

А. Л. Шагинян

## О скорости полиномиальных приближений на произвольных совокупностях

### Введение

Пусть  $E$  — произвольная замкнутая совокупность со связным дополнением  $E_\infty$  на  $z$  плоскости. Отобразим конформно  $E_\infty$  на  $|w| > 1$  функцией

$$w = \Phi(z), \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0,$$

$\lg |\Phi(z)|$  есть функция Грина области  $E_\infty$ . Обозначим через  $L_r$  линию уровня функции Грина

$$L_r: |\Phi(z)| = r > 1.$$

Тогда, согласно теореме Уолша [1], для любой функции  $f(z)$ , регулярной на замкнутой ограниченной совокупности  $E$ , возможно определить при любом  $n$  полином степени  $n$  такой, чтобы на  $E$  имела место оценка

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{C}{(r-z)^n}, \quad \varepsilon > 0,$$

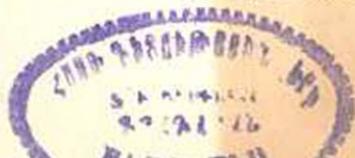
где  $C$  — постоянная, а  $L_r$  — линия уровня функции Грина, проходящая через „ближайшую“ особенность функции  $f(z)$ .

Величину  $r$  можно выразить в терминах конфигурации  $E$ . Это можно сделать пользуясь либо известной теоремой искажения Альфорса [2] (речь идет о втором фундаментальном неравенстве указанного мемуара), либо оценками Варшавского [3]. Однако и неравенство Альфорса и оценки Варшавского имеют место при наложении больших ограничений на совокупность  $E$ .

Наиболее общий результат в теории конформных отображений, позволяющий оценить значение  $r$ , либо значение функции Грина в терминах конфигурации  $E$ , это — известная оценка Лаврентьева [4].

В § 1 мы устанавливаем некоторую новую оценку функции Грина (теорема 1 текста), пригодную в самом общем случае и содержащую в частности неравенство Лаврентьева.

С помощью этих оценок в § 2 приводится решение задачи Уолша



в терминах совокупности  $E$  в самом общем случае ограниченных замкнутых совокупностей.

Во втором и третьем параграфах решается также задача об оценке полиномиальных приближений для функций, регулярных на неограниченных замкнутых совокупностях. Одновременно решается вопрос о весовом приближении в произвольной бесконечной совокупности как для функций, регулярных на замкнутой совокупности, так и для функций, регулярных в открытой совокупности.

Оценкой скорости приближения многочленами функций, регулярных на произвольных ограниченных континуумах, занимался С. Н. Мергелян [5]. Полученная им оценка (неравенство 3 статьи [5]) грубее нашего неравенства (2.11).

Другие работы по оценке полиномиальных приближений в случае произвольных неограниченных совокупностей нам не известны.

## § 1. Некоторые оценки, относящиеся к линиям уровня функции Грина

1.1. Пусть  $\Omega$  — ограниченная замкнутая совокупность со связным дополнением на плоскости комплексного аргумента  $z$ ;  $C$  — граница этой совокупности, а  $\Omega_\infty$  — дополнение к  $\Omega$ . Считаем, что  $\Omega$  лежит в круге  $|z| \leq d$  и содержит круг  $|z| < \Delta$ .

Отобразим  $\Omega_\infty$  конформно на  $|w| > 1$ ,

$$w = \Phi(z), \quad \Phi(\infty) = \infty, \quad \Phi'(\infty) > 0.$$

Функция

$$g(x, y) = \lg |\Phi(z)|$$

есть функция Грина области  $\Omega_\infty$ .

Впоследствии, для краткости, вместо  $g(x, y)$  будем писать  $g(z)$ .

Оценим снизу значение  $g(z)$  в произвольной точке  $z_1 \in \Omega_\infty$  и удовлетворяющей одновременно условию  $|z| < d$ .

Для этого соединим точку  $A(z_1)$  с некоторой точкой  $B(z_2)$

$$|z_2| = d + d_0, \quad (d_0 > 0),$$

спрямляемой дугой  $L$ , лежащей внутри  $\Omega_\infty$ . Пусть  $z = z(s)$  переменная точка на  $L$ , а  $s$  — дуговое расстояние точки  $z$  от  $z_1$ . Расстояние точки  $z(s)$  до границы  $C$  обозначим через  $\rho(s)$ .

Представим в круге  $|z - z(s)| < \rho(s)$  функцию Грина  $g(z)$  посредством интеграла Пуассона

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \frac{\rho^2(s) - r^2}{\rho^2(s) - 2r\rho(s) \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi,$$

где  $z' = z(s) + \rho(s)e^{i\varphi}$ ,  $z = z(s) + re^{i\theta}$ ,  $r < \rho(s)$ .

Разлагая интеграл Пуассона по степеням малого значения параметра  $r$ , получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{r}{\rho(s)} \right]^n \cos n(\theta - \varphi) \right\} d\varphi.$$

В силу равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') d\varphi = g(z(s)) = g(s)^*$$

получаем

$$g(z) = g(s) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{r}{\rho(s)} \right]^n \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \cos n(\theta - \varphi) d\varphi.$$

Применив последнее соотношение в точке  $z(s + \Delta s)$  ( $r = |z(s + \Delta s) - z(s)|$ ), получим

$$\frac{\partial g(s)}{\partial s} = \frac{2}{\rho(s)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') \cos n(\varphi - \theta) d\varphi.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\partial g(s)}{\partial s} \right| \leq \frac{2}{\rho(s)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z') d\varphi = \frac{2}{\rho(s)} g(s)$$

или

$$\left| \frac{\partial \lg g(s)}{\partial s} \right| \leq \frac{2}{\rho(s)}. \quad (1.1)$$

Искомую оценку функции Грина получаем из неравенства

$$\left| \lg \frac{g(z_2)}{g(z_1)} \right| = \left| \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial \lg g(s)}{\partial s} ds \right| \leq 2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)},$$

т. е.

$$\begin{aligned} -2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)} &< \lg \frac{g(z_2)}{g(z_1)} \leq 2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}, \\ g(z_1) \cdot e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} &\leq g(z_2) \leq g(z_1) \cdot e^{2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

\* Значение  $g(z)$  в точке  $z(s)$  обозначаем через  $g(s)$ .

В общем случае эти оценки значительно улучшить нельзя. В дальнейшем мы увидим, что в неравенствах (1.2) число 2 в показателе нельзя будет заменить числом, меньшим  $\frac{\pi}{2}$ .

1.2. Оценим  $g(z)$  снизу на окружности  $|z| = d + d_0$  ( $d_0 < d$ ).

Так как  $g(z)$  мажорирует гармоническую функцию  $\lg \frac{d}{|z|}$ , то при

$$|z_2| = d + d_0$$

$$g(z_2) > \lg \frac{|z_2|}{d} = \lg \left( 1 + \frac{d_0}{d} \right).$$

В силу неравенства  $\lg(1+x) > \frac{x}{2}$  при  $x \leq 1$ ,

получаем

$$g(z_2) > \frac{d_0}{2d}.$$

Тогда из (1.2) следует

$$g(z_1) > \frac{d_0}{2d} \cdot e^{-2 \operatorname{inf}_{AB} \int \frac{ds}{r(s)}}, \quad (1.3)$$

где  $AB$  — дуга, соединяющая точку  $z_2$  с некоторой точкой окружности  $|z| = d + d_0$  ( $d_0 < d$ ) внутри  $\Omega_+$ .

Взамен (1.3) иногда удобно применить и другую оценку [неравенство (1.5)].

Пусть  $L$  — произвольная замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в  $\Omega_+$  и охватывающая данную совокупность.

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} d &= \max |z| \\ d+d_0 &= \max |z| \end{aligned} \right\} \text{ при } z \in \Omega.$$

Тогда в любой точке  $z_L$  кривой  $L$

$$g(z_L) > \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{r(s)}}, \quad (1.4)$$

где интеграл распространен по всему замкнутому контуру  $L$ .

В самом деле. Пусть  $A(z_L)$  — точка кривой  $L$ , где оценивается функция Грина, а  $B(z_2)$  — точка кривой  $L$ , где  $|z| = d + d_0$ . Этими двумя точками кривая  $L$  разбивается на две дуги  $L_1$  и  $L_2$ .

Согласно оценке (1.3),

$$g(z_2) > \frac{d_0}{2d} e^{-\int_{L_1} \frac{ds}{r(s)}},$$

а также

$$g(z_L) \geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{L_1} \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Но так как

$$\max_{i=1,2} \int_{L_i} \frac{ds}{\rho(s)} \geq \frac{1}{2} \int_L \frac{ds}{\rho(s)},$$

то получим

$$g(z_L) \geq \frac{d_0}{2d} \cdot e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.5)$$

В терминах функции  $w = \Phi(z)$  неравенство (1.5) дает

$$|\Phi(z_L)| \geq \exp \left\{ \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}.$$

В силу неравенства

$$e^x > 1 + x$$

получаем

$$|\Phi(z_L)| > 1 + \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.6)$$

Если  $w_L$  есть образ произвольной точки  $z_L$  на  $w$ -плоскости, при отображении  $w = \Phi(z)$ , а  $w'$  — произвольная точка на  $|w'| = 1$ , соответствующая произвольному граничному элементу кривой  $C$ , то предыдущее неравенство дает

$$|w_L - w'| \geq \frac{d_0}{2d} \cdot e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.7)$$

Имеет место также неравенство

$$|w_L - w'| \geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_{\Delta B} \frac{ds}{\rho(s)}}, \quad (1.8)$$

которое в частных случаях может дать лучшую оценку.

1.3. Неравенства (1.7) и (1.8) содержат в себе известное неравенство М. А. Лаврентьева [4] в теории конформных отображений.

*Действительно.* Произвольную жорданову дугу, лежащую внутри  $\Omega_\infty$  и имеющую концы на  $C$ , будем называть, как это принято, сечением области  $\Omega_\infty$ .

Любое сечение разбивает области  $\Omega_\infty$  на две области.

Обозначим через  $\delta_1$  нижнюю грань длин всевозможных сечений, отделяющих точку  $A(z_1)$  от  $B$ . Пусть  $\delta_2$  — расстояние точки  $A$  от  $C$ . Меньшее из этих двух чисел будем называть, следуя М. А. Лаврентьеву, „относительным расстоянием“ точки  $A(z_1)$  от  $C$  относительно точки  $B$ . При наших предположениях относительно точек  $A$  и  $B$  очевидно, что относительное расстояние точки  $A$  от  $C$  относительно  $B$

совпадает с относительным расстоянием от  $C$  этой же точки относительно  $z = \infty$ . В дальнейшем число

$$\bar{\delta} = \min(\bar{\delta}_1; \bar{\delta}_2)$$

будем обозначать словом „расстояние“ в кавычках.

В терминах относительного расстояния точки  $A$  от  $C$  из неравенства (1.3)–(1.4) и (1.7)–(1.8) вытекает

$$g(z_1) > \frac{d_0}{2d} e^{-c' \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.9)$$

$$|w_1 - w'| \geq e^{-c \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.10)$$

где  $c$  — абсолютная постоянная. Это и есть неравенство М. А. Лаврентьева.

*Доказательство.* Произведем quadriangulation плоскости со стороны квадратов, равной  $\frac{\delta}{3\sqrt{2}}$ . Выделим ячейки, которые имеют хотя бы одну общую точку с замкнутой совокупностью  $\Omega$ .

Обозначим через  $\bar{\Omega}_\infty$  бесконечную область, содержащую точку  $z = \infty$  и ограниченную ломаной, состоящей из соответствующих сторон выбранных ячеек.  $\bar{C}$  — граница области  $\bar{\Omega}_\infty$ .

Обозначим также через  $\bar{\delta}_1$ ,  $\bar{\delta}_2$  и  $\bar{\delta}$  аналогичные  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta$  величины для  $\bar{\Omega}_\infty$ .

Точка  $A(z_1)$  вместе с  $B(z_2)$  будет лежать в области  $\bar{\Omega}_\infty$ . В противном случае, очевидно, имели бы

$$\bar{\delta}_1 \leq 2 \frac{\delta}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3} \delta,$$

и поэтому пришли бы к противоречию

$$\delta \leq \frac{2}{3} \delta.$$

Величина  $\bar{\delta}_1$  будет не меньше, чем  $\frac{\delta}{3\sqrt{2}}$ .

С другой стороны, очевидно и

$$\bar{\delta}_2 \geq \delta - \frac{\delta\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3} \delta.$$

Поэтому

$$\bar{\delta} \geq \min \left\{ \frac{\delta}{3\sqrt{2}}; \frac{2\delta}{3} \right\} = \frac{\delta}{3\sqrt{2}}.$$

Это показывает, что, выбрав в quadriangulation определенные квадраты, входящие в  $\bar{\Omega}_\infty$ , мы можем провести внутри них ломаную  $\bar{L}$  такую, что расстояние  $\bar{L}$  от  $\bar{C}$  будет  $\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{3\sqrt{2}}$ .

Легко оценить и длину этой ломаной  $\bar{L}$ . В самом деле, если  $N$  означает число ячеек квадратижа в круге  $|z| < d + d_0$ , то

$$N \left( \frac{\delta}{3\sqrt{2}} \right)^2 < \pi(d + d_0)^2,$$

$$N < 36\pi \left( \frac{d + d_0}{\delta} \right)^2,$$

$$\text{дл. } \bar{L} < N \cdot \frac{\delta}{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\delta N}{3} < 12\pi \cdot \frac{(d + d_0)^2}{\delta},$$

$$\text{дл. } \bar{L} < 48\pi \frac{d^2}{\delta}.$$

*Замечание.* При оценке числа  $N$ , если подсчитать не число ячеек покрывающих круг  $|z| < d + d_0$ , а число ячеек, входящих в узкую полосу, прилегающую к границе области и имеющей ширину порядка  $\delta$ , то вместо неравенства (1.10) получим

$$|w_1 - w'| \geq e^{-\frac{\epsilon(\delta)}{\delta^2} d^2}.$$

где  $\epsilon(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Все предыдущие оценки приводят к следующей теореме.

**Теорема 1.** Если  $\Omega$  — замкнутая совокупность со связным дополнением, лежащая в круге  $|z| \leq d$ ,  $\Omega_\infty$  — дополнение к  $\Omega$  и  $L$  — любая замкнутая спрямляемая кривая, охватывающая  $\Omega$ , то в любой точке  $z$ , кривой  $L$

$$\left. \begin{aligned} g(z_1) &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \\ g(z_1) &\geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где  $d_0 = \max |z|$ ,  $z \in L$ , а  $A(z_1)$  — произвольная точка области  $\Omega_\infty$  в круге  $|z| < d$  и  $AB$  — дуга, соединяющая внутри  $\Omega_\infty$  точку  $A(z_1)$  с произвольной точкой  $B(z_2)$ ,  $|z_2| = d + d_0$ .

Если  $w_1$  — образ точки  $A(z_1)$  при  $w = \Phi(z)$ , а  $w'$  — аффикс произвольной точки окружности  $|w'| = 1$ , то из (1.11) следует

$$|w_1 - w'| \geq \frac{d_0}{2d} e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \quad (1.12)$$

либо

$$|w_1 - w'| \geq \frac{d_0}{2d} e^{-2 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Из (1.12) вытекает

$$(w_1 - w') \geq e^{-c \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.13)$$

где  $c$  — абсолютная постоянная, не зависящая от  $d, d_0, \delta$ , а  $\delta$  — „расстояние“ точки  $A(z_1)$  до  $S$ .

Неравенство (1.13) есть неравенство Лаврентьева.

1.4. Фиксируя точку  $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega_\infty$ , построим две линии уровня

$$L_1: g(x, y) = \frac{1}{2} g(x_1; y_1);$$

и

$$L_2: g(x, y) = \frac{1}{4} g(x_1; y_1).$$

Оценим снизу расстояние между  $L_1, L_2$  и  $S$ .

Согласно Г. Фаберу [9], если  $z_1$  и  $z_2$  — две произвольные точки  $\Omega_\infty$ , а  $w_1$  и  $w_2$  — их образы в  $|w| > 1$ , при отображении  $w = \Phi(z)$ , то для расстояния между линиями уровня

$$L': g(x, y) = g(z_1),$$

$$L'': g(x, y) = g(z_2)$$

функции Грина имеет место следующее неравенство

$$\text{расст.}(L'; L'') \geq (r'' - r') \left(1 - \frac{1}{r' r''}\right), \quad (1.14)$$

где

$$|w_1| = r' < |w_2| = r''.$$

Применяя это неравенство к нашему случаю, получаем

$$\begin{aligned} \text{расст.}(L_1; L_2) &\geq \left( e^{\frac{1}{2} g(z_1)} - e^{\frac{1}{4} g(z_1)} \right) \left( 1 - e^{-\frac{3}{4} g(z_1)} \right) \geq \\ &\geq \left( 1 - e^{-\frac{1}{4} g(z_1)} \right) \left( 1 - e^{-\frac{3}{4} g(z_1)} \right). \end{aligned}$$

Но из принципа максимума гармонической функции следует, что в  $\Omega_\infty$

$$g(z_1) \leq \lg \frac{|z_1|}{\Delta} \leq \lg \frac{d}{\Delta}.$$

Поэтому\*

$$1 - e^{-\frac{1}{4} g(z_1)} \geq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\Delta}{d}} g(z_1),$$

$$1 - e^{-\frac{3}{4} g(z_1)} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta}{d}\right)^{1/4} g(z_1).$$

\*  $1 - e^{-x} \geq x$  при  $x > 0$ .

$$\left(1 - e^{-\frac{1}{4}g(z_1)}\right) \left(1 - e^{-\frac{3}{4}g(z_1)}\right) \geq \frac{3}{16} \frac{\Delta}{d} g^2(z_1).$$

Получили

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq \frac{3}{16} \cdot \frac{\Delta}{d} g^2(z_1). \quad (1.15)$$

В силу теоремы 1 из (1.15) получаем

$$\left. \begin{aligned} \text{или} \\ \text{расст. } (L_1; L_2) &\geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 e^{-4 \int_{\Lambda B} \frac{ds}{\rho(s)}}, \\ \text{расст. } (L_1; L_2) &\geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 \cdot e^{-2 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Из этих оценок следует также

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq \frac{3}{64} \cdot \frac{\Delta}{d} \cdot \left(\frac{d_0}{d}\right)^2 e^{-c \left(\frac{d}{\delta}\right)^2}, \quad (1.17)$$

где  $c$  — абсолютная постоянная.

При фиксированном  $d$  справедливо также неравенство

$$\text{расст. } (L_1; L_2) \geq e^{-\frac{c(\delta)}{\delta^2}}, \quad (1.18)$$

где  $c(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Аналогичные неравенства получим для расст.  $(C; L_2)$  только лишь с другим коэффициентом взамен  $\frac{1}{4}$ .

1.5. Наконец оценим длину линии уровня  $L_1$ :

$$\text{дл. } L_1 = \int_{|w| = e^{\frac{1}{2}g(z_1)}} |\Psi'(w)| \cdot |dw|$$

В силу известного неравенства Фабера [9]

$$|\Psi'(w)| \leq \tau \cdot \frac{|w|^2}{|w|^2 - 1},$$

где  $\tau$  — емкость совокупности  $\Omega$ , получим

$$\text{дл. } L_1 < \frac{\tau}{g(z_1)} < \frac{2d^*}{g(z_1)} \quad (1.19)$$

или

$$\text{дл. } L_1 < \frac{4d^2}{d_0} e^{2 \int_{\Lambda B} \frac{ds}{\rho(s)}} \leq \frac{4d^2}{d_0} e^{\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

\* Очевидно  $\tau < 2d$ .

Полученные в пунктах (1.4)—(1.5) результаты сформулируем в виде леммы.

**Лемма 1.** Если  $L, L_1, L_2$  — линии уровня функции Грина  $g(z)$ , имеющие уравнения

$$L: g(x, y) = g(x_1; y_1),$$

$$L_1: g(x, y) = \frac{1}{2} g(x_1; y_1),$$

$$L_2: g(x, y) = \frac{1}{4} g(x_1; y_1),$$

то имеют место следующие неравенства

$$\left. \begin{array}{l} \text{расст. } (L_1; L) \\ \text{расст. } (L_1; L_2) \\ \text{расст. } (L_2; C) \end{array} \right\} > c \frac{\Delta}{d} \left( \frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot e^{-4 \int_{AB} \frac{ds}{\rho(s)}} \geq \\ \geq c \cdot \frac{\Delta}{d} \left( \frac{d_0}{d} \right)^2 \cdot e^{-2 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \quad (1.20)$$

где  $L$  — произвольная кривая, охватывающая  $\Omega$  и проходящая через  $A(z)$ ,  $c$  — абсолютная постоянная.

$$\text{дл. } L \leq 4 \frac{d^2}{d_0} e^{\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}. \quad (1.21)$$

## § 2. О равномерных полиномиальных приближениях на замкнутых совокупностях\*

### 2.1. Полиномы Фабера [7]\*\*.

В разложении в ряд Лорана, в окрестности точки  $z = \infty$ , функции

$$[\Phi(z)]^n,$$

совокупность неотрицательных степеней от  $z$  составляет некоторый многочлен степени  $n$ . Этот многочлен и называют многочленом Фабера. Обозначим его через  $F_n(z)$ .

По определению  $F_n(z)$

$$[\Phi(t)]^n - F_n(t) = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

В силу этого, при  $z \in \Omega$

$$\int_{\Gamma_r} \frac{[\Phi(t)]^n - F_n(t)}{t - z} dt = 0.$$

\* В дальнейшем придерживаемся всех обозначений § 1.

\*\* Подробности о полиномах Фабера см. [6—8].

Отсюда получается интегральное представление полиномов Фабера

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{[\Phi(t)]^n}{t-z} dt. \quad (2.1)$$

Определим образующую функцию полиномов  $\{F_n(z)\}$ .

$$T(\xi; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{\xi^n},$$

$$T(\xi; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Phi(t)}{\xi}\right)^n \frac{dt}{t-z} = \frac{\xi}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{(t-z)(\xi - \Phi(t))}.$$

Но так как при  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{t-z} \cdot \frac{1}{\xi - \Phi(t)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

то, применяя теорему о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{(t-z)(\xi - \Phi(t))} = -\operatorname{Res} \left\{ \frac{1}{(t-z)(\xi - \Phi(t))} \right\} = \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi) - z},$$

$$T(\xi; z) = \frac{\xi \cdot \psi'(\xi)}{\psi(\xi) - z}. \quad (2.2)$$

Этой формулой образующая функция  $T(\xi; z)$  определяется при всех  $z$  внутри линии уровня

$$g(x, y) = \lg |\xi|.$$

Функция  $T(\xi; z)$ , а следовательно и  $F_n(z)$ , зависят лишь от области  $\Omega$  и не зависят от выбора точки  $A(z_1)$ .

2.2. Равномерные приближения на ограниченных замкнутых совокупностях

функции  $\frac{1}{z_1 - z}$ .

Представим функцию  $\frac{1}{z_1 - z}$  интегралом Коши, при  $z \in \Omega$ ,

$$\frac{1}{z_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{1}{(z_1 - t)(t - z)} dt.$$

Перейдя под знаком интеграла к переменной  $w$ , получим

$$\frac{1}{z_1 - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = \rho} \frac{1}{\frac{z_1 - \psi(\xi)}{\psi(\xi) - z}} \psi'(\xi) d\xi,$$

$$\rho = e^{\frac{1}{2} g(z_1)}.$$

Заменяя  $\frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)-z}$  по формуле (2.2) через  $\frac{T(\xi; z)}{\xi}$ , получим

$$\frac{1}{z_1-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} \frac{1}{\xi(z_1-\Psi(\xi))} T(\xi; z) d\xi,$$

$$r = e^{\frac{1}{2}g(z)}.$$

Подставляя  $T(\xi; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{\xi^n}$

и интегрируя почленно, получим

$$\frac{1}{z_1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(z), \quad (2.3)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{(z_1-t)(\Phi(t))^n}. \quad (2.4)$$

Представим из (2.3)  $\frac{1}{z_1-z}$  в виде

$$\frac{1}{z_1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z) + R_n(z_1; z),$$

и оценим остаточный член

$$R_n(z_1; z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k F_k(z).$$

Из (2.4)

$$|c_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{\text{дл. } L_1}{\text{расст. } (L_2; L_1)} \cdot e^{-\frac{n}{2}g(z)}.$$

Тогда в силу уже произведенных оценок,

$$\text{дл. } L_1 < \frac{\tau}{g(z_1)} < \frac{2d}{g(z_1)},$$

и

$$\text{расст. } (L_2; L_1) > \frac{\Delta}{d} g^2(z_1),$$

получим

$$|c_n| < c \cdot \frac{d}{\Delta} g^{-3}(z_1) \cdot e^{-\frac{n}{2}g(z)}, \quad (2.5)$$

с — постоянная.

Из (2.1) следует

$$|F_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot e^{\frac{n}{4} g(z_1)} \cdot \frac{\mu. L_2}{\text{расст.}(L_2; C)}$$

или

$$|F_n(z)| < c \cdot \frac{d^2}{\Delta} g^{-3}(z_1) e^{\frac{n}{4} g(z_1)}, \quad (2.6)$$

где  $c$  — абсолютная постоянная.

В силу (2.5) и (2.6) получаем оценку

$$|R_n(z_1; z)| < c \cdot \frac{d^3}{\Delta^2} g^{-6}(z_1) \frac{e^{-\frac{n+1}{4} g(z_1)}}{1 - e^{-\frac{g(z_1)}{4}}}$$

Но ранее было отмечено, что

$$1 - e^{-\frac{1}{4} g(z_1)} \geq \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}} g(z_1),$$

поэтому

$$|R_n(z_1; z)| < \alpha \cdot e^{-\beta \cdot n} \cdot e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= c \cdot d_0 \left( \frac{d}{d_0} \right)^7 \left( \frac{d}{\Delta} \right)^2 e^{7 \int_L \frac{ds}{\rho(s)}}, \\ \beta &= \frac{d_0}{8d}. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Обозначив через  $P_n(z)$  многочлен

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k F_k(z),$$

приходим к следующей лемме.

**Лемма 2.** Для функции  $\frac{1}{z_1 - z}$  при  $z \in \Omega$  можно подобрать полином  $P_n(z)$  такой, что

$$\left| \frac{1}{z_1 - z} - P_n(z) \right| < \alpha \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_L \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}, \quad (2.8)$$

где постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из (2.7).

В предыдущих неравенствах интегралы распространяются по произвольным замкнутым кривым, проходящим через точку  $z_1$ . Справедлива и следующая оценка

$$\left| \frac{1}{z_1 - z} - P_n(z) \right| < \exp \left\{ -n e^{-\frac{\varepsilon(\delta)}{\delta^2}} \right\}, \quad (2.9)$$

где  $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\delta$  — «расстояние» точки  $z_1$  до  $\Omega$ .

2.3. Равномерное приближение функций, аналитических на ограниченной замкнутой совокупности.

Пусть теперь  $\varphi(z)$  — произвольная аналитическая на замкнутой совокупности  $\Omega$  функция и  $\delta$  — «расстояние» ближайшей к  $\Omega$  особенности функции  $\varphi(z)$ . Обозначим через  $L^*$  произвольную замкнутую спрямляемую кривую, охватывающую  $\Omega$  и отстоящую от  $\Omega$  больше чем на  $\frac{\delta}{3}$  и меньше чем на  $\frac{\delta}{2}$ .

Такую кривую  $L^*$  можно построить примерно таким же путем, как это было сделано в § 1.3.

Построение  $L^*$  можно провести таким путем, чтобы

$$\text{дл. } L^* < c \cdot \frac{d^2}{\delta}. \quad (2.10)$$

Представим  $\varphi(z)$  интегралом Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \frac{\varphi(z_1) dz_1}{z_1 - z}$$

при  $z \in \Omega$ .

Подставим под знаком интеграла вместо ядра  $\frac{1}{z_1 - z}$  выражение

$$\frac{1}{z_1 - z} = P_n(z) + R_n(z_1; z),$$

где  $P_n(z)$  представляет отрезок ряда Фабера. Заметим при этом, что коэффициенты полинома Фабера  $F_n(z)$  зависят от  $z_1$  и, очевидно, являясь аналитическими функциями от  $z_1^*$ .

Получаем

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) P_n(z_1; z) dz_1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) \cdot R_n(z_1; z) dz_1.$$

Выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^*} \varphi(z_1) P_n(z_1; z) dz_1 = P_n^*(z)$$

представляет полином степени  $n$ . Обозначив через  $M_{\delta/2}$   $\max |\varphi(z)|$  на расстоянии  $\delta/2$  от  $C$ , в силу оценок (2.7), (2.8) и (2.10), получим

$$|\varphi(z) - P_n^*(z)| < c \cdot e^{-\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot M_{\delta/2}, \quad (2.11)$$

\* Эту зависимость выразим явным образом посредством обозначения

$$P_n(z) = P_n(z_1; z).$$

где

$$c = \text{const.} \cdot \frac{d^{11}}{d_0^6} \cdot \frac{1}{\Delta^3} \cdot \frac{1}{\delta^2} e^{\gamma \int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}} < e^{c \frac{1}{\delta^2}},$$

$$\vartheta = \frac{d_0}{8d}.$$
(2.12)

с — абсолютная постоянная,

Получаем следующую теорему.

**Теорема 2.** Если  $\varphi(z)$  — аналитическая на замкнутой совокупности  $\Omega$  функция и  $\delta$  — „расстояние“ ближайшей особенности этой функции от  $\Omega$ , то  $\varphi(z)$  можно аппроксимировать многочленом степени  $n$ , удовлетворяющим неравенствам (2.11) и (2.12).

**Следствие.** Если  $\varphi(z)$  аналитическая на замкнутой совокупности  $\Omega$  функция и  $\delta$  — „расстояние“ „ближайшей“ к  $\Omega$  особенности этой функции, а  $M_{\delta/2}$  есть  $\max |\varphi(z)|$  на расстоянии  $\delta/2$  от  $\Omega$ , то существует полином  $P_n^*(z)$  степени  $n$  такой, что

$$|\varphi(z) - P_n^*(z)| < c \cdot e^{-\alpha \left(\frac{d}{\delta}\right)^2},$$
(2.13)

где  $\alpha$  — абсолютная постоянная, и

$$c < e^{c' \frac{d^2}{\delta^2}} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{d^{11}}{d_0^6} \cdot \frac{1}{\Delta^3}.$$

Считая  $d_0 = \delta$  и  $\Delta$  раз навсегда фиксированным, получим

$$c < e^{\gamma \frac{d^2}{\delta^2}},$$
(2.14)

где  $\gamma$  — абсолютная постоянная.

Неравенства (2.13) и (2.14) получаются из (2.7) и (2.8) при соответствующей оценке интеграла  $\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)}$ .

**Замечание.** Уолшем доказано [1], что если  $f(z)$  аналитическая на замкнутой совокупности  $\Omega$  функция, то существует многочлен  $P_n(z)$  степени  $n$  такой, что

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{M}{r_1^n},$$

где  $r_1 < r$ , а

$$g(x, y) = \text{lgr}$$

первая линия уровня  $L_r$ , проходящая через особую точку функции  $f(z)$ ;  $M$  — постоянная.

Имеет место и обратная теорема: если для  $f(z)$  при любых  $n$  существуют полиномы  $\{P_n(z)\}$  такие, что

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{M}{r^n},$$

где  $M$  — постоянная, не зависящая от  $n$ , то  $f(z)$  регулярна внутри линии уровня  $L_r$ .

Величину  $r$  для заданной совокупности  $\Omega$  и функции  $f(z)$  можно определить либо из функции Римана, либо оценить с помощью различных теорем искажения. Например, пользуясь теоремами Альфорса [2]\* либо Варшавского [3].

Однако теоремы и Альфорса и Варшавского имеют место при наложении определенных, довольно жестких ограничений на область.

Оценками (1.11) либо (1.12) функции Грина можно пользоваться при таких же обстоятельствах, что и неравенствами Альфорса и Варшавского.

Хотя (1.11) и (1.12) грубее неравенств Альфорса и Варшавского в том смысле, что в показателе для коэффициента при интеграле не указано экстремальное значение, однако эти неравенства применимы при совершенно произвольных областях  $\Omega$ .

Таким образом неравенство (2.11) дает решение задачи Уолша, выраженное в терминах самой совокупности  $\Omega$ .

Докажем теперь, что неравенство (2.11) существенно уточнить нельзя. А именно докажем.

**Теорема 3.** Существует совокупность  $\Omega$  и аналитическая на ней функция такая, что на  $\Omega$  невозможно неравенство

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\varepsilon, \varepsilon} \cdot \exp \left\{ -\pi \varepsilon \int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)} \right\}, \quad (2.15)$$

где  $\varepsilon > 0$ .

**Доказательство.** Возьмем произвольную положительную непрерывную функцию  $\rho(s)$  ( $0 \leq s \leq \infty$ ), причем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = 0.$$

Совокупность кругов  $|z - s| < \rho(s)$ , где  $s$  — переменная точка на оси  $ox$ , составляет некоторую бесконечную область  $D$ . Границу области  $D$  обозначим через  $C$ , которая вместе с кругом  $|z + \frac{\rho(0)}{2}| < \frac{\rho(0)}{2}$

и с некоторым континуумом, соединяющим их, пусть изображает в данном случае совокупность  $\Omega$  теоремы 3. Через  $C_x$  обозначим часть совокупности  $C$  слева от прямой  $R(z) = x$ , а через  $D_x$  часть области  $D$  также слева от этой прямой. В качестве функции  $\varphi(z)$  возьмем функцию  $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z - 2\rho(0)}}$ , которая ограничена на  $C_x$ ,  $|\varphi(z)| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}}$  и имеет особенность  $z = 0$  на расстоянии  $\rho(0)$  от  $C$ .

\* Речь идет о втором фундаментальном неравенстве указанной статьи Альфорса.

Допустим равенство (2.15) имеет место для любой замкнутой совокупности  $\Omega$  и любой функции  $\varphi(z)$ , аналитической на  $\Omega$ . Тогда, в частности, она должна иметь место и на  $C_x$ , независимо от  $x$ .

Считая, что для данного  $C_x$  контур  $L^*$  состоит из двойного отрезка  $0 < s < x + \rho(x)$  и окружности  $|z| = k + \rho(x)$ , получим

$$\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)} = 2 \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + \int_0^{\rho(x)} \frac{ds}{\sqrt{s^2 + \rho^2(x)}} + 2\pi(x + \rho(x)) = 2 \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + 2 \lg(1 + \sqrt{2}) + 2\pi(x + \rho(x)).$$

В силу  $\lim_{s \rightarrow \infty} \rho(s) = 0$  легко доказать, что при  $\alpha$  сколь угодно малом можно определить число  $\epsilon(\alpha)$  таким образом, чтобы

$$\int_{L^*} \frac{ds}{\rho(s)} < 2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} + \epsilon(\alpha). \quad (2.16)$$

Тогда на  $C_x$  по условию (2.15),

$$\left| \frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}} - P_n(z) \right| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot \exp \left\{ -ne^{-\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right) \left(\frac{x}{4} - \epsilon\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)} - \epsilon(\alpha)} \right\} < \\ < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \exp \left\{ -ne^{-\left(\frac{x}{4} - 2\epsilon\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \right\} = R_n.$$

При любом заданном  $\epsilon$  можно подобрать  $n$  таким образом, чтобы

$$R_n \leq \epsilon, \\ R_{n-1} > \epsilon.$$

Тогда из выражения  $R_n$  следует, что  $n$  будет иметь значение

$$n = \lg \frac{\sqrt{\rho(0)}}{\epsilon} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \cdot e^{\left(\frac{x}{2} - 2\epsilon\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}} + \theta,$$

где  $|\theta| \leq 1$ .

В круге  $|z| < x$ , где  $x$  — фиксированный параметр, связанный с  $C_x$ , будем иметь

$$\left| P_n(z) \right| < \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} + \frac{1}{\sqrt{\rho(0)}} \left( \frac{x}{\rho(0)} \right)^n < \frac{2}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot e^{n \lg \frac{x}{\rho(0)}}, \\ \left| P_n(z) \right| < \frac{2}{\sqrt{\rho(0)}} \cdot e^{\lg \frac{x}{\rho(0)} \cdot e^{-\epsilon(\alpha)} \cdot e^{\left(\frac{x}{2} - 2\epsilon\right) \int_0^x \frac{ds}{\rho(s)}}}.$$



либо проще

$$|P_n(z)| < \exp \left\{ e^{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)} \int_0^x \frac{ds}{r(s)} \right\} \quad (2.17)$$

при  $x > \rho(0)$  и  $z \in C_x$ .

Построим теперь некоторую аналитическую внутри  $D$  функцию  $\Psi(z)$ , не зависящую от  $n$  и мажорирующую полиномы  $P_n(z)$  внутри  $D$

$$|P_n(z)| < |\Psi(z)|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Допустим, что такая функция  $\Psi(z)$  уже построена. Тогда из (2.18) следует нормальность семейства полиномов  $\{P_n(z)\}$  внутри  $D$ , и так как эти полиномы по условию равномерно сходятся к  $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}}$

на некоторой части  $C$ , то  $\frac{1}{\sqrt{z-2\rho(0)}}$  должна быть аналитически продолжима внутрь  $D$ , чего не может быть.

Это противоречие и доказывает справедливость теоремы 3.

Таким образом доказательство этой теоремы сводится к построению функции  $\Psi(z)$ .

$\Psi(z)$  строим следующим образом. В полосе

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad u > 0,$$

на  $w = u + iv$  плоскости рассмотрим функцию  $\exp(e^w)$ .

На прямых  $v = \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$

$$\left| e^{e^w} \right| = e^{e^w \sin \frac{\varepsilon_0}{2}}.$$

а на

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad u = 0$$

$$\left| e^{e^w} \right| = e^{e^w} < e.$$

Отобразим функцией  $w = w(z)$  указанную полосу на криволинейную полосу  $D$  так, чтобы точка  $w = 0$  соответствовала некоторой фиксированной на границе  $C$  точке, а  $w = \infty$  соответствовала точке  $z = \infty$ .

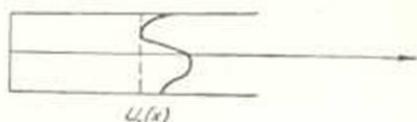
Покажем, что функция  $\Psi(z) = e^{e^{w(z)}}$  и есть искомая функция.

В самом деле. Отрезку  $\operatorname{Re} |z| = x$ ,  $|y| < \rho(x)$ , параллельному оси  $ou$ , будет соответствовать в полосе

$$|v| < \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}; \quad u > 0$$

некоторая криволинейная дуга  $\sigma_\varepsilon$ . Если обозначить через  $u_1(x)$  величину  $\min |w(x + iy)|$  при  $|y| \leq \rho(x)$  и фиксированном  $x$  (фиг. 1), то по первому неравенству Альфорса [2]

$$u_1(x) > C + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \int_a^x \frac{ds}{\rho(s)}, \quad (2.19),$$



Фиг. 1.

где  $a$  и  $C$  некоторые фиксированные постоянные. Тогда в силу этого неравенства будем иметь на границе  $S$  области  $D$  оценку

$$|e^{w(z)}| > e^{c \sin \frac{\varepsilon}{2} c} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}\right) \int_a^x \frac{ds}{\rho(s)}. \quad (2.20)$$

Но, с другой стороны,  $|e^{w(z)}|$  не только на границе, но и внутри области  $D$ , при  $x \rightarrow \infty$ , удовлетворяет неравенству (2.20) равномерно относительно  $y$ , а  $|P_n(z)|$  растет как  $x^n$ , поэтому из (2.17) и (2.20) следует, что и во всей области  $D$

$$|P_n(z)| < |e^{w(z)}| = |\Psi(z)|,$$

независимо от  $n$ , что и требовалось доказать.

*Замечание.* При доказательстве теоремы 3 косвенным путем доказано также, что оценки функции Грина, указанные нами в неравенствах (1.11) теоремы 1, нельзя существенно уточнить в том смысле, что в этих неравенствах коэффициенты 1 и 2 при интегралах нельзя заменить соответственно числами меньше  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{\pi}{2}$  (утверждение в конце § 1.1).

То же самое можно сказать относительно других оценок, связанных с функцией Грина и приведенных в § 1.

**2.4** Равномерная аппроксимация аналитических на замкнутых неограниченных совокупностях функций.

Пусть  $\Omega$  — односвязная неограниченная область, содержащая круг  $|z| < a$ .

При произвольном  $r$  область  $\Omega$  отсекает на окружности  $|z| = r$ , вообще говоря, счетное число дуг, каждая из которых будет разбивать  $\Omega$  на две области, в одной из которых будет лежать точка  $z = 0$ .

В дальнейшем предполагаем, что область  $\Omega$  отсекает на каждой окружности  $|z| = r$  лишь конечное число дуг. При  $r \rightarrow \infty$  это число может стремиться к бесконечности.

При данном  $r$  указанные дуги отсекают от  $\Omega$  некоторую конечную область, содержащую точку  $z = 0$ .

Из этих дуг можно выбрать минимальное число таких, которые

отделяют от  $\Omega$  максимальную конечную область, содержащую точку  $z=0$ . На приведенном чертеже (фиг. 2) такими дугами являются MN и SP.

Обозначим эту область через  $\Omega_r$ . Пусть  $\delta(r)$  — „минимальное“ в смысле Лаврентьева расстояние особой точки функции  $\varphi(z)$  от области  $\Omega_r$  и  $d(r) = \max |z|$  в области  $\Omega_r$ . Таким же путем, как это было сделано в § 1.3, проведем замкнутую спрямляемую кривую  $L_r$ , содержащую  $\Omega_r$  и состоящую от нее на расстоянии  $\delta'$

$$\frac{\delta}{2} < \delta' < \delta$$

с длиной порядка  $c \frac{d^2(r)}{\delta(r)}$ , где  $c$  —

абсолютная постоянная.

Тогда, согласно теореме 2, существует многочлен  $P_n(z)$  степени  $n$  такой, что в  $\Omega_r$

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta/2} \exp \left\{ -n e^{-\alpha \left[ \frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\}, \quad (2.21)$$

где  $\alpha$  — абсолютная постоянная, а  $M_{\delta/2}$  есть  $\max |\varphi(z)|$  на расстоянии  $< \frac{\delta(r)}{2}$  от  $\Omega_r$ .

Из (2.21) следует ограниченность полиномов  $\{P_n(z)\}$  в круге  $|z| < a/2$ .

$$|P_n(z)| < \text{const.}$$

Следовательно в  $|z| > a/2$

$$|P_n(z)| < \text{const.} \left| \frac{z}{a} \right|^n.$$

В частности и вне  $\Omega_r$  выполняется это неравенство. Тогда вне круга  $|z| < r$

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta/2} |z|^{1/n} + e^{n \lg 2 \frac{|z|}{a}} < M_{\delta/2} |z|^{1/2} + \text{const} \cdot e^{n \lg |z|}. \quad (2.22)$$

Определим  $n$  таким образом, чтобы

$$M_{\delta(r)/2} \cdot \exp \left\{ -n e^{-\alpha \left[ \frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\} \ll \varepsilon.$$

$$M_{d(r)} \cdot \exp \left\{ -(n-r) e^{-\alpha \left[ \frac{d(r)}{\delta(r)} \right]^2} \right\} > \varepsilon.$$

Отсюда

$$n = \lg \frac{M_{2(r)/\varepsilon}}{\varepsilon} \cdot e^{\alpha \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2} + \theta, \quad (2.23)$$

$|\theta| < 1$ .

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на  $M_{2(r)/\varepsilon}$ . Теперь потребуем, чтобы

$$\lg M_{2(r)/\varepsilon} < e^{\beta \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2}, \quad (2.24)$$

и выберем также

$$\varepsilon = e^{-\gamma \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2},$$

где  $\beta, \gamma$  — постоянная.

Тогда из (2.23) получим, что при выполнении в  $\Omega$  неравенств

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < \varepsilon = e^{-\gamma \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2}$$

можно считать  $n$  удовлетворяющим неравенству

$$n < e^{q \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2},$$

где  $q$  — абсолютная постоянная.

Подставляя это значение  $n$  в (2.22), получим вне  $\Omega$

$$|\varphi(z) - P_n(z)| < \exp \left\{ e^{-q \left[ \frac{d(|z|)}{h(|z|)} \right]^2} \right\}.$$

Поэтому при  $q' > q$

$$\sup_{\{z\}} \left\{ e^{-q' \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| \right\} \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

в  $\Omega$ , при  $n \rightarrow \infty$ , когда  $P_n(z)$  подобраны соответствующим образом.

Приходим к теореме.

**Теорема 4.** В бесконечной области  $\Omega$  к любой функции  $\varphi(z)$ , аналитической в  $\Omega$  и удовлетворяющей условию (2.24), допустимо весовое приближение (2.25) при определенном значении постоянной  $q'$ .

2.5. Решим теперь одну задачу об оценке взвешенного наилучшего приближения в бесконечной области.

Пусть область  $\Omega$  и функция  $\varphi(z)$  удовлетворяют условиям предыдущего параграфа с одной лишь разницей, что здесь, взамен условия (2.24), пусть  $\varphi(z)$  удовлетворяет неравенству

$$\lg M_{2(r)/\varepsilon} < e^{\gamma \left[ \frac{d(r)}{h(r)} \right]^2}, \quad \gamma > 2. \quad (2.26)$$

Обозначим при фиксировании  $n$

$$E_n(\varphi(z)) = \inf_{\{P_n\}} \left\{ \sup e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| \right\}, \quad \beta' < \beta.$$

Оценим  $E_n(\varphi(z))$  в зависимости от  $n$ .

Возьмем определенное значение  $\tau$  и для области  $\Omega_\tau$  построим полиномы Фабера и аппроксимируем  $\varphi(z)$  посредством отрезка  $P_n(z)$  ряда Фабера этой функции. Оценим при таком выборе полинома  $P_n(z)$  значение

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} |\varphi(z) - P_n(z)|$$

в  $\Omega_\tau$  и вне  $\Omega_\tau$ .

В  $\Omega_\tau$

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{1(z), \tau} \cdot e^{-n \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}}. \quad (2.27)$$

Вне  $\Omega_\tau$

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} |\varphi(z) - P_n(z)| < e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} \cdot \left\{ M_{0(z), \tau} + e^{n \lg \frac{|z|}{a}} \right\}.$$

В силу (2.26) вне  $\Omega_\tau$

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} |\varphi(z) - P_n(z)| < e^{-c \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma} + n \lg |z|} \cdot M_{0(z), \tau}, \quad (2.28)$$

где  $c$  — постоянная.

Возьмем

$$n = e^{-\frac{\beta}{2} \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} + \theta, \quad (2.29)$$

$|\theta| < 1$ .

Тогда, очевидно, вне  $\Omega_\tau$

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{0(z), \tau} \cdot \exp \left\{ -c e^{-\frac{\beta}{2} \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} \right\}. \quad (2.30)$$

Из (2.29)

$$\frac{d(r)}{\delta(r)} = \text{const.} \cdot (\lg n)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.31)$$

Подставляя это значение в (2.27) и (2.31), получим во всей области  $\Omega$

$$e^{-\beta \frac{[d(r)]^\gamma}{[q(r)]^\gamma}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{0(z), \tau} \cdot e^{-c (\lg n)^{\frac{2}{\gamma}}},$$

где  $c$  — абсолютная постоянная, а в  $M_{\delta(r)}$  вместо  $r$  надо подставить решение уравнения (2.31). Это уравнение разрешимо относительно  $\frac{d(r)}{\delta(r)}$ , так как функция  $\frac{d(r)}{\delta(r)}$  монотонно-возрастающая.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в § 2.3, доказываются, что вообще говоря аппроксимация

$$e^{-c \left[ \frac{d(|z|)}{\delta(|z|)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)} \cdot \exp \left\{ -n e^{c(\lg n)^{\frac{2-\varepsilon}{\gamma}}} \right\},$$

( $\varepsilon > 0$ ) невозможна.

Получаем следующую теорему.

**Теорема 5.** В области  $\Omega$ , описанной в § 2.4, функцию  $\varphi(z)$ , аналитическую в  $\bar{\Omega}$ , можно аппроксимировать многочленом  $P_n(z)$  степени  $n$  так, чтобы

$$e^{-c \left[ \frac{d(|z|)}{\delta(|z|)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)} \cdot \exp \left\{ -n e^{c(\lg n)^{\frac{2}{\gamma}}} \right\}, \quad (2.32)$$

где в  $M_{\delta(r)}$  вместо  $r$  надо подставить решение уравнения

$$\frac{d(r)}{\delta(r)} = a (\lg n)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (2.33)$$

а  $a$  и  $c$  — абсолютные постоянные.

Замена в правой части в показателе числа  $\frac{2}{\gamma}$  на  $\frac{2-\varepsilon}{\gamma}$ , вообще говоря, невозможна, т. е. всегда можно указать бесконечную область  $\Omega$  и функцию  $\varphi(z)$ , аналитическую на  $\bar{\Omega}$ , когда аппроксимация, при показателе  $\frac{2-\varepsilon}{\gamma}$  в правой части, невозможна.

**Замечание.** Если вместо веса  $e^{-c \left[ \frac{d(|z|)}{\delta(|z|)} \right]^{\frac{1}{\gamma}}}$  рассмотреть вес  $e^{-\theta \left( \frac{d(|z|)}{\delta(|z|)} \right)}$ , где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lg \theta(t)}{t^2} = \infty, \quad \theta(t) \uparrow \infty,$$

то получим

$$e^{-\theta \left( \frac{d(|z|)}{\delta(|z|)} \right)} |\varphi(z) - P_n(z)| < M_{\delta(r)} \cdot e^{-n \theta^{-1}(2n)}. \quad (2.34)$$

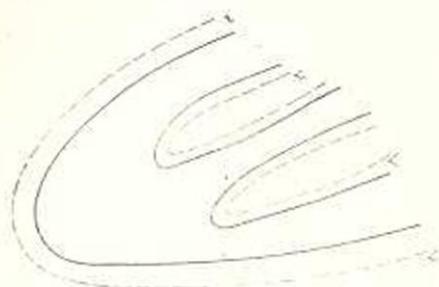
где  $\theta^{-1}(2n)$  решение уравнения

$$n = \frac{\theta \left( \frac{d(r)}{\delta(r)} \right)}{2}. \quad (2.35)$$

2.6. При решении задачи § 2.5 мы пользовались следствием аппроксимационной теоремы 2, т. е. неравенством (2.13).

Если же исходить из неравенств (2.11) и (2.12), то можем получить для наилучшего приближения оценку, которая в конкретных случаях может привести к лучшим результатам.

В самом деле. Пусть  $\Omega$  — область, описанная в § 2.4. и  $\varphi(z)$  аналитическая в  $\bar{\Omega}$ . Учитывая наши допущения относительно  $\Omega$ , можем построить проходящие через  $z = \infty$  бесконечные замкнутые кривые, лежащие в дополнении к  $\bar{\Omega}$  и охватывающие  $\Omega$  в области регулярности  $\varphi(z)$  (фиг. 3). Совокупность



Фиг. 3.

этих кривых обозначим через  $L$ . Любую конечную часть кривой  $L$  будем считать спрямляемой. Через  $L_r$  обозначим часть кривой  $L$ , охватывающей  $\Omega$ .

Тогда, идя тем же путем, что и в §§ 2.4 — 2.5, получим:

**Теорема 6.** Если для функции  $\varphi(z)$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M_{\Omega(r)}^{\varphi}}{\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}} = 0, \quad (2.36)$$

то в  $\Omega$

$$\inf_{\{P_n\}} \left\{ \exp^{-c\sigma} \cdot \left| \varphi(z) - P_n(z) \right| \right\} = 0, \quad (2.37)$$

где для  $|z| \leq r$  в показателе берется интеграл  $\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}$ ;

$c$  — абсолютная постоянная.

Весовую функцию невозможно значительно уточнить, так

как уже при весе  $\exp \left\{ -e \left( \frac{\pi}{4} - t \right) \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right\}$  указанная аппроксимация,

вообще говоря, невозможна.

Имеет место и более общая теорема:

Если обозначим через  $\theta(t)$  возрастающую к бесконечности функцию, удовлетворяющую условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \theta(r)}{\int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}} = \infty, \quad (2.38)$$

то при

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M_{\theta(r)/r}}{\lg b(r)} = 0 \quad (2.39)$$

существуют полиномы  $\{P_n(z)\}$  такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\delta \left( \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right)} |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0. \quad (2.40)$$

Одновременно при этом все имеет место следующая оценка

$$e^{-\delta \left( \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right)} |f(z) - P_n(z)| < e^{-n e^{-\delta^{-1} (2n)}}, \quad (2.41)$$

где  $\delta^{-1}(2n)$  решение уравнения

$$2n = \theta \left( \int_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)} \right). \quad (2.42)$$

Доказательства этих утверждений приводить не будем, так как они по существу не отличаются от доказательств в §§ 2.4—2.5.

### § 3. Весовые равномерные приближения в открытой бесконечной области

3.1. Пусть  $\Omega$  — совершенно произвольная односвязная бесконечная область на плоскости комплексного аргумента  $z$ .

Допустим  $\Omega$  содержит внутри себя круг  $|z| < a$ .

Для непрерывного параметра  $t$ , меняющегося в промежутке  $0 \leq t < \infty$ , построим непрерывную последовательность расширяющихся областей  $\Omega_t$  таких, что при  $t_1 < t_2$

$$\Omega_{t_1} \subset \Omega_{t_2},$$

$\Omega_2$  совпадает с  $|z| < a$ , а  $\Omega_\infty$  с  $\Omega$ .

Области  $\Omega_t$  подбираем со спрямляемой границей и притом так, что все величины, связанные с областью  $\Omega_t$ , меняются в зависимости от  $t$  непрерывным образом.

Рассмотрим задачу о весовом полиномиальном приближении произвольной голоморфной в  $\Omega$  функции  $f(z)$ .

Аппроксимируя  $f(z)$  полиномом  $P_{n(t)}^{(t)}(z)$  в области  $\Omega_t$  с точностью  $\varepsilon(t)$ , где  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , очевидно, в общем случае, при  $t \rightarrow \infty$  получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{z \in \Omega} |P_{n(t)}^{(t)}| = \infty.$$

Мы хотим определить при некотором заданном  $\varepsilon(t)$  ( $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ) возможно медленно возрастающую функцию аргумента  $t$ , огибающую  $\max |P_n^{(t)}|$ , при всех  $t$ .

Допустим, что определили такую огибающую  $\Delta(t)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \infty$$

и что  $\Delta(t)$  является также мажорантой для  $|f(z)|$  в  $\Omega_t$ .

Тогда очевидно, при «весе»  $\frac{\Phi(t)}{\Delta(t)}$ , где  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = 0$ , возможно подобрать полиномы  $\{P_n(z)\}$  такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\Phi(t)}{\Delta(t)} |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0,$$

где при данном  $z$  считаем  $t$  равным нижней грани значений  $t'$  для  $\Omega_{t'}$ , покрывающих  $z$ , а  $\Phi(t)$  — сколь угодно медленно убывающая функция.

В случае ограниченных функций  $f(z)$ , функция  $\Delta(t)$  будет возрастать с определенной скоростью, не ниже некоторой минимальной, зависящей от области  $\Omega$ .

Задача весового приближения и заключается в том, чтобы определить при ограниченных  $f(z)$  эту минимальную скорость возрастания  $\Delta(t)$  и охарактеризовать класс функций, содержащий класс ограниченных функций, для которого указанная огибающая  $\Delta(t)$  совпадает с огибающей, определенной для ограниченных функций.

3.2. Решим эту задачу.

Обозначим через  $M(t)$  некоторую возрастающую функцию

$$M(t) \uparrow \infty,$$

а через  $M$  — класс функций  $f(z)$ , регулярных в  $\Omega$  и мажорируемых равномерно в любой области  $\Omega_t$  функцией  $M(t)$ . Через  $L_t$  обозначаем границу  $\Omega_t$ , а через  $l(t)$  ее длину.

Возьмем определенную область  $\Omega_t$ , соответствующую некоторому значению параметра  $t$ . Положение точек  $B$  на кривой  $L_t$  будем определять по дуговому расстоянию  $s$  от некоторой начальной точки  $A$  на  $L_t$ . Расстояние точки  $B$  от границы области  $\Omega$  обозначим через  $\rho(s)$ .

Тогда, согласно теореме 2, можем определить полином  $P_n(z)$  степени  $n$  такой, чтобы в односвязной открытой компоненте  $\Omega_t^*$ , содержащей  $|z| < a$  и оставшейся от  $\Omega_t$  после выметания кругов  $|z - z(s)| < \rho(s)$ , имела место оценка

$$|f(z) - P_n(z)| < C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_{L_t} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}. \quad (3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C &< e^{c \cdot e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}}, \\ \beta &= \frac{d_0}{8d}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

$d = d(t) = \max |z|$  на  $L_1$ ,  $d_0$  — пост.,  $c$  — абсолютная постоянная,  $\delta(t)$  — „минимальное расстояние“, в смысле Лаврентьева, точек кривой  $L_1$  от границы  $\Omega$ , относительно начала координат в области  $\Omega$ .

Заметим, что и  $\Omega_t^*$  определится единственным образом значениями параметра  $t$ .

При  $t$  достаточно большом  $\Omega_t$  содержит круг  $|z| < a$ .

Выберем теперь  $n$  таким, чтобы

$$\begin{aligned} C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta n e^{-\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} \right\} &\leq \varepsilon(t), \\ C \cdot M(t) \cdot \exp \left\{ -\beta(n-1) e^{-\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} \right\} &> \varepsilon(t). \end{aligned}$$

Получим

$$n = \frac{1}{\beta} \lg \frac{CM(t)}{\varepsilon(t)} \cdot e^{\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} + \theta, \quad (3.3)$$

$|\theta| < 1$ .

До сих пор мы оставляли произвольным  $M(t)$  и  $\varepsilon(t)$ . Возьмем теперь  $M(t)$  и  $\varepsilon(t)$  такими, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \lg M(t) \cdot e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}}{\int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}} = 0, \quad (3.4)$$

и

$$\varepsilon(t) = M_t^{-1} e^{\frac{R(t)}{\delta(t)}}.$$

Тогда, при сколь угодно малом  $\alpha > 0$ , беря достаточно большое  $t$ , будем иметь при выполнении (3.3),

$$n < e^{(1+\alpha) \int_{L_1} \frac{ds}{\delta(s)}},$$

$t > t(\varepsilon)$ .

И, при таком  $n$ , в  $\Omega_t^*$

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon(t).$$

Оценим рост этих полиномов вне  $\Omega_t$ .

Так как в  $|z| < a$

$$|P_n(z)| < \text{const.},$$

то вне  $|z| < a$  и, в частности, вне  $\Omega_t$

$$|P_n(z)| < c \cdot e^{n \lg \frac{|z|}{a}} < e^{\lg \frac{|z|}{a} \cdot e^{(1+\alpha) \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}}}.$$

Поэтому во всей области  $\Omega$  возможна следующая аппроксимация

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\lg \frac{|z|}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}}} \cdot |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0, \quad (3.5)$$

где  $\alpha' > \alpha$ , а для данного  $t$   $z$  — точка области  $\Omega_t^*$ .

Функция

$$e^{\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}}} \quad (3.6)$$

при любом сколь-угодно малом  $\alpha'$  и есть искомая функция  $\Delta(t)$ .

В самом деле. Возьмем определенное значение  $t$  и соответствующую область  $\Omega_t^*$ . Тогда внутри  $\Omega_t^*$

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon(t),$$

а вне  $\Omega_t^*$ , в частности при  $|z| > d(t)$ ,

$$e^{-\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}}} \cdot |f(z) - P_n(z)| < M(t) \cdot \exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} + \\ + \exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha') \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} \cdot \exp \left\{ \lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{(1+\alpha) \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\}.$$

Из этого неравенства в силу условий (3.4) и получаем (3.5).

Что (3.6) может служить в качестве функции  $\Delta(t)$  доказывается тем, что строится область, для которой при „весе“

$$\exp \left\{ -\lg \frac{d(t)}{a} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \int_t^{\infty} \frac{ds}{\rho(s)}} \right\} \quad (3.7)$$

аппроксимация, вообще говоря, невозможна, т. е. невозможна для некоторой функции  $f(z)$ , удовлетворяющей условию (3.4).

Нетрудно заметить, что пример такой области получится из области, построенной при доказательстве теоремы 3, выметанием кругов радиуса  $\rho(s)$ .

Во избежание повторений, этого доказывать не будем.

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

**Теорема 7.** Если  $f(z)$  регулярна в области  $\Omega$  и удовлетворяет условию (3.4), то в  $\Omega$  возможна аппроксимация вида (3.5).

При весе (3.7) такая аппроксимация, вообще говоря, невозможна.

**Следствие.** Для функций  $f(z)$ , регулярных в  $\Omega$  и удовлетворяющих условию (3.4), возможна аппроксимация

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-c} \cdot \left[ \frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^2 \cdot |f(z) - P_n(z)| \right\} = 0, \quad (3.8)$$

где  $c$  — абсолютная постоянная, а  $z$  — точка внутри  $D_1^*$ .

Путь получения этого равенства из (3.5) уже известен из предыдущего текста, поэтому (3.8) доказывать не будем.

Доказывается также на примере, о котором говорилось выше, что при замене в выражении веса функции  $\left[ \frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^2$  на  $\left[ \frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^{2-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) аппроксимация, вообще говоря, не будет иметь места.

Как при (3.5), так и при (3.8), возможно дать оценку наилучших приближений. Например, таким же путем, что и в теореме 5, доказывается

**Теорема 8.** В области  $\Omega$  для функций  $f(z)$ , удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\delta(t)}{d(t)} \right]^\gamma \cdot \lg \lg M(t) = 0, \quad (3.9)$$

и для любого  $n$  можно подобрать полином  $P_n(z)$  такой, что

$$e^{-c} \left[ \frac{d(t)}{\delta(t)} \right]^\gamma \cdot |f(z) - P_n(z)| < e^{-nc} \frac{2}{\gamma}$$

где  $\gamma > 2$ ,  $c$  и  $a$  — абсолютные постоянные.

Замена в правой части, в показателе, степени  $\frac{2}{\gamma}$  на  $\frac{2}{\gamma} - \varepsilon$ , вообще говоря, невозможна.

Сектор математики  
и механики АН Армянской ССР

Поступило 23 IV 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Уолш. Über den Grad der Approximation einer analytischen Funktion. Münchener Berichte, 1926, стр. 223—229.
2. Альфорс. Untersuchungen zur Theorie der Konformen Abbildung... Acta Soc., sci. Fenn., N. s. 1, Nr. 9 (1930).
3. Варшавский. On conformal mapping of infinite strips. Trans. Am. Math. Soc. 51, № 2, 1942, стр. 280—335.
4. Лазаренков М. А. О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях. ДАН СССР, 4 (1936), стр. 207—210.

5. Мергелян С. Н. О скорости приближения функций многочленами на произвольных континуумах. ДАН СССР, 1953, т. XCI, № 6, стр. 1271—1274.
6. Фабер Г. Über polynomische Entwicklungen, Mathematische Annalen, 1903, Bd. 57, стр. 389—408.
7. Фабер Г. Über Tschebyscheffsche Polynome. Crelle's Journal, 1920, Bd. 150, стр. 79—106.
8. Маркушевич. О полиномах Фабера. Изв. АН СССР, серия математическая, 1940, т. 8, стр. 49—59.
9. Фабер Г. Über Potentialtheorie und Konforme Abbildung (Stzbr. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1920, Jahrgang, München, 1921).

### Յ. 1. Շահինյան

## ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ՏԻՐՈՒՅՔՆԵՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԱՆԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Առաջը ապացուցել է  $[1]$ , որ եթե  $E$ -ն կամայական վահ է վերջավոր բազմություն է միակապ լրացումով, ապա  $E$  բազմություն վրա անալիտիկ  $f(z)$  ֆունկցիային կարելի է մոտենալ  $\{P_n(z)\}$  բազմանդամներով այնպես, որ

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{c}{r^n},$$

որ  $c$ -ն նաստատուն է,  $n$ -ը բազմանդամի աստիճանը, իսկ  $r > 1$  մի նաստատուն է, կոսիված  $f(z)$  ֆունկցիայից և  $E$  բազմությունից:

$r$  թիվը ստանալու նամար պետք է արտապատկերել  $E$ -ի արտաքին տիրույթը  $|w| > 1$  տիրույթի մեջ փոխ միարժեք և կանֆորմ կերպով այնպես, որ

$$w = \phi(z), \quad \phi(\infty) = \infty, \quad \phi'(\infty) > 0$$

և այնուհետև, դիտարկել Գրինի ֆունկցիայի մակարդակի դժերից այն, որը անցնում է «մոտակա» եզակի կետից. էթե

$$|\phi(z)| = \rho$$

այդ մակարդակի գիծն է, ապա  $r$ -ը կարելի է նամարել որևէ թիվ վորք  $\rho$ -ից: Այսպիսով և  $\rho$  թիվը և հետևարար նաև  $r$ -ը կարում ունեն նախ  $E$  բազմությունից և ապա նաև  $f(z)$  ֆունկցիայից:

$\rho$  թվի գնահատման նամար կամ պիտի ունենալ  $CE$  տիրույթը  $|w| > 1$  շրջանի մեջ արտապատկերող ֆունկցիան կամ էլ օդտապործել կանֆորմ արտապատկերման տեսությունից մեջ նայանի ազավազման «գնահատականներից»:

Այդպիսի գնահատականներից ալյալ զեղջում նարմար է կամ վարչավիտ նայանի աննամատարությունը և կամ էլ Անլիֆորսի երկրորդ աննամատարությունը:

Բայց այդ երկու գնահատականները ձեռք են բերված բազմությունը մեծ սանմանափակումների ենթարկելու միջոցով, ներկա հոդվածում մենք գնահատում ենք կամայական վերջավոր և անվերջ բազմությունների վրա

հայտնորֆ ֆունկցիաներին բազմանդամներով մոտենալու հարցը, ձգտելով ստանալ հիշյալ արագության գնահատականը իրեն՝ E բազմության տերմիններով կախված նաև  $I(z)$  ֆունկցիայի եզակիությունների «նեոսփարությունից»<sup>1</sup> E բազմությունից:

<sup>1</sup> «Հեռագրություն» բառը տեղադրված ունի նաև հիմառա այդ պատճառով դրված և չտեղադրված մեջ:

М. И. Розовский

**О некоторых процессах деформирования материалов**

В работе рассмотрены высокоэластические деформации полимеров, ползучесть и релаксация металлов при  $\sigma < \sigma_s$ .

Пользуясь статистическим методом, на основе активационной теории дано обоснование возможности представления переменных периодов последствия и релаксации как функций времени, определяемых по экспериментальным данным.

На той же основе выполнен анализ кривых ползучести и релаксации.

**1. Высокоэластическая деформация полимеров**

При количественном изучении процессов деформирования реальных материалов во времени широко используются механические модели, назначение которых — схематически отображать микроструктурные свойства материала в процессе деформирования.

Применение таких моделей приводит к линейным дифференциальным уравнениям, связывающим напряжение  $\sigma$ , деформацию  $\epsilon$  и их производные по времени с соответствующими параметрами модели.

Простая модель Кельвина применительно к развитию высокоэластической деформации дает при  $\sigma = \text{const}$

$$\frac{1}{\epsilon_m - \epsilon_c} \cdot \frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{1}{\theta} \quad (1.1)$$

где  $\epsilon_c$  — эластическая деформация,  $\epsilon = (\epsilon_c)_{\text{max}}$  — предельная эластическая деформация,  $\theta$  — период упругого последствия.

$$\text{Здесь} \quad \theta = \theta_0 e^{\frac{E}{KT}}, \quad (1.2)$$

где  $E$  — энергия активации упругого последствия,  $K$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\theta_0$  — постоянная, не зависящая от температуры.

Из (1.1) следует

$$\epsilon_c = \epsilon_m (1 - e^{-\lambda t}), \quad (1.3)$$

где  $\lambda = 1/\theta$ .

Эта формула, как известно, оправдывается только качественно. Последнее объясняется тем, что формула (1.3) справедлива лишь в том случае, когда энергия активации и, как следствие, период упругого последствия, не изменяется в ходе процесса деформирования,

чего в действительности нет. Формулу, дающую  $\varepsilon_c$  в явном виде, пригодную для правильного количественного изучения кинетики высокоэластической деформации, можно получить в результате применения статистического метода на основе активационно-энергетической теории, исходя из сложной модели (статистический набор элементарных моделей). Для простоты примем, что последняя состоит из множества последовательно соединенных простых моделей Кельвина с соответствующими, отличными друг от друга, энергиями активации элементарных процессов последействия, схематически описываемых упомянутыми простыми моделями.

Эта система характеризуется функцией распределения  $F(E)$  энергий активации, изменяющихся в промежутке от  $E_{\min} = E_1$  до  $E_{\max} = E_2$ . В нашем случае вместо формулы (1.3) будем иметь

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m \left[ 1 - \int_{E_1}^{E_2} F(E) e^{-\lambda t} dE \right], \quad (1.4)$$

откуда 
$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \varepsilon_m \int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda t} dE. \quad (1.5)$$

Функция распределения  $F(E)$  удовлетворяет условию нормализации

$$\int_{E_1}^{E_2} F(E) dE = 1.$$

С помощью (1.4) и (1.5) образуем выражение удельной скорости деформации

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon_c} \cdot \frac{d\varepsilon_c}{dt} = \dot{i}(t), \quad (1.6)$$

где

$$\dot{i}(t) = \frac{\int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda t} dE}{\int_{E_1}^{E_2} F(E) e^{-\lambda t} dE}.$$

Температура предполагается постоянной.

Из (1.6) следует, что процесс высокоэластической деформации может быть охарактеризован переменным во времени периодом  $\theta = \frac{1}{\dot{i}(t)}$  упругого последействия. Следовательно, вопрос сводится к установлению вида функции  $\dot{i}(t)$  — характеристики скорости протекания процесса. Эту функцию легко найти по экспериментальным данным, отображающим изменение величины  $\lambda = \frac{1}{\theta}$  от времени  $t$ .

Так, например, пользуясь данными, помещенными в первых двух строках таблицы 1, получим

$$\dot{i}(t) = \alpha t^{-\beta}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,42$ .

Насколько хорошо получается совпадение, видно из таблицы 1.

Таблица 1

(Полиизобутилен, температура 82°C)

время в минутах $t$	7,5	25,0	41,5	57,2	74,0	110
Из эксперимента	0,0354	0,0200	0,0165	0,0146	0,0133	0,0116
$\lambda = f(t)$ вычислено по формуле (1.7)	0,0344	0,0207	0,0167	0,0146	0,0132	0,0117

Вторая строка таблицы 1 составлена по экспериментальным данным, взятым из [1].

В результате интегрирования (1.6) с учетом (1.7), получим

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m \left[ 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_0}\right)^\gamma} \right], \quad (1.8)$$

где  $\theta_0 = 3,15$  минут,  $\gamma = 0,58$  — безразмерная постоянная.

Интересно отметить, что полученная выше формула (1.8) аналогична формуле, найденной А. П. Бронским [2] в результате эксперимента над каучуком (СК).

Перейдем теперь к случаю релаксации напряжения  $\sigma$  при постоянной деформации  $\varepsilon = \text{const}$ .

Здесь можно применить статистический метод, используя сложную модель, состоящую из множества простых моделей Максвелла, соединенных параллельно.

Так как для простой модели Максвелла при  $\varepsilon = \text{const}$  имеет место

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{1}{\tau},$$

где  $\tau = \tau_0 e^{\frac{u}{kT}}$ ,  $u$  — энергия активации то в нашем случае получим

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\varphi(t), \quad (1.9)$$

где

$$\varphi(t) = \int_{u_1}^{u_2} \Phi(u) u e^{-u/\tau} du + \int_{u_1}^{u_2} \Phi(u) e^{-u/\tau} du.$$

Здесь  $\Phi(u)$  — функция распределения энергий активации, изменяющихся от  $u_{\min} = u_1$  до  $u_{\max} = u_2$ .

Функция  $\varphi(t)$  — характеристика скорости релаксации, определяется из экспериментальных данных, отображающих зависимость величины  $\mu = \frac{1}{\tau}$  от времени  $t$ . Так, например, пользуясь таблицей 2, составленной по экспериментальным данным, взятым из [3], получим

$$\varphi(t) = at^{-b},$$

где  $a = 0,07$ ,  $b = 0,72$ .

Таблица 2

(Смокедшит, температура 22°C)

время в минутах $t$	0,17	1	8	32
$\mu = \frac{1}{\tau}$	0,2857	0,0583	0,0160	0,0062

Из уравнения (1.9) следует

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\int_0^t \varphi(s) ds}. \quad (1.10)$$

Дальнейшее применение формулы (1.10) ясно.

Полученные выше, на основе статистического метода, формулы могут быть связаны с формулами, следующими из теории наследственности Вольтерра. Этим вопросом мы здесь заниматься не будем.

## 2. Ползучесть и релаксация металлов при $\sigma < \sigma_s$

Уравнения (1.6) и (1.9) справедливы лишь в том случае, когда начальное напряжение  $\sigma_0$  не превышает предела текучести  $\sigma_s$  полимера при заданной температуре.

Если ползучесть и релаксация металла протекают также при  $\sigma_0 < \sigma_s$ , то эти процессы пластических деформаций могут быть описаны с помощью уравнений типа (1.6) и (1.9). Наибольший интерес представляет получение уравнений начальных участков кривых ползучести и релаксации металлов.

Рассмотрим сначала процесс релаксации напряжения в поликристаллическом металле.

Если в уравнении (1.9) функции  $\varphi(t)$  придать выражение

$$\varphi(t) = \frac{k}{(1+pt)^2},$$

где  $k$  и  $p$  — константы, зависящие от температуры, то получим

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{k}{(1+pt)^2}.$$

Интегрирование уравнения (2.1) дает

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{kt}{1+pt}}. \quad (2.2)$$

Эта формула в точности совпадает с формулой, полученной Одинггом [4] (из соображений, отличных от наших) для начального участка кривой релаксации и проверенной им для стали СТ-40.

Уравнение начального участка кривой ползучести можно получить с помощью соотношения (1.6).

Заменяя в уравнении (1.6)  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_p$  — деформация, соответствующая неустановившейся скорости ползучести, и принимая

$$f(t) = \frac{p}{1+pt}. \quad (2.3)$$

где  $p$  — постоянная, зависящая от температуры, получим

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon_p} \cdot \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \frac{p}{1 + pt} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует

$$\varepsilon_p = \frac{cpt}{1 + pt} \quad (2.5)$$

где  $c = (\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$ .

Формула (2.5) совпадает с формулой, полученной Одинггом для начального участка кривой ползучести, в результате рассмотрения процесса ползучести, протекающего путем самодиффузии атомов. Формула (2.5) хорошо подтверждается для некоторых марок стали (Нюбневая, ЭИ-69, ЗОХНЗМ).

Представляет интерес найти уравнение начального участка кривой ползучести другим путем, а именно, исходя из заданной функции распределения энергии активации. Для этого воспользуемся соотношением (1.5), заменив предварительно в нем  $\varepsilon_0$  на  $\varepsilon_p$ :

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m \int_{E_1}^{E_2} \lambda F(E) e^{-\lambda t} dE \quad (2.6)$$

Самое простейшее приемлемое выражение для функции распределения будет

$$F(E) = \begin{cases} 0 & E < E_1 \\ P & \text{для } E_1 \leq E \leq E_2 \\ 0 & E > E_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Условие нормализации требует, чтобы  $p = 1/E_2 - E_1$  или при  $E_1 = 0$   $p = 1/E_2$ . В дальнейшем примем  $E_1 = 0$ , что не нарушает общности результатов.

Ниже будет показано, что допущение (2.7) приведет к формуле, справедливой для некоторых металлов.

Так как  $\lambda = c e^{-E/KT}$ , где  $c = 1/\theta_0$  и  $dE = -\frac{kt}{\lambda} d\lambda$ , то соотношение (2.6) запишется так:

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m p k T \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} e^{-\lambda t} d\lambda \quad (2.8)$$

где  $\lambda_2 = c e^{-E_2/KT}$ .

Следовательно

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m p k T \frac{e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}}{t} \quad (2.9)$$

Из (2.9) получим уравнение кривой ползучести

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_m k T}{E_2} \int_0^t \frac{e^{-\lambda_2 s} - e^{-\lambda_1 s}}{s} ds \quad (2.10)$$

Здесь  $(\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$ , так как  $E_2 = kt \ln \frac{c}{\lambda_2}$  и

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_2 s} - e^{-cs}}{s} ds = \ln \frac{c}{\lambda_2}.$$

Трудность экспериментального определения  $\lambda_2$  (или то же, что  $E_{\max} = E_2$ ) вынуждает рассмотреть случай, когда  $E_2 \gg kt$ . Тогда приближенным следствием соотношения (2.9) будет

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_m \rho k t \frac{1 - e^{-ct}}{t}. \quad (2.11)$$

Заметим, что при замене (2.9) соотношением (2.11), величина  $\varepsilon_m$  утрачивает свой прежний смысл  $(\varepsilon_p)_{\max} = \varepsilon_m$ , так как  $\varepsilon_p$ , следующее из (2.11)

$$\varepsilon_p = \varepsilon_m \rho k t \int_0^t \frac{1 - e^{-cs}}{s} ds,$$

не имеет установившегося значения.

Уравнение (2.11) совпадает с уравнением, полученным Смитом [5] на основе активационной теории и в предположении, что после завершения упруго-мгновенной деформации образца в нем образовалось очень большое количество областей, концентрация напряжения в которых выше среднего приложенного, но ниже местного предела текучести.

Уравнение Смита проще уравнения (2.9) потому, что он принял  $E_{\max} = \infty$ , чего не может быть в действительности, так как величина  $E$  должна быть конечной. Но так как функция распределения практически принимает сколь угодно малые значения при достаточно больших  $E$ , то формальное увеличение  $E > E_{\max} = \text{const}$  существенных приращений величины скорости деформации ползучести не внесет. Несмотря на эти допущения, а также аппроксимацию правой части уравнения (2.11), выражением  $\frac{\text{const}}{t}$  Смит получил формулу, хорошо подтверждающуюся экспериментально для свинцового, медного и цинкового образцов.

В заключение настоящего параграфа полезно сопоставить порядки убывания величин

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

при  $t \rightarrow \infty$  на основе полученных выше результатов. Последнее показывает, что как для полимеров, так и для металлов  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = 0$

и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = 0$ , причем порядок убывания  $\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$  ниже порядка убывания  $\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$ .

Интересно отметить, что для обычных моделей с числом элементов, большим двух (например модель Френкеля [6] или Губанова [7]), применяемых при изучении процесса деформирования полимеров в первом приближении, величина  $\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt}$  также убывает при  $t \rightarrow \infty$ , но, в отличие от полученных здесь результатов, к нулю не стремится. Действительно, в самом общем случае будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k e^{-\beta_k t}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\beta_k t}}, \quad (2.12)$$

где постоянные  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  зависят от параметров модели (в случае Френкеля или Губанова  $n = 4$ ).

Пусть  $\beta_\nu$ , где целое  $\nu$  ( $1 \leq \nu \leq n$ ), наименьшее из всех  $\beta_k$ . Разделив числитель и знаменатель правой части (2.12) на  $e^{-\beta_\nu t}$  ( $\beta_\nu \neq 0$ ), получим

$$\frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k e^{-(\beta_k - \beta_\nu)t}}{\sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-(\beta_k - \beta_\nu)t}}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon_m - \varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \beta_\nu.$$

Днепропетровский  
горный институт

Поступило 20 IV 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ребиндер П. А. и Чумакова Л. В. ДАН СССР, 81, № 2, 1951.
2. Бронский А. П. ПММ, 5, в. 1, 1941.
3. Догайкин Б. А., Баранев Г. М. и Резниковский М. И. Коллоидный журнал, 11, в. 5, 1949.
4. Одинг И. А. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1948.
5. Smith C. L. Proc: Phys. Society, 61, № 345, 1948.
6. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. АН СССР, 1945.
7. Губанов А. И. Журнал технической физики, 17, в. 1, 1949.

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՆՅՈՒԹԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված են պոլիմերների բարձր էլաստիկ դեֆորմացիաները, մետաղների սողքայնաթյունը և սեղաքասցիան  $\sigma < \sigma_s$  դեպքում,

Յգտվելով ստատիստիկական մեթոդից, ախտի վարչիոն տեսութեան հիման վրա տրված է հետադրաման և սեւաքսացիայի փոփոխական պարբերաշրջանները, որպէս ժամանակի՝ էքսպերիմենտալ սվյախներով որոշվող ֆունկցիաները ներկայացնելու հնարավորութեան հիմնավորումը:

Նույն հիման վրա կատարված է սողքայնութեան և սեւաքսացիայի կորերի վերլուծումը:

С. И. Баласаян

## К генезису интрузивных пород Памбакского и Геджалинского хребтов

Интрузивы Памбакского и Геджалинского хребтов пользуются широким развитием и характеризуются большим разнообразием петрографического состава. Преимущественно они образуют дайкообразные тела, вытянутые вдоль складчатых и разрывных структур. Среди интрузивных пород преобладающим развитием пользуются гранитоидные породы, занимающие значительную площадь.

**Возраст интрузивов и их относительное возрастное соотношение.** Возрастное расчленение интрузивов весьма затруднительно. Это объясняется ограниченным распространением третичных осадочных пород и неполнотой стратиграфического разреза. Все интрузивы прорывают вулканогенную толщу среднего эоцена, чем и устанавливается их послесреднеэоценовый возраст. Верхний предел возраста интрузивов определяется тем, что: 1) в районе Памбакского хребта вулканогенные породы миоценона (олигоцен) залегают на размытой поверхности некоторых интрузивных тел, 2) устанавливается связь интрузивов с эффузивами, в частности щелочными.

Взаимотношение интрузивов с вмещающими породами и тектоническими элементами позволяет наметить следующую последовательность их образования:

1. Основные интрузивы.
2. Гранитоидные интрузивы.
3. Гамзачиманский интрузив кварцевых монцитов.
4. Интрузивы порфиroidных гранитов.
5. Щелочные интрузивы.

В. Н. Котляр к комплексу основных пород относит Лермонтовский интрузив, расположенный у сел. Лермонтово, Ягублинский небольшой интрузив, находящийся в 4 км к северо-востоку от одноименного селения, в небольшие выходы габбро-диоритов и пироксенитов по реке Маман, в 3 км ниже с. Мисханы. Однако наши полевые наблюдения и обработка фактического материала приводят нас к предположению, что Ягублинское небольшое тело основного состава является несколько поздним образованием, чем Лермонтовский основной интрузив. Более позднее внедрение Ягублинского основного интрузива по отношению к Лермонтовскому основному интрузиву устанавливается на основании следующих данных:

1) Так называемый Лермонтово-Ягублинский разрыв проходит через видоконтактовую зону Лермонтовского основного интрузива, интенсивно нарушая слагающие его породы, однако в западной части разрыва размещен Ягублинский интрузив без следов нарушения.

2) Нигде не наблюдается пересечения Ягублинского интрузива либо апофизами гранитоидов, либо их жильными породами, как это имело место в его экзоконтактовых зонах и Лермонтовских основных породах.

3) По отчетливо выраженной порфиroidной структуре и простейшему внутреннему строению Ягублинский интрузив отличается от Лермонтовского.

Остальные основные породы, обнажающиеся по реке Маман и В. Н. Котляром считавшиеся одновозрастными с Лермонтовским интрузивом, Г. П. Багдасарян рассматривает как обычную краевую фацию Тежсарских гранитоидов.

Породы, относимые к комплексу гранитоидов, слагают наиболее крупные Геджалинский, Халабский (Шагалинский) интрузивы и ряд мелких тел, обнажающихся в следующих местах: вдоль южного склона Памбакского хребта, по ущелью р. Маман и ее истоков, у сс. Молла-Кишляг, Гайдарлы, Вартанлу, у Дебахлиевского перевала и т. д.

Геологическое строение перечисленных интрузивов не одинаково, однако по петрографическому и химическому составу они близки, что дало повод В. Н. Котляру возраст всех интрузивов считать близким.

В. Н. Котляр для обоснования более позднего времени внедрения гранитоидов по отношению к основным породам приводит следующие доказательства:

1) у с. Лермонтово наблюдается жила диорита, секущая основные породы;

2) у с. Пушкинаван в габбро отмечается жила микроклинового гранита.

Однако Г. П. Багдасарян приведенные В. Н. Котляром данные считает недостаточно убедительными, сомневаясь в раннем внедрении Лермонтовского основного интрузива.

Более раннее внедрение Лермонтовского интрузива по отношению к гранитоидным интрузивам, кроме доказательств, приведенных В. Н. Котляром, можно аргументировать также следующими данными:

1) во многих местах лермонтовские основные породы пересекаются апофизами Геджалинского интрузива, причем контактирующие с апофизами основные породы в той или иной мере гидротермально изменены;

2) кислые амфиболовые и пепматитовые жилы гранитоидного интрузива во многих местах прорезают Лермонтовский основной интрузив;

3) по северному контакту Лермонтовского основного интрузива с Геджалинским гранитоидным интрузивом отмечается заметное контактное влияние гранитоидного интрузива на основные породы, выражающееся в осветлении мелкозернистых габбро действием гидротермальных растворов.

В. Н. Котляр к комплексу гранитоидов относит также породы монцонитового состава, указывая, что последние с гранодиоритами связаны постепенными переходами. В гранитоидных интрузивах действительно отмечаются монцонитового состава породы, связанные с остальными разновидностями гранитоидных пород взаимопереходами. Однако при геологической съемке в 1,8 км к северо-западу от с. Гамзачимана нами встречен небольшой выход кварцевых монцонитов, имеющий резкий контакт с Геджалинским интрузивом. На близких участках выхода кварцевых монцонитов гранитоиды пересечены большим количеством аплитовых и пегматитовых жил, в то время как он остался нетронутым. Кроме того, с указанными породами связаны жилы того же кварц-монцонитового состава. Приведенные данные позволяют кварц-монцонитовые породы считать более поздним образованием, чем гранитоиды. Порфирировидные граниты слагают крупный Гильютский (Гамзачиманский) интрузив, расположенный в 1,5 км югу от с. Гамзачиман и небольшое фиолетовское дайкообразное тело, обнажающееся к юго-востоку от с. Фиолетово.

Более поздний возраст порфирировидных гранитов по сравнению с гранитоидными интрузивами установлен В. Н. Котляром на основании следующих данных:

1) фиолетовский разлом нарушает Геджалинский интрузив и в восточной части вдоль него интродуцировано фиолетовское дайкообразное тело порфирировидных гранитов;

2) дислоцированность гранитоидов интенсивнее, чем порфирировидных гранитов.

Щелочные породы в пределах района Геджалинского хребта образуют три отличающиеся по своим размерам интрузива. Первый из них — Буидукский, наиболее крупный и обнажается к северо-востоку от с. Гамзачиман, второй — Балданский, располагается в бассейне одноименной реки, к северу от Буидукского интрузива, третий — Лермонтовский, встреченный нами при геологической съемке, наименьший по размерам и располагается в 2,5 км к востоку от с. Лермонтово. Наиболее крупный интрузив щелочного состава представлен Тежсарским (Тежахметским) массивом, обнажающимся в средней части Памбажского хребта.

Для обоснования более позднего возраста щелочных интрузивов по отношению к порфирировидным гранитам и гранитоидным породам В. Н. Котляром приводятся следующие доводы:

1) среди сиенитов северного склона Памбака, дайки которых прорезают порфирировидные граниты Гильютского массива, встречены жилы щелочных сиенитов (северный отрог Памбака в 1 км от вершины хребта);

2) жилы щелочных сиенитов прорезают порфирировидные граниты (дорога Гамзачиман — Архошен);

3) интрузив нефелиновых и щелочных сиенитов Памбака прорывает Такярлинский интрузив кварцевых диоритов.

Г. П. Багдасарян также предполагает, что внедрение интрузивов порфирировидных гранитов предшествовало щелочным интрузивам на ос-

новинки того факта, что на Архошенском участке щелочные сиениты образуют пирогенный контакт с порфиоровидными гранитами, подвергая последние контактовому изменению.

Предположение названных авторов подкрепляется также следующими нашими данными:

1) Лермонтовский разрыв в западной части сечет Геджалянские гранитонды, а в восточной части вдоль него внедрено два небольших дайкообразных тела щелочных сиенитов;

2) Бундукский щелочной интрузив к северо-востоку от с. Гамзачи-ман прорывает конгломераты, состоящие из галек гранитоидных пород.

В последнее время в пределах района Памбакского хребта сотрудником Института геологических наук Академии наук Армянской ССР А. Г. Мидяном установлены следующие новые данные:

1) на южном склоне Памбакского хребта, в районе с. Каракала, щелочной интрузив прорван апофизом гранитондов;

2) на Гильотском отроге жила гранитного состава сечет мелкозернистые сиениты Тежсарского интрузива;

3) в районе с. Уляник щелочной интрузив выходит в контакт с интрузивом гранодиорит-монцититового состава, испытывая сильные гидротермальные изменения, однако гранодиорит-монцититовые породы остаются почти неизменными;

4) в том же районе кварцевые жилы секут щелочные интрузивные породы.

На основании перечисленных фактов А. Г. Мидян гранодиоритовый комплекс считает более молодым, чем щелочные породы. Однако нельзя игнорировать существующие факты и делать выводы только на основании собственных данных. Выводы, основанные на новых данных, не должны противоречить уже существующим более обоснованным фактам. То же самое следует сказать исследователям, пытающимся обходить выявленные А. Г. Мидяном новые данные.

Как нам кажется, приведенные В. Н. Котляром, Г. П. Багдасаряном и нами факты достаточны для обоснования более молодого возраста щелочного комплекса по отношению к порфиоровидным гранитам и породам гранитоидного состава, а новые ценные данные А. Г. Мидяна, повидимому, указывают на наличие в районе Памбакского хребта кислых интрузивов более молодого чем щелочные породы возраста.

Весьма вероятно, что часть кислых интрузивов Памбакского хребта, возраст которых пока ничем не доказан, относится к более молодому комплексу кислых пород. Следует обратить на этот вопрос особое внимание исследователей, чтобы на основании детального изучения петрографического, химического состава всех кислых пород и их геологической обстановки выделить более молодые кислые породы от таковых же верхнеэоценового возраста.

Соображения о происхождении интрузивных пород. При всем своем разнообразии интрузивные породы описываемых районов обладают сле-

дующими общими характерными признаками, позволяющими предполагать о существовании тесной генетической связи между ними:

1) все породы, за исключением некоторых кислых разновидностей, принадлежат к нормальному ряду (табл. 1) (в понимании А. Н. Заварицкого);

2) в подавляющем большинстве случаев в породах калий преобладает над натрием;

3) все породы сравнительно со средними типами по Дэли за немногими исключениями отличаются повышенным значением чисел  $a$  и  $s$ , и повышенным —  $c$  и  $t$  (табл. 1);

4) среди пород преобладающими являются представители переходных типов. Отметим, что анализы обр. №№ 2, 5, 13 и 17 заимствованы у В. Н. Котляра; № 9 — у А. С. Гинсберга [3] и № 15 — у Г. П. Багдасаряна. Породы обр. №№ 1, 2, 3 взяты из Лермонтовского, №№ 15, 16 — из Гильютского и остальные из Геджалинского интрузивов.

Вышеперечисленные общности и наблюдаемая тесная локальная связь между отдельными разновидностями пород, повидимому, указывают на единство магматического очага, на что впервые указал В. Н. Котляр.

Внедрение магмы, в основном, происходило в последовательности от основных к кислым и от последних к щелочным. Такое закономерное изменение состава пород во времени говорит о направленности магматических процессов, приведших к образованию разнообразных пород.

Тесная локальная связь между соответственными глубинными и излившимися породами и наблюдаемая некоторая общность между ними позволяют предполагать, что эффузивные и интрузивные породы питались из единого очага. Однако эффузивные и интрузивные образования разделены во времени, так как они связаны с различными геотектоническими условиями. Основное складкообразование описываемого района приурочено к верхнеэоценовой фазе складчатости, обуславливающей формирование всех складчатых структур, разрывных дислокаций и интрузивов. Последние располагаются согласно по отношению к указанным тектоническим элементам. Такое взаимоотношение позволяет рассматривать интрузивный процесс как синтетектонический. Повидимому, на больших глубинах единый магматический очаг основного состава, находясь в более или менее спокойных условиях, подвергался дифференциации. Внедрение магмы каждый раз соответствовало наиболее интенсивным тектоническим движениям, приведшим к образованию складчатых структур, разрывных нарушений и перемещению магмы из очага. В промежутке между отдельными пароксизмами тектонических движений магматический очаг подвергался дифференциации, а во время пароксизмов происходило вторжение магмы.

Состав внедряющейся магмы, вероятно, в значительной мере зависел от промежутка времени между отдельными пароксизмами тектонических движений.

Таблица 1

№ сбр.	Название породы	Данные химических анализов											Числовые характеристики по Заварницкому									
		SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO	MgO	CaO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	mm	H <sub>2</sub> O	a	c	b	s	h	f	m'	e'	n
279 5096	Габбро-пироксенит	44,46	0,28	14,03	5,80	7,76	0,03	12,72	11,81	0,45	0,59	2,42	0,14	1,7	8,3	39,5	50,5	—	31	54	15	54
	Среднезернистый габбро . . . . .	46,05	1,01	11,75	5,42	7,81	0,10	10,75	14,09	0,36	0,43	0,17	1,37	2,6	5,0	41,0	51,4	—	29,6	44,4	25,0	76
651	Шаровое габбро . . . . .	48,24	0,27	18,30	6,09	3,13	0,05	7,22	16,77	0,35	0,11	0,41	—	1,0	12,2	29,0	56,9	—	28,0	42,2	29,8	83
134	Габбро Ягубашинского итривита . . . . .	46,66	0,34	22,33	4,53	4,85	0,10	3,09	15,46	0,52	0,31	0,36	—	2,0	16,1	21,0	30,9	—	45,4	28,7	25,4	75
—	Гиперстеновый габбро-диорит . . . . .	55,40	1,40	16,45	2,55	6,38	0,5	4,33	8,27	2,81	1,97	0,85	0,14	9,1	2,1	24,0	61,8	—	44	38	18	69
22	Габбро-диорит . . . . .	45,20	1,00	23,34	3,11	9,5	0,20	3,80	11,03	1,43	0,57	0,40	0,40	4,4	15,1	21,2	59,3	2,9	62,9	34,2	—	79
521	Диорит . . . . .	53,85	0,80	15,52	4,0	8,18	0,12	4,88	8,29	2,01	2,28	0,50	0,14	7,6	6,7	23,2	62,5	—	49,1	35,7	15,2	58,4
198	Диорит . . . . .	58,48	0,73	15,90	3,07	6,05	0,17	3,69	7,50	3,25	1,10	0,48	—	8,8	6,3	17,5	67,4	—	48,3	35,3	6,4	81
40	Монзонит . . . . .	52,30	0,50	19,31	4,81	3,63	0,20	2,85	7,50	3,32	3,53	1,20	—	2,9	7,1	17,3	63,0	—	46	39	15	59
640	Кварцевый монзонит	58,54	0,28	17,42	3,82	4,94	0,13	3,28	6,50	3,82	1,0	1,20	—	10,2	6,8	15	58	—	55	37,2	7,8	84
281	Тоналит . . . . .	57,20	1,00	18,80	4,61	3,92	0,13	2,65	7,52	2,11	2,33	0,30	0,20	8,3	9,0	13,5	63,2	—	67,6	35,1	4,3	58
471	Гранодиорит . . . . .	66,56	0,48	15,03	3,39	3,0	0,10	2,14	3,25	1,24	1,40	0,46	—	9,1	3,9	12,1	74,9	23,4	46,9	29,5	—	89
217	Гранодиорит . . . . .	60,93	0,66	15,40	2,55	2,65	0,05	2,21	4,68	2,85	3,28	0,67	0,1	11,1	4,8	9,4	74,7	—	50	40	10	57
398 1098	Гранит . . . . .	74,26	0,26	12,28	2,77	1,43	0,01	1,50	1,55	1,05	4,16	0,42	—	7,9	1,8	10,6	80,2	41,3	51,9	23,8	—	28
A-36	Порфиroidный гра- нит . . . . .	64,7	0,55	18,0	1,01	1,49	0,12	1,31	2,43	4,40	6,09	1,20	—	18,6	2,8	4,7	73,9	—	49,1	46,6	4,3	52
	Порфиroidный гра- нит . . . . .	68,45	0,43	14,62	0,97	1,74	0,11	1,80	3,38	3,08	4,50	0,67	0,24	2,3	3,1	5,2	79,4	—	37	43	20	52

Наличие ксенолитов в интрузивах, появление в эндоконтактных зонах основных пород с обилием переработанных ксенолитов; наличие явления ассимиляции вмещающих вулканогенных образований, основной характер всех интрузивных пород сравнительно со средними типами (табл. 1), присутствие минералов, нехарактерных для данных пород, и неоднородный состав интрузивов, изменяющийся в самых коротких пространственных интервалах, все это указывает, что процессы ассимиляции и гибридизации также играли существенную роль в формировании вещественного состава интрузивов.

В. С. Коптев-Дворников [6], сравнивая химизм гибридных пород, образовавшихся в результате ассимиляции карбонатного и вулканогенного материала со средними типами пород по Дэли, установил следующую закономерность: «Породы, возникшие при ассимиляции карбонатного материала, сравнительно со средними типами, отличаются пониженным значением относительного содержания щелочей (числа  $a$ ), повышенным значением анортитовой извести (числа  $c$ ) и магния ( $m^1$ )».

Обработка существующих химических анализов интрузивных пород рассматриваемых районов показывает, что за немногими исключениями все они сравнительно со средними типами отличаются пониженным значением числа  $a$  и повышенным значением чисел  $c$  и только иногда  $m$  (табл. 1, 2). Эта закономерность наиболее отчетливо выявляется у щелочных и нефелиновых сиенитов (табл. 2), где у всех анализированных пород (кроме анализа образца № 1415) отмечается пониженное значение числа  $a$  и повышенное — чисел  $c$  и  $m^1$ . Если вышеотмеченная закономерность справедлива для всех районов, то можно сделать следующие предположения: 1) ассимиляция карбонатных пород, имеющих в стратиграфическом разрезе, происходила во время внедрения каждой порции магмы, 2) наиболее интенсивная ассимиляция карбонатных пород проявилась во время подъема остаточной магмы, благодаря большому содержанию летучих.

Поведение дополнительной характеристики  $m^1$ , повидимому, объясняется малым содержанием в карбонатных породах магния.

Ниже генезис интрузивов рассматривается в соответствии с последовательностью их образования, от ранних к более поздним.

Результатом наиболее раннего внедрения магмы является Лермонтовский интрузив основного состава, морфологически представляющий собой штокообразное тело, вытянутое в северо-западном направлении и падающее, вероятно, на северо-восток почти вертикально. В строении интрузива принимают участие габбро-пироксениты, мелкозернистые, полосатые и шаровые габбро, причем наиболее широким развитием пользуется первая разновидность. Интрузив имеет с некоторой вытянутостью концентрическое строение, причем к востоку от центра располагаются шаровые габбро, по периферии — мелкозернистые, а между последними — габбро-пироксениты. Последние прорываются шаровыми габбро, а все разновидности пересекаются жильной мелкозернистой габбро. Полосатые габбро, имеющие небольшое развитие, приурочены к северо-восточной и юго-западной периферии

Таблица 2

Название породы	№ опр.	Данные химического анализа											Числовые характеристики по Заварицкому									
		SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO	MgO	CaO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	mm H <sub>2</sub> O	a	c	b	s	h	f'	m'	e'	n	
		Гамбакские щелочные сиениты	1447	57,20	0,01	17,95	5,72	2,19	0,18	0,77	3,74	4,66	5,33	2,06	0,31	16,5	2,6	10,9	68,0	—	69,1	11,2
	1762	62,31	0,23	18,51	3,51	1,23	0,11	0,73	2,52	5,64	4,14	0,48	—	19,0	3,1	5,7	72,2	—	78,0	21,0	1,2	65,7
	1565	59,14	0,33	18,90	4,51	1,23	0,14	1,21	4,30	5,24	4,24	0,43	0,08	13,2	3,8	8,9	69,1	—	58,4	23,4	17,2	65,4
	982	63,98	0,27	19,17	2,63	0,39	0,24	—	0,73	4,25	7,05	0,38	0,15	19,4	0,9	7,1	72,6	69,9	39,1	0	—	48,2
Гундузский щелочной сиенит	—	51,33	0,62	18,49	2,30	2,22	0,19	1,39	3,25	4,19	7,11	0,73	0,08	20,0	2,6	8,3	69,1	—	54,2	28,8	17	48
Памбакские нефелиновые сиениты	815	58,12	0,19	20,62	1,64	1,30	—	—	3,10	5,10	7,71	2,06	0,22	23,6	2,7	3,9	69,8	—	63,1	0	30,9	59,0
	392a	55,95	0,12	20,58	2,36	1,30	0,20	0,55	3,05	9,11	2,72	2,24	0,35	21,8	1,9	6,5	66,8	—	54,8	13,9	31,1	83,5
	1059	59,22	0,06	20,35	3,62	0,51	0,24	0,45	2,40	8,07	2,61	2,01	0,18	22,4	3,0	4,8	63,8	—	82,3	16,1	1,4	82,2
	880	56,20	0,57	20,31	2,95	1,83	0,28	1,14	3,32	5,15	7,58	1,40	0,20	23,0	2,5	8,2	66,3	—	55,5	24,0	20,5	50,6
	297	61,14	0,31	19,83	2,56	1,36	—	0,92	2,33	5,58	6,54	0,49	—	21,8	2,5	5,5	70,1	—	63,7	27,5	8,7	57,6
1415	54,95	0,12	20,72	4,83	0,17	—	0,36	2,16	2,16	9,71	4,41	1,26	0,4	28,4	0	8,5	63,1	—	62,3	5,8	31,4	76,7
Нефелиновые сиениты и нефелиновые сиенит-порфиры (Памбак)	284	59,24	0,03	23,34	1,14	0,51	0,14	0,25	0,32	8,91	6,30	1,14	1,27	21,3	2,4	7,2	69,1	—	—	—	—	—
	501a	55,82	0,05	23,33	1,89	0,55	0,13	0,36	3,70	7,65	5,00	1,10	0,20	21,9	3,7	6,0	65,4	—	38,4	45,3	16,2	70
	1043	56,83	0,20	24,88	2,10	0,51	0,10	0,65	1,33	6,39	6,31	0,80	0,11	23,4	1,6	10,3	64,7	66,6	22,6	10,6	—	50,6

интрузива. В них направление полосчатости параллельно к соседним контактам.

Согласно Левинсон-Лессингу [9] полосатые структуры возникают в процессе горообразования, которое действует ориентирующим образом на эти слои.

В. Н. Котляр, изучавший Лермонтовский интрузив основного состава, полосчатость габбро также рассматривает как следствие тектонических напряжений. Некоторые другие исследователи полосатые габбро объясняют процессами дифференциации. В нашем случае, по-видимому, первое объяснение является более правдоподобным, так как:

- 1) полосатые габбро приурочены к периферии интрузива, наиболее интенсивно подвергнувшейся действию тектонических напряжений;
- 2) полосчатость параллельна контактам интрузива;
- 3) в процессе формирования интрузива происходили неоднократные тектонические подвижки, на что указывает взаимное пересечение отдельных разновидностей.

Происхождение редко встречающихся в природе шаровых габбро здесь не рассматривается.

По-видимому, следующий по счету импульс основной магмы дал Ягублужский интрузив, морфологически напоминающий дайкообразное тело с некоторой вытянутостью в северо-восточном направлении. Центральная часть интрузива сложена порфировидными габбро, к периферии переходящими в мелкозернистые разновидности, характеризующиеся совершенно постепенными взаимопереходами.

На гранитоидных интрузивов наиболее крупным является Геджалинский, слагающий одноименный хребет от лезобережья р. Памбак до меридиана с. Фиолетово. Морфологически интрузив представляет мощное дайкообразное тело, простирающееся в северо-западном направлении и падающее на север под крутым углом. В строении Геджалинского гранитоидного интрузива принимают участие породы от основных до кислых, характеризующиеся постепенными взаимопереходами. Наиболее широким развитием пользуются кварцевые диориты и гранодиориты. Согласно В. Н. Котляру, граниты и гранодиориты являются более поздними внедрениями, т. е. внутри этой фазы интрузии он допускает наличие нескольких субфаз. Наши полевые наблюдения показывают, что все разновидности гранитоидных пород связаны между собой совершенно постепенными взаимопереходами и никаких резких контактов между ними не наблюдается. Эти факты указывают скорее на одновременность их образования.

Внутри гранитоидного интрузива наблюдается определенное пространственное распределение отдельных разновидностей. В общих чертах намечается такая закономерность: наиболее кислые разновидности приурочены к восточной части, менее кислые — к западной и осевой частям, более основные разновидности — к боковым и средние разновидности — к промежуточным зонам интрузива. Однако границы выделяемых зон являются условными, так как: 1) резких переходов между ними не существуют, 2) отдельные

зоны также характеризуются неоднородным строением, по петрографическому составу и структуре слагающих их пород.

В гранитоидном интрузиве отмечается огромное количество ксенолитов. Автором собрано большое количество образцов из ксенолитов и вмещающих их интрузивных пород, от верхних до самых глубоких горизонтов интрузива, и изучено под микроскопом их изменение. Было установлено, что ксенолиты, проходя через некоторые промежуточные стадии изменения, в конце концов превращаются в породы интрузивного характера. Ксенолиты, подвергаясь в глубоких высокотемпературных частях магматического резервуара более интенсивной переработке и ассимиляции, приобретали почти такой же состав, как и вмещающие их интрузивные породы.

Наличие большого количества ксенолитов в гранитоидном интрузиве, ненормальный состав, частые, незакономерные смены структуры и количественного минералогического состава пород и некоторые другие признаки, приведенные при рассмотрении процессов ассимиляции, позволяют рассматривать гранитоиды как гибридные породы, возникшие благодаря усиленным процессам ассимиляции и гибридизации гранитной магмы пород вулканогенной толщи.

В Н. Котляр, указывавший на существенное значение процессов ассимиляции при образовании этих пород, отметил ряд минералогических признаков (появление гиперстена, сфена и т. п.).

Как было отмечено, порфириовидные граниты слагают Гильютский (Гамзачиманский) интрузив и небольшое фиолетовское дайкообразное тело, приуроченное к одноименному разрыву северо-западного простирания. Оба интрузива сложены крупнозернистыми гранитами с отчетливо выраженной порфириовидной структурой. Порфириовидные выделения представлены крупными кристаллами калиевого полевого шпата. В юго-западной части Гильютского интрузива порфириовидные граниты постепенно переходят в среднезернистые граниты, у которых порфириовидная структура выражена не отчетливо, вследствие отсутствия крупных полевошпатовых выделений. Для объяснения генезиса порфириовидных гранитов были выдвинуты различные гипотезы. По представлению Левинсон-Лессинга [9], порфириовидные граниты образуются путем кристаллизации избыточных против эвтектики компонентов в гранитной магме. Б. М. Куплетский [8], рассматривая условия образования порфириовидных гранитов Среднего Урала, считает, что эти породы возникли в результате сложного инъекционно-метасоматического воздействия на ксенолиты калиевых растворов гранитной магмы. По мнению Судовикова, порфириовидные граниты Карелии возникли вследствие метасоматоза древнего равномернотельного гранита. Вообще такие толкования генезиса порфириовидных гранитов за последнее время получили большое распространение. Образование этих пород указанным путем объясняют Б. М. Куплетский, А. П. Лебедев [10], Ю. И. Половицкая [11], Н. Г. Судовиков [12] и др., а за границей — Рид, Андерсен, Вегман, Нокколде и др.

Почти все эти авторы считают, что имело место более позднее обра-

зование крупных порфириовидных вкрапленников калиевого полевого шпата и объясняют это тем, что вкрапленники обладают извилистыми ограничениями, включают в себя кристаллы других минералов, несущие следы явлений резорбции, и, наконец, наблюдается корродирующее действие вкрапленников на все окружающие минералы.

В рассматриваемых нами порфириовидных гранитах крупные вкрапленники калиевого полевого шпата обладают более или менее правильными кристаллографическими очертаниями. Они нередко замещаются кварцем, причем их незамещенные реликты, находящиеся в кварце, с прилегающими зернами обладают одинаковой оптической ориентировкой. Это обстоятельство исключает возможность более позднего образования порфириовидных вкрапленников калиевого полевого шпата метасоматическим путем и указывает, что вкрапленники выкристаллизовывались из магмы до выделения кварца. Кроме того, в порфириовидных гранитах никакого корродирующего действия вкрапленников как на окружающие, так и на включенные в них минералы не наблюдается.

На основании приведенных данных, мы склонны объяснить Левинсон-Лессинга происхождение порфириовидных гранитов считать более применимым в рассматриваемом нами случае. В. Н. Котляр эти породы рассматривал как первый этап в оформлении щелочного комплекса.

В порфириовидных гранитах ксенолиты и сгустки цветных минералов пользуются широким распространением. Это свидетельствует о том, что процессы ассимиляции в этих породах также играли существенную роль.

В. Н. Котляр также указал, что процессы гибридности в порфириовидных гранитах играли большую роль.

По представлению Г. П. Багдасаряна, преобладающая темноцветная составная часть порфириовидных гранитов генетически представляет собой разрозненные в породе частички ксенолитов.

Щелочные породы впервые были выявлены и описаны В. Н. Котляром. В пределах Геджалинского хребта наиболее крупный интрузив щелочного состава представлен Бундукским массивом, который морфологически представляет собой дайкообразное тело, простирающееся в широтном направлении и падающее на север под весьма крутым углом. Он располагается между двумя тектоническими разрывами широтного простирания.

Интрузивы Геджалинского хребта сложены габбро-сиенитами, нормальными и щелочными сиенитами, связанными между собой постепенными переходами. Наиболее щелочная разность, представленная фельдшпатолитами, слагает северо-восточную часть Бундукского интрузива. В экзоконтактных зонах интрузива вулканогенные породы интенсивно эпидотизированы и нередко превращены в эпидозиты, причем по направлению к интрузиву интенсивность эпидотизации увеличивается.

Наиболее крупный Тежсарский интрузив впервые был описан В. Н. Котляром [5]. Впоследствии, после многолетних исследований, интрузив обстоятельно изучался Г. П. Багдасаряном [1], который на основании собранного им большого фактического материала наметил основные эта-

пы формирования Тежсарского щелочного интрузива, отнеся его, как и В. Н. Котляр, к интрузивам центрального типа.

По данным Г. П. Багдасаряна [1], интрузив представлен двумя резко отличающимися по структуре телами: центральным штоком и кольцеобразно огибающим его коническим телом. Кроме того, к участку Тежсарского интрузива приурочены предшествовавшие им дайкообразные тела лейцитовых порфиров. Описываемый интрузив, в основном, сложен нефелиновыми, щелочными, псевдолейцитовыми и ксенитовыми породами, характеризующимися постепенными переходами, причем наиболее распространенными являются первые две разновидности. Для представления о происшедших изменениях в химическом составе вмещающих Тежсарского интрузива вулканогенных пород при контактово-метасоматических процессах в табл. 3 приводятся данные химических анализов вмещающих пород, а в табл. 4 — коэффициенты соответствующих ионов, вычисленных по методу Барта, на основании помещенных в табл. 3 данных химических анализов. Анализы образцов №№ 176, 302г и 176а заимствованы у А. Г. Мидяна, а № 2186 — у В. Н. Котляра. Обр. №№ 176а и 302г взяты из южного контактового ореола Тежсарского интрузива, № 176 — несколько далее от контакта, № 2186 — из ксенолитов в интрузиве.

Приведенные в табл. 4 коэффициенты ионов показывают, что во вмещающих породах в направлении интрузива увеличивается количество ионов Са, Na, К и Al, но уменьшается — Si. Сравнивая между собой коэффициенты ионов самого отдаленного от контакта интрузива образца (№ 176) и непосредственно находящегося в интрузиве ксенолита (обр. № 218), легко заметить в нем следующие изменения:

Привнос:	Вынос:
Ca — 24 ионов	Si — 60 ионов
Na — 21 »	Ti — 1 »
K — 46 »	Fe <sup>2+</sup> — 7 »
Fe <sup>3+</sup> — 2 »	Mg — 6 »
Al — 39 »	

Таким образом, вмещающие Тежсарский интрузив породы при контактово-метасоматических процессах обогатились щелочами, известью и глиноземом, а из них были вынесены ионы кремния, двухвалентного железа, магния и отчасти титана.

Как известно, проблема происхождения щелочных пород была и по настоящее время остается одним из сложных и далеко еще нерешенных вопросов петрогенезиса.

Для объяснения генезиса этих пород существует ряд теорий. Самая ранняя из них является теория Дэли [4], связывающая появление этих пород с ассимиляцией известняков. Впоследствии Шендом, а для Урала Е. А. Кузнецовым [7] приблизительно в одно и то же время была предложена новая теория, являющаяся видоизменением теории Дэли. Она

Таблица 3

№№ сбр.	Название пород	Место взятия образцов	SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO	MgO	CaO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	nnn	H <sub>2</sub> O
2186	Ксенолит (щелочные эффузивы)	В щелочных сиенитах	50,70	0,55	21,31	,59	2,04	0,13	1,49	6,71	5,68	4,72	2,04	0,47
176a	Щелочная эффузивная порода	В ущелье Мальдгарасы, близко к щелочным сиенитам	51,28	0,48	18,54	4,21	3,0	0,28	2,03	7,08	4,41	3,50	5,00	—
302г	Щелочная эффузивная порода	В 1,5 км к востоку от г. Вост. Керола	59,24	1,51	17,02	4,77	4,0	0,10	1,81	5,52	3,50	1,74	1,24	—
176	Щелочная эффузивная порода	В 2,5 км к востоку от Тежсарского интрузива, выше с. Мегрдадор	60,00	0,69	18,91	3,60	3,0	0,10	2,01	4,74	4,91	1,08	1,08	—

Таблица 4

№№ сбр.	Si	Ti	Al	Fe <sup>3+</sup>	Fe <sup>2+</sup>	Mn	Mg	Ca	Na	K	OH
2186	499	4	212	22	16	1	21	70	107	59	29
176a	512	3	217	31	25	2	30	75	85	44	—
302г	546	10	191	31	31	0,5	25	54	59	20	—
176	550	5	233	20	23	0,5	27	45	86	13	—

сводит появление нефелиновых сиенитов к процессам десиликации с известняками или с другими породами, способными поглощать кремнезем при реакции с гранитами, без ассимиляции этих пород.

Другие петрографы происхождения щелочных пород объясняют влиянием на процесс дифференциации летучих компонентов, увлекающих с собой щелочи в верхние части магматического резервуара при сильных орогенических движениях, сопровождаемых внезапными нарушениями давления.

Согласно гипотезе Боуэна [2] в расплавах с содержанием небольшого избытка кремнезема сначала выделяется лейцит, который, вступая в реакцию с жидкостью, может преобразоваться либо в агрегат ортоклаза и нефелина, либо в псевдолейцитовые вещества. Существует и другой вариант, когда в таких расплавах выделившиеся кристаллы лейцита могут быть удалены от жидкости путем всплывания или могут быть отжаты поробразующим давлением. По представлению других исследователей щелочные породы могут образоваться и дифференциацией магмы, и ассимиляцией карбонатных пород.

Рассматривая применимость существующих гипотез в нашем случае, можно отметить следующие положения. Щелочные породы формировались после внедрения порфиroidных гранитов и находятся в тесной локальной связи с остальными породами вообще, с кислыми гранитными породами — в частности. Кроме того, как выше было отмечено, между ними существуют общие педрохимические признаки. Эти данные говорят о том, что, во-первых, щелочные породы также генетически связаны с единым магматическим очагом, а во-вторых, они образовались из последней, остаточной порции магмы.

Щелочные интрузивы характеризуются большим разнообразием слагающих их пород, меняющих состав и структуру в самых коротких пространственных интервалах, даже в одном и том же обнажении. В Тежсарском интрузиве отмечается огромное разнообразие минеральных ассоциаций, а также большое количество минералов, содержащих в себе летучие (флюорит, апатит и др.). Все это свидетельствует о том, что остаточная магма, давшая щелочные породы, была богата летучими. Отсюда и возникает предположение о значительной роли летучих в процессе образования этих пород. Обычно большинство петрографов причину нарушения давления, вызывающего появление газовой фазы, растворимой в магме, видят в тектоническом факторе. Рассматриваемые нами щелочные породы как раз располагаются в области развития тектонических разрывов. Это обстоятельство дало повод В. Н. Котляру [5] сделать предположение, что быть может в таком положении будет разрядка появления щелочных пород.

Повидимому, процессы ассимиляции карбонатных пород имели место и в нашем случае, играя значительную роль в образовании щелочных пород. В пользу такого соображения говорят:

1) увеличение количества кальция во вмещающих Тежсарский интрузив эффузивах в направлении к интрузиву;

2) повышенное значение апортитовой извести и пониженное значение относительного содержания щелочей сравнительно со средними типами магматических пород;

3) наличие в щелочных породах кальцийсодержащих минералов (флюорита, апатита, меленита, троссуляра и др.), пользующихся широким развитием;

4) образование эпидозитов в экзоконтактных зонах Бундукского интрузива.

Резюмируя вышеизложенное, можно предполагать, что щелочные породы образовались из остаточной порции магмы, благодаря глубинной ассимиляции известняков и внезапному нарушению давления, в связи с образованием тектонических разрывов. Такое толкование происхождения щелочных пород становится очевидным, если магматические процессы рассматривать как синтетектонические.

Повидимому, к лейцитовым породам, предшествовавшим нефелиновым сиенитам и занимающим по своему объему подчиненное место сравнительно с объемом последних, применим вышеупомянутый вариант Боуэна. Вероятно, в результате ассимиляции карбонатного материала, остаточная магма обеднилась кремнеземом и при наличии небольшого избытка последнего сначала выделились кристаллы лейцита, которые совместно с магмой устремлялись вдоль тектонических трещин, образуя дайки лейцитовых порфириров.

В щелочных породах Геджалинского хребта помимо щелочных разностей отмечаются нормальные сиениты, габбро-сиениты, диорит-сиениты, характеризующиеся постепенными взаимопереходами. Даже в наиболее щелочных разностях наблюдаются примеси пироксена, обыкновенной роговой обманки, эпидота, сфена и др. Повидимому, это указывает на то, что первоначально внедрившаяся щелочная магма вследствие ассимиляции пород вмещающей вулканогенной толщи эоцена загрязнилась, давая вышеотмеченные типы пород.

Судя по данным Г. П. Багдасаряна [1], процессы ассимиляции и гибридизации щелочной магмой пород вмещающей вулканогенной толщи в широких масштабах имели место в Тежсарском интрузиве.

Нефелиновые и щелочные сиениты Тежсарского интрузива Г. П. Багдасарян [1] рассматривает как гибридные породы, образовавшиеся благодаря интенсивной ассимиляции щелочной магмой пород вмещающей вулканогенной толщи.

Помимо интрузивных пород, в районе отмечаются жильные породы, представленные кислыми, щелочными лейкократовыми и основными мелакократовыми разностями, отличающимися друг от друга по времени образования и генезису. В табл. 5 приводятся данные химических анализов трех жильных пород, взятых из Геджалинского гранитоидного интрузива. Лейкократовые жилы, выраженные пегматитами и аплитами, приурочены к интрузивам и обладают почти теми же петрохимическими признаками (табл. 1 и 5). Это указывает на то, что они являются продуктами кристаллизации остаточной магмы в пределах отдельных интрузивов.

Таблица 5

№№ обр.	Название пород	Место взятия	Химический состав											
			SiO <sub>2</sub>	TiO <sub>2</sub>	Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	FeO	MnO	MgO	CaO	Na <sub>2</sub> O	K <sub>2</sub> O	H <sub>2</sub> O	ppm
277	Пегматит	К северу от с. Джаркентского из-за жидкой эвексии в тектонической зоне реинтрузивного интрузива	74,80	0,16	12,25	0,90	1,46	—	0,53	1,03	0,65	8,04	0,08	0,20
355	Аплит		77,50	0,18	10,86	0,80	1,16	0,02	0,70	1,24	1,28	6,44	0,10	0,58
174	Габбро-порфирит	На участке 1, Г. с. Ж. в средней части пластового интрузива	46,50	1,17	21,05	8,29	4,05	0,22	6,14	8,62	2,21	2,87	0,28	2,40

Основные дайки, представленные габбро-порфиритами, габбро-диабазами, мелкозернистыми и среднезернистыми габбро, были вывержены после формирования всех интрузивов и их жильных комплексов. Они по структуре, петрографическому и химическому составу отличаются от вмещающих их интрузивных пород. Сравнивая между собой данные химических анализов габбро-порфирита (табл. 5) и вмещающего его гранита (табл. 1), как лишеного постороннего вещества типа гранитоидных пород, легко убедиться в том, что они резко отличаются друг от друга. Кроме того, основные дайки в отличие от лейкократовых жил встречаются не только в интрузивах, но и далеко от них, в вулканогенных породах.

Вышеизложенные данные приводят к предположению, что основные дайковые породы генетически связаны с более глубокими основными очагами.

Ереванский государственный  
университет им. В. М. Молотова

Поступило 17 VI 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г. П. О механизме внедрения и этапах формирования Тежсарской щелочной интрузии в Армении. Изв. АН АрмССР, № 8, 1950.
2. Боуэн Н. Л. Эволюция изверженных пород. Гос. Геол. нефт.- изд. 1934.
3. Гинсберг А. С. Петрография республики Армения. Петрография СССР, сер. I, вып. 2, изд. АН СССР, 1934.
4. Дэли. Изверженные породы и глубины земли, 1936.
5. Котляр В. Н. Намбаекский комплекс щелочных пород. Изв. АН СССР, сер. геол., № 2, 1955.
6. Контел-Дзорисов В. С. К вопросу о некоторых закономерностях формирования интрузивных комплексов гранитоидов (на примере Центрального Казахстана). Изв. АН СССР, сер. геол., № 4, 1952.
7. Кузнецов Е. А. Щелочные породы южной части Кыштымской дачи. Тр. Инст. прикл. минер., вып. 48, 1933.
8. Куплетский Б. М. Об образовании некоторых порфиритовидных гранитов Среднего Урала. Сборник, посвящ. акад. Д. С. Белянину. Изд. АН СССР, 1946.

9. Левинсон-Лессинг Ф. Ю. Петрография. Гос. изд. геол. лит.-ры, изд. 5-ое, 1940.  
 10. Лебедев А. П. К петрологии гранитоидов западной Украины. Тр. Инст. геол. наук АН СССР, 1946.  
 11. Половинкина Ю. И. Магматизация и антексис в гранитоиднейсовом комплексе Криворожья. Тр. XVII международн. геол. конгр., т. 2, 1939.  
 12. Суворова Н. Г. Материалы по петрологии западного Беломорья. Тр. Ленинград. геол. упр., 1939.

### Ա. Ի. Քալասանյան

## ՓԱՄՔԱԿԻ ԵՎ ԳԵՉԱԼԻԻ ԼԵՌՆԱՇՂԹԱՆԵՐԻ ԻՆՏՐՈՒԶԻՎ ԱՊԱՐՆԵՐԻ ԾԱԳՄԱՆ ՇՈՒՐՁԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Փամբակի և Գեջալիի լեռնաշղթաների ինտրուզիվ ապարները բնորոշվում են պետրոգրաֆիական կազմի բազմազանությամբ: Մակայն նրանք, իրենց բազմազանությամբ հանդերձ, օժտված են մի շարք ընդհանուր առանձնահատկություններով, որոնք հիմնավորում են մեկ մագմատիկ օջախի պատկանելու գաղափարը:

Մագմայի ներխուժումը կատարվել է հիմքայինից դեպի թթու և վերջինից դեպի ալկալայինը: Ապարների կազմի այդպիսի հաջորդական և օրինաչափ փոփոխությունը ժամանակի ընթացքում՝ վկայում է մագմատիկ պրոցեսների ուղղություն մասին, որոնք տարել են դեպի բազմազան ապարների առաջացումը:

Նկարագրվող շրջանի հիմնական լեռնակազմական պրոցեսները կապված են ալպիական օրոգենեզի պիրենյան փուլի հետ, որը պայմանավորել է ինտրուզիվների և աեկտանական տարրերի ձևավորումը:

Հեղինակը ենթադրում է, որ մեծ խորությունների վրա հիմքային կազմի ընդհանուր մագմատիկ օջախը պանվելյով նպաստավոր պայմաններում, ենթարկվել է դիֆերենցիացիայի: Մագմայի բարձրացումը կատարվել է ամենաուժեղ աեկտոնական շարժումների ժամանակ:

Մի շարք փաստեր վկայում են այն մասին, որ ասիմիլյացիան պրոցեսներն զգալի դեր են խաղացել ինտրուզիվների նյութական կազմի ձևավորման մեջ: Այդ առանձնապես վերաբերում է գրանիտոիդային տարրերին, որոնք առաջացել են հրաբխային հաստվածքի թթու գրանիտային մագմայի կողմից ուժեղ ասիմիլյացիան պրոցեսների հետևանքով:

Г. О. Григорян

### Пример взаимоисключения галенита и антимонита в пределах одного этапа минерализации

Взаимоисключение некоторых порообразующих минералов с давних пор уже признано петрографами. Известно, например, что в магматических горных породах кварц обычно не встречается совместно с нефелином или лейцитом, а мусковит с роговой обманкой или пироксеном. В метаморфических горных породах глубинной фауны диопсид не встречается совместно с алмандином и т. п. Эти примеры являются не результатом случайных явлений, а обусловлены, очевидно, условиями физико-химического равновесия силикатных расплавов.

Аналогичные закономерности существуют также и в рудах, отложенных из растворов. В последнее время, например, А. Г. Бетехиным доказано, что пирротин не может находиться в одной парагенетической ассоциации с гематитом, бертьеритом ( $\text{Fe Sb}_2 \text{S}_4$ ) и реальгаром, а реальгар в одной ассоциации с лельингитом [1, 3, 4]

В результате изучения вещественного состава руд одного из свинцово-сурьмяных месторождений, автором было установлено, что в рудной массе сонахождение галенита и антимонита в одной парагенетической ассоциации не наблюдается. Там, где эти минералы встречаются совместно, антимонит явно моложе галенита.

Наличие фактов пересечения агрегатов минералов с галенитом, с агрегатом — содержащим антимонит, свидетельствует о том, что эти два минерала образовались в различные этапы минерализации.

По аналогии с некоторыми порообразующими и рудными минералами автор пришел к предварительному выводу, что в обычных условиях совместное выпадение из рудоносных растворов, в пределах одного этапа минерализации, галенита и антимонита — невозможно.

#### 1. Геологическая обстановка, строение жил и текстура руд

Объектом нашего исследования служит свинцово-сурьмяное месторождение, приуроченное к вулканогенно-осадочным породам среднего эоцена, которые смяты в небольшую антиклинальную складку северо-восточного простирания и прорваны гипабиссальными интрузиями гранитоидного состава. На участке месторождения пласты моноклиально па-

дают на северо-запад под углом 25—30° и составляют северо-западное крыло упомянутой складки.

Жилы со свинцово-сурьмяным оруденением, располагающиеся в экзоконтакте интрузии, приурочены к секущим трещинам или плоскостям напластования вулканогенно-осадочных пород, а жилы, расположенные в эндоконтакте, — к трещинам отдельности интрузивного массива. В первом случае жилы более выдержаны по мощности и простиранию.

Строение рудных жил сложное. Очень часто от основных жил в боковые породы отходят маломощные жилы или прожилки, которые приурочены к системе параллельных трещин, заполненных впоследствии кварцем и сульфидами. Нередки случаи переплетения и пересечения жил.

Текстура руд массивная, полосчатая, ритмически полосчатая, микробрекчиевая, вкрапленная; местами развита текстура пересечения и др.

Для правильного выделения парагенетических ассоциаций минералов, отвечающих отдельным этапам минерализации, наибольшее значение имеет микробрекчиевая, ритмически полосчатая текстура руд и текстура пересечения.

Наблюдения над жилами в забоях и на поверхности показывают закономерное распределение определенных ассоциаций минералов в пространстве; это выражено тем, что в жильной массе, от лежащего к висечному боку ее (фиг. 1 справа — налево), наблюдается следующая после-



Фиг. 1. Полосчатая текстура руды. Полоска кварц-антимонитовой ассоциации — I резко переходит в полоску кварц-цинкитовую — II, а последние — в галенит-сфалеритовую — III.

довательность: тонкий прожилок, сложенный галенитом, сфалеритом и кварцем мощностью 1—2 см, резко переходит в плотную массу, сложенную чередующимися полосками безрудного кварца и кварца с сульфидоантимонитами свинца общей мощностью до 5—7 см. Граница между полосками в этом случае плавная, без резких переходов. К висечному боку жилы полоса кварца с сульфидоантимонитами свинца переходит с весьма резкой границей в антимонитовую полоску мощностью до 10 см.

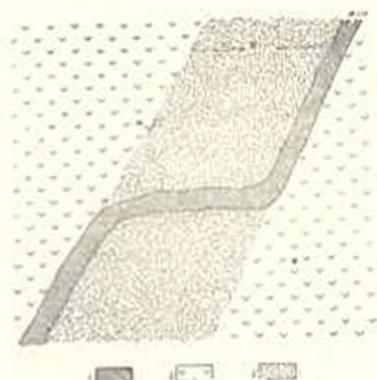
Относительный возраст минеральных агрегатов устанавливается исходя из следующих соображений: 1) при обновлении ранее существо-

ших трещин, имеющих минеральное выполнение, чаще всего наблюдаются разрывы в висячем боку этого выполнения [6]. 2) отложение вещества в пологопадающих трещинах большей частью происходит в лежащем боку [5].

Текстура пересечения совершенно четко устанавливает более ранний возраст сульфоантимонитового агрегата, пересеченного более молодым прожилком антимонита (фиг. 2 и 3).



Фиг. 2. Пильчатая текстура руды, где поперек антимонитового оруденения — II сечется клиновидно антимонитовой полоской — 1.



Фиг. 3. Малоомощная жила с антимонитом (1) сечет более раннее буланжеритовое оруденение (3). Гидротермально измененные туфогены (2).

## 2. Краткая характеристика вещественного состава руд

Вещественный состав руды характеризуется широким развитием ряда рудных и жильных минералов, в числе которых установлены сложные сульфоантимониты свинца (буланжерит, цинженит?) галенит, антимонит, сфалерит, пирит, кварц, барит, кальцит.

Подчиненное место занимают блеклая руда, халькопирит, киноварь (?), самородное золото, гипс и др.

Исследование доминирующих минералов в руде позволяет наметить следующие их главные особенности:

**Буланжерит.** Составляет сплошные массы или развивается в виде неправильных вкрапленников среди плотного кварца. Макроскопически дает черный (стальной), минерал матовый. В отраженном свете характеризуется заметной анизотропией, белым цветом. Размер зерен неравномерный, в среднем  $0,8 \times 0,1$  мм. форма отдельных зерен весьма причудливая. Из стандартных реактивов положительно действуют только  $\text{HNO}_3$  (1:1). В иммерсии внутренние рефлексы красноватые. Минераграфическое определение буланжерита подтверждается также результатом эмпирических химических анализов руды, не содержащей в значительном количестве галенита, в которых соотношение  $\text{Pb} : \text{Sb} = 5 : 1$ .

Буланжерит тесным образом ассоциирует с галенитом, сфалеритом, пиритом и массивным плотным кварцем.

**Цинкениит (?)**. Наряду с буланжеритом в руде имеется другой сульфоантимонит свинца — цинкениит, который развивается в другом этапе минерализации. Макроскопически минерал представлен удлиненными выделениями с металлическим блеском среди темносарого кварца. Под микроскопом цинкениит представлен тонко-призматическими, радиально-лучистыми и бесформенными агрегатами с низкой твердостью и более интенсивной анизотропией, чем у буланжерита. Из стандартных реактивов положительный эффект дают  $\text{HNO}_3$  (вскипает) и  $\text{KOH}$ . От воздействия последнего цинкениит, в отличие от буланжерита, дает радужную побежалость (на буланжерит  $\text{KOH}$  не действует). Наряду с этим, цинкениит отличается от буланжерита соотношением свинца и сурьмы. По данным химических анализов оно равняется примерно 1 : 1, или небольшим преобладанием сурьмы.

Однако, учитывая, что рентгеноструктурный анализ не дал характерной для цинкениита дебаеграммы, определение этой сульфосоли в какой-то мере остается условным.

Цинкениит ассоциируется с пиритом, сфалеритом и кварцем.

**Галенит**. Этот минерал имеет широкое, но неравномерное развитие, большей частью в виде примазок или маломощных прожилок по забандам зияющих трещин, которые позже заполнялись сульфосолями свинца и антимонитом, или галенит ассоциирует с буланжеритом, составляя участки, весьма богатые свинцом. В первом случае галенит ассоциирует с черным сфалеритом, пиритом и гребенчатым кварцем, а во втором — с буланжеритом, пиритом, сфалеритом и плотным кварцем. В последнем случае галенит представлен более идиоморфными агрегатами, но местами корродирован. При тонком сростании галенита и буланжерита галенит легко определяется травлением  $\text{HCl}$  (1 : 1), выявляя характерную структуру агрегата.

**Антимонит**. Представлен игольчатыми, шестоватыми радиально-лучистыми и сплошными агрегатами. Форма и размер зерен непостоянны. Величина отдельных кристаллов достигает иногда 3—5 см по длинной оси. В отраженном свете характеризуется сильной анизотропией, заметным двуотражением и полисинтетическим двойникованием.

Структура гипидиоморфнозернистая, а по отношению к гребенчатому кварцу — аллотриоморфнозернистая. Антимонит тесно ассоциируется с кварцем, сфалеритом, баритом, кальцитом, иногда пиритом и гипсом.

**Сфалерит**. Встречается почти со всеми минералами в нескольких генерациях. Микроскопически выделяются четыре разновидности сфалерита: черная, которая ассоциирует с галенитом, темнокоричневая — с буланжеритом и пиритом, светлозеленая — с цинкениитом и темнобурая — с антимонитом.

Наиболее широко развиты вторая и третья разновидности.

Под микроскопом темнокоричневый сфалерит представлен мелкими раздробленными, а светлозеленый сфалерит — более крупными агрегатами, без эмульсии халькопирита.

**Пирит**. Ассоциирует с буланжеритом и сфалеритом, иногда с галени-

том или антимонитом. Под микроскопом пирит выражен аллотриоморфнозернистыми агрегатами, в виде пятен и конкреций. Встречается пирит колломорфной структуры. Кристаллическое очертание его среди агрегата сульфосолей или кварца обнаруживается лишь иногда.

**Самородное золото.** Впервые было установлено нами в виде небольших зерен и мелких индивидов размером  $0,06 \times 0,02$  мм. Золото находится внутри карбоната и ассоциирует с буланжеритом, сфалеритом и колломорфным пиритом.

**Кварц.** Составляет самостоятельные жилы, которые несут интенсивное сульфидное оруденение. Кварц представлен тремя разновидностями: первая — сахаровидный кварц в ассоциации с галенитом и сфалеритом, вторая — тонкозернистая плотная масса серого цвета, в ассоциации с сульфосолями, сфалеритом и пиритом, и последняя — гребенчатый кварц в ассоциации с антимонитом, сфалеритом и баритом.

**Кальцит.** После кварца из жильных минералов наиболее широко развит кальцит. Кальцит ассоциирует как с сульфосолями свинца, так и с антимонитом, но в обоих случаях по последовательности выделения стоит после рудных минералов.

**Барит.** Встречается часто, иногда большими скоплениями в рудной массе. Ассоциирует барит с антимонитом, сульфосолями свинца, гребенчатым кварцем и гипсом.

**Гипс.** В зоне первичных руд, наряду с остальными жильными минералами, встречается прозрачный гипс с пластинчатыми агрегатами. По взаимоотношениям с другими минералами гипс замыкает здесь весь процесс эндогенного минералообразования.

### 3. Этапы минерализации

Из краткой характеристики отдельных минералов и их ассоциаций в жильной массе и в аншлифах, а также из приведенных выше фактов пересечения более ранней ассоциации минералов таковыми более поздней, становится ясным, что процесс минералообразования здесь прошел не одним актом, а был продолжительным и многостадийным.

Выделяются четыре самостоятельных этапа минерализации, которые разделены во времени и часто обособлены в пространстве.

I этап. Минералы этого этапа по последовательности их выделения кварц (15%)\*, пирит (10%), сфалерит (40%), (немного блестящая руда, халькопирит), галенит (30%) и кальцит (5%) отлагались из стенок наиболее ранних зияющих трещин или развивались в виде самостоятельных прожилков и жил. Минерализацией этого этапа заражена большая площадь, но сравнительно с последующими этапами интенсивность ее слабая.

II этап. В этом этапе, наряду с ранее существующими трещинами, образовались новые, более мощные секущие трещины, заполненные массивным тонкозернистым кварцем с интенсивным оруденением буланжерит-

\* Цифры в скобках соответствуют среднему содержанию минералов в руде.

та, галенита, пирита, сфалерита, которые в последующие этапы сильно раздроблены. Наблюдается следующая последовательность выделения минералов: кварц (35—40%), пирит (5—10%), сфалерит (10%), барит (до 10%), галенит (5—10%), булажерит (10—15%) киноварь (?), карбонаты (до 10%).

III этап. Этот этап был наиболее продолжительным. Это определяется тем, что полоски безрудного кварца чередуются с полосками кварца (фото № 1), богатыми сульфидами — пиритом (10—15%), сфалеритом (5—10%), цинкенимом (5—10%). В руде имеются карбонаты (до 5%).

IV этап. В ходе продолжающихся тектонических напряжений образовались более молодые трещины северо-западного и северо-восточного простирания, часть которых сечет сформированные до того тела (фиг. 3). По этим трещинам развивалась ассоциация минералов, представленная в основном кварцем (40—45%), пиритом (до 5%), сфалеритом (5—10%), крупнокристаллическим антимонитом (10—15%), киноварью (?), баритом (до 5%), карбонатом (до 10%) и гипсом (5—10%).

Приведенный выше характер минерализации по этапам и их взаимоотношения довольно четко устанавливаются в поле и при минераграфическом исследовании.

Так, например, из приведенного выше описания руд видно, что даже в пределах одного рудного тела (фиг. 1 и 2) может быть выделена минерализация трех этапов, разграничивающихся между собой резкими контактами или случаями пересечения.

Отмеченная здесь общая последовательность выделения парагенетических ассоциаций свинцово-сурьмяных руд находит свое полное подтверждение также в геофазах А. Е. Ферсмана [7]. Такая последовательность подтверждается также высказанной А. Г. Бетехтиным [2] точкой зрения о смене в процессе гидротермального рудообразования более бедных серой сульфидов более богатыми.

Теоретическую трактовку этого вопроса автор рассматривает рассмотреть позже в отдельной статье.

Здесь отметим только, что существующие границы (весьма резкие) между полосками, сложенными различными по составу минеральными агрегатами, наличие случаев пересечения более ранних образований более поздними, отсутствие парагенетической ассоциации галенита с антимонитом говорят о том, что возникновение постмагматических растворов и пространственное размещение их продуктов происходит в обстановке «непрерывных» движений.

Эти движения в связи с жизнью магматического очага носят прерывистый характер и параллельно с ними пульсируют отдельные порции рудного раствора.

Различия в составе и взаимоотношениях между отдельными ассоциациями минералов свидетельствует одновременно о том, что здесь мы имеем не пример зональности отложения минералов «обычного» порядка, а последовательные отложения как отражение закономерных пульсирующих рудоносных растворов.

## Выводы

1. Процесс свинцово-сурьмяного оруденения в исследованном районе многостадийный. В пользу такого представления свидетельствует наличие резких границ между ассоциациями минералов и явления пересечения рудных тел относительно раннего возраста более поздними.

В результате выделяются четыре самостоятельных этапа минерализации.

2. Группе рудных тел, принадлежащих к одному этапу и определенной системе трещин, присущ комплекс рудных и жильных минералов, отличающийся от такового в рудных телах других этапов. Выделяются четыре парагенетические ассоциации минералов: а) кварц-пирит-галенит-сфалеритовый, б) кварц-пирит-галенит-буланжерит-сфалеритовый, в) кварц-пирит-цинкенил-сфалеритовый и г) кварц-антимонит-сфалерит-барит-кальцит-гипсовый, соответствующие определенным этапам минералообразования.

3. Сопоставление этих ассоциаций отдельных этапов приводит к выводу о том, что в течение всего периода рудообразования наблюдается определенная направленность изменения состава рудоносных растворов в сторону увеличения концентрации сурьмы и серы и уменьшения концентрации свинца и железа.

4. Изменение в составе руд связано с изменением состава рудоносных растворов во времени и обусловлено условиями физико-химического равновесия растворов при определенной термодинамической обстановке.

Фактический материал, изложенный в статье, приводит нас к выводу, что при определенных термодинамических условиях (обычных для эндогенного свинцово-сурьмяного минералообразования) охотнее всего образуются сложные сульфоантимониты свинца и не наблюдается совместного образования галенита и антимонита.

Автор выражает глубокую благодарность И. Г. Магакьяну, Л. А. Варданяну и Н. И. Хитарову за ценные указания и замечания по данной работе.

Институт геологических наук  
АН Армянской ССР

Поступило 3 VIII 1954.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бетехтин А. Г. Понятие о парагенезисе минералов. Изв. АН СССР, сер. геол., 1949, № 2.
2. Бетехтин А. Г. О влиянии режима серы и кислорода на парагенетические соотношения минералов в рудах. Изв. АН СССР, сер. геол., 1949, № 3.
3. Бетехтин А. Г. Минералогия, М., 1950.
4. Бетехтин А. Г. Гидротермальные растворы, их природа и процессы рудообразования (в книге „Основные проблемы в учении о магматогенных рудных месторождениях“). М., 1953.
5. Бернадский В. И. История минералов земной коры, т. I, вып. I, 1923.

6. Королев А. В. Повторные разрывы в трещинных рудных жилах. Сов. геол., 1938, № 8.  
7. Ферсман А. И. Геохимия, т. III, 1937.

## Հ. Հ. Գրիգորյան

### ՀԱՆՔԱՅՆԱՑՄԱՆ ՄԵԿ ԷՏԱՊՈՒՄ ԳԱԼԵՆԻՏԻ ԵՎ ԱՆՏԻՄՈՆԻՏԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԲԱՑԱՍՄԱՆ ՄԻ ՕՐԻՆԱԿ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրելով կապար-ծարիրային հանքաօձայրերից մեկի նյութական կազմը, հեղինակը հանդես է այն եզրակացություն, որ հանքառաջացման էնդոգեն պայմաններում գալենիտի և անտիմոնիտի համատեղ նստեցման նստափորությունը բացառված է:

Այդ առևանգներից սրբալիճ հետաքրքրություն է ներկայացնում մեր հետազոտած հանքանյութի նյութական կազմի մեջ մանող միներալների առանձին ասոցիացիաների առկայությունը:

Այդ ասոցիացիաները հետևյալներն են՝ ա) կվարց-գալենիտ-սֆալերիտի, բ) կվարց - գալենիտ - բուլանժերիտ - պիրիտ - սֆալերիտի գ) կվարց-պիրիտ-ցինկիտ-սֆալերիտի, դ) կվարց անտիմոնիտ-սֆալերիտ-պիրիտ-լուրիտ-կալցիտ-գիպսի:

Այս կամպլեքսներն իրարից տարբերվում են ոչ միայն իրենց միներալոգիական կազմով, այլև առաջացման ժամանակով: Ըստ բերված հաջորդականության պարզորոշ կերպով նկատվում է միներալների ավելի հին ասոցիացիաների հառումն ավելի նոր ասոցիացիաներով, կամ էլ շատ հաճախ նկատվում են կորուկ սահմաններ նշված ասոցիացիաների միջև:

Միներալների այս առանձնահատկությունների անալիզի բառ հանքառաջացման էտապների և ամբողջություններ վերցրած՝ թույլ է ապրիտ որոշ եզրակացություն անել ավյալ վայրում կապարի և ծարիրի հանքառաջացման պայմանների մասին:

1. Կապար-ծարիրային հանքառաջացման պրոցեսը մեր ուսումնասիրած վայրում արտահայտվել է մի քանի էտապներով, որոնք համապատասխանում են միներալների վերը բերված չորս ասոցիացիաներին:

2. Միներալների տեղն մի ասոցիացիա իր բաղադրությունները պարզապես անտարբերվում է իր նախորդ կամ հետագա ասոցիացիաներից: Այսպիսով պարզվում է, որ հանքառաջացման պրոցեսում դոմանություն անի որոշակի ուղղվածություն: Վերջինս արտահայտվում է հանքաբեր լուծույթների մասին և ծարիրի պարանոսիտի պայմաններում և կապարի ու երկաթի պարանոսիտի պայմաններում իջեցումով:

3. Հանքանյութերի բաղադրություն այսպիսի փոփոխությունը մենք բացատրում ենք ժամանակի բնթացքում հանքաբեր լուծույթների բաղադրության փոփոխմամբ:

Այդ փոփոխությունները հանդուս են նրան, որ ֆիզիկո-քիմիական որոշ պայմաններում առաջանում են ավելի շուտ կապարի սուլֆոսանտիմոնիտների և գրանոլիտի բացասում գալենիտի և անտիմոնիտի համատեղ նստեցման նստափորությունը:

Л. И. Барон, Е. А. Симонян

**Экспериментальное исследование углов трения отбитой руды разной крупности по дереву и по железу**

Значения углов трения отбитой руды по дереву и по железу (т. е. тех предельных углов наклона деревянной или железной плоскости к горизонту, при которых лежащая на ней отбитая руда еще удерживается в равновесии за счет сил трения) являются при современных методах подземной добычи руд весьма важными технологическими параметрами. Знание величины угла трения необходимо прежде всего для правильного проектирования люковых устройств. В современной же горнорудной промышленности выдача добытой руды через люки, применяемая при многих системах разработки, получила очень широкое распространение.

В последние годы, в связи с внедрением высокопроизводительных методов массовой добычи руд, стало необходимым использовать все более крупные люки. На отдельных рудниках теперь можно встретить люки с выпускными отверстиями шириной до 3 м и высотой до 1,8 м. Если прежде применялись почти исключительно деревянные конструкции, то в последнее время люки большей производительности все чаще изготавливают из бетона и футеруют стальными плитами или рельсами. Для характеристики масштабов, которых достигли современные конструкции люковых устройств, можно указать, например, что одна только футеровка люка с размером выпускного отверстия  $1,8 \times 2,4$  м весит 26,5 т. Все это существенно повысило требования к конструированию люков и сделало весьма важной задачу их всемерного усовершенствования.

Вопрос о выборе целесообразных параметров люков для различных условий до настоящего времени почти совершенно не изучен. Экспериментальных исследований в данной области (применительно к условиям подземной разработки рудных месторождений) не проводилось вовсе. Такое положение находится в явном противоречии с запросами современного высококоразвитого горнорудного производства.

Правильный выбор угла наклона днища люка имеет большое практическое значение. Если угол наклона будет мал, то руду придется выгребать из люка и пропускная способность последнего будет крайне мала. При слишком большом угле наклона руда будет вылетать из люка с очень высокой скоростью, работа у люка станет опас-

ной, существенно затрудняется управление им и резко возрастет засорение путей у люка. Целесообразный угол наклона днища должен немного превышать [1, стр. 150] угол трения  $\phi$ .

Величина угла трения существенно зависит от гранулометрического состава (от крупности) отбитой руды. Однако в количественном отношении эта зависимость оставалась до самого последнего времени совершенно не исследованной. Отсутствовали какие-либо данные и значения угла трения для рудных масс, неоднородных по гранулометрическому составу.

Летом 1954 г. авторы провели на одном из железных рудников специальное исследование на крупной модели, имевшее целью установить экспериментально углы трения по дереву и по железу для сухой магнетитовой руды различной крупности и для рудных смесей разного гранулометрического состава. Содержание проведенной работы и полученные результаты излагаются ниже.

Руда представляла собой магнетитовые кварциты с коэффициентом крепости  $f=14-16$  по шкале М. М. Протоdjаконова. Удельный вес магнетитовых кварцитов 3, 4, насыпной вес  $2,2 \text{ т/м}^3$ . Руда отличалась абразивностью.

Экспериментальная установка, смонтированная в одной из подземных камер рудника, представляла собой деревянную конструкцию (фиг. 1), состоящую из четырех основных узлов: большого и малого станков, воронки и самой модели люка. Эта установка (кроме модели люка) была сконструирована М. Е. Мухиным, проводившим на ней под руководством М. И. Агошкова ряд экспериментальных исследований. Для выполнения опытов, излагаемых ниже, установка была видоизменена. К нижней части воронки была пристроена модель люка с вращающимся вокруг оси днищем. Кроме того, установка была снабжена воротком и хомутом для поднятия и опускания днища люка, а также шкалой для измерения углов наклона днища. Описание установки приводится ниже.

Большой (наружный) станок 1 состоял из восьми горизонтальных брусьев с сечением  $150 \times 150 \text{ мм}$  при длине  $2800 \text{ мм}$  и четырех вертикальных брусьев 7 такого же сечения длиной  $1780 \text{ мм}$ .

Малый (внутренний) станок 2 состоял из четырех горизонтальных брусьев 8 сечением  $140 \times 140 \text{ мм}$  при длине  $1800 \text{ мм}$  и четырех вертикальных брусьев 9 такого же сечения длиной  $1220 \text{ мм}$ .

Воронка 3 была изготовлена из досок толщиной  $50 \text{ мм}$  в виде усеченного конуса высотой  $870 \text{ мм}$ . Длина стороны верхнего основания усеченного конуса была равна  $1840 \text{ мм}$ , нижнего основания— $400 \text{ мм}$ . Угол наклона стенок воронки к горизонту— $50^\circ$ . Верхняя часть воронки поддерживалась горизонтальными 6 и вспомогательными 10 брусьями большого станка. Нижняя часть воронки опиралась на горизонтальные 8 и вспомогательные 11 брусья малого станка. В местах сопряжений брусья были дополнительно усилены распорками 12 и 13. Установка позволяла изменять, в случае надобности,



углы наклона стенок воронки и размеры ее нижнего основания (путем увеличения или уменьшения числа досок и перемещения соответствующих брусьев по их направляющим).

Люк 4 имел следующие внешние размеры: длина 960 мм, высота 1170 мм, ширина 600 мм. Внутренняя ширина люка 400 мм. Днище люка 5 было укреплено на оси 14, продетой через уголки 15 размерами 60×60 мм. Последние были закреплены на вертикальных стойках 9 в задней части модели. В уголках через 80 мм для оси 14 были просверлены отверстия 19.

Установка была приспособлена для исследования закономерностей движения руды по деревянным, железным, а при необходимости — и по бетонным днищам. При моделировании движения по железу на деревянное днище укладывали железный лист толщиной 5 мм.

Между люком и воронкой была встроена горловина 16, изготовленная из брусьев сечением 90×90 мм и длиной 800 мм. Длина стороны выпускного квадратного отверстия горловины была равна ширине люка (400 мм). Налобником люка служил передний брус горловины.

Чтобы предотвратить пересыпание в люк руды из воронки, в горловине был предусмотрен проем 17, в который вставлялась плоская заслонка из листового железа толщиной 5 мм. Выдергивание заслонки осуществлялось посредством пневматической лебедки, находившейся на расстоянии 4 м от модели в соседнем квершлага.

Поднятие и опускание днища производилось при помощи ручного воротка. Трос от воротка был пропущен через шкив 18, закрепленный на внешней стороне воронки в передней части модели.

Руду загружали в воронку небольшой бадьей (емкостью 41 дм<sup>3</sup>). В бадью же руду грузили с железного листа, уложенного перед выпускным отверстием модели. Наполненную бадью поднимали вверх пневматической лебедкой. Лаборант, находившийся на специальном помосте над моделью, выгружал руду из бадей в воронку. Помост был оборудован на двух брусьях, закрепленных концами в стенках выработки.

Для экспериментов использовалась руда, отбитая в проходческих забоях. К установке ее подвозили в опрокидной вагонетке с емкостью кузова 1 м<sup>3</sup>.

Подготовка руды к экспериментам<sup>1</sup> заключалась в сортировке ее на семь классов по крупности (см. табл. 1).

Устройство, сооруженное в подземной камере, для разделения руды на классы по крупности изображено на фиг. 2. На направляющих в деревянном станке этого устройства устанавливались рамы с колосниками или сетками требуемых размеров.

На каждый опыт в воронку экспериментальной установки, изображенной на фиг. 1, загружали порцию руды, равную по объему трем бадьям. При загрузке бадей мелочью вес их был гораздо больше, чем при заполнении крупнокусковой рудой. Поэтому порции мелких классов, при равном числе бадей, содержали значительно

<sup>1</sup> Осуществлялась при участии А. С. Воронюка.

Таблица 1

Классы руды по крупности

№ класса	Крупность кусков руды в мм	Ширина кусков в мм			Средство разделения на классы по крупности	Размеры деек грохота или сита в мм
		максимальная	минимальная	средняя		
I	+160	300	160	200	Гроход	160×160
II	-160+80	160	80	120	Гроход	80×80
III	-80+40	80	40	60	Гроход	40×40
IV	-40+20	40	20	30	Сито	20×20
V	-20+8	20	8	14	Сито	8×8
VI	-8+5	8	5	7	Сито	5×5
VII	-5+0	5	0	3	—	—

Таблица 2

Вес порций руды (3 бадьи) разных классов крупности

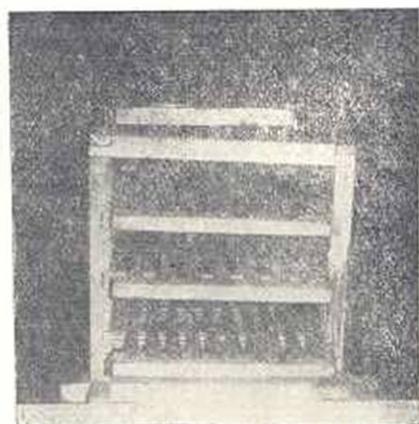
Номер класса по табл. 1	I	II	III	IV	V	VI	VII
Вес порции руды в кг	144	165	189	207	225	240	282

больше руды по весу, чем порции крупных классов (см. данные, приведенные в табл. 2).

В ходе экспериментов определялись углы трения не только для отдельных классов разной крупности, но и для составленных из них четырех разных смесей.

Первые три смеси состояли каждая из двух классов: крупного—основного, и мелкого—заполнителя. Основным во всех этих смесях был класс II (-160+80 мм), а заполнителями—классы III, IV, VI. Данные о составе смесей № 1, 2 и 3 приведены в табл. 3.

Четвертая смесь была составлена из первых шести классов приблизительно в такой пропорции, в какой они содержались в рядовой отбитой руде из проходческих забоев. Поэтому данная смесь



Фиг. 2. Устройство для разделения руды по крупности.

Таблица 3

Состав смесей № 1—3

№ смеси	Номера классов по табл. 1		Объем основного класса в порции в д.м <sup>3</sup>	Объем заполнителя в порции в д.м <sup>3</sup>	Вес основного класса в порции в кг	Вес заполнителя в порции в кг	Общий вес порции в кг
	основного	заполнителя					
1	II	III	67	70	90	107	197
2	II	IV	67	70	90	117	207
3	II	VI	67	70	90	136	226

была названа „моделированной рудничной смесью“, или, для краткости, просто „рудничной смесью“. Данные о ее составе (по весовым процентам) приведены в табл. 4.

Таблица 4

Состав рудничной смеси

Номера классов по табл. 1	I	II	III	IV	V	VI
Весовое содержание смеси в %	30	30	16	12	7	5

При проведении опытов под днище модели люка вначале подставляли подпорную стойку 20 (фиг. 1) так, чтобы днище находилось в горизонтальном положении. Затем в соответствующие пазы проема горловины задвигали горизонтальную заслонку и загружали руду в воронку. После заполнения воронки заслонку постепенно вытягивали при помощи пневматической лебедки. Вслед за этим на днище, на расстоянии 8—10 см от его края, надевали хомут с тросом, прикрепленным другим концом к ручному воротку. Трос подтягивали, и убирали подпорную стойку. Затем днище медленно опускали и по шкале 21 определяли угол трения  $\phi$ , т. е. предельную величину угла наклона днища, при превышении которого только на 30' уже начиналось движение руды. Ось 14, вокруг которой поворачивалось днище, при опытах была закреплена в положении II (см. фиг. 1).

Результаты опытов приведены в табл. 5. Каждое из значений угла трения  $\phi$ , указанных в табл. 5, представляет собой среднее из двух-трех определений (повторных опытов).

Опыты убедительно подтвердили, что величина угла трения  $\phi$  существенно зависит от крупности кусков руды: чем куски крупнее, тем меньше этот угол. В исследованном интервале значений крупности для однородных классов разница между величинами  $\phi$  у крайних классов (наиболее крупного и наиболее мелкого) составляет 11—17°.

При одной и той же крупности руды углы трения по дереву (27,5—44,5°) были заметно выше, чем по железу (22,5—33,5°).

Графики изменения величины углов трения  $\phi$  по дереву и по железу в зависимости от средней крупности кусков руды (для одно-

Таблица 5

Результаты опытов по определению углов трения  $\phi$ 

Материал днища	Значение углов трения $\phi$ (град.) для										
	Однородных классов (размеры в мм)							Смесей			
	+160	-160+80	-80+40	-40+20	-20+8	-8+5	-5+0	№ 1	№ 2	№ 3	рудничной
Дерево	27,5	31,5	32	33,5	34,5	36,5	44,5	31,5	33,5	34,5	29,5
Железо	22,5	25,5	26	27	28	29,5	33,5	26,5	27,5	28,5	24,5

родных классов) приведены на фиг. 3. Средняя ширина кусков в классе (+160 мм) составляла, как показали наблюдения, около 200 мм. Поэтому значения  $\phi$  применительно к этому классу отнесены к крупности 200 мм.

Заслуживает внимания, что разность между значениями  $\phi$  по дереву и по железу была для мелких классов более существенна, чем для крупных (см. табл. 6).

Таблица 6

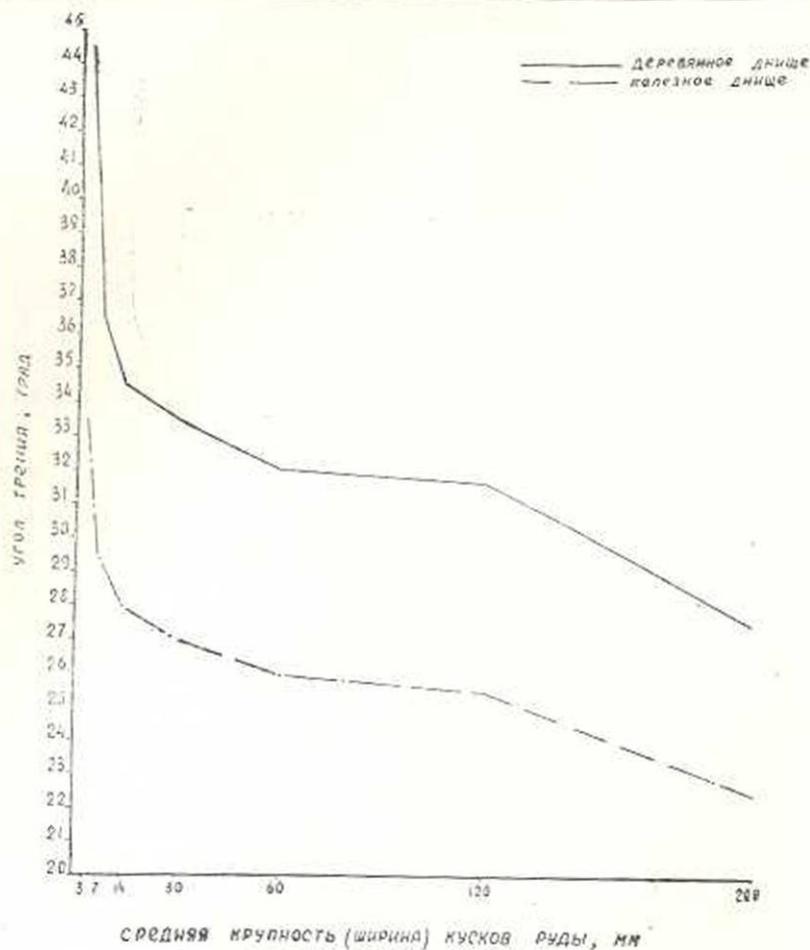
Разность значений  $\phi$  по дереву и по железу для классов разной крупности

Крупность кусков руды в мм	+160	-160+80	-80+40	-40+20	-20+8	-8+5	-5+0
Уменьшение угла трения при замене дерева железом в град.	5,0	6,0	6,0	6,5	6,5	7,0	11,0

Из приведенных в табл. 6 цифр можно сделать вывод, что замена деревянного днища железным (применение футеровки железом) с целью уменьшения минимально необходимого угла наклона днища люка дает наибольший эффект при наиболее мелкой руде.

Закономерности, аналогичные приведенным, наблюдались и при опытах со смесями. Диаграмма значений углов трения  $\phi$  по дереву и по железу для разных смесей приведена на фиг. 4. Характерно, что с уменьшением крупности заполнителя угол  $\phi$  возрастал. Для рудничной смеси он был заметно ниже, чем для двухкомпонентных смесей №№ 1-3.

Материалы опытов позволяют проверить возможность расчета величины угла трения для испытывавшихся смесей по значениям соответствующих показателей и процентным содержаниям однородных классов, составляющих эти смеси. Известно, что отбитая руда в производственных условиях всегда представляет собой смесь кусков различной крупности. Величина углов трения для составляющих разной крупности, как показано выше, резко различна. Эти обстоятельства определяют необходимость и практическую важность расчета величины суммарного угла трения для смесей разного грануло-



Фиг. 3. Зависимость угла трения по дереву и по железу от крупности кусков руды.



Фиг. 4. Значения углов трения по дереву и по железу для смесей различного гранулометрического состава.

метрического состава, так как эта величина, в зависимости от процентного содержания в смеси кусков той или иной крупности, может, повидимому, резко изменяться. Проверка соответствия средневзвешенных значений угла трения опытным значениям представляет, кроме того, интерес, выходящий за рамки данной непосредственной задачи, поскольку принципиальная возможность вычисления таким путем важнейших характеристических параметров для смесей неоднородного гранулометрического состава совершенно не изучена.

Обозначим:

$\bar{\psi}$  — среднее значение угла трения для смеси, град.;

$\psi_i$  — углы трения для однородных классов разной крупности, составляющих смесь, град.;

$v_i$  — процентные содержания отдельных классов в смеси, вычисленные по объему;

$p_i$  — процентные содержания отдельных классов в смеси, вычисленные по весу.

При расчете по объемным содержаниям:

$$\bar{\psi} = \frac{\sum_1^n \psi_i \cdot v_i}{100} \quad (1)$$

При расчете по весовым содержаниям:

$$\bar{\psi} = \frac{\sum_1^n \psi_i \cdot p_i}{100} \quad (2)$$

Рассчитаем значения  $\bar{\psi}$  по формулам (1) и (2) для смесей №№ 1—3 и для рудничной смеси по формуле (2) (поскольку состав этой смеси по объемным содержаниям не определялся). Значения  $\psi_i$  примем по графикам на фиг. 3, процентные содержания вычислим:  $v_i$  — по данным табл. 3,  $p_i$  — по данным табл. 3 и 4. Результаты подсчетов приведены в табл. 7, в которой указаны также опытные значения углов трения и относительные (в процентах) отклонения результатов подсчета от данных опыта.

Оценивая результаты приведенного сравнения, можно отметить, что расчетные величины углов трения и по дереву и по железу во всех случаях близки к опытным. Коэффициент вариации расчетных показателей относительно данных опыта составил 3,2% при расчетах по объемным содержаниям и 3,3% — по весовым. Таким образом, подсчет средневзвешенного значения величины угла трения, не отражая физики процесса, дает вместе с тем вполне приемлемый по точности количественный результат.

Для некоторых горнотехнических расчетов требуется знать величину коэффициентов трения отбитой руды по дереву и по железу.

Таблица 7

Сопоставление опытных и расчетных значений  $\bar{\psi}$ 

Смесь	Деревянное днище					Железное днище				
	Значения $\bar{\psi}$ в град.			Отклонения ( $\pm$ %) расчетных значений $\bar{\psi}$ от опытных при подсчете		Значения $\bar{\psi}$ в град.			Отклонения ( $\pm$ %) расчетных значений $\bar{\psi}$ от опытных при подсчете	
	опытные	Расчетные				опытные	Расчетные			
		по объему	по весу	по объему	по весу		по объему	по весу		
№ 1	31,5	31,76	31,77	+0,8	+0,9	26,5	25,76	25,77	-2,8	-2,8
№ 2	33,5	32,52	32,63	-2,9	-2,6	27,5	26,27	26,35	-4,5	-4,2
№ 3	34,5	34,65	34,51	-1,3	$\pm 0$	28,5	27,54	27,91	-3,4	-2,1
Рудничная	29,5	—	31,10	—	+5,4	24,5	—	25,24	—	+3,0

Значения этих коэффициентов для классов разной крупности и для смесей, подсчитанные (как тангенсы углов трения) по результатам описанных выше опытов, приведены в табл. 8.

Таблица 8

Значения коэффициентов трения для сухой магнетитовой руды разной крупности

Состав руды по крупности	Величина коэффициента трения в покое	
	по дереву	по железу
I. Однородные классы (размеры в мм)		
+160	0,521	0,414
-160+80	0,613	0,477
- 80+40	0,625	0,488
- 40+20	0,662	0,510
- 20+8	0,687	0,532
- 8+ 5	0,740	0,566
- 5+ 0	0,983	0,662
II. Смесей		
№ 1	0,613	0,499
№ 2	0,662	0,521
№ 3	0,687	0,543
Рудничная смесь	0,566	0,456

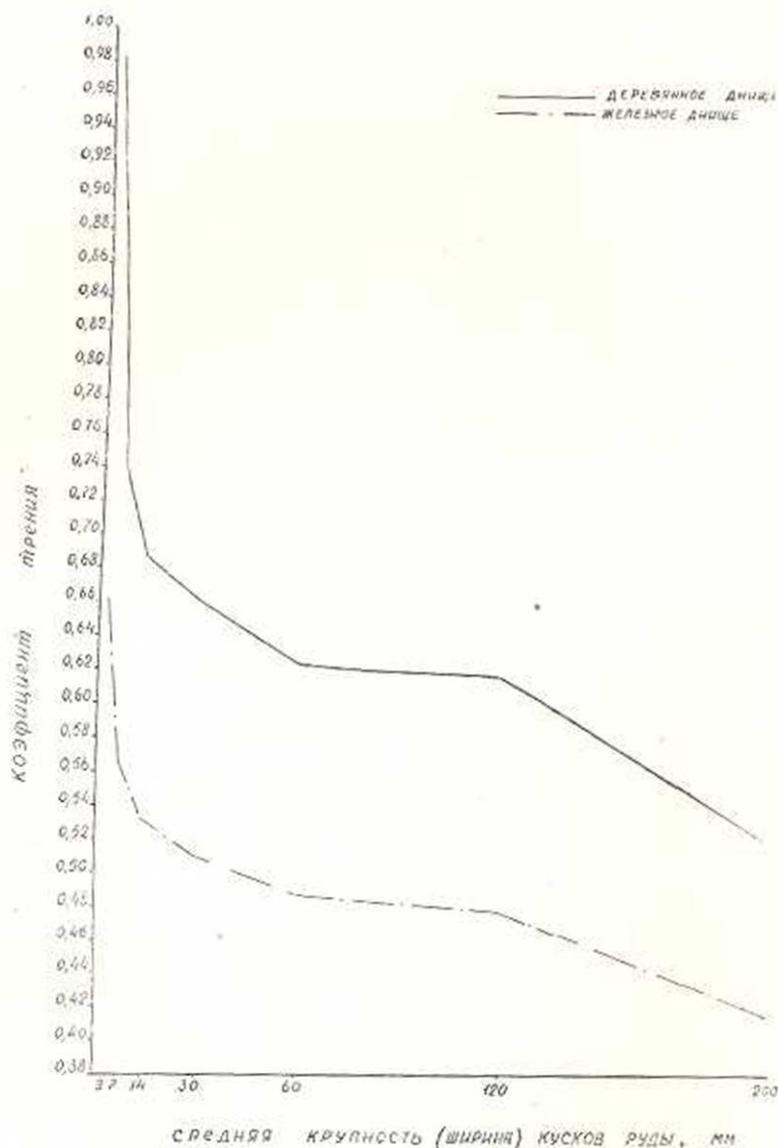
Величины, приведенные в табл. 8, представляют собой значения коэффициентов трения в покое. Пределы изменения значений этих коэффициентов для испытывавшейся руды составили: по дереву — от 0,521 до 0,983, по железу — от 0,414 до 0,662.

График изменения величины коэффициента трения в покое в зависимости от крупности руды представлен на фиг. 5.

Следует отметить, что значения коэффициента трения руды по железу, полученные при опытах, отличаются от обычно указываемых в литературе цифр. В частности, они оказались значительно ниже той средней величины (1,000), которая ориентировочно указана для железной руды (независимо от крупности последней) в недавно изданном справочнике по горнорудному делу [2, табл. 15]. Причина заключается в том, что экспериментально углы трения для классов разной крупности не исследовались, а указываемые величины коэффициентов трения во многих случаях были получены при совершенно несопоставимых условиях (например, при опытном сверлении стальным буром).

### В ы в о д ы

1. Проведенные экспериментальные исследования позволили выявить действительные величины углов и коэффициентов трения железной (магнетитовой) руды разной крупности по дереву и по железу, что имеет важное значение для проектирования выпускных устройств, широко применяемых в современной практике подземной разра-



Фиг. 5. Зависимость коэффициента трения по дереву и по железу от крупности кусков руды.

ботки рудных месторождений. Величины, полученные экспериментально на большой модели, существенно отличаются от значений коэффициента трения, часто приводимых в справочной горнотехнической литературе.

2. Установлена и оценена количественно зависимость углов и коэффициентов трения магнетитовой руды по дереву и железу от крупности составляющих ее кусков. Можно предполагать, что общий характер данной зависимости имеет место и для многих других руд и пород, в связи с чем полученные соотношения могут быть исполь-

зованы для приближенной оценки относительного изменения величины углов и коэффициентов трения различных руд и пород в зависимости от их крупности.

3. Показано, что значения углов и коэффициентов трения для сыпучих смесей можно с достаточной точностью определять, как средневзвешенные по величине соответствующих параметров для каждого из компонентов смеси.

4. Желательно проведение экспериментальных определений величины углов и коэффициентов трения для различных металлических руд. Для этих определений может быть применена методика, разработанная и использованная авторами при выполнении исследований, изложенных в настоящей статье.

Институт горного дела АН СССР

Институт геологических наук

АН Армянской ССР

Поступило 27 I 1955.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барон Л. И. Вторичное дробление и выпуск руды. Металлургиздат, М., 1950
2. Справочник по горнорудному делу, т. I, Metallurgizdat, М., 1952.

Է. Ի. Յարոն, Ե. Ա. Միմոնյան

### ՉԱՆԱՉԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՊՈԿՎԱԾ ՀԱՆՔԱՔԱՐԻ՝ ՓԱՅՏԻ ԵՎ ԵՐԿԱԹԻ ՀԵՏ ՇՓՄԱՆ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ԷՔՍՊԵՐԻՄԵՆՏԱԼ ՀԵՏԱՉՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Իջանցքային սարքավորումների ճշգրիտ նախադժման համար անհրաժեշտ է իմանալ շփման անկյան մեծությունը: Այդ նպատակով, Երկաթի հանքաքայրերից մեկում 1954 թվականի ամռանը ճեղինակները կատարել են էքսպերիմենտալ աշխատանքներ:

Հանքաքարը ներկայացված էր մագնետիտային կվարցիտով, որի կարծրաձխան գործակիցը՝ [ հատասար է 14—16 (քաա Պրատոզայինովի), տեսակարար կշիռը՝ 3—4, լցման կշիռը՝ 2,2 տ մ<sup>3</sup>]:

Ճեղինակների հետադասակարգումները ավել են հետևյալ արդյունքները.

1. Ի հայտ է բերված Երկաթաքարի զանազան մեծությունների կտորների՝ փայտի ու Երկաթի հետ շփման անկյունների և գործակիցների մեծությունը: Ստացված արդյունքներն էտպես տարբերվում են լեռնատեխնիկական գրականության մեջ եղած տվյալներից:

2. Որոշված և քանակապես արժեքավորված է ավյալ հանքաքարի շփման անկյունների և գործակիցների կախումը հանքաքարի կտորների մեծությունից: Այդ տվյալները կարող են ծառայել նաև այլ հանքաքարերի և ապարների համար:

3. Որոշված է, որ սարուն խառնուրդների համար շփման անկյունների և գործակիցների մեծությունը կարելի է որոշել խառնուրդի յուրաքանչյուր բաղադրիչի միջին կշռի միջոցով:

Б. О. Егвазарян

## Приближенный способ нахождения расхода воды при прохождении прямой волны

### 1. Неустановившееся движение воды и его расчет

Неустановившееся движение воды, называемое также волновым движением, характеризуется системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$i_0 - \frac{1}{B} \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{u^2}{C^2 R} = \frac{\alpha}{g} \left( u \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$
$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

решить которую в общем случае не удастся, почему и все имеющиеся решения являются приближенными.

В настоящее время можно отметить два подхода к решению вопросов неустановившегося волнового движения. Первое направление исходит из принципа получения наибольшей возможной точности, поэтому методы этого направления можно условно называть „точными“ (методы характеристик, мгновенных режимов). Второе направление исходит из требований практики диспетчерской службы гидроэнерго-систем. Методы этого направления неизбежно менее точны, чем методы первого направления, но зато более простые. Их можно называть „упрощенными“ методами. Они получаются упрощением „точных“ методов или же основываются на данных экспериментов.

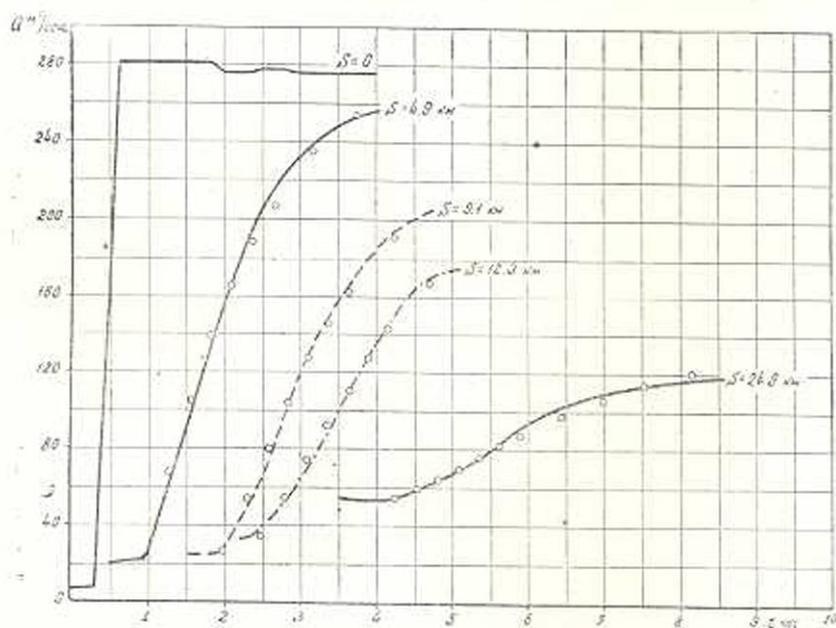
Основной недостаток „точных“ методов заключается в том, что все они сложны и громоздки (хотя и в различной степени). Поэтому они не могут быть применены в процессе эксплуатации гидротехнических сооружений и в особенности при диспетчерском планировании суточного регулирования, когда важное значение имеет быстрое, непосредственное определение расходов в любом створе водотока в любой момент времени, притом без трудоемких расчетов, несложными приемами, так, чтобы эту работу мог бы выполнить рядовой работник в течение нескольких часов.

Анализ приближенных методов расчета волнового движения, приведенный в [9], показал, что для планирования суточного регулирова-

ния можно было бы использовать методы М. В. Потапова [5] и Б. М. Лося [10]. Метод Потапова, дающий хорошие результаты при определении затухания максимального расхода волны попуска, имеющей треугольный гидрограф, не дает требуемой точности при построении кривой изменения расхода во времени в разных створах. Метод Лося удобен для быстрого вычисления расходов воды при неустановившемся движении, но допущения, сделанные при выводе основных расчетных формул, безусловно, делают метод недостаточно точным. Необходимо было разработать метод для непосредственного, с достаточной для практики точностью, вычисления расходов воды при неустановившемся движении. В настоящей статье делается такая попытка для определения расхода при прохождении прямой волны.

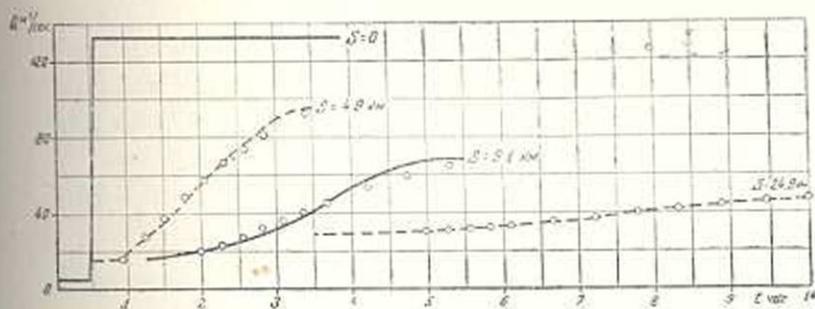
## 2. Определение расхода воды при прохождении прямой волны

Опыты и натурные наблюдения (фиг. 1—6) показывают, что если в каком-нибудь створе (источнике возмущения) увеличить расход воды на  $\Delta Q_0$ , то в нижерасположенных створах увеличение расхода будет происходить с меньшей интенсивностью, медленнее, чем у источника возмущения и тем медленнее, чем дальше расположен рассма-



Фиг. 1.

триваемый створ от источника возмущения. Изменение расхода в каком-нибудь створе начинается в момент добегания  $T$  начала волны к данному створу. Изучение опытных данных показывает, что если в источнике возмущения изменение расхода во времени происходит по прямой линии, то в нижерасположенных створах его можно выразить



Фиг. 2.

показательной функцией (как это делает для уровней Браславский [1]) вида:

$$\Delta Q = \Delta Q_0(1 - e^{-\alpha t}), \quad (2)$$

$$\tau = t - T,$$

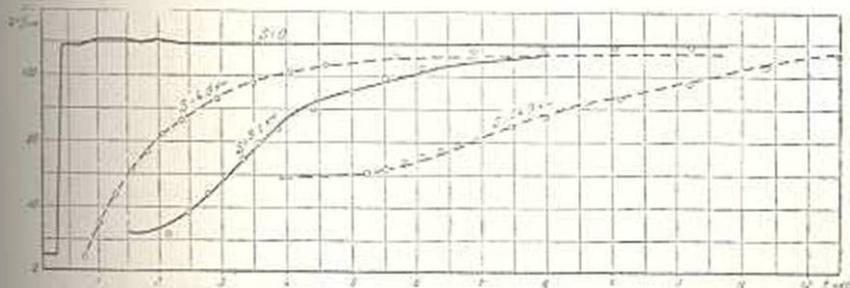
где  $\Delta Q_0$  — максимальное увеличение расхода в начальном створе, после чего расход остается постоянным;  $\alpha$  — параметр, называемый показателем деформации;  $t$  — время;  $T$  — время добегания начала волны от источника возмущения до данного створа.

Полный расход, проходящий через данный створ, будет:

$$Q = Q_0 \pm \Delta Q_0(1 - e^{-\alpha t}), \quad (3)$$

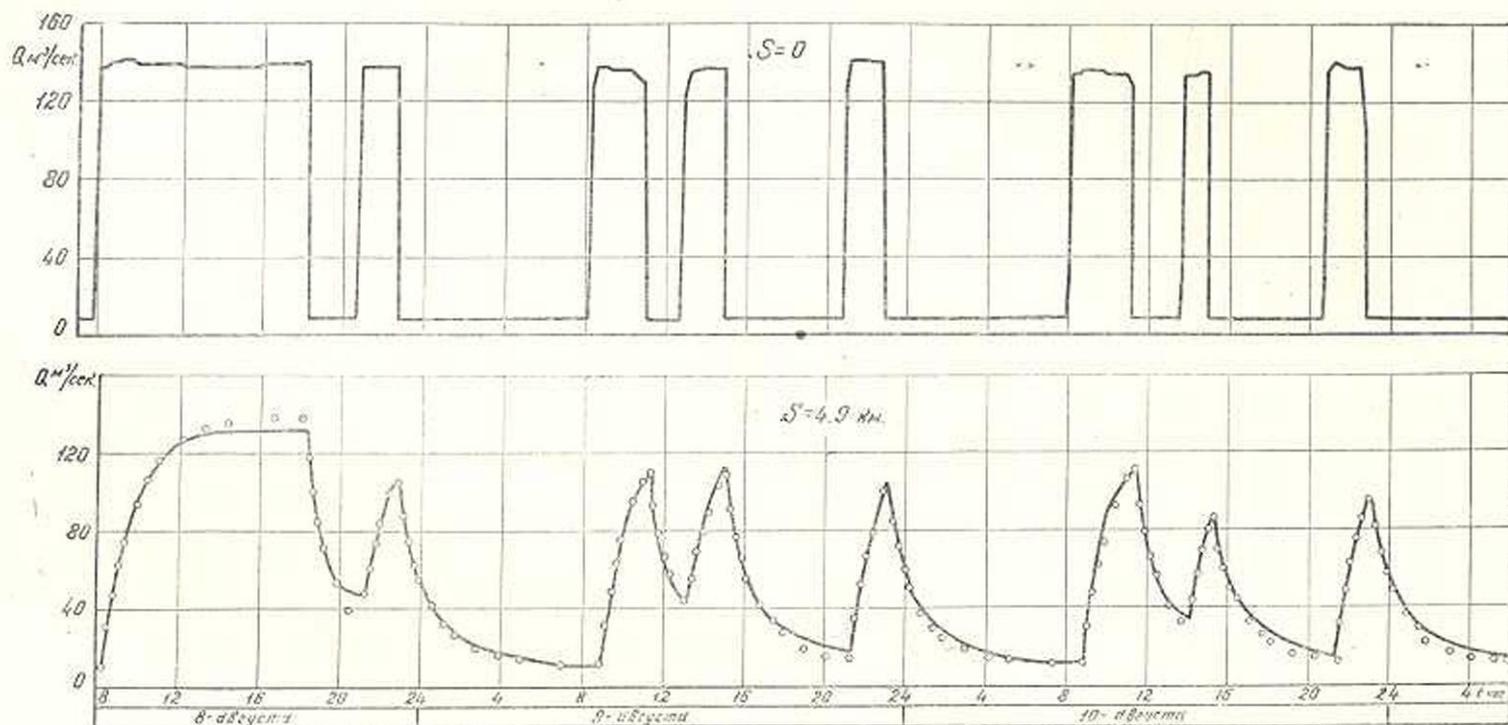
где знак плюс относится к увеличению расхода (положительная волна), а знак минус — к уменьшению расхода (отрицательная волна).

На фиг. 1—6 приведено несколько сопоставлений опытных кривых изменения расхода с кривыми по (3).



Фиг. 3.

Значение показателя  $\alpha$  в каждом случае определено из данного опыта путем попыток. На фиг. 1—4 использованы опыты СКГУ в нижнем свободном бьефе [2], а на фиг. 5 и 6 — опыты ЦНИИЛ в подпертом нижнем бьефе Тихвинской водной системы [3]. Точками показаны результаты расчета, а сплошными линиями — результаты экспериментов. На фиг. 4 рассмотрено многократное изменение расхода в одном створе, причем параметр  $\alpha$  для всех односторонних изменений принят одинаковым.

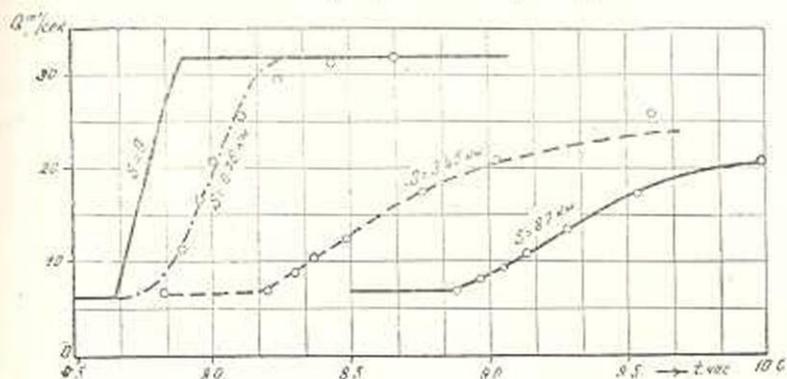


Фиг. 4.

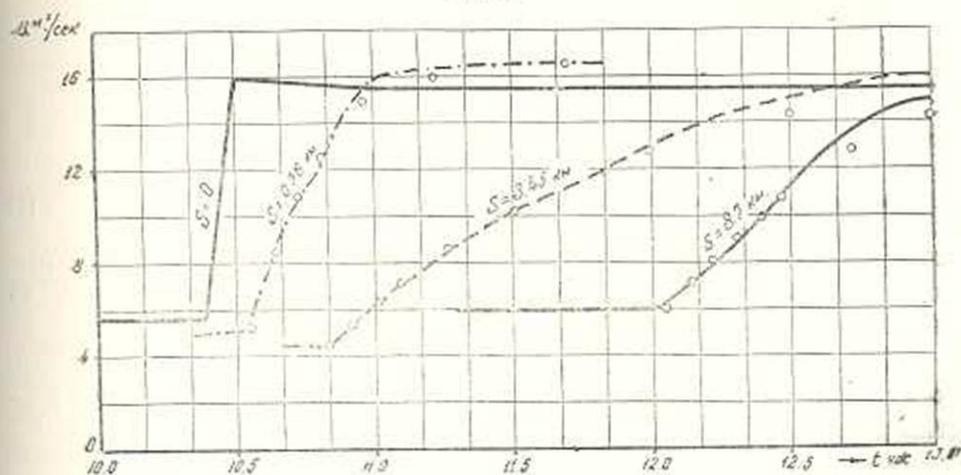
Приведенные сопоставления показывают, что:

- а) принятый показательный закон практически правильно выражает закон изменения расхода во времени в каждом створе при одностороннем конечном изменении расхода в начальном створе и
- б) для каждого такого изменения расхода параметр  $\alpha$  можно принимать постоянным во времени в данном створе.

Задача заключается в определении параметров  $\alpha$  и  $T$ .



Фиг. 5.



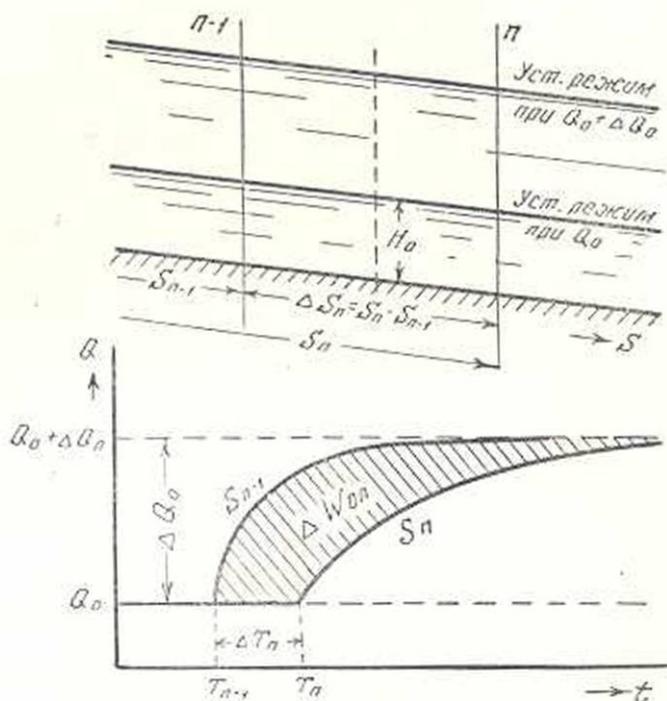
Фиг. 6.

Время добегаия  $T$  определяется по расстоянию  $s - s_0$  между данным и начальным створами и по скорости распространения начальной точки волны ( $z=0$ ), для которой (см. [9]) в случае реальной жидкости применима формула Лагранжа

$$\omega = \sqrt{g \frac{F}{B}} + u;$$

$$T = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\omega}. \quad (4)$$

Для определения параметра  $\alpha$  составим уравнение неразрывности потока на участке водотока между сечениями  $s_{n-1}$  и  $s_n$  (фиг. 7):



Фиг. 7.

$$Q_{n-1}dt + Q_0(s_n - s_{n-1})dt - Q_n dt = dw, \quad (5)$$

где  $Q_0$  — боковая приточность на один м. длины;  $Q_{n-1}$  и  $Q_n$  — расходы воды в створах  $s_{n-1}$  и  $s_n$ ;  $dw$  — приращение объема воды на рассматриваемом участке за промежуток времени  $dt$ .

Подставляя значение  $Q_{n-1}$  и  $Q_n$  по (3), принимая  $Q_0$  постоянным по времени и интегрируя (5) от  $T_{n-1}$  до  $t > T_n$ , получим после простых преобразований:

$$\Delta Q_0(T_n - T_{n-1}) - \frac{\Delta Q_{n-1}}{\alpha_{n-1}} + \frac{\Delta Q_n}{\alpha_n} = w - w_{01}, \quad (6)$$

где  $w$  — объем воды в пределах участка.

При  $t \rightarrow \infty$ ,  $\Delta Q \rightarrow \Delta Q_0$  и в данном створе устанавливается стационарный режим, соответствующий новому расходу  $Q_0 \pm \Delta Q_0$ . Тогда в пределе из (6) получим:

$$\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{1 + \alpha_{n-1} \left( \frac{\Delta W_{0n}}{\Delta Q_0} - \Delta T_n \right)} \quad (7)$$

или, если требуется найти  $\alpha_n$  непосредственно,

$$\alpha_n = \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 \sum_1^n \left( \frac{\Delta w_{0i}}{\Delta Q_0} - \Delta T_i \right)}, \quad (7')$$

где  $\Delta w_{0n} = w_{02} - w_{01}$  — приращение объема воды на участке при переходе от одного установившегося режима к другому;  $\Delta T_n = T_n - T_{n-1}$  — время пробега данного участка началом волны;  $\alpha_0$  — показатель деформации в начальном створе (источнике возмущения).

Если в начальном створе изменение расхода на  $\Delta Q_0$  во времени происходит линейно в течение промежутка времени  $\tau'_0$ , то аналогичным образом, применяя условие неразрывности для участка водотока, примыкающего к источнику возмущения, получим:

$$\alpha_1 = \frac{1}{0,5\tau'_0 + \left( \frac{\Delta w_{01}}{\Delta Q_0} - \Delta T_1 \right)} \quad (8)$$

и

$$\alpha_n = \frac{1}{0,5\tau'_0 + \sum_1^n \left( \frac{\Delta w_{0i}}{\Delta Q_0} - \Delta T_i \right)}. \quad (8')$$

Если расход в начальном створе меняется внезапно, скачкообразно, то, подставляя в (8')  $\tau'_0 = 0$ , получим:

$$\alpha_n = \frac{1}{\sum_1^n \left( \frac{\Delta w_{0i}}{\Delta Q_0} - \Delta T_i \right)}. \quad (8'')$$

Из (2) видно, что показатель  $\alpha$  характеризует степень быстроты перехода от одного установившегося режима к другому. Чем больше  $\alpha$ , тем быстрее практически устанавливается новый стационарный режим и, следовательно, тем быстрее происходит наполнение или опорожнение русла. Параметр  $\alpha$  характеризует также время добегания расхода до данного створа; чем больше  $\alpha$ , тем больше и скорость распространения постоянного расхода и, следовательно, меньше время его добегания.

Отметим, что уменьшение расхода (отрицательную волну) можно рассматривать как увеличение (положительную волну) с обратным знаком, так что выведенные зависимости остаются в силе и для волны отлива.

Остановимся на предположениях, принятых при выводе расчетных формул. Предположения следующие:

а). При изменении расхода в начальном створе на конечную величину  $\Delta Q_0$  и при дальнейшем его постоянстве, свободная поверхность воды от одного установившегося положения, соответствующего первоначальному расходу  $Q_0$ , переходит к другому установившемуся положению, соответствующему новому расходу  $Q_0 \pm \Delta Q_0$ .

б). При изменении расхода во времени в начальном створе по линейному закону изменение расхода от  $Q_0$  до  $Q_0 \pm \Delta Q_0$  в нижерасположенных створах с достаточной для практики точностью может быть выражено функцией (3).

в). Предпосылки (а) и (б) в равной мере правильны как для свободных (неподпертых), так и для подпертых бьефов.

Установление в бьефе нового стационарного режима, соответствующего расходу  $Q_0 \pm \Delta Q_0$ , не может вызывать сомнений. Действительно, если предполагать, что такой режим не устанавливается, то и установившегося движения в таком виде, как его вообще представляют, не могло бы существовать, что противоречит действительности.

Постепенный переход от одного установившегося режима к другому следует из анализа результатов многочисленных экспериментов (см., например, [2], [3]). Соответствующие новому установившемуся режиму кривые  $Q = Q(s)$  и  $H = H(s)$  следует называть конечными условиями; они дополняют известные в гидравлике начальные и граничные условия. Определению конечных условий надо придавать большое значение, так как от их точности в каждом случае зависит точность определения параметра  $\alpha$ .

Возможность замены действительного закона изменения расхода во времени в любом створе в свободных и подпертых бьефах показательной функцией (3) доказывают сопоставления расчетного и действительного изменений расхода, некоторые из которых приведены в статье, причем фиг. 1—4 даны для свободного бьефа, а фиг. 5—6— для подпертого. Следует отметить, что в подпертых бьефах положение свободной поверхности при новом расходе  $Q_0 \pm \Delta Q_0$  зависит также от условий в створе подпертых сооружений и для определенности конечных условий необходимо знать граничные условия в указанном створе.

Отметим, что полученные формулы правильны для бьефов, которые имеют достаточно большую длину. Это условие необходимо для того, чтобы отраженная от конца бьефа волна не могла бы нарушить принятый закон изменения расхода в каждом створе. Практически достаточно иметь такую длину, чтобы отношение высот прямой и отраженной волн в рассматриваемом створе  $\frac{h_{отр}}{h_{пр}}$  было бы меньше заранее заданной величины; такой бьеф называется длинным бьефом [4]. В противном случае формулами можно пользоваться до момента добегающего начала отраженной волны до рассматриваемого створа. Условие большой длины отпадает, если принимать, что пропускаемый в конце бьефа расход в каждый момент времени соответствует расходу, перемещаемого волной.

### 3. Распределение расхода по длине водотока

Имея графики расходов в отдельных створах, легко построить график распределения расхода по длине водотока в любой момент времени  $t = \text{const}$  (так называемые мгновенные кривые расходов). Это построение можно вести и без предварительного нахождения графиков  $Q = Q(t)$ . Действительно, если в уравнении (3), выражающем изменение расхода по времени при  $s = \text{const}$ , оставить время  $t$  постоянным и изменять расстояние  $s$ , то можно получить уравнение указанной мгновенной кривой расходов  $Q = Q(s)$ . В частности, для призматического неподпертого бьефа при быстром изменении расхода в начальном створе это уравнение имеет вид:

$$Q = Q_0 \pm \Delta Q_0 \left( 1 - e^{-\frac{p}{s}} \right), \quad (9)$$

где

$$p = \frac{L - s}{\omega \frac{\Delta F_0}{\Delta Q_0} - 1}, \quad (10)$$

$L = \omega t$  — расстояние, на которое распространяется начало волны к моменту  $t$ . Как видно из (10), выражением (9) можно пользоваться до тех пор, пока  $s \leq L$ ; до створа же  $s > L$  волна еще не распространилась и, следовательно, в нем увеличение расхода не имеет места.

Аналогичным образом можно найти зависимость и для построения кривой  $Q = Q(s)$  при медленном изменении расхода в начальном створе.

### 4. Определение уровней воды

В большинстве случаев практики, кроме изменения расхода воды, важно знать также изменение глубины в водотоке. Полученные выше зависимости дают возможность, без больших дополнительных вычислений, определять также глубины воды при неустановившемся движении. Заменяя (фиг. 7) приращение объема на участке  $\Delta w = w - w_0$  величиной  $\Delta H B_{cp}(s_n - s_{n-1})$ , где  $\Delta H$  — приращение глубины в створе  $\frac{s_{n-1} + s_n}{2}$ , а  $B_{cp}$  — средняя на высоте  $\Delta H$  ширина потока в том же створе, из (6) получим:

$$\Delta H = \frac{\Delta Q_0}{\omega B_{cp}} - \frac{1}{B_{cp} \Delta s_n} \left( \frac{\Delta Q_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - \frac{\Delta Q_n}{\alpha_n} \right), \quad (11)$$

а полная глубина потока будет

$$H = H_0 + \Delta H.$$

Расходы  $\Delta Q_{n-1}$  и  $\Delta Q_n$  в створах  $s_{n-1}$  и  $s_n$  определяются по (2). Уравнение (11) решается подбором.

При получении (11) было предположено, что кривая свободной поверхности воды в пределах рассматриваемого участка прямая линия и поэтому необходимо, чтобы в пределах участка элементы потока изменялись достаточно плавно. Это условие удовлетворяется при больших значениях  $T_n$ . Если кривую свободной поверхности нельзя заменить прямой линией, то надо водоток разбить на небольшие участки.

В тех случаях, когда известна зависимость  $\Omega = i(H)$  между площадью свободной поверхности и глубиной потока в среднем створе, выражение (11) можно записать в следующем виде:

$$\Delta H = \frac{\Delta Q_0}{\Omega_{cp}} (T_n - T_{n-1}) - \frac{1}{\Omega_{cp}} \left( \frac{\Delta Q_{n-1}}{\alpha_{n-1}} - \frac{\Delta Q_n}{\alpha_n} \right), \quad (11')$$

где  $\Omega_{cp}$  — площадь свободной поверхности в пределах участка при глубине в среднем створе  $H_0 + \frac{\Delta H}{2}$ .

Очевидно, что выражениями (11) и (11') можно пользоваться при условии  $t > T_n$ , т. е. после того, как начало волны уже добежало до створа  $s_n$ . Если требуется определить уровень в момент  $T_{n-1} < t < T_n$  (фиг. 7), то нужно пользоваться условием неразрывности, написанным для участка между створами  $s_{n-1}$  и  $s$ , в котором находится начало волны в момент  $t$ . Место последнего створа определяется по скорости начала волны:

$$s = s_{n-1} + \int_{T_{n-1}}^t \omega dt = s_{n-1} + \omega_{cp}(t - T_{n-1}).$$

Составляя и решая уравнение неразрывности для этого участка, найдем:

$$H' + H_0 + \frac{\Delta Q_0}{wB'_{cp}} - \frac{\Delta Q_{n-1}}{\alpha_{n-1}B'_{cp}\Delta s'_n}, \quad (12)$$

или же

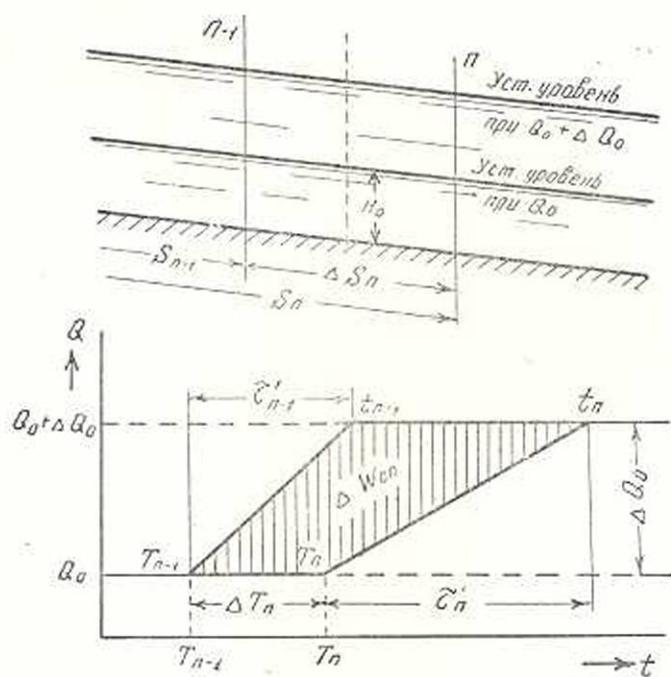
$$H' = H_0 + \frac{\Delta Q_0}{\Omega_{cp}} (t - T_{n-1}) - \frac{\Delta Q_{n-1}}{\alpha_{n-1}\Omega'_{cp}}, \quad (12')$$

где  $H_0$  и  $H'$  — глубины потока в среднем створе  $\frac{s + s_{n-1}}{2}$  до волны и в момент  $t$ ;  $B'_{cp}$  и  $\Omega'_{cp}$  уже относятся к участку  $s - s_{n-1}$  и зависят от средней глубины  $\frac{H' + H_0}{2}$ .

##### 5. Определение расхода прямой волны в предположении линейного изменения расхода воды во времени в любом створе водотока

Определение расхода прямой волны в некоторых случаях можно более упростить, если предполагать, что при прямолинейном измене-

нии расхода в начальном створе в нижерасположенных створах изменение расхода происходит также прямолинейно, но с уменьшенной, под влиянием сил трения, интенсивностью. Чем дальше расположен рассматриваемый створ от источника возмущения, тем меньше интенсивность изменения расхода в этом створе и тем больше время, в течение которого происходит изменение расхода (фиг. 8).



Фиг. 8

В каждом створе уравнение прямой, выражающей закон изменения расхода, можно записать в следующем виде:

$$\Delta Q_n = \frac{\Delta Q_0}{t_n - T_n} (t - T_n) = \frac{\Delta Q_0}{\tau'_n} \tau'_n \quad (13)$$

где  $T_n$  и  $t_n$  — моменты добегаания начала и конца волны к створу  $s_n$ ;  $\tau'_n = t_n - T_n$  — продолжительность изменения расхода в том же створе.

Если  $T_n$  и  $\tau'_n$  известны, то уравнение кривой расходов (13) в каждом створе становится вполне определенным. Об определении времени добегаания  $T_n$  уже было сказано выше. Для нахождения параметра  $\tau'_n$  применим условие неразрывности к участку водотока, ограниченному створами  $s_{n-1}$  и  $s_n$  (фиг. 8). Увеличение объема воды на участке за промежуток времени  $t_n - T_{n-1}$  должно равняться площади графика расходов  $T_{n-1} t_{n-1} t_n T_n$ . Из этого равенства получим:

$$\Delta Q_0 (T_n - T_{n-1}) - \frac{\Delta Q_0}{2} (\tau'_{n-1} - \tau'_n) = \Delta w_n \quad (14)$$

Сделаем допущение, что уровни следуют за расходами и в момент, когда устанавливается расход  $Q_0 \pm \Delta Q_0$ , глубина достигает своего установившегося значения  $H_{уст}$ . Следовательно,  $\Delta w_n = \Delta w_{0n}$  определится положением свободной поверхности воды при двух установившихся движениях с расходами  $Q_0$  и  $Q_0 \pm \Delta Q_0$  (фиг. 8). Тогда из (14) получим:

$$\tau_n^* = \tau_{n-1}^* + 2 \left( \frac{\Delta w_{0n}}{\Delta Q_0} - \Delta T_n \right), \quad (15)$$

или, если требуется непосредственно найти значение  $\tau_n^*$ , то

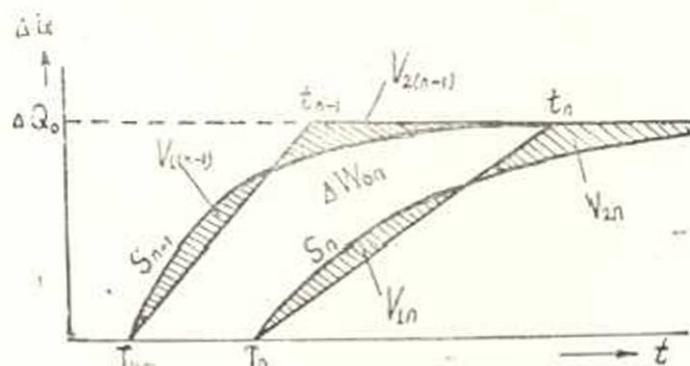
$$\tau_n^* = \tau_0^* + 2 \sum_1^n \left( \frac{\Delta w_{0i}}{\Delta Q_0} - \Delta T_i \right). \quad (15')$$

Если в начальном створе расход меняется скачком, то нужно подставить в (15')  $\tau_0^* = 0$ .

При выводе уравнений в основном сделаны следующие допущения:

- прямолинейный закон изменения расхода правилен для всех створов, и
- уровни следуют за расходами и, следовательно, при расходе  $Q_0 \pm \Delta Q_0$  в бьефе устанавливается соответствующая ему при установившемся режиме глубина  $H_{уст}$ .

Из приведенных сопоставлений было видно, что изменение расхода лучше всего выражается показательной функцией (2). При замене показательной зависимости (2) прямолинейной (13), для сохранения равенства протекающих через данный створ объемов воды по двум законам, необходимо удовлетворить условию  $V_1 = V_2$  (фиг. 9).



Фиг. 9.

Такая замена приводит к тому, что если площадь графика между двумя показательными кривыми представляет приращение объема воды  $\Delta w_{0n}$  при переходе от одного установившегося режима к другому, то и площадь  $T_{n-1} t_{n-1} t_n T_n$ , при замене показательных кривых прямыми,

также равна  $\Delta\omega_{0n}$ , т. е. с достижением расхода  $Q_0 + \Delta Q_0$  устанавливается стационарный режим.

Чем медленнее происходит изменение расхода, тем с большей точностью можно показательную кривую заменить прямой линией. С другой стороны с уменьшением интенсивности изменения расхода уменьшается и разница между кривыми  $Q = Q(H)$  при установившемся и неустановившемся движениях, т. е. уровни лучше следуют за изменением расхода. Следовательно, полученные зависимости могут давать правильные результаты при значительно медленных изменениях расхода. Надо отметить, что отрицательные волны обычно очень быстро сглаживаются настолько, что закон изменения расхода с достаточной точностью можно принимать прямолинейным.

Отметим, что указанные выше допущения в той или иной форме неоднократно принимались и другими авторами. Например, М. В. Потапов [5] принимает, что если в начальном створе график расходов имеет треугольную форму, то в последующих створах треугольная форма сохраняется; Н. В. Мацицкий [5] и М. А. Великанов [6] зависимость между расходами и уровнями принимают такую же, что и при установившемся движении и т. д. Приемлемость сделанных допущений подтверждается и экспериментально. Так, например, проведенные с большим мастерством опыты И. В. Егнзарова [7] в лабораторных условиях показали, что если волна в начальном створе имеет прямолинейное очертание, то оно практически сохраняется вдоль всей длины лотка.

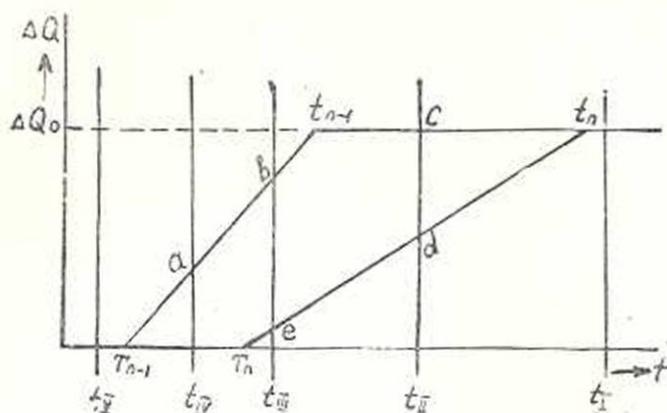
Закон распределения расхода по длине водотока в какой-то момент времени  $t = t_1$  получается из (13), если принимать  $s$  и  $T$  переменными; для случая призматического свободного бьефа этот закон имеет вид:

$$Q = Q_0 \pm \frac{\Delta Q_0(L-s)}{\tau_0 \omega + 2s \left( \omega \frac{\Delta F_0}{\Delta Q_0} - 1 \right)} \quad (16)$$

Колебание горизонта свободной поверхности воды определяем, как и в случае непрямолинейного изменения расхода, исходя из условия неразрывности потока на данном участке. Рассмотрим случай, когда  $t_{n-1} > T_n$  (фиг. 10), т. е. случай, который почти всегда имеет место на практике. Уравнение неразрывности пишется для промежутка времени  $t - T_{n-1}$ , где  $t$  — любой момент времени. Очевидно, что могут иметь место следующие случаи: 1)  $t > t_n$ ; 2)  $t_{n-1} \leq t < t_n$ ; 3)  $T_n \leq t < t_{n-1}$ ; 4)  $T_{n-1} \leq t < T_n$ ; 5)  $t < T_{n-1}$ . Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1. На всем участке установился стационарный режим и в среднем створе  $\frac{s_{n-1} + s_n}{2}$  глубина соответствует установившемуся движению при расходе  $Q_0 \pm \Delta Q_0$ .

2. В створе  $s_{n-1}$  имеется установившееся движение, а в  $s_n$  — нет. Приравняв площадь  $T_{n-1}t_{n-1}cdT_n$  приращению объема воды на данном участке и решая уравнение относительно глубины, получим после некоторых изменений:



Фиг. 10.

$$H = H_0 + \frac{\Delta Q_0}{2\omega B_{cp}} + \frac{1}{2B_{cp}\Delta s_n} \left[ (\Delta Q_0 - \Delta Q_n)(t - T_n) - 2\Delta Q_0 t_{n-1}^* \right]. \quad (17)$$

3. В этом случае в пределах данного участка стационарный режим еще не установился ни в одном створе. Применяя условие неразрывности, получим для глубины в среднем створе:

$$H = H_0 + \frac{1}{2B_{cp}\Delta s_n} \left[ \Delta Q_{n-1}(t_n - T_{n-1}) - \Delta Q_n(t - T_n) \right]. \quad (17')$$

4. Начало волны, проходя через верхний створ, не дошло еще до конечного. Аналогичным образом, как и в случае непрямолинейного изменения расхода, пользуясь условием неразрывности, найдем глубину в среднем створе  $\frac{s_{n-1} + s}{2}$  той части участка, на которую волна успела распространиться

$$H' = H_0 + \frac{\Delta Q_{n-1}}{2\omega B'_{cp}}. \quad (17'')$$

5. В этом случае волна еще не нарушила режим на рассматриваемом участке и во всех створах глубины соответствуют установившемуся движению с расходом  $Q_n$ .

Так как при выводе уравнений (17), (17') и (17'') предполагалось, что линия свободной поверхности воды прямая, то, во избежание больших ошибок при определении уровней, следует длины расчетных участков брать по возможности малыми.

### 6. Расчет сложной прямой волны

Все вышеизложенное относится к случаю, когда расход изменяется от  $Q_0$  до  $Q_0 \pm \Delta Q_0$  и затем остается неизменным во времени. На практике же чаще всего встречаются волны, возникающие в результате изменения расхода по сложному графику с переходящими через нуль значениями градиента  $\frac{\partial Q}{\partial t}$ . Такую форму имеют, например, графики расходов ГЭС при суточном регулировании, графики пусков из водохранилищ для целей регулирования, график расходов во время наводки или при шлюзовании и т. д.

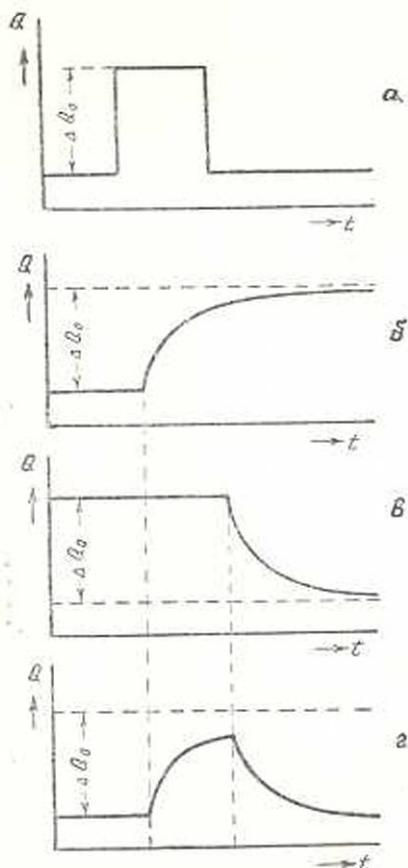
Сложную волну можно рассчитать, если применить к ней принцип независимости отдельных колебаний, или принцип наложения, как его называет И. В. Егиазаров [8], который впервые применил этот принцип к решению вопросов неустановившегося движения воды.

Это приводит к расчету отдельных простых волн, из которых состоит сложная волна, и суммированию полученных результатов. Принцип наложения исходит из того, что законы изменения расходов и уровней воды в каком-нибудь створе, после нарушения данной волны другой волной, остаются тем же, но одно изменение накладывается на другое. На фиг. 11а показан график изменения расхода в начальном створе, состоящего из одного увеличения и одного уменьшения. На фиг. 11б и 11в изображены кривые увеличения и уменьшения расхода в нижерасположенном створе. На фиг. 11г изображена суммарная кривая, представляющая действительное изменение расхода. Таким образом для изменений расхода и уровней в случае сложной волны можно написать:

$$\Delta Q = \pm \Delta Q_1 \pm \Delta Q_2 \pm \dots \pm \Delta Q_n,$$

$$\Delta H = \pm \Delta H_1 \pm \Delta H_2 \pm \dots \pm \Delta H_n. \quad (18)$$

Так как продолжительность пуска постоянных расходов на практике (например, при суточном регулировании) небольшая, то наложение отдельных изменений в нижерасположенных створах приво-



Фиг. 11.

дит к значительному затуханию максимальных расходов и глубин по длине, что видно и на фиг. 11.

Предложенный способ приближенного расчета прямой волны исходит из того, что характер кривых изменения расхода известен и поэтому назван методом кривых расходов. Для пользования этим методом необходимо знать значения установившихся глубин  $H$ , приращения расхода  $\Delta Q_0$ , приращения глубин  $\Delta H_{уст.}$  и объема  $\Delta w_0$ , а также время  $\Delta T$  добегания начала волны. Целесообразно эти значения для каждого из участков, на которые разбивается бьеф, иметь в виде следующих зависимостей от глубины  $H_k$  в концевом створе участка

$$Q_0 = Q(H_k); \quad w_0 = w(H_k); \quad \Delta T = T(H_k),$$

представленных графически.

Для оценки точности предлагаемого метода кривых расходов был рассчитан случай неустановившегося движения в нижнем бьефе и результаты расчета — кривые расходов в двух створах на расстоянии  $s=9,1$  км и  $s=12,3$  км от начального створа — сопоставились с результатами опытов СКГУ [2]. Исходным считался створ  $s=4,9$  км. Время  $\Delta T$  пробега данного участка началом волны ( $z=0$ ) было скорректировано опытными данными из-за неполноты необходимых данных. Сопоставления расчета и опыта показаны на фиг. 12 и 12а, где одновременно приведены и результаты расчетов по методам характеристик и мгновенных режимов. Как видно, совпадение неплохое и точность метода достаточна для предварительных расчетов при проектировании и в особенности при планировании суточного регулирования.

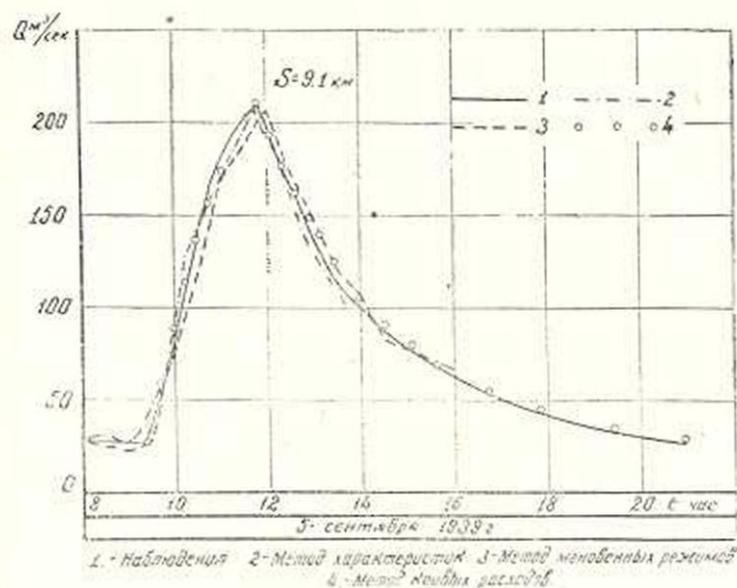
## Выводы

1. При линейном изменении расхода в начальном створе в нижерасположенных створах изменение расхода происходит по кривой, которую с достаточной для практики точностью можно выразить уравнением (3), причем входящие в него параметры определяются теоретически.

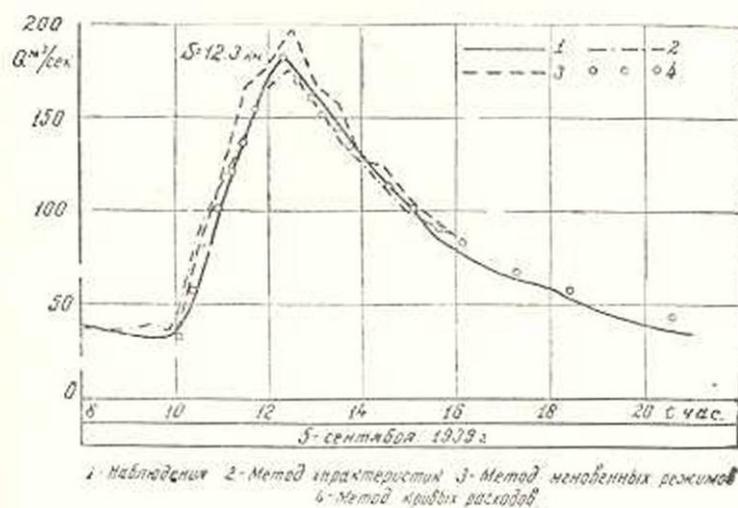
2. Принимая в основу выражение (3), предлагается метод для нахождения расхода и уровня воды в любом створе в любой момент времени при прохождении прямой линии.

3. Для расчета сложной волны последняя разлагается на элементарные (на волны одного направления), которые рассчитываются в отдельности и результаты для одинаковых моментов времени складываются.

4. При медленном линейном изменении расхода в начальном створе оказывается возможным упростить расчетные зависимости для нахождения расхода, если предполагать, что во всех остальных створах расход также меняется по прямой линии, но с по-



Фиг. 12.



Фиг. 12а.

степенно уменьшающейся интенсивностью по расстоянию. Для этого случая получены соответствующие формулы для нахождения расхода и уровня воды.

5. Сопоставление расчета по предложенному методу с результатами опытов и результатами расчетов по „точным“ методам (методы характеристик, мгновенных режимов) показали, что предложенный метод (метод кривых расходов) имеет достаточную для практики точность.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 16 III 1954

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Браславский А. П.* Приближенный способ расчета колебаний уровня при неустановившемся движении воды. Труды ГГИ, вып. 26 (80), 1950.
2. *Гильденблат Я. Д.* и др. Неустановившийся режим нижнего бьефа гидростанций. Проблемы регулирования речного стока, вып. 2, АН СССР, 1948.
3. *Рахманов А. И.* и *Ломоносов И. Г.* Неустановившееся движение при пусках и опорожнениях водохранилищ по данным опытов на Тихвинской водной системе. Известия НИИГ, № 25, 1939.
4. ТУИИ проектирования гидротехнических сооружений. Деривационные каналы ГЭС, ч. II, 1948.
5. *Ведерников В. В.* и др. Неустановившееся движение водного потока в открытом русле, 1947.
6. *Великанов М. А.* Динамика русловых потоков, 1949.
7. *Егiazаров И. В.* Неустановившееся движение в данных бьефах. Известия НИИГ, № 21, 1937.
8. *Егiazаров И. В.* Гидроэлектрические силовые установки, ч. III, 1937.
9. *Егiazарян Б. О.* Суточное регулирование деривационных ГЭС с учетом влияния деформации волнового расхода воды, 1952 (диссертация). Автореферат диссертации, 1953.
10. *Лось Б. М.* Приближенный метод расчета уровней в нижних бьефах гидроэлектростанций при суточном регулировании. Труды Московского энергетического института, вып. V, 1950.

#### Բ. Ն. Եղիազարյան

### ՈՒՂԻՂ ԱԼԻՔԻ ԱՆՑՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ ՋՐԻ ԵԼՔԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐ ԵՂԱՆԱԿ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուժ քննարկվում են ալիքի ելքի մասախոր ու տրագ սրտչման հնարախորաթ յունենելը և առաջարկվում է մի եղանակ, որը հենվում է փորձնական տվյալների վրա:

Առաջարկվող եղանակի հիմքում մի դեպքում գրվում է որևէ հատվածքում ելքի՝ ըստ ժամանակի փոփոխումը ցուցչային ֆունկցիայով (2)

արտահայտելու հնարավորությունը, իսկ մյուս դեպքում՝ ելքի ու ժամանակի միջև ցուցչային կապը ուղղագիծ կապով (13) փոխարինելու հնարավորությունը: Երկու դեպքում էլ համապատասխան արտահայտություններ են արտածվում բնդունված կապի մեջ մանող պարամետրների որոշման համար՝ (4), (8) և (15): Առաջարկված կղանակը հնարավորություն է տալիս որոշելու նաև ջրի խորություն փոփոխությունն ըստ ժամանակի, ելքի թև ուղղագիծ և թև կորագիծ փոփոխման դեպքում, ինչպես և որոշելու ելքի բաշխումը ըստ ջրատարի երկարություն՝ որևէ ակնթարթում:

Բարդ այնքաները հաշվելիս օգտագործվում է առանձին փոփոխությունների անկախություն սկզբունքը: Բերված է մի օրինակ (նկ. 12 և 12a), որտեղ առաջարկվող կղանակով կատարված հաշվումները համեմատվում են փորձնական ավյալների և բնութագրերի ու ակնթարթային սեփիմների մեթոդներով կատարված հաշվումների արդյունքների հետ:

С. М. Исаакян (Матинян)

## Воронки у гидротехнических сооружений и их пропускная способность

### В в е д е н и е

Явление воронкообразования хорошо известно из практики эксплуатации гидротехнических сооружений, а также по лабораторным исследованиям. Его можно наблюдать перед забральными стенками напорных камер ГЭС, у входа в напорные тоннели, при опорожнении шлюзных камер, при истечении из отверстий и т. д.

Воронкообразование сопровождается целым рядом побочных явлений, весьма отрицательно сказывающихся на гидравлической работе сооружений, а именно:

1. Воронки, поглощая энергию потока, приводят к понижению гидравлического к. п. д. сооружения.
2. При развитой форме воронки происходит весьма интенсивное засасывание воронкой воздуха, что приводит к еще большему понижению гидравлического к. п. д.
3. Помимо воздуха засасываются также плавающие тела, что приводит иногда к аварии на гидростанции.
4. Периодически изменяющееся гидродинамическое давление в воронке приводит к весьма нежелательной вибрации элементов сооружения.

С другой стороны, эти же воронки, в настоящее время используются для отвода от сооружений плавающих тел и шуги.

Изучение механизма воронкообразования и причин его обуславливающих имеет поэтому большое практическое значение, ибо только таким путем можно найти наиболее рациональные решения задачи как для борьбы с воронкообразованием, так и для искусственного усиления ее действия.

Изучением воронкообразования занимались многие исследователи.

А. Гибсон [1] указывает на резкое понижение коэффициента расхода при истечении жидкости из отверстия в тонкой стенке в условиях воронкообразования. Для этих условий им был приведен коэффициент расхода  $\mu$  для отверстия диаметром 2,5 см—0,287 и для отверстия диаметром 8,75 см—0,178, в то время как для нормальных усло-

вий истечения (при отсутствии воронок) коэффициент расхода через отверстие в тонкой стенке  $\mu=0,62$ .

Б. А. Бахметев [2] отмечает, что уменьшение глубины воды над щитовым отверстием имеет своим следствием образование воронок и связанное с ним уменьшение коэффициента расхода при истечении из отверстия.

Н. М. Шапов [3] приводит пример засасывания через воронку деревянного бруска, вызвавшего аварию гидротурбины.

Л. Н. Шакунов [4] во время опытов, выполненных в ГЭЛ НИИГ под руководством И. В. Егизарова, заметил образование интенсивных воронок перед забральными стенками и разработал метод их гашения с помощью специальных щитков. В этой же лаборатории разработан способ предотвращения воронкообразования путем утолщения забрала и уменьшения глубины погружения его кромки.

А. Х. Халпахчян [5], исходя из общих дифференциальных уравнений движения жидкости, опровергнул теорию, объясняющую воронкообразование Корнолисовым ускорением. Установив экспериментально вихревое происхождение воронок, он показал, что:

а) воронки можно создать или уничтожить образованием в потоке искусственных вихрей при помощи обтекаемых экранов\*;

б) интенсивность воронок зависит от интенсивности вихревых шнуров и поверхностного натяжения жидкости;

в) в зависимости от интенсивности вихря, воронки бывают с засасыванием воздуха и без засасывания его;

г) нестационарность потока усиливает воронкообразование.

Тот же автор высказал предположение о возможности моделирования воронкообразования по Фрудру с введением некоторого поправочного коэффициента.

А. Х. Халпахчян рекомендовал следующие методы гашения воронок:

а) увеличение слоя воды над отверстием,

б) создание противовихрей при помощи обтекаемых экранов,

в) устройство плавающих решеток,

г) устройство плавающих щитков.

Должна быть особо подчеркнута роль А. Х. Халпахчяна в объяснении воронкообразования наличием вихревых шнуров в потоке и в установлении возможности гашения воронок, созданием противовихрей с помощью обтекаемых экранов (пластинок).

С. М. Исаакян [6] при исследовании явления истечения воды изпод щита, как наиболее распространенного элемента гидротехнических сооружений, работающего в условиях воронкообразования, установила, что:

\* Идея применения обтекаемых щитков для усиления действия воронок изложена в 1939 г. А. Х. Халпахчяном в его кандидатской диссертации. Дальнейшее развитие этой идеи с точки зрения ее практического использования можно найти в работе В. С. Фокева [7].

а) воронки перед щитом являются следствием образования вертикальных вихревых шнуров и горизонтального вальца при истечении воды из-под щита.

Вертикальные вихревые шнуры образуются вследствие наличия градиента скоростей по ширине лотка. Увеличением или уменьшением этого градиента можно усилить или ослабить воронкообразование.

Усиление интенсивности воронок достигается увеличением шероховатости стенок лотка. Выравнивание же скоростей по ширине лотка путем увеличения скоростей у его боковых стенок предотвращает воронкообразование. Последнее было достигнуто автором созданием щелей в щите у его боковых кромок;

б) воронки, как и всякий вихрь, имеют пульсирующий характер. Частота пульсаций подчиняется определенной закономерности;

в) образовываясь перед щитом, воронки движутся вверх по течению и в некоторой точке приобретают устойчивое положение. Местоположение этой точки на свободной поверхности воды определяется глубиной  $h$  погружения нижней кромки щита и равно примерно  $0,837 h$ .

Гашение воронок достигается таким назначением размеров забральной стенки, чтобы охватить ею область, занятую воронкой;

г) не верна схема, представляющая воронки бесконечным вихревым шнуром. Как теорией, так и опытом отвергнуто их представление и Ранкинским вихрем.

В. С. Фокеев [7] предложил в целях борьбы с шугой в напорных бассейнах ГЭС установить шугобросы, состоящие только из щитка-вихреобразователя и водовыпуска. Получаемые таким путем воронки им удачно используются также с целью сброса плавающих тел из верхнего бьефа сооружений.

К сожалению, количественных данных относительно эффективности действия таких воронок еще нет, а предположение автора об их моделируемости по закону Фруда опровергается И. Д. Гридневым и А. Д. Победимским [8], которые указывают, что показатели лабораторных исследований почти вдвое отличаются от данных натуральных исследований.

Т. М. Василишин [9], исследовав явление воронкообразования при истечении воды из донного отверстия, помещенного в бассейн со спиральным очертанием в плане, установил, что:

а) распределение скоростей в воронке подчиняется закону площадей;

б) коэффициент расхода донного отверстия, помещенного в центре этого спирального бассейна, определяется некоторым безразмерным числом, представляющим отношение чисел Рейнольдса и Фруда (отнесенным к отверстию).

На первый взгляд получается расхождение между мнениями С. М. Исаакян и Т. М. Василишина, однако нужно учесть следующие соображения.

Т. М. Василишчи рассматривает движение в спиральном бассейне, на дне которого расположено отверстие. Такое движение теоретически можно представить как сумму стока и вихревого шнура. Касательные составляющие скорости при таком движении будут удовлетворять закону площадей. Механизм образования воронок при истечении воды из-под щита отличается от этого случая существенным образом, поэтому нужно ожидать расхождения и в кинематической структуре.

Из приведенного выше обзора работ в области исследования воронкообразования следует, что еще остаются количественно неразрешенными все основные вопросы, относящиеся как к условиям воронкообразования, так и к его действию и затуханию. Неизвестны количественные характеристики мероприятий, направленных на усиление или предотвращение воронок, а также неизвестны законы моделирования.

Учитывая те трудности, которые связаны с установлением пространственного поля скоростей в пульсирующей воронке и то, что практика требует ответа на вопрос о пропускной способности воронок, в настоящей работе приводится экспериментальное решение задачи определения пропускной способности воронок для случая истечения воды из-под щита.\*

### 1. Исследование пропускной способности воронок в ГЭЛ ВЭНИ

*а) Постановка вопроса.* Целью исследования является установление пропускной способности воронки, образующейся при истечении воды из-под щита в зависимости от геометрических и гидравлических параметров сооружения, минуя вопрос механизма воронкообразования.

Экспериментальная установка представляет собой прямой лоток, перегороденный частично погруженным в воду плоским щитом, имеющим ширину, равную ширине лотка (фиг. 1). Уклон дна лотка  $i=0$ .

Истечение происходит при незатопленном отверстии.

Пропускная способность воронок при этом будет определяться геометрическими характеристиками лотка и щита, а также физическими свойствами жидкости и гидравлическими параметрами потока.

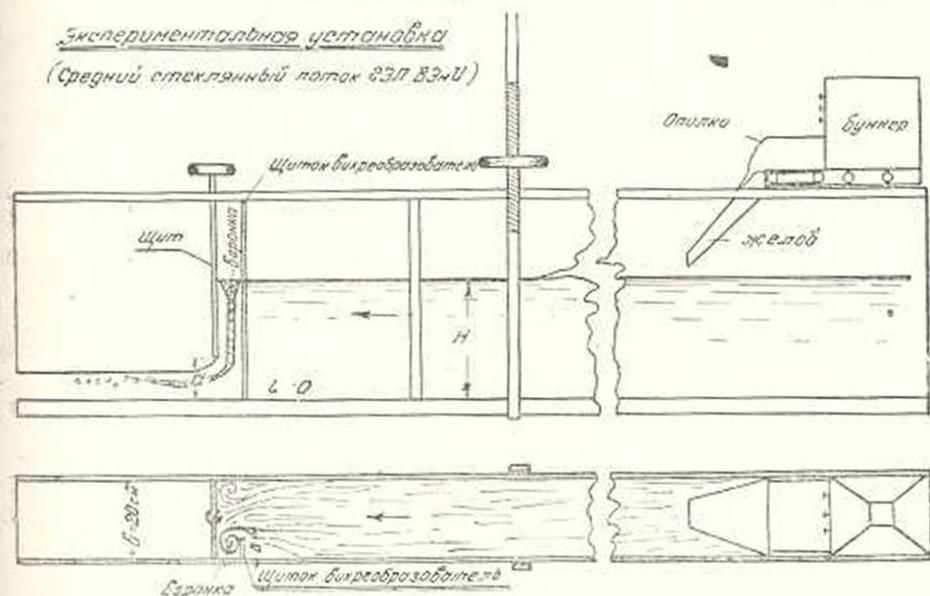
Для задачи истечения воды из-под щита очевидно будет иметь влияние плотность  $\rho$  и вязкость жидкости  $\mu$ , а что касается поверхностного натяжения, то, повидимому, его роль ограничивается моментом образования воронок, а в их пропускной способности оно решающей роли не играет.

Из инерционных констант нужно учесть ускорение силы тяжести  $g$ .

Работа щитового отверстия будет полностью задана, если известна ширина лотка— $b$ , высота открытия щитового отверстия— $a$  и средняя скорость в щитовом отверстии— $v_{ср}$ .

\* Позже автором разработана методика измерения пространственного нестационарного поля скоростей [10].

Учитывая, что форма щитового отверстия также влияет на явление, рассмотрим совместно гидравлический радиус  $R = \frac{a b}{2(a+b)}$  и высоту открытия щитового отверстия  $a$ . Тем самым учитывается как форма отверстия, так и его размеры.



Фиг. 1.

Таким образом, выбираем в качестве гидравлических и геометрических характеристик щитового отверстия величины  $R$ ,  $a$ ,  $v_{ср}$ . Они совместно определяют расход воды  $Q$ . Величины  $a$  и  $v_{ср}$  определяют напор  $H$  над щитовым отверстием. Величины  $a$  и  $R$  определяют ширину лотка  $b$ .

Учтем также характеристику того материала, который подается к воронке и служит для определения ее пропускной способности. Обозначим плотность этого материала через  $\rho_1$ . Тогда, учитывая действие архимедовой силы, будем иметь плотность в воде  $(\rho_1 - \rho_0)$ .

Обозначая пропускную способность воронки через  $G$ , можем писать в общем виде следующую функцию:

$$G = f [a, R, v_{ср}, g, \rho_0, (\rho_1 - \rho_0), \mu]. \quad (1)$$

С целью расширения области применимости полученных результатов функцию (1) представляем в виде связи между безразмерными величинами.

С этой целью выбираем в качестве основных величины  $R$  (см),  $v$  (см/сек),  $\rho_0$   $\left(\frac{г}{см^3}\right)$ . Тогда можем написать:

$$\frac{G}{\rho_0 v_{ср} R} = f \left( \frac{a}{R}, \frac{\mu}{\rho_0 v_{ср} R}, \frac{gR}{v_{ср}^2}, \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \right). \quad (2)$$

Здесь  $\frac{G}{\rho_0 v_{cp}^2 R}$  — безразмерный комплекс, характеризующий пропускную способность воронки,

$\frac{a}{R}$  — симплекс, характеризующий щитовое отверстие,

$\frac{\mu}{\rho_0 R v_{cp}}$  — величина, обратная числу Рейнольдса  $Re$ , выраженному через параметры щитового отверстия,

$\frac{gR}{v_{cp}^2}$  — величина, обратная числу Фруда  $Fr$ , выраженному через параметры щитового отверстия,

$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0}$  — относительная плотность плавающих тел, поступающих в воронку.

Отметим, что количество полученных комплексов и симплексов в (2) вполне согласуется с требованиями известной в теории размерностей  $\pi$ -теоремой.

Определение вида функции (2) и представляет задачу нашего экспериментального исследования.

б) *Постановка опытов.* Опыты были произведены в двух стеклянных лотках ГЭЛ ВЭНИ, при ширине  $b=20$  см и  $b=50$  см (фиг. 1).

Были исследованы режимы работы щитового отверстия при открытиях  $a=4 \div 18$  см (через каждые 2 см) и глубины наполнения воды  $H=6 \div 30$  см (через 2 см).

Критерием оценки пропускной способности воронок служило количество древесных опилок, свободно пропускаемых воронками через щитовое отверстие.

Объемный вес опилок\*  $\gamma_1=0,2$  т/м<sup>3</sup>. Размеры опилок:  $d > 3$  мм — 9%,  $d=3-1$  мм — 47%,  $d < 1$  мм — 44%.

Опыты были поставлены следующим образом. При определенном открытии щитового отверстия  $a$  и установленном горизонте воды  $H$ , зафиксирован расход воды  $Q$ . Равномерной подачей древесных опилок с ленты транспортера визуально установлен режим динамического равновесия подачи и отвода опилок воронками. Зафиксирована интенсивность подачи опилок при равновесном состоянии и при этом выделена масса опилок, прошедшая в голове лотка в течении 60 сек. Взвешиванием ее на весах определено секундное количество опилок, пропущенных воронкой при данном режиме работы щитового отверстия.

Всего таких опытов было произведено 80.

Поставлено также 150 опытов для определения пропускной способности искусственных воронок, образованных при обтекании щитков, имевших ширину  $B=2-12$  см, расположенных у левой стенки лотка на расстоянии  $1,5B$  от щитового отверстия.

\* В сухом виде, без трамбовки.

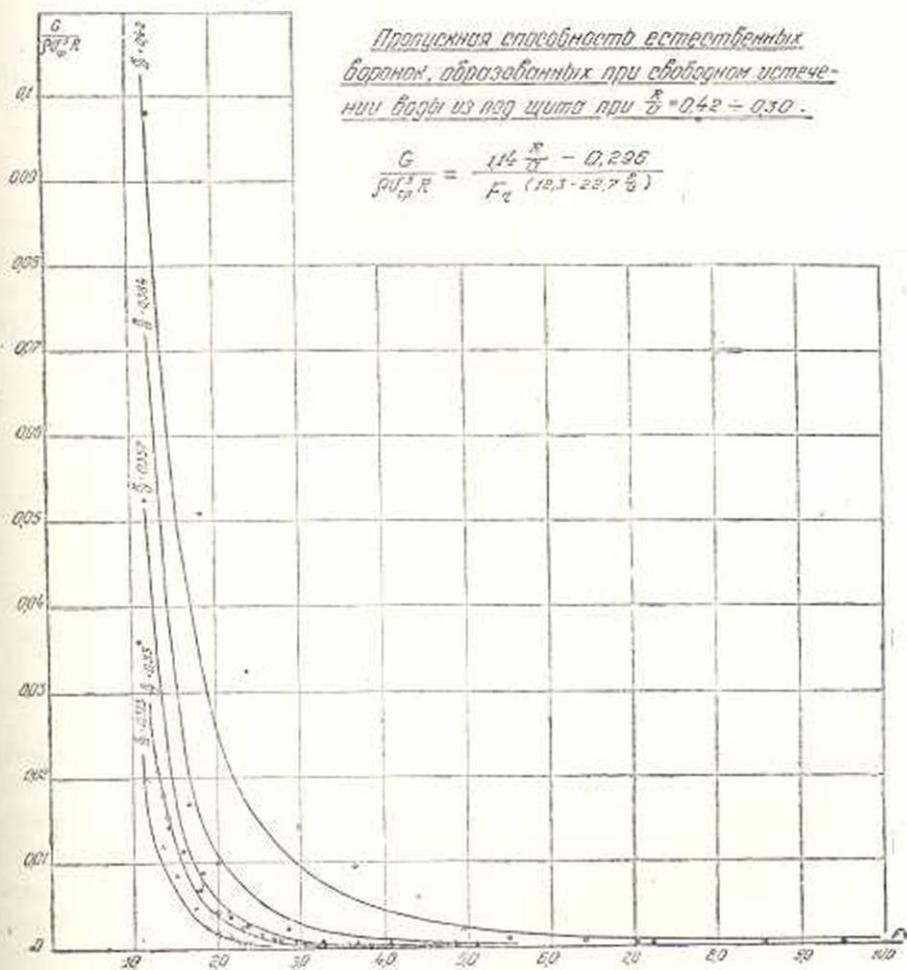
## 2. Опыты по определению пропускной способности естественных воронок

Обработка экспериментального материала заключалась в представлении экспериментальных данных в виде безразмерных комплексов, входящих в функцию (2).

Опыты в лотке с шириной  $b=20$  см произведены с достаточной точностью и никаких сомнений не вызывают. Что же касается опытов в большой лотке ( $b=50$  см), то здесь более достоверны данные, относящиеся к малым открытиям щитового отверстия, которые и охвачены с целью расширения области применения полученных результатов (охват случаев, ближе подходящих к случаю лотка бесконечной ширины).

Связь между пропускной способностью естественных воронок и числом Фруда представлена в прямоугольной системе координат на графике фиг. 2, где по вертикальной оси отложены значения

$$\frac{G}{\rho_0 v_{cp} R} \cdot a \text{ по горизонтальной — } Fr = \frac{v_{cp}^2}{gR}.$$



Фиг. 2.

При этом, экспериментальные точки соединены по линиям равных  $\frac{R}{a}$ , что экстраполируется выражением:

$$\frac{G}{\rho_0 v_{ср}^2 R} = \frac{1,14 \frac{R}{a} - 0,296}{F_r \left(12,3 - 22,7 \frac{R}{a}\right)} \quad (3)$$

Здесь  $\frac{R}{a}$  меняется в пределах 0,42—0,313. Это означает, что выражение (3) применимо для определения пропускной способности воронок, начиная от достаточно широких и низких щелей, до щелей почти квадратного сечения. Число Фруда для исследованных щитовых отверстий менялось в пределах от  $F_r = 1$  до 9.

Полученная зависимость (3) удовлетворяет экспериментальным точкам с точностью 3—6% для разных ветвей  $\frac{R}{a}$ , что нужно считать достаточной для опытов такого рода.

Сопоставляя полученное на основании опытов выражение в виде (3) с предварительно выведенным на основе теории размерностей выражением (2) замечаем, что в (3) отсутствуют члены  $\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0}$  и  $R_e$ .

Однако первый симплекс входит в функцию (3) как постоянная величина, а независимость пропускной способности воронок от числа Рейнольдса, отнесенного к щитовому отверстию, является следствием того, что скорости под щитом находятся вне области влияния числа Рейнольдса ( $F_r = 1-9$ ).

### 3. Опыты по определению пропускной способности искусственно усиленных воронок

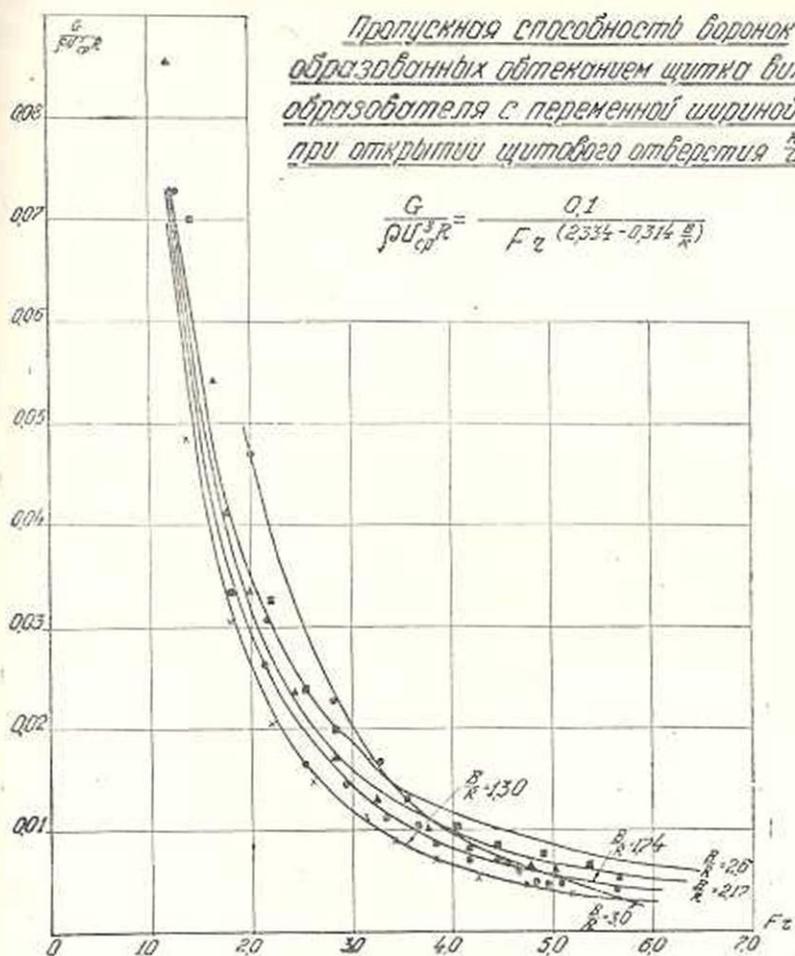
Согласно [5], [6] и [7] внесением в поток обтекаемых экранов (щитков-вихреобразователей) можно усилить воронкообразование.

Для получения количественных данных по пропускной способности таких воронок проведена серия опытов в лотке шириной  $b=20$  см с разными ширинами вихреобразователей при открытии щитового отверстия  $a=6$  см  $\left(\frac{R}{a} = 0,384\right)$  и при вертикальном расположении щитка

вихреобразователя около левой стенки на расстоянии от щитового отверстия  $1,5B^*$ . Результаты приведены на фиг. 3.

Кривые фиг. 3 показывают, что в пределах изменений ширины щитка  $B=(0,1-0,3)b$  пропускная способность воронок увеличивается с увеличением ширины щитка. Эти кривые приближенно могут быть представлены в следующем виде:

\* По данным Фокеева, а также по нашим опытам, такое расстояние дает наилучший эффект.



Фиг. 3.

$$\frac{G}{\rho_0 v_{cp}^3 R} = \frac{0,1}{F_r \left( 2,334 - 0,314 \frac{B}{R} \right)} \quad (4)$$

С дальнейшим увеличением ширины щитка-вихреобразователя пропускная способность воронок начинает падать. Для иллюстрации этого на фиг. 3 приведена кривая для ширины щитка вихреобразователя  $B=0,35b$  ( $\frac{B}{R}=3,0$ ). Как видно, начиная с некоторого значения числа Фруда, эта кривая располагается ниже кривых, принадлежащих к более узким щиткам вихреобразователям. Дальнейшим увеличением  $B$  кривые ложатся все ниже и ниже. Здесь эти данные не приведены.

Таким образом, приходим к выводу, что для достижения наибольшего эффекта в отношении повышения пропускной способности искусственных воронок нужно выбрать ширину щитка вихреобразователя, равную 0,3 ширины щитового отверстия.

Опыты, поставленные при разных режимах работы щитового отверстия, но с одним щитком-вихреобразователем шириной  $B=0,25b$  ( $B=5$  см) также дают положительный результат.

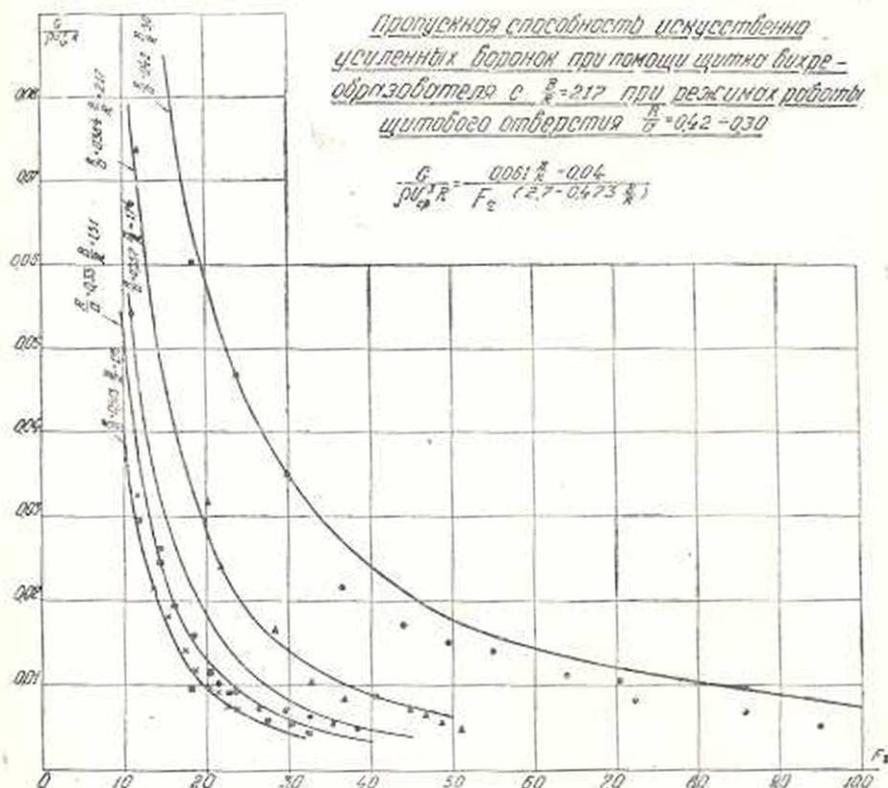
Эти кривые аналитически представляются следующим образом:

$$\frac{G}{\rho_0 v_{ср}^3 R} = \frac{0,935 \frac{R}{a} - 0,255}{F_r \left(4,75 - 8,25 \frac{R}{a}\right)} \quad (5)$$

или

$$\frac{G}{\rho_0 v_{ср}^3 R} = \frac{0,061 \frac{B}{R} - 0,141}{F_r \left(2,69 - 0,46 \frac{B}{R}\right)} \quad (6)$$

Кривые (5) и (6) также достаточно хорошо ложатся на опытные точки (фиг. 4); среднеквадратичное отклонение составляет 3—6%.



Фиг. 4.

Полученные соотношения (2), (4), (5) и (6) позволяют определить пропускную способность воронок, когда в качестве плавающего твердого тела использованы древесные опилки.

Для перехода от этих данных к пропуску другого материала  $G_1$

с другим объемным весом  $\gamma_1$ , предварительные теоретические соображения позволяют рекомендовать соотношение:

$$\bar{G}_1 = \left( 1 + \frac{\gamma_0}{\gamma} \cdot \frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_0} \right) G, \quad (7)$$

где  $\gamma$  и  $G$  — объемный вес и весовой расход опилок, определенный одним из выражений (3), (4), (5), (6).

### Резюме

Исследование воронкообразования в гидротехнических сооружениях представляет большой практический интерес.

В условиях отсутствия теоретического решения поставленной задачи в настоящей работе сделана попытка экспериментального определения пропускной способности воронок, образованных как при естественном истечении воды из-под щита, так и при их искусственном усилении с помощью обтекания щитков-вихреобразователей.

Полученные безразмерные соотношения (3), (4), (5) и (6) вместе с (7) позволяют рекомендовать их для ориентировочных расчетов, а также для моделирования пропускной способности воронок по числу Фруда и отношению  $\frac{R}{a}$ .

Среднеквадратичное отклонение предложенных соотношений (3, 4, 5, 6) от экспериментальных точек находится в пределах 3—5%.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 10 II 1954.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Гибсон А. С. Гидравлика и ее приложения, 1934.
2. Бахметев Б. А. Гидравлика, 1932.
3. Шапов Н. М. Исследования Сызранской ГЭС, 1931.
4. Шакунов Л. Н. Метод борьбы с воронкообразованием над затопленными входными отверстиями гидротехнических сооружений. Известия НИИГ, т. XXIII, 1938.
5. Халпахчян А. Х. Воронкообразование в напорных водоприемниках гидростанций (кандидатская диссертация), 1939.
6. Исаакян С. М. Воронкообразование перед забральными стенками водоприемников гидротурбинных установок (канд. диссертация), 1948.
7. Фокеев Г. С. Некоторые свойства устойчивой вихревой воронки. Гидротехническое стр-во, № 5, 1951.
8. Гриднев И. Д. и Победимский А. Л. Пропуск шуги через турбины с помощью вихревых воронок. Гидротехническое стр-во, № 6, 1952.
9. Василишин Т. М. О моделировании воронкообразования. Гидротехническое стр-во, № 8, 1953.
10. Исаакян (Матинян). Метод измерения пространственного поля скоростей в неустановившемся потоке в условиях воронкообразования. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VIII, № 2, 1955.

## Մ. Մ. Իսահակյան (Մատինյան)

ԶԱԳԱՐՆԵՐԸ ՀԻԴՐՈՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐՈՒՄ  
ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԹՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիդրոտեխնիկական կառուցվածքներում ձագարաառաջացման ուսումնասիրությունը կիրառական մեծ նշանակություն ունի:

Հողվածում փորձ է արվում, քննարկվող խնդրի տեսական լուծման բացակայության պայմաններում, որոշելու վանանների տակից ջրի արտահոսման ժամանակ առաջացող ձագարների թողունակությունը:

Քննարկված են ինչպես բնական ձագարաառաջացման, այնպես էլ արհեստականորեն նրա ակտիվացման (չրջհոսվող վանանիկների միջոցով) դեպքերը:

Ստացված են 3, 4, 5, 6, 7 ասնչությունները, որոնք հնարավորություն են տալիս էֆեկտիվ դարձնելու լողացող մարմինները հիդրոտեխնիկական կառուցումներից հեռացնելու խնդրի լուծումը: Քանի որ այս ասնչությունները ներկայացված են չափում չունեցող կոմպլեքսների միջոցով, ուստի նրանք հնարավորություն են տալիս նույնպես հեշտությամբ մոդելացնելու երևույթը: Սա հատկապես կարևոր է խնդրի տեսական լուծման բացակայության պայմաններում:

Բերված ասնչությունների միջին քառակուսային շեղումը փորձնական կետերից կազմում է  $3-6\%$ :

В. Н. Хостикян

## Распределение среднегодового суммарного стока половодья на территории Армянской ССР

Процессы стока в период половодья обуславливаются конкретными физико-географическими условиями данной территории, а его объем является конечным результатом стоковой деятельности рассматриваемого водосбора за определенный промежуток времени. Поэтому объем половодного стока рассматривается в качестве суммарной характеристики для речных бассейнов, учитывающей как поверхностный и подземный приток, так и потери воды.

Общезвестно, что максимальные расходы находятся в довольно тесной связи с объемами стока за половодье, которая нередко характеризуется довольно высоким коэффициентом корреляции, достигающим иногда до 0,90 и больше. Объем половодного стока является не только генетически обоснованным, хорошим фактором максимальных расходов, но и удобным параметром для расчетных зависимостей, так как при приведении к единице водосборной площади

$$\left( \bar{q}_{\text{пол}} \text{ л/сек-км}^2 \text{ или } h_{\text{пол}} = \frac{\bar{q}_{\text{пол}}}{k} \text{ мм} \right)$$

он не нуждается в редукции и сравнительно легко поддается географической интерполяции. Наконец, большим преимуществом объема половодного стока, как основного аргумента, является и то, что сток в период половодья с достаточной точностью измеряется гидрометрическими методами и относительно точно вычисляется при обработке данных гидрометрических наблюдений.

Для определения величины  $h_{\text{пол}}$  (в миллиметрах) автором была составлена карта с изолиниями среднего многолетнего стока половодья для всей территории Армянской ССР. При составлении указанной карты были использованы материалы гидрометрических наблюдений по 60 створам, обладающим надежными гидрометрическими данными по стоку и расположенным в различных физико-географических районах республики.

Вычисление значений высоты слоя суммарного стока половодья производилось следующим образом: сначала на миллиметровой бумаге строились гидрографы половодья почти для всех основных створов

сравнительно крупных и средних рек Армянской ССР, по средним декадным данным гидрометрических наблюдений за имеющийся период — в среднем за 15—20 лет. При помощи этих гидрографов было выяснено, что почти во всех речных бассейнах начало половодного периода совпадает с 15 марта, а конец, в среднем, — с 15 июля. Указанный период нами и был принят за период половодья на рассматриваемой территории. Потом вычислялись средние расходы воды за период половодья. Переход от средних секундных расходов к средне-многолетнему стоку за половодный период, отнесенному к 1 км<sup>2</sup> водосборной площади, осуществлялся по формуле:

$$\bar{q}_{\text{пол}} = \frac{10^9 \cdot \bar{Q}_{\text{пол}}}{F} \text{ л/сек-км}^2. \quad (1)$$

Значения  $\bar{q}_{\text{пол}}$  потом были перечислены в высотах слоя стока по известной формуле:

$$h_{\text{пол}} = \frac{\bar{q}_{\text{пол}}}{K}, \quad (2)$$

где  $K$  — коэффициент размерности, равный для четырехмесячного периода половодья 10,54.

Составление карты с изолиниями слоя среднего многолетнего стока половодья (параметр  $h_{\text{пол}}$ ) так, чтобы она с достаточной точностью отображала действительную картину распределения стока половодья по территории, разумеется, связано с большими трудностями и особенно в сложных физико-географических условиях горной страны, какой является Армянская ССР.

Одной из характерных особенностей большинства рек Армении является то, что вследствие сильной вертикальной расчлененности территории, а также иногда благодаря коренным различиям между отдельными ее частями в отношении геологического строения, их бассейны делятся на две зоны — многоводную и маловодную (активную и пассивную). В условиях рассматриваемой территории активные зоны бассейнов преимущественно расположены в верхних течениях, но нередко наблюдается и обратная картина, когда сильно трещиноватые вулканические лавы в верхнем течении инфильтрируют значительную часть поверхностного стока, за счет которой река потом получает дополнительное грунтовое питание в среднем или нижнем своем течении (реки Касах, Ташир).

Для того, чтобы указанные особенности были отображены на карте с изолиниями стока половодья достаточно детально, автором были вычислены слои стока половодья не только для водосборов основных створов, но и при наличии нескольких постов на одной и той же реке и для участков между этими постами, что позволяло проследить за изменением стока половодья по длине реки.

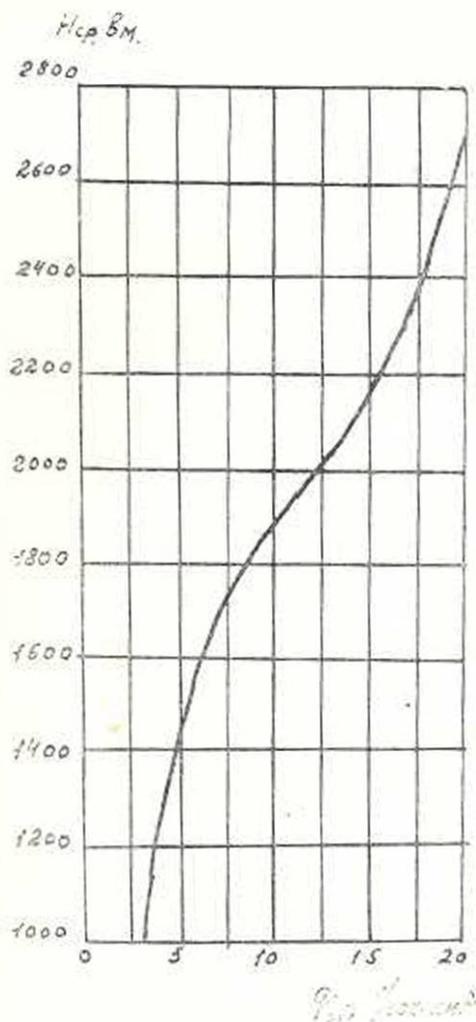
Вычисленные таким образом величины слоя стока половодья пред-

варительно были выписаны как у центров соответствующих бассейнов основных створов, так и у центров водосборных площадей между соседними створами.

При проведении изолиний слоя стока за половодье был применен метод криволинейной интерполяции, учитывая влияние вертикальной зональности на половодный сток в тех районах, где была обнаружена определенная связь стока от средней высоты бассейна над уровнем моря. С этой целью нами были использованы очень ценные исследования Б. Д. Зайкова. На фиг. 1 приведена заимствованная у Б. Д. Зайкова [1] зависимость среднего годового стока от средней высоты бассейна для рек северных районов Армении (бассейн р. Куры). На основе имеющихся в нашем распоряжении данных гидрометрических наблюдений мы построили график связи между средним годовым и среднемноголетним стоками за половодный период для рек тех же районов (см. фиг. 2).

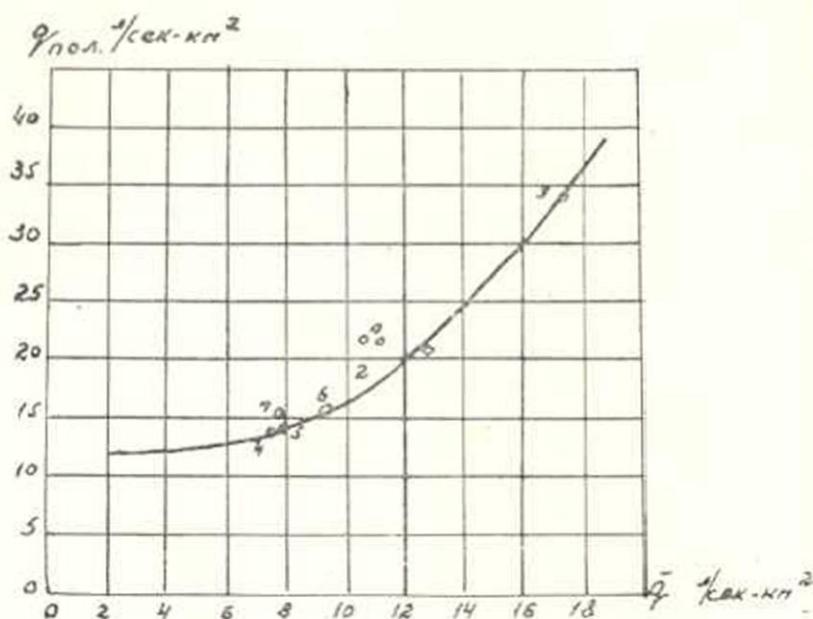
При помощи указанных двух кривых зависимостей (фиг. 1 и 2) был осуществлен переход к зависимости среднего стока половодья от средней высоты бассейна. Графическое изображение этой зависимости приведено на фиг. 3, где контрольные четыре точки (средние высоты тех бассейнов, которые имелись в нашем распоряжении) свидетельствуют как о наличии действительности подобной зависимости между средним годовым стоком и средней высотой бассейна рек этого района, выявленной Б. Д. Зайковым, так и о достаточной точности построений при осуществлении перехода графическим путем от одной зависимости к другой.

При проведении изолиний необходимые поправки, учитывающие различия стока половодья на различных высотных зонах, были внесены при помощи соответствующих градиентов, снятых из указанного гра-



Фиг. 1. Зависимость среднего годового стока от средней высоты бассейна для рек северной части Армянской ССР по Б. Д. Зайкову.

фика (фиг. 3). В результате нам удалось с достаточной точностью для практики графически обобщить имеющиеся данные гидрометрических наблюдений по стоку за половодный период путем построения карты с изолиниями среднегодовое стока половодья в виде слоя стока на территории Армянской ССР.



Фиг. 2. Связь между средним годовым и половодным (за период с 15/III по 15/VIII) стоками рек северной Армении (бассейн р. Куры). 1. р. Дзоррагет у г. Степанаван; 2. р. Дзоррагет у с. Гергерки; 3. р. Памбак у с. Налбан; 4. р. Памбак у с. Мегрут; 5. р. Памбак у с. Колагеран; 6. р. Дебет у кур. Ахталы; 7. р. Акстафа у г. Иджеван; 8. р. Акстафа у г. Дилижан.

Правильность построения изолиний проверялась планиметрированием площадей между изолиниями и определением стока по отдельным речным бассейнам и сравнением их с фактическими гидрометрическими данными. Полученная таким образом карта с изолиниями среднегодовое стока половодья в виде слоя стока приведена на фиг. 4.

Как видно из приведенной карты, в физико-географических условиях такой горной страны, какой является рассматриваемая территория, изолинии не должны обязательно быть плавными и в действительности не являются такими. Они здесь дают крутые изгибы, а иногда и разрывы. В некоторых районах наблюдаются даже скачки через последующие значения изолиний и т. д.

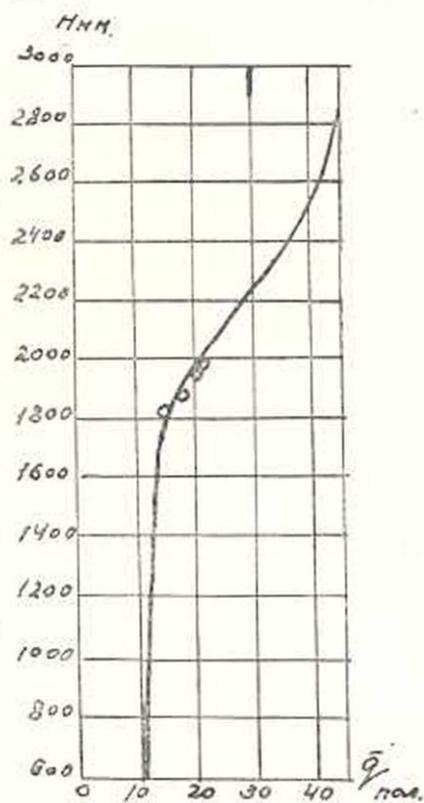
Предлагаемая карта в общих чертах дает вполне определенное представление о закономерностях распределения объема среднегодовое стока половодья на территории Армянской ССР. На карте

не трудно заметить вполне закономерное возрастание объема суммарного половодного стока в направлении от низовий к вершинам отдельных гор и к водоразделам горных хребтов.

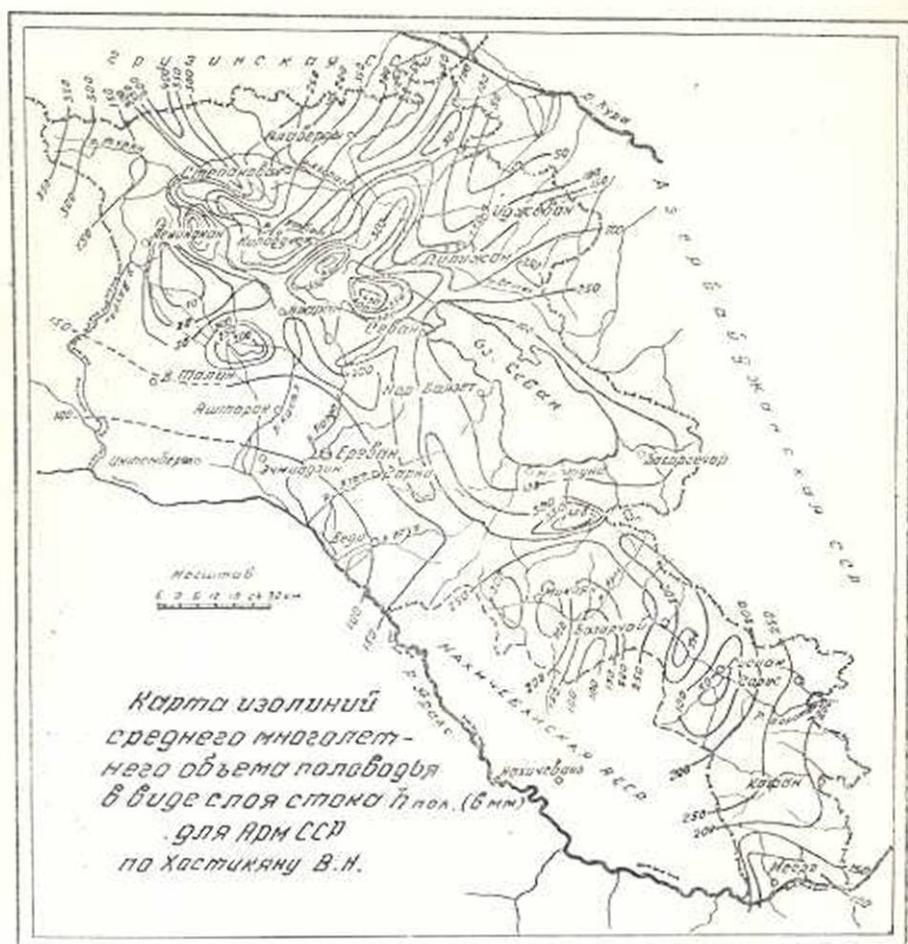
Наиболее значительным объемом весеннего стока особенно выделяются высотные зоны Памбакского хребта (бассейны рек Тандзут, Гомур и р. Памбак у п. Налбанд), вершины Мокрых гор, а также восточные оконечности Южно-Севанского хребта (бассейн р. Варденик), где слой стока в период половодья достигает 400—450 мм. Несколько меньший сток половодья (около 300—350 мм) наблюдается на Гегамском (Агмаганском) хребте, на острогах Зангезурского и Карабахского хребтов (бассейн р. Воротан у п. Ангехакот), а также и в высокогорных районах восточных склонов массива Арагац, где расположен бассейн маленькой реки Гехарот.

Значительный по своей величине объем стока половодья в бассейнах указанных выше рек объясняется, во-первых, тем, что ветры, постоянно сдувая с горных вершин большое количество зимних осадков в воронки и кратеры, создают здесь мощные снеготопивые запасы к началу снеготаяния, во-вторых, в высотных зонах этих хребтов в весенний период выпадают обильные дождевые осадки, которые, накладываясь на талые воды, увеличивают суммарный объем стока половодья.

Совершенно исключителен по своей незначительности удельный сток половодья на северо-западных склонах массива Арагац, в бассейне реки Карангу, где слой стока за половодье не превышает 20 мм. Необычайная маловодность рек Карангу и Касах, бассейны которых расположены соответственно на северо-западных, северо-восточных и восточных склонах Арагаца, а также маловодность юго-западной части республики связаны с происхождением вод реки Сев-Джур, имеющей исключительно грунтовое питание. Геологические условия массива Арагац позволяют предполагать, что поверхностные воды здесь просачиваются в толщу трещиноватых вулканических пород и, не доходя до современных русел рек Ахурян и Касах, поворачивают на юго-запад, выходят на дневную поверхность в районе озера Айгр-лич и



Фиг. 3. Зависимость среднего многолетнего половодного стока (за период с 15/III по 15/VII) от средней высоты бассейна для рек северной части Армянской ССР.



Фиг. 4.

образуют мощную ( $Q_{\text{ср.}} = 20 \text{ м}^3/\text{сек}$ ) реку Сев-Джур (подробнее об этом см. [2]).

Изолинии среднемноголетнего стока половодья в районе бассейна р. Сев-Джур ввиду его грунтового происхождения проведены пунктирными линиями (фиг. 4).

Армянский сельскохозяйственный  
институт

Поступило 20 VI 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Зайков Б. Д. Средний сток и его распределение в солу на территории Кавказа. Гидрометеонздат, Ленинград, 1946.
- 2 Давидов В. К. и Владимирова Л. А. Основные контуры водного баланса Армении. Записки ГГИ, том X, 1933.

Վ. Կ. ԽՈՍՏԻԿՅԱՆ

ԳԱՐՆԱՆԱՅԻՆ ՎԱՐԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱԶՄԱՍՅԱ  
ՄԻՋԻՆ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀՈՍՔԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ-Ի  
ՏԵՐԻՏՈՐԻԱՅՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուժ արվում են Հայկական ՍՍՌ-ի գետերի մի շարք հիդրոլոգիական առանձնահատկությունները բերվում է գարնանային վարարումների բաղմամբ միջին քնդհանուր հոսքի խզողների քարտեզը, որի օգնությամբ հնարավոր է կատարել համապատասխան հիդրոլոգիական հաշվարկներ սեպտեմբերիկայի շուսուսնասիրված գետերի ավազաններում հիդրոտեխնիկական առարկեր կառուցվածքներ և ջրամբարներ նախագծելիս:

Հոգիածուժ կապ է ստեղծվում նաև գարնանային վարարումների բաղմամբ միջին հոսքի և ավազանի միջին բարձրություն միջև Հայկական ՍՍՌ-ի հյուսիսային շրջանների գետերի համար:

А. К. Анания

**Ответ на статью Г. А. Амбарцумяна „Некоторые замечания по поводу статьи А. К. Ананияна „О пропускной способности двухъярусных водосбросов“**

[Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 2, 1954]

Основные возражения Г. А. Амбарцумяна по поводу моей статьи „О пропускной способности двухъярусных водосбросов“ [1] сводятся к следующему:

1. Замена действительного закона распределения давления на плоский щит верхнего яруса водосброса (см. рис. 4 нашей работы [1])— гидростатическим приводит к недопустимым погрешностям.

2. При определении максимума эжекционного эффекта нами использовано условие  $\frac{dh_d}{dy_n} = 0$  (см. [1], стр. 231), что, по мнению Г. А.

Амбарцумяна, не решает поставленной задачи.

В нашей работе [1], при решении вопросов гидравлики двухъярусных водосбросов, необходимо было выяснить: образуется ли воздушное пространство под струей в нижнем бьефе после слияния донных и поверхностных потоков или нет (см. рис. 4 нашей работы [1]).

При решении этой задачи мы воспользовались теоремой импульсов. Выбор контрольной поверхности и эпюры действующих сил на выделенный отсек приведены на рис. 4 работы [1].

При применении теоремы импульсов, контрольную поверхность стремились провести так, чтобы силы, действующие на щит водосброса верхнего яруса, составляли незначительную долю от суммы остальных сил, действующих на остальную часть контура контрольной поверхности.

При этих условиях ясно, что ошибка, которую мы допускаем при вычислении суммарного давления на плоский щит, не может чувствительно отразиться на конечных результатах.

В этом совершенно не трудно убедиться при внимательном анализе постановки нашей задачи и эпюр сил, приведенных на рис. 4 [1].

Это положение нетрудно проверить также и на частном примере; необходимые для расчета данные приведены на рис. 9 [1].

Из этого примера видно, что горизонтальное давление на щит верхнего яруса водосброса равняется 4,8 т, а равнодействующая всех остальных сил (на ту же горизонтальную ось) равняется 75,7 т.

Но так как в нашей окончательной расчетной формуле (см. формула (9) в работе [1]) под корень входит разность указанных выше сил, то ясно, что ошибка, допускаемая при определении давления на щит, весьма незначительно будет отражаться на конечных результатах. Необходимо отметить, что максимальная ошибка, которую мы можем допустить при определении давления на плоский щит, судя по данным экспериментов Качановского (см. М. М. Гришин, Курс гидротехнических сооружений, часть I, 1947., стр. 448) составляет всего лишь 13<sup>0</sup>/<sub>0</sub>.

Оценка величины ошибки, которая приводится в статье Г. А. Амбарцумяна [2], относится к случаю, который не имеет никакого отношения к рассматриваемой нами задаче. Одно и то же допущение, принимаемое при решении различных задач, может совершенно различно отразиться на точности конечных результатов.

В нашей задаче пропускная способность донных отверстий определена по формуле (13) (см. [1], стр. 232), которая, как известно, выводится из закона живых сил, а не из теоремы импульсов, потому что для этой задачи неточное вычисление давления на щит может чувствительно отразиться на конечных результатах (конечно при определенных открытиях отверстий).

Пользуясь случаем, сделаем некоторые замечания по поводу анализа Г. А. Амбарцумяна [2] и относящихся к задаче истечения жидкости из-под щита.

Конечно, нет сомнения, что теоремы импульсов и живых сил в применении к задаче истечения жидкости из-под щита могут привести к одинаковым результатам только в том случае, если мы сумеем точно учесть работу всех внешних и внутренних сил. Попытка Г. А. Амбарцумяна теоретически оценить ошибку, допускающуюся при определении величин скоростей для любых открытий щита, заменяя действительный закон распределения давления на щит — гидростатическим, весьма условна.

Действительно, при правильном применении теорем импульсов (при этом попрежнему принимается, что давление на щит распределяется по гидростатическому закону) и живых сил, мы приходим к следующим двум уравнениям:

$$v_2 = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon \alpha_{ж, \lambda_2}} \left[ H - \frac{a}{2} (1 + \varepsilon^2) + \frac{H v_1^2}{g a} \alpha_{ж, \lambda_1} - \frac{\tau L_x}{\gamma a} \right]} \quad (1)$$

$$v_2 = \frac{\varphi_c}{\alpha_{ж, c_2}} \sqrt{\left( H + \frac{\alpha_{ж, c_1} v_0^2}{2g} - ac \right)} \quad (2)$$

Зависимости (1) и (2) приводятся к уравнениям Г. А. Амбарцумяна только в том случае, если принимать, что  $\alpha_{k, z_1} = \alpha_{k, z_2} = 1$ ,  $\alpha_{k, c_1} = \alpha_{k, c_2} = 1$ ,  $\varphi_c = 1$  и  $\tau = 0$ .

Многочисленные эксперименты показывают [3], [4], [5], что ни одна из этих величин не удовлетворяет написанным выше условиям. Принятые условия  $\alpha_{k, z_1} = \alpha_{k, z_2} = \alpha_{k, c_1} = \alpha_{k, c_2} = \varphi_c = 1$  и  $\tau = 0$  могут привести к таким же погрешностям, какие получаются при замене действительного давления на щит гидростатическим.

Перехожу к возражению по второму пункту.

Для установления максимального эжекционного эффекта применительно к двухъярусным водосбросам нами [1] использовано условие

$\frac{dh_d}{dy_n} = 0$ . Это условие, как указано в [1], взято из работ [6] и [7], где

дается его теоретический и экспериментальный анализ. Вкратце изложим то общее положение, которым надо руководствоваться при

оценке условия  $\frac{dh_d}{dy_n} = 0$ .

Когда мы говорим об эжекционном эффекте на двухъярусных водосбросах, то под ним мы понимаем разность тех пьезометрических напоров, которые получаются в выходном отверстии донного водосброса при одновременной и раздельной работе поверхностных и донных водосбросов. Разумеется, что при этом глубина воды в нижнем бьефе остается постоянной, так как при одновременной и отдельной работе указанных водосбросов суммарный расход воды остается постоянным.

Очевидно, что положение уровня воды в нижнем бьефе существенно может отразиться на величине пьезометрического напора у выходных отверстий донного водосброса.

Уровень воды в нижнем бьефе в свою очередь зависит от отметки дна водовода в нижнем бьефе. Таким образом, мы видим, что

$\frac{dh_d}{dy_n} = 0$  выражает определенную связь между глубиной воды (от-

меткой дна) в нижнем бьефе и пьезометрическим напором у выходных отверстий донного водосброса.

Подробный анализ критерия  $\frac{dh_d}{dy_n} = 0$  и доказательство того по-

ложения, что удовлетворение этого условия может привести к максимальному эжекционному эффекту, даются в работах [6] и [7].

Возражение Г. А. Амбарцумяна, что глубина колодца не отражается на пьезометрическом напоре непосредственно у выходных отверстий донного водосброса, является следствием неправильного понимания того положения, что, говоря о глубине колодца, мы соответствующим образом учитываем и высотное расположение для нижнего бьефа.

Необходимо отметить, что возражение Г. А. Амбарцумяна по поводу условия  $\frac{dh_d}{dy_n} = 0$  имеет принципиальное значение, и поэтому стоит к нему возвратиться, если автор сумеет теоретически или экспериментально доказать правоту своих сомнений.

Введение Г. А. Амбарцумяном поправки в формулу „д“ (см. работу [2]) в виде члена  $\frac{P_0 - P}{\gamma}$  является ошибочным, так как наличие под струей разреженной зоны, но при наличии в верхнем и нижнем бьефах свободной поверхности, ни в коем случае не может изменить фактически действующий напор (точнее говоря полную энергию потока в верхнем бьефе над отверстием щита).

Учет влияния разрежения на пропускную способность отверстий может быть произведен путем введения поправки в коэффициент расхода системы, как это обычно делается на практике для вакуумных водосливов [8].

Наконец, условие, ограничивающее размер вакуума под струей, выражающееся формулой (в) (см. работу [2]), также является ошибочным, так как общеизвестно, что напряженные состояния потока, находящегося в покое и в движении, резко отличаются друг от друга.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 21 IX 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананян А. К.* О пропускной способности двухъярусных водосбросов. Известия АН АрмССР, том III, № 3, Ереван, 1950.
2. *Амбарцумян Г. А.* Некоторые замечания по поводу статьи А. К. Ананяна „О пропускной способности двухъярусных водосбросов. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 2, 1954.
3. *Павловский Н. Н.* Гидравлический справочник. М. — Л., 1937.
4. *Евреинов В. Н.* Гидравлика. М. — Л., 1947.
5. *Вызго М. С.* О местном размыве за горизонтальным креплением и падающей струей. „Гидротехническое строительство“, № 5, 1954.
6. *Вейц И. И.* Основные задачи соединения двух потоков (плоская задача). Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, т. 32, Ленинград, 1947.
7. *Кумин Д. И.* Максимальный эжекционный эффект в водосливных гидростанциях. Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, том 44, Ленинград, 1951.
8. *Агроскин И. И., Димитриев Г. Т., Иванов А. И., Пикалов Ф. И.* Гидравлика. Госэнергоиздат, М. — Л., 1944.