

М. М. Джрбашян

К теории некоторых классов целых функций многих переменных

В настоящей работе строится теория некоторых специальных классов целых функций многих переменных и дается их интегральное представление. Для простоты записи изложение результатов проводится для целых функций двух переменных.

1°. *Степенной ряд целой функции двух переменных.* Если z_1 и z_2 комплексные переменные, то выражение вида

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $\{a_{nm}\}$ — некоторые комплексные числа, называется формальным степенным рядом. Говорят, что формальный степенной ряд (1.1) представляет целую функцию двух переменных z_1 и z_2 , если он сходится при всех значениях $|z_1| < +\infty$ и $|z_2| < +\infty$.

Известна следующая простая лемма, доказательства которой мы приводим для полноты изложения.

Лемма 1. Для того, чтобы ряд (1.1) представлял целую функцию от переменных z_1 и z_2 , необходимо и достаточно, чтобы имели

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|} = 0. \quad (1.2)$$

Доказательство. Если (1.2) имеет место, то для любого произвольно большого $R > 0$ существует целое число $N(R)$, такое, что

$$\sqrt[n+m]{|a_{nm}|} \leq \frac{1}{2R}, \quad \text{при } n+m \geq N(R). \quad (1.3)$$

Но тогда при $|z_1| \leq R$ и $|z_2| \leq R$ будем иметь

$$\left| \sum_{n+m > N} a_{nm} z_1^n z_2^m \right| \leq \sum_{n+m > N} |a_{nm}| R^{n+m} \leq \sum_{n+m > N} \frac{1}{2^{n+m}} < \sum_{n+m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} = 4. \quad (1.4)$$

Далее, имеем

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m = \sum_{n+m < N} a_{nm} z_1^n z_2^m + \sum_{n+m > N} a_{nm} z_1^n z_2^m,$$

откуда, в силу (1.4), следует, что ряд (1.1) абсолютно сходится при $|z_1| < R$ и $|z_2| < R$. Но $R > 0$ — произвольно большое число, поэтому ряд (1.1) представляет целую функцию от переменных z_1 и z_2 .

Обратно, пусть

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$$

есть целая функция от переменных z_1 и z_2 , тогда, очевидно, имеем:

$$a_{nm} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|z_1|=R} \int_{|z_2|=R} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} dz_1 dz_2, \quad (R > 0),$$

откуда следует оценка

$$|a_{nm}| < \frac{M(R)}{R^{n+m}},$$

где

$$M(R) = \max_{|z_1|=|z_2|=R} |f(z_1, z_2)|. \quad (1.5)$$

Из (1.5) вытекает

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}|} \leq \frac{1}{R},$$

откуда при $R \rightarrow +\infty$ получим утверждение (1.2) леммы.

2°. *Целые функции конечного порядка.* *Функции порядка* (ρ_1, ρ_2) .

Пусть $f(z_1, z_2)$ — целая функция от двух переменных z_1 и z_2 . Рассмотрим функцию

$$M_1(r_1, r_2) = \max_{|z_1|=r_1, |z_2|=r_2} |f(z_1, z_2)|, \quad (2.1)$$

называя ее модуль-максимумом целой функции $f(z_1, z_2)$.

Из принципа максимума для аналитических функций многих переменных следует, что если функция $f(z_1, z_2)$ не постоянна относительно какой-либо из переменных z_1 или z_2 , то

$$1) M_1(r_1, r_2) > M_1(r_1, r_2), \quad \text{если } r_1 > r_1,$$

$$2) M_1(r_1, r_2) > M_1(r_1, r_2), \quad \text{если } r_2 > r_2,$$

и, следовательно,

(2.1')

$$3) M_1(r_1, r_2) > M_1(r_1, r_2), \quad \text{если } r_1 > r_1 \text{ и } r_2 > r_2.$$

Определение 1. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок (по обеим переменным z_1 и z_2), если существуют постоянные числа $k_1 > 0$, $\mu_1 > 0$ и $k_2 > 0$, $\mu_2 > 0$, такие, что

1. Для любого фиксированного значения $r_2 \geq 0$ существует число $R_1 = R_1(k_1, \mu_1, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\mu_1}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1. \quad (2.2)$$

2. Для любого фиксированного значения $r_1 \geq 0$ существует число $R_2 = R_2(k_2, \mu_2, r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при } r_2 \geq R_2. \quad (2.3)$$

Заметим, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок, т. е. если для нее при некоторых значениях $\mu_1 > 0$, $k_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, $k_2 > 0$ имеют место оценки вида (2.2) и (2.3), то при $\mu'_1 > \mu_1$ и $\mu'_2 > \mu_2$ одновременно будем иметь также

а) при любом $r_2 \geq 0$

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\mu'_1}}, \quad \text{при } r_1 \geq R'_1(\mu'_1, r_2); \quad (2.2')$$

б) при любом $r_1 \geq 0$

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_2^{\mu'_2}}, \quad \text{при } r_2 \geq R'_2(\mu'_2, r_1). \quad (2.3')$$

Из семейства целых функций конечного порядка выделим специальный подкласс целых функций конечного порядка класса А.

Определение 2. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ конечного порядка принадлежит к классу А, если всегда из оценок вида (2.2) и (2.3) следует, что существует число $R = R(k_1, \mu_1, k_2, \mu_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\mu_1} + k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R. \quad (2.4)$$

Следует отметить, что целые функции класса А составляют собственную часть класса целых функций конечного порядка. Действительно, рассмотрим целую функцию $f(z_1, z_2) = e^{z_1 z_2}$, для которой, очевидно, $M_f(r_1, r_2) = e^{r_1 r_2}$. Эта функция конечного порядка, так как

1) для любого p ($1 < p < 2$)

$$e^{r_1 r_2} < e^{r_1^p}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(p, r_2);$$

2) для любого p ($1 < p < 2$)

$$e^{r_1 r_2} < e^{r_2^p}, \quad \text{при } r_2 \geq R_2(p, r_1).$$

Однако эта функция не принадлежит к классу А, так как неравенство вида

$$e^{r_1 r_2} < e^{r_1^p + r_2^p}$$

не может выполняться, например, для всех достаточно больших $r_1 = r_2$.

Пусть функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок, тогда для нее существуют постоянные числа $\mu'_1 > 0$ и $\mu'_2 > 0$, такие, что выполняются неравенства вида (2.2') и (2.3') для ее модуль-максимума $M_f(r_1, r_2)$. Рассмотрим нижние грани тех значений μ'_1 и μ'_2 , для которых соответственно имеют место неравенства вида (2.2') и (2.3'). Итак, пусть

$$\rho_1 = \inf \mu'_1 > 0, \quad \rho_2 = \inf \mu'_2 > 0. \quad (2.5)$$

Назовем числа ρ_1 и ρ_2 соответственно *порядками* целой функции $f(z_1, z_2)$ относительно переменных z_1 и z_2 .

Из определения чисел ρ_1 и ρ_2 следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядки ρ_1 и ρ_2 относительно переменных z_1 и z_2 , тогда

1. Для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и любого $r_2 \geq 0$ существует число $R_1(\varepsilon, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_1^{\rho_1 + \varepsilon}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(\varepsilon, r_2). \quad (2.6)$$

Кроме того, существует, по крайней мере, одно значение $r_2 = r_2^0(\varepsilon)$ и соответствующие сколь угодно большие значение $r_1: \{r_{1i}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_{1i}, r_2^0(\varepsilon)) > e^{r_{1i}^{\rho_1 - \varepsilon}}.$$

Но тогда из свойств (2.1') функции $M_f(r_1, r_2)$ будет следовать, что

$$M_f(r_{1i}, r_2) > e^{r_{1i}^{\rho_1 - \varepsilon}}, \quad \text{при } r_2 \geq r_2^0(\varepsilon). \quad (2.6')$$

2. Для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и любого $r_1 \geq 0$ существует число $R_2(\varepsilon, r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{r_2^{\rho_2 + \varepsilon}}, \quad \text{при } r_2 \geq R_2(\varepsilon, r_1). \quad (2.7)$$

Кроме того, существует такое значение $r_1 = r_1^0(\varepsilon)$ и сколько угодно большие значения $r_2: \{r_{2k}\}$, что

$$M_f(r_1, r_{2k}) > e^{r_{2k}^{\rho_2 - \varepsilon}}, \quad \text{при } r_1 \geq r_1^0(\varepsilon). \quad (2.7')$$

Из свойств (2.1) функции $M_f(r_1, r_2)$ легко следует, что утверждения 1 и 2 соответственно эквивалентны следующим

$$1' \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1, \quad (2.8)$$

$$2' \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2. \quad (2.9)$$

Таким образом, свойства 1 и 2 или, что то же самое, свойства 1' и 2' не только необходимы, но и достаточны для того,

чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ имела порядки ρ_1 и ρ_2 соответственно по переменным z_1 и z_2 .

Определение 3. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2) , если

$$1) f(z_1, z_2) \in A.$$

2) $f(z_1, z_2)$ имеет порядки ρ_1 и ρ_2 соответственно по переменным z_1 и z_2 .

Из определения следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2) , то функция $M_f(r_1, r_2)$, кроме свойств 1 и 2 (1' и 2'), обладает также свойством

3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{\varepsilon r_1^{\rho_1 + \varepsilon} + r_2^{\rho_2 + \varepsilon}}, \quad r_1, r_2 > R(\varepsilon). \quad (2.10)$$

Покажем, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2) , где $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$ (в дальнейшем это обстоятельство будем обозначать так $(\rho_1, \rho_2) > 0$), то

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \quad (2.11)$$

Действительно, из свойства 3 функции $M_f(r_1, r_2)$ следует, что при данных $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})} \leq 1. \quad (2.12)$$

Далее, если $r_1 \geq 1$ и $r_2 \geq 1$, $\gamma = \max(\mu_1, \mu_2)$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$, тогда имеем

$$\frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})} \leq \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} = \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})} \cdot \frac{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})}.$$

Отсюда и из (2.12) следует

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} \leq \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})}. \quad (2.13)$$

Обозначая $r_1 + r_2 = R$, очевидно, получим оценку

$$\frac{\log\left(\frac{R}{2}\right)^{\gamma}}{\log(2R^{\rho})} \leq \frac{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} \leq \frac{\log(2R^{\gamma})}{\log\left(\frac{R}{2}\right)^{\rho}},$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log(r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2})}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} = \frac{\gamma}{\rho}. \quad (2.14)$$

Из (2.13) и (2.14) вытекает, что существует

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_f(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho} + r_2^{\rho})} = a \leq \frac{\gamma}{\rho} < +\infty. \quad (2.15)$$

Таким образом, нужно установить, что $a = 1$. С этой целью покажем сначала, что предположение $a > 1$ приводит к противоречию. Итак, пусть $a > 1$. Положим, что $1 < a'' < a' < a$, тогда из (2.15) будет следовать, что существуют бесконечно возрастающие последовательности $\{r_{1i}\}$ и $\{r_{2k}\}$, такие, что

$$\frac{\log_2 M_i(r_{1i}, r_{2k})}{\log(r_{1i}^{a'} + r_{2k}^{a'})} > a',$$

так что

$$M_i(r_{1i}, r_{2k}) > e^{(r_{1i}^{a'} + r_{2k}^{a'})^{a'}}, \quad (i, k = 1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

Фиксируя значение $k = k_0$, получим, что

$$M_i(r_{1i}, r_{2k_0}) > e^{r_{1i}^{a' a'}}, \quad \text{при } i \geq i_0,$$

а так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $a'' \rho_1 > \rho_1 + \varepsilon$, то это противоречит тому, что функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок ρ_1 относительно переменной z_1 , т. е. свойству (2.6) функции $M_i(r_1, r_2)$.

Положим теперь, что $a < 1$, тогда если $a < a' < a'' < 1$, то из (2.15) следует

$$\frac{\log_2 M_i(r_1, r_2)}{\log(r_1^{a'} + r_2^{a'})} < a', \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R_0,$$

т. е.

$$M_i(r_1, r_2) < e^{(r_1^{a'} + r_2^{a'})^{a'}}, \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R_0, \quad (2.17)$$

Из (2.17) получим в силу свойства (2.1') функции $M_i(r_1, r_2)$

$$M_i(r_1, r_2) < e^{(r_1^{a'} + R_0^{a'})^{a'}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_0, 0 \leq r_2 \leq R_0.$$

Выберем $R_1 \geq R_0$ таким образом, чтобы имели

$$(r_1^{a'} + R_0^{a'})^{a'} < r_1^{a' a'}. \quad \text{при } r_1 \geq R_1;$$

тогда имеем, что для любого $0 < r_2 \leq R_0$

$$M_i(r_1, r_2) < e^{r_1^{a' a'}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1. \quad (2.18)$$

Если же $r_2 > R_0$ фиксировано, то опять число $R_1 > R_0$ можем выбрать так, чтобы опять имело место неравенство

$$(r_1^{a'} + r_2^{a'})^{a'} < r_1^{a' a'}. \quad \text{при } r_1 \geq R_1(r_2),$$

т. е. неравенство

$$M_i(r_1, r_2) < e^{r_1^{a' a'}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(r_2). \quad (2.18')$$

Из (2.18) и (2.18') заключаем, что для любого $r_2 \geq 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M_i(r_1, r_2) < e^{r_1^{a' a'}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(r_2). \quad (2.18'')$$

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\rho_1 a^\varepsilon < \rho_1 - \varepsilon$, то (2.18'') противоречит свойству (2.6') функции $M_1(r_1, r_2)$, следовательно, $a = 1$, и равенство (2.11) доказано.

Таким образом, если целая функция имеет порядок $\rho(\rho_1, \rho_2) > 0$, то, кроме свойств 1' и 2', функция $M_1(r_1, r_2)$ обладает также свойством

$$3'. \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_1(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \quad (2.11)$$

Но из свойства 3' следует, что функция $M_1(r_1, r_2)$ обладает указанным выше свойством 3, поэтому, суммируя вышеизложенное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ имела порядок $\rho(\rho_1, \rho_2) > 0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$а) \quad \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_1(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1; \quad (2.19)$$

$$б) \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_1(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2; \quad (2.20)$$

$$в) \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_1(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \quad (2.21)$$

3°. Целые функции порядка (ρ_1, ρ_2) и типа (σ_1, σ_2) .

Переходим к определению целых функций порядка (ρ_1, ρ_2) и конечного типа.

Определение 4. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имеет конечный тип по обеим переменным z_1 и z_2 , если существуют постоянные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, такие, что

1) для любого фиксированного значения $r_2 > 0$ существует число $R_1(k_1, r_2)$, такое, что

$$M_1(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_1 > R_1(k_1, r_2); \quad (3.1)$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 > 0$ существует число $R_2(k_2, r_1)$, такое, что

$$M_1(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_2 > R_2(k_2, r_1). \quad (3.2)$$

Рассмотрим нижние грани тех значений k_1 и k_2 , для которых соответственно имеют место неравенства вида (3.1) и (3.2).

Итак, пусть

$$\sigma_1 = \inf k_1 > 0, \quad \sigma_2 = \inf k_2 > 0. \quad (3.3)$$

Назовем числа σ_1 и σ_2 типами целой функции $f(z_1, z_2)$ соответственно по переменным z_1 и z_2 .

Так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $\rho_1 a^\varepsilon < \rho_1 - \varepsilon$, то (2.18'') противоречит свойству (2.6') функции $M_\varepsilon(r_1, r_2)$, следовательно, $a = 1$, и равенство (2.11) доказано.

Таким образом, если целая функция имеет порядок $\rho_1, \rho_2 > 0$, то, кроме свойств 1' и 2', функция $M_\varepsilon(r_1, r_2)$ обладает также свойством

$$3'. \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\varepsilon(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \quad (2.11)$$

Но из свойства 3' следует, что функция $M_\varepsilon(r_1, r_2)$ обладает указанным выше свойством 3, поэтому, суммируя вышесказанное, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$a) \quad \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\varepsilon(r_1, r_2)}{\log r_1} \right\} = \rho_1; \quad (2.19)$$

$$б) \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\varepsilon(r_1, r_2)}{\log r_2} \right\} = \rho_2; \quad (2.20)$$

$$в) \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log_2 M_\varepsilon(r_1, r_2)}{\log(r_1^{\rho_1} + r_2^{\rho_2})} = 1. \quad (2.21)$$

3°. Целые функции порядка (ρ_1, ρ_2) и типа (σ_1, σ_2) .

Переходим к определению целых функций порядка (ρ_1, ρ_2) и конечного типа.

Определение 4. Скажем, что целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имеет конечный тип по обеим переменным z_1 и z_2 , если существуют постоянные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, такие, что

1) для любого фиксированного значения $r_2 > 0$ существует число $R_1(k_1, r_2)$, такое, что

$$M_\varepsilon(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_1 > R_1(k_1, r_2); \quad (3.1)$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 > 0$ существует число $R_2(k_2, r_1)$, такое, что

$$M_\varepsilon(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_2 > R_2(k_2, r_1). \quad (3.2)$$

Рассмотрим нижние грани тех значений k_1 и k_2 , для которых соответственно имеют место неравенства вида (3.1) и (3.2).

Итак, пусть

$$\sigma_1 = \inf k_1 > 0, \quad \sigma_2 = \inf k_2 > 0. \quad (3.3)$$

Назовем числа σ_1 и σ_2 типами целой функции $f(z_1, z_2)$ соответственно по переменным z_1 и z_2 .

Из определения чисел σ_1 и σ_2 следует, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имеет типы σ_1 и σ_2 относительно переменных z_1 и z_2 , тогда

1. Для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ и любого $r_2 > 0$ существует число $R_1(\varepsilon, r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_1 + \varepsilon)r_1^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(\varepsilon, r_2). \quad (3.4)$$

Одновременно существует значение $r_2 = r_2^0(\varepsilon)$ и сколь угодно большие значения $r_1: \{r_{1k}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_{1k}, r_2) < e^{(\sigma_1 - \varepsilon)r_{1k}^{\rho_1}}, \quad \text{при } r_2 \geq r_2^0(\varepsilon). \quad (3.4')$$

2. Для любого произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ и любого $r_1 \geq 0$ существует число $R_2(\varepsilon, r_1)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_2 + \varepsilon)r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_2 \geq R_2(\varepsilon, r_1). \quad (3.5)$$

Одновременно существует значение $r_1 = r_1^0(\varepsilon)$ и сколь угодно большие значения $r_2: \{r_{2k}\}$, удовлетворяющие неравенству

$$M_f(r_1, r_{2k}) > e^{(\sigma_2 - \varepsilon)r_{2k}^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_1 \geq r_1^0(\varepsilon). \quad (3.5')$$

Однако целая функция $f(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A , поэтому всегда из оценок вида (3.1) и (3.2) следует, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\rho_1} + k_2 r_2^{\rho_2}}, \quad \text{при } r_1, k r_2 \geq R(k_1, k_2).$$

Следовательно, можем утверждать также

3. для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{(\sigma_1 + \varepsilon)r_1^{\rho_1} + (\sigma_2 + \varepsilon)r_2^{\rho_2}}, \quad r_1, r_2 \geq R(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Из свойств (2.1) функции $M_f(r_1, r_2)$ следует, что утверждения 1 и 2 соответственно эквивалентны следующим

$$1'. \quad \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_1^{\rho_1}} \right\} = \sigma_1, \quad (3.7)$$

$$2'. \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\rho_2}} \right\} = \sigma_2, \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имеет тип (σ_1, σ_2) , то при $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$ (иначе говоря, при $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$) функция $M_f(r_1, r_2)$, кроме свойств 1' и 2', обладает также свойством

$$3'. \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} = 1. \quad (3.9)$$

Действительно, из свойства 3 вытекает, что при данных $k_1 > \sigma_1$ и $k_2 > \sigma_2$

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\beta_1} + k_2 r_2^{\beta_2}} \leq 1. \quad (3.10)$$

Пусть $\sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2)$ и $k = \max(k_1, k_2)$, тогда очевидно имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\beta_1} + \sigma_2 r_2^{\beta_2}} &\leq \frac{1}{\sigma} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{r_1^{\beta_1} + r_2^{\beta_2}} = \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\beta_1} + k_2 r_2^{\beta_2}} \cdot \frac{k_1 r_1^{\beta_1} + k_2 r_2^{\beta_2}}{\sigma (r_1^{\beta_1} + r_2^{\beta_2})} \leq \\ &\leq \frac{k}{\sigma} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{k_1 r_1^{\beta_1} + k_2 r_2^{\beta_2}} \end{aligned}$$

откуда, в силу (3.10), вытекает, что

$$\overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\beta_1} + \sigma_2 r_2^{\beta_2}} = a \leq \frac{k}{\sigma} < +\infty. \quad (3.11)$$

Таким образом, нужно установить, что $a = 1$.

С этой целью предположим сперва, что $a > 1$, и положим $1 < a' < a$, тогда из (3.11) следует, что существуют бесконечно возрастающие последовательности $\{r_{1i}\}$ и $\{r_{2k}\}$, такие, что

$$\frac{\log M_l(r_{1i}, r_{2k})}{\sigma_1 r_{1i}^{\beta_1} + \sigma_2 r_{2k}^{\beta_2}} > a'.$$

т. е.

$$M_l(r_{1i}, r_{2k}) > e^{a' \sigma_1 r_{1i}^{\beta_1} + a' \sigma_2 r_{2k}^{\beta_2}}, \quad i, k = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Но при достаточно малом $\varepsilon > 0$ очевидно имеем $a' \sigma_1 > \sigma_1 + \varepsilon$ и $a' \sigma_2 > \sigma_2 + \varepsilon$, поэтому (3.12) противоречит свойству (3.6) функции $M_l(r_1, r_2)$. Следовательно $a \leq 1$. Положим теперь, что $a < 1$, тогда, если $a < a' < 1$, то из (3.11) вытекает, что

$$\frac{\log M_l(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\beta_1} + \sigma_2 r_2^{\beta_2}} < a', \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R_0.$$

т. е.

$$M_l(r_1, r_2) < e^{a' \sigma_1 r_1^{\beta_1} + a' \sigma_2 r_2^{\beta_2}}, \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R_0. \quad (3.13)$$

Но так как при достаточно малом $\varepsilon > 0$ $a' \sigma_1 < \sigma_1 - \varepsilon$ и $a' \sigma_2 < \sigma_2 - \varepsilon$, то (3.13) противоречит свойствам 1 и 2 функции $M_l(r_1, r_2)$. Следовательно, $a = 1$ и таким образом (3.9) доказано.

Очевидно, что свойства 1', 2' и 3' не только необходимы, но они и достаточны для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка (ρ_1, ρ_2) имела тип (σ_1, σ_2) . Отсюда имеем:

Теорема 2. Для того, чтобы целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имела тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$a) \quad \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \frac{\log M_l(r_1, r_2)}{r_1^{\beta_1}} \right\} = \sigma_1; \quad (3.14)$$

$$б) \quad \overline{\lim}_{r_1 \rightarrow \infty} \left\{ \overline{\lim}_{r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{r_2^{\rho_2}} \right\} = \sigma_2; \quad (3.15)$$

$$в) \quad \overline{\lim}_{r_1, r_2 \rightarrow \infty} \frac{\log M_f(r_1, r_2)}{\sigma_1 r_1^{\rho_1} + \sigma_2 r_2^{\rho_2}} = 1. \quad (3.16)$$

4°. Коэффициенты Тейлора целой функции порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$. Пусть целая функция

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m \quad (4.1)$$

при некоторых $\mu_i > 0$, $k_i > 0$ ($i = 1, 2$) удовлетворяет условиям:

1) для любого фиксированного значения $r_2 > 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\mu_1}}, \quad \text{при } r_1 > R_1(r_2); \quad (4.2)$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 > 0$ существует число $R_2(r_1)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при } r_2 > R_2(r_1); \quad (4.3)$$

3) существует число R такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{k_1 r_1^{\mu_1} + k_2 r_2^{\mu_2}}, \quad \text{при } r_1, r_2 > R. \quad (4.4)$$

Заметим, что если целая функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок (ρ_1, ρ_2) , то для нее имеют место все условия 1), 2) и 3), если там положить $k_1 = k_2 = 1$, $\mu_1 = \rho_1 + \varepsilon$, $\mu_2 = \rho_2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно малое, но фиксированное число. Если же функция $f(z_1, z_2)$ имеет конечный порядок (ρ_1, ρ_2) и конечный тип (σ_1, σ_2) , то для нее имеют место все условия 1), 2) и 3), если положить $\mu_1 = \rho_1$, $\mu_2 = \rho_2$, $k_1 = \sigma_1 + \varepsilon$, $k_2 = \sigma_2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно малое фиксированное число.

Докажем основную лемму, необходимую нам и в этом и в следующем пунктах.

Лемма 2. Пусть $f(z_1, z_2)$ целая функция от переменных z_1 и z_2 , тогда

а) если $f_1(z_1, z_2)$ обладает свойством 1), то

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \mu_1 \quad (4.5)$$

и при любом $r_1 > 0$

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e \mu_1 K_1} \right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_1^n} \leq 1; \quad (4.5')$$

б) если $f(z_1, z_2)$ обладает свойством 2), то

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \mu_2 \quad (4.6)$$

и при любом $r_1 > 0$

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{m}{e^{\mu_2} K_2} \right)^{\frac{m}{\nu_2}}} r_1^n \leq 1, \quad (4.6')$$

в) если $f(z_1, z_2)$ обладает свойством 3), то

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\mu_1} \log n + \frac{m}{\mu_2} \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} < 1, \quad (4.7)$$

$$\lim_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e^{\mu_1} k_1} \right)^{\frac{n}{\nu_1}} \left(\frac{m}{e^{\mu_2} k_2} \right)^{\frac{m}{\nu_2}}} < 1, \quad (4.7')$$

Доказательство. Из (4.1) при любых $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$ получим:

$$a_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|z_1|=r_1} \int_{|z_2|=r_2} \frac{f(z_1, z_2)}{z_1^{n+1} z_2^{m+1}} dz_1 dz_2, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots),$$

откуда следует оценка

$$|a_{nm}| \leq \frac{M_f(r_1, r_2)}{r_1^n r_2^m}. \quad (4.8)$$

Выберем теперь

$$r_1 = \left(\frac{n}{\mu_1 k_1} \right)^{\frac{1}{\nu_1}}; \quad (4.9)$$

тогда при данном $r_2 > 0$, при $n > N_1 = N(r_1)$, из (4.2) получим

$$M_f(r_1, r_2) < e^{\mu_1 n}, \quad \text{при } n > N_1(r_2). \quad (4.10)$$

Из (4.2) и (4.10) следует, что при всяком $r_2 > 0$

$$|a_{nm}| < \left(\frac{e^{\mu_1 k_1}}{n} \right)^{\frac{n}{\nu_1}} r_2^{-m}, \quad \text{при } n > N_1(r_2), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (4.11)$$

а из (4.8) имеем также

$$|a_{nm}| \leq M_f(1, r_2) r_2^{-m}, \quad \text{при } 0 \leq n < N(r_2), \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.11')$$

Из оценок (4.11) и (4.11') вытекает, что

$$\overline{\lim}_{\substack{n+m \rightarrow \infty \\ n > N_1(r_2)}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^m} \ll 1, \quad (4.12)$$

$$\overline{\lim}_{\substack{n+m \rightarrow \infty \\ n < N(r_2)}} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} r_2^m} \ll 1. \quad (4.12')$$

Предельные соотношения (4.12) и (4.12') эквивалентны утверждению (4.5') леммы.

Утверждение (4.5) просто следует из (4.5'), если взять логарифм выражения, стоящего под знаком предела в (4.5'), разделить его на $\frac{1}{n+m} \log \frac{1}{|a_{nm}|}$ и учесть то обстоятельство, что по лемме 1

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{1}{n+m} \log \frac{1}{|a_{nm}|} = \infty. \quad (4.13)$$

Утверждение в) леммы получается вполне аналогичным рассуждением, если учесть свойство 2) функции $M_1(r_1, r_2)$.

Для доказательства утверждения с) леммы в неравенстве (4.8) положим

$$r_1 = \left(\frac{n}{\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}}, \quad r_2 = \left(\frac{m}{\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}; \quad (4.14)$$

тогда при $n > N_1(R)$ и $m > N_2(R)$ из (4.4) и (4.3) получим

$$|a_{nm}| < \left(\frac{e\mu_1 k_1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{e\mu_2 k_2}{m}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}. \quad (4.15)$$

Из (4.3) вытекает, что

$$\overline{\lim}_{n, m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{m}{e\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}} \ll 1. \quad (4.16)$$

Из (4.16), (4.5'), (при $r_2 = 1$) и (4.5') (при $r_1 = 1$) следует

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\mu_1 k_1}\right)^{\frac{n}{\mu_1}} \left(\frac{m}{e\mu_2 k_2}\right)^{\frac{m}{\mu_2}}} \ll 1,$$

т. е. утверждение (4.7') леммы.

Наконец, утверждение (4.7) следует из (4.7'), если учесть (4.13). Лемма полностью доказана.

Лемма 3. Пусть $\{a_{nm}\}$, $(n, m = 0, 1, 2, \dots)$ — некоторая бесконечная таблица комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\mu_1} \log n + \frac{m}{\mu_2}}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq 1, \quad (\mu_1, \mu_2 > 0). \quad (4.17)$$

Тогда ряд

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m$$

определяет некоторую целую функцию от переменных z_1 и z_2 удовлетворяющую при любых $\mu_1 > \mu_1'$ и $\mu_2 > \mu_2'$ условиям вида 1), 2) и 3).

Доказательство. Пусть $1 < \alpha_1 < \alpha$, тогда из (4.17) следует, что

$$|a_{nm}| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{m}{\alpha_1 \mu_1'}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_1 \mu_2'}}, \quad \text{при } n+m \geq N(\alpha_1). \quad (4.18)$$

Из (4.18) получим:

$$\begin{aligned} |f(z_1, z_2)| &\leq \sum_{n+m \leq N} |a_{nm}| |z_1|^n |z_2|^m + \\ &+ \sum_{n+m > N} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha_1 \mu_1'}} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_1 \mu_2'}} |z_1|^n |z_2|^m < \\ &< \sum_{n+m \leq N} |a_{nm}| |z_1|^n |z_2|^m + \\ &+ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha_1 \mu_1'}} |z_1|^n \right\} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{\alpha_1 \mu_2'}} |z_2|^m \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Но в теории целых функций доказывается, что если

$$\varphi(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n, \quad (\mu > 0), \quad (4.20)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$

$$\varphi(r) < e^{\left(\frac{1}{\mu\varepsilon} + \varepsilon\right) r^{\mu}}. \quad (4.21)$$

Отсюда и из оценки (4.19) в силу того, что $1 < \alpha_1 < \alpha$, получим, что

1) для любого фиксированного значения $r_2 \geq 0$ существует число $R_1(\alpha, r_2)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\alpha_1}}, \quad \text{при } r_1 \geq R_1(\alpha, r_2); \quad (4.22)$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 > 0$ существует число $R_2(\alpha, r_1)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_2^{\alpha r_1}}, \text{ при } r_2 \geq R_2(\alpha, r_1); \quad (4.23)$$

3) существует число $R(\alpha)$, такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\alpha r_1} + r_2^{\alpha r_1}}, \text{ при } r_1, r_2 \geq R(\alpha). \quad (4.24)$$

Так как $\alpha > 1$ была произвольной, то лемма доказана.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что если функция $i(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A и имеет порядок (ρ_1, ρ_2) , то $\rho_1 \leq \mu_1$ и $\rho_2 \leq \mu_2$.

Докажем теперь следующую теорему, характеризующую класс целых функций порядка (ρ_1, ρ_2) .

Теорема 3. Для того, чтобы целая функция $i(z_1, z_2)$ имела порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\{a_{nm}\}$ ее разложения в ряд Тейлора (4.1) удовлетворяли следующим трем условиям:

$$1) \quad \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1, \quad (4.25)$$

$$2) \quad \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{m \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_2, \quad (4.26)$$

$$3) \quad \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\rho_1} \log n + \frac{m}{\rho_2} \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1. \quad (4.27)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть целая функция $i(z_1, z_2)$ имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$. Пусть $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$ — любые числа; тогда очевидно, что существует число R_0 , такое, что

$$M(r_1, r_2) < e^{r_1^{\mu_1} + r_2^{\mu_2}}, \text{ при } r_1, r_2 > R_0.$$

Отсюда по лемме 2 вытекает, что

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{\mu_1} \log n + \frac{m}{\mu_2} \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq 1 \quad (4.28)$$

при любых $\mu_1 > \rho_1$ и $\mu_2 > \rho_2$.

Обозначая $\min\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) = \alpha$, из (4.28) получим

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n + m \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (4.28')$$

Пусть $x > 0$ и $y > 0$, тогда из (4.28') следует, что

$$\Phi(x, y) = \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{xn \log n + ym \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \frac{\max(x, y)}{\alpha} < +\infty. \quad (4.29)$$

Далее, легко видеть, что

$$\begin{aligned} & \left| \Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) \right| \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\mu_1}\right)n \log n + \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\mu_2}\right)m \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Следовательно, из (4.29) и (4.30) получим

$$\left| \Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) - \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) \right| < \frac{1}{\alpha} \max \left\{ \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\mu_1}\right), \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\mu_2}\right) \right\}. \quad (4.30')$$

Замечая, что по (4.28)

$$\Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) \leq 1, \text{ при любых } \mu_1 > \rho_1, \mu_2 > \rho_2.$$

из (4.30') заключаем

$$\Phi\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right) = \lim_{\substack{\mu_1 \rightarrow \rho_1 \\ \mu_2 \rightarrow \rho_2}} \Phi\left(\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\right) - \omega \leq 1,$$

и таким образом утверждение 3) теоремы будет доказано, если мы покажем, что $\omega = 1$.

Предположим, что

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\rho_1} n \log n + \frac{1}{\rho_2} m \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \omega < \omega' < 1,$$

тогда, очевидно, будем иметь

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\rho_1 \omega'} n \log n + \frac{1}{\rho_2 \omega'} m \log m}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} < 1. \quad (4.31)$$

Так как функция (z_1, z_2) принадлежит к классу A и имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$, то из (4.31) в силу замечания, приведенного в конце доказательства леммы 3, следует, что $\rho_1 < \rho_1 \omega'$ и $\rho_2 < \rho_2 \omega'$. Это значит, что $\omega' > 1$, что противоречит допущению $\omega' < 1$. Следовательно, формула (4.27) доказана.

Таким образом, нам остается установить справедливость формул (4.25) и (4.26). Докажем лишь справедливость формулы (4.25), так как формула (4.26), устанавливается вполне аналогичным рассуждением.

Пусть $\mu_1 > \rho_1$ произвольное, но фиксированное число, тогда по формуле (4.5) леммы 2

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \mu_1.$$

Но $\mu_1 > \rho_1$ произвольна, поэтому

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1^* \leq \rho_1. \quad (4.32)$$

Таким образом, остается установить, что $\rho_1^* = \rho_1$. Положим, что

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} = \rho_1^* < \rho_1.$$

тогда очевидно, что в силу (4.13) при любом фиксированном $r_2 > 0$ будем иметь также

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}| (2r_2)^m}} = \rho_1^* < \rho_1. \quad (4.32')$$

Но из (4.32') следует, что

$$|a_{nm}| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} \frac{1}{(2r_2)^m}, \text{ при } n+m \geq N_0(r_2),$$

откуда получим оценку

$$\begin{aligned} M(r_1, r_2) &\leq \sum_{n+m < N_0} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + \sum_{n+m > N_0} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} r_1^n \frac{1}{2^m} < \\ &< \sum_{n+m < N_0} |a_{nm}| r_1^n r_2^m + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\rho_1^*}} r_1^n. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из (4.33) в силу оценки (4.21) следует, что для любого ρ_1^* ($\rho_1^* < \rho_1 < \rho_1^*$)

$$M(r_1, r_2) < e^{r_2^{\rho_1^*}}, \text{ при } r_1 \geq R_1(\rho_1^*, r_2). \quad (4.34)$$

Но по условию теоремы функция $f(z_1, z_2)$ имеет порядок $\rho_1 > \rho_1^*$ относительно переменной z_1 , а оценка вида (4.34), справедливая, очевидно, при любом $r_2 > 0$, противоречит этому. Отсюда следует, что $\rho_1^* = \rho_1$. Таким образом необходимость условий 1), 2), 3) доказана.

Достаточность. Пусть для бесконечной таблицы $\{a_{nm}\}$ ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) комплексных чисел имеют место утверждения 1), 2) и 3) теоремы.

Во-первых, из (4.27) в силу леммы 3 следует, что функция $I(z_1, z_2)$, определенная рядом (1.1), при любых $\rho'_1 > \rho_1$ и $\rho'_2 > \rho_2$ удовлетворяет условиям:

1) для любого фиксированного значения $r_2 > 0$ существует число $R_1(\rho'_1, r_2)$, такое, что

$$M_1(r_1, r_2) < e^{r_1 \rho'_1} \quad \text{при} \quad r_1 > R_1(\rho'_1, r_2); \quad (4.35)$$

2) для любого фиксированного значения $r_1 > 0$ существует число $R_2(\rho'_2, r_1)$, такое, что

$$M_1(r_1, r_2) < e^{r_2 \rho'_2} \quad \text{при} \quad r_2 > R_2(\rho'_2, r_1); \quad (4.36)$$

3) существует число $R(\rho'_1, \rho'_2)$, такое, что

$$M_1(r_1, r_2) < e^{r_1 \rho'_1 + r_2 \rho'_2} \quad \text{при} \quad r_1, r_2 > R(\rho'_1, \rho'_2). \quad (4.37)$$

Покажем, что оценка вида (4.35) не может иметь места, если заменить число ρ'_1 любым числом $\rho'_1 < \rho_1$.

Действительно, тогда в силу леммы 2(а) имели бы

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log \frac{1}{|a_{nm}|}} \leq \rho'_1 < \rho_1,$$

что противоречило бы условию (4.25) теоремы. Аналогично из условия (4.26) будет следовать, что в оценке (4.36) число ρ'_2 не может быть заменено числом $\rho'_2 < \rho_2$.

Из этих двух замечаний следует, что функция $I(z_1, z_2)$ имеет порядки ρ_1 и ρ_2 относительно переменных z_1 и z_2 соответственно. Но тогда (4.37) означает, что $I(z_1, z_2)$ принадлежит к классу A и, следовательно, имеет порядок (ρ_1, ρ_2) .

5°. Коэффициенты Тейлора целой функции порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 4. Если таблица неотрицательных чисел $\{x_{nm}\}$, ($n, m = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm}} < +\infty, \quad (5.1)$$

то при любых $u > 0, v > 0$ существует функция

$$\varphi(u, v) = \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm} u^n v^m} < +\infty, \quad (5.2)$$

непрерывная в области $(0 < u < +\infty, 0 < v < +\infty)$.

Доказательство. Из (5.1) следует, что

$$\varphi(1, 1) = \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm}} < +\infty. \quad (5.1')$$

Обозначая $\max(u, v) = w$, имеем:

$$\sqrt[n+m]{x_{nm} u^n v^m} \leq w \sqrt[n+m]{x_{nm}}$$

откуда вытекает, что существует

$$\varphi(u, v) \leq w\varphi(1, 1). \quad (5.2)$$

Докажем теперь непрерывность функции $\varphi(u, v)$ в области $0 < u < +\infty$, $0 < v < +\infty$.

Пусть (u_0, v_0) — любая фиксированная точка указанной области, тогда, очевидно, имеем:

$$\begin{aligned} |\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| &\leq \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm}} \left| \sqrt[n+m]{u^n v^m} - \sqrt[n+m]{u_0^n v_0^m} \right| \\ &= \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm} u_0^n v_0^m} \left| \sqrt[n+m]{\left(\frac{u}{u_0}\right)^n \left(\frac{v}{v_0}\right)^m} - 1 \right|. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Для данного ε ($0 < \varepsilon < 1$) выберем числа u и v настолько близкими к числам u_0 и v_0 соответственно, чтобы имели место неравенства

$$\sqrt{1-\varepsilon} < \frac{u}{u_0} < \sqrt{1+\varepsilon}, \quad \sqrt{1-\varepsilon} < \frac{v}{v_0} < \sqrt{1+\varepsilon}. \quad (5.4)$$

Из (5.4) получим

$$1 - \varepsilon < \sqrt[n+m]{\left(\frac{u}{u_0}\right)^n \left(\frac{v}{v_0}\right)^m} < 1 + \varepsilon,$$

откуда и из (5.3) следует, что при выполнении условий (5.4)

$$|\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| \leq \varepsilon \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{x_{nm} u_0^n v_0^m} = \varepsilon \varphi(u_0, v_0).$$

Это значит, что

$$\lim_{(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)} \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0),$$

и лемма доказана.

Теорема 4. Если целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ имеет тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, то коэффициенты $\{a_{nm}\}$ ее разложения в ряд Тейлора удовлетворяют условиям

$$\text{а) } \sup_{0 < r_2 < +\infty} \left\{ \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} r_2^m} \right\} = 1, \quad (5.5)$$

$$\text{в) } \sup_{0 < r_1 < +\infty} \left\{ \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}} r_1^n} \right\} = 1, \quad (5.6)$$

$$\text{с) } \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}}} = 1. \quad (5.7)$$

Доказательство. По лемме 2 в данном случае утверждения (4.5'), (4.6') и (4.7') имеют место при $\mu_1 = \rho_1$, $\mu_2 = \rho_2$ и при любых $k_1 > \sigma_1$ и $k_2 > \sigma_2$. Отсюда по лемме 4 следует, что утверждения (4.5'), (4.6') и (4.7') справедливы при $\mu_1 = \rho_1$, $\mu_2 = \rho_2$, $K_1 = \sigma_1$, $K_2 = \sigma_2$. Следовательно, мы должны иметь:

$$\sup_{0 < r_2 < +\infty} \left\{ \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1} \right)^{\frac{n}{\rho_1}} r_2^m} \right\} = \alpha \leq 1, \quad (5.5')$$

$$\sup_{0 < r_1 < +\infty} \left\{ \overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2} \right)^{\frac{m}{\rho_2}} r_1^n} \right\} = \beta \leq 1, \quad (5.6')$$

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|a_{nm}| \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1} \right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2} \right)^{\frac{m}{\rho_2}}} = \gamma \leq 1. \quad (5.7')$$

Таким образом, остается установить, что $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

Покажем сперва, что предположение $\gamma < 1$ приводит к противоречию. Действительно, если $\gamma < 1$, то из (5.7') вытекает, что для любого γ_1 ($\gamma < \gamma_1 < 1$) существует целое число $N(\gamma_1)$, такое, что

$$|a_{nm}| < \left[\frac{e\rho_1 \sigma_1 \gamma_1^{\rho_1}}{n} \right]^{\frac{n}{\rho_1}} \left[\frac{e\rho_2 \sigma_2 \gamma_1^{\rho_2}}{m} \right]^{\frac{m}{\rho_2}}, \quad \text{при } n+m > N(\gamma_1). \quad (5.8)$$

Из (5.8), как при доказательстве леммы 3, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $R(\varepsilon, \gamma_1)$, такое, что

$$M_l(r_1, r_2) < e^{(\rho_1 \gamma_1^{\rho_1} + \rho_2 \gamma_1^{\rho_2})(\rho_1 r_1^{\rho_1} + \rho_2 r_2^{\rho_2})}, \quad \text{при } r_1, r_2 \geq R(\varepsilon, \gamma_1). \quad (5.9)$$

Но по условию функция $l(z_1, z_2)$ имеет порядок $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и тип $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Поэтому из (5.9) следует, что

$$\sigma_1 \leq \sigma_1 \gamma_1^{\rho_1} + \varepsilon, \quad \sigma_2 \leq \sigma_2 \gamma_1^{\rho_2} + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$, получим $\gamma_1 \geq 1$, что противоречит допущению $\gamma_1 < 1$.

Предположим теперь, что $\alpha < 1$, тогда в силу (5.5') для любого α_1 ($\alpha < \alpha_1 < 1$) существует целое число $N(\alpha_1)$, не зависящее от $r_2 > 0$, и такое, что

$$|a_{nm}| < \left[\frac{e\rho_1 \sigma_1 \alpha_1^{\rho_1}}{n} \right]^{\frac{n}{\rho_1}} \left[\frac{\alpha_1}{r_2} \right]^m, \quad \text{при } n+m \geq N(\alpha_1). \quad (5.10)$$

Из (5.10) следует, что при любом $r_2 > 0$

$$M_l(r_1, r_2) \leq \sum_{n+m \geq N} |a_{nm}| r_1^n r_2^m +$$

$$+ \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{e \rho_1 \sigma_1 \alpha_1^{\rho_1}}{n} \right]^{\frac{n}{\rho_1}} \right\} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_2^m \right\}. \quad (5.11)$$

Из (5.11) в силу оценки (4.21) вытекает, что для любого $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ и $r_2 \geq 0$ существует число $R_1(r_2)$, такое, что

$$M_f(r_1, r_2) < e^{\alpha_1^{\rho_1} r_1^{\rho_1}}, \text{ при } r_1 \geq R_1. \quad (5.12)$$

Но функция $f(z_1, z_2)$ по условию имела тип $\sigma_1 > 0$ относительно переменной z_1 , и поэтому $\sigma_1 \leq \sigma_1 \alpha_1^{\rho_1}$, откуда следует, что $\alpha_2 > 1$, что противоречит условию $\alpha_2 < 1$.

Таким образом, доказано, что $\alpha = 1$. Наконец, утверждение $\beta = 1$ устанавливается внолне аналогичным образом.

б°. Преобразование Бореля и интегральное представление целых функций порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$.

Известно, что целая функция типа Миттаг-Лефлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}, \quad (\mu > 0, \rho > 0) \quad (6.1)$$

имеет порядок ρ и тип 1.

Легко видеть, что если $|\zeta_k| - \sigma_k > 0$ ($k=1, 2$), то целая функция

$$f(z_1, z_2) = E_{\rho_1}(\zeta_1 z_1; \mu_1) E_{\rho_2}(\zeta_2 z_2; \mu_2) \quad (6.2)$$

от переменных z_1 и z_2 имеет порядок (ρ_1, ρ_2) и тип (σ_1, σ_2) .

В настоящем пункте мы покажем, что произвольная целая функция порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ представляет собой предел линейных комбинаций вида (6.2).

Пусть $f(z_1, z_2)$ целая функция порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$. Представим ее рядом Тейлора в виде

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{b_{nm} z_1^n z_2^m}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} \quad (\mu_1 > 0, \mu_2 > 0). \quad (6.3)$$

По теореме 4 имеет место равенство

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{\frac{|b_{nm}|}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1}) \left(\frac{n}{e\rho_1 \sigma_1}\right)^{\frac{n}{\rho_1}} \left(\frac{m}{e\rho_2 \sigma_2}\right)^{\frac{m}{\rho_2}}} = 1, \quad (6.4)$$

откуда по формуле Стирлинга следует, что

$$\overline{\lim}_{n+m \rightarrow \infty} \sqrt[n+m]{|b_{nm}| \sigma_1^{-\frac{n}{\rho_1}} \sigma_2^{-\frac{m}{\rho_2}}} = 1. \quad (6.4')$$

Из соотношения (6.4) вытекает, что функция

$$g(z_1, z_2) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{b_{nm}}{z_1^{m+1} z_2^{n+1}} \quad (6.5)$$

голоморфна в области $|z_1| > \sigma_1^{1/\rho_1}, |z_2| > \sigma_2^{1/\rho_2}$.

Назовем $g(z_1, z_2)$ функцией $B_{\rho_1, \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, ассоциированной с целой функцией $f(z_1, z_2)$.

Если l_k ($k=1, 2$) произвольный замкнутый контур, охватывающий круг $|\zeta_k| \leq \sigma_k^{1/\rho_k}$ плоскости ζ_k (в частности, за l_k можно взять любую окружность $|\zeta_k| = r_k > \sigma_k^{1/\rho_k}$), то из (6.5) следует, что

$$b_{nm} = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} g(\zeta_1, \zeta_2) \zeta_1^n \zeta_2^m d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.6)$$

Из (6.1) и (6.6) получим следующее интегральное представление целой функции $f(z_1, z_2)$

$$f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} E_{\rho_1}(z_1 \zeta_1; \mu_1) E_{\rho_2}(z_2 \zeta_2; \mu_2) g(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Любая целая функция $f(z_1, z_2)$ порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ представляется в виде

$$f(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{l_1} \int_{l_2} E_{\rho_1}(z_1 \zeta_1; \mu_1) E_{\rho_2}(z_2 \zeta_2; \mu_2) g(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (6.7)$$

где $g(z_1, z_2)$ функция $B_{\rho_1, \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, ассоциированная с $f(z_1, z_2)$, а l_k ($k=1, 2$) произвольный замкнутый контур, лежащий в области $|\zeta_k| > \sigma_k^{1/\rho_k}$.

Формулу (6.7), дающую интегральное представление целой функции порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ через функцию $B_{\rho_1, \rho_2}(\mu_1, \mu_2)$, ассоциированную с ней, можно обратить.

Для любого θ_k ($0 \leq \theta_k \leq 2\pi$), ($k=1, 2$) $\rho_k > \frac{1}{2}$ ($k=1, 2$) плоскость комплексного переменного z_k ($k=1, 2$), разрезанную по лучу $\arg z_k = \theta_k + \pi$, обозначим через $\Delta\theta_k$ ($k=1, 2$). Рассмотрим в $\Delta\theta_k$ ту ветвь функции $(e^{-i\theta_k} z_k)^{\rho_k}$, которая принимает вещественные положительные значения на луче $\arg z_k = \theta_k$.

Полагая теперь, что $\rho_k > \frac{1}{2}$, ($k=1, 2$), определим область $D_k(\theta_k, \sigma_k, \rho_k)$, ($k=1, 2$), как множество тех точек z_k из $\Delta\theta_k$, для которых выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} (z_k e^{-i\theta_k})^{\rho_k} > \sigma_k. \quad (6.8)$$

Область D_k ($\theta_k, \sigma_k, \rho_k$), очевидно, содержит точки луча $\arg z_k = \theta_k$, удовлетворяющие условию $|z_k| > \sigma_k^{1/\rho_k}$.

Теорема 6. Если $z_k \in D_k$ ($\theta_k, \sigma_k, \rho_k$) ($k = 1, 2$), то имеет место интегральное представление

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) &= \rho_1 \rho_2 (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} (z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2} z_1^{-1} z_2^{-1} \times \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty (t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2} (z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}} \times \\ &\times t_1^{\mu_1 \rho_1 - 1} t_2^{\mu_2 \rho_2 - 1} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ фиксировано и

$$\varepsilon < \max \left\{ \frac{\delta}{2\sigma_1^{1/\rho_1}}, \frac{\delta}{2\sigma_2^{1/\rho_2}} \right\}, \text{ тогда из (6.4')} \text{ следует, что}$$

$$\begin{aligned} |b_{nm}| &< [\sigma_1^{1/\rho_1} (1 + \varepsilon)]^n [\sigma_2^{1/\rho_2} (1 + \varepsilon)]^m < \\ &< \left(\sigma_1^{1/\rho_1} + \frac{\delta}{2} \right)^n \left(\sigma_2^{1/\rho_2} + \frac{\delta}{2} \right)^m, \text{ при } n + m \geq N_0. \end{aligned}$$

Следовательно, при некотором $c > 0$

$$|b_{nm}| < c \left(\sigma_1^{1/\rho_1} + \frac{\delta}{2} \right)^n \left(\sigma_2^{1/\rho_2} + \frac{\delta}{2} \right)^m, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.10)$$

Если $z_k \in D_k$ ($\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k$) ($k = 1, 2$), то из (6.8) и (6.3) получим, что при $0 \leq t_k < +\infty$, ($k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} &|f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2} (z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}}| \leq \\ &\leq \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{|b_{nm}| t_1^n t_2^m}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} e^{-(\sigma_1 + 2\delta)t_1^{\rho_1} - (\sigma_2 + 2\delta)t_2^{\rho_2}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Но максимум функции $r^k e^{-(\sigma + \delta)r^{\rho}}$ ($0 \leq r < \infty$) достигается при $r = [k\rho^{-1}(\sigma + \delta)^{-1}]^{1/\rho}$, следовательно,

$$\begin{aligned} &|f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{i\theta_1})^{\rho_1} - t_2^{\rho_2} (z_2 e^{-i\theta_2})^{\rho_2}}| \leq \\ &\leq e^{-\delta t_1^{\rho_1} - \delta t_2^{\rho_2}} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{|b_{nm}|}{\Gamma(\mu_1 + n\rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + m\rho_2^{-1})} \times \\ &\times \frac{\left(n\rho_1^{-1} e^{-\frac{1}{\rho_1}} \right)^n \left(m\rho_2^{-1} e^{-\frac{1}{\rho_2}} \right)^m}{(\sigma_1 + \delta)^{n\rho_1} (\sigma_2 + \delta)^{m\rho_2}}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Из (6.10) и (6.12) следует, что

$$\left| f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1}} - t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} \right| \leq e^{-\delta} t_1^{\rho_1 - \delta \rho_1}, \quad A, \quad 0 \leq t_1, t_2 < +\infty, \quad (6.13)$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Из (6.13) следует, что при $z_k \in D_k(\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k)$ допустимо почленное интегрирование ряда

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{b_{nm} (e^{-i\theta_1} t_1)^n (e^{-i\theta_2} t_2)^m t_2^{m+\mu_2 \rho_2 - 1}}{\Gamma(\mu_1 + n \rho_1^{-1}) \Gamma(\mu_2 + m \rho_2^{-1})} e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1}} - t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} = f(t_1 e^{-i\theta_1}, t_2 e^{-i\theta_2}) e^{-t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1}} - t_1^{\rho_1} (z_1 e^{-i\theta_1})^{\rho_1} \quad (6.14)$$

в области $0 \leq t_1 < +\infty, 0 \leq t_2 < +\infty$.

Заметив, что при $\text{Re} w > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-w t^k} t^{k+\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}{\rho w^{\mu + k\rho^{-1}}},$$

почленным интегрированием ряда (6.14) получим формулу (6.9) при $z_k \in D_k(\theta_k, \sigma_k + 2\delta, \rho_k)$ ($k = 1, 2$), где $\delta > 0$ — любое число. Но так как $\delta > 0$ можно взять сколь угодно малым, то отсюда и следует утверждение теоремы.

В последующем результаты теорем 5 и 6 будут применены для получения параметрических представлений для целых функций порядка $(\rho_1, \rho_2) > 0$ и типа $(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, подчиненных дополнительным условиям интегрируемости в квадрате модуля по определенным лучам, лежащим в плоскостях z_1 и z_2 .

В заключение автор считает приятным долгом выразить признательность проф. Б. Я. Левину за ценные замечания, сделанные им при ознакомлении с рукописью этой работы.

Сектор математики и механики АН Армянской ССР
Ереванский государственный университет
им. В. М. Мологова

Поступило 2 VI 1955

Մ. Մ. Ջրբաղյան

ՀԱՏ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ
ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում կառուցվում է շատ փոփոխականներից կախված ամբողջ ֆունկցիաների մի հատուկ դասի տեսությունը և արվում է նրանց ինտեգրալ ներկայացումը:

Շարադրանքը հեշտացնելու նպատակով արդյունքները բերվում են կրկու փոփոխականի ամբողջ ֆունկցիաների համար:

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян

О температурных напряжениях в прямоугольных
бетонных блоках

Задача о температурных напряжениях в бетонных блоках имеет существенное значение в связи с вопросами определения размеров блока при бетонировании.

Впервые этот вопрос был рассмотрен Г. Н. Масловым [1] на основе методов теории упругости. В дальнейшем эта работа была продолжена А. Э. Басевичем [2] и Г. С. Шапиро [2], Ю. А. Нилендером [3] и самим Г. Н. Масловым [4—5].

Во всех этих исследованиях вопрос о влиянии размеров блока на температурные напряжения рассматривался без учета ползучести бетона и при допущении жесткой заделки блока с основанием.

В работе С. В. Александровского [6] приводится решение этой задачи с учетом ползучести бетона, при условии отсутствия горизонтальных перемещений вдоль линии контакта блока с основанием.

Следует отметить, что допущение об отсутствии горизонтальных перемещений по линии контакта бетонного блока с основанием не отражает действительной картины температурных напряжений в бетонных блоках, так как в этом случае не учитываются должным образом силы сопротивления $\tau(x)$, возникающие вдоль плоскости контакта блока с основанием вследствие его продольных перемещений и характера связности с основанием.

Такая постановка задачи не может ответить на вопрос — как определить рациональную длину блока, в котором возникают наименьшие температурные напряжения, если задана высота блока, так как значения максимальных температурных напряжений при таком решении получаются практически постоянными и равными $E\alpha T$, независимо от геометрических размеров блока.

Вместе с тем наблюдения, произведенные над существующими бетонными блоками, показывают, что в действительности напряжения существенно зависят от размеров блока, при этом они значительно меньше, чем напряжения, найденные в результате такого расчета.

В недавно опубликованной работе Б. Л. Абрамян [7] дан решение этой задачи, пользуясь линейной теорией ползучести бетона и предположении, что по линии контакта бетонного блока с основанием действуют постоянные тангенциальные напряжения τ , величины ко-

торых не зависят от термонапряженного состояния блока и равны максимальному значению сопротивления бетона сцеплению.

В работе А. Ю. Ишлинского и А. В. Думанского [8] рассматривается задача о растягивании упругой полосы с приклеенным к ней хрупким слоем из материала типа глины или гипса, когда между этими двумя связывающими слоями действуют касательные напряжения, величины которых в каждой точке контакта пропорциональны относительным перемещениям этих точек.

В настоящей работе рассматривается задача о термонапряженном состоянии прямоугольного бетонного блока, расположенного на сплошном основании и находящегося под действием стационарной температуры, с учетом ползучести бетона и силы сопротивления $\tau(x)$, действующей вдоль плоскости контакта блока с его основанием. При этом величина и закон распределения этих сил вдоль поверхности контакта блока с основанием зависят как от термонапряженного состояния его, так и от характера связности нижней грани блока с основанием.

В главе I дается решение термоупругой задачи для такого блока, основываясь на гипотезе плоских сечений. Глава II посвящена исследованию термонапряженного состояния такого блока без гипотезы плоских сечений как в стадии его упругой работы, так и с учетом ползучести бетона.

На основании результатов, полученных в этой главе, указываются пределы применимости гипотезы плоских сечений в данной задаче, в зависимости от геометрических размеров блока.

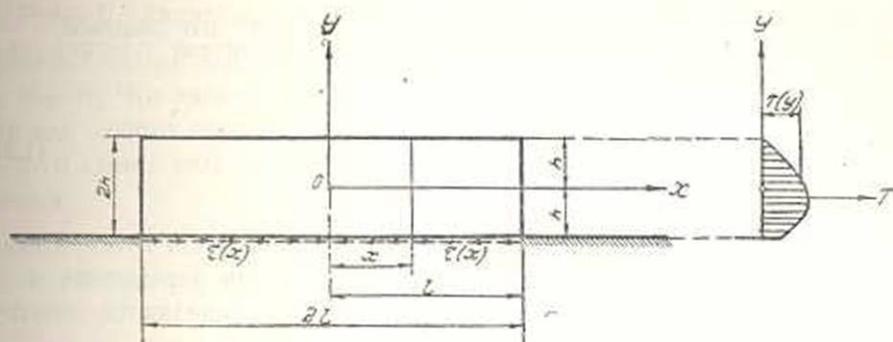
ГЛАВА I

НАЧАЛЬНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ БЕТОННОГО БЛОКА

§ 1. Постановка задачи и основные предпосылки

Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ своей продольной стороной $y = -h$ (фиг. 1) лежит на сплошном основании и находится под воздействием стационарной температуры T , зависящей только от координаты y . Ширину блока принимаем равной единице.

Основание такого блока будет оказывать сопротивление его продольным температурным перемещениям. Это сопротивление будет выражаться появлением силы сопротивления, действующей по нижней грани блока $y = -h$ в виде горизонтальных тангенциальных напряжений $\tau(x)$, которую будем называть *силой связности блока с основанием*. Очевидно, что величина и закон распределения этих сил вдоль оси x будут обуславливаться поверхностной структурой этих двух тел и характером их контакта.



Фиг. 1.

Однако современная физика не дает какой-нибудь законченной теории поверхностной структуры твердого тела.

Поэтому в настоящем параграфе при решении задачи о термонапряженном состоянии бетонного блока будем исходить из предположения, что между силами связности $\tau(x)$ в данной точке контакта блока с соответствующими перемещениями $u(x)$ имеет место зависимость, которая в общем случае может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) &= f[u(x)] \quad \text{при } u \leq u_*, \\ \tau(x) &= \tau_* \quad \text{при } u > u_*. \end{aligned} \quad (1.1)$$

причем $\tau_* = f[u_*]$ и $f(0) = 0$.

В случае, если $u_* = u_b$, то $\tau = f[u_b] = \tau_0 = \text{const}$.

Здесь

$u(x)$ — продольные перемещения точек нижней грани блока;

$f[u]$ — некоторая, определяемая из опыта, функция от u , характеризующая связь между силами связности τ и соответствующими перемещениями u ;

τ_* и u_* — значения силы связности τ и перемещения u , при которых в данной точке контакта блока с основанием наступает предельное состояние;

u_b — значение перемещения, при котором наступает разрушение связности в данной точке контакта блока с основанием.

Таким образом, предельное состояние в данной точке контакта блока с основанием, описываемое соотношением (1.1), характеризуется тем, что, когда в этой точке величина силы связности τ достигает некоторого предельного значения τ_* , то, несмотря на дальнейший рост продольных перемещений u ($u < u_b$), в этой точке τ остается постоянным, равным τ_* .

Вначале рассмотрим термонапряженное состояние таких блоков, для которых имеет место соотношение $\frac{h}{l} \leq \frac{1}{3}$, обычно встречающееся в гидротехническом строительстве.

Положим также, что $u \leq u_0$ для всех значений $0 \leq x \leq l$. Тогда, как будет показано далее, справедлива гипотеза плоских сечений, выражающаяся зависимостью [3]

$$\frac{d\bar{u}(x, y)}{dx} = A(x) + B(x)y, \quad (1.2)$$

где

$u(x, y)$ — горизонтальные перемещения произвольной точки блока, $A(x)$ и $B(x)$ — некоторые, пока неизвестные, функции переменной x .

Нормальные напряжения в блоке $\sigma_x(x, y)$ определяются зависимостью

$$\sigma_x(x, y) = E \frac{d\bar{u}}{dx} - E\alpha T(y). \quad (1.3)$$

Здесь

E — модуль мгновенной деформации бетона,

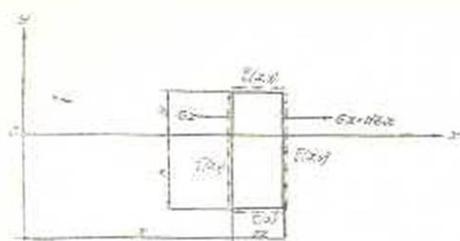
$T(y)$ — температурная функция.

Если обозначить тангенциальные напряжения в произвольной точке блока (фиг. 1) через $\bar{\tau}(x, y)$, то очевидно будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(x, -h) &= \tau(x), \\ \bar{\tau}(x, h) &= 0, \\ \bar{u}(x, -h) &= u(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

§ 2. Уравнения задачи и определение напряжения

Рассмотрим условия равновесия элемента блока, расположенного между произвольным поперечным сечением x и торцевым сечением $x=l$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

Имеем

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) dy + \int_x^l \tau(x) dx = 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) y dy - h \int_x^l \tau(x) dx = 0,$$

$$\int_{-h}^{+h} \bar{\tau}(x, y) dy = 0 \quad \text{для всех значений } x. \quad (2.2)$$

Или, дифференцируя равенства (2.1) по x , получим

$$\frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) dy - \tau(x) = 0,$$

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, y) y dy + \tau(x) = 0. \quad (2.3)$$

Заметим, что уравнения (2.3) выражают условие равновесия бесконечно малого элемента блока, расположенного между сечениями x и $x + dx$. Что касается условия (2.2), то оно выполняется тождественно для любого значения x .

В самом деле, из условия равновесия элемента блока (фиг. 2) имеем

$$\bar{\tau}(x, y) = \tau(x) - \frac{d}{dx} \int_{-h}^y \sigma_x dy. \quad (2.4)$$

Пользуясь соотношениями (2.3), выражение (2.4) для $\bar{\tau}(x, y)$ приведем к виду

$$\bar{\tau}(x, y) = - \frac{d}{dx} \int_h^y \sigma_x(x, y) dy, \quad (2.5)$$

который удовлетворяет граничным условиям (1.4).

Обозначим величину перерезывающей силы в произвольном поперечном сечении блока через Q_x .

Тогда будем иметь

$$Q_x = - \int_{-h}^{+h} \bar{\tau}(x, y) dy \quad (2.6)$$

или, согласно (2.5), находим

$$Q_x = \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} dy \int_h^y \sigma_x(x, \xi) d\xi. \quad (2.7)$$

Меняя порядок интегрирования в (2.7), имеем

$$Q_x = \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) [h + \xi] d\xi \quad (2.8)$$

или

$$Q_x = h \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) d\xi + \frac{d}{dx} \int_{-h}^{+h} \sigma_x(x, \xi) \xi d\xi. \quad (2.9)$$

Пользуясь уравнениями равновесия (2.3), получим

$$Q_x = h\tau(x) - h\tau(x) = 0. \quad (2.10)$$

Таким образом, условие (2.2) выполняется тождественно для всех значений $0 \leq x \leq l$.

Переходим к определению $\sigma(x)$, $\sigma_x(x, y)$ и $\bar{\tau}(x, y)$. Для этого предварительно напишем выражение для $\sigma_x(x, y)$ в следующем виде

$$\sigma_x(x, y) = E[A(x) + B(x)y] - E\alpha T(y). \quad (2.11)$$

Подставляя это выражение для $\sigma_x(x, y)$ в (2.1), получим

$$2EhA(x) - Ez \int_{-h}^{+h} T(y) dy + \int_x^l \tau(x) dx = 0 \quad (2.12)$$

и

$$\frac{2Eh^2}{3} B(x) - Ez \int_{-h}^{+h} T(y)y dy - h \int_x^l \tau(x) dx = 0$$

или

$$A(x) = -\frac{1}{2Eh} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy,$$

$$B(x) = \frac{3}{2Eh^2} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{3z}{2h^2} \int_{-h}^{+h} T(y)y dy. \quad (2.13)$$

С другой стороны, из (1.2) имеем

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x) - hB(x). \quad (2.14)$$

Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (2.13) в (2.14), получим

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{2}{Eh} \int_x^l \tau(x) dx + \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left[1 - \frac{3y}{h} \right] dy. \quad (2.15)$$

Дифференцируя (2.15) по x , находим

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{2}{Eh} \tau(x). \quad (2.16)$$

Пользуясь соотношениями (1.1) и (2.16), для определения $u(x)$ получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{2}{Eh} f[u] \quad (2.17)$$

или

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{2}{Eh} f[u(x)] = 0. \quad (2.18)$$

Краевые условия для $u(x)$ в силу (1.1) и (2.15) будут следующие:

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (2.19)$$

$$u'(x) = \frac{z}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left[1 - \frac{3y}{h} \right] dy \quad \text{при} \quad x = l.$$

Таким образом, решение задачи о термонапряженном состоянии данного блока свелось к определению функции $u(x)$ из нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (2.18) с крайними условиями (2.19).

Пользуясь уравнением (2.16) и условиями (2.19), выражения (2.13) для $A(x)$ и $B(x)$ можно привести к виду

$$A(x) = -\frac{1}{4} \int_x^l \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^h T(y) dy,$$

$$B(x) = \frac{3}{4h} \int_x^l \frac{d^2 u}{dx^2} dx + \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^h T(y) y dy, \quad (2.20)$$

или

$$A(x) = -\frac{1}{4} [u'(l) - u'(x)] + \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^h T(y) dy,$$

$$B(x) = \frac{3}{4h} [u'(l) - u'(x)] + \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^h T(y) y dy. \quad (2.21)$$

Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (2.21) в (2.11) и пользуясь соотношениями (2.19), для $\sigma_x(x, y)$ получим следующую формулу

$$\sigma_x(x, y) = \frac{3E}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) u'(x) + \right.$$

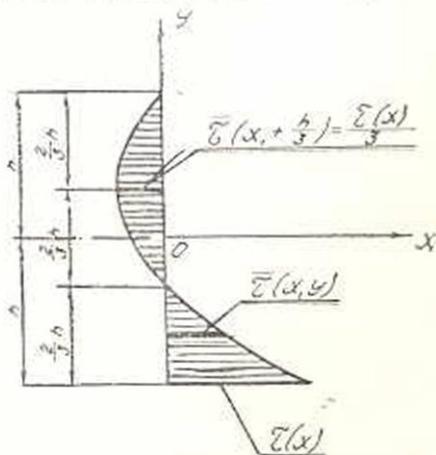
$$\left. + \frac{\alpha}{2h} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \int_{-h}^h T(y) \left(1 + \frac{y}{h} \right) dy \right\} - E\alpha T(y). \quad (2.22)$$

Подставляя значения $\sigma_x(x, y)$ из (2.22) в (2.5), после интегрирования и некоторых преобразований получим для тангенциального напряжения $\tau(x, y)$ следующее выражение

$$\bar{\tau}(x, y) = -\frac{[u(x)]}{2h} \left[(y-h) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2h} (y^2 - h^2) \right]. \quad (2.23)$$

Как видно из соотношения (2.23), тангенциальные напряжения $\bar{\tau}(x, y)$ по толщине блока изменяются по параболическому закону (фиг. 3), причем наибольшее их значение получается на нижней грани, у торцов блока.



Фиг. 3.

В середине блока, т. е. при $x = 0$, $\tau(0, x) = 0$, так как $f(0) = 0$.

Прежде чем перейти к приложению полученных здесь результатов к конкретным задачам по определению температурных напряжений в бетонных блоках, отметим, что в дальнейшем связь между интенсивностью сил связности τ и соответствующими перемещениями u , определяемую зависимостью (1.1), будем называть характеристикой сил связности.

§ 3. Температурные напряжения в бетонном блоке при линейной характеристике сил связности

Положим, что сила связности $\tau(x)$, действующая в данной точке контакта блока с основанием, пропорциональна соответствующему перемещению $u(x)$ и выражается зависимостью

$$\tau(x) = \beta[u] = \beta u(x), \quad (3.1)$$

где

β — коэффициент пропорциональности, характеризующий меру связности данного бетонного блока с основанием, зависящий от их поверхностной структуры и упругих свойств бетона, с размерностью $кг/см^2$.

В этом параграфе будем полагать, что $\tau(l) \leq \tau_s$ или $u(l) \leq \frac{\tau_s}{\beta}$.

Это соответствует такому термонапряженному состоянию бетонного блока, при котором только его крайевые точки ($x = l$, $y = -h$) могут находиться в предельном состоянии.

Тогда, согласно (2.17), дифференциальное уравнение для определения $u(x)$ примет вид

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2\beta}{Eh} u(x) = 0 \quad (3.2)$$

или

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \lambda^2 u(x) = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{2\beta}{Eh}, \quad (3.4)$$

при крайних условиях

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

и

$$u'(x) = \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy \quad \text{при} \quad x = l. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.3) есть

$$u(x) = c_1 \operatorname{sh} \lambda x + c_2 \operatorname{ch} \lambda x. \quad (3.6)$$

В силу условия (3.5) имеем:

$$c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{\alpha}{2h\lambda \operatorname{ch}\lambda l} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy. \quad (3.7)$$

Подставляя значения c_1 и c_2 из (3.7) в (3.6), получим

$$u(x) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \lambda x}{2\lambda h \operatorname{ch} \lambda l} \int_{-h}^{+h} T(y) \left(1 - \frac{3y}{h}\right) dy. \quad (3.8)$$

Введем обозначения

$$\Omega_T = \int_{-h}^{+h} T(y) dy, \quad S_T = \int_{-h}^{+h} T(y) y dy. \quad (3.9)$$

Тогда

$$u(x) = \frac{\alpha \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l} \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right]. \quad (3.10)$$

Очевидно, что Ω_T представляет площадь, ограниченную температурной кривой в пределах толщины блока, а величина S_T — статический момент этой площади относительно срединной плоскости блока.

Для нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$, согласно (3.10) и (2.22), получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) = & \frac{3E\alpha}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{y}{h} \right) \left(\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right) \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} + \right. \\ & \left. + \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left(\frac{\Omega_T}{2h} + \frac{S_T}{2h^2} \right) \right\} - E\alpha T(y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для тангенциальных напряжений $\bar{\tau}(x, y)$ из соотношения (2.23) имеем:

$$\bar{\tau}(x, y) = - \frac{\beta u(x)}{2h} \left[(y-h) - \frac{3}{2h} (y^2 - h^2) \right] \quad (3.12)$$

или, подставляя значения $u(x)$ из (3.8) в (3.12), приведем его к виду

$$\bar{\tau}(x, y) = \frac{3\alpha\beta \operatorname{sh} \lambda x}{4\lambda h \operatorname{ch} \lambda l} (y-h) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right]. \quad (3.13)$$

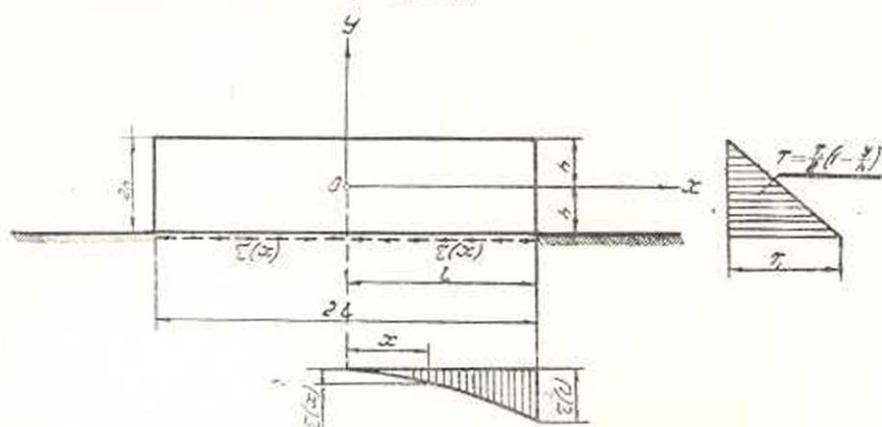
Горизонтальное перемещение $\bar{u}(x, y)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & \frac{\alpha}{4\lambda} \left(1 - 3 \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} - 3 \frac{S_T}{2h^2} \right] \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} + \\ & + \frac{3\alpha x}{4} \left(1 + \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\Omega_T}{2h} + \frac{S_T}{2h^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

В качестве конкретного приложения результатов, полученных в настоящем параграфе, рассмотрим задачу об определении температурных напряжений в прямоугольном бетонном блоке при линейном

распределении температуры по толщине блока с учетом сил связности $\tau(x)$, действующих в плоскости его контакта с основанием.

1°. Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ (фиг. 4) лежит на сплошном основании, при полной свободе перемещений торцевых сечений, и подвергается воздействию температуры, изменяющейся по линейному закону.



Фиг. 4.

$$T(y) = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right). \quad (3.15)$$

Так как в плоскости контакта блока с основанием действуют силы связности, то он будет находиться в термонапряженном состоянии.

Из соотношений (3.9) и (3.11) для нормальных напряжений $\sigma_x(x, y)$ получим:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{3\alpha ET_1}{4} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} - 1 \right]. \quad (3.16)$$

Тангенциальные напряжения $\bar{\tau}(x, y)$ и $\tau(x)$, согласно (3.9) и (3.14), будут

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(x, y) &= \frac{3\alpha\beta T_1 \operatorname{sh} \lambda x}{4\lambda h \operatorname{ch} \lambda l} (y - h) \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right), \\ \tau(x) &= \bar{\tau}(x, -h) = \frac{\alpha\beta T_1 \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Для перемещения $u(x)$ в силу (3.9) и (3.10) имеем

$$u(x) = \frac{\alpha T_1 \operatorname{sh} \lambda x}{\lambda \operatorname{ch} \lambda l}. \quad (3.18)$$

Из соотношения (3.16) следует, что наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения получаются вдоль плоскости контакта блока с основанием:

$$\sigma_x(x, -h) = -E\alpha T_1 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l} \right). \quad (3.19)$$

Из формулы (3.19) видно, $\sigma_x(x, -h)$ знакопостоянно по всей длине блока и достигает максимума в середине блока, т. е. при $x=0$,

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = -E\alpha T_1 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda l}\right), \quad (3.20)$$

и по мере приближения к торцам блока $\sigma_x(x, -h)$ убывает и стремится к нулю при $x=l$

$$\sigma_x(l, -h) = 0. \quad (3.21)$$

При $y=h$, т. е. у верхней грани блока, нормальные напряжения $\sigma_x(x, h)$ обратного знака, но также знакопостоянны по длине блока и равны

$$\sigma_x(x, h) = \frac{E\alpha T_1}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda l}\right). \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что нормальные напряжения на верхней грани блока достигают максимума также в середине блока, т. е. при $x=0$, и равны

$$\sigma_{x \max}(x, h) = \sigma_x(0, h) = \frac{E\alpha T_1}{2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda l}\right) \quad (3.23)$$

и по мере приближения к торцам блока убывают, причем, когда $x=l$,

$$\sigma_x(l, h) = 0. \quad (3.24)$$

По толщине блока $\sigma_x(x, y)$ меняется по линейному закону, причем, согласно (3.16), нейтральная плоскость, где $\sigma_x(y, x) = 0$, находится на расстоянии $y = \frac{h}{3}$ от срединной плоскости блока.

Из полученных соотношений (3.19), (3.20), (3.22) и (3.23) следует, что при охлаждении блока, т. е. когда $T_1 < 0$, по всей плоскости основания блока возникают растягивающие напряжения, причем они достигают наибольшего значения, определяемого формулой (3.20), в середине блока, а наименьшего, равного нулю, — у его торцов.

У верхней грани блока возникают сжимающие напряжения, наибольшие значения которых, определяемые формулой (3.23), также достигаются в середине блока, и по мере приближения к торцам блока они уменьшаются, принимая у торцов значения, равные нулю.

При нагревании блока имеет место обратная картина, т. е. у верхней грани блока возникают растягивающие напряжения, а у нижней — сжимающие.

Тангенциальные напряжения $\bar{\tau}(x, y)$, согласно (3.17), достигают наибольшего значения у торцов блока при $x=l$ и $y=-h$,

$$\bar{\tau}_{\max}(x, -h) = \tau(l) = \frac{\alpha \dot{p} T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l \quad (3.25)$$

и по мере приближения к середине блока они, монотонно убывая, стремятся к нулю при $x \rightarrow 0$.

Максимальные значения перемещений $u(x)$ также имеют место у торцов блока и в силу (3.18) равны

$$u_{\max}(x) = u(l) = \frac{\alpha T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l. \quad (3.26)$$

2°. Рассмотрим, как изменяются нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$ при охлаждении блока в зависимости от изменения его геометрических размеров.

Для этого предварительно перепишем формулы (3.19) и (3.20) в следующей форме

$$\sigma_x(x, -h) = E\alpha T_1 \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}} \right], \quad (3.27)$$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = E\alpha T_1 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}} \right].$$

где

T_1 — абсолютное значение температуры нижней грани блока.

Из формул (3.27) следует, что:

а) с увеличением длины блока $2l$, при сохранении его высоты $2h = \text{const}$ и прочих равных условиях, нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$ растут;

б) с увеличением высоты блока $2h$ при $2l = \text{const}$, нормальные напряжения в блоке убывают и, наоборот, при уменьшении высоты они возрастают.

Таким образом, в длинных блоках температурные напряжения значительно больше, чем в коротких и высоких блоках. В длинных блоках значения максимального нормального напряжения $\sigma_{x \max}(x, -h)$ могут быть определены с достаточной точностью по формуле

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) \approx E\alpha T_1 \left[1 - 2 e^{-\sqrt{\frac{2\beta}{E}} \cdot \frac{l}{\sqrt{h}}} \right], \quad (3.28)$$

а в коротких блоках

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) \approx \frac{E\alpha T_1}{1 + \frac{Eh}{2\beta l^2}}. \quad (3.29)$$

Из соотношений (3.27) и (3.28) следует, что при увеличении длины блока нормальные напряжения в нем растут гораздо интенсивнее, чем при соответствующем уменьшении высоты блока h .

в) при сохранении постоянного отношения длины блока к его высоте $\frac{l}{h} = \text{const}$, максимальное нормальное напряжение $\sigma_x(0, -h)$

возрастает при увеличении высоты блока $2h$ и убывает при его уменьшении. Таким образом, в геометрически подобных блоках максимальное нормальное напряжение $\sigma_x(0, -h)$ больше у высоких блоков.

Заметим, что в достаточно длинных блоках нормальные напряжения $\sigma_x(x, -h)$, как видно из соотношения (3.19), сохраняют значительную величину на большом протяжении длины блока и только близ торцов начинают быстро убывать, стремясь к нулю при $x \rightarrow l$.

Тангенциальные напряжения при охлаждении блока в плоскости его контакта с основанием, согласно (3.17), могут быть представлены в виде

$$\tau(x) = \frac{E\alpha T_1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{x}{h}}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}}. \quad (3.30)$$

Максимальное тангенциальное напряжение $\tau_{\max}(x)$ получается у торцов блока при $x = l$:

$$\tau_{\max}(x) = \tau(l) = \frac{E\alpha T_1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}} \cdot \frac{l}{h}. \quad (3.31)$$

Для достаточно длинных блоков, как следует из соотношения (3.31),

$$\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\beta h}{E}}, \quad (3.32)$$

а для коротких и высоких блоков

$$\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1} \approx \frac{\beta l}{E}. \quad (3.33)$$

В случае нагревания блока аналогичная картина распределения имеет место для $\sigma_x(x, h)$ и $\sigma_x(0, h)$.

Сделаем некоторые предположения по отношению к коэффициенту β , определяющему меру связности бетонного блока с основанием и характер их контакта.

При идеально податливом основании, т. е. когда силы связности между бетонным блоком и его основанием отсутствуют, $\beta = 0$ и, следовательно, $\lambda = 0$.

В этом случае имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= 0, \\ \bar{\tau}(x, y) &= \tau(x) = 0, \\ \bar{u}(x, y) &= \frac{\alpha T_1 x}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right), \\ u(x) &= \alpha T_1 x. \end{aligned} \quad (3.34)$$

При больших значениях β , а следовательно и λ , будем иметь

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, -h) &= Ez T_1 [e^{-\lambda(l-x)} - 1], \\ \tau(x) &= \frac{\alpha\beta T_1}{\lambda} e^{-\lambda(l-x)}, \\ u(x) &= \frac{\alpha T_1}{\lambda} e^{-\lambda(l-x)}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

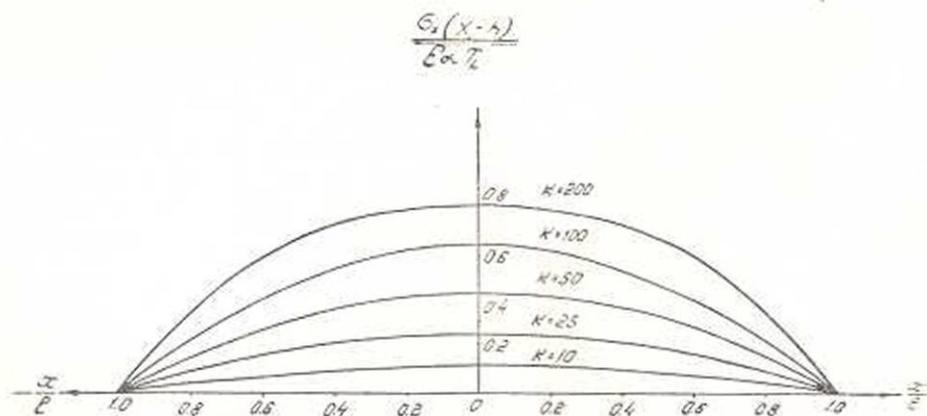
Когда горизонтальные перемещения u вдоль линии контакта блока с основанием отсутствуют, т. е. $\beta = \lambda = \infty$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, -h) &= -Ez T_1, \\ \tau(x) &= 0, \\ u(x) &= 0\end{aligned}$$

для всех значений x , за исключением $x = l$.

Для иллюстрации картины распределения нормальных и касательных температурных напряжений вдоль основания бетонного блока ниже, в таблицах 1, 2 и 3, приводятся соответствующие значения напряжений $\sigma_x(0, -h)$, $\sigma_x(0, h)$, а также $\tau(l)$, для различных значений коэффициента β и отношений $\frac{h}{l}$.

На фигуре 5 показана эюра распределения нормального напряжения $\sigma_x(0, -h)$ по длине блока.



Фиг. 5.

Таблица 1

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_x(0, -h)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.27), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
	E	$2\beta h$					
10	200		0,141	0,084	0,060	0,039	0,022
25	80		0,299	0,189	0,138	0,092	0,054
50	40		0,477	0,325	0,248	0,171	0,103
100	20		0,675	0,511	0,409	0,299	0,189
200	10		0,842	0,707	0,605	0,477	0,326

Таблица 2

Значения температурных напряжений $\frac{\sigma_x(0, h)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.23), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
	E	$2\beta h$					
10	200		0,070	0,042	0,030	0,019	0,011
25	80		0,150	0,095	0,069	0,046	0,027
50	40		0,238	0,163	0,124	0,086	0,052
100	20		0,338	0,256	0,205	0,150	0,095
200	10		0,421	0,354	0,303	0,239	0,163

Таблица 3

Значения температурных напряжений $\frac{\tau(l)}{E\alpha T_1}$, вычисленных по формуле (3.31), при $E = 2 \cdot 10^5$ кг/см², $2h = 1,00$ м

β	$\frac{E}{2\beta h}$ \diagdown $\frac{h}{l}$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
	E	$2\beta h$					
10	200		0,018	0,014	0,012	0,01	0,007
25	80		0,040	0,033	0,028	0,024	0,018
50	40		0,067	0,058	0,052	0,044	0,035
100	20		0,106	0,097	0,090	0,080	0,065
200	10		0,156	0,151	0,145	0,135	0,117

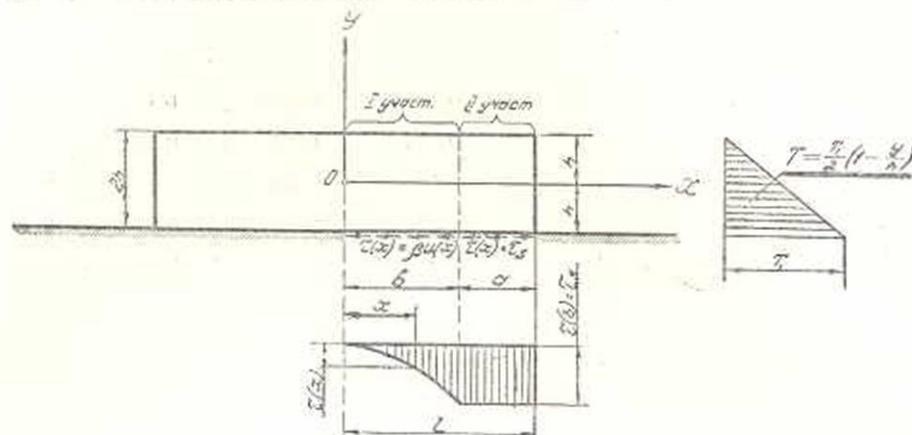
§ 4. Температурные напряжения в бетонном блоке при линейной характеристике сил связности и наличии зоны предельного состояния

Пусть прямоугольный бетонный блок высотой $2h$ и длиной $2l$ подвергается температурному воздействию, которое для простоты

примем изменяющимся по линейному закону (фиг. 6)

$$T = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h} \right), \quad (4.1)$$

где T_1 — температура нижней грани блока $y = -h$.



Фиг. 6.

В предыдущем параграфе было показано, что если между силой связности $\tau(x)$ и соответствующим перемещением $u(x)$ в данной точке контакта блока с основанием существует линейная зависимость вида (3.1), то их наибольшее значение получается у краевых точек основания блока $x = \pm l$ и $y = -h$ и определяется формулами

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(x) = \tau(l) &= E\alpha T_1 \frac{\lambda h}{2} \operatorname{th} \lambda l, \\ u_{\max}(x) = u(l) &= \frac{\alpha T_1}{\lambda} \operatorname{th} \lambda l. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как видно из выражения (4.2), с повышением температуры T_1 значения $\tau(l)$ и $u(l)$ возрастают.

При некотором значении $T_1 = T_{1*}$ крайняя точка основания блока $x = l$ и $y = -h$ придет в предельное состояние, т. е. для этой точки будет иметь место условие

$$\tau_{\max}(x) = \tau(l) = \tau_*,$$

Очевидно, что значение $T_1 = T_{1*}$ определится, согласно (4.2), следующей формулой

$$T_{1*} = \frac{2\tau_*}{E\alpha\lambda h} \operatorname{cth} \lambda l, \quad (4.3)$$

Таким образом, при $T_1 \ll T_{1*}$ между силой связности $\tau(x)$ и соответствующим перемещением $u(x)$ имеет место зависимость

$$\tau(x) = \beta u(x), \quad (4.4)$$

справедливая для всех точек контакта блока с основанием, включая и $x=l$.

При дальнейшем увеличении T_1 , т. е. когда $T_1 > T_{1s}$, на линии контакта блока с основанием появится некоторый участок, все точки которого будут находиться в предельном состоянии.

Обозначим длину этого участка, которая подлежит определению, через a (фиг. 6).

Тогда, в силу (1.2), будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \beta u(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq b, \\ \tau(x) &= \tau_s \quad \text{при } b \leq x \leq l, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $a = l - b$.

Рассмотрим термонапряженное состояние I и II участков блока отдельно.

Уравнения равновесия для I участка блока будут

$$E \int_{-h}^{+h} [A(x) + B(x)y] dy - E\alpha \int_{-h}^{+h} T(y) dy + \int_x^b \tau(x) dx + \tau_s(l-b) = 0, \quad (4.6)$$

$$E \int_{-h}^{+h} [A(x) + B(x)y] y dy - E\alpha \int_{-h}^{+h} T(y) y dy - h \int_x^b \tau(x) dx - \tau_s h(l-b) = 0,$$

или, после интегрирования, находим

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy - \frac{1}{2Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{\tau_s(l-b)}{2Eh}, \\ B(x) &= \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^{+h} T(y) y dy + \frac{3}{2Eh^2} \int_x^b \tau(x) dx + \frac{3\tau_s(l-b)}{2Eh^2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для второго участка будем иметь

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\alpha}{2h} \int_{-h}^{+h} T(y) dy - \frac{\tau_s(l-x)}{2Eh}, \\ B(x) &= \frac{3\alpha}{2h^2} \int_{-h}^{+h} T(y) y dy + \frac{3\tau_s(l-x)}{2Eh^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Подставляя значения $T = T(y) = \frac{T_1}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right)$ в соотношения (4.8),

после интегрирования получим

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\alpha T_1}{2} - \frac{\tau_s(l-x)}{2Eh}, \\ B(x) &= -\frac{\alpha T_1}{2h} + \frac{3\tau_s(l-x)}{2Eh^2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Таким образом, функции $A(x)$ и $B(x)$ в интервале $b \leq x \leq l$ полностью определяются уравнением (4.9). Чтобы определить значения этих функций в интервале $0 \leq x \leq b$, необходимо к уравнению (4.7) присоединить условие связности блока с основанием для этого участка, выражающееся зависимостью

$$\tau(x) = \beta u(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq b, \quad (4.10)$$

при этом

$$\begin{aligned} \tau(b) &= \beta u(b) = \tau_s, \\ \tau(0) &= u(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Тогда, согласно (4.7) и (4.1), будем иметь

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\alpha T_1}{2} - \frac{1}{2Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{\tau_s(l-b)}{2Eh}, \\ B(x) &= -\frac{\alpha T_1}{2h} + \frac{3}{2Eh^2} \int_x^b \tau(x) dx + \frac{3\tau_s(l-b)}{2Eh^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

С другой стороны, условия (4.10) можно представить в виде

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \beta [A(x) - hB(x)]. \quad (4.13)$$

Подставляя значения $A(x)$ и $B(x)$ из (4.12) в (4.13), находим

$$\frac{d\tau(x)}{dx} - \beta \left[\alpha T_1 - \frac{2}{Eh} \int_x^b \tau(x) dx - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right]. \quad (4.14)$$

Дифференцируя (4.14) по x , получим следующее дифференциальное уравнение для определения $\tau(x)$.

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - \lambda^2\tau(x) = 0, \quad (4.15)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{2\beta}{Eh} \quad \text{и} \quad 0 \leq x \leq b.$$

Краевые условия для $\tau(x)$, в силу (4.11) и (4.14), будут следующие

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(b) = \beta \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right]. \quad (4.16)$$

Решение уравнения (4.15) при условии (4.16) будет

$$\tau(x) = \frac{\beta}{\lambda} \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s(l-b)}{Eh} \right] \frac{\text{sh } \lambda x}{\text{ch } \lambda b}, \quad (4.17)$$

при $0 \leq x \leq b$.

Выражение (4.17) определяет закон распределения сил связности $\tau(x)$ на первом участке контакта блока с основанием. На втором участке контакта блока, т. е. когда $b \leq x \leq l$,

$$\tau(x) = \tau_s. \quad (4.18)$$

Пользуясь выражением (4.17) и условием $\tau(b) = \tau_s$, получим следующее трансцендентное уравнение для определения a , т. е. длины того участка контакта блока, все точки которого находятся в предельном состоянии.

$$\frac{\lambda \tau_s}{\beta} = \left(\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right) \operatorname{th} \lambda(l-a). \quad (4.19)$$

После того, как из уравнения (4.19) определено значение $a = l - b$, пользуясь соотношениями (4.12), (4.17) и (1.3), получим следующие выражения для нормальных напряжений

$$\sigma_x(x, -h) = E \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda x}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) - \frac{2\tau_s a}{h}, \quad (4.20)$$

когда $0 \leq x \leq b$ и

$$\sigma_x(x, -h) = -\frac{2\tau_s(l-x)}{h}, \quad (4.21)$$

при $b \leq x \leq l$.

Наибольшие нормальные напряжения $\sigma_{x \max}(x, -h)$ на первом участке блока будут при $x = 0$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(0, -h) = -E \left[\alpha T_1 - \frac{2\tau_s a}{Eh} \right] \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda b} \right) - \frac{2\tau_s a}{h}, \quad (4.22)$$

а на втором участке — при $x = b$

$$\sigma_{x \max}(x, -h) = \sigma_x(b, -h) = -\frac{2\tau_s a}{h}. \quad (4.23)$$

§ 5. Температурные напряжения в бетонном блоке при нелинейной характеристике сил связности

Положим, что сила сопротивления $\tau(x)$, действующая в данной точке контакта блока с основанием, и перемещение $u(x)$ связаны зависимостью

$$\tau(x) = f[u(x)]. \quad (5.1)$$

Будем полагать, что $\tau(l) \leq \tau_s$, а температура по толщине блока меняется по линейному закону (3.15).

Тогда температурные напряжения в бетонном блоке определятся через функцию $u(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= \frac{E}{4} \left(1 - \frac{3y}{h} \right) \left\{ u'(x) - \alpha T_1 \right\}, \\ \bar{\tau}(x, y) &= -\frac{f[u(x)]}{2h} \left\{ (y-h) - \frac{3}{2h}(y^2-h^2) \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где функция $u(x)$, согласно (2.18), определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2}{Eh} \{[u(x)]\} = 0 \quad (5.3)$$

с крайними условиями

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = \alpha T_1. \quad (5.4)$$

Такая постановка задачи предполагает, что известен вид нелинейной характеристики сил связности, который определяется из опыта и характеризует степень связности контакта блока с основанием.

Одновременно следует отметить, что даже в том случае, когда опытные кривые $\tau(x) = \{[u(x)]\}$ могут быть аппроксимированы с достаточной точностью степенной функцией или полиномом, то и тогда нахождение эффективного решения уравнения (5.3) с крайними условиями (5.4) связано с большими математическими трудностями.

Покажем это на простом примере.

Положим, что характеристика сил связности τ имеет нелинейность вида

$$\tau = \{[u]\} = \beta_1 u + \beta_2 u^3, \quad (5.5)$$

где β_1 и β_2 — некоторые параметры, подобранные так, чтобы соотношение (5.5) наилучшим образом описывало экспериментальные кривые $\tau \sim u$.

В этом случае дифференциальное уравнение (5.3) примет вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 u - \mu^2 u^3 = 0, \quad (5.6)$$

где введены обозначения

$$\lambda^2 = \frac{2\beta_1}{Eh} \quad \text{и} \quad \mu^2 = \frac{2\beta_2}{Eh}. \quad (5.7)$$

Для нахождения точного решения уравнения (5.6), удовлетворяющего крайним условиям (5.4), предварительно запишем его в форме

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \lambda^2 u^2 - \frac{\mu^2 u^4}{2} \right] = 0 \quad (5.8)$$

или

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2} + c_1. \quad (5.9)$$

Интегрируя, находим

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2}}} + c_2. \quad (5.10)$$

Замечая, что при $x = 0$ $u(0) = 0$, получим

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2}}} \quad (5.11)$$

Полученный эллиптический интеграл (5.11) может быть приведен к нормальному виду следующим образом [9]:

Введем обозначение

$$I = c_1 + \lambda^2 u^2 + \frac{\mu^2 u^4}{2} \quad (5.12)$$

Из уравнения $I = 0$ получим

$$u^2 = \frac{-\lambda^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\mu^2} \quad (5.13)$$

Пользуясь значениями (5.13), из (5.12) находим

$$I = \frac{\mu^2}{2} \left(u^2 - \frac{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\mu^2} \right) \left(u^2 - \frac{-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\mu^2} \right) \quad (5.14)$$

Подставляя значение I из (5.14) в (5.11), имеем

$$\frac{\mu}{\sqrt{2}} x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\mu^2} - u^2 \right) \left(\frac{-\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\mu^2} - u^2 \right)}} \quad (5.15)$$

или

$$cx = \int_0^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{(1 - u_1^2)(1 - k^2 u_1^2)}} \quad (5.16)$$

где введены обозначения

$$u_1 = \frac{\mu u}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \quad (5.17)$$

$$k^2 = \frac{\lambda^2 - \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}} \quad (5.18)$$

$$c = \frac{\mu c_1}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \quad (5.19)$$

Обращая интеграл (5.16) и пользуясь обозначениями (5.17)–(5.19) для функции $u(x)$, получим следующее выражение

$$u(x) = \frac{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}}{\mu} \operatorname{sn} \left(\frac{\mu \sqrt{c_1}}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} x \right) \quad (5.20)$$

Для определения постоянной c_1 воспользуемся краевым условием

$$u'(l) = \alpha T_1. \quad (5.21)$$

Дифференцируя (5.20) по x , из (5.21) для определения c_1 получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\alpha T_1 = V c_1 \operatorname{sn} \left(\frac{\mu V c_1}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \right) \operatorname{dn} \left(\frac{\mu V c_1}{\sqrt{-\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 - 2c_1 \mu^2}}} \right), \quad (5.22)$$

где $\operatorname{sn}(x)$, $\operatorname{cn}(x)$ и $\operatorname{dn}(x)$ — эллиптические функции Якоби, а λ и μ — известные параметры, определяемые соотношением (5.7).

Затруднения, которые возникают при применении полученных формул (5.20) и (5.22) к решению конкретных задач по определению температурных напряжений в прямоугольных бетонных блоках с нелинейной характеристикой сил связности, вызывают необходимость отыскания более эффективных приближенных способов решения уравнения (5.3).

Наиболее простой и естественный прием приближенного решения нелинейных уравнений вида (5.3) заключается в замене нелинейной характеристики прямолинейным отрезком или системой отрезков. Такой способ прямой линеаризации удобен тем, что с его помощью могут быть использованы те результаты, которые получаются при решении многих линейных задач. Способ прямой линеаризации использован в работах Я. Г. Пановко [10], Н. К. Куликова [11], Л. Г. Лойцанского [12], Ю. А. Голпа [13] и других при решении некоторых задач теории упругих колебаний.

Способ прямой линеаризации можно применить к уравнению (5.3) следующим образом [10]. Заменяем нелинейную характеристику $f(u)$ в интервале $0 \leq u \leq u(l)$ ее приближенной линейной характеристикой βu .

Коэффициент β подчиним условию минимума интегрального квадратичного отклонения, взвешенного по величине u . Это условие усиливает приближение при больших значениях u , что очень важно, так как при малых значениях $u(x)$ сила связности $\tau(x)$ также мала и не может сильно влиять на термонапряженное состояние блока.

Таким образом, ищем значение β из условия минимума интеграла

$$I = \int_0^{u(l)} \{ (f[u] - \beta u) u \}^2 du, \quad (5.23)$$

т. е. определяем β из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^{u(l)} \{ (f[u] - \beta u) u \}^2 du = 0 \quad (5.24)$$

или
$$\beta = \frac{5}{u^5(l)} \int_0^{u(l)} f(u) u^5 du, \quad (5.25)$$

После того, как величина параметра β определена, задача сводится к решению линейного уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda^2 u = 0 \quad (5.26)$$

с крайними условиями (5.4), которое было подробно рассмотрено в предыдущих параграфах настоящей главы.

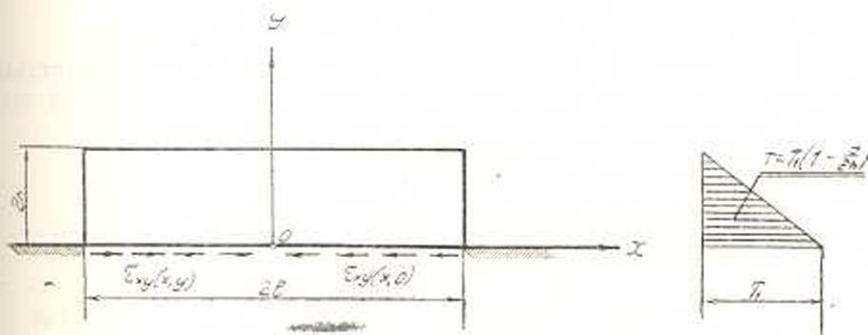
Глава II

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БЕТОННЫХ БЛОКАХ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Упруго-мгновенные напряжения в прямоугольном блоке от воздействия температуры и сил связности

Пусть прямоугольный бетонный блок (фиг. 7) высотой $2h$ и длиной $2l$, находясь под воздействием стационарной температуры $T(y)$, своей продольной стороной $y=0$ связан со сплошным основанием так, что на нижней грани блока отсутствуют нормальные напряжения

$$\sigma_x(x, 0) = 0, \quad (1.1)$$



Фиг. 7.

а действующие вдоль этой грани силы связности $\tau(x)$ распределены по закону

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau(x) - \beta u(x, 0), \quad (1.2)$$

где β — коэффициент пропорциональности, имеющий размерность кг/см^2 ,

$u(x, 0)$ — горизонтальное перемещение точек нижней грани блока по направлению оси x .

Продольную сторону блока $y=2h$ считаем свободной от внешних напряжений

$$\sigma_y(x, 2h) = \tau_{xy}(x, 2h) = 0, \quad (1.3)$$

а на торцах блока выполняются условия

$$\sigma_x(\pm l, y) = \int_0^{2h} \tau_{xy} dy \Big|_{x=\pm l} = 0, \quad (1.4)$$

В силу симметрии граничных условий, на оси $x = 0$ будут иметь место

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0. \quad (1.5)$$

Для простоты положим, что температура изменяется по линейному закону

$$T = T(y) = T_1 \left(1 - \frac{y}{2h} \right), \quad (1.6)$$

где T_1 — температура нижней грани блока.

Исследования термонапряженного состояния в рассматриваемом бетонном блоке будем проводить в рамках плоской задачи, решение которой, как известно, сводится к нахождению функции напряжений $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей внутри области поперечного сечения блока (фиг. 7) дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -E\alpha \nabla^2 T, \quad (1.7)$$

а на контуре его — заданному распределению напряжений (1.1), (1.3) и (1.4).

Здесь E — модуль мгновенной деформации блока,

а α — коэффициент линейного расширения с размерностью $\frac{1}{\text{град}}$.

При плоском напряженном состоянии имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Перемещения u и v определяются из формул

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha T = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Из (1.8) и (1.9) получим

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \alpha T(y)x + f_1(y), \quad (1.10)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} + \alpha \int_0^y T(y) dy + f_2(x).$$

Неизвестные функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ можно определить из условия

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} dx - 2\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dy \right\} + \alpha T'(y) x + f_1'(y) + f_2'(x), \quad (1.11)$$

откуда следует, что

$$f_1(y) = -ay + b, \quad f_2(x) = \frac{\alpha T_1 x^2}{4h} + ax + c. \quad (1.12)$$

В нашем случае, согласно (1.6), имеем $\nabla^2 T = 0$.

Решение уравнения (1.7) ищем в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x \{ A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y) \}, \quad (1.13)$$

где введено обозначение

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}. \quad (1.14)$$

Пользуясь формулами (1.8), (1.10), (1.12) и (1.13), получим

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [(A_k + 2D_k) \operatorname{ch} \alpha_k y + (B_k + 2C_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y)], \quad (1.15)$$

$$\sigma_y(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [A_k \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y)], \quad (1.16)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \sin \alpha_k x [(A_k + D_k) \operatorname{sh} \alpha_k y + (B_k + C_k) \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y (C_k \operatorname{sh} \alpha_k y + D_k \operatorname{ch} \alpha_k y)], \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
 u(x, y) = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x \{ & [(1+\nu) A_k + 2D_k] \operatorname{ch} \alpha_k y + \\
 & + [(1+\nu) B_k + 2C_k] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k \operatorname{sh} \alpha_k y] + \\
 & + z T_1 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) x - ay + b,
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) = -\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x \{ & [(1+\nu) A_k - (1-\nu) D_k] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 & + [(1+\nu) B_k - (1-\nu) C_k] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k \operatorname{sh} \alpha_k y + D_k \operatorname{ch} \alpha_k y] + \\
 & + z T_1 \left(1 - \frac{y}{4h} \right) y + z T_1 \frac{x^2}{4h} + ax + c.
 \end{aligned}$$

Удовлетворяя условиям (1.1)–(1.5), из соотношений (1.15)–(1.18) для определения неизвестных коэффициентов A_k , B_k , C_k и D_k получим следующие уравнения:

$$A_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h + B_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h (C_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h + D_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h) = 0, \tag{1.19}$$

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + (B_k + C_k) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h (C_k \operatorname{sh} 2\alpha_k h + D_k \operatorname{ch} 2\alpha_k h) = 0, \tag{1.20}$$

$$A_k = 0, \tag{1.21}$$

$$a = b = 0, \tag{1.22}$$

$$B_k + C_k - \frac{\beta}{E \alpha_k} [(1+\nu) A_k + 2D_k] + z h = 0. \tag{1.23}$$

При этом использованы обозначения (1.14),

$$z_k = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k-1)\alpha_k^3} \alpha_k^3 T_1, \tag{1.24}$$

и следующее разложение

$$x = \frac{\delta l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \alpha_k x \quad (0 \leq x \leq l). \tag{1.25}$$

Решая уравнения (1.19)–(1.20), находим

$$B_k = \frac{4(\alpha_k h)^2}{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k h - 2\alpha_k h} D_k, \tag{1.26}$$

$$C_k = -\frac{\operatorname{sh}^2 2\alpha_k h}{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k h - 2\alpha_k h} D_k.$$

Подставляя эти значения в (1.23), получим

$$D_k = \frac{2\alpha_k \alpha_k h \chi_k}{\psi_k + \frac{4\beta h}{E} \chi_k}, \quad (1.27)$$

где

$$\chi_k = \frac{\text{th } 2\alpha_k h}{2\alpha_k h} - \frac{1}{\text{ch}^2 2\alpha_k h}, \quad (1.28)$$

$$\psi_k = \text{th}^2 2\alpha_k h - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right)^2.$$

Тогда из (1.26) находим

$$B_k = - \frac{2 \left(\frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right)^2}{\alpha_k h \chi_k} D_k,$$

$$C_k = - \frac{\text{th}^2 2\alpha_k h}{2\alpha_k h \chi_k} D_k, \quad (1.29)$$

$$B_k + C_k = - \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k.$$

Пользуясь этими выражениями для определения напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ и перемещения $u(x, y)$, получим следующие формулы:

$$\frac{\sigma_x(x, y)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2\text{th } 2\alpha_k h \frac{\text{ch } \alpha_k (2h-y)}{\text{ch } 2\alpha_k h} - \alpha_k y \text{th } 2\alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k (2h-y)}{\text{ch } 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \text{sh } \alpha_k y - 4 \frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \frac{\text{ch } \alpha_k y}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right\}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\sigma_y(x, y)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \text{th } 2\alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k (2h-y)}{\text{ch } 2\alpha_k h} - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \text{sh } \alpha_k y \right\}, \quad (1.31)$$

$$\frac{\tau_{xy}(x, y)}{E\alpha T_1} = - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \text{th } 2\alpha_k h \frac{\text{ch } \alpha_k (2h-y)}{\text{ch } 2\alpha_k h} - \text{th } 2\alpha_k h \frac{\text{sh } \alpha_k (2h-y)}{\text{ch } 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\text{ch } 2\alpha_k h} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y}{2h} \right) \text{ch } \alpha_k y - \frac{\text{sh } \alpha_k y}{2\alpha_k h} \right] \right\}, \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{u(x, y)}{\alpha T_1 l} &= \frac{x}{l} \left(1 - \frac{y}{2h} \right) - \\
 &- \frac{l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1)^2 \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - \right. \\
 &- \frac{4\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - (1+\nu) \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + \\
 &\left. + 4(1+\nu) \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\}. \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

Для нормальных напряжений σ_x в точке (0, 0) получим следующее значение:

$$\frac{\sigma_x(0, 0)}{E \alpha T_1} = - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + 1 \right]}. \quad (1.34)$$

Оценим отношение $\frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$, где $z = \frac{(2k-1)\pi h}{l}$.

Согласно (1.28) имеем

$$\frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = \frac{\operatorname{th}^2 z + \left(\frac{z}{\operatorname{ch} z} \right)^2}{\frac{\operatorname{th} z}{z} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}} = z \frac{\operatorname{sh}^2 z - z^2}{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - z} = z \operatorname{th} z \frac{1 - \left(\frac{z}{\operatorname{sh} z} \right)^2}{1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}} < z \operatorname{th} z. \quad (1.35)$$

При этом использовано неравенство

$$\frac{1 - \left(\frac{z}{\operatorname{sh} z} \right)^2}{1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}} < 1, \quad (0 < z < \infty).$$

Из (1.35) получим

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = \infty, \quad (1.36)$$

так как при $z \rightarrow 0$ $1 - \frac{z}{\operatorname{sh} z}$ стремится к нулю быстрее, чем $1 - \frac{2z}{\operatorname{sh} 2z}$ и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) = 1. \quad (1.37)$$

Таким образом функции $\frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$ и $\frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z)$ с возрастанием аргумента z монотонно растут и для них имеют место неравенства

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) \leq \infty, \\ \left(\psi_k - \frac{1}{z} \frac{\psi_k}{\chi_k}(z) \right) \leq 1, \end{aligned} \right\} \text{ при } 0 \leq z \leq \infty. \quad (1.38)$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1°. $h = \text{const}$; тогда из (1.34) получим

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } t=0, \\ -1 & \text{и в } t=\infty, \end{cases} \quad (1.39)$$

при этом использованы значения (1.36) и равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, с увеличением длины блока $2l$ и при сохранении его высоты $2h = \text{const}$ и прочих равных условиях абсолютное значение нормального напряжения в блоке $\sigma_x(0,0)$ растет, стремясь в пределе к $|E\alpha T_1|$.

2°. $l = \text{const}$; тогда

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 1 & \text{при } h=0 \\ -\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1) \left[(2k-1)\pi \frac{E}{4\beta l} + 1 \right]} & \text{при } h=\infty, \end{cases} \quad (1.40)$$

где $0 < \delta < 1$.

При этом использованы соотношения (1.37). Из (1.40) следует, что с увеличением высоты блока $2h$ и при сохранении его длины $2l = \text{const}$, абсолютное значение нормального напряжения блока $\sigma_x(0,0)$ убывает, оставаясь все время больше некоторого числа δ ($0 < \delta < 1$), значения которого зависят от величины $\frac{E}{4\beta l}$.

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const}$, имеем

$$\frac{\sigma_x(0,0)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ -1 & \text{при } h=\infty, \end{cases} \quad (1.41)$$

откуда следует, что при сохранении постоянного отношения длины блока к его высоте $\frac{l}{h} = \text{const}$, нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0,0)$ возрастает с увеличением его высоты $2h$ и убывает при ее уменьшении.

Для нормальных напряжений σ_x в точке $(0, 2h)$ получаем следующее значение

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1 \right]}, \quad (1.42)$$

где введено обозначение

$$\varphi_k(z) = \frac{z - thz}{z \operatorname{ch} z \chi_k} = \frac{z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z - z}. \quad (1.43)$$

Сравнивая формулы (1.34) и (1.42), мы видим, что напряжения $\sigma_x(0, 0)$ и $\sigma_x(0, 2h)$ имеют разные знаки.

Легко видеть, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_k(z) = \left[\frac{1 - \frac{thz}{z}}{\frac{\operatorname{sh} z}{z} - \frac{1}{\operatorname{ch} z}} \right]_{z=\infty} = 0, \quad (1.44)$$

и

$$\lim_{z \rightarrow 0} \varphi_k(z) = \left[\frac{zs \operatorname{h} z}{\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z - 1} \right]_{z=0} = \frac{1}{2}. \quad (1.45)$$

Пользуясь формулой (1.42), получим следующие предельные случаи

1°. $h = \text{const.}$

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } l = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } l = \infty, \end{cases} \quad (1.46)$$

при этом использованы значения (1.36), (1.44) и (1.45).

Таким образом, при увеличении длины блока $2l$ и сохранении его высоты $2h = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ растет, стремясь в пределе к $\frac{E\alpha T_1}{2}$.

2°. $l = \text{const.}$, тогда

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } h = 0, \\ 0 & \text{при } h = \infty. \end{cases} \quad (1.47)$$

Здесь использованы значения (1.37), (1.44) и (1.45).

Следовательно, с увеличением высоты блока и при сохранении его длины $2l = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ убывает, стремясь при $h \rightarrow \infty$, к нулю.

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const.}$ имеет место

$$\frac{\sigma_x(0, 2h)}{E\alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{2k-1} - \gamma, & \text{при } h \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (1.48)$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{2}$.

Таким образом, с увеличением высоты блока и при сохранении $\frac{h}{l} = \text{const.}$ нормальное напряжение в блоке $\sigma_x(0, 2h)$ растет, оставаясь все время меньше некоторого положительного числа $\gamma \left(\frac{h}{l} \right) < \frac{1}{2}$.

Таким образом, в геометрически подобных блоках нормальное напряжение $\sigma_x(0, 2h)$ больше у высоких блоков.

В таблицах 4 и 5 приводятся некоторые значения нормальных напряжений $\sigma_x(0, 0)$ и $\sigma_x(0, 2h)$, вычисленные согласно гипотезе плоских сечений, т. е. по формулам (3.23) и (3.27) первой главы, и без этой гипотезы — по формулам (1.34) и (1.42) настоящей главы.

Из этих таблиц видно, что результаты, полученные на основании гипотезы плоских сечений, отличаются от результатов, полученных без этой гипотезы незначительно. Для блоков с отношением их высоты к длине, равным $\frac{1}{2}$, разница между этими результатами составляет примерно 5%. Разница эта сильно уменьшается, когда отношение $\frac{h}{l}$ убывает.

Таблица 4

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_x(0, 0)}{E\alpha T_1} \right|$, вычисленные по формулам (1.327)

и (1.34) при $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $2h = 1,00 \text{ м}$ и $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$.

β	$\frac{E}{4\beta h}$	$\frac{h}{l}$	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{8}$		
			a	b	c	a	b	c	a	b	c
25	40		0,0537	0,0567	5,3	0,0921	0,0950	2,8	0,299	0,301	0,66
50	20		0,103	0,108	4,6	0,171	0,176	2,8	0,477	0,479	0,42
100	10		0,189	0,198	4,5	0,299	1,306	2,3	0,675	0,676	0,15
200	5		0,326	0,338	3,6	0,477	0,483	1,2	0,841	0,841	—

a — значения, вычисленные по гипотезе плоских сечений по формуле (3.27) первой главы;

b — значения, вычисленные без этой гипотезы по формуле (1.34) настоящей второй главы;

c — ошибка в процентах.

Таблица 5

Значения температурных напряжений $\left| \frac{\sigma_x(l, 2h)}{E \alpha T_1} \right|$, вычисленные по формуле (1.3.23)

и (1.1.43) при $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $2h = 1,00 \text{ м}$ и $\frac{h}{l} = 1, 1/2$ и $1/3$.

l	E / 4αh	1/4			1/8		
		a	b	c	a	b	c
10	100	0,0193	0,01898	1,68	0,0705	0,07012	0,54
25	40	0,0461	0,14532	1,72	0,1435	0,14366	0,57
50	20	0,0855	0,08397	1,82	0,2385	0,23858	0,81
100	10	0,150	0,14654	2,23	0,3375	0,33428	0,93
200	5	0,239	0,23227	2,90	0,421	0,41660	1,03

a — значения, вычисленные по гипотезе плоских сечений по формуле (3.23) первой главы;

b — значения, вычисленные без этой гипотезы по формуле (1.43) настоящей главы;

c — ошибка в процентах.

Для определения значений сил связности $\tau(x)$ или касательных напряжений на нижней грани блока получаем следующую формулу:

$$\frac{\tau_{xy}(x, 0)}{E \alpha T_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E \phi_k}{4\beta h \chi_k} + 1 \right]} \cdot \frac{\phi_k}{\alpha_k h \chi_k} \quad (1.49)$$

Пользуясь этой формулой, получим следующие значения 1°. При $h = \text{const}$,

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \left[\frac{E \phi_k}{4\beta h \chi_k} + 1 \right]} \frac{\phi_k}{\alpha_k h \chi_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } l=0, \\ 0 & \text{при } l=\infty, \end{cases} \quad (1.50)$$

при этом использованы значения (1.36) и (1.37).

2°. При $l = \text{const}$, имеем

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \begin{cases} 0 & \text{при } h=0, \\ \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1) \left[(2k-1) \pi \frac{E}{4\beta l} + 1 \right]} & \text{при } h=\infty. \end{cases} \quad (1.51)$$

Здесь использованы значения (1.37).

3°. При $\frac{h}{l} = \text{const}$, получим

$$\frac{\tau_{xy}(l, 0)}{E \alpha T_1} = \begin{cases} 0 & h=0, \\ \infty & h=\infty. \end{cases} \quad (1.52)$$

§ 2. Температурные напряжения в прямоугольном бетонном блоке с учетом ползучести бетона при линейной характеристике сил связности

Пусть прямоугольный бетонный блок в некотором возрасте $\tau = \tau_1$ бетона подвергается воздействию стационарного потока тепла, определяющемуся зависимостью (1.6).

Тогда составляющие упруго-мгновенного напряжения $\sigma_x(x, y; \tau_1)$, $\sigma_y(x, y; \tau_1)$ и $\tau_{xy}(x, y; \tau_1)$ определяются соотношениями (1.30)–(1.32) и не будут зависеть от времени t .

Термоупругое состояние в бетонном блоке от воздействия стационарного теплового потока, вызванного в возрасте бетона $\tau = \tau_1$, под влиянием ползучести бетона с течением времени будет изменяться.

В этом случае температурные напряжения в бетонном блоке определяются через функцию напряжений $\varphi(x, y; t)$, которая должна удовлетворять следующему интегральному уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; t) = E \int_{\tau_1}^t \nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} c(t, \tau) d\tau = -E\alpha \nabla^2 T(x, y; t), \quad (2.1)$$

где $C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$ — мера ползучести [14]

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\tau) &= C_0 + \frac{A_1}{\tau} \\ \gamma^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

C_0 , A_1 и γ — некоторые параметры, характеризующие свойства и условия старения данного бетона.

В данном случае, согласно (1.6), имеем

$$\nabla^2 T(x, y; t) = 0. \quad (2.3)$$

Тогда для определения функции $\varphi(x, y; t)$ получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода, которое, как известно [15], в регулярных случаях не имеет другого решения, кроме тождественного нуля, т. е.

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y; t) = 0. \quad (2.4)$$

Таким образом, функция напряжений $\varphi(x, y; t)$ будет иметь такой же вид, как и функция напряжений $\varphi(x, y)$ и в упругом решении (1.13), только в выражении для функции $\varphi(x, y; t)$ коэффициенты A_k , B_k , C_k и D_k будут зависеть от времени t .

При решении задачи о температурных напряжениях в прямоугольном бетонном блоке с учетом ползучести бетона будем исходить из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned}
 \sigma_y^*(x, 2h; t) = \tau_{xy}^*(x, 2h; t) &= 0, \\
 u(0, y; t) = \tau_{xy}^*(0, y; t) &= 0, \\
 \sigma_x^*(l, y; t) = \int_0^{2h} \tau_{xy}^*(x, y; t) dy \Big|_{x=l} &= 0, \\
 \sigma_y^*(x, 0; t) = 0, \quad \tau_{xy}^*(x, 0; t) = \tau(x, t) = \beta u(x, 0; t).
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Напряжения $\sigma_x^*(x, y; t)$, $\sigma_y^*(x, y; t)$ и $\tau_{xy}^*(x, y; t)$ выражаются через функцию $\varphi(x, y; t)$ следующими формулами

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^*(x, y; t) &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial y^2}, \\
 \sigma_y^*(x, y; t) &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x^2}, \\
 \tau_{xy}^*(x, y; t) &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Перемещения $u(x, y; t)$ и $v(x, y; t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = \frac{\partial u(x, y; t)}{\partial x} - \alpha T &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x^*(x, y; t) - \nu \sigma_y^*(x, y; t) \right] - \\
 &- \int_0^t \left[\sigma_x^*(x, y; \tau) - \nu \sigma_y^*(x, y; \tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_y = \frac{\partial v(x, y; t)}{\partial y} - \alpha T &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y^*(x, y; t) - \nu \sigma_x^*(x, y; t) \right] - \\
 &- \int_0^t \left[\sigma_y^*(x, y; \tau) - \nu \sigma_x^*(x, y; \tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
 u(x, y; t) - \alpha T x - f_1(y) &= \frac{1}{E} f(x, y; t) - \int_0^t f(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau, \\
 v(x, y; t) - \alpha \int T(y) dy - f_2(x) &= \frac{1}{E} \psi(x, y; t) - \int_0^t \psi(x, y; \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

При этом использовано значение $T = T(y)$ и введены обозначения

$$\begin{aligned}
 f(x, y; t) &= \int \left[\sigma_x^*(x, y; t) - \nu \sigma_y^*(x, y; t) \right] dx = \int \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \varphi(x, y; t)}{\partial y}, \\
 \psi(x, y; t) &= \int \left[\sigma_y^*(x, y; t) - \nu \sigma_x^*(x, y; t) \right] dy = \int \frac{\partial^2 \varphi(x, y; t)}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \varphi(x, y; t)}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Функцию $\varphi(x, y; t)$ ищем в виде:

$$\varphi(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \alpha_k x [A_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y]], \quad (2.10)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}.$$

Подставляя (2.10) в (2.6) и (2.8), получим

$$\sigma_x^0(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [(A_k(t) + 2D_k(t)) \operatorname{ch} \alpha_k y + [B_k(t) + \\ + 2C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y]], \quad (2.11)$$

$$\sigma_y^0(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \cos \alpha_k x [A_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + B_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y]], \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy}^0(x, y; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [(A_k(t) - D_k(t)) \operatorname{sh} \alpha_k y + [B_k(t) - \\ + C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y - D_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y]], \quad (2.13)$$

$$u(x, y; t) = \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [(1-\nu) A_k(t) + 2D_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + [(1+\nu) B_k(t) + 2C_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y + D_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y] - \\ - \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin \alpha_k x [(1+\nu) A_k(\tau) + 2D_k(\tau)] \operatorname{ch} \alpha_k y + [(1+\nu) B_k(\tau) + \\ + 2C_k(\tau)] \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k y + \\ + D_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k y] \frac{d}{d\tau} C(t, \tau) d\tau + \alpha T_1 \left(1 - \frac{y}{2h}\right) x - ay + b, \quad (2.14)$$

$$v(x, y; t) = -\frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x [(1+\nu) A_k(t) - (1-\nu) D_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\ + [(1+\nu) B_k(t) - (1-\nu) C_k(t)] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1-\nu) \alpha_k y [C_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k y +$$

$$\begin{aligned}
 &+ D_k(t) \operatorname{ch} \alpha_k y] + \int_{\tau_1}^1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos \alpha_k x \{ [(1+\nu) A_k(\tau) - (1-\nu) D_k(\tau)] \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 &+ [(1+\nu) B_k(\tau) - (1-\nu) C_k(\tau)] \operatorname{ch} \alpha_k y + (1+\nu) \alpha_k y [C_k(\tau) \operatorname{sh} \alpha_k y + \\
 &+ D_k(\tau) \operatorname{ch} \alpha_k y] \} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau + \alpha T_1 \left(1 - \frac{y}{4h} \right) y + \alpha T_1 \frac{x^2}{4h} + ay + c. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

При этом использованы значения

$$f_1(y) = -ay + b, \quad (2.16)$$

$$f_2(x) = \alpha T_1 \frac{x^2}{4h} + ax + c.$$

Удовлетворив граничным условиям (2.5), из (2.10)–(2.15) получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 A_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + B_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + 2\alpha_k h [C_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h + \\
 + D_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h] = 0, \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [A_k(t) + D_k(t)] \operatorname{sh} 2\alpha_k h + [B_k(t) + C_k(t)] \operatorname{ch} 2\alpha_k h + \\
 + 2\alpha_k h [C_k(t) \operatorname{sh} 2\alpha_k h + D_k(t) \operatorname{ch} 2\alpha_k h] = 0, \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

$$A_k(t) = 0, \quad (2.19)$$

$$a = b = 0, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
 B_k(t) + C_k(t) - \frac{\beta}{E\alpha_k} [(1+\nu) A_k(t) + 2D_k(t)] + \alpha_k + \\
 + \frac{\beta}{\alpha_k} \int_{\tau_1}^1 [(1+\nu) A_k(\tau) + 2D_k(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

где

$$\frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} = \psi'(\tau) - [\psi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (2.22)$$

При этом использовано обозначение (1.24) и разложение (1.25).

Из (2.17)–(2.19) находим

$$A_k(t) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 B_k(t) = \frac{4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2}{\operatorname{th} 2\alpha_k h - \frac{2\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h}} D_k(t), \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_k(t) = \frac{\operatorname{th}^2 2\alpha_k h}{\operatorname{th} 2\alpha_k h - \frac{2\alpha_k h}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h}} D_k(t).
 \end{aligned}$$

$$B_k(t) + C_k(t) = - \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k(t), \quad (2.24)$$

где использованы обозначения (1.28).

Подставляя эти значения в (2.21), получим

$$- \frac{\psi_k}{2\alpha_k h \chi_k} D_k(t) - \frac{2\beta h}{E\alpha_k h} D_k(t) + \alpha_k + \\ + \frac{2\beta h}{\alpha_k h} \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau = 0, \quad (2.25)$$

или, подставляя сюда (2.22), будем иметь

$$D_k(t) \left[\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E} \right] - 2\alpha_k h \alpha_k = \\ = 4\beta h \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau. \quad (2.26)$$

Отсюда имеем

$$D_k(\tau_1) = \frac{2\alpha_k h \alpha_k}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E}}. \quad (2.27)$$

Пользуясь соотношениями (2.26) и (2.27), получим для определения $D_k(t)$ следующее интегральное уравнение

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) + b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \{ \varphi'(\tau) - [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \} d\tau, \quad (2.28)$$

где

$$b_k = \frac{4\beta h}{\frac{\psi_k}{\chi_k} + \frac{4\beta h}{E}} = \frac{E}{\frac{E}{4\beta h} \frac{\psi_k}{\chi_k} + 1} > 0, \quad (2.29)$$

Дифференцируя (2.28) по t , получим

$$D_k'(t) = -\gamma b_k D_k(t) \varphi(t) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau, \quad (2.30)$$

откуда следует, что

$$D_k'(\tau_1) = -\gamma b_k D_k(\tau_1) \varphi(\tau_1), \quad (2.31)$$

Подставляя в (2.30) значение интеграла

$$\gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau = \\ = -\gamma D_k(t) + \gamma D_k(\tau_1) + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \varphi'(\tau) d\tau \quad (2.32)$$

имеем

$$D_k'(t) = -\gamma b_k D_k(t) \varphi(t) - \gamma D_k(t) + \gamma D_k(\tau_1) + \\ + \gamma b_k \int_{\tau_1}^t D_k(\tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Дифференцируя это уравнение по t , приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$D_k'(t) + \gamma D_k(t)[1 + b_k \varphi(t)] = 0 \quad (2.34)$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} D_k(\tau_1) &= \frac{2\alpha_k h \alpha_k}{\frac{\psi_k}{\lambda_k} + \frac{4\beta l r}{E}}, \\ D_k(\tau_1) &= -\gamma b_k D_k(\tau_1) \varphi(\tau_1), \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Решение уравнения (2.34) при начальных условиях (2.35) имеет вид

$$D_k(t) - D_k(\tau_1) = D_k(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz, \quad (2.36)$$

или

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left[1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z [1 + b_k \varphi(x)] dx} dz \right]. \quad (2.37)$$

Подставляя сюда $\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0$ из соотношения (2.37) получим

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left\{ 1 - \gamma b_k \varphi(\tau_1) e^{\gamma k \tau_1} \tau_1^{\rho_k} \int_{\tau_1}^t z^{-\rho_k} e^{-\gamma k z} dz \right\}, \quad (2.38)$$

где введены обозначения

$$\left. \begin{aligned} \gamma(1 + b_k C_0) &= \tau_k, \\ \gamma b_k A_1 &= \rho_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

Пользуясь введенным ранее понятием функции влияния $\Phi(\xi, \rho)$ [14]

$$\Phi(\xi, \rho) = \int_0^{\xi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{\rho}} d\tau, \quad (2.40)$$

будем иметь

$$\int_{\tau_1}^t z^{-\rho_k} e^{-\tau_k z} dz = \tau_k^{-(1-\rho_k)} [\Phi(\tau_k t, \rho_k) - \Phi(\tau_k \tau_1, \rho_k)]. \quad (2.41)$$

Подставляя (2.41) в (2.38), получим

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma b_k}{r_k^{1-\nu_k}} \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{\nu_k} e^{-\tau_1 t} [\Phi(r_k t, \rho_k) - \Phi(r_k \tau_1, \rho_k)] \right\}. \quad (2.42)$$

Введем обозначение

$$H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right) = 1 - \frac{\gamma}{r_k^{1-\nu_k}} \cdot \frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k + 1}{\chi_k} \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \tau_1^{\nu_k} e^{-\tau_1 t} [\Phi(r_k t, \rho_k) - \Phi(r_k \tau_1, \rho_k)]; \quad (2.43)$$

тогда

$$D_k(t) = D_k(\tau_1) H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \quad (2.44)$$

Заметим, что

$$H_k \left(\tau_1, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right) = 1. \quad (2.45)$$

Для определения температурных напряжений и перемещений в прямоугольных бетонных блоках с учетом ползучести бетона получим следующие формулы

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(x, y; t) = & \frac{\sigma_0 T_1}{E \alpha T_1} = \\ = & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k + 1}{\chi_k} \right] \alpha_k h \chi_k} \left\{ 2 \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ & \left. \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y - \right. \\ & \left. - 4 \frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right), \quad (2.46) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^*(x, y; t) = & \frac{\sigma_0 T_1}{E \alpha T_1} = \\ = & \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cos \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \frac{\phi_k + 1}{\chi_k} \right] \alpha_k h} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ & \left. - 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right), \quad (2.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^*(x, y; t) = & \frac{1}{E \alpha T_1} = \\ = & -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1) \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + 1 \right] \alpha_k h \chi_k} \left\{ \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} - \right. \\ & - \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + 4 \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{ch} \alpha_k y - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{2\alpha_k h} \right] \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x, y; t)}{l \alpha T_1} = & \frac{x}{l} \left(1 - \frac{y}{2h} \right) - \\ - & \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin \alpha_k x}{(2k-1)^2 \left[\frac{E}{4\beta h} \psi_k + \chi_k \right] \alpha_k h} \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} 2\alpha_k h \operatorname{ch} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - \right. \\ & - 4 \frac{\alpha_k h \operatorname{ch} 2\alpha_k y}{\operatorname{ch}^2 2\alpha_k h} - (1 + \nu) \alpha_k y \operatorname{th} 2\alpha_k h \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (2h-y)}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} + \\ & \left. + 4(1 + \nu) \left(\frac{\alpha_k h}{\operatorname{ch} 2\alpha_k h} \right)^2 \left(1 - \frac{y}{2h} \right) \operatorname{sh} \alpha_k y \right\} H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Из соотношений (2.46)–(2.48) видно, что термоупругие напряжения в бетонных блоках: $\sigma_x(x, y; \tau_1)$, $\sigma_y(x, y; \tau_1)$ и $\tau_{xy}(x, y; \tau_1)$, вызванные в начальный момент $t = \tau_1$ действием стационарного теплового потока, под влиянием ползучести бетона с течением времени затухают, причем интенсивность этого затухания определяется функциями $H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right)$. Поэтому функции $H_k \left(t, \tau_1; \frac{h}{l}, \frac{E}{4\beta h} \right)$ могут быть названы коэффициентами затухания.

Следует отметить, что здесь рассматривается своего рода контактная задача теории ползучести применительно к исследованию термонапряженного состояния бетонных блоков. Поэтому влияние ползучести бетона на термонапряженное состояние бетонного блока имеет ряд характерных особенностей, которыми оно отличается от тех задач теории ползучести, когда на поверхности исследуемого тела заданы только напряжения или перемещения.

Как видно из соотношений (2.43), (2.46)–(2.48), в этом случае закон изменения напряжений в бетонном блоке $\sigma_x^*(x, y; t)$, $\sigma_y^*(x, y; t)$ и $\tau_{xy}^*(x, y; t)$ во времени существенно зависит не только от меры ползучести бетона $C(t, \tau)$ и возраста τ_1 , но также и от геометрических размеров блока (l и h), от степени связности нижней грани блока с основанием $\frac{E}{4\beta h}$ и от координаты точки (x, y) .

Ниже, в таблице 6, приводятся ряд значений максимальных нормальных напряжений $\sigma_x^*(x, y; t)$ в точке $(0, 0)$, вычисленных в начальный момент воздействия температуры и в последующие моменты времени t , при различных отношениях $\frac{h}{l}$ и величины $\frac{E}{4\beta h}$.

Характеристики для меры ползучести бетона в данном случае приняты следующие

$$A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}; \quad C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0,026;$$

$$E = 2,10^5 \text{ кг/см}^2 \text{ и } \tau_1 = 14 \text{ дней.}$$

Таблица 6

Закон изменения температурных напряжений $\frac{\sigma_x^*(0, 0, t)}{\sigma_x(0, 0)}$ во времени t при различных отношениях $\frac{h}{l}$ и $\frac{E}{4\beta h}$

t в днях	$\frac{E}{4\beta h}$	40		20	
	$\frac{h}{l}$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{4}$
		14	1,0	1,0	1,0
45	0,703	0,895	0,804	0,815	
90	0,600	0,845	0,465	0,738	
360	0,583	0,832	0,452	0,722	
∞	0,578	0,828	0,449	0,715	

$\sigma_x(0, 0)$ — начальное упругое напряжение, вычисленное по формуле (1.34).

В заключение отметим, что аналогичным путем может быть решена также и задача о термонапряженном состоянии бетонных блоков с учетом ползучести бетона, при воздействии нестационарного теплового потока.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 29 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Маслов Г. Н. Температурные напряжения и деформации в бетонных массивах на основах теории упругости. Известия НИИГ, том XIII, 1934.
2. Басевич А. Э. и Шалиро С. С. Сборник «Свирьстрой», 1937.
3. Ниландер Ю. А. Расчет разгрузки массивных бетонных сооружений. Труды IV Всесоюзной конференции по бетону и железобетонным конструкциям, ч. II. Стройиздат, 1949.
4. Маслов Г. Н. Задачи теории упругости о термоупругом равновесии. Известия НИИГ, том XXIII, 1938.

5. Маслов Г. Н. Элементарные статические расчеты сооружений на температурные изменения. Известия НИИГ, том XXVI, 1940.
6. Александровский С. В. Температурные напряжения в массивных блоках от экзотермии цемента. Сборник НИИ по строительству, «Исследования, массивные и стержневые конструкции» Министерства строительства предприятий машиностроения, М., 1952.
7. Абрамян Б. Л. О температурных напряжениях в прямоугольном бетонном блоке. Известия АН АрмССР (серия ФМЕТ наук), том VII, № 3, 1954.
8. Итинский А. Ю. и Думанский А. В. О закономерностях растрескивания коры деревьев. ДАН СССР, том 84, № 1, 1952.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, том III, часть 2, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
10. Пановко Я. Г. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний. Инженерный сборник АН СССР, том XIII, 1952.
11. Куликов Н. К. Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы. Инженерный сборник АН СССР, том XIII, 1952.
12. Лойцанский Л. Г. Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законами сопротивления. Инженерный сборник АН СССР, том XVIII, 1954.
13. Гопп Ю. А. Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной аппроксимации. Инженерный сборник АН СССР, том XVIII, 1954.
14. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
15. Мюнтц Ф. Интегральные уравнения, том I, ГТТИ, 1934.

Կ. Խ. ԱՐՄԵՅՅԱՆ, Բ. Լ. ԱԲՐԱՄՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ԲԵՏՈՆՅԱ ԲՆՈՎՆԵՐՈՒՄ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարգմամբ քննության է տանված սզգանկյունածե բետոնյա բլոկի ջերմային լարված վիճակի փրաքերչալ մի խնդիր, երբ բլոկը գրված է միասեւ հիմնատակի վրա և զանվում է սաաջիտնար ջերմային սզգեցության տակ: Սնդրում հաշվի են առնված սզգի և բլոկի հիմնատակի նեւ միացման հարվածյան վրա գործող կապակցության ուժերը, բնդ սրում կապակցության ուժերի մեծությունը և բաշխման օրենքը բլոկի ու հիմնատակի միացման հարվածյան վրա կախված են խնդրեւ բլոկի ջերմային վիճակից, աշտեւ էլ նրա հիմնատակի նեւ միացման բնույթից:

Ասաջին գլխում արվում է ջերմա-աաաձակյան խնդրի լուծումը աչգույրի բլոկի համար, հիմնվելով հարթ հաաղածքների հեղթթեղի վրա: Երկրորդ գլխից նվիրված է նաշն բլոկի ջերմային լարվածության վիճակի նեաաղաաման խնդրին, աաանց հարթ հաաղածքների հեղթթեղի օգաաղորման՝ խնդրեւ բլոկի աաաձակյան վիճակի ղեպում, աշտեւ էլ բետոնի սզգի ախաաաւումով: Սաաղված արդյունքների հիման վրա ցույց են աըրվում հարթ հաաղածքների հեղթթեղի կիրաաման նաարաաորությունները ալյալ խնդրի համար, կախված բլոկի չափերից:

Չ. Գ. Առօթյան

О магнитных свойствах горных пород Армении

Как известно, до 1948 года массового определения физических свойств (в частности, магнитных свойств) пород, развитых на территории Армянской ССР, не производилось. Впервые такие исследования были начаты в связи с региональными гравиразведочными, магниторазведочными исследованиями и продолжены в связи с комплексными гравиразведочными и магниторазведочными маршрутно-площадными исследованиями с целью изучения глубинного геологического строения Армянской ССР.

В 1950—1953 годы нами были получены дополнительные данные о магнитных свойствах пород почти всех возрастов, участвующих в геологическом строении Армении, собранных как в обнажениях, так и в кернах буровых скважин.

Изученные образцы отбирались с фиксацией пространственного расположения их в естественном залегании, а измерения проводились на магнитометре М-2 (магнитные весы) и на аstaticеском магнитометре Долгинова.

Некоторые образцы, сильно отклонявшие магнитную систему, подвергались химическому анализу и петрографическому исследованию.

Хотя при современном состоянии изученности магнитных свойств пород Армении и не представляется возможным дать полную характеристику изменения магнитных свойств горных пород в зависимости от их стратиграфического положения, литолого-петрографического состава, структуры и текстуры, условий залегания, степени метаморфизма (регионального и контактового) и т. д., все же статистическая обработка имеющихся данных по магнитным свойствам пород, результаты которой представлены в таблице 1, позволяют заметить только некоторые закономерности. Эти закономерности считаем возможным сформулировать в следующих положениях.

В зависимости от стратиграфического положения и литолого-петрографического состава горные породы Армянской ССР можно подразделить на 3 группы:

а) практически немагнитные ($\chi = 0 - 100 \times 10^{-6}$ CGSM) — карбонатные породы палеозоя, мела и палеогена, песчаноглинистые отложе-

Таблица 1

Сводная таблица по магнитным свойствам горных пород Армении

Группа	Название породы	Возраст	Количество образц.	Магнитная восприимчивость $\times 10^5$ С.С.М			Примечание
				среднее	максимальное	минимальное	
1	2	3	4	5	6	7	8
Практически немагнитные ($\alpha=0-100 \cdot 10^5$)	Метаморфические сланцы	кембрия-до-кембрия	17	65	180	10	не обладают остаточным намагничением
	Амфиболиты	"	3	70	125	45	
	Гнейсы	"	4	35	50	15	
	Кварциты	палеозой	6	25	50	5	
	Глинистые сланцы	"	24	16	40	10	
	Известняки	"	73	13	90	0	
	Песчаники	"	32	17	55	7	
	Порфириты	юра	7	38	72	5	
	Известняки	"	2	38	72	5	
	Туфопесчаники	"	2	75	125	25	
	Альбитофирры	"	1	30	—	—	
	Мергел. известняки	верхнемеловые	11	15	40	5	
	Песчаники	" "	3	25	50	10	
	Глины	" "	8	20	30	5	
	Конгломераты	" "	5	60	160	15	
	Порфириты	" "	8	70	100	40	
	Песчаники	третичные	13	50	90	15	
	Глины	"	59	40	105	10	
	Корал. известняки	"	2	6	8	4	
	Травертины	четвертичные	9	15	35	0	
Грауоднориты и кварцевые диориты	"	5	40	75	15		
Габбро-амфиболы	"	5	35	60	10		

1	2	3	4	5	6	7	8
Слабо магнитные ($\chi = 100 - 1000 \cdot 10^{-6}$ G/GSM)	Порфириты	ю р а	2	935	1165	710	обладают остаточным намагничиванием
	Мер. сл. известняки	верх. мел.	2	165	170	160	
	Песчанки	" "	3	400	760	175	
	Порфириты	" "	3	910	1160	780	
	Песчанки	третичные	37	210	540	195	
	Г л и н ы	"	53	210	840	100	
	Конгломераты	"	4	210	420	80	
	Микроконгломераты	"	3	625	1480	40	
	Базальты долер.	палеог.	24	690	1000	210	
	Андезит-базальты	четвертичные	20	510	880	110	
	Вулканические туфы	"	8	545	980	235	
	Обсидианы	"	3	910	1345	560	
	Диабаз-дайкивые пор.	"	2	310	475	140	
Магнитные ($\chi = 1000 - 5000 \cdot 10^{-6}$ и более)	Метаморфические сланцы	кембрия-докембрия	5	1600	2280	760	обладают остаточным намагничиванием
	Гнейсы	"	1	2350	—	—	
	Порфириты	верх. мела	5	1500	6800	600	
	Туфобрекчия	третичный	3	1360	1360	1300	
	Базальты долер.	третичные	33	2070	8200	1010	
	Порфириты	"	4	30400	90000	10100	
	Порфириты	"	4	1300	1500	1135	
	Андезит-базальты	четвертичные	16	2430	6900	1100	
	Т у ф ы	"	6	15850	39000	8250	
	Кварц. диориты	"	19	2070	4020	1020	
Диабаз. дайковые породы	"	5	1510	3000	280		
			2	1980	2020	1930	

ния палеозоя, мела и палеогена (частично), вулканогенные породы мела и юры и метаморфические сланцы, гнейсы кембрия-докембрия (частично);

б) слабомагнитные ($\chi = 100 - 1000 \times 10^{-6}$ CGSM) — эффузивные и вулканогенно-осадочные породы мела и юры, эффузивы четвертичного и третичного возрастов (частично), песчано-глинистые отложения палеогена (частично);

в) магнитные ($\chi = 1000 - 5000 \times 10^{-6}$ CGSM и более) — эффузивные породы четвертичного, третичного и более древних возрастов, метаморфические сланцы, гнейсы, кембрия-докембрия (частично).

Следует отметить, что некоторые песчаники, глины и мергели третичного и мелового возрастов характеризуются относительно высокой магнитной восприимчивостью по сравнению с одноименными породами более древних возрастов, что объясняется высоким процентным содержанием в тяжелой фракции магнетита в этих породах.

Необходимо также подчеркнуть, что изверженные породы Армянской ССР, как правило, не только высокомагнитны, но и обладают остаточным намагниченнем. Ввиду этого, в некоторых случаях вулканогенные породы могут служить экраном, препятствующим магнитометрическому изучению глубинных структур, сложенных осадочными отложениями третичного и более древних возрастов, перекрытыми вулканогенными отложениями.

Таким образом, установлено, что магнитные свойства горных пород Армении изменяются в довольно широких пределах среди разновозрастных пород, в зависимости от литолого-петрографического состава. Не может быть сомнения в том, что магнитные свойства пород зависят также от структуры и текстуры породы, условий залегания, влияния регионального и контактового метаморфизма. Изучение и выявление этих закономерностей имеют важное значение для разведочной геофизики и представляют самостоятельную исследовательскую задачу.

На основании вышеизложенного более или менее отчетливо намечаются следующие границы раздела горных пород Армянской ССР по магнитным свойствам:

- 1) между палеозоем и мезо-кайнозоем,
- 2) между третичным и меловым,
- 3) между четвертичным и третичным (менее отчетливо).

Вышесказанное следует иметь в виду при геологическом истолковании магниторазведочных работ и при сравнительном изучении магнитных свойств горных пород на территории СССР.

Յ. Գ. Հակոբյան

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԼԵՌՆԱՅԻՆ ԱՊԱՐՆԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ
ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Առաջնադասի չափերով Հայաստանի լեռնային ապարների մագնիսական հատկությունները՝ կախված նրանց սարատիգրաֆիայից և լիտոլոգո-պետրոգրաֆիական կազմից, հեղինակը հանդուժ է հետևյալ եզրակացություններին:

1. Երրորդային և չորրորդային հասակ ունեցող հրային ապարները բնութագրվում են մագնիսական ավելի մեծ զդայունակությամբ, քան ավելի հին հասակի նստվածքային ապարները, ընդ որում չորրորդային հասակի ապարներն ավելի մագնիսական են, քան երրորդային հասակ ունեցողները:

2. Երրորդային և կավճի հասակի կավա-ավազաքարային նստվածքներն ավելի մագնիսական են, քան նույն հասակի և ավելի հին հասակ ունեցող կրաքարերն ու մերգելները:

3. Պալեոգոյի հասակ ունեցող նստվածքային ապարները, ինչպես նաև երրորդային, կավճի և յուրայի հասակի կրաքարերն ու մերգելները դրժնականում մագնիսական չեն:

4. Քեմբրի հասակի մետամորֆային թերթաքարերը և դեյաները ավելի մագնիսական են, քան երիտասարդ հասակ ունեցող նստվածքային ապարները, րացառու թյամբ երրորդային և կավճի հասակ ունեցող մի քանի ավազաքարերի, կավերի և կոնգլոմերատների:

5. Հրային՝ ինչպես ինտրուզիվ, այնպես էլ էֆուզիվ ապարները բնութագրվելով մեծ մագնիսական զգայունակությամբ, օժտված են նաև ֆացորդային մագնիսականությամբ, որը թվապես շատ զեպքերում դերապանցում է ինդուկցիոն մագնիսականությունից:

Ելնելով վերոհիշյալից, հեղինակը Հայաստանի բոլոր լեռնային ապարները (րացառու թյամբ հանքաքարերի) ըստ իրենց մագնիսական հատկության բաժանում է 3 խմբի՝ 1) ոչ մագնիսական ապարներ, 2) թույլ մագնիսական ապարներ և 3) մագնիսական ապարներ:

М. Г. Манвелян, Т. В. Крмоян, А. Г. Егванн, А. М. Кочарян

Электропроводности концентрированных растворов гидроокисей натрия и калия, их карбонатов и смесей $\text{NaOH} + \text{KOH}$ при 25°C

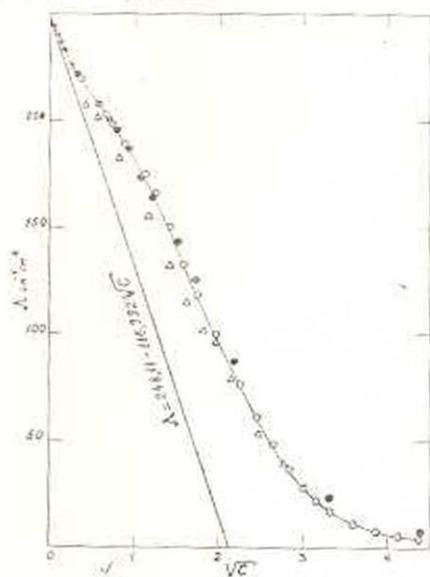
Изучение электропроводности концентрированных щелочных растворов представляет как теоретический, так и практический интерес. Число работ в этом направлении небольшое. В международной критической таблице [1] даются интерполяционные значения электропроводности некоторых концентрированных щелочных растворов. Мета, Кабади и Шег [2] определили электропроводность 1—10 Н растворов NaOH и KOH при 30°C и указывают, что их данные совпадают с данными таблицы. С другой стороны, значения по электропроводности для растворов NaOH , определенные Строковым [3] и Даркеном [4] при 25°C , ниже данных, приведенных в МКТ. Данные же Даркена не совпадают с данными Строкова. Из приведенных литературных данных видно, что удельная электропроводность растворов NaOH и KOH проходит через максимум. Однако имеющиеся материалы недостаточно удовлетворительны для количественных расчетов и не дают полного представления о зависимости электропроводности от концентрации.

В настоящей работе сопоставлены данные по электропроводности растворов NaOH при 25°C , полученные авторами, с данными Строкова и Даркена. Так как Даркен и Меер изучали только лишь несколько концентраций растворов KOH , то сопоставление в этом случае не имеет смысла. Следует указать, что наши значения по электропроводности растворов Na_2CO_3 (без внесения поправки на гидролиз) совпадают с данными Строкова. Измерения же электропроводности растворов K_2CO_3 и смесей $\text{NaOH} + \text{KOH}$, насколько нам известно из литературы, почти не производились.

Экспериментальная часть. Измерение электропроводности производилось в аппарате переменного тока, состоящего из двух частей: генератора на 1000 пер./сек. и усилителя, питающихся от одного и того же первичного переменного напряжения. Диапазон вторичного переменного напряжения дает возможность регулировать напряжение от 0 до 6 вольт. Аппарат сконструирован преимущественно для ячеек с малым сопротивлением. Был использован мост МВЛ-47. При вычислении электропроводности растворов NaOH и KOH введена поправка

на содержание карбонатов в них. В случае же Na_2CO_3 и K_2CO_3 введена поправка на гидролиз [5].

Обсуждение опытных данных. На фиг. 1 сопоставлены данные по электропроводности для растворов NaOH при 25°C , полученные авторами, с данными Строкова и Даркена. Данные Даркена и Меера (черные кружки) для разбавленных растворов и Строкова (треуголь-



Фиг. 1.

ники) — для концентрированных совпадают с нашими данными (светлые кружки). Литературные данные для разбавленных растворов NaOH представлены на фигуре в виде звездочек. Прямая же вычислена на основании уравнения Дебая — Гюккеля — Онзегера. Надо заметить, что Даркен и Меер изучали преимущественно разбавленные, а Строков — концентрированные растворы, причем ими не введена поправка на содержание CO_3^{2-} . Можно сказать, что кривая, начерченная на основании наших данных, дает полную зависимость между электропроводностью и концентрацией растворов NaOH при 25°C . Из фигуры видно, что отклонения от предельного теоретического выражения Дебая — Гюккеля — Онзегера являются „первого типа“.

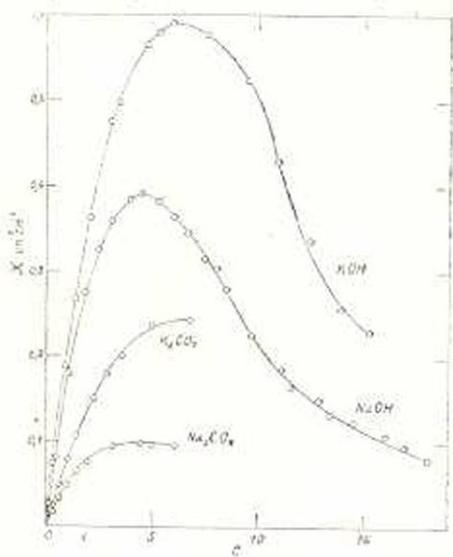
В настоящее время установлено, что вообще расхождения не могут быть устранены эмпирическими поправками [6] или поправками, предложенными Усановичем [7] за счет вязкости среды. Для данного случая такого типа поправки не могут быть введены, ввиду того, что кривая в области концентрации растворов выше 0,5 Н имеет S-образную форму с явными точками перехода при 4,5 Н.

Кроме того, детальное изучение изменения наклона кривой показывает, что при концентрациях 0,5, 1, 4,5 и 9 Н, повидимому, происходят структурные превращения в растворах.

Значения удельных электропроводностей растворов NaOH , KOH , Na_2CO_3 и K_2CO_3 обобщены в таблице 1. Зависимость удельной электропроводности от концентрации раствора показана на фиг. 2. Из фигуры видно, что кривые удельной электропроводности растворов NaOH и KOH проходит через заостренный максимум: первая при 4,5 Н, а вторая при 6 Н. Кривая удельной электропроводности растворов Na_2CO_3 проходит через расплывчатый максимум при концентрации 4,5 Н. Кривая же раствора K_2CO_3 не имеет определенного максимума.

Появление максимума на кривой удельная электропроводность — концентрация является одним из интересных вопросов электрохимии

растворов [8]. Подробное изучение этого явления связано с выяснением природы сил, которые определяют взаимодействие между ионами с одной стороны, и электролитом с растворителем — с другой [9, 10, 11, 12]. Согласно Курнакову [13], максимальное значение электропроводности вообще указывает на наличие химического взаимодействия и образования химических соединений в растворе. Как видно из фиг. 2, ход кривых удельной электропроводности зависит от вида аниона. Максимумы же кривых для NaOH и Na_2CO_3 имеют одинаковое значение, т. е. зависят от катиона. По всей вероятности, то же самое можно сказать и относительно растворов KOH и K_2CO_3 . Таким образом, при рассмотрении вопроса максимума надо выдвигать на первый план электрические силы взаимодействия. По мнению авторов, здесь химические соединения можно представить в виде ионных пар [12], в результате чего удельная электропроводность постепенно падает. Однако нельзя утверждать, что тут не играют роли силы взаимодействия другого типа. По-видимому, изменение степени гидратации (объемный эффект) и изменение диэлектрической постоянной влияют на электропроводность в области концентраций до максимума.



На фиг. 3 показана разность эквивалентных электропроводностей катионов и анионов. Из кривой $\Lambda_{\text{KOH}} - \Lambda_{\text{NaOH}}$ видно, что разность между ионными электропроводностями катионов для 4—5 Н растворов равна 35—40 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$, т. е. в два раза больше, чем в случае разбавленных растворов. При концентрации раствора 0,5 Н разность $\lambda_{\text{K}^+} - \lambda_{\text{Na}^+}$ равна 22 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$, что близко к значениям для бесконечно разбавленных растворов. Интересно, что разность между ионными электропроводностями OH^- и $\frac{1}{2}\text{CO}_3^{--}$ увеличивается с разбавлением растворов и при концентрации 0,5 Н, $\lambda_{\text{OH}^-} - \lambda_{\frac{1}{2}\text{CO}_3^{--}}$ равна 140 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$. Взяв λ_{OH^-} равной 198 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$ [14], получаем ионную электропроводность для $\frac{1}{2}\text{CO}_3^{--}$, равной 58 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$. Эта величина на 11 $\text{ом}^{-1}\text{см}^2$ ниже, чем определенная Монком [5].

Выше было отмечено, что для одного и того же аниона ход кривой электропроводности не зависит от вида катиона, несмотря на различие в их подвижностях. Поэтому изучение вопроса аддитивности электропроводности NaOH и KOH в концентрированных растворах весьма интересно.

В таблице 2 приведены опытные данные электропроводности растворов NaOH наряду с KOH.

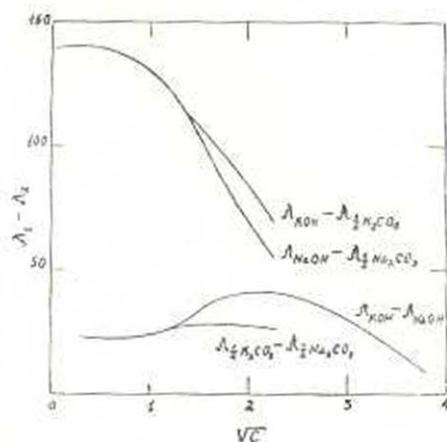
Таблица 1

Удельные электропроводности концентрированных щелочных растворов при 25°C

NaOH		KOH		Na ₂ CO ₃		K ₂ CO ₃	
норм.	ом ⁻¹ см ⁻¹	норм.	ом ⁻¹ см ⁻¹	норм.	ом ⁻¹ см ⁻¹	норм.	ом ⁻¹ см ⁻¹
18,48	0,081	14,96	0,245	5,28	0,0961	6,96	0,243
16,88	0,094	14,22	0,259	5,02	0,0979	5,60	0,241
16,00	0,111	13,80	0,278	4,46	0,0990	3,40	0,300
14,52	0,124	12,51	0,328	3,84	0,0992	2,83	0,179
12,87	0,150	11,00	0,398	3,45	0,9800	2,46	0,146
11,64	0,145	9,82	0,446	3,22	0,0943	1,90	0,129
11,12	0,184	9,14	0,484	2,44	0,0363	1,41	0,103
9,76	0,225	7,95	0,528	1,85	0,0742	0,98	0,0747
8,48	0,279	7,02	0,548	1,36	0,0623	0,746	0,0601
8,03	0,304	5,74	0,519	0,86	0,0455	0,54	0,0455
7,50	0,316	4,11	0,479	0,718	0,0401	0,438	0,0374
6,64	0,345	2,51	0,369	0,536	0,0309	0,316	0,0307
5,49	0,376	1,50	0,247	0,346	0,0224	0,231	0,0214
5,26	0,383	0,711	0,153	0,250	0,0179	0,111	0,0134
4,49	0,342	0,55	0,10	0,0475	0,00448	0,049	0,0049
4,01	0,346	0,351	0,078				
3,83	0,382	0,280	0,062				
3,11	0,360						
2,38	0,345						
1,79	0,275						
0,99	0,1825						
0,401	0,0811						
0,320	0,0660						
0,120	0,0262						

Здесь C_{NaOH} и C_{KOH} — концентрации отдельных компонентов, $\chi_{изм.}$ — измеренная удельная электропроводность смеси, а χ_1 — удельная электропроводность, вычисленная на основании выражения

$$\Lambda_{NaOH}C_{NaOH} + \Lambda_{KOH}C_{KOH} = \chi_1 \cdot 1000. \quad (1)$$



Фиг. 3.

Здесь Λ — эквивалентная электропроводность каждого компонента, вычисленная по закону независимого движения ионов. Как и следовало ожидать, вычисленное значение удельной электропроводности смеси выше, чем его измеренное значение. Причина заключается в том, что в уравнении (1) не учитывается влияние суммарного заряда всех катионов на движение ионов. Вероятность нахождения в ионной атмосфере положительных зарядов, Na^+ и K^+ ионов, одинаково. Таким

образом, при вычислении эквивалентной электропроводности компонентов надо иметь в виду суммарную концентрацию раствора.

Пусть a будет число молекул NaOH, а b — число молекул KOH в одном cm^3 раствора. Допустим, что каждый ион Na^+ участвует в электропроводности среди $a+b$ диссоциированных молекул NaOH, а каждый ион K^+ — среди $a+b$ молекул KOH. Обозначим удельную электропроводность $a+b$ молекул NaOH через χ°_{NaOH} и $a+b$ молекул KOH — χ°_{KOH} . Ввиду того, что в растворе имеются a молекул NaOH и b молекул KOH, то удельная электропроводность смеси будет равна

$$\frac{\chi^\circ_{\text{NaOH}} a}{a+b} + \frac{\chi^\circ_{\text{KOH}} b}{a+b} = \chi \quad (2)$$

Выражая число молекул их концентрациями, получаем следующее выражение

$$\frac{\chi^\circ_{\text{NaOH}} C_{\text{NaOH}}}{C^*} + \frac{\chi^\circ_{\text{KOH}} C_{\text{KOH}}}{C^*} = \chi \quad (3)$$

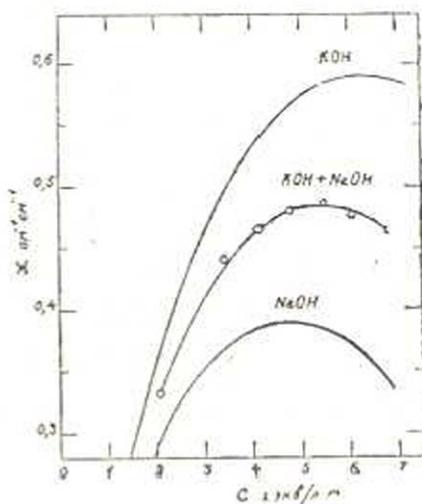
или

$$\Lambda^\circ_{\text{NaOH}} C_{\text{NaOH}} + \Lambda^\circ_{\text{KOH}} C_{\text{KOH}} = \chi \cdot 1000, \quad (4)$$

где χ° и Λ° — удельная и эквивалентная электропроводность каждого компонента при суммарной концентрации смеси C^* .

В таблице 2 приведены электропроводности смесей NaOH+KOH, вычисленные из уравнения (4). Как видно, теоретические значения хорошо совпадают с экспериментальными данными, что показано также графически на фиг. 4. Кривая NaOH+KOH получена согласно уравнения (4), а кружками указаны экспериментальные данные.

В заключение отметим, что если зависимость между удельной электропроводностью и концентрацией компонентов прямолинейная, то уравнения (1) и (4) дают одни и те же значения удельной электропроводности смесей. Ввиду того, что прямолинейной зависимости вообще не наблюдается, то для правильной ориентировки исследования в области аддитивности электропроводности ионов применение уравнения (4) более удовлетворительно, чем уравнения (1).



Фиг. 4.

Таблица 2

Удельные электропроводности смесей NaOH+KOH при 25°C

C_{NaOH}	C_{KOH}	C'	$\%_{NaOH}$	$\%_{KOH}$	$\%_{\text{взм.}}$	$\%_{\text{теор.}}$	$\%_{(I)}$
3,22	3,47	6,79	0,344	0,588	0,465	0,464	0,850
2,90	3,12	6,11	0,366	0,580	0,477	0,480	0,832
2,66	2,78	5,44	0,382	0,584	0,485	0,485	0,801
2,32	2,43	4,75	0,390	0,560	0,480	0,47	0,740
1,93	2,03	4,07	0,386	0,548	0,465	0,463	0,695
1,66	1,74	3,40	0,333	0,494	0,440	0,33	0,621
0,996	1,04	2,03	0,295	0,352	0,333	0,333	0,410

Выводы

1. Изучены электропроводности различных растворов NaOH, KOH, Na_2CO_3 и K_2CO_3 до состояния насыщения при 25°C.

2. Изучены электропроводности смесей NaOH+KOH и показано, что явление аддитивности электропроводности компонентов можно выразить уравнением

$$\Lambda^{\circ}_{NaOH} C_{NaOH} + \Lambda^{\circ}_{KOH} C_{KOH} = \chi \cdot 1000,$$

где Λ° — эквивалентная электропроводность каждого компонента, вычисленная при суммарной концентрации смеси.

Химический институт
АН Армянской ССР

Получено 12 V 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. International Criticale Tables 6, 254.
2. Hetha, Kavadı, Sheth. Chem. Abstr. 40, 5321 (1946).
3. Строчков, Мусяков, Меламед, Прокофьева. О химических процессах при получении оксид алюминия по методу спекания. Г. И. Прикладной химии, 32, 95 (1940).
4. Darken, Meer. J. Am. Chem. Soc. 64, 621 (1942).
5. Monk, J. Chem. Soc. 429 (1949).
6. Rifson, Hasfed. J. Chem. Phys. 16, 11 (1948).
7. Усанович. ЖФХ, 7, № 6, 871 (1936).
8. Simpbell, Gray, Kartzmark. Canad. J. Chem. 31, 617 (1953).
9. Финкельштейн. ЖФХ, 7, № 6, 742 (1936).
10. Усанович. ДАН СССР, № 7—8, 518 (1935).
11. Семениченко. ЖПФХО, 56, 541 (1925).
12. Vjerrum. Dansk. Vid. Selsk. Mat.-fys. Medd. 7, № 9 (1926).
13. Наумова. ЖОХ, 9, 1435 (1949).
14. Глестон. Введение в электрохимию. Москва, 1951, стр. 82.

Մ. Գ. Մանվելյան, Տ. Վ. Բրմոյան, Ա. Գ. Եգանյան, Ա. Մ. Գոչարյան

ԽԻՏ ՀԻՄՆԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՅՅՆԵՐԻ ԵՎ NaOH+KOH
ԽԱՌՆՈՒՐԳՆԵՐԻ ԷԼԵԿՏՐՈՎԱԶՆՈՐԳԱԿԱՆՈՒՅՅՈՒՆԸ 25°C-ՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Որոշվել է NaOH-ի, KOH-ի, Na₂CO₃-ի, K₂CO₃-ի լուծույթների, ինչպես նաև NaOH+KOH խառնուրդների էլեկտրահաղորդականությունը 25°C-ում: Ցույց է արվել, որ NaOH-ի λ —V C կորն ունի բարդ բնիացք անցման շրջ կետերով, ընդ որում Փյուրա — Հյուբերի թերիայից շեղումը խիտ լուծույթների դեպքում չի կարելի վերացնել ուղղումներով: Հեղինակների կարծիքով, X—C կորերում գոյաթյուն անկողյց մաքրվում կետերի հիմնական պատճառ էլեկտրաստատիկ ուժերի փոփոխությունն է իոնների միջև, համանարար խոնական զույգերի առաջացումը:

Տրվել է NaOH—KOH խառնուրդ լուծույթների էլեկտրահաղորդականություն (X^o) արտահայտող նեանյայ նոր համասարումը

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = X \cdot 1000,$$

որը տարրերում է ստորական զումարային համասարումից նրանով, որ λ_1 և λ_2 վրենդից ներկայացնում են ոչ թե C₁ և C₂ կոնցենտրացիա ունեցող կամպոնենտների էլեկտրահաղորդականությունը, այլ յուրաքանչյուր կամպոնենտի էլեկտրահաղորդականությունը խառնուրդի ընդամուր C₁—C₂ կոնցենտրացիայի համար Փորձական ավյալները համընկնում են նոր համասարումից հաշվված արժեքների նեա և, ընդհանրապես, խիտ տարրերում են ստորական համասարումից հաշվված արժեքներից: Նոր համասարումն ունի բնականորեն բնայթ, իսկ ստորական համասարումը դրա մտանայար զեղքն է:

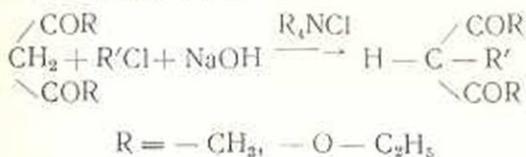
ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Т. Бабалян, А. А. Григорян

Алкилирование в водной среде в присутствии
 четвертичных аммониевых солей

II. Азот-алкилирование ароматических аминов

В работе [1] было показано, что в присутствии каталитических количеств четвертичных аммониевых солей можно осуществить углерод алкилирование в водно-щелочной среде:

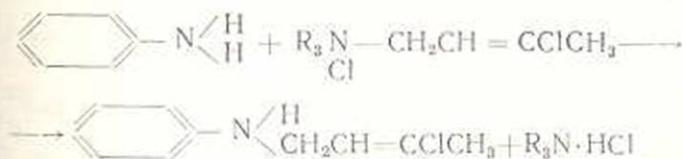


Этим путем были алкилированы ацетилацетон, ацетоуксусный и малоновый эфиры.

В качестве галогидных алкилов брались 1,3-дихлорбутен-2, хлористый бензил и бромистый аллил.

Было интересно выяснить влияние четвертичных аммониевых солей на реакцию азоталкилирования ароматических аминов. Последние, если и образуют четвертичные аммониевые соли, то не особенно легко.

Как известно, N-хлорбутенил-ариламины с хорошим выходом получают при многочасовом нагревании смеси ариламина с четвертичными аммониевыми солями, содержащими хлорбутенильный радикал [2].



При этом продукты получают более чистыми и с лучшими выходами, чем при непосредственном взаимодействии ариламинов с 1,3-дихлорбутеном-2. Было показано [3], что при непосредственном взаимодействии анилина с 1,3-дихлорбутеном-2 высокий выход получается лишь при трехкратном избытке анилина и наличии молярного количества щелочи.

Опыты показали, что присутствие каталитических количеств четвертичных аммониевых солей сильно ускоряет реакцию азоталкилирования ароматических аминов и приводит к довольно хорошим выходам

Алкилированию подвергались — анилин, орто-толуидин, орто-, мета- и пара-анилидины, пара-фенетидин, α - и β -нафтамины, ацетанилид и фенацетин.

В качестве галоидалкила брались 1,3-дихлорбутен-2 и хлористый бензил. Параллельно ставились контрольные опыты алкилирования этих же аминов в отсутствии катализатора. Результаты приведены в таблице. Как видно из таблицы, при одинаковой продолжительности реакции выход алкилированного продукта, в среднем, в опытах, проведенных в присутствии четвертичной аммониевой соли, в два раза выше, чем в контрольных опытах, проведенных в отсутствии четвертичной аммониевой соли.

Отдельно поставленными опытами, на примере орто-толуидина, было установлено, что выход алкилированного продукта в отсутствие четвертичной аммониевой соли остается все же низким, даже при удлинении продолжительности реакции в два-три раза.

Было выяснено также, что раствор едкой щелочи можно заменить раствором соды.

Экспериментальная часть

1. *N*-(3-хлорбутенил)-анилин. К смеси 18,6 г (0,2 м) анилина, 5,17 г (0,02 м) хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония, растворенного в 10 мл воды, 25 г (0,2 м) 1,3-дихлорбутена-2, при постоянном перемешивании, за 20 минут был прибавлен раствор 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. Температура реакционной смеси достигла 45—48°. Еще через 5 минут верхний слой был отделен. После удаления не вошедшего в реакцию 1,3-дихлорбутена-2 экстракцией подкисленного слоя эфиром амин выделен из раствора щелочью, экстрагирован и перегнан.

Получено 19,6 г (54%) вещества, т. к. 123—128 (2 мм), n_D^{20} 1,5731; d_4^{20} 1,1056.

Найдено: MR_D 54,14

$C_{10}H_{12}NClF_4$. Вычислено: MR_D 53,878

N-(3-хлорбутенил)-анилин обладает следующими константами [2]: т. к. 148—149° (13 мм); n_D^{20} 1,5756; d_4^{20} 1,103.

Получено было также 5,5 г высококипящей фракции 150—155° (2 мм), по видимому, *N*-ди-(2-хлорбутенил)-анилин.

В контрольном опыте с теми же количествами, но в отсутствие четвертичной аммониевой соли было получено 11,3 г (31%) *N*-(3-хлорбутенил)-анилина.

2. *N*-(3-хлорбутенил)-орто-толуидин. К смеси 21,4 г (0,2 м) орто-толуидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония, растворенного в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2 при перемешивании за 30 минут прибавлено, при температуре реакционной смеси 60°. 15,3 г едкого кали, растворенного в 30 мл воды. Через 10 минут после прибавления 1,3-дихлорбутена-2 подвергли обработке, аналогично предыдущей. Было получено 25,2 г (64,5%) вещества,

обладающего следующими константами: т. к. 133—137° (4 мм); d_4^{20} 1,0857; n_D^{20} 1,5661.

Найдено: MR_D 58,79

$C_{11}H_{14}NCIF_4$. Вычислено: MR_D 58,49

По литературным данным N-(3-хлорбутенил)-орто-толуидин имеет следующие константы [2]: т. к. 143—144° (8 мм); d_4^{20} 1,087; n_D^{20} 1,5689.

В контрольном опыте с теми же количествами, в отсутствие четвертичной аммониевой соли, было получено 10,1 г (25,8%) N-(3-хлорбутенил)-орто-толуидина.

В тех же условиях в отсутствие катализатора, но при удлинении продолжительности реакции до 1 ч. 40 мин. было получено 17,7 г (45,2%) N-(3-хлорбутенил)-орто-толуидина.

3. N-(3-хлорбутенил)-орто-анизидин. К 24,6 г (0,2 м) о-анизидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония, растворенного в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2, при перемешивании, при температуре в 50—53°, за 30 минут прилит раствор 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. После этого перемешивание продолжалось еще 10 минут. Далее обычная обработка. Получено 25,4 г (60%) N-(3-хлорбутенил)-орто-анизидина, т. к. 140—145° (2 мм); d_4^{20} 1,1395; n_D^{20} 1,5716.

Найдено: MR_D 61,02

$C_{11}H_{14}ClNOF_4$. Вычислено: MR_D 60,13

0,1015 г вещ.: 6,8 мл N_2 (672 мм 23°)

Найдено: % N 6,83

$C_{11}H_{14}ClNO$. Вычислено: % N 6,61

В контрольном опыте, в отсутствие катализатора, из 4,18 г (0,034 м) орто-анизидина, 4,25 г (0,034 м) 1,3-дихлорбутена-2 и 4,48 г едкого кали в 10 мл воды было получено 2 г (27,8%) N-(3-хлорбутенил)-орто-анизидина.

4. N-(3-хлорбутенил)-мета-анизидин. К 6,2 г (0,05 м) мета-анизидина, 1,5 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония, 6,3 г (0,05 м) 1,3-дихлорбутена-2 за 20 минут, при перемешивании, при 50° добавлено 5,6 г едкого кали в 20 мл воды. Перемешивание продолжалось еще 10 минут. В результате дальнейшей обработки получено 6,3 г (60%) N-(3-хлорбутенил)-м-анизидина, т. к. 170—175° (5 мм); d_4^{20} 1,1410; n_D^{20} 1,5645.

Найдено: MR_D 60,31

Вычислено: MR_D 60,13

0,1006 г вещ.: 7 мл N_2 (670 мм 23°)

Найдено: % N 7,07

$C_{11}H_{14}ClNO$. Вычислено: % N 6,61

5. N-(3-хлорбутенил)-пара-анизидин. К 24,6 г (0,2 м) пара-анизидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2, при 50° за 30 минут прибавлено 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. Перемешивание продолжалось еще

15 минут. Получено 31 г (73,2%) N-(3-хлорбутенил)-п-анизида, т. к. 153—156° (2 мм); d_4^{20} 1,1403; n_D^{20} 1,5663.

Найдено: MR_D 60,66

$C_{11}H_{14}ClNOF_4$. Вычислено: MR_D 60,13

Т. к. 163—164° (7 мм) [2]. d_4^{20} 1,1419; n_D^{20} 1,5696.

В контрольном опыте с теми же количествами, но в отсутствие катализатора было получено 16 г (37,8%) N-(3-хлорбутенил)-п-анизида.

6. N-(3-хлорбутенил)-пара-фенетидин. К 16,4 г (0,12 м) п-фенетидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 15 г (0,12 м) 1,3-дихлорбутена-2 при 60° за 20 минут, при перемешивании прибавлено 8 г едкого натра в 20 мл воды. Перемешивание продолжалось еще 20 мин. Получено 18,7 г (69,2%) N-(3-хлорбутенил)-пара-фенетидина, т. к. 175—180° (5 мм); d_4^{20} 1,118; n_D^{20} 1,5366.

Найдено: MR_D 64,65

$C_{12}H_{16}ClNOF_4$. Вычислено: MR_D 64,75

0,0972 г вещ.: 6 мл N_2 (672 мм 17°)

Найдено: % N 6,42

$C_{12}H_{16}ClNO$. Вычислено: % N 6,20

Получено было также 4,8 г высококипящей жидкости 181—195° (5 мм), по видимому, N-ди-(3-хлорбутенил)-п-фенетидин.

В контрольном опыте с теми же количествами вещества, но в отсутствие катализатора было получено 7,3 г (27,1%) N-(3-хлорбутенил)-п-фенетидина. Здесь также была получена высококипящая фракция 4,2 г 180—195° (4 мм).

7. N-(3-хлорбутенил)- α -нафтиламин. К 28,6 г (0,2 м) α -нафтиламина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2, при 85—90°, за 25 минут при постоянном перемешивании прибавлено 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. Перемешивание продолжалось еще 20 минут. Получено 37,4 г (80,7%) N-(3-хлорбутенил)- α -нафтиламина, т. к. 178—180° (2 мм); d_4^{20} 1,1533; n_D^{20} 1,6387.

Найдено: MR_D 72,17

$C_{14}H_{14}ClNF_6$. Вычислено: MR_D 71,76

По литературным данным [3]: т. к. 190—201° (11 мм); d_4^{20} 1,1591; n_D^{20} 1,6498.

В контрольном опыте без катализатора получено 10 г (21,6%) N-(3-хлорбутенил)- α -нафтиламина.

8. N-(3-хлорбутенил)- β -нафтиламин. К 14,3 г (0,1 м) β -нафтиламина, 2,5 г (0,01 м) хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 5 мл воды, 13 г (0,1 м) 1,3-дихлорбутена-2, при 75—80° за 20 минут при постоянном перемешивании прибавлено 8 г едкого кали в 20 мл воды. Перемешивание продолжалось еще 10 минут. Затем

верхний слой отделен и промыт петролейным эфиром. Остаток высушен и перегнан. Получено 16,9 г (73%) N-(3-хлорбутенил)- β -нафтиламина, т. к. 185—190° (2 мм); d_4^{20} 1,1587; n_D^{20} 1,6457.

Найдено: MR_D 72,2

C₁₄H₁₄ClNF₆. Вычислено: MR_D 71,76

По литературным данным [3]: т. к. 200—202° (10 мм); d_4^{20} 1,485; n_D^{20} 1,6512.

В контрольном опыте в отсутствии катализатора получено 3,2 г (14%) N-(3-хлорбутенил)- β -нафтиламина.

9. N-(3-хлорбутенил)-ацетанилид. К 27 г (0,2 м) ацетанилида, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2, при 55° за 30 минут при постоянном перемешивании прибавлен раствор 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. Перемешивание продолжалось еще 10 минут. Получено 36,5 г (81,6%) N-(3-хлорбутенил)-ацетанилида, т. к. 135—140° (3 мм); d_4^{20} 1,1213; n_D^{20} 1,5451.

Найдено: MR_D 63,21

C₁₂H₁₄NOClF₄. Вычислено: MR_D 63,89

По литературным данным [3]: т. к. 148—149° (10 мм); d_4^{20} 1,1209; n_D^{20} 1,5462.

В контрольном опыте в отсутствии четвертичной аммониевой соли получено 15,7 г (35,1%) N-(3-хлорбутенил)-ацетанилида.

10. N-(3-хлорбутенил)-фенацетин. К 35,8 г (0,2 м) фенацетина; 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25 г 1,3-дихлорбутена-2 на кипящей водяной бане, при перемешивании, за 25 минут прибавлен раствор 15,3 г едкого кали в 30 мл воды. Перемешивалось еще 10 минут. Верхний слой отделен, высушен, перегнан. Получено 32 г (60%) N-(3-хлорбутенил)-фенацетина, т. к. 173—174° (2,5 мм); d_4^{20} 1,1235; n_D^{20} 1,5258.

Найдено: MR_D 73,04

C₁₄H₁₈ClNO₂F₄. Вычислено: MR_D 73,12

0,1030 г вещ.: 5,6 мл N₂ (675 мм, 19,5°)

Найдено: % N 5,6

C₁₄H₁₈ClNO₂. Вычислено: % N 5,2

0,1006 г вещ.: 0,0515 AgCl

Найдено: % Cl 12,67

C₁₄H₁₈ClNO₂. Вычислено: % Cl 13,27

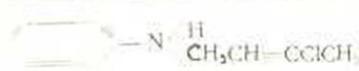
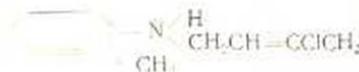
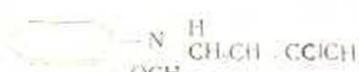
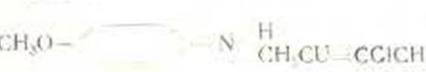
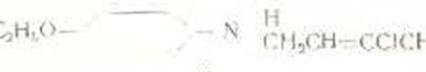
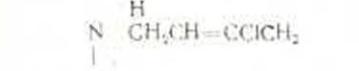
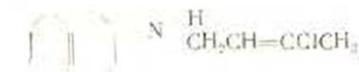
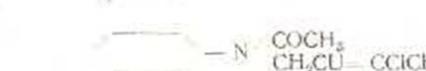
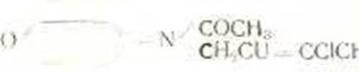
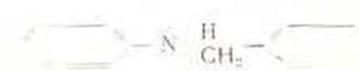
В контрольном опыте без катализатора получено 20 г (37,3%) N-(3-хлорбутенил)-фенацетина.

11. N-бензиланилин. К 18,6 г (0,2 м) анилина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25,3 г (0,2 м) хлористого бензила при перемешивании, за 20 минут, при 45—50° прибавлен раствор 10 г едкого натра в 30 мл воды. Перемешивалось

еще 5 минут. Верхний слой отделен и обработан, как при получении N-(3-хлорбутенил)-анилина. Получено 23 г (59,5%) N-бензиланилина, т. к. 163—166° (5 мм), т. пл. 36—37°. По литературным данным N-бензиланилин имеет т. к. 201—203° (37 мм [4], т. пл. 37—38° [5]).

Получено также 8,5 г (15,5%) высококипящей фракции, 208—210° (4 мм), т. пл. 71—72°, т. пл. пикрата 132—133°. По литературным данным дибензилфениламин имеет т. пл. 71—72° [6] и пикрат с т. пл. 131—132° [7].

В контрольном опыте без катализатора получено 6,5 г (17,1%) бензилфениламина.

№№ п/п	Полученные соединения	Выход в присутствии катализатора в %	Выход в отсутствии катализатора в %
1		54,0	31,0
2		64,5	25,8
3		60,0	27,8
4		60,0	—
5		73,2	37,8
6		69,2	27,1
7		80,7	21,0
8		73,0	14,0
9		81,6	35,1
10		60,0	37,3
11		59,5	17,1
12		58,0	21,4

12. *N*-бензил-орто-толуидин. К 21,4 г (0,2 м) орто-толуидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил)-аммония в 10 мл воды, 25,3 г хлористого бензила, при 50—55°, при постоянном перемешивании прибавлен за 20 минут раствор 10 г едкого натра в 25 мл воды. Перемешивалось еще 5 минут. После обработки, аналогичной в предыдущем опыте, получено 25 г фракции 165—180° (3 мм), полностью закристаллизовавшейся. Перекристаллизацией получено 23 г (58%) вещества с т. пл. 62°. По литературным данным *N*-бензил-орто-толуидин кипит при 200—210° (15—25 мм [8], т. пл. 62° [9]).

В контрольном опыте без четвертичной аммониевой соли получено 8,5 г (21,4%) бензил-орто-толуидина.

13. Замена едкого натра содой. К смеси 21,4 г орто-толуидина, 5,17 г хлористого диметил-ди-(3-хлорбутенил) аммония в 10 мл воды, 31,8 г безводного углекислого натрия, 60 мл воды при 60—65° прибавлено 25 г 1,3-дихлорбутена-2. Перемешивание продолжалось 40 минут. Затем обычная обработка. Получено 24,2 г фракции 160—164° (7 мм).

Выход 61,8% теоретического.

В контрольном опыте в отсутствие катализатора получено 12 г (30,6%) вещества.

В ы в о д ы

1. Реакция азот-алкилирования ароматических аминов в водно-щелочной среде сильно ускоряется присутствием каталитических количеств четвертичных аммониевых солей.

2. *N*-хлорбутенил-орто-, мета-анилидины, -пара-фенетидин и -фенацетин синтезированы впервые.

Ереванский зооветеринарный институт

Поступило 11 X 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабян А. Г., Гамбарян Нина и Гамбарян Н. П. ЖОХ, 24, 191 (1954).
2. Бабян А. Г. и Гамбарян Н. П. Изв. АН Армянской ССР, физ.-мат., естеств. и техн. науки, III, 6, 563 (1950).
3. Гамбарян Н. П. Канц. диссертация, таблицы 1 и 6.
4. Tafel Pfeffermann. В. 35, 1513 (1902).
5. Brand В. 42, 3461 (1909).
6. Wedekind. В. 32, 521 (1893).
7. Matzudaira. В. 20, 1611 (1887).
8. Rabaut. Bl. [3], 5, 742.
9. Law. Soc. 101, 158.

Յ. Թ. Բարսյան, Յ. Ս. Գրիգորյան

ԱԼԿԻԼԱՑՈՒՄ ՉՈՐՄՓՈՒԱՐԻՆՎԱԾ ԱՄՈՆԻՈՒՄ ԱՂԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ՝
ՋՐԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

II. Արամատիկ ամինների ազոտ ալկիլացումը

Յույց է տրված [1], որ չորսփոխարինված ամոնիում ազերի կատալիտիկ քանակների ներկայությամբ կարելի է կատարել ամոնիում-ալկիլացում՝ ջրանիմային միջավայրում:

Հետաքրքիր էր պարզել այդ ազերի ազդեցությունը նաև ազոտալկիլացման սեպտիկայի վրա:

Փորձերը շույց տվին, որ արամատիկ ամինների ազոտալկիլացման սեպտիկայի ժամանակ նույնպես չորսփոխարինված ամոնիում ազերը շույթաբերում են կատալիտիկ ազդեցություն:

Սաացված նյութերից N-Ն-բյուրուսթենիլ-(օրաո- և մետա-անիլիդիլ)-ները, N-(Յ-բյուրուսենիլ)-պարաֆենիլիդիլը և N-(Յ-բյուրուսենիլ)-ֆենաչեալիլը նկարագրվում են առաջին անգամ:

Н. С. Бендукидзе

О третичных кораллах окрестностей Еревана

По поручению Института геологии и минералогии Академии наук Грузинской ССР летом 1951 г. автор занимался сбором коралловой фауны третичных отложений окрестностей г. Еревана. Эта работа велась в сотрудничестве с Институтом геологических наук АН Армянской ССР, оказавшим ценную помощь в организации экскурсий и передавшим для определения несколько экземпляров кораллов.

Согласно данным К. Н. Паффенгольца, А. А. Габриеляна и др. [1, 2, 3, 4], а также по нашим беглым наблюдениям, к юго-востоку от Еревана третичные отложения слагают т. н. Шорагбюрскую антиклиналь, в крыльях которой обнажается „Шорагбюрская свита“ — толща крупнозернистых, слабо сцементированных известковистых песчаников и глин с фауной кораллов.

Мощность горизонта, богатого кораллами, местами достигает 60 м. Единочные же коралловые колонии встречаются на различных горизонтах этой мощной свиты (900—1000 м).

Кораллы в верхах свиты образуют отдельные, неправильной формы, рифовые „банки“, представляющие собой неравномерно сцементированные песчаные известняки. Коралловые образования весьма изменчивы по размерам. В низах свиты они слагают биогермы размерами от нескольких дециметров до 1—2 м. В верхах свиты возрастают как мощность, так и протяженность этих тел, образующих „банки“. Последние достигают 30—60 м по мощности и распространяются на сотни метров.

Горизонт массового распространения кораллов в верхах Шорагбюрской свиты армянские геологи называют „горизонтом Кеара-Молла“.

Изученная коралловая фауна взята на г. Кеара-Молла, близ сел. Шорагбюр и на северных склонах г. Кузей, где фауна собрана из трех горизонтов; кроме того кораллы были собраны также в окрестностях сел. Битлиджи, расположенном южнее всех упомянутых пунктов.

Из сказанного видно, что в Шорагбюре (ядро складки) обнажены более древние слои, чем на г. Кеара-Молла и Кузее. Что же касается слоев Битлиджи, вопрос об их стратиграфическом положении остается открытым, хотя они и выражены в фации, обычной для Шорагбюрской свиты.

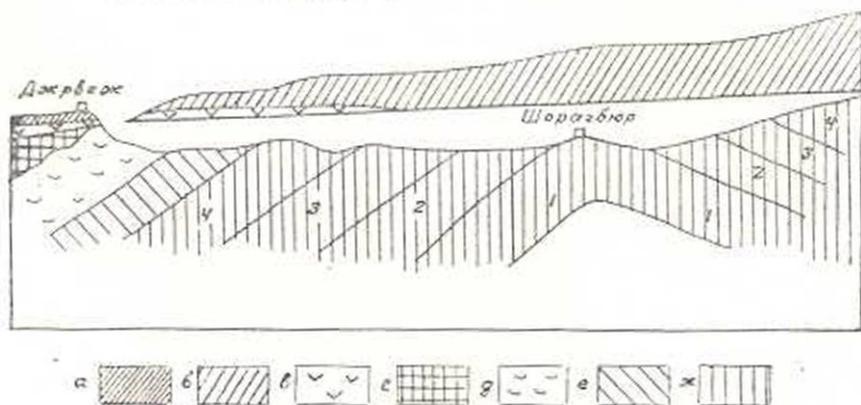
Полный список определенных форм содержит 51 вид гексакораллов, которые относятся к 34 родам (см. таблицу). Среди них имеется только два вида, которые неизвестны в отложениях моложе эоцена. Подавляющее же большинство форм (41) описано из олигоцена.

Некоторые из указанных в списке видов (7 форм) встречаются как в олигоцене, так и в эоцене и для целей детальной стратиграфии непригодны.

Как видно из прилагаемого списка, из г. Кеара-Молла встречено 34 вида, из которых 27 в северной Италии появляются лишь с олигоцена. При этом встречено 4 представителя рода *Utophyllia*. Этот род, согласно монографии Уэльса и Вогана, появляется в олигоцене. Кроме того, имеются 4 формы общих для олигоцена и верхнего эоцена. Встречено еще два вида, из которых один описан из миоцена, другой же — из третичных отложений Борнео, предположительно относимых опять-таки к миоцену.

Следовательно, в составе фауны г. Кеара-Молла не встречено ни одного эоценового вида. Подавляющее же большинство видов (27 из 34) считается характерным для олигоцена. Отметим, что из 27 олигоценных видов 17 указываются из среднего олигоцена (рубельский ярус — слои Кастельгомберто), 4 — из нижнего олигоцена (латторфский ярус — слои Кросоры), остальные же 6 являются вообще олигоценными.

Фауна, собранная из наиболее высоких слоев с кораллами, обнаруженных на г. Кузей (панка № 4, фиг. 1), состоит из 15 видов (см. таблицу). Среди них 3 формы встречаются как в олигоцене, так и в эоцене, остальные же 12 описаны из олигоцена. При этом 6 из них найдены в среднем олигоцене Италии (рубельский — Кастельгомберто).



Фиг. 1.

- а. Четвертичные базальты и туфы. б. Плиоцен; вулканогенная толща. в. Плиоцен; базальты. г. Средний миоцен. д. Нижний миоцен. е. Верхний олигоцен. ж. Средний и нижний олигоцен.

4 — горизонт Кеара-молла, 3 — горизонт ширеновых песчаников, 2 — зона *Pecten arcuatus* Bross, 1 — зона *Variamussium fallax* Korob.

По материалам А. А. Габриелина.

а 3 вида — в нижнем олигоцене (латторф — Кросары). Следовательно, наиболее вероятный возраст верхов Кузейских слоев так же олигоцен-новый.

Кораллы из средней части Кузейского разреза (в циреновых песчаниках — пачка № 3, фиг. 1) оказались относящимися к одному нижнеолигоценному виду, описанному из слоев Кросары (н. олигоцен).

В еще более низких горизонтах Кузейского разреза (пачки № 1 и № 2) встречено 5 видов. Одна форма олигоцен-эоценовая, четыре описаны из олигодена (см. табл.), среди них 2 из н. олигодена. Эта фауна указывает на наличие нижнего олигодена.

Слои, представленные у сел. Шорагбюр, расположены еще ниже в стратиграфическом отношении. Всего тут оказалось три формы (прежде отсюда кораллы не были известны). Все они встречаются как в рупельских слоях Кастельгомберго, так и в среднеэоценовых (верхний люгет) слоях S. Giovanni Nazione. Следовательно, фауна из этих слоев не может точно датировать вмещающие отложения.

Своеобразен состав коралловой фауны слоев Битлиджи. Из 14 форм, взятых из этих слоев, 10 видов описаны из олигодена, а два встречаются в верхнем эоцене Италии. Остальные две формы пользуются широким вертикальным распространением. Таким образом, эти слои должны быть отнесены скорее к олигоцену, нежели к верхнему эоцену.

Из всего вышесказанного видно, что датирование верхней части коралловой фауны Шорагбюрской свиты („Горизонт Кеара-Молла“) олигоценом не вызывает сомнений и предположительно можно считать ее среднеолигоценовой.

Аналогичная фауна нами взята также в верхней части Кузенского разреза.

Относительно нижней части Шорагбюрской свиты следует отметить, что, исходя из фауны кораллов, здесь можно говорить уже о наличии н. олигодена. Самые нижние слои, составляющие ядро Шорагбюрской антиклинали, могут относиться и к эоцену, хотя нельзя с уверенностью отрицать их принадлежность к низам олигодена.

Институт геологии и
минералогии АН
Грузинской ССР

Поступило 13 X 1953

Список типичных кораллов

- | | |
|---|---------------|
| 1. <i>Favia (Isastrava) elegans</i> Reuss | 3 |
| 2. <i>Phyllocoenia macrokanta</i> Abich | 2 (из них 1*) |
| 3. <i>Brachiphyllia umbellata</i> Reuss | 1 |

* Экспонаты, переданные для определения Институтом геологических наук Армянской ССР.

4. <i>Heliastrea Guelardi</i> DeFrance	I
5. " <i>Bouziana</i> Reuss	I
6. " <i>Lukasana</i> Reuss (DeFrance sp.)	I
7. " (<i>Orbicella</i>) <i>transiens</i> Felix	I
8. " <i>Defranci</i> Edw. et Haime var. 2 <i>Abich</i>	*)
9. <i>Ulophyllia macrogyna</i> Reuss	I
10. " <i>profunda</i> M. Edw. et Haime	*)
11. <i>Mycetophyllia mirabilis</i> Felix	*)
12. <i>Lalimaandra discrepans</i> Reuss	I
13. <i>Dimorphophyllia lobata</i> Reuss	I
14. " <i>oxylopha</i> Reuss	I
15. <i>Oroseris d'Achiardi</i> Reuss	I
16. <i>Podabacia prisca</i> Reuss	I
17. <i>Rhabdophyllia stipta</i> d'Achiardi	*)
18. <i>Stylocenia lobato-rotundata</i> Michelin	*)
19. <i>Columnastra bella</i> Reuss	I
20. <i>Astraeopora decaphylla</i> Reuss	*)
21. <i>Actinaeis delicata</i> Reuss	7
22. <i>Polytremacis Belleardii</i> J. Haime	I
23. <i>Porites ramosa</i> Catullo	6

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Габриелян А. А. Третичные отложения Котайкского района Армянской ССР (стратиграфический очерк), 1947.
2. Габриелян А. А. О возрасте и стратиграфии важнейших третичных толщ Армении. «Научные труды» Ереванского госуниверситета, т. 37, 1952.
3. Паффенгольц К. Н. К стратиграфии и тектонике олигоцена и соленосной толщи Армении и южной части Грузии. Зап. Всес. Мин. общ., ч. 67, 1938.
4. Abich H. Geologie des Armenischen Hochlands. 1882.

Ն. Ս. Բենդուկիձե

ԵՐԵՎԱՆԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ԵՐՐՈՐԴԱՅԻՆ ԿՈՐԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Երևանից հարավ և հարավ-արևելք բնկած տարածության վրա, Շոբաղբյուր գյուղի շրջանում լայնորեն տարածված են ավազա-կավային նստվածքներ, որոնք, բոս որոշ հեղինակների, դասվում են օլիգոցենի, իսկ բոս մյուսների՝ միջին էոցենի ժամանակաշրջանին:

Նստվածքների այդ շերտախմբի Քեարամուլայի հորիզոնից և մի շարք այլ մասերից հեղինակը որոշել է կորալների 51 տեսակ, որոնք բնդ-հանուր ամամբ բնորոշում են համապատասխան շերտերի ստորին և միջին օլիգոցենյան հասակը:

	Место вытия и количество экземпляров							Олигоцен								16
	Г. Кузед							9	10	11	12	13	14	15		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15		
1. <i>Stephanosmitia annulata</i> Reuss	2							++	++	++	++					
2. <i>Suichomotrpa conglobata</i> Reuss	1					1		++	++	++	++					
3. <i>glegaria</i> Reuss	1					1		++	++	++	++					
4. <i>Brachyrhynchia imbellata</i> Reuss	2	1					1	+	+	+	+					
5. <i>Rhyolobonia macrocarpa</i> Abich	4							+	+	+	+					
6. <i>Iradians</i> Edw. et Haime	1							+	+	+	+					
7. <i>Nelastriava Galardi</i> Defrance	1							+	+	+	+					
8. <i>immersa</i> Reuss						2		+	+	+	+					
9. <i>Bohemna</i> Reuss	1							+	+	+	+					
10. <i>Luasana</i> Reuss (Defrance)	3							+	+	+	+					
11. <i>imparalis</i> Reuss	2							+	+	+	+					
12. <i>subcolorata</i> Reuss							1	+	+	+	+					
13. <i>Defrancei</i> Edw. et N. var. ² Abich	2						1				+					
14. <i>Oligorhynchia</i> Reuss	1														описан из миоцена Баварии.	
15. <i>(Orbicella) transiens</i> Eich	1	1													Австро-Венг. монархия описан из миоцена остр. Борнио	
16. <i>Cladocora</i> cf. <i>oligocena</i> <i>Densiedt</i>	1														описан из олигоцена Италии	
17. <i>Rhachorhynchia stipula</i> d'Aschard	1						1								описан из верхн. эоцена Италии	
18. <i>Stylangia elegans</i> Reuss						1										
19. <i>Stylorhyncha conferta</i> Reuss						1		+								
20. <i>tuberosa</i> d'Aschard	1														описан из эоцена Италии	

	1	2	3	4
21. <i>Stylina fasciculata</i> Reuss			1	
22. <i>Stylocoenia lobato-rotundata</i> Mich.		6	2	
23. <i>Astrocoenia decaturnensis</i> Vough.		3		
24. <i>Columnastraea bella</i> Reuss		3		
25. <i>Symphyllia microtopha</i> Reuss				
26. <i>Dimorphophyllia oxylopha</i> Reuss		4		
27. " <i>lobata</i> Reuss		2		
28. <i>Latimacandra discrepans</i> Reuss		2		
29. <i>Ulophyllia macrogyra</i> Reuss		3		
30. " <i>acutijuga</i> Reuss		1		
31. " <i>profunda</i> M. Edw. et Halme		3		
32. " <i>irradians</i> Reuss		1		
33. <i>Isastraea affinis</i> Reuss			1	
34. <i>Favia (Isastraea) elegans</i> Reuss		9	2	
35. " <i>confertissima</i> Reuss			1	
26. <i>Dyplastraea crassolamellosa</i> (Duncan) H. Dighton Thomas		1	1	
37. <i>Thamnastraea leptophylla</i> Reuss		1		
38. <i>Kuhnophyllia centrifuga</i> (Reuss. sp.) vaughan et Wells		1		
39. <i>Podabacia prisca</i> Reuss		2		
40. <i>Cyathoseris pseudomacandra</i> Reuss				1
41. <i>Oroseris d'Achiardii</i> Reuss				
42. <i>Mycedium profundum</i> Reuss		1		
43. <i>Comoseris alternans</i> Reuss		1	1	
44. <i>Mycetophyllia mirabilis</i> Felix		2		
45. <i>Actinacis delicata</i> Reuss		8	4	
46. <i>Leptorhis eocaenica</i> Reuss				
47. <i>Astracopohra decaphylla</i> Reuss				
48. " <i>exigua</i> Reuss				
49. <i>Polytremacis Bellardii</i> J. Halme				
50. <i>Dendracis Haidingeri</i> Reuss			1	
51. <i>Porites ramosa</i> Catullo		10	8	

5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1		1	+			-	+		+	
		1		+	+		+				
		1		+	+	+					
			1	+	+						
				+	+						
3		2		+			+				
		2		+			+	+			
				+							
	2			+	+						
			1	+							
1	3				+						описан из миоцена (?) остр. Борнео
	2					+					описан из среднего эоцена Дабрича (Dabricsa—бывш. Австро-Венг. монархия)
	1		1	+							
2				+							
2	1			+	+						
3		3		+	+	+					описан из эоцена Италии

Л. Т. Кулюян

Экспериментальное исследование скорости горения молодых видов многозольного топлива различной плотности

1.

Эффективное сжигание топлива вообще и многозольного в особенности требует детального изучения сложного механизма горения. С точки зрения разработки и осуществления необходимых мероприятий для рационализации и интенсификации процессов сжигания топлива в печных и топочных устройствах, несомненно, имеет большое значение исследование скорости горения.

Для наиболее ценных видов твердого топлива углерод является основным компонентом горючей части и обуславливает процесс горения в целом.

Поэтому и в современной диффузионно-кинетической теории горения, созданной и развитой советскими учеными, основные закономерности установлены для процесса горения углерода.

Известно, что большинство местных видов топлива СССР относятся к менее теплоценным, характеризуются сравнительно небольшим содержанием углерода и высокой зольностью. Основная доля теплотворной способности горючей части этих топлив относится не к коксовому остатку, а к летучим. Так называемый „коксовый остаток“ зачастую наполовину состоит из негорючей минеральной части, что делает нецелесообразным его использование в качестве кокса. Горение таких видов топлива в целом и их коксового остатка в значительной мере зависит от процесса выхода и горения летучих. Таким образом, объектом исследования горения местного топлива с большим содержанием летучих и минеральных примесей должно являться само натуральное топливо, а не его коксовый остаток.

Известно, что горение топлива, богатого летучими, имеет явно выраженный стадийный характер [1, 2, 3,], особенно в условиях невысокого пирометрического уровня слоевого процесса. Поэтому и возможно достаточно удовлетворительно исследовать процесс горения коксового остатка как завершающую стадию реального процесса горения натурального топлива.

С практической точки зрения исследование процессов горения твердого натурального топлива должно осуществляться в реальных

условиях, т. е. в топочных устройствах или же в таких лабораторных установках, которые более или менее точно воспроизводят реальные топочные процессы — слоевые или камерные.

Непосредственным исследованием горения сложного комплекса частиц топлива в действительных условиях устанавливаются усредненные характеристики процесса, отражающие, кроме всего прочего, и специфические особенности самого слоя или пылеугольного факела.

В результате оказывается трудным установить влияние отдельных физических параметров топлива, например его плотности, на процесс горения. С этой точки зрения может оказаться целесообразным на первом этапе в качестве объекта исследования принять отдельную частицу топлива. Обычно элементарное горение осуществляется на частицах углерода размерами $0,5 \div 2$ см. Небольшие размеры обеспечивают равнодоступность поверхности частицы к диффузионным потокам, изотермичность поверхности горения, а также небольшое влияние внутреннего реагирования. Все это создает благоприятные условия для аналитического изучения процесса. Однако частицы молодых видов натурального топлива, обладающие пористой структурой, должны иметь более значительные размеры, во избежание достижения соизмеримости наиболее крупных пор с размерами самих частиц.

2.

Большинство допущений, которые принимаются для облегчения аналитического исследования горения углеродной частицы, оказывается не совсем приемлемым для изучения горения сравнительно крупной частицы молодых видов натурального топлива. В силу этого весьма трудно использовать те количественные закономерности (хотя бы для коксового остатка исследуемой частицы), которые были получены для углеродной частицы в работах А. С. Предводителя, Л. Н. Хитрина и других. Прямое использование этих зависимостей связано с трудностями определения некоторых важных физических констант, как, например, коэффициентов внешней и внутренней диффузии, величины внутренней поверхности пор и т. д. Наличие значительного количества минеральных примесей еще больше осложняет экспериментальное и теоретическое исследование процесса горения коксового остатка.

Несмотря на нестационарный характер горения многозольного коксового остатка, общую картину процесса можно представить пользуясь методом Блинова [4] системой уравнений (1, 2 и 3), основанных на использовании аналогии между диффузией и теплоотдачей и на некоторых допущениях, главные из которых — постоянство поверхностной концентрации кислорода (т. е. равнодоступность поверхности частицы к диффузионным потокам) и первый порядок химического реагирования по кислороду:

$$K_s^{O_2} = K C_F \quad (1)$$

$$K_s^{O_2} = h(C_o - C_F') \quad (2)$$

$$K_s^{O_2} = h'(C_F' - C_F) \quad (3)$$

где $K_s^{O_2} \left(\frac{2}{\text{см}^2/\text{сек}} \right)$ — удельная поверхностная скорость горения, определяемая по израсходованному кислороду, C_o , C_F и C_F' — весовая концентрация кислорода соответственно в воздушной среде, на поверхности коксового остатка и на поверхности частицы, т. е. на зольной оболочке (фиг. 1), h и h' — коэффициенты диффузионного массообмена (аналогии коэффициента теплоотдачи) для диффузии кислорода к поверхности зольной оболочки и через эту оболочку.

Из (1, 2 и 3) получаем:

$$K_s^{O_2} = \frac{C_o}{\frac{1}{K} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}} \quad (4)$$

Величина $\frac{1}{K} = Z_x$ характеризует сопротивление химическому реагированию (K — константа скорости реакции, зависящая от температуры).

Величина $\frac{1}{h'} = Z_x$ характеризует сопротивление диффузии к внешней поверхности, а величина $\frac{1}{h} = Z_x$ — сопротивление диффузии через зольную оболочку.

Горение пористого коксового остатка происходит и внутри частицы (особенно при низкотемпературном режиме), т. е. кислород проникает и внутрь коксового остатка путем той же диффузии.

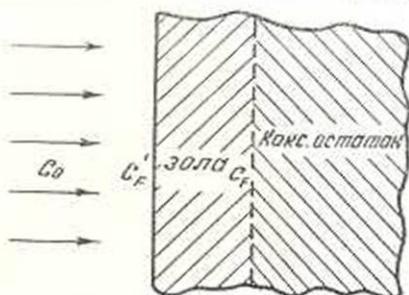
Если обозначить сопротивление диффузии через коксовый остаток Z_{ak} , то получим наиболее общее выражение, характеризующее горение зольного топлива.

$$K_s^{O_2} = \frac{C_o}{Z_x + Z_z + Z_{ak} + Z_{ak}} \quad (5)$$

или

$$K_s^{O_2} = \frac{C_o}{Z_x + Z_z + Z_{ak} + Z_{ak}} \quad (6)$$

где β — стехиометрический коэффициент, количественно характеризующий потребление кислорода углеродом, $K_s^C \left(\frac{2}{\text{см}^2/\text{сек}} \right)$ — удельная поверхностная скорость горения углерода.



Фиг. 1. Схема горения многозольного топлива.

Таким образом, скорость горения зольного топлива (вернее коксового остатка) зависит от значительного числа сопротивлений, причем последние три диффузионные сопротивления взаимно связаны и непрерывно изменяются со временем, т. е. по мере нарастания зольной оболочки. Количественное определение последних представляет большие трудности и требует очень обстоятельных экспериментальных исследований.

Определение удельной поверхностной скорости горения по выражениям 5 и 6 является весьма сложной задачей даже для крайних, наиболее характерных областей горения.

На начальном этапе познания сложного механизма горения зольного топлива должен быть использован такой метод обработки опытных данных, который не связан с непосредственным количественным определением диффузионных сопротивлений. С этой точки зрения может оказаться достаточно удовлетворительным метод, основанный на всесторонней обработке кривых выгорания.

3.

Экспериментальное исследование горения частицы натурального топлива было осуществлено методом непрерывного взвешивания. Метод газового анализа в данном случае оказался бы малоэффективным из-за чрезвычайной трудности быстрого отбора сравнительно небольшого количества продуктов горения.

В качестве реакционной печи была использована вертикальная электрическая печь с максимально допустимой температурой нагрева, 1000°C , и отверстием на днище для подвода воздуха.

Размещение горячего спая термопары внутри частицы натурального топлива, обладающего пористой структурой, технически оказалось неосуществимым.

Кроме этого, принятое большинством исследователей предварительное прессование всех исследуемых частиц для крепления их на термопару нарушает естественную физическую структуру топлива и исключает возможность изучить влияние последней (пористость топлива) на интенсивность процесса горения.

В наших опытах частицы топлива вводились в печь двумя способами — непосредственно подвешивались на жароупорной нити или на специальной решетке, свободно опирающиеся на внутренние стенки конической фарфоровой насадки. Первым способом сжигались частицы топлива, обладающего значительной плотностью — торфяные и бурогольные брикеты. На решетке сжигались частицы топлива низкой плотности (машинноформовочный торф и т. д.), прямое подвешивание которых на нити оказалось затруднительным.

Была поставлена серия опытов для определения подпирającego влияния воздушного потока на частицу топлива и особенно на решетку, для установления необходимой весовой поправки в зависимости от размеров частицы и скорости воздушного потока.

Критерием правильности всех последовательных взвешиваний служило равенство:

$$G_0 = \sum_0^n G_u + G_{\text{ост.}} \quad (7)$$

где G_0 — начальный вес частицы,

$\sum_0^n G_u$ — сумма всех отдельных оценок выгорания частицы,

$G_{\text{ост.}}$ — несгоревший остаток.

Расхождение допускалось в пределах (1,0 ÷ 1,5 %) от начального веса.

Полное озоление частицы фиксировалось при наличии равенства $G_{\text{ост.}} = A^2 G_0$, где A^2 — заранее известная лабораторная поправка.

В опытах с засадкой измерялась также температура вблизи частицы (т. е. над „слоем“). Специальными измерениями скорости потока в различных участках надрешеточного и подрешеточного пространства была установлена связь между показаниями газометра и действительным расходом воздуха.

Ввиду того, что объектами исследования являлись более реакционноспособные молодые виды топлива, опыты проводились при температуре среды $t_c = 350-800^\circ\text{C}$. Скорость подачи воздуха колебалась в пределах 15–50 см/сек. Определенная часть опытов осуществлялась в условиях естественной диффузии.

Учитывая, что частицы, начальная пористость которых $p_0 < 0,8$, после частичного или полного озоления полностью сохраняют свою геометрическую форму, значительное количество опытов было выполнено с целью выявления закономерности изменения основных размеров как частицы в целом, так и ее коксового остатка в функции от времени или от изменяющегося веса в процессе выгорания.

Для этого было приготовлено значительное количество испытуемых партий из предельно сходных по весу и размерам частиц топлива.

Все частицы данной партии сжигались по возможности в одинаковых заданных условиях, но в течение различных интервалов времени, достаточных для выгорания от 10 до 100% горючей части топлива. Вес и все размеры фиксировались после каждого интервала времени.

Сравнивая результаты опытов по каждой данной партии, можно было установить интересующие нас зависимости.

Сходимость опытов для каждой данной серии проверялась путем сравнения соответствующих кривых выгорания.

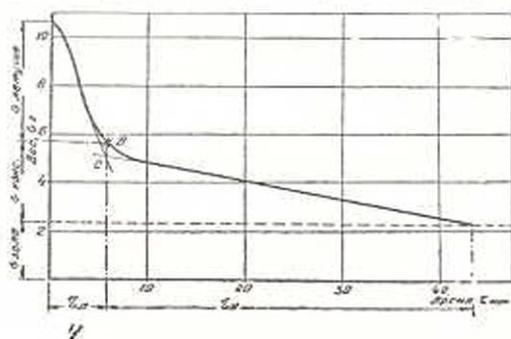
Частицы из натурального кускового топлива имели форму параллелепипеда объемом $V_0 = 12-30 \text{ см}^3$ и весом $G_0 = 8-14 \text{ г}$. Частицы из прессованного брикетного топлива имели цилиндрическую форму с диаметром $d_0 = 2,5$ и 5 см и весом $G_0 = 12 \div 35 \text{ г}$.

В описываемых опытах было использовано: 1) торф Гилийского и Кадининского месторождения Армянской ССР, характеризуемый: степенью разложения — в среднем 30—40% и зольностью $A^c = 17 \div 23\%$. 2. Бурый уголь Джаджурского месторождения Армянской ССР с зольностью $A^c = 35,6\%$.

4.

Горение всех, и особенно торфяных, частиц имело ярко выраженный стадийный характер, что давало возможность визуально фиксировать конец видимого выхода летучих.

На фиг. 2 представлена одна из кривых выгорания торфяной частицы. Касательные, проведенные к начальным и конечным участкам кривой выгорания в точках, близлежащих к промежуточному резко криволинейному участку (где тесно переплетаются обе стадии), пересекаются в точке С. Продолжение ординаты этой точки пересекает кривую в точке В и приближенно определяет границы стадии выхода летучих и горения коксового остатка. Для торфяных частиц данные, полученные таким методом, дали хорошее совпадение с результатами технического анализа торфа и визуальных наблюдений.



Фиг. 2. Кривая выгорания частицы торфа.

Учитывая, что начальный вес частиц в различных сериях опытов несколько отличался между собою, кривые выгорания были видоизменены и представлены согласно зависимости $\frac{G_u}{G_0} \% = \varphi(\tau)$, где $\frac{G_u}{G_0}$ —

количество сгоревшего топлива за время τ в процентах от начального веса. На таких „обобщенных“ кривых выгорания можно предварительно изучить влияние внешних фактов (температурные и диффузионные условия) и начальной физической структуры частицы (пористость) на интенсивность горения.

На фиг. 3 приведена одна из таких кривых для торфяных частиц различной плотности при температуре среды $t_c = 600^\circ\text{C}$ и скорости подвода воздуха $w = 30 \text{ см/сек}$.

В результате анализа „обобщенных“ кривых выгорания было установлено, кроме всего прочего, что влияние плотности топлива на интенсивность горения проявляется в различной степени на различных стадиях процесса и в различных температурных условиях горения. Оно оказывается более заметным в области низких температур, и менее заметным в области высоких температур, особенно в стадии горения коксового остатка.

5.

Соответствующая обработка данных, охватывающих результаты большого числа опытов с торфяными частицами одинакового или почти одинакового веса, показывают, что средняя интенсивность выхода летучих, характеризуемая величиной τ_a (продолжительность выхода летучих в сек), может быть выражена следующей формулой

$$\tau_a = \frac{10^3}{a(2 - \gamma_0)} \quad (8)$$

где γ_0 — начальный удельный вес частицы, значение которого колебалось в пределах $0,3 - 1,2 \text{ г/см}^3$;

a — коэффициент, зависящий от температуры среды.

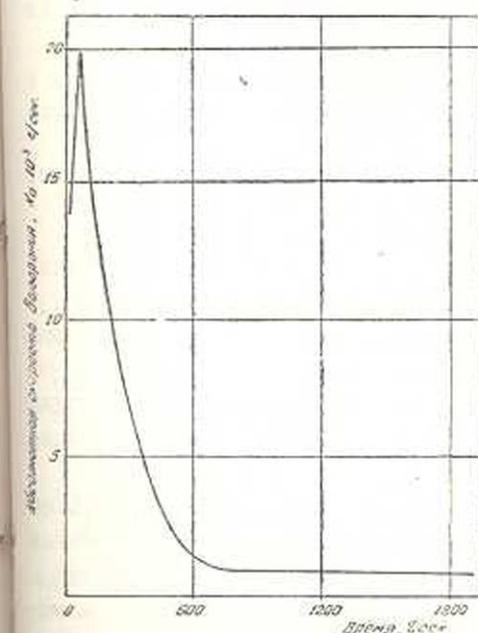
По данным опытов значение температурного коэффициента можно принять:

$$t^\circ \text{C} = 400 \quad 500 \quad 600 \quad 700$$

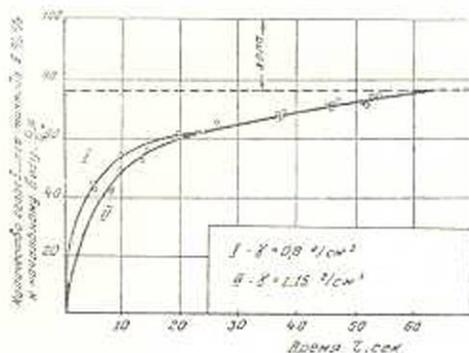
$$a \quad 1,1 \quad 1,6 \quad 2,2 \quad 3,0$$

Истинные значения абсолютной скорости выхода летучих

$K_a^* \text{ г/сек}$ были получены графическим дифференцированием кривых выгорания. В большинстве случаев кривые K_a^* , как функции времени τ (или убывающие веса G), характеризуются двумя восходящими и нисходящими ветвями (фиг. 4), причем величина и время достижения этой скорости своего максимального значения определенным образом зависит от температурных условий и плотности частицы.



Фиг. 4. Абсолютная скорость выгорания частицы торфа.



Фиг. 3. Кривые выгорания частиц торфа различной плотности, $t_{\text{тер}} = 600^\circ \text{C}$, $w = 30 \text{ см/сек}$.

Учитывая, что выход летучих происходит по всей массе частицы, была определена удельная массовая скорость K_m^* согласно выражению:

$$K_m^* = \frac{dG}{dt} \cdot \frac{1 \text{ г летучих}}{G \text{ г топлива сек}} \quad (9)$$

т. е. путем деления ординат кривых абсолютной скорости $K_a^* = f(\tau)$ на соответствующие

ординаты кривых выгорания $G_i = f(\tau)$, где G_i — текущий вес горячей частицы в момент времени (τ). Величина K_i^a имеет условный характер, так как по мере выгорания частицы ее летучая часть уменьшается, т. е. процентное содержание летучих непрерывно падает. На основании всех полученных данных, характеризующих интенсивность выхода летучих, можно заключить, что:

а) при прочих равных условиях, в том числе при одинаковых начальных весах, чем меньше плотность топлива, тем интенсивнее происходит выделение летучих;

б) максимальная скорость выделения летучих достигается тем раньше, чем выше температура среды и ниже плотность частицы;

в) для менее плотных частиц торфа, сжигаемых на „решетке“, максимальная температура у частицы („температура слоя“) совпадает во времени с максимальной скоростью выхода летучих. При этом до температуры среды $t_c < 550^\circ\text{C}$ максимальная температура у частицы $t_{ca} < t_c$, а при $t_c \geq 600^\circ\text{C}$, $t_{ca} \geq t_c$;

г) влияние скорости воздушного потока проявляется в той мере, в какой она связана с условиями воспламенения летучих и общим температурным режимом процесса.

6.

В результате сравнительного анализа значительного количества кривых выгорания можно сделать следующие общие выводы о горении коксового остатка:

1. Низкотемпературная область горения характеризуется слабой зависимостью интенсивности горения от скорости воздушного потока и устойчивой температурой возле частицы.

Выгорание коксового остатка изображается прямой линией с постоянным углом наклона к оси абсцисс. Таким образом, абсолютная скорость выгорания $K_a^c = -\frac{dG}{d\tau}$ не зависит от времени и при данных

внешних условиях горения является постоянной величиной.

2. При более высоких температурах среды и небольших значениях скорости потока наблюдается значительное падение температуры возле частицы в конце горения. На кривых выгорания более или менее четко обнаруживаются два участка прямых с различными углами наклона. Первый участок изображает горение коксового остатка при еще небольшом слое золы, а второй — при значительной толщине этого слоя.

3. Наконец, при высокой температуре среды и значительной скорости воздушного потока линия выгорания имеет криволинейный характер и абсолютная скорость оказывается зависящей от времени. Температурные и диффузионные условия горения значительно изменяются в процессе горения коксового остатка и нарастания золы оболочки.

Интенсивность выгорания коксового остатка в низкотемпературной области можно приближенно оценить величиной удельной массовой скорости (скорость горения, отнесенная к весу частицы) K_m^c , пользуясь кривыми выгорания и абсолютных скоростей K_a^c , или непосредственно по опытным данным. В последнем случае среднее значение K_m^c в интервале времени $\tau_2 - \tau_1 = \Delta \tau$ находится из выражения

$$K_m^c = \frac{\Delta G}{\Delta \tau \left(G_{10} + \frac{\Delta G}{2} \right)} \quad (10)$$

где ΔG — количество выгоревшего углерода за время $\Delta \tau$,

G_{10} — начальный вес частицы для данного интервала времени.

Среднее значение K_m^c можно определить и таким путем: согласно определению $K_m^c = -\frac{dG}{d\tau} \cdot \frac{1}{G}$. Если допустить, что в интервале времени $\tau_2 - \tau_1 = \Delta \tau$ значение $K_m^c = \text{const.}$, то получим:

$$K_m^c(\tau_2 - \tau_1) = - \int_{G_{10}}^{G_1} \frac{dG}{G} = 2.3 \lg \frac{G_{10}}{G_1},$$

откуда
$$K_m^c = \frac{2.3 \lg \frac{G_{10}}{G_1}}{\tau_2 - \tau_1} \quad (11)$$

Формула (11) дает несколько более точные результаты, чем предыдущая. Если скорость горения отнести только к горючей массе частицы, что возможно более справедливо, то получим

$$K_m^c = \frac{2.3 \lg \frac{G_{10} - A}{G_1 - A}}{\tau_2 - \tau_1} \quad (11^a)$$

где A — вес золы в частице.

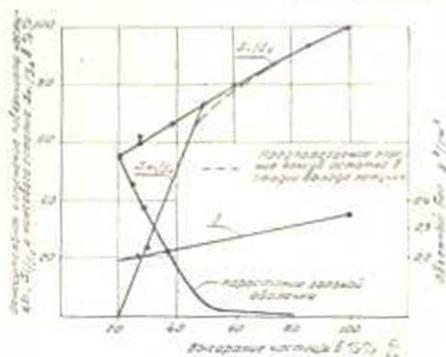
В связи с тем, что в выражениях (10) и (11) скорость горения отнесена не к горючей массе, а к общему весу частицы, в которой по мере выгорания увеличивается доля инертной массы (золы), полученные значения K_m^c имеют условный характер. Пользуясь ими, можно количественно сравнить интенсивность горения коксового остатка в различных внешних условиях у частиц одного и того же топлива с одинаковой физической структурой.

Для определения удельных скоростей горения, отнесенные к поверхности частицы K_s^c или поверхности его коксового остатка K_s^c , были использованы данные тех опытов, которые сопровождалась перио-

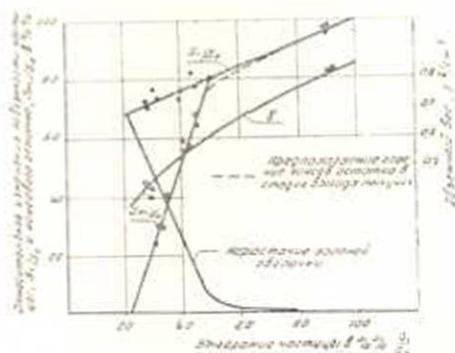
лическими измерениями размеров частицы в целом и ее коксового остатка. В этих опытах частицы сжигались в условиях, обеспечивающих более или менее равномерное выгорание.

Данные одновременных измерений основных размеров частицы и ее коксового остатка были обработаны таким образом, чтобы можно было относительное изменение диаметра, внешней поверхности, объема, объемного веса и т. д. выразить в функции от относительного изменения веса частицы.

Так, например, кривые $\frac{S_1}{S_0} = f_1\left(\frac{G_1}{G_0}\right)$ и $\frac{S_{кл}}{S_0} = f_2\left(\frac{G_1}{G_0}\right)$ на фигурах 5 и 6 выражают относительное изменение суммарной внешней поверхности частицы и ее коксового остатка в зависимости от процентного изменения веса частицы.



Фиг. 5. Определение поверхности частицы торфа и ее коксового остатка в процессе горения. Плотность частицы $\gamma_0 = 0,4 \text{ г/см}^3$.



Фиг. 6. Определение поверхности частицы торфа и ее коксового остатка в процессе горения. Плотность частицы $\gamma_0 = 0,85 \text{ г/см}^3$.

Зная начальную поверхность частицы S_0 и пользуясь кривыми выгорания, можно в любой момент процесса горения определить суммарную внешнюю поверхность частицы S_1 и ее коксового остатка $S_{кл}$.

Как видно из приведенных фигур, зависимость $\frac{S_1}{S_0} = f_1\left(\frac{G_1}{G_0}\right)$ изображается почти прямой линией, пересекающей ось относительного изменения веса частицы $\frac{G_1}{G_0}$ в точке, абсцисса которой соответствует зольности сжигаемого топлива.

Несколько неопределенно поведение этой кривой в начальный момент горения коксового остатка. Если продолжить ее до пересечения с кривой $\frac{S_{кл}}{S_0}$, то абсцисса точки пересечения с достаточной точностью будет соответствовать уже известному процентному содержанию летучих. Так как горение коксового остатка, хотя и в слабой форме, может протекать и в конце выхода летучих, пунктирной ли-

нией показано предполагаемое поведение кривой $\frac{S_{ki}}{S_0}$ в стадии выхода летучих.

Здесь же нанесены кривые, изображающие нарастание зольной оболочки по мере выгорания топлива. Ординаты последних кривых получены как разности соответствующих ординат кривых $\frac{S_i}{S_0}$ и $\frac{S_{ki}}{S_0}$.

Кривые на фигурах 5 и 6 показывают, что чем меньше начальная плотность частицы, тем быстрее происходит уменьшение ее размеров, т. е. тем круче идут кривые $\frac{S_i}{S_0}$, $\frac{V_i}{V_0}$ и т. д.

В результате математической обработки кривых $\frac{S_i}{S_0} = f_1\left(\frac{G_i}{G_0}\right)$ и $\frac{S_{ki}}{S_0} = f_2\left(\frac{G_i}{G_0}\right)$ получаем выражения для определения внешней поверхности частицы торфа S_i и ее коксового остатка S_{ki} для любого момента горения:

$$S_i = S_0 \left[(0,63 - 0,29 \gamma_0) \frac{G_i}{G_0} + (0,35 + 0,28 \gamma_0) \right] \text{ см}^2, \quad (12)$$

$$S_{ki} = S_0 a_1 \left(\frac{G_i}{G_0} - \frac{\Lambda^2}{100} \right) \text{ см}^2, \quad (13)$$

где S_0 — начальная величина внешней поверхности частицы;

a_1 — коэффициент, зависящий от начальной плотности частицы.

Для горфяных частиц он колеблется в пределах 2,3 — 3,25 при изменении величины γ_0 соответственно от 0,3 до 1,25.

Характер изменения плотности частицы зависит как от внешних условий горения, так и от начального значения объемного веса γ_0 . Так, для значения $\gamma_0 = 0,3 \div 0,4$ величина γ убывает почти по линейному закону и может быть выражена уравнением:

$$\gamma_i = 0,002 \frac{G_i}{G_0} + 0,15. \quad (14)$$

для значения $\gamma_0 > 0,8 \div 0,9$ изменение плотности происходит интенсивнее и следует криволинейному закону. В уравнениях (12 — 14) влияние внешних факторов горения выражается величиной G_i — текущий вес горящей частицы в момент времени τ . Последней обработкой „обобщенных“ кривых выгорания получаем следующее выражение

$$G_i = \frac{BG_0}{\tau^n}. \quad (15)$$

Здесь B и n — эмпирические коэффициенты, зависящие от температурных и диффузионных условий горения.

Пользуясь формулой (15) можно определить S_i и S_{ki} для любого момента времени τ по заранее известным величинам G_0 , S_0 и γ_0 . Удельная поверхностная скорость горения коксового остатка, отнесенная к горячей поверхности кокса, по определению должна быть равна:

$$K_s^c = -\frac{dG}{d\tau} \cdot \frac{1}{S_{ki}}, \quad (16)$$

где,

$$S_{ki} = I(\tau).$$

пользуясь (13) и (15), получим

$$K_s^c = \frac{D}{D^2 \tau^{n+1} \left(\frac{1}{\tau^n} - 1 \right)}, \quad (17)$$

где

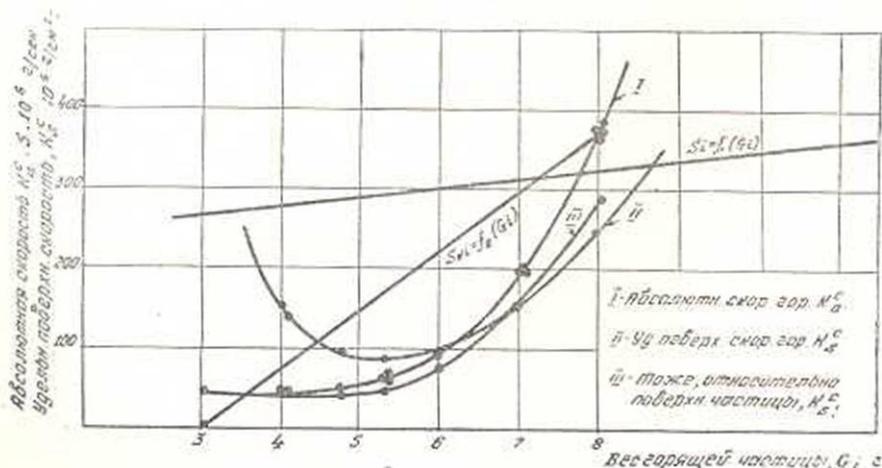
$$D = \frac{nBG_0}{a_1 S_0 \frac{A^n}{100}}, \quad D^1 = \frac{B}{A^2}$$

Таким образом, в конечном счете фигурируют те же эмпирические коэффициенты B и n , определяемые по кривым выгорания для различных значений температуры и скорости подвода воздуха.

Значение удельных скоростей горения можно определить и непосредственно, графическим методом, пользуясь кривыми, выражающими зависимости:

- $K_s^c = \gamma_1(G_i)$ — их легко получить по кривым выгорания,
- $K_s^c = \gamma_2(\tau)$ и
- изменения поверхности (или объема) горячей частицы в функции от относительного изменения убывающего веса, как показано, например, на фиг. 5 и 6.

Фигура 7 иллюстрирует графический метод определения удельных скоростей горения.



Фиг. 7. Графический метод определения удельной поверхностной скорости горения. $\gamma_0 = 0,9$, $t_{op} = 450-550^\circ\text{C}$, $w = 36$ см/сек.

Линии $S_1 = f_1(G_1)$ и $S_{k1} = f_2(G_1)$ соответственно изображают изменение поверхности частиц и ее коксового остатка от изменяющегося веса в процессе горения.

Они построены согласно (12) и (13) и кривых типа фиг. 5 и 6. Кривые K_2^c построены графическим дифференцированием обобщенных кривых выгорания. Кривые удельных скоростей горения получены путем деления значения K_2^c на соответствующие ординаты линий $S_{k1} = f_2(G_1)$ и $S_1 = f_1(G_1)$. Полученные кривые удельных скоростей горения легко могут быть преобразованы в кривые, выражающие изменение величин K_2^c , K_1^c и т. д., в зависимости от времени горения.

Поведение кривой K_2^c (на фиг. 7 и другие) легко объяснить, если учесть, как это было отмечено выше, что в области сравнительно низких температур абсолютная скорость горения K_2^c не зависит от времени, в то время как суммарная внешняя поверхность коксового остатка является монотонно убывающей величиной. Следует также учесть, что с уменьшением веса частицы удельная поверхность ее увеличивается.

Для цилиндрических частиц оказалось возможным установить приближенные количественные связи, отражающие изменение линейных размеров частицы и ее коксового остатка в процессе горения. На фиг. 8 представлены обобщенные кривые изменения линейных размеров для цилиндрических частиц, обладающих значительной плотностью ($\gamma_0 = 1,1 \div 1,2$).

Смысл представленных кривых станет ясным, если изобразить чисто геометрическую схему выгорания многозольной цилиндрической частицы с обозначениями, данными на фиг. 9.

Здесь: $d_1, h_1; d_2$ и h_2 — диаметр и высота частицы в момент времени τ_1 и τ_2 , когда вес частицы убывает от значения G_1 до G_2 ;

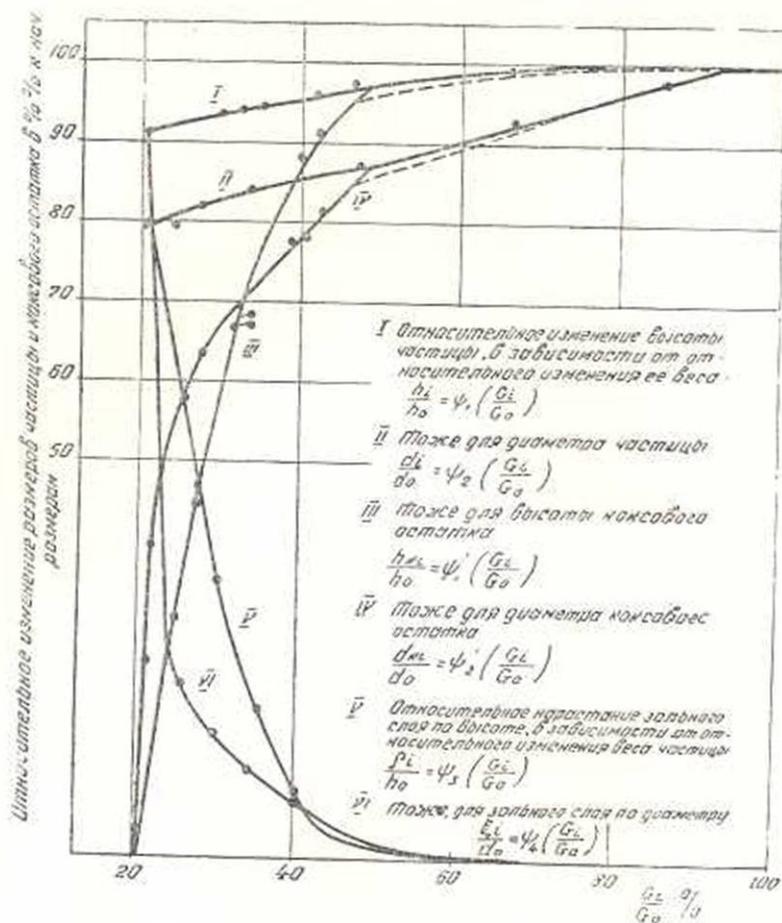
$d_{k1}, h_{k1}; d_{k2}$ и h_{k2} — то же самое для коксового остатка (т. е. без зольной оболочки);

$\xi_1 = \frac{d_1 - d_{k1}}{2}$, $\xi_2 = \frac{d_2 - d_{k2}}{2}$ — глубина зольной оболочки по диаметру в момент времени τ_1 и τ_2 ;

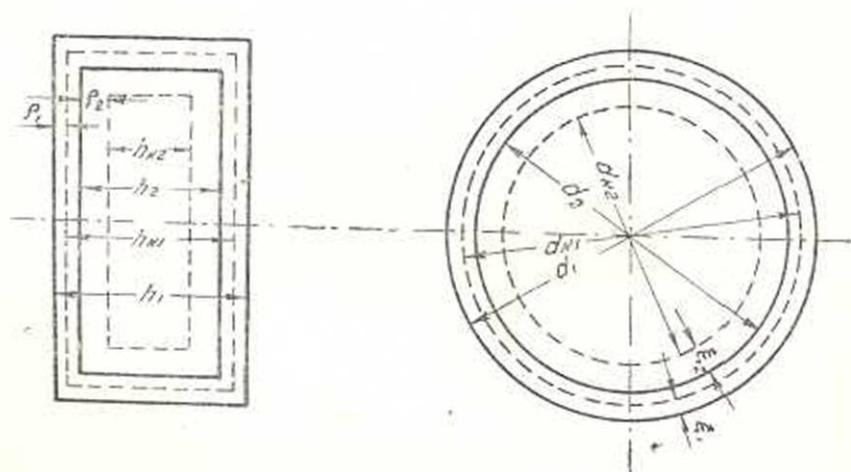
$\rho_1 = h_1 - h_{k1}$, $\rho_2 = h_2 - h_{k2}$ — глубина зольной оболочки по высоте в момент времени τ_1 и τ_2 .

Путем математической обработки кривых, подобно изображенных на фиг. 8, нетрудно получить выражения, характеризующие интенсивность выгорания частицы и ее коксового остатка через скорости убывания линейных размеров (диаметра и высоты).

Пользуясь этими выражениями, получены формулы (18) и (19) для определения скорости горения через скорость нарастания зольной оболочки по диаметру и по высоте.



Фиг. 8. Зависимости размеров цилиндрической частицы торфа и ее коксового остатка от относительного изменения веса частицы.
 $\gamma = 1,1 - 1,2 \text{ г/см}^3$.



Фиг. 9. Геометрическая схема горения частицы зольного топлива.

$$\dot{z}' = \frac{d_0}{2} \left[\frac{E_2 \beta}{\tau^l + a} \left(\frac{\theta}{\tau^2} - A^2 \right) - \frac{E_1}{\tau^a} \right], \quad (18)$$

$$\rho' = \frac{h_0}{2} \left[\frac{E_4 \beta_1}{\tau^l + a} \left(\frac{\theta_1}{\tau^u} - A^2 \right) - \frac{E_3}{\tau^m} \right], \quad (19)$$

где E, α, β, θ и θ_1 — с соответствующими индексами — опытные коэффициенты, зависящие от внешних условий горения. Они в свою очередь могут быть выражены в функции тех же величин B и ρ , определяемые по кривым выгорания.

Путем анализа кривых удельных скоростей горения и эмпирических зависимостей можно сделать следующие **выводы** об интенсивности горения коксового остатка исследуемых частиц топлива.

1. Роль плотности частицы, как некоторой характеристики физической структуры топлива, проявляется заметно в области низких температур (фиг. 10).

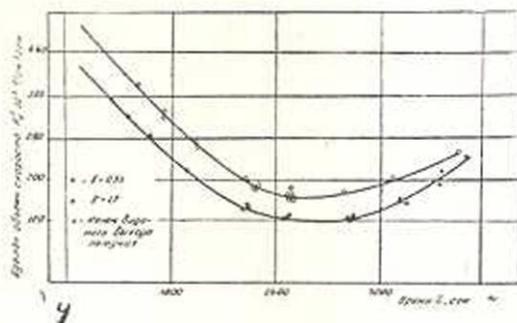
С повышением общего температурного уровня влияние плотности на скорость горения менее заметно и обнаруживается только в начале процесса. Во всех случаях с нарастанием зольной оболочки влияние начальной плотности оказывается менее заметным.

2. „Температурные“ кривые, построенные по усредненным данным для частиц различной плотности, приближенно правильно описывают поведение величины K_s^c (фиг. 11) при более высоких температурах; кривые для различных значений γ_0 сходятся, а при более низких температурах, наоборот, расходятся.

3. Вследствие неустановившегося характера диффузионных условий горения, неизотермичности поверхности крупной частицы и трудности опытного определения истинной температуры горячей поверхности, точное определение границ крайних областей горения связано с большими трудностями (так же, как и определение величин кинетического характера, в том числе и энергии активации).

По данным опытов приближенно можно считать, что влияние скорости воздушного потока оказывается заметным, когда температура частицы достигает величины порядка 500°C для торфа, а 550°C для бурого угля.

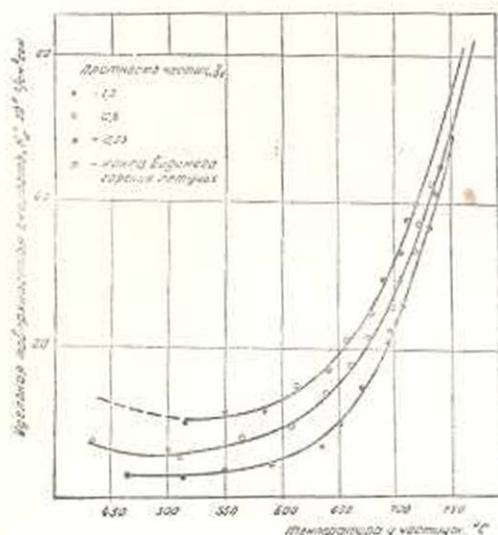
4. В области низких температур и при значительной толщине зольного слоя абсолютная скорость горения коксового остатка K_s^c



Фиг. 10. Скорость горения коксового остатка частицы торфа. $t_c = 450^\circ\text{C}$. $w = 15$ см/сек.

оказывается слабо зависящим от времени ($n \approx 1$), а удельная поверхностная скорость горения K_s^c растет с нарастанием зольного слоя.

5. В области высоких температур по мере нарастания зольной оболочки абсолютная скорость падает, причем на характер зависи-



Фиг. 11. Скорость горения коксового остатка частицы торфа в зависимости от температурных условий. $w = 15$ см/сек.

мости величины K_s^c от времени в значительной степени влияет скорость потока (для коксового остатка частиц торфа $0 < n < 1$).

Следует отметить, что все вышеприведенные эмпирические связи и формулы, кроме всего прочего, отражают также специфические условия наших опытов.

Влияние основных физико-химических факторов процесса характеризуется эмпирическими коэффициентами. При наличии большого количества опытных данных можно путем сравнительной оценки коэффициентов B и n найти значение тех основ-

ных физических констант, непосредственное определение которых связано с большими трудностями и тем самым получить обобщенные формулы для определения удельных скоростей горения в зависимости от температурных и дутьевых условий.

Практическим результатом настоящей работы явилось установление влияния механической переработки, т. е. брикетирования сравнительно зольных молодых видов топлива (торф и бурый уголь) на интенсивность их горения как в условиях высокого пирометрического уровня (топки и печи местных предприятий), так и низкого пирометрического уровня (домашнее отопление).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступило 23 I 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнорре Г. Ф. Топочные процессы. Госэнергоиздат, 1951.
2. Кнорре Г. Ф. (редактор). Исследование процессов горения натурального топлива. Сборник статей, Госэнергоиздат, 1948.
3. Прядко П. Л., А. С., Хайрия Л. Н. и др. Горение углерода. Издание АН СССР, 1949.
4. Башков С. И. Труды ВГУ, том XI, вып. 1, 7 и 55, 1939.

Է. Տ. Ղուլոյան

ՏԱՐԲԵՐ ԽՏՈՒՔՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄՈՒՐԱՌԱՏ ՎԱՌԵԼԻՔԻ ԵՐԻՏԱՍԱՐԴ ՏԵՍԱԿՆԵՐԻ ԱՅՐՄԱՆ ԱՐԱԳՈՒՔՅԱՆ ԷՔՍՊԵՐԻՄԵՆՏԱԼ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգւածում ցույց է տրված, որ մեծ քանակութեամբ ցնդող նյութեր և հանքային խառնուրդներ պարունակող վառելիքի այրման բարձր մեխանիզմի ուսումնասիրութեան առաջին փուլում, հետազոտութեան օրյակապետք է ծառայի ընտանի վառելիքի (և ոչ թե նրա կոքսային մնացորդի) զգալի չափեր ունեցող մասնիկը, իսկ որպես մեթոդ՝ այրման քրնդանրացված կորերի բազմակիզմանի մշակումը:

Հետազոտութեանը հնարավորութեան է ավել սրուշելու վառելիքի ներքին ֆիզիկական ստրուկտուրայի ազդեցութեանը ցնդող նյութերի կլեքի ինտենսիվութեան վրա ջերմային տարբեր պայմաններում և ստանալու փորձնական ասնչութեաններ՝ ցնդող նյութերի միջին արագութեանը գրանելու համար:

Այրման քրնդանրացված կորերի մշակման ճանապարհով ստացվել են քանակական ասնչութեաններ՝ կոքսային մնացորդի այրման բացարձակ և տեսակարար արագութեանները սրուշելու համար: Այդ կորերի և ասնչութեանների վերլուծութեանը ցույց է տալիս, որ վառելիքի խտութեան զգալի ազդեցութեան է գործում այրման պրոցեսի վրա մեայն ցածր ջերմաստիճանների տիրույթում և որ, ջերմային պայմաններից անկախ, մոխրաթաղանթի աճման զուգընթաց, վառելիքի խտութեան գերը հետզհետե թուլանում է: Գածր ջերմաստիճանների տիրույթում և մոխրաթաղանթի զգալի հաստութեան պայմաններում կոքսային մնացորդի այրման բացարձակ արագութեանը նվազ կախում ունի ժամանակից, իսկ այրման տեսակարար մակերևութային արագութեանն աճում է մոխրի շերտի աճման հետ միասին: Բարձր ջերմաստիճանների տիրույթում, մոխրաթաղանթի աճման զուգընթաց, բացարձակ արագութեանն ընկնում է, ընդ որում վերջինիս կախումը ժամանակից զգալի չափով պայմանավորվում է օդի հոսանքի արագութեամբ:

Հետազոտութեան գործնական արդյունքը հանդիսացավ այն, որ սրուշվեց մոխրաճառ վառելիքի երկտասարդ տեսակների մեխանիկական վերամշակման (բրիկետացման) ազդեցութեանը նրանց այրման ինտենսիվութեան վրա տարբեր ջերմային պայմաններում: