

МАТЕМАТИКА

А. Е. Аветисян

К теории обобщенных интегральных преобразований
функций многих переменных

Введение

В работе М. М. Джрбашяна [1] была построена теория прямых и обратных интегральных преобразований с ядрами вида e^{-z^p} и $E_p(z; \mu)$ в классе L_2 , где $E_p(z; \mu)$ целая функция, определяемая рядом Тейлора вида

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + np^{-1})} \quad \left(p \geq \frac{1}{2}; \quad 0 < \mu < +\infty \right)$$

Используя поведение таких преобразований в комплексной области, им был построен интегральный аппарат, являющийся естественным обобщением интеграла Фурье, для представления функций, принадлежащих к классу L_2 на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат. Полученный аппарат позволил доказать, что для произвольной конечной системы лучей $\{L\}$, исходящих из одной точки комплексной плоскости, можно построить целые функции нормального типа и определенного порядка $p \geq \frac{1}{2}$, сходящиеся

в среднем к заданной функции, принадлежащей к классу L_2 на $\{L\}$.

В вышеуказанной работе, в частности, были доказаны следующие предложения.

Теорема 1. Пусть $p \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Для любой функции $g(y)$ из класса $g(y)y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$\tilde{f}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} g(y) y^{\mu-1} dy$$

определяет почти всюду функции $\tilde{f}^{(+)}(x)$ и $\tilde{f}^{(-)}(x)$, принадлежащие к классу $L_2(0, +\infty)$. Двойственная формула

$$g(y)y^{\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ e^{-\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho} \left(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu + 1 \right) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx \right] + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho} \left(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu + 1 \right) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \right] \right\}$$

также имеет место почти всюду на $(0, \infty)$, при этом имеет место формула Парсеваля:

$$\int_0^{\infty} |g(y)|^2 y^{2\mu-2} dy = \rho \int_0^{\infty} |f^{(+)}(x)|^2 dx + \rho \int_0^{\infty} |f^{(-)}(x)|^2 dx$$

Теорема 2. Для любой функции $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ формула

$$g^{(\pm)}(y)y^{\mu-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dy} \left\{ y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho} \left(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu + 1 \right) x^{\mu-1} f(x) dx \right\}$$

где $\rho > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, определяет почти всюду на $(0, +\infty)$ функции $g^{(\pm)}(y)y^{\mu-1}$, принадлежащие к классу $L_2(0, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ixy} - 1}{-iy} g^{(+)}(y)y^{\mu-1} dy + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{ixy} - 1}{iy} g^{(-)}(y)y^{\mu-1} dy \right\}$$

тоже имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$; кроме того, существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от $g^{(\pm)}(y)$ и $f(x)$, такие, что

$$\int_0^{\infty} |g^{(\pm)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy \leq M_1 \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

и

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq M_2 \left\{ \int_0^{\infty} |g^{(+)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy + \int_0^{\infty} |g^{(-)}(y)|^2 y^{2\mu-2} dy \right\}$$

Теорема 3. Для любой функции $g(y)$ из класса

$$g(y)y^{\mu-1} \in L_2(0, +\infty), \text{ если } \rho \geq \frac{1}{2} \text{ и } \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho},$$

имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\infty |g(y) - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho \left(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu \right) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx - \\ - e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho \left(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu \right) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx|^2 y^{2\mu-2} dy = 0$$

где, как и в теореме 1,

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm i y^\rho} g(y) y^{\mu-1} dy$$

Теорема 4. Пусть $\rho \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$. Если $g_1(y)$ произвольная функция из класса

$$\int_0^\infty |g_1(y)|^2 y^{2\mu-2\rho-1} dy < +\infty$$

то функции

$$f^{(\pm)}(x) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{\pm ixy^\rho} - 1}{\pm i y^\rho} g_1(y) y^{\mu\rho-1} dy$$

принадлежат к классу $L_2(0, +\infty)$. Целые функции порядка ρ и типа $\sigma > 0$, определяемые по формуле

$$G_\sigma(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho \left(x^{1/\rho} z e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu \right) x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx + \\ + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^\sigma E_\rho \left(x^{1/\rho} z e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu \right) x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx$$

сходятся в среднем к $g_1(y)$, когда $\sigma \rightarrow +\infty$ в смысле

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_0^\infty |g_1(y) - G_\sigma(y)|^2 y^{2\mu-2\rho-1} dy = 0$$

В случае, когда $\rho \geq 1$, для функций $G_\sigma(z)$ справедливо также утверждение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |G_s(ye^{i\varphi})|^2 y^{2\alpha p - p - 1} dy = 0$$

при
$$\frac{\pi}{p} \leq \varphi \leq 2\pi - \frac{\pi}{p}.$$

Обозначим через $\{L\}$ совокупность лучей

$$l_k; \arg z = \varphi_k (k = 1, 2, \dots, n), \quad 0 = \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

исходящих из начала координат. Обозначим далее

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}$$

Теорема 5. Пусть $p \geq \alpha$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Для произвольной функции $F(z)$, определенной на $\{L\}$ и удовлетворяющей условию

$$\int_{\{L\}} |F(z)|^2 |z|^{2\alpha p - p - 1} d|z| < +\infty$$

существуют целые функции $G_s(z)$ порядка p и типа α , для которых

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{\{L\}} |F(z) - G_s(z)|^2 |z|^{2\alpha p - p - 1} d|z| = 0$$

Целью настоящей статьи является перенесение всех вышеуказанных результатов М. М. Джрбашяна на многомерный случай, т. е. на функции многих переменных. Однако, для простоты формулировок и записи, мы все эти результаты будем излагать для функций двух переменных.

§ 1. Вспомогательные предложения

1°. Для дальнейшего нам нужны некоторые теоремы, которые известны или легко следуют из теории интегралов Фурье для функций многих переменных [2,3]:

Теорема А (Планшерель). Если

$$f(x_1, x_2) \in L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty) \text{ т. е.}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty$$

то существует функция $F(x_1, x_2) \in L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$ такая, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \hat{f}(u_1, u_2) e^{i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} du_1 du_2|^2 dx_1 dx_2 = 0$$

причем для почти всех x_1 и x_2

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix_1 u_1} - 1}{iu_1} \frac{e^{ix_2 u_2} - 1}{iu_2} \hat{f}(u_1, u_2) du_1 du_2$$

Справедливо также равенство

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2) - \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a F(u_1, u_2) e^{-i(x_1 u_1 + x_2 u_2)} du_1 du_2|^2 dx_1 dx_2 = 0$$

причем почти для всех x_1 и x_2

$$\hat{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix_1 u_1} - 1}{-iu_1} \frac{e^{-ix_2 u_2} - 1}{-iu_2} F(u_1, u_2) du_1 du_2$$

Кроме того, имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$$

Если функции $\hat{f}(x_1, x_2)$ и $\hat{g}(x_1, x_2)$ принадлежат к классу $L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$, а функции $F(x_1, x_2)$ и $G(x_1, x_2)$ суть соответственно преобразования Фурье этих функций, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x_1, x_2) \overline{\hat{g}(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2) \overline{G(x_1, x_2)} dx_1 dx_2$$

Применением теоремы Планшереля к функции $2\pi \hat{f}(e^{\xi_1}, e^{\xi_2}) e^{\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)}$ и последующей заменой переменных легко получаются две теоремы Меллина.

Теорема Б (Мелли). Если функция $\hat{f}(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty$$

то функция

$$I(s_1, s_2; a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \int_{\frac{1}{a}}^a \hat{f}(x_1, x_2) x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2$$

$$s_k = \frac{1}{2} + it_k, \quad -\infty < t_k < +\infty \quad (k = 1, 2)$$

в среднем сходится к некоторой функции

$$l(s_1, s_2) \in L_2 \left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty; \frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty \right)$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} |l(s_1, s_2) - l(s_1, s_2; a)|^2 ds_1 ds_2 = 0$$

Функция

$$f(x_1, x_2; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \int_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} l(s_1, s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2$$

в среднем сходится к функции $f(x_1, x_2)$ в смысле

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2; a)|^2 dx_1 dx_2 = 0$$

кроме того, имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| l\left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2\right) \right|^2 dt_1 dt_2$$

Теорема В (Меллин). Если

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \int_0^\infty |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < +\infty$$

то имеет место равенство

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) g(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} l(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2$$

где $l(s_1, s_2)$ и $G(s_1, s_2)$ — трансформации Меллина функций f и g в смысле теоремы Б.

2°. Приводим некоторые вспомогательные леммы, которые являются простыми следствиями соответствующих лемм работы М. М. Джрбашяна [1].

Пусть

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \quad \left(\rho \geq \frac{1}{2}, \mu > 0 \right)$$

целая функция Миттаг-Лефлера, имеющая порядок ρ и тип 1.

Обозначим

$$E_{\rho_1}(x_1; \mu_1) \cdot E_{\rho_2}(x_2; \mu_2) = E_{\rho_1 \rho_2}(x_1, x_2; \mu_1, \mu_2) \quad (1.1)$$

при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$. Обозначим также

$$e_{\rho_1 \rho_2}(x_1, x_2; z_1, z_2) = E_{\rho_1 \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} e^{iz_1}, x_2^{1/\rho_2} e^{iz_2}; \mu_1 + 1, \mu_2 + 1) x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \quad (1.2)$$

Лемма 1. Если $\rho_k > \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ ($k = 1, 2$), то при

$$\frac{\pi}{2\rho_k} \leq \alpha_k \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k} \quad (k = 1, 2)$$

$$\frac{e_{\rho_1 \rho_2}(x_1, x_2; z_1, z_2)}{x_1 x_2} \in L_2(0, +\infty; 0, +\infty) \quad (1.3)$$

Лемма 2. Если $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $\frac{\pi}{2\rho_k} \leq \alpha_k \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k}$, $s_k = \frac{1}{2} + it_k$, $-\infty < t_k < +\infty$ ($k = 1, 2$),

то

$$\begin{aligned} \frac{U_{\rho_1 \rho_2}(s_1, s_2; z_1, z_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2}(x_1, x_2; z_1, z_2)}{x_1 x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2 = \\ &= \frac{4\pi^2 \rho_1 \rho_2}{\Gamma(2-s_1)\Gamma(2-s_2)} \frac{e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \rho_1 z_1(s_1 + \mu_1 - 1)\right]} e^{i\left[\frac{\pi}{2} - \rho_2 z_2(s_2 + \mu_2 - 1)\right]}}{\left[1 - e^{-2\pi \rho_1(s_1 + \mu_1 - 1)}\right] \left[1 - e^{-2\pi \rho_2(s_2 + \mu_2 - 1)}\right]} \quad (1.4) \end{aligned}$$

причем в случае, когда $\rho_1 = \frac{1}{2}$ или $\rho_2 = \frac{1}{2}$, интегралы понимаются в смысле сходимости в среднем на $\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty; \frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$.

Лемма 3. Если $\rho_k > \frac{1}{2}$ ($k = 1, 2$), то для всех α_k из

$\left[\frac{\pi}{2\rho_k}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_k}\right]$ ($k = 1, 2$) существует такое число M , что

$$\left| U_{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2; z_1, z_2 \right) \right| \leq M \quad (1.5)$$

$$(-\infty < t_k < +\infty, k = 1, 2)$$

Обозначим

$$\frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)}{x_1 x_2} = \frac{e^{\pm iz_1} - 1}{\pm ix_1} \frac{e^{\pm iz_2} - 1}{\pm ix_2} \quad (1.6)$$

Обозначим далее

$$\frac{H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)}{x_1 x_2} x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} e^{\pm i \frac{\pi}{2} s_1 \pm i \frac{\pi}{2} s_2} \quad (1.7)$$

Из лемм 13 и 14 работы [1] легко получаются следующие тождества, которым удовлетворяют преобразованию Меллина $U_{\rho_1 \rho_2}(s_1, s_2; \alpha_1, \alpha_2)$ и $H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)$ функций $e_{\rho_1 \rho_2}(x_1, x_2; \alpha_1, \alpha_2)$ и $h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)$. Обозначим

$$e^{i \frac{\pi}{2} (-2 + \mu_1 + \mu_2)} = C_1, \quad e^{i \frac{\pi}{2} (\mu_1 - \mu_2)} = C_2,$$

$$e^{i \frac{\pi}{2} (\mu_2 - \mu_1)} = C_3, \quad e^{i \frac{\pi}{2} (2 - \mu_1 - \mu_2)} = C_4. \quad (1.8)$$

Лемма 4. При $\rho_k \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, когда $s_k = \frac{1}{2} + it_k$, $-\infty < t_k < +\infty$ ($k=1, 2$), справедливо тождество

$$C_1 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) +$$

$$+ C_2 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(+)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) +$$

$$+ C_3 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(-)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) +$$

$$+ C_4 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) = 4\pi^2 \rho_1 \rho_2, \quad (1.9)$$

Лемма 5. Пусть $\rho_k \geq 1$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $s_k = \frac{1}{2} + it_k$, $-\infty < t_k < +\infty$ ($k=1, 2$). При этих условиях
а) если

$$0 \leq \omega_k \leq 2\pi \left(1 - \frac{1}{\rho_k} \right) \quad (k=1, 2) \quad (1.10)$$

то имеет место тождество

$$C_1 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) +$$

$$+ C_2 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(+)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + C_3 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(-)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_4 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) = 0 \quad (1.11)
\end{aligned}$$

б) если

$$0 < \omega_1 < 2\pi \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \quad (1.12)$$

то имеет место тождество

$$\begin{aligned}
& C_1 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_2 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(+)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_3 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(-)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_4 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_2} \right) H_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) = 0 \quad (1.13)
\end{aligned}$$

в) если

$$0 \leq \omega_2 \leq 2\pi \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \quad (1.14)$$

то имеет место тождество

$$\begin{aligned}
& C_1 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_2 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(+)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_3 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(-)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) + \\
& + C_4 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; 2\pi - \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) H_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) = 0 \quad (1.15)
\end{aligned}$$

Наконец, из леммы 15 работы [1] получается следующая про-
стая:

Лемма 6. Функции $H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)$ равномерно ограничены при $s_k = \frac{1}{2} + it_k$, $-\infty < t_k < +\infty$, ($k = 1, 2$)

$$\left| H_{(\pm)}^{(\pm)} \left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2 \right) \right| \leq 2\pi.$$

§ 2. Прямые и обратные преобразования в классе $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ для функций двух переменных

1°. На основании вспомогательных предложений § 1 в настоящем параграфе приводятся теоремы о прямых и обратных преобразованиях в классе $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ с ядрами вида

$$\frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} \quad \text{и} \quad \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \pm i \frac{\pi}{2\rho_1}, \pm i \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2}$$

Теорема 1. Пусть $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ ($k = 1, 2$). Для любой функции из класса $g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} \in L_2(0, \infty; 0, \infty)$ формула

$$f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 \quad (2.1)$$

определяет для почти всех x_1 и x_2 функции $f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)$, принадлежащие к классу $L_2(0, \infty; 0, \infty)$.

Двойственная формула

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ D_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \right. \\ + D_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ + D_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ \left. + D_4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $D_k = \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} C_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) также имеет место для почти всех y_1 и y_2 , и, кроме того, справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} \int_0^\infty \int_0^\infty |g(y_1, y_2)|^2 y_1^{2\mu_1-2} y_2^{2\mu_2-2} dy_1 dy_2 =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left(|f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2)|^2 + |f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2)|^2 + |f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2)|^2 + |f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2)|^2 \right) dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

Эта и последующие две теоремы доказываются совершенно так же, как и соответствующие теоремы для функций одного переменного, т. е. как теоремы 1, 5, 7 работы [1]. При этом, конечно, используются вспомогательные результаты для функций двух переменных, сформулированные нами в § 1. Поэтому доказательства этой и последующих двух теорем опускаем.

2°. В пункте 1° мы рассмотрели преобразования с ядрами $\frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2}$. Здесь мы рассмотрим обратную задачу — преобразования в классе $L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$ с ядром

$$\frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \pm \frac{\pi}{2\rho_1}, \pm \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Для любой функции $f(x_1, x_2) \in L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$ формула

$$g_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \pm \frac{\pi}{2\rho_1}, \pm \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} \quad (2.4)$$

где $\rho_k \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ ($k = 1, 2$) определяет почти для всех y_1 и y_2 функции $g_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1}$, принадлежащие к классу $L_2(0, +\infty; 0, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left\{ D_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(-)}^{(-)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-2} dy_1 dy_2 + \right.$$

$$\left. + D_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(+)}^{(+)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + D_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(-)}^{(+)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 + \\
& + D_4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(+)}^{(+)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 \Big\} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

также имеет место почти для всех x_1 и x_2 . Существуют постоянные $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$, не зависящие от функций $f(x_1, x_2)$ и $g_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2)$, такие, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |g_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2)|^2 y_1^{2\mu_1-2} y_2^{2\mu_2-2} dy_1 dy_2 \leq M_1 \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \quad (2.6)$$

и

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_0^\infty |f(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \leq M_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ |g_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2)|^2 + |g_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2)|^2 + \right. \\
& \left. + |g_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2)|^2 + |g_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2)|^2 \right\} y_1^{2\mu_1-2} y_2^{2\mu_2-2} dy_1 dy_2 \quad (2.7)
\end{aligned}$$

§ 3. Сходимость в среднем обобщенных интегральных преобразований для функций двух переменных. Приближение целыми функциями

В этом параграфе дополняется результат теоремы 1 и приводится основная теорема о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ целыми функциями порядка $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ по z_1 , и порядка $\rho_2 \geq \frac{1}{2}$ по z_2 , типы которых стремятся к бесконечности*. В заключении этого параграфа приводится общая теорема о приближении в среднем к функциям, принадлежащим к классу L_2 на произвольной системе „четверть плоскостей“ целыми функциями, типы которых стремятся к бесконечности.

Обозначим

$$e_{\rho_1, \rho_2}(x_1, x_2; z_1, z_2) = E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} e^{iz_1}, x_2^{1/\rho_2} e^{iz_2}; \mu_1, \mu_2) x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \quad (3.1)$$

I^2 . Дополнение теоремы 1. Справедлива

Теорема 3. Для любой функции $g(y_1, y_2)$ из класса

$g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} \in L_2(0, \infty; 0, \infty)$, если $\rho_k \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$ ($k=1, 2$), имеет место предельное соотношение

* Определение и интегральное представление целых функций двух переменных, имеющих различные порядки и типы по отдельным переменным, даны в работе М. М. Джрбашяна [4].

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| g(y_1, y_2) y_1^{\rho_1-1} y_2^{\rho_2-1} - \right. \\
& - D_1 \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& - D_2 \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& - D_3 \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& \left. - D_4 \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| dy_1 dy_2 = 0
\end{aligned} \quad (3.2)$$

где, как и в теореме 1, функции $f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)$ определяются из (2.1).

2°. В этом пункте мы докажем теорему о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ целыми функциями двух комплексных переменных.

Теорема 4. Пусть $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k \rho_k - \rho_k^2 - 1 = \tau_k$ ($k = 1, 2$). Если $g_1(y_1, y_2)$ — произвольная функция из класса

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |g_1(y_1, y_2)|^2 y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} dy_1 dy_2 < \infty \quad (3.3)$$

то функции

$$\begin{aligned}
& f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \\
& = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{4\pi^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1^{\rho_1}, x_2 y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1} y_2^{\rho_2}} g_1(y_1, y_2) y_1^{\rho_1-1} y_2^{\rho_2-1} dy_1 dy_2
\end{aligned} \quad (3.4)$$

принадлежат к классу $L_2(0, \infty; 0, \infty)$. Целые функции порядка ρ_1 и типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 и типа σ_2 по z_2 , определяемые по формуле

$$\begin{aligned}
& \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| g(y_1, y_2) y_1^{\sigma_1-1} y_2^{\sigma_2-1} - \right. \\
& - D_1 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& - D_2 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& - D_3 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 - \\
& \left. - D_4 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2}^* \left(x_1 y_1, x_2 y_2; -\frac{\pi}{2\rho_1}, -\frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right| dy_1 dy_2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где, как и в теореме 1, функции $f_{(-)}^{(\pm)}(x_1, x_2)$ определяются из (2.1).

2°. В этом пункте мы докажем теорему о приближении в среднем к функциям класса $L_2(0, \infty; 0, \infty)$ целыми функциями двух комплексных переменных.

Теорема 4. Пусть $\rho_k > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k \rho_k - \rho_k - 1 = \tau_k$

($k = 1, 2$). Если $g_1(y_1, y_2)$ — произвольная функция из класса

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |g_1(y_1, y_2)|^2 y_1^{\tau_1} y_2^{\tau_2} dy_1 dy_2 < \infty \tag{3.3}$$

то функции

$$\begin{aligned}
& f_{(-)}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \\
& = \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{4\pi^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(-)}^{(\pm)}(x_1 y_1^{\rho_1}, x_2 y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1} y_2^{\rho_2}} g_1(y_1, y_2) y_1^{\mu_1 \rho_1 - 1} y_2^{\mu_2 \rho_2 - 1} dy_1 dy_2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

принадлежат к классу $L_2(0, \infty; 0, \infty)$. Целые функции порядка ρ_1 и типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 и типа σ_2 по z_2 , определяемые по формуле

$$\begin{aligned}
& G_{\sigma_1, \sigma_2}(z_1, z_2) = \\
& = D_1 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i \frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i \frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \tilde{f}_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
& + D_2 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i \frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i \frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \tilde{f}_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
& + D_3 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i \frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i \frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \tilde{f}_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
& + D_4 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i \frac{\pi}{2\rho_1}}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i \frac{\pi}{2\rho_2}}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \tilde{f}_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.5)
\end{aligned}$$

сходятся в среднем к $g_1(y_1, y_2)$, когда $\sigma_1 \rightarrow \infty$, $\sigma_2 \rightarrow \infty$ в смысле

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty |g_1(y_1, y_2) - G_{\sigma_1, \sigma_2}(y_1, y_2)|^2 y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.6)$$

В случае, когда $\rho_k \geq 1$ ($k = 1, 2$), справедливо также утверждение

$$\text{если а) } \frac{\pi}{\rho_k} \leq \varphi_k \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho_k} \quad (k = 1, 2) \quad \text{или} \quad (3.7^a)$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{\rho_1} \leq \varphi_1 \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho_1} \quad \varphi_2 = 0 \quad \text{или} \quad (3.7^b)$$

$$\text{в) } \frac{\pi}{\rho_2} \leq \varphi_2 \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho_2} \quad \varphi_1 = 0 \quad (3.7^a)$$

то имеет место также равенство

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty |G_{\sigma_1, \sigma_2}(y_1 e^{i\varphi_1}, y_2 e^{i\varphi_2})|^2 y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.8)$$

Эта теорема также доказывается по методу доказательства аналогичной теоремы для функций одного переменного, но заключительная часть теоремы имеет некоторые особенности. Поэтому мы докажем эту теорему полностью.

Доказательство. Утверждения теоремы (3.4) и (3.6) немедленно следуют из теорем 3 и 1, если положить там $g(y_1, y_2) = g_1(y_1^{1/\rho_1}, y_2^{1/\rho_2})$ и учесть обозначения (1.2) и (3.1). Остается убедиться в спра-

ведливости утверждения (3.8), когда $\rho_k \geq 1$ ($k = 1, 2$). Докажем это сначала, когда выполняется условие (3.7^a).

Обозначим

$$G(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(y_1, y_2) y_1^{s_1-1} y_2^{s_2-1} y_1^{s_1-1} y_2^{s_2-1} dy_1 dy_2 \quad (3.9)$$

Из теоремы Б § 1 следует, что

$$G\left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2\right) \in L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$$

а из леммы 7 § 1 следует, что и

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\rho_1\rho_2}} H_{(\pm)}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2\right) \times \\ \times G\left(\frac{1}{2} + it_1, \frac{1}{2} + it_2\right) \in L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$$

Теперь, если обозначить

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2; a) = \\ = \frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2} \iint_{R_a} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

где aR означает область интегрирования

$\left(\frac{1}{2} - ia, \frac{1}{2} + ia; \frac{1}{2} - ia, \frac{1}{2} + ia\right)$, то по теореме Б § 1 существует предел в среднем

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \text{l.i.m.} \hat{f}_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2; a) = \\ = \frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2} \iint_{R_\infty} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

причем функции $\hat{f}_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) \in L_2(0, \infty; 0, \infty)$. Покажем, что эти функции совпадают с функциями (3.4).

Из (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \iint_0^{x_1, x_2} \hat{f}_{(\pm)}^{(\pm)}(u_1, u_2; a) du_1 du_2 = \\ = \frac{(4\pi^2\rho_1\rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2} \iint_{R_a} \frac{H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} G(1-s_1, 1-s_2) x_1^{1-s_1} x_2^{1-s_2} ds_1 ds_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Но из формулы (1.7) следует, что $\frac{H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2)}{(1-s_1)(1-s_2)} x_1^{1-s_1} x_2^{1-s_2}$ есть преоб-

разование Меллина функции $\frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2}$. Переходя к пределу в (3.12) при $a \rightarrow \infty$ и применяя теорему В § 1, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(u_1, u_2) du_1 du_2 = \\ &= \frac{(4\pi^2 \rho_1 \rho_2)^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi i)^2} \int_{R_\infty} \int H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) x_1^{1-s_1} x_2^{1-s_2} G(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho_1 \rho_2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1 y_1, x_2 y_2)}{y_1 y_2} g(y_1, y_2) y_1^{\mu_1-1} y_2^{\mu_2-1} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функции $f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2)$ действительно совпадают с функциями (3.4).

Обозначим

$$F_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2 \quad (3.13)$$

Но из (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} & (4\pi^2 \rho_1 \rho_2)^{-\frac{1}{2}} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) имеем

$$F_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) = (4\pi^2 \rho_1 \rho_2)^{-\frac{1}{2}} H_{(\pm)}^{(\pm)}(s_1, s_2) G(1-s_1, 1-s_2)$$

или, что то же самое,

$$F_{(\pm)}^{(\pm)}(1-s_1, 1-s_2) = (4\pi^2 \rho_1 \rho_2)^{-\frac{1}{2}} H_{(\pm)}^{(\pm)}(1-s_1, 1-s_2) G(s_1, s_2) \quad (3.15)$$

Умножим тождество (1.11) леммы 6 § 1 на $G(s_1, s_2)$. Учитывая (3.15), получим

$$\begin{aligned} & C_1 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) F_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \\ &+ C_2 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) F_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) + \\ &+ C_3 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right) F_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) + \end{aligned}$$

$$+ C_4 U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right) F_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) = 0 \quad (3.16)$$

Разделим (3.16) на $(2\pi i)^2(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}$ ($y_1 > 0, y_2 > 0$) и проинтегрируем по области R_∞ . Обозначая $C_k \frac{1}{(2\pi i)^2} = M_k$ ($k=1, 2, 3, 4$), получим

$$\begin{aligned} M_1 \iint_{R_\infty} \frac{U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}} F_{(-)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2 + \\ + M_2 \iint_{R_\infty} \frac{U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}} F_{(+)}^{(-)}(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2 + \\ + M_3 \iint_{R_\infty} \frac{U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}} F_{(-)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2 + \\ + M_4 \iint_{R_\infty} \frac{U_{\rho_1 \rho_2} \left(s_1, s_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right)}{(1-s_1)(1-s_2)y_1^{s_1-1}y_2^{s_2-1}} F_{(+)}^{(+)}(1-s_1, 1-s_2) ds_1 ds_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Применяя теорему В § 1 к этому равенству, получим

$$\begin{aligned} C_1 \iint_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ + C_2 \iint_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \frac{\pi}{\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ + C_3 \iint_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \frac{\pi}{\rho_2} + \omega_2 \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ + C_4 \iint_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \frac{\pi}{2\rho_1} + \omega_1, \frac{\pi}{2\rho_2} + \omega_2 \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Обозначим $\varphi_k = \frac{\pi}{\rho_k} + \omega_k$. Из (3.18) следует, что если $\frac{\pi}{\rho_k} \leq \varphi_k <$

$\leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho_k}$ ($k = 1, 2$), то для почти всех y_1 и y_2 имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ C_1 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \right. \\ & + C_2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 - \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(-)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ & + C_3 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(-)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\ & \left. + C_4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 - \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 - \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(+)}^{(+)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Для любых $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ обозначим

$$*f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \begin{cases} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) & \text{в прямоугольнике } 0 \leq x_1 \leq \sigma_1 \\ & 0 \leq x_2 \leq \sigma_2 \\ 0 & \text{вне этого прямоугольника.} \end{cases}$$

Обозначим далее

$$\begin{aligned} & F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\rho_1-1} y_2^{\rho_2-1} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} \\ & *F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{\rho_1-1} y_2^{\rho_2-1} = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2} *f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} = \\ & = \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{e_{\rho_1 \rho_2} \left(x_1 y_1, x_2 y_2; \varphi_1 + \frac{\pi}{2\rho_1}, \varphi_2 + \frac{\pi}{2\rho_2} \right)}{x_1 x_2 y_1 y_2} f_{(\pm)}^{(\pm)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.20) \end{aligned}$$

Из теоремы 3 следует, что

$$F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} = \lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} *F_{(\pm)}^{(\pm)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} \quad (3.21)$$

Из (3.19), (3.20) и (3.21) выводим, что

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \left\{ C_1 *F_{(-)}^{(-)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} + C_2 *F_{(+)}^{(-)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} + \right. \\ \left. + C_3 *F_{(-)}^{(+)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} + C_4 *F_{(+)}^{(+)}(y_1, y_2) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} \right\} = 0$$

А это значит

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} G_{\sigma_1, \sigma_2}(y_1^{1/\rho_1} e^{i\varphi_1}, y_2^{1/\rho_2} e^{i\varphi_2}) y_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} = 0$$

при $\frac{\pi}{\rho_k} \leq \varphi_k \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho_k}$. Отсюда уже утверждение теоремы в случае

а) сразу получается простой заменой переменных $y_1^{1/\rho_1} = \bar{y}$, $y_2^{1/\rho_2} = \bar{y}_2$.

Теперь, исходя из тождеств (1.13) и (1.15) леммы 5 § 1, совершенно аналогично получим и утверждение теоремы в случаях б) и в).

3°. Пусть имеем две системы лучей, исходящих из начала координат:

$$\arg z_1 = \varphi_k (k = 1, 2, \dots, n), \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi \\ \arg z_2 = \psi_j (j = 1, 2, \dots, m), \quad 0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_m < 2\pi \quad (3.22)$$

Любую пару лучей (φ_k, ψ_j) назовем „четверть-плоскостью“.

Обозначим через $[\Omega]$ систему всевозможных „четверть-плоскостей“ из (3.22), число которых равно mn . Обозначим далее

$$\alpha_1 = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad \alpha_2 = \max_{1 \leq j \leq m} \left\{ \frac{\pi}{\psi_{j+1} - \psi_j} \right\} \quad (3.23)$$

Докажем общую теорему об аппроксимации целыми функциями двух комплексных переменных на произвольной конечной системе „четверть-плоскостей“.

Теорема 5. Пусть $\rho_k > \alpha_k$, $\frac{1}{2} < \mu_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_k}$, $2\mu_k \rho_k - \rho_k - 1 = \tau_k$ ($k = 1, 2$). Для произвольной функции $F(z_1, z_2)$, определенной на $[\Omega]$ и удовлетворяющей условию

$$\int \int_{[\Omega]} |F(z_1, z_2)|^2 |z_1|^{\tau_1} |z_2|^{\tau_2} |dz_1| |dz_2| < \infty \quad (3.24)$$

существуют целые функции $G_{\sigma_1, \sigma_2}(z_1, z_2)$ порядка ρ_1 , типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 , типа σ_2 по z_2 , для которых

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_{\Omega'} |F(z_1, z_2) - G_{\sigma_1, \sigma_2}(z_1, z_2)|^2 |z_1|^{\sigma_1} |z_2|^{\sigma_2} d|z_1| d|z_2| = 0 \quad (3.25)$$

Доказательство. Из условия (3.24) следует, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |F(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\varphi_j})|^2 y_1^{\sigma_1-1} y_2^{\sigma_2-1} dy_1 dy_2 < \infty \quad (k=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m)$$

откуда, как в теореме 4, заключаем, что функции

$$\begin{aligned} & f_{(\pm)}^{(k, j)}(x_1, x_2; k, j) = \\ &= \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{4\pi^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h_{(\pm)}^{(k, j)}(x_1 y_1^{\rho_1}, x_2 y_2^{\rho_2})}{y_1^{\rho_1} y_2^{\rho_2}} F(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\varphi_j}) y_1^{\sigma_1 \rho_1 - 1} y_2^{\sigma_2 \rho_2 - 1} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

принадлежат к классу $L_2(0, \infty; 0, \infty)$

Обозначим

$$\begin{aligned} & G_{\sigma_1, \sigma_2}^{(k, j)}(z_1, z_2) = \\ &= D_1 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i(\frac{\pi}{2\rho_1} - \varphi_k)}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i(\frac{\pi}{2\rho_2} - \varphi_j)}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times \\ & \quad \times f_{(-)}^{(k, j)}(x_1, x_2; k, j) dx_1 dx_2 + \\ &+ D_2 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{i(\frac{\pi}{2\rho_1} - \varphi_k)}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i(\frac{\pi}{2\rho_2} + \varphi_j)}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times \\ & \quad \times f_{(+)}^{(k, j)}(x_1, x_2; k, j) dx_1 dx_2 + \\ &+ D_3 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i(\frac{\pi}{2\rho_1} + \varphi_k)}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{i(\frac{\pi}{2\rho_2} - \varphi_j)}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times \\ & \quad \times f_{(-)}^{(k, j)}(x_1, x_2; k, j) dx_1 dx_2 + \\ &+ D_4 \int_0^{\sigma_1} \int_0^{\sigma_2} \frac{E_{\rho_1, \rho_2}(x_1^{1/\rho_1} z_1 e^{-i(\frac{\pi}{2\rho_1} + \varphi_k)}, x_2^{1/\rho_2} z_2 e^{-i(\frac{\pi}{2\rho_2} + \varphi_j)}; \mu_1, \mu_2)}{x_1^{1-\mu_1} x_2^{1-\mu_2}} \times \\ & \quad \times f_{(+)}^{(k, j)}(x_1, x_2; k, j) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Нетрудно проверить, что $G_{\sigma_1, \sigma_2}^{(k, j)}(z_1, z_2)$ есть функция порядка ρ_1 , типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 , типа σ_2 по z_2 .

В силу теоремы 4

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| F(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\psi_j}) - G_{\sigma_1 \sigma_2}^{(k, j)}(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\psi_j}) \right|^2 y_1 y_2 dy_1 dy_2 = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.27)$$

А если

$$\text{а) } |\varphi - \varphi_k| \geq \frac{\pi}{\rho_1}, \quad |\psi - \psi_j| \geq \frac{\pi}{\rho_2}$$

$$\text{или б) } |\varphi - \varphi_k| \geq \frac{\pi}{\rho_1}, \quad \psi = \psi_j$$

$$\text{или в) } \varphi = \varphi_k, \quad |\psi - \psi_j| \geq \frac{\pi}{\rho_2}$$

то

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| G_{\sigma_1 \sigma_2}^{(k, j)}(y_1 e^{i\varphi}, y_2 e^{i\psi}) \right|^2 y_1 y_2 dy_1 dy_2 = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| G_{\sigma_1 \sigma_2}^{(k, j)}(y_1 e^{i\varphi_\alpha}, y_2 e^{i\psi_\beta}) \right|^2 y_1 y_2 dy_1 dy_2 = 0 \quad (3.28)$$

где (α, β) какая-нибудь пара чисел, отличная от пары (k, j) .

Обозначим

$$G_{\sigma_1 \sigma_2}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m G_{\sigma_1 \sigma_2}^{(k, j)}(z_1, z_2) \quad (3.29)$$

тогда из (3.26), (3.27) и (3.28) будет следовать равенство

$$\lim_{\substack{\sigma_1 \rightarrow \infty \\ \sigma_2 \rightarrow \infty}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left| F(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\psi_j}) - G_{\sigma_1 \sigma_2}(y_1 e^{i\varphi_k}, y_2 e^{i\psi_j}) \right|^2 y_1 y_2 dy_1 dy_2 = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m)$$

что равносильно утверждению теоремы.

В заключение благодарю моего учителя М. М. Джрбашяна за руководство и помощь в выполнении этой работы.

Ереванский Государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 25 II 1956

Ա. Ե. Ավետիսյան

ՇԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՎԱԾ
ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուժ բերվում են շատ փոփոխականների ֆունկցիաների ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխությունների մասին թեորեմներ, որոնք հանդիսանում են Մ. Մ. Զրբաշյանի մի աշխատության [1] հիմնական արդյունքների անալոգը շատ փոփոխականների ֆունկցիաների համար: Դատողությունների և դրություն պարզություն նախաանկով արդյունքները շարադրված են երկու փոփոխականի ֆունկցիաների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций. Известия АН СССР, серия математическая, 19 (1955).
2. Титчмарш Е. К. Введение в теорию интегралов Фурье.
3. Бохнер С. и Мартин У. Т. Функции многих комплексных переменных.
4. Джрбашян М. М. К теории некоторых классов целых функций многих переменных, Известия АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, т. VIII, № 4, 1955.

Г. А. Амбарцумян

Моменты распределения процесса Маркова

Случайный процесс $X(t)$ называется марковским, если при любых $t_1, t_2, \dots, t_n$ имеет место равенство:

$$P_{X(t_1)=x_1, X(t_2)=x_2, \dots, X(t_{k-1})=x_{k-1}}\{X(t_k) < x\} = \\ = P_{X(t_{k-1})=x_{k-1}}\{X(t_k) < x\}^*$$

т. е. вероятность неравенства

$$X(t_k) < x,$$

вычисленная при условии $X(t_{k-1}) = x_{k-1}$, не меняется после того, как становится известным, какие значения приняла случайная функция при значениях аргумента $t < t_{k-1}$.

§ 1. Стационарные процессы Маркова и его моменты

1. Марковский процесс $X(t)$ вполне определяется функциями:

$$G(s, x) = P\{X(s) < x\} \\ F(s, x, t, y) = P\{X(t) < y \mid X(s) = x\} \quad (1.1)$$

Действительно, многомерные функции распределения вероятностей, определяющие процесс [1], будут:

$$F_{1,1}(x_1) = G(t_1, x_1)$$

$$F_{1,1,1}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} d_{x_1} G(t_1, x_1) d_{x_2} F(t_1, x_1, t_2, x_2)$$

$$F_{1,1,1,1}(x_1, x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} d_{x_1} G(t_1, x_1) d_{x_2} F(t_1, x_1, t_2, x_2) d_{x_3} F(t_2, x_2, t_3, x_3) \\ \dots \dots \dots (1.2)$$

Если, кроме того, функции (1.1) дифференцируемы:

* $P_B\{A\}$ обозначает вероятность события A , при условии, что событие B имело место.

$$\frac{\partial G}{\partial x} = g(s, x) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f(s, x, t, y),$$

то многомерные плотности распределения вероятностей, определяющие процесс, будут

$$\begin{aligned} f_{t_1}(x_1) &= g(t_1, x_1) \\ f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &= g(t_1, x_1) f(t_1, x_1, t_2, x_2) \\ f_{t_1, t_2, t_3}(x_1, x_2, x_3) &= g(t_1, x_1) f(t_1, x_1, t_2, x_2) f(t_2, x_2, t_3, x_3) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. Для того, чтобы при

$$G(s, x) = G(x)$$

двумерная функция распределения процесса

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$$

зависела только от x_1, x_2 и $t_2 - t_1$, необходимо и достаточно, чтобы функция перехода $F(s, x, t, y)$ зависела только от x, y и $t - s$. Действительно, это вытекает из равенства:

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dG(x_1) \cdot \int_{-\infty}^{x_2} d_x F(t_1, x_1, t_2, x_2)$$

В случае же существования плотностей:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = g(s, x) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f(s, x, t, y),$$

для того, чтобы при

$$g(s, x) = g(x)$$

двумерная плотность

$$\frac{\partial^2 F_{t_1, t_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{t_1, t_2}(x_1, x_2)$$

зависела только от x_1, x_2 и $t_2 - t_1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(s, x, t, y)$ зависела только от x, y и $t - s$, что вытекает из равенства

$$f_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = g(x_1) \cdot f(t_1, x_1, t_2, x_2)$$

Марковский процесс будем называть *стационарным в расширенном смысле*, если

$$G(s, x) = G(x), \quad F(s, x, t, y) = F(x, y, t - s)$$

или, в случае существования плотностей, если

$$g(s, x) = g(x), \quad f(s, x, t, y) = f(x, y, t - s)$$

Очевидно, что если марковский процесс стационарен в расширенном смысле, то он стационарен и в узком смысле и, следовательно, стационарен в широком смысле. В настоящей работе стационарные процессы мы будем понимать как стационарные процессы в расширенном смысле.

3. Если ограничиться рассмотрением непрерывных марковских процессов, удовлетворяющих условиям Колмогорова [2], то для того, чтобы марковский процесс был стационарен, необходимо и достаточно, чтобы функции:

$$\begin{aligned} \alpha(s, x) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x) f(s, x, s+\Delta s, y) dy \\ \beta(s, x) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_{-\infty}^{\infty} (y-x)^2 f(s, x, s+\Delta s, y) dy \end{aligned} \quad (1.4)$$

определяющие процесс, не зависели от s , а одномерная функция процесса имела вид:

$$g(x) = \frac{C}{\beta(x)} e^{2 \int \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx}$$

Действительно, если $g(s, x) = g(x)$ и $f(s, x, t, y) = f(x, y, \tau)$, то $g(x)$ будет удовлетворять уравнению:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \cdot g(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\beta(x) \cdot g(x)]$$

откуда

$$g(x) = \frac{C}{\beta(x)} e^{2 \int \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx}$$

а формулы (1.4) показывают, что $\alpha(s, x)$ и $\beta(s, x)$ не зависят от s .

Наоборот, если

$$g(s, x) = g(x) = \frac{C}{\beta(x)} e^{2 \int \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx}$$

и

$$\alpha(s, x) = \alpha(x); \quad \beta(s, x) = \beta(x)$$

то процесс является стационарным. Действительно, $g(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x) \cdot g(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\beta(x) \cdot g(x)]$$

а $f(s, x, t, y)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\alpha(x) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha(y) f \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\beta(y) f \right] \quad (1.5)$$

и является их единственным решением, удовлетворяющим условию:

$$\int_{-\infty}^y f(s, x, t, y) dy \xrightarrow[t \rightarrow s]{} E(x, y) = \begin{cases} 0 & x > y \\ 1 & x \leq y \end{cases}$$

Так как и сами уравнения (1.5) и указанное условие не нарушаются при замене s и t , соответственно, на $s + \tau$ и $t + \tau$, то очевидно $f(s, x, t, y) = f(x, y, t - s)$, и процесс Маркова действительно является стационарным.

4. Моменты стационарного марковского процесса

$$E[X(t)]^k = M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(x) dx$$

удовлетворяют уравнению:

$$kE[X^{k-1} \cdot \alpha(x)] + \frac{k(k-1)}{2} E[X^{k-2} \beta(x)] = 0 \quad (1.6)$$

если только $g(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Действительно, $g(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$-\frac{\partial}{\partial x} [g(x) \cdot \alpha(x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\beta(x) \cdot g(x)] = 0$$

и умножая обе части этого уравнения на x^k и интегрируя, получим:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial}{\partial x} [g(x) \cdot \alpha(x)] dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\beta(x) \cdot g(x)] dx = 0$$

или, интегрируя по частям, будем иметь:

$$k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \alpha(x) \cdot g(x) dx + \frac{k(k-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} \beta(x) g(x) dx = 0$$

5. Корреляционная функция

$$B(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) f(\tau, x, y) dx dy$$

стационарного марковского процесса удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dB}{d\tau} = E \left\{ X(t) \cdot \alpha[X(t + \tau)] \right\} \quad (1.7)$$

и условию:

$$B(\tau) \Big|_{\tau=0} = E[X(t)]^2 \quad (1.7')$$

если только интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) \frac{\partial f}{\partial \tau} dx dy$$

равномерно сходится относительно $\tau > 0$ и $f(\tau, x, y)$ стремится к нулю довольно быстро при $y \rightarrow \infty$.

Действительно, дифференцируя $B(\tau)$ и пользуясь вторым уравнением (1.5) Колмогорова, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \tau} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) \frac{\partial}{\partial \tau} f(\tau, x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) \left[-\frac{\partial}{\partial y} (\alpha(y) f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta(y) f) \right] dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \left[-y \frac{\partial}{\partial y} (\alpha(y) f) + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta(y) f) \right] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha(y) f(\tau, x, y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\beta(y) f(\tau, x, y)) \right] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(y) f(\tau, x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \alpha(y) g(x) f(\tau, x, y) dx dy \end{aligned}$$

6. Вообще, моменты более высоких порядков:

$$M_{lk}(\tau) = E[X(t)]^l [X(t + \tau)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^l y^k g(x) f(\tau, x, y) dx dy$$

удовлетворяют уравнению:

$$\frac{dM_{lk}(\tau)}{d\tau} = k E \left\{ [X(t)]^l [X(t + \tau)]^{k-1} \cdot \alpha[X(t + \tau)] \right\} +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2} E \left\{ [X(t)]^i [X(t+\tau)]^{k-2} \beta[X(t+\tau)] \right\} \quad (1.8)$$

и условию:

$$M_{ik}(\tau) \Big|_{\tau=0} = E[X(t)]^{i+k} \quad (1.8')$$

если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(x) \frac{\partial f}{\partial \tau} dx dy$$

равномерно сходится относительно $\tau > 0$ и функции $f(\tau, x, y)$ стремится к нулю достаточно быстро при $y \rightarrow \infty$.

Действительно, дифференцируя $M_{ik}(\tau)$ по τ и заменяя $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ на основании того же уравнения Колмогорова, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dM_{ik}(\tau)}{d\tau} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(x) \frac{\partial f}{\partial \tau} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(x) \left[-\frac{\partial}{\partial y} (a(y)f(\tau, x, y)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta(y)f(\tau, x, y)) \right] dx dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(x) \frac{\partial}{\partial y} [a(y)f(\tau, x, y)] dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(x) \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\beta(y) \cdot f(\tau, x, y)] dx dy = \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} x^i g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-1} [a(y)f(\tau, x, y)] dy + \\ &+ \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^i g(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-1} \frac{\partial}{\partial y} [\beta(y) \cdot f(\tau, x, y)] dy = \\ &= k \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^{k-1} g(x) a(y) f(\tau, x, y) dx dy + \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^{k-2} g(x) \cdot \beta(y) f(\tau, x, y) dx dy \end{aligned}$$

7. Для того, чтобы марковский стационарный процесс был нормальным, необходимо, чтобы одномерная функция распределения

$$g(x) = \frac{C}{\beta(x)} e^{\int \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx}$$

была нормальной, а для этого необходимо и достаточно, чтобы:

$$\beta(x) = c > 0, \quad \alpha(x) = ax + b \quad a < 0$$

Найденная ниже при этих условиях функция перехода покажет, что эти условия являются также и достаточными для нормальности. Действительно, в этом случае

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\frac{a}{c} \left(x + \frac{b}{a}\right)^2}$$

и решение уравнений Колмогорова [2] дает:

$$l(s, x, t, y) = \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{\pi c(1-e^{2a(t-s)})}} e^{-\frac{a \left[\left(y + \frac{b}{a}\right) - \left(x + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-s)} \right]^2}{c(1-e^{2a(t-s)})}}$$

Следовательно, двумерная функция распределения вероятностей будет:

$$\begin{aligned} l_2(\tau, x, y) &= \\ &= \frac{a}{\pi c \sqrt{1-e^{2a\tau}}} \left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - 2e^{a\tau} \left(x + \frac{b}{a}\right) \left(y + \frac{b}{a}\right) + \left(y + \frac{b}{a}\right)^2 \right] e^{-\frac{a}{c(1-e^{2a\tau})} \left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 - 2e^{a\tau} \left(x + \frac{b}{a}\right) \left(y + \frac{b}{a}\right) + \left(y + \frac{b}{a}\right)^2 \right]} \end{aligned}$$

Отсюда определяется коэффициент корреляции процесса

$$R(\tau) = e^{a\tau}$$

и его корреляционная функция:

$$B(\tau) = -\frac{c}{2a} e^{a\tau} + \frac{b^2}{a^2}$$

Этот же результат можно получить не вычисляя одномерную и двумерную функции распределения вероятностей, а пользуясь уравнениями (1.6) и (1.7). Уравнения для одномерных моментов будут:

$$E(aX + b) = 0; \quad 2EX(aX + b) + E(c) = 0$$

а уравнение для корреляционной функции будет:

$$\frac{dB}{d\tau} = EX(aY + b) \quad \text{или} \quad \frac{dB}{d\tau} = aB + bE(X)$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$E(X) = E(Y) = -\frac{b}{a}$$

$$D(X) = D(Y) = -\frac{c}{2a}$$

Решая последнее уравнение

$$\frac{dB}{d\tau} = aB - \frac{b^2}{a}$$

получим:

$$B(\tau) = Ce^{a\tau} + \frac{b^2}{a^2}$$

или

$$B(\tau) = -\frac{c}{2a}e^{a\tau} + \frac{b^2}{a^2}$$

8. В случае более общего стационарного процесса Маркова:

$$\alpha(x) = ax + b; \quad \beta(x) = cx^2 + dx + e \quad c > 0, \quad a < 0$$

корреляционная функция может быть найдена без нахождения функции распределения вероятностей, пользуясь уравнениями (1.6) и (1.7). В этом случае уравнения для моментов будут:

$$E(ax + b) = 0; \quad 2EX(aX + b) + E(cX^2 + dX + e) = 0$$

а для корреляционной функции будет:

$$\frac{dB}{d\tau} = EX(aY + b)$$

Из первых уравнений получаем:

$$E(X) = -\frac{b}{a}; \quad E(X^2) = \frac{b(2b + d)}{a(2a + c)}$$

а из последнего:

$$B(\tau) = \frac{b^2}{a^2} + \frac{abd - a^2e - cb^2}{a^2(2a + c)} e^{a\tau}$$

коэффициент корреляции будет снова

$$R(\tau) = e^{a\tau}.$$

9. Коэффициент корреляции любого стационарного марковского процесса с функцией

$$\alpha(x) = ax + b$$

равен

$$R(\tau) = e^{a\tau}.$$

Действительно, в этом случае уравнения для моментов будут:

$$E(aX + b) = 0; \quad 2EX(aX + b) + E\beta(x) = 0 \quad (1.9)$$

а для корреляционной функции:

$$\frac{dB}{d\tau} = EX(aY + b).$$

Подставляя в это равенство

$$B(\tau) = EX^2 \cdot R(\tau) + [E(X)]^2$$

и принимая во внимание равенства (1.9), для $R(\tau)$ получим уравнение:

$$\frac{dR}{d\tau} = aR(\tau)$$

и, следовательно,

$$R(\tau) = e^{a\tau}$$

§ 2. Моменты процесса Маркова

Все результаты, касающиеся определения моментов стационарного марковского процесса, можно обобщить для марковских нестационарных процессов, удовлетворяющих условиям Колмогорова [2].

1. Одномерные моменты процесса Маркова

$$M_k(s) = E[X(s)]^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k g(s, x) dx \quad (2.1)$$

удовлетворяют уравнению:

$$\frac{dM_k(s)}{ds} = kE \left[X^{k-1} \alpha(s, X) \right] + \frac{k(k-1)}{2} E \left[X^{k-2} \beta(s, X) \right] \quad (2.2)$$

если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial g}{\partial s} dx$$

равномерно сходится относительно s , и функция $g(s, x)$ стремится к нулю достаточно быстро при $x \rightarrow \infty$.

Действительно, дифференцируя (2.1) по s и подставляя $\frac{\partial g}{\partial s}$ из уравнения Колмогорова:

$$\frac{\partial g}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(s, x) \cdot g(s, x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\beta(s, x) \cdot g(s, x) \right]$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{ds} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial g}{\partial s} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \left[-\frac{\partial}{\partial x} (\alpha g) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta g) \right] dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial}{\partial x} (\alpha g) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta g) dx = \\ &= - \alpha(s, x) g(s, x) x^k \Big|_{-\infty}^{\infty} + k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \alpha(s, x) \cdot g(s, x) dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta g) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} x^k \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta(s, x) \cdot g(s, x) \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta(s, x) \cdot g(s, x) \right] dx = \\
& = k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \alpha(s, x) \cdot g(s, x) dx - \frac{k}{2} X^{k-1} \beta(s, x) \cdot g(s, x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\
& \quad + \frac{k(k-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} \beta(s, x) \cdot g(s, x) dx = \\
& = k \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} \alpha(s, x) \cdot g(s, x) dx + \frac{k(k-1)}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} \beta(s, x) \cdot g(s, x) dx
\end{aligned}$$

2. Корреляционная функция процесса Маркова:

$$B(s, t) = E[X(s) \cdot X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot g(s, x) \cdot f(s, x, t, y) dx dy \quad (2.3)$$

удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial s \partial t} = E[\alpha(s, X(s)) \cdot \alpha(t, X(t))] \quad (2.4)$$

и условиям:

$$B(s, t) \Big|_{t=s} = E[X(s)]^2; \quad \frac{\partial B}{\partial t} \Big|_{t=s} = E[X(s) \alpha(s, X(s))] \quad (2.5)$$

если сходятся интегралы, получающиеся при дифференцировании $B(s, t)$ по s и t равномерно относительно s и t ($s < t$), функция $f(s, x, t, y)$ стремится к нулю достаточно быстро при $y \rightarrow \infty$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot \beta(s, x) \cdot g(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = 0$$

которое, в частности, выполняется, если

$$\alpha(s, x) = \alpha(s), \quad \beta(s, x) = \beta(s)$$

или вообще, если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) dy$$

не зависит от x .

Действительно, дифференцируя равенство (2.3) по t и пользуясь уравнением Колмогорова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\beta(t, y) \cdot f(s, x, t, y) \right]$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y g(s, x) \frac{\partial f}{\partial t} dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y g(s, x) \left[-\frac{\partial}{\partial y} (\alpha(t, y) f(s, x, t, y)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\beta(t, y) \cdot f(s, x, t, y)) \right] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \left[-y \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha(t, y) f(s, x, t, y) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\beta(t, y) f(s, x, t, y) \right] \right] dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \left[-y \alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) \right]_{-\infty}^{\infty} + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \left[y \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta(t, y) f(s, x, t, y) \right] \right]_{-\infty}^{\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta(t, y) f(s, x, t, y) \right] dy \Bigg| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) dy - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \cdot \beta(t, y) f(s, x, t, y) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot f(s, x, t, y) dy = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \alpha(t, y) \cdot g(s, x) \cdot f(s, x, t, y) dx dy$$

Следовательно,

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \alpha(t, y) \cdot g(s, x) \cdot f(s, x, t, y) dx dy \quad (2.6)$$

или

$$\frac{\partial B}{\partial t} = E[X(s) \cdot \alpha(t, X(t))] \quad (2.7)$$

откуда

$$\left. \frac{\partial B}{\partial t} \right|_{t=s} = E[X(s) \cdot \alpha(s, X(s))] \quad (2.8)$$

Дифференцируя равенство (2.6) по s и используя уравнения Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(s, x) \cdot g(s, x) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\beta(s, x) \cdot g(s, x) \right] \\ \frac{\partial f}{\partial s} &= - \alpha(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} - \beta(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \end{aligned}$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x f(s, x, t, y) \frac{\partial g}{\partial s} dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x g(s, x) \frac{\partial f}{\partial s} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x f(s, x, t, y) \left[- \frac{\partial}{\partial x} (\alpha(s, x) \cdot g(s, x)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\beta(s, x) \cdot g(s, x)) \right] dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot g(s, x) \left[- \alpha(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta(s, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} (\alpha \cdot g \cdot f) dx + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \left[f \frac{\partial^2(\beta g)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial(\beta g)}{\partial x} + \beta g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] dx - \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\beta g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial(\beta g)}{\partial x} \right] dx = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s, x) \cdot g(s, x) \cdot f(s, x, t, y) dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial^2(\beta g f)}{\partial x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta g \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(s, x) \cdot g(s, x) \cdot f(s, x, t, y) dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial(\beta g f)}{\partial x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} \beta g \frac{\partial f}{\partial x} dx = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot \alpha(s, x) \cdot g(s, x) f(s, x, t, y) dy dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) dy [\beta g f] \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(t, y) \cdot \beta(s, x) g(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy
\end{aligned}$$

Следовательно, при сделанных предположениях:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial s} = E[\alpha(s, X(s)) \cdot \alpha(t, X(t))]$$

3. Рассмотрим процесс Маркова, определенный функциями:

$$\alpha(s, x) = \alpha(s) \quad \beta(s, x) = \beta(s) > 0$$

при котором функция $f(s, x, t, y)$ удовлетворяет уравнениям:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -\alpha(s) \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{2} \beta(s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [\alpha(t) \cdot f] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\beta(t) \cdot f] \quad (2.9)$$

Решение этих уравнений, удовлетворяющее соответствующим условиям, дается [2] в виде:

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\beta_1(t) - \beta_1(s))}} e^{-\frac{[y-x-\gamma(t)+\gamma(s)]^2}{2(\beta_1(t) - \beta_1(s))}}$$

где

$$\gamma(s) = \int_0^s \alpha(u) du \quad \beta_1(s) = \int_0^s \beta(u) du$$

Если, кроме того, при $s=0$ положить

$$g(0, x) = g_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

то одномерная функция процесса будет:

$$f_1(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\beta_1(s) + \sigma^2)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\gamma(s))^2}{\beta_1(s) + \sigma^2}} \quad s > 0$$

а двумерная будет:

$$f_2(s, x, t, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\beta_1(s) + \sigma^2)(\beta_1(t) - \beta_1(s))}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(\beta_1(t) + \sigma^2)(x-\gamma(s))^2}{(\beta_1(s) + \sigma^2)(\beta_1(t) - \beta_1(s))} - \frac{2(x-\gamma(s))(y-\gamma(t))}{\beta_1(t) - \beta_1(s)} + \frac{(y-\gamma(t))^2}{\beta_1(t) - \beta_1(s)} \right]}$$

Коэффициент корреляции и корреляционная функция этого процесса, соответственно, будут:

$$r(s, t) = \sqrt{\frac{\beta_1(s) + \sigma^2}{\beta_1(t) + \sigma^2}} \\ B(s, t) = \beta_1(s) + \sigma^2 + \gamma(s) \cdot \gamma(t)$$

Этот же результат можно получить не находя функций распределений, а используя уравнения (2.2) и (2.4). Действительно, в данном случае моменты $M_1(s)$ и $M_2(s)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dM_1}{ds} = \alpha(s) \quad \frac{dM_2}{ds} = 2\alpha(s) \cdot M_1 + \beta_1(s)$$

решая которые, получим:

$$M_1(s) = \gamma(s); \quad M_2(s) = [\gamma(s)]^2 + \beta_1(s) + \sigma^2$$

а корреляционная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 B}{\partial s \partial t} = E\alpha(t) \cdot \alpha(s) \quad (2.10)$$

в условиях:

$$\begin{aligned} B(s, t) \Big|_{t=s} &= \beta_1(s) + \sigma^2 + [\gamma(s)]^2 \\ \frac{\partial B}{\partial t} \Big|_{t=s} &= \alpha(s) \cdot \gamma(s) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Решая уравнение (2.10) и используя условия (2.11), получим:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \alpha(t) \cdot \gamma(t)$$

$$B(s, t) = \gamma(s) \cdot \gamma(t) + \beta_1(s) + \sigma^2$$

откуда

$$r(s, t) = \sqrt{\frac{\beta_1(s) + \sigma^2}{\beta_1(t) + \sigma^2}} \quad (2.12)$$

Можно показать, что и в более общем случае, когда $\alpha(s, x) = \alpha(s)$, а $\beta(s, x)$ — любая функция, получается тот же коэффициент корреляции.

4. Указанный метод для определения корреляционной функции $B(s, t)$ можно применить для определения моментов более высоких порядков:

$$M_{ik}(s, t) = E\{[X(s)]^i [X(t)]^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k g(s, x) f(s, x, t, y) dx dy$$

Если интегралы, получающиеся из этого интеграла дифференцированием по t , а затем по $s(s < t)$ равномерно сходятся по s и t , функция $f(s, x, t, y)$ стремится к нулю достаточно быстро при $y \rightarrow \infty$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-1} x^{i-1} \alpha(t, y) \cdot \beta(s, x) \cdot g(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^{k-2} x^{i-1} \beta(t, y) \cdot \beta(s, x) \cdot g(s, x) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = 0$$

то $M_{ik}(s, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ik}}{\partial s \partial t} &= ik E\{[X(t)]^{k-1} [X(s)]^{i-1} \alpha(s, X(s)) \cdot \alpha(t, X(t))\} + \\ &+ \frac{k(k-1)}{2} \cdot E\{[X(t)]^{k-2} [X(s)]^{i-1} \beta(t, X(t)) \cdot \alpha(s, X(s))\} + \\ &+ \frac{ki(i-1)}{2} E\{[X(t)]^{k-1} [X(s)]^{i-2} \cdot \alpha(t, X(t)) \cdot \beta(s, X(s))\} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{k(k-1)i(i-1)}{4} E([X(t)]^{k-2} [X(s)]^{i-2} \beta(t, X(t)) \cdot \beta(s, X(s))) \quad (2.13)$$

и условиям:

$$M_{ik}(s, t) = EX(s)^{i+k}$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial t} \Big|_{t=s} = kE\left([X(s)]^{i+k-1} \cdot \alpha(s, X(s))\right) + \frac{1}{2} k(k-1)E\left([X(s)]^{i+k-2} \cdot \beta(s, X(s))\right).$$

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 26 III 1956

Գ. Լ. Համբարձումյան

ՄԱՐԿՈՎԻ ՊՐՈՑԵՍԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄՈՄԵՆՏՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Որպեսզի Մարկովի $X(t)$ պրոցեսը լինի ստացիոնար, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ պրոցեսի մեկ չափանի բաշխման ֆունկցիան կախված չլինի t -ից, իսկ հավանականությունների անցման բաշխման (1.1) ֆունկցիան լինի ֆունկցիա միայն x, y և $t - s$ -ից:

Եթե Մարկովի պրոցեսը բավարարում է Կոլմոգորովի [2] պայմաններին, ապա պրոցեսը ստացիոնար լինելու համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի պրոցեսի մեկ չափանի խտությունն անկախ լինի t -ից, իսկ $\alpha(s, x)$ և $\beta(s, x)$ (1.4) ֆունկցիաները, որոնք բնորոշում են պրոցեսը, անկախ լինեն s -ից:

Այդպիսի ստացիոնար պրոցեսների, աարբեր կարգի, մեկ չափանի մոմենտների համար տեղի ունի (1.6) սեկուրենտ հավասարումը, որը թույլ է տալիս հաջորդաբար որոշել այդ մոմենտները:

(1.7) հավասարումը, (1.7') պայմանի հետ միասին, թույլ են տալիս որոշել ստացիոնար պրոցեսի կորրելյացիոն ֆունկցիան, որը մեծ նշանակություն ունի կիրառությունների համար: Նույն եզանակով, ինչպես որ արտածվել է (1.7) հավասարումը, ստացվում է ավելի ընդհանուր (1.8) հավասարումը՝ ստացիոնար պրոցեսի բարձր կարգի երկչափանի մոմենտների համար: Ստացված հավասարումները, ինչպես այդ ցույց է տրված բերված երկու օրինակում, թույլ են տալիս հեշտությամբ որոշել պրոցեսի կորրելյացիոն ֆունկցիան, առանց բաշխման ֆունկցիաներն իմանալու: Ստացվում է հետաքրքիր արդյունք, որ եթե Մարկովի պրոցեսի համար $\alpha(x)$ -ը գծային ֆունկցիա է, ապա անկախ $\beta(x)$ -ից պրոցեսի կորրելյացիայի գործակիցը հավասար է e^{x^2} :

Ստացիոնար պրոցեսների համար ստացված արդյունքները, որոշ պայմաններում, ընդհանրացվում են Մարկովի պրոցեսներից ցանկացածի վրա, և նրա մեկ չափանի ու երկչափանի մոմենտները որոշելու համար ստացվում են (2.2), (2.3) և (2.13) հավասարումները:

կիրառելով այդ համասարումները այն պրոցեսներին, որոնց համար $\alpha(s, x)$ և $\beta(s, x)$ կախված են միայն s -ից, կորրեկցայի գործակցի համար ստացվում է (2.12) արտահայտությունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи мат. наук, 1951, в. 5.
2. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей. Успехи мат. наук, 1938, в. 5.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. Розовский

Полусимволический способ решения некоторых
задач теории ползучести

Процесс ползучести, рассматриваемый как процесс деформирования стареющей наследственно-упругой среды, будем называть сложным, если он не может быть описан с помощью конечного числа параметров, зависящих только от времени.

Это будет иметь место в том случае, когда известное решение соответствующей упруго-мгновенной задачи не может быть представлено в виде суммы произведений координатных множителей на рациональные функции упругих постоянных.

Известны решения ряда задач теории линейной ползучести [1 — 3], соответствующих последнему случаю, две из которых (без учета старения материала) решены символическим способом Вольтерра [1, 2], требующим предварительного введения новой специальной функции, зависящей от координат и времени.

Полусимволический способ, который предлагается в настоящей работе, имеет индуктивный характер и не требует предварительного введения специальной функции.

Этот способ с успехом может быть применен к решению задач, как теории линейной ползучести, так и нелинейной ползучести, если нелинейность обусловлена зависимостью мгновенного модуля упругости от степени деформации.

Последнее будет показано применительно к задаче о продольном изгибе стержня.

Предлагаемый способ применим также к изучению динамических процессов ползучести.

В качестве иллюстрации рассмотрена задача о колебании неограниченной среды с учетом ползучести.

§ 1. Сложные процессы деформирования при линейных
исходных физических зависимостях

Рассмотрим задачи теории линейной ползучести, приводящиеся к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^m y}{\partial x^m} + a^2(t)y(x, t) = f(x, t) + \int_{t_1}^t \psi(t, \tau) \frac{\partial^m y}{\partial x^m} d\tau + a^2(t) \int_{t_1}^t \varphi(t, \tau) y(x, \tau) d\tau \quad (1.1)$$

где y — неизвестная функция x и t , а $\alpha(t)$, $f(x, t)$ и приведенные коэффициенты наследственности заданы.

К решению интегро-дифференциального уравнения (1.1), в частности, приводятся следующие задачи: 1) деформация балки, лежащей на основании, материал которого обладает свойством ползучести (при $m=4$), 2) деформация замкнутой цилиндрической оболочки с учетом ползучести материала (при $m=4$ и частном виде $f(x, t)$), 3) изменение продольного изгиба стержня во времени (при $m=2$ и $\varphi(t, \tau)=0$).

Упомянутые частные виды уравнения (1.1), а также другие, легко выводятся непосредственно, исходя из интегральных физических зависимостей в форме, предложенной Н. Х. Арутюняном [4].

Коэффициенты $\alpha(t)$ и $f(x, t)$ зависят от упруго-мгновенных характеристик материала.

Следуя принятому Н. Х. Арутюняном [4] представлению о характере изменения модуля $E(t)$ мгновенной деформации в зависимости от возраста материала (бетона), естественно принять, что $\alpha^2(t) = \alpha_0^2 A(t)$ и $f(x, t) = f_0(x) \theta_1(t)$, причем $A(\infty) = A_0$, $\theta_1(\infty) = \theta_0$; α_0 , A_0 , θ_0 — постоянные.

Смысл функций $\alpha(t)$ и $f(x, t)$ раскрывается каждый раз в соответствующей частной задаче. Так, например, в первой задаче $\alpha^2(t) = \frac{k(t)}{4E(t)I}$, $f(x, t) = \frac{m + nx}{E(t)}$, где $E(t) = E_0(1 - be^{-at})$ — модуль упругости материала балки, $k(t) = k_0(1 - b_1e^{-a_1t})$ — коэффициент постели, I , m и n — постоянные.

Выражения для $E(t)$ и $k(t)$ написаны в соответствии с упомянутым законом.

Для дальнейшего необходимо уравнение (1.1) преобразовать так, чтобы оно содержало лишь одно ядро.

Обозначим

$$y(x, t) - \int_{\tau_1}^t \varphi(t, \tau) y(x, \tau) d\tau = \omega(x, t) \quad (1.2)$$

Тогда из (1.2) следует

$$y(x, t) = \omega(x, t) + \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) \omega(x, \tau) d\tau \quad (1.3)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $\varphi(t, \tau)$.

Подставляя (1.3) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial x^m} + \alpha^2(t) \omega = f(x, t) + \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \frac{\partial^m \omega}{\partial x^m} d\tau \quad (1.4)$$

где

$$K(t, \tau) = \psi(t, \tau) + \int_{\tau_1}^t \psi(t, s) R(s, \tau) ds$$

Вводя интегральный оператор типа Вольтерра $\hat{K}y = \int_{\tau_1}^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau$, представим интегро-дифференциальное уравнение (1.4) в символическом виде

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial x^m} + \frac{\alpha^2(t)}{1 - \hat{K}} \omega = \frac{f(x, t)}{1 - \hat{K}} \quad (1.5)$$

Положим

$$\frac{\partial^m \omega}{\partial x^m} = u(x, t) \quad (1.6)$$

Тогда

$$\omega = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{m-1} u(\xi, t) d\xi + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(t) x^i \quad (1.7)$$

где $c_i(t)$ — произвольные функции времени.

Подставляя (1.6) и (1.7) в уравнение (1.5), получим

$$u(x, t) + \frac{\alpha^2(t)}{1 - \hat{K}} \left[\frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-\xi)^{m-1} u(\xi, t) d\xi + \sum_{i=0}^{m-1} c_i(t) x^i \right] = \frac{f(x, t)}{1 - \hat{K}} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) по отношению к u является интегральным, поскольку оператор $1/(1 - \hat{K})$ пока считается постоянным коэффициентом, а t — параметром.

Решение уравнения (1.8) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

Тогда придем к следующим рекуррентным формулам

$$u_0(x, t) = \frac{f(x, t)}{1 - \hat{K}} - \frac{\alpha^2(t)}{1 - \hat{K}} \sum_{i=0}^{m-1} c_i(t) x^i$$

$$u_n(x, t) = - \frac{\alpha^2(t)}{(m-1)!(1 - \hat{K})} \int_0^x (x-\xi)^{m-1} u_{n-1}(\xi, t) d\xi, \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= f_0(x) \\ \Phi_n(x) &= \int_0^x (x-\xi_1)^{m-1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} (\xi_1-\xi_2) d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{n-1}} (\xi_{n-1}-\xi_n) f_0(\xi_n) d\xi_n \\ I_{10}(x) &= \int_0^x (x-\xi_1)^{m-1} d\xi_1 \int_0^{\xi_1} (\xi_1-\xi_2) d\xi_2 \dots \int_0^{\xi_{n-1}} (\xi_{n-1}-\xi_n) \xi_n^1 d\xi_n \end{aligned}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

Тогда получим следующее выражение для

$$u_n(x, t) = (-1)^n \frac{\alpha^{2n}(t)}{(m-1)!(1-K)^n} \left[\frac{\Phi_n(x)}{1-K} - \frac{\alpha^2(t)}{1-K} \sum_{i=0}^{m-1} I_{in}(x) c_i(t) \right] \quad (1.9)$$

Для перехода в (1.9) от символической формы к явной выполним следующее разложение

$$\frac{c_i(t)}{(1-K)^{n+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+v)}{v!} K^v c_i(t) \quad (1.10)$$

Ряд, фигурирующий в (1.10), можно рассматривать как обобщенный ряд Неймана, который следует из (1.10) при $n=0$, как частный случай. Поэтому в разложении (1.10) символ $K^v c_i(t)$ имеет следующий смысл:

$$\begin{aligned} K^v c_i(t) &= \int_{\tau_1}^t K(t, s_1) ds_1 \int_{\tau_1}^{s_1} K(s_1, s_2) ds_2 \dots \int_{\tau_1}^{s_{v-1}} K(s_{v-1}, s_v) c_i(s_v) ds_v = \\ &= \int_{\tau_1}^t K_v(t, \tau) c_i(\tau) d\tau, \quad K^0 c_i(t) = c_i(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $K_v(t, \tau)$ — v -ое повторное ядро исходного ядра $K(t, \tau)$.

Тогда из (1.9) следует

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n \frac{\alpha_0^{2n}}{(m-1)!} \left\{ \Phi_n(x) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+v)}{v!} F_{nv}(t) - \right. \\ &\left. - \alpha_0^2 \sum_{i=0}^{m-1} I_{in}(x) \left[c_{in}(t) - \int_{\tau_1}^t \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+v)}{v!} K_v(t, \tau) c_{in}(\tau) d\tau \right] \right\} \quad (1.12) \end{aligned}$$

где $c_{in}(t) = \theta_1(t) c_i(t)$; $F_{nv}(t) = K^v \theta_1(t) \Lambda^n(t)$ определяется соотношением (1.11) в результате замены в нем $c_i(t)$ на $\theta_1(t) \Lambda^n(t)$.

Выражение для $u_0(x, t)$ в явном виде будет

$$u_0(x, t) = \Phi_0(x) \lambda(t) - \alpha_0^2 \sum_{i=0}^{m-1} x^i \left[c_{i0}(t) + \int_{\tau_1}^t L(t, \tau) c_{i0}(\tau) d\tau \right] \quad (1.13)$$

где $\lambda(t) = 1 + \int_{\tau_1}^t L(t, \tau) d\tau$, $L(t, \tau)$ резольвента ядра $K(t, \tau)$.

Принимая во внимание (1.12) и (1.13), получим

$$u(x, t) = \Phi_0(x) \lambda(t) + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_0^{2n} \Phi_n(x) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+v)}{v!} F_{nv}(t) -$$

$$- \alpha_0^2 \sum_{i=0}^{m-1} \left[q_i(x) c_{ii}(t) - \int_{\tau_i}^t R_i(t, \tau; x) c_{ii}(\tau) d\tau \right] \quad (1.14)$$

где

$$q_i(x) = x^i + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_0^{2n} I_{in}(x) \quad (1.15)$$

$$R_i(t, \tau; x) = x^i L(t, \tau) + \\ + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_0^{2n} I_{in}(x) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+\nu)}{\nu!} K_{\nu}(t, \tau)$$

Легко убедиться, что при

$$|f(x, t)| \leq M, \quad |K(t, \tau)| \leq h \quad \text{и} \quad |c_{ii}(t)| \leq C$$

где M , h и C — некоторые постоянные, имеет место оценка

$$|u_n| < \frac{CMh^{n+1}Z^n}{n!}, \quad \text{где } Z = \max\{\alpha_0^2, x, t\}$$

Поэтому ряд, фигурирующий в (1.14), сходится равномерно.

Подставляя (1.14) в (1.7), получим

$$\omega(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_{ii}(t) x^i + \frac{1}{(m-1)!} \left[\Phi_1(x) \lambda(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_0^{2n} \Phi_{n+1}(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+\nu)}{\nu!} F_{n,\nu}(t) \right] - \\ - \frac{\alpha_0^2}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \left[q_i(x) C_{ii}(t) - \int_{\tau_i}^t R_i(t, \tau; x) C_{ii}(\tau) d\tau \right], \quad (1.16)$$

где $q_i(x)$ и $R_i(t, \tau; x)$ получаются из формул (1.15) в результате замены в них x^i и I_{in} соответственно на I_{i1} и $I_{i, n+1}(x)$.

Наконец, подставляя (1.16) в (1.3), получим общее решение интегро-дифференциального уравнения (1.1):

$$y(x, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\Phi_1(x) \lambda(t) + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_0^{2n} \Phi_{n+1}(x) T_n(t) \right] - \\ - \frac{\alpha_0^2}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \left[p_i(x) C_{ii}(t) + \int_{\tau_i}^t P_i(t, \tau; x) C_{ii}(\tau) d\tau \right] \quad (1.17)$$

где

$$p_i(x) = x^i q_i(x),$$

$$P_i(t, \tau; x) = [1 + q_{ii}(x)]R(t, \tau) - R_{ii}(t, \tau; x) - \int_{\tau}^t R(t, s)R_{ii}(t, s; x)ds,$$

$$T_n(t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+v)}{v!} \left[F_{nv}(t) + \int_{\tau}^t R(t, \tau)F_{nv}(\tau)d\tau \right]$$

В том, что (1.17) удовлетворяет уравнению (1.1), можно убедиться непосредственно подстановкой (1.17) в уравнение (1.1) либо подставляя в уравнение (1.5) вместо ω его выражение из (1.7) с учетом (1.9) без расшифровки символических операторов, опираясь на очевидное свойство переместительности временных операторов и операций дифференцирования и интегрирования по координате.

Для практического применения соотношения (1.17) полезно выразить произвольные функции $C_i(t)$ через начальные параметры, т. е. через

$$y_{0i}(t) = y(x, t) \Big|_{x=0}, \quad y_{01}(t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad \dots, \quad y_{0; m-1}(t) = \frac{\partial^{m-1} y(x, t)}{\partial x^{m-1}} \Big|_{x=0}$$

Пользуясь соотношениями (1.7) и (1.2), получим

$$C_i(t) = \frac{1}{i!} \left[y_{0i}(t) - \int_{\tau}^t \varphi(t, \tau) y_{0i}(\tau) d\tau \right], \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1) \quad (1.18)$$

Подставляя в (1.17) вместо $C_i(t)$ их выражения из (1.18), учитывая при этом, что $C_{ii}(t) = \theta_i(t)C_i(t)$, получим решение интегро-дифференциального уравнения (1.1), зависящее от начальных параметров $y_{0i}(t)$.

Значения $y_{0i}(t)$ для произвольного момента времени могут быть заданы непосредственно. Так можно поступить, например, при решении третьей задачи, о продольном изгибе стержня, нижний конец которого зажат, а верхний оперт. Здесь $m = 2$, $\varphi(t, \tau) \equiv 0$, $K(t, \tau) = \psi(t, \tau)$, $f(x, t) = Q(x-1)$, $y_{0i}(t) = 0$, ($i = 0, 1$), Q — горизонтальная реакция опоры на верхний конец стержня, длина которого l .

В более сложных случаях $y_{0i}(t)$ определяются последовательно из системы алгебраических уравнений, получаемых исходя из соответствующих граничных условий. Последнее будет иметь место, например, при решении второй задачи, о деформации цилиндрического кругового резервуара, находящегося под гидростатическим давлением. Здесь $m = 4$, $\alpha^2(t) = \frac{EC}{DR^2}$, $f(x, t) = \frac{\gamma(h-x)}{D}$, где E — модуль упругости, D — цилиндрическая жесткость, γ , h , C , R — постоянные.

Подставляя указанные данные в формулу (1.17), получим величину прогиба стенки резервуара.

В заключении этого параграфа заметим, что в цитированной выше статье [3] мы рассматривали радиальную деформацию поллой сферы,

обладающей анизотропией и упругим последствием (наследственностью).

Вопрос был сведен к рассмотрению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial z} - B_1 u = \int_0^t K_1(t, \tau) u(z, \tau) d\tau, \quad (B_1 = \text{пост.}) \quad (1.19)$$

решение которого было найдено методом двумерных интегральных уравнений.

Полагая в уравнении (1.19) $u = e^{-\frac{1}{2}z} v$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \left(\frac{1}{4} + B_1 \right) v = \int_0^t K_1(t, \tau) v(z, \tau) d\tau. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.20) является частным случаем исходного интегро-дифференциального уравнения (1.1).

Следовательно, рассмотренная в [3] задача может быть решена также предложенным в настоящей работе полусимволическим способом.

§ 2. Сложные процессы деформирования при нелинейной исходной зависимости

1. Применим теперь полусимволический способ к решению задачи о продольном изгибе стержня прямоугольного сечения, исходя из нелинейной зависимости между напряжением σ и деформацией ε .

Нелинейность основного физического уравнения может быть обусловлена различными причинами. В частности, когда нелинейность обусловлена зависимостью мгновенного модуля упругости от степени деформации, связь между σ и ε с учетом наследственности дается следующим соотношением:

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \varepsilon(t) + \int_0^t K(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

где вид функции φ и коэффициент наследственности $K(t, \tau)$ устанавливаются экспериментально.

Соотношение (2.1) предложено Ю. Н. Работновым [5]*. Здесь процесс ползучести рассматривается как процесс деформирования нелинейно-упругой среды с учетом наследственности.

Поэтому уравнение (2.1) применимо во всех случаях как при возрастании напряжений, так и при их убывании.

Интегро-дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня в рассматриваемом случае будет иметь вид

* В уравнении Ю. Н. Работнова $\tau_1 = 0$ и $K(t, \tau) = K(t - \tau)$.

$$f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \int_{\tau_1}^t \Phi(t, \tau) f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) d\tau = M(x, t) \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) непосредственно вытекает из уравнения Ю. Н. Работнова для изгибающего момента

$$M(x, t) + \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) M(x, \tau) d\tau = 2bh^2 F\left(\frac{h}{R}\right) \quad (2.3)$$

где b — ширина, $2h$ — высота сечения стержня, R — радиус кривизны изогнутой оси стержня, $F(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^z \varphi(s) ds$. Полагая в (2.3) $\frac{1}{R} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и

$f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 2bh^2 F\left(h \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, получим

$$M(x, t) + \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) M(x, \tau) d\tau = f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \quad (2.4)$$

Решая (2.4) относительно $M(x, t)$, получим (2.2).

Таким образом, в (2.2) $\Phi(t, \tau)$ является резольвентой ядра $K(t, \tau)$.

Пусть $M(x, t) = -Py - Q(l-x)$ (2.5)

где P — осевая сжимающая сила, l — длина стержня, Q — горизонтальная реакция опоры на верхний конец стержня.

Полагая в уравнении (2.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(x, t)$ и учитывая, что

$$y(x, t) = \int_0^x (x-\xi) u(\xi, t) d\xi \quad (2.6)$$

а также принимая во внимание (2.5), получим

$$\hat{f}(u) - \int_{\tau_1}^t \Phi(t, \tau) \hat{f}(u) d\tau + P \int_0^x (x-\xi) u(\xi) d\xi + Q(l-x) = 0 \quad (2.7)$$

В дальнейшем будем считать, что $\hat{f}(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\hat{f}(u)}{u} > \frac{d\hat{f}}{du} > 0$$

Поэтому, положив $\hat{f}(u) = z(x, t)$, будем иметь $u = \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — функция, обратная $\hat{f}(z)$.

На основании последнего уравнение (2.7) обращается в следующее:

$$z(x, t) - \int_{\tau_1}^t \Phi(t, \tau) z(x, \tau) d\tau + P \int_0^x (x-\xi) \varphi(z) d\xi + Q(l-x) = 0$$

или

$$z(x, t) = Q(x-l) \left[1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau \right] - \\ - P \int_0^x (x-\xi) \varphi(\xi) d\xi - P \int_0^t K(t, \tau) d\tau \int_0^x (x-\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

где $K(t, \tau)$ — резольвента ядра $\Phi(t, \tau)$.

В символической форме уравнение (2.8) может быть записано следующим образом:

$$z(x, t) = (1 + \hat{K}) \left[Q(x-l) - P \int_0^x (x-\xi) \varphi(\xi) d\xi \right] \quad (2.9)$$

где оператор $\hat{K}w = \int_0^t K(t, \tau) w(\tau) d\tau$.

Уравнение (2.9) по отношению к $z(x, t)$ является интегральным, поскольку $(1 + \hat{K})$ рассматривается пока как постоянный множитель.

Нелинейное интегральное уравнение (2.9) может быть решено методом последовательных приближений.

Будем иметь

$$z_n = (1 + \hat{K}) \left[Q(x-l) - P \int_0^x (x-\xi) \varphi(z_{n-1}) d\xi \right], \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

причем

$$z_0 = (1 + \hat{K})Q(x-l)$$

Заметим, что при фактическом нахождении написанных выше последовательных приближений последовательные действия временного оператора сводятся к нахождению обыкновенных квадратур.

Последнее объясняется структурой нулевого приближения

$$z_0(x, t) = Q(x-l)[1 + F(t)], \quad \text{где } F(t) = \int_0^t K(t, \tau) d\tau$$

Так, например, первое приближение будет

$$z_1(x, t) = z_0(x, t) - \\ - P \int_0^x (x-\xi) \left\{ \varphi[z_0(\xi, t)] + \int_0^t K(t, \tau) \varphi[z_0(\xi, \tau)] d\tau \right\} d\xi$$

Если предположить, что

$$\varphi[Q(x-l)[1 + F(t)]] = \chi^b \quad (2.10)$$

где $\chi = \chi[Q(x-l)]$, $\theta = \theta[1 + F(t)]$, то первое приближение примет вид

$$z_1(x, t) = \chi\theta - P_{\chi_1}(1 + \theta_1) \quad (2.11)$$

где

$$\chi_1 = \int_0^x (x-\xi)\chi[Q(\xi-l)]d\xi, \quad \theta_1 = \int_{\tau_1}^t K(t, \tau)\theta[1 + F(\tau)]d\tau$$

Такое представление $z_1(x, t)$ возможно, например, при $\varphi(\zeta) = z_0^2$. Если принять, что: 1) $A = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau_1}^t K(t, \tau)d\tau$ (в частности, при $\tau_1 = 0$ и

$$K(t, \tau) = K(t-\tau), \quad A = \int_0^\infty K(s)ds), \quad 2) \quad L = \max \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \text{ в интервале } (0, l),$$

а также учесть, что $\varphi(z_0) = \varphi[(1+K)Q(l-x)] < \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi[(1+A)Q]$, то, как не трудно установить, имеет место следующая оценка

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{\varphi_0 [L \sqrt{LP(1+A)}]^{2n}}{L(2n)!} \quad (2.12)$$

При доказательстве существенное значение имеет условие Липшица, которое при принятом вначале предположении о характере кривой $f(z)$ действительно выполняется в интервале $(0, l)$.

Неравенство (2.12) обеспечивает равномерное стремление z_n к z при $n \rightarrow \infty$ в интервале $0 < x < l_1 \leq 1$.

Таким образом, $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$. Это решение в рассматриваемом интервале единственное. На доказательстве последнего останавливаться не будем, так как оно мало чем отличается от классического.

Прогиб стержня определяется формулой

$$y(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x (x-\xi)\varphi[z_n(\xi, t)]d\xi \quad (2.13)$$

поскольку $\varphi(\xi)$ — функция непрерывная в интервале $(0, l)$.

Пользуясь формулой (2.13), можно найти критическую силу. В первом приближении критическая сила P_{kp} определяется из алгебраического уравнения

$$\int_0^l (x-\xi)[\chi\theta - P_{kp}\chi_1(1 + \theta_1)]^2 d\xi = 0$$

2. В некоторых случаях критическая сила может быть найдена без привлечения формулы (2.13), полученной в результате решения соответствующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Принципиально это может быть выполнено в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1 - \Phi) \dot{f} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = M \quad (2.14)$$

представляющего собой символическую запись исходного интегро-дифференциального уравнения (2.2).

Уравнение (2.14) решается элементарно в следующих случаях:

- 1) когда стержень зажат нижним концом, верхний свободен,
- 2) когда нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться.

В частности, для первого из них уравнение (2.14) запишется так:

$$(1 - \Phi) \dot{f} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) + P(y - \dot{f}) = 0 \quad (2.15)$$

где $\dot{f}$ — стрела прогиба верхнего свободного конца стержня. При $\dot{f} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = a \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^a$ и учете граничных условий: при $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ и при $x = l$, $y = \dot{f}$, из (2.15) следует

$$P_{кр} = \frac{F^{2a}(1 + \alpha^{-1})^a a}{2^a l^{2a}} \Psi(1) \quad (2.16)$$

где

$$F = \int_0^1 \left[\dot{f}^{\frac{1}{a}+1} - (\dot{f} - y)^{\frac{1}{a}+1} \right]^{-\frac{1}{2}} dy, \quad \Psi(t) = 1 - \int_0^t \Phi(t, \tau) d\tau$$

Здесь $\Phi(t, \tau)$ ядро релаксации.

Для определенности рассмотрен случай, когда ползучесть учитывается с помощью ядра Н. Х. Арутюняна [4]:

$$K(t, \tau) = -E_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\varphi(\tau) (1 - e^{-\tau(t-\tau)}) \right] \quad (2.17)$$

где

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}$$

Тогда ядро релаксации $\Phi(t, \tau)$ будет представлять собою резольвенту ядра (2.17). Критическая сила определяется формулой

$$P_{кр} = \frac{F^{2a} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^a}{2^a l^{2a}} \left[1 - \gamma E_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) \tau_1^q e^{\gamma \tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\tau \tau_1}}{\tau^q} d\tau \right] \quad (2.18)$$

где

$\tau = \tau_1(1 + E_0 C_0)$, $q = \gamma A_1 E_0$; E_0 , C_0 , A_1 и γ — постоянные, характеризующие меру ползучести.

Здесь τ_1 момент (совпадающий с возрастом материала) приложения осевой силы.

Временной множитель, фигурирующий в формуле (2.18), совпадает с временным множителем формулы (2.38) из § 4 (стр. 50) монографии Н. Х. Арутюняна [4].

В заключение заметим, что при граничных условиях, отличных от указанных в этом пункте, определение R_{kr} путем применения (2.14) не проще, чем при использовании результатов, полученных в п. 1 настоящего параграфа.

§ 3. Колебательные процессы с учетом ползучести материала

В предыдущих параграфах было показано, что полусимволический способ обладает достаточной общностью. Основное достоинство этого способа состоит в том, что применение его не требует разделения переменных и возможно при произвольном виде ядра наследственности.

Последнее объясняется тем, что операторы дифференцирования по координатам и временные интегральные операторы с произвольного вида ядер наследственности взаимно переставимы, т. е. обладают свойством переместительности.

Заметим, что в применении к решению интегро-дифференциальных уравнений, описывающих колебательные процессы, указанный способ не обладает столь большой общностью.

Для его применения к динамическим задачам требуется, чтобы ядра наследственности зависели бы только от разности двух аргументов t и τ , т. е. имели вид $K(t - \tau)$.

Это ограничение обусловлено наличием в соответствующих уравнениях производных по времени. Как будет показано ниже, операторы $\frac{d}{dt}$ и $\bar{K}$ обладают свойством переместительности лишь при $K(t, \tau) = K(t - \tau)$.

Рассмотрим колебания неограниченной наследственно-упругой (т. е. обладающей свойством ползучести) среды*.

Уравнения движения такой среды при отсутствии внешних сил могут быть записаны, следуя Вольтерра [6], в форме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \theta(t) + \rho \vec{u}(t) = \rho^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} + \int_0^t \{[\varphi(t - \tau) + \psi(t - \tau)] \operatorname{grad} \theta(\tau) + \psi(t - \tau) \Delta \vec{u}(\tau)\} d\tau \quad (3.1)$$

где Δ — оператор Лапласа, λ , μ — мгновенные коэффициенты Ламе, $\varphi(t - \tau)$ и $\psi(t - \tau)$ — соответствующие им коэффициенты наследственности, ρ — плотность среды.

Вектор смещения $\vec{u}(u, v, w)$ можно представить в виде суммы скалярного $\Phi(x, y, z, t)$ и векторного $\vec{F}(x, y, z, t)$ потенциалов.

* Предварительное краткое сообщение об идее, положенной в основу способа решения рассматриваемой задачи, опубликовано нами [7] применительно к другой задаче.

$$\vec{u} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{F} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.4) в (3.1), получим известные уравнения

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\Delta\Phi(t) - \int_0^t [\varphi(t-\tau) + 2\psi(t-\tau)\Delta\Phi(\tau)]d\tau &= \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \\ \mu\Delta\vec{F}(t) - \int_0^t \psi(t-\tau)\Delta\vec{F}(\tau)d\tau &= \rho^2 \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для дальнейшего удобнее представить уравнения (3.3) в несколько иной форме. А именно:

$$a^2\Delta\Phi(t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \int_0^t H(t-\tau) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} d\tau \quad (3.4)$$

$$b^2\Delta\vec{F}(t) = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} + \int_0^t K_1(t-\tau) \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial \tau^2} d\tau \quad (3.5)$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad H(t-\tau) \text{ — резольвента ядра } \frac{\varphi(t-\tau) + 2\psi(t-\tau)}{\lambda + 2\mu}$$

$$K_1(t-\tau) \text{ — резольвента ядра } \frac{\psi(t-\tau)}{\mu}$$

$$\text{Вводя интегральные операторы } \hat{H}\omega = \int_0^t H(t-\tau)\omega(\tau)d\tau \text{ и } \hat{K}_1\omega =$$

$$= \int_0^t K_1(t-\tau)\omega(\tau)d\tau, \text{ представим уравнения (3.4) и (3.5) в следующем$$

виде

$$\begin{aligned} a^2\Delta\Phi &= (1 + \hat{H}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \\ b^2\Delta\vec{F} &= (1 + \hat{K}_1) \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.6) следуют уравнения, которым будут удовлетворять скалярный потенциал Φ и составляющие F_x, F_y, F_z векторного потенциала:

$$a^2\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

$$\bar{b}^2\Delta F_x = \frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2}, \quad \bar{b}^2\Delta F_y = \frac{\partial^2 F_y}{\partial t^2}, \quad \bar{b}^2\Delta F_z = \frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2} \quad (3.8)$$

где

$$\bar{a}^2 = \frac{a^2}{1 + H^2}, \quad \bar{b}^2 = \frac{b^2}{1 + K_1^2}$$

Так как $\bar{a}^2$ и $\bar{b}^2$ пока считаются постоянными коэффициентами, то решения уравнений (3.7) и (3.8) в неограниченном пространстве, удовлетворяющие соответствующим начальным условиям Коши, могут быть образованы с помощью известной формулы [8].

В частности, решение уравнения (3.7), удовлетворяющее начальным условиям

$$\Phi \Big|_{t=0} = \bar{f}_1(x, y, z), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = \bar{f}_2(x, y, z) \quad (3.9)$$

где $\bar{f}_1(x, y, z)$ и $\bar{f}_2(x, y, z)$ — заданные функции, определенные во всем пространстве, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \bar{a}pt \cdot \bar{f}_1(\xi, \eta, \zeta) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \bar{a}pt}{\bar{a}p} \bar{f}_2(\xi, \eta, \zeta) \right] e^{i[\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta) + \gamma(z-\zeta)]} d\alpha d\beta d\gamma d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$p^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Таким образом, задача сводится к расшифровке выражений $\cos \bar{a}pt$ и $\frac{\sin \bar{a}pt}{\bar{a}}$.

Для этого выполним следующие разложения:

$$\cos \bar{a}pt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{a}^{2n}(pt)^{2n}}{(2n)!} \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{\bar{a}} \sin \bar{a}pt = \frac{1}{\bar{a}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{a}^{2n+1}(pt)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\bar{a}^{2n}(pt)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(1 + H^2)^{-n} = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1)}{\nu!} H^{2\nu} \quad (3.12)$$

Принимая во внимание разложение (3.12), оператор $\bar{a}^{2n}\omega$ можно расшифровать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{a}^{2n}\omega &= a^{2n}(1 + H^2)^{-n}\omega = \\ &= a^{2n} \left[\omega(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1)}{\nu!} \int_0^t H_{\nu}(t-\tau) \omega(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

либо

$$H^*(t) = \int_0^t H_*(t-\tau) \omega(\tau) d\tau$$

где

$$H_*(t-\tau) = \int_0^t H_{*+1}(t-s) H(s-\tau) ds$$

$$H_1(t-\tau) = H(t-\tau)$$

Пользуясь соотношениями (3.11) и (3.13), получим

$$\begin{aligned} \cos \bar{a} p t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\bar{a} p)^{2n}}{(2n)!} \left[t^{2n} + \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1)}{\nu!} \int_0^t H_*(t-\tau) \tau^{2n} d\tau \left. \right] \quad (3.14) \\ \frac{1}{\bar{a}} \sin \bar{a} p t &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\bar{a} p)^{2n}}{(n+1)!} \left[t^{2n+1} + \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1)}{\nu!} \int_0^t H_{\nu}(t-\tau) \tau^{2n+1} d\tau \left. \right] \end{aligned}$$

Ряды, определяющие $\cos \bar{a} p t$ и $\frac{1}{\bar{a}} \sin \bar{a} p t$ и их последовательные производные по t до второго порядка включительно, сходятся равномерно при всяком конечном значении t .

Действительно, легко заметить, что при $M_1 = \max |H(t-\tau)|$, $0 < (t, \tau) < t_1$, где t_1 любое постоянное, имеет место оценка

$$\left| \int_0^t H_*(t-\tau) \tau^m d\tau \right| \leq \frac{t^{m+\nu} M_1^*}{(\nu+1)! (m+1)!}; \quad (m = 2n, 2n+1) \quad (3.15)$$

Подставляя в (3.15) вместо m последовательно $m-1$ и $m-2$, убеждаемся в справедливости высказанного выше положения.

Для того, чтобы классическими средствами убедиться в том, что Φ , определяемое формулой (3.10) с учетом (3.11) (или (3.14)), действительно является решением уравнения (3.7) (или (3.4)), притом единственным, удовлетворяющим начальным условиям (3.9), достаточно установить свойство переместительности операторов $\frac{d^q}{dt^q}$ и K при воздействии на t^m , т. е.

$$\frac{d^q}{dt^q} (\overset{*}{H} t^m) = \overset{*}{H} \frac{d^q}{dt^q} (t^m), \quad (q=1,2; m=2n, 2n+1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\overset{*}{H} t^m) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 H(t-\tau) \tau^m d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^1 H(s) (t-s)^m ds = \\ &= m \int_0^1 H(s) (t-s)^{m-1} ds = \int_0^1 H(t-\tau) m \tau^{m-1} d\tau = \int_0^1 H(t-\tau) \frac{d}{d\tau} (\tau^m) d\tau = \\ &= \overset{*}{H} \frac{d}{dt} (t^m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\overset{*}{H} t^m) &= \frac{d}{dt} \int_0^1 H(s) m (t-s)^{m-1} ds = m(m-1) \int_0^1 H(s) (t-s)^{m-2} ds = \\ &= \int_0^1 H(t-\tau) m(m-1) \tau^{m-2} d\tau = \int_0^1 H(t-\tau) \frac{d^2}{d\tau^2} (\tau^m) d\tau = \overset{*}{H} \frac{d^2}{dt^2} (t^m) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для конкретности рассмотрим случай

$$H(t-\tau) = \alpha(t-\tau)^{\beta-1} \quad (3.16)$$

Ядро наследственности типа (3.16) предложено Г. Дюфингом [9]. Ю. Н. Работнов [5] установил, что применение (3.16) к описанию явления ползучести дает хорошие результаты. Коэффициент β колеблется около 0,7, коэффициент α меняется для различных материалов весьма значительно.

Повторные ядра исходного ядра (3.16) будут иметь вид

$$H_v(t-\tau) = q^v \frac{(t-\tau)^{\beta v-1}}{\Gamma(v\beta)} \quad (3.17)$$

$$(v=1, 2, 3, \dots; q=\alpha\Gamma(\beta))$$

Подставляя (3.17) в (3.14) и учитывая, что

$$\int_0^1 (t-\tau)^{\beta v-1} \tau^m d\tau = \frac{m! t^{\beta v+m}}{v\beta(v\beta+1) \dots (v\beta+m)} \quad (3.18)$$

получим, полагая при этом в (3.18) последовательно $m=2n$ и $m=2n+1$, искомые выражения для $\cos \bar{\alpha}pt$, $\bar{\alpha}^{-1} \sin \bar{\alpha}pt$:

$$\cos \bar{\alpha}pt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\bar{\alpha}pt)^{2n} \left[\frac{1}{(2n)!} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1) k^{\nu} t^{\nu\beta}}{\nu! \Gamma(\nu\beta + 2n+1)} \Bigg] \\
& \frac{1}{a} \sin \bar{a}pt = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (apt)^{2n+1} \left[\frac{1}{(2n+1)!} \right. \\
& \left. - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{n(n+1) \dots (n+\nu-1) k^{\nu} t^{\nu\beta}}{\nu! \Gamma(\nu\beta + 2n+2)} \right] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\cos \bar{a}pt &= 1 - \frac{(apt)^2}{2!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{(ap)^{2n-2\nu+2} k^{\nu} t^{2n-2\nu+\nu\beta+2}}{\Gamma(2n-2\nu+\nu\beta+3)} \\
& \frac{1}{a} \sin \bar{a}pt = \frac{1}{a} \left[(apt) - \frac{(apt)^3}{3!} + \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{(ap)^{2n-2\nu+3} k^{\nu} t^{2n-2\nu+\nu\beta+3}}{\Gamma(2n-2\nu+\nu\beta+4)} \right] \quad (3.20)
\end{aligned}$$

Легко заметить, что ряды, фигурирующие в (3.19) и (3.20), сходятся равномерно при всяком конечном значении t .

Приведенный пример показывает, что предложенный способ применим не только в случае ограниченного ядра наследственности, но также и в случае его слабой сингулярности.

Изменение во времени скалярного потенциала Φ определяется свойствами $\cos \bar{a}pt$ и $\frac{1}{a} \sin \bar{a}pt$, которые отображают затухающий колебательный процесс. Они аperiодичны, но с выделяющейся периодической составляющей; в частности, например, для малых значений k из (3.20) следует

$$\cos \bar{a}pt \approx \cos apt + k \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(ap)^{2n} t^{\beta+2n}}{\Gamma(\beta+2n+1)}$$

На операцию дифференцирования по t $\cos \bar{a}pt$ и $\frac{1}{a} \sin \bar{a}pt$ реагируют как обычные синус и косинус, т. е.

$$\frac{d}{dt} (\cos \bar{a}pt) = -\bar{a} \sin \bar{a}pt, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \sin \bar{a}pt \right) = p \cos \bar{a}pt$$

Составляющие F_x , F_y и F_z векторного потенциала определяются точно по такой же схеме, следуя которой был определен Φ .

Определив Φ , F_x , F_y и F_z , можно, пользуясь известными формулами, найти вектор смещения u (u, v, w).

Ввиду очевидности указанных операций, останавливаться на них не будем.

Днепропетровский горный институт
им. Артёма

Поступило 15 II 1956

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԿԻՍԱՍԻՄՎՈԼԵԿ ԵՂԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ առաջարկվում է այսպես կոչված կիսաախմբիկ եղանակ, որը կարող է կիրառվել ինչպես գծային սողքի, այնպես էլ ոչ գծային սողքի առարկայան խնդիրների լուծման համար, վերջին դեպքում, եթե ոչ գծայնությունը պայմանավորված է ակնթարթային մոդուլի գերմադրային առաճանից ունեցած կախումով: Առաջարկված եղանակը կարող է կիրառել լինել նաև սողքի գերմադրի պրոցեսների ուսումնասիրության մամանակ:

Կիսաախմբիկ եղանակն ունի խնդրարկվ ընույթ և նախապես հասուկ ֆունկցիաների մասում չի պահանջում:

Եղանակի իլյուստրացիայի համար դիտարկվում է սահմանափակ միջավայրի տատանման խնդիրը սողքի ակնառումով:

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Leçon sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.
2. Работнов Ю. Н. Прикладная математика и механика, т. XII, в. 1, 1948.
3. Розовский М. И. Доклады АН СССР, т. 105, № 4, 1955.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
5. Работнов Ю. Н. Известия АН СССР, отд. техн. наук, № 6, 1948.
6. Volterra V. Theory of Functionals and of Integral and Integrodifferential Equations, London, 1931.
7. Розовский М. И. Доклады АН СССР, т. 105, № 4, 1955.
8. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат, 1950.
9. Duffing G. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, т. 2, № 3, 1931.

Изгиб зашечленной пластинки под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга

В работе решена, методом Мусхелишвили [1], задача об изгибе зашечленной тонкой пластинки при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, в предположении, что область пластинки конформно отображается на область единичного круга с помощью полинома. Решение представлено в виде степенных рядов по степеням комплексной координаты единичного круга. В случае, когда начало координат совпадает с центром нагруженного круга, а также в случае действия в произвольной точке сосредоточенной силы, указанные ряды превращаются в полиномы, степени которых не выше степени полинома отображающей функции.

§ 1. Общее выражение прогиба при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга

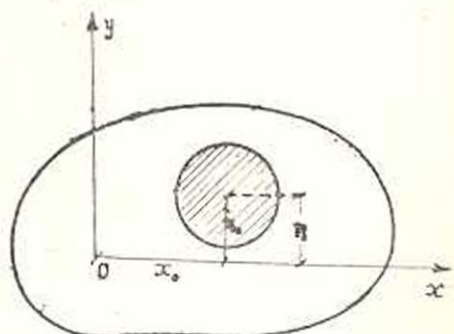
Этот случай нагружения рассмотрел Гершгорин [2], полагая известным решение при действии сосредоточенной силы. Такой же прием применил Лурье [3]. Задачи об изгибе пластинки при действии указанной нагрузки можно решить не используя решения для случая действия сосредоточенной силы. Это сделано в работах [4, 5, 6]. Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей работе, последний способ более эффективен.

При действии на пластинку нагрузки, равномерно распределенной по площади круга радиусом r_0 и с центром в точке x_0, y_0 (см. фигуру) прогиб, согласно [4], представляется в виде: для замкнутой области нагруженного круга

$$w = w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] + \Phi_0(x, y) \quad (1.1)$$

для замкнутой ненагруженной области пластинки

$$w = w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r + \Phi_0 \quad (1.2)$$



где D — жесткость, P — равнодействующая нагрузки, $\Phi_0(x, y)$ — бигармоническая функция, регулярная во всей области пластинки,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Формулу (1.2) напомним в следующем виде:

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) G + \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi_0$$

где $G(x, y; x_0, y_0)$ — функция Грина.

Так как гармоническая функция $\ln r - G$ регулярна во всей области пластинки, то бигармоническая функция

$$\Phi = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi_0$$

также будет регулярной в той же области. В силу этого формулы (1.1) и (1.2) могут быть представлены в следующем виде, удобном для применений:

$$w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] - \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) (\ln r - G) + \Phi \quad (1.3)$$

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) G + \Phi \quad (1.4)$$

Заметим, что если в (1.4) принять $P = \text{const}$, $r_0 = 0$, получим известное выражение для прогиба при действии в точке x_0, y_0 сосредоточенной силы P [7]

$$w = \frac{P}{8\pi D} r^2 G + \Phi \quad (1.5)$$

Для того, чтобы придать явный вид функции Грина, конформно отобразим с помощью функции

$$z = \omega(\zeta), \text{ при } \omega(0) = 0 \quad (1.6)$$

область единичного круга плоскости комплексного переменного $\zeta = re^{i\theta}$ в область пластинки на плоскости $z = x + iy$. Тогда функция Грина представляется формулой [8]

$$G = \frac{1}{2} \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})} \quad (1.7)$$

где ζ_0 — точка в области единичного круга, соответствующая центру нагруженного круга, а $\bar{\zeta} = re^{-i\theta}$. Внося (1.7) в (1.4), имея в виду при этом, что

$$r^2 = (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\zeta) - \bar{\omega}(\zeta_0)]$$

$$\Phi = \bar{z}\varphi_0(z) + z\bar{\varphi}_0(\bar{z}) + \chi_0(z) + \bar{\chi}_0(\bar{z}) =$$

$$= \bar{\omega}(\bar{\zeta})\bar{\varphi}(\zeta) + \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \quad (1.8)$$

где

$$\bar{z} = x - iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

получаем

$$\begin{aligned} w_1 = \frac{P}{16\pi D} & \left\{ [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] + \right. \\ & + \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)(1 - \zeta_0\bar{\zeta})} + \bar{\omega}(\bar{\zeta})\bar{\varphi}(\zeta) + \\ & \left. + \omega(\zeta)\bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \right\} \quad (1.9) \end{aligned}$$

Аналитические функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ определяются из контурных условий пластинки.

§ 2. Случай защемленной пластинки

Для этого случая контурные условия будут [6]

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

причем первое из них необходимо для определения только одного постоянного параметра. Примем, что область нагруженного круга целиком принадлежит области пластинки. Тогда контурным условиям должен удовлетворить прогиб w_1 . Поэтому в (2.1) надо внести выражение (1.9). Предварительно найдем производное этого выражения по z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{1}{\omega(\zeta)} \frac{\partial \omega_1}{\partial \zeta} = \frac{P}{16\pi D} & \left\{ \frac{(1 - \rho_0^2)[\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)][\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)]}{\omega(\zeta)(\zeta - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)} + \right. \\ & + [\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)(1 - \zeta_0\bar{\zeta})} + \frac{r_0^2(1 - \rho_0^2)}{\omega(\zeta)(\zeta - \zeta_0)(1 - \bar{\zeta}_0\zeta)} \left. \right\} + \\ & + \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \bar{\varphi}(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \frac{\chi(\zeta)}{\omega(\zeta)} \quad (2.2) \end{aligned}$$

где $\rho_0^2 = \zeta_0\bar{\zeta}_0$, а штрихами обозначены производные. Обозначим значение ζ на окружности единичного круга через t ($t = e^{i\theta}$). Тогда, внося (1.9) и (2.2) в (2.1) и имея в виду, что на контуре функция Грина обращается в нуль, получаем следующие контурные условия для защемленной пластинки, при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга:

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)\bar{\varphi}(t) + \omega(t)\bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \chi(t) + \bar{\chi}\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{\omega}(t)} \varphi(t) + \frac{\chi(t)}{\bar{\omega}(t)} = \\
 & = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\zeta_0) \right]}{t\bar{\omega}(t)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} - \\
 & - \frac{P(1-\rho_0^2)r_0^2}{32\pi D} \frac{1}{t\bar{\omega}(t)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что взамен уравнения (2.4) можно использовать также его сопряженное, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)} \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{\chi\left(\frac{1}{t}\right)}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)} = \\
 & = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{t[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\zeta_0) \right]}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} - \\
 & - \frac{P(1-\rho_0^2)r_0^2}{32\pi D} \frac{t}{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\zeta_0\right)} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Мусхелишвили показал [1], что условия (2.5) или (2.4) вполне определяет функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$, если, в случае конечной области, учитывать также условия определенности функции $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(0) = 0, \quad \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi(0)}{\bar{\omega}(0)} \right] = 0 \quad (2.6)$$

Имея в виду сложность выражения правой части уравнения (2.5), мы несколько видоизменяем способ определения функции $\varphi(\zeta)$, предложенный Мусхелишвили. Вместо того, чтобы умножить обе части (2.5) на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{t-\zeta}$$

мы умножим на

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta}$$

и, как у Мусхелишвили, интегрируем результат по окружности (γ) единичного круга. Имея в виду при этом, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\dot{\bar{\chi}}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \cdot \frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{1-\rho_0^2} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\dot{\bar{\omega}}\left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)\dot{\bar{\varphi}}\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-\zeta} = \\ & = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} - \\ & \quad - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0\zeta} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из этого уравнения мы должны определить функции $\varphi(\zeta)$. После этого легко можно определить функцию $\chi(\zeta)$. Для этого умножаем обе части уравнения (2.4) на

$$\frac{1}{2\pi i} \omega(t) \frac{dt}{t-\zeta}$$

и интегрируем по γ . Учитывая при этом, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \chi(t) \frac{dt}{t-\zeta} = \chi(\zeta)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{t(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} = \frac{1}{1-\rho_0^2} \frac{\bar{\zeta}_0}{1-\bar{\zeta}_0\zeta}$$

получаем

$$\chi(\zeta) = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{t(t-\zeta_0)\left(\frac{1}{t}-\bar{\zeta}_0\right)} \frac{dt}{t-\zeta} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\text{Pr}_0^2}{32\pi D} \frac{\bar{\zeta}_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \bar{\varphi}(t)}{t - \zeta} dt - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right)}{t - \zeta} dt
\end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда определяем

$$\chi(\zeta) = \int_{\gamma} \chi(\zeta) d\zeta + b_0 \quad (2.9)$$

причем, согласно условию определенности функции $\chi(\zeta)$ $\text{Im}[\chi(0)] = 0$, b_0 будет действительным числом. Имея в виду это и внося (2.9) в условие (2.3), получаем

$$\begin{aligned}
& \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \bar{\varphi}(t) + \omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) + \int_0^1 \chi(\zeta) d\zeta + \\
& + \int_0^1 \bar{\chi}(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} + 2b_0 = 0
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Функции $\omega(\zeta)$, $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ регулярны в области единичного круга, поэтому их можно представить в виде степенных рядов

$$\begin{aligned}
\omega(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k \\
\varphi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \\
\chi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^k
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Внося значения этих функций в условие (2.10) и приравнявая сумму постоянных слагаемых нулю, получим для b_0

$$b_0 = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (2.12)$$

Тогда, согласно (2.9), будем иметь

$$\chi(\zeta) = \int_0^1 \chi(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \zeta^k \quad (2.13)$$

Таким образом, если бы мы смогли из уравнения (2.7) определить функцию $\varphi(\zeta)$, то этим задача была бы полностью решена.

§ 3. Определение функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ в случае пластинки, область которой отображается на круг при помощи полинома

Пусть область пластинки отображается на область единичного круга с помощью полинома

$$z = \omega(\zeta) = c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots + c_n \zeta^n \quad (3.1)$$

Тогда, имея в виду также (2.11), находим

$$\frac{1}{t} \bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \varphi(t) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n k c_k a_{k+\lambda} \right) t^{\lambda} + \psi_1 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{t} \omega(t) \bar{\varphi} \left(\frac{1}{t} \right) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k \right) t^{\lambda} + \psi_2 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{\omega(t) - \omega(\zeta_0)}{t - \zeta_0} = \sum_0^{n-1} \mu_k t^k, \quad \frac{\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)}{\frac{1}{t} - \bar{\zeta}_0} = \sum_0^{n-1} \frac{\bar{\mu}_k}{\bar{t}^k}$$

$$\frac{[\omega(t) - \omega(\zeta_0)] \left[\bar{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0) \right]}{(t - \zeta_0) \left(\frac{1}{t} - \bar{\zeta}_0 \right)} = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) t^{\lambda} + \psi_3 \left(\frac{1}{t} \right) \quad (3.4)$$

где функции ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 голоморфны вне единичного круга и обращаются в нуль в бесконечности, а

$$\mu_k = \sum_{m=k+1}^n c_m \zeta_0^{m-k-1} \quad (3.5)$$

Внося (3.2), (3.3) и (3.4) в (2.7) и имея в виду, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \psi_k \left(\frac{1}{t} \right) \frac{dt}{t - \zeta} = 0, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{1}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{\zeta}_0^{\lambda} \zeta^{\lambda}$$

получаем

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n k c_k a_{k+\lambda} \right) \zeta^{\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k \right) \zeta^{\lambda} =$$

$$= -\frac{P(1-\rho_n^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) \zeta^\lambda - \\ - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \bar{\zeta}_0^\lambda \zeta^\lambda$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при ζ^λ , получаем

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} + \sum_{k=1}^{n-\lambda} k c_{k+\lambda} \bar{a}_k = -\frac{P(1-\rho_n^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} - \\ - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \bar{\zeta}_0^\lambda, \quad \lambda = 0, 1, \dots, (n-1) \quad (3.6)$$

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \bar{\zeta}_0^\lambda, \quad \lambda = n, n+1, \dots \quad (3.7)$$

Решение бесконечной системы уравнений (3.7) ищем в виде

$$a_k = C \bar{\zeta}_0^k, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (3.8)$$

где C — постоянное число.

Внося (3.8) в (3.7), определяем C

$$C = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)}$$

Тогда (3.8) даст

$$a_k = -\frac{Pr_0^2 \bar{\zeta}_0^{k-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)}, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (3.9)$$

Пользуясь формулой (3.9), мы можем значительно упростить систему уравнений (3.6). Для этого первую сумму левой части уравнения (3.6) преобразуем так:

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = \sum_{k=1}^{n-\lambda} k \bar{c}_k a_{k+\lambda} + \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} \quad (3.10) \\ \lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Но, согласно (3.9)

$$\sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = -\frac{Pr_0^2 \bar{\zeta}_0^{\lambda-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^k \\ \lambda = 1, 2, \dots, (n-1)$$

Поэтому из (3.10) получим

$$\sum_{k=1}^n k \bar{c}_k a_{k+\lambda} = \sum_{k=1}^{n-\lambda} k \bar{c}_k a_{k+\lambda} - \frac{Pr_0^2 \bar{\zeta}_0^{\lambda-1}}{32\pi D \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^k$$

Внеся этот результат в (3.6), получаем систему уравнений с неизвестными $a_1, a_2, \dots, a_n$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-\lambda} k(\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = & -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} - \\ & - \frac{Pr_0^2 \bar{\zeta}_0^{\lambda}}{32\pi D} \left[1 - \frac{1}{\bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)} \sum_{k=n-\lambda+1}^n k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{k-1} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$\lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$

К этим уравнениям надо присоединить второе условие из (2.6), которое согласно (2.11) и (3.1) приводится к уравнению

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

Таким образом, для определения $a_1, a_2, \dots, a_n$ имеем уравнения (3.11) и (3.12). Первое уравнение из (3.11) и уравнение (3.12) являются действительными уравнениями, а остальные комплексными. Поэтому число действительных уравнений в (3.11) и (3.12) составляет $2n$. Эти уравнения содержат $2n$ действительных неизвестных α_k, β_k ($k=1, 2, \dots, n$), где $\alpha_k + i\beta_k = a_k$. Если уравнения (3.11) и (3.12) имеют решение, то из них находим a_k ($k=1, 2, \dots, n$). Остальные же коэффициенты $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ находим из рекуррентной формулы (3.9). Этим полностью определяется функция $\varphi(\zeta)$.

Выведем теперь формулу для функции $\chi(\zeta)$, полагая известными коэффициенты a_k . Согласно (2.11) и (3.1) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \varphi(t) = & \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+2}^{n+\lambda+1} k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{k-\lambda-1} a_k \right) t^\lambda + \psi_4\left(\frac{1}{t}\right) \\ \omega(t) \bar{\varphi}\left(\frac{1}{t}\right) = & \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+2}^n k c_k a_{k-\lambda-1} \right) t^\lambda + \psi_5\left(\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Внеся эти результаты в (3.4) в (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+1}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda-1} \right) \zeta^\lambda - \frac{Pr_0^2 \bar{\zeta}_0}{32\pi D} \frac{1}{1-\bar{\zeta}_0 \zeta} - \\ & - \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+2}^{n+\lambda+1} k \bar{c}_k \bar{\zeta}_0^{k-\lambda-1} a_k \right) \zeta^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{n-2} \left(\sum_{k=\lambda+2}^n k c_k a_{k-\lambda-1} \right) \zeta^\lambda \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.13), определяем $\chi(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & -\frac{P(1-p_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} + \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \ln(1-\bar{\zeta}_0 \zeta) - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\sum_{k=\lambda+1}^{n+\lambda+2} k \bar{c}_k a_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_1^n (c_k a_k + c_k \bar{a}_k) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заметим, что при использовании способа Мусхелишвили без указанного выше изменения вместо уравнений (3.11) и (3.9) получились бы уравнения

$$a_\lambda + \sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{a}_k b_{k+\lambda-1} = -\frac{P(1-p_0^2)}{16\pi D} A_\lambda - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \frac{\zeta_0^{\lambda-1}}{\bar{w}(\zeta_0)} \quad (3.11')$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, n$$

$$a_\lambda = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \frac{\zeta_0^{\lambda-1}}{\bar{w}(\zeta_0)}, \quad \lambda = n+1, n+2, \dots$$

Коэффициенты b_k и A_k определяются последовательными подстановками из следующих уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{c}_k b_{k+\lambda-1} = c_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda+1} k \bar{c}_k A_{k+\lambda-1} = \sum_{k=\lambda-1}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda+1}, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n$$

Таким образом, для решения (3.11') необходимо предварительно определить коэффициенты b_k и A_k , что в значительной мере усложняет вычисления при определении коэффициентов a_k из (3.11') по сравнению с вычислениями, необходимыми при определении тех же коэффициентов из (3.11).

§ 4. Случай, когда начало координат совпадает с центром нагруженного круга

В частных случаях совмещение начала координат с центром нагруженного круга может привести к значительному упрощению вычислений.

Для этого случая имеем

$$z_0 = \bar{z}_0 = 0, \quad \bar{z}_0 = \bar{z}_0 = 0 \quad (4.1)$$

Функция Грина, согласно (1.7), принимает значение

$$G = \frac{1}{2} \ln \bar{\zeta} = \ln \rho \quad (4.2)$$

Внося (4.2) в (1.3) и (1.4), получаем:
для замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{Pr^4}{64\pi r_0^2 D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + r^2 - \frac{5r_0^2}{4} \right] - \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{r}{\rho} + \Phi \quad (4.3)$$

для замкнутой не нагруженной области пластинки

$$w_1 = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \rho + \Phi \quad (4.4)$$

где r — расстояние произвольной точки пластинки от начала координат, а Φ определяется согласно (1.8).

Приняв в (3.9) $\bar{z}_0 = 0$, получим

$$a_k = 0, \quad k = n+1, n+2, \dots \quad (4.5)$$

Следовательно, функция $\varphi(\zeta)$ представляется полиномом

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k$$

Коэффициенты a_k определяются по уравнениям (3.11) и (3.12), которые при $\bar{z}_0 = \bar{z}_0 = 0$ принимают вид

$$\sum_{k=1}^n k(\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{k=1}^n c_k \bar{c}_k - \frac{Pr_0^2}{32\pi D} \quad (4.6)$$

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda} k(\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{k=\lambda+1}^n c_k \bar{c}_{k-\lambda} \quad (4.7)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

Имея в виду (4.1), из (3.13) получаем

$$\chi(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} c_{k+\lambda} \bar{c}_{k-\lambda+1} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k \bar{c}_k a_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\
& - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_k \right) \frac{\bar{\zeta}^\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2} \sum_1^n (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\chi(\zeta)$ представляется также полиномом.

Определим значение прогиба в центре нагруженного круга. Имея в виду, что

$$\ln \frac{r}{\rho} = \frac{1}{2} \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}}$$

получаем

$$\left(\ln \frac{r}{\rho} \right)_{\substack{r=0 \\ \rho=0}} = \frac{1}{2} \ln c_1 \bar{c}_1 \quad (4.9)$$

Приняв в (4.3) $r=0$, $\rho=0$ и учитывая (1.8), (4.6), (4.8) и (4.9), найдем значение прогиба в центре нагруженного круга

$$w_0(0, 0) = \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \left(2 \ln \frac{r_0^2}{c_1 \bar{c}_1} - 5 \right) - \sum_1^n (\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k) \quad (4.10)$$

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе защемленной по контуру эллиптической пластинки при действии нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, центр которого совпадает с центром эллипса. Совместим оси x, y с главными диагоналями эллипса и примем отношения полуосей $a:b = \sqrt{5}:3$. Тогда внутренняя область эллипса приближенно отображается на область единичного круга с помощью полинома [8]

$$z = \omega(\zeta) = C(\zeta + 0,12\zeta^3 + 0,03\zeta^5 + 0,01\zeta^7) \quad (4.11)$$

где

$$C = \frac{10}{9} b$$

Внеся значения коэффициентов отображающей функции (4.1) в (4.7), получаем четыре уравнения с неизвестными a_1, a_3, a_5 и a_7 . Решая эти уравнения, получаем

$$a_1 = A \left(1,942929 C + 1,041860 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_3 = A \left(0,218177 C - 0,104096 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_5 = A \left(0,052561 C - 0,024383 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

$$a_7 = A \left(0,020571 C - 0,010419 \frac{r_0^2}{C} \right)$$

где

$$A = - \frac{P}{64\pi D}$$

Таким образом,

$$\varphi(\zeta) = a_1 \zeta + a_3 \zeta^3 + a_5 \zeta^5 + a_7 \zeta^7$$

Из (4.8) получаем

$$\chi(\zeta) = b_0 + b_2 \zeta^2 + b_4 \zeta^4 + b_6 \zeta^6$$

где

$$b_0 = -A(1,970895 C^2 + 1,028533 r_0^2)$$

$$b_2 = 2A \sum_{k=1}^3 c_{2k-1} c_{2k+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (2k+1)(c_{2k-1} a_{2k+1} + c_{2k+1} a_{2k-1})$$

$$b_4 = A \sum_{k=1}^2 c_{2k-1} c_{2k+3} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 (2k+3)(c_{2k-1} a_{2k+3} + c_{2k+3} a_{2k-1})$$

$$b_6 = \frac{2A}{3} c_1 c_7 - \frac{7}{6} (c_1 a_7 + c_7 a_1)$$

Таким образом, задача решена. Внося значение коэффициентов c_k , s_k и a_k в (4.10), найдем значение прогиба в центре нагруженного круга:

$$w_0(0, 0) = \frac{P}{16\pi D} \left(1,21660 b^2 - 0,84110 r_0^2 - r_0^2 \ln \frac{b}{r_0} \right) \quad (4.12)$$

Приняв в (4.12) $r_0 = 0$, получаем значение прогиба в центре эллиптической пластинки при действии в той же точке силы P

$$w_0(0, 0) = 1,21660 \frac{Pb^2}{16\pi D}$$

Точное решение [6] показывает, что погрешность найденного значения прогиба менее чем $0,4\%$.

§ 5. Случай действия сосредоточенной силы

Внося (1.7) и (1.8) в (1.5), получаем выражение прогиба пластинки при действии в точке x_0, y_0 сосредоточенной силы P :

$$w = \frac{P}{16\pi D} [\omega(\zeta) - \omega(\zeta_0)] [\bar{\omega}(\bar{\zeta}) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_0)] \ln \frac{(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)}{(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)(1 - \zeta_0 \bar{\zeta})} + \\ + \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \varphi(\zeta) + \omega(\zeta) \bar{\varphi}(\bar{\zeta}) + \chi(\zeta) + \bar{\chi}(\bar{\zeta}) \quad (5.1)$$

В случае заземленной пластинки, когда ее область отображается на единичный круг с помощью полинома (3.1), функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ определяются по результатам § 3, если принять в них $r_0 = 0$. Тогда из (3.8) получаем

$$a_k = 0, \text{ при } k = n+1, n+2, \dots \quad (5.2)$$

Следовательно, $\varphi(\zeta)$ представляется полиномом

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k \quad (5.3)$$

Коэффициенты a_k при $k = 1, 2, \dots, n$ определяем по уравнениям (3.11) и (3.12), приняв в них $r_0 = 0$:

$$\sum_{k=1}^{n-\lambda} k(\bar{c}_k a_{k+\lambda} + c_{k+\lambda} \bar{a}_k) = -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \quad (5.4)$$

$$\lambda = 0, 1, \dots, (n-1)$$

$$\bar{c}_1 a_1 = c_1 \bar{a}_1$$

причем μ_k согласно (3.5).

Далее, полагая в (3.13) $r_0 = 0$ и имея в виду (5.2), получаем для функции $\chi(\zeta)$

$$\begin{aligned} \chi(\zeta) = & -\frac{P(1-\rho_0^2)}{16\pi D} \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda}^{n-1} \mu_k \bar{\mu}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k \bar{c}_{k-\lambda} a_k \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left(\sum_{k=\lambda+1}^n k c_k \bar{a}_{k-\lambda} \right) \frac{\zeta^\lambda}{\lambda} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\bar{c}_k a_k + c_k \bar{a}_k \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Таким образом, в случае действия сосредоточенной силы функции $\varphi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ представляются полиномами. Когда начало координат совпадает с точкой приложения сосредоточенной силы, т. е. когда $r_0 = 0$, из (3.5) получаем

$$\mu_k = c_{k+1}$$

и благодаря этому, в частных случаях, вычисления в значительной мере упрощаются.

Օ. Մ. Սափոնձյան

ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ՊԼԱՍՏԻՆԿԱՅԻ ԾՌՈՒՄԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՎՐԱ
ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգվածում Մուսխիլիշվիլու մեթոդով լուծված է եզրագծով ամրակցված բարակ պլաստինկայի ծախան խնդիրը, երբ արտաքին բևեռ նախադրաչափ բաշխված է պլաստինկայի հիմքերից մեկի մակերևույթի մասի վրա, որն իրենից ներկայացնում է շրջան: Խնդիրը լուծված է այն ենթադրությամբ, որ պլաստինկայի միջին հարթության տիրույթը կոնֆորմորեն օրտապատկերվում է միավոր շրջանի տիրույթի վրա պոլինոմի միջոցով: Խնդրի լուծումը ներկայացված է աստիճանային շարքերի միջոցով, որոնք գտնադրված են բառ միավոր շրջանի կոմպլեքս կոորդինատի աստիճաններով: Երբ կոորդինատների սկզբնականը համասեղվում է բևեռայնությամբ շրջանի կենտրոնի հետ, նաև այն դեպքում, երբ պլաստինկայի կամայական կետում կիրառված է կենտրոնացած ուժ, վերոհիշյալ շարքերը փոխարինվում են պոլինոմներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, Ленинград, 1935.
2. Гершгорин С. А. Об изгибе пластинок нагрузками, распределенными по площади круга. Прикладная математика и механика, т. 1, в. 2, 1933.
3. Лурье А. И. Операционное исчисление, Ленинград, 1938.
4. Сапонджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.
5. Сапонджян О. М. Изгиб свободно опертой полигональной плиты. Известия Академии наук Армянской ССР, т. V, № 2, 1952.
6. Сапонджян О. М. Изгиб эллиптической плиты. Известия Академии наук Армянской ССР, т. VII, № 5, 1954.
7. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных перекрытий, Москва, 1915.
8. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, Ленинград, 1949.

М. Л. Тер-Микаелян

О методе прицельных параметров

§ 1. Введение

Задачи квантовой электродинамики, решаемые стандартными методами теории возмущений, нередко требуют утомительных вычислений. Благодаря этому широкое распространение получил простой приближенный метод расчета, предложенный Ферми [1] и детально развитый Вильямсом [2]. В настоящей статье мы рассматриваем применение этого метода к вопросам тормозного излучения. Этому вопросу посвящена известная работа Вейцекера [3], от которой наши расчеты отличаются в следующих пунктах:

1) из последней следует, что логарифмическая неточность поперечника излучения на кулоновом центре является следствием как математических приближений (упрощенное представление спектра кулонова поля), так и произвольности в выборе параметра обрезания. Мы показываем, что если пользоваться точным спектром кулонового поля, то можно подобрать такой параметр обрезания, чтобы результат совпадал с точной формулой;

2) использование найденного параметра обрезания для вычисления поперечника излучения в поле атома приводит, естественно, к точной квантовомеханической формуле;

3) рассмотрен вопрос об излучении мягких квантов. Мы приводим простой вывод поперечника излучения мягких квантов, который охватывает также инфракрасную область частот, т. е. ту область частот, где несправедливы как расчеты, основанные на теории возмущений, так и расчеты Вейцекера;

4) в ряде работ требуется знание распределения излученных фотонов по углам. Интегрирование формулы Бете — Гайтлера по углам вылета электрона требует кропотливых расчетов. Очень просто, однако, получить практически точную формулу в рамках метода прицельных параметров;

5) мы приводим простой вывод формулы для поперечника рождения пары, а также для углового распределения рожденных частиц.

§ 2. Излучение релятивистского электрона на кулоновом центре

Рассмотрим излучение релятивистского электрона, движущегося вдоль оси x с начальной скоростью $\vec{v}$. Потенциал ядра в точке нахождения электрона равен

$$\varphi = \frac{Ze}{r} \quad (1)$$

Разложим φ в тройной интеграл Фурье

$$\varphi = \frac{A_1}{i} = \int \varphi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}, \quad \text{где } d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$$

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi Ze}{k^2} \quad (2)$$

Перейдем в систему координат покоящегося электрона. Преобразование совершается с помощью матрицы Лоренца.

$$a_{ik} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & -\frac{iv}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{iv}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{vmatrix}$$

Все величины в новой системе координат будем обозначать штрихованными символами. После преобразования потенциалы даются следующими выражениями:

$$A'_x = \frac{Zev}{2\pi^2 c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \int \frac{e^{i(k_y y + k_z z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x' - vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$\varphi' = \frac{Ze}{2\pi^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \int \frac{e^{i(k_y y + k_z z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x' - vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k} \quad (3)$$

Используя (3), найдем электрическое и магнитное поля

$$E_x = -\frac{iZe}{2\pi^2} \int \frac{e^{i(k_y y + k_z z)}}{k^2} e^{\frac{ik_1(x' - vt')}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} k_1 d\vec{k}$$

$$E_y' = - \frac{iZe}{2\pi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int \frac{k_z}{k^2} e^{i(k_x y + k_z z)} e^{\frac{ik_y(x' - vt')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$E_z' = - \frac{iZe}{2\pi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int \frac{k_y}{k^2} e^{i(k_x y + k_z z)} e^{\frac{ik_y(x' - vt')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} d\vec{k}$$

$$H_x' = 0$$

$$H_y' = \frac{v}{c} E_z'$$

$$H_z' = \frac{v}{c} E_y'$$

Из последних выражений непосредственно следует, что при $v \rightarrow c$ можно пренебречь компонентой электрического поля вдоль движения по сравнению с E_y' и E_z' , а также считать, что $H_y' = E_z'$ и $H_z' = E_y'$. Тогда электромагнитное поле быстро движущегося ядра приобретает свойства электромагнитной волны, и (3) можно рассматривать как разложение по плоским волнам с частотой

$$\frac{k_y v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Найдем поток энергии через единицу поверхности в точке нахождения электрона за все время пролета ядра:

$$S = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |E_y|^2 + |E_z|^2 \right\} dt = \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |E_{ym}|^2 + |E_{zm}|^2 \right\} d\omega \quad (4)$$

Чтобы привести наши расчеты в соответствие с квантовой электродинамикой, необходимо вместо одного электрона рассматривать целый пучек электронов, движущихся на различных прицельных расстояниях от ядра. Фактически это сводится к интегрированию выражения (4) по всем возможным значениям y и z . Мы должны заметить, что при значениях параметра удара

$$\rho = \sqrt{z^2 + y^2} \sim \frac{h}{mc} = \lambda^*$$

уже нельзя пренебрегать чисто квантовыми эффектами, в частности нельзя выбрать систему координат, где электрон покоится, а ядро движется на расстоянии $\rho \sim \lambda$, поскольку из-за соотношения неопределенности неопределенность импульса электрона будет порядка mc .

* h обозначает постоянную Планка, деленную на 2π ; λ — соответствующая комптоновская длина волны электрона.

Мы, однако проинтегрируем выражение (4) по всем возможным прицельным параметрам, но будем считать, что окончательный результат, если его рассматривать как функцию k_2 и k_3 , является правильным только в интервале значений $|k_2|$ и $|k_3|$ от нуля до значений порядка $\frac{mc}{h}$. Физически это означает, что классический метод расчета дает

правильный результат только при излучении таких квантов, при которых ядру передается импульс в направлении, перпендикулярном первоначальному движению электрона, меньший или порядка mc .

Интегрируя выражение (4), мы получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S dy dz = \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k^4} d\vec{k} = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 dk_3 \int_0^{\infty} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k^4} dk_1$$

Если мы разделим поток энергии в интервале $k_1, k_1 + \Delta k_1$ на энергию псевдокванта, равную $\frac{\hbar k_1 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, то получим полное число

псевдоквантов в интервале $k_1, k_1 + dk_1$

$$n_{k_1} dk_1 = \frac{Z^2 e^2}{\hbar c} \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1 k_4} dk_2 dk_3 dk_1 \quad (5)$$

Поток псевдоквантов с различными значениями круговой частоты

$$\nu_k = \frac{ck_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ независимо друг от друга рассеивается на электроне}$$

(это является следствием применимости теории возмущений, см. также § 4). Ясно, что рассеянные псевдокванты в системе покоя электрона есть не что иное, как тормозные кванты в системе покояющегося ядра. Поперечник тормозного излучения мы получим, если умножим число псевдоквантов с частотой от ν_k до $\nu_k + \Delta \nu_k$ на поперечник рассеяния (формулу Клейна — Нишина) и преобразуем все величины в полученной таким образом формуле к лабораторной системе. Поперечник рассеяния на свободном электроне равен (мы отвлекаемся здесь и в дальнейшем от вопросов поляризации)

$$d\Phi = \frac{r_0^2 d\Omega}{2} \frac{\nu_k'^2}{\nu_k^2} \left(\frac{\nu_k}{\nu_k'} + \frac{\nu_k'}{\nu_k} - \sin^2 \theta' \right) \quad (6)$$

где ν_k и ν_k' частота падающего и рассеянного под углом θ' псевдокванта. Частоты связаны соотношением Комптона

$$\frac{h}{mc^2} \nu_k = \frac{\nu_k'}{h} (1 - \cos \theta') \quad (7)$$

Для перехода в лабораторную систему координат необходимо воспользоваться преобразованием Лоренца, тогда

$$\nu = \frac{\nu_k' \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta'\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (8)$$

где ν есть круговая частота излученного кванта. В нашем распоряжении имеется четыре переменные $\nu_k, \nu_k', \nu, \theta'$ с двумя соотношениями (7) и (8). Поскольку полный поперечник тормозного излучения может зависеть только от частоты излученного кванта ν , то мы выразим ν_k и θ' согласно (7) и (8) через ν и ν_k и проинтегрируем полученную формулу по частотам кулонового поля ν_k . Соотношения (7) и (8) накладывают ограничение на интервал значений ν_k , которые создают кванты с частотой ν . Вводя обозначение $\varepsilon = \frac{h\nu}{E_0}$, где E_0 — начальная энергия электрона, мы получим, учитывая соотношения (7) и (8),

$$\cos \theta' = \frac{1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\nu_k} \frac{mc^2}{h}}{\frac{v}{c} - \varepsilon} \quad (9)$$

условие $\cos \theta' \geq -1$ приводит к соотношению*

$$k_1 > k_{1 \min} = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \frac{mc}{2h} \left(\frac{mc^2}{E_0} \right) \quad (9^1)$$

условие $\cos \theta' \leq 1$ дает

$$k_1 \leq k_{1 \max} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{mc}{h} \quad (9^2)$$

Формула Клейна—Нишины в переменных $\varepsilon, \nu_k = \frac{ck_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ при-

нимает следующий вид:

$$d\Phi = \pi r_0^2 \left[\frac{1}{1-\varepsilon} + 1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{(1-\varepsilon) h k_1} + \right]$$

* Мы рассматриваем излучение квантов, удовлетворяющих условию $\varepsilon \leq \frac{v}{c}$.

$$+ \varepsilon \left(\frac{mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\hbar k_1 (1 - \varepsilon)} \right)^2 \left] \frac{mc \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\hbar k_1} d\varepsilon \quad (10)$$

Учитывая (5, 9, 10), мы получим поперечник тормозного излучения

$$d\sigma(\varepsilon) = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} n_{k_1} d\Phi dk_1 = \frac{Z^2 r_0^2}{137} \frac{d\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\pi \lambda} \int dk_2 \int dk_3 \int_{k_{1\min}}^{k_{1\max}} dk_1 \frac{k_2^2 + k_3^2}{(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^2 k_1^2} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1 (1 - \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^2 k_1^2 (1 - \varepsilon)^2} \right\} \quad (11)$$

Введем новую переменную $k_2^2 + k_3^2 = k^2$, тогда результат интегрирования есть

$$2\pi \int_0^{\frac{a}{\lambda}} dk \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \frac{k^2 dk_1}{(k_1^2 + k^2)^2 k_1^2} \left\{ \frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1 (1 - \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\lambda^2 k_1^2 (1 - \varepsilon)^2} \right\} = \\ = 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right) \log \frac{2a(1 - \varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right) - \frac{1 - \varepsilon}{9} \right\} \quad (11')$$

Если мы теперь положим

$$\log a = 1 + \frac{1 - \varepsilon}{9} \frac{1}{\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon)} \quad (12)$$

то формула (11) перепишется

$$d\sigma(\varepsilon) = 4 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1 - \varepsilon) \right) \left(\log \frac{2(1 - \varepsilon)}{\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (13)$$

что совпадает с точной квантовомеханической формулой (при условии $E_0 \gg mc^2$).

§ 3. Излучение в поле атома

Попытаемся теперь использовать предыдущие рассуждения для получения поперечника тормозного излучения в поле атома. Рассмотрим прежде всего излучение на ядре, точнее ту часть излучения на атоме, при которой волновые функции электронов не изменяются. В этом случае влияние атомных электронов на излучение сводится к экранирующему действию кулонового поля ядра. Экранировку очень просто ввести в предыдущие расчеты, заменив потенциал (1) на

$\varphi = \frac{Ze}{r} e^{-\frac{r}{R}}$ где $R = R_0 Z^{-\frac{1}{3}}$, а R_0 — боровский радиус. Полное число квантов в интервале $k_1, k_1 + \Delta k_1$ примет вместо (5) вид

$$n_{k_1} = \frac{Z^2 e^2}{hc} \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{mc}{\hbar}} \int_0^{\frac{mc}{\hbar}} \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1 \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} dk_2 dk_3 dk_1. \quad (14)$$

Дальнейшие расчеты соответствуют предыдущему параграфу. Используя для ε приведенное выше значение, мы, очевидно, должны прийти к точным формулам. Это следует из того, что обрезание происходит на расстояниях порядка λ , в то время как экранировка действует на расстояниях порядка $137\lambda Z^{-\frac{1}{3}}$. В частности, в случае полной экранировки, когда $k_{1\min} R = \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)} \frac{137Z^{-\frac{1}{3}}}{2} \frac{mc^2}{E_0} \ll 1$ (15)

мы приходим к формуле

$$d\sigma(\varepsilon) = 4 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ \left(\varepsilon^2 + \frac{4}{3} (1-\varepsilon) \right) \left(\log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\varepsilon}{9} \right\} \quad (16)$$

Аналогичную формулу можно получить и квантовомеханическим путем [4], используя для экранирующего действия электронов не модель Томаса — Ферми, а простой экспоненциальный множитель (это сводится к замене в квантовомеханических формулах величины $\log 183Z^{-\frac{1}{3}}$ на $\left(\log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right)$).

Следует отметить, что учет второго слагаемого параметра обрезания (12) приводит в формулах (13) и (16) к исчезновению или появлению члена $\frac{1-\varepsilon}{9}$, который составляет всего несколько процентов от основного. С другой стороны, учет упрощенной экспоненциальной экранировки приводит к погрешности порядка 6%. Последнюю погрешность можно избежать, если подобрать радиус экранировки [4], который дает лучшее приближение к модели Томаса — Ферми. Это сводится к тому, что вместо $\frac{R}{\lambda} = 137Z^{-\frac{1}{3}}$ необходимо принять, что $\frac{R}{\lambda} = 108Z^{-\frac{1}{3}}$.

Во избежание недоразумений мы отметим, что при интегрировании формулы (11') по k_1 мы приняли, что основной вклад в интеграл вносит область вблизи нижнего предела. Справедливость этого допущения легко усмотреть из структуры интеграла (11'), а также структуры аналогичного выражения для экранированного поля. Наши соотношения останутся правильными, если $k_{1\min} \ll k_{1\max}$.

Последнее неравенство всегда имеет место, так как согласно (9') и (9'') оно сводится к условию $4(1-\varepsilon) \gg \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, что всегда выполняется при $E_0 \gg \frac{mc^2}{2} \frac{1}{V(1-\varepsilon)}$.

В дальнейшем мы будем пренебрегать вторым слагаемым в параметре обрезания, а также пользоваться упрощенной экранировкой.

Помимо излучения на ядре, необходимо учитывать также излучение на атомных электронах. Вопрос этот до сих пор, ввиду его сложности, не рассмотрен методами квантовой электродинамики. Однако из качественного рассмотрения с помощью метода прицельных параметров можно видеть, что все отличие от случая излучения на ядре сводится (помимо того, что следует положить $Z=1$) к тому, что логарифм в формулах (16) и (13) должен быть несколько изменен. Это следует, во-первых, из того факта, что близкие параметры удара (порядка λ), дающие логарифмический вклад в поперечник излучения, требуют учета отдачи первоначально покоившегося электрона (этот эффект рассчитан Г. М. Гарибяном [5]), во-вторых, при больших параметрах удара необходимо учитывать связь электрона с атомом. Последняя не полностью эквивалентна соответствующему эффекту экранировки для ядра, поскольку, как это хорошо известно (например, из теории ионизационных потерь), атомные электроны могут поглощать энергию, а значит проводить к рассеянию и излучению, и при пролетах частицы на расстояниях, значительно превышающих атомные. Полуколичественная оценка показывает, однако, что и этот второй эффект приводит лишь к незначительному изменению формул (16) и (13).

Ввиду отсутствия точных расчетов, можно с хорошей точностью учесть излучение на атомных электронах тем, что в формулах (16) и (13) заменить Z^2 на $Z(Z+1)$.

§ 4. Излучение мягких квантов

Рассмотрим инфракрасную катастрофу в рамках метода прицельных параметров. Формулы (16) и (13) становятся неприменимыми при $\frac{e^2}{\hbar c} \ln \frac{E_0}{\hbar \omega} \sim 1$ [5]. При выполнении последнего условия вероятность излучения становится сравнимой с вероятностью упругого рассеяния. Это указывает на неприменимость теории возмущений. Метод, исполь-

зованный при выводе формул (16) и (13), также неприменим, поскольку и он предполагает справедливость теории возмущений. Это предположение необходимо в методе прицельных параметров, поскольку мы пользуемся формулой теории возмущений — формулой Клейна — Нишины. (При выводе ее необходимо предположить малость взаимодействия). Правда, формулу для рассеяния мягких квантов можно вывести и не предполагая применимости теории возмущений (формула Томсона), однако и этот последний вывод становится несправедливым для очень мягких квантов, поскольку он пренебрегает действием магнитного поля. Точная формула рассеяния квантов произвольной частоты на электроны нам неизвестна, однако если бы мы и имели нужную формулу, все равно метод прицельных параметров был бы неприменим. Дело в том, что этот метод, помимо всего прочего, предполагает независимость действия отдельных компонентов спектра кулонового поля ядра. Легко, однако, заметить, что если нужно учитывать действие магнитного поля на поведение электрона (или неприменима теория возмущений), то тогда различные компоненты кулонового поля быстро движущегося ядра не могут считаться независимыми.

Благодаря этим обстоятельствам, для правильного вывода поперечника тормозного излучения инфракрасных квантов, нам необходимо несколько изменить метод расчета. Как мы увидим ниже, оказывается возможным очень простым способом получить поперечник излучения мягких квантов (который, очевидно, будет включать в себя и инфракрасную часть). Для вывода мы учтем тот факт, что при рассеянии (излучении) мягких квантов влиянием отдачи на движение электрона можно пренебречь. Тогда движение электрона определяется, всецело, равномерно и прямолинейно движущимся полем ядра. Если ядро пролетает на прицельном расстоянии ρ , то первоначально покоившийся электрон приобретает скорость в направлении, перпендикулярном направлению движения ядра, равную

$$\vec{v}_1 = \frac{2Ze^2}{mc\rho} \quad (17)$$

Отметим, что при $\rho \approx \rho_{\min} \sim \lambda$ электрон остается нерелятивистским, что значительно упрощает все расчеты. Вычислим интенсивность излучения с частотой ν' при заданном движении электрона.

Фурье-компонента напряженности магнитного поля равна

$$\vec{H}_{\nu'} = \frac{1}{2\pi} \int \vec{H}' e^{i\nu' t} dt \quad (18)$$

если $\nu' t \ll 1$

тогда $\vec{H}_{\nu'} = \frac{1}{2\pi} \int \vec{H}' dt$; причем эффективны промежутки времени порядка времени столкновения $t_{\text{эф}} \approx \frac{\rho}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Поскольку $\vec{H}' = \frac{1}{c} [\vec{A}' \vec{n}]$, где

$\vec{n}$ — направление излучения, а векторный потенциал дается формулой

$$\vec{A}' = \frac{e\vec{v}_1}{cR_0} \quad (19)$$

то

$$\vec{H}'_v = \frac{1}{2\pi c} [\vec{A}' \vec{n}] = \frac{e}{2\pi c^2 R_0} [\vec{v}_1 \vec{n}] \quad (20)$$

Полное количество излученной энергии в интервале частот ν' ; $\nu' + d\nu'$ в телесный угол dO' есть:

$$dE'_{\vec{n}\nu'} = cR_0^2 |\vec{H}'_v|^2 dO' d\nu'$$

или, используя (20)

$$dE'_{\vec{n}\nu'} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{\pi \rho^2 c} (1 + \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta' d\nu' \quad (21)$$

где θ' есть угол между направлением движения и направлением излучения. При выводе (20) мы попутно усреднили поперечник по всем возможным отклонениям электрона в плоскости, перпендикулярной движению ядра (т. е. заменили $\overline{\sin^2(n\nu_1)} = \frac{1 + \cos^2 \theta'}{2}$).

Для получения окончательной формулы необходимо перейти в лабораторную систему координат. Формулу (21) легко преобразовать к новой системе координат, учитывая, что dE'_v преобразуется, как четвертая компонента импульса, и принимая во внимание также формулу (8). Мы получим после преобразования (при $v \approx c$)

$$dE_v = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{\pi \rho^2 c} dv (1 + \cos^2 \theta') \sin \theta' d\theta' \quad (22)$$

интегрируя по всем θ' , приходим к формуле

$$dE_v = \frac{8}{3} Z^2 r_0^2 \frac{e^2}{\pi \rho^2 c} dv \quad (23)$$

Из условия (18) и (8) мы получим, что

$$\rho \ll \rho_{\max} = \frac{2c}{v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}$$

Умножим формулу (22) на $2\pi\rho d\rho$ и проинтегрируем по ρ от $\rho_{\min} \approx \frac{h}{mc}$ до $\rho_{\max}$. Тогда мы получим с логарифмической точностью ($k \sim 1$)

$$dE_v = \frac{16}{3} \frac{Z^2 r_0^2 e^2}{c} \log k \frac{2c}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} dv \quad (24)$$

При полной экранировке, т. е. когда

$$\rho_{\max} \gg R_0 Z^{-\frac{1}{3}}$$

мы имеем

$$dE_\nu = \frac{16}{3} \frac{Z^2 r_0^2 e^2}{c} \log 137 Z^{-\frac{1}{3}} d\nu \quad (25)$$

Формулы (24) и (25) применимы при излучении квантов, удовлетворяющих условию (18), которое в лабораторной системе можно переписать $\nu < \frac{2c}{\rho(1 - \frac{v^2}{c^2})}$, где ρ некоторый средний параметр удара, за-

ключенный между $\rho_{\min}$ и $\rho_{\max}$.

§ 5. Угловое распределение фотонов

В предыдущих параграфах мы интересовались полным поперечником тормозного излучения. Перейдем теперь к угловому распределению излученных фотонов. Покажем, что угловое распределение можно очень просто получить, исходя из работы Вейцзекера. Число псевдофотонов, проходящих через единицу поверхности в точке расположения электрона за все время пролета ядра, дается согласно Вейцзекеру следующим выражением (напомним, что штрихованные величины относятся к системе, где электрон покоится):

$$F_{\nu_k} d\nu_k = F_{\alpha'_0} d\alpha'_0 = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 \rho^2 \lambda} d\alpha'_0 \quad \text{при} \quad \alpha'_0 \ll \frac{\lambda}{\rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$F_{\alpha'_0} d\alpha'_0 = 0 \quad \text{при} \quad \alpha'_0 \gg \frac{\lambda}{\rho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{где} \quad \alpha'_0 = \frac{h\nu_k}{mc^2}; \quad \alpha' = \frac{h\nu}{mc^2}. \quad \text{Формула}$$

Клейна — Нишины в переменных α'_0 , α' имеет вид:

$$d\Phi = \frac{r_0^2}{2} \frac{\alpha'^2}{\alpha_0'^2} \left(\frac{\alpha'_0}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha'_0} - \sin^2 \theta' \right) d\Omega'$$

Здесь θ' — угол между падающим и рассеянным псевдоквантом.

Число рассеянных псевдоквантов есть

$$d\sigma = F_{\alpha'_0} d\alpha'_0 d\Phi = \frac{r_0^2}{\pi \rho^2} \frac{Z^2 e^2}{hc} \frac{\alpha'^2}{\alpha_0'^2} \left(\frac{\alpha'_0}{\alpha'} + \frac{\alpha'}{\alpha'_0} - \sin^2 \theta' \right) \frac{d\alpha'_0}{\alpha'_0} \sin \theta' d\theta'$$

Чтобы получить поперечник для углового распределения тормозных квантов, нужно преобразовать эту формулу в лабораторную систему и проинтегрировать по параметрам столкновения. Вводя обозначение для угла θ между направлением излучения и первоначальным направлением движения $\theta = \chi \frac{mc^2}{E}$, получим

$$d\sigma = 4 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{d\nu}{\nu} x dx \left[\frac{E_0^2 + E^2}{(1+x^2)^2 E_0^2} - \frac{4x^2 E}{E_0(1+x^2)^4} \right] \left\{ \frac{2 \log k \frac{2EE_0}{mc^2 h\nu}}{2 \log k 137Z} \right\} \quad (26)$$

где $k \sim 1$.

Если мы ту же задачу рассмотрим с помощью переменных k_1, k_2, k_3 и за максимальное значение параметра $\sqrt{k_2^2 + k_3^2}$ возьмем такое, что для него $\left[\log \frac{h \sqrt{k_2^2 + k_3^2}}{mc} \right]_{\min} = 1$, то придем к следующей формуле:

$$d\sigma = 4 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{d\nu}{\nu} x dx \left[\frac{E_0^2 + E^2}{(1+x^2)^2 E_0^2} - \frac{4x^2 E}{E_0(1+x^2)^4} \right] \left\{ \log \frac{1}{\frac{\lambda^2}{R^2} + \left[\frac{(1+x^2) h \nu m c^2}{2E_0 E} \right]^2} + 1 \right\} \quad (27)$$

Член $\frac{1+x^2}{2E_0 E} h \nu m c^2$, стоящий под логарифмом, есть минимальный импульс, передаваемый ядру при излучении фотона x . Точность формулы (27) составляет несколько процентов.

§ 6. Рождение электронно-позитронных пар

Исходя из предыдущих параграфов, можно получить приближенные формулы, описывающие процессы рождения электронно-позитронных пар, а также угловое их распределение. Дело в том, что формулу (11) (а также соответствующую формулу с учетом экранирующего действия электронов) можно рассматривать как некоторое приближение к точной квантомеханической формуле; три независимые переменные k_1, k_2, k_3 соответствуют трем угловым переменным в известной формуле Бете — Гайтлера. Учитывая эту аналогию, формулы для рождения пар можно просто получить, умножив поперечник (11) на величину $\frac{E^2 dE}{(h\nu)^2 d(h\nu)}$, где E_+ и E_- соответственно, энергия позитрона и электрона. Тогда вместо (11) мы получим

$$d\sigma = \frac{Z^2 r_0^2}{137} \frac{1}{\pi} \int \int \int \frac{k_2^2 + k_3^2}{k_1^2 \left(k^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2} \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\lambda} \left[\frac{1}{1 - \varepsilon} + 1 - \varepsilon - \frac{2\varepsilon \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{\lambda k_1 (1 - \varepsilon)} + \varepsilon^2 \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\lambda^2 k_1^2 (1 - \varepsilon)^2} \right] \frac{dE_+ dE_-}{E_-^2 d\varepsilon} \quad (28)$$

В последней формуле мы учли также экранировку. Интегрирование по $\vec{k}$ проводится в тех же пределах, что и при выводе формул (13) и (16). Если мы учтем, что

$$\epsilon^2 + \frac{4}{3}(1 - \epsilon) = \frac{E_-^2 + E_+^2}{E_-} + \frac{2}{3} \frac{E_+}{E_-}$$

и проинтегрируем по k , то получим полный поперечник рождения пары электрон-позитрон квантом с энергией $h\nu$ и энергией позитрона в интервале E_+ ; $E_+ + dE_+$.

$$d\sigma = 4 \frac{Z^2 r_0^2}{137} \frac{E_+ E_-}{(h\nu)^3} dE_+ \left[\frac{2}{3} + \frac{E_-^2 + E_+^2}{E_- E_+} \right] \left\{ \log \frac{2E_+ E_-}{h\nu mc^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \frac{E_+}{E_-} \right. \quad (29)$$

$$\left. \log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right\} \quad (29')$$

Параметр обрезания мы брали упрощенный, равный $\log \frac{a}{\lambda} = \log \frac{e^*}{\lambda}$;

экранировку брали такую, что $\frac{R}{\lambda} = 137Z^{-\frac{1}{3}}$, поэтому и формулы (29), (29') имеют точность несколько процентов.

Если формулу (28) мы проинтегрируем по k_2 и k_3 , а k_1 выразим через угол между квантом и электроном, то получим поперечник рождения электрона в направлении, составляющем угол $\theta = x \frac{mc^2}{E}$ с первоначальным направлением фотона. Формула имеет следующий вид:

$$d\sigma = 8 \frac{r_0^2 Z^2}{137} \frac{dE_+ E_-}{(E_+ + E_-)^3} x dx \times$$

$$\times \left[\frac{E_-^2 + E_+^2}{(1+x^2)^2 E_-} + \frac{4x^2 E_+}{E_- (1+x^2)^4} \right] \left\{ \log \frac{2E_+ E_-}{(1+x^2) h\nu mc^2} + \frac{1}{2} \right. \quad (30)$$

$$\left. \log 137Z^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \right\} \quad (30')$$

Формулы (29), (29'), (30) и (30'), а также (27), могут быть использованы для практических расчетов, в которых не требуется большой точности.

В заключение я хотел бы поблагодарить Е. Л. Фейнберга за обсуждение вопросов, затронутых в работе.

* Здесь e — основание натуральных логарифмов.

Մ. Լ. Տեր-Միքայելյան

ԲԱԽՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ տրված է բախման պարամետրների մեթոդի մաթեմատիկական նոր մեկնաբանություն: Այդ նոր մեթոդի օգնությամբ առումնասիրված են էլեկտրոնի կոլիսյան ուժական կենտրոնի վրա արգելափակման ճառագայթման երևույթի զանազան հարցերը: Բացի այդ, ստացված է էլեկտրոն-պոզիտրոն զույգերի ծնման էֆֆեկտիվ լայնական կտրվածքի բանաձևը: Քննարկված է նաև փոքր էներգիայի քվանտների ճառագայթման հարցը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ферми. Zeits. f. Phys. 29, 315, 1924.
2. Вильямс. Det. Kgl. Danske, Videnskab Selskab Mat. fys. Medd Kobenhavn, 13, 276, 1935.
3. Вейцекер. Zeits. f. Phys. 88, 612, 1934.
4. Бете. Proc. Cambr. Phil. Soc. 30, 524, 1934.
5. Ахиезер, Берестецкий. Квантовая электродинамика. Гостехиздат. М., 1953.

ФИЗИКА

В. А. Шахбазян

К вопросу об энергетических потерях быстрых
заряженных частиц в поглощающей среде

Учет диэлектрической постоянной при вычислении энергетических потерь быстрой заряженной частицы произведен в ряде работ [1—9]. При этом особый интерес представляет соотношение между боровскими локальными (остающимися в среде) потерями и черенковским излучением. Этой стороне вопроса уделено значительное внимание в работах Шёнберга [7], Хьюбрехтса и Шёнберга [8] и Будини [9]. Первые два автора рассматривают случай действительного ϵ . При этом полная потеря энергии заряженной частицы в сплошной среде дается [7] суммой двух слагаемых, из которых первое дает боровскую локальную потерю, а второе представляет собою выражение интенсивности черенковского излучения по Тамму и Франку [1]. Однако такое рассмотрение приводит к физически неправильному результату и расхождению теории с экспериментом. Действительно, согласно Шёнбергу [7], релятивистский рост потерь энергии целиком обусловлен черенковским излучением. Известно, однако, что чем плотнее среда, тем релятивистский рост меньше (эффект плотности). Поэтому, если следовать Шёнбергу, интенсивность черенковского излучения в плотной среде должна быть меньше, нежели в разреженной, что не соответствует действительности (см. [9]). Кроме того, экспериментально наблюдается значительный релятивистский рост потерь, что также противоречит результату Шёнберга, так как на опыте регистрируются локальные потери энергии частиц. Для устранения расхождения с экспериментом Хьюбрехтс и Шёнберг [8] прибегли к несколько искусственному приему обрезания коротковолновой части спектра черенковского излучения, рассмотрев движение частицы вдоль оси высверленного в среде пустого канала. Таким путем им удалось получить увеличение потерь на возбуждение и ионизацию в релятивистской области при одновременном уменьшении интенсивности черенковского излучения.

Аналогичный результат получил Будини [9], который учел затухание дисперсионных осцилляторов среды. При этом он рассматривал случай сплошной среды. Оказалось, что распределение потерь между возбуждением и ионизацией, с одной стороны, и черенковским излучением, с другой — зависит от отношения ширины спектральной линии, обусловленной затуханием, к плотности среды. Результат Шён-

берга [7] (отсутствие релятивистского роста локальных потерь) оказался, в соответствии с результатом Будини, справедливым в предельном случае плотных сред и узких линий. В этом случае, действительно, весь релятивистский рост потерь обусловлен черенковским излучением. При всей физической наглядности результатов, полученных Будини, следует указать на имеющуюся некоторую неясность в самом методе разделения полных энергетических потерь на возбуждение и черенковское излучение в случае поглощающей среды. Кроме того, формулы для локальных потерь и интенсивности черенковского излучения получены им приближенно в предположении малости затухания. Ниже проводится указанное разделение в более общем случае любых величин констант затухания, причем предварительно обсуждается вопрос об определении понятия черенковского излучения в поглощающей среде. На основании данного определения подробно анализируется соотношение величин боровской и черенковской потерь вблизи траектории и на бесконечности.

Полная потеря энергии частицы на единице длины ее траектории дается в общем виде формулой Ферми, имеющей вид*:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2e^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2 \right) \chi^* K_1(\chi^*) K_0(\chi) i \omega d\omega \quad (1)$$

Здесь v — скорость частицы, $\beta = \frac{v}{c}$, $\chi = \frac{\omega \rho}{v} \sqrt{1 - \beta^2 \varepsilon}$, где ρ — параметр соударения, e — заряд электрона, K_0 и K_1 — функции Вебера нулевого и первого порядков, ε — диэлектрическая постоянная, являющаяся комплексной функцией частоты ω . Существование черенковского излучения в данном случае определяется, как и при действительных ε , поведением функций K_0 и K_1 на бесконечности:

$$K_0 = K_1 \cong \sqrt{\frac{\pi}{2\chi}} e^{-\chi} + \dots$$

Если $\operatorname{Im} \chi$ мало по сравнению с $\operatorname{Re} \chi$, то поток энергии в радиальном направлении (1) будет быстро затухать, и излучение не будет наблюдаться. Если же $\operatorname{Im} \chi$ велико по сравнению с $\operatorname{Re} \chi$, то будет иметь место слабо затухающее излучение.

Явное выражение $\operatorname{Re} \chi$ и $\operatorname{Im} \chi$ таково:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \chi &= \frac{\omega \rho}{v} \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon + |1 - \beta^2 \varepsilon|)} \\ \operatorname{Im} \chi &= -\frac{\omega \rho}{v} \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{\sqrt{2(1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon + |1 - \beta^2 \varepsilon|)}} \end{aligned} \quad (2)$$

В областях частот, расположенных достаточно далеко от собственных частот среды, при $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0$ видно, что $\operatorname{Re} \chi \gg \operatorname{Im} \chi$. В этом случае излучения нет.

* Речь идет о потерях при «далеких» соударениях. «Близкие» столкновения в работе не рассматриваются.

При $1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon < 0$, $\text{Im} \chi \gg \text{Re} \chi$ в тех же областях частот и для них мы получаем слабо затухающее излучение.

Другой результат получается при рассмотрении ω , близких к собственным частотам среды ω_s . В этом случае при достаточно больших скоростях частицы (а для черенковского излучения только они и существенны)

$$1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon \ll \beta^2 \text{Im} \varepsilon$$

и радиальный поток энергии сильно затухает как при $1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon > 0$, так и при $1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon < 0$.

Таким образом, в случае поглощающей среды имеет смысл интерпретировать черенковское излучение как излучение, возникающее при выполнении условия

$$1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon < 0 \quad (3)$$

Отметим сразу же, что такое определение несколько отличается от обычного определения для действительного ε : $1 - \beta^2 n^2 < 0$. Действительно, последнее условие, переписанное в виде $v > \frac{c}{n}$, означает, что черенковское излучение возникает при скорости частицы, превышающей фазовую скорость света. Аналогичное условие для поглощающей среды выглядело бы так: $v > \frac{c}{\text{Re} n} = \frac{c}{\text{Re} \sqrt{\varepsilon}}$ (n и ε — комплексные функции ω), тогда как (3) означает, что $v > \frac{c}{\sqrt{\text{Re} \varepsilon}}$.

Для достаточно разреженных сред оба условия совпадают; однако, строго говоря, для поглощающей среды условием наблюдения черенковского излучения уже не является превышение скорости частицы над фазовой скоростью света.

Вернемся к формуле (1). Ее правая часть представляет собой поток вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность с радиусом, равным ρ , осью которой является единица длины траектории частицы. Очевидно, что чем меньшим будет взят радиус этой поверхности, тем большая часть потерь энергии частицы будет учтена. Для такого рассмотрения возможные значения параметров столкновения ограничены снизу. В частности, принимается, что параметры соударений больше межатомных расстояний, так как для меньших параметров пришлось бы учитывать квантовые эффекты. Для минимального параметра столкновения (ему соответствует полная потеря энергии частицы, учитываемая методом Ферми) вместо K_0 и K_1 можно воспользоваться их приближенными значениями для малых аргументов:

$$K_0 = \log \frac{2}{\gamma \chi}, \quad K_1 = \frac{1}{\chi} \quad (\log 7 = 0,502)$$

Тогда вещественная часть подинтегрального выражения в правой части (1) принимает значения

$$\frac{e^2}{\pi v^2} \left\{ \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon|} + \left(\frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) \theta \cdot \omega \right\} \quad (4)$$

при условии: $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) > 0$

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon}$$

и

$$\frac{e^2}{\pi v^2} \left\{ \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon|} + \left(\frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) (\theta - \pi) \omega \right\} \quad (5)$$

при условии $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 0$,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{|1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon|}$$

Здесь $|1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon|$ означает абсолютную величину $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon$. Очевидно, что при $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0$ имеем:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

а при $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) < 0$ —

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Оба условия: $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0$ и $1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0$ охватывают весь интервал частот от нуля до бесконечности. Поэтому, производя интегрирование выражений (4) и (5), каждого по своей области частот, и складывая результаты, мы получим выражение для полных потерь.

В результате имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dx} \Big|_{\rho_0} = & \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon|} + \theta \left(\frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) \omega \right\} d\omega + \\ & + \frac{e^2}{v^2} \int_{1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0} \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что при получении формулы (6) не было сделано никаких ограничивающих предположений относительно величин констант трения.

Итак, потеря энергии частицы представлена в виде суммы двух членов, в первый из которых дают вклады все частоты, в том числе и черенковские, во второй же только черенковские частоты. Для выяснения физического смысла каждого слагаемого перейдем к пределу при $\operatorname{Im} \varepsilon \rightarrow 0$, т. е. к действительному ε . При $\operatorname{Im} \varepsilon \rightarrow 0$ величина $\theta \rightarrow 0$, оставаясь отрицательной для боровских частот ($1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0$) и положительной для черенковских ($1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0$). Кроме того, при переходе к вещественному ε появляются действительные корни уравнения $\varepsilon(\omega) = 0$. Выражение

$$\theta \left(\frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) \omega \rightarrow \left(\lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2 \right) \omega$$

при $\operatorname{Im} \varepsilon \rightarrow 0$

Оно отлично от нуля только для частот, удовлетворяющих уравнению $\varepsilon(\omega) = 0$. Однако первый интеграл распространен по всей области частот, как боровских, так и черенковских, для которых θ принимает противоположные по знаку значения. Поэтому вклады от $\theta \sim +\delta$ и $\theta \sim -\delta$ скомпенсируют друг друга, и второе слагаемое в первом интеграле в (6) даст нуль. Окончательно получим:

$$-\frac{dw}{dx} \Big|_{\rho_0} = \frac{e^2}{2v^2} \sum_j a_j \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega_j^2} + \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 < 0} \left(\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \omega d\omega \quad (7)$$

Здесь a_j — вычет $\frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ в точке $\varepsilon(\omega_j) = 0$. Вычисление a_j для дискретного спектра собственных частот дисперсионных осцилляторов дает:

$$-\frac{dw}{dx} \Big|_{\rho_0} = \frac{2\pi Ne^4}{mv^2} \log \frac{4\pi v^2 m}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega_m^2 Ne^2} + \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 < 0} \left(\beta^2 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \omega d\omega \quad (8)$$

где $\omega_m^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_k^2$, ω_j — корни уравнения $\varepsilon(\omega) = 0$ и f_j — силы осцилляторов.

Таким образом, при переходе к действительному ε первый интеграл в (6) переходит в логарифмический член в (8), который представляет собою обычную боровскую потерю и совпадает с точностью до малых величин с аналогичным выражением, полученным Шёнбергом [7]. Второй интеграл в (6) переходит в известное выражение интенсивности черенковского излучения по Тамму и Франку [1].

Произведенный переход к действительному ε дает возможность интерпретировать первый интеграл в (6) как локальную потерю при комплексном ε , а второй интеграл — как интенсивность черенковского излучения в поглощающей среде.

Таким образом, та часть полных энергетических потерь, которая остается в среде и регистрируется экспериментальной установкой, дается формулой:

$$-\frac{dw(\text{аох.})}{dx} = \frac{e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \log \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho_0^2 \omega^2 |1 - \beta^2 \varepsilon|} + \theta \left(\frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} - \beta^2 \right) \omega \right\} d\omega \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon} \quad \text{при } 1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \varepsilon}{|1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon|}, \quad \text{при } 1 - \beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0$$

Интересно отметить, что в (9) дают вклад, наряду с боровскими, и черенковские частоты, подчиняющиеся условию $1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon < 0$. Очевидно, это те черенковские частоты, которые лежат в области аномального хода дисперсионной формулы для $\text{Re} \varepsilon$ и в непосредственной близости от нее.

Другая часть черенковских частот не поглощается вблизи траектории частицы и обуславливает собой наблюдаемое черенковское излучение, интенсивность которого дается формулой:

$$\frac{dw^{(\text{чep.})}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int_{1 - \beta^2 \text{Re} \varepsilon < 0} \left(\beta^2 - \frac{\text{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega \quad (10)$$

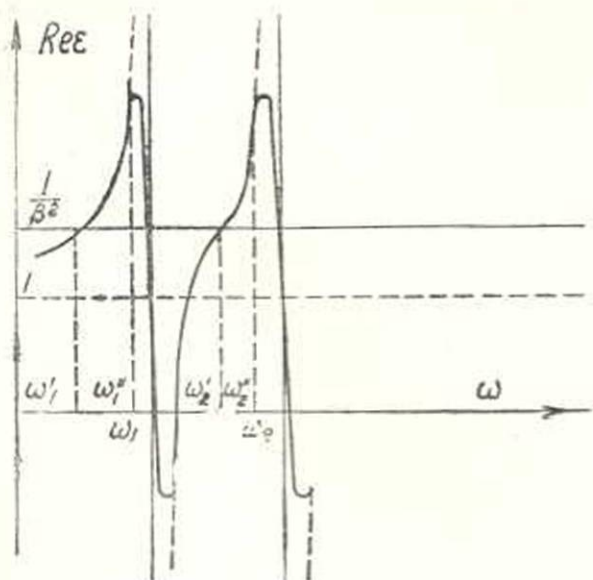
Для определения интервалов поглощающихся и непоглощающихся черенковских частот рассмотрим явное выражение для ε :

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\gamma_i \omega}$$

Вещественная часть ε имеет вид:

$$\text{Re} \varepsilon = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_i \frac{(\omega_i^2 - \omega^2) f_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \gamma_i^2 \omega^2}$$

Из приведенного графика видно, что в интервалах черенковских частот $[\omega_1', \omega_1'']$, $[\omega_2', \omega_2'']$ и т. д. кривая для $\text{Re} \varepsilon$ (сплошная кривая) практически совпадает с



кривой для действительного ε (пунктирная кривая). Поэтому можно считать, что черенковские частоты, лежащие в этих интервалах, практически не поглощаются. Именно эти частоты дают основной вклад в (10).

С другой стороны, их вклад в (9) ничтожен, так как соответствующие им $\text{Im} \varepsilon$ и θ практически равны нулю.

Частоты, лежащие вне указанных интервалов, сильно поглощаются и почти не дают наблюдаемого излучения.

На больших расстояниях от траектории боровские и черенковские потери принимают соответственно значения:

$$-\frac{dw^{(доп.)}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon > 0} \left\{ |\varepsilon|^{-2} \left(\operatorname{Im} \varepsilon \cdot \cos \frac{\theta}{2} + \operatorname{Re} \varepsilon \cdot \sin \frac{\theta}{2} \right) - \right. \\ \left. - \beta^2 \sin \frac{\theta}{2} \right\} e^{-2|\chi| \cos \frac{\theta}{2}} \omega d\omega \quad (11)$$

и

$$\frac{dw^{(чеп.)}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0} \left\{ |\varepsilon|^{-2} \left(\operatorname{Im} \varepsilon \cdot \cos \frac{\theta - \pi}{2} + \operatorname{Re} \varepsilon \sin \frac{\theta - \pi}{2} \right) - \right. \\ \left. - \beta^2 \sin \frac{\theta - \pi}{2} \right\} e^{-2|\chi| \cos \frac{\theta - \pi}{2}} \omega d\omega \quad (12)$$

При $|\chi| \rightarrow \infty$ интеграл по боровским частотам исчезает, так как в этом случае $\cos \frac{\theta}{2}$ отлично от нуля для всех возможных значений θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$). Интеграл же по черенковским частотам может принимать при $\theta \sim 0$ отличные от нуля значения и для больших значений $|\chi|$. Для таких θ (12) принимает вид:

$$\frac{dw^{(чеп.)}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0} \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \cdot e^{-2|\chi| \cos \frac{\theta - \pi}{2}} \omega d\omega \quad (13)$$

Для частот, лежащих в интервалах $[\omega'_1, \omega'_2], [\omega'_2, \omega'_3]$, θ практически равно нулю, и (13) перейдет в полученную ранее формулу для интенсивности черенковского излучения в поглощающей среде (10):

$$\frac{dw^{(чеп.)}}{dx} = \frac{e^2}{v^2} \int_{1-\beta^2 \operatorname{Re} \varepsilon < 0} \left(\beta^2 - \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} \right) \omega d\omega \quad (10)$$

Таким образом, в достаточно хорошем приближении можно считать, что и в случае поглощающей среды имеются полосы черенковских частот, которые дают вклад в наблюдаемое черенковское излучение на бесконечности. Однако эти полосы значительно уже, чем в случае действительного ε , а соответствующие им длины волн относятся к длинноволновой части черенковского спектра для прозрачной среды. Очевидно, что с уменьшением констант трения интервалы непоглощающихся черенковских частот будут расширяться.

В заключение автор пользуется случаем выразить свою искрен-

нюю признательность члену-корреспонденту АН СССР В. Л. Гинзбургу за проявленный интерес к работе. Автор благодарен Г. М. Гарибяну за неоднократные обсуждения работы, а также Б. М. Болотовскому за сделанные указания.

Институт физики
АН Армянской ССР

Поступило 16 II 1956

Վ. Ա. Շախբաջյան

ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱԾ ՍՐԱԳ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԸ ՎԼԱՆՈՂ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է լրիվ էրեկտացման կորուստները կլանող միջավայրում տեղի ունեցող լույս (բորովյան) կորուստների և չերենկովյան ճառագայթման բաժանելու հարցը։ Նշված բաժանումը կատարված է ընդհանուր տեսքով, առանց որևէ սահմանափակող ենթադրության։ Ստացված են բանաձևեր՝ կլանող միջավայրում տեղի ունեցող լույս կորուստների և չերենկովյան ճառագայթման համար։ Վերջին բանաձևը համընկնում է Բուդինիի [9] առաջարկված բանաձևի հետ։ Լույս կորուստների և դրանց հետ մեկտեղ մոտիկ տարածությունների վրա տեղի ունեցող կորուստների համար ստացված բանաձևը պետք է տա էքսպերիմենտի կողմից հաշվառվող լիցքավորված մասնիկի էներգիայի լրիվ կորուստը, խտության էֆեկտի հաշվառումով (լույս կորուստ)։

Աշխատության մեջ ցույց է տրված, որ կլանող միջավայրում չերենկովյան ճառագայթումը դիտելու չափանիշը ֆիզիկական առարկեր է պարզ միջավայրի համար եղած չափանիշից։

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е. и Франк И. М. ДАН СССР, 14, 107 (1937); Тамм И. Е. J. Phys. USSR, 1, 439 (1939).
2. Гинзбург В. Л. и Франк И. М. ЖЭТФ, 16, 15 (1946).
3. Fermi E. Phys. Rev., 57, 485 (1940).
4. Vick G. C. Ric. scien., 11, 273 (1940), 12, 858 (1941), Nuovo Cimento, 1, 302 (1943).
5. Halpern O. and Hall. Phys. Rev., 73, 477 (1948).
6. Sternheimer. Phys. Rev., 88, 851 (1952).
7. Schönberg M., Nuovo Cimento, 8, 159 (1951).
8. Huybrechts M. and Schönberg M. Nuovo Cimento, 9, 764 (1952).
9. Budini P. Nuovo Cimento, 10, 236 (1953).