n),$$

поэтому, по лемме 1, $R_n(z) \equiv \overset{\circ}{R}_n(z)$. Отсюда, из (3.5) и (2.4) следует формула (3.1) при $|z|<1, |\zeta|<1$, когда числа $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ отличны между собой.

Но если формула (3.1) справедлива при $|z|<1$, $|\zeta|<1$, то она справедлива и при любых значениях z и ζ. Наконец, чтобы убедиться в справедливости (3.1) при любых, вообще говоря не различных числах $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, достаточно заменить их другими числами $\alpha_0', \alpha_1', \cdots, \alpha_n'$, отличными между собой, написать соответствующую формулу (3.1) и перейти к пределу, когда $\alpha_k' \to \alpha_k$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$. Таким образом, лемма полностью доказана.

4°. Пусть $\{\beta_k\}$, $(|\beta_k|>1)$, $(k = 1, 2, \cdots)$, произвольная последовательность комплексных чисел, вообще говоря не отличных между собой.

Рассмотрим систему рациональных функций

$$\psi_1(z) = \sqrt{\frac{|\beta_1|^2-1}{2\pi}}\,\frac{1}{1-\bar{\beta}_1 z},$$

$$\psi_m(z) = \sqrt{\frac{|\beta_m|^2-1}{2\pi}}\,\frac{1}{1-\bar{\beta}_m z}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{z-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k z} \quad (m = 2, 3, \cdots). \tag{4.1}$$

Система функций $\{\psi_n(z)\}$ ортонормальна на окружности $|z| = 1$.

Действительно, как и в 1°, имеем

$$\int\limits_{|z|=1} |\psi_m(z)|^2 |dz| = \int\limits_{|z|=1} \frac{|\beta_m|^2-1}{2\pi|1-\overline{\beta}_m z|^2} |dz| = 1, \quad (m=1,2,\cdots), \qquad (4.2)$$

а при $n \geqslant 2$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$,

$$\int\limits_{|z|=1} \psi_n(z)\overline{\psi_m(z)}\,|dz| =$$

$$= \frac{\sqrt{(|\beta_n|^2-1)(|\beta_m|^2-1)}}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\overline{\beta}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z-\beta_k}{1-\overline{\beta}_k z} \times$$

$$\times \overline{\left\{\frac{1}{1-\overline{\beta}_m z} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{z-\beta_k}{1-\overline{\beta}_k z}\right\}} |dz| = \sqrt{(|\beta_n|^2-1)(|\beta_m|^2-1)} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\overline{\beta}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z-\beta_k}{1-\overline{\beta}_k z} \frac{1}{z-\beta_m} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1-\overline{\beta}_k z}{z-\beta_k}\,dz =$$

$$= -\sqrt{(|\beta_n|^2-1)(|\beta_m|^2-1)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=1} \frac{\prod\limits_{k=m+1}^{n-1} (z-\beta_k)}{\prod\limits_{k=m}^{n} (1-\overline{\beta}_k z)}\,dz = 0^*,$$

так как подинтегральная функция голоморфна в области $|z| \geqslant 1$ и при $|z| \to \infty$ имеет порядок $O(|z|^{-2})$.

Отсюда легко заключаем, что вообще

$$\int\limits_{|z|=1} \psi_n(z)\overline{\psi_m(z)}\,|dz| = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m. \qquad (4.3)$$

Наконец, покажем, что

$$\int\limits_{|z|=1} \varphi_n(z)\overline{\psi_m(z)}\,|dz| = 0 \quad \text{при} \quad n=0,1,2,\cdots,\ m=1,2,\cdots \qquad (4.4)$$

Действительно, из (1.1) и (4.1) имеем:

$$\int\limits_{|z|=1} \varphi_n(z)\overline{\psi_m(z)}\,|dz| =$$

$$= \frac{\sqrt{(1-|\alpha_n|^2)(|\beta_m|^2-1)}}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1-\overline{\alpha}_n z} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z} \times$$

* И здесь при $m=n-1$ в подинтегральном выражении числитель нужно заменить единицей.

$$\times \overline{\left\{\frac{1}{1-\bar{\beta}_m z}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{z-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k z}\right\}}\,|dz| = \sqrt{(1-|\alpha_n|^2)(|\beta_m|^2-1)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{(1-\bar{\alpha}_n z)(z-\beta_m)}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\prod_{k=1}^{m-1}\frac{1-\bar{\beta}_k z}{z-\beta_k}\,dz = 0$$

так как подинтегральная функция голоморфна в $|z|\leqslant 1$.

5°. Положим теперь, что все числа последовательности $\{\beta_k\}$ отличны друг от друга.

Рассмотрим рациональные функции вида

$$\Omega_m(z) = \frac{P_{m-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{m}(1-\bar{\beta}_k z)}, \quad m\geqslant 1, \tag{5.1}$$

где $P_{m-1}(z)$ — произвольный полином степени $m-1$. Как и в пункте 2°, легко установить, что имеет место представление

$$\Omega_m(z) = \sum_{j=1}^{m} c_j\,\psi_j(z), \tag{5.2}$$

где числа $c_1, c_2, \cdots c_m$ единственны.

Для любого $\zeta\ (|\zeta|>1)$ рассмотрим функцию

$$f(z;\zeta) = \frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}, \tag{5.3}$$

голоморфную в области $|z|\geqslant 1$, и для нее поставим интерполяционную задачу

$$\Omega_m(\beta_j) = f(\beta_j;\zeta)\ (j=1,2,\cdots,m). \tag{5.4}$$

Как и при доказательстве леммы 1, легко убеждаемся, что интерполяционная задача (5.4) имеет единственное решение $\Omega_m^{\circ}(z)$, которое представляется в виде

$$\Omega_m^{\circ}(z) = \sum_{j=1}^{m} c_j\,\psi_j(z), \tag{5.5}$$

где числа $c_1, c_2, \cdots, c_m$ единственны.

Лемма 3. Решение $\Omega_m^{\circ}(z)$ *интерполяционной задачи представляется в виде*

$$\Omega_m^{\circ}(z) = -\sum_{j=1}^{m}\overline{\psi_j(\zeta)}\,\psi_j(z). \tag{5.6}$$

Доказательство. В силу ортогональности системы $\{\psi_n(z)\}$, с одной стороны, из (5.5) имеем

$$c_j = \int\limits_{|z|=1}\Omega_m^{\circ}(z)\overline{\psi_j(z)}\,|dz|, \quad (j=1,2,\cdots,m). \tag{5.7}$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1\uparrow}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-\Omega^{\circ}_{m}(z)\right\}\overline{\left(\frac{1}{1-\bar\beta_k z}\right)}\,|dz|=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1\downarrow}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-\Omega^{\circ}_{m}(z)\right\}\frac{1}{1-\beta_k\bar z}\,|dz|=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1\downarrow}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-\Omega^{\circ}_{m}(z)\right\}\frac{dz}{z-\beta_k}=$$

$$=-\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta\beta_k)}-\Omega^{\circ}_{m}(\beta_k)\right\}=0, \tag{5.8}$$

так как $\Omega^{\circ}_{m}(z)$ представляет собой решение интерполяционной задачи (5.4).

Но так как числа $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ различны, то имеем представление

$$\psi_p(z)=\sum_{j=1}^{p}\frac{B_p}{1-\bar\beta_j z},$$

откуда и из (5.8) следует, что

$$\int\limits_{|z|=1}\left\{\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}-\Omega^{\circ}_{m}(z)\right\}\overline{\psi_p(z)}\,|dz|=0, \quad (p=1, 2, \cdots, m). \tag{5.9}$$

Из (5.7) и (5.9) имеем:

$$c_j=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1\uparrow}\frac{\overline{\psi_p(z)}}{1-\bar\zeta z}\,|dz|=\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1\uparrow}\frac{\psi_p(z)}{1-\zeta\bar z}\,|dz|\right)}=$$

$$=\overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1\uparrow}\frac{\psi_p(z)}{z-\zeta}\,dz\right)}=-\overline{\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1\downarrow}\frac{\psi_p(z)}{z-\zeta}\,dz\right)}=-\overline{\psi_p(\zeta)}. \tag{5.10}$$

Из (5.10) и (5.5) следует формула (5.6).

6°. *Лемма 4. При любых z и ζ справедлива формула*

$$\sum_{k=1}^{m}\overline{\psi_k(\zeta)}\psi_k(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}\left\{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\beta_k}{1-\bar\beta_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\zeta-\beta_k}{1-\bar\beta_k\zeta}\right)}-1\right\}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Предположим сначала, что все числа $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ различны, и для $|z|>1$ и $|\zeta|>1$ рассмотрим интеграл

$$V_m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta t)}\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar\beta_k t}{t-\beta_k}\frac{dt}{t-z}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi\bar\zeta}\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\frac{\bar\beta_k}{\bar\zeta}}{\frac{1}{\bar\zeta}-\beta_k}\;\frac{1}{\frac{1}{\bar\zeta}-z}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}\prod_{k=1}^{m}\frac{\bar\zeta-\bar\beta_k}{1-\bar\zeta\beta_k}=-\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}\overline{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\zeta-\beta_k}{1-\zeta\bar\beta_k}\right)}. \tag{6.2}$$

С другой стороны,

$$V_m(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta t)}\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar\beta_k t}{t-\beta_k}\frac{dt}{t-z}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar\beta_k z}{z-\beta_k}-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta\beta_j)(\beta_j-z)}\lim_{t\to\beta_j}\left\{(t-\beta_j)\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar\beta_k t}{t-\beta_k}\right\}. \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) получим

$$\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}=\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta z)}\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\beta_k}{1-\bar\beta_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\zeta-\beta_k}{1-\bar\beta_k\zeta}\right)}+\Omega_m(z), \tag{6.4}$$

где

$$\Omega_m(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\beta_k}{1-\bar\beta_k z}\times\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta\beta_j)(z-\beta_j)}\times$$

$$\times\lim_{t\to\beta_j}\left\{(t-\beta_j)\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar\beta_k t}{t-\beta_k}\right\}=\frac{P_{m-1}(z)}{\prod\limits_{k=1}^{m}(1-\bar\beta_k z)}. \tag{6.5}$$

Но из (6.4) и (6.5) следует, что рациональная функция $\Omega_m(z)$ удовлетворяет интерполяционным данным

$$\Omega_m(\beta_s)=\frac{1}{2\pi(1-\bar\zeta\beta_s)},\quad (s=1,2,\cdots,m).$$

Поэтому $\Omega_m(z)\equiv\Omega_m^*(z)$. Отсюда, из (6.4) и (5.6) следует формула (6.1) леммы, при $|z|>1$, $|\zeta|>1$ и при отличных друг от друга числах $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$.

Наконец, справедливость формулы (6.1) при любых z и ζ и $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ устанавливается аналогичными рассуждениями, которые были приведены при доказательстве леммы 2.

7°. Обозначим

$$\Phi_n(z)=\begin{cases}\varphi_n(z) & \text{при} \quad n \geqslant 0 \\ \psi_{-n}(z) & \text{при} \quad n \leqslant -1,\end{cases} \tag{7.1}$$

тогда из свойств систем функций $\{\varphi_n(z)\}$ и $\{\psi_n(z)\}$ следует, что система функций $\{\Phi_n(z)\}$ $(-\infty<n<+\infty)$ ортонормальна на окружности $|z|=1$, т. е.

$$\int\limits_{|z|=1} \Phi_n(z)\overline{\Phi_m(z)}\,|dz|=\begin{cases}0, & n \neq m \\ 1, & n=m.\end{cases} \tag{7.2}$$

Из формул (3.1) и (6.1) следует

$$\sum_{k=-m}^{n} \overline{\Phi_k(\zeta)}\Phi_k(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-\bar{\zeta}z)}\left\{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{z-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\zeta-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k\zeta}\right)}-\right.$$

$$\left.-\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)\overline{\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{\zeta-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k\zeta}\right)}\right\}. \tag{7.3}$$

Для $-\pi \leqslant x,\ t \leqslant \pi$ обозначим через

$$K_{n,m}(t,x)=\sum_{k=-m}^{n}\overline{\Phi_k(e^{it})}\,\Phi_k(e^{ix}) \tag{7.4}$$

ядро Дирихле ортогональной системы $\{\Phi_n(e^{ix})\}$.

Лемма 5. Справедлива формула

$$K_{n,m}(t,x)=\frac{1}{2\pi\sin\frac{x-t}{2}}\exp\left\{\frac{i}{2}\left[\int\limits_t^x\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\,du-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_t^x\sum_{k=1}^{m}\frac{|\beta_k|^2-1}{1-2|\beta_k|\cos(u-\omega_k)+|\beta_k|^2}\,du\right]-\frac{i}{2}(x-t)\right\}\times$$

$$\times\sin\left\{\frac{1}{2}\int\limits_t^x\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=}^{m}\frac{|\beta_k|^2-1}{1-2|\beta_k|\cos(u-\omega_k)+|\beta_k|^2}\right]du\right\}, \tag{7.5}$$

где $\vartheta_k=\arg\alpha_k$, $\omega_k=\arg\beta_k$.

Доказательство. Из (7.3) и (7.4) имеем

$$K_{n,m}(t, x) = \frac{1}{2\pi(1-e^{i(x-t)})}\left\{\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{e^{ix}-\beta_k}{1-\bar{\beta}_k e^{ix}}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{1-\bar{\beta}_k e^{it}}{e^{it}-\beta_k}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k e^{ix}}\right)\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k e^{it}}{e^{it}-\alpha_k}\right)\right\}. \tag{7.6}$$

Если $\alpha_k = |\alpha_k| e^{i\vartheta_k}$, то имеем

$$e^{ix}-\alpha_k = |e^{ix}-\alpha_k| \exp\left\{i \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x - |\alpha_k|\sin\vartheta_k}{\cos x - |\alpha_k|\cos\vartheta_k}\right\};$$

$$1-\bar{\alpha}_k e^{ix} = 1 - |\alpha_k| e^{i(x-\vartheta_k)} =$$

$$= |1-\bar{\alpha}_k e^{ix}| \exp\left\{-i \operatorname{arc\,tg}\frac{|\alpha_k|\sin(x-\vartheta_k)}{1-|\alpha_k|\cos(x-\vartheta_k)}\right\}.$$

Поэтому

$$\frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k e^{ix}} = \exp\left\{i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x - |\alpha_k|\sin\vartheta_k}{\cos x - |\alpha_k|\cos\vartheta_k}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\operatorname{arc\,tg}\frac{|\alpha_k|\sin(x-\vartheta_k)}{1-|\alpha_k|\cos(x-\vartheta_k)}\right]\right\}. \tag{7.7}$$

Следовательно,

$$\frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k e^{ix}}\,\frac{1-\bar{\alpha}_k e^{it}}{e^{it}-\alpha_k} = \exp\left\{i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin x - |\alpha_k|\sin\vartheta_k}{\cos x - |\alpha_k|\cos\vartheta_k}-\right.\right.$$

$$\left.-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin t - |\alpha_k|\sin\vartheta_k}{\cos t - |\alpha_k|\cos\vartheta_k}\right] + i\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{|\alpha_k|\sin(x-\vartheta_k)}{1-|\alpha_k|\cos(x-\vartheta_k)}-\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{arc\,tg}\frac{|\alpha_k|\sin(t-\vartheta_k)}{1-|\alpha_k|\cos(t-\vartheta_k)}\right]\right\}. \tag{7.8}$$

Но, заметив, что

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin u - |\alpha_k|\sin\vartheta_k}{\cos u - |\alpha_k|\cos\vartheta_k}\right]' = \frac{1-|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}$$

и

$$\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{|\alpha_k|\sin(u-\vartheta_k)}{1-|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)}\right]' = \frac{|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2},$$

из (7.8) получим

$$\prod_{k=0}^{n}\frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k e^{ix}}\prod_{k=0}^{n}\frac{1-\bar{\alpha}_k e^{it}}{e^{it}-\alpha_k} =$$

$$= \exp\left\{i\int_t^x \sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\,du\right\}. \tag{7.9}$$

Очевидно, что вполне аналогичным образом получим также

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{e^{ix}-\beta_k}{1-\overline{\beta}_k e^{ix}} \prod_{k=1}^{m} \frac{1-\overline{\beta}_k e^{it}}{e^{it}-\beta_k} =$$

$$= \exp\left\{-i\int_t^x \sum_{k=1}^{m} \frac{|\beta_k|^2-1}{1-2|\beta_k|\cos(u-\omega_k)+|\beta_k|^2}\,du\right\}. \qquad (7.10)$$

Из (7.9) и (7.10) в силу (7.3) и (7.4) следует формула (7.5) леммы.

Заметим, что при $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=\cdots=0$, и $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=$ $=\cdots=\infty$, из (1.1) и (4.1), получим

$$\varphi_n(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}z^n,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$\varphi_m(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{z^m}e^{i\arg\beta_m+2\sum\limits_{k=1}^{m-1}\arg\beta_k},\quad m=1,2,\cdots \qquad (7.11)$$

Таким образом, в этом частном случае система функций $\{\Phi_n(z)\}$, $-\infty<n<+\infty$ на единичной окружности $|z|=1$ превращается в систему тригонометрических функций $\{e^{inx}\}$, $-\infty<n<+\infty$. Поэтому в этом случае ядро $K_{n,n}(t,x)$, как это легко следует также из (7.5), совпадает с обычным ядром Дирихле

$$K_{n,n}(t,x)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}. \qquad (7.12)$$

§ 2. Обычная сходимость рядов Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(e^{ix})\}$

8°. Известно [2,3], что одновременная расходимость рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-|\alpha_k|)=+\infty,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{|\beta_k|}\right)=+\infty \qquad (8.1)$$

необходима и достаточна для полноты системы рациональных функций

$$\left\{\frac{1}{1-\overline{\alpha}_k z},\ (k=0,1,2,\cdots);\quad \frac{1}{1-\overline{\beta}_k z},\ (k=1,2,\cdots)\right\} \qquad (8.2)$$

на единичной окружности $|z|=1$, как при среднеквадратической, так и при равномерной аппроксимации.

Ортогонализация системы функций (8.2) на единичной окружности $|z|=1$ приводит к ортогональной системе $\{\Phi_n(e^{ix})\}$ $-\infty<n<+\infty$, поэтому для любой функции $f(x)\in L_2(-\pi, \pi)$ можно написать соответствующий ряд Фурье

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\Phi_k(e^{ix}), \tag{8.3}$$

где

$$c_k=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{\Phi_k(e^{it})}dt, \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.3'}$$

отрезки которой

$$S_{n,m}(x)=\sum_{k=-m}^{n} c_k\Phi_k(e^{ix}) \tag{8.4}$$

при условии (8.1) в среднем сходятся к $f(x)$, т. е.

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_{n,m}(x)|^2 dx=0. \tag{8.5}$$

Но формальный ряд Фурье вида (8.3) можно написать также для любой функции $f(x)\in L_1(-\pi, \pi)$, и для отрезков $S_{n,m}(x)$ этого ряда в силу (8.3) будем иметь

$$S_{n,m}(x)=\sum_{k=-m}^{n} c_k\Phi_k(e^{ix})=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\sum_{k=-m}^{n}\overline{\Phi_k(e^{it})}\Phi_k(e^{ix})\right\}dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_{n,m}(t, x)dt. \tag{8.6}$$

Наша цель — исследовать вопрос сходимости частных сумм $S_{n,m}(x)$ ряда Фурье (8,3) к соответствующей функции, когда $n, m\to\infty$. В то время как для функций $f(x)\in L_2(-\pi, \pi)$ лишь при выполнении условий (8.1) суммы $S_{n,m}(x)$ в среднем сходятся к $f(x)$, исследование вопроса об их обычной сходимости, скажем для функций $f(x)$, имеющих ограниченную вариацию на $[-\pi, \pi]$, наталкивается на значительные трудности, когда последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ имеют предельные точки на единичной окружности $|z|=1$.

В настоящем параграфе мы займемся исследованием вопроса об обычной сходимости ряда Фурье (8.3), при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$.

Эти ограничения заключаются в следующем:

1) последовательности $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ не имеют предельных точек на окружности $|z|=1$;

2) $\beta_k = \dfrac{1}{\overline{\alpha}_{k-1}}, \quad (k = 1, 2, \cdots).$

При этом отметим, что здесь существенным является первое ограничение, а второе делается лишь для упрощения формулы (7.5) спектральной функции $K_{n,m}(t, x)$, которая в этом случае для $m = n+1$ принимает следующий вид:

$$K_{n,n+1}(t, x) = \frac{e^{\frac{i}{2}(t-x)}}{2\pi \sin \frac{t-x}{2}} \times$$

$$\times \sin\left\{\int_x^t \sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\,du\right\}. \tag{8.7}$$

9°. Докажем ряд лемм, необходимых нам ниже.

Лемма 6. Если $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ *и* $f(x+2\pi) = f(x)$ $-\infty < x < +\infty$, *то при любом* x $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ *справедлива формула*

$$S_{n,n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x-y)e^{-i\frac{y}{2}}\,\frac{\sin[y\lambda_n(-y, x)]}{2\sin\frac{y}{2}}\,dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x+y)e^{i\frac{y}{2}}\,\frac{\sin[y\lambda_n(y, x)]}{2\sin\frac{y}{2}}\,dy, \tag{9.1}$$

где

$$y\lambda_n(y, x) = \int_x^{x+y}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(u-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\right)du. \tag{9.2}$$

Доказательство. Заметив, что функции $f(t)$ и $K_{n,n+1}(t, x)$ имеют период 2π, из (8.6) получим

$$S_{n,n+1}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_{n,n+1}(t, x)\,dt =$$

$$= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)K_{n,n+1}(t, x)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi f(x-y)K_{n,n+1}(x-y, x)\,dy + \int_0^\pi f(x+y)K_{n,n+1}(x+y, x)\,dy. \tag{9.3}$$

Имея в виду обозначение (9.2), из (8.7) имеем

$$K_{n,\, n+1}(x+y,\, x) = \frac{e^{i\frac{y}{2}}}{2\pi \sin\frac{y}{2}} \sin[y\lambda_n(y,\, x)], \tag{9.4}$$

откуда и из (9.3) следует формула (9.1).

Лемма 7. Если последовательность $\{\alpha_k\}$ *не имеет предельных точек на окружности* $|z|=1$, *то справедливы оценки*

$$c_1(n+1) \leqslant |\lambda_n(\pm y,\, x)| \leqslant c_2(n+1); \tag{9.5}$$

$$c_1(n+1) \leqslant |[y\lambda_n(\pm y,\, x)]'_y| \leqslant c_2(n+1); \tag{9.6}$$

$$|[y\lambda_n(\pm y,\, x)]''_{y^2}| \leqslant c_3(n+1), \tag{9.7}$$

где $c_i\,(i=1, 2, \cdots)$ *постоянные, не зависящие от* x *и* y.

Доказательство. Имеем оценку

$$\frac{1}{2}(1-|\alpha_k|) \leqslant \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(z-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2} \leqslant \frac{2}{1-|\alpha_k|} \tag{9.8}$$

и по условию

$$0 \leqslant |\alpha_k| \leqslant \rho < 1, \tag{9.9}$$

откуда следует, что

$$\frac{1-\rho}{2}(n+1) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(z-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2} \leqslant \frac{2}{1-\rho}(n+1). \tag{9.10}$$

Из (9.10) и (9.2) немедленно следуют оценки (9.5) и (9.6).

Наконец, так как

$$[y\lambda_n(\pm y,\, x)]''_{y^2} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-|\alpha_k|^2)\, 2|\alpha_k| \sin(x \pm y - \vartheta_k)}{[1-2|\alpha_k|\cos(x \pm y - \vartheta_k)+|\alpha_k|^2]^2},$$

то из (9.9) имеем

$$|[y\lambda_n(\pm y,\, x)]''_{y^2}| \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-|\alpha_k|)^4} \leqslant \frac{4}{(1-\rho)^3}(n+1),$$

т. е. оценку (9.7).

Лемма 8. Если $\varphi(y) \in L_1(0, \pi)$, *то при любом* $x\,(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \varphi(y) e^{iy\lambda_n(\pm y,\, x)} dy = 0, \tag{9.11}$$

при этом равномерно относительно x.

Доказательство. Для данного $\varepsilon > 0$ существует полином $P(y)$ такой, что

$$\int_0^\pi |\varphi(y) - P(y)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{9.12}$$

тогда

$$\left|\int_0^\pi [\varphi(y) - P(y)] e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.12'}$$

Пусть

$$\max_{[0,\pi]} |P(y)| = M_0, \qquad \max_{[0,\pi]} |P'(y)| = M_1,$$

тогда из формулы

$$\int_0^\pi P(y) e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} dy = \frac{P(y) e^{iy\lambda_n(\pm y, x)}}{i[y\lambda_n(\pm y, x)]_y'}\Bigg|_0^\pi -$$

$$-\int_0^\pi \frac{e^{iy\lambda_n(\pm y, x)}}{i[y\lambda_n(\pm y, x)]_y'} P'(y)\, dy + \int_0^\pi e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} \frac{P(y)[y\lambda_n(\pm y, x)]_{y^2}''}{i([y\lambda_n(\pm y, x)]_y')^2} dy.$$

В силу (9.6) и (9.7) получим оценку

$$\left|\int_0^\pi P(y) e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} dy\right| \leqslant \frac{2M_0}{c_1(n+1)} +$$

$$+ \frac{\pi M_1}{c_1(n+1)} + \frac{M_0 c}{c_1^2(n+1)} = \frac{c_4}{n+1}. \tag{9.13}$$

Следовательно, при $n \geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\int_0^\pi P(y) e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} dy\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда в силу (9.12′) получим

$$\left|\int_0^\pi \varphi(y) e^{iy\lambda_n(\pm y, x)} dy\right| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon),$$

т. е. утверждение (9.11) леммы.

Лемма 9. В условиях леммы 6 для любого $0 < \omega < \pi$ имеет место формула

$$S_{n,n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\omega f(x-y) e^{-i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(-y, x)]}{y} dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+y)e^{i\frac{y}{2}}\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy+o(1), \tag{9.14}$$

где $o(1)\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Из леммы 7 и из формулы (9.1) следует, что при $n\to\infty$

$$S_{n,n+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-y)e^{-i\frac{y}{2}}\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{2\sin\frac{y}{2}}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+y)e^{i\frac{y}{2}}\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{2\sin\frac{y}{2}}dy+o(1). \tag{9.15}$$

Но из (9.15) имеем при $n\to\infty$

$$S_{n,n+1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-y)e^{-i\frac{y}{2}}\frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+y)e^{i\frac{y}{2}}\frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y}dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x-y)e^{-i\frac{y}{2}}\left(\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}-\frac{1}{y}\right)\sin[y\lambda_n(-y,x)]dy+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x+y)e^{i\frac{y}{2}}\left(\frac{1}{2\sin\frac{y}{2}}-\frac{1}{y}\right)\sin[y\lambda_n(y,x)]dy+o(1). \tag{9.15'}$$

Но функция $\dfrac{1}{2\sin\frac{y}{2}}-\dfrac{1}{y}$ непрерывна на замкнутом отрезке $[0,\infty]$, поэтому по лемме 7 последние два интеграла в формуле (9.15) стремятся к нулю при $n\to\infty$. Отсюда и следует формула (9.14).

Лемма 10. Если последовательность не имеет предельных точек на окружности $|z|=1$, *то справедливы оценки*

$$|[\lambda_n(\pm y,x)]'_y|\leqslant c_4(n+1); \tag{9.16}$$

$$|[\lambda_n(\pm y,x)]''_{y^2}|\leqslant c_5(n+1). \tag{9.17}$$

Доказательство. Из определения (9.2) функции $\lambda_n(y,x)$ имеем

$$\lambda_n(\pm y, x) = \frac{1}{y}\int_0^y \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(x\pm v-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\right) dv, \tag{9.2'}$$

откуда получим

$$[\lambda_n(\pm y, x)]'_y = \mp \frac{1}{y^2}\times$$

$$\times\int_0^y \sum_{k=0}^{n} \frac{4|\alpha_k|(1-|\alpha_k|^2)\sin\frac{y-v}{2}\sin\left(x\pm\frac{v+y}{2}-\vartheta_k\right)}{[1-2|\alpha_k|\cos(x\pm v-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2][1-2|\alpha_k|\cos(x\pm y-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2]}\, dv. \tag{9.18}$$

Отсюда, в силу оценки (9.8), получим

$$|[\lambda_n(\pm y, x)]'_y| \leqslant \frac{1}{y^2}\int_0^y \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(1-|\alpha_k|)^3}\right\}\left|\sin\frac{y-v}{2}\right| dv \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{(1-\rho)^3}(n+1)\frac{1}{y^2}\int_0^y \left|\sin\frac{y-v}{2}\right| dv, \tag{9.19}$$

и так как

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y^2}\int_0^y \left|\sin\frac{y-v}{2}\right| dv \leqslant \frac{1}{4},$$

то из (9.19) следует оценка (9.16) леммы.

Из (9.2′), далее, получим:

$$[\lambda_n(\pm y, x)]''_{y^2} = \frac{2}{y^3}\int_0^y \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(x\pm v-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\right) dv -$$

$$-\frac{2}{y^2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(x\pm y-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2} \mp$$

$$\mp\frac{2}{y}\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-|\alpha_k|^2)|\alpha_k|\sin(x\pm y-\vartheta_k)}{[1-2|\alpha_k|\cos(x\pm y-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2]^2},$$

откуда, после простых преобразований, будем иметь:

$$[\lambda_n(\pm y, x)]''_{y^2} = \mp\frac{4}{y^3}\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-|\alpha_k|^2)|\alpha_k|}{1-2|\alpha_k|\cos(x\pm y-\vartheta_k)+|\alpha_k|^2}\times$$

$$\times \int_0^y \left\{ \frac{\sin(x \pm y - \vartheta_k)}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} v -\right.$$

$$\left. - \frac{2 \sin \frac{y - v}{2} \sin \left(x \pm \frac{v + y}{2} - \vartheta_k \right)}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm v - \vartheta_k| + |\alpha_k|^2} \right\} dv. \tag{9.20}$$

Обозначим

$$A_k^{(\pm)}(v, y) = \frac{\sin(x \pm y - \vartheta_k)}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} v -$$

$$- \frac{2 \sin \left(x \pm \frac{v + y}{2} - \vartheta_k \right) \sin \frac{y - v}{2}}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2}, \tag{9.21}$$

$$B_k^{(\pm)}(v, y) = \frac{2 \sin \left(x \pm \frac{y + v}{2} - \vartheta_k \right) \sin \frac{y - v}{2}}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} -$$

$$- \frac{2 \sin \left(x \pm \frac{y + v}{2} - \vartheta_k \right) \sin \frac{y - v}{2}}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm v - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2}, \tag{9.21'}$$

тогда из (9.20) будем иметь

$$[\lambda_n(\pm y, x)]_{y^2}^{\prime} =$$

$$= \mp \frac{4}{y^3} \sum_{k=0}^{n} \frac{(1 - |\alpha_k|^2) |\alpha_k|}{1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} \int_0^y [A_k^{(\pm)}(v, y) + B_k^{(\pm)}(v, y)] dv. \tag{9.22}$$

Из (9.21′) имеем:

$$B_k^{(\pm)}(v, y) =$$

$$= \mp \frac{8 |\alpha_k| \sin^2 \left(x \pm \frac{y + v}{2} \right) \sin^2 \frac{y - v}{2}}{[1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2][1 - 2|\alpha_k| \cos(x \pm v - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2]},$$

откуда, и из (9.8), следуют оценки

$$|B_k^{(\pm)}(v, y)| \leqslant \frac{8 \sin^2 \frac{y - v}{2}}{(1 - |\alpha_k|)^4}; \tag{9.23}$$

$$\left| \int_0^y B_k^{(\pm)}(y, v) dv \right| \leqslant \frac{2}{(1 - |\alpha_k|)^4} \int_0^y (y - v)^2 dv = \frac{2y^3}{3(1 - |\alpha_k|)^4}. \tag{9.23'}$$

Далее, после простых преобразований, получим:

$$A_k^{(\pm)}(v, y) = \frac{v\sin(x \pm y - \vartheta_k) - 2\sin\left(x \pm \frac{y+v}{2} - \vartheta_k\right)\sin\frac{y-v}{2}}{1 - 2|\alpha_k|\cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2} =$$

$$= \frac{D_k^{(\pm)}(v, y) + E_k^{(\pm)}(v, y)}{1 - 2|\alpha_k|\cos(x \pm y - \vartheta_k) + |\alpha_k|^2}, \tag{9.24}$$

где

$$D_k^{(\pm)}(v, y) = \sin(x \pm y - \vartheta_k)\left[v - 2\sin\frac{y-v}{2}\right];$$

$$E_k^{(\pm)}(v, y) = \pm 4\sin^2\frac{y-v}{2}\cos\left(x \pm \frac{v+3y}{2} - \vartheta_k\right). \tag{9.25}$$

Поэтому

$$\int_0^y D_k^{(\pm)}(v, y)\,dv = \sin(x \pm y - \vartheta_k)\int_0^y \left(v - 2\sin\frac{y-v}{2}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{2}y^2\sin(x \pm y - \vartheta_k)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{y}{4}}{\left(\frac{y}{4}\right)^2}\right),$$

и

$$\left|\int_0^y D_k^{(\pm)}(v, y)\,dv\right| \leqslant \frac{y^4}{64},$$

откуда, ввиду (9.24), получим:

$$\left|\int_0^y A_k^{(\pm)}(v, y)\,dv\right| \leqslant y^3\left(\frac{1}{3} + \frac{y}{64}\right)\frac{1}{(1 - |\alpha_k|)^2}, \tag{9.26}$$

так как $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Наконец, из (9.22), (9.23) и (9.26) следует оценка

$$|[\lambda_n(\pm y, x)]''_{y^3}| \leqslant 4\left(1 + \frac{y}{64}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1 + |\alpha_k|}{(1 - |\alpha_k|)^5} < \frac{16(n+1)}{(1-\rho)^2},$$

т. е. утверждение (9.17) леммы.

Наконец, докажем лемму:

Лемма 11. Если последовательность $\{\alpha_k\}$ *не имеет предельных точек на окружности* $|z| = 1$, *то для любого* $\delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}, \tag{9.27}$$

при этом равномерно относительно $x\,(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$.

Доказательство. Имеем тождество

$$\int_0^\delta \frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}dy = \int_0^\delta \frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{[y\lambda_n(\pm y, x)]}d[y\lambda_n(\pm y, x)] -$$

$$-\int_0^\delta \sin[y\lambda_n(\pm y, x)]\frac{\lambda_n'(\pm y, x)}{\lambda_n(\pm y, x)}dy = I_1^{(n)} + I_2^{(n)}. \tag{9.28}$$

Обозначая $y\lambda_n(\pm y, x) = z$, имеем

$$I_1^{(n)} = \int_0^{\delta\lambda_n(\pm\delta, x)} \frac{\sin z}{z}dz,$$

откуда, заметив по (9.2′) и (9.5), что $\lambda_n(\pm\delta, x) \geqslant c_1(n+1)$, получим

$$\lim_{n\to\infty} I_1^{(n)} = \frac{\pi}{2}, \tag{9.29}$$

при этом равномерно относительно x.

Далее имеем:

$$I_2^{(n)} = \frac{[\lambda_n(\pm y, x)]_y' \cos[y\lambda_n(\pm y, x)]}{\lambda_n(\pm y, x)[y\lambda_n(\pm y, x)]_y'}\Bigg|_0^\delta -$$

$$-\int_0^\delta \cos[y\lambda_n(\pm y, x)]\frac{[\lambda_n(\pm y, x)]_{y^2}''}{\lambda_n(\pm y, x)[y\lambda_n(\pm y, x)]_y'}dy +$$

$$+\int_0^\delta \cos[y\lambda_n(\pm y, x)]\frac{\{[\lambda_n(\pm y, x)]_y'\}^2}{[\lambda_n(\pm y, x)]^2[y\lambda_n(\pm y, x)]_y'}dy +$$

$$+\int_0^\delta \cos[y\lambda_n(\pm y, x)]\frac{[\lambda_n(\pm y, x)]_y'[y\lambda_n(\pm y, x)]_{y^2}''}{[\lambda_n(\pm y, x)([y\lambda_n(\pm y, x)]_y')^2}dy.$$

Из оценок (9.5), (9.6) леммы 7 и из оценок (9.16), (9.17) леммы 9 вытекает, что $|I_2^{(n)}| \leqslant \frac{c}{n}$, где c не зависит от x, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} I_2^{(n)} = 0 \tag{9.29′}$$

равномерно относительно x.

Утверждение (9.27) леммы следует из (9.28) и из предельных соотношений (9.29) и (9.29′).

10°. Наконец, докажем основную теорему об обычной сходимости рядов Фурье по ортогональной системе рациональных функций, являющуюся аналогом теорем Дирихле — Жордана и Дини — Липшитца из теории рядов Фурье. Предварительно докажем еще одну лемму.

Лемма 12. Если функция $g(y)$ *монотонно возрастает в промежутке* $[0, h]$, $h>0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^h g(y)\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}g(+0). \tag{10.1}$$

Доказательство. Представим наш интеграл в виде

$$g(+0)\int_0^h\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy+\int_0^h[g(t)-g(+0)]\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy. \tag{10.2}$$

Из леммы 10 следует, что первый интеграл при $n\to\infty$ стремится к пределу $\frac{\pi}{2}g(+0)$.

Таким образом, дело сводится к доказательству того, что второй из интегралов (10.2) стремится к нулю.

Для данного $\varepsilon>0$ выберем $\delta<h$ так, что

$$0\leqslant g(t)-g(+0)<\varepsilon, \quad \text{при} \quad 0<t\leqslant\delta, \tag{10.3}$$

тогда разобьем второй интеграл справа в (10.2) на два

$$\left(\int_0^\delta+\int_\delta^h\right)[g(t)-g(+0)]\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy=I_1+I_2.$$

К интегралу применяем формулу Бонне

$$I_1=[g(\delta)-g(+0)]\int_\eta^\delta\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy.$$

Но из леммы 10 следует, что интегралы вида

$$\int_0^z\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy, \qquad z\geqslant 0$$

равномерно ограничены, откуда вытекает, что равномерно ограничены также и интегралы вида

$$\left|\int_\eta^\delta\frac{\sin[y\lambda_n(\pm y, x)]}{y}\,dy\right|\leqslant M, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{10.4}$$

Поэтому

$$|I_1| < \varepsilon M, \tag{10.5}$$

равномерно при всех $n = 1, 2, \ldots$

Наконец, по лемме 8 будем иметь также

$$|I_2| < \varepsilon, \quad \text{при} \quad n \geqslant N. \tag{10.6}$$

Из (10.5) и (10.6) заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} (I_1 + I_2) = 0,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Теорема 1. Если функция $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ *и в некоторой окрестности* $(x_0 - h, x_0 + h)$ *точки* x_0 *имеет ограниченную вариацию, то*

$$\lim_{n \to \infty} S_{n, n+1}(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}. \tag{10.7}$$

Доказательство. Выберем в формуле (9.14) леммы 8 число $\omega = h$; тогда для точки $x = x_0$ она примет вид

$$S_{n, n+1}(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^h f(x_0 - y) e^{-i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(-y, x)]}{y} dy +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^h f(x_0 + y) e^{i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(y, x)]}{y} dy + o(1), \quad n \to \infty.$$

Но функции $f(x_0 - y) e^{-i\frac{y}{2}}$ и $f(x_0 + y) e^{i\frac{y}{2}}$ в отрезке $[o, h]$ имеют ограниченную вариацию и, следовательно, каждая из них представляется в виде разности двух монотонно возрастающих функций. Но тогда лемма 12 приложима к каждой из них в отдельности и, следовательно, к их разности, откуда заключаем, что

$$\lim_{n \to \infty} S_{n, n+1}(x_0) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)] =$$

$$= \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)].$$

Таким образом, в точках непрерывности будем иметь

$$\lim_{n \to} S_{n, n+1}(x_0) = f(x_0).$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ *и в точке* x_0 *существуют предельные значения* $f(x_0 - 0)$ *и* $f(x_0 + 0)$.

Если для функций

$$\varphi_1(y) = f(x_0 - y) - f(x_0 - 0), \quad \varphi_2(y) = f(x_0 + y) - f(x_0 + 0) \tag{10.8}$$

существуют интегралы

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi_1(y)|}{y} dy, \qquad \int_0^\infty \frac{|\varphi_2(y)|}{y} dy, \tag{10.9}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,\,n+1}(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}.$$

Доказательство. По формуле (9.14) леммы 8 при $n\to\infty$ имеем:

$$S_{n,\,n+1}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0-y)e^{-i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y} dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+y)e^{i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(-y,x)]}{y} dy + o(1). \tag{10.10}$$

С другой стороны, по теореме 1 имеем

$$\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0-0)e^{-i\frac{y}{2}} \frac{\sin[\lambda_n(-y,x)]}{2} dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x_0+0)e^{i\frac{y}{2}} \frac{\sin[y\lambda_n(y,x)]}{y} dy + o(1). \tag{10.11}$$

Из (10.10), и (10.11), в силу (10.8), имеем

$$S_{n,\,n+1}(x_0) - \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(y)}{y} e^{-i\frac{y}{2}} \sin[y\lambda_n(-y,x)]dy +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_2(y)}{y} e^{i\frac{y}{2}} \sin[y\lambda_n(y,x)]dy + o(1), \quad n\to\infty,$$

откуда, ввиду сходимости интегралов (10.9) по лемме 9, следует утверждение теоремы.

Можно установить также теоремы равномерной сходимости рядов Фурье по ортогональной системе $\{\Phi_n(e^{ix})\}$ для периодических функций, имеющих ограниченную производную на отрезке $[-\pi, \pi]$. На этом, однако, здесь останавливаться не будем.

Ереванский Гос. университет
им. В. М. Молотова
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 19 IV 1956

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԸՍՏ ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՖՈՒՐՅԵԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատության մեջ ուսումնասիրվում են միավոր շրջանագծի վրա տրված ֆունկցիայի ըստ բևեռների տվյալ հաջորդականությունն ունեցող ռացիոնալ ֆունկցիաների օրթոգոնալ սիստեմի Ֆուրյեի շարքի վերածման հարցերը։

§ 1-ում բերված է միավոր շրջանագծի վրա օրթոնորմալ ռացիոնալ ֆունկցիաների համար Դիրիխլեի կորիզի կոմպակտ արտահայտությունը։

§ 2-ում, որոշ սահմանափակումներ դնելով բևեռների հաջորդականության վրա, ուսումնասիրվում է ըստ համապատասխան օրթոնորմալ ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմի Ֆուրյեի շարքի սովորական զուգամիտության հարցը։ Ապացուցվում է, որ երբ բևեռները չեն կուտակվում դեպի միավոր շրջանագիծը, ապա ըստ ռացիոնալ ֆունկցիաների Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության բնույթը չի տարբերվում սովորական Ֆուրյեի շարքի զուգամիտության բնույթից։

Այսպիսով, աշխատության մեջ ապացուցվում է, որ երբ օրթոնորմալ սիստեմի բևեռները չեն կուտակվում դեպի միավոր շրջանագիծը, Ֆուրյեի եռանկյունաչափական շարքերի համար հայտնի Դիրիխլե—Ժորդանի և Դինի—Լիպշիցի հայտանիշները պահպանում են իրենց ուժը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Walsn J. L.* Interpolation and approximation by rational Functions (1935), pp. 305.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации (1947) стр. 260—263.
3. *Kober H.* A note on approximation by rational functions, Proc. of the Edinburg Math. Soc., Ser. II, vol. 7, Part 3 (1946).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

К теории однолистных функций

1. Пусть E ограниченная замкнутая совокупность с односвязным дополнением E_∞.

Отобразим конформно E_∞ на $|w|>1$, функцией

$$w=\varphi(z),\quad \varphi(\infty)=\infty,\quad \varphi'(\infty)>0.$$

Обратная относительно $w=\varphi(z)$ функция

$$z=\psi(w)=\tau w+a_0+\frac{a_1}{w}+\cdots,$$

где τ — емкость или постоянная Робена совокупности E.

$$G(x,y)=\lg|\varphi(z)|$$

есть функция Грина области E_∞.

В дальнейшем нам нужны будут два неравенства искажения при отображении $w=\varphi(z)$ (Г. Фабер [1]), которые, ради удобства, приводим сейчас.

I. В любой точке w, $|w|>1$,

$$|\psi'(w)|\leqslant\frac{\tau|w|^2}{|w|^2-1}. \tag{1}$$

II. Если Γ_ρ и $\Gamma_{\rho'}$, соответственно, две линии уровня функции Грина

$$G(x,y)=\lg\rho,\quad G(x,y)=\lg\rho',\quad \rho'>\rho,$$

а $K(\rho,\rho')$ — расстояние между ними, то

$$K(\rho,\rho')\geqslant\tau(\rho'-\rho)\left(1-\frac{1}{\rho\rho'}\right). \tag{2}$$

2. Возьмем произвольную спрямляемую замкнутую кривую L, охватывающую совокупность E.

Пусть

$$|z|\leqslant d+d_0$$

есть круг минимального радиуса, покрывающий L, а

$$|z|\leqslant d$$

некоторый концентрический с ним круг, покрывающий E.

Доказываем следующие две теоремы*.

Теорема 1. Линия уровня

$$G(z) = \text{пост.} = \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}} \tag{3}$$

лежит внутри L, *а также внутри любой линии уровня*

$$G(z) = G(z_1),$$

проходящей через произвольную точку z_1 *кривой* L.

В равенстве (3) s — *дуговая координата точек на* L, $\rho(s)$ — *расстояние переменной на* L *точки до* E.

Коэффициент-единицу при интеграле, вообще говоря, нельзя заменить числом меньше $\frac{\pi}{4}$.

Теорема 2. Если z_1 и z_2 *произвольные точки на* L, *то*

$$|\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| \geqslant c \cdot l \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \tag{4}$$

где l — *нижняя грань длин дуг, соединяющих* z_1 с z_2 *внутри* E_∞,

$$c = \frac{1}{4\pi + 2d_0} \cdot \lg \frac{d+d_0}{d}. \tag{5}$$

Доказательство теоремы 1.

Пусть $|z| < d$ какой-либо круг, покрывающий E.

Оценим в какой-либо точке $A(z_1) \in E_\infty$, $|z_1| < d+d_0$ функцию Грина $G(x, y)$.

Для этого соединим внутри E_∞ точку A с произвольной точкой $B(z_2)$, $|z_2| = d+d_0$, $d_0 > 0$, спрямляемой дугой L_1. Пусть s — дуговое расстояние переменной на L_1 точки $z(s)$ от z_1, а $\rho(s)$ — расстояние $z(s)$ от E.

Считая начало координат временно расположенным в точке $z(s)$, представим гармоническую функцию $\lg|\varphi(z)|$ в круге $|z| < \rho(s)$ интегралом Пуассона

$$\lg|\varphi(z)| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \lg|\varphi(z')| \frac{\rho^2(s) - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z|\cos(\theta - \theta') + |z|^2} d\theta',$$

где
$$\theta' = \arg z', \quad \theta = \arg z, \quad |z'| = \rho(s).$$

Или

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} G(z') \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 - 2\rho|z|\cos(\theta - \theta') + |z|^2} d\theta'.$$

* Основной результат выражается неравенством (4). Равенство (3) имеет вспомогательный характер и доказано ранее [2].

Применим это равенство в точке $z(s+ds)$, бесконечно близкой к $z=0$.

Считая $|z|\sim ds$, получим

$$\frac{\partial G(z(s))}{\partial s}=\frac{2}{\rho(s)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(z')\cos(\theta-\theta')\,d\theta',$$

и так как $G(z)>0$, то

$$\left|\frac{\partial G}{\partial s}\right|\leqslant\frac{2}{\rho(s)}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(z')\,d\theta'=2\,\frac{G(z(s))}{\rho(s)}.$$

Обозначив ради краткости

$$G(z(s))=G$$

получим:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial s}\right|\leqslant 2\,\frac{G}{\rho(s)}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial \lg G}{\partial s}\right|\leqslant\frac{2}{\rho(s)},$$

$$G(z_2)\,e^{-2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}\leqslant G(z_1)\leqslant G(z_2)\cdot e^{2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{6}$$

Но так как $G(z)$ гармонична в E_∞ и в точке $z=\infty$ обращается в ∞ как функция $\lg|z|$, и таким же свойством обладает функция

$$\lg\frac{|z|}{d},$$

то из принципа максимума следует

$$G(z_2)>\lg\frac{d+d_0}{d}.$$

Таким образом, окончательно

$$G(z_1)>\lg\frac{d+d_0}{d}\cdot e^{-2\int\limits_{L_1}\frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{7}$$

Пусть теперь L произвольная замкнутая, спрямляемая кривая Жордана, охватывающая E и проходящая через точку z_1. Обозначим

$$d_0=\max|z|-d,\quad z\in L,$$

и пусть z_2 точка на L, для которой $|z_2|=d+d_0$.

Точки z_1 и z_2 разбивают L на две дуги L_1 и L_2.

Согласно (7)

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-2\int\limits_{L_1} \frac{ds}{\rho(s)}},$$

точно так же

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} e^{-2\int\limits_{L_0} \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Из этих двух неравенств вытекает также

$$G(z_1) \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}, \tag{8}$$

где интеграл распространен по всей замкнутой кривой L.

Из оценки (8) следует, что линия уровня

$$G(z) = \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}$$

лежит внутри L, а также всевозможных линий уровней

$$G(z) = G(z_1),$$

проходящих через любые точки z_1, кривой L_1.

Это и есть первая часть утверждения теоремы 1.

Что в неравенстве (3) в общем случае нельзя заменить коэффициент-единицу, при интеграле, числом меньше $\frac{\pi}{4}$, доказано в статье ([2], замечание на стр. 19).

Из (8) следует

$$|\varphi(z)| \geqslant \exp\left\{ \lg\frac{d+d_0}{d} \exp\left[-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}\right]\right\}$$

для любых $z \in L$.

Если обозначить через z и w точки, связанные соотношением $w = \varphi(z)$, то из предыдущего неравенства, в силу

$$e^x - 1 \geqslant x, \text{ при } x \geqslant 0,$$

следует:

$$|w| - 1 \geqslant \lg \frac{d+d_0}{d} \cdot e^{-\int\limits_{L} \frac{ds}{\rho(s)}}. \tag{9}$$

Этим неравенством оценивается снизу расстояние образа точки z — точки w, от окружности $|w| = 1$. Здесь L произвольная замкнутая, спрямляемая кривая, проходящая через точку z и охватывающая E. Значения d и d_0 уже указаны.

Доказательство теоремы 2. Пусть теперь z_1 и z_2 произвольные точки на L.

Оценим снизу $|w_2-w_1|$, где

$$w_1=\varphi(z_1), \quad w_2=\varphi(z_2).$$

Согласно (9), точки w_1 и w_2 лежат в области

$$|w|>1+\lg\frac{d+d_0}{d}\, e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

В этой области, согласно (1),

$$|\psi'(w)|\leqslant\frac{\tau|w|^2}{2(|w|-1)}<\frac{\tau|w|^2\cdot e^{\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}}{2\lg\frac{d+d_0}{d}}. \tag{10}$$

С другой стороны, принимая в (2) $\rho=1$ и $\rho'=|w|$, получим

$$k(1,|w|)\geqslant\frac{\tau(|w|^2-1)}{|w|},$$

и так как образы точек w_1 и w_2 лежат на кривой L, то, очевидно,

$$k(1,|w|)\leqslant d_0.$$

Поэтому на дуге $\overset{*}{L}$, представляющей отображение L на w-плоскости,

$$\frac{\tau(|w|^2-1)}{|w|}<d_0.$$

Отсюда

$$|w|<\frac{1}{2}\left\{2+\frac{d_0}{\tau}+\sqrt{\left(2+\frac{d_0}{\tau}\right)^2-4}\right\}$$

или проще

$$|w|<2+\frac{d_0}{\tau}. \tag{11}$$

Итак, $\overset{*}{L}$ лежит в кольце

$$1+\lg\frac{d+d_0}{d}\cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}<|w|<2+\frac{d_0}{\tau}. \tag{12}$$

Обозначим кратчайшее расстояние между w_1 и w_2 в кольце (12) через $\delta(w_1;\, w_2)$.

Из геометрических соображений

$$|w_2-w_1|\geqslant\frac{1}{4}\,\delta(w_1;\, w_2). \tag{13}$$

Проведем в кольце (12) кратчайшую дугу, соединяющую w_1 с w_2. Обозначим ее через β^*.

Образ дуги β^* на z-плоскости будет некоторая дуга β, соединяющая z_1 с z_2.

Тогда

$$\delta(w_1;\ w_2)=\int\limits_{\beta} |\varphi'(z)|\cdot|dz|. \tag{14}$$

Но из (10)—(11) следует, что на β^*

$$|\psi'(w)| < \frac{\tau|w|^2}{2(|w|-1)} < \frac{\tau\left(2+\frac{d_0}{\tau}\right)}{2\lg\frac{d+d_0}{d}}\cdot e^{\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}},$$

т. е. на β

$$|\varphi'(z)| \geqslant \frac{2\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0}\cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Поэтому

$$\delta(w_1;w_2) \geqslant \frac{2\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0}\cdot l\cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}},$$

где l — нижняя грань расстояний между z_1 и z_2 в области E_∞.

Наконец,

$$|w_2-w_1| \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\lg\frac{d+d_0}{d}}{2\tau+d_0}\cdot l\cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Это и есть неравенство (4).

Теорема 1 содержит, в частности, оценку $G(z)$, вытекающую из известного неравенства М. А. Лаврентьева [3] в теории однолистных функций. Это можно доказать, проведя через z_1 и z_2 специальным образом подобранную кривую L (ср. [2], стр. 5—7).

Оценку функции Грина типа (3) можно получить и в пространстве трех и более измерений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 18 V 1956

Ա. Լ. Շահինյան

ՄԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Դիցուք E-ն z հարթության մի փակ և սահմանափակ բազմություն է միակապ լրացումով (E_∞)։ Արտապատկերենք E_∞-ը $|w|>1$ տիրույթի վրա

$$w = \varphi(z), \qquad \varphi(\infty) = \infty, \qquad \varphi'(\infty) > 0$$

ֆունկցիայի միջոցով։

Ներկա հոդվածում գնահատվում է վարից $|w_2 - w_1|$ տարբերությունը, որտեղ

$$w_1 = \varphi(z_1), \qquad w_2 = \varphi(z_2)$$

ֆիքս z_1, z_2 կետերի համար և E-ի մասին որոշ տվյալների առկայության պայմաններում։

Դիցուք $|z| \leqslant d$-ն E-ն ծածկող մի շրջան է, L-ը E-ն շրջապատող որևէ ուղղելի գիծ, իսկ

$$|z| \leqslant d + d_0$$

L-ը ընդգրկող նվազագույն շրջանը։

Այդ դեպքում L-ի վրա գտնվող որևէ z_1 և z_2 կետերին համապատասխանող w_1 և w_2 կետերի համար տեղի ունի 4-րդ անհավասարությունը։ Այդ արտահայտության մեջ τ-ն E բազմության Ռոբենի հաստատունն է, l-ը, z_1 և z_2 կետերը միացնող և E_∞-ի մեջ գտնվող աղեղների երկարությունների ստորին կոպարը, իսկ $\rho(s)$-ը L-ի վրա փոփոխական կետի հեռավորությունը E-ից։

Առաջին թեորեմը պարունակում է, մասնավորապես, Մ. Ա. Լավրենտևի հայտնի գնահատականից G(z)-ի մասին բխող գնահատականը։ Այդ բանն ապացուցվում է ընտրելով z_1 և z_2 կետերով անցնող համապատասխան L կորը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faber G.* Über Potentialtheorie und Konforme Abbildung (Stzbr. d. Bayer Ak. d. Wiss 1920, Jahrgang, München, 1921).
2. *Шагинян А. Л.* О скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях. Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. VIII, 1955.
3. *Лаврентьев М. А.* О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях. ДАН СССР, 4, 1936, стр. 207—210.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. Саноян

Способ профилирования диффузоров по заданной эпюре скоростей на входе

1. Введение

В связи с развитием промышленности особо важное значение приобретает правильное профилирование таких важных элементов промышленных и гидросиловых установок, какими, бесспорно, являются диффузорные и конфузорные каналы. В гидротехнических сооружениях гидросиловых установок эти элементы встречаются в качестве переходных участков в оголовке напорного трубопровода, при переходе в напорном туннеле от сечения одного диаметра к сечению другого диаметра и т. д.

Диффузоры применяются также в конструкциях отсасывающих труб, что оказывает существенное влияние на величину используемого напора и, следовательно, на к. п. д. турбины [1]. Баланс энергии на различных участках проточной части гидротурбины показывает, что большая часть потерь приходится на отсасывающую трубу.

Строительство таких мощных гидростанций, как Куйбышевская, Сталинградская и др., требует всестороннего изучения и усовершенствования отсасывающих труб, так как повышение к. п. д. турбины хотя бы на один процент позволяет выработать значительное количество дополнительной энергии. Форма отсасывающей трубы должна удовлетворять требованиям минимальных потерь энергии в ее пределах и создания значительного разряжения в сечении у выхода из рабочего колеса.

Таким образом, для получения удовлетворительного коэффициента полезного действия диффузора первостепенное значение имеет его правильное профилирование, при котором скорости (следовательно, и давления) вдоль стенок диффузора меняются плавно и монотонно. Во избежание отрыва пограничного слоя от стенок диффузора, нигде не должно иметь место локальное увеличение или уменьшение скоростей.

В нашей статье [2] было дано решение такого рода задачи, причем было поставлено условие, что скорости равномерно распределены во входных сечениях диффузоров. Один из таких диффузоров, названный нами условно „диффузором с двумя асимптотами", экспериментально проверен Д. Н. Крыловым в лаборатории аэродинамики Ленинградского политехнического института ([3], стр. 129).

Наряду с вышеупомянутым диффузором экспериментальной проверке подвергались еще диффузоры пяти других типов: прямолинейный диффузор, криволинейный диффузор с постоянным градиентом средней скорости по длине, криволинейный диффузор с постоянным градиентом давления вдоль трубы, ступенчатый диффузор и, наконец, конический диффузор*.

Результаты экспериментального исследования показывают, что при не очень больших значениях приведенного числа оборотов ($n'_1 = 110$ об/мин., $n'_1 = 130$ об/мин.) наилучшей отсасывающей трубой оказался диффузор с двумя асимптотами. Это говорит о том, что теоретически профилированный диффузор с двумя асимптотами хорошо выравнивает неоднородное поле скоростей за колесом. Для сравнения приводим таблицу значений коэффициента неравномерности для разных диффузоров, заимствованную из [3], стр. 132.

Таблица 1

Тип диффузора	K	Тип диффузора	K
Прямолинейный	1,4	С двумя асимптотами	1,3
$\frac{dv}{dx} = \text{const}$,	1,62	Ступенчатый	1,6
$\frac{dp}{dx} = \text{const}$.	1,97	Конический	1,975

Как видно из таблицы 1, диффузор с двумя асимптотами имеет наименьший коэффициент неравномерности. Это говорит о том, что в случае диффузора этого типа скорости хорошо выравниваются, не смотря на то, что его профиль был выбран исходя из однородного поля скоростей на входе.

В настоящей статье дается способ построения очертания прямоосных диффузоров, но уже не с однородным полем скоростей на входе, а при любых входных эпюрах скоростей**. Решение дается для плоского и осесимметричного течений.

---

* В опытах Д. Н. Крылова, повидимому, допущена методологическая неточность, заключающаяся в том, что наряду с пятью плоскими диффузорами исследовался конический диффузор (который является осесимметричным) с отношением входного и выходного сечений равным отношению входных и выходных сечений вышеупомянутых плоских диффузоров. Плоский диффузор нельзя сравнивать с осесимметричным, так как при одном и том же отношении площадей выходных и входных сечений плоский диффузор имеет больший угол раствора, чем осесимметричный.

** Общие принципы решения такого рода задач в сжатом виде даны в [4]. В настоящей статье дается дальнейшее развитие этого вопроса. Изложение сопровождается примерами и графиками, иллюстрирующими ход расчета.

2. Профилирование плоских диффузоров

Потенциал скоростей безвихревого потока идеальной несжимаемой жидкости в случае плоского движения можно выразить через интеграл Фурье [5]

$$\varphi=\int_0^{\infty}\frac{e^{\pm\lambda x}}{\lambda}(A_\lambda\cos\lambda y+B_\lambda\sin\lambda y)\,d\lambda, \tag{2.1}$$

где верхний знак соответствует отрицательному, а нижний — положительному значениям x.

В дальнейшем мы будем рассматривать ту часть пространства, в которой $x>0$, следовательно, в показателе подинтегральной функции всегда будем брать знак (—).

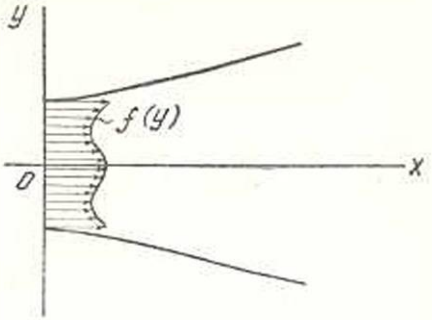
A_λ и B_λ — функции, зависящие от λ. Их можно подобрать таким образом, чтобы продольные скорости на входе в канал ($x=0$) имели заданное распределение $f(y)$ (фиг. 1), т. е.

$$u\Big|_{x=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0}=f(y). \tag{2.2}$$

Здесь через u обозначена продольная скорость.

Согласно условию (2.2) из выражения (2.1) получим

$$f(y)=\int_0^{\infty}(A_\lambda\cos\lambda y+B_\lambda\sin\lambda y)\,d\lambda. \tag{2.3}$$



Фиг. 1.

Если функция f(y) в любом конечном интервале удовлетворяет условиям Дирихле, то (2.3) представляет собой обычное разложение функции f(y) по интегралам Фурье. При этом коэффициенты A_λ и B_λ определяются следующими выражениями:

$$A_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,$$

$$B_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{2.4}$$

В нашей физической задаче f(y) представляет собой распределение скоростей по входному сечению канала, следовательно, она будет удовлетворять условиям Дирихле и абсолютной интегрируемости в бесконечном интервале.

Принимая во внимание также четность функции f(y), получим

$$A_\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\ B_\lambda=0. \tag{2.4'}$$

Подставляя эти значения коэффициентов в (2.1), получим для потенциала скоростей следующее выражение:

$$\varphi = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\xi)d\xi \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}\cos\lambda\xi\cos\lambda y\,\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.5}$$

Или, после простых преобразований,

$$\varphi = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}\cos\lambda(\xi-y)\,\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{2.5'}$$

Имея потенциал скоростей, легко найти выражение для продольных и поперечных скоростей.

Будем иметь

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)d\xi \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}\cos\lambda(\xi-y)\,d\lambda, \tag{2.6}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,d\xi \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda x}\sin\lambda(\xi-y)\,d\lambda. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание [6], что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pz}\cos qz dz = \frac{p}{p^2+q^2}, \quad \int\limits_0^{\infty} e^{-pz}\sin qz dz = \frac{q}{p^2+q^2},$$

приведем выражения для составляющих скоростей к виду:

$$u = \frac{x}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{d\xi}{x^2+(\xi-y)^2}, \tag{2.8}$$

$$v = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\frac{\xi-y}{x^2+(\xi-y)^2}d\xi. \tag{2.9}$$

Имея u и v, используя соотношения

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{2.10}$$

и учитывая условие $\psi = 0$ при $y = 0$, легко получим выражение для функции тока:

$$\psi = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\xi)\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2+\xi^2}\right)d\xi. \tag{2.11}$$

Недостатком решений (2.8) и (2.9) является то, что они не допускают проверки граничных условий.

Введя обозначение

$$\xi - y = x\operatorname{tg}\theta,$$

преобразуем выражения (2.8) и (2.9) следующим образом:

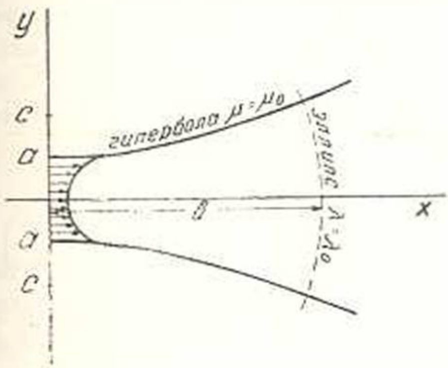
$$u = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x\operatorname{tg}\theta + y)\, d\theta, \tag{2.12}$$

$$v = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x\operatorname{tg}\theta + y) \operatorname{tg}\theta\, d\theta. \tag{2.13}$$

Из этих решений видно, что удовлетворяются граничные условия:

$$u\Big|_{x=0} = f(y), \quad v\Big|_{y=0} = 0.$$

Для проверки вышеприведенных формул решим теперь обратную задачу: определим распределение скоростей в поперечном сечении канала (при $x = 0$), очерченном по гиперболе (фиг. 2).



Фиг. 2.

Для решения задачи перейдем к эллиптическим координатам. Как известно [7], уравнение

$$z = c\operatorname{sh}\zeta, \tag{2.14}$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, дает переход от декартовых координат x, y к эллиптическим ξ, η.

Из (2.14) имеем

$$\begin{aligned} x &= c\operatorname{sh}\xi\cos\eta, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \infty, \\ y &= c\operatorname{ch}\xi\sin\eta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Принимая $\xi = \xi_0 = \text{const}$., получим семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{c^2\operatorname{sh}^2\xi_0} + \frac{y^2}{c^2\operatorname{ch}^2\xi_0} = 1$$

с полуосями $c\operatorname{ch}\xi_0$, $c\operatorname{sh}\xi_0$.

Полагая $\eta = \eta_0 = \text{const.}$, получим семейство софокусных с предыдущими эллипсами гипербол

$$\frac{y^2}{c^2 \sin^2 \eta_0} - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \eta_0} = 1$$

с полуосями $c \sin \eta_0$ и $c \cos \eta_0$.

Введя обозначения

$$\operatorname{sh} \xi = \lambda, \quad \cos \eta = \mu \ (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty, \ -1 \leqslant \mu \leqslant 1), \tag{2.16}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x &= c\lambda\mu, \\ y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)} \end{aligned} \right\}. \tag{2.17}$$

Напишем уравнение Лапласа для определения потенциала скоростей в эллиптических координатах:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{H_\mu}{H_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{H_\lambda}{H_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) = 0, \tag{2.18}$$

где H_λ и H_μ — коэффициенты Ляме, которые определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} H_\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}}, \\ H_\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x^2}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}. \end{aligned} \right| \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.18), получим

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1-\mu^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) = 0. \tag{2.20}$$

Если искать решение этого уравнения в виде произведения двух функций

$$\varphi(\lambda, \mu) = L(\lambda)\, M(\mu), \tag{2.21}$$

из которых одна зависит только от λ, а другая только от μ, то для определения $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ получим следующие дифференциальные уравнения:

$$(1+\lambda^2) \frac{d^2 L}{d\lambda^2} + \lambda \frac{dL}{d\lambda} + kL = 0, \tag{2.22}$$

$$(1-\mu^2) \frac{d^2 M}{d\mu^2} - \mu \frac{dM}{d\mu} - kM = 0, \tag{2.23}$$

где k — любое число.

Решение этих уравнений дает:

$$L(\lambda) = c_1 \cos(\operatorname{arsh}\lambda)\sqrt{k} + c_2 \sin(\operatorname{arsh}\lambda)\sqrt{k},$$

$$M(\mu) = c_1' e^{\sqrt{k} \arccos\mu} + c_2' e^{\sqrt{k} \arccos\mu}.$$

В частном случае $k=0$ решением уравнения (2.20) будет:

$$\varphi = A\,\mathrm{arsh}\lambda + B. \tag{2.24}$$

Из соотношений

$$\left.\begin{aligned} V_\lambda &= \frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = \frac{A}{c\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \\ V_\mu &= \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\mu} = 0 \end{aligned}\right| \tag{2.25}$$

легко определить функцию тока

$$\psi = A\arcsin\mu. \tag{2.26}$$

Из (2.24) и (2.26) очевидно, что эквипотенциальными линиями и линиями тока данного течения служат, соответственно, эллипсы $\lambda=\lambda_0$ и гиперболы $\mu=\mu_0$ (фиг. 2).

Если обозначить полуоси эллипса и гиперболы, соответственно, через b и a, то получим:

$$\lambda_0 = \frac{b}{c}, \quad \mu_0 = \frac{a}{c}.$$

Значение c можно определить из условия, чтобы во входном сечении отношение скоростей на стенах $(y=\pm a)$ к осевой скорости $(y=0)$ было заданным.

Обозначая это отношение через α, получим

$$c = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}} \quad \alpha > 1. \tag{2.27}$$

Определим распределение продольных скоростей во входном сечении, обозначая осевую скорость в этом же сечении $(x=0,\ \mu=1)$, через v_0. Согласно (2.25) будем иметь

$$v_0 = \frac{A}{c}, \quad \frac{V_{0\lambda}}{v_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{c}\right)^2}}. \tag{2.28}$$

Определим, наконец, изменение скорости в плоскости симметрии течения $(y=0)$; согласно (2.25) и (2.17) будем иметь

$$\frac{u}{v_0} = \frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}. \tag{2.29}$$

Теперь эту же самую задачу решим при помощи формул, выведенных в начале настоящего параграфа.

Предположим, что скорости во входном сечении меняются по закону

$$u_1\Big|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{c}\right)^2}}\quad \text{если}\quad -c\leqslant y\leqslant c$$

$$u_1\Big|_{x=0}=0\quad \text{если}\quad y>c. \tag{2.30}$$

Тогда по формулам (2.8), (2.9) и (2.11) легко найти значения составляющих скорости и функцию тока в любой точке течения.

Будем иметь

$$u_1=\frac{cx}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{d\xi}{[x^2+(\xi-y)^2]\sqrt{c^2-\xi^2}}=$$

$$=c\left\{\frac{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}+x^2+c^2-y^2}{2[(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2]}\right\}^{1/2} \tag{2.31}$$

$$v_1=\frac{c}{\pi}\int\limits_{-c}^{c}\frac{(\xi-y)\,d\xi}{[x^2+(\xi-y)^2]\sqrt{c^2-\xi^2}}=$$

$$=c\left\{\frac{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}-(x^2+c^2-y^2)}{2[(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2]}\right\}^{1/2} \tag{2.32}$$

$$\psi_1=\frac{c}{\pi}\int\limits_{0}^{c}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2+\xi^2}\right)}{\sqrt{c^2-\xi^2}}\,d\xi=$$

$$=\arccos\left\{\frac{\sqrt{(x^2+y^2-c^2)^2+4c^2x^2}-(x^2-c^2+y^2)}{2c^2}\right\}^{1/2}. \tag{2.33}$$

Определим распределение скорости в плоскости симметрии течения ($y=0$). Из (2.31) получим:

$$u_1\Big|_{y=0}=\frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}},$$

т. е. результат, совпадающий с (2.29).

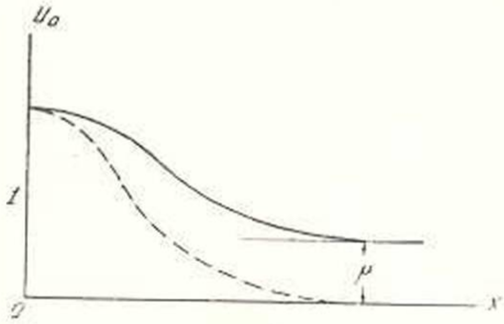
Как видно из последней формулы, скорости в плоскости симметрии канала монотонно уменьшаются от единицы во входном сечении до нуля — в бесконечности (фиг. 3, пунктирная линия).

Такое распределение скоростей, как известно [8], дает диффузор или конфузор с одной асимптотой.

Для получения канала с двумя асимптотами (фиг. 4) необходимо, чтобы кривая распределения скорости в плоскости симметрии канала имела две асимптоты (фиг. 3, сплошная линия). Для этого достаточно на поток, определяемый функцией распределения скоростей (2.29), наложить однородный поток с постоянной скоростью, направленной по x.

Таким образом, распределение продольных скоростей по оси x для диффузора с двумя асимптотами выразится следующей формулой:

$$u_0 = \frac{A}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{c}\right)^2}} + B. \quad (2.34)$$



Фиг. 3.

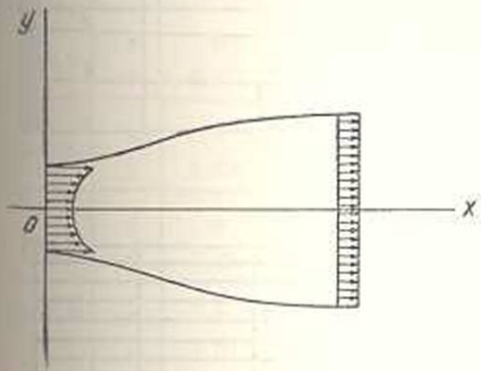
Параметры A и B должны определяться из условия, чтобы скорость при $x = 0$ (на входе) равнялась единице, а на выходе — μ; ($\mu < 1$).

Согласно вышеуказанному для плоского диффузора с двумя асимптотами и с эпюрой входных скоростей, отвечающей (2.30), будем иметь следующие окончательные формулы для составляющих скоростей и функции тока:

$$u = Au_1 + B, \quad (2.35)$$

$$v = Av_1, \quad (2.36)$$

$$\psi = A\psi_1 + By. \quad (2.37)$$



Фиг. 4.

Здесь u_1, v_1, ψ_1 определяются по формулам (2.31)—(2.33). Очертание диффузора определится уравнением $\psi = $ = const.

Подставляя выражение ψ_1 из (2.33) в (2.37) и решая полученное уравнение относительно x, получим следующее уравнение очертания диффузора:

$$x = \sqrt{y^2 \operatorname{ctg}^2\left(\frac{By-\psi}{A}\right) - \cos^2\left(\frac{By-\psi}{A}\right)}. \quad (2.38)$$

(Для упрощения вычислений принято $c = 1$).

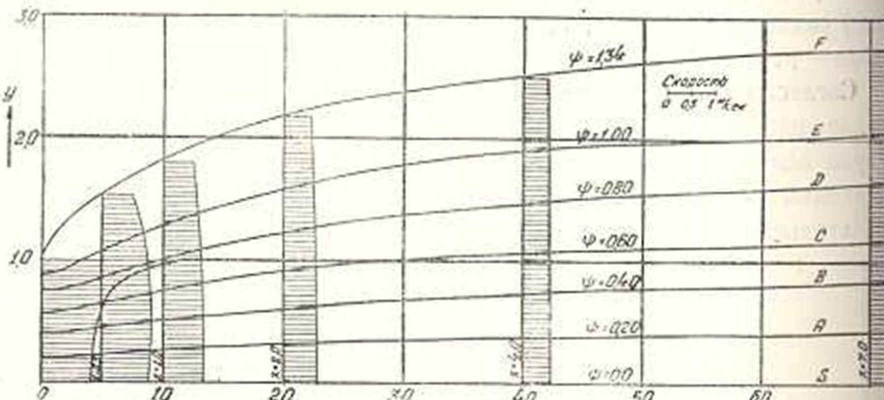
В табл. 2 даны значения координат образующих диффузора для разных ψ = const., рассчитанных по формуле (2.38). При этом для параметров A и B приняты значения: $A = 0{,}6$, $B = 0{,}4$ (не трудно видеть, что в этом случае отношение осевых скоростей на выходе и входе равно $\mu = 0{,}4$).

На графике фиг. 5а приведены очертания каналов согласно таблице 2. На том же графике показаны изменения полных скоростей в поперечных сечениях каналов.

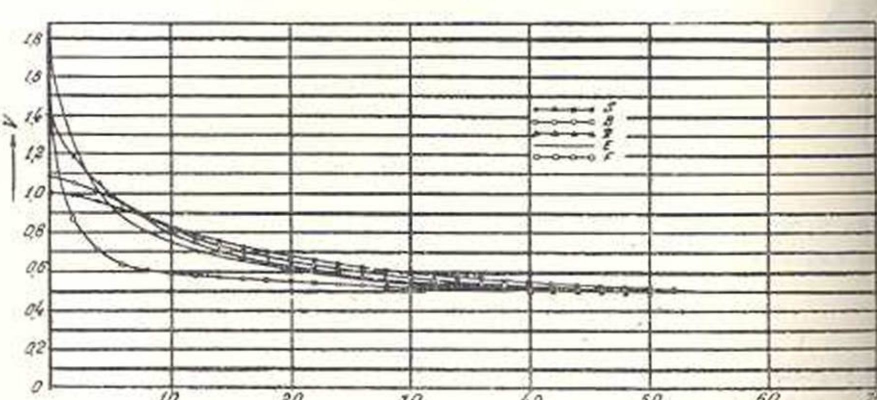
Составляющие скоростей рассчитаны по формулам (2.35) и (2.36) и сведены в табл. 3.

Как видно из табл. 3 и графика фиг. 5а, неоднородность скоростей на входе быстро сглаживается, на расстоянии $x = 1{,}0$ влияние входной эпюры скоростей уже не сказывается; скорости, по мере удаления от оси, монотонно уменьшаются, как и в случае однород-ного распределения скорости на входе [2].

На графике фиг. 5б показаны изменения скорости вдоль стенки каналов. Как видно из этого графика, скорости вдоль стенки монотонно уменьшаются, нигде нет местного увеличения скоростей (нет местных конфузорных участков), что обычно и требуется от рационального диффузора.



Фиг. 5а.



Фиг. 5б.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда скорости равномерно распределены во входном сечении диффузора (в интервале $-1 \leqslant y \leqslant 1$).

Полагая в формулах (2.6), (2.7) и (2.11) $f(\xi) = v_0 = \text{const.}$, получим для такого диффузора следующие формулы для составляющих скоростей и функций тока:

$$u_1 = \frac{xv_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{x^2 + (\xi - y)^2} = \frac{v_0}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1-y}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1+y}{x}\right), \qquad (2.39)$$

$$v_1 = \frac{v_0}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\xi - y)\,d\xi}{x^2 + (\xi - y)^2} = \frac{v_0}{\pi} \ln \sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2}{x^2 + (1+y)^2}}, \tag{2.40}$$

$$\psi_1 = \frac{v_0}{\pi} \int_{0}^{1} \operatorname{arctg} \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 + \xi^2} \right) d\xi = \frac{v_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{2xy}{1 + (1 - y^2)} + \right.$$

$$\left. + y \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - (1 - y^2)} + x \ln \sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2}{x^2 + (1+y)^2}} \right]. \tag{2.41}$$

Таблица 2

Координаты очертаний каналов

$\psi=0,2$	x	0	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	7,0
	y	0,20	0,22	0,76	0,31	0,35	0,37	0,39	0,42
$\psi=0,4$	x	0	0.24	1,10	2,00	3,37	5,96	8,4	13,4
	y	0,385	0,400	0,500	0,600	0,70	0,80	0,85	0,90
$\psi=0,6$	x	0	0,297	0,570	1,29	2,73	4,0	5,0	7,0
	y	0,575	0,60	0,65	0,80	1,00	1,08	1,12	1,17
$\psi=0,8$	x	0	0,15	1,00	2,45	3,15	4,22	5,74	8,42
	y	0,750	0,80	1,00	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
$\psi=1,0$	x	0	0,243	0,334	0,556	0,780	1,730	2,540	5,76
	y	0,88	0,95	1,00	1,10	0,20	1,50	1,70	2,00
$\psi=1,34$	x	0	0,033	0,095	0,178	0,215	0,74	1,46	2,42
	y	1,00	1,00	1,20	1,30	0,34	1,70	2,00	2,30

Для получения диффузора с двумя асимптотами необходимо, очевидно, наложить на это течение однородный поток с постоянной продольной скоростью B. Тогда составляющие скорости и функция тока выразятся формулами, аналогичными (2.35)—(2.37), а u_1, v_1 и ψ_1 будут определяться выражениями (2.39)—(2.41).

В качестве третьего примера рассмотрим случай, когда скорости во входном сечении распределены по закону (пониженные скорости у стенок)

$$u_1 \Big|_{x=0} = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2}; \quad -c \leqslant y \leqslant c. \tag{2.42}$$

По формулам (2.8), (2.9) и (2.11), согласно выражениям (2.35)—(2.37), получим

$$u = \frac{A}{c} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{(x^2 + c^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} + (x^2 + c^2 - y^2)}{2}} - x \right) + B, \tag{2.43}$$

$$v = -\frac{A}{c} \left(\sqrt{\sqrt{(x^2 + c^2 - y^2)^2 + 4c^2y^2} - (x^2 + c^2 - y^2)} - y \right), \tag{2.44}$$

$$\psi=\frac{A}{4c}\left\{\sqrt{2}\left[x\sqrt{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}-(x^2+c^2-y^2)}\right.\right.+$$

$$+y\sqrt{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}+(x^2+c^2-y^2)}+$$

$$+c^2\arcsin\left[\frac{\sqrt{2}}{c^2}\left(y\sqrt{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}+(x^2+c^2-y^2)}\right.\right.-$$

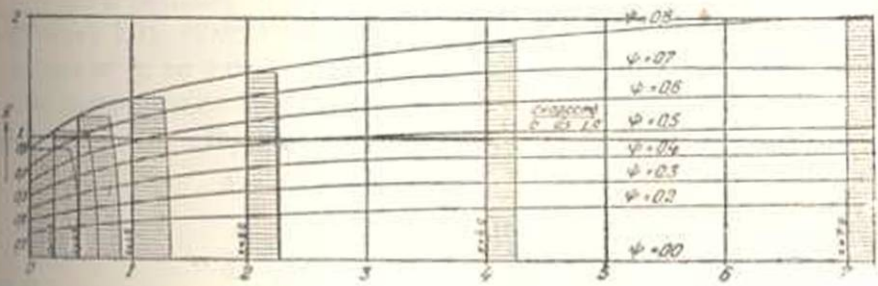
$$\left.\left.\left.\left.-x\sqrt{\sqrt{(x^2+c^2-y^2)^2+4x^2y^2}-(x^2+c^2-y^2)}\right)\right]\right]\right\}-\frac{Axy}{c}+By. \quad (2.45)$$

Таблица 3

Значения составляющих скоростей u, v и полной скорости $V=\sqrt{u^2+v^2}$ в разных сечениях каналов

x \ y		0	0,3	0,6	0,8	1,0	1,3
0	u	1,000	1,060	1,150	1,400	—	—
	v	0	0	0	0	0	—
	V	1,000	1,060	1,150	1,400	—	—
0,25	u	0,979	0,987	1,074	1,144	1,030	0,647
	v	0	0,049	0,1[illegible]4	0,290	0,560	0,580
	V	0,979	0,985	1,080	1,180	1,180	0,870
0,50	u	0,937	0,956	0,964	0,932	0,866	0,752
	v	0	0,056	0,165	0,266	0,354	0,412
	V	0,937	0,966	0,9[illegible]0	0,970	0,940	0,800
1,00	u	0,824	—	0,802	—	0,740	—
	v	0	—	0,130	—	0,210	—
	V	0,824	—	0,810	—	0,780	—
2,00	u	0,668	—	0,657	—	0,627	—
	v	0	—	0,060	—	0,036	—
	V	0,668	—	0,661	—	0,633	—
4,00	u	0,546	—	0,543	—	0,536	—
	v	0	—	0,021	—	0,033	—
	V	0,546	—	0,544	—	0,538	—
7,00	u	0,485	—	0,485	—	0,483	—
	v	0	—	0,007	—	0,012	—
	V	0,485	—	0,485	—	0,483	—

На фиг. 6 приведены теоретические очертания каналов для частного случая A = 0,6, B = 0,4, c = 1. В поперечных сечениях показаны изменения полных скоростей. Как видно из фиг. 6, неоднородность скоростей во входном сечении быстро сглаживается (аналогично предыдущему случаю).



Фиг. 6.

3. Профилирование осесимметричных диффузоров

В случае осесимметричного течения уравнение Лапласа для потенциала скоростей в безвихревом потоке идеальной жидкости

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \qquad (3.1)$$

где r и z цилиндрические координаты, имеет следующее решение для области $z > 0$ [9]

$$\varphi = -\int_0^\infty A_\lambda\, e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda. \qquad (3.2)$$

Аналогично случаю плоского движения, определим A_λ из условия

$$v_z\Big|_{z=0} = f(r). \qquad (3.3)$$

Согласно (3.3) из (3.2) получим

$$f(z) = \int_0^\infty A_\lambda\, J_0(\lambda r)\, \lambda^2 d\lambda. \qquad (3.4)$$

Если функция $f(r)$ удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|\, d\xi$ существует, то из (3,4)

$$\lambda A_\lambda = \int_0^\infty f(\xi)\, J_0(\lambda\xi)\, \xi d\xi. \qquad (3.5)$$

Тогда выражение для потенциала скоростей (3.2) примет вид:

$$\varphi = -\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda \int_0^\infty f(\xi)\, J_0(\lambda\xi)\xi d\xi. \qquad (3.6)$$

Имея потенциал скоростей, легко определить продольные и радиальные составляющие скорости. Имеем

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\,\lambda d\lambda \int\limits_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\,\xi d\xi, \tag{3.7}$$

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\,\lambda d\lambda \int\limits_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\,\xi d\xi\,. \tag{3.8}$$

Используя известные соотношения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{3.9}$$

легко найдем функцию тока:

$$\psi = r\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\,d\lambda \int\limits_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\,\xi d\xi. \tag{3.10}$$

В вышеприведенных формулах J_0 и J_1 бесселевы функции, соответственно, нулевого и первого порядков первого рода.

Решим теперь обратную задачу: определим эпюру скоростей в выходном сечении канала, когда его поверхность является гиперболоидом вращения. Для этого, аналогично плоскому случаю, перейдем к эллиптическим координатам.

Если декартовы координаты x, y, z объединить в комплексы

$$z + ir = c\,\mathrm{sh}(\xi + i\eta); \quad x + iy = re^{i\theta},$$

то ξ и η будут служить параметрами ортогональных семейств эллипсов и гипербол в меридиональных сечениях.

Введя обозначения (2.16), получим

$$\left.\begin{aligned} z &= c\lambda\mu \\ r &= c\sqrt{(1+\lambda^2)\,(1-\mu^2)} \end{aligned}\right\}. \tag{3.11}$$

Определим коэффициенты Ляме:

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda &= \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}}, \\ H_\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\mu^2}}, \\ H_\theta &= c\sqrt{(1+\lambda^2)\,(1-\mu^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Подставляя эти коэффициенты в уравнение Лапласа, записанное в криволинейных координатах, для осесимметричного движения

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\,r\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\,r\,\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) = 0, \tag{3.13}$$

где в данном случае $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$, $H_1 = H_\lambda$, $H_2 = H_\mu$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]=0. \tag{3.14}$$

Если решение этого уравнения искать в виде произведения двух функций $L(\lambda)$, $M(\mu)$, из которых одна зависит только от λ, а другая только от μ, то для $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ получим, соответственно, следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{d\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{dL}{d\lambda}\right]-n(n+1)L=0, \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dM}{d\mu}\right]+n(n+1)M=0. \tag{3.16}$$

Второе уравнение представляет собой уравнение Лежандра, которому удовлетворяют функции Лежандра первого и второго родов, в частности полиномы Лежандра $p_n(\mu)$.

Первое уравнение становится уравнением Лежандра, если заменить λ через $i\lambda$. Этому уравнению удовлетворяют функции [10]:

$$P_n(\lambda)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!}\left[\lambda^n+\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\lambda^{n-2}+\cdots\right]$$

и

$$q(\lambda)=P_n(\lambda)\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{[p_n(\lambda)]^2(1+\lambda^2)}=(-1)^n\left[P_n(\lambda)\operatorname{arcctg}\lambda-\right.$$

$$\left.-\frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(\lambda)+\cdots\right].$$

При этом будем иметь:

$$\varphi=p_n(\mu)P_n(\lambda);\quad n=0,\ 1,\ 2\ldots$$

или

$$\varphi=p_n(\mu)q_n(\lambda);\quad n=0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Простейший случай будет при $n=0$. Тогда для потенциала скоростей получим выражение:

$$\varphi=A\operatorname{arcctg}\lambda+\text{const}, \tag{3.17}$$

а функция тока выразится так:

$$\psi=Ac\mu. \tag{3.18}$$

Поверхности тока согласно (3.18) представляют собой гиперболоиды вращения.

Распределение скоростей в сечении $\lambda=\text{const}$. выразится так:

$$V_\lambda=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=-\frac{A}{c}\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(1+\lambda^2)}}, \tag{3.19}$$

а при $\lambda=0$ (или $z=0$)

$$V_{\lambda 0}=-\frac{A}{c\mu}. \tag{3.20}$$

Если обозначить осевую скорость во входном сечении (при $\lambda=0$, $\mu=1$ или $r=0$, $z=0$) через v_0, получим

$$-\frac{A}{c}=v_0,$$

и формулы (3.19) и (3.20) запишутся в следующем виде:

$$\frac{V_\lambda}{v_0}=\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(1+\lambda^2)}}, \tag{3.19'}$$

$$\frac{V_{\lambda 0}}{v_0}=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2}}=v_z\Big|_{z=0}. \tag{3.20'}$$

Формула (3.20′) выражает распределение скоростей на входе диффузора.

Значение c, аналогично плоскому случаю, определяется из условия заданного отношения скоростей у стенок и на оси входного сечения ($z=0$ или $\lambda=0$), а именно:

$$\frac{V_{0\lambda}\Big|_{r=a}}{v_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2}}=\alpha \quad (\alpha>1),$$

отсюда найдем

$$c=\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}}\,a, \tag{3.21}$$

где a — радиус входного сечения.

Определим распределение скоростей на оси течения ($r=0$ или $\mu=1$).

Из (3.20′) имеем:

$$\frac{V_\lambda\Big|_{\mu=1}}{v_0}=\frac{V_z}{v_0}=\frac{1}{1+\lambda^2} \tag{3.22}$$

или, учитывая, что согласно (3.11) $\lambda=\frac{z}{c}$, получим

$$\frac{V_z}{v_0}=\frac{c^2}{c^2+z^2}. \tag{3.23}$$

Таким образом, скорость на оси монотонно уменьшается от v_0 на входе до нуля в бесконечности.

Теперь решим эту же задачу при помощи формул, приведенных в начале настоящего параграфа.

Пусть распределение скорости во входном сечении определяется формулой:

$$(V_z)_{z=0} = \frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2}}, \text{ если } 0 \leqslant r \leqslant c$$

$$(V_z)_{z=0} = 0, \quad \text{если} \quad r > c. \tag{3.24}$$

Тогда по (3.7) получим:

$$V_z = cv_0 \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, \lambda d\lambda \int_0^c \frac{J_0(\lambda \xi)\, \xi d\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}. \tag{3.25}$$

Принимая во внимание [6], что

$$\int_0^c \frac{J_0(\lambda\xi)\,\xi d\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}} = c\int_0^{\pi/2} J_0(\lambda c \sin t) \sin t\, dt = \frac{c\Gamma(^1/_2)}{2(\lambda c)^{^1/_2}} J_{^1/_2}(\lambda c)$$

и замечая, что

$$\Gamma(^1/_2) = \sqrt{\pi}, \quad J_{^1/_2}(\lambda c) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda c}} \sin \lambda c,$$

приводим выражение для V_z к виду:

$$V_z = cv_0 \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) \sin \lambda c\, d\lambda. \tag{3.26}$$

Определяя распределение скорости на оси потока ($r = 0$)

$$V_{0z} = cv_0 \int_0^\infty e^{-\lambda z} \sin \lambda c\, d\lambda = \frac{v_0 c^2}{c^2+z^2}, \tag{3.27}$$

видим, что оно в точности совпадает с (3.23).

Наконец, согласно (3.24), (3.8), (3.10), для радиальной составляющей скорости и функции тока получим следующие формулы:

$$V_r = cv_0 \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) \sin \lambda c\, d\lambda, \tag{3.28}$$

$$\psi = c\, v_0 r \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) \sin \lambda c \frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{3.29}$$

Интегралы, входящие в формулы (3.26), (3.28) и (3.29), в конечном виде не берутся.

Принимая во внимание [11], что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_m(\lambda r) \lambda^n d\lambda = \frac{\Pi(n-m) P_n^m(\mu)}{R^{n+1}},$$

где

$$\Pi(n-m) = (n-m)!\,, \quad R = \sqrt{r^2+z^2}\,, \quad \mu = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\,,$$

разлагая в подинтегральных выражениях вышеуказанных формул $\sin\lambda c$ в степенный ряд:

$$\sin\lambda c = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda c)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

и проинтегрируя почленно, получим следующие формулы для составляющих скоростей и функции тока:

$$\frac{V_z}{v_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k P_{2k+1}(\mu)}{\left(\frac{R}{c}\right)^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{P_{2k+1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)}{\left(\frac{z^2+r^2}{c^2}\right)^{k+1}}, \tag{3.30}$$

$$\frac{V_r}{v_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k P^1_{2k+1}(\mu)}{(2k+1)\left(\frac{R}{c}\right)^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)\, P^1_{2k+1}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)}{(2k+1)\left(\frac{z^2+r^2}{c}\right)^{k+1}}, \tag{3.31}$$

$$\frac{\psi}{v_0} = \frac{cr}{2}\left[\frac{2c}{\sqrt{z^2+r^2}}\left(\frac{\sqrt{z^2+r^2}-z}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k P^1_{2k}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right)}{k(2k+1)\left(\frac{z^2+r^2}{c^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}\right)\right]. \tag{3.32}$$

В вышеприведенных формулах (3.30)—(3.32) P_n и P^1_n, соответственно, полиномы и присоединенные функции Лежандра первого рода, значения которых можно найти во многих математических таблицах (например, [12]).

Ряды в этих формулах при больших r и z быстро сходятся.

Для малых значений r и z эти формулы непригодны. Для получения формул, пригодных при малых значениях r и z, заменим в подинтегральных функциях (3.26), (3.28) и (3.29) $J_0(\lambda r)$ и $J_1(\lambda r)$ их выражениями в виде рядов:

$$J_0(\lambda r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda r)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \quad J_1(\lambda r) = \frac{\lambda r}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda r)^{2k}}{2^{2k}\, k!\,(k+1)!}$$

и проинтегрируем почленно, предварительно замечая [6], что

$$\int_0^{\infty} e^{-px} x^{m-1} \sin qx \, dx = \frac{\Gamma(m)}{\sqrt{(p^2+q^2)^m}} \sin\left(m \operatorname{arctg} \frac{q}{p}\right).$$

В результате получим следующие формулы для составляющих скорости и функции тока:

$$\frac{V_z}{v_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \left(\frac{r}{c}\right)^{2k} \frac{\sin\left[(2k+1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{c}{z}\right]}{\left(\frac{z^2+c^2}{c^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}, \tag{3.33}$$

$$\frac{V_r}{v_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)!}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} \left(\frac{r}{c}\right)^{2k+1} \frac{\sin\left[(2k+2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{c}{z}\right]}{\left(\frac{z^2+c^2}{c^2}\right)^{k+1}}, \tag{3.34}$$

$$\frac{\psi}{v_0 c^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k+1} k!\,(k+1)!} \left(\frac{r}{c}\right)^{2k+2} \frac{\sin\left[(2k+1)\,\mathrm{arctg}\,\frac{c}{z}\right]}{\left(\frac{z^2+c^2}{c^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}. \tag{3.35}$$

Эти формулы можно эффективно использовать при $\frac{r}{c} < 1$.

Аналогично плоскому случаю, формулы (3.26)—(3.35) служат для построения очертаний каналов с одной асимптотой.

Для получения очертаний каналов с двумя асимптотами необходимо на поток, определяемый вышеуказанными формулами, наложить однородный поток. Поступая таким образом, получим общие формулы для определения составляющих скорости (V_z, V_r) и функции тока ψ в случае каналов с двумя асимптотами

$$V_z = A\,V_z^{(1)} + B, \tag{3.36}$$

$$V_r = A\,V_r^{(1)}, \tag{3.37}$$

$$\psi = A\,\psi^{(1)} + \frac{Br^2}{2}, \tag{3.38}$$

где $V_z^{(1)}$, $V_r^{(1)}$, $\psi^{(1)}$ определяются по формулам (3.30)—(3.32) или (3.33)—(3.35). Параметры A и B определяются по заданному отношению осевых скоростей выходного и входного сечений.

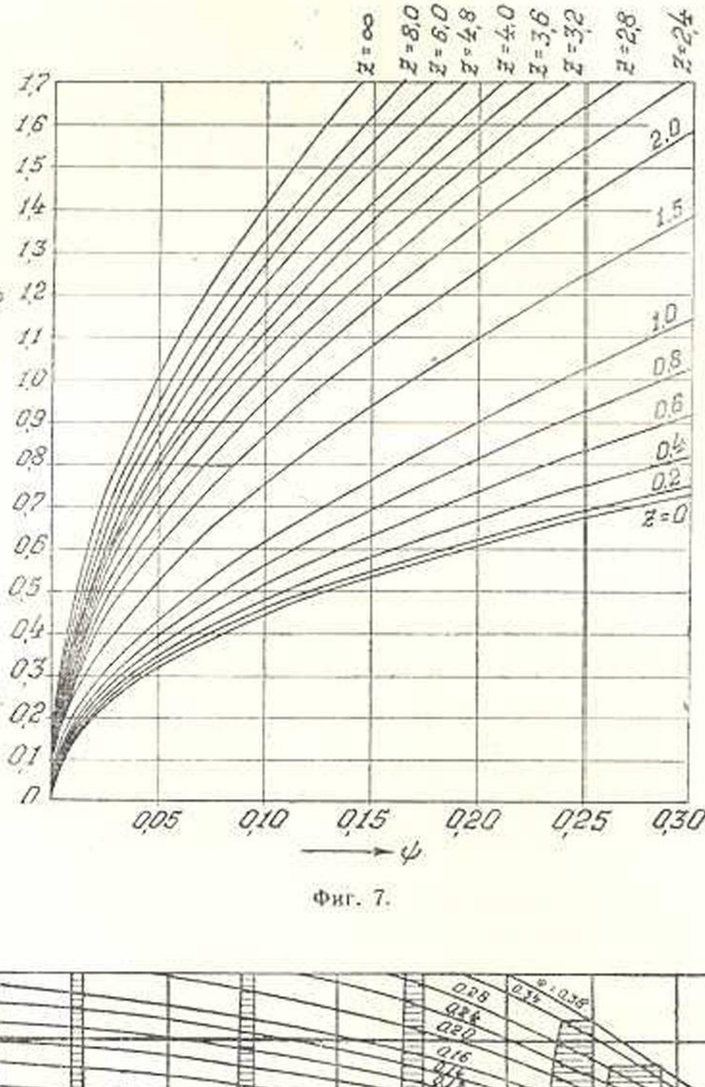
В табл. 4 приведены значения функции тока для различных r и z, рассчитанных по формулам (3.32) и (3.35). Таблица облегчает труд проектировщика такого рода каналов и будет полезна для лиц, конструирующих диффузоры и конфузоры.

При помощи этой таблицы, пользуясь формулой (3.38), легко рассчитать значения функции тока и построить очертания каналов с двумя асимптотами.

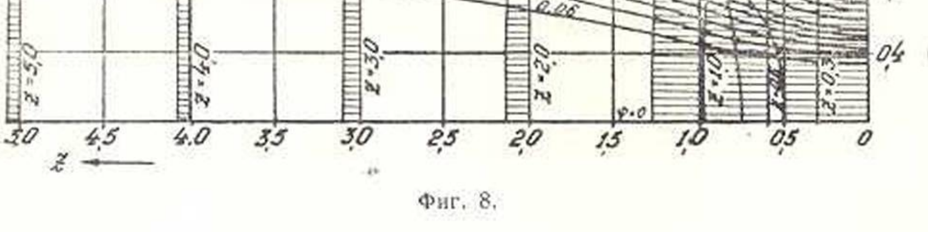
На фиг. 7 показана зависимость функции тока ψ от r для различных z в частном случае, когда $A = 0{,}9$, $B = 0{,}1$. По данным этого графика на фиг. 8 проведены очертания каналов. На этой же фигуре изображены эпюры скоростей в поперечных сечениях каналов.

Как видно, неоднородность скоростей во входном сечении быстро сглаживается (как и в случае плоского движения).

Можно построить и другие теоретические очертания каналов, исходя из данной эпюры скоростей в их входных сечениях.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Таблица 4

Значения функции тока ψ в зависимости от r и z

r \ z	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,005	0,0046	0,004	0,0037	0,003	0,002	0,001
0,2	0,020	0,019	0,017	0,015	0,012	0,010	0,006
0,3	0,046	0,043	0,038	0,033	0,028	0,022	0,014
0,4	0,083	0,077	0,058	0,059	0,049	0,040	0,025
0,5	0,133	0,126	0,108	0,092	0,076	0,062	0,038
0,6	0,199	0,186	0,158	0,132	0,109	0,086	0,056
0,7	0,282	0,262	0,217	0,176	0,142	0,114	0,070
0,8	0,387	0,356	0,282	0,231	0,180	0,145	0,090
0,9	0,520	0,471	0,356	0,276	0,221	0,179	0,111
1,0	1,0	0,654	0,433	0,330	0,265	0,210	0,131
1,1	1,0	0,716	0,505	0,377	0,305	0,244	0,154
1,2	1,0	0,739	0,560	0,435	0,345	0,283	0,181
1,3	1,0	0,76	0,610	0,475	0,385	0,316	0,206
1,4	1,0	0,805	0,651	0,515	0,419	0,352	0,230
1,5	1,0	0,835	0,679	0,560	0,456	0,382	0,255
1,6	1,0	0,843	0,704	0,586	0,490	0,415	0,277
1,7	1,0	0,867	0,725	0,613	0,519	0,431	0,302

Продолжение таблицы 4

r \ z	2	2,4	2,8	3,2
0	0	0	0	0
0,1	0,001	0,001	0,0006	0,0004
0,2	0,004	0,003	0,0023	0,0018
0,3	0,009	0,0038	0,0051	0,004
0,4	0,016	0,012	0,009	0,007
0,5	0,025	0,019	0,014	0,011
0,6	0,036	0,027	0,020	0,016
0,7	0,046	0,035	0,027	0,021
0,8	0,060	0,045	0,035	0,027
0,9	0,074	0,056	0,044	0,034
1,0	0,087	0,068	0,053	0,042
1,1	0,106	0,081	0,063	0,051
1,2	0,124	0,094	0,073	0,060
1,3	0,139	0,108	0,086	0,068
1,4	0,158	0,122	0,097	0,080
1,5	0,178	0,136	0,110	0,089
1,6	0,195	0,150	0,123	0,099
1,7	0,214	0,168	0,136	0,109

Продолжение таблицы 4

r \ z	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	8,0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,0004	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
0,2	0,0014	0,0012	0,0010	0,0003	0,0007	0,0006	0,0005	0,0003
0,3	0,0032	0,0027	0,0022	0,0019	0,0016	0,0014	0,0012	0,0007
0,4	0,006	0,005	0,0039	0,0033	0,0029	0,0025	0,0021	0,0012
0,5	0,009	0,007	0,0051	0,0058	0,0045	0,0039	0,0033	0,0019
0,6	0,013	0,011	0,0087	0,0075	0,0064	0,0056	0,0048	0,0028
0,7	0,017	0,014	0,012	0,0101	0,0087	0,0076	0,0065	0,0038
0,8	0,022	0,019	0,0154	0,0130	0,0113	0,0098	0,0084	0,0049
0,9	0,028	0,024	0,0193	0,0164	0,0142	0,0123	0,0106	0,0062
1,0	0,035	0,025	0,023	0,020	0,0160	0,014	0,013	0,0075
1,1	0,042	0,033	0,027	0,023	0,020	0,019	0,016	0,0093
1,2	0,049	0,038	0,035	0,027	0,025	0,022	0,019	0,0111
1,3	0,056	0,046	0,039	0,031	0,029	0,025	0,022	0,0123
1,4	0,063	0,0[illegible]3	0,044	0,038	0,034	0,029	0,025	0,0154
1,5	0,072	0,0[illegible]0	0,050	0,043	0,037	0,033	0,030	0,0172
1,6	0,082	0,067	0,057	0,049	0,043	0,037	0,033	0,0197
1,7	0,090	0,075	0,063	0,055	6,046	0,041	0,038	0,0219

Заключение

В статье дается способ профилирования плоских и осесимметричных каналов по заданному распределению продольных скоростей во входном сечении.

Для канала с одной асимптотой (например, диффузор, работающий на выхлоп) решение приводит к интегралам Фурье и Фурье — Бесселя.

В случае канала с двумя асимптотами (диффузор, как переходной патрубок от трубы одного диаметра к трубе другого диаметра) на интегралы Фурье или Фурье — Бесселя накладываются функции однородного потока.

Предлагаемый способ позволяет рассчитать скорости (следовательно, и давления) в любой точке и находить очертания часто встречающихся на практике каналов (диффузоры и конфузоры промышленных установок, гидротехнических сооружений и т. д.) при разных входных условиях.

Расчет каналов по предлагаемому способу не представляет трудности с вычислительной стороны, так как ряды, входящие в расчетные формулы, быстро сходятся, а специальные функции табулированы.

Предлагаемый способ дает возможность решать более общую задачу об определении поля скоростей и давлений в диффузоре (или конфузоре) наперед заданной формы и при заданной эпюре скоростей на входе.

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 8 II 1956

Վ. Գ. Սանոյան

ԴԻՖՈՒԶՈՐՆԵՐԻ ՊՐՈՖԻԼԱՑՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ՝ ԸՍՏ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԷՊՅՈՒՐԱՅԻ ՄՈՒՏՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Արդյունաբերության զարգացման կապակցությամբ առանձնահատուկ նշանակություն է ստանում արդյունաբերական և հիդրոուժային տեղակայանքների համար այնպիսի կարևոր էլեմենտների ճիշտ պրոֆիլացումը, ինչպիսիք, անտարակույս, հանդիսանում են դիֆուզորային կանալները։

Հոդվածում տրվում է դիֆուզորների պրոֆիլացման եղանակ, ելնելով նրանց մուտքում եղած արագությունների բաշխումից։ Խնդիրը լուծվում է երկու դեպքի համար՝ հարթ և առանցքասիմետրիկ շարժումների համար։ Հարթ շարժման դեպքում լուծումը բերվում է Ֆուրյեի ինտեգրալին, ընդ որում արագությունների պոտենցիալը, արագության բաղադրիչները և հոսքի ֆունկցիան արտահայտվում են համապատասխանաբար (2.5′), (2.6), (2.7) և (2.11) բանաձևերով։ Առանցքասիմետրիկ շարժման դեպքում լուծումը բերվում է Ֆուրյե — Բեսսելի ինտեգրալին, իսկ արագությունների պոտենցիալը, արագությունների բաղադրիչները և հոսքի ֆունկցիան ներկայացվում են համապատասխանաբար (3.5), (3.7), (3.8) և (3.10) արտահայտություններով։

Հարթ խնդրի դեպքում որպես օրինակներ դիտվում են հետևյալ դեպքերը. 1. Երբ արագությունների բաշխումը մուտքում արտահայտվում է (2.30) բանաձևով. այս դեպքի համար նկ. 5ª-ում ցույց են տրված կանալների պրոֆիլները և արագությունների փոփոխությունները լայնական կտրվածքներում։ 2. Երբ մուտքում ունենք արագությունների համասեռ բաշխում, այդ դեպքում արագությունների բաղադրիչների և հոսքի ֆունկցիայի համար ստացվում են (2.39), (2.40) և (2.4) բանաձևերը։ 3. Երբ արագությունների բաշխումը մուտքում տրված է (2.42) արտահայտությամբ, այդ դեպքում արագությունների բաղադրիչները և հոսքի ֆունկցիան արտահայտվում են համապատասխանաբար (2.39), (2.40) և (2.41) բանաձևերով։ Նկ. 6-ում ցույց են տրված այս դեպքում ստացված կանալների պրոֆիլները և արագությունների փոփոխությունները լայնական կտրվածքներում։

Առանցքասիմետրիկ շարժման համար որպես օրինակ քննարկվում է այն դեպքը, երբ արագությունների բաշխումը մուտքում տրված է (3.24) արտահայտությամբ։ Այս դեպքում արագությունների բաղադրիչների և հոսքի ֆունկցիայի համար ստացվում են համապատասխանորեն (3.26), (3.28) և (3.29) բանաձևերը կամ շարքերի ձևով՝ (3.30)—(3.32) և (3.33)—(3.35) արտահայտությունները։ Նկ. 7-ում ցույց են տրված կանալների տեսական պրոֆիլները և արագությունների բաշխումը լայնական կտրվածքներում։ Դիֆուզորներ նախագծողների աշխատանքը հեշտացնելու նպատակով աղյուսակ 4-ում տրված են հոսքի ֆունկցիայի արժեքները՝ կախված կոորդինատներից։

Այսպիսով, հոդվածում տրված եղանակով կարելի է կառուցել դիֆուզորների տեսական պրոֆիլները, երբ նրանց մուտքում տրված է արագությունների կամայական բաշխում։ Հաշիվները թվաբանական տեսակետից կապված չեն դժվարությունների հետ, քանի որ ստացվող շարքերն արագ զուգամիտող են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губин Ф. Ф.* Гидроэлектрические станции. Гос. эн. изд., 1949.
2. *Саноян В. Г.* Построение очертания плоских и осесимметричных конфузоров и диффузоров напорной системы по заданному распределению скорости на оси. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VIII, № 6, 1955.
3. *Повх И. Л.* Моделирование гидравлических турбин в воздушных потоках. Гос. эн. изд., 1955.
4. *Саноян В. Г.* Представление некоторых плоских и осесимметричных течений через интегралы Фурье и Фурье—Бесселя. ДАН Армянской ССР, т. XXII, № 4, 1956.
5. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. ГИТТЛ, 1948.
6. *Рыжик И. М.* и *Грандштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИТТЛ, 1951.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. ГИТТЛ, 1950.
8. *Саноян В. Г.* Движение жидкости в осесимметричном канале заданного профиля и расчет действительных давлений. Труды ЛПИ, № 176, 1955.
9. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949.
10. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. ГИТТЛ, 1948.
11. *Грей Э.* и *Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, 1953.
12. *Янке* Е. и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. ГТТИ, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. С. Саркисян

Изгиб призматического стержня двутаврового поперечного сечения

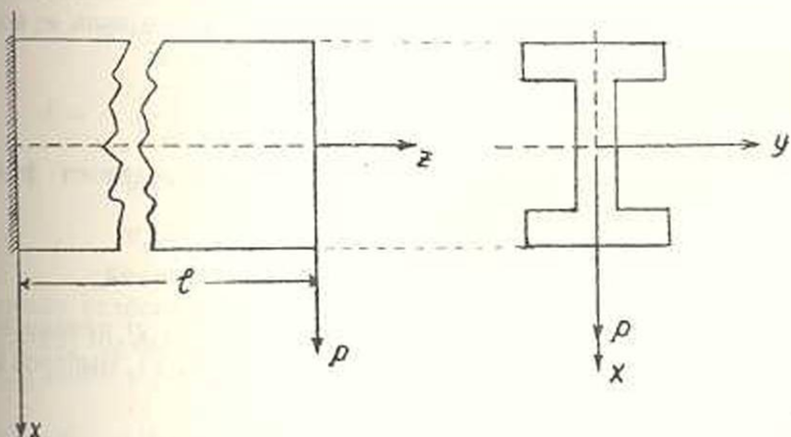
В работе приводится точное решение задачи Сен-Венана об изгибе призматического стержня двутаврового поперечного сечения.

При решении задачи использован метод введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1], с помощью которого решение дифференциального уравнения с частными производными задачи сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а постоянные интегрирования определяются из решения вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют напряжения в зависимости от геометрических параметров сечения. В конце работы приводится значение касательных напряжений для конкретного отношения геометрических параметров, и результаты сравниваются с результатами, полученными из формулы Журавского, для касательных напряжений, известных из курса сопротивления материалов.

§ 1. Постановка задачи

В работе рассматривается изгиб заделанного одним концом призматического стержня под действием силы P, приложенной к свободному концу стержня вдоль вертикальной оси симметрии поперечного сечения (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предполагается, что из шести составляющих напряжений отличны от нуля только Z_z, X_z и Y_z, причем напряжение Z_z принимается равным

$$Z_z = -\frac{P(l-z)x}{I}, \tag{1.1}$$

где l — длина призматического стержня, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси y. При таких предположениях, как известно, функция напряжения $F(x, y)$ удовлетворяет в области поперечного сечения дифференциальному уравнению:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}y - \frac{P}{2I}f'(y), \tag{1.2}$$

и условию на контуре сечения

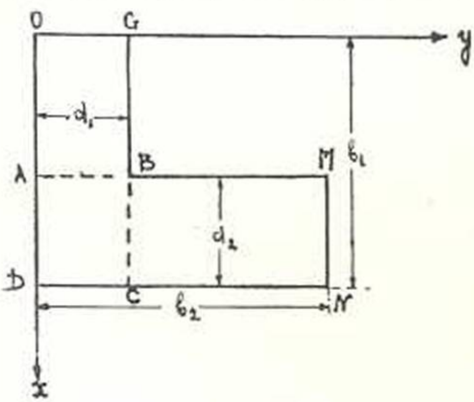
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I}[x^2 - f(y)]\frac{dy}{ds}, \tag{1.3}$$

где ν — коэффициент Пуассона, $f(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению из условий на контуре, ds — элемент дуги контура.

Напряжения $X_z(x, y)$ и $Y_z(x, y)$ определяются соотношениями:

$$X_z(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I}[x^2 - f(y)], \quad Y_z(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Ввиду симметричности области поперечного сечения, достаточно найти функцию $F(x, y)$ только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).



Фиг. 2.

Для распространения решения на всю область поперечного сечения на основании мембранной аналогии [4] требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция напряжений обратилась в нуль:

$$F(x, 0) = 0, \tag{1.5}$$

а вдоль горизонтальной оси симметрии обратилась в нуль ее нормальная производная:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6) полностью определяют функцию напряжений $F(x, y)$ для рассматриваемой задачи.

§ 2. Введение вспомогательных функций

Полагаем, что в области ODCG функция $F(x, y)$ принимает значение $F_1(x, y)$, а в области ABMND значение $F_2(x, y)$. Выберем здесь:

$$f(y) = b_1^2; \tag{2.1}$$

тогда из уравнений (1.3), (1.5) и (1.6) для функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ получим следующие граничные условия:

$$F_1(x,\ 0)=\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=0}=F_1(b_1,\ y)=0,$$

$$F_1(x,\ d_1)=\begin{cases}-\dfrac{P}{2l}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2), & (0\leqslant x\leqslant b_1-d_2)\\ F_2(x,\ d_1) & (b_1-d_2\leqslant x\leqslant b_1)\end{cases} \tag{2.2}$$

и

$$F_2(x,\ 0)=F_2(b_1,\ y)=F_2(x,\ b_2)=0,$$

$$F_2[(b_1-d_2),\ y]=\begin{cases}-\dfrac{P}{2l}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2), & (d_1\leqslant y\leqslant b_2)\\ F_1[(b_1-d_2),\ y] & (0\leqslant y\leqslant d_1).\end{cases} \tag{2.3}$$

Ищем решения в виде:

$$F_i(x,\ y)=\Psi_i(x,\ y)+\Phi_i(x,\ y),\ (i=1,2), \tag{2.4}$$

где вспомогательные функции $\Phi_i(x,\ y)$ $(i=1,2)$ существуют только в области ABCD и удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \tag{2.5}$$

и дополнительным условиям

$$\Phi_1[(b_1-d_2),\ y]=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)_{x=b_1-d_2}=0,$$

$$\Phi_2(x,\ d_1)=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)_{y=d_1}=0, \tag{2.6}$$

а функции $\Psi_i(x,\ y)$ $(i=1,2)$ существуют: $\Psi_1(x,\ y)$ — в области ODCG, $\Psi_2(x,\ y)$ — в области AMND и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2\Psi=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{P}{l}\frac{\nu}{1+\nu}y. \tag{2.7}$$

Согласно (2.2) и (2.3), функции $\Psi_1(x,\ y)$ и $\Psi_2(x,\ y)$ подчинены следующим условиям:

$$\Psi_1(x,\ 0)=\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)_{x=0}=\Psi_1(b_1,\ y)+\Phi_1(b_1,\ y)=0,$$

$$\Psi_1(x,\ d_1)=-\frac{P}{2l}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2). \tag{2.8}$$

$$\Psi_2(x,\ 0)=\Psi_2(x,\ b_2)=\Psi_2(x,\ 0)+\Phi_2(x,\ 0)=0,$$

$$\Psi_2[(b_1-d_2),\ y]=-\frac{P}{2l}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2). \tag{2.9}$$

Граничные условия для определения функций $\Psi_1(x,\ y)$ и $\Psi_2(x,\ y)$ неоднородны; однако, следуя Г. А. Гринбергу [5], функции $\Psi_i(x,\ y)$, $(i=1,2)$ ищем в виде рядов:

$$\Psi_1(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\sin\frac{k\pi y}{d_1}, \tag{2.10}$$

$$\Psi_2(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x). \tag{2.11}$$

Тогда для функции $\Phi_i(x,\ y)$ $(i=1,\ 2)$ получим условия:

$$\Phi_1(x,\ 0)=\Phi_1[(b_1-d_2),\ y]=\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)_{x=b_1-d_2}=0, \tag{2.12}$$

$$\Phi_1(x,\ d_1)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_1)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x)+\frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)$$

$$\Phi_2(b_1,\ y)=\Phi_2(x,\ d_2)=\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)_{y=d_2}=0, \tag{2.13}$$

$$\Phi[(b_1-d_2),\ y]=\sum_{k=1}^{\infty} f_k[(b_1-d_2)]\sin\frac{k\pi y}{d_1}+\frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2).$$

Здесь также полагаем, что

$$\Phi_1(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\sin\frac{k\pi y}{d_1}, \tag{2.14}$$

$$\Phi_2(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k(y)\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x). \tag{2.15}$$

§ 3. Решение уравнений задачи

Из (2.10) имеем:

$$f_k(x)=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\Psi_1(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{d_1}y\,dy. \tag{3.1}$$

Умножив уравнение (2.7) на $\frac{2}{d_1}\sin\frac{k\pi y}{d_1}$ и интегрируя его по y от нуля до d_1, для функции $\Psi_1(x,\ y)$ получим:

$$\int_0^{d_1}\left(\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2}-\frac{P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}y\right)\frac{2}{d_1}\sin\frac{k\pi y}{d_1}\,dy=f_k''(x)+$$

$$+\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial y^2}\sin\frac{k\pi y}{d_1}\,dy-\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{1}{d_1}\int_0^{d_1}y\sin\frac{k\pi y}{d_1}\,dy=0. \tag{3.2}$$

Выполняя интегрирование и используя условия (2.8) и значения (3.1), получим:

$$f_k''(x)-\left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 f_k(x)=$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{P}{I}\frac{k\pi}{d_1^2}\left\{[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)+2\left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2\frac{\nu}{1+\nu}d_1\right\}. \tag{3.3}$$

Аналогичным образом используя (2.5) — (2.15), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$v_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 v_k(y) =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{k\pi}{d_2^2}\frac{P}{I}\left\{[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2) + 2\left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^2\frac{\nu}{1+\nu}y\right\} +$$

$$+ \frac{2}{k\pi}\frac{P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}y\,, \tag{3.4}$$

$$\varphi_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 \varphi_k(x) =$$

$$= (-1)^k\frac{2k\pi}{d_1^2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_1)\sin\frac{p\pi}{d_2}(b_1-x) + \frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\right\}, \tag{3.5}$$

$$w_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 w_k(y) =$$

$$= (-1)^k\frac{2k\pi}{d_2^2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty} f_p[(b_1-d_2)]\sin\frac{p\pi}{d_1}y + \frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2)\right\}. \tag{3.6}$$

Общие решения уравнений (3.3) — (3.6) имеют вид:

$$f_k(x) = A_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi x}{d_1} + B_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi x}{d_1} +$$

$$+ (-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}\left\{[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2) + 2\left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^2\frac{\nu}{1+\nu}d_1\right\}, \tag{3.7}$$

$$v_k(y) = C_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi y}{d_2} + D_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi y}{d_2} +$$

$$+ (-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}\left\{[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2) + 2\left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^2\frac{\nu}{1+\nu}y\right\} -$$

$$- \frac{2d_2^2}{k^3\pi^3}\frac{P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}y\,, \tag{3.8}$$

$$\varphi_k(x) = M_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi x}{d_1} + N_k\,\mathrm{ch}\frac{k\pi x}{d_1} +$$

$$+ (-1)^{k+1}\frac{2kd_2^2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{v_p(d_1)}{(kd_2)^2+(pd_1)^2}\sin\frac{p\pi}{d_2}(b_1-x) +$$

$$+ (-1)^{k+1}\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\,, \tag{3.9}$$

$$w_k(y) = L_k\,\mathrm{sh}\frac{k\pi y}{d_2} +$$

$$+ F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + (-1)^{k+1} \frac{2kd_1^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2-(kd_2)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2). \tag{3.10}$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, D_k, M_k, N_k, L_k и F_k согласно (2.8), (2.9), (2.12) и (2.13) получим следующие условия:

$$f_k'(0) = f_k(b_1) + \varphi_k(b_1) = 0 \tag{3.11}$$

$$v_k(b_2) = v_k(0) + w_k(0) = 0 \tag{3.12}$$

$$\varphi_k'[(b_1-d_2)] = \varphi_k[(b_1-d_2)] = 0 \tag{3.13}$$

$$w_k'(d_1) = w_k(d_1) = 0 \tag{3.14}$$

§ 4. Определение постоянных интегрирования

Исключая из значений (3.9), (3.10) неизвестные коэффициенты, посредством условий (3.13) и (3.14), получим:

$$\varphi_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{2kd_2^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1)}{(kd_2)^2+(pd_1)^2} \sin \frac{p\pi}{d_2}(b_1-x) +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2d_1d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p v_p(d_1)}{(kd_2)^2+(pd_1)^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} [b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\left[1-\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2)\right], \tag{4.1}$$

$$w_k(y) = (-1)^{k+1} \frac{2kd_1^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p[(b_2-d_2)]}{(pd_2)^2+(kd_1)^2} \sin \frac{p\pi y}{d_1} +$$

$$+ (-1)^k \frac{2d_1d_2}{\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2}(y-d_1) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p p f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2+(kd_1)^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{l} \left[b_1^2-(b_1-d_2)^2\right] \left[(y-b_2)-(d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_2}(y-d_1)\right] +$$

$$+ (-1)^k \frac{d_2}{(k\pi)^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2}(y-d_1) \frac{P}{l} \left[b_1^2-(b_1-d_2)^2\right]. \tag{4.2}$$

Удовлетворяя условиям (3.11) и (3.12) из (3.7), (3.8), (4.1) и (4.2), получим:

$$A_k = 0 \tag{4.3}$$

$$B_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b_1}{d_1} + (-1)^{k+1}\frac{2d_1d_2}{\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p p v_p(d_1)}{(kd_2)^2+(pd_1)^2} +$$

$$+(-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi d_2}{d_1} +$$

$$+(-1)^k\left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^3\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu} = 0 \qquad (4.4)$$

$$C_k \operatorname{sh}\frac{k\pi b_2}{d_2} + D_k \operatorname{ch}\frac{k\pi b_2}{d_2} + (-1)^k\left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^3\frac{b_2}{d_2}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu} -$$

$$-\left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^3\frac{b_2}{d_2}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu} = 0. \qquad (4.5)$$

$$D_k + (-1)^{k+1}\frac{2d_1d_2}{\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p p f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2+(kd_1)^2} +$$

$$+(-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi d_1}{d_2} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{d_2}{(k\pi)^2}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2]\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2} = 0. \qquad (4.6)$$

Исключив из этих соотношений коэффициент C_k, мы получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$B_k = (-1)^k\frac{2d_1d_2}{\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\operatorname{sch}\frac{k\pi b_1}{d_1}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p p v_p(d_1)}{(kd_2)^2+(pd_1)^2} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi d_2}{d_1}\operatorname{sch}\frac{k\pi b_2}{d_1} +$$

$$+(-1)^{k+1}\left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^3\operatorname{sch}\frac{k\pi b_2}{d_1}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}, \qquad (4.7)$$

$$D_k = (-1)^k\frac{2d_1d_2}{\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p p f_p[(b_1-d_2)]}{(pd_2)^2+(kd_1)^2} +$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi d_1}{d_2} +$$

$$+(-1)^k\frac{d_2}{(k\pi)^2}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2]\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2}, \qquad (4.8)$$

где $f_k[(b_1-d_2)]$ и $v_k(d_1)$ имеют значения:

$$f_k[(b_1-d_2)] = B_k \operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_1}(b_1-d_2) + (-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2) +$$

$$+(-1)^k\left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^3\frac{2P}{l}\frac{\nu}{1+\nu}, \tag{4.9}$$

$$v_k(d_1)=D_k\operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_2}(b_2-d_1)\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}+(-1)^k\frac{1}{k\pi}\frac{P}{l}\,[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)+$$

$$+(-1)^{k+1}\left(\frac{d_2}{k\pi}\right)^3\frac{2P}{l}\left[\frac{b_2}{d_2}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2}\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}-\frac{d_1}{d_2}\right]\left[1+(-1)^{k+1}\right]. \tag{4.10}$$

Введем обозначения:

$$B_k=(-1)^k\frac{2}{k\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\operatorname{sch}\frac{k\pi b_1}{d_1}S_k, \tag{4.11}$$

$$D_k=(-1)^k\frac{2}{k\pi}\operatorname{sh}\frac{k\pi d_1}{d_2}R_k. \tag{4.12}$$

Тогда, принимая во внимание (4.9) и (4.10), совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (4.7) и (4.8) приведем к виду:

$$S_k=\sum_{p=1}^{\infty}R_p a_{kp}+\gamma_k \tag{4.13}$$

$$R_k=\sum_{p=1}^{\infty}S_p c_{kp}+\beta_k, \tag{4.14}$$

где введены обозначения:

$$a_{kp}=\frac{2k}{\pi}\frac{d_1d_2}{(kd_2)^2+(pd_1)^2}\operatorname{sh}\frac{p\pi}{d_2}(b_2-d_1)\operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\operatorname{csh}\frac{p\pi b_2}{d_2}, \tag{4.15}$$

$$c_{kp}=\frac{2k}{\pi}\frac{d_1d_2}{(pd_2)^2+(kd_2)^2}\operatorname{ch}\frac{p\pi}{d_1}(b_1-d_2)\operatorname{sh}\frac{p\pi d_2}{d_1}\operatorname{sch}\frac{p\pi b_1}{d_1}, \tag{4.16}$$

$$\gamma_k=\frac{4P}{l}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{k}{\pi^3}\frac{d_2^3b_2}{d_1}\sum_{p=1,3}^{\infty}\frac{1}{p^2[(kd_2)^2+(pd_1)^2]}\left[\frac{d_1}{b_2}-\operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}\right]-$$

$$-\frac{P}{2l}\frac{d_1}{k\pi d_2}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)-\frac{P}{l}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{d_1^3}{(k\pi)^2}\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}, \tag{4.17}$$

$$\beta_k=\frac{2P}{l}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{k}{\pi^3}\frac{d_1^4}{d_2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2[(pd_2)^2+(kd_1)^2]}+\frac{P}{2l}[b_1^2-(b_1-d_2)^2]\frac{b_2d_2}{k\pi d_1} \tag{4.18}$$

(4.13) и (4.14) могут быть написаны в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_\nu + B_\nu, \ (\nu = 1, 2, 3 \ldots). \tag{4.19}$$

Для этого нужно положить

$$S_k = Z_{2n-1}, \ R_k = Z_{2n},$$

$$A_{2n-1,\,2m-1} = 0, \ A_{2n-1,\,2m} = a_{kp}, \ B_{2n-1} = \gamma_k, \tag{4.20}$$

$$A_{2n,\,2m} = 0, \ A_{2n,\,2m-1} = c_{kp}, \ B_{2n} = \beta_k.$$

Заметим еще, что для всякого p имеют место неравенства:

$$\operatorname{sh}\frac{p\pi}{d_2}(b_2 - d_1)\operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\operatorname{csh}\frac{p\pi b_2}{d_2} = \operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\left[\operatorname{ch}\frac{p\pi d_1}{d_2} - \operatorname{cth}\frac{p\pi b_2}{d_2}\operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{sh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\operatorname{ch}\frac{p\pi d_1}{d_2} - \operatorname{sh}^2\frac{p\pi d_1}{d_2} = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sh}\frac{2p\pi d_1}{d_2} - \operatorname{ch}\frac{2p\pi d_1}{d_2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \exp\left(-\frac{2p\pi d_1}{d_2}\right)\right] \leqslant \frac{1}{2}, \tag{4.21}$$

$$\operatorname{ch}\frac{p\pi}{d_1}(b_1 - d_2)\operatorname{sh}\frac{p\pi d_2}{d_1}\operatorname{sch}\frac{p\pi b_1}{d_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \exp\left[-\frac{2p\pi}{d_1}(b_1 - d_2)\right]\right) \leqslant \frac{\gamma}{2} \tag{4.22}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \exp\left[-\frac{2\pi d_2}{d_1}(\mu - 1)\right]\right), \tag{4.23}$$

где μ — в случае двутаврового сечения — конечное число и удовлетворяет условию $b_1/d_2 = \mu > 1$.

Для случая $\nu = 2n - 1$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| \leqslant \frac{k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{d_1 d_2}{(kd_2)^2 + (pd_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{cth}\frac{k\pi d_2}{d_1} - \frac{d_1}{k\pi d_2}\right] \leqslant \frac{1}{2}; \tag{4.24}$$

для случая $\nu = 2n$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| \leqslant \frac{\gamma k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{d_1 d_2}{(pd_2)^2 + (kd_1)^2} =$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left[\operatorname{cth}\frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_1}\right] \leqslant \frac{\gamma}{2}. \tag{4.25}$$

При этом использованы неравенства (4.24), (4.25) и

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leqslant 1 \text{ при } (0 \leqslant x \leqslant \infty). \tag{4.26}$$

Из неравенств (4.24) и (4.25) следует, что, в случае двутаврового сечения, для любых чисел ν сумма коэффициентов $A_{\nu j}$ системы (4.19) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| \leqslant \frac{7}{2} = 1 - \theta, \tag{4.27}$$

т. е. бесконечная система (4.19) оказывается вполне регулярной. Пользуясь теорией вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений [6], неизвестные Z_ν определим с любой точностью.

§ 5. Определение функций напряжений

Подставив значения функций $f_k(x)$, $v_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $w_k(y)$, выраженных через коэффициенты B_k и D_k в (2.4), получим функцию напряжений: Для области ABCD:

$$F_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [f_k(x) + \varphi_k(x)] \sin \frac{k\pi y}{d_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \Big\{ B_k \Big[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1}(x - b_1 + d_2) \Big] +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{d_1^3}{(k\pi)^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \Big[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1}(x - b_1 + d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} - 1 \Big] +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{1}{k\pi} \frac{P}{I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (d_1 - b_2) \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1}(x - b_1) \operatorname{csh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \Big\} +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_1) \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \sin \frac{p\pi}{d_2}(b_1 - x). \tag{5.1}$$

Для области OABG:

$$F_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{P}{2I} [b_1^2 - (b_1 - d_2)^2] (b_2 - d_1) \frac{y}{d_1} +$$

$$+ \frac{P}{2I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^3}{3} \left(\frac{y^3}{d_1^3} - \frac{y}{d_1} \right). \tag{5.2}$$

Для области ABCD:

$$F_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [v_k(y) + w_k(y)] \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) \left\{ D_k \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_2}(b_2 - d_1) \operatorname{csh}\frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2} + \right.$$

$$\left. + (-1)^k \frac{1}{k\pi} \frac{P}{I} [L_1^2 - (b_1 - d_2)^2](d_1 - b_2) \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh}\frac{k\pi d_1}{d_2} \right\} +$$

$$+ \frac{d_2^2}{\pi^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) \left[y - b_2 \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2} \right] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} f_p[(b_1 - d_2)] \operatorname{sh}\frac{p\pi}{d_1}(b_1 - x) \operatorname{csh}\frac{p\pi d_2}{d_1} \sin\frac{p\pi y}{d_1}. \qquad (5.3)$$

Для области BCNM:

$$F_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_2}(b_2 - y) \operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2} \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) +$$

$$+ \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1 - x) \left[y - b_2 \operatorname{sh}\frac{k\pi y}{d_2} \operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2} \right] \cdot \frac{d_2^2}{\pi^3} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} -$$

$$- \frac{P}{2I} [b_1 - (b_1 - d_2)^2] (y - b_2)(b_1 - x) \frac{1}{d_2}. \qquad (5.4)$$

При этом использованы значения:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 + a^2} \sin kx = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a\pi}, \quad (0 \leqslant x < \pi) \qquad (5.5)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx = \frac{x}{2}, \quad (-\pi < x < \pi) \qquad (5.6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin kx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{12} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \qquad (5.7)$$

В частном случае, когда $d_1=b_2=b$, $b_1=d_2=a$, из (5.1) и (5.2) получим:

$$F(x,\ y)=\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\frac{b^3}{\pi^3}\left[\frac{\pi^3}{12}\left(\frac{y^3}{b^3}-\frac{y}{b}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}\operatorname{sch}\frac{k\pi a}{b}\operatorname{ch}\frac{k\pi x}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}\right]. \tag{5.8}$$

Выражение (5.8) есть функция напряжений при изгибе призматического стержня прямоугольного поперечного сечения, которая приводится в курсах теории упругости [7].

§ 6. Определение напряжений X_z и Y_z

Согласно (1.4) и (2.1) компоненты касательного напряжения определяются соотношениями:

$$X_z=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{P}{2I}(x^2-b_1^2),\ \ Y_z=\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{6.1}$$

Пользуясь выражениями (5.1)—(5.4) функции напряжений, для X_z и Y_z получим следующие значения.

Для области OABG:

$$X_z=-\frac{P}{2J}(x^2-b_1^2)+\frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](b_2-d_1)\frac{1}{d_1}+\frac{P}{2I}\frac{\nu}{1+\nu}\left(y^2-\frac{d_1^2}{3}\right)+$$

$$+\frac{\pi}{d_1}\sum_{k=1}^{\infty}kB_k\operatorname{ch}\frac{k\pi x}{d_1}\cos\frac{k\pi y}{d_1}, \tag{6.2}$$

$$Y_z=-\frac{\pi}{d_1}\sum_{k=1}^{\infty}kB_k\operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d_1}\sin\frac{k\pi y}{d_1}. \tag{6.3}$$

Для области АВСД:

$$X_z=-\frac{P}{2I}(x^2-b_1^2)+\frac{\pi}{d_1}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi y}{d_1}\left\{kB_k\left[\operatorname{ch}\frac{k\pi x}{d_1}-\right.\right.$$

$$\left.-\operatorname{ch}\frac{k\pi b_1}{d_1}\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2)\right]+$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{d_1^3}{k^2\pi^3}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\left[\operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2)\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}-1\right]+$$

$$\left.+(-1)^{k+1}\frac{1}{\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1)\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{d_2}\sum_{p=1}^{\infty}pv_p(d_1)\operatorname{ch}\frac{p\pi y}{d_2}\operatorname{csh}\frac{p\pi d_1}{d_2}\sin\frac{p\pi}{d_2}(b_1-x). \tag{6.4}$$

$$Y_z = -\frac{\pi}{d_1}\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi y}{d_1}\left\{kB_k\left[\operatorname{sh}\frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{ch}\frac{k\pi b_1}{d_1}\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2)\right]+\right.$$

$$+(-1)^{k+1}\frac{d_1^3}{k^2\pi^3}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1+d_2)\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}+$$

$$\left.+(-1)^{k+1}\frac{1}{\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](d_1-b_2)\operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_1}(x-b_1)\operatorname{csh}\frac{k\pi d_2}{d_1}\right\}+$$

$$+\frac{\pi}{d_2}\sum_{p=1}^{\infty}p\nu_p(d_1)\cos\frac{p\pi}{d_2}(b_1-x)\operatorname{sh}\frac{p\pi y}{d_2}\operatorname{csh}\frac{p\pi d_1}{d_2}. \tag{6.5}$$

Для области BCNM:

$$X_z = -\frac{P}{2I}(x^2-b_1^2) - \frac{\pi}{d_2}\sum_{k=1}^{\infty}kD_k\operatorname{ch}\frac{k\pi}{d_2}(b_2-y)\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{P}{I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](x-b_1)\frac{1}{d_2}+\frac{d_2^2}{\pi^3}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\sum_{k=1,3}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x) -$$

$$-\frac{d_1b_2}{\pi^2}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\sum_{k=1,3}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x)\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{d_2}\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}, \tag{6.6}$$

$$Y_z = \frac{\pi}{d_2}\sum_{k=1}^{\infty}kD_k\operatorname{sh}\frac{k\pi}{d_2}(b_2-y)\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}\cos\frac{k\pi}{d_2}(d_1-x)+$$

$$+\frac{d_2}{\pi_2}\frac{2P}{I}\frac{\nu}{1+\nu}\sum_{k=1,3}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi}{d_2}(b_1-x)\left[y-b_2\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{d_2}\operatorname{csh}\frac{k\pi b_2}{d_2}\right]-$$

$$-\frac{P}{2I}[b_1^2-(b_1-d_2)^2](y-b_2)\frac{1}{d_2}. \tag{6.7}$$

В области ABCD касательные напряжения определяются как формулами (6.4) и (6.5), так и формулой (5.3). Входящие в формулы (6.2)—(6.7) величины B_k, D_k и $\nu_k(d_1)$ определены соотношениями (4.10)—(4.12).

Все эти величины выражаются через коэффициенты S_k и R_k, последние же определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений (4.19). Формулами (6.2)—(6.7) определяются касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

В качестве примера рассмотрим толстостенные двутавровые балки, для которых отношения геометрических параметров сечения имеют следующие значения:

$$d_2/d_1 = 1{,}5, \quad b_1/d_1 = 4{,}5 \text{ и } b_2/d_2 = 6{,}75. \tag{6.8}$$

Такие отношения геометрических параметров имеет двутавровая балка, составленная из четырех равнобоких угольников по ОСТ 16 [8]. Тогда для бесконечной системы уравнений (4.19) получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{\nu j}| \leqslant \frac{\gamma}{2} = 1 - \theta, \text{ где } \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{2\pi d_2}{d_1}(\mu - 1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-6\pi}. \tag{6.9}$$

Вторым слагаемым правой части $\frac{1}{2} e^{-6\pi}$, ввиду малости, можно пренебречь.

Тогда:

$$\gamma = 1, \ \theta = \frac{1}{2}. \tag{6.10}$$

Свободный член B_ν системы (4.19) удовлетворяет неравенству

$$B_\nu \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}3183 \frac{\nu}{1+\nu} + 36{,}2575\right). \tag{6.11}$$

Обозначим значения неизвестных Z_ν с избытком через $\overline{Z}_\nu$, а значения с недостатком через $\widetilde{Z}_\nu$.

Пользуясь теорией вполне регулярных систем [6] и применяя лимитанты, получим для Z_ν следующие оценки:

$$\widetilde{Z}_1 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}2074 \frac{\nu}{1+\nu} + 22{,}7969\right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}2354 \frac{\nu}{1+\nu} + 24{,}9200\right) = \overline{Z}_1,$$

$$\widetilde{Z}_2 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}0838 \frac{\nu}{1+\nu} + 40{,}4223\right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_2 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}0913 \frac{\nu}{1+\nu} + 41{,}1124\right) = \overline{Z}_2,$$

$$\widetilde{Z}_3 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1445 \frac{\nu}{1+\nu} + 13{,}3060\right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_3 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1880 \frac{\nu}{1+\nu} + 18{,}2812\right) = \overline{Z}_3,$$

$$\widetilde{Z}_4 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}0947 \frac{\nu}{1+\nu} + 22{,}9705\right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_4 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1042 \frac{\nu}{1+\nu} + 23{,}8926\right) = \overline{Z}_4,$$

$$\widetilde{Z}_5 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1064 \frac{\nu}{1+\nu} + 9{,}6828\right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_5 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1597 \frac{\nu}{1+\nu} + 15{,}6831 \right) + \bar{Z}_5,$$

$$\bar{Z}_6 = \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}0854 \frac{\nu}{1+\nu} + 16{,}5214 \right) \leqslant$$

$$\leqslant Z_6 \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}0950 \frac{\nu}{1+\nu} + 17{,}4781 \right) + \bar{Z}_6,$$

$$0 \leqslant Z_\nu \leqslant \bar{Z}_\nu \leqslant \frac{P}{2l} d_1^2 d_2 \left(0{,}1663 \frac{\nu}{1+\nu} + 18{,}9448 \right),$$

$$(\nu = 7, 8, 9 \ldots). \tag{6.12}$$

Напряжения в долях $\frac{P}{2l} d_1 d_2$			$\nu = 0{,}16$	$\nu = 0{,}25$	$\nu = 0{,}35$
в точке $x=0$, $y=0$	$X_z(0, 0)$	с избытком	81,9049	81,8911	81,8780
		с недостатком	81,9049	81,8911	81,8780
	$Y_z(0, 0)$		0	0	0
	$X_z^*(0)$		81,9375	81,9375	81,9375
в точке $x=0$, $y=d_1$	$X_z(0, d_1)$	с избытком	82,0[illegible]08	82,0[illegible]83	82,0546
		с недостатком	82,0[illegible]06	82,0281	82,0554
	$Y_z(0, d_1)$		0	0	0
	$X_z(0)$		81,9375	81,9375	81,9375
в точке $x=b_1-d_2$, $y=0$	$X_z[(b_1-d_2), 0]$	с избытком	63,0403	63,0188	62,9984
		с недостатком	62,4161	62,3[illegible]52	62,4750
	$Y_z[(b_1-d_2), 0]$		0	0	0
	$X_z^*(b_1-d_2)$	при $b(x)=2b_2$	75,9375	75,9375	75,9375
		при $b(x)=2d_1$	7,4993	7,4993	7,4993
в точке $x=b_1$, $y=d_1$	$X_z(b_1, d_1)$		0	0	0
	$Y_z(b_1, d_1)$	с избытком	27,0402	27,0884	27,1344
		с недостатком	22,0236	22,0645	22,1035
	$X_z^*(b_1)$		0	0	0
в точке $x=b_1-d_2$, $y=b_2$	$X_z[(b_1-d_2), b_2]$		0	0	0
	$Y_z[(b_1-d_2), b_2]$		0	0	0
	$X_z^*(b_1-d_2)$	при $b(x)=2b_2$	75,9375	75,9375	75,9375
		при $b(x)=2d_1$	7,4993	7,4993	7,4993

Принимая во внимание (4.20), (4.11), (4.12) и (6.12), определим значения коэффициентов B_k и D_k с избытком и с недостатком. Подставляя в (6.1) — (6.7) значения коэффициентов B_k и D_k с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений X_z и Y_z.

Некоторые значения напряжений X_z и Y_z приведены выше в таблице. В этой же таблице для сравнения приведены значения касательных напряжений $X_z^*(x)$, вычисленных по формуле Журавского (8)

$$X_z^{\circ}(x) = \frac{PS(s)}{Ib(x)}, \tag{6.13}$$

где $S(x)$ — статический момент относительно оси y части площади сечения балки между уровнем x и краем балки, $b(x)$ — ширина сечения балки на уровне x.

Из таблицы и из формул (62) — (6.7) видно: 1) что касательное напряжение свое наибольшее значение получает на горизонтальной оси симметрии поперечного сечения, именно в точках пересечения этой оси со стенками двутавра; 2) как показывают проделанные вычисления согласно (6.2), (6.4) и (6.6), формула Журавского (6.13) дает хорошие результаты, близкие к точному, только для точек стенки двутавра, а для точек полки они достаточно отличаются от истинного значения; 3) на вертикальной оси симметрии и на боковых сторонах полки двутавра горизонтальный компонент касательного напряжения $\{Y_z\}$ равен нулю; 4) влияние коэффициента Пуассона ν на значение касательных напряжений небольшое и для практических целей им можно пренебречь.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 23 IX 1955

Մ. Ս. Սարգսյան

ԵՐԿՏԱՎՐԱՅԻՆ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է պրիզմատիկ ձողի վերաբերյալ Սեն-Վենանի խնդրի ճշգրիտ լուծումը երկտավրային հատվածք ունեցող ձողի համար։ Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործված է Ն. Խ. Հարությունյանի օժանդակ ֆունկցիաների մուծման եղանակը, որի միջոցով մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերված է հաստատուն գործակիցներով գծային 2-րդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինտեգրման հաստատունների որոշումը՝ լիովին ռեգուլյար գծային անվերջ հավասարումների սիստեմի լուծման։

Շոշափող լարումների որոշման համար տրված են հատվածքի երկրաչափական պարամետրերը պարունակող բանաձևեր։ Մասնավոր դեպքում տրված են թվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակում և համեմատվում են նյութերի դիմադրությամբ տրվող արդյունքի հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948.
2. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
3. *Абрамян Б. Л.* Изгиб призматического стержня с крестообразным поперечным сечением. Известия АН Армянской ССР, т. IV, № 5, 1951.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, ГТТИ, 1934.
5. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
6. *Кантарович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1952.
7. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. Оборонгиз, 1939.
8. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов. Гостехиздат, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. IX, № 7, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ФИЗИКА

Г. С. Саакян

Прохождение нуклонной компоненты через атмосферу

§ 1. Введение

За последние десять лет физика космических лучей пережила период бурного развития и крупнейших открытий. Была выяснена природа первичного излучения. В этом вопросе большой вклад был сделан группой физиков, работающих под руководством С. Н. Вернова. Были открыты электронно-ядерные ливни и ядерно-каскадные процессы в космических лучах [1—7]. В обзорной статье [7] были подытожены результаты многочисленных работ, проводимых сотрудниками лаборатории космических лучей Физического института им. П. Н. Лебедева Академии наук СССР в период 1945—1948 гг. и была обрисована общая картина прохождения космического излучения через атмосферу.

Мощным орудием в руках физиков явилось открытие и широкое применение в экспериментальной технике физики космического излучения методики ядерной фотоэмульсии. Открытие фотоэмульсии, чувствительной для фиксации траекторий релятивистских заряженных частиц, дало возможность выяснить многие важные черты сложных явлений, происходящих при взаимодействии космического излучения с веществом [27—33]. Эта новая методика позволила произвести сравнительно точное изучение химического состава первичного излучения, изучение ядерных взаимодействий нуклонов, природу и ядерные взаимодействия вторичных частиц, возникающих в ядерных звездах, открытие ряда новых нестабильных частиц и т. д.

На основании накопившегося экспериментального материала одновременно производилось теоретическое исследование развития ядерно-каскадного процесса в воздухе. В 1949 г. Гайтлером и Яноши [8] была предложена теория ядерно-каскадного процесса в воздухе. В этой теории предполагалось, что падающий нуклон до выхода из ядра претерпевает несколько столкновений нуклон-нуклонного характера и в каждом соударении испускает один мезон, который выходит из ядра без взаимодействия. Для акта нуклон-нуклон столкновения предполагалось, что дифференциальное поперечное сечение является однородной функцией от энергии первичной и вторичной частиц. В дальнейшем эта теория развивалась в работах Яноши [9], а также в работах Яноши и Мессель [10]. В этих новых вариантах теории учитывались также взаимодействия мезонов с нуклонами ядра.

Основные идеи, выдвинутые в работе [8], а именно, что единичный акт взаимодействия носит характер нуклон-нуклонного столкновения и что дифференциальное поперечное сечение зависит лишь от отношения энергий первичного и вторичного нуклонов, легли в основу многочисленных работ Месселя [11], Грина, Месселя и других авторов [12—21]. Основные результаты, полученные Месселем и сотрудниками, изложены в работе [22].

Теория ядерно-каскадного процесса была развита и в работах [23—25]. Эти работы базировались в основном на экспериментальных основах и содержали меньшее число специальных предположений, еще не подтвержденных экспериментом. Зацепиным был предложен метод решения каскадных уравнений, названный им методом последовательных поколений [24]. В работах Зацепина и Розенталя были получены объяснения основных явлений, наблюденных в широких атмосферных ливнях.

В работе [23] метод последовательных поколений был развит для случая, когда спектр вторичных частиц, рождаемых в акте столкновения, является моноэнергетическим. В работе [36] было показано, что этот метод может быть обобщен на случай произвольного вида энергетического спектра частиц, образованных при ядерных столкновениях.

Будини и Молиер [26] построили каскадную теорию в атмосфере, предполагая, что спектры рождения вторичных протонов и мезонов выражаются функцией вида

$$f(u)du = \frac{\alpha}{\gamma!} \ln^{\gamma}\left(\frac{1}{u}\right) du,$$

где u — отношение энергии вторичной частицы к энергии первичной, γ и α — параметры, численные значения которых подбирались так, чтобы получалось согласие с экспериментом. Здесь α имеет смысл средней доли энергии, переданной данному сорту частиц $\int_0^1 uf(u)du = \alpha$. Для π-мезонов принималось $\gamma = 2,2$ и $\alpha = 0,2$, а для вторичных протонов $\gamma = 1,3$ и $\alpha = 0,8$.

Несмотря на такое большое число теоретических работ, посвященных изучению ядерно-каскадного процесса в воздухе, этот вопрос в настоящее время нельзя считать окончательно решенным. Для полного и правильного решения этой проблемы необходимо знать энергетическое и угловое распределение вторичных нуклонов и мезонов, образованных в ядерных взаимодействиях нуклонов высоких энергий с ядрами воздуха. Величина некоторых важных характеристик ядерных процессов при больших энергиях, а именно полное поперечное сечение взаимодействия нуклонов с ядрами воздуха и средняя доля энергии, теряемой частицей в ядерных взаимодействиях в воздухе, приблизительно известны. Поэтому теория, в основном опираясь на знание этих величин, должна дать объяснение наблюденных явлений и, далее, путем сравнения результатов расчета с экспериментальными результатами, должна уточнить численное значение полного поперечного сечения ядерного взаимодействия и степень неупругости этого взаимодействия, а также получить другие сведения о свойствах ядерных взаимодействий в области больших энергий, пока недостижимых в лабораторных условиях.

В предлагаемой работе развивается феноменологическая теория ядерно-каскадного процесса в воздухе. Теория базируется на представлениях, развиваемых авторами работы [34]. Согласно этим представлениям, в акте ядерного взаимодействия нуклонов высоких энергий с ядрами воздуха первичная частица в среднем около 1/3 своей энергии теряет на образование мезонов, δ-нуклонов, ядерных осколков и на возбуждение ядра, а остальные 2/3 энергии уносит с собою один быстрый нуклон. Ранее этот результат был получен в работах [24, 35]. При этом в работе [25] показано, что энергия, теряемая первичным нуклоном, в основном идет на образование мезонов, тогда как на образование δ-нуклонов, осколков и на возбуждение ядра расходуется сравнительно небольшая энергия, равная около 400 Mev в случае воздуха.

Предлагаемая теория довольно проста, позволяет, путем алгебраических действий, без громоздких вычислений, исходя из первичного энергетического спектра нуклонов, получить энергетический спектр, угловое распределение, пробег поглощения, и ряд других характеристик нуклонной компоненты на различных глубинах в атмосфере. В расчетах фигурируют два параметра, а именно средний пробег ядерного взаимодействия (или полное поперечное сечение) нуклонов в воздухе и средняя доля энергии, теряемой нуклоном при взаимодействиях с ядрами воздуха.

В работе учтены ионизационные потери энергии протонов, которые являются существенными при энергиях $E \lesssim 10$ Bev. Подробно рассмотрена также роль ядерного многократного рассеяния. Явление ядерного многократного рассеяния является существенным при энергиях нуклонов $E \lesssim 100$ Bev, наблюденных на заданной атмосферной глубине. При вычислении интенсивности нуклонов на различных глубинах в атмосфере влияние π-мезонов пренебрегается, т. е. предполагается, что значительная часть π-мезонов распадается на пути своего следования и не успевает претерпеть ядерные взаимодействия. Убедиться в правильности этого предположения не трудно. Действительно, лишь при энергиях $E \gtrsim 9 \frac{\rho_0}{\rho(z)}$ Bev, где ρ_0 — плотность воздуха на уровне моря, а $\rho(z)$ — плотность на атмосферной глубине z *г/см²*, средний пробег для распада π-мезонов может быть больше их среднего пробега ядерного взаимодействия, который предполагается равным 65 *г/см²*. На атмосферных глубинах $z = 700$, 300 и 100 *г/см²* отношение $\rho_0/\rho_z \approx 1{,}5; 3{,}5$ и 10. Следовательно, для того, чтобы π-мезон успел провзаимодействовать до того, как распадется, его энергия на глубинах $z=700$, 300 и 100 $г/см^2$ должна быть, соответственно, больше 14, 30 и 90 Bev. Если допустить, что в каждом акте взаимодействия нуклонов рождается только один мезон, то энергия нуклонов, способных рождать мезоны таких энергий, должна быть больше 50, 100, 300 Bev. Однако известно, что при таких энергиях нуклонов имеет место множественное образование мезонов, причем, согласно статистической теории Ферми—Ландау, выделяемая при столкновении частиц энергия приблизительно делится поровну между мезонами [37, 38], число которых порядка $E^{0.25}$, где E — энергия первичного нуклона. Из последних замечаний следует, что энергия нуклонов, способных рождать мезоны с энергиями 14, 30, 90 Bev, будет около 110, 310 и 1350 Bev. А для нуклонов с энергиями 14, 30 и 90 Bev энергии первичных частиц, рождающих их, должны быть, соответственно, 20, 43 и 128 Bev. Из приведенного сравнения, а также из того обстоятельства, что энергетический спектр нуклонов в атмосфере является убывающей функцией энергии, следует, что энергия, передаваемая мезонам, в основном теряется необратимым образом, и участие π-мезонов в дальнейших ядерных процессах незначительно.

§ 2. Интенсивность потока нуклонов на различных глубинах в атмосфере

Поставим перед собой задачу вычисления энергетического спектра нуклонов на различных глубинах в атмосфере, исходя из их спектра на границе атмосферы. Повидимому, в настоящее время можно считать интенсивность первичного излучения хорошо известной. Интенсивность первичной компоненты космического излучения для различных энергий определялась в работах [39—53] и в ряде других. Первичное излучение в основном состоит из протонов и небольшого числа нейтронов, входящих в состав ядер, имеющихся в составе первичного излучения. Согласно [49], энергия, приносимая первичным излучением, распределена между его различными составными частями следующим образом: 66% энергии принадлежит потоку протонов, 26% — потоку ядер гелия, 5% — потоку ядер углерода, азота и кислорода, и 3% — потоку ядер с $Z \geqslant 10$. Угловое распределение первичного излучения изотропно.

Полный энергетический спектр первичных частиц приведен в обзорах М. И. Фрадкина [54], Б. Петерса [55] и Неера [56]. В работах [55, 56, 50] предлагаются различные эмпирические формулы, хорошо аппроксимирующие существующие экспериментальные данные. Однако они имеют сложный вид и неудобны для расчетов.

В работе [26] энергетический спектр первичного излучения аппроксимирован следующей эмпирической формулой:

$$N(E)dE = a_0(E_0+E)^{-\gamma}\,dE, \qquad (1)$$

где $\gamma=2{,}8$, a_0 и E_0 — постоянные, E — кинетическая энергия нуклонов, измеренная в единицах Bev. Если речь идет об интенсивности протонов, то следует в формулу (1) подставить $a_0=8{,}8$ и $E_0=6{,}94$ Bev, а если нас интересует интенсивность нуклонов, то $a_0=11$ и $E_0=6{,}34$ Bev. Формула (1) имеет сравнительно простой вид, удобна для расчетов и хорошо аппроксимирует эксперименты [39 — 51], а также эмпирические формулы, приведенные в работах [50, 55, 56].

Согласно Вернову и сотрудникам [45], дифференциальный спектр энергии первичных частиц в области энергии $2 < E < 20$ Bev описывается степенным законом $E^{-\gamma}$ с показателем $\gamma = 2$. Этот результат не противоречит вышеприведенному, так как функцию $(E_0+E)^{-\gamma}$ можно интерполировать степенной функцией $E^{-\gamma}$, где γ уже не постоянна, а является монотонно возрастающей функцией от энергии частиц, причем в области энергий $2 < E < 20$ Bev этот показатель будет иметь значение, приблизительно равное 2, а при энергиях $E > 100$ Bev, $\gamma=2{,}8$. Интенсивность первичных частиц, найденная в работе [45] для геомагнитных широт 2°, 31° и 51°, также в пределах ошибок экспериментов согласуется с интенсивностью частиц, получаемой по формуле (1) для соответствующих областей энергий. Ниже, нас будет интересовать только общее число нуклонов в первичном излучении, поэтому в формуле (1) принимаем $a_0=11$ и $E_0=6{,}34$ Bev.

Пусть на глубине z *г/см²*, в атмосфере измеряется интенсивность нуклонов с кинетической энергией E, движущихся под углом ϑ относительно вертикального направления. Далее, пусть эти нуклоны до места наблюдения претерпели n ядерных столкновений. Тогда среднее расстояние между двумя столкновениями будет равно $\frac{z}{(n+1)\cos\vartheta}$. После каждого ядерного столкновения нуклон может оказаться как в протонном, так и в нейтронном состоянии. Обозначим через Q вероятность того, что на данном отрезке пути между двумя столкновениями нуклон является протоном. Предположим, что после каждого ядерного столкновения, независимо от начального зарядового состояния нуклона, он с равной вероятностью может оказаться в нейтронном и протонном состояниях, т. е. $Q=0{,}5$. Следовательно, ионизационные потери энергии на каждом отрезке пути приблизительно равны

$$\frac{zQ\chi}{(n+1)\cos\vartheta},$$

где $\chi \approx 0{,}002$ Bev — средние ионизационные потери энергии релятивистских частиц на 1 *г/см²* пути в воздухе.

Энергия нуклона непосредственно после последнего ядерного столкновения равна

$$E+\frac{zQ\chi}{(n+1)\cos\vartheta}.$$

А перед этим же столкновением энергия нуклона равнялась

$$E_1 = \frac{E}{\alpha} + \frac{zQ\chi}{\alpha(n+1)\cos\vartheta},$$

где α — средняя доля энергии, остающаяся за нуклоном после каждого ядерного столкновения. Согласно цитированным работам [34, 35], при энергиях $E \gtrsim 3$ Bev, величина α приблизительно постоянна и равна около 0,7. Итак, совместно с авторами цитированных работ пока что будем предполагать, что зависимость α от энергии слабая, а численное значение уточним дальше. Продолжая приведенные рассуждения получаем, что энергия нуклона непосредственно перед первым ядерным столкновением была

$$E\alpha^{-n} + \frac{zQ\chi}{(n+1)\cos\vartheta}\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-i}.$$

Чтобы получить энергию первичной частицы на самой границе атмосферы, необходимо добавить ионизационные потери энергии первичного нуклона до первого ядерного столкновения:

$$\frac{zQ_1\chi}{(n+1)\cos\vartheta},$$

где Q_1 — вероятность того, что первичная частица является протоном. Таким образом, энергия первичного нуклона равна

$$E_n = E\alpha^{-n} + \frac{zQ\chi}{(n+1)\cos\vartheta}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-i} + k\right),$$

где $k = \frac{Q_1}{Q}$. Произведя суммирование, получаем

$$E_n = E\alpha^{-n}\left[1 + \frac{zQ\chi}{E(n+1)\cos\vartheta}\left(c_1 - c_2\alpha^n\right)\right]. \tag{2}$$

Здесь введены обозначения:

$$c_1 = \frac{1}{1-\alpha}, \qquad c_2 = c_1 - k. \tag{2'}$$

В первичном спектре интенсивность нуклонов, рассчитанная на единицу телесного угла согласно (1), равна

$$a_0(E_0 + E_n)^{-\gamma}\, dE_n = a_0 E^{-\gamma}\alpha^{n\gamma}\left[1 + \frac{zQ\chi c_1}{E(n+1)\cos\vartheta} + \right.$$

$$\left. + \frac{E_0}{E}\left(1 - \frac{c_2 zQ\chi}{E_0(n+1)\cos\vartheta}\right)\alpha^n\right] dE_n. \tag{3}$$

Для получения интенсивности нуклонов на глубине z, движущихся под углом ϑ относительно вертикали, необходимо умножить (3) на вероятность того, что наблюдаемый нуклон является n-м потомком первичного нуклона, и просуммировать по всем возможным значениям числа n. Эта вероятность, как вероятность редкого и случайного события, определяется распределением Пуассона

$$W_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\lambda \cos\vartheta}\right)^n e^{-\frac{z}{\lambda}\sec\vartheta}, \tag{4}$$

где λ — длина среднего свободного пробега ядерного взаимодействия нуклона в воздухе и $\frac{z}{\lambda}\sec\vartheta$ — среднее число столкновений, претерпеваемых нуклонами в заданном направлении ϑ. Ниже принимается, что величина λ постоянна.

Итак, интенсивность нуклонов заданной энергии E и заданного направления движения ϑ на глубине z равна

$$N(z, \vartheta, E)dE = a_0 E^{-\gamma} e^{-\frac{z}{\lambda}\sec\vartheta} dE \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma} \cdot \frac{u^n}{n!}. \tag{5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_n = \frac{c_3 - c_4 \alpha^n}{n+1} + E_0 \alpha^n; \quad \frac{z\alpha^{\gamma-1}}{\lambda}\sec\vartheta = u$$

$$c_3 = c_1 z Q/\sec\vartheta; \quad C_4 = c_2 z Q/\sec\vartheta. \tag{6}$$

С ростом числа n, A_n быстро убывает, поэтому при $n \geqslant \nu$, где ν некоторое достаточно большое число, можно написать $1 + \frac{A_n}{n} \approx 1$, и тогда ряд в формуле (5) совпадает с разложением функции e^u. Так, для вертикального направления на глубине $z = 700$ *г/см²*, при $E = 1{,}5$ Bev оказывается достаточным принять $\nu = 15$. Таким образом, для достаточно большого ν можно суммирование в (5) выполнить следующим образом:

$$\sum_0^{\infty}\left(1 + \frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma}\frac{u^n}{n!} \approx \sum_0^{\nu}\left(1 + \frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma}\frac{u^n}{n!} + \sum_{\nu}^{\infty}\frac{u^n}{n!} =$$

$$= e^u - \sum\left[1 - \left(1 + \frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma}\right]\frac{u^n}{n!}.$$

С учетом последнего, формулу (5) можно переписать так:

$$N_1(z, \vartheta, E)dEd\Omega = a_0 E^{-\gamma} e^{-\frac{z}{l}\sec\vartheta} S(z, E, \vartheta), \tag{7}$$

где

$$S \approx 1 - e^{-u}\sum_0^{\nu}\left[1 - \left(1 + \frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma}\right]\frac{u^n}{n!}; \quad \nu \gg 1, \tag{8}$$

$$l=\frac{\lambda}{1-\alpha^{\gamma-1}};\tag{9}$$

$d\Omega$ — телесный угол, под которым ведется наблюдение.

Из (7) видно, что, вообще говоря, вид энергетического спектра нуклонов с изменением глубины и направления изменяется.

Изменение вида спектра нуклонов обусловлено двумя причинами, а именно тем, что первичный спектр нуклонов не является точно степенным, и ионизационными потерями энергии. Ионизационные потери энергии существенны при энергиях $E<10$ Bev, и на больших глубинах они привели бы к заметному искажению вида спектра в указанной области энергии. Ионизационные потери энергии не приведут к изменению вида энергетического спектра нуклонов только в том случае, если первичный спектр является строго степенным ($E_0\approx 0$).

При энергиях $E\lesssim 100$ Bev отклонение вида первичного энергетического спектра от степенного закона становится несущественным, и функция S принимает постоянное значение, равное единице (при $\chi=0$ и $E_0=0$; $S=1$). Имеет место также и $\lim\limits_{z\to 0} S=\left(1+\frac{E_0}{E}\right)^{-\gamma}$. При этом поглощение интенсивности нуклонной компоненты с глубиною происходит по экспоненциальному закону, с коэффициентом поглощения равным $\frac{1}{l}$, и вид энергетического спектра нуклонов не будет зависеть от глубины и направления наблюдения.

Из (5) очевидно, что

$$P_n(z, E, \vartheta)=B\left(1+\frac{A_n}{E}\right)^{-\gamma}\frac{u^n}{n!}\tag{10}$$

представляет собою вероятность того, что на глубине z нуклон с энергией E, наблюденной под углом ϑ, происходит от первичного нуклона с энергией E_n, где E_n определяется формулой (2). Здесь B — коэффициент нормировки. При энергиях $E\gtrsim 30$ Bev имеем $P_n\approx\frac{u^n}{n!}e^{-u}$. Об этой вероятности подробно речь будет идти позже.

Вследствие отклоняющегося действия магнитного поля земли первичный спектр частиц при низких импульсах обрезается. В этом вопросе мы будем пренебрегать малой долей ядер в первичном излучении считая, что весь поток частиц состоит из протонов, и понятие минимального импульса, который является функцией геомагнитной широты, заменим понятием минимальной энергии протонов E_m. При энергиях в несколько Bev и ниже этот эффект скажется также на интенсивности нуклонов при малых глубинах атмосферы.

Так, если на глубине z в атмосфере в спектре нуклонов нас интересуют энергии $E<E_m$, то на числа столкновений n должно быть наложено ограничение

$$E_n\geqslant E_m.$$

так как энергии $E_n < E_m$ в первичном спектре частиц отсутствуют. Это неравенство означает, что в формулах (5) и (8) суммирование должно начинаться не с нуля, а с некоторого числа n_1, где n_1 — округленный корень трансцендентного уравнения

$$\frac{zQ\chi}{(n+1)\cos\theta}(c_1 - c_2\alpha^n) = E_m\alpha^n - E, \tag{11}$$

где c_1 и c_2 имеют тот же смысл, что и в (2').

§ 3. Подбор численных значений параметров

Для вычисления интенсивности нуклонной компоненты космического излучения на различных глубинах в атмосфере необходимо задать численные значения параметров, входящих в формулу (7). Интенсивность нуклонов определяется двумя основными параметрами, а именно, пробегом ядерного взаимодействия λ и долей энергии α, остающейся за нуклоном после ядерного взаимодействия.

Многочисленные экспериментальные работы приводят к выводу, что в области высоких энергий, недоступных еще в ускорительной технике, λ, повидимому, не зависит от энергии и для воздуха имеет значение около 65 *г/см*^{2}. Зацепин [24], на основании ряда экспериментальных работ, приходит к выводу, что $\lambda = 65 \pm 5$ *г/см*^{2}. Это значение пробега взаимодействия, повидимому, относится к области энергий $E \gtrsim 10$ Bev. Опыты, выполненные на бевотронах, показывают, что полное поперечное сечение неупругого взаимодействия нуклонов с атомными ядрами с ростом энергии растет, приближаясь к геометрическому поперечному сечению. Упругое или так называемое диффракционное рассеяние для нас не представляет интереса, так как в этом процессе нуклон не теряет энергии и рассеивается на сравнительно малые углы порядка $\frac{\lambda}{2\pi R}$, где λ — длина волны де-Бройля для падающих нуклонов и R — радиус ядра мишени. Так, в работе [57] найдено, что поперечное сечение взаимодействия протонов с энергией $E=0{,}87$ Bev с ядрами углерода равно $\sigma = 0{,}25 \cdot 10^{-24}$ *см*$^2 \approx 0{,}78\ \sigma_0$, где $\sigma_0 = \pi\ (1{,}4 \cdot 10^{-13} A^{1/3})^2 \approx 0{,}32 \cdot 10^{-24}$ *см*^{2} — геометрическое поперечное сечение. В работе [58], для поперечного сечения взаимодействия нейтронов с ядрами углерода при энергии $E = 1{,}4$ Bev, найдено $\sigma = 0{,}231 \times 10^{-24}$ *см*$^2 = 0{,}72\ \sigma_0$, а в работе [59], для того же поперечного сечения нейтронов с той же энергией, найдено $\sigma = 0{,}2 \cdot 10^{-24}$ *см*$^2 = 0{,}63\ \sigma_0$. Далее, при энергиях протонов в 2,2 Bev в работах [60, 61] установлено, что поперечное сечение для ядерной эмульсии и меди равно $\sigma = 0{,}8\ \sigma_0$.

В перечисленных работах речь идет о полном поперечном сечении неупругого взаимодействия, так так измерения производились в условиях плохой геометрии, исключающих из рассмотрения диффракционное рассеяние при взятых энергиях.

Сотрудниками лаборатории малого электромагнита Физического института АН Армянской ССР, производившими свои эксперименты с протонами, генерированными нейтронами космического излучения, также установлено, что полное поперечное сечение взаимодействия протонов с ядрами меди, с ростом энергии растет [62]. Так, при энергиях $2{,}4 < E < 5{,}5$ Bev поперечное сечение равно приблизительно $0{,}8\ \sigma_0$, а при $E \gg 5{,}5$ Bev оно равно геометрическому поперечному сечению σ_0.

Этот вывод согласуется с результатом Вернова и сотрудников [45], согласно которым поперечное сечение для взаимодействия протонов с энергией около 5 Bev с ядрами азота и свинца равно геометрическому.

Ниже, мы будем распространять наши расчеты до энергии нуклонов равной 1,5 Bev. При таких сравнительно малых энергиях поперечное сечение неупругого взаимодействия нуклонов с ядрами воздуха в последних двух столкновениях будет иметь значение чуть меньше σ_0. В результате, и среднее поперечное сечение для всего поколения нуклонов с конечной энергией $E=1{,}5$ Bev окажется чуть ниже геометрического поперечного сечения σ_0.

При энергиях $E \gg MA^{1/3}$, где M — энергия покоя нуклона, следует ожидать дальнейшее, сравнительно малое возрастание поперечного сечения за счет механизма диффракционного образования мезонов на ядрах [63]. В работе [63] была произведена оценка величины поперечного сечения диффракционного образования мезонов на ядрах. Для воздуха оно порядка одного-двух процентов от геометрического поперечного сечения.

В качестве первого шага для подбора численного значения параметра α будем исходить из формулы (9), связывающей параметры α, λ и пробег ядерного поглощения l. Как уже отмечалось, в области энергий $E \gg 10$ Bev в формуле (7) функция $S=1$ и поглощение нуклонной компоненты происходит по экспоненциальному закону с коэффициентом поглощения $\frac{1}{l} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \alpha^{\gamma-1}\right)$, и поэтому знание величин λ и l в этой области энергии нам непосредственно даст величину α. По данным Рыжковой и Сарычевой [24], при энергиях $E \sim 1000$ Bev, $l = (112 \pm 6)$ *г/см*^{2}. Этот результат был подтвержден в последней работе этих авторов [64]. Для энергий порядка 1000 Bev они нашли $l = 116 \pm 9$ *г/см*^{2}.

В работе Каплона и сотрудников [65] при той же энергии найдено $l = 120$ *г/см*. Ошибки измерения не указаны. Принимая $l = (112 \pm \pm 6)$ *г/см*^{2}, $\lambda = (65 \pm 5)$ *г/см*^{2}, из (9) находим $\alpha^{\gamma-1} = 0{,}42 \pm 0{,}08$ и при $\gamma = 2{,}8$ получаем $\alpha = 0{,}62 \pm 0{,}07$ [24]. Может оказаться, что в других областях энергии величина α окажется отличной от найденного значения. Правда, в работе [24] показано, что величина α слабо зависит от энергии. Однако интенсивность нуклонов на больших глубинах атмосферы весьма чувствительна к малым изменениям величины α. Ниже, величина α

будет уточнена и подобрана так, чтобы вычисленный из первичного спектра нуклонов спектр этих частиц на высоте 3200 *м* над ур. моря наилучшим образом согласовывался с экспериментом.

Перейдем к определению численных значений остальных параметров, входящих в (5). Из (1) находим, что отношение чисел протонов и нуклонов в первичном излучении приблизительно равно $8{,}8:11=0{,}8$. Отсюда следует, что вероятность $Q_1 \approx 0{,}8$. Далее, предполагая $Q=0{,}5$, находим $k=\frac{Q_1}{Q}=1{,}6$. Принимая $\alpha=0{,}62$, из (2′) находим $c_1=2{,}63$ и $c_2=1{,}03$.

§ 4. Многократное ядерное рассеяние нуклонов

Формула (7) выведена в предположении, что вторичные нуклоны строго сохраняют направление первичных вплоть до места наблюдения. На самом деле это предположение неверно. При энергиях $E \lesssim 100$ Bev ядерное рассеяние частиц играет существенную роль в процессе прохождения нуклонной компоненты через атмосферу. Это особенно относится к большим атмосферным глубинам, где ядерное многократное рассеяние приводит к заметному удлинению путей частиц и, следовательно, сильно уменьшает интенсивность нуклонов. Что касается многократного кулоновского рассеяния, то, при рассмотренных здесь энергиях, оно ничтожно мало по сравнению с ядерным рассеянием и не играет никакой роли при прохождении нуклонной компоненты высокой энергии через атмосферу. Наоборот, при энергиях $E<1$ Bev оно является важным.

Точное решение вопроса удлинения пути нуклона из-за ядерного многократного рассеяния в настоящее время не представляется возможным, поскольку нам пока не известна зависимость дифференциального сечения, нуклон-нуклон или нуклон-ядро столкновений от энергии и угла рассеяния при энергиях выше нескольких Bev. Однако, исходя из совершенно общих соображений, основанных на свойствах преобразований Лоренца, можно установить картину этого явления и произвести оценку удлинения пути нуклона при его прохождении через атмосферу.

Пусть ε_0 и $\vec{p}_0$ — полная энергия и импульс нуклона до столкновения, ε, $\vec{p}$ и ω — полная энергия, импульс и угол рассеяния наиболее быстрого нуклона, унесшего основную часть энергии α в лабораторной системе координат после ядерного столкновения, далее, ε', $\vec{p}'$ и ω' — полная энергия, импульс и угол рассеяния того же нуклона в системе центра инерции. Из преобразований Лоренца имеем:

$$p_x=\frac{p_x'+\beta_s\varepsilon'}{\sqrt{1-\beta_s^2}}\ ;\quad \varepsilon=\frac{\varepsilon'+\beta_s p_x'}{\sqrt{1-\beta_s^2}}, \tag{12}$$

$$\cos\omega = \frac{\beta_s}{\beta} + \sqrt{1-\beta_s^2}\,\frac{\sin\omega}{\operatorname{tg}\omega'}, \tag{13}$$

где $\beta = \frac{cp}{\varepsilon}$ — скорость наиболее быстрого нуклона после столкновения в лабораторной системе, в единицах скорости света, а β_s — скорость центра инерции относительно лабораторной системы, опять в единицах скорости света.

При рассматриваемых здесь энергиях частиц длина волны де-Бройля для падающего нуклона намного меньше радиуса ядра, а также радиуса действия ядерных сил; повидимому, по этой причине будет справедливо предполагать, что падающий нуклон в каждом акте взаимодействия эффективно сталкивается лишь с одним нуклоном ядра. В этом случае

$$\beta_s = \frac{p_0}{\varepsilon_0 + M}, \tag{14}$$

где M — энергия покоя нуклона.

Если допустить, что в каждом акте взаимодействия в соударении с налетающей частицей участвует больше чем один нуклон ядра мишени, то получим

$$\beta_s = \frac{p_0}{\varepsilon_0 + M_1}, \tag{14'}$$

где M_1 — суммарная энергия покоя нуклонов ядра, принимающих эффективное участие в процессе соударения. Если предположить, что столкновение имеет место в ядре с трубкой радиусом основания $\frac{h}{\mu c}$, где μ — масса покоя π-мезона со средней высотой $\frac{4}{3}\frac{h}{\mu c}A^{1/3}$, то для воздуха, принимая $A=14$, получим $M_1 \approx 2{,}4$ А.

Ниже мы будем предполагать, что при столкновении нуклонов с энергией, большей нескольких Bev, с ядрами воздуха имеет место нуклон-нуклон столкновение, и соответственно с этим для скорости центра инерции β_s будем пользоваться формулой (14).

При энергиях частиц выше нескольких Bev величины β_s, β и, следовательно, их отношение мало отличаются от единицы. Величина же второго члена в (13) во много раз меньше по сравнению с единицей. Действительно, $\sqrt{1-\beta_s^2} \ll 1$ и в любых условиях $\left|\frac{\sin\omega}{\operatorname{tg}\omega'}\right| < 1$. Поэтому в (13) можно пренебречь вторым членом по сравнению с первым и написать

$$\cos\omega = \frac{\beta_s}{\beta}. \tag{15}$$

Из (13) получаем, что формула (15) справедлива, если имеет место

$$\operatorname{tg}^2\omega' \gg 1-\beta_s^2 \approx \frac{2M}{\varepsilon_0}. \tag{16}$$

Это же условие согласно (12) можно написать так:

$$p'\overline{\cos\omega'} \ll \beta_s\,\varepsilon', \tag{16'}$$

где $\overline{\cos\omega'}$ — средний косинус угла рассеяния нуклона в системе центра инерции. В этом случае получается $\overline{\cos\omega} = \frac{\beta_s}{\beta}$.

Вообще $\beta > \beta_s$ и при энергиях налетающего нуклона $E \gtrsim 10$ Бэв имеет место $\cos\omega \approx \beta_s$. Разумеется, при этих энергиях и значение β_s мало отличается от единицы.

Перейдем к вопросу об удлинении пути частиц в атмосфере, обусловленному ядерным рассеянием.

Пусть на глубине z *г/см*² нуклон с энергией E получен в результате n ядерных столкновений. Обозначим энергию первичного и последующих поколений нуклонов соответственно E_n, E_{n-1} ... E_1, E, а средние углы рассеяния после каждого неупругого ядерного столкновения соответственно $\omega_n^{(1)}, \omega_n^{(2)} \ldots \omega_n^{(n)}$.

Верхние индексы при углах пронумерованы в обратном порядке по сравнению с нумерацией индексов при энергиях. Так, $\omega_n^{(1)}$ относится к первому ядерному столкновению, а $\omega_n^{(n)}$ — к последнему столкновению, в результате чего появляется нуклон с энергией E, если не учесть ионизационные потери энергии на последнем участке пути следования нуклона до места его наблюдения.

Углы отсчитываются относительно направления движения предыдущего нуклона.

Согласно (15), имеем:

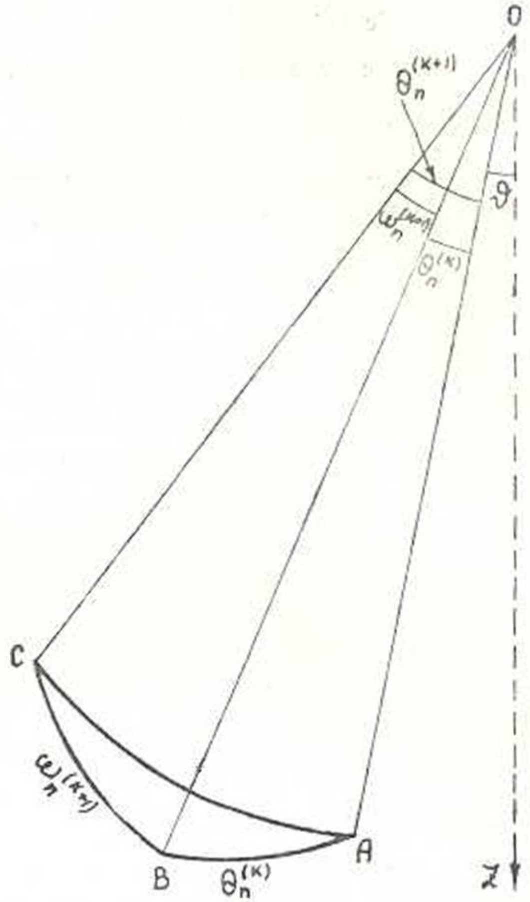
$$\cos\omega_n^{(k)} = \frac{\beta_{sn}^{(n-k+1)}}{\beta_n^{(n-k)}}, \tag{15'}$$

где $\beta_{sn}^{(n-k+1)}$ — скорость центра инерции в k-м столкновении относительно лабораторной системы в случае, когда до места наблюдения нуклон претерпевает n столкновений. В случае нуклон-нуклон столкновения $\beta_{sn}^{(k)} = \sqrt{\frac{E_k}{E_k+2M}}$, где E_k — кинетическая энергия перед этим столкновением, $\beta_n^{(n-k)}$ — скорость частицы в единицах скорости света в лабораторной системе после этого же столкновения.

Из фиг. 1 имеем

$$\cos\theta_n^{(k+1)} = \cos\omega_n^{(k+1)}\cdot\cos\theta_n^{(k)} + \sin\omega_n^{(k+1)}\cdot\sin\theta_n^{(k)}\cdot\cos\varphi_k, \tag{17}$$

где $\theta_n^{(k)}$ — угол между направлением движения нуклона после k-го столкновения и направлением наблюдения θ. $\theta_n^{(k+1)}$ — то же самое для (k+1)-го столкновения и φ_k — угол между плоскостью AOB, образованной направлениями наблюдения OA и движения k-го нуклона OB с плоскостью BOC, образованной направлениями движения k-го и (k + 1)-го нуклонов. При измерениях интенсивности нуклонов имеют



Фиг. 1. К расчету угла ядерного многократного рассеяния нуклонов в атмосфере. OZ — вертикальное направление, OA — направление наблюдения, OB—направление движения нуклона после k-го столкновения и OC — направление движения нуклона после (k + 1)-го столкновения.

дело со многими частицами; в этих вопросах имеет смысл говорить только о средних углах отклонений. Поэтому в (17) мы имеем право произвести усреднение по всем возможным расположениям плоскости BOC относительно плоскости AOB, т. е. усреднить по углу φ_k. Учитывая, что $\overline{\cos\varphi_k} = 0$, из (17) получаем

$$\overline{\cos\theta_n^{(k+1)}} = \cos\omega_n^{(k+1)} \cdot \overline{\cos\theta_n^{(k)}}. \tag{18}$$

Таким образом, получается рекуррентная формула между средними направлениями движения частиц в двух соседних столкновениях. Из (18), очевидно, получим:

$$\overline{\cos\theta_n^{(k+1)}} = \prod_{i=1}^{k+1} \overline{\cos\omega_n^{(i)}} = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\zeta_{xn}^{(n-i+1)}}{\zeta_n^{(n-i)}}. \tag{19}$$

(19) представляет собой средний косинус угла, образованного между направлением наблюдения OA и направлением движения частиц после $(k+1)$-го столкновения.

Введем понятие среднего направления движения нуклона по всему пути его следования. При этом целесообразно усреднить не $\overline{\cos\theta_n^{(k)}}$, а соответствующие им $\sec\theta_n^{(k)}$. Это можно мотивировать тем, что среднее расстояние при n-столкновениях равно

$$\frac{z}{(n+1)\cos\vartheta}\left(1 + \frac{1}{\overline{\cos\theta_n^{(1)}}} + \frac{1}{\overline{\cos\theta_n^{(2)}}} + \dots + \frac{1}{\overline{\cos\theta_n^{(n)}}}\right) = z\sec\vartheta \cdot \overline{\sec\theta_n}.$$

Итак, при n-столкновениях средний секанс для всего пути следования частицы равен

$$\overline{\sec\theta_n} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \overline{\sec\theta_n^{(k)}}. \tag{20}$$

Таким образом, при n ядерных столкновениях в среднем нуклон до места наблюдения проходит расстояние $z\sec\vartheta\cdot\overline{\sec\theta_n}$ вместо $z\sec\vartheta$ при пренебрежении рассеяния.

Чтобы найти среднее расстояние, пройденное нуклоном с энергией E, наблюденной на глубине z, нам остается только произвести усреднение $\sec\theta_n$ по всем возможным значениям чисел столкновений n

$$\sec\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \overline{\sec\theta_n}, \tag{21}$$

где $P_n(z, \vartheta, E)$ — вероятность того, что наблюденный нуклон с энергией E является n-м потомком первичной частицы. Эта вероятность выражается формулой (10). Следовательно, реальное расстояние, пройденное нуклоном до места его наблюдения, равно около $z\sec\vartheta\sec\Phi$.

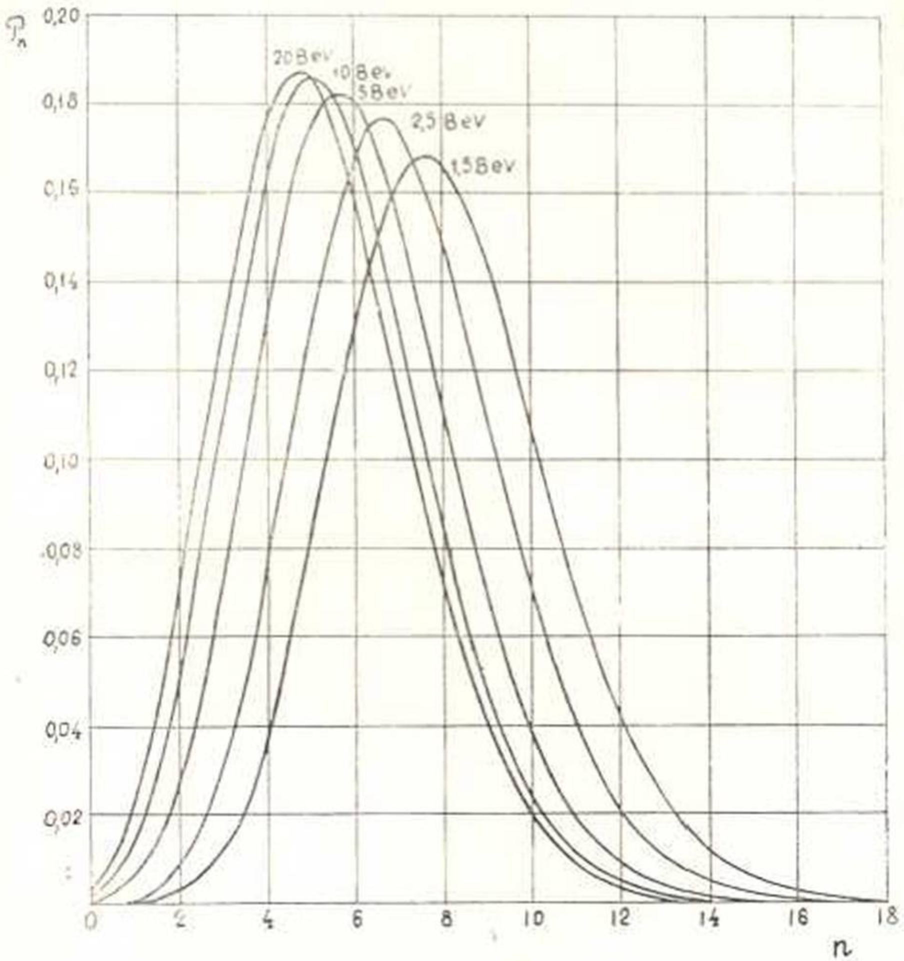
Это означает, что при вычислении интенсивности нуклонов на различных глубинах в атмосфере в формуле (7) z следует заменить $z\sec\Phi$.

Угол Φ не является углом многократного ядерного рассеяния в обычном смысле этого слова. Величина среднего угла многократного рассеяния определяется из уравнения

$$\cos\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \overline{\cos\theta_n^{(n)}}. \tag{22}$$

(22) означает, что последний нуклон в среднем отклоняется на угол Ψ относительно направления движения первичного нуклона.

На фиг. 2 изображена вероятность $P_n(E, z)$ для $\vartheta=0$, $z=710$ *г/см²* (высота Арагацской высокогорной станции) и для энергий наблюденных нуклонов $E=1{,}5$, $2{,}5$, 5, 10 и 20 Bev. При вычислении вероятности $P_n(E, z)$ учитывалось и удлинение путей частиц из-за ядерного

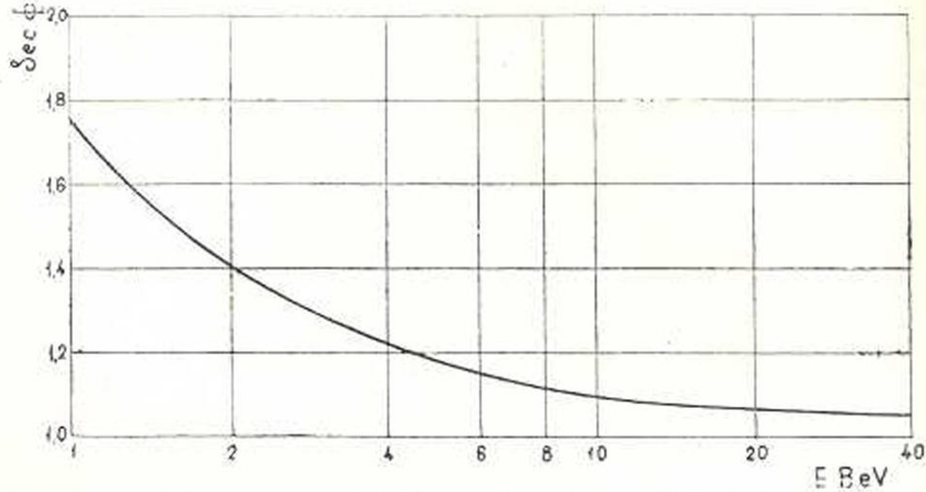


Фиг. 2. По оси абсцисс отложены числа ядерных столкновений нуклона, а по оси ординат вероятность P_n того, что нуклон с заданной кинетической энергией (энергии указаны на кривых), наблюденный на атмосферной глубине 710 *г/см²*, в вертикальном направлении является n-м потоком первичной частицы.

многократного рассеяния. Правда, величина пути z окончательно вычисляется после того как известна $P_n(E, z)$, однако приближенное значение z уже становится известным при вычислении $\sec\theta_n$ по формуле (20). Действительно, кривая функции $P_n(E, z)$ приблизительно имеет симметричный вид относительно наивероятного числа столкновений n_0, поэтому $\sec\Phi\approx\overline{\sec\theta_{n_0}}$ (при $E\gg 10$ Bev, P_n — совпадает с распределением Пуассона). Следовательно, в первом приближении при вычислении $P_n(E, z)$ мы можем в качестве значения z принять величину $z=710 \sec \theta_{n0}$, а потом произвести соответствующее уточнение.

Распределения $P_n(E, z)$ при $E=1{,}5$, 2,5, 5, 10 и 20 Bev имеют максимум соответственно при значениях чисел столкновений нуклонов $n_0=7{,}7$, 6,7, 5,7, 5,1 и 4,7. Среднее число столкновений $\bar{n}$ при этих же энергиях соответственно равно 8,07, 7,11, 6,09, 5,47, 5,15, а энергии первичного нуклона, соответствующие этим числам столкновений равны приблизительно 67, 77, 98, 140, 238 Bev. Отсюда ни в коем случае нельзя сделать вывод о том, что нуклоны с кинетической энергией 1,5, 2,5, 5, 11 и 20 Bev, наблюденные по вертикальному направлению на глубине 710 $г/см^2$, в основном происходят за счет первичных нуклонов с энергиями, равными 77, 98, 140, 238 Bev. В самом деле распределения P_n имеют широкий вид и флуктуации чисел столкновений $n-\bar{n}$ большие. Из фиг. 2 видно, что лишь 15—20% частиц рассмотренных энергий происходят за счет первичных нуклонов, претерпевших до атмосферной глубины 710 $г/см^2$ $\bar{n}$ ядерных столкновений. Здесь следует подчеркнуть коренное отличие числа $\bar{n}$ от числа $\frac{z}{\lambda}$. Последнее представляет собой среднее число ядерных столкновений для одного определенного нуклона на расстоянии z; для $z=710$ $г/см^2$ это число равно около 11. $\bar{n}$ является средним числом ядерных столкновений с учетом существующего вида энергетического распределения первичных частиц. Дело в том, что нуклоны заданной энергии, наблюденные на глубине z, происходят от первичных нуклонов, имевших различные энергии, но претерпевшие разные числа столкновений. Вследствие того, что первичный спектр — быстро убывающий, получается так, что первичные частицы сравнительно малых энергий, претерпевшие сравнительно малое число столкновений $n<\frac{z}{\lambda}$ в спектре, наблюденных на глубине z нуклонов, представлены с такими же статистическими весами, как и частицы больших энергий, но претерпевшие наивероятное число столкновений $\frac{z}{\lambda}$. Вероятность того, что частица с энергией E является n-м потоком первичного нуклона, согласно (10) пропорциональна произведению ординат распределения Пуассона и энергетического спектра первичных частиц. Разница между числами $\bar{n}$ и $\frac{z}{\lambda}$ не была бы лишь в том бы случае, если распределение первичных частиц по их энергиям было бы равномерным. Рассмотренный здесь вопрос о взаимосвязи и отличии между средним числом ядерных столкновений $\frac{z}{\lambda}$ и наивероятным номером поколения n_0 впервые был рассмотрен Зацепиным [24].

На фиг. 3 приводится зависимость $\sec\Phi$ от энергии вертикального потока нуклонов, наблюденных на атмосферной глубине 710 $г/см^2$. Для кинетических энергий нуклонов, равных 1, 1,5, 2,5, 5, 10, 20 и 40 Bev, среднее количество вещества, пройденного нуклонами, от верхней границы атмосферы до глубины 710 $г/см^2$, равно приблизительно $710 \cdot \sec \varphi = 1240$, 1080, 945, 837, 780, 760 и 745 $г/см^2$.



Фиг. 3. Зависимость функции $\sec \Phi$ от кинетической энергии вертикального потока нуклонов, наблюденных на атмосферной глубине 710 $г/см^2$. Среднее расстояние, пройденное частицей от границы атмосферы до указанной глубины, равно $710 \sec\Phi$.

Из приведенных чисел видно, насколько важна роль ядерного многократного рассеяния при прохождении нуклонной компоненты через вещество.

На фиг. 4 изображена зависимость среднего косинуса угла многократного ядерного рассеяния $\cos \Psi$ от кинетической энергии верти-

Фиг. 4. Верхняя кривая представляет зависимость косинуса угла ядерного многократного рассеяния, а нижняя кривая зависимость функции $S(E, z)$ от кинетической энергии вертикального потока нуклонов, наблюденных на атмосферной глубине 710 $г/см^2$

кального потока нуклонов для той же высоты (верхняя кривая). Нижняя кривая на той же фигуре дает зависимость функции S(710, E) от энергии нуклонов.

Вычисление $\sec \Phi$ требует знания величин параметров α и λ. Ниже мы увидим, что наилучшее согласие со спектром нуклонов на глубине 710 *г/см*^{2} можно получить, если предположить, что для наблюденных частиц с $E=1{,}5$ и 2,5 Bev, α равна, соответственно, 0,64 и 0,63, а λ равна 72 и 68 *г/см*^{2}. При энергиях же $E \geqslant 5$ Bev принималось $\alpha=0{,}62$ и $\lambda=65$ *г/см*^{2}. При $E=1{,}5$ Bev средняя энергия первичной частицы равна около 67 Bev, среднее число столкновений $\overline{n} \approx 8{,}1$. В трех последних столкновениях энергия нуклона равна 2,6, 4,4 и 7,2 Bev.

Эксперименты показывают (см. предыдущий параграф), что при энергиях $2 \sim 3$ Bev полное поперечное сечение неупругого взаимодействия нуклонов равно около $0{,}7\ \sigma_0$. Если допустить, что лишь при $E > 10$ Bev поперечное сечение достигает геометрического значения σ_0, то усредненный пробег $\overline{\lambda}$ будет иметь значение чуть больше 65 *г/см*^{2}, соответствующего σ_0. Так, например, если принять, что при энергиях $E=2{,}6$, 4,4, 7,2 Bev поперечное сечение σ равно около $0{,}7\ \sigma_0$, $0{,}8\ \sigma_0$, $0{,}9\ \sigma_0$ и далее ввести понятие эффективных поперечных сечений σ' и σ_0' для случая с числом столкновений $\overline{n}=8$, то очевидно, что

$$\sigma' = \frac{0{,}7+0{,}8+0{,}9+5}{8}\sigma_0' = 0{,}9\sigma_0'.$$

Отсюда находим, что при $E=1{,}5$ Bev $\overline{\lambda} \approx \dfrac{\lambda}{0{,}9} = 72$ *г/см*^{2}.

В настоящее время в лаборатории малого электромагнита Физического института АН Армянской ССР производятся эксперименты по определению величины ядерного пробега взаимодействия с ядрами графита протонов до энергий 20 Bev, и, повидимому, затронутый здесь вопрос о величине λ будет разрешен.

Существует еще одно явление, могущее привести к удлинению путей частиц при их прохождении через атмосферу; это диффракционное рассеяние нуклонов на ядрах воздуха. Угол диффракционного рассеяния нуклонов для ядер воздуха порядка $\theta \sim \dfrac{\lambda}{2\pi R} \approx \dfrac{0{,}057}{p}$, где p — импульс частицы, измеренный в единицах $\dfrac{\text{Bev}}{c}$, а $\lambda = \dfrac{h}{p}$ — длина де-Бройловской волны. Отсюда ясно, что при рассмотренных здесь энергиях нуклонов углы диффракционного рассеяния очень малы по сравнению с углами неупругого ядерного рассеяния.

Диффракционное рассеяние будет иметь существенное значение при энергиях $E < 1$ Bev, т. е. как раз в той области энергии, где вступает в игру и кулоновское многократное рассеяние.

§ 5. Энергетический спектр нуклонов на высоте 3200 *м* над уровнем моря

После того, как было получено среднее расстояние $z=710\cdot\sec\Phi$, пройденное нуклонами от границы атмосферы до глубины 710 *г/см*^{2}, мы, исходя из первичного спектра (1), по формуле (7) вычислили спектр вертикального потока нуклонов для этой глубины. При этом под z подразумевалась величина $710\sec\Phi$. Определялись пять точек спектра нуклонов, а именно ординаты дифференциального спектра для $E=1{,}5$, 2,5, 5, 10 и 20 Bev. Точка с $E=1{,}5$ Bev была получена в предположении, что $\alpha=0{,}64$ и $\lambda=72$ *г/см*^{2}. Для второй точки предполагалось $\alpha=0{,}63$ и $\lambda=68$ *г/см*^{2}, а для остальных точек с $E\gg 5$ Bev было взято $\alpha=0{,}62$ и $\lambda=65$ *г/см*^{2}.

Полученное распределение нуклонов по их энергиям изображено на фиг. 5 (сплошная линия). По оси абсцисс отложена кинетическая энергия нуклонов по логарифмической шкале, а по оси ординат — логарифмы интенсивностей нуклонов на интервал энергии 1 Bev.

Если этот спектр попытаться аппроксимировать степенным законом вида $E^{-\gamma}\,dE$, то, как видно из фиг. 5, показатель (т. е. наклон кривой) не является постоянной величиной. При энергиях $1<E<2$ Bev, $\gamma\approx1{,}4$, в области $2<E<4$ Bev, $\gamma\approx1{,}65$, в области $10<E<20$ Bev, $\gamma\approx2{,}3$ и т. д. Так, с ростом энергии нуклонов показатель γ растет и при $E>100$ Bev достигает значения, равного 2,8. При этих энергиях ординаты дифференциального спектра нуклонов отличаются от ординат первичного спектра частиц множителем $e^{-\frac{z}{l}}$, где $z\approx710$ *г/см*^{2} и $l=112$ *г/см*^{2} (функция S (E, z) при этих энергиях по своей величине мало отличается от единицы).

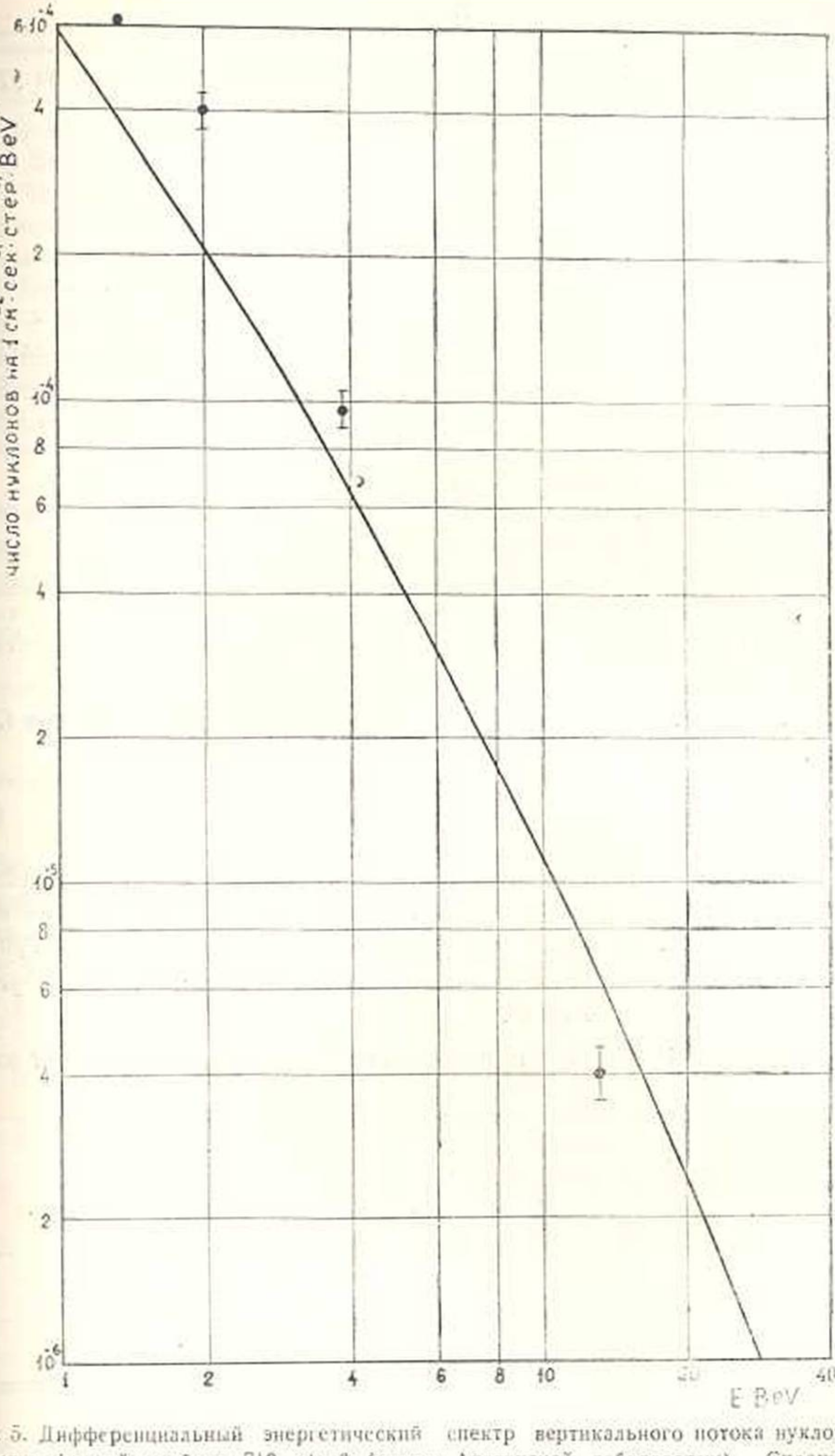
На этой же фигуре для сравнения приведены экспериментальные данные. Точки с указанием ошибок представляют данные Кочаряна и сотрудников. Здесь предполагалось, что вплоть до энергии 1.5 Bev числа протонов и нейтронов равны. Кружки представляют собой измерения Алиханяна — Алиханова [66].

На больших глубинах в атмосфере ординаты дифференциального спектра протонов весьма чувствительны к значениям параметров α и λ. Поэтому, если ординаты дифференциального спектра нуклонов и значение одного из приведенных параметров определены с достаточной точностью, то значение второго параметра можно получить с большой точностью.

Поэтому определение ординат энергетического спектра протонов в области энергий $E>5$ Bev на высотах гор представляет собой большой научный интерес.

§ 6. Пробег поглощения и угловое распределение

Обратная величина коэффициента поглощения потока нуклонов с энергией, большей заданной, называется ядерным пробегом погло-



Фиг. 5. Дифференциальный энергетический спектр вертикального потока нуклонов на атмосферной глубине 710 $г/см^2$ (высота Арагацской лаборатории). Сплошная кривая представляет теоретический спектр, рассчитанный из первичного спектра нуклонов. Точки с указанием ошибок представляют эксперимент. Кружки изображают данные Алиханяна и Алиханова [66]. По оси абсцисс отложена кинетическая энергия частиц в единицах Bev.

щения. Обозначим эту величину через L. Она определяется из уравнения

$$L = \frac{z \sec \vartheta}{\ln \frac{N_0(E)}{N(E, z, \vartheta)}}, \tag{23}$$

где $N_0(E)$ — интенсивность первичных нуклонов с энергией, большей E, $N(E, z, \vartheta)$ — та же самая интенсивность нуклонов на глубине $z/\sec\Phi$, движущихся под углом ϑ относительно вертикали. $\sec\Phi$ определяет удлинение пути и дается формулой (21). Из изложенного в предыдущих параграфах материала понятно, что величина пробега L, кроме энергии, зависит также от z и направления движения нуклонов ϑ. Конечно, зависимость L от энергии более существенна.

Согласно (7), зависимость пробега L от глубины z и направления наблюдения ϑ целиком обусловлена функцией $S(z, E, \vartheta)$. Появление этой функции в свою очередь обусловлено ионизационными потерями энергии, а также отступлением вида первичного спектра от степенного закона. Поэтому при энергиях $E \gtrsim 100$ Bev, когда $S \approx 1$ (эта энергетическая граница зависит также от z и ϑ; она тем выше, чем больше z и ϑ), зависимость пробега L от ϑ и z исчезает, и мы, согласно (7) и (9), имеем:

$$L(E) = l = \frac{\lambda}{1-\alpha^{\gamma-1}}. \tag{23'}$$

При этих энергиях пробег L будет зависеть от энергии, если λ и α являются функциями энергии. В области высоких энергий нами предполагалось, что λ и α являются постоянными величинами, причем $\lambda = 65$ *г/см²*, а $\alpha = 0{,}62$ ($\alpha^{\gamma-1} = 0{,}42$). Следовательно, при энергиях $E \gtrsim 100$ Bev $L = l = 114$ *г/см²*.

На фиг. 6 изображена зависимость пробега поглощения от энер-

Фиг. 6. Зависимость ядерного пробега поглощения вертикального потока нуклонов от их кинетической энергии.

гии для вертикального потока нуклонов на атмосферной глубине 710 *г/см*². С уменьшением энергии частиц величина L растет и при E=1 Bev достигает значения, равного 170 *г/см*².

Теперь перейдем к вопросу об угловом распределении нуклонов. Угловое распределение нуклонов, заданной энергии выражается формулой (7). Для получения конкретных результатов необходимо вычислить функцию $S(z, E, \vartheta)$ для разных значений переменных z, E и ϑ. Это у нас не сделано. Однако, исходя из знания интенсивности вертикального потока нуклонов, можно установить закономерность в угловом распределении потока нуклонов с энергией, больше заданной. Имеем

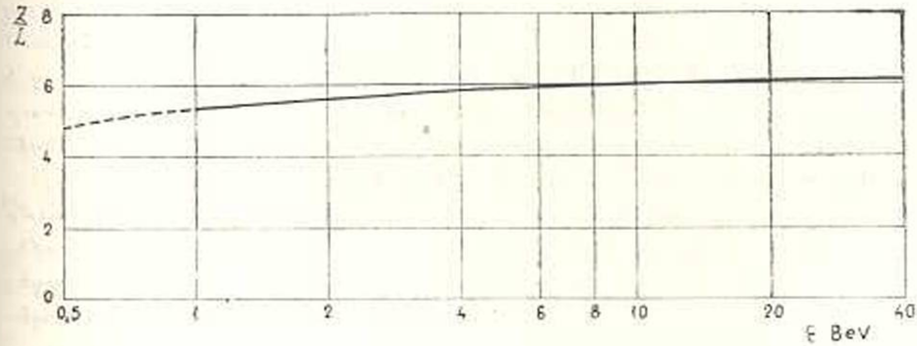
$$N(E, z, \vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = N_0(E)e^{-\frac{z}{L}\sec\vartheta}\sin\vartheta d\vartheta, \qquad (24)$$

где $N_0(E)$ и $N(E, z, \vartheta)$ имеют тот же смысл, что и в формуле (23). Известно, что при малых зенитных углах $\vartheta \lesssim 40^\circ$ (24) можно аппроксимировать формулой

$$N(E, z, \vartheta) \approx N(E, z)\cos^m\vartheta, \qquad (24')$$

где $N(E, z) = N_0(E)e^{-m}$ — вертикальная интенсивность потока нуклонов с энергией, больше E на глубине z, а $m = \frac{z}{L}$.

Величины z и L для атмосферной глубины 710 *г/см*² нам уже известны, поэтому мы можем определить показатель для этой высоты. На фиг. 7 приведена зависимость показателя m от энергии нуклонов. При энергиях $E > 100$ Bev число m имеет постоянное значение, равное 6,34. С уменьшением энергии частиц m медленно убывает. Наши



Фиг. 7. Зависимость показателя косинуса m в угловом распределении $\cos^m\vartheta \cdot \sin\vartheta d\vartheta$ потока нуклонов от их кинетической энергии на атмосферной глубине 710 *г/см*².

расчеты, повидимому, верны до энергии нуклонов 1 Bev. При 1 Bev из фиг. 7 имеем m=5,3. Очевидно, что, при дальнейшем уменьшении энергии частиц, m монотонно будет убывать. При энергиях $E < 1$ Bev важную роль будет играть также ядерное диффракционное и кулоновское многократное рассеяние. Кулоновское многократное рассеяние включается в игру лишь после последнего ядерного столкновения, которое при энергиях $E < 0{,}5$ Bev приводит к сильному размазыванию углового распределения протонов.

Вполне возможно, что приведенные выше вычисления удлинения путей нуклонов в атмосфере дают завышенные значения. Однако, на основании приведенных выше результатов, повидимому, можно сделать заключение, что параметр α, строго говоря, не является постоянной величиной, а с ростом энергии нуклонов медленно убывает (см. фиг. 5).

В заключение выражаю благодарность Н. М. Кочаряну, Г. Т. Зацепину и М. Л. Тер-Микаэляну за обсуждение настоящей работы.

Институт физики
Академии наук Армянской ССР Поступило 16 XI 1955

Գ. Ս. Սահակյան

ՆՈՒԿԼՈՆԱՅԻՆ ԿՈՄՊՈՆԵՆՏԻ ԱՆՑՈՒՄԸ ՄԹՆՈԼՈՐՏՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ առաջադրված է օդում ընթացող միջուկա-կասկադային պրոցեսի ֆենոմենոլոգիկ տեսությունը։ Տեսությունը պարունակում է երկու անկախ պարամետրներ՝ λ և α։ λ-ն հանդիսանում է միջուկային փոխազդեցությունների միջին վազքի երկարությունը, իսկ α-ն միջին էներգիայի այն մասն է, որը միջուկային փոխազդեցություններից հետո իր հետ տանում է ամենաարագ նուկլոնը։ Համաձայն Վերնովի, Զացեպինի և Գրիգորովի՝ մի քանի Bev-ից ավելի էներգիա ունեցող նուկլոնների համար α պարամետրը հաստատուն է և մոտավորապես հավասար է 2/3։ Բազմաթիվ փորձերը բերում են այն եզրակացության, որ հիշյալ էներգիաների տիրույթում λ-ն նույնպես հաստատուն է և օդի դեպքում հավասար է 65 գ/սմ²։ Ելնելով α և λ պարամետրների այդ արժեքներից և առաջնային նուկլոնների էներգետիկ սպեկտրից, արտածված է ընդհանուր բանաձև (7) մթնոլորտի կամավոր խորությունում նուկլոնների ինտենսիվության բաշխման համար ըստ էներգիայի և զենիթային անկյունների։

Հաշված է պրոտոնների ուղղաձիգ հոսանքի էներգետիկ բաշխումը Արագածի բարձրության (3200 մ) համար։ Ստացված արդյունքը համեմատված է Քոչարյանի և նրա աշխատակիցների կողմից չափված էներգետիկ սպեկտրի հետ։ Փորձի սխալների սահմաններում տեսական և էքսպերիմենտալ սպեկտրները չեն հակասում իրար։

Աշխատանքում քննված է նաև միջուկային պատիկ ցրման հարցը։ Ցույց է տրված, որ 100 Bev-ից պակաս էներգիաների համար միջուկային ցրման երևույթը բերում է նուկլոնների անցած ճանապարհի երկարացմանը մթնոլորտում և կարևոր նշանակություն ունի նուկլոնների ինտենսիվության թուլացման հարցում։

Հաշված է նուկլոնների հոսքի կլանման գործակիցը և պրոտոնների ինտենսիվության անկյունային բաշխումը ծովի մակարդակից 3200 մ

բարձրության համար։ Ստացված արդյունքները չեն հակասում փորձնական տվյալներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жданов Г. Б.* и *Любимов Е. Л.* ДАН СССР, 55, 119, 1947.
2. *Векслер В. И.*, *Курносова Л. В.* и *Любимов А. Л.* ЖЭТФ, 17, 1026, 1947.
3. *Алексеева К. И.* и *Вернов С. Н.* ДАН СССР, 62, 199, 1948.
4. *Вернов С. Н.* и *Чарахчьян Т. Н.* ДАН СССР, 62, 319, 1948.
5. *Зацепин Г. Т.* ДАН СССР, 67, 993, 1949.
6. *Вернов С. Н.* ЖЭТФ, 19, 621, 1949.
7. *Биргер Н. Г.*, *Векслер В. И.*, *Добротин Н. А.*, *Зацепин Г. Т.*, *Курносова Л. В.*, *Любимов А. Л.*, *Розенталь И. Л.* и *Эйдус Л. Х.* ЖЭТФ, 19, 826, 1949.
8. *Heitler W.* and *Janossi L.* Proc. Phys. Soc. A62, 374, 1949; Helv. Phys. Acta. 23, 417, 1950.
9. *Janossy L.* Proc. Roy. Irish. Acad. A53, 181, 1950; Proc. Phys. Soc., A63, 241, 1950.
10. *Janossy L.* and *Messel H.* Proc. Phys. Soc. A63, 1101, 1950; Proc. Roy. Irish. Acad. A54, 245, 1951.
11. *Messel H.* Proc. Phyc Soc., A64, 726, 1951; Proc. Roy. Irish. Acad., A54, 125, 1951; Comm. Dublin institute for Advanced Studies, series A, № 7, 1951; Phys. Rev., 83, 26, 1951; Phys. Rev., 83, 21, 1951; Proc. Phys. Soc., A65, 465, 1952.
12. *Messel H.* and *Ritson D. M.*, Proc. Phyc. Soc., A63, 1359, 1950.
13. *Messel H.* and *Gardnier J. W.* Phys. Rev., 84, 1256, 1951.
14. *Thompson G.* and *Hodgson P. E.* Phil. Mag., 42, 978, 1951.
15. *Clementel E.* and *Puppi G.* Nuovo Cim., 8, 936, 1951.
16. *Caldirola P.*, *Fieschi R.* and *Gulmanelli P.* Nuovo Cim., 9, 5, 1952.
17. *Messel H.* and *Potts R. B.* Proc. Phys. Soc., A65, 854, 1952; Proc. Phys. Soc. A65, 473, 1952.
18. *Mccusker C. B. A.* and *Messel H.*, Proc. Phys. Soc., A64, 948, 1951.
19. *Ferreaux C.* Helv. Phys. Acta, 24, 551, 1951.
20. *Green H. S.* and *Messel H.* Phys. Rev., 83, 842, 1951; Proc. Phys Soc., A64, 1083, 1951; Phys. Rev., 85, 679, 1952; Proc. Phys. Soc. A65, 689, 1952.
21. *Messel H.* and *Grenn H. S.* Phys. Rev., 83, 1279, 1951; Proc. Phys. Soc., A65, 245, 1952; Phys. Rev., 87, 738, 1952.
22. *Messel H.* The development of a nucleon cascade. Progress in cosmic ray physics. vol II. Edited by I. G. Wilson, 1954.
23. *Розенталь И. Л.* ДАН СССР, 80, 731, 1951; Изв. АН СССР, серия физ., 17, 65, 1951; ЖЭТФ, 23, 440, 1952.
24. *Зацепин Г. Т.* Докторская диссертация. ФИАН СССР, 1954. См. также ЖЭТФ, 19, 1104, 1949.
25. *Григоров Н. Л.* Докторская диссертация. ФИАН СССР, 1954.
26. *Budini P.* and *Moliere G.* Das Zusammenspiel der Komponenten. Vorträge über Kosmische Strahlung. Herausgegeben von W. Heisenberg. S. 365—412, 1953.
27. *Miss, Brown R. H.*, *Gamerini U.*, *Fowler P. H.*, *Heitler H.*, *King D. T.* and *Powell C. F.* Phyl. Mag., 40, 862, 1949.
28. *Camerini U.*, *Coor T.*, *Davies J. H.*, *Fowler P. H.*, *Lock W. O.*, *Muirhead H.* and *Tobin N.* Phil. Mag., 40, 1073, 1949.
29. *Fowler P. H.* Phil. Mag. 41, 169, 1950.
30. *Camerini U.*, *Fowler P. H.*, *Lock W. O.*, *Muirhead H.* Phil. Mag. 41, 413, 1950.
31. *Carlson A. G.*, *Hooper J. E.*, *Kong D. T.* Phil. Mag. 41, 701, 1950.
32. *Lock W. O.* and *Yekutieli G.* Phil. Mag., 43, 231, 1952.
33. *Daniel R. R. Davies J. H.*, *Mulvey J. H.* and *Perkins D. H.* Phil. Mag., 43, 753, 1952.

34. *Вернов С. Н., Григоров Н. Л., Зацепин Г. Т.* и *Чудаков А. Е.* Изв. АН СССР, серия физ., 19, 4 3, 1955.
35. *Григоров Н. Л.* ДАН СССР, 94, 835, 1954.
36. *Зацепин Г. Т.* и *Розенталь И. Л.* ДАН СССР, 99, 369, 1954.
37. *Fermi E.* Prog. Theor. Phys., 5, 570, 1950; Phys. Rev., 81, 683, 1951.
38. *Ландау Л. Д.* Изв. АН СССР, серия физ., 17, 51, 1953.
39. *Hi b rry N.* Phys. Rev. 10 7, 1941.
40. *Winckler J. R., Stix T., Dwight K.* and *Sabin R.* Phys. Rev., 79, 656, 1950.
41. *Winckler J. R., Stroud W. G.* Phys. Rev., 76, 1012, 1949.
42. *Van Allen J. A.* and *Singer S. F.* Phys. Rev., 78, 819, 1950; Phys Rev., 80, 116, 1950; Nature 170, 62, 1952.
43. *Pomerantz M. A.* Phys. Rev., 75, 69, 1949; 77, 830, 1950.
44. *Pomerantz M. A.* and *McClure G. W.* Phys. Rev., 86, 536, 1952; 86, 588, 1952.
45. *Вернов С. Н., Куликов А. М.* и *Чарахчьян А. Н.* Изв. АН СССР, серия физ., 17, 13, 1953.
46. *Вернов С. Н.* и *Чарахчьян А. Н.* ДАН СССР, 91, 487, 1953.
47. *Singer S. F.* Phys. Rev., 77, 729, 1950.
48. *Montgomery D. J. X.* Cosmic Ray Physics, 131, Princeton Univ. Press, 1949.
49. *Perlow G. J., Davis L. R., Kissinger C. W., Shipman J. D.* Phys. Rev., 88, 321, 1952.
50. *Lal D.* Proc. Indian Acad. Sci., A38, 93, 1953.
51. *Lal D. Yash Pal, Kaplon M. F.* and *Peters B.* Phys. Rev., 86, 569, 1952.
52. *Engler A., Haber-Schaim U.* Phys. Rev., 95, 1700, 1954.
53. *Meredith L. H., Van Allen J. A.* and *Cotlieb M. B.* Phys. Rev., 99, 198, 1955.
54. *Фрадкин М. И.* УФН, 53, 305, 1954.
55. *Peters B.* The nuture of primary cosmic Radiation. Progress in cosmic ray Physics. Edited by *Wilson J. G.* Amsterdam, 1952.
56. *Neher H. V.* Recent data on Geomagnetic effects. Progress in cosmic ray Physics. Fdited by *Wilson J. G.* Amsterdam, 1952.
57. *Chew F. F. Leavitt C. P.* and *Shapiro A. M.* Bull. Amer. Phys. Soc., 29, 47, 1954.
58. *Snow G. A., Coor T., Hill D. A., Harnyak W. F.* and *Smith L. W.* Bull Amer. Phys. Soc., 29, 54, 1954.
59. *Coor T., Hill D. A., Hornyak W. F., Smith L. W.* and *Snow G.* Phys. Rev., 98, 1369, 1955.
60. *Smith L. W., Leavit C. P., Shapiro A. M., Swartz C. E.* and *Widgoff M.* Bull. Amer. Phys. Soc., 28, 15, 1953.
61. *Friedlander G., Miller I. M., Wolfgang R., Hudis J.* and *Baker E.* Phys. Rev., 94, 727, 1954.
62. *Кочарян Н. М., Саакян Г. С., Айвазян М. Т., Киракосян З. А.* и *Алексанян А. С.* ДАН СССР, 107, 668, 1956.
63. *Померанчук И. Я.* и *Фейнберг Е. Л.* ДАН СССР, 93, 439, 1953.
64. *Рыжкова К. П.* и *Сарычева Л. И.* ЖЭТФ, 28, 618, 1955.
65. *Kaplon M. F., Klose J. Z., Ritson D. M.* and *Walker W. D.* Phys. Rev., 91, 1573, 1953.
66. *Алиханян А. И., Алиханов А. И.* и *Вайсенберг А.* ЖЕТФ, 18, 301, 1948.

Письмо в редакцию

По недосмотру авторов в работу „Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля" (т. IX, № 3, 1956) вкрались следующие ошибки:

1°. В формулировках теоремы на стр. 4 и теоремы 2 на стр. 13 следует указать, что в формуле

$$f''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi''(x, \lambda) dg(\lambda)$$

интеграл равно сходится с разложением $f''(x)$ по косинусам в обычный интеграл Фурье, т. е. в формулировках вышеуказанных теорем следует добавить еще одно условие (шестое):

6. $f''(x)$ в точке x удовлетворяет локальному условию разложения в обычный ряд Фурье.

2°. На стр. 5 в формуле (4) мы ошибочно поставили вместо $w_x^{(k)}(x, t, s)$ только первый член разложения; это на результатах работы не сказывается, так как явный вид этого равенства не используется, а используется лишь дифференцируемость $w(x, t, s)$ по x, что следует из определения функции $w(x, t, s)$ через функцию Римана.

Б. Левитан
И. Саргсян