2ИЗЧИЧИՆ ООФ ЧРЅПРФЗПРՆЪВРР ИЧИЧЪГРИЗР ЅЪЦЪЧИЧРР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зра.- dup., pl. h mbhul, ahmnip. IX, № 3, 1956 Физ.-мат., естеств. н техн. наука

Б. М. Левитан к И. С. Саргсян

Теорема о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля

1. Введение

Одной из важных задач теории уравнения Штурма — Лиувилля $y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0,$ (1)

заданного на полупрямой (0, ∞), является задача о разложении функции с интегрируемым квадратом по собственным функциям уравнения (1), т. е. по решениям этого уравнения, удовлстворяющим краевому условию

$$y'(0)\sin\alpha + y(0)\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

Как известно всегда имеет место развенство Парсеваля, т. е. сходимость интеграла Фурье в среднем квадратичном.

Для того, чтобы получить точечную сходимость интеграла Фурье, соответствующего задаче (1)—(2); до недавнего времени накладывали на функцию довольно жесткие ограничения. Так, Г. Вейлем была доказана следующая

Теорема (см., например [1], теорема 6. 2. 2). Пусть выполнены следующие условия:

- + 1. $f(x) \subset L_2(0,\infty);$
 - 2. $\{f'' q(x)f\} \subset L_2(0, \infty);$
 - 3. f(0)cosa + f'(0)sina = 0, где а действительное число;

4.
$$\lim_{x \to \infty} (f(x)E'_{\lambda}(x) - f'(x)E_{\lambda}(x)) = 0, \quad E_{\lambda}(x) = \int_{+0}^{x} \varphi(x,\lambda)d\varphi(\lambda), \quad (\lambda \neq 0).$$

Положим

$$g(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(x) E_{\lambda}(x) dx \cdot$$

Тогда

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, \lambda) dg(\lambda) ,$$

причем последний интеграл сходится абсолютно.

Недавно один из нас [2] показал, что точечная сходимость имеет

место при тех же условиях, что и разложение функции в обычный интеграл Фурье по косинусам.

Целью настоящей статьи является доказательство того, что в существенном при тех же условиях, что и в цитированной вышетеореме Г. Вейля, имеет место не только сходимость самого разложения к функции f(x), но и сходимость второй производной разложения к f"(x) (однако уже не абсолютно). Именно нами доказывается следующая

Теорема. Пусть функция q(x) в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \subset L_2(0, \infty);$ 2. $f''(x) \subset L_2(0, \infty);$ 3. $(f'' - q(x)f) \subset L_2(0, \infty);$ 4. $f'(0) = f'(\infty) = 0;$

5.
$$\lim_{x \to \infty} \{f(x) E_{\lambda}'(x) - f'(x) E_{\lambda}(x)\} = 0, \qquad E_{\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \lambda) d\rho(\lambda), \ (\lambda \neq 0)$$

Положим

$$g(\lambda) = \int\limits_0^\infty f(x) E_\lambda(x) dx \ \cdot$$

Тогда

$$f^{\circ}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_x^*(x,\lambda) dg\left(\lambda\right).$$

2. Некоторые предварительные формулы

Предположим функция q(x) определена на полупрямой $(0, \infty)$, действительна и суммируема в каждом конечном интервале. Пусть задача (1) — (2) имеет неотрицательный спектр. Положим $\lambda = \mu^2$, $\lambda > 0$. Обозначим через $\varphi(x, \mu)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$
 (2')

Для произвольного действительного числа і известна формула

$$\varphi(\mathbf{x},\mu)\cos\mu t = \frac{1}{2}[\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{t},\mu) + \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{t},\mu)] + \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}-\mathbf{t}}^{\mathbf{x}+\mathbf{t}} w(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{s})\varphi(\mathbf{s},\mu)d\mathbf{s}, \qquad (3)$$

где функция w(x,t,s) строится по функции Римана уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

и для производных функции w(x, t, s) справедлива формула (см. [3])

О сход. дважды диффер. разл. по собств. функц. операт. Штурма-Лиувилля

$$\frac{\partial^{k} w(x, t, s)}{\partial x^{k}} = \frac{1}{2^{k+1}} \left\{ q_{x}^{(k-1)} \left[\frac{1}{2} (x+s-t) \right] - q_{x}^{(k-1)} \left[\frac{1}{2} (x+s+t) \right] \right\}, (k \ge 1)(4).$$

Обозначим через g_t (t) функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. g_{ϵ} (t) четна, т. е. g_{ϵ} (-t) = g_{ϵ} (t),

2. g. (t) обращается в нуль вне интервала (- с. с),

3. g. (t) имеет непрерывную вторую производную.

Обозначим через ψ_i (µ) cos — преобразование Фурье функции g_i (t), т. е. положим

$$\psi_{\varepsilon}(\mu) = \int_{0}^{t} g_{\varepsilon}(t) \cos \mu t dt.$$
 (5)

5

Помножим обе части формулы (3) на g₆ (t) и проинтегрируем по t от О до в. В силу (5), получим

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x},\,\mu)\psi_{*}(\mu) = &\frac{1}{2} \int_{0}^{s} \varphi(\mathbf{x}\,+\,t,\,\mu)g_{*}\left(t\right) dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{s} \varphi(\mathbf{x}\,-\,t,\,\mu)g_{*}\left(t\right) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{0}^{s} g_{-}\left(t\right) \left(\int_{\mathbf{x}-t}^{\mathbf{x}+t} w(\mathbf{x},\,t,\,s)\,\varphi\left(s,\,\mu\right) ds \right) dt \,. \end{aligned}$$
(6)

Заменяя в первых двух интегралах, соответственно, x + t на s, x - t на s и меняя порядок интегрирования во втором интеграле правой части формулы (6), мы можем се переписать в виде:

$$\varphi(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})\psi_{\varepsilon}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}-\varepsilon}^{\mathbf{x}+\varepsilon} \varphi(\mathbf{s},\boldsymbol{\mu}) \left\{ g_{\varepsilon}(\mathbf{s}-\mathbf{x}) + Z_{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{s}) \right\} d\mathbf{s} .$$
 (6')

где

$$X_{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}^{\varepsilon} \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{s}) \mathbf{g}_{\varepsilon}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \cdot$$

Дифференцируя формулу (6') по х, получим

$$\varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})\psi_{\varepsilon}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}+\varepsilon,\boldsymbol{\mu})\langle g_{\varepsilon}(\varepsilon) + \lambda_{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{x}+\varepsilon)\rangle - \frac{1}{2}\varphi(\mathbf{x}-\varepsilon,\boldsymbol{\mu})\langle g_{\varepsilon}(-\varepsilon) + \lambda_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu})\rangle \langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \rangle - \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon,\boldsymbol{\mu})\langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \rangle \langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \rangle \langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \rangle - \frac{1}{2}\varphi(\varepsilon,\boldsymbol{\mu})\langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \rangle \langle g_{\varepsilon}(\varepsilon,\boldsymbol{\mu}$$

$$+\chi_{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{x}-\varepsilon)\}+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}-\varepsilon}^{\mathbf{x}+\varepsilon}\varphi(\mathbf{s},\mu)\left\{\frac{\partial g_{\varepsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}}+\frac{\partial \chi_{\varepsilon}(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}}\right\}d\mathbf{s}\cdot$$
(7)

В силу определений функций g: (t) и X, (x, s) имеем:

 $g_{\varepsilon}(\varepsilon) = g_{\varepsilon}(-\varepsilon) = 0; \quad \chi_{\varepsilon}(x, x + \varepsilon) = \chi_{\varepsilon}(x, x - \varepsilon) = 0.$

Тогда формула (7) примет вид:

$$\varphi'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})\varphi_{\varepsilon}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}-\varepsilon}^{\mathbf{x}+\varepsilon} \varphi(\mathbf{s},\boldsymbol{\mu}) \left\{ \frac{\partial g_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}-\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \chi_{\varepsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} \right\} d\mathbf{s}.$$
(7')

Дифференцируя формулу (7') еще раз по х. получим

$$\begin{split} \varphi_{\mathbf{x}}^{*}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})\varphi_{\varepsilon}\left(\boldsymbol{\mu}\right) &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi(\mathbf{x}+\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \left[\frac{\partial g_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}-\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \chi_{\varepsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{s}=\mathbf{x}+\varepsilon} - \\ &- \varphi(\mathbf{x}-\varepsilon,\boldsymbol{\mu}) \left[-\frac{\partial g_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}-\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \chi_{\varepsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{s}=\mathbf{x}-\varepsilon} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}-\varepsilon}^{\mathbf{x}+\varepsilon} \varphi(\mathbf{s},\boldsymbol{\mu}) \left\{ \frac{\partial^{2} g_{\varepsilon}\left(\mathbf{x}-\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}^{2}} + \frac{\partial^{2} \chi_{\varepsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}^{2}} \right\} \mathrm{ds.} \end{split}$$
(8)

Из определений функций g, (t) и X, (x, s) следует

$$\frac{\partial g_{\epsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{s}=\mathbf{x}+\epsilon}} = \frac{\partial g_{\epsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{s}=\mathbf{x}-\epsilon}} = 0;$$
$$\frac{\partial \chi_{\epsilon}(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{s}=\mathbf{x}+\epsilon}} = \frac{\partial \chi_{\epsilon}(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{s}=\mathbf{x}-\epsilon}} = 0,$$

так что формула (8) имеет вид:

$$\varphi_{\mathbf{x}}^{"}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})\psi_{\epsilon}(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{x}-\epsilon}^{\mathbf{x}+\epsilon} \varphi\left(\mathbf{s},\boldsymbol{\mu}\right) \left\{ \frac{\partial^{2}g_{\epsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}^{2}} + \frac{\partial^{2}\chi_{\epsilon}\left(\mathbf{x},\mathbf{s}\right)}{\partial \mathbf{x}^{2}} \right\} d\mathbf{s}.$$
(9)

Пусть f(x) ⊂L₂(0,∞). Обозначим через F(µ) преобразование Фурье функции f(x) (по собственным функциям φ(x,µ)), т. е. положим

$$F(\mu) = \lim_{A \to \infty} \int_{0}^{a} f(x)\varphi(x,\mu)dx \cdot$$
(10)

В силу равенства Парсеваля из (9) и (10) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{s}(\mu) \varphi_{x}''(x,\mu) F(\mu) d\rho(\mu) = \int_{x-s}^{x+s} f(s) \left\{ \frac{\partial^{2} g_{s}(x-s)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \chi_{s}(x,s)}{\partial x^{2}} \right\} ds, \quad (11)$$

Введем обозначение

$$S(x, \mu) = \int_{0}^{\mu} \varphi(x, \nu) F(\nu) d\mu(\nu) \cdot .$$
(12)

В силу (12) формула (11) примет вид:

О сход. дважды диффер. разл. по собств. функц. операт. Штурма-Лнувилля

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) d_{\mu} \frac{\partial^{2} S(x, \mu)}{\partial x^{2}} = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(s) \left\{ \frac{\partial^{2} g_{\epsilon}(x-s)}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2} \chi_{\epsilon}(x, s)}{\partial x^{2}} \right\} ds \cdot$$
(13)

Обозначим через S*(x, μ) функцию, аналогичную функции S(x, μ), при q(x) = 0, т. е. положим

$$C(\mu) = \int_{0}^{\infty} f(s) \cos \mu s \, ds \quad S^*(x, \mu) = -\frac{2}{\pi} \int_{0}^{\mu} \cos^{\mu} x \cdot C(v) \, dv.$$

Выписывая для функции S*(x, µ) формулу, аналогичную формуле (13), и вычитая ее из (13), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial^{2} S(x,\mu)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} S^{*}(x,\mu)}{\partial x^{2}} \right\} = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(s) \frac{\partial^{2} \chi_{\epsilon}(x,s)}{\partial x^{2}} ds , \qquad (14)$$

так как при q(x) = 0, w(x, t, s) = 0, и тем самым $X_s(x, s) = 0$.

В силу определения функции X, (x, s), имеем

$$\frac{\partial^2 \chi_{\epsilon}(\mathbf{x},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{t=|\mathbf{x}-\mathbf{s}|} \mathbf{g}_{\epsilon}(\mathbf{x}-\mathbf{s}) + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}^{\epsilon} \mathbf{g}_{\epsilon}(\mathbf{t}) \frac{\partial^2 \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2} \, \mathrm{d}\mathbf{t} \,. \tag{15}$$

Из (14) н (15) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{\partial^{2} S(x,\mu)}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{2} S^{\bullet}(x,\mu)}{\partial x^{2}} \right\} = -\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \tilde{I}(s) \left. \frac{\partial w(x,t,s)}{\partial x} \right|_{t=|x-s|} g_{\epsilon}(x-s) ds + \\ + \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \tilde{I}(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\epsilon} \frac{\partial^{2} w(x,t,s)}{\partial x^{2}} g_{\epsilon}(t) dt \right\} ds = I_{1} + I_{2}.$$
(16)

Преобразуем первый член в правой части (16). В силу определения функции ψ, (µ) из формулы обращения следует

$$g_{r}\left(t\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_{r}\left(\mu\right)cos\mu td\mu\cdot$$

Тогда первый член I, формулы (16) можем переписать так:

$$I_{1} = -\int_{x}^{x+i} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \bigg\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) \cos\mu(x-s) d\mu \bigg\} ds =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) \bigg\{ -\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} f(s) \frac{\partial w(x, t, s)}{\partial x} \bigg|_{t=|x-s|} \cos\mu(x-s) ds \bigg\} d\mu \cdot$$

Введем обозначение

Б. М. Левитан и И. С. Саргсян

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = \int_{0}^{\boldsymbol{\mu}} d\boldsymbol{\nu} \left\{ -\int_{\mathbf{x} \sim \boldsymbol{\epsilon}}^{\mathbf{x} + \boldsymbol{\epsilon}} f(s) \frac{\partial w(\mathbf{x}, \mathbf{t}, s)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{t} = |\mathbf{x} - s|} \cos(x - s) ds \right\}.$$
(17)

В силу (17) первый член I, формулы (16) окончательно примет вид:

$$I_{1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon} (\mu) d_{\mu} \alpha (x, \mu) \cdot$$
(18)

Преобразуем второй член правой части формулы (16). Положим

$$h(x,t) = \int_{x-t}^{x+t} f(s) \frac{\partial^2 w(x,t,s)}{\partial x^2} ds , \qquad (19)$$

$$\beta(x, \mu) = \int_{0}^{t} h(x, t) cos \mu t dt$$
 (20)

В силу равенства Парсеваля из (5) и (20) следует

$$\begin{split} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\varepsilon}(\mu) \vartheta(x,\mu) d\mu = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\varepsilon} g_{\varepsilon}(t) \left\{ \int_{x-t}^{x+t} f(s) \frac{\partial^2 w(x,t,s)}{\partial x^2} ds \right\} dt = \\ & = \frac{\pi}{2} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(s) \left\{ \int_{|x-s|}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 w(x,t,s)}{\partial x^2} g_{\varepsilon}(t) dt \right\} ds \Longrightarrow \frac{\pi}{2} I_{z}. \end{split}$$

Значит

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\epsilon}(\mu) \beta(x,\mu) d\mu \cdot$$
(21)

В силу (18) и (21) формула (16) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\varepsilon}(\mu) d_{\mu} \left\{ \frac{-\frac{\partial^2 S(x,\mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x,\mu)}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \alpha(x,\mu) - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\mu} \beta(x,\nu) d\nu \right\} = 0.$$
(22)

3. Доказательство теоремы в случае точечного спектра

Рассмотрим сперва случай, когда задача (1)—(2') имеет неотрицательный точечный спектр. Пусть $\lambda = \mu^2$, ($\lambda > 0$). Обозначим через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...$ собственные значения, а через φ_1 (x), φ_2 (x),..., φ_n (x),... соответствующие собственные функции задачи (1)—(2').

Докажем некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть функция q(x) в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

- 1. $f(x) \subset L_2(0,\infty);$
- 2. $(f'' q(x)f) \subset L_2(0, \infty);$
- 3. f'(0) = 0;
- 4. $\lim_{x \to \infty} (f(x) \varphi'_n(x) f'(x)\varphi_n(x)) = 0.$

Тогда при а -> 🗢 справедлива оценка

$$\bigvee_{a}^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x,\mu)}{\partial x^2} \right\} = o(1).$$
(23)

Оценка (23) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В случае точечного спектра функция S(x, µ) имеет вид:

$$\begin{split} S(x,\mu) = & \sum_{\mu_{n} < \mu} \alpha_{n} \phi_{n}(x) \ , \end{split}$$

где коэффициенты $\{a_n\}$ — коэффициенты Фурье функцин f(x) в системе собственных функций $\{\phi_n(x)\}$. Так как функция $\phi_n(x)$ — решение уравнения (1), то имсем

$$a_n = \int\limits_0^\infty f(x)\phi_n(x)dx = -\frac{1}{\mu_n^2} \int\limits_0^\infty f(x) \{\phi_n^*(x) - q(x)\phi_n(x)\}dx\,.$$

Интегрируя последний интеграл два раза по частям, в силу условий (2') получим

$$a_{n} = -\frac{1}{\mu_{n}^{2}} \int_{0}^{\infty} \varphi_{n}(x) \{ I''(x) - q(x)f(x) \} dx .$$
(24)

Введем обозначение

$$c_{\sigma} = \int\limits_{0}^{\infty} \phi_{\sigma}(x) (f''(x) - q(x)f(x)) dx \, .$$

Тогда (24) можем переписать так:

$$a_n = -\frac{c_n}{\mu_n^s} \quad (24')$$

Из определения функции S(x, µ) и (24') следует

$$\bigvee_{a}^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x,\mu)}{\partial x^2} \right\} = \sum_{a \ll \mu_n \ll a+1} |a_n| \cdot |\phi_n^*(x) = \sum_{a \ll \mu_n \ll a+1} \frac{1}{\mu_n^2} |c_n| \cdot |\phi_n^*(x)|.$$
(25)

В силу неравенства Коши - Буняковского из (25) получим

$$\sum_{a=1}^{a+1} \left\{ \frac{\partial^2 S(x,\mu)}{\partial x^2} \right\} \leq \left(\sum_{a \leqslant \mu_0 \leqslant a+1} \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \frac{1}{\mu_n^4} [\varphi''_n(x)]^2 \right)^{1/2}$$
(26)

Так как $\{f'' - q(x)f\} \subset L_2(0, \infty)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2\!<\!\infty,$$

значит, при а→∞, имеем

$$\sum_{a \ll \mu_n \ll a+1} c_n^2 = o(1) . \tag{27}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 роботы [3], имеем

$$\left(\sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} \frac{1}{\mu_n^{i}} [\varphi_n^*(x)]^2\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{a^p} \left(\sum_{a \leqslant \mu_n \leqslant a+1} [\varphi_n^*(x)]^2\right)^{1/2} = 0(1), \quad (28)$$

Лемма следует из оценок (27) и (28).

Из определения функции S*(x, µ) непосредственно следует Лемма 2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1. $f(x) \subset L_2(0,\infty);$
- 2. $f''(x) \subset L_2(0, \infty);$
- 3. $f'(0) = f'(\infty) = 0$.

Тогда при а→∞ имеет место оценка

$$V_{a}\left\{\frac{\partial^{2}S^{*}(x,\mu)}{\partial x^{2}}\right\} = o(1) .$$
(29)

Оценка (29) имеет место равномерно на всей полупрямой (0,∞). Введем обозначение

$$\mathsf{R}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu};\mathbf{f}) = \frac{\partial^2 \mathsf{S}(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathsf{S}^*(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu})}{\partial x^2} - \frac{1}{\pi} \alpha(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}) - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \beta(\mathbf{x},\mathbf{v}) d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{v}$$

Из лемм 1 и 2 и определений функций α(х, μ) и β(х, μ) легко следует

Лемма 3. При каждом фиксированном x и при а→∞ имеет место оценка

$$\bigvee_{a}^{a+1} \{R(x,\mu;f)\} = o(1).$$
(30)

Оценка (30) имеет место равномерно в хаждом конечном интервале.

Из леммы 3 и теоремы 1.1 работы [4] следует

Лемма 4. При каждом фиксированном х имеет место равенство

$$\lim_{\mu \to \infty} R(x,\mu;f) = 0.$$
⁽³¹⁾

О сход. дважды диффер. разл. по собств. функц. операт. Штурма-Лиувилля 11

Равенство (31) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Чтобы доказать теорему о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, остается исследовать поведение функций

$$\alpha(x,\mu)$$
 $H = \int_{0}^{\mu} \beta(x,\nu) d\nu$

при $\mu \rightarrow \infty$.

Для этой цели докажем следующие леммы.

Лемма 5. Если функция q(x) в каждом конечном интервале имеет ограниченную первую производную, то при каждом фиксированном x имеет место равенство

$$\lim_{\mu \to \infty} \alpha(\mathbf{x}, \mu) = 0. \tag{32}$$

Равенство (32) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функции а(х, н) имеем

$$\alpha(\mathbf{x},\boldsymbol{\mu}) = -\int_{\mathbf{x}-\epsilon}^{\mathbf{x}+\mathbf{x}} f(\mathbf{s}) \left. \frac{\partial w(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{t}=|\mathbf{x}-\mathbf{s}|}, \frac{\sin \boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}-\mathbf{s})}{\mathbf{x}-\mathbf{s}} \, \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Отсюда, в силу формулы (4), следует (при x>s)

$$\alpha(\mathbf{x},\mu) = -\int_{\mathbf{x}-\varepsilon}^{\mathbf{x}+\varepsilon} \mathbf{f}(\mathbf{s}) \ \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}(\mathbf{s})}{\mathbf{x} - \mathbf{s}} \cdot \sin\mu(\mathbf{x} - \mathbf{s}) \mathrm{d}\mathbf{s} \ . \tag{33}$$

Так как по предположению функция q(x) имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то

$$\left|\frac{q(x)-q(s)}{x-s}\right| \leq C < \infty$$
,

где постоянная С зависит от интервала изменения х.

Поэтому лемма следует из (33) в силу леммы Римана — Лебега.

Лемма 6. Если финкция q(x) в каждом конечном интервале имеет ограниченную первую производную, то при каждом фиксированном x имеет место равенство

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_{0}^{\mu} \beta(x, v) dv = 0.$$
 (34)

Равенство (34) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Доказательство. В силу определения функции $\beta(x, v)$ имеем

Б. М. Левитан и И. С. Саргсян

$$\int_{0}^{\mu} \beta(x, v) dv = \int_{0}^{1} h(x, t) \frac{\sin \mu t}{t} dt.$$
 (35)

Далее, так как функция q(x) имеет ограниченную первую производную в каждом конечном интервале, то из формулы (4) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^2 \mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{t},\mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2}\right| \leqslant C < \infty \,. \tag{36}$$

Из определения функции h(x, t), оценки (36) и неравенства Коши — Буняковского следует

$$\begin{aligned} |\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{t})| &\leqslant \int_{\mathbf{x}-t}^{\mathbf{x}+t} |\mathbf{f}(\mathbf{s})| \cdot \left| \frac{\partial^2 \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{x}^2} \right| \mathrm{ds} \leqslant C \int_{\mathbf{x}-t}^{\mathbf{x}+t} |\mathbf{f}(\mathbf{s})| \mathrm{ds} \leqslant \\ &\leqslant C_1 \left(\int_{\mathbf{x}-t}^{\mathbf{x}+1} \mathbf{f}^2(\mathbf{s}) \mathrm{ds} \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbf{x}-t}^{\mathbf{x}+t} \mathrm{ds} \right)^{1/2} \leqslant C_2 \mathbf{t}^{1/2} , \end{aligned}$$
(37)

Обозначим через 7 произвольное положительное число и положим

$$\int_0^1 h(x,t) \frac{\sin \mu t}{t} dt = \left\{ \int_0^{\eta} + \int_{\eta}^{1} \right\} h(x,t) \frac{\sin \mu t}{t} dt = I_1 + I_2 \,.$$

В силу оценки (37) получим

$$||I_1| \leqslant C_2 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t}} = C_2 \eta^{\prime_{\eta}} \cdot$$

Поэтому, каково бы ни было число $\delta > 0$, можно подобрать у столь малым, что для всех µ будет выполняться неравенство

$$||\mathbf{l}_1| \leq ^{\delta}/_2. \tag{38}$$

Выбрав у, возьмем затем число и настолько большим, чтобы для всех и>и₀ выполнялось неравенство

$$|I_2| < {}^{\hbar}/_2$$
. (39)

что возможно на основании леммы Римана — Лебега. Из доказательства леммы Римана — Лебега следует, что оценка (39) имеет место равномерно в каждом конечном ийтервале.

Лемма следует из оценок (38) и (39) и произвольности числа 8.

Из лемм 4, 5 и 6 следует следующая теорема о равной сходимости дважды дифференцированных разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам:

Теорема 1. Пусть функция q(x) в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

- 1. $i(x) \subset L_0(0, \infty);$
- 2. $f''(x) \subset L_2(0,\infty);$
- 3. $(f'' q(x)f) \subset L_2(0, \infty);$
- 4. $f'(0) = f'(\infty) = 0;$
- 5. $\lim {f(x)\phi'_n(x) f'(x)\phi_n(x)} = 0.$ $X \rightarrow \infty$

Тогда равномерно в каждом конечном интервале имеет месторавенство

$$\lim_{\mu \to \infty} \left\{ \frac{\partial^2 S(x,\mu)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 S^*(x,\mu)}{\partial x^2} \right\} = 0,$$

т. е. разность между вторыми производными разложения функции i(x) по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Как видно из теоремы 1, для доказательства теоремы о сходимости дважды дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля нам остается установить аналогичное утверждение для разложения в обычный интервал Фурье покосинусам.

Теорема 2. Пусть функция q(x) в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \subset L_2(0,\infty);$ 2. $i''(x) \subset L_2(0, \infty);$ 3. $[f'' - g(x)f] \subset L_2(0, \infty)$; 4. $f'(0) = f'(\infty) = 0;$ 5. $\lim\{f(x)\varphi'_n(x) - f'(x)\varphi_n(x)\} = 0$.

X-+ co

Положим

$$a_n = \int\limits_0^\infty f(x) \phi_n(x) dx \, .$$

Тогда

$$f''(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \phi_n''(x) \ .$$

Доказательство. Обозначим

$$C(\mu) = \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \mu x dx .$$
 (40)

Интегрируя последний интеграл два раза по частям, в силу условий 4 и 5 теоремы, получим

$$\iota^{*}C(\mu) = -\int_{0}^{\infty} f''(x) \cos\mu x dx , \qquad (41)$$

В силу условия 2 из (41), согласно формуле обращения, следует

$$f''(x) = -\lim_{\mu \to \infty} \int_{0}^{\mu} v^{2} C(v) \cos v x dv = \lim_{\mu \to \infty} \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} \int_{0}^{\mu} C(v) \cos v x dv =$$
$$= \lim_{\mu \to \infty} \frac{\partial^{2} S^{*}(x, \mu)}{\partial x^{2}} ,$$

что и доказывает теорему в силу теоремы 1.

4. Случай произвольного спектра

В случае произвольного спектра доказательство приводится аналогично, заменяя суммы соответствующими интегралами Стильтеса. Поэтому мы здесь ограничимся только формулировкой теоремы.

Теорема 3. Пусть функция q(x) в каждом конечном интервале имеет суммируемую вторую производную и выполнены следующие условия:

1.
$$f(x) \subset L_2(0, \infty)$$
,
2. $f''(x) \subset L_2(0, \infty)$;
3. $\{f'' - q(x)f\} \subset L_2(0, \infty)$
4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$;

5. $\lim_{x \to \infty} \{f(x)E_{\lambda}(x) - f'(x)E_{\lambda}(x)\} = 0, E_{\lambda}(x) = \int_{+0}^{0} \varphi(x,\lambda) d\varphi(\lambda), (\lambda \neq 0).$

Положим

$$g(\lambda) = \int_{0}^{\infty} f(x) E_{\lambda}(x) dx .$$

Тогда

$$f''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \ \phi''(x,\lambda) dg(\lambda) \, .$$

Воспная артиллерийская инженерная академия им. Ф. Э. Дзержинского Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 20 11 1956

Բ. Մ. Լեվիտան և Ի. Ս. Սարգսյան

ԹԵՈՐԵՄԱ ԸՍՏ ՇՏՈՒՐՄ — ԼԻՈՒՎԻԼԼԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿ-ՑԻԱՆԵՐԻ ԿՐԿՆԱԿԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑՎԱԾ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅԱՆ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒ-ԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

И. Г. Ф П Ф П Р Г

Շտուրմ — Լիուվիլլի ճավատարման տեսության կարևոր խնդիրներից մնկը ճանդիսանում է քառակուսու ճետ մեկտեղ ճանրադումարելի ֆունկցիայի վերլուծության խնդիրն ըստ այդ ճավատարման սեփական ֆունկցիաների։

$$[y'' + (\lambda - g(x))y = 0, \quad (0 \le x < \infty),$$
 (1)

$$|\mathbf{y}'(0)\sin\alpha + \mathbf{y}(0)\cos\alpha = 0; \tag{2}$$

Ինչպես ճայտնի է, միշտ տեղի ունի Պարսևալի ճավատարումը, այսինջն վերոճիշյալ խնդրին ճամապատասխանող Յուրյեի ինտեգրալի միջին թառակուսային ղուդամիտությունը։ Կետային ղուդամիտություն ստանալու ճամար վերլուծվող ֆունկցիայի վրա մինչև վերջին ժամանակներս դրվում էին բավական ծանր պայմաններ։ Այս ուղղությամը ճայտնի է Գ. Վեյլի թեորեման [1]։

Վերջերտ մեղանից մեկը [2] ցույց տվեց, որ (1)—(2) խնդրին համապատասխանող Ֆուրյեի ինտեգրալի կետային զուդամիտությունը տեղի ունի նույն պայմաններում, ինչ որ ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության դեպրում։

Rummungfued & Standymy Blanplatan's

Թևորևմա. Դիցուր զ(x) ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի ճանրագումարելի երկրորդ կարգի ածանցյալ և բավարարված են ճետևյալ պայմանները՝

1. $f(x) \subset L_2(0, \infty)$, 2. $f''(x) \subset L_2(0, \infty)$, 3. $[f'' - q(x)f] \subset L_2(0, \infty)$, 4. $f'(0) = f'(\infty) = 0$,

5.
$$\lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) E_{\lambda}'(x) - f'(x) E_{\lambda}(x) \right\} = 0, \quad F_{\lambda}(x) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x, v) dp(v), \quad (\lambda \neq 0),$$

որտեղ $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ (1)-(2) խնդրի լուծումն է:

bph
$$g(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \varphi(x, \lambda) E_{\lambda}(x) dx$$
,
unque $f''(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{x}(x, \lambda) dg(\lambda)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитан Б. М. Разложение по собственным функциям, М.-Л., 1950.

- Левитан Б. М. Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений. Доклады АН СССР, т. 73. № 4 (1950) 651-654.
- Саргсян И. С. Суммирование производных разложения по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля. Доклады АН СССР, т. 104, № 6 (1955), 821-824.
- Левитан Б. М. Об асимптотическом поведении спектральной функции и о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка. Известия АН СССР, серия мат., 19 (1955), 33-58.

20.340.40.5 ООЛ 9-РЯЛЬФЗЛЬБЬРЬ U4U.9-БОРИЗЬ ХЬ9.540.40.9-Р ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зра.-ишр., рб. h mb/ub, q/mmip. 1X, No 3, 1956 Физ.-мат., сстеств. н техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. Костандян

.О кручении полого ступенчатого вала

В работе приводится точное решение задачи о кручении полого ступенчатого вала, когда к его торцам приложена симметричная нагрузка, зависящая только от радиуса.

Решение задачи представляется рядами по бесселевым функциям, коэффициенты которых определяются из бесконечной вполне регулярной системы линейных уравнений. Для определения напряжений при кручения даются формулы, зависящие от геометрических параметров вала. В качестве примера рассмотрена задача о кручении полого ступенчатого вала, когда скручивающая нагрузка приложена к торцам вала по линейному закойу.

§ 1. Постановка задачи

 1°. Возьмем цилиндрическую систему координат (г, θ, z) и совместим ось z с осью вала (фиг. 1).



Фиг. 1.

Преднолагается (1.2), что поперечные сечения вала при кручении остаются плоскими и перемещение вдоль радиуса вала равно нулю.

При таком предположении из шести составляющих напряжений отличны от нуля только касательные напряжения то и тез Известна IX, № 3-2

11.371.73

Б. А. Костандян

$$\tau_{r0} = \tau_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$\tau_{r0} = \tau_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$
 (1.1)

где Ф (r, z) — функция напряжения, удовлетворяющая в области осевого сечения уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$
 (1.2)

Граничные условия для функции Ф (г, z) определяются законом распределения напряжений на всей поверхности вала.

В том случае, когда внутренняя боковая поверхность полого вала свободна от внешних сил, на внутренней боковой поверхности вала функция напряжений удовлетворяет условню

$$\Phi(r, z) = C = const.$$
 (1.3)

На боковой поверхности вала, когда боковая поверхность не свободна от внешних нагрузок, функция напряжений удовлетворяет условию

$$\Phi(\mathbf{r}(s), z) = -\int_{0}^{s} P(s) r^{2}(s) ds, \qquad (1.4)$$

где P (s)-скручивающая нагрузка, г (s)-радиус поперечного сечения, а s-расстояние по длине контура осевого сечения вала. Проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения должва совпадать по величине с приложенной нагрузкой

$$\tau_r \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} - \tau_z \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = \mathrm{P}\left(\mathrm{s}\right). \tag{1.5}$$

Условие (1.4) получается из (1.5) и (1.1).

Решая уравнение (1.2) методом Фурье — разделения переменных, — получим:

$$\Phi (\mathbf{r}, \mathbf{z}) = (A \sin\lambda z + B \sin\lambda z) [Cr^2 J_2(\lambda \mathbf{r}) + Dr^2 Y_2(\lambda \mathbf{r})],$$
(1.6)

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = (A \sin \lambda \mathbf{z} + B \cos \lambda \mathbf{z}) \left[C \mathbf{r}^2 \mathbf{I}_2(\lambda \mathbf{r}) + D \mathbf{r}^2 \mathbf{K}_2(\lambda \mathbf{r}) \right],$$

где λ — произвольный вещественный параметр, J₂(x) и Y₂(x) функции Бесселя второго порядка, соответственно, первого и второго рода, а I₂(x) и K₂(x) — функции Бесселя первого и второто рода, второго порядка от мнимого аргумента.

Функции

также являются частными решениями уравнений (1.2).

2°. Рассмотрим задачу о кручении полого вала со ступенчатым осевым сечением (фиг. 1). Пусть скручивающая нагрузка приложена к торцам его и задана как функция г:

$$\pi_{z}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\mathbf{r}^{2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{z=0} = \varphi_{1}(\mathbf{r}); \qquad (\mathbf{s} \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{d});$$

$$(1.8)$$

$$\tau_{z}(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = \frac{1}{\mathbf{r}^{2}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{z=b} = \varphi_{2}(\mathbf{r}); \qquad (\mathbf{s} \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{R}).$$

Предположим, что функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ кусочно-непрерывные и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах. Следовательно, функции $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ можно представить в виде рядов Фурье-Дини (3).

$$\varphi_{1}(\mathbf{r}) = \begin{cases} a_{0}\mathbf{r} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k} w_{1}(\lambda_{k}\mathbf{r}); & (s < \mathbf{r} < R), \\ b_{0}\mathbf{r} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k} w_{1}(\mu_{k}\mathbf{r}); & (R < \mathbf{r} < d), \end{cases}$$
(1.9)

$$\varphi_{2}(r) = f_{0}r + \sum_{k=1}^{\infty} f_{k} w_{1}(\lambda_{k}r);$$
 (s < r < R),

где

$$\begin{split} w_{n}(\lambda_{k}r) &= \frac{J_{n}(\lambda_{k}r)}{J_{2}(\lambda_{k}R)} = \frac{Y_{n}(\lambda_{k}r)}{Y_{2}(\lambda_{k}R)}, \\ w_{n}(\mu_{k}r) &= \frac{J_{n}(\mu_{k}r)}{J_{2}(\mu_{k}d)} = \frac{Y_{n}(\mu_{k}r)}{Y_{2}(\mu_{k}d)}, \end{split}$$
(1.10)

а числа (λ_k) и (μ_k) являются, соответственно, корнями уравнений:

$$w_{2}(x s) = \frac{J_{2}(sx)}{J_{2}(Rx)} - \frac{Y_{2}(sx)}{Y_{2}(Rx)} = 0,$$

$$w_{2}(x R) = \frac{J_{2}(Rx)}{J_{2}(dx)} - \frac{Y_{2}(Rx)}{Y_{2}(dx)} = 0.$$
(1.11)

Для функций wn (х) справедливы следующие формулы

$$\int_{s}^{R} x w_{1}(\lambda_{k} x) w_{1}(\lambda_{p} x) dx = \frac{\lambda_{k}}{\lambda_{p}} \int_{s}^{R} x w_{2}(\lambda_{k} x) w_{2}(\lambda_{p} x) dx = \begin{cases} 0, & \text{прн } p \neq k \\ \omega_{k}, & \text{прн } p = k \end{cases} (1.12)$$

где
$$\omega_{k} = \frac{1}{2} \left([Rw_{1}(\lambda_{k} R)]^{2} - [sw_{1}(\lambda_{k} s)]^{2} \right),$$

Б. А. Костандян

$$\int_{R}^{d} x w_{1}(\mu_{k} x) w_{1}(\mu_{p} x) dx = \frac{\mu_{k}}{\mu_{p}} \int_{R}^{d} w_{2}(\mu_{k} x) w_{2}(\mu_{p} x) x dx = \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \epsilon_{k}, & \text{при } p = k \end{cases}$$
(1.13)

где
$$\epsilon_{k} = \frac{1}{2} \left([Rw_{1}(\mu_{k}d)]^{2} - [Rw_{1}(\mu_{k}R]^{2}); \right)$$

$$\int_{s}^{R} x^{2} w_{1}(\lambda_{k} x) dx = \int_{R}^{d} x^{2} w_{1}(\mu_{k} x) dx = 0.$$
(1.14)

Коэффициенты разложений (1.9) определяются единственным образом при помощи формул (1.12)—(1.14).

Функция напряжений Ф (r, z) должна удовлетворить следующим контурным условиям: на части контура осевого сечения. соответствующей внутренней поверхности вала, из (1.13)

$$\Phi(s, z) = C = \text{const.}$$
(1.15)

а на остальной части, пользуясь формулой (1.4), подставляя туда значение касательных напряжений согласно (1.5), (1.8) и (1.9), после последовательного интегрирования получим:

$$\begin{split} \Phi(\mathbf{r}, \ 0) &= \mathbf{C} + \frac{a_0}{4} (\mathbf{r}^4 - \mathbf{s}^4) + \mathbf{r}^2 \sum_{\mathbf{k}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_k}{\lambda_k} \mathbf{w}_2(\lambda_k \mathbf{r}); \ (\mathbf{s} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{R}), \\ \Phi(\mathbf{r}, \ 0) &= \mathbf{C} + \frac{a_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^3) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{r}^4 - \mathbf{R}^4) + \mathbf{r}^2 \sum_{\mathbf{k}=1}^{\infty} \frac{\mathbf{b}_k}{\mu_k} \mathbf{w}_2(\mu_k \mathbf{r}); \ (\mathbf{R} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{d}), \\ \Phi(\mathbf{d}, \ \mathbf{z}) - \mathbf{C} + \frac{a_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^4) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{d}^4 - \mathbf{R}^4); (\mathbf{0} < \mathbf{z} < \mathbf{a}), \\ \Phi(\mathbf{r}, \ \mathbf{a}) &= \mathbf{C} + \frac{\mathbf{a}_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^4) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{d}^4 - \mathbf{R}^4); (\mathbf{R} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{d}), \\ \Phi(\mathbf{R}, \ \mathbf{z}) &= \mathbf{C} + \frac{a_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^4) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{d}^4 - \mathbf{R}^4); (\mathbf{R} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{d}), \\ \Phi(\mathbf{R}, \ \mathbf{z}) &= \mathbf{C} + \frac{a_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^4) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{d}^4 - \mathbf{R}^4); (\mathbf{a} < \mathbf{z} < \mathbf{b}), \end{split}$$
(1.16)

$$+ r^2 \sum_{k=-1} \frac{f_k}{\lambda_k} w_2(\lambda_k r); \qquad (s \leqslant r \leqslant R).$$

Из (1.15) следует, что Ф (s, b) = С. и следовательно, из последней: формулы (1.16) получим:

$$(a_0 - f_0) (\mathbb{R}^4 - \mathbb{S}^4) + b_0 (\mathbb{d}^4 - \mathbb{R}^4) = 0,$$
 (1.17)

Это соотношение между введенными постоянными представляет уравнение равновесия действующих на вал крутящих моментов.

Функцию Ф (г, z)) нщем в виде: .

$$\Phi (\mathbf{r}, z) = \begin{cases} \Phi_1 (\mathbf{r}, z), & \text{в областн I} \\ \Phi_2 (\mathbf{r}, z), & \text{в областн II} \\ \Phi_3 (\mathbf{r}, z), & \text{в областн III} (фиг. 1), \end{cases}$$
(1.18)

где функции Ф₁(r, z); (i = i, 2, 3) удовлетворяют граничным условням:

$$\frac{1}{r^{a}} \left(\frac{\partial \Phi_{1}}{\partial r} \right)_{z=b} = f_{o}r + \sum_{k=1}^{n} f_{k} w_{1}(\lambda_{k}r); \qquad (s < r < R)$$

$$\Phi_{1}(s, z) = C; \qquad (a < z < b)$$
(1.19)

$$\Phi_1(\mathbf{R}, \mathbf{z}) = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{a}_0}{4} (\mathbf{R}^4 - \mathbf{s}^4) + \frac{\mathbf{b}_0}{4} (\mathbf{d}^4 - \mathbf{R}^4); \qquad (\mathbf{a} < \mathbf{z} < \mathbf{b})$$

$$\frac{1}{r^{2}} \left(\frac{\partial \Phi_{2}}{\partial r} \right)_{z = 0} = a_{0}r + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k} w_{1}(\lambda_{k}r); \qquad (s < r < k)$$

 Φ_{a} (s, z) = C; (0 < z < a) (1.20)

$$\frac{1}{t^2} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \right)_{x=0} = b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k w_1(\mu_k r); \qquad (R < r < d)$$

$$\Phi_{3} (d, z) = C + \frac{a_{0}}{4} (R^{4} - s^{4}) + \frac{b_{0}}{4} (d^{4} - R^{4}); \quad (0 < z < a) \quad (1.21)$$

$$\Phi_{a}(\mathbf{r}, a) = C + \frac{a_{0}}{4}(R^{4} - s^{4}) + \frac{b_{0}}{4}(d^{4} - R^{4}); (R < \mathbf{r} < \mathbf{d}).$$

На смежных границах областей I и II, II и III функции Фі должны удовлетворять условиям сопряжения:

$$\Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \Phi_{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, \mathbf{a}), \quad \left(\frac{\partial \Phi_{\mathbf{z}}}{\partial z}\right)_{z=\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \Phi_{\mathbf{z}}}{\partial z}\right)_{z=\mathbf{a}}; (\mathbf{s} < \mathbf{r} < \mathsf{R})$$
(1.22)

$$\Phi_{a}(\mathbf{R}, z) = \Phi_{a}(\mathbf{R}, z), \quad \left(\frac{\partial \Phi_{a}}{\partial r}\right)_{r=\mathbf{R}} = \left(\frac{\partial \Phi_{a}}{\partial r}\right)_{r=\mathbf{R}}; \quad (0 < z < a). \quad (1.23)$$

Там же определим т, (R, z) и т, (r, a) разложениями

$$\begin{aligned} \tau_{r}\left(R,\ z\right) &= \frac{\eta_{0}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{k} \cos \frac{k\pi z}{a}; \ (0 < z < a) \\ \tau_{z}\left(r,\ a\right) &= \xi_{0}r + \sum_{k=1}^{n} \xi_{k}w_{1}\left(\lambda_{k}\ r\right); \ (s < r < R) \end{aligned} \end{aligned}$$
(1.24)

где {r_{ik}} и {t_k}-неизвестные коэффициенты. Решение задачи сводится к нахождению этих коэффициентов.

Используя решения (1.6) и (1.7) уравнения (1.2) и удовлетворив граничным условиям (1.19)—(1.21), имея в виду (1.24), (1.25), удовлетворив первым условиям из (1.22), (1.23) и используя соотношение (1.17), для функций Ф₁ (г, z) (i = 1, 2, 3), получим:

$$\Phi_{1}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{f}_{0}}{4} (\mathbf{r}^{4} - \mathbf{s}^{4}) + \mathbf{r}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} [\mathbf{f}_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} (\mathbf{z} - \mathbf{a}) + \mathbf{f}_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} (\mathbf{b} - \mathbf{z})] \frac{\mathbf{w}_{2} (\lambda_{k} \mathbf{r})}{\lambda_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} (\mathbf{b} - \mathbf{a})} \begin{pmatrix} \mathbf{s} \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{R} \\ \mathbf{a} \leqslant \mathbf{z} < \mathbf{b} \end{pmatrix}; \quad (1.26)$$

$$\Phi_{2}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{C} + \frac{a_{0}}{4} (\mathbf{r}^{4} - \mathbf{s}^{4}) + \mathbf{z} (\mathbf{r}^{4} - \mathbf{s}^{4}) \frac{\mathbf{\hat{f}}_{0} - a_{0}}{4a} + \frac{\mathbf{r}^{2}a}{4a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{r}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{R}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{z}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{s}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{s}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{s}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)}{\left(\frac{k\pi \mathbf{s}}{a}, \frac{k\pi \mathbf{s}}{a}\right)} \sin \frac{k\pi \mathbf{s}}{a} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} \frac{\lambda \mathbf{s}}{k} + \frac{\tau_{ik}}{k} + \frac{\tau_{ik}}$$

$$+ r^{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\xi_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} z + a_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} \left(a - z \right) \right] \frac{w_{2} \left(\lambda_{k} r \right)}{\lambda_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k} a}; \quad \left(\begin{array}{c} s \leqslant r \leqslant R \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{array} \right); \quad (1.27)$$

$$\Phi_{3}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{C} + \frac{\mathbf{b}_{0}}{4} (\mathbf{r}^{4} - \mathbf{R}^{4}) + \mathbf{z} (\mathbf{d}^{4} - \mathbf{r}^{4}) \frac{\mathbf{b}_{0}}{48} + \frac{\mathbf{a}_{0}}{4} (\mathbf{R}^{4} - \mathbf{s}^{4}) +$$

$$+ r^{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k} \frac{\operatorname{sh} \mu_{k} (a-z)}{\mu_{k} \operatorname{sh} \mu_{k} a} w_{2}(\mu_{k} r) + \frac{r^{2} a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k} \frac{\Delta \left(\frac{k \pi d}{a}, \frac{k \pi r}{a}\right)}{k \Delta \left(\frac{k \pi R}{a}, \frac{k \pi d}{a}\right)} \sin \frac{k \pi z}{a}; \quad \begin{pmatrix} R \leqslant r \leqslant d \\ 0 \leqslant z \leqslant a \end{pmatrix},$$
(1.28)

$$\Delta(x, y) = I_2(x) K_2(y) - K_2(x) I_2(y).$$

§ 2. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

Неизвестные коэффициенты $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_k\}$; $(k = 1, 2, 3, ...)_r$ имеющиеся в выражениях для функций Φ_i (r, z); (i = 1, 2, 3) вполне определяются, если также потребовать выполнение вторых условий сопряжения из (1.22) и (1.23).

1°. Потребуем чтобы функцин Ф₁ (r, z) и Ф₂ (r, z) удовлетворяли второму условию из (1.22)

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\right)_{z=a}; \quad (s < r < R).$$
(2.1)

где

Из формул (1.26) н (1.27) составим равенство (2.1)

$$r\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{f_{k}}{\sinh\lambda_{k}(b-a)} + \frac{a_{k}}{\sinh\lambda_{k}a} + \frac{\xi_{k}\sinh\lambda_{k}b}{\sinh\lambda_{k}a\sinh\lambda_{k}(b-a)} \right] w_{2}(\lambda_{k}r) =$$

$$= \frac{f_{0}-a_{0}}{4a} \left(r^{a} - \frac{s^{4}}{r} \right) + r\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi s}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} (-1)^{k}; (s < r < R). \quad (2.2)$$

Умножив обе части тождества (2.2) на w₂ (λ_pr) и интегрируя по г в пределах (s < r < R), используя формулу (1.13), а также значение интегралов

$$\int \left(r^3 - \frac{s^4}{r}\right) w_a(\lambda_p r) dr = -\frac{(R^4 - s^4)}{\lambda_p R} w_a(\lambda_p R), \qquad (2.3)$$

$$\int_{a}^{R} r\Delta \left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) w_{2}(\lambda_{p}r) dr = - \frac{R\lambda_{p}\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\lambda_{p}^{2} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^{a}} w_{\nu}(\lambda_{p}R), \quad (2.4)$$

получим

$$\begin{split} &\xi_{p} \frac{\omega_{p}}{Rw_{1} (\lambda_{p}R)} = \frac{sh \lambda_{p} (b-a)}{sh \lambda_{p} b} \frac{sh \lambda_{p} a}{sh \lambda_{p} b} \lambda_{p} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \tau_{k} \frac{1}{\lambda_{p}^{2} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^{2}} + \\ &+ \frac{f_{0} - a_{0}}{4a \lambda_{p} R^{2}} (R^{4} - s^{4}) \frac{sh \lambda_{p} (b-a) sh \lambda_{p} a}{sh \lambda_{p} b} + \left[f_{p} \frac{sh \lambda_{p} a}{sh \lambda_{p} b} + \\ &+ a_{p} \frac{sh \lambda_{p} (b-a)}{sh \lambda_{p} b} \right] \frac{\omega_{p}}{Rw_{1} (\lambda_{p} R)}; \ (p = 1, 2, 3, ...), \end{split}$$
(2.5)

где ор —значение интеграла (1.13).

2°. Функцин Ф₂ (r, z) и Ф₃ (r, z) должны удовлетворять второму из условий (1.23), т. е.

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} = \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}; \ (0 < \mathbf{z} < \mathbf{a}).$$
(2.6)

Из формул (1.27) и (1.28), составляя равенство (2.6), используя рекуррентные соотношения для бесселевых функций, получим

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \eta_{\kappa} \Biggl[\frac{I_{2}\left(\frac{k\pi d}{a}\right) K_{1}\left(\frac{k\pi R}{a}\right) + K_{2}\left(\frac{k\pi d}{a}\right) I_{1}\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a},\frac{k\pi R}{a}\right)} +$$

Б. А. Костандян

$$+ \frac{K_{2}\left(\frac{k\pi s}{a}\right)I_{1}\left(\frac{k\pi R}{a}\right) + I_{2}\left(\frac{k\pi s}{a}\right)K_{1}\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a},\frac{k\pi s}{a}\right)} \right] \sin\frac{k\pi z}{a} = R\left(a_{0}-b_{0}\right) + \\ + \frac{R}{a}\left(f_{0}-a_{0}+b_{0}\right)z + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\xi_{k}\sinh\lambda_{k}z + a_{k}h\lambda_{k}\left(a-z\right)\right]\frac{w_{1}\left(\lambda_{k}R\right)}{sh\lambda_{k}a} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{\sinh \mu_k (a-z)}{\sinh \mu_k a} w_1(\mu_k R); \quad (0 < z < a)$$
(2.7)

Умножив тождество (2.7) на sin $\frac{p\pi z}{a}$ и интегрируя по z в пределах (0 < z < a), получим

$$a\eta_{p} = \frac{\left(-1\right)^{p+1} 2\left(\frac{p\pi}{a}\right)}{\psi_{1}\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_{2}\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{k} \frac{w_{1}(\lambda_{k}R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^{2} + \lambda_{k}^{2}} +$$

$$+ \frac{2}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)} \left(\begin{array}{c} \frac{p\pi}{a}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \frac{w_k(\lambda_k R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2} \end{array} \right.$$

$$-\frac{p\pi}{a}\sum_{k=1}^{\infty} b_{k} \frac{w_{1}(\mu_{k}R)}{\left(\frac{p\pi}{a}\right)^{2} + \mu_{k}^{2}} + R(a_{0} - b_{0})\frac{a}{p\pi} \left[1 + (-1)^{p+1}\right] + \frac{aR}{p\pi}(-1)^{p+1}(f_{0} - a_{0} + b_{0}) \left]; (p = 1, 2, 3, ...).$$
(2.8)

где

$$\psi_{1}\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right) = \frac{I_{2}\left(\frac{p\pi d}{a}\right)K_{1}\left(\frac{p\pi R}{a}\right) + K_{2}\left(\frac{p\pi d}{a}\right)I_{1}\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi d}{a},\frac{p\pi R}{a}\right)};$$
(2.9)

$$\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right) = \frac{K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)I_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right) + I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)K_1\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{p\pi R}{a},\frac{p\pi s}{a}\right)}.$$
 (2.10)

Введем обозначения:

$$\left(-1\right)^{k+1} a \eta_{k} = \alpha F_{k}; \qquad (2.11)$$

$$\xi_p \frac{\omega_p}{Rw_1(\lambda_p R)} = L_p , \qquad (2.12)$$

где «>0-постоянная подлежащая определению. Имея в виду (2.11) и (2.12), бесконечные системы (2.5) и (2.8) приводятся к виду

$$L_{p} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} F_{k} + G_{p}; \qquad (p = 1, 2, 3...), \quad (2.13)$$

$$F_{p} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} L_{k} + R_{p}; \qquad (p = 1, 2, 3...), \qquad (2.14)$$

где

$$a_{pk} = \frac{\alpha \lambda_p}{a} \frac{\sinh \lambda_p (b - a) \sinh \lambda_p a}{\sinh \lambda_p b}; \frac{1}{\lambda_p^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}$$
(2.15)

$$\mathbf{G}_{p} = \frac{\mathbf{f}_{0} - \mathbf{a}_{0}}{4a\lambda_{p}R^{2}} (R^{4} - \mathbf{s}^{4}) \frac{\mathrm{sh}\lambda_{p} (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \mathrm{sh}\lambda_{p} \mathbf{a}}{\mathrm{sh}\lambda_{p} \mathbf{b}} + \left[\mathbf{f}_{p} \frac{\mathrm{sh}\lambda_{p} \mathbf{a}}{\mathrm{sh}\lambda_{p} \mathbf{b}} + \mathbf{a}_{p} \frac{\mathrm{sh}\lambda_{p} (\mathbf{b} - \mathbf{a})}{\mathrm{sh}\lambda_{p} \mathbf{b}} \right] \frac{\omega_{p}}{\mathrm{Rw}_{1} (\lambda_{p} R)};$$
(2.16)

$$\mathbf{b}_{pk} = \frac{\frac{2}{\alpha} \left(\frac{p\pi R}{a} \right)}{\psi_1 \left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a} \right) + \psi_2 \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a} \right)} \cdot \frac{\mathbf{w}_1^2 (\lambda_k R)}{\left[\left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 + \lambda_k^2 \right] \mathbf{w}_k}; \quad (2.17)$$

$$\begin{split} R_{p} &= \frac{2}{\alpha} \left((-1)^{p+1} \frac{1}{\phi_{1} \left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a} \right) + \phi_{2} \left(\frac{p\pi i \tilde{\epsilon}}{a}, \frac{p\pi s}{a} \right)} \left\{ \frac{p\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k} \frac{w_{1} \left(\lambda_{k} R \right)}{\left(\frac{p\pi}{a} \right)^{2} + \lambda_{k}^{2}} - \frac{p\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} b_{k} \frac{w_{1} \left(\mu_{k} R \right)}{\left(\frac{p\pi}{a} \right)^{2} + \mu_{k}^{2}} + \frac{Ra}{p\pi} \left[a_{0} - b_{0} + \left(-1 \right)^{p+1} f_{0} \right] \right\}. \end{split}$$
(2.18)

Совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.13) и (2.14) можно привести к одной системе

$$Z_{p} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_{k} + B_{p}; \quad (p = 1, 2, 3...), \quad (2.19)$$

если ввести обозначения

$$\begin{split} Z_{2p-1} &= L_p & Z_{2p} = F_p \\ B_{2p-1} &= G_p & B_{2p} = R_p \\ A_{2p-1,\ 2k-1} &= 0 & A_{2p-1,\ 2k} = a_{pk} \\ A_{2p,\ 2k-1} &= b_{pk} & A_{2p,\ 2k} = 0, \end{split}$$

§ 3. Исследование бесконечной системы линейных уравнений

Докажем, что бесконечная система линейных уравнений (2.19) удовлетворяет условию вполне регулярности.

1°.
$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda_{2p-1,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{\alpha \lambda_p \sinh \lambda^p a \sinh \lambda_p (b-a)}{a \sinh \lambda_p b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \lambda_p^2} = \frac{\alpha}{4} \left(\operatorname{cth} \lambda_p a - \frac{1}{\lambda_p a} \right) \leqslant \frac{\alpha}{4},$$
(3.1)

в силу обозначений (2.20) и (2.15), причем использованы значения ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{ctha} \pi - \frac{1}{a\pi} \right), \tag{3.2}$$

и неравенства

$$\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \leq 1; \quad (0 \leq x < \infty), \tag{3.3}$$

$$\frac{\sinh \lambda_{p} \mathbf{a} \, \sinh \lambda_{p} \left(\mathbf{b} - \mathbf{a}\right)}{\sinh \lambda_{p} \mathbf{b}} \leq \frac{1}{2} \,. \tag{3.4}$$

$$2^{\circ}, \sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{2}{\alpha} \frac{\left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\phi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \phi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_1^2 \left(\lambda_k R\right)}{\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)}$$
(3.5)

 $\sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \left| \left(\frac{p_k}{2} \right) + \lambda_k^2 \right|$

Вычислим сумму следующего ряда

$$S_{\kappa} = \frac{k\pi}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Rw_{i}^{2}(\lambda_{p}R)}{\omega_{p} \left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^{2} + \lambda_{p}^{2} \right]},$$
(3.6)

Разложим функции $\sqrt{r}\Delta\left(\frac{k\pi r}{a},\frac{k\pi s}{a}\right) = \left[1_{\mathbf{z}}\left(\frac{k\pi r}{a}\right)K_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right) - -K_2\left(\frac{k\pi r}{a}\right)1_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)\right]\sqrt{r}$ и $\left(r^2 - \frac{s^4}{r^2}\right)\sqrt{r}$ по системе функций $\left(\sqrt{\frac{r}{\omega_p}}w_2(\lambda_p r)\right)$ на интервале (s, R). Такое разложение должно иметь вид:

$$\sqrt{r} \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \sqrt{\frac{r}{\omega_p}} w_2(\lambda_p r); \qquad (3.7)$$

$$\sqrt{r}\left(r^{2}-\frac{s^{4}}{r^{2}}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} B_{p} \sqrt{\frac{r}{\omega_{p}}} w_{2}(\lambda_{p}r). \qquad (3.8)$$

Умножны обе части (3.7) и (3.8) на $\sqrt{\frac{r}{\omega_k}} w_2(\lambda_k r)$ и интегрируем по

г в интервале (s, R). Имея в виду (1.12), коэффициенты разложений А_р и В_р определяются единственным образом. Используя рекуррентные формулы для бесселевых функций и значения интегралов, которые получены при помощи интегралов Ломмеля:

$$\int_{S}^{R} x w_{k}(\alpha x) I_{k}(\beta x) dx = \frac{1}{\alpha^{2} + \beta^{2}} \left\{ x \left[\beta w_{k}(\alpha x) I_{k-1}(\beta x) - \alpha I_{k}(\beta x) w_{k-1}(\alpha x) \right] \right\}_{S}^{R},$$
(3.9)

$$\int_{S}^{n} x w_{k} (\alpha x) K_{k} (\beta x) dx = \frac{1}{\alpha^{2} + \beta^{2}} \left\{ x \left[\beta w_{k}(\alpha x) K_{k-1} (\beta x) + \alpha K_{k}(\beta x) w_{k-1} (\alpha x) \right] \right\}_{S}^{n}$$

для Ар н Вр получим

$$A_{p} = -\frac{R\lambda_{p}\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)w_{1}(\lambda_{p}R)}{V\overline{\omega_{p}}\left[\lambda_{p}^{z} + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^{2}\right]}$$
(3.10)

$$B_{p} = -\frac{(R^{4} - s^{4}) w_{1} (\lambda_{p} R)}{\sqrt{\omega_{p} \lambda_{p} R}}.$$
(3.11)

Подставляя значения Ар и Вр в (3,7) и (3.8), получим

$$V\bar{\mathbf{r}}\,\Delta\left(\frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{r}}{\mathbf{a}},\frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{s}}{\mathbf{a}}\right) = -\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\mathbf{R}\lambda_{p}\,\Delta\left(\frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{R}}{\mathbf{a}},\frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{s}}{\mathbf{a}}\right)\mathbf{w}_{1}\,(\lambda_{p}\mathbf{R})}{V\bar{\mathbf{w}_{p}}\left[\lambda_{p}^{2}+\left(\frac{\mathbf{k}\pi}{\mathbf{a}}\right)^{2}\right]}\,\sqrt{\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{w}_{p}}}\mathbf{w}_{2}(\lambda_{p}\,\mathbf{r}) \tag{3.12}$$

$$V\overline{r}\left(r^{2}-\frac{s^{4}}{r^{2}}\right) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R^{4}-s^{4})w_{1}(\lambda_{p}R)}{V\omega_{p}\lambda_{p}R}\sqrt{\frac{r}{\omega_{p}}} w_{2}(\lambda_{p}r) \cdot (3.13)$$

Система функций ($\sqrt{\frac{r}{\omega_p}} w_a(\lambda_p r)$) ортогональна и нормальна на отрезке [s, R], что видно из (1.12), и образует замкнутую систему. Используя обобщенное равенство Парсеваля и принимая во внимание (3.10)—(3.13), получаем

$$\int_{S}^{R} r\left(r^{2} - \frac{s^{4}}{r^{2}}\right) \Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) dr = \sum_{p=1}^{\infty} A_{p} B_{p}$$
(3.14)

нлн

$$\frac{k\pi R}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{w_{1}^{2} \left(\lambda_{p} R\right)}{\omega_{p} \left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^{2} + \lambda_{p}^{2}\right]} = \psi_{a} \left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) - \frac{4a R^{a}}{k\pi \left(R^{4} - s^{4}\right)}.$$
(3.15)

При этом использованы рекуррентные формулы для бесселовых функций. Сумму ряда (3.6) можно найти и другим способом. Подставляя (3.15) в (3.5), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{2p,k}| = \frac{2}{\alpha} \frac{\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) - \frac{4aR^3}{p\pi (R^4 - s^4)}}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad (3.16)$$

тде, как легко видеть, $\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) > 0$ и $\psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) > 0$.

Из оценок (3.1) и (3.16), выбирая $\alpha = 2$ $\sqrt{2}$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||A_{2p,k}|| \ll \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (3.17)$$

т. е. система (2.19) впол не регулярна.

Совокупность свободных членов {В_р} системы (2.19) ограничена и стремится к нулю когда р → ∞, что легко доказать на основании работы[1].

§ 4. Определение напряжений

При кручении вала напряжения определяются формулами (1.1). Используя обозначения (2.11) и (2.12), пользуясь формулами (1.1) и рекуррентными формулами бесселевых функций, из (1.26)—(1.28) получим для области I (фиг. 1)

$$\tau_{r}\left(r,z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[L_{k} \frac{R_{w_{1}}^{*}(\lambda_{k}R) \operatorname{cli} \lambda_{k}\left(b-z\right)}{\omega_{k} \operatorname{sh} \lambda_{k}\left(b-a\right)} - f_{k} \frac{\operatorname{ch} \lambda_{k}\left(z-a\right)}{\operatorname{sh} \lambda_{k}\left(b-a\right)} \right] w_{2}\left(\lambda_{k}r\right), \quad (4.1)$$

$$\tau_{z} (\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{r} \mathbf{f}_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mathbf{f}_{k} \frac{\mathrm{sh}\lambda_{k} (\mathbf{z} - \mathbf{a})}{\mathrm{sh}\lambda_{k} (\mathbf{b} - \mathbf{a})} + \mathbf{L}_{k} \frac{\mathrm{Rw}_{1} (\lambda_{k} \mathrm{R}) \mathrm{sh}\lambda_{k} (\mathbf{b} - \mathbf{z})}{\omega_{k} \mathrm{sh}\lambda_{k} (\mathbf{b} - \mathbf{a})} \right] \mathbf{w}_{1} (\lambda_{k} \mathbf{r}),$$

$$(4.2)$$

для области II

$$\tau_{r}(r, z) = \frac{r^{4} - s^{4}}{4a r^{2}} (f_{0} - a_{0}) + \frac{2 \sqrt{2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F^{k} \frac{\Lambda\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \cos \frac{k\pi z}{a} +$$

О кручении полого ступенчатого вала

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k} \frac{ch\lambda_{k} (a-z)}{sh\lambda_{k} a} - L_{k} \frac{Rw_{1} (\lambda_{k}R) ch\lambda_{k} z}{\omega_{k} sh\lambda_{k} a} \right] w_{2} (\lambda_{k}\mathbf{r}); \qquad (4.3)$$

$$(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = a_{0}\mathbf{r} + \mathbf{r} \frac{f_{0} - a_{0}}{a} \mathbf{z} + \frac{21/2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} F_{k} \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \sin \frac{k\pi s}{a} +$$

для области III

$$\begin{aligned} \tau_{r}\left(\mathbf{r}, \ z\right) &= \frac{\mathbf{r}^{4} - \mathbf{d}^{4}}{4 a \ \mathbf{r}^{2}} \ \mathbf{b}_{0} + \ \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_{k} \ \frac{\mathrm{ch}_{kk}\left(a-z\right)}{\mathrm{sh}\mu_{k} \ a} \ \mathbf{w}_{2}\left(\mu_{k} \ \mathbf{r}\right) + \\ &+ \frac{2 \sqrt{2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^{k+1} \mathbf{F}_{k} \ \frac{\Delta\left(\frac{\mathrm{k}\pi \mathrm{d}}{a} \cdot \frac{\mathrm{k}\pi \mathrm{r}}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{\mathrm{k}\pi \mathrm{d}}{a} \cdot \frac{\mathrm{k}\pi \mathrm{R}}{a}\right)} \ \cos\frac{\mathrm{k}\pi z}{a} , \end{aligned}$$
(4.5).

$$\mathbf{f}_{z}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \mathbf{r} \, \frac{\mathbf{a} - \mathbf{z}}{\mathbf{a}} \mathbf{b}_{\mathbf{a}} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_{k} \, \frac{\mathrm{sh}\mu_{k}(\mathbf{a} - \mathbf{z})}{\mathrm{sh}\mu_{k}|\mathbf{a}|} \mathbf{w}_{1}(\mu_{k}\mathbf{r}) + \frac{2\sqrt{2}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a} \left(\frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{r}}{\mathbf{a}}, \frac{\mathbf{k}\pi\mathbf{d}}{\mathbf{a}}\right) + \mathbf{k}\pi\mathbf{z}$$

$$+ \frac{2\sqrt{2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^{k+1} F_k \frac{\omega\left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} \sin \frac{k\pi z}{a}, \qquad (4.6)$$

где

$$\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{I}_{1}(\mathbf{x}) \, \mathbf{K}_{2}(\mathbf{y}) + \mathbf{K}_{1}(\dot{\mathbf{x}}) \, \mathbf{I}_{2}(\mathbf{y}) \,. \tag{4.7}$$

Формулами (4.1) — (4.6) определяются напряжения в любой точке осевого сечения.

§ 5. Ступенчатый вал, скручиваемый нагрузкой, приложенной к его торцам по линейному закону

1°. Пусть нагрузка приложена к торцам и изменяется линейно вдоль раднуса сечения. Законы распределения скручивающих нагрузок представим в виде

$$\tau_{z}(\mathbf{r}, 0) = \varphi_{1}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{s} \tau_{1}; \qquad (s \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{d}),$$

$$\tau_{z}(\mathbf{r}, b) - \varphi_{2}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{s} \tau_{2}; \qquad (s \leqslant \mathbf{r} \leqslant \mathbf{R}). \tag{5.1}$$

Пользуясь разложениями (1.9), имеем

$$a_0 = b_0 = \frac{z_1}{s}, \ f_0 = \frac{z_2}{s}$$

 $a_k = b_k = f_k = 0 \quad (k = 1, 1, 3...).$
(5.2)

Б. А. Костандян

Коэффициенты a₀, b₀ и f₀ должны удовлетворять условию (1.17), т.е. уравнению равновесия крутящих моментов, откуда получим

$$\tau_1 (d^4 - s^4) = \tau_2 (R^4 - s^4).$$
 (5.3)

Подставив коэффициенты (5.2) в (2.15) — (2.18) и имея в виду (2.20), для бесконечной системы (2.19) будем иметь

$$A_{2p-4, 2k} = \frac{2\sqrt{2\lambda_p} \sinh \lambda_p a \sinh \lambda_p}{a \sin \lambda_p b} \frac{(b-a)}{b} \cdot \frac{1}{\lambda_p^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} \cdot (5.4)$$

$$A_{2p,\ 2k-1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{p\pi R}{a}\right)}{\psi_1 \left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2 \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \frac{w_1^2 \left(\lambda_k R\right)}{\left[\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \lambda_k^2\right] w_k}, \quad (5.5)$$

$$B_{2p-1} = \frac{\operatorname{sh} \lambda_p a \, \operatorname{sh} \lambda_p \, (b - a)}{4a \, \lambda_p \, \operatorname{sR}^2 \operatorname{sh} \lambda_p \, b} \, (d^4 - s^4) \, \tau_1, \tag{5.6}$$

$$B_{2p} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{R\tau_3}{\psi_1\left(\frac{p\pi d}{a}, \frac{p\pi R}{a}\right) + \psi_2\left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right)} \cdot$$
(5.7)

2°. В качестве численного примера рассмотрим ступенчатый полый вал с размерами а = 5πs, b = 10πs, R = 2s, d = 3s.

Из (5.4) — (5.7) видно, что все коэффициенты и свободные члены системы (2.19)—положительные числа.

В этом случае

$$| B_{p} | \leq \max (| B_{2p-1} |, | B_{2p} |); p = 1, 2 ...$$

$$| B_{p}^{\perp} | \leq 0.5339 \tau_{2} s,$$
(5.8)

$$\sum_{\mathbf{k}=1} |\Lambda_{\mathbf{p},\mathbf{k}}| \ll \frac{1}{\sqrt{2}} \,. \tag{5.9}$$

Пользуясь теорней вполне регулярных систем линейных уравнений — [5]. получим следующие оценки для неизвестных

Для напряжений т, и т, из (4.1) — (4.6) получим следующие формулы:

для области I (фиг. 1)

$$s_r(\mathbf{r}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{\operatorname{Rw}_1(\lambda_k R) \operatorname{ch} \lambda_k (b-z)}{\omega_k \operatorname{sh} \lambda_k (b-a)} w_2(\lambda_k r);$$
(5.11)

$$\pi_{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{s}|} \pi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{\operatorname{Rw}_1(\lambda_k R) \operatorname{sh}\lambda_k (\mathbf{b} - \mathbf{z})}{\omega_k \operatorname{sh}\lambda_k (\mathbf{b} - \mathbf{a})} w_1(\lambda_k \mathbf{r}); \quad (5.12)$$

для области II

$$F_{\mathbf{r}}\left(\mathbf{r}, z\right) = \frac{\mathbf{r}^{4} - \mathbf{s}^{4}}{4a \, \mathbf{r}^{2} \mathbf{s}} \, \tau_{1} + \frac{2 \, V^{-2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^{k+1} \, F_{k} \, \frac{\Delta\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \cos \frac{k\pi z}{a} - \frac{\kappa r}{a} \, \frac{\kappa r}$$

$$-R \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{w_1(\lambda_k R) ch\lambda_k z}{\omega_k sh\lambda_k a} w_2(\lambda_k r), \qquad (5.13)$$

$$\tau_z (\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{s}|} \tau_1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{z}}{a\mathbf{s}} \tau_1 + \mathbf{R} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{L}_k \frac{\mathbf{w}_1 (\lambda_k \mathbf{R}) \operatorname{sh}\lambda_k \mathbf{z}}{\mathbf{w}_k \operatorname{sh}\lambda_k \mathbf{a}} \mathbf{w}_1 (\lambda_k \mathbf{r}) +$$

$$+ \frac{2V^{-2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_k \frac{\Omega\left(\frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} \sin\frac{k\pi z}{a}, \qquad (5.14)$$

для области III

$$\tau_{r}(r, z) = \frac{r^{4} - d^{4}}{4a r^{2}s} \tau_{1} + \frac{2\sqrt{2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_{k} \frac{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi r}{a}\right)}{\Delta\left(\frac{k\pi d}{a}, \frac{k\pi R}{a}\right)} \cos\frac{k\pi z}{a}, \quad (5.15)$$

$$\tau_{z}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{\mathbf{r}(\mathbf{a} - \mathbf{z})}{\mathbf{s}\mathbf{a}} \tau_{1} + \frac{2\sqrt{2}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} F_{k} \frac{\Omega\left(\frac{\mathbf{k} + \mathbf{u}}{\mathbf{a}}, \frac{\mathbf{k} + \mathbf{u}}{\mathbf{a}}\right)}{\Delta\left(\frac{\mathbf{k} + \mathbf{u}}{\mathbf{a}}, \frac{\mathbf{k} + \mathbf{u}}{\mathbf{a}}\right)} \sin \frac{\mathbf{k} + \mathbf{z}}{\mathbf{a}}$$
(5.16)

Подставляя в (5.11) — (5.16) коэффициенты (L_k | и (F_k) с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений Tr (F, Z) H Tz (F, Z).

Некоторые значения напряжений приведены в таблице 1.



им. В. М. Молотова

A. U., houmufgjuff

ՄՆԱՄԵՋ ԱՍՏԻՃԱՆԱՁԵՎ ԼԻՍԵՌԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

1. 17 0 1 0 1 0 1

Հոդվածում արվում է սնամեջ աստիձանաձև լիսեսի ոլորման խնդրի Հշարիա լուծումը, երը ընտը սիմետրիկ է առանցջի նկատմամը։

Ούηρρη γουδήσει է «Δαύημη Φαεύημουνορ ύσρατικό αυ δημύμαμη δύηρη γουδατά μαρήσει է πύηδης, τρή αδησειμου ήδωμο διαματορού ύδημα πουδά μετό πών τη διαστάλη φαεύημαν τη μαρατάλη το δημορο από δύ γμοροφοί μου βουστά το διαστή το το διαστάματο τη διατογραμική το διαστά Πεοσείδων ματά το βάσμο βουστά το διαστάματα το το διαστάλου το διαστά δια τη διατογραμία τη τη διαστά το διαστά το διαστά το διατογραμικό το διαστά από το διαστά από το διαστά το

ЛИТЕРАТУРА

- Абрамян Б. Л., Джербашян М. М. О кручении валов переменного сечения П. М. М., 1951, т. XV, в. 4.
- Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.-Л., 1949.
- Грей Э., Метюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Гостехиздат, М., 1949.
- Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Огиз, Гостехиздат, 1948.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. А., 1949.
- Костандан Б. А. О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы, "Известия" АН Армянской ССР, том VII, № 4, 1954.

20.340.405 000 9530650650666 0.407606056 567640.966 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зра.-Лир., рб. L mbhub, арттр. 1X, № 3, 1956 Фил.-мат., естеств. и техн- наука

Л. К. Капанян

Об изгибе некоторых полых консольных стержней

§ 1. Решение задачи об изгибе с помощью аналитической функции

Рассмотрим изгиб консольного призматического стержия силой Р, приложенной к концу консоли и совпадающей по направлению с одной из главных центральных осей поперечного сечения.*

Решение задачи сводится к определению функции напряжений Ф(х,у) из дифференциального уравнения вида:

$$\frac{\partial^{z}\Phi}{\partial x^{z}} + \frac{\partial^{z}\Phi}{\partial y^{z}} = \frac{z}{1+z} \frac{P}{I} y - \frac{df}{dy}, \qquad (1)$$

где «- коэффициент Пуассона,

I-момент инерции сечения относительно нейтральной оси ОУ, f(y)-произвольная функция координаты у.

Функция напряжений на контуре должна удовлетворять условию: е

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[\frac{P x^2}{2l} - i(y)\right] \frac{dy}{ds}.$$
(2)

Компоненты касательных напряжений по осям координат будут

$$X_{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{Px^{2}}{2l} + i(y), \qquad (3)$$

$$Y_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \,. \tag{4}$$

В целях упрощения (2) в последующем ходе решения задачи примем:

$$f(y) = -\frac{Py^{a}}{2l} \cdot$$
(5)

Подставив (5) в (1), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{Py}}{\mathrm{I}} \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} \,. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$\frac{1+2\sigma}{1+\sigma} = C; \ \frac{P}{1} = B.$$
(7)

Тогда (6) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = BCy.$$
 (8)

 Статья была сдана в нечать, когда нам стало известно о работе Ю. А. Амензаде [1], в которой приведено решение этой же задачи методом, предложенным Д. И. Шерманом.

Известня 1Х, № 3-3

Решение (8) может быть представлено через комплексные переменные в виде

$$\Phi = -\frac{\mathrm{CB}}{48\mathrm{i}}(z-\overline{z})^3 + \varphi_1(z) + \overline{\varphi_1}(\overline{z}), \qquad (9)$$

где $\frac{CB}{48i}(z-\overline{z})^3$ — частное решение, а $[\varphi_1(z) + \overline{\varphi_1}(\overline{z})]$ — гармоническая

функция, являющаяся общим решением (8) без правой части.

Исследуем функцию $\varphi_1(z)$ с точки зрения многозначности. Предположим, что $\varphi_1(z)$ содержит в себе логарифмический член, т.е. в случае двусвязной области может оказаться многозначной. Допустим, что:

$$\varphi_1(z) = \varphi^*(z) + \Lambda_1 \ln z, \qquad (10)$$

где 🕫 (z) — однозначная функция.

Для определения величины A₁ используем теорему о циркуляции касательного напряжения при изгибе [2]. Теорема эта выражается следующей формулой:

$$\int_{L} T_{s} ds = \left[2\mu \tau - \frac{P \sigma y_{n}}{(1 + \sigma) \Gamma} \right] \Omega, \tag{11}$$

где интеграл взят по любому замкнутому контуру L,

2 — площадь внутри рассматриваемого контура,

у_о — ордината центра тяжести площади Q.

Так как в рассматриваемом случае изгиб не сопровождается кручением, то т = 0, кроме того, начало координат совпадает с центром тяжести сечения, значит и у₀ = 0, тогда из (11) следует

$$\int T_s ds = 0.$$
 (12)

Из другого соотношения, приведенного также в [2], имеем:

$$\int_{L} T_{s} ds = -\int_{L} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \int \int f'(y) dx dy.$$
(13)

Учитывая, что

$$\mathbf{f}'\left(\mathbf{y}\right) = - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{1}}\mathbf{y},$$

получим:

$$\int \int f'(y) dx dy = -\frac{P}{1} \int \int y dx dy = 0.$$
 (14)

Имея в виду (12) и (14), перепишем (13) в виде

$$\int_{n}^{s} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \, \mathrm{d}s = 0, \tag{15}$$

В случае двусвязной области соотношение (15) должно иметь место как на внутреннем, так и на внешнем контурах сечения.

Далее, умножим обе части уравнения (2) на-ids, после чего проинтегрируем его по всему контуру сечения и сложим полученное выражение с (15); в результате имеем:

$$\int_{\mathbf{L}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) ds = - \frac{P}{2I} i \int_{\mathbf{L}} (x^2 + y^2) dy.$$
(16)

Применяя формулу Грина, преобразуем правую часть (16), после чего получим:

$$\int_{L} (x^2 + y^2) dy = \int \int 2x dx dy = 2x_0 \Omega.$$

Но в рассматриваемом случае центр тяжести совпадает с началом координат, значит $x_0 = 0$ п

$$\int_{L} (x^2 + y^2) dy = 0.$$
 (17)

Левую часть (16) приведем к комплексному виду. Учитывая, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\mathbf{x}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}},$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} \right), \tag{18}$$

после некоторых преобразований в левой части (16) получим:

$$\int_{L} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right) ds = -2i \int_{L} \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz.$$
(19)

Подстановка (19) и (17) в (16) дзет

$$\int_{L}^{\bullet} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \, \mathrm{d}z = 0. \tag{20}$$

Введя в (20) выражение функции напряжений (9) в виде

$$\Phi = -\frac{CB}{48i}(z-\overline{z})^3 + \varphi_1^{*}(z) + A_1 \ln z + \overline{\varphi_1}^{*}(\overline{z}) + \overline{A}_1 \ln \overline{z},$$

получим $\int_{1}^{\infty} \frac{A_{1}}{z} dz = 0$ или $2\pi i A_{1} = 0$, откуда следует, что $A_{1} = 0$, зна-

чит и Ā₁ = 0. Следовательно, функция φ₁(z) есть однозначная функция. Контурное условие нашей задачи приведем к комплексному виду.

Учатывая, что $\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}$, $x^2 + y^2 = z\overline{z}$ и $dy = \frac{dz - d\overline{z}}{2i}$, из (2) получны

А. К. Капанян

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} \frac{d\overline{z}}{dz} = \frac{B}{4i} z\overline{z} \left(1 - \frac{d\overline{z}}{dz} \right).$$
 (21)

Касательные напряжения также выразим в функции комплексного переменного. Введя (5) в (3), имеем

$$X_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{P x^2}{21} - \frac{P y^2}{21}.$$
 (22)

Умножим (4) на — і и сложим с (22), тогда получим

$$X_z - iY_z = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + i \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{P}{2I}(x^2 + y^2)$$

или, имея в виду (18), перепншем это выражение в виде

$$X_z - iY_z = 2i\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{P}{2!}z\bar{z} \cdot$$
(23)

Таким образом, решение задачи об изгибе полого консольного стержня сводится к определению функции напряжений Ф или в силу (9)-аналитической функции $\varphi_i(z)$, при помощи контурных условий задачи.

§ 2. Решение задачи об изгибе призматического консольного стержня круглого сечения с квадратным вырезом

Для определения функции φ₁(z) применим метод конформногоотображения.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ отображает область поперечного сечения рассматриваемого стержня на круговое кольцо. Тогда $\varphi_1(z)$ примет вид $\varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$. Функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области кольца и поэтому разлагается в ряд

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \cdot$$
(24)

После подстановки в (9) выражений $z = \omega(\zeta)$ и $\varphi_1(z) = \varphi(\zeta)$, функция напряжений примет вид

$$\Phi = -\frac{CB}{48i} [\omega(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta})]^3 + \varphi(\zeta) + \overline{\varphi}(\overline{\zeta}).$$
⁽²⁵⁾

В контурное условие (21) тоже введем функцию z = ω(ζ). Вычислив предварительно величины, входящие в (21), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{CB}{16i} \left[\omega(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta}) \right]^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{z}} = \frac{CB}{16i} \left[\omega(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta}) \right]^2 + \frac{\overline{\varphi'}(\overline{\zeta})}{\overline{\omega'}(\overline{\zeta})}$$
(26)

Об изгибе полых консольных стержней

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -\frac{\rho^2}{\zeta^2} \frac{\bar{\omega}^2(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$
(27)

Введя (26) и (27) в (21), условие на контуре перепишем в виде

$$-\frac{CB}{16i} \left[\omega(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta})\right]^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \frac{p^2}{\zeta^2} \frac{\overline{\omega'}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \left\{ \frac{CB}{16i} \left[\omega(\zeta) - \frac{\overline{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right]^2 + \frac{\overline{\varphi'}(\overline{\zeta})}{\overline{\omega'}(\overline{\zeta})} \right\} = \frac{B}{4i} \omega(\zeta) \overline{\omega}(\overline{\zeta}) \left[1 + \frac{p^2}{\zeta^2} \frac{\overline{\omega'}(\overline{\zeta})}{\omega'(\zeta)} \right].$$

После некоторых преобразований окончательно имеем:

$$-\frac{B}{16i}[\zeta^{2}\omega'(\zeta) + \rho^{2}\overline{\omega'}(\overline{\zeta})] \{C[\omega(\zeta) - \overline{\omega}(\overline{\zeta})]^{2} + 4\omega(\zeta)\overline{\omega}(\overline{\zeta})\} = \overline{\varphi'}(\overline{\zeta})\rho^{2} - \varphi'(\zeta)\zeta^{2}.$$
(28)

Для рассматриваемой двусвязной области условие (28) должно быть удовлетворено на ее внешнем и внутрением контурах.

Подставив в (28) $\zeta = t_0 = \rho_0 e^{i\theta}$, где ρ_0 — радиус внешнего контура кольца, получим условие на внешнем контуре

$$-\frac{B}{16i}[t_{0}^{2}\omega'(t_{0}) + \rho_{0}^{2}\overline{\omega'}(\overline{t_{0}})] (C[\omega(t_{0}) - \overline{\omega}(\overline{t_{0}})]^{2} + + 4\omega(t_{0})\overline{\omega}(\overline{t_{0}})] = \rho_{0}^{2}\overline{\varphi'}(\overline{t_{0}}) - t_{0}^{2}\varphi'(\overline{t_{0}}),$$
(29)

а при $\zeta = t_1 = \rho_1 e^{i\theta}$, где ρ_1 — внутренний раднус кольца, из (28) имеем условие на внутреннем контуре:

$$-\frac{B}{16i}[t_1^2\omega'(t_1) + \rho_1^2\bar{\omega}'(\bar{t_1})](C[\omega(t_1) - \bar{\omega}(\bar{t_1})]^2 + + 4\omega(t_1)\bar{\omega}(\bar{t_1}) = \rho_1^2\bar{\varphi'}(\bar{t_1}) - t_1^2\bar{\varphi'}(\bar{t_1}).$$
(30)

Решим задачу об изгибе консоли круглого сечения с квадратным вырезом.

Воспользуемся функцией, отображающей внешность квадрата с закругленными углами на внешность единичного круга, приведенной в работе Неймана [4]

$$z = \omega(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{1}{9}\zeta^{-3}\right), \qquad (31)$$

где К - постоянный параметр.

Функция эта преобразует окружности $\rho > 1$ на плоскости ζ в замкнутые кривые на плоскости z, которые, начиная с некоторого значения $\rho > 1$, весьма близки к окружности. Например, при $\rho_0 = 2$ (фиг. 1), $|z| = R_{\min} = 1,9861$ K, а $|z| = R_{\max} = 2,0139$ K, разница между R_{\max} и R_{\min} составляет 1,4%, Чем больше будет величина ρ_0 , тем меньше станет разница между R_{\max} и R_{\min} ; это значит, что всякая кривая на

плоскости z, соответствующая р₀≥2, может быть принята за окружность.

Примем квадрат за внутренний контур сечения, а кривую, соответствующую p₀ = 2, за внешний контур.

Таким образом, (31) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую вышеуказанную двусвязную область на кольцо.



Фиг. 1.

Перепишем (31), обозначив коэффициент при втором члене этого выражения буквой А

$$z = \omega(\zeta) = K(\zeta + A\zeta^{-3}). \tag{32}$$

Найдем производные (32) и (24)

$$\omega'(\zeta) = K(1 - 3A\zeta^{-4}), \tag{33}$$

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}\zeta^{k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-k+1)b_{-k+1}\zeta^{-k}.$$
 (34)

Введя (32), (33) и (34) в условие на внешнем контуре (29), где $\zeta = t_{o}$, после некоторых преобразований получим:

$$\begin{split} &-\frac{\mathrm{BK^3}}{16\,\mathrm{i}}\,[t_0^2-3\mathrm{A}t_0^{-2}+\mathrm{p}_0^2-3\mathrm{A}\mathrm{p}_0^2\,\overline{t}_0^{-4}]\,[\mathrm{C}t_0^2+2\mathrm{A}\mathrm{C}t_0^{-2}+\mathrm{A}^2\mathrm{C}t_0^{-6}+\\ &+\mathrm{C}\overline{t}_0^{-2}+2\mathrm{A}\mathrm{C}\overline{t}_0^{-2}+\mathrm{A}^2\mathrm{C}\overline{t}_0^{-6}+(4-2\mathrm{C})t_0\overline{t}_0+(4-2\mathrm{C})\mathrm{A}t_0\overline{t}_0^{-3}+\\ &+(4-2\mathrm{C})\mathrm{A}\overline{t}_0\overline{t}_0^{-3}+(4-2\mathrm{C})\mathrm{A}^2\overline{t}_0^{-3}\overline{t}_0^{-3}=\\ &=\mathrm{P}_0^2\bigg[\sum_{k=e}^{\infty}(k+1)\,\,\overline{a}_{k+1}\overline{t}_0^k+\sum_{k=1}^{\infty}(-k+1)\overline{b}_{-k+1}\overline{t}_0^{-k}-\end{split}$$

$$-t_0^2 \left[\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t_0^k + \sum_{k=1}^{\infty} (-k+1) b_{-k+1} t_0^{-k} \right].$$
(35)

Напомним, что в (35) t₀ = p₀e^{ikθ}, где p₀— радиус внешней окружности кольца.

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях е в правой и левой частях (35) дает, при k = 1,2 ... – 1, – 2 ..., следующую конечную систему уравнений:

$$p_{0}^{2}\bar{a}_{1} + b_{1} = \left[-AC + (4 - C)\rho_{0}^{4} - 2(4 + C)\rho_{0}^{-4}A^{2}\right]\left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$3\bar{a}_{3}\rho_{0}^{4} + 3b_{3}\rho_{0}^{-2} = \left[-2(4 - 3C)A + C\rho_{0}^{4} - 3(4 - C)A^{3}\rho_{0}^{-8}\right]\left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$5\bar{a}_{5}\rho_{0}^{6} + 5b_{5}\rho_{0}^{-4} = \left[(4 - 5C)A - 5A^{2}C\rho_{0}^{-4}\right]\left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$7\bar{a}_{7}\rho_{0}^{8} + 7b_{7}\rho_{0}^{-6} = (-12 + 7C)A^{2}\rho_{0}^{-4}\left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$9\bar{a}_{9}\rho_{0}^{10} + 9b_{9}\rho_{0}^{-8} = (-3A^{3}C\rho_{0}^{-8})\left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right).$$
(36)

Из условия (30) следует, что подобная система уравнений должна удовлетворяться и на внутреннем контуре при $\zeta = t_1 = p_1 e^{i\theta}$, где $p_1 = 1$. Подставив в (36) вместо p_0 величину $p_1 = 1$, получим новую систему уравнений, вытекающую из условия (30), а именно:

$$\bar{a}_{1} + b_{1} = \left[-AC + (4 - C) - 2(4 + C)A^{2}\right] \left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$3\bar{a}_{3} + 3b_{3} = \left[-2(4 - 3C)A + C - 3(4 - C)A^{3}\right] \left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$5\bar{a}_{5} + 5b_{5} = \left[(4 - 5C)A - 5A^{2}C\right] \left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$7\bar{a}_{7} + 7b_{7} = (-12 + 7C)A^{2} \left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$

$$9\bar{a}_{9} + 9b_{9} = (-3A^{3}C) \left(-\frac{BK^{3}}{16i}\right),$$
(37)

Решая совместно (36) и (37), определим коэффициенты функций $\varphi(\zeta)$ и $\overline{\varphi}(\overline{\zeta})$:

$$\begin{split} a_{1} &= -\overline{a}_{1} = \left[(4 - C) \left(\rho_{0}^{2} + 1 \right) + \frac{2(4 + C)A^{2}(1 - \rho_{0}^{-4})}{\rho_{0}^{2} - 1} \right] \frac{BK^{3}}{16i}, \\ b_{1} &= -\overline{b}_{1} = \left[AC + (4 - C)\rho_{0}^{2} + \frac{2(4 + C)A^{2}(\rho_{0}^{2} - \rho_{0}^{-4})}{\rho_{0}^{2} - 1} \right] \frac{BK^{3}}{16i}, \end{split}$$
Л. К. Капанян

$$\begin{split} a_{3} &= -\overline{a}_{3} = \left[\frac{C}{3} - \frac{2(4 - 3C)A(p_{0}^{2} - 1) - 3(4 - C)A^{3}(1 - p_{0}^{-6})}{3(p_{0}^{6} - 1)} \right] \frac{BK^{3}}{16i}, \\ b_{3} &= -\overline{b}_{3} = \frac{2(4 - 3C)A(p_{0}^{6} - p_{0}^{2}) + 3(4 - C)A^{3}(p_{0}^{6} - p_{0}^{-6})}{3(p_{0}^{6} - 1)} \frac{BK^{3}}{16i}, \\ a_{5} &= -\overline{a}_{5} = \frac{(4 - 5C)A(p_{0}^{4} - 1)}{5(p_{0}^{10} - 1)} \frac{BK^{3}}{16i}, \\ b_{5} &= -\overline{b}_{5} = \left[A^{2}C - \frac{(4 - 5C)Ap_{0}^{4}(p_{0}^{6} - 1)}{5(p_{0}^{10} - 1)} \right] \frac{BK^{3}}{16i}, \\ a_{7} &= -\overline{a}_{7} = \frac{(12 - 7C)A^{2}(1 - p_{0}^{2})}{7(p_{0}^{14} - 1)} \frac{BK^{3}}{16i}, \\ b_{7} &= -\overline{b}_{7} = \frac{(12 - 7C)A^{2}(p_{0}^{14} - p_{0}^{2})}{7(p_{0}^{14} - 1)} \frac{BK^{3}}{16i}, \\ a_{9} &= -\overline{a}_{9} = 0, \\ b_{9} &= -\overline{b}_{9} = \frac{A^{3}C}{3} \frac{BK^{3}}{16i}. \end{split}$$

Применим предлагаемое решение задачи к частным случаям. а. Изгибающая сила направлена по диагонали квадрата.

Оси координат направим по диагоналям квадрата так, чтобы линия действия силы совпадала бы с осью ОХ (фиг. 2). В этом случае козеффициент в (32) следует брать со зна-



$$z = \omega(\zeta) = K\left(\zeta + \frac{1}{9}\zeta^{-3}\right)$$
, (39)

где параметр К выражается через средний радиус внешнего контура сечения

$$R_{cp} = \frac{R_{max} + R_{min}}{2}$$
, тогда K = 0,5 R_{cp}.

Найдем производную функции (39)

$$\mathfrak{o}'(\zeta) = \mathbb{K}\left(1 - \frac{1}{3}\zeta^{-4}\right). \tag{40}$$

Примем коэффициент Пуассона равным 0,3, тогда из (7) получим

$$C = \frac{1+2\sigma}{1+\sigma} = 1,230679.$$

Подставив значения А и С в (38), вычислим коэффициенты разложения функции $\varphi(\zeta)$.

40

p

AND &

Следовательно, функция $\phi(\zeta)$ и ее производная $\phi'(\zeta)$ являются многочленами такого вида:

 $\varphi(\zeta) = a_0 = a_1\zeta + a_3\zeta^3 + a_5\zeta^5 + a_7\zeta^7 + b_1\zeta^{-1} + b_3\zeta^{-3} + b_5\zeta^{-5} + b_7\zeta^{-7} + b_9\zeta^{-9},$ $\varphi'(\zeta) = a_1 + 3a_3\zeta^3 + 5a_5\zeta^4 + 7a_7\zeta^6 - b_1\zeta^{-2} - 3b_3\zeta^{-4} - 5b_5\zeta^{-6} - 7b_7\zeta^{-8} - 9b_9\zeta^{-10}.$ Перепишем выражение $\varphi'(\zeta)$, подставив туда найденные значения коэффициентов a_k и b_k .

$$\varphi'(\zeta) = \frac{BK^3}{16i} (13,886512 \pm 1,227693\zeta^2 - 3,592245 \cdot 2^{-10}\zeta^4 - 0,125356 \cdot 2^{-14}\zeta^6 - 11,383192\zeta^{-2} - 0,076695\zeta^{-4} - 0,311780\zeta^{-6} - 0,041846\zeta^{-8} - 0,005067\zeta^{-10}).$$
(41)

Формула (23) может быть преобразована к виду, удобному для вычисления напряжений, если учесть, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{CB}{16i}(z - \overline{z})^2 + \varphi'(z) = -\frac{CB}{4}iy^2 + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},$$
$$z\overline{z} = x^2 + y^2,$$

тогда из (23) получим

$$X_z - iY_z = \frac{CB}{2} y^2 + 2 \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} i - \frac{B}{2} (x^2 + y^2).$$
 (42)

Вычислим максимальное напряжение на внутреннем контуре, т. е. в точке, где p = 1, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (x = 0, y = 1,111111K).

В этой точке из (40) и (41) имеем: $\varphi'(\zeta) = 24,236809 \frac{\text{BK}^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 0,6666666$ К. Подставив найденные значения $\varphi'(\zeta)$ и $\omega'(\zeta)$ в (42), получим:

$$X_z = 1,1734 \frac{P}{I} R_{cp}^2, Y_z = 0.$$

Тем же способом найдем максимальное напряжение на внешнем контуре, т. е. в точке p = 2, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (x = 0, y = 2,013889K).

В этой точке $\phi'(\zeta) = 11,765815 \frac{\text{ВК}^3}{16i}$, а $\omega'(\zeta) = 0,979167\text{К}$. По формуде (42) получим

$$X_z = 0,4919 \frac{P}{I} R_{cp}^2$$
 H $Y_z = 0.$

При проверке напряжений в точке $\rho = 2$, $\theta = \pi$ (x = 2,013889K, y = 0) по формуле (42) находим $X_z = 0$, с точностью до шестого знака, и $Y_z = 0$.

б. Изгибающая сила параллельна стороне квадрата.

Ось ОХ направим вдоль линии действия силы (фиг. 3). В этом случае A = - 1/0 и (32) примет вид:





Подставив величины А и С в (38), вычислим коэффициенты разложения функции 9(С).

Вводя полученные значения a_k и b_k в выражение производной функции φ(ζ), получим

$$\begin{split} \varphi'(\zeta) &= \frac{\mathrm{BK}^3}{16\mathrm{i}} \left(13, \ 886512 + 1,233849\zeta^2 + 3,592245 \cdot 2^{-10}\zeta^4 - 0,125356 \cdot 2^{-14}\zeta^6 - \right) \end{split}$$

$$-11,109688\xi^{-2} + 0,076695\xi^{-4} + 0,159830\xi^{-6} -$$

$$-0,041846(-8 + 0,005067(-10)). \tag{44}$$

Найдем производную функции (43)

$$\omega'(\zeta) = \mathbb{K}\left(1 + \frac{1}{3}\zeta^{-4}\right) \cdot \tag{45}$$

Определим максимальные напряжения на внешнем и внутреннем контурах по формуле (42).

На внутреннем контуре в точке p = 1, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (x = 0, y = 0.8888889K) имеем из (44) и (45): $\varphi'(\zeta) = 23,635811 \frac{\text{ВK}^3}{16i}$. $\omega'(\zeta) = 1,333333K$. Вычисление напряжений по (42) даст:

$$X_z = 0.5768 - \frac{P}{I} R_{cp}^2, \ Y_z = 0.$$

На внешнем контуре в точке $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ (x = 0, y = 1.986111К) имеем из (44) и (45) $\varphi'(\zeta) = 11,787279 \frac{BK^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 1,020833$ К. Напряжения в этой точке, вычисленные по (42), будут

$$X_z = 0,4746 \frac{P}{I} R_{cp}^2, \ Y_x = 0.$$

Проверим напряжения в точке $\rho = 2$, $\theta = \pi$ (x = 1,986111K, y=0).

Об изгибе полых консольных стержней

где по (44) и (45) имеем: $\varphi'(\zeta) = 16,107259 \frac{\text{BK}^3}{16i}$ и $\omega'(\zeta) = 1,020833\text{K}.$ По формуде (42) найдем, что в этой точке $X_z = 0$ и $Y_z = 0.$

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса Поступило 22 X1 1955 г

L. 4. 4mmufijmfi

ՈՐՈՇ ՍՆԱՄԵՋ ԿՈՆՍՈԼԱՅԻՆ ՁՈՂԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

N N O O O O O V

Մնամեջ կոնսոլային պրիզմատիկ Հողի ծոման իննդիրը, ծայրում կիրառված ուժի աղդեցության դեպքում, կարելի է լուծել, եթե հայտնի է Հողի ընդլայնական կտրվածքի երկկապ տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերման ֆունկցիան օդակի վրա։

Աշխատության մեջ բերվում է գրոից շրջանագծով, իսկ ներսից թաոտկուով սանմանափակված երկկապ աիրույին օղակի վրա մոտավոր արտապատկերող ֆունկցիան, որի միջոցով լուծված է թառակուսի անցթունեցող կլոր կոնսոլային պրիդմատիկ ձողի ծոման խնդիրը։

ЛИТЕРАТУРА

 Амензаде Ю. А. К вопросу изгиба полых призматич. стержней (Тр. Аз. НИИ вефти, вып. 1, Баку, 1954).

2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, М.-Л., 1947.

3. Мускелишенли Н. И. Некоторые задачи теории упругости, М .- Л., 1950.

 Нейман М. И. Напряжения в балке с криволинейвым отверстием, Москва 1937.

2ЦЗЧЦЧЦЬ ПОФ ЧРЅПРФЗПРББРР ЦЧЦЧЬГРЦЗР ЅЪЦЬЧЦЧРР ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Зра-имр., рб. L ивров. арилир. IX, No 3, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн- науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Аракелян

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основании

 Интегродифференциальное уравнение интенсивности реакции основания. Рассмотрим бесконечно длинную призматическую балку, опирающуюся по всей своей длине на сплошное, податливое водонасыщенное грунтовое основание и нагруженную одной сосредоточенной силой.

Для определения интенсивности реакции основания q(x, t), где х-абцисса сечения балки, t — время, рассмотрим отдельно мгновенное и продолжительное воздействие нагрузки на2грунтовое основание.

При мгновенном действии нагрузки, т. е. при t = 0, реакция и осадка основания связаны линейной зависимостью

$$q(\mathbf{x}, 0) = bk_1 \delta(\mathbf{x}, 0), \tag{1.1}$$

где

b — ширина балки,

k₁ — так называемый мгновенный коэффициент податливости основания. При этом

$$\delta(\mathbf{x}, 0) = -\frac{P}{8E1\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}, \qquad (1.2)$$

$$\varphi(\mathbf{x},0) = \frac{\mathbf{P}}{4\mathrm{EIS}^2} e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} , \qquad (1.3)$$

$$M(x, 0) = \frac{P}{4\beta} (\cos\beta x - \sin\beta x) e^{-\beta x} , \qquad (1.4)$$

$$Q(x, 0) = -\frac{P}{2} e^{-\beta x} \cos \beta x, \qquad (1.5)$$

$$q(\mathbf{x},0) = -\frac{P}{2}\beta(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}, \qquad (1.6)$$

тде

$$\beta = \sqrt[p]{\frac{\overline{bk_1}}{4EI}}, \qquad (1.7)$$

EI - жесткость балки.

Здесь 3 имеет размерность <u>длина</u>. Приведенные элементы изгиба балки относятся к левой половине ее.

При продолжительном действии нагрузки, реакция основания q(x, t) определяется из условий равенства прогиба балки осадке основания č (x, t), при наличии прямолинейной фильтрационной консолидации групта основания.

Если площадь подошвы балки достаточно велика (10 м² и больше), а мощность слоя сжимаемого групта в 2 или более раз меньше ширины балки, то без больших погрешностей допустимо применение соотношения осадок одноразмерного уплотиения к решению поставленной, вообще говоря, трехмерной задачи [1].

В большом числе случаев податливых груптов применим метод расчета осадок без учета ползучести групта. Необходимость послелнего обусловлена отношением проницаемости групта к скорости нарастания деформации ползучести; однако для водонасыщенных податливых груптов указанное отношение значительно.

Приведенные условия имеют место для гидротехнических и других крупных инженерных сооружений, особенно, когда они возведени на аллювиальных отложениях речных долин или на толще некоторых ледниковых образований.

Для аллювиальных пород большой мощности характерно чередование пластов практически несжимаемых, проницаемых обломочных пород и податливых глинистых грунтов. Часто в толще обломочного материала ледниковых отложений залегают пинзы податливых глинистых пород.

Таким образом, в указанных условиях податливый групт воспринимает давление от сооружений через площадку достаточных разме ров. В силу чего, с удовлетворительной точностью для практических целей, возможно допущение наличия прямолипейной фильтрационнов консолидации групта основания.

Осадки грунта определяются на основе соотношения Флорина-Арутюняна [2] и, в данном случае, выражаются, как известно [3], таким образом

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{8k_0}{\Delta Hb} \int_0^t q(\mathbf{x}, \xi) \sum_{V=1,3,..}^{\infty} e^{-V^{i\beta}(t-\xi)} d\xi + \delta(\mathbf{x}, 0),$$
(1.8)

где

k₀ — средне-приведенный коэффициент фильтрации грунта основания, соответствующий диапазону изменения сжимающих напряжений грунта.

 $\lambda = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 c,$

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основании

Н — мощность пласта податливого грунта.

с - коэффициент консолидации грунта.

Для определения интенсивности реакции основания воспользуемся дифференциальной зависимостью между перемещениями оси балки и интенсивностью сплошной нагрузки ее

$$q(\mathbf{x}, t) = -EI \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^4} \left[\delta(\mathbf{x}, t) \right], \qquad (1.9)$$

Внося (1.9) н (1.2) в (1.8), получаем



Фит. 1.

Разрезав балку в точке приложения силы Р (фиг. 1), рассмотрим правую часть балки, для которой ∞ > x > 0. Действие левой (отброшенной) части балки заменим попоречной силой Q(0, t) и изгибающим иоментом M(0, t) (фиг. 2).

При любом значении времени t, граничными условиями для рассматриваемой части балки будут

$$\delta(\infty, t) = q(\infty, t) = 0, \qquad (1.11)$$

$$\varphi(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\hat{s}(0, t) \right] = 0, \qquad (1.12)$$

$$Q(0,t) = \operatorname{EI} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\delta(0,t) \right] = -\frac{P}{2^{-1}}, \qquad (1.13)$$

Таким образом, определение реакции основания q(x, t) сводится к решению интегродифференциального уравнения (1.10) с граничными условиями (1.11), (1.12), (1.13) и с начальным условием (1.6).

 Общий интеграл уравнения (1.10). Рассматривая часть балки правее сечения х (фиг. 2).







 $Q(x, t) = \int_{x}^{\infty} q(x, t) dx, \qquad (2, 1)$

илн

получим:

$$Q(x, t) = \int_{0}^{\infty} q(x, t) dx - \int_{0}^{x} q(x, t) dx,$$

но первый интеграл представляет известное значение поперечной силы справа' от сечения х = 0,

значит

$$Q(x, t) = -\frac{P}{2} - \int_{0}^{x} q(x, t) dx$$
 (2.2)

Исходя из дифференциальной зависимости между поперечной силой и перемещением оси балки

$$Q(x, t) = EI \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[\delta(x, t) \right],$$

на основе (1.8) и (2.2) находим

$$Q(\mathbf{x},t) = \frac{8EIk_0}{\Delta Hb} \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3} q(\mathbf{x},\xi) \sum_{\mathbf{y}=1,3,..}^{\infty} e^{-\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}(t-\xi)} d\xi - \frac{P}{2} e^{-\beta \mathbf{x}} \cos\beta \mathbf{x}.$$
 (2.3)

Внеся (2.3) в (2.2), получим

$$\int_{0}^{x} q(x,t)dx = -\frac{8EIk_{\theta}}{\Delta Hb} \int_{0}^{t} \frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}} q(x,\xi) \sum_{v=1,3...}^{\infty} e^{-v^{s_{\lambda}(t-\xi)}} d\xi - \frac{P}{2} \left(1 - e^{-\beta x} \cos\beta x\right).$$

$$(2.4)$$

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основании

Соотношение (2.4) можно получить также интегрированием из (1.10).

Из равенства (1.10) следует, что искомая функция q(x, t) состоит из двух слагаемых, первое из которых зависит от двух переменных x и t, а второе слагаемое представляет, зависящее только от x, известное упруго-мгновенное решение.

В силу изложенного, решение (1.10) будем искать в виде

$$q(x,t) = X(x)T(t) - \frac{p}{2}\beta(\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x}.$$
(2.5)

При t = 0, из (2.5) и (1.6) непосредственно следует, что

q(x, 0) = X(x) T(0) + q(x, 0),

илн

$$T(0) = 0.$$
 (2.6)

Внося (2.5) в (2.4), будем иметь

$$T(t) \int_{0}^{\frac{x}{2}} X(x) dx - \frac{P}{2} \beta \int_{0}^{x} (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x} =$$

$$= -\frac{8EIk_{0}X^{111}(x)}{\Delta Hb} \int_{0}^{t} T(\xi) \sum_{v=1,3,..}^{\infty} e^{-v^{v\lambda}(t-\xi)} d\xi +$$

$$+ \frac{16 PEIk_{0}\beta^{4}}{\Delta Hb} \int_{0}^{t} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} e^{-v^{v\lambda}(1-\xi)} d\xi - \frac{P}{2} \left(1 - e^{-\beta x} \cos\beta x\right)$$

Имея в виду

$$\int_{0}^{x} (\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x} dx = \left| \frac{(\sin\beta x - \cos\beta x)e^{-\beta x}}{2\beta} - \frac{(\cos\beta x + \sin\beta x)e^{-\beta x}}{2\beta} \right|_{0}^{x} = \frac{1}{\beta} \left(1 - e^{-\beta x}\cos\beta x \right), \quad (2.7)$$

$$\int_{v=1,3...}^{\infty} e^{-v^{s_{\lambda}(1-\xi)}} d\xi = \frac{H^{2}}{8c} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3...}^{\infty} e^{-v^{s_{\lambda}t}} \right),$$
(2.8)

получны

$$T(t)\int_{0}^{x} X(x)dx = -\frac{8Elk_{0}X^{III}(x)}{\Delta Hb}\int_{0}^{t} T(\xi)\sum_{v=1,3,...}^{\infty} e^{-v^{i\lambda}(t-\xi)} d\xi + \frac{2PElk_{0}H\beta^{4}}{\Delta cb} 1 - \frac{8}{\pi^{2}}\sum_{v=1,3,...}^{\infty} e^{-v^{i\lambda}t} e^{-\beta x}\cos\beta x.$$
(2.9)

Иавестия IX, № 3-4

Т. Т. Аракелян

Внеся (2.5) в (1.10) и имея в виду (2.8), находим

$$X(\mathbf{x})\mathbf{T}(t) = -\frac{8 \operatorname{Elk}_{0} X^{1V}(\mathbf{x})}{\Delta \operatorname{Hb}} \int_{0}^{t} \mathbf{T}(\xi) \sum_{\mathbf{v}=1,3...}^{\infty} e^{-\mathbf{v}^{2}\lambda(t-\xi)} d\xi - \frac{2 \operatorname{PEIk}_{0} \operatorname{H\beta}^{5}}{\Delta \operatorname{cb}} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\mathbf{v}=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-\mathbf{v}^{2}\lambda t}}{\mathbf{v}^{2}}\right) \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right) e^{-\beta \mathbf{x}}.$$
(2.10)

Умножив соотношение (2.9) на X^{IV}(x) и (2.10) на X^{II}(x) и вычитывая полученные результаты, имеем:

$$\begin{split} X(t) \cdot X^{IV}(x) & \int_{0}^{x} X(x) dx - T(t) \cdot X(x) \cdot X^{IV}(x) = \frac{2 \operatorname{PElk}_{0} H \beta^{4}}{\Delta c b} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{2} M}}{v^{2}}\right) \left[X^{IV}(x) \cos\beta x + \beta (\sin\beta x + \cos\beta x) X^{III}(x)\right] e^{-\beta x}. \end{split}$$

Разделив переменные, находим

$$\frac{T(t)}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}} =$$

$$=\frac{2\operatorname{PEIk}_{0}\mathrm{H}\beta^{4}\left[\mathrm{X}^{\mathrm{IV}}(\mathbf{x})\cos\beta\mathbf{x}+\beta(\sin\beta\mathbf{x}+\cos\beta\mathbf{x})\mathrm{X}^{\mathrm{III}}(\mathbf{x})\right]\mathrm{e}^{-\beta\mathbf{x}}}{\Delta\operatorname{cb}\left[\mathrm{X}^{\mathrm{IV}}(\mathbf{x})\int_{0}^{\mathbf{x}}\mathrm{X}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}-\mathrm{X}(\mathbf{x})\mathrm{X}^{\mathrm{III}}(\mathbf{x})\right]}=\alpha,\quad(2.11)$$

где а -некоторый параметр.

Откуда

$$T(f) = \alpha \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v^{v_{i,t}}}}{v^2} \right).$$
(2.12)

$$2P \frac{\text{EIk}_0 \text{H}}{\Delta cb} \beta^4 \left[X^{\text{IV}}(x) \cos\beta x + \beta' \sin\beta x + \cos\beta x) X^{\text{III}}(x) \right] e^{-\beta x} = = \alpha \left[X^{\text{IV}}(x) \int_0^x X(x) dx - X(x) \cdot X^{\text{III}}(x) \right].$$
(2.13)

Из (2.12) непосредственно следует (2.6).

Имеется возможность выразить интегральный член уравнения (2.13) через производные неизвестной функции X(x) и упруго-мгновенное решение.

Для этого внося (2.12) в (2.9), получаем

$$\alpha \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^4 \lambda t}}{v^2}\right) \int_0^{s} X(x) dx = -\alpha \frac{8 \operatorname{Elk}_0 X^{\operatorname{III}}(x)}{\Delta \operatorname{Hb}} \int_0^{t} \left(1 - \frac{8 \operatorname{Elk}_0 X^{\operatorname{III}}(x)}{\delta \operatorname{Hb}}\right)^{t} dx$$

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основания

$$= \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda \xi}}{v^2} \cdot \sum_{v=1,3...}^{\infty} e^{-v^2 \lambda (t-\xi)} d\xi + 2P \frac{Elk_0 H}{\Delta cb} \beta^4 \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2}\right) e^{-\beta x} \cos\beta x.$$
(2.14)

Исходя из (2.8), имеем

$$^{\alpha}\left(1-\frac{8}{\pi^{2}}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{z}\lambda t}}{v^{2}}\right)\int_{0}^{\infty} X(x)dx = -\alpha\frac{8Elk_{0}H}{\Delta cb}X^{III}(x)\left(1-\frac{8}{\pi^{2}}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{z}\lambda t}}{v^{2}}\right) +$$

$$+\frac{64\mathrm{Elk}_{0}\alpha X^{1V}(x)}{\pi^{4}\Delta cb} \int_{0}^{\xi} \sum_{\nu=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-\nu^{3}\lambda\xi}}{\nu^{2}} \cdot \sum_{\nu=1,3...}^{\infty} e^{-\nu^{3}\lambda(t-\xi)} d\xi + +2\mathrm{P}\frac{\mathrm{Elk}_{0}\mathrm{H}}{\Delta cb} \beta^{4} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\nu=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-\nu^{3}\lambda t}}{\nu^{2}}\right) e^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x , \qquad (2.15)$$

Входящий в соотношение (2.15) подинтегральный двойной ряд получается умножением рядов

$$\sum_{u=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{u^{\nu_{\lambda}\xi}}}{u^2} \ \ {\rm H} \ \ \sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v^{\nu_{\lambda}}(t-\xi)}}{v^2} \ ,$$

которые абсолютно сходятся в интервале $t > \varepsilon > 0$; для этих же значений абсолютно сходится и двойной ряд. Необходимым условием сходимости двойного ряда является стремление к нулю общего члена,

$$\lim_{\substack{u \to \infty \\ v \to \infty}} a_{u,v}(\xi, t-\xi) = 0,$$

что, очевидно, имеет место. Так как подинтегральные функции $a_{u,v}(\xi, t-\xi)$, (u, v = 1, 3, 5...) непрерывны в промежутке T > $\xi > 0$ и составленный из них двойной ряд сходится в этом промежутке равномерно, допустимо почленное интегрирование такого функционального ряда: т. е. имеем

$$\int_{0}^{1} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{2\beta_{\xi}}}}{v^{2}} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} e^{-v^{2\beta_{\xi}}(t-\xi)} d\xi = \int_{0}^{1} \sum_{u,v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-[u^{2\xi}+v^{2}(t-\xi)]\lambda}}{v^{2}} d\xi =$$

$$= \frac{H^{2}}{c\pi^{2}} \left[\sum_{u,v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{2\beta_{\xi}}}}{u^{2}(u^{2}-v^{2})} - \sum_{u,v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-u^{2\beta_{\xi}}}}{u^{2}(u^{2}-v^{2})} \right].$$
(2.16)

Заметив, что сумма сходящегося с положительными членами, двойного ряда не зависит от способа суммирования, получим

Т. Т. Аракелян

$$\int_{0}^{1} \sum_{\nu=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-\nu^{2}\lambda\xi}}{\nu^{2}} \cdot \sum_{\nu=1,3,...}^{\infty} e^{-\nu^{2}\lambda(t-\xi)} d\xi = 0, \qquad (2,17)$$

Введя обозначение

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\Delta cb}{4 \operatorname{Elk}_0 \mathrm{H}}}, \qquad (2.18)$$

и имея в виду (2.17), из (2.15) находим

$$\int X(x)dx = -\frac{X^{III}(x)}{4\gamma^4} + \frac{P}{2}\frac{\beta^4}{\alpha\gamma^4}e^{-\beta x}\cos\beta x.$$
(2.19)

Подставляя (2.19) в (2.13) и преобразуя, получим

$$X^{tV}(x) + 4\gamma^{4}X(x) + 2P - \frac{\beta^{2}}{\alpha} (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x} = 0.$$
 (2.20)

Таким образом, определение функции X(x) сводится к решению обыкновенного линейного неоднородного уравнения четвертого порядка (2.20).

Отметим, что уравнение (2.20) получается также, если в уравнение (1.10) вносить (2.5) и (2.12) и использовать результат (2.17).

Решение соответствующего однородного уравнения

$$X^{IV}(x) + 4\gamma^4 X(x) = 0,$$
 (2.21)

будет:

$$\overline{X}(x) = (c_1 \sin\gamma x + c_2 \cos\gamma x)e^{\gamma x} + (c_3 \sin\gamma x + c_4 \cos\gamma x)e^{-\gamma x}.$$
(2.22)

Корни характеристического уравнения однородного уравнения (2.21) отличаются от β (1 ± i), поэтому частное решение полного уравнения (2.20) ищется в виде

$$\overline{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A} \sin\beta \mathbf{x} + \mathbf{B} \cos^2 \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\beta \mathbf{x}}, \qquad (2.23)$$

которое не является уже решением уравнения (2.21). Здесь А и Внеопределенные постоянные, для определения которых внеся (2.23) в (2.20).

 $-4\beta^{4}(\operatorname{Asin}\beta x + \operatorname{Bcos}\beta x)e^{-\beta x} + 4\gamma^{4}(\operatorname{Asin}\beta x + \operatorname{Bcos}\beta x)e^{-\beta x} + \frac{2P}{\alpha}(\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x} = 0$

и сократив на е-эх, получим

4A
$$(\gamma^4 - \beta^4)\sin\beta x + 4B (\gamma^4 - \beta^4)\cos\beta x + \frac{2P}{\alpha}\beta^5\sin\beta x + \frac{2P}{\alpha}\beta^5\cos\beta x = 0.$$

Приравнив коэффициенты у членов, содержащих sin3x и соs3x, найдем

$$A = B = \frac{P\beta^3}{2\alpha \left(\gamma^4 - \beta^4\right)}$$
(2.24)

Исходя из (2.22), (2.23) и (2.24), общее решение полного уравнения (2.20) будет

$$X(x) = \overline{X}(x) + \overline{X}(x)$$

ялн

$$X(x) = (c_1 \sin\gamma x + c_2 \cos\gamma x)e^{\gamma x} + (c_3 \sin\gamma x + c_4 \cos\gamma x)e^{-\gamma x} + + \frac{P}{2} \frac{\beta^5}{\alpha(\gamma^4 - \beta^4)} (\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x}.$$
(2.25)

Внеся (2.25) и (2.12) в (2.5), получим общее решение интегродифференциального уравнения (1.10) в виде

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \left[(c_1 \sin\gamma \mathbf{x} + c_3 \cos\gamma \mathbf{x}) e^{\gamma \mathbf{x}} + (c_3 \sin\gamma \mathbf{x} + c_4 \cos\gamma \mathbf{x}) e^{-\gamma \mathbf{x}} + \frac{P\beta^5}{2\alpha(\gamma^4 - \beta^4)} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3, ...}^{\infty} \frac{e^{-v^{\tau_{v}t}}}{v^2} \right) \alpha - \frac{P}{2} \beta (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}}.$$

$$(2.26)$$

Исключение составляет частный случай, когда

$$\epsilon = \beta, \qquad (2.27)$$

тогда β(1 ± i) являются корнями характеристического уравнения, соответствующего однородного уравнения (2.21), кратностью 1. При этом частное решение полного уравнения (2.20) надо искать в виде

$$\overline{X}_{1}(x) = x(A_{1}\sin\beta x + B_{1}\cos\beta x)e^{-\beta x} \cdot$$
(2.28)

тогда

$$X_{1}^{IV}(x) = 8\beta^{3}(A_{1} - B_{1})e^{-\beta x}\sin\beta x + 8\beta^{3}(A_{1} + B_{1})e^{-\beta x}\cos\beta x - -4A_{1}\beta^{4}xe^{-\beta x}\sin\beta x - 4B_{1}\beta^{4}xe^{-\beta x}\cos\beta x.$$
(2.29)

Подставляя (2.28) и (2.29) в (2.20) и приравнивая коэффициенты при выражениях хsin3х и хсоя3х, получим

$$\begin{array}{c} A_1 = \frac{P}{4\alpha} \beta^2 \\ B_1 = 0 \end{array} \right|.$$

$$(2.30)$$

Теперь общий интеграл уравнения (2.20), имея в виду (2.28), (2.30), (2.22) и (2.27), будет

$$X_{1}(\mathbf{x}) = \frac{P}{4\alpha}\beta^{2}\mathbf{x}e^{-\beta x}\mathrm{sin}\beta\mathbf{x} + (c_{i}^{'}\mathrm{sin}\beta\mathbf{x} + c_{i}^{'}\mathrm{cos}\beta\mathbf{x})e^{\beta x} + (c_{i}^{'}\mathrm{sin}\beta\mathbf{x} + c_{i}^{'}\mathrm{cos}\beta\mathbf{x})e^{-\beta x}.$$

$$(2.31)$$

Подставив (2.31) и (2.12) в (2.5) и учитывая (2.27), получим общее решение (1.10) в виде

$$q_{t}(x, t) = \left[\frac{P}{2\alpha}\beta^{2}xe^{-\beta x}\sin\beta x + (c_{s}'\sin\beta x + c_{s}'\cos\beta x)e^{\beta x} + (c_{s}'\sin\beta x + c_{s}'\cos\beta x)e^{-\beta x}\right]\left(1 - \frac{8}{\pi^{2}}\sum_{v=1,3...}^{\infty}\frac{e^{-v^{v}\lambda t}}{v^{2}}\right)\alpha - \frac{P}{2}\beta(\sin\beta x + \cos\beta x)e^{-\beta x}.$$
 (2.32)

Т. Т. Аракелян

Условне (2.27) на основе (1.7) и (2.18) дает

$$k_1 = \frac{\Delta c}{k_0 H} \cdot$$
(2.33)

Но, как известно, коэффициент консолидации грунта с равняется

$$c = \frac{k_0(1 + \varepsilon_0)}{\Delta a}, \qquad (2.34)$$

гле

средний коэффициент пористости грунта,

а — коэффициент уплотнения или сжимаемости грунта.

Внеся (2.34) в (2.33), получим

$$k_1 = \frac{1 + \varepsilon_0}{aH}, \qquad (2.35)$$

обозначив среднюю приведенную толщину слоя грунта через

 $H_0 = \frac{H}{1 + \epsilon_0},$

получим

$$k_1 = \frac{1}{aH_0}$$
 (2.36)

Так как коэффициент податливости грунта — k1 равен силе, действующей на единицу площади грунта и вызывающей осадку, равную единице длины и коэффициент уплотнения грунта - а аналогичен обратной величине модуля нормальной упругости, то соотношение (2.36) будет иметь место при больших значениях давления или при определенных, но небольших На.

Соотношение (2.36) связывает две харахтеристики групта, согласно чему коэффициент податливости — к, равняется обратной величине коэффициента уплотнения грунта - а при единичной приведенной толщине сжимаемого слоя.

В выражениях β и т в (1.7) и (2.18) величины k, и авходят в $\sqrt[4]{k_1}$ и $\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$, в силу этого даже значительные колебания их отра-

жаются сравнительно слабо на результатах расчета.

Вследствие сказанного, по средним значениям этих коэффициентов возможно провести общую качественную оценку прочности грунта.

Коэффициент податливости (постели) - k, зависит от рода грунта и может быть принят [4]:

Для слабых грунтов от 1 до 3 кг/см3

" средних " от 3 до 7 " " плотных " от 7 до 15 ".

Средние значения коэффициента уплотнения - а для указанных типов грунтов можно принять [1]:

для грунтов чрезмерной сжимаемости — 0,1 $\frac{cM^2}{\kappa z}$; • средней • 0,01 ; • малой • 0,001 ;; Исходя из (2,36)

 $H_0 = \frac{1}{a \cdot k_s},$

 $H_1 = 10 \div 3.3 \text{ cm}, H_2 = 33.3 \div 14.3 \text{ cm}, H_3 = 143 \div 66.7 \text{ cm}.$

Если изменение по х величины q₁(x, t) уподобить затухающему колебательному движению, то (2.27) означает совпадение периодов свободных колебаний балки $\frac{2\pi}{\gamma}$ и $\frac{2\pi}{\beta}$ при продолжительном и мгновенном воздействиях силы Р.

 Определение произвольных постоянных. Для рассматриваемой части балки (0 ≤ x ≤ ∞) произвольные постоянные определяются из вышеприведенных граничных и начальных условий (1.11), (1.12), (1.13), (1.6).

Внеся (1.11) в (2.26), получаем

$$c_1 = c_2 = 0,$$
 (3.1)

тогда

$$q(\mathbf{x}, t) = \alpha \left[(c_3 \sin\gamma \mathbf{x} + c_4 \cos\gamma \mathbf{x}) e^{-\gamma \mathbf{x}} + \frac{P\beta^5}{2\alpha(\gamma^4 - \beta^4)} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^2\lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2}\beta(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} .$$
(3.2)

Внеся (3.2) в (1.8), имея в виду (2.7), (2.8), (2.16), (1.2) и произведя интегрирование, получаем

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\mathbf{k}_0 \mathbf{H}\alpha}{\Delta \mathbf{c} \mathbf{b}} \left\{ (\mathbf{c}_3 \sin\gamma \mathbf{x} + \mathbf{c}_4 \cos\gamma \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\gamma \mathbf{x}} + \left[\frac{\mathbf{P}\beta^5}{2 \alpha (\gamma^4 - \beta^4)} + \frac{\mathbf{P}\beta}{2 \alpha} \right] (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\beta \mathbf{x}} \right\} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\mathbf{v}=1,3...}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{v}^2 \mathbf{v} \mathbf{t}}}{\mathbf{v}^2} \right) - \frac{\mathbf{P}}{8 \operatorname{El}\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\beta \mathbf{x}} .$$
(3.3)

Исходя из (3.3), имеем

$$\begin{split} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{k_0 H \alpha}{\Delta c b} \bigg\{ \gamma [(\mathbf{c}_3 - \mathbf{c}_4) \cos\gamma \mathbf{x} - (\mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_4) \sin\gamma \mathbf{x}] e^{-\gamma \mathbf{x}} - \\ &- \frac{P}{\alpha} \beta^2 \left(\frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} - 1 \right) e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} \bigg\} \bigg(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\mathbf{v}=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-\mathbf{v}^4 \mathbf{x} t}}{\mathbf{v}^2} \bigg) + \\ &+ \frac{P}{4 \text{ El}\beta^2} e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x}, \end{split}$$
(3.4)

тогда из (1,12)

$$\varphi(0,t) = \frac{k_0 H \alpha \gamma}{\Delta c b} \left(c_a - c_4 \right) \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) = 0,$$

отсюда

$$c_3 = c_4,$$
 (3.5)

тогда (3.3) принимает вид

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{\mathbf{k}_{0} \mathbf{H} \alpha}{\Delta \mathbf{c} \mathbf{b}} \left\{ \mathbf{c}_{3} (\sin\gamma \mathbf{x} + \cos\gamma \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\gamma \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{P}}{2} \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta^{4}}{\gamma^{4} - \beta^{4}} \right) (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\beta \mathbf{x}} \right\} \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\mathbf{v}=1,3,...}^{\infty} \frac{\mathbf{e}^{-\mathbf{v}^{2}\lambda\mathbf{t}}}{\mathbf{v}^{2}} \right) - \frac{\mathbf{P}}{8 \operatorname{El}\beta^{3}} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) \mathbf{e}^{-\beta \mathbf{x}}.$$
(3.6)

Исходя из (3.6) для поперечной силы, получим

$$Q(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathrm{Elk_0}\mathrm{H}\alpha}{\Delta cb} \left[4\gamma^2 c_3 \mathrm{e}^{-\gamma x} \mathrm{cos}\gamma x - 2\mathrm{P}\frac{\beta^4}{\alpha} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{\mathrm{P}}{2} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x.$$
(3.7)

На основе (3.7), учитывая (1.13), находим:

$$Q(0, t) = \frac{EIk_0H\alpha}{\Delta cb} \left[4\gamma^3 c_3 - \frac{2P}{\alpha} \beta^4 \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \delta t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} = -\frac{P}{2},$$

откуда

$$4 \gamma^{3} c_{3} - \frac{2P}{\alpha} \beta^{4} \left(1 - \frac{\beta^{4}}{\gamma^{4} - \beta^{4}} \right) = 0,$$

$$c_{3} = \frac{P}{2\alpha} \frac{\beta^{4}}{\gamma^{4}} \left(1 - \frac{\beta^{4}}{\gamma^{4} - \beta^{4}} \right).$$
(3.8)

Внеся (3.1) и (3.8) в (3.2), находим

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{P}{2} \quad \beta^4 \left[\frac{1}{\gamma^3} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) (\sin\gamma x + \cos\gamma x) e^{-\gamma x} + \frac{\beta}{\gamma^4 - \beta^4} (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1, 3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 \lambda t}}{v^2} \right) - \frac{P}{2} \quad \beta \ (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x}.$$
(3.9)

Таким образом, из значения искомой функции q(x, t) исключается произвольный параметр α и соотношение (3.9) дает окончательное выражение решения уравнений (1.10). Это означает, что α = 1.

Внеся (3.8) в (3.6), получим

Изгиб бесконечной балки на сплошном грунтовом основании

$$\begin{split} \delta(\mathbf{x}, t) &= \frac{Pk_0H}{2\Delta cb} \ \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left[\frac{\beta^4}{\gamma^2} \left(\sin\gamma \mathbf{x} + \cos\gamma \mathbf{x}\right)e^{-\gamma \mathbf{x}} - \right. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^3/4}}{v^2}\right) - \frac{P}{8\,\mathrm{El}\beta^3} \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ & \mathrm{Hcxodgg} \ \mathrm{H3} \ (2.18), \ \mathrm{fydem} \ \mathrm{Hmetb} \\ \delta(\mathbf{x}, t) &= \frac{P}{8\,\mathrm{El}\gamma^4} \ \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left[\frac{\beta^3}{\gamma^4} \left(\sin\gamma \mathbf{x} + \cos\gamma \mathbf{x}\right)e^{-\gamma \mathbf{x}} - \right. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) - \frac{P}{8\,\mathrm{El}\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) - \frac{P}{8\,\mathrm{El}\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) - \frac{P}{8\,\mathrm{El}\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) + \frac{P}{8\,\mathrm{El}\beta^3} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ &- \left(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right) \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) + \frac{P}{4\,\mathrm{El}\gamma^4} \sin\beta \mathbf{x}, \\ &= \left(\cos\beta \mathbf{x} - \frac{1}{\pi^4}\sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) + \frac{P}{4\,\mathrm{El}} \beta^4 e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x}, \\ &- \left(\cos\beta \mathbf{x} - \sin\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}}\right] \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right) + \frac{P}{4\beta} (\cos\beta \mathbf{x} - \sin\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \\ &= \left(\cos\beta \mathbf{x} - \sin\beta \mathbf{x}\right)e^{-\beta \mathbf{x}} \left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v^{9/4}}}{v^2}\right] + \frac{P}{4\beta} (\cos\beta \mathbf{x} - \sin\beta \mathbf{x})e^{-\beta \mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Внеся (3.8) в (3.7) н имея в виду (2.18), находим

$$Q(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{P}}{2} \left[\frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) \left(e^{-\gamma \mathbf{x}} \cos\gamma \mathbf{x} - e^{-\beta \mathbf{x}} \cos\beta \mathbf{x} \right) \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{\nu=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-\nu^2 \gamma t}}{\nu^2} \right) - e^{-\beta \mathbf{x}} \cos\beta \mathbf{x} \right].$$
(3.13)

Расчетные величины при изгибе балки достигают своего максимального значения в опасном сечении х = 0 при t → ∞; тогда из соотношений (3.9), 3.10), (3.12) и (3.13) находим

$$q(\mathbf{x},t)_{\max} = q(0,\infty) = \frac{\mathbf{P}}{2} \beta \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4}\right) \left(\frac{\beta^3}{\gamma^3} - 1\right); \quad (3.14)$$

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{t})_{\max} = \delta(0, \infty) = \frac{P}{8 \operatorname{El}\beta^3} \left[\frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(1 - \frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} \right) \left(\frac{\beta^3}{\gamma^3} - 1 \right) - 1 \right]; \quad (3.15)$$

$$M(\mathbf{x}, t)_{\max} = M(0, \infty) = \frac{P}{4\beta} \left[\frac{\beta^4}{\gamma^4} \left(\frac{\beta^4}{\gamma^4 - \beta^4} - 1 \right) \left(\frac{\beta}{\gamma} - 1 \right) + 1 \right]; \quad (3.16)$$

$$Q(x, t)_{max} = Q(0, \infty) = Q(0, t) = Q(0, 0) = -\frac{P}{2}.$$
 (3.17)

Т. Т. Аракелян

Эти соотношения показывают, что только максимальное значение поперечной силы остается то же самое, что и при упруго-мгновенной задаче.

Определим значение произвольных постоянных в указанном особом случае, когда имеет место (2.27).

Значение q₁(x, t), определяемое соотношением (2.32) будет удовлетворять граничному условню (1.11) лишь при

$$c_1 = c_2 = 0,$$
 (3.18)

тогда

$$q_{1}(x,t) = \alpha \left[\frac{P}{2x} \beta^{2} x e^{-\beta x} \sin\beta x + (c, \sin\beta x + c) \cos\beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1, 3...}^{\infty} \frac{e^{-v^{v} t}}{v^{2}} \right) - \frac{P}{2} \beta (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x}.$$
(3.19)

Внеся (3.19) в (1.8), имея в виду (2.7), (2.8), (2.16), (2.2) и (2.18) и произведя интегрирование, получаем

$$\delta_{1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\alpha}{4 \text{ El}\beta^{4}} \left[\frac{P}{2\alpha} \beta^{2} \mathbf{x} e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} + (c_{s} \sin\beta \mathbf{x} + c_{s} \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} - \frac{P}{2\alpha} \beta(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} - \frac{P}{2\alpha} \beta(\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1, 3...}^{\infty} \frac{e^{-v^{2}\delta t}}{v^{2}} \right) - \frac{P}{8 \text{ El}\beta} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}}$$
(3.20)

На основе (3.20)

$$\begin{split} \varphi_{1}(\mathbf{x},t) &= \frac{\alpha}{4 \operatorname{El}\beta^{4}} \bigg\{ \frac{\mathrm{P}}{2\alpha} \beta^{2} \mathrm{e}^{-\beta x} \sin\beta \mathbf{x} - \frac{\mathrm{P}}{2\alpha} \beta^{3} \mathrm{x} \mathrm{e}^{-\beta x} \sin\beta \mathbf{x} - \frac{\mathrm{P}}{2\alpha} \beta^{3} \mathrm{x} \mathrm{e}^{-\beta x} \cos\beta \mathbf{x} + \\ &+ \beta \left[(\mathbf{c}_{x}^{'} - \mathbf{c}_{x}^{'}) \cos\beta \mathbf{x} - (\mathbf{c}_{x}^{'} + \mathbf{c}_{x}^{'}) \sin\beta \mathbf{x} \right] \mathrm{e}^{-\beta x} + \operatorname{P}\beta^{2} \mathrm{e}^{-\beta x} \sin\beta \mathbf{x} \bigg\} \bigg(1 - \\ &- \frac{\delta}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v^{2}\lambda t}}{v^{2}} \bigg) + \frac{\operatorname{P}\mathrm{e}^{-\beta x}}{4 \operatorname{El}\beta^{2}} \sin\beta \mathbf{x}, \end{split}$$
(3.21)

тогда (1.12) дает

$$\varphi_1(0, t) = \frac{\alpha}{4 \text{ E}[\beta^3]} \left(c_1 - c_3 \right) \left(1 - \frac{8}{\pi^3} \sum_{v=1, 3...}^{\infty} \frac{e^{-v^2 A t}}{v^2} \right) = 0$$

или

$$\mathbf{c}_{\mathbf{r}} = \mathbf{c}_{\mathbf{r}}^{\dagger} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{r}}$$
(3.22)

При этом

$$\hat{\sigma}_{1}(\mathbf{x},t) = \frac{\alpha}{4 \operatorname{El}\beta^{4}} \left[\frac{P}{2\alpha} \beta^{2} \mathbf{x} e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} + \left(\mathbf{c}_{1}^{'} - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\mathbf{v}=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e^{-\mathbf{v}^{\prime} \lambda t}}{\mathbf{v}^{2}} \right) - \frac{P}{8 \operatorname{El}\beta^{3}} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}};$$
(3.23)

$$Q_{i}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4} \left[3\mathrm{Pe}^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x - \mathrm{Pe}^{-\beta x} \mathrm{sin}\beta x + 2\mathrm{P}\beta x \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{sin}\beta x + 4 \frac{\alpha}{\beta} \left(\mathbf{c}'_{s} - \frac{\mathrm{P}}{2\alpha}\beta \right) \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3\cdots}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-v^{2} x t}}{v^{2}} \right) - \frac{\mathrm{P}}{2} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathrm{cos}\beta x.$$
(3.24)

На основе (3.24) н (1.13)

$$Q_{1}(0, t) = \frac{1}{4\beta^{4}} \left[3 P\beta^{4} + 4\alpha\beta^{3} \left(c_{z} - \frac{P}{2\alpha} \beta \right) \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3,..}^{\infty} \frac{e^{-v\beta_{t}t}}{v^{2}} \right) - \frac{P}{2} = -\frac{P}{2} r^{2}$$

HAH

$$3\mathrm{P}\beta + 4\,\alpha\left(\,c_{s}^{'} - \frac{\mathrm{P}}{2\alpha}\,\beta\right) = 0\,,$$

откуда

$$c_{a}^{\prime} = -\frac{P}{4a}\beta. \qquad (3.25)$$

Внеся (3.18) и (3.25) в (3.19), находим окончательно

$$q_{t}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{P}{2} \beta \left\{ \left[\beta \mathbf{x} e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\mathbf{y}=1, 3...}^{\infty} \frac{e^{-\mathbf{y}\beta \mathbf{t}}}{\mathbf{y}^{2}} \right) - (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) e^{-\beta \mathbf{x}} \right\}.$$
(3.26)

Внеся (3.25) в (3.23), получаем

$$\delta_{\mathbf{i}}(\mathbf{x}, t) = \frac{P}{8 \operatorname{El}\beta^{3}} \left\{ \left[\beta x e^{-\beta x} \sin\beta x - \frac{3}{4} (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x} \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\mathbf{y}=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-y^{2}\lambda t}}{y^{2}} \right) - (\sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x} \right\}.$$
(3.27)

Внеся (3.22) н (3.25) в (3.21), получаем

$$\varphi_{1}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \frac{P}{4 \operatorname{El}\beta^{2}} \left\{ \frac{e^{-\beta \mathbf{x}}}{2} \left[2 \sin\beta \mathbf{x} - \beta \mathbf{x} (\sin\beta \mathbf{x} + \cos\beta \mathbf{x}) \right] \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3...}^{\infty} \frac{e^{-v^{2}\lambda t}}{v^{2}} \right) + e^{-\beta \mathbf{x}} \sin\beta \mathbf{x} \right\}.$$
(3.28)

$$M_{1}(\mathbf{x}, t) = \frac{p}{4} \beta \left\{ (2\beta x \sin\beta x - \sin\beta x + \cos\beta x) e^{-\beta x}, \left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{v=1,3,...}^{\infty} \frac{e^{-v\beta x}}{v^{2}} \right) + (\cos\beta x - \sin\beta x) e^{-\beta x} \right\}.$$
(3.29)

Внеся (3.25) в (3.24), получаем

Т. Т. Аракелян

$$Q_{1}(x,t) = \frac{P}{4} \left[\left(1 - \frac{8}{\pi^{2}} \sum_{\nu=1,2,...}^{\infty} \frac{e^{-\nu^{2}\lambda t}}{\nu^{2}} \right) (2\beta x - 1) e^{-\beta x} \sin\beta x - 2 e^{-\beta x} \cos\beta x \right] \cdot (3.30)$$

Расчетные величины при условии (2.27,) аналогично вышеуказанному, будут

$$\begin{aligned} q_1(x, t)_{max} &= q_1(0, \infty) = -\frac{3}{4} \frac{P}{\beta} = \frac{3}{2} q(x, 0)_{max} = 1,5 q(0,0) ;\\ \delta_1(x, t)_{max} &= \delta_1(0, \infty) = -\frac{5P}{32 E \beta^3} = \frac{5}{4} \delta(x, 0)_{max} = 1,25 \delta(0,0) ;\\ M_1(x, t)_{max} &= M_1(0, \infty) = \frac{P}{2} \beta = 2 M(x, 0)_{max} = 2,00 M(0,0),\\ Q_1(x, t)_{max} &= Q_1(0, \infty) = -\frac{P}{2} = Q(x, 0)_{max} = Q_1(0,t) = Q(0,0); \end{aligned}$$

Таким образом, кроме максимальной поперечной силы, остальные расчетные величины при учете фильтрационной консолидации грунта податливого основания, получаются значительно больше, чем в случае упруго-мгновенной задачи.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса Поступнао 9 ІХ 1954 г.

Թ. S. Առաքելյան

ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱՏԱՐԱԾ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ԱՆՎԵՐՋ ՀԵԾԱՆԻ ԾՌՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ջրով ծադեցած գրունտի վրա ամրողջ երկարությամբ ծենված պրիդմատիկ ծեծանի ծռումը գիտելիս բեռի ակնթարթային և տևական ազդեցության գեպքերում ծեծանի և գրունտի տեղափոխուքները տարբերվում են։

Հիմնատակի որոշ նրկրաբանական պայմանների դեպթում՝ և խոշոր կառուցված ջների ճամար ընդունվում է, որ ճիմնատակի երկֆաղ գրունտի դեֆորմացիան ճեծանի աղդեցության տակ կարևլի է ընութագրել գրունտի ուղղագծային ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայով։

Վերոնիշյալի նիման վրա նիմնատակի նակադդման ինտենսիվությունը որոշելու նամար ստացվում է (1.10) ինտեդրոդիֆերննցիալ նավասարումը, (1.11), (1.12), (1.13) եզրային պայմաններով և (1.6) սկզբնական պայմանով։

Այդ հավատարման լուծումը վերածվում է (2.20) սովորական անհամասնո գիֆերենցիալ հավատարման լուծմանը։ Ինտեգրման հաստատունների արժեջները չորոշելիս պարզվում է, որ q(x, t) անհայտ ֆունկցիայից արտաքսվում է « պարամետրը։ (1.10) հավասարման լուծումը տրվում է (3.9) տեսքով։

Изгиб бесконечной балки на сплошном груптовом основании

Տրված է նաև (1.10) հավասարման ընդհանուր ինտեդրալը (2.27) պայմանի դոյության դեպքում (3.26) տեսքով։

Բերված են ծռման րպոր էլեմենաների արտանայաությունները վեըոնիչյալ երկու դեպքերի նամար։

Վերջին դեպքում ծռման հաչվային մեծությունները, ըացի մաքսիմալ կարող ուժից, ստացվում են դդալի մեծ արժեքներով, քան առածդական-ակնթարթային խնդրի լուծման արգյունքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович Н. А. Механика грунтов. Гос. изд. строит. и арх. лит., М., 1951.

Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории полаучести. Гостехиздат, М., 1952.
 Аракелян Т. Т. Расчет балок на силошном грунтовом основании. Изв. АН Ар-

мянской ССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, том 1V, № 2, 1953.

4. Герсеванов Н. М. Собрание сочинений, том П. Стройвоенмориздат. М., 1948.

20340405 006 9580503055666 0409505058 85954096 Известия академии наук армянской сср

Мад-бар, рб. ь пъръб. арапир. 1Х, № 3, 1956 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. Саноян

Метод гидродинамического расчета диффузоров и конфузоров

1. Введение

Почти всякая промышленная установка, связанная с использованием протекания жидкостей или газов, имеет в своем составе конфузор или диффузор, как основные элементы, правильный расчет которых совершенно необходим для получения удовлетворительного коэффициента полезного действия установки. Расчет конфузора не представляет принципиальных трудностей. Неизмеримо сложнее расчет диффузора, между тем именно этот участок проточной части машины или сооружения и является обычно одним из главных источников потерь энергии.

Вдоль стенок диффузора всегда наблюдается резкое утолщение пограничного слоя и, как следствие, оттеснение линий тока от стенок. Не говоря уже о катастрофическом для работы диффузора явлении отрыва пограничного слоя, отметим, что и при отсутствии отрыва жидкости от стенок диффузора явления в пограничном слое вызывают значительное ухудшение работы диффузора, уменьшение коэффициента восстановления, увеличение потерь и искажение эшоры скоростей на выходе. Оттеснение линий тока от стенок диффузора приводит к сужению потока вне пограничного слоя, т. е. непосредственно к уменьшению коэффициента восстановления давления. С количественной стороны этот эффект может быть оценен следующим образом: действительный поток ведет себя как поток идеальной жидкости внутри канала, образованного поверхностью, отстоящей от поверхности диффузора во внутрь потока на толщину вытеснения, рассчитанную по действительному распределению давления по поверхности диффузора.

Таким образом, для расчета диффузора прежде всего требуется рассмотрение вопроса о развитии пограничного слоя вдоль его поверхности, а это, как известно, упирается в необходимость определения скоростей в идеальном безвихревом потоке в диффузоре с заданной, вообще говоря, криволинейной поверхностью.

Решению последней задачи посвящен второй параграф статьи.

2. Метод местных вариаций

Этот метод решения прямой задачи об определении поля скоростей и давлений в потоке идеальной несжимаемой жидкости в осесниметричном диффузоре (конфузоре) произвольного очертания основан на идее подбора близкого по форме теоретического диффузора (конфузора) [2] и последующего "исправления" местных откловений путем введения специальных поправочных функций.

Рассмотрим заданный осесниметричный диффузор (конфузор), профиль меридионального сечения которого показан на фиг. 1. Этот профиль сравнивается с серией теоретических профилей, заранее



полученных путем задания различных законов распределения скоростей на оси диффузора (конфузора). Из этой серии подбирается та кривая, которая ближе всего к данной (фиг. 1), а местные отклонения исправляются путем добавления функции тока, соответствующей таким распределениям скорости на оси, которые практически отличны от нуля лишь вблизи точки, где производится исправление.

Задаемся дополнительным распределением скоростей на осв в виде:

$$V_{oz}^{(x)} = f_0(z) = [A + B(z + a)]e^{-\left(\frac{z+a}{x}\right)^2}$$
 (2.1)

Здесь: а — расстояние от начала координат до того сечения двф фузора или конфузора, где отклонение данной кривой от серийной (теоретической) имеет максимальное значение. « — параметр, который определяется из условия, чтобы на концах исправляемого интервала дополнительная скорость составляла заданную часть основной (серийной) скорости. Значение « можно подобрать так, чтобы на кондах указашного интервала дополнительная скорость составляла 20/0 ог основной скорости (такая точность практически вполне достаточна). А и В — параметры, связь между которыми находится из того условия, чтобы на концах исправляемого интервала отношение дополнительных скоростей к серийным было одинаковым, т. е.

$$\begin{bmatrix} V_{oz}^{(aon)} \\ V_{oz}^{(cep)} \end{bmatrix}_{z = -(a+b)} = \begin{bmatrix} V_{oz}^{(aon)} \\ V_{oz}^{(cep)} \end{bmatrix}_{z = d - a}, \qquad (2.2)$$

Гидродинамич. расчет диффузоров и конфузоров

здесь b и d-расстояния от концов интервала до сечения, где имеет исто наибольшее отклонение данной кривой от серийной.

Обозначая отношение серийных скоростей на концах интервала через а, получим из (2.2):

$$\frac{\left[V_{az}^{(xoff)}\right]_{z+a=-b}}{\left[V_{oz}^{(xoff)}\right]_{z+a=d}} = \frac{A-Bb}{A+Bd} e^{-\frac{b^{2}-d^{2}}{z^{4}}} = \alpha, \qquad (2.3)$$

отсюда

$$B = \Lambda \frac{e^{-\frac{b^{*}-d^{*}}{a^{*}}} - \alpha}{be^{-\frac{b^{*}-d^{*}}{a^{*}}} - \alpha d} = A.s , \qquad (2.4)$$

где через s обозначено выражение

$$s = \frac{e^{-\frac{b^{3}-d^{3}}{a^{4}}} - \alpha}{be^{-\frac{b^{3}-d^{3}}{a^{3}}} - \alpha d}$$
(2.5)

 $\Pi pa \ b = d$

$$s = \frac{1}{b} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad B = \frac{A}{b} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$
 (2.6)

Параметр А определяется по максимальному отклонению данной кривой от серийной.

Так как в бесконечности вниз и вверх по течению обе кривые совладают, то можно написать очевидное условие равненства расходов через трубки тока, образованные вращением этих кривых вокруг осв z. При этом заметим, что функция тока ф выражается через функцию f₀ (z) следующим образом [2]:

$$\psi(\mathbf{r},\mathbf{z}) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\mathbf{r}} \mathbf{r} d\mathbf{r} \int_{0}^{\pi} \mathbf{f}_{0} (\mathbf{z} + \mathrm{i}\mathbf{r}\mathrm{cos}\omega) \mathrm{d}\omega , \qquad (2.7)$$

Тогда вышеуказанное условие равенства расходов примет вид:

$$\int_{0}^{r_{a}} \left\{ V_{z}^{(\operatorname{cep})} + \left[\frac{A}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-\left(\frac{z+a+\operatorname{ircos}\omega}{a}\right)^{2}} + \frac{B}{\pi} \int_{0}^{\pi} (z+a+\operatorname{ircos}\omega) e^{-\left(\frac{z+a+\operatorname{ircos}\omega}{a}\right)^{2}} \right] d\omega \right\} r dr = \int_{0}^{r_{a}} V_{z}^{(\operatorname{cep})} r dr.$$
(2.8)

Максимальное отклонение между заданной и серийной кривыми имеет место при z = − а. В этой точке второй интеграл в фигурных скобках соотношения (2.8) равняется нулю. Известна IX. № 3-5

$$A = \frac{2\pi \int_{x}^{r_{x}} V_{z}^{(eep)} r dr}{x^{2} \int_{0}^{\pi} e \frac{\frac{r_{z}^{*} \cos^{2} \omega}{x^{2}} - 1}{\cos^{2} \omega} d\omega},$$
(2.9)

Числитель выражения (2.9) известен, так как величина $V_z^{(cep)}$ представляет продольную скорость основного исправляемого течения. Для заданных г₁ и г₂ значение $\int_{r_z}^{r_z} V_z^{(cep)} r dr = \Delta \psi^{(cep)}$ может быть сразу взято из графика зависимости $\psi^{(cep)}$ от г для различных z (фиг. 2).



Фиг. 2.

Гидродинамич, расчет диффузоров и конфузоров

Знаменатель в выражении (2.9) можем вычислить, разлагая функцию е слование в ряд Маклорена и почленно интегрируя.

Тогда получим:

$$\int_{0}^{\pi} \frac{e^{\frac{r_{s}^{2}\cos\omega}{s^{2}}} - 1}{\cos^{2}\omega} d\omega = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)! \left(\frac{r_{s}}{s}\right)^{2n}}{n! 2^{2n} - 2! (n-1)!]^{2}}$$

Таким образом, окончательно находим:

$$A = \frac{2 \Delta \psi^{\text{(cep)}}}{x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n! 2^{2n-2} [(n-1)!]^2} \left(\frac{r_2}{x}\right)^{2n}}$$
(2.9')

Подставив выражение для дополнительного распределения скоростей на оси диффузора (конфузора)

$$V_{oz}^{(aon)} = f_0(z) = [A + B(z + a)] e^{-\left(\frac{z+a}{x}\right)^2},$$
 (2.1)

э общие формулы для составляющих скоростей и функции тока безвихревого потока идеальной несжимаемой жидкости в осесимметричном лиффузоре (конфузоре) [2], получим общие выражения для составляющих скоростей и функции тока и исправленного течения:

$$V_{z} = V_{z}^{(\text{cep})} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{2n} (n!)^{2}} r^{2n} f_{0}^{(2n)}(z) ,$$

$$V_{r} = V_{r}^{(\text{cep})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 2n}{2^{2n} (n!)^{2}} r^{2n-1} f_{0}^{(2n-1)}(z) ,$$

$$\psi = \psi^{(\text{cep})} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{2^{2n} (n!)^{2}} r^{2n} f_{0}^{(2n-2)}(z) .$$
(2.10)

Здесь $V_x^{(cep)}$, $V_r^{(cep)}$, $\phi^{(cep)}$ — значения составляющих скоростей и функши тока, соответствующие заранее известной теоретической кривой, a $I_0(z)$ определяется по формуле (2.1).

Производные дополнительного распределения скоростей на оси V^(son) можно выразить через полиномы Эрмвта:

$$H_n (x) = (-1)^n e^{\frac{1}{2} |x|^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-\frac{1}{2} |x|^2} \right).$$

Для удобства переместим начало координат в точку (0,-а). Тогда будем иметь:

HO

$$f_0(z) = V_{oz}^{(son)} = (A + Bz) e^{-\left(\frac{z}{z}\right)^{\#}},$$
 (2.1')

$$e^{(n)}(z) = (A + Bz) \frac{d^{n}}{dz^{n}} \left[e^{-\left(\frac{z}{x}\right)^{2}} \right] + nB \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[e^{-\left(\frac{z}{x}\right)^{2}} \right] =$$

$$= e^{-\left(\frac{z}{x}\right)^{2}} \left\{ \frac{A + Bz}{z^{n}} (-1)^{n} 2^{n/2} H_{a} \left(\sqrt{2} \frac{z}{z} \right) + \frac{nB(-1)^{n-1}}{z^{n-1}} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} H_{n-1} \left(\sqrt{2} \frac{z}{z} \right) \right\}, \qquad (2.11)$$

Подставив выражение для f₀⁽ⁿ⁾ (z) из (2.11) в (2.10) и учитывая зависимости (2.4) или (2.6), окончательно получим:

$$\begin{split} V_{z} (\mathbf{r}, \mathbf{z}) &= V_{z}^{(\text{cep})} (\mathbf{r}, \mathbf{z} - \mathbf{a}) + A e^{-\left(\frac{x}{x}\right)^{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{n} (n!)^{2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{z}}\right)^{2n} \times \\ &\times \left[(1 + \text{sz}) H_{2n} \left(\frac{\sqrt{2} \mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) - \text{nsz} \sqrt{2} H_{2n-1} \left(\frac{\sqrt{2} \mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) \right], \\ V_{r}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) &= V_{r}^{(\text{cep})} (\mathbf{r}, \mathbf{z} - \mathbf{a}) + A e^{-\left(\frac{x}{x}\right)^{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{n} (n!)^{2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{z}}\right)^{2n-1} \times \\ &\times \left[(1 + \text{sz}) H_{2n-1} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) - \frac{2n-1}{\sqrt{2}} \operatorname{zsH}_{2n-2} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) \right], \\ \psi(\mathbf{r}, \mathbf{z}) &= \psi^{(\text{cep})}(\mathbf{r}, \mathbf{z} - \mathbf{a}) + A \mathbf{z}^{2} e^{-\left(\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right)^{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^{n} (n!)^{2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{z}}\right)^{2n} \times \\ &\times \left[(1 + \operatorname{sz}) H_{2n-1} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) - \frac{2n-1}{\sqrt{2}} \operatorname{zsH}_{2n-2} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right) \right], \\ &\times \left[(1 + \operatorname{sz}) H_{2n-2} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right)^{*} - (n-1) \sqrt{2} \operatorname{zsH}_{2n-3} \left(\sqrt{2} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}}\right). \end{split} \right] \end{split}$$

Зная А из (2.9'), можно по (2.12) вычислить продольные, поперечные скорости и функцию тока исправленного течения.

Уравнение образующей исправленного диффузора (конфузора) будет:

$$\psi = \phi^{(\text{cep})} + \phi^{(\text{aon})} = \text{const} = c, \qquad (2.13)$$

где постоянная с представляет значение функции тока у на серийной кривой.

Заметим, что в случае, если после первого исправления в какомнибудь месте сохраняется еще заметное отклонение данной кривой от серийной, то следует произвести повторное исправление.

Расчет диффузоров (конфузоров) вышеизложенным методом.

Гидродинамич, расчет диффузоров и конфузоров

"местных вариаций" не представляет больших трудностей, так как ряды, входящие в формулы (2.12). быстро схолятся, а полиномы Эрмита — табулированы.

В качестве примера применения метода "местных вариаций" рассчитаем диффузор (конфузор) наперед известного теоретического очертания с тем, чтобы затем сравнить вышеизложенное решение с точным теоретическим решением.

Другими словами, в данном случае будем, используя метод местных вариаций°, из одного теоретического профиля получать другой, который совпадает с первым на всем протяжении, за исключением небольшого интервала.

На фиг. За и Зь показаны две серии теоретических профилей.





Первая из них (фиг. За) получена путем использования следующей функции распределения скорости на оси z:

$$f_{a}(z) = 0.55 + \frac{0.90}{\pi} \int_{0}^{z} e^{-\frac{z^{2}}{2}} dz,$$
 (2.14)

а второй серии соответствует функция

$$f_0(z) = 0.55 + 0.45$$
 thz . (2.14)

Из первой серии выделим теоретический диффузор, у которого яходной и выходной радиусы, соответственно, равны: г_{вх} = 0,3, г_{вых} = 0,95 (на фиг. 4 пунктирная линия). Считаем его очертание заданной кривой. Сравнивая это очертание с кривой, относящееся ко второй сеВ. Г. Саноян

рии, имеющей те же входной и выходной раднусы (на фиг. 4 сплошная линия) видим, что заданное очертание совпадает с этой кривой на всем протяжении, за исключением интервала 0> z > -2,0 (фиг. 4). Максимальное отклонение одной кривой от другой имеет место в точке z = -1 и равно:

$$r_1 - r_2 = 0.08; (r_1 = 0.70; r_2 = 0.62).$$

Далее, из фиг. 4 очевидно, что a = - 1, b - d = 1.



Фиг. 4.

Для простоты расчета положим В = 0. Определим А:

 $A = \frac{2 \Delta \psi^{(eep)}}{x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2!)r_2^{2n}}{n! 2^{2n-2} [(n-1)!]^2}}$

Из фиг. 2 получаем

$$\Delta \psi^{(\text{cep})} = \int_{r_s}^{r_s} V_x^{(\text{cep})} r dr = 0,045 - 0,037 = 0,008 \,.$$

Примем « = 1 (нетрудно подсчитать, что для этого значения « на концах интервала дополнительная скорость составляет порядка 2°/0 от основной скорости).

Замечая, что, в данном случае, rg=0,62 будем иметь

$$A = \frac{2.0,008}{0,62^2 + \frac{0,62^4}{4} + \frac{0,62^6}{96} + \dots} = 0,0358.$$

Если переместить начало координат в точку (-1,0), то согласно (2.1). выражение для дополнительного распределения скоростей примет вид:

$$V_{ox}^{(xon)} = f_0(z) = 0,0358 e^{-x^2}$$
. (2.15)

Для вычислення составляющих скоростей и функции тока исправленного течения будем пользоваться формулами (2.10), где f_o (z) определяется из (2.15).

Гидродинамич. расчет диффузоров и конфузоров

Значения производных $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{d^m}{dz^m} (e^{-z^2})$ даются во многих мате-

матических таблицах. В [3] даются эти производные до т = 5.

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями между тремя последовательными подиномами Эрмита.

$$H_m(x) = x H_{m-1}(x) - (m-1) H_{m-2}(x),$$
 (2.16)

легко найти рекуррентные соотношения между тремя последовательными производными fo (z):

$$f_{0}^{(m)}(z) = -\frac{2}{z^{2}} \left[z f_{0}^{(m-1)}(z) + (m-1) f_{0}^{(m-2)}(z) \right]$$
(2.17)

При m > 5 производные fo (z) можно рассчитать, используя (2.17).

Распределение скоростей на оси канала

Таблица 1

z	V_{oz}^{l}	\mathbf{V}_{oz}^{11}	V th _{oz}	Примечание
$\begin{array}{c} 0\\ -\ 0,2\\ -\ 0,4\\ -\ 0,6\\ -\ 1,0\\ -\ 1,2\\ -\ 1,4\\ -\ 1,6\\ -\ 2,0\\ -\ 2,2 \end{array}$	$\begin{array}{c} 0,5500\\ 0,4612\\ 0,3790\\ 0,3084\\ 0,2510\\ 0,2065\\ 0,1750\\ 0,1750\\ 0,1520\\ 0,1355\\ 0,1240\\ 0,1160\\ 0,1110\\ \end{array}$	0,5500 0,4786 0,4100 0,3470 0,2908 0,2430 0,2430 0,2430 0,1730 0,1730 0,1490 0,13.0 0,1200 0,1125	$\begin{array}{c} 0,5632\\ 0,4301\\ 0,4040\\ 0,3389\\ 0,2854\\ 0,2423\\ 0,2094\\ 0,1825\\ 0,1605\\ 0,1429\\ 0,1292\\ 0,1195 \end{array}$	V_{oz}^{I} , V_{oz}^{II} и V_{oz}^{III} скорости на оси со- ответственно для исправляемого, тео- ретического и исправленного про- филей: $V_{oz}^{I} = 0.55 + 0.45$ thz, $V_{oz}^{II} = 0.55 + \frac{0.90}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\chi} e^{-\frac{z^{2}}{2}} dz$, $V_{ox}^{III} = V_{oz}^{I} + Ae^{-z^{2}}$.



По формуле (2.10) рассчитана функция тока ϕ для различных г и z и вычерчена исправленная линия тока (фиг. 4). Как видно из графика, фиг. 4. первое исправление в интервале 0 > z > -2.0 уже дает удовлетворительный результат, т. е. исправлениая кривая становится близкой к заданной кривой. Некоторые расхождения замечаются на участках -2.4 < z < -1.2 и 0.8 < z < 0, причем на первом из указанных участков (в расширенной части), расхождение больше. Это можно объяснить тем, что для простоты расчета было положено B = 0 ($\alpha = 1$).

При желании можно устранить указанные расхождения, проведя повторные исправления в соответствующих интервалах.

В настоящем примере мы, по методу "местных вариаций", рассчитали теоретический диффузор, у которого распределение скоростей на оси заранее было известно. Это дает возможность сравнить распределение скоростей на оси, полученное вышеизложенным методом, с теоретическим. Табл. 1 и график на фиг. 5 позволяют произвести это сравнение.

3. Учет влияния пограничного слоя на течение в диффузоре

Для расчета дуффузора в случае действительной вязкой жидкости, как было сказано выше, требуется прежде всего рассмотрение развития пограничного слоя вдоль стенок диффузора. Основной трудностью здесь является отсутствие до сих пор достаточно строгого и точного метода расчета турбулентного пограничного слоя в резко выраженной диффузорной области. Будем пользоваться методом Л. Г. Лойцянского*, распространяя его на случай пограничного слоя на теле вращения или внутри водовода переменного сечения. Для этого напишем уравнение импульсов Милликена-Федяевского при движении вязкой жидкости в круглом водоводе (диффузор или конфузор) переменного сечения:

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{b}\rho ru^{2}dy - U\frac{d}{dx}\int_{0}^{b}\rho udy = -\frac{dp}{dx}\int_{0}^{b}rdy - r_{0}\tau_{w}, \qquad (3.1)$$

Здесь: 8-толщина пограничного слоя, г-переменный радиус кольцевого сечения, и и U-продольные скорости, соответственно, внутри и на границе пограничного слоя, р – давление, тw – напряжение трения на стенке.

Принимая во внимание, что

$$r = r_0 - y\cos \alpha = r_0 - \beta y (\beta = \cos \alpha),$$

где г₀ — раднус поперечного сечения, а — угол между касательной к обводу и осью диффузора (конфузора).

* Можно, конечно, пользоваться и другими методами расчета турбулентного пограничного слоя.



Фиг. 6.

Вводя обозначения:

$$\Delta^{*} = \int_{0}^{b} p\left(1 - \frac{\beta y}{r_{0}}\right) \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \qquad (3.2)$$
$$\Delta^{**} = \int_{0}^{b} \left(1 - \frac{\beta y}{r_{0}}\right) \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} dy,$$

и полагая для несжимаемой жидкости, $\rho = \text{const}$, из предыдущего уравнения, после несложных преобразований, получим:

$$\frac{d\Delta^{***}}{dx} + \left(\frac{2U'}{U} + \frac{r_0'}{r_0}\right) \Delta^{**} + \frac{U'}{U} \Delta^* = \frac{\tau_w}{\rho U^2}.$$
(3.3)

Поскольку максимальное значение у имеет порядок толщины пограничного слоя δ , а последняя на начальном участке является малой величиной, то $\frac{\beta y}{r_0} \ll 1$. Будем считать, что $1 - \frac{\beta y}{r_0} = 1$; тогда булем иметь $\Delta^* = \delta^*$ и $\Delta^{**} = \delta^{**}$, а последнее уравнение нанишется так:

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \left(\frac{2U'}{U} + \frac{r'_0}{r_0}\right)\delta^{**} + \frac{U'}{U}\delta^* = \frac{\tau_w^2}{\rho U^2}, \qquad (3.4)$$

где 3* и 3** соответствуют, как обычно, толщине вытеснения и толщине потери импульса, т. е.

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \tag{3.5}$$

Напишем уравнение импульсов (3.4) в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\delta^{**} \left(2 + \mathrm{H} + \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}'}\dot{r_0}\right) = \frac{\mathrm{t}_{\mathrm{W}}}{\mathrm{p}\mathrm{U}^2} \tag{3.4'}$$

гле

74

$$H=\frac{\delta^{*}}{\delta^{**}}\,.$$

В уравнении (3,4') третий член в круглых скобках определяет влияние поперечной кривнаны диффузора (конфузора).

Следуя Л. Г. Лойцянскому [5], умножны обе части уравнения (3.4') на некоторую функцию G(R**) числа Рейнольдса и введем обозначения:

$$\frac{U^{*}}{U} \delta^{**} G(\mathbb{R}^{**}) = i,$$

$$\frac{\gamma_{W}}{\rho U^{2}} G(\mathbb{R}^{**}) = \zeta.$$
(3.5)

Уравнение (3.4') при этом примет вид:

$$G\left(R^{**}\right)\frac{d\xi^{**}}{dx} + \left[2 + H + \frac{U}{U^{*}}\frac{r_{0}^{*}}{r_{0}}\right]f = \zeta.$$

Первый член можно преобразовать так:

$$G(\mathbb{R}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(f \frac{U}{U'} \right) - \frac{\mathbb{R}^{**}G'(\mathbb{R}^{**})}{G(\mathbb{R}^{**})} G(\mathbb{R}^{**}) \frac{d\delta^{**}}{dx} - \frac{\mathbb{R}^*G'(\mathbb{R}^{**})f}{G(\mathbb{R}^{**})}.$$

Вводя обозначение

$$m(R^{**}) = \frac{R^{**}G'(R^{**})}{G(R^{**})}$$
, (3.6)

найдем из предыдущего уравнения:

$$(1+m) \operatorname{G} \left(\mathbb{R}^{**} \right) \frac{\mathrm{d} \delta^{**}}{\mathrm{d} x} \; = \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} x} \; \left(\; f \; \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}'} \right) - \mathrm{m} f \; .$$

Исключим отсюда G(R**) $\frac{d\hat{c}^{**}}{dx}$, пользуясь равенством (3.4').

Тогда получим, после простых преобразований,

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} \, \mathrm{F}(\mathrm{i}) + \left[\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}'} - (\mathrm{l} + \mathrm{m}) \frac{\mathrm{r}_0'}{\mathrm{r}_0} \right] \, \mathrm{f} \, , \qquad (3.7)$$

广 页 ē

$$F(f) = (1 + m)\zeta - [3 + m + (1 + m)H]f.$$

Уравнение (3.7) представляет турбулентный аналог уравнения ламинарного пограничного слоя [4]:

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}} = \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} \mathrm{F} + \left(\frac{\mathrm{U}''}{\mathrm{U}} - 2\frac{\mathrm{r_0'}}{\mathrm{r_0}}\right) \mathrm{f}. \tag{3.8}$$

Если принять

$$G(R^{**}) = R^{**},$$

то согласно (3.5), f н ζ станут равными своим ламинарным аналогам. Величина m примет значение m = 1 и уравнение (3.7) перейдет в (3.8).

Здесь, как и в случае ламинарного пограничного слоя, параметр 1. характеризующий форму профилей скоростей в разных сечениях слоя, будет формпараметром, а величина С — функцией формпараметра.

В случае плоского ламинарного пограничного слоя при f = 0, величина R** обратно пропорциональна местному коэффициенту трения на пластинке. Для турбулентного пограничного слоя, как и в случае ламинарного пограничного слоя, можно принять, что при всех значениях f вид функции G(R**) совпадает с таковым для пластинки, но аргумент ее берется для действительных величин на крыловом профиле.

Переходя к случаю обтекания тел вращения или течения в круглом канале переменного сечения, мы делаем допущение, что наличие поперечной кривизны у ипх сказывается, в основном, лишь на уравнении импульсов (3.4), в которое введен дополнительный член, содержящий отношение $\frac{r_0'}{r}$.

Зависимость профиля скорости в пограничном слое (внутри осесимметричного водовода или на теле вращения) от изменения формпараметра I будем считать такой же, что и на плоском крыле. Таким образом, при принятом допущении, вид функции G(R**) на теле вращения берется таким же как и в случае сопротивления пластиики; при этом, аргумент R** предполагается взятым для соответствующего сечения пограничного слоя на теле вращения.

Воспользовавшись, например, формулой Фолкнера ([1], стр. 624)

$$\frac{\tau_{\rm W}}{\rho V_{\infty}^2} = = 0,00655 \, {\rm R}^{**}^{-1/6} \,, \qquad (3.9)$$

будем иметь искомое выражение для функции G(R**)

$$G(R^{**}) = 153.2 R^{**'/_{6}}$$
(3.10)

Подставляя выражение (3.10) в формулу (3.6), найдем:

$$m = 1/6.$$

Тогда F(f) примет вид (как и в плоском случае):

$$F(f) = \frac{1}{6} \zeta - \left(\frac{19}{16} - \frac{7}{6}H\right) f.$$
 (3.11)

При малых перепадах давлений и скоростей, т. е. при малых значениях f ([1], стр. 632), (3.11) можно заменить динейной функцией:

$$F(f) = a - bf \tag{3.12}$$

В. Г. Саноян

с коэффициентами а и b равными:

$$a = 1,17,$$

 $b = 4,7 \div 4,8,$

Тогда (3.7) примет вид:

$$\frac{df}{dx} + \left(\frac{bU'}{U} - \frac{U''}{U'} + \frac{7}{6}\frac{r_0'}{r_0}\right)f = \frac{U'}{U}a .$$
(3.13)

Интегрирование (3.13) приводится к простой квадратуре:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{U'(\mathbf{x})}{U^{b}(\mathbf{x})r_{0}^{\tau_{a}}(\mathbf{x})} \left[a \int_{0}^{\mathbf{x}} U^{b-1}(\xi) r_{0}^{\tau_{a}}(\xi) d\xi + C \right] .$$
(3.14)

При наличии участка с ламинарным пограничным слоем в интервале 0 < x < x₁, выражение для йх) примет вид:

$$f(x) = \frac{U'(x)}{U^{b}(x)r_{0}^{\gamma_{0}}(x)} \left[a \int_{x_{t}}^{x} U^{b-1}(\xi)r_{0}^{\gamma_{0}}(\xi)d\xi + \frac{U_{t}^{b}r_{0t}^{\gamma_{0}}}{U_{t}'}f_{t} \right], \quad (3.15)$$

где U_t, U'_t, r_{ot} и f_t соответствуют значениям U_t, U', r_{o} и f в точке , перехода $x = x_t$, причем f_t, вычисленное по (3.5), примет вид:

$$f_{t} = \frac{U'_{t} \delta_{t}^{**}}{U_{t}} G(R^{**}) = \frac{VU'_{t}}{U_{t}^{*}} R_{t}^{**} G(R_{t}^{**}) .$$
(3.16)

Для полностью турбулентного пограншчного слоя уравнение для -f(x) примет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{a \, U'(\mathbf{x})}{U^{b}(\mathbf{x}) r_{0}^{\tau_{f_{a}}}(\mathbf{x})} \int_{0}^{\mathbf{x}} U^{u-1}(\xi) r_{0}^{\tau_{f_{a}}}(\xi) \, d\xi.$$
(3.17)

Для определения R**(x) согласно (3.5), (3.10) и (3.17) получим следующее уравнение:

$$153,2R^{**} = \frac{fU^2}{U'v} = \frac{a}{vU^{b-2}(x)r_0^{t/a}(x)} \int_0^x U^{b-1}(\xi)\overline{r_0^{t/a}}(\xi) d\xi.$$
(3.18)

Формулы (3.17) и (3.18) могут быть представлены в безразмерном виде

$$f(\overline{x}) = \frac{a \overline{U}'(\overline{x})}{\overline{U}^{b}(\overline{x})\overline{r_{0}}^{\gamma_{0}}(\overline{x})} \int_{0}^{\overline{x}} \overline{U}^{b-1}(\overline{\xi})\overline{r_{0}}^{\gamma_{0}}(\overline{\xi}) d\overline{\xi} , \qquad (3.17')$$

$$153,2R^{**} = \frac{a R_{bx}}{\overline{U}^{b-2}(\overline{x}) \, \overline{r_0}^{\eta_0}(\overline{x})} \int_{0}^{\overline{x}} \overline{U}^{b-1}(\overline{\xi}) \, \overline{r_0}^{\eta_0}(\overline{\xi}) \, d\,\overline{\xi} , \qquad (3.18')$$

где

в характерной длине L. Положив в (3.18')

$$R^{**} = \frac{U\delta^{**}}{v} = \overline{U} \ \delta^{**} \ R_{sx} ,$$

получим следующую формулу для безразмерной толщины потери: импульса 8**

$$\widetilde{\delta}^{**} = \left[\frac{a}{153, 2R_{\mu x}^{0,17} \overline{U}^{\mu - i_{\mu}}(\overline{x}) \overline{r}_{0}^{\tau_{\mu}}(\overline{x})} \int_{0}^{x} \overline{U}^{\mu - 1}(\overline{\xi}) \overline{r}^{\tau_{\mu}}(\overline{\xi}) d\overline{\xi}}\right]^{67} (3.19)$$

Если на входе в диффузор (x = 0) толщина пограничного слоя не равняется нулю, а имеет некоторое значение δ_{nx} , которому соответствует толщина потери импульса δ_{nx}^{**} , то для формпараметра Г получим, согласно (3.14), следующее выражение:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{U}'(\mathbf{x})}{\mathbf{U}^{b}(\mathbf{x})\mathbf{r}_{0}^{-1/a}(\mathbf{x})} \left[a \int_{0}^{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{b-1}(\xi)\mathbf{r}_{0}^{-a}(\xi) d\xi + \frac{\mathbf{U}^{b}(0) \mathbf{r}_{0}^{-a}(0)}{\mathbf{U}'(0)} f(0) \right], (3.20)$$

где: U (0), U' (0), r₀ (0), и f (0) соответствуют значенням U, U', r₀ и f на входе в диффузор, и в дальнейшем будут обозначаться через U_{ях}, U'_{ях}, и т. д., причем согласно (3.5):

$$f\left(0\right) = f_{ax} = \frac{\nu U'_{ax}}{U_{ax}^2} \ R_{ax}^{**} G\left(R_{ax}^{**}\right).$$

Подставив значение G (R**) из (3.10), получим:

$$\tilde{I}_{ex} = \frac{153,2 \nu U'_{ex}}{U_{ex}^2} R_{ex}^{**\tau_{f_0}}$$
 ,

где

$$R_{nx}^{**} = -\frac{U_{nx} \delta_{nx}^{**}}{v} \cdot$$

Таким образом:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{U'(\mathbf{x})}{U^{b}(\mathbf{x}) r_{0}^{\tau_{l_{a}}}(\mathbf{x})} \left[a \int_{0}^{x} U^{b-1}(\xi) r_{0}^{\tau_{l_{a}}}(\xi) d\xi + 153, 2v U_{ax}^{b-2} r_{0ax}^{\tau_{l_{a}}} R_{ax}^{s * \tau_{l_{a}}} \right] (3.21)$$

нли в безразмерных величинах:

$$f(\overline{x}) = \frac{\overline{U}'(\overline{x})}{\overline{U}^{b}(\overline{x})\overline{r_{0}}^{-c_{b}}(\overline{x})} \left[a \int_{0}^{\overline{x}} \overline{U}^{b-1}(\overline{\xi}) \overline{r_{0}}^{s_{b}}(\overline{\xi}) d\overline{\xi} + 153.2 \frac{R_{ax}}{r_{0ax}} \frac{R_{ax}}{R_{ax}} \right], (3.21')$$

где

$$R_{nx}^{**} = \frac{U_{nx} \delta_{nx}^{***}}{\nu} \quad R_{nx} = \frac{U_{nx} L}{\nu} .$$
В. Г. Саноян

Используя очевидное соотношение $\frac{R_{sx}^{**}}{R_{sx}} = \overline{\delta}_{bx}^{**}$ и поступая так же, как при выводе формулы (3.19), для безразмерной толщины потери импульса получим:

$$\begin{split} \overline{\delta}^{\,\mathfrak{s},\mathfrak{s},\mathfrak{s}} &= \left\{ \frac{1}{\overline{U}^{\mathfrak{b}-\mathfrak{s}_{/\mathfrak{s}}}\left(\overline{x}\right)\overline{r_{\mathfrak{0}}}^{\,\overline{\gamma}_{/\mathfrak{s}}}\left(\overline{x}\right)} \left[\frac{a}{153,2R_{\mathfrak{n}x}^{\,\overline{\gamma}_{/\mathfrak{s}}}} \int\limits_{\mathfrak{0}}^{\mathfrak{s}} \overline{U}^{\mathfrak{b}-\mathfrak{l}}\left(\overline{\xi}\right)\overline{r_{\mathfrak{0}}}^{\,\overline{\gamma}_{/\mathfrak{s}}}\left(\overline{\xi}\right) d \,\overline{\xi} + \right. \\ &+ \left. \left(\overline{r_{\mathfrak{0}}}_{\mathfrak{n}x}\delta_{\mathfrak{n}x}^{\mathfrak{s},\mathfrak{s}}\right)^{\overline{\gamma}_{/\mathfrak{s}}} \right] \right\}^{\mathfrak{s}_{/\mathfrak{s}}} \end{split}$$
(3.22)

Имея величину $\overline{\delta}^{**}(\overline{x})$, сразу можно определить $\overline{\delta}^*$, т. к.

$$\delta^*(\mathbf{x}) = \mathbf{H} \ \delta^{**}(\mathbf{x}) = (1,3 \div 1,4) \ \delta^{**}(\mathbf{x}).$$

Как было сказано выше, изложенный метод расчета пограничного слоя пригоден при малых продольных перепадах давлений, когда турбулетный пограничный слой не близок к отрывному состоянию и поэтому можно было входящие в выражение F(f) функции $\zeta(f)$ и H(f)заменить их значениями при f=0, делая тем самым предположение в постоянстве H и ζ .

При больших продольных перепадах давлений такое предположение недопустимо. В этом случае можно пользоваться табл. 2 для зависимостей величии $\overline{\zeta} = \frac{\zeta}{\zeta_0}$ и $\overline{H} = \frac{H}{H_0}$ от $\overline{f} = \frac{f}{f_s}$, заимствованной из статьн [^a].

Здесь f_s — значение параметра f в точке отрыва $x = x_s$, а ζ_0 н H_0 — значения ζ н H при f = 0.

Как известно, пограничный слой не только управляется внешним потоком, но и сам оказывает обратное влияние на внешний

Таблица 2

T	7	Ħ	ī	τς.	H	ſ	<u>ī</u>	H
-0.95	1,63	0.85	$\begin{array}{c} -0,30\\ -0,20\\ -0,10\\ 0\\ 0,10\\ 0,20\\ 0,30 \end{array}$	1,21	0,95	0,40	0,69	1,10
-0.90	1,60	0.86		1,14	0,97	0,50	0,60	1,125
-0.80	1,53	0.87		1,08	0,935	0,60	0,515	1,16
-0.70	1,47	0.88		1,00	1,00	0,70	0,42	1,20
-0.60	1,41	0.90		0,93	1,02	0,80	0,31	1,26
-0.50	1,34	0.915		0,85	1,04	0,90	0,175	1,35
-0.40	1,28	0.93		0,77	1,07	1,00	0	1,48

поток. Для количественной оценки этого влияния покажем, что в принятом ранее приближении $\left(\frac{\beta y}{r_0} \ll 1\right)$ теорема Лойцянского ([1], стр. 641—645) остается в силе и в случае течения вязкой жидкости в диф-

фузоре круглого сечения и ее можно сформулировать так: действительное распределение давления по поверхности заданного диффузора совпадает с распределением давления при безвихревом течении в "фиктивном диффузоре", образованном поверхностью смещенной относительно поверхности диффузора во внутрь потока на величину толщины вытеснения.

Для доказательства, наряду с действигельным потоком жидкости в диффузоре, рассмотрим воображаемый потенциальный поток, который непрерывно распространяется в область, занятую — пограничным слоем. Рассмотрим (фиг. 7) действительную линию тока (сплошная линия) и линию тока потенциального потока (пунктирная линия); они совпадают на входе в диффузор.



Фиг. 7.

Составим условие одинаковости расхода в действительном и воображаемом потенциальном потоках проходящего через кольцевые сечения $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_1M'}$, отсчитанные от внешией границы пограничного слоя:

$$2\pi \int_{0}^{\delta} rudy = 2\pi U \int_{y+\overline{M}\overline{M'}}^{\delta} rdy \ .$$

Отсюда следует, что:

$$\int_{y}^{s} \left(1 - \frac{\beta y}{r_0}\right) \frac{u}{U} dy = -\int_{s}^{y + MM'} \left(1 - \frac{\beta y}{r_0}\right) dy$$
(3.23)

Из последнего выражения получим:

$$\int_{y}^{y+MM'} \left[1-\frac{\beta y}{r_0}\right] dy = \int_{y}^{z} \left[1-\frac{\beta y}{r_0}\right] \left[1-\frac{u}{U}\right] dy , \qquad (3.24)$$

Обозначая

$$\int_{\mathbf{y}} \left(1 - \frac{\beta \mathbf{y}}{\mathbf{r}_0} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{u}}{\mathbf{U}} \right) \, \mathrm{d}\mathbf{y} = \delta^*(\mathbf{y}), \tag{3.25}$$

из (3.24) получим следующее квадратное уравнение относительно MM':

$$\frac{\beta \overline{M}\overline{M}^{12}}{2r_0} = \overline{M}\overline{M}' \left(1 - \frac{\beta y}{r_0}\right) + \delta^*(y) = 0,$$

решение которого дает:

$$\overline{\mathrm{MM}}' = \frac{\mathbf{r}_0}{\beta} \left[\left(1 - \frac{\beta y}{r_0} \right) - \sqrt{\left(1 - \frac{\beta y}{r_0} \right)^2 - \frac{2\beta}{r_0}} \, \delta^*(y) \right]. \quad (3.26)$$

На границе пограничного слоя ($y = \delta$) по (3.26) $\overline{MM}' = 0$ (обе линии совпадают).

 На поверхности диффузора (у = 0), где действительная линия тока совпадает с нею;

$$\overline{MM'} = \frac{\mathbf{r}_0}{\beta} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\beta}{\mathbf{r}_0}} \Delta^* \right)$$
(3.27)

Разлагая ввиду малости значения, Δ* во всех степенях, кроме первой, получим (на поверхности диффузора)

$$\left(\overline{MM}'\right)_{y=0} = \Delta^* = \int_0^0 \left(1 - \frac{\beta y}{r_0}\right) \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy . \tag{3.28}$$

При $\frac{\beta y}{r_0} \ll 1$ будем иметь

$$(\overline{MM'})_{y=0} = \iint\limits_{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = \delta^*,$$
 (3.29)

 т. е. на поверхности диффузора оттеснение линии тока воображаемого потенциального потока равияется толщине вытеснения.

Таким образом, основная поверхность диффузора в случае действительного пвижения должна быть в воображаемом безвихревом потоке заменена некоторой "фиктивной" поверхностью, образованной смещением основной поверхности внутрь потока на величину, равную толщине вытеснения, рассчитанной по действительному распределению давления. (В силу малости толщины пограничного слоя, давления в построенном таким образом потенциальном потоке, а следовательно, и продольные скорости будут совпадать с давлениями и скоростями в потоке на внешней границе пограничного слоя.) Заметим, что ц том случае, когда толщина пограничного слоя ведостаточно мала по сравнению с радиусом сечения диффузора, смещение "фиктивной поверхности" относительно действительной поверхности диффузора будет определяться величиной <u>MM</u>['], определяемой по (3.27).

Расчет диффузора производится методом последовательных приближений. Сначала решается задача для случая безвихревого течения адеальной жидкости в диффузоре. По полученному распределению скоростей вдоль поверхности диффузора определяется поведение толщины вытеснения, по которой строится "фиктивная" поверхность диффузора, и определяется идеальное распределение скоростей по этой поверхности и т. д. Практически бывает достаточным ограничиться одним-двумя приближениями.

4. Расчет конического диффузора

Для иллюстрации хода расчета по вышеизложенному методу, произведем расчет конического диффузора, параметры которого суть: длина L=1,1 *м*, входной радиус r_{sx} = 0,175 *м*, и выходной радиус r_{вих} = 0,300 *м*, при R_{sx} = 2,1 · 10⁶.

Так как диффузор конический, то естественно поле скоростей или давлений принять в первом приближении таким же, как и соответствующее поле от точечного источника (в последием случае линии тока прямолинейны). В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам, принимая за масштаб длины длину диффузора, за масштаб скорости — осевую скорость во входном сечении. Обозначения оставляем те же.

Уравнение образующей диффузора булет:

$$r = r_{nx} + \frac{r_{nxx} - r_{nx}}{L} z.$$

Абсцисса расположения источника (фиг. 8)



Фиг. 8.

Известия IX, № 3-6

В. Г. Саноян

$$z_0 = \frac{r_{\text{bx}}}{r_{\text{bxx}} - r_{\text{bx}}} = 1.40, \label{eq:z0}$$

Расстояние от кромки входного сечения до точечного источника

$$R_0 = \sqrt{z_0^2 + r_{Bx}^2} = 1.41.$$

Полная скорость в любой точке на стенке диффузора будет

$$U = \left(\frac{z_0}{R_0 + x}\right)^2,$$

где х измеряется вдоль образующей диффузора.

Воспользовавщись (3.17') и (3.19) и учитывая очевидную связь:

$$r_0 = x \sin \alpha + r_{ux} = \frac{r_{ux}}{R_0} (x + R_0),$$

после простых расчетов получим:

$$\begin{split} \mathbf{f} &= -0,43 \, \left[\left(\begin{array}{c} 1+\frac{\mathbf{x}}{1,41} \end{array} \right)^{5,43} \, -1 \right], \\ \delta^{**} &= \frac{0,00198}{\mathsf{R}_{\mathsf{ex}}^{0,17}} \, \left(\begin{array}{c} 1+\frac{\mathbf{x}}{1,41} \end{array} \right)^{1,34} \left[\left(1+\frac{\mathbf{x}}{1,41} \right)^{5,43} -1 \right]. \end{split}$$

Путем деления f(x) на f_s = — 3,3 получим f(x), затем из табл. 2 определяем H (f). После этого

$$\delta^*(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{\bar{1}})\delta^{**}(\mathbf{x}).$$

Основные результаты расчетов приводится в табл. 3.

Таблица З

							A LULIDON REPORT A POINT
x	— î	5 * #	ī	$\overline{\mathrm{H}} \leftarrow \frac{\mathrm{H}}{1,4}$	н	8*	δ*cos₁ (1=0,993)
0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1,0	0 0,194 0,456 0,797 1,244 1,805 2,525 3,400 4,520 5,840 7,480	0 0,020314 0,000705 0,001220 0,001910 0,002780 0,003960 0,005410 0,007250 0,009550 0,012000	0 0,0590 0,138 0,241 0,377 0,548 0,766 1,030 1,370 1,770 2,270	1,00 1,01 1,03 1,05 1,09 1,14 1,24 1,48 1,48 1,48	1,40 1,41 1,44 1,47 1,52 1,60 1,74 2,07 2,07 2,07 2,07	0 0,000443 0,001015 0,00179 0,00291 0,00412 0,00687 0,01120 0,01500 0,01975 0,02480	0 0,00044 0,00101 0,00178 0,00289 0,00409 0,00642 0,01110 0,01490 0,01490 0,01490 0,01490

Откладывая от конической поверхности диффузора внутрь потока толщину вытеснения получим "фиктивную" поверхность диффузора, показанную на фиг. 9.

Теперь нало определить идеальное распределение скоростей по этой "фиктивной" поверхности. Для этого воспользуемся методом, предложенным в § 2. Сравнивая кривую меридионального сечения

82

фиктивного диффузора с серией теоретических кривых, видим, что сна мало отклоняется от линии тока источника. Поэтому, если за



Фиг. 9.

серийную функцию тока принять функцию тока источника и использовать некоторую исправляющую функцию тока $\psi^{(дов)}$, получим функцию тока исправленного движения.

Тогда

$$\psi^{(cep)} = 1 - \cos z_1 = 1 - \frac{1.807 + z}{\sqrt{(1.807 + z)^2 + r^2}}$$
.

В нашем случае г₁ = 0.203, г₂ = 0.211, b = d = 0.5. Принимая параметр x = 0.5 (при котором на концах интервала дополнительная скорость имеет величину порядка 2% от основной скорости), получим: A = 0.01288, B = -0.985 A. Дополнительное распределение скорости будет иметь слелующее выражение:

 $V_{oz}^{(zon)} = 0,01288 (1-0,985z)e^{-4z^4}.$

Затем по (2.10) или (2.12) определяем составляющие скорости и функцию тока в каждой точке течения, после чего строим исправленный профиль диффузора. Результаты расчетов приведены на фиг. 10 п в табл. 4.



83

Этот диффузор был исследован экспериментально. Общий вид экспериментальной установки показан на фиг. 11. Воздух из помещения засасывался центробежным компрессором и нагнетался в напорную камеру, где, проходя через ряд сеток, успокаивался и под дав-



Фиг. 11.

лением поступал в четырехугольный переходной участок, заканчивающийся конфузором. На выходе конфузора получалось почти равномерное поле скоростей. Из конфузора воздух попадал в исследуемый диффузор. В одиннадцати сечениях на стенке диффузора были сделаны отверстия диаметром 1 мм для измерения давлений.

Измерение давлений на поверхности диффузора выполнялось обычным путем — с помощью дреняжных отверстий в соответствующих сечениях. Постоянство давления по сечению проверялось и оказывалось достаточно удовлетворительным.

В различных точках на образующей диффузора определялись значения величины

$$C_{p} = \frac{P_{\text{BMX}} - P}{\frac{\rho \, V_{\text{BX}}^2}{2}} \ , \label{eq:cp}$$

представляющей функцию безразмерного расстояния z, определяемогоотношением расстояния z₁ от данного сечения до входного, к длине L диффузора. При этом коэффициент полезного действия получается равным

$$\eta_{a}=C_{o}\left(0\right).$$

На фиг. 12 приведен результат сравнения теоретического расчета (последняя графа табл. 4) и экспериментального определения величины Ср.

2	r	$V_{\chi}^{(cep)}$	V _f ^(cep)	V _z ^(Aon)	V _r ^(gon)	
-0,5	0,160	0,9883	0,0377	0,0189	-0,0064	
-0,4	0,170	0,8875	0,0793	0,0314	-0,0070	
_0,3	0,180	0,8035	0,0680	0,0398	-0,0062	
-0,2	0,191	0,7260	0,0658	0,0462	-0,0038	
-0,1	0,201	0,6610	0,0602	0,0485	0,0005	
0	0,211	0,6065	0,0555	0,0461	0,0050	
0,1	0,2195	0,5570	0,0510	0,0389	0,0087	
0,2	0,227	0,5138	0,0466	0,0292	0,0102	
0,3	0,2345	0,4740	0,0426	0,0191	0,0101	
0,4	0,2415	0,4406	0,0393	0,0105	0,0032	
0,5	0,249	0,4100	0,0364	0,0047	0,0057	

	100				
	n n	21		18-	- A -
1.6	ua.	164	624	66.0	x

$V_z - V_z^{(cep)} V_z^{(aon)}$	$V_r^{(cep)}V_r^{(zon)}$	V_{χ}^{2}	V ^a r	V²	$\begin{array}{c} C_p = V^{2-} \\ -V^2_{BMX} \end{array}$		
0,9694	0,0941	0,9400	0,0089	0,9489	0,7837		
0,8561	0,0863	0,7415	0,0074	0,7489	0,5337		
0,7637	0,0742	0,5830	0,0055	0,5885	0,4233		
0,6798	0,0396	0,6423	0,0048	0,4671	0,3019		
0,6125	0,0597	0,3752	0,0036	0,3788	0,2136		
0,5604	0,0505	0,3141	0,0026	0,3166	0,1514		
0,5181	0,0423	0,2685	0,0018	0,2703	0,1051		
0,4846	0,0364	0,2348	0,0013	0,2361	0,0709		
0,4549	0,0325	0,20:0	0,0011	0,2081	0,0429		
0,4300	0,0311	0,1850	0,0010	0,1860	0,0208		
0,4053	0,0307	0,1643	0,000Э	0,1652	0		
	1						

Как видно из этого графика, экспериментальные точки (крестики) достаточно хорошо ложатся на теоретическую кривую (сплошная линия). На входе в диффузор экспериментальная точка лежит несколько выше теоретической. Это можно объяснить тем, что при теоретическом расчете профиль скоростей на входе принимался однородным, а в эксперименте профиль скоростей все же представлял собой



слегка вогнутую кривую (завышение скорости у стенок). Эта вогнутость профиля скоростей при удалении от входа постепенно сглаживается и экспериментальные точки мало отличаются от теоретических. Кружками на том же графике обозначены величины С_р для того случая, когда профиль скоростей на входе получался недостаточно однородным. Можно заключить, что и в этом случае совпадение с теорией хорошее. Только во входном сечении значение С_р оказалось преувеличенным. Это и подтверждает ранее сказанное о влиянии формы профиля скоростей на входе.

Очевидно, что для правильного экспериментального определения коэффициента уд необходимо добиваться однородности профиля скоростей на входе, в противиом случае, точное определение этого коэффициента становится невозможным.

Заключение

В статье предлагается новый метод для приближенного решения прямой задачи об определении поля скоростей и давлений в осесимметричном диффузоре (конфузоре) произвольного профиля. Метод основан на идее введения малых поправок в заранее известное теоретическое решение для диффузора (конфузора), по профилю близкого к рассчитываемому.

Разработанный метод решения прямой задачи применим при рассмотрении вопроса о влиянии вязкости на распределение давлений в диффузоре или конфузоре, что имеет особо важное значение при расчете диффузора.

Для учета влияния пограничного слоя использован приближенный метод расчета турбулентного пограничного слоя, предложенный Л. Г. Лойцянским и распространен на случай пограничного слоя в осесимметричном канале переменного сечения.

Как показали проведенные расчеты, метод дает хорошее совпадение теоретически рассчитанного к. п. д. с действительным, при условии однородности поля скоростей на входе и малой толщины пограничного слоя сравнительно с радиусом поперечного сечения диф-

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность профессору дактору физ.-мат. наук Л. Г. Лойцянскому за ценные указания по данной работе.

Водно-энергетический институт АН Армянской ССР

Поступило 20 Х11 1954 г.

gmiaymn .4 .b

նենան գորան անվանվել է գատանություն է հայտանությունը էրությունը հայտները անվանվել հայտեր հայտարությունը էրությունը էրությունը հայտանությունը էրուցուցը էրությունը էրությունը էրությունը հայտանու հայտանությունը էրությունը էրությունը էրությունը էրությունը հայտանու հայտանությունը էրությունը էրուցում էրությունը էրունը էրունը հայտեն էրուցները էրուցները կատեն էլ էրունը էրունը էրունը էրունը հայտենը հայտանությունը էրուցները հայտենում էրունը էրունը էրունը հայտենը հայտենը էրունը էրունը էրունը երունընը էրունը էրունը հայտենը էրունը երանում հայտենում էլ էրունը էրունը էրունը էրունը հայտենը էրունը երանունը երանումը երանունը էրունը էրունը էրունը էրունը հայտենը էրունը էրունը հայտենը էրունը էրունը էրունը էրունը էրունը հայտենը էրունը էրունը հայտենինը են հայտենը էրունը էրունը էրունը էրունը էրունը էրունը հայտենը են հայտենը էրունը են հետենը են հետեն

(*2) «dymi ginamani, ymph n dynh, alan og som og s

ւիովղղըունդտոր չակառուցվառու չ րոսիվատուկ միվաիշտչ վվահոսիչվվ

գրես նարվածում, որպես օրինավ, արված է կոնական դիֆուզորի հաջվարկը վերշերչյալ մեննորը (եկ. 12)։ Ինչպես երևում է նկ. 12-ից, աևականո ված C_p-ի արժեքները (եկ. 12)։ Ինչպես երևում է նկ. 12-ից, աևականո ված C_p-ի արժեքները (եկ. 12)։ Ինչպես երևում է նկ. 12-ից, ակական ուպիտում է նկարում է նկ. 12)։ Հայան հետրում է նկ. 12-ից, ակական ստականում է հետ հետրությունները (հետ հետրում է նկ. 12-ից, անսկան հետրում է հետրությունները (հետրում է նկարում է նկ. 12-ից, անսկան հետրում է հետրությունները (հետրում է հետրում է նկ. 12-ից, անսկան հատրուն հետրում է հետրությունները (հետրում է հետրում է հետրում է հետրում է հետրում է հետրությունները է հետրուների հետրունները է հետրում է հետրում է հետրությունները է հետրությունները է հետրությունները է հետրում է հետրությունները է հետրությունները է հետրում է հետրությունները է հետրուներին է հետրունները է հետրությունները է հետրում է հետրում է հետրունները է հետրուներին է հետրությունները է հետրունները է հետրում է հետրուններին է հետրուներին է հետրուններին է հետրուներին է հետրուններին է հետրունների

imay dadadem huma gasante da bandada bunda and

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1950.

2. Саноян В. Г. Построение очертания плоских и осесиммстричных диффузоров и конфузоров напорной системы по заданному распределению скорости на осн. Изв. АН Армянской ССР, серия ФМЕТ наук, VIII, 6, 1955. З. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. ГТТИ, 1948.

- 4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой на теле вращения. ДАН СССР, T. XXXVI, № 6, 1942.
- 5. Лойцянский Л. Г. Приближенный метох расчета турбулентного пограничного слоя на профиле крыла, Прикл. мат. и мех., стр. 433-448, т. 1X, 1945.

20.340.405 000 9.501.6301.5562 0.40.960.035 559.540.962 ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Эрд.-имр., рб. 6 мбрб. дрямир. 1Х. № 3, 1956 Физ.-мат., естести, и техн. науки

М. Т. Айвазян

Импульсный спектр дейтронов в вертикальном потоке космического излучения

В работах Поуэла и сотрудников [1] было установлено, что в звездах ядер фотоимульсий, наряду с мезонами и нуклонами, появляются и дейтроны, которые составляют заметную часть среди ядерных осколков.

В работах Алиханяна и Марикяна [2, 3] было изучено рождение дейтронов нуклонами космического излучения в свинцовых поглотителях.

Однако до сих пор не имеется непосредственных экспериментальных работ, устанавливающих относительное число дейтронов в равновесном воздушном потоке протонов. С целью исследования этого вопроса нами на высоте 3200 м над уровнем моря были произведены специальные эксперименты с помощью магнитного спектрометра.

1. Описание установки

Для измерений применялся магнитный спектрометр [4, 5] значительно усовершенствованный и дополнённый пропорциональными счетчиками. Принципиальная схема магнитного спектрометра представлена ; на рис. 1.

В зазоре электромагнита, имеющего прямоугольные полюсы размером 65 × 20 см, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга, создавалось магнитное поле напряженностью в 7100 ос.

Счетчики Гейгера — Мюллера, сгруппированные в ряды, располагались так, как это показано на рис. 1. С помощью двойных рядов счетчиков K₁, K₂ и K₄, расположенных в зазоре, вдоль магнитных силовых линий, определялся импульс частиц по искривлению их пути в магнитном поле. Ряд K₃ (расположенный также в зазоре) служвл для контроля достоверности траекторий.

Импульсы частиц P = 0,4. 0,8. 1, 2, 5 н 10 <u>Бэв</u> измерялись, соответственно, с неточностями 5. 4,5, 5, 9, 25 н 50%/о.

По срабатываниям в нижних шести двойных рядах счетчиков Гейгера — Мюллера, чередуемых с медными поглотителями с общей поверхностной плотностью 178 г/см² определялись места остановок частиц в веществе. Эти поглотители давали возможность разделить потоки протонов от потоков р-мезонов, останавливающихся в них. Поверхностные плотности отдельных медных поглотителей были П₁ — 10.45 г/см², П₂ — 17.5 г/см², П₃ — 22.2 г/см². П₄ — 35,3 г/см², П₅ — 51,8 г/см² н П₆ — 34,5 г/см². На полюсах магнита были расположены счетчики Т₁, дающие возможность исключить частицы, рассеянные от полюсов.





Рис. 1. Схема магнатного спектрометра (разрезы в двух перпендикулярных плоскостях) N и S — полосы электромагнита, П₀ — П₆ — поглотители, К₁ — К₁, Т₁, Т₂ и В₁ В₂ — ряды счетчиков Гейгера—Мюллера. Р— двухслойный пропорциональный счетчях.

Непосредственно над магнитным зазором находились два пропорциональных счетчика. Над пропорциональными счетчиками на расстояния 65 см от полюсов находился свинцовый поглотитель П₀ с поверхностной плотностью 32 г/см². Назначение этого поглотителя состояло в поглощении электронно-фотонной компоненты космического излучения.

Применявшийся пропорциональный счетчик конструкции Харитонова В. М. представлял собой прямоугольную коробку, изготовленвую из дюралюминия, разделенную на две части медной фольгой толщиной в 0,2 мм. Толщина наружных стенок была 3,5 мм. Толщина каждого счетчика равнялась 3,9 см, длина — 44 см, ширина — 11 см. В центре каждого пропорционального счетчика была натянута молибденовая проволока диам. 0,1 мм, служащая анодом. В медной перегородке имелись отверстия, вследствие чего давление газовой смеси в обоих счетчиках было одинаковым. Пропорциональные счетчики были наполнены смесью 25% аргона и 75% метана до давления 40 см ртутного столба. Пропорциональные счетчики со всех сторон были окружены счетчиками Гейгера — Мюллера, дающими возможность отбирать только те частицы, которые не сопровождались ливнями. Пропорциональные счетчики работали при напряжении 2600 вольт и имели газовое усиление порядка 100.

Усилительно-регистрирующие каналы обоих пропорциональных счетчиков были совершенно одинаковыми и состояли из:

 Предварительного широкополосного усилителя, охваченного сильной отрицательной обратной связью с катодным повторителем на выходе; коэффициент усиления усилителя равнялся 100;

 Промежуточного широконолосного усилителя с регулируемым коэффициентом усиления в пределах от 5 до 100, также охваченного обратной связью;

3. Затягивателя и инвертора с общим усилением порядка 40.

Импульсы с инвертора подавались непосредственно на отклоняющие пластины осциллографической трубки, с одного канала на горизонтально отклоняющие пластины, с другого на вертикально отклоняющие. Таким образом, отклонение луча на экране осциллографической трубки представляло собой векторную сумму отклонений в отдельных каналах. Зная наклон и длину следа луча, мы могли определить величину отклонения в каждом канале отдельно.

Все лампы каналов, а также и электроды осциллографической трубки питались от соответствующих стабилизованных источников интания.

При испытании системы было установлено, что завал амплитудной характеристики при отклонении луча на весь экран осциллографической трубки не превышал 2%.

При срабатывании установки одновременно со вспышками неоновых лампочек происходило и подсвечивание луча осциллографической трубки. Луч автоматически фотографировался на кадре киноленты.

Регистрация частицы происходила только в случае ее прохождения через ряды счетчиков К₁, К₂ и К₄ и остановки в одном изнижних поглотителей. Таким образом, установка давала возможность для каждой зарегистрированной частицы получать сведения о ее импульсе, пробеге в веществе и понизующей способности.

2. Градуировка пропорциональных счетчиков

Для градупровки системы пропорциональных счетчиков, из числа зарегистрированных частиц, отбирались две группы протонов с импульсами в пределах 0,58 ≪ Р ≪ 0,71 и 0,71 ≪ Р ≪ 0,90 $\frac{5_{3B}}{c}$ остановившихся в поглотителях П₃ и П₄, благодаря только ионизационным потерям энергий.

Дейтроны, ионизационно остановившиеся в тех же поглотителях, имели значительно большие импульсы и, следовательно, не могли попасть в отобранный поток протонов.

В число отобранных протонов не вошли также те, которые сопровождались разрядом в счетчиках рядов Т'2 и дополнительными разрядами в счетчиках рядов В₁ и К₁. Наличие этих разрядов указывало на существование ливневого сопровождения. Не брались также протоны, не вызвавшие разрядов в счетчиках ряда В₁, то есть генерированные нейтронами в стенках пропорциональных счетчиков.

Таким образом, в результате отбирались только ионизационно остановившиеся протоны, не имеющие видимого сопровождения вторичными частицами при прохождении через объемы пропорциональных счетчиков. За время эксперимента нам удалось отобрать из числа зарегистрированных протонов 678 со средним импульсом $\bar{P} = 0,64 \frac{\bar{D}$ эв и 835 протонов с $\bar{P} = 0,80 \frac{\bar{D}$ эв. За то же время эксперимента были зар

регистрированы 645 р-мезонов с импульсами в пределах $0,18 \le P <$

Эти и-мезоны остановились ионизационно в поглотителях Π_3 и Π_6 и отбирались по тому же методу, что и протоны. Средние импульсы этих мезонов соответствению были P = 0,185 и P = 0,36 $\frac{\text{Бэв}}{\text{с}}$.

На рис 2. представлена градупровочная линня канала нижнего пропорционального счетчика, на основании данных которого и составлена приводимая работа. Градупровка произведена по данным о ионизующей способности отобранных четырех групп частиц. По осн абсцисс отложены теоретические значения ионизации \bar{Q} в электронвольтах, рассчитанные по формуле Бете-Блоха [6,7] для нашего счетчика. По оси ординат средние длины следов луча \bar{l} на экране осциллографической трубки в условных единицах. Величина средней длины луча для каждой группы частиц рассчитывалась по формуле





$$\overline{l} = \frac{\int_{0}^{\infty} lN(l) dl}{\int_{0}^{\infty} N(l) dl},$$

где N-число частиц в интервале 1+1+ dl.

На рисунке приведены среднеквадратичные ошибки.

Как видно из рис. 2, зависимость $\overline{I} = f(\overline{Q})$ получается прямой линией. Это естественно, так как пропорциональный счетчик работал при малом значении коэффициента газового усиления, а амплитудная характеристика всего канала усиления была прямолинейной.

3. Результаты измерений

После получения градуировочной кривой из всего потока частиц, зарегистрированных магнитным спектрометром, отбирались только те, которые останавливались в поглотителях П₂ и П и при этом имели импульсы в пределах, соответствующих ионизационным и ядерным остановкам дейтронов в этих поглотителях, т. с. для поглотителя П₂ с импульсами Р≥0.7 Бэв п — П₃ с импульсами Р≥0,8 Бэв с. Нами не производилось исследование дейтронов, остановившихся в поглотителях П₁ и П₄ — П₆ из-за большого фона других частии. В число таким образом отобранных частиц могли попасть, кроме дейтронов, протоны и π-мезоны, остановившиеся в этих поглотителях благодаря ядерным взаймодействиям. Число π-мезонов в воздухе весьма незначительно по сравнению с протонами. Однако π-мезоны с такими импульсами могут рождаться в ноглотителя (32 г/см²) число их будет незначительным.

Таким образом, можно заключить, что отобранные частицы являются в основном протонами с некоторой примесью дейтронов.

Затем все отобранные частицы группировались по интервалам импульсов, для отдельных интервалов подсчитывалась 'средняя величина длины 'следа луча Т, и средняя величина импульса Р. По формуле Бете — Блоха подсчитывались величины средних ионизаций Q_P и Q_b для протонов и дейтронов, обладающих средними значениями импульсов, а по градуировочной линии рис. 2 определялись соответствующие значения Т. Все результаты расчетов сведены в столбцы 1-5 таблицы.

$\frac{\overline{P}}{\frac{B_{9B}}{c}}$	1 11-	Протоп		Дейтрон		Поглотитель				-		No
	npo					El 2		Па		I		
	$\widetilde{Q} p_{_{\mathfrak{B} \mathfrak{B}}}$	Ĩp	$\overline{\mathbb{Q}}_{_{\mathfrak{R}}}_{_{\mathfrak{R}}}$	īp	Na	ī,	N ₃	- To	погло- тит. Па	ногло- тит, Па	NP.	NP
1	2	3	4	5	6	7	8	-9	10	11	12	13
0,75 0,85 0,98 1,16 1,6	8160. 7200 6300 5670 4900	$ \begin{array}{r} 10.8 \\ 9.6 \\ 8.4 \\ 7.5 \\ 6.5 \\ \end{array} $	21700 18050 14870 11730 8110	28,9 24,1 19,8 15,6 10,8	$55 \\ 52 \\ 46 \\ 41 \\ 52$	$\begin{array}{c} 11.7\\ 12.7\\ 10.6\\ 10.2\\ 6.3\end{array}$	72 69 67 82	9.2 10,5 10,1 7,0	0,05 0,214 0,191 0,333 0.05	0,03 0,193 0,321 0,116	410 520 595 541 670 (825)	0,0074 0,021 0,046 0,08 0,022

В столбцах 6-9 приведены числа частиц и экспериментальные значения 1, в условных единицах.

Из таблицы видно, что экспериментальные значения в большинстве случаев оказываются больше, чем следовало ожидать для чистого потока протонов. Это особенно наглядно видно из рис. 3 п 4, на которых изображены кривые зависимости средней ионизации I, в условных единицах от теоретического значения средней ионизации Qp.

Прямая линия на обоих рисунках является градуировочной линией.

96

Так как среди взятых частиц не могло быть других частиц кроме дейтронов, то ясно, что этот избыток ионизации вызван примесью дейтронов в потоке рассматриваемых протонов. На основании этого можно написать



Рис. 3. Кривая зависимости средней понизации Тэ в условных единицах от теоретического значения средней ионизации Фрдля частиц дейтронной области, остановившихся в поглотителе Па.

где « — относительная доля лейтронов в потоке рассматриваемых частиц, остановившихся в поглотителях П₂ и П₃. В 10 и 11 столбцах таблицы приволятся значения «, рассчитанные по этой формуле.

Для определения относительного числа дейтронов в истинном вертикальном потоке протонов, нами за это же время измерений были найдены числа протонов тех же импульсов, зарегистрированных известия IX, № 3—7

97

магнитным спектрометром. Числа этих протонов даны в 12 столбце таблицы. Число 825, взятое в скобки, есть исправленное число протонов с импульсом $\overline{P} = 1.6 \frac{\overline{D} \Im B}{c} \cdot$ Исправление произведено на число протонов, которые могли выйти из нижнего поглотителя без ядерно-





го взаимодействия и, вследствие наличия антисовпадения, не регистрировались. Истинное число протонов этого импульса приблизительно может быть подсчитано по формуле

$$N = \frac{N_{P}}{1 - e^{-\frac{X}{\lambda}}}$$

Импульсный спектр дейтронов в вертик. потоке косм. излуч.

- где N_P число протонов, зарегистрированных магнитным спектрометром,
 - х общая поверхностная плотность всех медных поглотителей равная 178 г/см²,

годаря ядерным язаимодействиям. Часть первых не доходила до поглотителей П₂ и П₃, а последних — проходила поглотители П₂ и П₃ без взаимодействий. Найденные истинные относительные числа дейтронов приведены в 13 столбце таблицы.

На рис. 5 приведены импульсные спектры протонов и дейтронов на глубине атмосферы 700 г/см². Спектр протонов взят из работы Кочаряна [8], а спектр дейтронов построен на основании данных 13 столбца таблицы и приводимого спектра.



Рис. 5. Импульсные спекторы протонов и дейтронов на глубине атмосферы 700 г/см². По оси абсцисс отложены импульсы Р в Бэв с, а по оси ординат интенсивности в см⁻²сек⁻¹ стер⁻¹ (Бэв с)⁻¹. Верхняя кривая соответствует протонам, нижняя дейтронам.

Максимум спектра дейтронов, по сравнению с максимум от спектра протонов заметно смещен в сторону больших импульсов. Этот результат естественен, так как сияд кривой в спектре частиц в области малых импульсов обусловлен ионизационными потерями энергий, а при заданном импульсе ионизационные потери дейтронов больше, чем для протонов.

Фактически нами определены относительные числа дейтронов и протонов не в воздухе, а под свинцовым поглотителем П₀ с поверхностной плотностью 32 г/см³. Выясним роль этого поглотителя.

Отметим, что роль ионизационных потерь энергии несущественно сказывается на виде спектра дейтронов. Действительно, наличие поглотителя П₀ в смысле ионизационных потерь энергии приблизительно эквивалентно увеличению глубины атмосферы на 20 г/см². Это не изменяет вида спектра, так как отношение чисел дейтронов и протонов на больших глубинах атмосферы слабо зависит от глубины, т. е. является равновесным.

Оценим роль ядерных процессов, происходящих в поглотителе Π_0 . Величина ядерного пробега дейтронов в свинце равна приблизительно 100 г/см². Следовательно, часть дейтронов, равная 1—е^{-0.32}=0,27, поглотится в свинце. Но это уменьшение воздушного потока дейтронов пополняется дейтронами, рожденными в звездах ядер свинца, вызванных нуклонами больших энергий. Ядерный пробег нуклонов в свинце имеет порядок 160 г/см². Величина пробега взаимодействия нуклонов с образованием звезд больше этого значения. Но не в каждой звезде образуются дейтроны, т. е. вероятность образования дейтронов меньше 1/e. Ясно, что основная часть дейтронов, надблюденных нами, идет из воздуха. И возможно, что немногим более 0,27 от воздушного потока образуется в свинце.

Институт физики АН Армянской ССР Поступило 28 XII 1955 г.

Մ. Տ. Այվազյան

ԴԵՅՏՐՈՆՆԵՐԻ ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ՍՊԵԿՏՐԸ ԿՈՍՄԻԿԱԿԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՄԱՆ ՈՒՂՂԱՁԻԳ ՀՈՍՔՈՒՄ

U. U & N & N h U

Աշխատու խյան մեջ նամեմ ատական նաշվիչի և մագնիսական սպեկարոմետրի ղուգորդման օգնու խյամբ չափված է դեյտրոնների ուղղաձիդ նոսթի ինտենսիվու խյունը ծովի մակարդակից 3200 մրարձրու խյան վրա։ Որոշված է դեյտրոնների բաշխումն բստ իրննց իմպուլսների 0,7 \leq P \leq 1,7 $\frac{\text{B9B}}{\text{C}}$ տիրույթում։ Այդ բաշխումը P = 1,15 $\frac{\text{B9B}}{\text{C}}$ իմպուլսի նամար ունի խիստ արատճայտված մաջոիմում։ Նշված իմպուլոի ճամար գեյտրոնների և պրոտոնների ինտենսիվությունների ճարարերությունը ճավասար է 0,08-ի։ Ավելի փոջը և մեծ իմպուլոների ճամար այդ ճարարերությունն արագ նվաղում է, ձգտելով գրոյի։

ЛИТЕРАТУРА

1. Поуэл К. Ф., Камерини У. и др. УФН. 43, 54, 1951.

2. Маршкян Г. А. ДАН СССР, 85, 305, 1952.

3. Алиханян А. И. н Марикян Г. А. ДАН СССР, 87, 191, 1952.

4. Алиханян А. И., Алиханов А. И. п Вайсенберг А. О. ДАН АрмССР. 5, 129, 1946.

5. Алиханян Л. И., Алиханов А. И. н Вайсенберг А. О. ЖЭТФ, 18, 301, 1948.

6. Rossi B. High-Energy Particles. N. J., 1952.

 Росси Б. и Грейзен К. Взаимодействие хосмических лучей с веществом. Москва, 1948.

8. Кочарян Н. М. ЖЭТФ, 28, 160, 1955.