

Г. В. Бадалян

## Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их применения\*

### § 4. Применения к функциям класса $H_1^2(-\infty, \infty)$

В настоящем параграфе мы займемся установлением аналогов ряда теорем предыдущего параграфа для функций

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zx} \psi(x) dx$$

(при некоторых предположениях), которые для краткости будут обозначены через

$$f(z) = \mathfrak{L}(\psi).$$

Предварительно введем некоторые определения и замечания.

*Определение (4.1).* Условимся считать, что функция

$f(z) \in H_1^2(-\infty, \infty)$ , если  $f(z) = \mathfrak{L}(\psi)$ , где  $\psi(x) \in L^2(e^{-x}, (0, \infty))$ .

*Замечание (4.1).* Если  $\psi(x) \in L^2(e^{-x}, (0, \infty))$ , тогда из

$$f\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \int_0^{\infty} e^{-iyx} e^{-\frac{x}{2}} \psi(x) dx$$

следует, что существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy$$

и

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy. \quad (4.2)$$

\* Окончание. Начало см. в № 5. «Известий» (т. VIII).

*Замечание (4.2).* Если  $f_1(z) = \mathfrak{E}\{\psi_1\}$  и  $f_2(z) = \mathfrak{E}\{\psi_2\}$ , где  $\psi_1(x)$  и  $\psi_2(x) \in L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$ , тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \psi_1(x) \overline{\psi_2(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1\left(\frac{1}{2} + iy\right) \overline{f_2\left(\frac{1}{2} + iy\right)} dy. \quad (4.2')$$

Ниже приводим два предложения, которые или известны, или являются очевидными модификациями известных теорем, см. [5].

*Теорема (4.1).* Пусть функции  $\psi(x)$  и  $\psi_n(x)$  принадлежат к  $L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$  и  $\psi_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходятся к  $\psi(x)$  в среднем и пусть  $f(z) = \mathfrak{E}\{\psi\}$  и  $f_n(z) = \mathfrak{E}\{\psi_n\}$ , тогда  $f_n\left(\frac{1}{2} + iy\right)$  сходятся к  $f\left(\frac{1}{2} + iy\right)$  в среднем на  $(-\infty, \infty)$  и  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  в обычном смысле, когда  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ .

Действительно, обозначим  $\Psi_n(x) = \psi(x) - \psi_n(x)$  и  $F_n(z) = f(z) - f_n(z)$ ; очевидно, что  $\Psi_n(x) \in L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$  и  $F_n(z) = \mathfrak{E}\{\Phi_n\}$ . Тогда, согласно (4.2'), имеем

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |\Psi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| F_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy.$$

Этим первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь  $\operatorname{Re}(z) = s > \frac{1}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} |f(z) - f_n(z)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-zx + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}} [\psi(x) - \psi_n(x)] dx \right| \ll \\ &\ll \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(2s-1)x} dx \int_0^{\infty} e^{-x} |\psi(x) - \psi_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \frac{\rho_n}{\sqrt{2s-1}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это значит, что при  $\operatorname{Re}(z) = s > \frac{1}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z).$$

Из теоремы (3.6) следует:

*Теорема (4.1').* Пусть ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ , где  $\psi_n(x) \in L^2\{e^{-x}, (0, \infty)\}$

сходится в среднем к функции  $\psi_n(x) \in L^2(e^{-x}, (0, \infty))$ , тогда ряд

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ , где  $\Phi_n(z) = \mathcal{L}\{\psi_n\}$ , сходится к  $\bar{f}(z) = \mathcal{L}\{\psi\}$  в среднем.

когда  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ , и в обычном смысле, когда  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ .

*Определение (4.2).* Введем обозначение

$$\Phi_n(z) = \mathcal{L}\{P_n\} \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $P_n(x)$  является  $\epsilon$ -квази-многочленом Лежандра.

*Замечание (4.3).* При  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$

$$\Phi_n(z) = \sqrt{2\gamma_n + 1} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (z - \gamma_\nu)}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (z - \gamma_\nu)},$$

а

$$\Phi_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \sqrt{2\gamma_n + 1} \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (iy - \gamma_\nu^*)}{\prod_{\nu=0}^{n-1} (iy + \gamma_\nu)},$$

где  $\gamma_\nu^* = \gamma_\nu + \frac{1}{2} > 0$ .

*Замечание (4.4).* Так как

$$\int_0^{\infty} e^{-x} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n, \end{cases}$$

то в силу (3.7') будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) \overline{\Phi_m\left(\frac{1}{2} + iy\right)} dy = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n, \end{cases} \quad (4.4)$$

т. е. система функций  $\left\{ \sqrt{2\pi} \Phi_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \bar{\Phi}_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right\}$  на  $(-\infty, \infty)$  ортогональна и нормальна.

*Теорема (4.2).* Система функций  $\left\{ \bar{\Phi}_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right\}$  при  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu + 1} = \infty$  фундаментальна в классе функций  $H_2^0(-\infty, \infty)$ .

Справедливость предложения следует из первого утверждения теоремы (4.1) и фундаментальности системы  $\{P_n(x), \mu\}$ .

*Теорема (4.4'). Система функций  $\{\tilde{\Phi}_n(z)\}$  фундаментальна в классе функций  $f(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$  в смысле равномерной сходимости, если только  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  и  $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\nu} + 1} = \infty$ .*

Сопоставим теперь функции  $f(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ , ее ряд Фурье по  $\{\tilde{\Phi}_n(\frac{1}{2} + iy)\}$ :

$$f\left(\frac{1}{2} + iy\right) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{\Phi}_n\left(\frac{1}{2} + iy\right),$$

где

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1}{2} + iy\right) \overline{\tilde{\Phi}_n\left(\frac{1}{2} + iy\right)} dy.$$

Тогда теорема А. Теплера (см. [4], стр. 307), применительно к нашему случаю формулируется так:

*Теорема (4.5). Из всевозможных линейных комбинаций*

$$U_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \sum_{k=0}^n a_k^* \tilde{\Phi}_k\left(\frac{1}{2} + iy\right)$$

*наименьшее значение интегралу*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{2} + iy\right) - U_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy = r_n^2,$$

где  $f(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ , доставляет отрезок ряда Фурье  $f\left(\frac{1}{2} + iy\right)$

$$S_n\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{\Phi}_k\left(\frac{1}{2} + iy\right), \quad (4.5)$$

причем

$$r_n^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2.$$

*Определение (4.3).* Введем обозначение  $\theta_n(z) = \varrho(\Omega_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\Omega_n(x) = \omega_n(e^{-x})$ ,  $x \in (0, \infty)$ .

*Замечание (4.5).* При  $-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n < \dots$

$$\theta_n(z) = \frac{1}{z + \gamma_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

а в случае, когда  $\Omega_n(x) = e^{-\gamma_m x} x^\nu$ , где  $m + \nu = n$ ,

$$\theta_n(z) = \frac{\Gamma(\nu)}{(z + \gamma_m)^\nu}. \quad (4.6)$$

*Определение (4.4).* Введем обозначение

$$\inf \left\{ \sup_{|z| > \sqrt{2\operatorname{Re}(z) - 1}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \theta_k(z) \right| \right\} = E_n(f),$$

где  $f(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ , когда  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$ ,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  произвольные числа.

*Теорема (4.6).* Справедливо неравенство

$$E_n(f) \leq \rho_n, \quad (4.7)$$

где

$$\rho_n = \left\{ \int_0^\infty e^{-x} |\psi(x) - S_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

$S_n(x)$  — отрезок ряда Фурье функции  $\psi(x)$  по  $\varepsilon$ -квази-многочленам  $\{P_k(x)\}$ , а  $\psi(x)$  определяется из  $f(z) = \mathfrak{L}\{\psi\}$ .

Действительно, из (4.3) следует, что

$$\begin{aligned} & \inf \sup_{|z| > \sqrt{2\operatorname{Re}(z) - 1}} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n \alpha_k \theta_k(z) \right| = \\ & = \min_{\alpha_k} \sup_{|z| > \sqrt{2\operatorname{Re}(z) - 1}} \left| \int_0^\infty e^{-zx} \left[ \psi(x) - \sum_{k=0}^n \beta_k \Omega_k(x) \right] dx \right| \leq \\ & \leq \sqrt{2\operatorname{Re}(z) - 1} \left\{ \int_0^\infty e^{-(2S-1)x} dx \int_0^\infty e^{-x} |\psi(x) - S_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = \rho_n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$E_n(f) \leq \rho_n. \quad (4.8)$$

Этим теорема доказана.

*Теорема (4.7).* Среди всевозможных функций

$$\sigma_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \theta_k(z) + \theta_n(z)$$

$$\min_{\alpha_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sigma_n \left( \frac{1}{2} + iy \right) \right|^2 dy$$

осуществляет функция

$$\sigma_n^*(z) = \frac{2\pi}{\alpha_{nn}} \int_0^\infty e^{-zx} P_n(x) dx. \quad (4.9)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \inf_{-\infty} \int \left| \sigma_n \left( \frac{1}{2} + iy \right) \right|^2 dy &= 2\pi \inf \int_0^\infty e^{-x} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \Omega_k(x) + \Omega_n(x) \right|^2 dx = \\ &= \frac{2\pi}{\alpha_{nn}} \int_0^\infty e^{-x} |P_n(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

*Определение (4.5).* Числа  $\mu_n$ , определенные условием (3.3), назовем моментными значениями функции  $f(z) = \mathfrak{L}\{\psi\}$ .

*Замечание (4.6).* Отметим, что, когда  $-\frac{1}{2} < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$ , то  $\mu_n = i(\gamma_n + 1)$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), т. е. моментное значение есть значение  $f(z)$  в точке  $z = \gamma_n + 1$ .

А в случае, когда  $\dots \leq \gamma_{k_m-1} < \gamma_{k_m} = \gamma_{k_m+1} = \gamma_{k_m+2} = \dots = \gamma_{k_m} < \gamma_{k_m+1} \leq \dots$

$$\mu_{k_m+v} = i^{(v)}(z+1)|_{z=\gamma_{k_m+1}}, \quad \text{а } 0 \leq v \leq k_m - k_m.$$

Здесь также возможны три случая:

1. Последовательность  $\{\mu_k\}$  конечная.
2. Последовательность  $\{\mu_k\}$  бесконечная и

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v+1} = \infty.$$

3. Последовательность  $\{\mu_k\}$  бесконечная, но

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v+1} < \infty.$$

Эти последовательности попережнему будут обозначены через  $\{\mu_k, n\}$ ,  $(M)$  и  $(\bar{M})$ .

Теперь мы можем, используя обобщенное равенство Парсеваля (3.7), сформулировать аналоги теорем (3.3), (3.4) и (3.5) для функции  $f(z) = \mathfrak{L}\{\psi\} \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ . Они соответственно будут:

*Теорема (4.8).* Среди всех функций  $f(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$  с заданной последовательностью моментных значений  $\{\mu_k, n\}$

$$\min_{-\infty}^{\infty} \int \left| \bar{f}\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy$$

осуществляется единственной функцией

$$\bar{f}_0\left(\frac{1}{2} + iy\right) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{2} + iy\right),$$

где

$$a_k = \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=0}^k a_{k\nu} \mu_{\nu}.$$

*Теорема (4.9).* Для того, чтобы (M) последовательность чисел  $\{\mu_n\}$  была последовательностью моментных значений функции  $\bar{f}(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ , необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2, \text{ где } a_n = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_k, \text{ а числа } \alpha_{nk} \text{ определяются из}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} Q_k(x).$$

Из теорем (4.1') и (4.9) следует представление функции  $\bar{f}(z)$  по ее моментным значениям, а именно справедливо предложение:

*Теорема (4.10).* Пусть задана (M) последовательность  $\{\mu_n\}$  моментных значений функции  $\bar{f}(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$ , тогда для всякого  $z$  при  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  справедливо представление

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{\Phi}_n(z), \text{ где } a_n = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_k,$$

а  $\alpha_{nk}$  определены в теореме (4.9).

В частном случае, когда  $-\frac{1}{2} < \gamma_0 = \gamma_1 = \dots$ , то получим предложение:

*Теорема (4.10').* Пусть функция  $\bar{f}(z) \in H_{\frac{1}{2}}^2(-\infty, \infty)$  задана своим элементом в точке  $\gamma_0 > -\frac{1}{2}$ , т. е. задана  $\{f^{(\nu)}(\gamma_0 + 1)\}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ,

Тогда для всякого  $z$  при  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$  справедливо представление

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sqrt{2\gamma_0 + 1} \frac{(z - \gamma_0)^{n-1}}{(z + \gamma_0)^n}. \quad (4.10)$$

где  $a_n = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}^* f^{(k)}(\gamma_0 + 1)$ , а коэффициенты  $\alpha_{nk}^*$  являются коэффициентами функции

$$Z_n(x) = e^{-\gamma_0 x} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}^* x^k = \frac{\sqrt{2\gamma_0 + 1}}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta + \gamma_0)^n}{(\zeta + \gamma_0)^{n+1}} e^{-\zeta x} d\zeta.$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что в данном случае

$$P_n(x) = Z_n(x) = e^{-\gamma_0 x} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk}^* x^k = \frac{\sqrt{2\gamma_0 + 1}}{2\pi i} \int_C \frac{(\zeta + \gamma_0)^n}{(\zeta - \gamma_0)^{n+1}} e^{-\zeta x} d\zeta.$$

В случае  $\gamma_0 = 0$ ,  $Z_n(x) = L_n(x)$  — многочлен Лагерра. Сформулируем, наконец, аналог теоремы (3.5).

*Теорема (4.11).* Среди всех функций  $f(z) \in H_1^2(-\infty, \infty)$  с заданной  $(M)$  последовательностью моментных значений

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{2} + iy\right) \right|^2 dy$$

осуществляет функция  $f_0(z) = \mathcal{L}\{\phi_0\}$ , где  $\phi_0(x)$  определена в теореме (3.5), причем, когда  $\operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}$

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{\Phi}_n(z), \quad a_n = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \mu_k.$$

### § 5. Применение к функциям класса $W_c$ .

В настоящем параграфе применяем обобщенные многочлены Лежандра к некоторым вопросам целых функций класса  $W_c$ .

*Определение (5.1).* Обозначим через  $W_c$  ( $W'_c$ ) класс целых функций  $f_2(z)$  ( $f_1(z)$ ), допускающих представление

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixz} g(x) dx \quad \left( f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixz} \phi(x) dx \right), \quad (5.1)$$

где  $g(x) \in L^2([-\sigma, \sigma])$  ( $\phi(x) \in L^2([-\sigma, \sigma])$  — четная (нечетная) функция).

Из известной теоремы Палей-Винера и из элементарных соображений следует, что:

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 dx < \infty \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du < \infty \right),$$

$$2. \quad f_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos z x g(x) dx \quad \left( f_1(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} \sin z x \psi(x) dx \right),$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du = \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx \quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du = \int_0^{\pi} |\psi(x)|^2 dx \right). \quad (5.2)$$

В статье [6] М. М. Джрбашяном и А. Б. Тавадяном решено несколько экстремальных задач относительно функций класса  $W_2$ , при этом ими использованы классические многочлены Лежандра, здесь введением квази-многочленов Лежандра, обобщается теорема 2 вышеуказанных авторов и решаются другие задачи.

Рассмотрим произвольную последовательность чисел  $\mu_{n_0}, \mu_{n_1}, \dots, \mu_{n_p}, \dots$  ( $\mu_{m_0}^*, \mu_{m_1}^*, \dots, \mu_{m_q}^*, \dots$ ) с целыми четными (нечетными) индексами  $0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_p < \dots$  ( $1 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_q < \dots$ ).

Введем обозначение:

*Определение (5.2).* Условимся считать, что  $f_2(z) \in W_2$  ( $f_1(z) \in W_1$ )

1. принадлежат к классу  $W_2^*(\mu_{n_p}, 0)$  ( $W_1^*(\mu_{m_q}^*, 0)$ ), если выполняются условия  $f_2^{(n_k)}(0) = \mu_{n_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, p$ ,  $f_1^{(m_k)}(0) = \mu_{m_k}^*$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, q$ .

2.  $f_2(z) \in W_2^*$  ( $f_1(z) \in W_1^*$ ) принадлежат к классу  $W_2^*(\bar{M}, 0)$ , ( $W_1^*(\bar{M}, 0)$ ), если выполняются условия  $f_2^{(n_k)}(0) = \mu_{n_k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  ( $f_1^{(m_k)}(0) = \mu_{m_k}^*$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ), когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k+1} < \infty \quad \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty \right).$$

Поставим задачу отыскания

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du \quad \left( \inf \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du \right)$$

для этих двух классов функций.

*Замечание (5.1).* Из представления

$$f_2(z) = \int_0^{\pi} \cos z x g(x) dx \quad \left( f_1(x) = \int_0^{\pi} \sin z x \psi(x) dx \right) \quad (5.1')$$

следует, что

$$\mu_{n_k} = \frac{(-1)^{\frac{n_k}{2}}}{\pi} \int_0^{\pi} x^{n_k} g(x) dx \quad \left( \mu_{m_k}^* = \frac{(-1)^{\frac{m_k-1}{2}}}{\pi} i \int_0^{\pi} x^{m_k} \psi(x) dx \right) \quad (5.3)$$

Обозначим теперь  $\mu_{n_k}(-1)^{\frac{n_k}{2}} = \tilde{\mu}_{n_k}$  ( $\mu_{m_k}(-1)^{\frac{m_k-1}{2}} = \tilde{\mu}_{m_k}^*$ ).

Из последнего замечания следует, что мы можем поставленные перед нами задачи свести к соответствующим задачам для функций  $g(x) \in L^2([0, \sigma])$ , ( $\psi(x) \in L^2([0, \sigma])$ ), для которых имеется та или другая последовательность обобщенных моментов  $\{\tilde{\mu}_{n_k}\}$  ( $\{\tilde{\mu}_{m_k}^*\}$ ).

Введем классификацию функций  $g(x)$  ( $\psi(x)$ ) согласно классификации, установленной в определении (5.2) для функций  $f_2(z)$  ( $f_1(z)$ ).

*Определение (5.2')*. Условимся считать, что

$$1. \quad g(x) \in L^2([0, \sigma], \tilde{\mu}_{n_p}) \quad (\psi(x) \in L^2([0, \sigma], \tilde{\mu}_{m_q}^*))$$

если соответствующая функция  $f_2(z) \in W_{\sigma}^*(\tilde{\mu}_{n_p}, 0)$  ( $f_1(z) \in W_{\sigma}^*(\tilde{\mu}_{m_q}, 0)$ ).

2.  $g(x) \in L^2([0, \sigma], \bar{M})$  ( $\psi(x) \in L^2([0, \sigma], \bar{M})$ ), если

$$f_2(z) \in W_{\sigma}^*(\bar{M}, 0) \quad (f_1(z) \in W_{\sigma}^*(\bar{M}, 0)).$$

Введенная классификация функций позволяет использовать теоремы (3.3\*), (3.4\*) и (3.5\*) для решения поставленных задач для функций  $f_2(z)$  ( $f_1(z)$ ).

*Определение (5.3)*. Для четкости введем обозначение

$$\begin{aligned} p_k(x, \sigma) &= p_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k) = \\ &= \frac{\sqrt{2n_k+1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^k (\zeta + n_v + 1)}{(\zeta + n_k + 1) \prod_{v=0}^k (\zeta - n_v)} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} p_k^*(x, \sigma) &= p_k^*(x, \sigma, m_0, m_1, \dots, m_k) = \\ &= \frac{\sqrt{2m_k+1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{v=0}^k (\zeta + m_v + 1)}{(\zeta + m_k + 1) \prod_{v=0}^k (\zeta - m_v)} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

где  $0 < x \leq \sigma$ ,

$$J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \cos zx P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k) dx, \quad (5.3')$$

$$J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \sin zx P_k^*(x, \sigma, m_0, m_1, \dots, m_k) dx$$

*Замечание (5.2).* Пусть функции  $\varphi(x)$  и  $\varphi_n(x)$  принадлежат классу  $L^2([0, \sigma])$  и пусть

$$F(z) = \int_0^{\sigma} \cos zx \varphi(x) dx \quad \left( F(z) = \int_0^{\sigma} \sin zx \varphi(x) dx \right),$$

$$F_n(z) = \int_0^{\sigma} \cos zx \varphi_n(x) dx \quad \left( F_n(z) = \int_0^{\sigma} \sin zx \varphi_n(x) dx \right).$$

Тогда  $F_n(z)$  сходится к  $F(z)$  в обычном смысле для каждого  $z$  с ограниченной мнимой частью, если только  $\varphi_n(x)$  сходится к  $\varphi(x)$  в среднем.

Действительно, имеем

$$|F(z) - F_n(z)| \leq \int_0^{\sigma} \left| \frac{\cos zx}{\sin zx} \right| |\varphi(x) - \varphi_n(x)| dx \leq$$

$$\leq e^{\tau \sigma} \left\{ \int_0^{\sigma} dx \int_0^{\sigma} |\varphi(x) - \varphi_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < e^{\tau \sigma} \sqrt{\sigma} \left\{ \int_0^{\sigma} |\varphi(x) - \varphi_n(x)|^2 dx \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{\sigma} e^{\tau \sigma} \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad (5.4)$$

где  $\tau = \operatorname{Im} z$ .

*Теорема (5.1).* Среди всех функций  $\tilde{f}_2(z) \in W_{\sigma}(\mu_{n_p}, 0)$

$$\inf_{-\infty}^{\infty} \int |\tilde{f}_2(u)|^2 du$$

осуществляет функция

$$F_2(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \cos zx g_0(x) dx = \sum_{k=0}^p a_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k), \quad (5.5)$$

где  $g_0(x) = \sum_{k=0}^p a_k P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k)$ ,  $a_k = \sum_{k=0}^k a_{k\nu}(\sigma) \tilde{\mu}^{\nu}$ , а числа

$a_{k\nu}(\sigma)$  определяются из

$$P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k) = \sum_{\nu=0}^k a_{k\nu}(\sigma) x^{2\nu}.$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что в силу теоремы (3.3\*) из всех функций  $g(x) \in L^2([0, \sigma])$  с заданной последовательностью  $(\tilde{\mu}_k, P)$  обобщенных моментов

$$\inf \int_0^{\sigma} |g(x)|^2 dx$$

осуществляет функция  $g_0(x) = \sum_{k=0}^n a_k p_k(x, \sigma, p_0, p_1, \dots, p_k)$  и использовать равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du = \int_0^a |g(x)|^2 dx.$$

Аналогично доказывается предложение:

*Теорема (5.2).* Среди всех функций  $f_1(z) \in W_{\sigma}^*(\mu_{m_q}, 0)$

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du$$

осуществляет функция

$$F_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^a \sin x \psi_0(x) dx = \sum_{k=0}^q a_k^* J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k), \quad (5.6)$$

где

$$\psi_0(x) = \sum_{k=0}^q a_k^* p_k^*(x, \sigma, m_0, m_1, \dots, m_k), \quad a_k = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{k\nu}^*(\sigma) \tilde{\mu}_{\nu}^*,$$

а числа  $\alpha_{k\nu}(\sigma)$  определяются из

$$p_k^*(x, \sigma, m_0, m_1, \dots, m_k) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{k\nu}^*(\sigma) x^{m_{\nu}}.$$

*Теорема (5.3).* Среди всех функций  $f_2(z) \in W_{\sigma}^*(\bar{M}, 0)$

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du$$

осуществляется функция

$$F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k), \quad (5.7)$$

где  $a_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{k\nu}(\sigma) \tilde{\mu}_{\nu}$ , а числа  $\alpha_{k\nu}(\sigma)$  определяются из

$P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{k\nu}(\sigma) x^{n_{\nu}}$ , причем ряд (5.7) сходится равномерно в каждой области изменения  $z = s + it$  с ограниченной  $J_m z = \tau$ .

Для доказательства теоремы заметим, что в силу теоремы (3.4\*) из всех функций  $g(x) \in L^2([0, \sigma])$  с заданной  $(\bar{M})$  последовательностью  $\{\mu_{0k}\}$  обобщенных моментов

$$\inf \int_0^{\sigma} |g(x)|^2 dx$$

осуществляет функция

$$g_0(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p a_k P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k),$$

которая на  $[0, \sigma]$  существует почти всюду;  $a_k = \sum_{v=0}^k \alpha_{k,v}(\sigma) \mu_v$ , а  $\alpha_{k,v}(\sigma)$  определяются так, как в предыдущей теореме.

С другой стороны,  $S_p(x) = \sum_{k=0}^p a_k P_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k)$  сходится в среднем к  $g_0(x)$  на  $[0, \sigma]$ , а это значит, что в силу замечания (5.2)

$$\Phi_p(z) = \sum_{k=0}^p a_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k)$$

сходится равномерно в каждой области  $z \in D$ , если только  $J_m z$  ограничена.

Из вышеприведенных рассуждений следует, что

$$F_2(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(z),$$

в силу обобщенного равенства Парсеваля, есть искомая теоремой функция.

Аналогичным образом доказывается

*Теорема (5.4).* Среди всех функций  $f_1(z) \in W_0\{\bar{m}, 0\}$

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du$$

осуществляет функция

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k), \quad (5.8)$$

где  $a_k = \sum_{v=0}^k \alpha_{k,v}^*(\sigma) \mu_v^*$ , а числа  $\alpha_{k,v}^*$  определяются из

$\rho_k(x, \sigma, n_0, n_1, \dots, n_k) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{k\nu}^*(\sigma) x^{m_\nu}$ , причем ряд (5.8) сходится равномерно в каждой области изменения  $z = S + it$  с ограниченной  $J_m z = \tau$ .

Теперь рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izx} \varphi(x) dx, \quad \text{где } \varphi(x) \in L^2([-\sigma, \sigma])$$

и поставим ранее рассмотренные задачи для  $f(z)$ .

С этой целью прежде всего заметим, что  $\varphi(x) = g(x) + \psi(x)$ , где  $g(x) \in L^2([-\sigma, \sigma])$ ,  $\psi(x) \in L^2([-\sigma, \sigma])$  соответственно четная и нечетная функции.

Замечание (5.2). Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du &= 2 \int_0^{\sigma} |g(x)|^2 dx + 2 \int_0^{\sigma} |\psi(x)|^2 dx = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du &= \int_{-\sigma}^{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} |g(x) + \psi(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^{\sigma} |g(x) + \psi(x)|^2 dx + \int_0^{\sigma} |g(-x) + \psi(-x)|^2 dx = \\ &= \int_0^{\sigma} [g(x) + \psi(x)][\overline{g(x) + \psi(x)}] dx + \int_0^{\sigma} [g(x) - \psi(x)][\overline{g(x) - \psi(x)}] dx. \end{aligned}$$

Продолжая выкладки, получаем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} |\varphi(x)|^2 dx = 2 \int_0^{\sigma} |g(x)|^2 dx + 2 \int_0^{\sigma} |\psi(x)|^2 dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du = 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(u)|^2 du + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(u)|^2 du.$$

Теоремы (5.1) и (5.2) в силу замечания (5.2) составляют обобщение теоремы 2 работы [6].

Замечание (5.3). Так как

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izx} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx g(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin zx \varphi(x) dx,$$

то всякая  $f(z) \in W_2$  представляется как  $f_2(z) + f_1(z) = f(z)$ , где  $f_2(z) \in W_2^*$ ,  $f_1(z) \in W_2^*$ .

Определение (5.4). Условимся считать, что  $f(z) \in W_2 \{A_i, B_i, 0\}$ ,  $i=1, 2$ ,  $j=1, 2$ , если  $f_2(z) \in W_2^* \{A_i, 0\}$ ,  $f_1(z) \in W_2^* \{B_i, 0\}$ , где  $A_1 = \mu_{np}$ ,  $A_2 = \bar{m}$ ,  $B_1 = \mu_{mq}$ ,  $B_2 = \bar{m}$ , причем допускаются всевозможные сочетания значений  $A_i$  и  $B_j$ .

Определение (5.5). Из всех функций  $f(z) \in W_2 \{A_i, B_j, 0\}$  через  $F_{ij}(z)$  обозначим ту функцию, которая осуществляет

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du.$$

Из определения (5.5), замечаний (5.2), (5.3) и из теорем (5.1)–(5.4) следует.

Теорема (5.5). Из всех функций  $f(z) \in W_2 \{A_i, B_j, 0\}$  функция  $F_{ij}(z) = F_2^{(ij)}(z) + F_1^{(ij)}(z)$ , где

$$F_2^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^p a_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k); \quad F_1^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^q a_k^* J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k);$$

$$F_2^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k); \quad F_1^{(2)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^* J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k + 1} < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k} < \infty,$$

причем последние ряды сходятся для всякого  $z$  с ограниченной мнимой частью.

Замечание (5.4). Функции  $J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k)$  и  $J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k)$  могут быть рассмотрены как обобщения функций Бесселя.

Определение (5.6). Обозначим

$$\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{n_k} = \omega_k(x, \sigma), \quad \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{m_k} = \omega_k^*(x, \sigma),$$

$$\theta_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos zx \omega_k(x, \sigma) dx,$$



$$\theta_k^*(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \sin zx \omega_k^*(x, \sigma) dx.$$

*Определение (5.7).* Обозначим через  $E_{pq}(f)$  взвешенное наилучшее приближение  $f(z) \in W_\sigma$  функциями вида  $\sigma_{pq}(z) = \sigma_p^*(z) + \sigma_q^*(z)$ , где

$$\sigma_p^*(z) = \sum_{v=0}^p b_v \theta_v(z), \quad \sigma_q^*(z) = \sum_{v=0}^q b_v^* \theta_v^*(z) \text{ при весовой функции}$$

$$\exp(-\sigma |J_m z|).$$

Обозначим соответственно через  $\rho_p(g)$  и  $\rho_q^*(\psi)$  среднеквадратические приближения функций  $g(x)$  и  $\psi(x)$  линейными агрегатами  $\omega_k(x, \sigma)$ ,  $k=0, 1, \dots, p$  и  $\omega_k^*(x, \sigma)$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, q$ .

*Теорема (5.6).* Для всякой функции  $f(z) \in W_\sigma$  справедливо неравенство

$$E_{pq}(f) \leq \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi} \left[ \rho_p(g) + \rho_q^*(\psi) \right].$$

Действительно, имеем

$$|f(z) - \sigma_{pq}(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma |\cos zx| \left| g(x) - \sum_{k=0}^p b_k \omega_k(x, \sigma) \right| dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^\sigma |\sin zx| \left| \psi(x) - \sum_{k=0}^q b_k^* \omega_k^*(x, \sigma) \right| dx.$$

Следовательно,

$$|f(z) - \sigma_{pq}(z)| \leq \frac{e^{c|J_m z|} \sqrt{\sigma}}{\pi} \inf \left\{ \left[ \int_0^\sigma \left| g(x) - \sum_{k=0}^p b_k \omega_k(x, \sigma) \right|^2 dx \right]^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left[ \int_0^\sigma \left| \psi(x) - \sum_{k=0}^q b_k^* \omega_k^*(x, \sigma) \right|^2 dx \right]^{1/2} \right\}.$$

или

$$e^{-c|J_m z|} |f(z) - \sigma_{pq}(z)| \leq \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi} \left[ \rho_p(g) + \rho_q^*(\psi) \right].$$

*Определение (5.8).* Обозначим через  $e_{pq}(f)$  взвешенное наилучшее приближение функции  $f(z) \in W_\sigma$  функциями  $\Phi_{pq}(z) = \Phi_p^*(z) + \Phi_q^*(z)$ ,

где  $\Phi_p^*(z) = \sum_{k=0}^p b_k J_k(z, n_0, n_1, \dots, n_k)$ ,  $\Phi_q^*(z) = \sum_{k=0}^q b_k^* J_k^*(z, m_0, m_1, \dots, m_k)$

при весовой функции  $e^{-c|J_m z|}$ .

Из теоремы (5.6) следует:

*Теорема (5.7).* Для всякой функции  $f(z) \in W_\sigma$  справедливо неравенство

$$e_{pq}(f) \leq \frac{\sqrt{\sigma}}{\pi} \left[ \rho_p(g) + \rho_q(\psi) \right].$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что

$$\inf \int_0^{\sigma} \left| g(x) - \sum_{k=0}^p c_k \omega_k(x, \sigma) \right|^2 dx = \int_0^{\sigma} |g(x) - S_p(g, x)|^2 dx = \rho_p^2(g),$$

$$\inf \int_0^{\sigma} \left| \psi(x) - \sum_{k=0}^q c_k^* \omega_k^*(x, \sigma) \right|^2 dx = \int_0^{\sigma} |\psi(x) - S_q^*(\psi, x)|^2 dx = [\rho_q^*(\psi)]^2,$$

где  $S_p(g, x)$  и  $S_q^*(\psi, x)$ , соответственно, отрезки рядов Фурье функций  $g(x)$  и  $\psi(x)$  по многочленам  $\{P_k(x, \sigma, p_0, p_1, \dots, p_k)\}$  и  $\{P_k^*(x, \sigma, m_0, m_1, \dots, m_k)\}$ .

### § 6. Оценка максимума модуля квази-многочлена Чебышева $n$ -ой обобщенной степени

Рассмотрим всевозможные квази-многочлены

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 \omega_1(x) + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1}(x) + \omega_n(x), \quad (6.1)$$

где  $x \in [0, 1]$ ,  $\gamma_1 > 0$ .

*Определение (6.1).* Условимся квази-многочлен, осуществляющий

$$\inf \left\{ \sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x)| \right\}$$

среди всевозможных квази-многочленов вида (6.1), называть квази-многочленом Чебышева  $n$ -ой обобщенной степени.

Такой квази-многочлен существует; обозначим его через  $T_n^*(x)$ .

*Определение (6.2).* Обозначим

$$\inf \left[ \sup_{x \in [0, 1]} |Q_n(x)| \right] = \max_{x \in [0, 1]} |T_n^*(x)| = M_n. \quad (6.2)$$

*Теорема (6.1).* Для всякого  $x \in [0, 1]$  при  $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$  справедливо неравенство

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu) \zeta^{\nu-2}}{\prod_{\nu=1}^n (\zeta - \gamma_\nu)} d\zeta \right| < c \ln R, \quad (6.3)$$

где контур  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , причем  $\Gamma_1$  — отрезок прямой  $(-Ri, Ri)$ , а  $\Gamma_2$  — полуокружность  $\zeta = Re^{i\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $R = \pi\gamma_n$ ,  $c$  — постоянная, не зависящая от  $n$  и  $x$ .

Для доказательства теоремы оценим

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)}{\prod_{v=1}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta \right| \quad \text{и} \quad J_n^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \left| \frac{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v)}{\prod_{v=1}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta \right|.$$

Начнем с оценки  $J_n^*$  сверху.

$$\text{Имеем} \quad \max_{\zeta \in \Gamma_2} \left| \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \gamma_v} \right| = 1.$$

Значит

$$J_n^* = \frac{1}{\pi} \int_0^R \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \gamma_1^2}} = c, \quad \ln R, \quad (6.4)$$

где  $c$  — некоторая, не зависящая от  $n$ , постоянная.

Оценим теперь  $J_n$  сверху.

Имеем

$$\max_{\zeta \in \Gamma_2} \left| \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \gamma_v} \right| = \frac{R + \gamma_v}{R - \gamma_v} < \left(1 + \frac{\gamma_v}{R}\right) \left(1 + \frac{2\gamma_v}{R}\right) < e^{\frac{3\gamma_v}{R}};$$

значит

$$\max_{\zeta \in \Gamma_2} \prod_{v=0}^n \left| \frac{\zeta + \gamma_v}{\zeta - \gamma_v} \right| < e^{3 \sum_{v=2}^n \frac{\gamma_v}{R}} < c_2,$$

где  $c_2$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .

Учитывая последнюю оценку, будем иметь

$$J_n < \frac{c_2}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \left| \frac{d\zeta}{\zeta - \gamma_1} \right| \leq c_3. \quad (6.5)$$

Из оценок (6.3) и (6.4) следует, что

$$J_n \leq J_n^* + J_n \leq c \ln R.$$

*Теорема (6.1'). При условиях теоремы (6.1) квази-многочлен*

$$\chi_n(x) = \frac{1}{2\pi i \beta_n} \int_{\Gamma} \frac{\prod_{v=2}^n (\zeta + \gamma_v) x^{\zeta}}{\prod_{v=1}^n (\zeta - \gamma_v)} d\zeta = \sum_{v=0}^{n-1} a_v \omega_v(x) + \omega_n(x),$$

где  $\omega_0(x) = 0$ ,  $x \in [0, 1]$  удовлетворяет неравенству

$$|\chi_n(x)| < c \frac{\ln R}{|\beta_n|}. \quad (6.6)$$

Последняя оценка будет нами использована в оценке максимума модуля квази-многочлена Чебышева.

*Замечание (6.1).* Имеем

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_{nk} \omega_k(x),$$

причем коэффициенты  $\alpha_{nk}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$  определяются эффективно, а  $\alpha_{nn} = \alpha_n \neq 0$ .

*Теорема (6.2).* Для  $M_n = \max_{x \in [0, 1]} |T_n^*(x)|$  справедливы неравенства

$$\frac{1}{|\alpha_n|} < M_n < c \frac{\ln R}{|\beta_n|}. \quad (6.7)$$

(где  $R$  и  $\beta_n$  определены в теоремах (6.1) и (6.1'),  $\alpha_n$  — в замечании 6.1), а  $c$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .

Для оценки  $M_n$  снизу заметим, что среди всевозможных квази-многочленов

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 \omega_1(x) + \dots + a_{n-1} \omega_{n-1}(x) + \omega_n(x)$$

$$\inf \int_0^1 |Q_n(x)|^2 dx$$

доставляет квази-многочлен  $\alpha_n^{-1} P_n(x)$  при  $\gamma_0 = 0$ .

Это значит, что

$$\inf \int_0^1 |Q_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\alpha_n^2} \int_0^1 |P_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\alpha_n^2}.$$

С другой стороны,

$$\inf \int_0^1 |Q_n(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |T_n^*(x)|^2 dx \leq M_n^2.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{|\alpha_n|} \leq M_n. \quad (6.8)$$

Для оценки  $M_n$  сверху заметим, что

$$M_n \leq \max_{x \in [0, 1]} |\chi_n(x)| < c \frac{\ln R}{|\beta_n|}. \quad (6.9)$$

Из оценок (6.8) и (6.9) следует (6.7), чем и доказывается теорема.

В частном случае, когда  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty$ , получаем:

*Теорема (6.2'). Пусть  $M_n = \max_{x \in [0,1]} |T_n^*(x)|$ , тогда при*

$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty$  справедливо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma_n + 1}} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} \leq M_n < c \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} \ln R, \quad (6.7')$$

где  $c$  — постоянная, не зависящая от  $n$ , а  $R = \pi\gamma_n$ .

Действительно, не трудно заметить, что в условиях теоремы

$$\alpha_n = \sqrt{2\gamma_n + 1} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n + \gamma_\nu}{\gamma_n - \gamma_\nu},$$

$$\beta_n = \frac{\prod_{\nu=0}^n (\gamma_n + \gamma_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (\gamma_n - \gamma_\nu)} = \frac{2\gamma_n}{\gamma_n + \gamma_1} \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{\gamma_n + \gamma_\nu}{\gamma_n - \gamma_\nu} > \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n + \gamma_\nu}{\gamma_n - \gamma_\nu}, \quad (\gamma_0 = 0).$$

Подставляя значения  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в (6.7), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma_n + 1}} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} \leq M_n < c \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} \ln R,$$

чем и доказывается теорема.

Если обозначить

$$\frac{1}{\sqrt{2\gamma_n + 1}} \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} = \underline{M}_n; \quad c \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma_n - \gamma_\nu}{\gamma_n + \gamma_\nu} \ln R = \bar{M}_n,$$

то при  $\gamma_\nu = \nu$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  получаем

$$\bar{M}_n : \underline{M}_n < c_0 \sqrt{\pi} \ln n,$$

где  $c_0$  — постоянная, не зависящая от  $n$ .

В заключение параграфа отметим, что в случае, когда  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty$ ,  $M_n = \max_{x \in [0,1]} |T_n^*(x)|$  в 1951 г. другим способом оценен А. О. Гельфондом. См. [7], стр. 15—16.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 26 IV 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Doetsch G. Handbuch der Laplace-transformation, Band I, Basel, 1950.
2. Джрбашян М. М., Тавадян А. Некоторые экстремальные задачи для целых функций. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том VII, № 5, 1954.
3. Гельфонд А. О. О квазипозиномах, наименее отклоняющихся от нуля на отрезке  $[0, 1]$ . Известия АН СССР, серия математическая, том 15, № 1, 1951.

В. А. Амбарцумян

## О кратных галактиках

§ 1. Одним из существенных свойств Метагалактики является наличие в ней большого числа двойных и кратных галактик и, особенно, скоплений галактик. В этом отношении существует известное сходство между строением Метагалактики и строением нашей Галактики. В последней мы также встречаем двойные звезды, кратные системы и звездные скопления. Как было показано нами, количество двойных звезд, кратных систем и открытых скоплений в нашей Галактике в огромное число раз превышает ту численность этих групп, которая должна была бы быть при диссоциативном равновесии [1]. Ниже будет показано, что в Метагалактике наблюдается отклонение от диссоциативного равновесия в ту же сторону.

Вместе с тем следует отметить, что имеется и существенное различие. По имеющимся данным процент двойных галактик среди всех галактик в окружающей нас части пространства так же, как и процент кратных галактик, не выше соответствующих процентов для звезд. Однако процент галактик, входящих в их скопления, намного выше, чем процент звезд, входящих в различные звездные скопления. После работ Цвикки [2], а также Неймана, Скотта и Шена [3], имеются веские основания считать, что большинство галактик входит в скопления галактик и что процент галактик, составляющих общее метагалактическое поле, сравнительно мал. В отличие от этого, большинство звезд в галактике составляет общее галактическое звездное поле и не принадлежит к звездным скоплениям по крайней мере тех типов, существование которых твердо установлено. Однако это различие не может преуменьшить значения того факта, что в обеих системах мы имеем весьма заметную тенденцию к скучиванию. Несомненно, что этот факт имеет в отношении обеих систем глубокое космогоническое значение.

Подобно тому, как это было сделано в отношении двойных звезд, можно составить формулу диссоциативного равновесия для двойных галактик. Применение этой формулы к местной системе галактик приводит к тому, что отношение числа двойных галактик, у которых расстояние между компонентами находится в пределах от 5000 до 50000 парсек, к числу одиночных галактик, должно быть не больше одной двухсотой. Принимая во внимание, что фактически

в местной системе имеется около одного десятка одиночных галактик, мы приходим к заключению, что математическое ожидание числа двойных галактик должно быть порядка 0,05. А математическое ожидание числа тройных галактик должно быть, в свою очередь, во много раз меньше этой величины. Между тем мы имеем в местной системе по меньшей мере одну двойную галактику (NGC 147—185) и две двойные галактики, считая и нашу Галактику вместе с ее спутниками — Магеллановыми облаками. Таким образом, уже наличие в местной системе одной двойной галактики являлось бы при диссоциативном равновесии маловероятным явлением. А одновременное существование в ней двух тройных систем было бы практически невозможным. Таким образом, в этом случае так же, как и в случае звездных пар и троек, мы наблюдаем сильное отклонение от диссоциативного равновесия. При этом, однако, следует отметить, что отклонение от диссоциативного равновесия особенно велико в случае тройных галактик. Аналогичное положение мы имеем и в других скоплениях галактик.

Однако самое большое нарушение статистического равновесия мы имеем для отношения числа скоплений галактик к числу одиночных галактик. Хотя в настоящее время трудно оценить процент всех галактик, входящих в состав скоплений, однако, как уже упоминалось, новые данные говорят в пользу того, что большинство галактик, по крайней мере имеющих большую абсолютную яркость, входит в состав скоплений. Применение формулы диссоциативного равновесия к вычислению отношения числа скоплений к числу одиночных галактик в окружающей нас области Метагалактики приводит к выводу, что, при всех допустимых предположениях о средней квадратичной скорости галактик, в Метагалактике должны были бы совершенно отсутствовать скопления. Таким образом, в этом случае расхождение с формулой диссоциативного равновесия особенно велико.

Если, с другой стороны, принять, что двойные галактики, кратные галактики и скопления галактик возникли в результате процессов взаимного захвата, возможного при тройных сближениях, то отношение числа пар к числу одиночных галактик так же, как отношение числа скоплений к числу одиночных галактик не должно никогда превзойти ту величину, которая получается из формулы диссоциативного равновесия. Между тем мы наблюдаем противоположную картину.

Поэтому и в этом случае можно повторить вывод, который нами был сделан в отношении звезд. Именно, мы должны заключить, что компоненты, входящие в состав данной двойной или кратной галактики, или же в состав данного скопления галактик, образовались совместно. Это утверждение не является следствием какой-нибудь гипотезы о механизме возникновения галактик или групп галактик. Оно непосредственно следует из наблюдаемой сильной тенденции к скупиванию.

§ 2. Так же, как и в случае звезд, изучение конфигураций кратных галактик может дать интересные сведения, касающиеся происхождения и развития этих объектов. Как показывают результаты предварительного изучения конфигураций кратных галактик, среди них встречается значительное число конфигураций типа Тrapeции, т. е. таких конфигураций, в которых можно указать такие три галактики, все три взаимные расстояния которых одного порядка величины. Более того, если мы берем кратные системы, содержащиеся в опубликованных списках двойных и кратных галактик, то оказывается, что процент систем типа Тrapeции среди них значительно превосходит процент систем обыкновенного типа. Иными словами, среди кратных галактик, заключенных в указанные списки, мы наблюдаем картину, диаметрально противоположную той, которая наблюдается среди кратных звезд. Как известно, среди кратных звезд, входящих в наши каталоги, число систем типа Тrapeции во много раз меньше числа систем обыкновенного типа.

Так, например, среди 132 кратных галактик, встречающихся в каталоге двойных и кратных галактик Холмберга [4], 87 имеют такие конфигурации, что безусловно должны быть отнесены к типу Тrapeции. Только 27 систем являются системами обыкновенного типа, в то время как остальные восемнадцать систем занимают промежуточное положение, поскольку в каждой из них можно найти такие три галактики, что отношение наибольшего из расстояний между ними к наименьшему лежит между 2,5—3,0.

Насколько распространены кратные системы типа Тrapeции видно из того, что ближайшая к нам система— туманность Андромеды с ближайшими двумя своими спутниками—является системой типа Тrapeции. Что касается нашей Галактики, то она вместе с двумя Магеллановыми облаками составляет систему промежуточного типа. В противоположность этому, среди большого числа кратных звезд, находящихся близко от нас, скажем, ближе, чем 50 парсек, мы не наблюдаем ни одной системы типа Тrapeции. Указанная противоположность между характером конфигураций кратных звезд и кратных галактик особенно хорошо можно проиллюстрировать на следующем примере. На рис. 1 показаны наблюдаемые конфигурации шести визуальных кратных звезд, главные компоненты которых обладают наибольшей видимой яркостью среди главных компонентов всех визуальных кратных звезд. Масштаб для разных кратных звезд взят различный, что не имеет значения для определения характера конфигураций. Из рисунка видно, что все шесть групп являются системами, у которых резко выражена принадлежность к обыкновенному типу. На рис. 2 изображены конфигурации шести кратных галактик, у которых главные компоненты обладают наибольшей видимой яркостью среди главных компонентов кратных систем каталога Холмберга. Бросается в глаза, что все они являются системами типа Тrapeции. Для окончательного решения вопроса о том, насколько указанное свойство

кратных галактик распространено, мы попытались выделить кратные галактики из каталога 2778 туманностей, составленного Эймс [5]. Приняв наибольший предел для расстояний между компонентами равным 2,5, мы нашли среди галактик этого каталога 76 кратных систем (с кратностью 3 и больше). Из них большинство оказалось системами типа Трапеции. Однако возникло подозрение, что наличие оптических систем может повлиять на процент наблюдаемых трапеций. Поэтому было произведено изучение совокупности двойных галактик

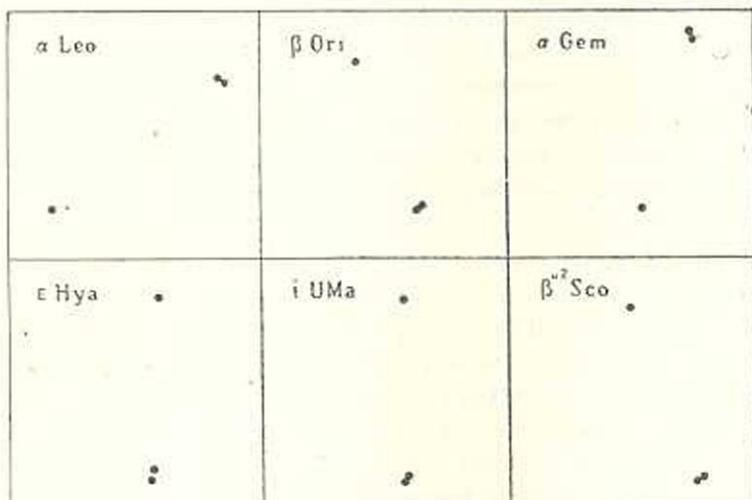


Рис. 1. Конфигурации наиболее ярких кратных звезд из каталога Эйткена.

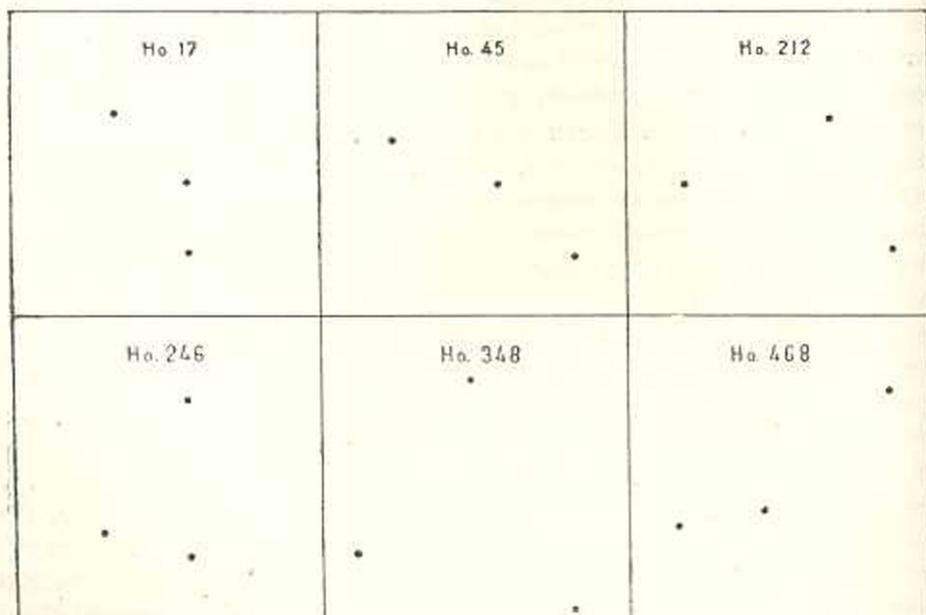


Рис. 2. Конфигурации шести наиболее ярких кратных галактик каталога Холмберга.

и на основании этого было определено возможное число оптических кратных при различных значениях предельного расстояния между компонентами, т. е. случаев, когда случайная одиночная галактика проектируется рядом с двойной. В результате было выяснено, что если предельное расстояние между компонентами принять равным  $1',3$ , то процент оптических кратных будет крайне незначительным. Таких тесных систем оказалось 17. При этом выяснилось, что из этих 17 систем только одна имеет конфигурацию обыкновенного типа и одну можно отнести к системам промежуточного типа. Таким образом, 15 систем из 17 являются трапециями. Более того, оказалось, что когда мы таким образом ограничили список очень тесными системами, то процент систем обыкновенного типа уменьшился. Таким образом, факт значительного преобладания трапеций и редкости обыкновенных систем среди физических кратных систем не вызывает сомнения.

На рисунках 3 и 4 приведены конфигурации указанных 17 кратных систем, причем системы, изображенные на рис. 3, относятся к числу наиболее тесных, так что расстояние от каждого компонента до ближайшего к нему не больше  $0',8$ .

Приведем еще одно сравнение, подтверждающее указанный вывод. Возьмем тесную систему наибольшей кратности среди наблюдаемых ярких кратных галактик. Эта система, в которой главным компонентом является NGC 6027, была открыта Сейфертом [6] в *Serpens*. Она состоит из шести галактик. На рис. 5 дана схематическая конфигурация этой системы в сопоставлении с конфигурацией, наблюдаемой у наиболее яркой шестикратной звезды — Кастора.

При этом каждую из трех визуальных компонентов Кастора, являющихся спектрально-двойными, соблюдая масштаб, мы изобразили в виде одной лишь точки, так как два компонента спектрально двойной, при взятом масштабе, должны сливаться. Очевидно, что и это сравнение является прямым подтверждением наличия тенденции образовывать системы типа Трапеции среди кратных галактик. Однако следует учитывать, что на численное значение процента трапеций среди кратных систем может оказать значительное влияние избирательность наблюдательных данных. Поэтому нельзя без дальнейшего обсуждения принять, что число трапеций в

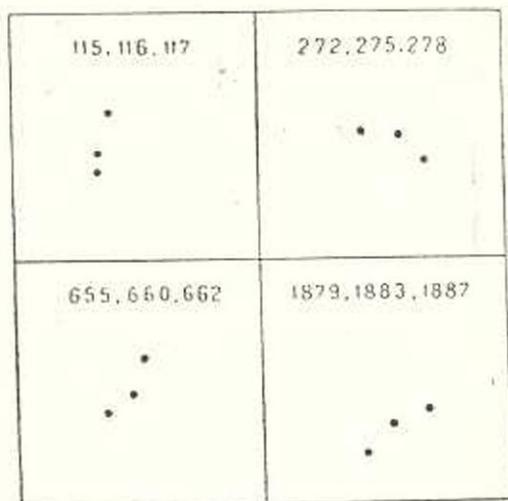


Рис. 3. Четыре наиболее тесные системы из каталога Эймса. Расстояние между компонентами не превосходит  $0',8$ . Цифры означают номера составляющих галактик по каталогу Эймса.

действительности во много раз или, по крайней мере, в несколько раз превосходит число систем обыкновенного типа.

В том, что избирательность должна известным образом повлиять на приведенные выше данные, можно убедиться на следующем при-

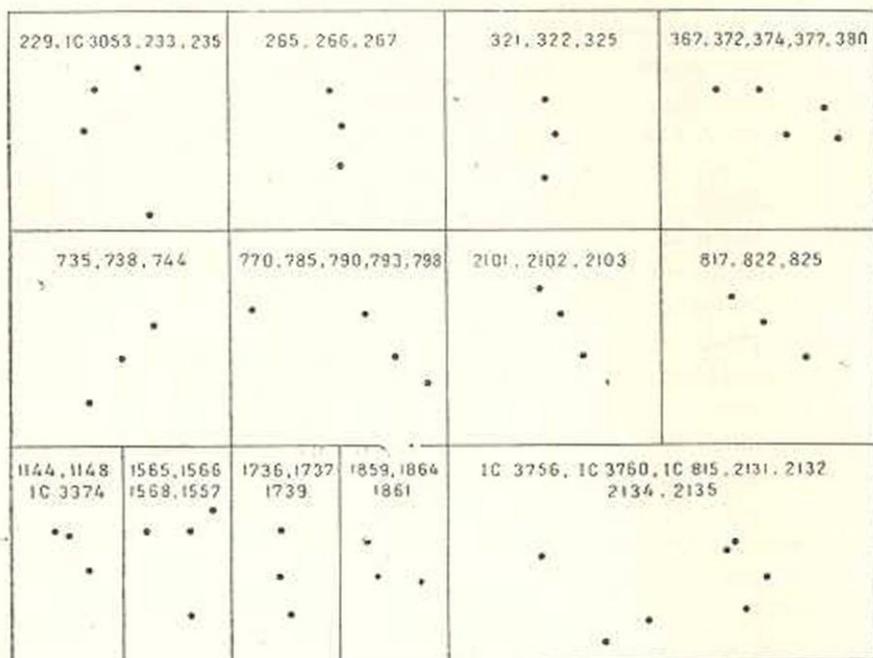


Рис. 4. 13 систем из каталога Эйме, для которых расстояния между компонентами находятся в пределах  $0',9-1',3$ . Цифры означают номера составляющих галактик по каталогу Эйме.

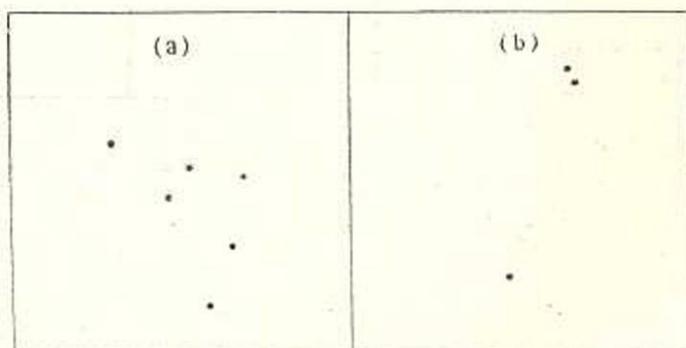


Рис. 5. а) Конфигурация шестикратной галактики в Serpens. б) Шестикратная звезда Кастор. Каждая из точек представляет два компонента, составляющих спектрально-двойную. Кастор состоит из трех спектрально-двойных.

мере. Рассмотрим критерий, на основании которого две галактики считались входящими в одну кратную систему. Как видно из предисловия к каталогу Холмберга, он требовал, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{\text{взаимное расстояние}}{\text{сумма диаметров}} > 2.$$

Принимая грубо, что диаметры равны, мы получаем требование, чтобы взаимное расстояние было бы меньше четырех диаметров галактики. Пусть теперь имеем тройную систему ABC обыкновенного типа, где А и В составляют тесную пару, а С представляет собой отдаленного спутника. Если даже А и В соприкасаются друг с другом, их взаимное расстояние будет равно одному диаметру галактики. В таком случае отдаленный спутник, на основании приведенного критерия Холмберга, не может находиться больше чем на расстоянии четырех диаметров от одного из составляющих тесной пары. В результате максимальное значение отношения К наибольшего расстояния к наименьшему в тройной системе не может оказаться больше пяти. Таким образом, критерий Холмберга заведомо исключает все системы, для которых  $K > 5$ . А для случая, когда расстояние внутри тесной пары превосходит 2,0 диаметра, все вообще системы обыкновенного типа исключаются.

Таким образом, в каталог Холмберга могли попасть только те системы обыкновенного типа, у которых взаимное расстояние в тесной паре заключено между 1,0 и 2,0 диаметра галактики, а некоторая часть даже таких систем (с относительно большими значениями К) должна была остаться вне каталога.

Для того, чтобы исправить результаты наблюдения за эффект избирательности наблюдений, нужно знать закон распределения тройных галактик в зависимости от расстояния внутри тесной пары и расстояния отдаленного спутника. К сожалению, этот закон нам неизвестен. Однако, если допустить, что этот закон похож на тот, который имеет место в случае тройных звезд, то, как показывает грубая, глазомерная оценка, относительное число систем обыкновенного типа следует увеличить в несколько раз, но не более чем в пять.

Поэтому, исправив числовые данные за наблюдательную селекцию, мы должны получить, что процент систем обыкновенного типа несколько меньше или в, в лучшем случае, таков же, как процент трапеций. Таким образом, остается несомненным, что *системы типа Трапеции составляют не меньше половины всех кратных галактик.*

§ 3. Как показано было нами в отношении *кратных звезд* типа Трапеции, каждая такая система является либо системой с положительной энергией, либо системой с отрицательной энергией, но настолько молодой, что в ней звезды успели совершить не больше, чем несколько оборотов. То же самое должно быть справедливо в отношении *кратных галактик* типа Трапеции. Далее, можно предполагать, что известная часть кратных галактик типа Трапеции имеет положительную энергию, т. е. представляет собой группы, которые распадаются непосредственно после своего возникновения, так, что компоненты удаляются друг от друга в разные стороны.

Естественно спросить, можно ли найти какие-либо факты, свидетельствующие о положительности энергии кратных галактик типа Тrapeции? Оказывается, что в пользу этого говорят некоторые данные, касающиеся относительных лучевых скоростей двойных и кратных галактик, которые совершенно независимы от фактов, касающихся конфигурации в кратных галактиках.

Имеющиеся данные об относительных движениях в кратных галактиках были сильно расширены благодаря появлению в 1952 г. работы Пейджа [7]. Всего в настоящее время мы имеем определения разностей лучевых скоростей для 35 пар.

Не имея количественных данных о массах галактик, входящих в эти пары или в кратные системы, куда некоторые из этих пар входят, мы не можем определить точное численное значение кинетической и потенциальной энергии этих систем и, следовательно, знак энергии в каждом случае. Именно поэтому попытка решения вопроса о том, встречаются ли среди наблюдаемых групп такие, которые имеют положительную энергию, наталкивается на затруднения. Однако вышеупомянутые данные о разностях лучевых скоростей позволяют подойти к этому вопросу статистически.

Прежде всего представляет интерес тот факт, что для упомянутых 35 пар мы не наблюдаем систематического уменьшения разности лучевых скоростей при увеличении взаимного расстояния компонентов в проекции на небесную сферу. Между тем такое уменьшение должно было бы наблюдаться в среднем, если движение во всех парах эллиптическое (т. е. энергия отрицательна), а массы систем не зависят от расстояний между компонентами. Некоторые пары, в которых расстояния между компонентами очень велики, показывают вместе с тем, большую разность лучевых скоростей.

Если обозначим через  $v$  относительную скорость внутри двойной системы, а через  $r$  — расстояние между компонентами, то теорема вириала, примененная к двойной галактике, будет иметь вид

$$\bar{v}^2 = GM \frac{\bar{1}}{r} = GM \frac{\overline{\cos^2 \theta}}{\rho},$$

где  $M$  — суммарная масса системы,  $\rho$  — расстояние в проекции,  $\theta$  — угол между радиусом вектором  $r$  и касательной [плоскостью к небесной сфере, а усреднение произведено по времени.

Усредняя как по времени, так и по разным парам, мы можем написать

$$v^2 = 3v_z^2,$$

где  $v_z$  — составляющая относительной скорости по лучу зрения.

Поэтому мы будем иметь

$$G \frac{M \overline{\cos^2 \theta}}{\rho} = 3v_z^2.$$

При указанном двойном усреднении величины  $M$ ,  $\cos\theta$  и  $\rho$  могут считаться практически независимыми друг от друга, и поэтому, приняв во внимание, что  $\overline{\cos\theta} = \frac{\pi}{4}$  и обозначив через  $\rho'$  среднее гармоническое значение  $\rho$ , получим

$$G\bar{M} = \frac{12}{\pi} \rho' \overline{v_z^2}. \quad (1)$$

Равенство (1) справедливо только после усреднения по времени в каждой паре и последующего усреднения по галактикам, различно ориентированным. Поэтому вычисленные для каждой пары по полученным в момент наблюдения значениям  $\rho$  и  $v_z$  значения величины

$$M' = \frac{12}{\pi G} \rho' v_z^2 \quad (2)$$

могут отличаться от действительной массы.

Однако только в очень редких случаях это произведение может отличаться от массы системы в десять раз, если только справедливо наше основное предположение об отрицательности энергии каждой пары.

В частности, следует принять во внимание следующее обстоятельство. Если энергия пары отрицательна, то кинетическая энергия меньше абсолютного значения потенциальной энергии, т. е. имеет место неравенство

$$\frac{v^2}{2} < \frac{GM}{\rho} \cos\theta,$$

на основании чего мы можем написать

$$v_z^2 < v^2 < \frac{2GM}{\rho} \cos\theta < \frac{2GM}{\rho}$$

или

$$M > \frac{\rho v_z^2}{2G}. \quad (3)$$

Это неравенство уже справедливо для каждой пары в отдельности и для каждого момента наблюдения. Первая часть этого неравенства отличается от выражения (2) множителем  $\frac{\pi}{24}$ . Таким образом, мы убеждаемся, что истинная масса каждой галактики ни в коем случае не может быть меньше выражения (2) более чем  $\frac{24}{\pi} = 7,6$  раза.

Что касается до верхней границы поправочного множителя, необходимого для получения из (2) истинного значения массы, то такой безусловной верхней границы не существует. Однако, как указывалось, следует считать, что случаи, когда этот поправочный множитель больше 10, должны быть крайне редки.

Это означает, что, если все пары имели бы одинаковую массу, то значения  $M'$  (за исключением отдельных, редко встречающихся) должны были бы отличаться друг от друга не более чем в 80 раз. Между тем наблюдаемые значения  $M'$  отличаются друг от друга иногда почти в  $10^4$  раз.

Выводом из этого является допущение, что имеются большие различия в массах галактик. Анализируя результаты своих наблюдений, Пейдж пришел к заключению, что среди галактик встречаются „гиганты“ с массами порядка  $150 \cdot 10^9 M_{\odot}$  и „карлики“ с массами порядка  $5 \cdot 10^9 M_{\odot}$ .

Вполне возможно, что столь большие различия в массах наблюдаемых пар действительно существуют. Однако заслуживает особого внимания то обстоятельство, что из четырех пар, для которых  $M'$  достигает наибольшего значения, три пары входят в состав кратных галактик с тремя или более компонентами. Это заставило нас заняться статистикой значений  $M'$  или, что то же, произведений  $\rho v_z^2$  (это произведение, как видно из (2), отличается от  $M'$  лишь постоянным множителем в отдельности для двойных звезд и для тех пар, которые входят в состав кратных галактик. Упомянутые выше 35 пар включают в себе 24 двойные галактики и 11 пар, входящих в кратные галактики. Расположив в каждой из этих групп рассматриваемые пары в порядке возрастающих значений  $\rho v_z^2$ , мы разбили затем каждую из групп на три равные по численности подгруппы таким образом, что в первую подгруппу вошли пары с наименьшими значениями  $\rho v_z^2$ , во вторую подгруппу — пары с промежуточными значениями  $\rho v_z^2$  и, наконец, в третью подгруппу — пары с наибольшими значениями той же величины. После этого мы вывели среднее значение  $\overline{\rho v_z^2}$  для каждой подгруппы. В нижеследующей таблице приводятся эти значения в единицах  $10^{13} \frac{\text{астр. ед. км}^2}{\text{сек.}^2}$ .

Таблица средних значений

Подгруппы	I	II	III
Двойные галактики	0,01	0,42	4,8
Кратные галактики	0,06	1,6	21.

Мы видим, что среднее значение  $\overline{\rho v_z^2}$  в каждой подгруппе кратных галактик на круг в пять раз больше значения той же величины для соответствующей подгруппы двойных галактик.

Если наши предположения верны, то это означало бы, что масса кратных галактик примерно в пять раз больше масс двойных галактик. Конечно, в среднем массы кратных галактик должны быть несколько больше масс двойных галактик, благодаря чему и произведения  $\overline{\rho v_z^2}$  должны быть несколько больше. Но, учитывая, что большинство кратных галактик представляют собой тройные системы, а также и то, что лучевые скорости определялись для двух наиболее ярких и,

следовательно, как правило более массивных компонентов, мы должны предполагать разницу в среднем не больше, чем в полтора раза. Если даже учесть некоторые возможные эффекты селекции, все же это отношение вряд ли может быть больше двух. Таким образом, остается расхождение примерно в три раза, которое трудно объяснить.

Повидимому, эта разница между средними значениями не обусловлена также возможными различиями в массах, происходящими от различия физических типов галактик. Поэтому мы должны заключить, что неверно наше основное предположение, сделанное в начале приведенных расчетов и связанное с допущением об отрицательности знака полной энергии каждой системы. Достаточно допустить, что среди кратных галактик имеется больший процент систем с положительной энергией, расходящихся с относительно большими скоростями, чем среди двойных галактик, и все расхождение будет объяснено.

Спрашивается, однако, не является ли допущение о гораздо большем проценте систем с положительной энергией среди кратных галактик по сравнению с двойными галактиками столь же неправдоподобным, как и отвергнутое нами допущение о том, что галактики, входящие в кратные системы, имеют, в среднем, гораздо большую массу, чем составляющие двойных галактик. Ответ на этот вопрос получается из результатов предыдущего параграфа. Там мы показали, что большинство кратных систем, охваченных нашими каталогами, является системами типа Трассени и, следовательно, можно ожидать наличия среди них большого числа систем с положительной энергией. Совершенно иное положение мы имеем в случае двойных систем, подавляющее большинство которых находится, повидимому, в состоянии с отрицательной энергией.

Таким образом, данные, касающиеся относительных лучевых скоростей у двойных и кратных галактиках, свидетельствуют о положительности энергии многих из этих кратных систем. Однако, вследствие недостаточного количества данных о разностях лучевых скоростей у пар галактик, желательно дальнейшее исследование этого вопроса на основе более широкого материала.

§ 4. Следует отметить, что утверждение о неустойчивости звездных кратных систем типа Трассени с отрицательной энергией является справедливым постольку, поскольку звезды имеют обычно один и тот же порядок масс. Аналогично этому, в случае кратных галактик с отрицательной энергией утверждение о неустойчивости будет справедливо в том случае, если массы компонентов одинакового порядка. Если масса одного из компонентов во много раз превосходит массы остальных составляющих, то утверждение о неустойчивости будет вообще несправедливо. Так, например, Солнце, Земля и Марс представляют систему, в которой все три расстояния между составляющими обычно имеют один и тот же порядок величины. Однако эта система устойчива. По этой причине было бы неосторожно делать

вывод о неустойчивости в отношении таких кратных галактик типа Тrapeции, как, например, туманность Андромеды, спутники которой, по всей вероятности, имеют массы во много раз меньше, чем масса центральной туманности. Однако существует большое количество кратных галактик типа Тrapeции, где светимости составляющих одного порядка, вследствие чего можно предполагать, что и массы одного порядка величины.

Так, например, система Холмберг 124, изображенная на рис. 2, состоит из галактик, видимые звездные величины которых равны 13,2, 13,6, 14,9. И в других случаях, изображенных на этом рисунке, разности величин гораздо меньше, чем у кратной системы в Андромеде. Поэтому большинство кратных галактик, о которых шла речь в § 2, неустойчивы и являются сравнительно молодыми объектами.

§ 5. Сделанный в начале настоящей статьи вывод о совместном возникновении компонентов кратных галактик предполагает, что на какой-то предыдущей фазе развития вещество, составляющее кратную галактику, входило в единый объект, который затем разделился на две или несколько галактик. Естественно предполагать, что между этой первоначальной и более поздней фазой полного разделения составляющих кратной галактики может иметь место некоторый промежуточный период, в течение которого эти составляющие, являясь самостоятельными объектами, все же связаны между собой какими-то соединяющими элементами — „мостами“, продолжением ветвей и перемычками. Как показал Цвикки, между компонентами кратной галактики часто наблюдаются подобные мосты и соединительные ветви. В статье Кудера [8], посвященной работам Цвикки, приводится фотография замечательной тройной галактики, открытой Вилдом и состоящей из трех спиралей. Между двумя компонентами явно виден мост, представляющий собой продолжение соответствующих спиральных ветвей двух из составляющих галактик. Вместе с тем *система Вилда может являться образцовым примером тройной системы типа Тrapeции*. Иными словами, эта система несомненно является молодым объектом.

Таким образом, вместо представления о приливном взаимодействии двух случайно проходящих мимо друг друга галактик, возникает простое понимание этих перемычек, как результат сравнительно недавно происшедших процессов разделения совместно возникших галактик.

С другой стороны, если принять, что перемычки между галактиками, составляющими кратную систему, генетически связаны со спиральными ветвями, то можно заключить, что процессе формирования ветвей имеет тесную связь с процессом возникновения и разделения составляющих кратной системы. В пользу этого свидетельствуют также данные Вокулера о спиральных ветвях, которые связывают нашу галактику с ее спутниками — Магеллановыми Облаками.

Рассматривая с этой точки зрения знаменитую спиральную си-

стему в Гончих Псах—M51 (NGC 5194—5195), мы можем считать известное сгущение на ее периферии, расположенное в конце одной из спиральных ветвей, за спутника этой системы, который связан с основной системой мощной спиральной ветвью. Таким образом, мы приходим к представлению о двойных галактиках в которых составляющие между собой соприкасаются.

Развивая дальше это представление, мы приходим к вопросу о возможности существования *сверхтесных пар*, т. е. взаимно проникающих систем, в которых центр одной галактики глубоко расположен внутри другой.

§ 6. Как известно, одним из способов определения средних масс галактик является применение теоремы вириала к скоплениям галактик. Предполагая, что скопление имеет отрицательную энергию и находится в стационарном состоянии, мы получаем из теоремы вириала

$$v^2 = \frac{GM}{2R}.$$

Известные данные о лучевых скоростях позволяют легко определить средний квадрат скорости по отношению к центру тяжести скопления  $\overline{v^2}$ , а радиус скопления  $R$  легко определяется, если известно его расстояние. На основании этих данных, приведенная формула позволяет найти массу скопления. Таким образом, для скопления в Деве Туберг [9] получил  $M = 500 M_r$ , где  $M_r$  — масса галактики. Однако следует учесть, что в результате пересмотра шкалы расстояний принятый Тубергом радиус скопления в Деве следует, по крайней мере, удвоить. Поэтому будет правильной оценка  $M = 1000 M_r$ . С другой стороны, число галактик скопления в Деве до абсолютной величины — 11 не превосходит двух тысяч. Считая, что массами всех более слабых галактик можно пренебречь, мы получаем для средней массы членов скопления в Деве  $1/2 M_r$ . Но известно, что подавляющее большинство из этих двух тысяч галактик составляют карлики с абсолютными величинами между — 15 и — 11. Массы этих карликов, казалось, не должны превосходить  $0,01 M_r$ . Только несколько десятков гигантов, входящих в скопление, могут иметь массы, заключенные между  $0,2 M_r$  и  $2 M_r$ . Таким образом, полученная на основании теоремы вириала большая суммарная масса противоречит данным о числе и светимостях галактик данного скопления. Для объяснения этого расхождения Смит выдвинул предположение о большой массе межгалактической материи, содержащейся в скоплении. Следует отметить, что еще Хаббл [10] в своей книге подчеркивал глубину и серьезность получающегося расхождения. Гораздо большее противоречие получается для скопления в Сота. Уже из вычислений Туберга следовало, что для этого скопления масса равна  $8000 M_r$ . Однако, на основании новых данных, относящихся к этому скоплению, а также в результате пересмотра шкалы расстояний, линейный радиус скопления следует учетверить. Поэтому получаем  $M = 32000 M_r$ . При этом

известно из последних исследований Цвикки [11], что рассматриваемое скопление содержит не более 10 000 галактик ярче абсолютной величины — 13, причем подавляющее большинство из них составляют галактики низкой светимости с абсолютной величиной ниже — 15. Если также отнести значительную часть массы за счет слабых объектов, не вошедших в подсчеты Цвикки, все же получится, что в среднем, каждая из упомянутых 10 000 галактик имеет массу порядка  $2 M_{\odot}$ . Между тем и в этом случае можно считать, что на самом деле лишь несколько сотен или десятков галактик имеют массы между  $0,2 M_{\odot}$  и  $2 M_{\odot}$ , а массы остальных должны измеряться лишь сотыми долями  $M_{\odot}$ . Поэтому полная масса скопления должна была бы быть порядка 1 000  $M_{\odot}$ . Получается расхождение на 1,5 порядка. Цвикки пытается объяснить это расхождение наличием огромного количества межгалактического вещества внутри скопления. Отметим, что на чрезвычайно большие значения отношений  $\bar{i} = \frac{M}{L}$ , получающиеся в случае

скопления галактик при применении теоремы вириала, обратил внимание и Шварцшильд [12]. Однако нам кажется, что даже приведенное им для скопления в Сомы значение  $\bar{i} = 800$  является преуменьшенным, поскольку при выводе им были приняты допущения, приводящие к уменьшению значения  $\bar{i}$ .

Имеются данные, свидетельствующие о наличии известного количества межгалактического вещества в скоплении Сомы. Вопрос, однако, заключается в том, может ли масса этого вещества в десятки раз превосходить суммарную массу галактики. Поскольку межгалактические образования по своему внешнему виду напоминают скорее внешние части спиральных рукавов, чем концентрированные ядра галактик, то следует думать, что пока нет никаких оснований приписывать этому веществу чрезвычайно большие значения отношения  $\bar{i}$ . Между тем только значения  $\bar{i}$  порядка  $10^5$  и больше для межгалактической материи могут объяснить наблюдаемое расхождение.

Между тем исходя из предыдущего, можно дать простое и естественное объяснение указанного противоречия, допустив, что скопление в Сомы (а может быть и скопление в Деве) является системой, обладающей положительной энергией, т. е. представляет собой расходящуюся группу галактик. В таком случае теорема вириала неприменима, и кинетическая энергия системы может во много раз превосходить абсолютную величину потенциальной энергии.

В связи с этим выводом можно упомянуть еще об одном обстоятельстве, свидетельствующем о нестационарности некоторых скоплений галактик. Как на это обратил мое внимание Маркарян, в центральной части скопления в Деве находится бросающаяся в глаза цепочка ярких галактик. В состав этой цепочки входят, в частности, гигантские эллиптические системы M84 и M86. Трудно допустить, что эта цепочка является результатом случайного проектирования.

Если принять, что среди скоплений галактик встречаются систе-

мы с положительной энергией, то получится, что скопление типа Coma возникло в результате расширения существовавшей ранее очень тесной группы галактик.

Для расширения до теперешних размеров потребовалось около полутора миллиарда лет.

§ 7. При обсуждении в § 2 вопроса об избирательности имеющих списков кратных галактик, мы принимали, что взаимное расстояние центров двух галактик, наблюдаемое нами, не может быть меньше суммы их радиусов. Однако при тщательном изучении изображений вероятно нетрудно распознать двойственность и в тех случаях, когда взаимное расстояние несколько меньше суммы радиусов. Если же оно меньше полусуммы радиусов, распознавание двойственности может оказаться затруднительным, ибо получающаяся картина может быть приписана сложности структуры самой галактики.

Однако диаметр галактики является довольно неопределенной величиной. Ее значение всегда зависит от предельной регистрируемой поверхности яркости. При фотографических наблюдениях она зависит от чувствительности пластинки и экспозиции. Во многих случаях, когда две галактики двойной системы кажутся отделенными друг от друга, при увеличении экспозиции может получиться взаимное перекрывание изображений.

Поэтому следует думать, что двойных и кратных галактик, в которых компоненты взаимно проникают друг в друга, гораздо больше, чем это может показаться с первого взгляда. Так, например, оба спутника M32 и NGC 205 туманности Андромеды по крайней мере в проекции перекрываются с последней.

Однако представляет наибольший интерес возможность таких случаев, когда взаимное проникновение является очень глубоким, например, когда ядро одной галактики находится внутри центральной части другой галактики.

Нетрудно видеть, что мы наблюдаем некоторые такие сверхтесные системы в виде радиогалактик. Наиболее яркими примерами этого являются источники радиоизлучения Лебедь А и Центавр А.

Как известно, последний объект отождествлен с пекулярной галактикой NGC 5128, которая, согласно Бааде [13], представляет собой любопытное сочетание эллиптической и спиральной систем с почти совпадающими в проекции центрами.

Предлагавшееся со стороны Бааде и Минковского объяснение, считающее радиоизлучение пекулярных галактик и, в частности, NGC 5128 результатом случайного столкновения двух ранее независимых галактик, вызвало возражения со стороны Шкловского [14] и Милса [15]. Оно имеет, кроме того, и ту слабую сторону, что не объясняет, почему для возникновения радиоизлучения требуется центральное или почти центральное столкновение. Более того, как мы сейчас увидим, вероятность такого центрального столкновения ничтожно мала.

Как легко заключить из значений видимой звездной величины и угловых размеров галактики NGC 5128, ее расстояние должно лежать в таких пределах, что она либо входит в состав местной системы галактик, либо же принадлежит общему метагалактическому полю, будучи расположена недалеко от местной системы. Плотность общего метагалактического поля настолько мала, что вероятность центрального столкновения в этом поле на столь близком расстоянии от нас совершенно ничтожна. Поэтому примем то предположение, при котором вероятности центрального столкновения значительно больше, т. е. допустим на минуту, что NGC 5128 *входит* в состав местной системы галактики.

На фотографии, полученной Бааде [13] с помощью 48-дюймового телескопа Шмидта, видно, что видимое расстояние между центрами „столкнувшихся“ галактик не превосходит пять секунд дуги. Для осторожности удвоим эту цифру, т. е. будем утверждать лишь, что расстояние между центрами в проекции не превосходит  $d = 10''$ . Вероятность такого случайного расположения галактик, входящих в нашу местную систему, при котором какая-нибудь одна пара настолько сблизилась, что в проекции находится ближе друг к другу, чем некоторое угловое расстояние  $d$ , будет порядка

$$P_1 = \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^2}{4},$$

где  $n$  — число членов локальной системы, которое можно принять равным 16, а  $d$  выражено в радианах. Подставляя сюда  $d = 10''$ , получаем

$$P_1 < 10^{-7}.$$

Но это есть вероятность близости в проекции. Если же предположить, что обе галактики совпадают и по лучу зрения, что необходимо для объяснения наблюдаемого радиоизлучения, и если даже допустить, что расстояние между галактиками по лучу зрения вдвое превосходит линейное расстояние в проекции, то указанную вероятность нужно помножить еще на  $10^{-4}$ .

Таким образом, для вероятности столь точного совпадения получается

$$P < 10^{-11},$$

т. е., в среднем, из  $10^{-11}$  групп галактик, подобных нашей локальной системе, только в одной в случайно выбранный момент мы должны наблюдать подобное тесное сближение.

Между тем имеются данные, свидетельствующие о том, что „радиогалактики“, представляющие собой как бы наложение двух систем, наблюдаются и в других скоплениях галактик. Это показано Бааде [13] на примере скопления галактики в Персее.

Все это делает гипотезу о столкновениях совершенно невероятной. Отказавшись от нее, мы приходим к представлению о сверхтес-

ных парах совместно возникших галактик, которые по каким-то причинам могут являться источниками интенсивного радиоизлучения. Но, если согласиться с подобным представлением, то и случай Лебедь А, где мы имеем наиболее мощное радиоизлучение и наложение изображений двух галактик, следует рассматривать, как частный случай сверхтесной системы, составляющие которой имеют общее происхождение.

В пользу необходимости дать источнику Лебедь А истолкование в том же духе, что и истолкование источников, связанных с галактиками NGC 5128, 2175 и 4486, говорит тот факт, что галактика в Лебедь так же, как и указанные три радиогалактики, принадлежит к числу галактик сверхгигантов как по своей абсолютной величине, так и по диаметру (абсолютная величина, достигающая примерно  $M = -20$ , диаметр порядка 20 000 парсек).

Как известно из исследований Цвикки, относящихся к функции светимости галактик, число галактик быстро растет по мере уменьшения светимости. Поэтому столкновение двух галактик низкой абсолютной яркости в десятки тысяч раз более вероятно, чем столкновение двух галактик сверхгигантов. Было бы в таком случае весьма удивительно, если бы наряду с Лебедь А не наблюдались бы по крайней мере несколько десятков источников радиоизлучения, возникших от столкновения галактик низких светимостей, на гораздо меньших от нас расстояниях, чем расстояние Лебедь А. Правда, возникающее при этом радиоизлучение могло бы быть более слабым, но это компенсировалось бы меньшим расстоянием такой пары. Поэтому можно было бы ожидать от них поток излучения того же порядка, что и от Лебедь А. Между тем таких случаев мы вовсе не наблюдаем.

С другой стороны, в рамках гипотезы об общности причин, вызывающих интенсивное радиоизлучение отдаленных галактик, наличие у них общих характеристик и, в частности, принадлежность их всех к числу галактик гигантов кажется естественным.

§ 8. Остановимся на минуту на возможных кинематических и динамических особенностях сверхтесных двойных галактик. При этом отвлечемся сначала от наличия в такой системе диффузного вещества, считая, что она состоит только из звезд. Имеются две возможности. Первая заключается в том, что сверхтесная система представляет собой двойную галактику с положительной полной энергией. В таком случае на начальном этапе скорости ядер двух галактик по отношению друг к другу должны быть настолько велики, чтобы возможность полного отрыва и взаимного удаления в бесконечность была бы обеспечена. Относительные скорости звезд внутри каждой галактики будут в этом случае малы по сравнению со скоростью расхождения галактик. Поэтому возмущающее воздействие каждой галактики на движение звезд в другой галактике не будет особенно велико и в результате приведет лишь к некоторым возмущениям формы каждой галактики.

Существенным в этом случае является то, что момент начала расхождения двух систем должен был быть, вместе с тем, моментом возникновения их, как отдельных динамических единиц, а формирование самих галактик, повидимому, должно было происходить в период их взаимного удаления. Однако при таком представлении трудно объяснить как возникновение звезд на всем протяжении каждой галактики могло бы опередить взаимное удаление. Между тем наблюдаемые сверхтесные системы, повидимому, представляют иногда собой уже сформировавшиеся галактики.

Поэтому представляется более естественным тот вариант, когда первоначально существовала одна единая галактика, ядро которой разделилось на две части и одно из ядер или даже оба ядра (при одинаковом порядке массы) взаимно удаляются через уже существующую звездную систему. Если одно из ядер значительно меньше другого, то большее ядро может сохранить в существующей звездной системе почти центральное положение, выброшенная же меньшая масса будет удаляться. Повидимому, как раз такую картину мы наблюдаем в случае радиогалактики NGC 4486, где действительно имеет место выброс струи из центрального ядра.

Вторая возможность заключается в том, что первоначально имело место разделение какого-то первоначального тела на два ядра, которые стали удаляться друг от друга, причем полная энергия получившейся системы была с самого начала отрицательна, т. е. скорость расхождения была невелика. Получившиеся два ядра должны были бы продолжать двигаться около общего центра тяжести. При дальнейшем развитии каждое из ядер могло дать начало целой галактике, размеры которой гораздо больше среднего расстояния между ядрами. При этих условиях мы получим две взаимно проникающие системы, подобных NGC 5128 и Лебедь А. Однако в такой сверхтесной паре воздействие каждого ядра на движение звезд другой галактики будет велико, и по сути дела мы получим единую оболочку, состоящую из звезд с двумя ядрами. Через некоторое время должна нарушиться также и динамическая независимость ядер, особенно, если, как это следует из законов механики, они должны периодически пронизывать друг друга. Динамика этого явления требует специального анализа, однако следует думать, что после небольшого количества полных колебаний около центра тяжести произойдет слияние обоих ядер.

Как в описанном выше случае образования пары с положительной энергией, так и в только что описанном случае возникновения пары с отрицательной энергией мы будем наблюдать пару, как сверхтесную систему, только в начальный период ее развития. В дальнейшем сверхтесная система, как мы видели, либо должна распасться ( $\epsilon > 0$ ), либо же превратиться в единую систему ( $\epsilon < 0$ ).

Таким образом, в каждой наблюдаемой сверхтесной системе обе галактики, либо, по крайней мере, одна из них должны быть моло-

длыми образованиями. Если на самом раннем этапе развития новой галактики происходит возникновение в ней также и слоя диффузного вещества, то не исключена возможность на этом этапе бурных процессов столкновений межзвездных газовых облаков, которые предполагались уже в отвергаемой нами гипотезе случайного столкновения двух галактик. Возможно, хотя и не доказано, что именно эти процессы являются в той или иной степени причиной мощного радиоизлучения.

Мы видели, что, согласно развитому выше взгляду, может существовать два типа сверхтесных галактик. Один из них представлен системой NGC 4486, другой—NGC 5128. Однако в каждом отдельном случае не так легко решить, к какому виду относится данная сверхтесная система. Так, например, это трудно сделать и в отношении объекта Лебедь А. Только особая мощность процесса радиоизлучения в ней говорит как будто о том, что, вероятно, мы имеем здесь дело со сверхтесной системой положительной энергии.

§ 9. Кроме случаев, рассмотренных выше, можно представить себе также случаи, когда образовавшиеся ядра возникающей кратной галактики расходятся на весьма значительные расстояния и только после этого развиваются в настоящие звездные системы. В этом случае мы не будем наблюдать никаких сверхтесных пар или групп, а будем иметь дело с образованием обычной широкой пары или кратной системы с отрицательной или положительной энергией.

Таким образом, сверхтесные пары, наблюдаемые в виде радиогалактик, должны считаться весьма молодыми образованиями. Однако не всякая двойная галактика должна проходить через стадию сверхтесной пары.

§ 10. *Выводы.* Среди кратных галактик имеется значительное число систем типа Трапеции. Это является свидетельством в пользу представления о совместном возникновении галактик, составляющих кратные системы. Имеются основания считать, что многие из кратных галактик представляют собой системы с положительной энергией и поэтому находятся в процессе распада.

Основным выводом из сказанного является то, что *возникновение кратных галактик в Метагалактике происходит и в нашу эпоху.* Но, поскольку многие кратные галактики распадаются на независимые отдельные галактики, то сделанное утверждение относится и к *одиночным галактикам.*

Имеются доводы в пользу того, что некоторые скопления галактик представляют собой недавно возникшие и ныне распадающиеся системы.

Поскольку отношение времени распада кратной галактики типа Трапеции к продолжительности жизни каждой галактики, как звездной системы, будучи малым, все же, вероятно, во много раз больше, чем отношение продолжительности распада кратной звезды типа Трапеции к длительности жизни звезды, как члена галактики, то утверж-

дение о молодости галактик, входящих в кратные системы, не следует понимать слишком узко, и возможно, что эти „молодые“ системы уже успели прожить заметную часть своей жизни. Быть может этим объясняется, что процент предполагаемых молодых галактик среди всех галактик, который можно вывести на основании развитых выше представлений, гораздо больше, чем процент молодых звезд среди звезд вообще.

В отношении радиогалактик имеются основания считать их сверхтесными молодыми парами с положительной или отрицательной энергией.

Бюраканская астрофизическая  
обсерватория АН Армянской ССР

Поступило 4 II 1956

#### Պ. 2. Համբարձումյան

### ԲԱԶՄԱԳԱԼԱԿՏԻԿԱՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բազմազալակտիկաների առիտը բոլոր զալակտիկաների մեջ շատ ավելի մեծ է, քան կարելի էր սպասել, և նիտադրելով դիտողատիվ հավասարակշռությունը միայնակ և բազմազալակտիկ զալակտիկաների միջև: Այստեղից կարակացնում ենք, որ բազմազալակտիկաները, որպես կանոն, չեն առաջացել միայնակ զալակտիկաներից փոխադարձ բռնազրավման հետևանքով: Հետևաբար, յուրաքանչյուր բազմազալակտիկայի բաղադրիչները պետք է առաջացած լինեն միատեղ:

Հալմբերգի ցուցակի բազմազալակտիկաների մեծամասնությունն ունի Տրապեցիայի տիպի բազմաստղերին նման կոնֆիգուրացիաներ: Նրանց հարմար է անվանել Տրապեցիայի տիպի բազմազալակտիկաներ: Սովորական տիպի կոնֆիգուրացիաներ ունեցող բազմազալակտիկաները կազմում են ցուցակի փոքր մասը: Հետևաբար, բազմազալակտիկաների մեծամասնությունը անկայուն սխառեմներ են: Այս հանգամանքը հնարավոր է դարձնում դրական լրիվ էներգիայի սխառեմների առկայությունը բազմազալակտիկաների թվում:

Այդ կարակացությունը հաստատվում է այն ավյալներով, որոնք հայանի և կրկնակի և բազմակի զալակտիկաների բաղադրիչների հարաբերական տեսագծային արագությունների վերաբերյալ: Այն և նիտադրությունը, որ բոլոր բազմազալակտիկաներն ունեն բացասական էներգիաներ, բերում է բազմազալակտիկաների անդամների զանդվածների չափազանց մեծ արժեքների:

Նման դաստոգությունները կարելի է կիրառել նաև զալակտիկաների կույտերի նկատմամբ: Ընդունելով այդ կույտերի լրիվ էներգիաների բացասական լինելը, բաղադրիչ զալակտիկաների միջին զանդվածների համար մենք կտանանք չափազանց բարձր, անհավանական զնահատականեր: Ստիպված, պետք է ենթադրենք, որ զալակտիկաների կույտերի լրիվ էներ-

գիտներն ունենում են նաև դրական արժեքներ: Այդ ստանձնապես վերաբերում է Բերոնիկայի Վարսերի կույտին: Գալակտիկաների այդ կույտը, ըստ ամենայնի, իրենից ներկայացնում է լայնացող մի խումբ, որը հիշեցնում է մեր գալակտիկայի աստղասփյուռները:

Բազմազալակտիկաների բազմաթիվների բնդճանուր ծագման վերաբերյալ մեր եզրակացութունը իր նկատմամբ է գալակտիկաների բաժանման և զերմնի սխառմաների զաղափարը: Դրանք պետք է լինեն փոխադարձարար ներթափանցող բազմաթիվներից բողբոջացած կրկնակի կամ բազմապատիկ գալակտիկաներ: Ուժեղ սաղիսճատագայթում ավել մեղ նայանի գալակտիկաները (այսպես կոչված սաղիսգալակտիկաները) ըստ երևույթին իրենցից ներկայացնում են այդպիսի գերնեղ կրկնակի սխառմաներ: Եթե այդպես է, ապա հիմք չկա ենթադրելու, որ Cygnus A, կամ NGC 1275 սաղիսգալակտիկաների գեղաբույս մենք դորձ ունենք իրարից անկախ աստղացած գալակտիկաների բնդճարումների նկատմամբ:

Այսպիսի տեսակետը դասնում է շատ նախնական, եթե մենք ուշադրություն դարձնենք այն հանգամանքի վրա, որ նշված տիպի բոլոր սաղիսգալակտիկաներն ունեն սրաչ ընդհանուր ֆիզիկական հասկումներ: Այդ հասկումներն այն է, որ նրանք գերնեղ գալակտիկաներ են ինչպես գծային չափերի, այնպես էլ բացարձակ մեծություն տեսակետից: Վերջինիս արժեքները սաղիսգալակտիկաների մոտ կազմում են շուրջ  $M = -20$ : Անհարկն է հասկանալ այդ փաստը, բնդճանելով սխառման բնդճարումների ենթադրությունը:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян. Астр. журн., 14, 207, 1937. См. также: «Эволюция звезд и астрофизика», Изд. АН АрмССР, Ереван, 1947.
2. Цвикки. PASP, 50, 218, 1938; 64, 247, 1952.
3. Нейман, Скотт, Шен. Ap. J., 117, 92, 1933.
4. Холмерг. Annals of the Observatory of Lund, № 6, 1937.
5. Эйме Н. А. 88, № 1, 1930.
6. Сейферт. PASP, 63, 72, 1951.
7. Пейдж Ap. J., 116, 63, 1952.
8. Кудер. l'Astronomie, 68, 405, 1954.
9. Туберг. Ap. J., 98, 501, 1943.
10. Хаббл. The Realm of the Nebulae, Нью Хевен, 1937, стр. 180.
11. Цвикки. PASP, 63, 61, 1951; 64, 247, 1952.
12. Шварцшильд. A. J., 59, 273, 1954.
13. Бааде. Ap. J., 119, 215, 1954.
14. Шкловский. Астр. журн., 31, 483, 1954.
15. Милс. Observatory, 74, 249, 1954.

Г. М. Гарибян

## К микроскопическому выводу формулы Ферми

1. Ферми [1] была выведена классическая формула для полных потерь энергии заряженной частицей на расстояниях  $b$ , превышающих радиусы атомов, при движении с постоянной скоростью в среде. Потери энергии отождествляются с потоком вектора Пойтинга через цилиндрическую поверхность радиуса  $b$  вокруг траектории частицы. В дальнейшем этот способ расчета был значительно усовершенствован многими авторами, причем в основном они занимались более точным учетом диэлектрических свойств среды и разделением потерь на ионизацию и возбуждение атомов и на черенковское излучение.

Кроме этого, Будини [2] был дан также микроскопический вывод формулы Ферми. Идея этого метода заключается в том, что поле движущейся заряженной частицы в среде при скорости частицы, близкой к скорости света, разлагается на поле псевдофотонов. Вводя затем классический коэффициент поглощения фотонов в веществе, получают потери энергии заряженной частицей, отождествляя их с энергией поглощенных псевдофотонов. Выведенная таким образом формула совпадает с формулой Ферми. При этом Будини брал в качестве классического коэффициента поглощения фотонов в веществе выражение, справедливое для разряженных сред.

Настоящим мы хотим показать, что формулу Ферми можно получить и с коэффициентом поглощения фотонов для плотных сред, если выражение для числа псевдофотонов брать в более точном виде.

2. Как известно [3], электрическое поле заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  в среде, дается следующими формулами

$$E_x = -\frac{ie}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K_0(k(\omega)\rho) e^{i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)} \omega d\omega, \quad (1)$$

$$E_\rho = \frac{e}{\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} k(\omega) K_1(k(\omega)\rho) e^{i\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)} d\omega,$$

где  $E_x$  и  $E_\rho$  — компоненты электрического поля частицы вдоль и

поперек пути частицы,  $k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon(\omega))$ ,  $\text{Re}k(\omega) \geq 0$ ,  $K_0$  и  $K_1$  —

видоизмененные функции Ганкеля, а  $\varepsilon(\omega)$  — диэлектрическая постоянная среды. Действием магнитного поля на электроны атомов среды, как это обычно делается в методе Вейцекера-Вильямса [4], мы будем пренебрегать\*. Электрические поля  $E_x$  и  $E_p$  мы можем рассматривать как суперпозиции электрических полей псевдофотонов.

Вектор Пойтинга каждого из таких псевдофотонов равен  $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \mathbf{H}$ . В

среде электрическое и магнитное поля фотона связаны друг с другом [5] согласно формуле  $\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\mu} \mathbf{H}$  или, так как мы рассматривали немагнитные среды,

$$\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \mathbf{H}. \quad (2)$$

Поэтому мы добавляем к имеющемуся магнитному полю такую величину, чтобы оно по абсолютной величине определялось бы формулой (2) и вектор Пойтинга полученных таким образом фотонов был бы направлен вдоль и перпендикулярно траектории частицы. Таким образом, поток энергии, связанный с каждым из фотонов, будет равен  $\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}$ .

Заметим, что дисперсия учитывается тем, что

$$\sqrt{\varepsilon} \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{если} \quad \mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega.$$

Итак, полный поток энергии псевдофотонов, соответствующих причесельным параметрам  $\rho, \rho + d\rho$ , за все время пролета частицы равен

$$\begin{aligned} & 2 \pi \rho d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_p \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_x \sqrt{\varepsilon} \mathbf{E}_x) = \\ & = \rho d\rho \frac{2e^2 c}{\pi v^4} \int_0^\infty \frac{\omega^2 \text{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{[\varepsilon(\omega)]^2} |1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)| \cdot \\ & \cdot (|K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \varepsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2) d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Подсчет потока вектора Пойтинга, направленного вдоль траектории (электрический вектор  $\mathbf{E}_p$ ), в формуле (3) не представляет затруднений. Что же касается вектора Пойтинга, направленного перпендикулярно траектории частицы (электрический вектор  $\mathbf{E}_x$ ), то для его подсчета мы должны представить себе цилиндрическую поверх-

\* Действие магнитного поля в  $\frac{v}{c}$  раз меньше действия электрического поля, где  $v$  — скорость валентных электронов атома.

ность, сжимающуюся со скоростью  $v$  к траектории частицы. Тогда поток электромагнитной энергии, который пройдет через эту поверхность при сжатии ее от радиуса  $\rho + d\rho$  до  $\rho$ , будет равен

$$S_1 = \frac{d\rho}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} E_x \sqrt{\epsilon} E_x 2\pi\rho dx.$$

Но из (1), ввиду специальной зависимости полей от  $x$  и  $t$ , следует, что

$$S_1 = d\rho \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} E_x \sqrt{\epsilon} E_x 2\pi\rho dt.$$

Число псевдофотонов, соответствующих прицельным параметрам  $\rho, \rho + d\rho$ , мы получим, разделив (3) на  $h^*\omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega d\omega d\rho &= \\ &= \rho \frac{2e^2c}{h\pi v^4} \frac{\operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}{|\epsilon(\omega)|^2} \omega |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)|. \end{aligned}$$

$$\{ |K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2 \} d\omega d\rho. \quad (14)$$

Потери энергии заряженной частицей на прицельных расстояниях  $\rho, \rho + d\rho$  на единице длины пути равны

$$\frac{\partial w}{\partial x} d\rho = d\rho \int_0^{\infty} \Omega h\omega N \delta(\omega) d\omega, \quad (5)$$

где  $N$  — число атомов в единице объема, а  $\sigma(\omega)$  — поперечник взаимодействия фотона частоты  $\omega$  с атомом среды. Подставляя в (5) различные сечения взаимодействия фотонов, мы можем получить соответствующие потери энергии.

Классический коэффициент поглощения фотонов в веществе равен [6]:

$$N\sigma(\omega) = -\frac{2\omega\kappa}{c}, \quad (6)$$

где  $\epsilon = \epsilon' - i\kappa$ , или  $\epsilon^2 = \epsilon'^2 - \kappa^2 - 2\pi i\kappa$ . Отсюда следует, что

$$\kappa = -\frac{\operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{2\operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}.$$

Таким образом

$$N\sigma(\omega) = \frac{\omega \operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{c \operatorname{Re}\sqrt{\epsilon(\omega)}}. \quad (7)$$

Подставим это выражение в формулу (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} d\rho = d\rho \int_0^{\infty} \frac{2e^2\rho}{\pi v^4} \cdot \frac{\omega^2 \operatorname{Im}\epsilon(\omega)}{|\epsilon(\omega)|^2} |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot \\ \cdot \{ |K_1(k\rho)|^2 + |1 - \beta^2 \epsilon(\omega)| \cdot |K_0(k\rho)|^2 \} d\omega. \end{aligned} \quad (8)$$

\* Здесь и в последующем под  $h$  следует понимать  $\frac{h}{2\pi}$ .

Если теперь произвести интегрирование по  $\rho$  от  $b$  до  $\infty$ , воспользовавшись формулами Ломмеля [7], то получим известное выражение Ферми.

$$\frac{dW}{dx} = \int_b^{\infty} \frac{\partial W}{\partial x} d\rho = \frac{2e^2 b}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\varepsilon(\omega)} - \beta^2 \right) K^* K_1 (K^* \rho) K_0 (K \rho) i \omega d\omega. \quad (9)$$

3. Как уже было отмечено выше, Будини брал выражение для коэффициента поглощения фотонов в разреженной среде, т. е.

$$N\sigma(\omega) = \frac{\omega \operatorname{Im} \varepsilon(\omega)}{c},$$

полагая  $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sim 1$ . Подсчитывая же число псевдофотонов, Будини не учитывал, что  $H = V \sqrt{\varepsilon} E$ , а это привело к отсутствию  $\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  в числителе формулы (4). Как видно из вышесказанного, формула Ферми получится в случае любых сред, если брать в качестве числа псевдофотонов выражение [4] и не делать никаких приближений для классического коэффициента поглощения фотонов.

Институт физики АН  
Армянской ССР

Поступило 7 X 1955

Գ. Մ. Գարիբյան

## ՖԵՐՄԻԻ ԲԱՆԱՁԵՎԻ ՄԻԿՐՈՍԿՈՊԻԿ ԱՐՏԱԾՄԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեծ հետազոտությունների վրա մասնիկների էներգիայի կորուստների՝ ֆերմիի բանաձևը միկրոսկոպիկ կերպով ստացված է կամավոր խառնված միջավայրերի համար: Նշված են անճշտություններ Բուդինի արտածման մեջ, որը վերանշխյու բանաձևը միկրոսկոպիկ կերպով ստացել էր միայն նուր միջավայրերի համար:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Fermi E. Phys. Rev., 57, 485, 1940.
2. Budini P. Nuovo Cimento, 10, 236, 1953.
3. См. например, Schönberg M., Nuovo Cim., 8, 159, 1951.
4. Williams E. J. Det. Kgl. Danske Viden. Selsk. Math-Fys. Med., 13, № 4, 1935.
5. Тамм И. Е. Теория электричества, М.—Л., 1946, стр. 501.
6. Беккер Р. Теория электричества, М.—Л., 1941, стр. 139.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций, М.—Л., 1948, стр. 237.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Термонапряженное состояние в круглых бетонных блоках с учетом ползучести бетона

Задача определения температурных напряжений в круглых блоках была предметом многих исследований. Особенно нужно отметить работу Г. Н. Маслова [1], который подробно исследовал термонапряженное состояние круглого бетонного блока на основе методов теории упругости. В этой работе он рассматривает термонапряженное состояние тела без учета ползучести бетона и при допущении жесткой заделки блока в основании.

В недавно опубликованной работе Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [2] рассматривалось термонапряженное состояние прямоугольного бетонного блока, находящегося под действием стационарной температуры. При решении задачи учитывались ползучесть бетона и силы сопротивления, действующие вдоль плоскости контакта блока с основанием. В этой статье авторы показывают, что допущение отсутствия горизонтальных перемещений по линии контакта блока с основанием не отражает действительной картины температурных напряжений в таких блоках.

В настоящей работе рассматривается задача о термонапряженном состоянии круглого бетонного блока, расположенного на сплошном основании и находящегося под действием стационарной и нестационарной температуры, с учетом ползучести бетона и силы сопротивления, действующей вдоль плоскости контакта блока с его основанием.

1. Упруго-мгновенные напряжения в круглом блоке от воздействия стационарной температуры и сил связности

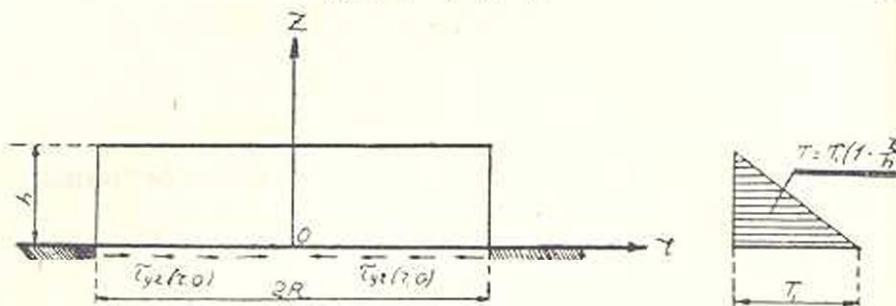
Пусть круглый бетонный блок высотой  $h$  и диаметром основания  $2R$  (фиг. 1) находится под воздействием стационарной температуры  $T$ , зависящей только от координаты  $z$ , а в своем нижнем основании  $z=0$  связан со сплошным основанием. Тогда появляются силы сопротивления, действующие по нижнему основанию блока в виде горизонтальных тангенциальных напряжений  $\tau_{rz}$  ( $r$  — направление радиуса,  $z$  — направление оси вращения), которые называются силами связности блока с основанием.

На нижнем основании блока отсутствуют нормальные напряжения

$$\sigma_z(r, 0) = 0, \quad (1.1)$$

а действующие вдоль этого основания силы связности, при линейной характеристике, согласно [2], будут

$$\tau_{rz}(r, 0) = \beta u(r, 0), \quad (1)$$



Фиг. 1.

где  $\beta$  — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность  $\gamma z/c$ .  
 $u(r, 0)$  — горизонтальное перемещение точек нижнего основания блока по направлению оси  $r$ .

Верхнюю границу блока  $z = h$  считаем свободной от внешних напряжений

$$\sigma_z(r, h) = \tau_{rz}(r, h) = 0, \quad (1)$$

а на цилиндрической поверхности блока выполняются условия

$$\sigma_r(\pm R, z) = 0, \quad \int_0^h \tau_{rz} dz / r_{r=\pm R} = 0. \quad (1)$$

В силу симметрии граничных условий на оси  $r = 0$  будут иметь место равенства

$$u(0, z) = \tau_{rz}(0, z) = 0. \quad (1)$$

Допустим, что температура изменяется по линейному закону:

$$T = T(z) = T_1 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right), \quad (1)$$

где  $T_1$  — температура нижнего основания блока.

Решение задачи о термоупругом состоянии рассматриваемого бетонного блока сводится к нахождению функции напряжений  $\varphi(r, z)$ , удовлетворяющей, согласно [3], следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \\ &= -E \alpha \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (1)$$

а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1), (1.3) и (1.4), где  $E$  — модуль мгновенной деформации блока, а  $\alpha$  — коэффициент линейного расширения, имеющий размерность  $\frac{1}{\text{град}}$ .

При этом напряжения и перемещения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \\
 \sigma_\theta(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \\
 \sigma_z(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\
 \tau_{rz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right], \\
 \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)], \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} - \alpha T = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\
 \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz},
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Из (1.8) и (1.9) получим

$$u = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + \alpha T r. \tag{1.10}$$

В нашем случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T = 0. \tag{1.11}$$

Тогда (1.7) примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{1.12}$$

Решение уравнения (1.12) ищем в следующем виде [4]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + B_k \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} + C_k \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + \right. \\
 &\quad \left. + D_k \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} \right) J_0 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right),
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где  $J_1(x)$  — функция Бесселя  $i$ -го порядка первого рода с действительным аргументом;  $\gamma_k$  — корни уравнения

$$\frac{d}{dx} J_1(x) = 0. \tag{1.14}$$

Из (1.13) получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \varphi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 (C_k \operatorname{ch} \alpha_k z + D_k \operatorname{sh} \alpha_k z) J_0(\alpha_k r), \quad (1.15)$$

где

$$\alpha_k = \gamma_k / R.$$

Интегрируя уравнение (1.15), найдем:

$$\nabla^2 \varphi = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (C_k \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \operatorname{ch} \alpha_k z) J_0(\alpha_k r) + i(r), \quad (1.16)$$

где  $i(r)$  — произвольная функция.

Пользуясь формулами (1.8), (1.10), (1.13) и (1.15), получим выражения для температурных напряжений и перемещения в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [(A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \alpha_k z + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) = & - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k - 2(1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k - 2(1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_0(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k - (1-2\nu) D_k] \operatorname{ch} \alpha_k z + [B_k - (1-2\nu) C_k] \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ & + C_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z + D_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z \} J_1(\alpha_k r) + (1-\nu) f'(r) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} u(r, z) = & \frac{1+\nu}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k \operatorname{sh} \alpha_k z + B_k \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ & + D_k \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r) + \alpha \operatorname{Tr}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Удовлетворив условиям (1.1)–(1.5), из соотношений (1.17)–(1.20) для определения неизвестных коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$ ,  $D_k$ , получим следующие уравнения:

$$B_k - 2(1-\nu) C_k = 0, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} [A_k - 2(1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k h + [B_k - 2(1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k h + \\ + C_k \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h = 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} [A_k - (1-2\nu) D_k] \operatorname{ch} \alpha_k h + [B_k - (1-2\nu) C_k] \operatorname{sh} \alpha_k h + \\ + C_k \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h + D_k \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h = 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$A_k - (1-2\nu) D_k - \frac{1+\nu}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} B_k = 2\alpha\beta T_1 R^3 \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k (\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}. \quad (1.24)$$

$$\dot{i}(r) = 0. \quad (1.25)$$

При этом использовано следующее разложение функции  $r$  по бесселевым функциям [5]:

$$r = 2R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right), \quad (1.26)$$

$$0 \leq r < R$$

Решив уравнения (1.21)–(1.24), получим значения неизвестных коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$ :

$$A_k = \frac{\left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 - 2(1-\nu) \operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k,$$

$$B_k = 2(1-\nu) C_k,$$

$$D_k = \frac{\operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k, \quad (1.27)$$

$$C_k = \frac{H_k \alpha_k h \chi_k}{\psi_k + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \chi_k},$$

где введены следующие обозначения:

$$H_k = -2\alpha \beta T_1 R^3 \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k (\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}, \quad (1.28)$$

$$\chi_k = \frac{\operatorname{th} \alpha_k h}{\alpha_k h} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h},$$

$$\psi_k = \operatorname{th}^2 \alpha_k h - \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2.$$

Пользуясь выражениями (1.27) и (1.28), для определения напряжений  $\sigma_r(r, z)$ ,  $\sigma_z(r, z)$ ,  $\tau_{rz}(r, z)$  и перемещения  $u(r, z)$ , получим следующие формулы:

$$\frac{\sigma_r(r, z)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \frac{1}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1\right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left( 2\operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{sh} \alpha_k z - 2 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k z}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right) J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right). \quad (1.29)$$

$$\frac{\sigma_z(r, z)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2-1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \left( \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} J_0 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right), \quad (1.30)$$

$$\frac{\tau_{rz}(r, z)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2-1) J_1^2(\gamma_k)} \frac{1}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left[ \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{ch} \alpha_k z - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k z}{\alpha_k h} \right] \right\} J_1 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right), \quad (1.31)$$

$$\frac{u(r, z)}{\alpha T_1 R} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2-1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left\{ 2(1-\nu) \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - (1-2\nu) \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k z}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k h} - \right.$$

$$\left. - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \left( \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h} \right)^2 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} J_1 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right) +$$

$$+ \frac{r}{R} \left( 1 - \frac{z}{R} \right). \quad (1.32)$$

Из выражения (1.29), для нормальных напряжений  $\sigma_r$  в точке  $(0, 0)$ , получим следующее значение

$$\frac{\sigma_r(0, 0)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2-1) J_1^2(\gamma_k)} \frac{1}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\phi_k}{\chi_k} + 1}, \quad (1.33)$$

где использовано значение

$$J_1'(0) = \frac{1}{2}. \quad (1.34)$$

Пользуясь формулой

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x), \quad (1.35)$$

выражению (1.26) можно дать следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2-1) J_1^2(\gamma_k)} \left[ J_0 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right) - J_1' \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right) \right]. \quad (1.36)$$

Если в (1.36) подставить  $\gamma=0$ , то получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} = 1. \quad (1.37)$$

В таблицах 1 и 2 приводятся некоторые значения нормальных напряжений  $\frac{\sigma_r(\gamma, z)}{E\alpha T_1}$ . При этом использованы формулы (1.33) и

$$\frac{\sigma_r(0, h)}{E\alpha T_1} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{\varphi_k(x)}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1}, \quad (1.38)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{x - \text{th}x}{\chi_k x \text{ch}x} = \frac{x \text{ch}x - \text{sh}x}{\text{sh}x \text{ch}x - x}. \quad (1.39)$$

Таблица 1

Значения температурных напряжений  $\left| \frac{\sigma_r(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$  при

$$E = 2.10^5 \text{ кг/см}^2, h = 1,00 \text{ м}, \nu = \frac{1}{6}$$

$\beta$	$\frac{E}{2\beta h}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{h}{R}$			
10	100		0,10979	0,34738
25	40		0,24291	0,60843
50	20		0,40525	0,77737
100	10		0,59865	0,90722
200	5		0,80770	0,96635

Таблица 2

Значения температурных напряжений  $\left| \frac{\sigma_r(0, h)}{E\alpha T_1} \right|$  при

$$E = 2.10^5 \text{ кг/см}^2, h = 1,00 \text{ м}, \nu = \frac{1}{6}$$

$\beta$	$\frac{E}{2\beta h}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{h}{R}$			
10	100		0,05328	0,17312
25	40		0,12027	0,30420
50	20		0,20108	0,38807
100	10		0,29662	0,44907
200	5		0,40061	0,47950

Из данных, приведенных в таблицах 1 и 2, видно, что: 1) с увеличением отношения  $\frac{h}{R}$  нормальные напряжения в блоке  $\sigma_r(0, 0)$  и  $\sigma_r(0, h)$  по абсолютным значениям растут; 2) с увеличением значения

коэффициента  $\beta$ , при сохранении отношения  $\frac{h}{R}$ , абсолютные значения  $\sigma_r(0,0)$  и  $\sigma_r(0,h)$  также возрастают. Сравнивая эти таблицы с таблицами, помещенными в работе [2], видим, что при круглом бетонном блоке  $\sigma_r(0,0)$  и  $\sigma_r(0,h)$  по абсолютным значениям получаются гораздо большими, чем при прямоугольном бетонном блоке.

Из выражения (1.31), для определения сил связности или касательных напряжений на нижнем основании блока, получаем следующую формулу:

$$\frac{\tau_{rz}(r,0)}{E\alpha T_1} = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \cdot \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} \frac{\psi_k}{\alpha_k h \chi_k} \quad (1.40)$$

## 2. Температурные напряжения в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона и сил связности

Пусть круглый бетонный блок в некотором возрасте  $\tau = \tau_1$  подвергается воздействию стационарного потока тепла, определяемого зависимостью (1.6).

Тогда составляющие упруго-мгновенного напряжения  $\sigma_r(r, z, \tau_1)$ ,  $\sigma_z(r, z, \tau_1)$  и  $\tau_{rz}(r, z, \tau_1)$  определяются уравнениями (1.29)–(1.31) и не будут зависеть от времени.

Термонапряженное состояние, вызванное в круглом бетонном блоке воздействием стационарного теплового потока в возрасте  $\tau = \tau_1$ , под влиянием ползучести бетона с течением времени затухает.

В этом случае температурные напряжения в круглом бетонном блоке определяются функцией напряжений  $\varphi(r, z, t)$ , которая удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} - E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial z(r, z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -E\alpha \nabla^2 T(r, z, t), \quad (2.1)$$

где

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

$C(t, \tau)$  — мера ползучести,  $\varphi(\tau)$  — некоторая функция возраста бетона определяемая из опыта.  $C_0$ ,  $A_1$ ,  $\gamma$  — параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

Для учета ползучести бетона используем теорию ползучести бетона, развитую в работе [6].

В нашем случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T = 0. \quad (2.3)$$

Тогда для определения функции  $\varphi(r, z, t)$  получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} - E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, \tau)}{\partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = 0, \quad (2.4)$$

однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода. Из теории интегральных уравнений известно, что однородное интегральное уравнение в регулярных случаях не имеет другого решения, кроме тождественного нуля, т. е. из (2.4) следует:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Функция  $\varphi(r, z, t)$  будет иметь такой же вид, как функция напряжений  $\varphi(r, z, t)$  при упругом решении (1.13), только в выражении функции  $\varphi(r, z, t)$  коэффициенты  $A_k, B_k, C_k$  и  $D_k$  будут зависеть от времени  $t$ .

Решим задачу о температурных напряжениях в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, h, t) = \tau_{rz}(r, h, t) &= 0, \\ u(0, z, t) = \tau_{rz}(0, z, t) &= 0, \\ \sigma_r(R, z, t) = \int_0^h \tau_{rz}(r, z, t) dz \Big|_{r=R} &= 0, \\ \sigma_z(r, 0, t) = 0, \tau_{rz}(r, 0, t) &= \beta u(r, 0, t), \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

аналогичных граничным условиям упругой задачи.

Напряжения  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$  и  $\tau_{rz}(r, z, t)$  выражаются через функцию  $\varphi(r, z, t)$  следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial r^2} \right], \\ \sigma_\theta(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \nu \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial r} \right], \\ \sigma_z(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2-\nu) \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial z^2} \right], \\ \tau_{rz}(r, z, t) &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \varphi(r, z, t) - \frac{\partial^2 \varphi(r, z, t)}{\partial z^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Перемещения  $u(r, z, t)$  и  $w(r, z, t)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_r(r, z, t) - \nu [\sigma_\theta(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)] \} - \\ &- \int_{\tau_1}^t \{ \sigma_r(r, z, \tau) - \nu [\sigma_\theta(r, z, \tau) + \sigma_z(r, z, \tau)] \} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u(r, z, t)}{r} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_\theta(r, z, t) - \nu [\sigma_r(r, z, t) + \sigma_z(r, z, t)] \} - \\ &- \int_{\tau_1}^t \{ \sigma_\theta(r, z, \tau) - \nu [\sigma_r(r, z, \tau) + \sigma_z(r, z, \tau)] \} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial z} - \alpha T = \frac{1}{E} \{ \sigma_z(r, z, t) - \nu [\sigma_r(r, z, t) + \sigma_\theta(r, z, t)] \} - \\ &- \int_{\tau_1}^t \{ \sigma_z(r, z, \tau) - \nu [\sigma_r(r, z, \tau) + \sigma_\theta(r, z, \tau)] \} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz}(r, z, t) - \\ &- 2(1+\nu) \int_{\tau_1}^t \tau_{rz}(r, z, \tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) получим

$$u(r, z, t) = \alpha T r - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \bar{z}(r, z, t)}{\partial r \partial z} - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t \frac{\partial^2 \varphi(r, z, \tau)}{\partial r \partial z} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.5) ищем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[ A_k(t) \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + B_k(t) \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} + C_k(t) \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{sh} \gamma_k \frac{z}{R} + \right. \\ &\left. + D_k(t) \gamma_k \frac{z}{R} \operatorname{ch} \gamma_k \frac{z}{R} \right] J_0 \left( \gamma_k \frac{r}{R} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где  $\gamma_k$  — корни уравнения (1.14).

Пользуясь формулами (2.7), (2.9) и (2.10), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) + 2D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k(t) + 2C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ &+ C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_2(\alpha_k r), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\sigma_z(r, z, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) - 2(1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + [B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_0(\alpha_k r), \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(t, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \{ [A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k z + [B_k(t) - (1-2\nu) C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k z + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z \} J_1(\alpha_k r) + \\ + (1-\nu) \frac{d}{dr} f(r, t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} u(r, z, t) = \alpha T r + \frac{1+\nu}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k z + B_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k z + \\ + C_k(t) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + D_k(t) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z - (1+\nu) \int_{\tau_1}^t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k [A_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ + B_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k z + C_k(\tau) \alpha_k z \operatorname{sh} \alpha_k z + \\ + D_k(\tau) \alpha_k z \operatorname{ch} \alpha_k z] J_1(\alpha_k r) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\alpha_k = \frac{\gamma_k}{R}$ ,  $f(r, t)$  — произвольная функция.

Удовлетворив граничным условиям (2.6), из соотношений (2.11) — (2.14) для определения неизвестных коэффициентов  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $C_k(t)$ ,  $D_k(t)$ , получим следующие уравнения:

$$B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t) = 0, \quad (2.15)$$

$$[A_k(t) - 2(1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k h + [B_k(t) - 2(1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k h + \\ + C_k(t) \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h + D_k(t) \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h = 0, \quad (2.16)$$

$$[A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k h + [B_k(t) - (1-2\nu) C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k h + \\ + C_k(t) \alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h + D_k(t) \alpha_k h \operatorname{sh} \alpha_k h = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_k(t) - (1-2\nu) D_k(t) - \frac{1+\nu}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} B_k + H_k + \\ + \frac{\beta(1+\nu)}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^t B_k(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$f(r, t) = 0. \quad (2.19)$$

При этом использовано обозначение (1.28) и разложение (1.26).

Решив уравнения (2.15)–(2.17), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_k(t) &= \frac{\left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 - 2(1-\nu) \operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k(t), \\ B_k(t) &= 2(1-\nu) C_k(t), \\ D_k(t) &= -\frac{\operatorname{th}^2 \alpha_k h}{\alpha_k h \chi_k} C_k(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

где использованы обозначения (1.28).

Подставив значения  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$  и  $D_k(t)$  в (2.18), получим

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{\psi_k}{\alpha_k h \chi_k} + \frac{2(1-\nu^2)}{E} \frac{\beta}{\alpha_k} \right] C_k(t) + H_k + \\ & + \frac{2\beta(1-\nu^2)}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \frac{dC(t, \tau)}{d\tau} d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Подставив сюда значение  $C(t, \tau)$  из (2.2), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \right] C_k(t) - \alpha_k h H_k = 2\beta(1-\nu^2)h \int_{\tau_1}^t C_k(t) \{ \varphi'(\tau) - \\ & - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\alpha(t-\tau)} \} d\tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Отсюда следует, что

$$C_k(\tau) = \frac{\alpha_k h H_k}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}}. \quad (2.23)$$

Пользуясь соотношением (2.23), из (2.22) получим для определения  $C_k(t)$  следующее интегральное уравнение

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\alpha(t-\tau)} \} d\tau, \quad (2.24)$$

где

$$b_k = \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}} = \frac{E}{\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} > 0. \quad (2.25)$$

Дифференцируя (2.24) по  $t$ , получим

$$C_k'(t) = -\gamma b_k C_k(t) \varphi(t) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau, \quad (2.26)$$

откуда

$$C_k(\tau_1) = -\gamma b_k C_k(\tau_1) \varphi(\tau_1). \quad (2.27)$$

Определив из уравнения (2.26), значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau$$

и подставив в исходное уравнение (2.24), получим

$$C_k'(t) = -\gamma b_k C_k(t) \varphi(t) - \gamma C_k(t) + \gamma C_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Дифференцируя выражение (2.28) еще раз по  $t$ , приведем его к следующему виду

$$C_k''(t) + \gamma[1 + b_k \varphi(t)] C_k'(t) = 0. \quad (2.29)$$

Решение этого дифференциального уравнения с начальными условиями (2.23) и (2.27) имеет вид

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) [1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1)] \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz. \quad (2.30)$$

Если в уравнении (2.30)  $\varphi(\tau)$  заменить значением

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0,$$

то оно примет следующий вид:

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \left\{ 1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1} \tau_1^{p_k} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\gamma_k z}}{z^{p_k}} dz \right\}; \quad (2.31)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma(1 + b_k C_0) &= \gamma_k, \\ \gamma b_k A_1 &= p_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Пользуясь понятием функции влияния  $\Phi(\xi, p)$  [6]

$$\Phi(\xi, p) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^p} d\tau, \quad (2.33)$$

будем иметь

$$\int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\gamma_k z}}{z^{p_k}} dz = \gamma_k^{-(1-p_k)} [\Phi(\gamma_k t, p_k) - \Phi(\gamma_k \tau_1, p_k)]. \quad (2.34)$$

Подставив это выражение в (2.31), получим

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma b_k}{r_k^{1-\nu k}} \left( C_0 + \frac{\Lambda_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{\nu k} e^{\tau_k \tau_1} [\Phi(r_k t, \rho_k) - \Phi(r_k \tau_1, \rho_k)] \right\}. \quad (2.35)$$

Если ввести обозначение

$$H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) = 1 - \frac{\gamma E r_k^{\nu k - 1}}{E \frac{\psi_k}{2\beta(1-\nu^2)h \chi_k} + 1} \left( C_0 + \frac{\Lambda_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{\nu k} e^{\tau_k \tau_1} [\Phi(r_k t, \rho_k) - \Phi(r_k \tau_1, \rho_k)], \quad (2.36)$$

то (2.35) примет следующий вид

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right). \quad (2.37)$$

Из (2.36) следует, что

$$H_k \left( \tau_1, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) = 1. \quad (2.38)$$

Таким образом, для определения температурных напряжений и перемещения в круглом бетонном блоке с учетом ползучести бетона получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^*(r, z, t)}{EzT_1} = & - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{1}{\alpha_k h \chi_k} \times \\ & \times \left\{ 2th \alpha_k h \frac{ch \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} - \alpha_k z th \alpha_k h \frac{sh \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} + \left( \frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \right)^2 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) sh \alpha_k h - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \frac{ch \alpha_k z}{ch \alpha_k h} \right\} H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z^*(r, z, t)}{EzT_1} = & - \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_0\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{1}{\alpha_k h \chi_k} \times \\ & \times \left\{ \alpha_k z th \alpha_k h \frac{sh \alpha_k (h-z)}{ch \alpha_k h} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\alpha_k h}{ch \alpha_k h} \right)^2 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) sh \alpha_k z \right\} H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{rz}^*(r, z, t)}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1\right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left\{ \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left[ \left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{ch} \alpha_k z - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k z}{\alpha_k h} \right] \right\} H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right), \quad (2.41)$$

$$\frac{u^*(r, z, t)}{\alpha T_1 R} = -\frac{1}{1-\nu^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[\frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1\right] \alpha_k h \chi_k} \times$$

$$\times \left\{ 2(1-\nu) \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} - (1-2\nu) \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 \alpha_k z} - \right.$$

$$\left. - \alpha_k z \operatorname{th} \alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (h-z)}{\operatorname{ch} \alpha_k h} + \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} \alpha_k h}\right)^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \operatorname{sh} \alpha_k z \right\} \times$$

$$\times H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right) + \frac{r}{R} \left(1 - \frac{z}{h}\right). \quad (2.42)$$

Из уравнений (2.39)–(2.41) следует, что термоупругие напряжения в круглых бетонных блоках  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$  и  $\tau_{rz}(r, z, t)$ , вызванные в начальный момент времени  $t = \tau_1$  действием стационарного теплового потока, под влиянием ползучести бетона в течение времени затухают, причем интенсивность затухания определяется функцией  $H_k \left( t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \right)$ . Эта последняя функция называется коэффициентом затухания.

Нужно отметить, что здесь рассматривается контактная задача теории ползучести круглых бетонных блоков, поэтому влияние ползучести бетона на термонапряженное состояние блока имеет ряд характерных особенностей, отличающих данную задачу от тех задач теории ползучести, когда на поверхности исследуемого тела заданы только напряжения или перемещения.

Как видно из (2.38) и (2.39)–(2.41), в этом случае закон изменения температурных напряжений  $\sigma_r^*(r, z, t)$ ,  $\sigma_z^*(r, z, t)$  и  $\tau_{rz}^*(r, z, t)$  в бетонном блоке по времени зависит не только от меры ползучести бетона  $S(t, \tau)$  и возраста  $\tau$ , но также и от геометрических размеров блока ( $R$  и  $h$ ), от характера контакта ( $\beta$ ) нижнего основания блока с основанием и от координаты точки  $(r, z)$ .

Ниже, в табл. 3, приводится ряд значений температурных нормальных напряжений  $\sigma_r^z(r, z, t)$  в точке  $(0, 0)$ , вычисленных в начальный момент воздействия температуры и в последующие моменты времени  $\tau$ , при различных  $\frac{h}{R}$  и  $\frac{E}{2\beta h}$ .

Характеристики для меры ползучести бетона приняты следующие:

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026;$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2; \quad \nu = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad \tau_1 = 14 \text{ дням.}$$

Таблица 3

Значения температурных напряжений  $\frac{\sigma_r^z(0, 0, t)}{\tau_r(0, 0)}$   
во времени, при различных  $\frac{h}{R}$  и  $\frac{E}{2\beta h}$

$\frac{E}{2\beta h}$		40		20	
$t$ в днях	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
	14		1,0	1,0	1,0
45		0,41047	0,74283	0,29577	0,58729
90		0,20903	0,62097	0,10736	0,41451
360		0,16014	0,57143	0,08031	0,35003
$\infty$		0,16003	0,57058	0,08016	0,35887

Из данных, приведенных в табл. 3, видно, что: 1) начальные температурные напряжения  $\sigma_r(0, 0, \tau_1)$  с течением времени быстро затухают, причем величина затухания доходит до 92%; 2) величина затухания зависит от отношения  $\frac{h}{R}$  и от характера контакта (коэффициента  $\beta$ ). Сравнивая эту таблицу с таблицей, помещенной в работе [2], видим, что при круглом бетонном блоке затухание температурных напряжений  $\sigma_r$  происходит быстрее, чем при прямоугольном блоке.

### 3. Упруго-мгновенные напряжения в круглом блоке от воздействия нестационарной температуры и сил связности

Пусть рассмотренный в первом параграфе круглый блок находится под действием нестационарной температуры, определяемой законом

$$T(t, z) = T_1 \left(1 - \frac{z}{h}\right) (1 - e^{-st}), \quad (3.1)$$

где  $T_1$  — температура нижнего основания блока в момент времени  $t = \infty$ ,  $s$  — показатель, характеризующий изменение температуры в

блоке во времени. Температура нижнего основания блока в данный момент времени  $t$  будет

$$T_{1,s} = T_1 (1 - e^{-st}). \quad (3.2)$$

Заметим, что, как показывают опытные данные, соотношением вида (3.1) достаточно хорошо описываются законы изменения усадки бетона как по толщине блока, так и во времени.

Решение задачи о термоупругом состоянии рассматриваемого бетонного блока сводится к нахождению функции  $\varphi(r, z)$ , удовлетворяющей уравнению (1.7), а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1)–(1.4).

Согласно (3.1) имеем

$$\nabla^2 T(t, z) = 0. \quad (3.3)$$

Тогда (1.7) примет вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) ищем в виде (1.13). Аналогично рассуждениям, сделанным в первом параграфе, для напряжений и перемещения при нестационарной температуре, которые обозначим соответственно через  $\sigma_{rs}(r, z)$ ,  $\sigma_{zs}(r, z)$ ,  $\tau_{rz}(r, z)$  и  $u_s(r, z)$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rs}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \sigma_r(r, z), \\ \sigma_{zs}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \sigma_z(r, z), \\ \tau_{rz}(r, z) &= (1 - e^{-st}) \tau_{rz}(r, z), \\ u_s(r, z) &= (1 - e^{-st}) u(r, z), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\sigma_r(r, z)$ ,  $\sigma_z(r, z)$ ,  $\tau_{rz}(r, z)$  и  $u(r, z)$  вычисляются по формулам (1.29)–(1.32).

Нормальное напряжение  $\sigma_{rs}$  в точке  $(0, 0)$  будет

$$\sigma_{rs}(0, 0) = (1 - e^{-st}) \sigma_r(0, 0), \quad (3.6)$$

а в точке  $(0, h)$ :

$$\sigma_{rs}(0, h) = (1 - e^{-st}) \sigma_r(0, h), \quad (3.7)$$

где  $\sigma_r(0, 0)$  и  $\sigma_r(0, h)$  определяются по формулам (1.33) и (1.38).

В таблицах 4 и 5 приводятся некоторые значения нормальных напряжений  $\sigma_{rs}(r, z)$  в точках  $(0, 0)$  и  $(0, h)$ .

#### 4. Температурные напряжения в круглом бетонном блоке от воздействия нестационарной температуры с учетом ползучести бетона и сил связности

В этом случае функция напряжений  $\varphi(r, z, t)$  опять удовлетворяет уравнению (2.5):

$$\nabla^2 \nabla^2 \frac{\partial \varphi(r, z, t)}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

Таблица 4

Значения температурных напряжений  $\left| \frac{\sigma_{rs}(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$  при  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 1,00 \text{ м}$ ,  $\nu = \frac{1}{6}$ ,  $s = 0,0085$ .

$\frac{E}{2sh}$		100		40		20		10		5	
$\frac{h}{R}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$								
$t$ в днях											
14		0,01112	0,03897	0,02725	0,06826	0,01546	0,03721	0,05716	0,10178	0,03032	0,10342
45		0,03429	0,11029	0,07712	0,19318	0,12867	0,31065	0,19007	0,28804	0,25616	0,30631
90		0,05774	0,18573	0,12998	0,32531	0,21667	0,41544	0,32008	0,48506	0,43207	0,51668
360		0,08461	0,27216	0,19031	0,47648	0,31750	0,60904	0,46902	0,71077	0,63283	0,75710
$\infty$		0,10979	0,31738	0,24291	0,60843	0,40525	0,77737	0,58865	0,90722	0,80773	0,96635

Таблица 5

Значения температурных напряжений  $\left| \frac{\sigma_{rs}(0, h)}{E\alpha T_1} \right|$  при  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $h = 1,00 \text{ м}$ ,  $\nu = \frac{1}{6}$ ,  $s = 0,0085$ .

$\frac{E}{2sh}$		100		40		20		10		5	
$\frac{h}{R}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$								
$t$ в днях											
14		0,00598	0,01942	0,01342	0,03413	0,02271	0,01354	0,03328	0,05033	0,04494	0,05380
45		0,01692	0,05497	0,03819	0,09658	0,06334	0,12321	0,09418	0,14258	0,12719	0,15224
90		0,02849	0,09156	0,06430	0,16265	0,10751	0,20749	0,15859	0,24010	0,21419	0,25637
360		0,04174	0,13563	0,09423	0,23733	0,15754	0,30041	0,23239	0,35183	0,31386	0,37567
$\infty$		0,05328	0,17312	0,12027	0,30420	0,20103	0,38807	0,29662	0,44107	0,40061	0,47950

Решим уравнение (2.5) с контурными условиями (2.6). Решение будем искать в виде (2.10). Тогда получим значения  $\sigma_r(r, z, t)$ ,  $\sigma_z(r, z, t)$ ,  $\tau_{rz}(r, z, t)$  и  $u(r, z, t)$  в виде (2.11)–(2.14). Значения  $A_k(t)$ ,  $B_k(t)$ ,  $D_k(t)$ , выраженные через  $C_k(t)$ , получим в виде (2.20), причем  $C_k(t)$  в этом случае будет удовлетворять уравнению

$$\left[ \frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E} \right] C_k(t) - \alpha_k h H_{ks}(t) = \\ = 2\beta(1-\nu^2)h \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau, \quad (4.1)$$

где

$$H_{ks}(t) = -2\alpha\beta R^3 T_1 (1 - e^{-st}) \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}. \quad (4.1')$$

Отсюда следует, что

$$C_k(\tau_1) = \frac{\alpha_k h H_{ks}(\tau_1)}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{2\beta(1-\nu^2)h}{E}}, \quad (4.2)$$

где

$$H_{ks}(\tau_1) = -2\alpha\beta R^3 T_1 (1 - e^{-s\tau_1}) \frac{J_2(\gamma_k)}{\gamma_k(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)}. \quad (4.3)$$

Из (4.1) и (4.3) следует что

$$H_{ks}(t) = H_{ks}(\tau_1) \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}}. \quad (4.4)$$

Пользуясь соотношениями (4.2) и (4.4), из (4.1) получим для определения  $C_k(t)$  следующее интегральное уравнение

$$C_k(t) = \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + \\ + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau. \quad (4.5)$$

Дифференцируя (4.5) по  $t$ , получим

$$C_k'(t) = \frac{se^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) - \gamma b_k \varphi(t) C_k(t) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что

$$C'_k(\tau_1) = \frac{se^{-s\tau_1}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) - \gamma b_k \varphi(\tau_1) C_k(\tau_1). \quad (4.7)$$

Определив из (4.6) значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^t C_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \quad (4.8)$$

и подставив в исходное интегральное уравнение (4.5), получим:

$$C'_k(t) = \gamma \frac{1-e^{-st}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau - b_k \gamma \varphi(t) C_k(t) - \\ - \gamma C_k(t) + \frac{se^{-st}}{1-e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1). \quad (4.9)$$

Дифференцируя выражение (4.9) по  $t$ , приведем его к следующему виду:

$$C''_k(t) + \gamma[1 + b_k \varphi(t)] C'_k(t) - \frac{s(\gamma-s)}{1-e^{-s\tau_1}} e^{-s\tau_1} C_k(\tau_1). \quad (4.10)$$

При  $s \rightarrow \infty$ , (4.10) совпадает с (2.29).

Решение дифференциального уравнения (4.10) с начальными условиями (4.2) и (4.7) имеет вид:

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) F_k \left[ t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\gamma(1-\nu^2)h}, s \right], \quad (4.11)$$

где

$$F_k \left[ t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\gamma(1-\nu^2)h}, s \right] = 1 - \left\{ \gamma b_k \varphi(\tau_2) - \right. \\ \left. - \frac{se^{-s\tau_1}}{1-e^{-s\tau_1}} \right\} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^x [1+b_k \varphi(x)] dx} d\tau + \\ + \frac{s(\gamma-s)}{1-e^{-s\tau_1}} \int_{\tau_1}^t \left\{ e^{-\gamma \int_{\tau_1}^x [1+b_k \varphi(x)] dx} \int_{\tau_1}^x e^{-sx-\gamma \int_{\tau_1}^z [1+b_k \varphi(z)] dz} dx \right\} d\tau. \quad (4.12)$$

Если в этом случае напряжения и перемещение обозначим соответственно через  $\sigma_{rs}^*(r, z, t)$ ,  $\sigma_{zs}^*(r, z, t)$ ,  $\tau_{rz}^*(r, z, t)$ , и  $u_s^*(r, z, t)$ , то получим

$$\sigma_{rs}^*(r, z, t) = \frac{1}{E\alpha T_1} = -\frac{1}{1-\nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) F_k \left[ t, \tau_1, \frac{h}{R}, \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h}, s \right], \quad (4.13)$$

где

$$M_k(r, z) = \frac{\gamma_k^2 J_2(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - 1) J_1^2(\gamma_k)} \cdot \frac{J_k^1\left(\gamma_k \frac{r}{R}\right)}{\left[ \frac{E}{2\beta(1-\nu^2)h} \frac{\psi_k}{\gamma_k} + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \times \\ \times \left\{ 2\text{th } \alpha_k h \frac{\text{ch } \alpha_k (h-z)}{\text{ch } \alpha_k h} - \alpha_k z \text{th } \alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k (h-z)}{\text{ch } \alpha_k h} + \right. \\ \left. + \left( \frac{\alpha_k h}{\text{ch } \alpha_k h} \right)^2 \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \text{sh } \alpha_k h - 2 \frac{\alpha_k h}{\text{ch } \alpha_k h} \frac{\text{ch } \alpha_k z}{\text{ch } \alpha_k h} \right\}. \quad (4.14)$$

Аналогично можно написать выражения для  $\sigma_{rs}^*(r, z, t)$ ,  $\tau_{rs}^*(r, z, t)$  и  $u_r^*(r, z, t)$ .

### 5. Применение метода Крылова-Боголюбова

Для определения  $C_k(t)$  применим метод Крылова-Боголюбова [7]. Выражение (4.5) можно написать в следующем виде

$$C_k(t) = C_k(\tau_1) \frac{1 - e^{-st}}{1 - e^{-s\tau_1}} + b_k \int_{\tau_1}^t C_k(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.1)$$

Как известно, метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова состоит в том, что в интегральном уравнении (5.1) нужно верхнему пределу  $t$  дать последовательно возрастающие конкретные значения  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Тогда уравнение (5.1) может быть переписано для каждого значения  $t_n$  в следующем виде

$$C_k(t_1) = \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (5.2)$$

$$C_k(t_2) = \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + b_k \int_{t_1}^{t_2} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.3)$$

$$C_k(t_n) = \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} C_k(\tau_1) + b_k \left\{ \int_{\tau_1}^{t_1} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_1}^{t_2} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} C_k(\tau) \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\}. \quad (5.4)$$

Если интегрировать (5.2) по частям и иметь в виду, что  $C(t_1, t_1) = 0$ , то получим

$$C_k(t_1) - C_k(\tau_1) \left[ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k C(t_1, \tau_1) \right] = -b_k \int_{\tau_1}^{t_1} C(t_1, \tau) \frac{\partial C_k(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (5.5)$$

Применив к интегралу в правой части полученного выражения теорему о среднем и делая некоторые преобразования, найдем:

$$C_k(t_1) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_1, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) \right] \right\}. \quad (5.6)$$

Символом  $C(t_m, \xi \left|_{t_{k-1}}^{t_k} \right.)$  здесь обозначено среднее значение функции  $C(t_m, \tau)$  в интервале  $(t_{k-1}, t_k)$ .

Аналогичным образом из (5.3) и (5.4) получим:

$$C_k(t_2) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] - \right. \\ \left. - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[ C(t_2, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) C(t_2, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] \right\}, \quad (5.7)$$

$$C_k(t_n) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C(t_n, \xi \left|_{t_{n-1}}^{t_n} \right.)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) \right] - \right. \\ \left. - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[ C(t_n, \xi \left|_{\tau_1}^{t_1} \right.) - C(t_n, \xi \left|_{t_1}^{t_2} \right.) \right] - \right. \\ \left. - \dots - b_k \frac{C_k(t_{n-1})}{C_k(\tau_1)} \left[ C(t_n, \xi \left|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \right.) - C(t_n, \xi \left|_{t_{n-1}}^{t_n} \right.) \right] \right\}. \quad (5.8)$$

Формулы (5.6), (5.7) и (5.8) в общем виде являются точным решением уравнения (4.5). Для определения численных значений  $C_k(t)$

необходимо применить приближенный метод определения средней величины

$$C(t_n, \xi \left|_{t_{k-1}}^{t_k}\right.)$$

В практических расчетах эту величину можно определить с помощью следующего приближенного равенства:

$$C(t_n, \xi \left|_{t_{k-1}}^{t_k}\right.) = C\left(t_n, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right).$$

Подставив это выражение в (5.6), (5.7) и (5.8), получим решение интегрального уравнения (4.5) в следующем виде:

$$C_k(t_1) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.9)$$

$$C_k(t_2) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[ C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.10)$$

$$C_k(t_n) = \frac{C_k(\tau_1)}{1 + b_k C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_n, \tau_1) - C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k \frac{C_k(t_1)}{C_k(\tau_1)} \left[ C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] - \dots - b_k \frac{C_k(t_{n-1})}{C_k(\tau_1)} \left[ C\left(t_n, \frac{t_{n-2} + t_{n-1}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.11)$$

Если ввести обозначения

$$G_k(t_1) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_1}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.12)$$

$$G_k(t_2) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_2}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k G_k(t_1) \left[ C\left(t_2, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] \right\} \quad (5.13)$$

$$G_k(t_n) = \frac{1}{1 + b_k C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right)} \left\{ \frac{1 - e^{-st_n}}{1 - e^{-s\tau_1}} - b_k \left[ C(t_n, \tau_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right] - b_k G_k(t_1) \left[ C\left(t_n, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_1 + t_2}{2}\right) \right] - \right. \\ \left. - \dots - b_k G_k(t_{n-1}) \left[ C\left(t_n, \frac{t_{n-2} + t_{n-1}}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2}\right) \right] \right\}, \quad (5.14)$$

то выражения (5.9), (5.10) и (5.11) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} C_k(t_1) &= C_k(\tau_1) G_k(t_1) \\ C_k(t_2) &= C_k(\tau_1) G_k(t_2) \\ C_k(t_n) &= C_k(\tau_1) G_k(t_n) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Из (5.12)–(5.14) следует, что

$$G_k(\tau_1) = 1. \quad (5.16)$$

Если в этом случае напряжения и перемещение обозначим через  $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$ ,  $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$ ,  $\tau_{rs}^{**}(r, z, t)$  и  $u_s^{**}(r, z, t)$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_1)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1 - \nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_1), \\ \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_2)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1 - \nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_2), \\ \frac{\sigma_{rs}^{**}(r, z, t_n)}{EzT_1} &= - \frac{1}{1 - \nu^2} (1 - e^{-s\tau_1}) \sum_{k=1}^{\infty} M_k(r, z) G_k(t_n). \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Аналогично получим выражения для  $\sigma_{rz}^{**}(r, z, t_1)$ ,  $\sigma_{rz}^{**}(r, z, t_2)$ ,  $\sigma_{rz}^{**}(r, z, t_n)$ ,  $\dots$ ,  $u_s^{**}(r, z, t_n)$ .

Ниже, в табл. 6, приводятся ряд значений температурных напряжений  $\sigma_{rs}^{**}(r, z, t)$  в точке (0,0).

Характеристики меры ползучести бетона принимаем те же, как и при составлении табл. 3.

Таблица 6

Значения температурных напряжений  $\frac{\sigma_{\text{тс}}^{\text{тс}}(0, 0, t)}{\sigma_{\text{тс}}(0, 0)}$  во времени  $t$ , при различных  $\frac{h}{R}$  и  $\frac{E}{2\beta h}$ .

$\frac{E}{2\beta h}$		40		20	
$t$ в днях	$\frac{h}{R}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
		14	1	1	1
45		0,64815	0,84653	0,58176	0,75717
90		0,52180	0,76250	0,44141	0,64320
360		0,47631	0,71874	0,40864	0,59613
$\infty$		0,47392	0,71371	0,40612	0,59435

Сравнивая эту таблицу с таблицей 3, видим, что при нестационарной температуре затухание температурных напряжений  $\sigma_t$  происходит медленнее, чем при стационарной температуре.

Ереванский государственный  
университет им. В. М. Мозакова

Поступило 6 VII 1955

#### Մ. Մ. Մանուկյան

### ՋԵՐՄԱԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ԿԼՈՐ ԲԵՏՈՆՅԱ ԲԼՈԿՆԵՐՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՍՈՎ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածուժ քննարկվում են կլոր բետոնյա բլոկների ջերմային լարումները, երբ բլոկը գրված է միասեռ չիմքի վրա և գտնվում է ստացիոնար ու ոչ ստացիոնար ջերմության ազդեցության տակ: Թեղբում հաշվի են առնված սողքի և բլոկի չիմնատակի նեամիացման շարժումների վրա գործող կապակցության ուժերը: Որոշված են ջերմային լարումները և տեղափոխումները: Կազմված են համապատասխան աղյուսակներ:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Г. Н. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Изв. НИИГ, том 23, 1938.
2. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VIII, № 4, 1955.
3. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
4. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. ДАН Армянской ССР, т. XIX, № 1, 1954.
5. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Госиздат, М., 1949.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Госиздат, М., 1952.
7. Манукян М. М. Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 6, 1954.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. Р. Фельдман

Продольный изгиб стержня с учетом  
пластического последействия

§ 1. Экспериментальное изучение процессов пластического деформирования во времени показывает, что связь между напряжением  $\sigma$ , деформацией  $\varepsilon$  и временем  $t$  нелинейна [1, 2]. При этом возможны два случая:

1. Зависимость между напряжением и деформацией для различных фиксированных моментов времени, за исключением  $t=0$  вплоть до установившегося, не подчиняется линейному закону. Практически это значит, что за время первого замера заметная остаточная деформация не успела натечь и имела место лишь упруго-мгновенная деформация.

2. Зависимость между  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , как для различных фиксированных моментов времени, так и при мгновенном и установившихся состояниях, нелинейная.

Для количественного изучения процессов деформирования в первом случае будем пользоваться нелинейным интегральным уравнением [3]:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \int_0^t Q(t-\tau) f[\sigma(\tau)] d\tau, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — напряжение,  $\varepsilon$  — деформация.

$E_0$  — мгновенный модуль упругости,  $t$  — время.

$Q(t-\tau)$  — функция воздействия нестационарной пластичности, которая определяется экспериментально. Функция  $f(\sigma)$  определяется экспериментально с помощью семейства кривых в координатах напряжение — деформация для различных фиксированных моментов времени.

Для изучения процессов деформирования во втором случае Ю. Н. Работновым [4, 5] было предложено следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$\varepsilon(\varepsilon) = \sigma + \int_0^{\varepsilon} K(t-\tau) \sigma(t) d\tau. \quad (2)$$

Исходя из зависимости (2), Ю. Н. Работнов решил две задачи, касающиеся чистого изгиба стержня и деформирования толстостенной трубы.

В случае чистого сдвига применение зависимости Ю. Н. Работнова не представляет затруднений.

Если задано сдвиговое усилие  $\sigma(t)$ , то смещение  $u(z, t)$  при  $\varphi(\varepsilon) = a\varepsilon^n$  и  $K(t - \tau) = \chi_1(t - \tau)^{-0.7}$

будет:

1. При  $\sigma = \sigma_0$

$$u(z, t) = z \left( \frac{\sigma_0}{a} \right)^{1/n} \left( 1 + \frac{\chi_1}{0.3} t^{0.3} \right)^{1/n}.$$

2. При  $\sigma = vt$

$$u(z, t) = z \left( \frac{vt}{a} \right)^{1/n} \left( 1 + \frac{\chi_1}{0.39} t^{0.3} \right)^{1/n}.$$

Применение зависимости (2) при решении более сложных задач приводит к значительным математическим трудностям, во многих случаях непреодолимым. Например, в случае касательного удара в момент  $t = 0$  приходим, даже в случае пренебрежения инерцией деформируемого слоя, из условия  $m \frac{d^2 u}{dt^2} = -\sigma_{t=0}$  к нелинейному интегродифференциальному уравнению

$$m \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \tau[T(t)] = \int_0^t R(t - \tau) \varphi[T(\tau)] d\tau,$$

решение которого возможно лишь, вообще говоря, путем предварительной линеаризации. Такое приближенное решение соответствует замене процесса, развивающегося около кривой  $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ , процессом, развивающимся около прямой, что для решения задачи с пластическим последствием представляет мало интереса. Лучшим приближением к действительности будет аппроксимация кривых, соответствующих различным фиксированным моментам времени, ломаными, состоящими из прямолинейных звеньев.

При дальнейших построениях мы будем исходить из следующих экспериментально установленных фактов [6]:

1. В процессе релаксации понижается предел текучести, причем это понижение будет тем больше, чем под большим напряжением (при одной и той же деформации) протекала релаксация\*.

2. Под действием постоянной нагрузки можно получить пони-

\* Здесь под релаксацией понимаем протекающий во времени процесс установления равновесного состояния в деформируемой системе, независимо от изучаемого режима деформаций.

женные в несколько раз значения прочности, подвергая образцы длительному воздействию небольших нагрузок [7, 8].

3. При незначительных деформациях  $\varepsilon < \varepsilon_s$  скорость релаксации  $\alpha = 1/\tau_1$ , где  $\tau_1$  — время релаксации, является величиной постоянной и не зависит от напряжения.

При значительных деформациях  $\varepsilon > \varepsilon_s$  величина  $\alpha$  является переменной и зависит от напряжения, т. е.  $\alpha = f[\sigma]$  [9, 10].

4. Наряду с указанным в п. 3, скорость релаксации при  $\varepsilon > \varepsilon_s$  убывает с течением времени, подчиняясь определенной функциональной зависимости  $\alpha = F(t)$ .

§ 2. Рассмотрим продольный изгиб прямоугольного стержня, нагруженного в осевом направлении сжимающей силой  $P$ , после перехода за предел текучести.

Считая, что при продольном изгибе поперечные сечения остаются плоскими, можно, путем обычных рассуждений и, исходя из формул,

$$\sigma = E_0[\varepsilon - \int_0^t R(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau], \quad \varepsilon \leq \varepsilon_s, \quad (3)$$

$$\sigma - \sigma_{s1} = h_0[(\varepsilon - \varepsilon_s) - \int_0^t R(t-\tau)(\varepsilon - \varepsilon_s)d\tau], \quad \varepsilon > \varepsilon_s, \quad (4)$$

где

$$E_0 = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\substack{\varepsilon=0 \\ \tau=0}}; \quad \sigma_{s1} = \sigma_s \left[ 1 - \int_0^t R(\bar{t})d\bar{t} \right]; \quad h_0 = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_s \\ \tau=0}}$$

а  $\varepsilon_s$  и  $\sigma_s$  определяются из системы уравнений:

$$\sigma_s = \varphi(\varepsilon_s)_1, \quad \sigma_s - \sigma_1 = (\varepsilon_s - \varepsilon_1) \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_s \\ \tau=\tau_1}}$$

содержащих различные мгновенные модули  $E_0$  и  $h_0$  и одинаковые коэффициенты релаксации, получить формулу для изгибающего момента  $M(t)$ .

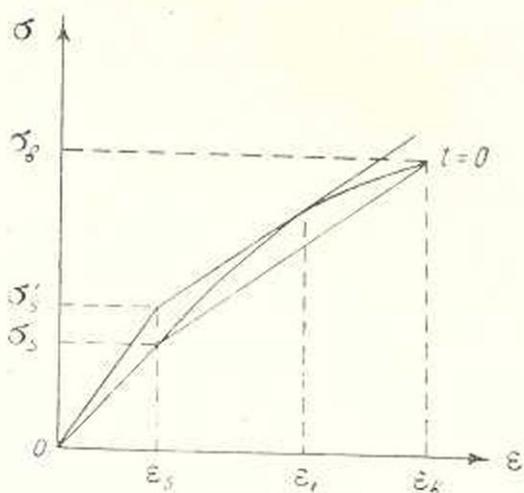
Как видно из фиг. 1, кривая  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ , соответствующая мгновенному состоянию  $t = 0$ , охвачена двумя ломаными.

Точка пересечения двух касательных известна, поскольку задается  $\varepsilon_s$ .

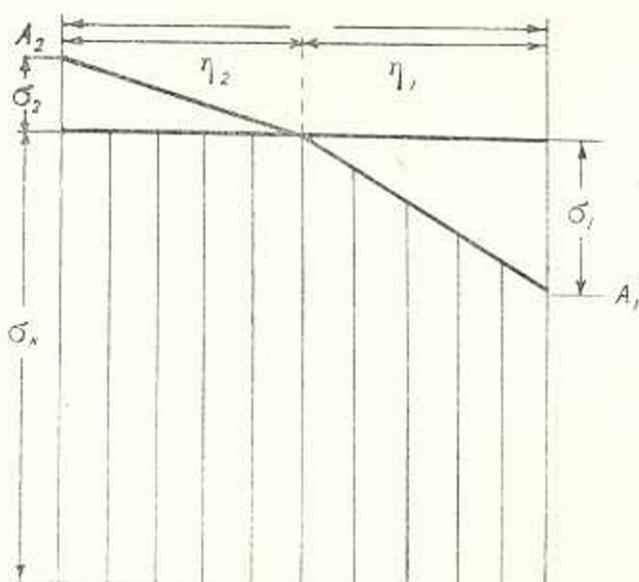
До продольного изгиба распределение напряжений изображалось прямой линией  $\sigma = \sigma_0$  (фиг. 2)

После продольного изгиба распределение напряжений, как известно [11], изобразится ломаной  $\Lambda_1 O \Lambda_2$ . Равновесие напряжения требует выполнения равенства

$$\sigma_1 \gamma_{11} = \sigma_2 \gamma_{12}. \quad (5)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Это условие имеет место также и при наличии пластического последствия, если принять во внимание поставленные выше условия в отношении функции релаксации  $R(t-\tau)$ .

Далее будем иметь:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_1 - E_0 \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_1(\tau) d\tau$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_0} \left[ \sigma_1 + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_1(\tau) d\tau \right], \quad \varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{\rho(t)},$$

$$\frac{1}{E_0} \left[ \sigma_1 + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_1(\tau) d\tau \right] = \frac{\eta_1}{\rho(t)},$$

откуда:

$$\sigma_1 = E_0 \eta_1 \left[ \frac{1}{\rho(t)} - \int_0^t R(t-\tau) \frac{1}{\rho(\tau)} d\tau \right]. \quad (6)$$

Далее

$$\sigma_2 = h_0 \left[ \varepsilon_2 - \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon_2(\tau) d\tau \right], \quad \varepsilon_2 = \frac{\eta_2}{\rho(t)}.$$

И, наконец,

$$\sigma_2 = h_0 \eta_2 \left[ \frac{1}{\rho(t)} - \int_0^t R(t-\tau) \frac{1}{\rho(\tau)} d\tau \right]. \quad (7)$$

где  $\rho(t)$  — радиус кривизны упругой линии стержня. Подставляя (6) и (7) в (5), получим  $E_0 \eta_1^2 = h_0 \eta_2^2$ . Учитывая, что  $\eta_1 + \eta_2 = \eta$ , будем иметь

$$\eta_1 = \frac{\eta \sqrt{E_0 h_0}}{\sqrt{E_0} + \sqrt{h_0}}, \quad \eta_2 = \frac{\eta \sqrt{E_0}}{\sqrt{E_0} + \sqrt{h_0}}. \quad (8)$$

Изгибающий момент, как известно, выражается формулой:

$$M = \frac{b}{3} \left( \sigma_1 \eta_1^2 + \sigma_2 \eta_2^2 \right) \quad (9)$$

(где  $b$  — ширина сечения), которая остается справедливой и в нашем случае.

Подставляя в (9) вместо  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  соответственно их выражения из (6), (7) и (8), получим:

$$M(t) = \frac{b \eta^3 E_0 h_0}{3(\sqrt{E_0} + \sqrt{h_0})^2} \left[ \frac{1}{\rho(t)} - \int_0^t R(t-\tau) \frac{1}{\rho(\tau)} d\tau \right] \quad (10)$$

или, полагая в (10)  $J = \frac{b \eta^3}{12}$  (наименьший момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести),

$$K_0 = \frac{4E_0 h_0}{(\sqrt{E_0} + \sqrt{h_0})^2}, \quad v(t) = \frac{1}{\rho(t)}, \quad \text{получим:}$$

$$M(t) = JK_0 \left[ v(t) - \int_0^t R(t-\tau)v(\tau)d\tau \right], \quad (11)$$

где  $K_0$  — мгновенный модуль Кармана.

Если стержень нагружен только продольной силой  $P$ , то  $M = Py$ , где  $y$  — прогиб стержня.

Принимая в (11)  $v(t) = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ , получим интегродифференциальное уравнение изгиба стержня при активной пластической деформации:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + q^2 y - \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^2 y(\tau)}{\partial x^2} d\tau = 0, \quad (12)$$

где

$$q^2 = \frac{P}{K_0 J}. \quad (13)$$

Рассмотрим случай шарнирно закрепленного стержня. Граничные условия будут

$$y(0, t) = 0, \quad (14)$$

$$y(l, t) = 0, \quad (15)$$

где  $l$  — длина стержня.

Будем искать решение уравнения (12), удовлетворяющее граничному условию (14), в виде ряда:

$$y(x, t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t), \quad (16)$$

где

$$y_0 = C \sin qx \quad (17)$$

есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + q^2 y = 0 \quad (18)$$

изгиба стержня с мгновенным модулем Кармана, т. е. при  $t=0$ . Определение критической нагрузки, как известно, в случае (18) сводится к замене мгновенного модуля упругости, входящего в формулу Эйлера, мгновенным модулем Кармана.

Таким образом, мы принимаем (17) за нулевое приближение в нашей задаче. Дальнейшие приближения связаны рекуррентной формулой:

$$y_n(x, t) = \frac{1}{q} \int_0^x \sin q(x-\xi) d\xi \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^2 y_{n-1}(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\tau \quad (19)$$



$$+ \sum_{n=2}^{\infty} q^n F_n(t) \int_0^x \sin q(x - \xi_1) d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \sin q\xi_2 \sin q(\xi_1 - \xi_2) d\xi_2 \dots \dots \dots \int_0^{\xi_{n-1}} \sin q\xi_n \sin q(\xi_{n-1} - \xi_n) d\xi_n \Big].$$

Условие (15) на верхнем конце стержня приводит к уравнению для определения критической силы  $P_{кр}$ .

$$\begin{aligned} & \sin ql + qF_1(t) \int_0^l \sin q\xi \sin q(l - \xi) d\xi + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} q^n F_n(t) \int_0^l \sin q(l - \xi_1) d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \sin q\xi_2 \sin q(\xi_1 - \xi_2) d\xi_2 \dots \dots \dots \int_0^{\xi_{n-1}} \sin q\xi_n \sin q(\xi_{n-1} - \xi_n) d\xi_n = 0. \end{aligned}$$

§ 3. Пользуясь результатами предыдущего параграфа, можно найти приближенное выражение критической силы, как функции времени.

В первом приближении будем иметь:

$$y = \sin qx + \frac{1}{2} (qx \cos qx - \sin qx) F_1(t), \quad (22)$$

где: 
$$F_1(t) = \int_0^t R(\eta) d\eta.$$

При  $x = l$  имеем  $y = 0$ . Тогда из (22) получим:

$$2\sin ql + (ql \cos ql - \sin ql) F_1(t) = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} ql = \frac{F_1(t)}{F_1(t) - 2} ql.$$

Обозначая  $ql = z$  и  $K_1 = \frac{F_1(t)}{F_1(t) - 2}$ , получим

$$\operatorname{tg} z = K_1 z. \quad (23)$$

Заметим, что  $K_1 < 0$ , ибо  $F_2 < 2$  по физическому смыслу. Допускаемая при этом погрешность не превышает

$$\Delta = \frac{1}{2} q^2 (\sin qx + qx \cos qx) F_2, \quad 0 \leq x \leq l,$$

где

$$F_2 = \int_0^t R(t - \tau_1) d\tau_1 \int_0^{\tau_1} R(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2.$$

Погрешность будет малой при

$$0 < F_2 \ll 1.$$

Обозначим  $F_1(t)$  через  $i_{1t}$ , тогда

$$i_{1t} = \int_0^t R(\xi) d\xi, \quad i_{1\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} R(\xi) d\xi < 1.$$

По физическому смыслу

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} R(\xi) = 0.$$

Все коэффициенты релаксации обладают следующим свойством:

$$R(\xi) < \frac{1}{\xi^{1+\nu}}, \quad \text{где } \nu > 0.$$

Далее будем иметь для этого случая:

$$K_{1t} = \frac{i_{1t}}{i_{1t} - 2}, \quad K_{1\infty} = \frac{i_{1\infty}}{i_{1\infty} - 2} < 0,$$

$$i_{1t} = \frac{2K_{1t}}{K_{1t} - 1}, \quad i_{1\infty} = \frac{2K_{1\infty}}{K_{1\infty} - 1}, \quad |K_{1\infty}| > |K_{1t}|.$$

Критическая сила  $P_{кр}$  получается в результате графического решения трансцендентного уравнения (23) (см. фиг. 3).

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$R(\xi) = \alpha e^{-\beta \xi}.$$

Тогда

$$i_{1t} = \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (24)$$

В работе [12] экспериментально установлены значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для горных пород осадочного типа.

Приведем некоторые из них:

1) песчаник крепкий, толстословистый

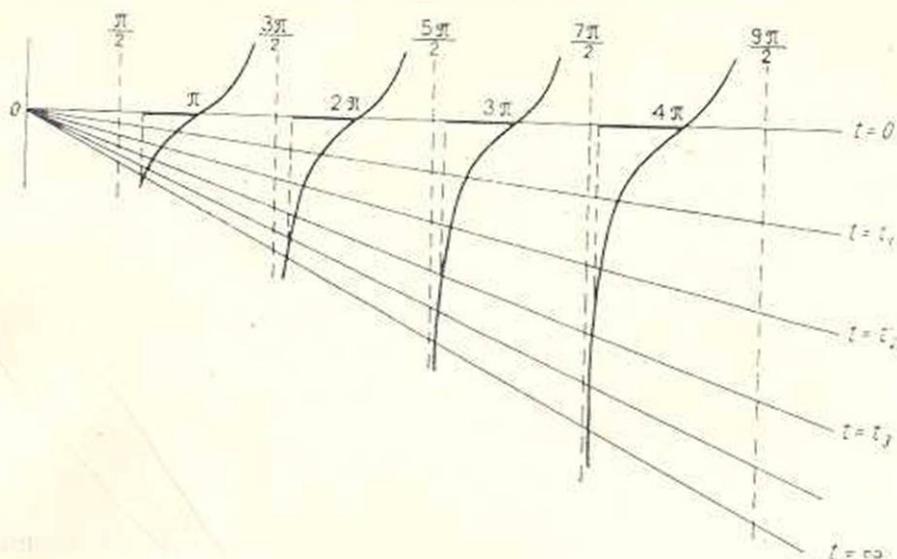
$$\alpha = 1,37 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}, \quad \beta = 4,92 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1};$$

2) известняк

$$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}, \quad \beta = 5,6 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1};$$

3) каменная соль

$$\alpha = 0,6 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}, \quad \beta = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^{-1}.$$



Фиг. 3.

Физическая константа — характеристика материала

$$f_{1\infty} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как всегда

$$\alpha < \beta, \quad \text{то } f_{1\infty} < 1.$$

В частности, для песчаника  $f_{1\infty} = 0,278$ , для известняка  $f_{1\infty} = 0,214$ , для каменной соли  $f_{1\infty} = 0,063$ .

Критическая сила  $P_{кр}$  будет с течением времени уменьшаться. Последнее объясняется релаксацией внутреннего напряжения материала. Таким образом, если стержень, сжатый в момент  $t=0$  (начальный момент) некоторой силой  $P$ , не потерял устойчивости, то по истечении некоторого промежутка времени он может потерять устойчивость.

Поэтому полезно получить формулу, определяющую протекшее время, в течение которого критическая нагрузка  $P_{кр}(t)$  уменьшится до заданной величины, лежащей в промежутке:

$$P_{кр}(0) < P_{кр}(t) < P_{кр}(\infty).$$

Для каждого материала характерны соответствующие  $P_{кр}(0)$  (мгновенная) и  $P_{кр}(\infty)$  (установившаяся).

Упомянутая формула для случая (24) будет иметь вид:

$$t = -\frac{1}{\beta} \ln \frac{f_{1\infty}}{f_{1\infty} - f_{1t}}. \quad (25)$$

Формула (25) определяет момент времени, при наступлении которого критическая сила  $P_{кр}(t)$  уменьшится до заданной величины

$$P_{кр} = \frac{B(\pi n - \sigma)^2}{l^2}. \quad (26)$$

В формуле (25) величина  $I_{1t}$  должна быть задана. Она находится по заданной величине  $\sigma$  с помощью уравнения (23) с учетом (26).

Более точное определение критической силы можно получить, если использовать второе приближение

$$y = \sin qx + \frac{1}{2}(qx \cos qx - \sin qx)I_1 + \frac{1}{8}[qx \cos qx - (1 + q^2 x^2) \sin qx]I_2. \quad (27)$$

Используя граничное условие  $y(l) = 0$ , получим из (27) трансцендентное уравнение

$$[1 - \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{8}(1 + q^2 l^2)I_2] \sin ql + \frac{1}{2}(I_1 + \frac{1}{4}I_2)ql \cos ql = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} ql = \frac{(4I_1 + I_2)ql}{4I_1 + I_2 + I_2 q^2 l^2 - 8}. \quad (28)$$

Обозначая:

$$ql = z, \quad a = \frac{4I_1}{I_2} + 1, \quad b = \frac{8}{I_2} - a, \quad I_1 \gg I_2,$$

получим из (28)

$$\operatorname{tg} z = \frac{az}{z^2 - b}. \quad (29)$$

Уточненная критическая сила  $P_{кр}$  получится в результате графического решения трансцендентного уравнения (29).

Днепропетровский инженерно-строительный институт

Поступило 16 I 1955

### Մ. Ռ. Ֆելդման

## ՁՈՂԻ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԾՌՈՒՄԸ ՊԼԱՍՏԻԿ ՀԵՏՆԵՐԳՈՐԾՈՒԹՅԱՆ ԱԿՆԱՌՈՒՄՈՎ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ելնելով լարվածության, դեֆորմացիայի ու ժամանակի միջև եղած (1) ոչ գծային աննչուբյունից, նախնական հատվածա-դժային ապրոքսիմացիայի միջոցով կատարվում է սկզբի պլաստիկ դեֆորմացիայի ժամանակ ձողի ծաման (12) ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումը:

(12) հավասարման լուծումն ստացված է հավասարաչափի գուգամիտող շարքի տեսքով:

Օգտվելով ստացված արդյունքներից, գտնված է կրիտիկական ուժի, որպես ժամանակի ֆունկցիայի, մատուցող արտահայտությունը:

Արդյունքներն իլյուստրացիայի են ևն ինտրիկում գրաֆիկորեն և հաստատվում են համապատասխան էքսպերիմենտալ տվյալներով:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952.
2. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени, ГТТИ, 1948.
3. Розовский М. И. Журнал технической физики АН СССР, т. 21, в. 11, 1951.
4. Работнов Ю. Н. Вестник Московского университета, 10, 1948.
5. Работнов Ю. Н. Известия АН СССР, отделение технических наук, 1948.
6. Розовский М. И. Журнал технической физики АН СССР, т. 24, в. 4, 1954.
7. Конторова Т. А. ДАН СССР, т. 4, № 1, 1946.
8. Бартнев Г. М. ДАН СССР, т. 21, № 1, 1950.
9. Васильев Л. И. Журнал технической физики АН СССР, т. 20, в. 5, 1950.
10. Догадкин Б. А., Бартнев Г. М., Резниковский М. М. Коллоидный журнал АН СССР, т. 11, в. 5, 1949.
11. Надаи А. Пластичность, ОНТИ, 1936.
12. Соколов П. Т. и Скрябин В. И. Журнал технической физики АН СССР, т. 5, в. 9, 1935.

К. С. Карапетян

## Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона

1. Из опытов, хотя и немногочисленных, известно, что размеры бетонного элемента оказывают существенное влияние на усадку и ползучесть бетона и что с увеличением размеров образца эти деформации уменьшаются [1, 9, 12].

Между тем в лабораторных условиях усадку и ползучесть бетона обычно определяют на образцах, размеры которых существенным образом могут отличаться от размеров конструкции. Поэтому определяемые таким путем деформации не могут быть отнесены к деформациям бетона в конструкциях. Исследование же деформаций непосредственно в конструкциях связано с рядом технических затруднений [14].

В настоящей работе предлагается новый метод лабораторного исследования, который позволяет путем ведения опытов на малых образцах с достаточной точностью установить изменение деформаций в зависимости от размеров бетонного элемента.

Для объяснения природы и механизма явления усадки, а также явления ползучести бетона, существуют различные гипотезы.

По мнению ряда исследователей [8, 9, 10], для усадки бетона наиболее правильной является гипотеза, согласно которой усадка бетона является следствием как физико-химических процессов, сопровождающих схватывание и твердение цементного камня, так и капиллярных явлений.

Что же касается ползучести бетона, то существующие гипотезы можно свести к трем основным. По первой гипотезе (Е. Фрейсинэ) ползучесть бетона, как и усадка, является следствием капиллярных явлений в порах бетона [11].

Согласно второй гипотезе (А. Е. Шейкин и И. И. Улицкий), ползучесть бетона является лишь следствием вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня [10, 13].

Третья гипотеза [3, 8, 9], которая принимается и нами, вытекает из первых двух и объединяет их в одну единую гипотезу, согласно которой ползучесть бетона обусловлена как капиллярными явлениями, так и вязкостью гелевой структурной. Эта гипотеза подтверждается нашими опытами, результаты которых частично приводятся в настоящей работе.

2. Из опытов известно, что при относительной влажности воздуха  $P=50\%$ , массив в течение месяца высушивается лишь на глубину 8 см и что для просушивания массива на глубину 60 см необходимо 10 лет [12]. Это говорит о том, что из ядровых частей больших массивных бетонных конструкций вода во времени испаряется незначительно.

Если исходить из приведенной выше гипотезы механизма усадки бетона, а также принятой нами гипотезы ползучести бетона, то надо полагать, что в ядровых частях больших массивных бетонных конструкций усадка в основном происходит за счет химических процессов схватывания и твердения бетона, а ползучесть бетона — за счет вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня. В этом случае с достаточной точностью для практики можно считать, что усадка и ползучесть бетона, вследствие капиллярных явлений, будут незначительны, так как испарение существенно затруднено.

Отсюда заключаем, что, если определять усадку и ползучесть бетона на лабораторных образцах, в которых испарение воды из бетона будет исключено, то их деформации будут примерно соответствовать усадке и ползучести бетона ядровой части массива. При этом, учитывая то обстоятельство, что деформации массива в большой степени обусловлены деформациями его ядра, полученные таким путем лабораторные данные можно отнести к общим деформациям массива.

Конечно, вообще говоря, большая усадка и ползучесть наружных частей массива в некоторой степени отразится на его общей деформации, однако это зависит от размеров массива и влажности окружающей его среды. И чем больше будут размеры массива и влажность, тем получим более точные данные для массива.

На основании вышеизложенного, в основу методики наших исследований в части оценки деформаций усадки ползучести в массиве было принято определение этих деформаций на малых лабораторных образцах с исключением испарения воды из образцов. Однако такая методика может быть справедливой лишь в том случае, если деформации усадки и ползучести, определяемые на образцах разных размеров, при отсутствии испарения и прочих равных условиях, будут одинаковыми. Иначе говоря, при изолированных образцах, в которых испарение из бетона не имеет места, фактор масштабности образца не должен оказывать влияния на усадку и ползучесть бетона.

Кроме оценки усадки и ползучести бетона в массивах, путем определения деформаций на малых изолированных образцах, здесь предлагается, сочетая эти опыты с опытами над различными неизолированными образцами небольших размеров, установить изменение деформаций в зависимости от размеров бетонного элемента. При этом будут охвачены все размеры конструкций.

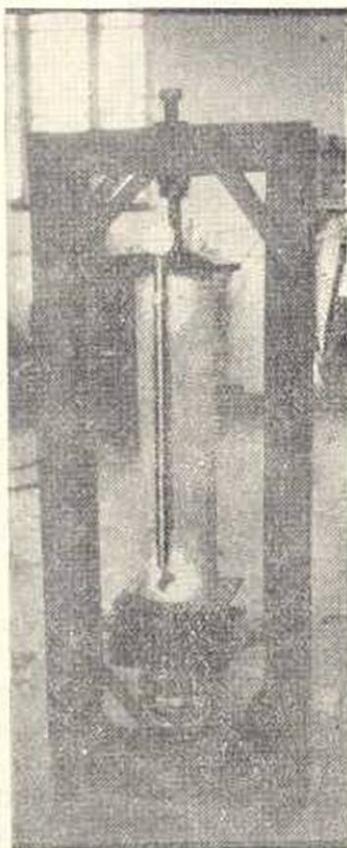
3. Проведенные экспериментальные исследования были выполнены над двумя составами легкого бетона на заполнителе из лито-

вдной пемзы. Характеристики примененных для опытов материалов указаны в табл. 1. Составы исследованных бетонов приведены в табл. 2.

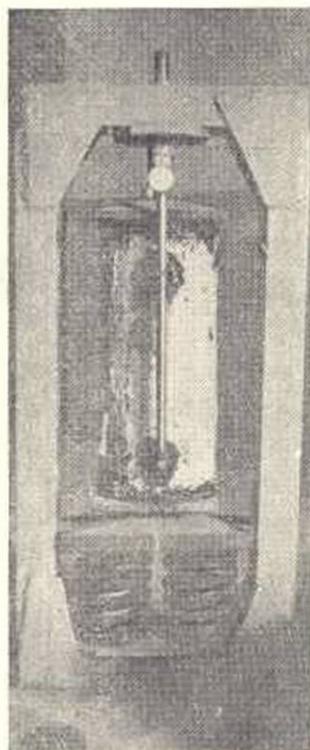
Опыты проводились над цилиндрическими образцами  $d=10, 14$  и  $25$  см. Высота образцов равнялась  $60$  см.

Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение — на виброплощадке при продолжительности вибрации  $30$  сек. Образцы освобождались от форм на третий день. Часть образцов тут же покрывалась по наружной поверхности слоем битума и сверху обертывалась восковой. Определение содержания влаги в бетоне различного возраста показало, что подобная изоляция почти полностью исключает испарение.

Для длительного сжатия цилиндрических образцов были применены специальные приспособления (фиг. 1, 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Измерение деформаций производилось стационарными деформаторами на базе  $500$  мм.

4. Первые опыты по исследованию влияния размеров образца на усадку были выполнены над бетоном состава № 1 (табл. 2). Эта серия цилиндрических неизолированных образцов  $d=14$  и  $25$  см и

Таблица 1

## Характеристика щебня, песка и портландцемента

№ № состава	Характеристика крупного заполнителя						Характеристика мелкого заполнителя		Активность цемента в кг/см <sup>2</sup>
	порода	прочность в кг/см <sup>2</sup>	модуль уп- ругости в т/см <sup>2</sup>	объемный вес щебня в т/м <sup>3</sup>	объем пу- стот щебня в %	процент во- допоглоще- ния щебня	порода	объемн. вес т/м <sup>3</sup>	
1	литонди. пемза	210	95	0,82	49	9,5	литонди. пемза	1,09	400
2	"	—	—	0,78	44	—	"	1,07	360

Таблица 2

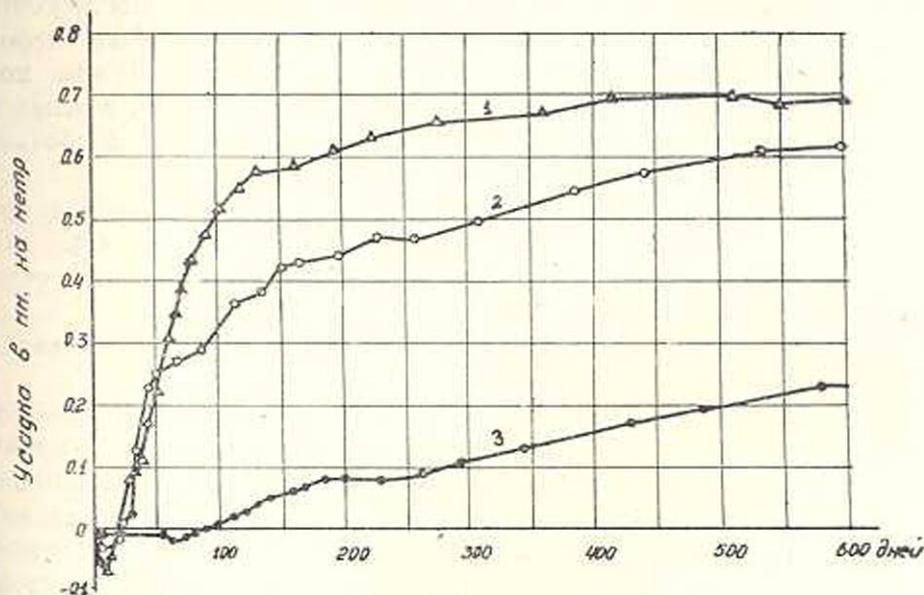
## Составы и механические характеристики исследованных бетонов

№ № состава	В Ц по весу	Расход материалов на 1 м <sup>3</sup> бетона в кг				Объемн. вес свежеулож. бетона в т/м <sup>2</sup>	Объемный вес бетона в возрасте 28 дн. в т/м <sup>3</sup>	Осадка ко- нуса в см*	Кубик. прочность в кг/см <sup>2</sup>	Модуль уп- ругости в возрасте 28 дн. при 0,5 R <sub>n</sub> в кг/см <sup>2</sup>
		цемент	песок	щебень	вода					
1	0,95	295	454	708	280	1,74	1,73	1	201	95 000
2	0,96	282	428	709	271	1,69	1,56	5	155	85 000

\* Высота конуса составляла 40 см.

изолированных  $d=14$  см после освобождения из форм хранилась в помещении  $t=21\pm 7^\circ\text{C}$  и  $P=50\pm 10\%$ . При этом неизолированные образцы до месячного возраста находились во влажных опилках.

На фиг. 3 приведены кривые усадки исследуемого бетона, из коих кривая 1 представляет усадку цилиндрических образцов диаметром 14 см без изоляции, кривая 2 — усадку аналогичных образцов диаметром 25 см и, наконец, кривая 3 — усадку изолированных образцов диаметром 14 см. Каждая кривая построена на основании средних деформаций двух образцов.



Фиг. 3.

Как следует из фиг. 3, характерной особенностью развития процесса усадочных деформаций легких бетонов является увеличение их объемов в начальный период твердения. Такая закономерность наблюдалась во всех наших исследованиях и подтверждается опытами других исследователей [4, 7].

Приведенные кривые показывают, что усадочные деформации в малых неизолированных образцах, после периода набухания, длившегося 17 дней, развиваются более интенсивно, чем в больших образцах. В результате этого деформации усадки малых образцов раньше достигают своего предельного значения. Указанное обстоятельство следует объяснить тем, что с уменьшением размеров образца возрастает модуль поверхности, а вместе с тем и интенсивнее развиваются усадочные деформации.

Из приведенных кривых видно также, что усадка малых образцов наиболее интенсивно развивается до возраста 130 дней, после чего ее интенсивность постепенно падает, и в возрасте 420 дней усадка практически прекращается. Что же касается больших образцов, то в них после возраста 130 дней явление усадки интенсивно

продолжается и происходит в течение более длительного времени — до возраста 530 дней. Наибольшая разница между усадкой малых и больших образцов имеет место в период возрастов 3—4,5 месяца. В это время усадка малых образцов на 50—60% больше усадки больших образцов. Далее, с увеличением возраста бетона эта разница уменьшается, и при предельных деформациях составляет 10—12%.

Рассмотрение кривых усадки изолированных и неизолированных образцов диаметром 14 см показывает, наконец, что в то время, как в образцах без изоляции идет интенсивная усадка, достигающая в возрасте 3 месяцев почти 80% предельного значения деформации, в образцах с изоляцией наружной поверхности битумом кончается период набухания и начинается усадка. В итоге, в возрасте 600 дней, усадка образцов без изоляции почти в 3 раза больше усадочных деформаций изолированных образцов.

Таким образом, исключение испарения воды из бетона при прочих равных условиях приводит к значительному увеличению длительности периода набухания (в 5 раз) и резко уменьшает усадку бетона (в 3 раза).

Данные опыты показывают, насколько существенна роль капиллярных явлений в усадке бетона.

Предельная деформация неизолированных образцов диаметром 14 см составляет 0,7 мм/м, а образцов диаметром 25 см — 0,61 мм/м и, наконец, изолированных малых образцов — 0,23 мм/м. Это показывает, что деформации даже больших неизолированных образцов в несколько раз больше деформаций изолированных малых образцов. Последнее вполне закономерно и вытекает из физической природы данного явления. По мере дальнейшего увеличения размеров образцов деформации последних по своей величине постепенно будут приближаться к деформациям изолированных образцов.

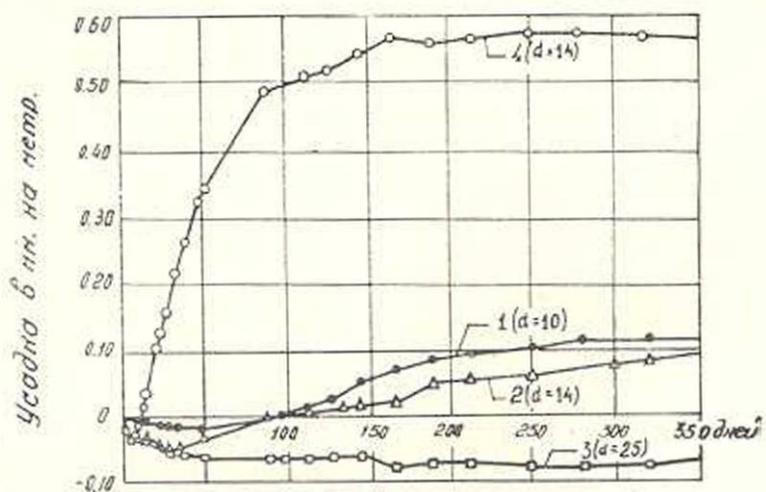
Величина усадки изолированных образцов — 0,23 мм/м, повидимому, примерно соответствует усадке массива, уложенного из бетона того же состава.

Однако, чтобы экспериментально проверить, можно ли относить деформации изолированных малых образцов к деформации бетона в массиве, нами были поставлены опыты над изолированными образцами различных размеров. Необходимо было установить, отпадает ли влияние размеров образцов на усадку и ползучесть бетона при исключении испарения воды из бетона.

Для этой цели усадка и ползучесть определялись на изолированных образцах диаметром 10, 14 и 25 см и одновременно, в качестве эталона — на неизолированных образцах диаметром 14 см. Опыты производились над бетоном состава № 2. Полученные кривые усадки бетона приведены на фиг. 4.

Здесь мы наблюдаем закономерность развития усадочных деформаций в изолированных образцах диаметром 14 см (кривая 2).

аналогичную имевшей место в ранее приведенных опытах. Длительность периода набухания и в этом случае составляет примерно три месяца. Наблюдается и другая закономерность: с увеличением размеров образца возрастают как деформация набухания, так и длительность этой деформации. Длительность набухания для образцов  $d=10$  и  $14$  см (кривые 1 и 2) составляет 85—95 дней; что же касается



Фиг. 4.

образцов  $d=25$  см (кривая 3), в них, как мы видим, в возрасте 350 дней еще не началась усадка. Аналогичное явление наблюдалось также в опытах других исследователей [7].

Кривые усадки изолированных образцов различного диаметра показывают, что их деформации несколько отличаются друг от друга, хотя при этом деформации образцов  $d=10$  и  $14$  см практически можно считать одинаковыми. Следовательно, влияние размеров образца на объемные деформации бетона имеет место и при изолированных образцах. Надо полагать, что это является следствием экзотермии цемента, так как здесь существует определенная закономерность, заключающаяся в том, что чем больше образец, тем больше как длительность, так и деформация набухания и тем меньше последующая усадка. Очевидно, если бы не было экзотермии цемента, влияние которой не представляется возможным исключить, то деформации усадки изолированных образцов различных размеров были бы одинаковыми.

Помимо экзотермии цемента, набухание легкого бетона отчасти обусловлено также набуханием его пористого заполнителя. Из опытов известно, что при хранении в воде туфа, пемзы и других пористых каменных материалов они набухают, а при последующем высыхании дают усадку.

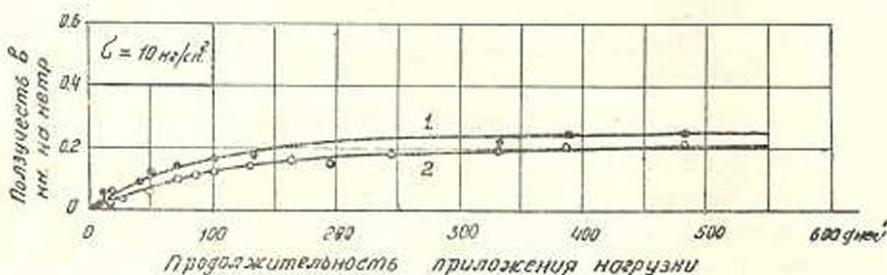
Большие усадки и ползучесть легких бетонов при воздушном хранении отчасти объясняются набуханием и усадкой их пористых

заполнителей [4, 5]. Набухание легкого бетона, обусловленное набуханием его пористого заполнителя, по причине только насыщения заполнителя водой при изолированных образцах различных размеров будет одинаковым. Поэтому причиной небольшого отличия в объемных деформациях изолированных образцов различных размеров является различное их тепловое расширение благодаря экзотермии цемента, так как влияние последней тем больше, чем больше образец.

На основании данных опытов деформации изолированных образцов диаметром 10 и 14 см практически можно отождествлять с усадкой бетона в массиве, ибо в малых образцах влияние экзотермии почти исключается.

5. Рассмотрим результаты исследования влияния размеров образца на ползучесть бетона.

На фиг. 5 приведены кривые ползучести бетона (состав № 1) неизолированных образцов диаметром 14 и 25 см при напряжении 10 кг/см<sup>2</sup>. Верхняя кривая соответствует малым образцам, а нижняя — большим.



Фиг. 5.

До загрузки длительной нагрузкой в месячном возрасте образцы хранились во влажной камере, далее в помещении при  $t=21 \pm 7^\circ\text{C}$  и  $P=50 \pm 10\%$ , т. е. в воздушных условиях.

При рассмотрении кривых заметно, что с увеличением размеров образца деформации ползучести уменьшаются. В данном случае получается, что при прочих равных условиях деформации ползучести цилиндрических образцов диаметром 14 см на 20% больше ползучести образцов диаметром 25 см. Последнее объясняется тем, что с увеличением размера образца доступ воды из глубины к его поверхности затрудняется, вследствие чего процесс испарения замедляется. По этой причине в больших образцах как усадка, так и ползучесть по толщине образца происходят более неравномерно, чем в малых образцах, что в итоге приводит к меньшей усадке и меньшей ползучести больших образцов.

На фиг. 6 приведены две кривые ползучести бетона состава № 1. Верхняя кривая соответствует ползучести неизолированных образцов диаметром 14 см, а нижняя — ползучести изолированных образцов тех же размеров. Из фиг. 6 следует, что и в этом случае, как и при

усадке, исключение испарения приводит к существенному уменьшению деформаций ползучести, причем разница между деформациями изолированных и неизолированных образцов с увеличением длительности загрузки уменьшается.

Отношение деформаций ползучести неизолированных образцов к деформациям изолированных образцов при длительности загрузки 50 дней составляет 5,26; при 100 днях — 4,5; 200 днях — 3,2; 400 днях — 2,2 и при 550 днях — 2,1.



Фиг. 6.

Итак, испарение играет существенную роль не только в явлении усадки бетона, но также и в явлении ползучести бетона при сжатии. Последнее говорит о том, что явления усадки и ползучести не являются независимыми. Взаимосвязь этих явлений, помимо количественных показателей, подтверждает также то, что и характер кривых деформаций усадки и ползучести изолированных образцов идентичный.

При постановке опытов с изолированными образцами мы преследовали две цели: во-первых, на основании прямых опытов проверить правильность некоторых существующих гипотез ползучести, а также принятой нами гипотезы и, во-вторых, проверить правильность предлагаемой нами методики для оценки усадки и ползучести бетона в массивах с помощью ведения опытов на лабораторных изолированных образцах.

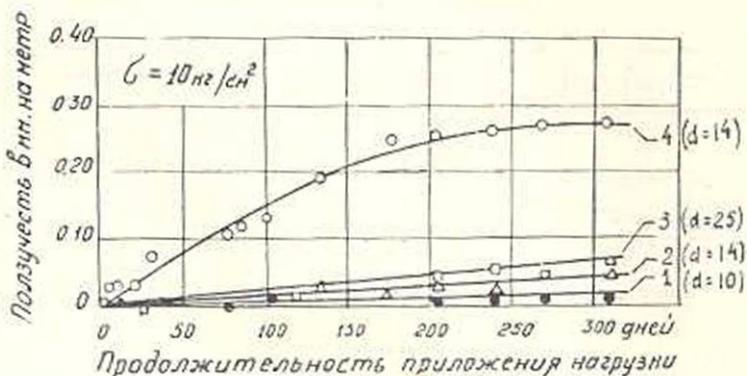
Приведем результаты исследования ползучести бетона на изолированных образцах различных размеров. Указанные образцы были изготовлены из бетона того же замеса, что и усадочные образцы (состав № 2). Кривые усадки по данным этих опытов были приведены на фиг. 4.

На фиг. 7 приведены кривые ползучести изолированных образцов диаметром 10, 14 и 25 см, а также кривая ползучести бетона неизолированных образцов диаметром 14 см (кривая 4). Образцы были загружены длительной нагрузкой в возрасте 14 дней при напряжении в бетоне  $10 \text{ кг/см}^2$ . Хранение было аналогичным хранению усадочных образцов.

Рассматривая кривые ползучести, мы наблюдаем, как и в опытах усадки бетона, интенсивное развитие деформаций ползучести

неизолированных образцов и одновременно то обстоятельство, что отличие деформации изолированных образцов различного диаметра незначительно.

Каждая кривая ползучести на фиг. 7 соответствует средним значениям деформаций двух образцов, а деформации каждого образца получены на основании показаний двух деформаторов, установленных на каждом образце.



Фиг. 7.

При нанесении кривой ползучести бетона в отдельности для каждого образца мы получим семейство кривых, которые еще ближе расположатся друг к другу.

Результаты проведенной серии опытов позволяют прийти к заключению, что при исключении процесса испарения воды из образца фактор его масштабности отпадает. Это существенное обстоятельство и дает нам основание отнести ползучесть, определяемую на изолированных малых образцах в обычных лабораторных условиях, к ползучести бетона в массиве.

Если принять, что ползучесть изолированных образцов диаметром 14 см соответствует ползучести бетона в массиве, а ползучесть неизолированных образцов — ползучести того же бетона в тонкостенной конструкции, то кривые ползучести бетона для конструкций с промежуточными размерами поперечного сечения займут положение между кривыми 2 и 4 (фиг. 7).

Таким образом, для возможности дифференциации деформации усадки и ползучести в соответствии с размерами поперечного сечения конструкций достаточно определить в лабораторных условиях усадку и ползучесть бетона на нескольких образцах различных размеров без исключения испарения и на одном размере образцов с исключением испарения. На основании этих данных можно установить изменения усадки и ползучести бетона в зависимости от размеров поперечного сечения бетонного элемента. При этом данными зависимостями будут охвачены все размеры бетонных конструкций, начиная от тонкостенных и кончая массивными.

Такая методика дает возможность в обычных лабораторных

условиях получать деформации усадки и ползучести в зависимости от размеров поперечного сечения конструкции, не прибегая к натурным исследованиям.

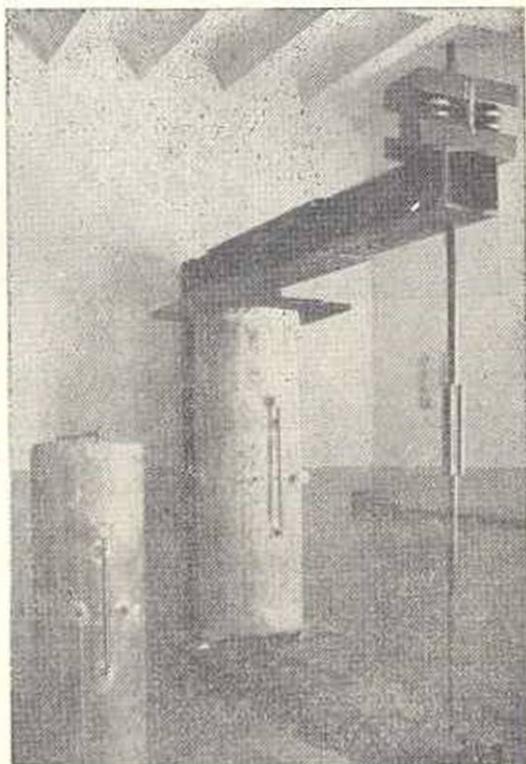
В настоящее время по предлагаемой методике нами поставлена новая серия опытов. В этих опытах под длительную нагрузку установлены цилиндрические туфобетонные образцы диаметром 10, 14, 25 и 50 см, как изолированные, так и без изоляции. Для обеспечения длительной постоянной нагрузки цилиндрических образцов диаметром 50 см впервые применены большие рычажные приспособления, обеспечивающие усилие до 30 тонн (фиг. 8 и 9).

6. Опыты с изолированными образцами были поставлены также с целью проверки существующих гипотез механизма ползучести бетона и принятой нами гипотезы.

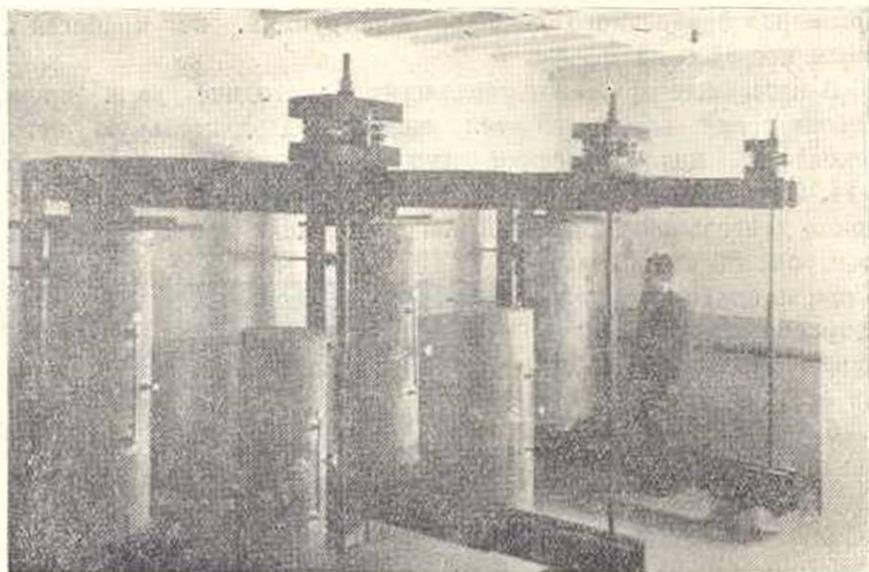
По кривым ползучести бетона, приведенным на фиг. 7, деформация неизолированных образцов диаметром 14 см при длительности загрузки 300 дней почти в 6 раз больше деформации таких же образцов с изоляцией.

Очевидно, при предельных деформациях это соотношение несколько уменьшится. Столь большая разница в деформациях свидетельствует о существенной роли испарения в явлении ползучести бетона. Для того, чтобы было более убедительным, что разница в деформациях изолированных и неизолированных образцов вызвана именно испарением воды из бетона, а не различием в вязкостях цементного геля, рассмотрим результаты испытания прочности исследуемого бетона в различных возрастах (состав № 2).

Как показывают данные таблицы 3, прочность бетона в изолированных и неизолированных образцах соответствующих возрастов почти одинакова, а поэтому надо полагать, что исключение испарения, во всяком случае до возраста 90 дней, не могло привести к существенному различию в свойствах цементного камня. Между тем кривые ползучести с первых же дней загрузки показывают су-



Фиг. 8.



Фиг. 9.

ущественную разницу в ползучести изолированных и неизолированных образцов, соотношение которых при длительности загрузки 2,5 месяца уже составляет 6 (фиг. 7). Поэтому причиной столь большой разницы в деформациях могло явиться не различие в вязкостях

Таблица 3  
Влияние испарения на нарастание прочности бетона во времени

Наименование образцов	Предел прочности бетона при сжатии в $кг/см^2$ в возрасте		
	14 дней	28 дней	90 дней
Неизолированные	113	155	195
Изолированные	117	141	215

цементного геля изолированных и неизолированных образцов, а испарение воды из бетона.

Таким образом, ползучесть бетона при сжатии за счет испарения воды больше, чем ползучесть вследствие вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня и уменьшается с увеличением размеров бетонного элемента и влажности окружающей среды.

Таким образом, принятая нами гипотеза, согласно которой ползучесть бетона является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей, так и капиллярных явлений, правильно отражает данное явление. Однако необходимо отметить, что данная гипотеза механизма ползучести бетона справедлива лишь до определенных пределов напряжений, так как при высоких напряжениях — выше 0,55—0,6 предела прочности бетона — в бетоне появляются разрывы, микротрещины, развитие которых во времени также приводит к деформациям бетона [2, 6].

Следовательно, при высоких напряжениях механизм ползучести бетона сложнее, поскольку в этом случае имеют место еще и де-

формации, обусловленные появлением и развитием микротрещин в бетоне.

В свете изложенного приходим к следующему заключению: ползучесть бетона является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, так и капиллярных явлений. При воздушном хранении бетона ползучесть при сжатии, обусловленная капиллярными явлениями, в несколько раз больше, чем ползучесть вследствие вязкости геля.

Размеры образца оказывают существенное влияние на деформации усадки и ползучести бетона, при этом, чем больше образец, тем меньше деформации.

Предлагаемая методика позволяет путем ведения опытов на малых лабораторных образцах установить изменение деформаций в зависимости от размеров поперечных сечений конструкций в самых широких пределах (включая массив).

Для установления изменения усадки бетона, а также его ползучести в зависимости от размеров поперечного сечения бетонного элемента, достаточно в лабораторных условиях определять усадку и ползучесть на нескольких образцах различных размеров без исключения испарения воды из бетона и на образцах одного размера с исключением испарения. При этом деформации образцов различных размеров конкретно будут представлять деформации бетона в конструкциях соответствующих размеров поперечного сечения, а деформации образцов, полученные на изолированных образцах, можно отнести к деформациям бетона в массиве.

Институт строительных материалов  
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 10 VII 1955

#### Կ. Ս. Կարապետյան

### ՆՄՈՒՇԻ ՉԱՓԵՐԻ ԱՉԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ԿԾԿՍԱՆ ԵՎ ՍՈՂՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հոդվածում բերված են րեառնի կծկման և սողունության զեֆորմացիաների վրա նմուշի չափերի ազդեցության փորձնական նետադատությունների արդյունքները:*

*Փորձերը ցույց են տալիս, որ րեառնի նմուշի չափերն զգալի ազդեցություն ունեն կծկման և սողունության զեֆորմացիաների մեծության վրա. որքան մեծ է նմուշը, այնքան փոքր են նրա զեֆորմացիաները:*

*Առաջարկվում է նոր մեթոդ, որով նախաձոր է դառնում լաբորատոր փոքր նմուշների վրա կատարված փորձերի արդյունքների միջոցով ստանալ կծկման և սողունության զեֆորմացիաների փոփոխությունը, կախված կոնստրուկցիայի լայնական կտրվածքի չափերի մեծությունից, ընդ որում մինչև մասիվ կոնստրուկցիաների համար:*

Հեղինակի փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ բետոնի սողունությունը հանդիսանում է ինչպես ցեմենտաքարի բաղադրիչ գերազանցյալ սարակառուցյալն մածուցիկություն, այնպես էլ կապիլյար երևույթների նեխանք:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. ГИЗ технико-теоретической литературы, 1952.
2. Берг О. Я. К вопросу прочности и пластичности бетона. ДАН СССР, т. XX, № 4, 1952.
3. Гольденблат И. И. Введение в теорию ползучести строительных материалов. ГИЗ по строительству и архитектуре, 1952.
4. Կարապետյան Կ. Ս. Экспериментальное исследование усадки туфобетона. Известия АН Армянской ССР, том III, № 7, 1950.
5. Կարապետյան Կ. Ս. О ползучести туфобетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том V, № 4, 1952.
6. Կարապետյան Կ. Ս. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 2, 1953.
7. Мощанский Н. А. Плотность и стойкость бетонов. Госстройиздат, 1951.
8. Столяров Я. В. Введение в теорию железобетона. Стройиздат, 1941.
9. Саташкин А. В. Ползучесть бетона. Сборник „Прочность, упругость и ползучесть бетона“, под ред. проф. Н. М. Беляева. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
10. Улицкий И. И. Ползучесть бетона. Гостехиздат Украинской ССР, 1948.
11. Фрейсинэ Е. Переворот в технике бетона. ОНТИ, 1938.
12. Фрайфельд С. Е. Собственные напряжения в железобетоне. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
13. Шейкин А. Е. К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона. Труды МИИТ, вып. 69, Трансжелдориздат, 1946.
14. Эйдельман С. Я. Определение характеристик упругости и ползучести бетона в сооружениях. Гидротехническое строительство, 5, 1952.