

М. М. Джрбашян

Оценки для производных целых функций конечного порядка и нормального типа

В настоящей работе производятся оценки для производных целых функций произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и нормального типа, ограниченных в угловых областях комплексной плоскости. Эти оценки будут иметь существенное значение для установления обратных теорем о наилучшем приближении целыми функциями в угловых областях.

1°. Некоторые предварительные леммы

Приводим некоторые леммы, которые понадобятся нам для доказательства основной теоремы настоящей работы.

Лемма 1. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и типа σ , для которой

$$\sup_{|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty. \quad (1.1)$$

Для любого $c (0 \leq c < +\infty)$ на кривой $\Gamma_\rho(c)$ с параметрическим уравнением $r^\rho \cos \rho\theta = c$ ($|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}$) имеет место оценка

$$|f(re^{i\theta})| \leq Me^{c\sigma}. \quad (1.2)$$

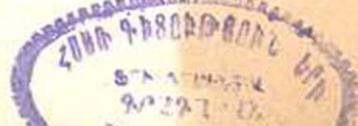
Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно малое фиксированное число. Рассмотрим функцию

$$F_\varepsilon(z) = f(z)e^{-(\sigma + \varepsilon)z^\rho},$$

где z^ρ обозначает ту однозначную и аналитическую в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ ветвь функции z^ρ , которая принимает положительное значение при действительном положительном z .

Ясно, что при $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$,

$$|F_\varepsilon(z)| \leq M.$$



Но при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти число $r_\varepsilon > 0$ так, чтобы имели

$$|f(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p}$$

при $|z| > r_\varepsilon$. Поэтому при $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$ и $|z| > r_\varepsilon$,

$$|F_\varepsilon(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p} e^{-(z+\varepsilon)|z|^p \cos(\arg z)}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |F_\varepsilon(x)| \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{2}x} = 0.$$

Обозначим $M' = \sup_{0 < x < \infty} |F_\varepsilon(x)|$. Но при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем

$$|F_\varepsilon(z)| \leq e^{\left(z + \frac{\varepsilon}{2}\right)|z|^p},$$

поэтому в угле $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2\rho}$ с раствором $\frac{\pi}{2\rho}$ функция $F_\varepsilon(z)$ растёт как $e^{|z|^p}$, а на его сторонах ограничена.

Отсюда, по теореме Фрагмен-Линделёфа, следует, что

$$\sup_{0 < \arg z < \frac{\pi}{2\rho}} |F_\varepsilon(z)| \leq \max\{M, M'\} = M'.$$

Аналогично можно доказать, что

$$\sup_{-\frac{\pi}{2\rho} < \arg z < 0} |F_\varepsilon(z)| \leq M''.$$

Поэтому из двух последних неравенств получим

$$|F_\varepsilon(z)| \leq M''$$

при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Покажем, что $M'' = M$. Действительно, если $M' = M''$, то $F_\varepsilon(z)$ принимает значение M' в некоторой точке $x_0 > 0$ и по принципу максимума $F_\varepsilon(z)$ постоянна. Если же она достигается в точке $x = 0$, то $M' \leq M$ и $M'' = M$.

Если же $M' < M''$, то $M'' = M$. Поэтому во всех случаях

$$\sup_{|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}} |F_\varepsilon(z)| \leq M,$$

откуда следует оценка

$$|f(z)| \leq Me^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho \cos(\rho \arg z)}$$

Но так как $\varepsilon > 0$ произвольное число, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим:

$$\sup |f(z)| \leq Me^{\sigma|z|^\rho \cos(\rho \arg z)}$$

при $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Следовательно, на кривой $|z|^\rho \cos(\rho \arg z) = c$ для функции $f(z)$ получим оценку (1.1) леммы.

Нам для дальнейших целей необходимо изучить некоторые свойства кривой

$$\Gamma_\rho(c) \left\{ r^\rho \cos \rho \theta = c; \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad (0 \leq c < +\infty) \right.$$

при значениях параметра ρ , удовлетворяющих условию $\frac{1}{2} \leq \rho < +\infty$.

Заметим, что кривая $\Gamma_\rho(c)$ симметрична относительно вещественной положительной полуоси и лежит внутри угла $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$.

При частном значении $\rho = 1$ $\Gamma_1(c)$ совпадает с прямой $r \cos \theta = c$, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на расстояние c . При $\rho = \frac{1}{2}$ $\Gamma_{\frac{1}{2}}(c)$ совпадает с параболой

$$r = \frac{2c^2}{1 + \cos \theta}$$

Проведем нормаль к кривой $\Gamma_\rho(c)$ в ее точке $re^{i\theta}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}$ ($\frac{1}{2} \leq \rho < +\infty$). Обозначим через $R_\rho(\theta)$ длину отрезка указанной нормали, лежащей в области, ограниченной лучом $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$ и кривой $\Gamma_\rho(c)$. По причине симметричности $\Gamma_\rho(c)$ относительно луча $\theta = 0$, мы будем изучать свойства кривой $\Gamma_\rho(c)$, ограничиваясь лишь ее верхней половиной, определяемой из условия $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$.

Лемма 2. Функция

$$R_\rho(\theta) = \left[\frac{c}{\cos \rho \theta} \right]^{\frac{1}{\rho}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]} \quad (1.3)$$

в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ монотонно убывает, если $\rho > 1$ и монотонно возрастает, если $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$. При $\rho = 1$, $R_1(\theta) = c$.

Доказательство. Обозначим через ψ угол между касательной к кривой $\Gamma_\rho(c)$ в точке $re^{i\theta}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}$) и радиус-вектором той же точки.

Из уравнения $r^\rho \cos \rho\theta = c$ получим:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r}{r'} = \operatorname{ctg} \rho\theta,$$

поэтому

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \rho\theta. \quad (1.4)$$

Отсюда видно, что если $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2\rho}$, то $0 < \psi < \frac{\pi}{2\rho}$.

Рассмотрим треугольник, образованный лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$, радиус-вектором точки $re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta < \frac{\pi}{2\rho}$) кривой $\Gamma_\rho(c)$ и отрезком $R_\rho(\theta)$ нормали к кривой $\Gamma_\rho(c)$, проведенной в точке $re^{i\theta}$.

Если обозначим через $r_\rho e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ точку пересечения указанной нормали с лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$, то в вершинах 0 , $r_\rho e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$, $re^{i\theta}$ нашего треугольника соответствующие внутренние углы в силу (1.4) будут

$$\frac{\pi}{2\rho} - \theta, \quad \pi - \frac{\pi}{2\rho} - (\rho - 1)\theta, \quad \rho\theta.$$

Поэтому по теореме синусов имеем:

$$\frac{R_\rho(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)} = \frac{r_\rho}{\sin \rho\theta} = \frac{r}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta\right]}, \quad (1.5)$$

откуда, имея в виду, что на кривой $\Gamma_\rho(c)$

$$r^\rho \cos \rho\theta = c,$$

следует формула (1.3).

Из (1.3) после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{R_\rho(\theta)}{R_\rho(\theta)} &= -(\rho - 1) \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] + \operatorname{tg} \rho\theta - \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) = \\ &= -\operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] \left\{ \rho + \operatorname{tg} \rho\theta \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что так как при $\rho \geq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, имеем $0 <$

$\langle \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \rangle < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \frac{\pi}{2\rho} - \theta \leq \frac{\pi}{2}$; $R_\rho(\theta) \leq 0$ в интервале $(0, \frac{\pi}{2\rho})$, т. е. $R_\rho(\theta)$ монотонно убывает.

Если же $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, то при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\frac{\pi}{2\rho} \leq \frac{\pi}{2}$ и поэтому $\text{ctg} \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta \right] \leq 0$. Следовательно, для установления утверждения леммы о том, что $R_\rho(\theta)$ монотонно возрастает при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, достаточно показать, что

$$y(\theta) = \text{tg} \rho \theta \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) > -\rho$$

при указанных условиях.

Но при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $\text{tg} \rho \theta \geq 0$, а при $\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$, $\text{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) \geq 0$, поэтому достаточно лишь установить, что $y(\theta) > -\rho$ в интервале $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$.

Заметим, что $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 > -\rho$ и при $0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$, $y(\theta) < 0$, поэтому в некоторой внутренней точке θ_0 ($0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$) функция $y(\theta)$ достигает своего поминального значения, где мы должны иметь $y'(\theta_0) = 0$.

Но

$$y'(\theta) = \frac{\rho}{\cos^2 \rho \theta} \text{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right)} \text{tg} \rho \theta,$$

поэтому в точке θ_0 должны иметь

$$\frac{\sin \rho \theta_0}{\sin \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)} = -\rho \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)}{\cos \rho \theta_0}$$

и, следовательно,

$$\min y(\theta) = y(\theta_0) = -\rho \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_0 \right)}{\cos^2 \theta_0 \rho} = -\rho \frac{\cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0 \right)}{\cos^2 \theta_0 \rho}. \quad (1.7)$$

Так как $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2}$ и $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, то $0 < \rho\theta_0 < \frac{\pi}{2}$ и $\rho\theta_0 \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что

$$0 < \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \theta_0\right) \leq \cos\rho\theta_0. \quad (1.8)$$

Из (1.7) и (1.8) следует, что

$$\min_{\theta} R(\theta) \geq -\rho,$$

т. е. лемма полностью доказана.

В заключение заметим, что, таким образом, при

$$\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1 \quad \min_{0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}} R_\rho(\theta) = c^{1/\rho}$$

$$\text{при } \rho > 1, \quad \max R_\rho(\theta) = c^{1/\rho}. \quad (1.9)$$

Лемма 3. Пусть r_0 имеет тот же смысл, что и в лемме 2, тогда

$$r_0 = \left[\frac{c}{\cos\rho\theta} \right]^{1/\rho} \frac{\sin\rho\theta}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]}, \quad (1.10)$$

при этом $r_0 = r_0(\theta)$ монотонно возрастает в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ при любом $\rho \geq \frac{1}{2}$. В случае же, когда $\rho = \frac{1}{2}$, $r_0 = r \geq c$.

Доказательство. Формула (1.10) следует из (1.5) и из того, что на $\Gamma_\rho(c)$ $r^\rho \cos\rho = c$.

Из (1.10) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r_0'(\theta)}{r_0(\theta)} &= \rho \operatorname{ctg}\rho\theta + \operatorname{tg}\rho\theta - (\rho-1) \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right] = \\ &= -\rho \left\{ \operatorname{ctg}\rho\theta - \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right] \right\} + \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right] + \\ &+ \operatorname{tg}\rho\theta = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)}{\sin\rho\theta \sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]} \left[\rho + \operatorname{tg}\rho\theta \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right) \right]. \end{aligned}$$

Но при $\rho \geq \frac{1}{2}$ и $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем $0 < \frac{\pi}{2\rho} - \theta \leq \pi$, $0 \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta \leq$

$\leq \pi$, $0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}$. Наконец, в доказательстве леммы 2 было показано, что всегда при тех же условиях $\rho + \operatorname{tg} \rho \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta \right) \geq 0$. Поэтому $r'_0(\theta) \geq 0$, т. е. $r_0(\theta)$ монотонно возрастает в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2\rho} \right)$ при любом $\rho > \frac{1}{2}$.

Из (1.10) ясно также, что при $\rho = \frac{1}{2}$

$$r_0 = r = \left(\frac{c}{\cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 \geq c^2.$$

Лемма 4. Окружность с центром в точке $r_0(\theta)e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ и с радиусом $R_0(\theta)$ имеет с кривой $\Gamma_\rho(c)$ лишь одну общую точку $re^{i\theta}$.

Доказательство. Пусть $r_1e^{i\theta_1}$ произвольная точка кривой $\Gamma_\rho(c)$.

Обозначим $R = |r_0e^{i\frac{\pi}{2\rho}} - r_1e^{i\theta_1}|$.

Рассматривая треугольник с вершинами в точках $r_0e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$, 0 , $r_1e^{i\theta_1}$, будем иметь:

$$R^2 = r_0^2 - 2r_0r_1 \cos \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1 \right) + r_1^2.$$

Покажем, что R , как функции от точки $r_1e^{i\theta_1}$, достигает своего минимального значения $R_0(\theta)$ лишь в точке $re^{i\theta}$. Очевидно, это эквивалентно утверждению леммы.

Имеем:

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2r_1 - 2r_0 \cos \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1 \right) - 2r_0r_1 \sin \left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta_1 \right) \frac{d\theta_1}{dr_1}.$$

Но из уравнения $r_1^2 \cos \rho \theta_1 = c$ имеем:

$$r_1 \frac{d\theta_1}{dr_1} = \operatorname{ctg} \rho \theta_1,$$

и поэтому

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2 \left\{ r_1 - r_0 \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta_1 \right]}{\sin \rho \theta_1} \right\}. \quad (1.11)$$

Обозначим через $r_{1,0}e^{i\frac{\pi}{2\rho}}$ точку пересечения нормали к кривой

$\Gamma_\rho(c)$ в точке $r_1 e^{i\theta_1}$ с лучом $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$. По формуле (1.10)

$$r_{1,0} = r_1 \frac{\sin \rho \theta_1}{\sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)\theta_1 \right]} \quad (1.12)$$

и, следовательно, из (1.11) и (1.12) следует, что

$$\frac{dR^2}{dr_1} = 2r_1 \left(1 - \frac{r_0}{r_{1,0}} \right).$$

Но по лемме 3 $r_{1,0} = r_{1,0}(\theta_1)$ — монотонно возрастающая функция от θ_1 , поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dR^2}{dr_1} < 0 & \quad \text{при } \theta_1 < \theta, \\ \frac{dR^2}{dr_1} > 0 & \quad \text{при } \theta_1 > \theta, \end{aligned}$$

при этом

$$\left. \frac{dR^2}{dr_1} \right|_{r_1=c} = 0.$$

Это значит, что функция R^2 имеет абсолютный минимум лишь в точке $\theta = \theta_1$ и, очевидно, что $\min R = R_\rho(\theta)$.

Отметим, что, когда $\rho = \frac{1}{2}$, окружность с центром в любой точке x_0 луча $-\infty < x \leq 0$ и с радиусом c^2 не пересекается с параболой $r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} = c$, если $x_0 > 0$, а при $x_0 = 0$ соприкасается с нею в единственной точке $(c^2, 0)$.

Пусть $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$ ($r_0 > 0$) произвольная точка, находящаяся на лучах $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\rho}$. Опишем вокруг точки $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$ окружность K_R произвольного радиуса $R > 0$. По лемме 4 в семействе кривых $\{\Gamma_\rho(c)\}$ ($0 \leq c < +\infty$) существует единственная кривая $\Gamma_\rho[c(R)]$, соприкасающаяся с нашей окружностью. Обозначим через $re^{i\theta}$ указанную точку соприкосновения.

Лемма 5. а) При $r_0 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$R \geq c(R) r_0^{1-\rho} m_0. \quad (1.13)$$

б) При $r_0 > 0$, $\rho > 1$

$$R \geq \frac{c(R)}{[r_0 + |c(R)|^{1/\rho}]^{\rho-1}} m_0. \quad (1.14)$$

где

$$m_0 = \min_{0 < \theta < \frac{\pi}{2\rho}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \theta\right)}{\cos\rho\theta \sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)\theta\right]} > 0. \quad (1.15)$$

в) При $r_0 = 0, \rho > \frac{1}{2}$

$$R = [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}. \quad (1.16)$$

Доказательство. а) Пусть $r_0 > 0, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$. По лемме 4 для числа $R = R_\rho(\theta)$ имеем значение

$$R_\rho(\theta) = r \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\theta|\right)}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]}. \quad (1.17)$$

Из (1.17), если заметим, что на нашей кривой $\Gamma_\rho[c(R)], r^\rho \cos\rho\theta = c(R)$, будем иметь:

$$R_\rho(\theta) = c(R)r^{1-\rho} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\theta|\right)}{\cos\rho\theta \sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]} > c(R)r^{1-\rho} m_0. \quad (1.18)$$

Покажем, что при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$,

$$r_0 \leq r. \quad (1.19)$$

Действительно, из (1.5) имеем:

$$r_0 = r \frac{\sin\rho|\theta|}{\sin\left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta|\right]}. \quad (1.20)$$

Из (1.20) вытекает, что при $\rho = \frac{1}{2}$ всегда $r_0 = r$. Предположим теперь, что $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, тогда для $0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ имеем:

$$0 \leq \rho|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2\rho} + (\rho-1)|\theta| \leq \frac{\pi}{2\rho} \leq \pi.$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$0 \leq \rho|\theta| \leq \pi - \frac{\pi}{2\rho} - (\rho-1)|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$$

и поэтому

$$\sin \varphi |b| \leq \sin \left[\frac{\pi}{2\rho} + (\rho - 1)|b| \right].$$

Отсюда и из (1.20) вытекает утверждение (1.19).

Из (1.18) и (1.19), в силу того, что $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$, получим требуемую оценку (1.13).

б) Пусть $r_0 > 0$, $\rho > 1$. Рассматривая треугольник с вершинами в точках 0 , $r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}$, $re^{i\theta}$, находим

$$r \leq r_0 + R_\rho(\theta) \leq r_0 + R_\rho(0) = r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (1.21)$$

так как по лемме 2

$$\max_{|\theta| < \frac{\pi}{2\rho}} R_\rho(\theta) = R_\rho(0) = [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}.$$

Из (1.18) и (1.21) получим:

$$R \geq \frac{c(R)}{[r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}}]^{\rho-1}} m_0.$$

т. е. оценку (1.14) леммы.

в) При $r_0 = 0$, $\rho > \frac{1}{2}$, очевидно, что $R^{\rho} = c(R)$.

Таким образом лемма полностью доказана.

2°. Основная теорема об оценке производных целых функций

В настоящем пункте, используя результаты предыдущих лемм, мы приведем оценки для производных целых функций.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho < \frac{1}{2}$ и нормального типа λ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty, \quad (2.1)$$

а) Если $r_0 > 0$, то при $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{M \Lambda_k}{r_0^{k(1-\rho)}} \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

где

$$A_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{m_0 k} \right)^k (1 + e^k).$$

б) Если $r_0 > 0$, то при $\rho > 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq MB_k \left\{ \left[r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{\rho-1} \right\}^k \sigma^k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.3)$$

где

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{km_0} \right)^k (1 + e^k).$$

в) При $\rho > \frac{1}{2}$

$$|f^{(k)}(0)| \leq MC_k \sigma^{\frac{k}{\rho}}, \quad (2.4)$$

где

$$C_k = \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}.$$

Доказательство. Пусть $c (0 \leq c < +\infty)$ — заданное число. По лемме 1 на кривой $r^\rho \cos \rho \theta = c$ имеем:

$$|f(re^{i\theta})| \leq Me^{cs}. \quad (2.5)$$

Обозначим через $c(R)$, то значение параметра c , при котором кривая $r^\rho \cos \rho \theta = c(R)$ соприкасается с окружностью $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$. По формуле Коши для любого $k > 1$ и $r_0 > 0$ имеем:

$$f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R} \frac{f(z)}{\left(z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{k+1}} dz, \quad (2.6)$$

откуда следует оценка

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2\pi R^k} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| d\theta. \quad (2.7)$$

Но по условию (2.1) теоремы на той части окружности $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$, которая лежит в угле $|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}$, имеем, что

$$|f(Re^{i\theta} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq M. \quad (2.8)$$

С другой стороны, на дуге окружности $|z - r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}| = R$, лежащей в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho}$ в силу (2.5), очевидно, имеем:

$$|f(\operatorname{Re} i^{\rho} + r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq M e^{s(R)}. \quad (2.9)$$

Из (2.7), (2.8) и (2.9) вытекает, что

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2R^k} [1 + e^{s(R)}] M \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

и

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2R^k} \left[2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{s(R)} \right] M \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (2.10')$$

а) Пусть $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ и $r_0 > 0$. Из неравенства (1.13) леммы 5 и из неравенства (2.10) следует оценка

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2\rho} \frac{1}{|c(R) m_0 r_0^{1-\rho}|^k} [1 + e^{s(R)}] M \quad (k \geq 1). \quad (2.11)$$

До сих пор радиус $R > 0$ и соответствующее значение $s(R)$ параметра s были произвольными. Выберем теперь s таким образом, чтобы для данного $k \geq 1$ имели $s(R) = \frac{k}{\sigma}$.

Подставляя значение $s(R) = \frac{k}{\sigma}$ в (2.11), получим оценку (2.2) теоремы.

б) Пусть $\rho \geq 1$ и $r_0 > 0$. Из неравенства (1.14) леммы 5 и из (2.10) получим:

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2} \left[\frac{(r_0 + [c(R)]^{\frac{1}{\rho}})^{\rho-1}}{m_0 c(R)} \right]^k [1 + e^{s(R)}] M \quad (k \geq 1). \quad (2.12)$$

Выберем опять $s(R) = \frac{k}{\sigma}$, тогда (2.12) принимает следующий вид:

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{k!}{2} M \sigma^k \left[\frac{\left[r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{\rho-1}}{k m_0} \right]^k \quad (k \geq 1),$$

т. е. получим оценку (2.3) теоремы.

в) Предположим, наконец, что $r_0 = 0$ и $\rho \geq \frac{1}{2}$. Тогда из оценки (2.10) и из формулы (1.16) леммы 5 получим неравенство

$$|f^{(k)}(0)| \leq \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{c(R)} \right) [c(R)]^{-\frac{k}{\rho}} \quad (k \geq 1). \quad (2.13)$$

Выбирая в (2.13) $c(R) = \frac{k}{\rho\sigma}$, получим последнюю оценку (2.4) теоремы.

Докажем теперь вторую теорему об оценке производных целых функций порядка $\rho > 1$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ целая функция порядка $\rho > 1$ и нормального типа σ , удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \sup_{|\arg z| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} |f(z)| &\leq M < +\infty, \\ \sup_{|\arg z + \pi| < \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)} |f(z)| &\leq M < +\infty. \end{aligned} \quad (2.14)$$

а) Если $|z| \neq 0$ и $|\arg z| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ или $|\arg z + \pi| = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$, то для любого $k \geq 1$ имеет место оценка

$$|f^{(k)}(z)| \leq MB_k \left[\left| z \right| + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right]^{\rho-1} \sigma^k, \quad (2.15)$$

где

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{km_0} \right)^k (1 + e^k).$$

б) Если же $z = 0$, то для любого $k \geq 1$

$$|f^{(k)}(0)| \leq MC_k^* \sigma^{\frac{k}{\rho}},$$

где

$$C_k^* = k! \left(1 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}. \quad (2.16)$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ имеет порядок ρ и тип σ и удовлетворяет условиям (2.14), то по лемме 1 отсюда следует, что при произвольном значении параметра c ($0 \leq c < +\infty$) на кривых

$$r^{\rho} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = c$$

$$r^{\rho} \cos \rho \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = c$$

имеет место оценка

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M e^{c\theta}.$$

Поэтому оценка (2.15) нашей теоремы доказывается вполне аналогичным образом, как и в теореме 1.

Что касается утверждения (2.16) теоремы, то оно тоже получается аналогично оценке (2.4), но лишь с учетом того, что функция $f(z)$ в данном случае удовлетворяет условию

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M$$

при $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и $|\theta + \pi| \leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ и условию

$$|f(\operatorname{Re}^{\theta})| \leq M e^{\alpha(\operatorname{Re}^{\theta})}$$

при

$$\left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}, \quad \left|\theta + \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2\rho}.$$

В заключение отметим, что при $\rho = 1$ из теоремы 2, в частности, вытекает:

Следствие. Если $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа σ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f(x)| \leq M < +\infty, \quad (2.17)$$

то для любого $k \geq 1$

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k! e^k}{k^k} \sigma^k. \quad (2.18)$$

Действительно, из оценки (2.16) теоремы при $\rho = 1$ следует, что при $k \geq 1$

$$|f^{(k)}(0)| \leq M \frac{k! e^k}{k^k} \sigma^k.$$

Для данного x_0 , рассматривая функцию $f_1(z) = f(x_0 + z)$, которая опять экспоненциального типа σ , удовлетворяющая условию

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f_1(x)| \leq M < +\infty,$$

приходим к оценке (2.18).

Но отметим, что как оценка (2.18), так и оценки теорем 1 и 2 не наилучшие, так как, например, для случая целых функций экспоненциального типа σ , рассмотренного выше, известно, что имеет место оценка С. Н. Бернштейна [1]

$$\sup_{-\infty < x < +\infty} |f^{(k)}(x)| \leq \sigma^k M,$$

которую улучшить нельзя.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. т. 1, 1953, статья (22).

Մ. Մ. Ջրբաշյան

ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԿԱՐԳԻ ԵՎ ՆՈՐՄԱԼ ՏԻՊԻ
ԱՄՐՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՄԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում մի քանի օժանդակ լիմիտների սզնություններ սպառնացում են հետևյալ երկու բևորիմաները.

Ք և ր եմ ա 1. Ենթադրենք, որ $f(z)$ ֆունկցիան ամբողջ է և $\rho > \frac{1}{2}$

կարգի և σ ախի և բավարարում է

$$\sup_{|\arg z| > \frac{\pi}{2\rho}} |f(z)| \leq M < +\infty$$

սպառնանքներն:

ա) եթե $r_0 > 0$, ապա երբ $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq \frac{M A_k}{r_0^{k(1-\rho)}} \sigma^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

որակը

$$A_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{m_0 k} \right)^k (1 + e^k).$$

բ) եթե $r_0 > 0$, ապա երբ $\rho \geq 1$

$$|f^{(k)}(r_0 e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}})| \leq M B_k \left[\left| r_0 + \left(\frac{k}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right|^{\rho-1} \right]^k \sigma^k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

որակը

$$B_k = \frac{k!}{2} \left(\frac{1}{k m_0} \right)^k (1 + e^k).$$

գ) երբ $\rho > \frac{1}{2}$

$$|f^{(k)}(0)| \leq M C_k \sigma^{\frac{k}{\rho}}.$$

որակը

$$C_k = \frac{k!}{2} \left(2 - \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\frac{k}{\rho}} \right) \left(\frac{\rho}{k} \right)^{\frac{k}{\rho}}$$

К. С. Чобанян

Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов

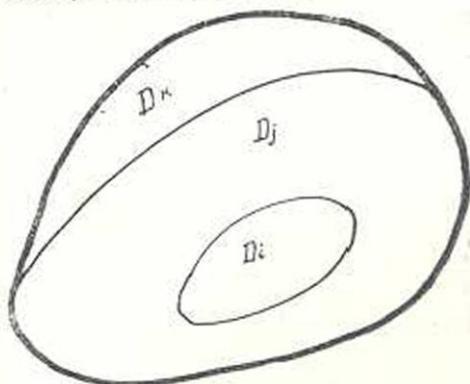
Задача кручения призматического упругого стержня, составленного из различных материалов, через функцию кручения Сен-Венана была поставлена и исследована Н. И. Мухелишвили [1—3]. В работах [4—7] дано решение рассматриваемой задачи для областей специального типа.

В настоящей работе рассматривается задача кручения составного стержня в постановке через функцию напряжений, аналогичную функции напряжений Прандтля [8] в задаче кручения однородных упругих стержней. В статье доказывается справедливость формулы Прандтля для определения жесткости при кручении составного призматического стержня. Результаты данной работы показывают, что теорию бесконечных систем линейных уравнений с той же эффективностью можно применять для решения конкретных задач о кручении составных стержней, скакой она применена в задачах о кручении однородных призматических стержней [9—16].

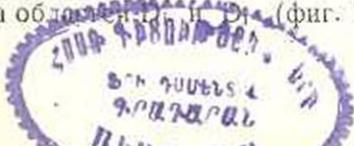
В качестве примера решена задача о кручении стержня, составленного из двух стержней прямоугольного поперечного сечения, спаянных по боковым поверхностям в виде тавра.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим кручение стержня, составленного из различных упругих изотропных призматических тел, спаянных между собой вдоль боковых поверхностей. Поперечное сечение стержня D_0 будет состоять из нескольких областей D_1, D_2, D_3, \dots , соответствующих различным материалам, разграниченных линиями раздела. Обозначим через L_0 контур области всего поперечного сечения D_0 , а через L_j — линию раздела областей D_j и D_{j+1} (фиг. 1). Будем рассма



Фиг. 1.



тривать случай, когда линии раздела либо целиком находятся внутри области D_0 , либо пересекаются с ее контуром L_0 . Представим компоненты упругого перемещения при кручении в виде

$$u = -\vartheta yz, \quad v = \vartheta xz, \quad w = \vartheta \varphi(x, y),$$

где ϑ — степень закручивания, а $\varphi(x, y)$ — функция кручения.

Для касательных напряжений будем иметь:

$$\tau_{xz} = \vartheta \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = \vartheta \mu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right).$$

Здесь μ — модуль сдвига материала в соответствующей области D_i .

Подставляя выражения τ_{xz} и τ_{yz} из (2) в уравнение равновесия элемента стержня

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

находим, что функция кручения $\varphi(x, y)$ в каждой из областей D_i удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0, \quad (3)$$

Условие равновесия элемента линии раздела и условие, что боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, на непрерывную в области D_0 функцию φ налагают следующие условия:

а) нормальная производная функция φ на границе областей D_i и D_j претерпевает разрыв:

$$\mu_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} - \mu_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial \nu} (\mu_1 - \mu_2) [y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y)]. \quad (4)$$

Здесь ν — направление нормали к линии раздела L_{ij} , внешней по отношению к области D_i .

б) на контуре области поперечного сечения D_0 функция φ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y), \quad (4')$$

где ν — направление внешней нормали к контуру L_0 области D_0 .

Вводим функцию напряжений $F(x, y)$ с помощью следующих соотношений

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \vartheta \frac{\partial F}{\partial y} = \mu_1 \vartheta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} &= -\vartheta \frac{\partial F}{\partial x} = \mu_1 \vartheta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения равновесия (2), используя соотношения (5), найдем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция F в области D_1

$$\Delta F = -2\mu_1. \quad (6)$$

Внося значения $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ из (5) в условие (4), получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cos(\nu, x) - \frac{\partial F}{\partial x} \cos(\nu, y) = 0. \quad (7)$$

Используя в (7) известные геометрические соотношения

$$\cos(\nu, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\nu, y) = -\frac{dx}{ds}, \quad (8)$$

где ds — дифференциал дуги контура L_0 , имеем

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

или

$$F = \text{const} = C_0 \quad \text{на } L_0. \quad (9)$$

Подставляя выражения производных функции φ из (5) в (3) и используя (8), получаем условие, которому удовлетворяет функция напряжений F на линии раздела L_{ij} :

$$F_i - F_j = \text{const} = C_{ij}. \quad (10)$$

Определяя из (5) производные функции F и составляя выражение ее нормальной производной, находим:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds}, \quad (11)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_j}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial s} - y \frac{dx}{ds} + x \frac{dy}{ds}.$$

Из условия непрерывности функции φ на линиях раздела L_{ij} следует непрерывность ее производной

$$\frac{d\varphi_i}{ds} = \frac{d\varphi_j}{ds} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (12)$$

Принимая во внимание (12), из соотношений (11) получаем условие, которому удовлетворяет разрыв нормальной производной функции напряжений на линиях раздела:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_i}{\partial \nu} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial F_j}{\partial \nu} = \text{const} \quad \text{на } L_{ij}. \quad (13)$$

Неопределенными остались постоянные C_0 и C_{ij} . Но нетрудно заметить, что если $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению (7) и условиям (9), (10) и (13), функция $F(x, y) + c$, где c — произвольная постоянная,

также будет удовлетворять всем этим условиям даже тогда, когда постоянные c_{ij} — фиксированы. Как видно из соотношений (5), изменение функции $F(x, y)$ на постоянную величину не отражается на решении рассматриваемой задачи. Поэтому можно положить, что

$$F = 0 \text{ на } L_0. \quad (14)$$

Таким же образом можно показать, что для скачков c_{ij} функции напряжения $F(x, y)$ на замкнутых линиях раздела L_{ij} можно положить:

$$c_{ij} = 0. \quad (15)$$

В самом деле, из математической постановки задачи определения функции из условий (7), (13) и (14) видно, что изменение постоянной c_{ij} на замкнутой линии раздела эквивалентно изменению на постоянную величину функции $F(x, y)$ только внутри контура L_{ij} , которое, согласно соотношениям (5), не отражается на решении рассматриваемой задачи. На линиях же раздела L_{ij} , имеющих общую точку с контуром L_0 , функция $F(x, y)$ должна быть непрерывной, т. е. для этих линий раздела также

$$c_{ij} = 0. \quad (16)$$

Действительно, если условие $F_1 - F_2 = 0$ выполняется для одной точки линии раздела L_{ij} , то оно должно выполняться для всех точек этой линии. Такой точкой может служить точка пересечения L_{ij} с контуром L_0 , так как на L_0 , согласно (14), имеем:

$$F_1 = F_2 = F = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача о кручении составного упругого стержня свелась к определению в области поперечного сечения D_0 непрерывной функции $F(x, y)$, которая в каждой из областей D_i удовлетворяет уравнению Пуассона [7] и на линиях раздела L_{ij} ее нормальная производная претерпевает разрыв согласно условию (13).

С целью приблизить постановку рассматриваемой задачи к постановке задачи о кручении однородных сплошных стержней, введем новую функцию $\Phi(x, y)$ следующим образом:

$$F_i(x, y) = \nu_i \Phi_i(x, y), \quad (18)$$

где $\Phi_i(x, y)$ — значение функции $\Phi(x, y)$ в области D_i .

Для определения функции $\Phi(x, y)$ будем иметь:

а) уравнение Пуассона

$$\Delta \Phi = -2, \quad (19)$$

б) условие непрерывности нормальных производных функции $\Phi(x, y)$ на линиях раздела

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu} \text{ на } L_{ij}, \quad (20)$$

в) условие разрыва функции

$$\Phi_i = \frac{r_i}{r_0} \Phi_0 \text{ на } L_{ij}, \quad (21)$$

г) контурное условие

$$\Phi = 0 \text{ на } L_0. \quad (22)$$

Таким образом, задача о кручении составного стержня в данной постановке отличается от задачи о кручении однородного сплошного стержня единственным коэффициентом в условии (21). Это обстоятельство показывает, что теория бесконечных систем линейных уравнений может быть применена при решении конкретных задач о кручении составных стержней с той же эффективностью, с какой она применена в задачах о кручении однородных стержней.

Заметим, что постановка задачи о кручении однородных стержней, поперечные сечения которых суть многосвязные области, получается из постановки рассматриваемой задачи при r_i , стремящемся к нулю для всех внутренних областей D_i , когда все линии раздела являются замкнутыми линиями и целиком лежат внутри области поперечного сечения D_0 .

Предположим, что D_i есть внутренняя область, ограниченная замкнутой линией раздела L_{ij} , а D_j — область, окружающая область D_i . При r_i , стремящемся к нулю, функция напряжения $F_i(x, y)$, согласно уравнению (7), в области D_i стремится к некоторой гармонической функции, а нормальная производная функции $F_i(x, y)$ на контуре области D_i , согласно условию (13), будет стремиться к нулю. Но, как известно, гармоническая в некоторой односвязной области функция с нулевой нормальной производной на контуре тождественно постоянна. Поэтому и в силу непрерывности функции напряжения $F(x, y)$ в области D_0 эта функция в области D_j будет стремиться к некоторой функции, которая на линии раздела L_{ij} постоянна, т. е. будем иметь условие, которому удовлетворяет функция напряжения при кручении на внутренних контурах области поперечного сечения стержня, когда эта область многосвязна.

2. *Обобщение формулы Бредта.* Как известно [8], в задаче о кручении упругих однородных стержней постоянные значения функции напряжений на внутренних контурах многосвязных областей поперечного сечения стержня определяются при помощи теоремы Бредта. Легко показать, что теорема Бредта о циркуляции касательных напряжений, выражающая условие однозначности упругих перемещений в рассматриваемой задаче для замкнутых линий раздела, целиком лежащих в области поперечного сечения D_0 , выполняется тождественно в том смысле, в каком она выполняется для односвязных областей.

Предположим, что односвязная область D_i окружена областью D_j . Тогда для произвольного контура C , лежащего в области D_i , а сле-

довательно и для замкнутого контура L_{ij} , справедлива теорема Бредта:

$$\int_{L_{ij}} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\mu_i \Omega_i. \quad (23)$$

Здесь Ω_i — площадь области D_i .

Используя условие (13), из (2) получаем

$$\int_{L_{ij}} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega_i \mu_i. \quad (24)$$

Соотношение (24) показывает, что теорема Бредта в вышеупомянутом смысле выполняется тождественно не только для замкнутой линии раздела, но и для произвольного замкнутого контура C , целиком лежащего в многосвязной области D_j .

Используя условие (13), формулу Бредта можно обобщить в рассматриваемой задаче и для таких замкнутых контуров C , которые проходят через несколько областей D_i . В этом случае область, ограниченная контуром C , линиями раздела разбивается на некоторые области, в каждой из которых справедлива теорема Бредта

$$\frac{1}{\mu_i} \oint \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega_i^*. \quad (25)$$

Здесь i принимает значения, соответствующие областям D_i , через которые проходит контур C , Ω_i^* — площадь пересечения области D_i с областью, ограниченной контуром C , а интегрирования производятся по контурам этих областей пересечения.

Суммируя соотношения (25) для всех вышеупомянутых i и принимая во внимание условие (13), получаем обобщенную формулу Бредта:

$$\oint_C \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial F_i}{\partial y} ds = -2\Omega, \quad (26)$$

где $\Omega = \sum \Omega_i^*$ — площадь области, ограниченной контуром C .

Как видно из (26), обобщенная формула Бредта не имеет того непосредственного физико-геометрического истолкования, какое она имеет в задаче о кручении однородных стержней.

3. *Определение жесткости при кручении.* Для крутящего момента M , согласно (5), имеем:

$$M = -\oint \iint_{D_i} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy. \quad (27)$$

С целью упростить выражение (27), представим его в виде:

$$M = -\oint \sum_i \iint_{D_i} \left(x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy.$$

Здесь можно произвести интегрирование по частям, так как функция F со своими производными непрерывна в каждой из областей D_i :

$$M = - \oint \sum_i \int_{L_i} F(x, y) [x \cos(\nu, x) + y \cos(\nu, y)] ds + \\ + 2 \oint \sum_i \iint_{D_i} F(x, y) dx dy. \quad (28)$$

Здесь L_i — контур области D_i , а ν — внешняя нормаль к L_i .

Часть контурных интегралов в (28) обращается в нуль вследствие (14). По остальным частям контуров L_i интегрирование совершается два раза в противоположных направлениях. Интегралы, распределенные по этим частям контура L_i , вследствие непрерывности функции $F(x, y)$, взаимно уничтожаются. Поэтому формула (28) примет вид:

$$M = \oint C, \quad (29)$$

где

$$C = 2 \iint_{D_0} F(x, y) dx dy \quad (30)$$

есть жесткость на кручение составного призматического стержня.

Таким образом, мы доказали, что обычная формула, связывающая крутящий момент с функцией напряжений, справедлива и в данном случае.

4. *Кручение составного тавра.* В качестве примера приложения теории бесконечных систем линейных уравнений к задаче о кручении составных стержней рассмотрим задачу о кручении стержня, составленного из двух стержней прямоугольника поперечного сечения, склеенных по боковым поверхностям в виде тавра (фиг. 2).

Обозначим через μ_1 и μ_2 модули сдвигов составляющих стержней.

Решение рассматриваемой задачи будем искать с помощью функции $\Phi(x, y)$. Вследствие симметрии поперечного сечения стержня достаточно определить функцию $\Phi(x, y)$ только в областях I, II и III, потребовав при этом, чтобы на оси симметрии $x = 0$ нормальная производная функции Φ равнялась нулю.

Функцию $\Phi(x, y)$ будем искать в виде:

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & \text{в области I} \\ \Phi_2(x, y) & \text{II} \\ \Phi_3(x, y) & \text{III} \end{cases} \quad (31)$$

На основании вышеизложенного функции Φ_1 , Φ_2 , и Φ_3 должны удовлетворять следующим условиям:

$$\Delta \Phi_1 = \Delta \Phi_2 = \Delta \Phi_3 = -2, \quad (32)$$

$$\Phi_1(x, 0) = \Phi_1(x, d) = \Phi_2(a, y) = 0, \quad (33)$$

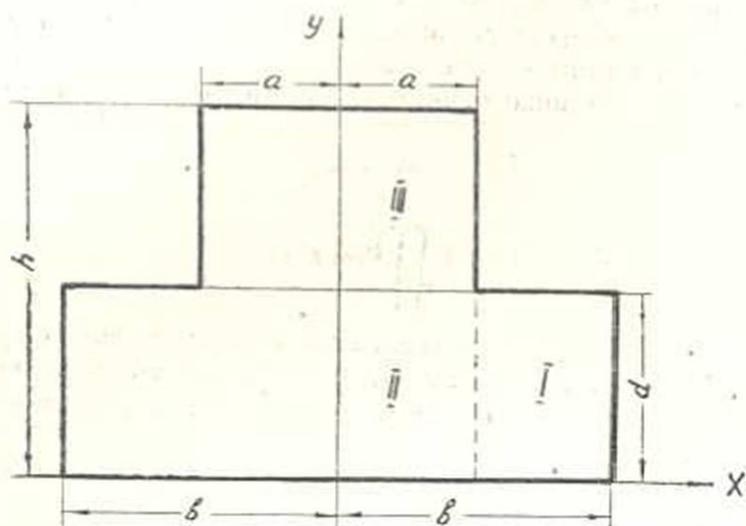
$$\left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=2a} = 0, \quad (34)$$

$$\Phi_1(b, y) = \Phi_2(x, h) = \Phi_3(x, 0) = 0, \quad (35)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right|_{x=a} = \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right|_{y=d} = \left. \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (36)$$

$$\Phi_1(a, y) = \Phi_2(a, y), \quad \Phi_2(x, d) = \mu_0 \Phi_3(x, d), \quad (37)$$

где $\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.



Фиг. 2.

Функции $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ и $\Phi_3(x, y)$ представим в виде:

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi}{d} y, \quad (38)$$

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi}{2a} (a-x), \quad (39)$$

$$\Phi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x) \sin \frac{k\pi}{d} y. \quad (40)$$

Используя условия (32) и (33), для функций $\varphi_k(x)$ и $f_k(y)$ получаем следующие выражения:

$$\varphi_k(x) = B_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x-b)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}} + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d} x}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}} \right), \quad (41)$$

$$i_k(y) = D_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2a} (y-h)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} + \frac{16a^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2a} y}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right). \quad (42)$$

Здесь B_k и D_k — постоянные интегрирования, которые должны быть определены из условий (36) и (37).

Рассматривая функции $\psi_k(x)$ ($k=1, 2, 3, \dots$), как коэффициенты Фурье в разложении функции $\Phi_k(x, y)$ в тригонометрический ряд и используя условия (32), (35), (36) и (37), для $\psi_k(x)$ находим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) = & E_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d} x + \frac{4d^2 [1 + (-1)^{k+1}]}{k^3 \pi^3} + \\ & + \frac{8a^2 k (-1)^{k-1}}{\mu_0 \pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{f_n(d) \sin \frac{n\pi}{2a} (-x)}{n^2 d^2 + 4a^2 k^2}, \end{aligned} \quad (43)$$

где E_k ($k=1, 2, 3, \dots$) — новые постоянные интегрирования.

На основании (37), (38) и (40) имеем:

$$B_k = E_k \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (a-b)} + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (a-b)}. \quad (44)$$

Из условий (36), используя (44), получаем совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений относительно неизвестных $f_n(d)$ и E_k :

$$\begin{aligned} \frac{k f_k(d)}{2ad \mu_0} \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right] = & \frac{k}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^{n+1} E_n \operatorname{ch} \frac{n\pi a}{d}}{n^2 + \left(\frac{kd}{2a} \right)^2} + \\ & + \frac{16}{k^2 \pi^3} \frac{a}{d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right) - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi h}{2a}} \right] + \frac{4}{n\pi^2}, \quad (45) \\ & (n=1, 3, 5, \dots) \\ & \frac{k (-1)^{k+1} E_k}{ad} \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{4k}{\pi d^2 \mu_0} \sum_{n=1, 3, 5 \dots}^{\infty} \frac{n f_n(d)}{n^2 + \left(\frac{2ak}{d}\right)^2} - \frac{4}{k^2 \pi^2} \frac{d}{a} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \right. \\ \left. + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}} \quad (46)$$

(k = 1, 2, 3 ...).

Введем следующие обозначения:

$$A_k = k(-1)^{k+1} \frac{F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{ad}, \quad C_k = \frac{k f_k(d)}{2\mu_0 ad} \quad (47)$$

Тогда для новых неизвестных A_k и C_k будем иметь следующие две бесконечные системы уравнений:

$$C_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} A_n + \alpha_k \quad (k = 1, 3, 5 \dots), \quad (48)$$

$$A_k = \sum_{n=1, 3, 5}^{\infty} \beta_{kn} C_n + \beta_k \quad (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (49)$$

где

$$\alpha_{kn} = \frac{kd}{\pi a \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right] \left[n^2 + \left(\frac{kd}{2a}\right)^2 \right]},$$

$$\beta_{kn} = \frac{8ka}{\pi d \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] \left[n^2 + \left(\frac{2k\pi}{d}\right)^2 \right]},$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a}} \left\{ \frac{4}{k^2 \pi^2} + \frac{16a}{k^2 \pi^2 d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi d}{2a}} \left(\operatorname{cth} k\pi \frac{h-d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} \right) \right] \right\},$$

$$\beta_k = -\frac{4}{k^2 \pi^2} \frac{d}{a} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d}}.$$

Покажем, что совокупность систем (48) и (49) вполне регулярна. Для этого, как известно, достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{kn}| < 1 - \rho_1 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} |\beta_{kn}| < 1 - \rho_2 \quad \text{для всех } k,$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ — постоянные.

Действительно

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{kn}| &= \frac{kd}{\pi a} \left[\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{kd}{2a}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a} - \frac{a}{k\pi d} \right] < \\ &< \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi (h-b)}{2a}} = 1 - \rho_1, \\ & \quad 1 + \mu_0 \frac{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}}{\operatorname{cth} \frac{k\pi (h-b)}{2a}} \end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \frac{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d)}{\mu_0 \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2a} (h-d) + \operatorname{cth} \frac{k\pi d}{2a}} > 0.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} |\beta_{kn}| &= \frac{8ka}{\pi d} \left[\operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a) + \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} \right] \sum_{n=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \left(\frac{2ka}{d}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{1 + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-a)} < \frac{1}{2}, \\ & \quad \frac{\operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}}{\operatorname{th} \frac{k\pi a}{d}} \end{aligned}$$

Таким образом, вполне регулярность совокупности бесконечных систем (48) и (49) доказана для произвольного отношения модулей сдвига μ_0 и произвольных размеров поперечного сечения рассматриваемого стержня.

Для жесткости стержня C , согласно формуле (30), имеем:

$$\begin{aligned} C &= 2 \iint_{D_0} F(x, y) dx dy = 2 \iint_{D_0} \mu_1 \Phi(x, y) dx dy = \\ &= 4\mu_1 \int_0^d dy \int_0^b \Phi_1(x, y) dx + 4\mu_1 \int_0^d dy \int_0^a \Phi_2(x, y) dx + 4\mu_2 \int_0^h dy \int_0^a \Phi_2(x, y) dx. \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя значения $\Phi_1(x, y)$, $\Phi_2(x, y)$ и $\Phi_3(x, y)$ из (38), (39), (40), (42), (43) в (50) и принимая $h=b$, $d=2a$, окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 C = \mu_1 b d^3 & \left\{ \frac{1}{3} \left[2 + \mu_0 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right] - \frac{64}{\pi^3} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\operatorname{th} k\pi\lambda - \right. \right. \\
 & - \operatorname{ch} k\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - \operatorname{chk}\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda (\operatorname{cth} k\pi(\lambda-0.5) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-0.5)) + \\
 & + \frac{1}{\mu_0} \left[\operatorname{th} k\pi\lambda + \operatorname{cth} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{sch} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{sh} k\pi\lambda \operatorname{sh} k\pi - \right. \\
 & \left. \left. - \operatorname{ch} k\pi \operatorname{sch} k\pi\lambda (\operatorname{cth} k\pi(\lambda-1) + \operatorname{sch} k\pi(\lambda-1)) \right] \right\} + \\
 & + \frac{4}{\pi^2 \lambda \mu_0} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{C_k}{k^2} \left[\operatorname{th} k\pi(\lambda-1) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-1) + \mu_0^2 (\operatorname{cth} k\pi - \operatorname{csch} k\pi) \right] + \\
 & + \frac{4}{\pi^2 \lambda} \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{A_k}{k^2} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{cth} k\pi(\lambda-0.5) - \operatorname{csch} k\pi(\lambda-0.5) \right] \Big\}. \quad (51)
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{b}{d}.$$

Значения коэффициентов A_k и C_k с избытком и с недостатком определяются из бесконечных систем (48) и (49). Используя эти значения коэффициентов A_k и C_k в формуле (51), находим значения C для различных μ_0 и λ . В таблице 1 приведены средние арифметические значений безразмерной величины $\frac{C}{\mu_1 b d^3}$ с избытком и с недостатком для нескольких значений параметров μ_0 и λ . В последнем столбце табл. 1

Таблица 1

$\mu_0 \backslash \lambda$	2	3	4	5	8	10	Погрешности в %
0.1	1,7104	2,4657	2,8478	3,0783	3,4239	3,5540	2,45
0.2	1,1252	1,5239	1,7326	1,8517	2,1820	2,1003	1,26
0.3	0,9706	1,2180	1,3876	1,4656	1,5828	1,6268	0,80
0.5	0,8080	0,9781	1,0676	1,1207	1,2005	1,2305	0,63
1	0,7167	0,8117	0,8581	0,8935	0,9291	0,9392	0,48
2	0,6839	0,7392	0,7642	0,7781	0,808	0,8070	0,41
3	0,6868	0,7185	0,7361	0,7444	0,7570	0,7622	0,35
5	0,6852	0,70964	0,7116	0,7183	0,7240	0,7267	0,31
10	0,6848	0,69249	0,6970	0,6975	0,6985	0,6996	0,28

приведены максимальные относительные погрешности, соответствующие различным значениям параметра μ_0 .

Используя соотношения (18), (31), (40), (43), (44), (47) и подставляя значение функции $\Phi_3(x, y)$ в (5), для τ_{xz} в точке (0,0) находим:

$$\tau_{xz}(0,0) = \mu_1 \frac{Md}{C} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} + \pi \sum_{k=1,3,5 \dots}^{\infty} \frac{C_k}{\operatorname{sh} k\pi} \right),$$

где M — внешний крутящий момент.

В таблице 2 приведены средние арифметические значений безразмерной величины $\frac{\tau_{xz}(0,0) b d^2}{M}$ с избытком и недостатком для различных μ_0 и λ . Там же приведены максимальные относительные погрешности.

Таблица 2

$\mu_0 \backslash \lambda$	2	3	4	5	8	10	Погрешности в %
0,1	0,7680	0,5881	0,4679	0,4328	0,3891	0,3749	3,15
0,2	1,1897	0,8499	0,7502	0,7016	0,6240	0,6189	1,54
0,3	1,2958	1,0419	0,9140	0,8654	0,8013	0,7796	0,98
0,5	1,5124	1,2560	1,1561	1,1013	1,0381	1,0030	0,77
1	1,6158	1,4369	1,3614	1,3031	1,2574	1,2437	0,59
2	1,5962	1,4984	1,4421	1,4266	1,3810	1,3754	0,47
3	1,5639	1,5023	1,4694	1,4729	1,4289	1,4191	0,40
5	1,5291	1,4826	1,4728	1,4650	1,4536	1,4480	0,36
10	1,4956	1,4745	1,4751	1,4741	1,4723	1,4699	0,30

Сектор математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 3 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухомелидзе Н. И. Sur le problème de torsion des poutres élastiques composées. C. R. Paris, t. 194, 1932.
2. Мухомелидзе Н. И. К задаче кручения и изгиба упругих брусков, составленных из различных материалов. Изв. АН СССР, вып. 7, 1932.
3. Мухомелидзе Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изв. АН СССР, М.—Л., 1954.
4. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. Известия АН СССР, № 3, 1933.
5. Векуа И. Н., Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. 1, вып. 2, 1933.

6. Рухадзе А. К. Кручение и изгиб бруса, составленного из упругих материалов, ограниченных эинтрохондами. Труды Тбилисского мат. инст., т. 1, 1937.
7. Шерман Д. И. Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инженерный сборник, т. X, 1951.
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
9. Арутюнян Н. Х. Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948, ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
10. Абрамян Б. Л. Кручение призматических стержней с крестообразным поперечным сечением. ПММ, т. XIII, вып. 5, 1949.
11. Абрамян Б. Л. Кручение и изгиб призматических стержней с полым прямоугольным сечением. ПММ, т. XIV, вып. 3, 1950.
12. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х. Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде трапеции. ПММ, т. XV, вып. 1, 1950.
13. Александрия Е. А. О кручении некоторых призматических стержней. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.
14. Александрия Е. А. Кручение двутавровой балки. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
15. Гулкакян Н. О. О кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии продольных трещин. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 2, 1952.
16. Александрия Е. А., Гулкакян Н. О. Кручение стержней с сечениями в виде швеллера и тавра. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 3, 1953.

Կ. Ս. ՉՈՒՆԵՐԻ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԿԱԶՄՎԱԾ ՊՐԻՉՄԱՅԱԶԵՎ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է տարրեր նյութերից կազմված պրիզմայաձև ձողերի սյուրման խնդիրը բարձր ֆունկցիայի միջոցով: Չողի լայնական հատվածքի տարրեր նյութերին համադաստասխանող տիրույթների բաժանման գծերը կարող են կամ ամբողջությամբ գտնվել լայնական հատվածքի ներսում, կամ հատվել նրա եզրագծի նեո: Քննարկվող խնդրի համար քննարկացվում է Բրեկաի թևրևումն և Պրանգալի բանաձևը՝ միասեռ ձողի սյուրման գեպրում կոշտությունը որոշելու համար: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ բազալրյալ ձողերի սյուրման վերաբերյալ կանխելա խնդիրները լուծելու գեպրում գծային հավասարումների անվերջ սրտակնների աեսությունը կարող է կիրառվել նաև էֆեկտիվություն, ինչ էֆեկտիվությունը այն կիրառվել է միասեռ ձողերի սյուրման վերաբերյալ խնդրի լուծման գեպրում:

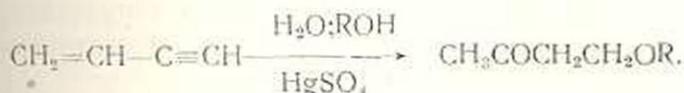
Որպես օրինակ լուծվում է կոշտության մակերևույթներով իրար նեո գրգված, ուղղանկյուն հատվածք ունեցող երկու ձողերով կազմված տալրի սյուրման խնդիրը:

Այսպիսի գնահատմամբ հաշվվում են կոշտությունն ու բարվածությունը մի կետում՝ լայնական հատվածքի շափերի և նյութերի սահքի մոդուլների հարաբերությունների տարրեր արժեքների գեպրում և այդ մեծությունների համար կազմվում են աղյուսակներ:

С. Г. Мацюян, С. А. Вартанян

Превращения метил-β-алкоксиэтилкетонов

В одном из предыдущих сообщений [1] нами было установлено, что винилацетилен в спиртовых растворах в присутствии сернокислой ртути и серной кислоты гладко гидратируется с образованием соответствующих метил-β-алкоксиэтилкетонов.



Полученные метил-β-алкоксиэтилкетоны, которые приведены в нижеследующей таблице, представляют собой бесцветные с приятным фруктовым запахом жидкости, перегоняющиеся без разложения и являющиеся превосходными растворителями органических веществ.

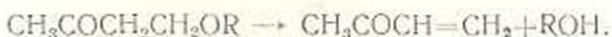
Ф о р м у л а	Т. кип. при 676 мм	n_D^{20}	d_4^{20}	Выход в %	Т. пл. 2,4-динитро- фенилгид- разонов
I $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OCH}_3$	131—135°	1,4048	0,9235	90	85—86°
II $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_2\text{H}_5$	147—148°	1,4117	0,9016	81	100—101°
III $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_3\text{H}_7$ -изо	156—157°	1,4092	0,8847	63	220—221°
IV $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_4\text{H}_9$	163—164°	1,4145	0,9058	73	87—89°
V $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_5\text{H}_{11}$	167—168°	1,4300	0,9513	70	212—213,5°
VI $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_6\text{H}_{13}$ -изо	172—173°	1,4130	0,8763	61	214—215°
VII $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_8\text{H}_{17}$	180—181°	1,4218	0,8893	70	211—212°
VIII $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_{10}\text{H}_{21}$ -изо	190—192°	1,4192	0,8781	60	188—190°
IX $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_{11}\text{H}_{23}$	224—226°	1,4585	0,9676	55	217—219°
X $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_{17}\text{H}_{35}$	244—246°	1,4325	0,8833	59	217—218°
XI $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_6\text{H}_5$	т. пл. 80—81°	—	—	50	144—145°
XII $\text{CH}_3\text{COCH}_2\text{CH}_2\text{OC}_6\text{H}_4\text{CH}_3$ -м	т. пл. 73—74,5°	—	—	35	178—180°

Наличие ряда синтезированных метил-β-алкоксиэтилкетонов и сравнительная простота синтеза давали нам возможность изучить разнообразные превращения этих соединений с использованием обеих функциональных групп (как кетонной, так и алкоксильной). Они легко

конденсируются с магнийбромвинилацетиленом и синильной кислотой, образуя с хорошими выходами соответственно метил- β -алкоксиэтилвинилэтинилкарбинолы [2] и β -алкоксинитрилы [3].

Настоящая статья посвящена изучению превращений по алкоксильной группе.

При перегонке метил- β -алкоксиэтилкетон в присутствии (около 1%) *p*-толуолсульфокислоты происходит полное отщепление спиртов с образованием высокого выхода метилвинилкетона



При пропускании сухого хлористого водорода в эфирный раствор метил- β -алкоксиэтилкетон происходит замещение алкоксильной группы на хлор с образованием метил- β -хлорэтилкетона



При нагревании метил- β -алкоксиэтилкетон со спиртами, содержащими концентрированную серную кислоту (около 1%) происходит реакция алкоголиза, которая обратима

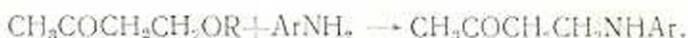


Алкоголиз протекает до конца, если радикал спирта меньше радикала алкоксильной группы.

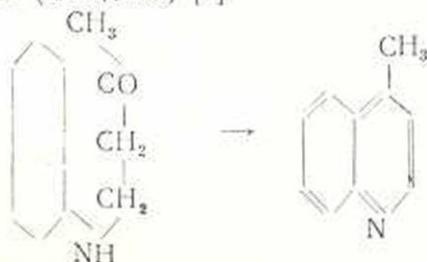
Метил- β -алкоксиэтилкетон легко вступают в реакцию амнолиза с водными растворами первичных и вторичных аминов, давая с хорошими выходами соответственно бис-(ацетилэтил) алкиламины, и метил- β -диалкиламиноэтилкетон.



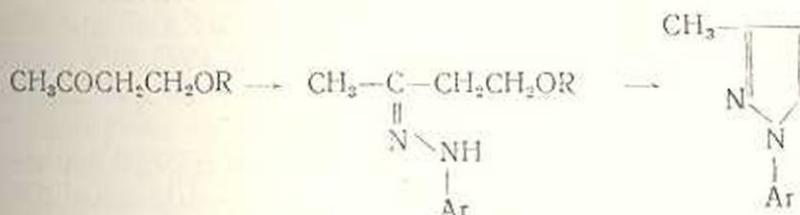
Реакция первичных ароматических аминов с метил- β -алкоксиэтилкетонами в присутствии воды приводит к образованию метил- β -ариламиноэтилкетон



Если эту конденсацию вести в присутствии хлорного железа и хлористого цинка, то полученные β -ариламинокетон циклизуются в хинолиновые основания (лепидины) [9]



При действии спиртовых растворов фенилгидразина и 2,4-динитрофенилгидразина на метил-β-алкоксиэтилкетоны получаются фенилгидразоны и 2,4-динитрофенилгидразоны, которые при нагревании с конц. соляной кислотой легко отщепляют алкоксильные группы с образованием 3-метил-1-фенилпиразолина и 3-метил-1-(2,4-динитрофенил)-пиразолина



Таким образом метил-β-алкоксиэтилкетоны, являющиеся легко доступными и неядовитыми соединениями, могут быть с успехом применены в качестве источника метилвинилкетона для реакции ацетилирования и циклизации.

Экспериментальная часть

Отщепление спирта от метил-β-алкоксиэтилкетонов. Смесь 5 г метоксикетона (I), 5 г бутоксикетона (VII) и 4 г циклогексоксикетона (IX) нагревалась в присутствии 0,1 г п-толуолсульфокислоты при 100° в течение 30 минут. К концу перегонки температура бани доведена до 120°. Собрано 11 г продукта расщепления с т. кип. 65–95°. После повторной перегонки получено 7 г метилвинилкетона [4] с т. кип. 77–80°, семикарбазон которого плавился при 140° и не дал депрессии с известным образцом.

Действие хлористого водорода на метил-β-алкоксиэтилкетоны. В смесь 8 г бутоксикетона (VII), 7 г циклогексоксикетона (IX) и 50 мл абс. эфира пропускался сухой хлористый водород до привеса 7 г. Реакционная смесь оставлена на ночь. После отгонки эфира продукт перегнан в вакууме. Получено 8 г метил-β-хлорэтилкетона (5) с т. кип. 52–54° при 16 мм, дающего положительную реакцию на Бальштейн. 1-фенил-3-метилпиразолин, полученный путем нагревания смеси 2 г хлоркетона с 2 г фенилгидразина в присутствии 0,5 г едкого натра, плавился при 76° и не дал депрессии с известным образцом.

Метанолиз метил-β-алкоксиэтилкетонов. Смесь 10 г пропоксикетона (IV), 10 г циклогексоксикетона (IX) и 40 г метанола, содержащего 1 мл конц. серной кислоты кипятилась с обратным холодильником в течение 10 часов. Остаток после отгонки избытка метанола на кипящей водяной бане был насыщен поташем, экстрагирован эфиром, высушен хлористым кальцием и разогнан при атмосферном давлении. Получено 12 г метил-β-метоксиэтилкетона (1) с т. кип. 133–136°, 2,4-динитрофенилгидразон которого плавился при 85–86° и не дал депрессии с известным образцом.

Пропанолиз метил-β-этоксизтилкетона. Смесь 14 г этоксикетона (II) и 23 г пропилового спирта, содержащего 0,5 мл конц. серной кислоты, нагревалась на кипящей водяной бане в течение 9 часов. Продукт после нейтрализации и высушивания тщательно разогнан при атмосферном давлении. Собрано 6 г в реакцию не вошедшего метил-β-этоксизтилкетона (II) с т. кип. 147—149°, $n_D^{20}=1,4118$ и 5 г метил-β-пропоксизтилкетона (IV) с т. кип. 163—165°, $n_D^{20}=1,4145$.

Аминолиз метил-β-алкоксикетонс с помощью метиламина. Смесь 5 г метоксикетона (I), 8 г бутоксикетона (VII), 5 г изоомоксикетона (VIII) и 40 мл водного метиламина (252/100 мм) нагревалась в запаянной ампуле на кипящей водяной бане до исчезновения маслянистого слоя. Продукт аминолиза нейтрализован соляной кислотой (1:1), насыщен поваренной солью, после чего нейтральные продукты экстрагированы эфиром. Из водного раствора свободное основание выделено поташем, извлечено эфиром, высушено сульфатом натрия и перегнано в вакууме. Получено 8,5 г бис-(ацетилаэтил)-метиламина (6) с т. кип. 107—109 при 15 мм, который при стоянии закристаллизовывался. После перекристаллизации из абсолютного бензола продукт плавился при 130—131° (по литературным данным т. пл. 132°).

Аминолиз метил-β-алкоксизтилкетонс с помощью диметиламина. Смесь 10 г изобутоксикетона (VI), 5 г циклогексоксикетона (IX) и 28 мл водного диметиламина (30^в/₁₀₀) нагревалась в запаянной ампуле на кипящей водяной бане до исчезновения маслянистого слоя, на что требуется 3,5 часа. Продукт реакции обработан аналогично предыдущему опыту. Получено 8 г метил-β-диметиламиноэтилкетона (7) с т. кип. 65—67° при 22 мм, $n_D^{20}=1,4320$. Пикрат плавился при 107° (из воды) и не дал депрессии с известным образцом.

Аминолиз метил-β-алкоксизтилкетонс с помощью анилина. Смесь 6 г пропоксикетона (III), 6 г метоксикетона (I), 10 г анилина и 5 мл воды кипятилась с обратным холодильником в течение 6 часов. Реакционная смесь разогнана в вакууме. Собрано 8 г метил-β-фениламиноэтилкетона (8) с т. кип. 143—148° при 11 мм, семикарбазон которого плавился при 164—166° (по литературным данным т. пл. 166—167°).

Циклизация метил-β-фениламиноэтилкетона в лепидин. Смесь 8 г хлоридрата анилина, 1 г безводного хлористого цинка, 27 г хлорного железа (гексагидрата) и 45 мл спирта помещалась в трехгорлую колбу, снабженную мешалкой и обратным холодильником. Реакционная смесь нагревалась на водяной бане при 60—65° и по порциям добавлялась к ней смесь 4 г метоксикетона (I) и 4 г пропоксикетона (IV). Затем реакционная смесь кипятилась в течение 2 часов. После отгонки спирта остаток подщелачивался 50% едким натром, тщательно обрабатывался большим количеством эфира. Эфирная вытяжка сушилась безводным сернокислым натрием. После отгонки эфира продукт перегнан в вакууме. Получено 4,5 г лепидина (9) с т. кип. 98—100°

при 3 мм, пикрат которого плавился при 211°. По литературным данным пикрат липидина плавится при 211—212°.

Получение 1-фенил-3-метилпиразолина. Смесь 5 г хлоргидрат а фенилгидразина, 3 г этоксикетона (II), 3 г пропоксикетона (IV), 4 мл конц. соляной кислоты и 20 мл спирта нагревалась на кипящей водяной бане в течение 5 часов. Остаток после отгонки спирта насыщен поташем, экстрагирован эфиром, высушен сульфатом натрия. После отгонки эфира продукт перегнан при атмосферном давлении. Фракция 265—270° (при 676 мм) при стоянии в присутствии воды закристаллизовалась. После перекристаллизации из 80% спирта получено 3,5 г 1-фенил-3-метилпиразолина (10) с т. пл. 76—77° (по литературным данным т. пл. 76°).

Получение 3-метил-1-(2,4-динитрофенил)-пиразолина. Смесь 8 г 2,4-динитрофенилгидразина, 2,5 г этоксикетона (II), 2 г пропоксикетона (IV), 3,5 г циклогексоксикетона (IX), 10 мл конц. соляной кислоты и 40 мл этилового спирта кипятилась обратным холодильником в течение 11 часов. На следующий день объемистый осадок отжат и перекристаллизован из спирта. Получено 6 г 3-метил-1-(2,4-динитрофенил)-пиразолина с т. пл. 160—161° в виде темножелтых блестящих кристаллов.

0,0937 г вещ.: 19,8 мл азота (672 мм: 17°)

0,0988 г вещ.: 21,0 мл азота (674 мм: 17°)

Найдено %: N — 21,97; 22,19

Вычислено %: N — 22,31

Выводы

Показано, что метил- β -алкоксиэтилкетоны, легко получаемые гидратацией винилацетилена в спиртовых растворах в присутствии серно-кислой ртути, могут быть с успехом применены в качестве источника метилвинилкетона для реакции ацетиленэтирования и циклизации.

Химический институт
АН Армянской ССР

Поступило 12 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров И. И., Вартанян С. С., Мацюян С. Г. и Жамагорцян В. Н. ЖОХ, 1953, 23, 1936.
2. Вартанян С. А. и Жамагорцян В. Н. Сборник статей по общей химии, 1953, 2, 963.
3. Вартанян С. А. и Гюли-Кехвян Г. С. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), VII, № 5, 43, 1954.
4. Krapivin C. Z 1910, 1, 1336.
5. Schering-Kahlbaum. 1, 737, 203 (С. А. 1930, 24, 626); Maître, Bull., 1908, 3, 268.
6. Mannich A. г. 255, 267.
7. Гер. пат. 233519 (С. 1911, 1, 13333; Fnd 10011).

8. Гер. пат. 266656 (С. 1913, II, 1832), *Бабьян А. Т. и Гамбарин Н. П.* Известия АН Армянской ССР, III, № 6, 563, 1950.
 9. *Campbell, Shaffner*, J. Am. Ch. Soc. 67, 86 (1945).
 10. *Ach. Ann.* 1889, 253, 56; *Maire, Bull.*, 1908, 3, 272.

Ս. Գ. Մացոյան, Ս. Հ. Վարդանյան

ՄԵԹԻԼ- β -ԱԼԿՕԲՍԻԷԹԻԼԿԵՏՈՆՆԵՐԻ ՓՈԽԱՐԿՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

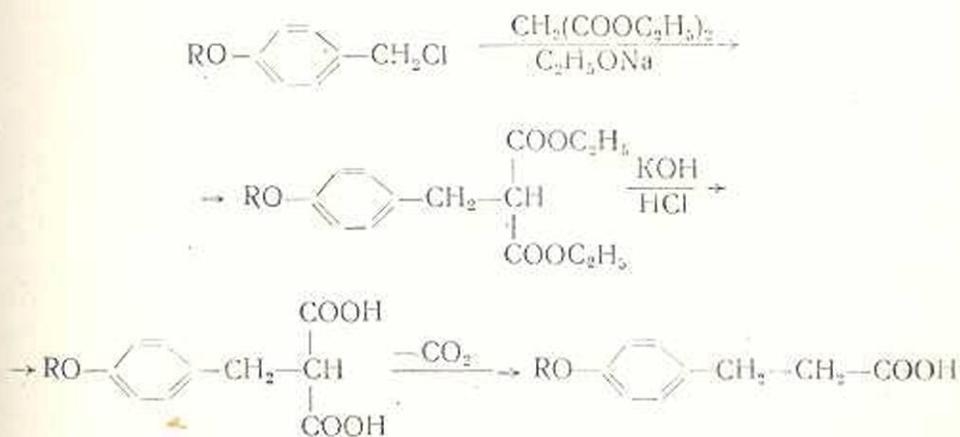
Հոդվածում ցույց է տրված, որ սպիրտային լուծույթներում անդիկի սուլֆատի ներկայությամբ վինիլացետիլենի հիդրատացիայից հեշտությամբ ստացվող մեթիլ- β -ալիօքսիէթիլկետոնները ացետիլէթիլացման և ցիկլացման սեպիցիաներում կարող են հաջողությամբ վերստիննել մեթիլվինիլկետոնին:

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Л. Миджоян, В. В. Довлатян

О некоторых превращениях 4-алкоксибензилхлоридов

С целью синтеза некоторых биологически активных соединений, нам необходимо было получить β -(4-алкоксифенил)-пропионовые кислоты. Имея легкодоступные 4-алкоксибензилхлориды, мы сочли интересным использовать их в качестве исходных продуктов для синтеза замещенных пропионовых кислот в соответствии со следующей схемой:



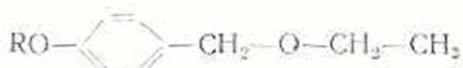
Получение 4-алкоксибензилхлоридов, необходимых для синтеза, осуществлялось путем хлорметилирования алкоксибензолов по способу, предложенному ранее [1]:



Из описанных в литературе методов получения алкоксифенилпропионовых кислот [2—8] заслуживает внимания метод, основанный на реакции восстановления β -(4-алкоксифенил)-акриловых кислот, обычно получаемых реакцией Перкина [6—8].

В результате проведенного исследования нам удалось, согласно намеченной схеме, осуществить синтез алкоксифенилпропионовых кислот.

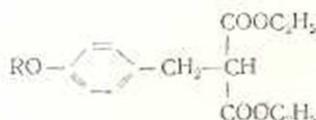
Выходы диэтиловых эфиров 4-алкоксибензилмалоновых кислот, как показано в экспериментальной части, зависят от наличия в реакционной среде большого избытка малонового эфира, а также от применения тщательно абсолютированного спирта. Применение недостаточно абсолютированного спирта ведет к образованию 4-алкоксибензидиэтиловых



эфиров, получающихся, повидимому, в результате частичной этерификации 4-алкоксибензилхлоридов под действием спиртовой щелочи.

Синтезированные нами, не описанные в литературе, диэтиловые эфиры 4-алкоксибензилмалоновых кислот, их физикохимические константы и выходы приведены в таблице 1.

Таблица 1



R	Выход в %	Т кип.	M	d ₄ ²⁰	n _D ²⁰	MRD		Анализ в %			
								C		H	
						найдено	вычислено	найдено	вычислено	найдено	вычислено
C ₂ H ₅	75	174—177°/3 мм	294	1,0384	1,4867	77,62	77,44	65,39	65,30	7,94	7,48
C ₂ H ₇	73,9	175—180°/3 мм	308	1,0306	1,4845	81,70	82,06	66,31	66,23	7,83	7,79
i-C ₃ H ₇	71,8	180—181°/3 мм	308	1,0767	1,4833	81,82	82,06	66,35	66,23	7,71	7,79
C ₄ H ₉	73,8	198—201°/3 мм	322	1,0616	1,4809	86,31	86,68	67,02	67,08	8,01	8,07
i-C ₄ H ₉	77	215—220°/4 мм	322	1,0627	1,4819	86,45	86,68	66,82	67,03	7,90	8,07
i-C ₅ H ₁₁	79,4	210—215°/3 мм	336	1,0577	1,4837	90,91	91,30	67,68	67,85	8,15	8,83

Диэтиловый эфир диметоксибензилмалоновой кислоты описан в литературе [9] и получен путем восстановления диэтилового эфира анизилденмалоновой кислоты.

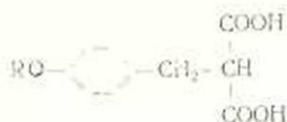
Омылением диэтиловых эфиров 4-алкоксибензилмалоновых кислот концентрированным едким кали получены не описанные в литературе 4-алкоксибензилмалоновые кислоты. Данные о них приведены в таблице 2.

Декарбоксилированием 4-алкоксибензилмалоновых кислот впервые нами были получены β-(4-алкоксифенил)-пропионовые кислоты, где R = i-C₃H₇, i-C₄H₉, i-C₅H₁₁.

Физикохимические константы даны в таблице 3.

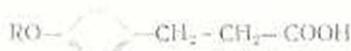
Наряду с изучением взаимодействия 4-алкоксибензилхлоридов с натрмалоновым эфиром исследовалось также влияние алкоксигруппы

Таблица 2



R	Выход в %	Т. пл.	M	Анализ в %			
				C		H	
				найдено	вычислено	найдено	вычислено
CH ₃	70,2	127—124°	224	58,72	58,92	5,52	5,35
C ₂ H ₅	89,5	133—134°	238	60,55	60,50	5,74	5,88
C ₂ H ₇	81,4	132—133°	252	61,64	61,60	6,57	6,34
i-C ₃ H ₇	82,5	124—126°	252	62,03	61,90	6,71	6,34
C ₄ H ₉	61,0	119—120°	266	63,22	63,08	6,69	6,76
i-C ₄ H ₉	80,7	129—130°	266	62,95	63,08	7,00	6,76
i-C ₅ H ₁₁	67,5	156°*	280	64,34	64,28	7,16	7,14

Таблица 3



R	Выход в %	Т. пл.	M	Анализ в %			
				C		H	
				найдено	вычислено	найдено	вычислено
i-C ₃ H ₇	73,3	72—73°	298	69,37	69,23	7,98	7,69
i-C ₄ H ₉	79,2	77—78°	222	70,48	70,27	7,87	8,10
i-C ₅ H ₁₁	76,3	74—75°	236	71,16	71,18	8,58	8,47

на подвижность галоида. Установлено, что алкоксибензилирование ма-
лонового эфира протекает примерно в два раза быстрее, чем бензили-
рование. Гидролиз алкоксибензилхлоридов наступает в течение 5—10
минут, в то время как гидролиз бензилхлорида требует нескольких
часов. Согласно литературным данным [10] бензилхлорид в спиртовой
среде с цианистым натрием образует бензилцианид с 80—90% выхо-

* Плавится с разложением.

дом. На основании проведенных опытов показано, что 4-метоксибензилхлорид в тех же условиях дает 4-метоксибензилэтиловый эфир. При этом нитрил, судя по выходу 4-метоксифенилуксусной кислоты (4.7%), получается в незначительном количестве.

Хлорметилирование анизола [11], проведенное в условиях реакции хлорметилирования бензола, ведет к образованию 4,4-диметоксифенилметана, что объясняется высокой активностью анизилхлорида, который легко вступает в реакцию с анизолом, образуя при этом производное дифенилметана. В случае же хлорметилирования бензола — дифенилметан образуется в незначительном количестве [12]. Получение 4,4-диметокси-дифенилэтана [13] из 4-метоксибензилхлорида, вместо ожидаемого по реакции Гриньяра вторичного спирта, объясняется, по-видимому, также высокой активностью 4-метоксибензилмагнийбромида, легко вступающего в реакцию с 4-метоксибензилхлоридом с образованием соответствующего производного дифенилэтана. В случае бензилхлорида, как известно, можно остановить реакцию на стадии образования бензилмагнийбромида и использовать ее для синтеза спиртов и других органических соединений.

Экспериментальная часть

Диэтиловый эфир 4-пропоксибензилмалоновой кислоты. В 0,5 л круглодонную колбу, снабженную обратным холодильником, помещают 300 мл абс. этилового спирта и постепенно вносят 9 г мет. натрия.

По растворении натрия обратный холодильник заменяют нисходящим и отгоняют спирт в 0,5 л трехтубусную колбу, снабженную механической мешалкой, капельной воронкой и обратным холодильником с хлоркальциевой трубкой.

К отогнанному спирту медленно вносят 7,82 г (0,34 г ат.) свеженарезанного, очищенного от корки металлического натрия. После полного растворения натрия реакционную смесь охлаждают до комнатной температуры и, при энергичном перемешивании, быстрой струей проливают 108,8 г (0,68 мол.) малонового эфира. Через 15 минут, при охлаждении колбы холодной водой, по каплям добавляют 62,73 г (0,34 мол.) свеженарезанного 4-пропоксибензилхлорида, с т. кип. 130—135°/8 мм. Реакционную смесь нагревают на водяной бане в продолжение 5 часов.

По окончании реакции обратный холодильник заменяют нисходящим и при перемешивании отгоняют этиловый спирт. Содержимое колбы обрабатывают 150 мл воды и 150 мл эфира. Смесь хорошо встряхивают и отделяют эфирный слой, водный — экстрагируют эфиром. Соединенные эфирные экстракты высушивают над обезвоженным сернокислым натрием. После удаления эфира остаток перегоняют в вакууме, собирая фракцию, кипящую при 175—180° при 3 мм (173—178° при 2 мм). Выход 75—77 г. 71,6—73,5% теории.

$$d_4^{20} - 1,0806; \quad d_4^{20} - 1,4845$$

Найдено M_{R_0} 81,70

$C_{17}H_{21}O_5$ Вычислено MR_D 82,06

0,1256 г вещ.: 0,3054 г CO_2 ; 0,0886 г H_2O

Найдено %: С 66,31; Н 7,83;

$C_{17}H_{21}O_5$. Вычислено %: С 66,23; Н 7,79

Диэтиловый эфир 4-пропоксибензилмалоновой кислоты представляет собой слегка желтоватую маслообразную жидкость с эфирным запахом, растворимую в органических растворителях и нерастворимую в воде.

Аналогичным методом были получены диэтиловые эфиры 4-метокси-, 4-этокси-, 4-изопропокси-, 4-бутокси-, 4-изобутокси-, 4-изоамилоксибензилмалоновой кислоты.

4-пропоксибензилмалоновая кислота. В круглодонную колбу емкостью 100 мл, снабженную обратным холодильником, помещают 12 г (0,2 моля) едкого кали, растворенного в 12 мл воды. К щелочному раствору, при непрерывном помешивании, мелкими порциями, в течение 15—20 минут прибавляют 26 г (0,084 моля) диэтилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты. Образующаяся вначале эмульсия исчезает после разогревания и всенивания смеси. Реакционную смесь нагревают на водяной бане в течение 8 часов. К образовавшейся густой прозрачной соломенно-желтой жидкости приливают 10 мл воды. Содержимое колбы переносят в делительную воронку и экстрагируют дважды с 25 мл бензола для удаления неомыленного диэтилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты. Водный слой подкисляют 15% соляной кислотой — до кислой реакции на Конго. Отделившуюся в виде желтого масла кислоту экстрагируют тремя порциями эфира по 25 мл каждая. Соединенные эфирные экстракты высушивают прокаленным сульфатом натрия. После отгонки эфира закристаллизовавшийся остаток перекристаллизовывают из горячего бензола.

Т. пл. полученной 4-пропоксибензилмалоновой кислоты соответствует 132—133°, выход 16,8—17,4 г, 79—81,1% теории, считая на диэтиловый эфир 4-пропоксибензилмалоновой кислоты.

0,1160 г вещ.: 0,2622 г CO_2 ; 0,0686 г H_2O

Найдено %: С 61,64 Н 6,57

$C_{12}H_{16}O_3$. Вычислено %: С 61,90; Н 6,34

4-пропоксибензилмалоновая кислота представляет собой белое кристаллическое вещество, растворимое в эфире, спирте, горячем бензоле, трудно растворимое в воде и лигнине.

β-(4-пропоксибензил)-пропионовая кислота. В круглодонную колбу емкостью 100 мл, снабженную воздушным холодильником, помещают 16 г 4-пропоксибензилмалоновой кислоты и нагревают на масляной бане. При температуре 155—160° начинается выделение углекислого газа. Постепенно повышая температуру бани до 170—175°, поддерживают ее до прекращения выделения пузырьков углекислого газа. По охлаждении реакционный продукт затвердевает.

Сырую кислоту перекристаллизовывают из горячего бензина (фр. кип. при 70—80°), т. пл. 95×96°, выход 9,8—10,5 г, 75,3—80,7% теории.)

0,1138 г вещ.: 0,2836 г CO₂; 0,0770 г H₂O

Найдено %: С 69,16; Н 7,51

C₁₂H₁₆O₆. Вычислено %: С 69,23; Н 7,69

β-(4-пропоксифенил)-пропионовая кислота представляет собой белое кристаллическое вещество, растворимое в спирте, эфире, горячем бензоле, нерастворимое в воде.

В ы в о д ы

1. Разработан новый метод получения β-(4-алкоксифенил)-пропионовых кислот, исходя из алкоксибензилхлоридов.

2. Впервые получены и описаны некоторые 4-алкоксибензилмалоновые кислоты, диэтиловые эфиры-4-алкоксибензилмалоновых кислот.

3. На основании наших опытов и обобщения некоторых литературных данных установлено, что 4-алкоксибензилхлориды в химическом отношении более активны, чем бензилхлорид.

Лаборатория фармацевтической
химии АН Армянской ССР

Поступило 16 VII 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Миджоян А. Л., Ароян А. А. Научные труды Ереванского государственного университета имени В. М. Молотова, 1, 21 (1952).
2. Айгель У. Ber. 20, 2525 (1887).
3. Бого Ж. Ann. Chem. Phys. 7, 25, 557.
4. Дюфрези М. Ann. Chem. Phys. 8, 13, 423.
5. Корнер Н., Горбети Г. Ber. 7, 173 (1874).
6. Перкин В. 10, 245, 298 (1927).
7. Грицкович-Трохимовский Е. Kron. Farm. 36, 270 (1937). Chem. Abstr. 33, 7761² (1939).
8. Пьерс и сотрудники. Y Am. Chem. Soc. 70, 255 (1948).
9. Горо А., Жак Т. Compt. Rend. 228, 1873 (1949). Chem. Abstr. 44, 3955 (1950).
10. Синтез органических реагентов, сб. 1, 502 (1949).
11. Келе Р. Compt. Rend. 198, 102 (1934).
12. Адамс Р. Органические реакции, сб. 1, 88 (1948).
13. Соса, Ann. 14, 5 (1949). Chem. Abstr. 35, 8390^c (1941).

Ա. Լ. ՄԵՋՅԱՆ, Վ. Վ. ԴՈՎԼԱՏՅԱՆ

4-ԱԼԿՕՔՍԻԲԵՆԻԼՔԼՈՐԻԴՆԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՒԱՐԿՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Փ Ո Ւ Մ

Նկատի ունենալով 4-ալկոքսիբենզիլքլորիդների մատչելիությունը նրանց բազայի վրա մշակված է β-(4-ալկոքսիբենզիլ-պրոպիոնաթթվաների ստացման նոր եղանակ: Ուսումնասիրված է 4-ալկոքսիբենզիլքլորիդների և մաթեմատիկական կախարհի նախնական անհայտի փոխադրված

Г. П. Багдасарян

Петрогенетические особенности порфировидных сиенито-гранитов Амзачиманской интрузии в Армянской ССР

1. Геологическое положение, морфология и возраст интрузии

Рассматриваемые породы по их структуре и составу являются одним из интереснейших и оригинальных в петрогенетическом отношении образований в Армении.

Они слагают два резко различных по своей морфологии и величине интрузивных тела, обнимающихся на северном склоне Памбакского хребта, в ближайшем соседстве друг с другом, близ сел. Амзачиман, Кироваканского района (фиг. 1).

Первое из них размерами примерно $8,5 \times 3$ км, известное под названием Гильютского массива, расположено непосредственно к северо-востоку от Тежарской интрузии щелочных, нефелиновых и псевдолейцитовых сиенитов; занимает оно в плане около 26 км^2 , а за вычетом площадей, покрытых делювием. — $19,7 \text{ км}^2$.

Второе, так называемое Фиолетовское дайкообразное тело, обнажается на площади всего $0,25 \text{ км}^2$, представляя собой, повидимому, крупную апофизу Гильютского массива. Оно прослеживается тремя выходами на протяжении около 3 км, причем общая длина его выходов небольшая.

Первые сведения о породах Амзачиманской интрузии, под названием порфировидных гранитов, в общих чертах даны В. Н. Котляром [6]. Весьма краткое петрографическое их описание с данными химического анализа одного образца им опубликовано в статье, посвященной Памбакскому комплексу щелочных пород [7], в которой, однако, не затрагиваются вопросы происхождения этих образований.

Как ранние геологические исследования В. Н. Котляра, проведенные им в обширном районе Памбакского хребта, так и последующие более детальные геолого-петрографические исследования автора настоящей статьи в указанном районе показали, что в схеме последовательного ряда интрузий верхнеэоценового магматического цикла об-

разование рассматриваемых порфириовидных сиенито-гранитов во времени приурочено к промежутку между внедрением интрузий кварцевых диоритов-гранодиоритов и Тежсарского комплекса щелочных пород.

Гильютский массив располагается немного ниже водораздела Памбакского хребта, занимая участок его северо-восточного склона до самого подножья, т. е. до долины р. Агстев. Обнаженность интрузива в общем довольно хорошая, однако зона контакта с вмещающими породами, за исключением 2—3 участков, покрыта делювием. Нередко можно видеть характерные для этого массива формы выветривания в виде причудливых скалистых обнажений, напоминающих собой иногда искусственные сооружения из крупных глыб. На таких участках достаточно отчетливо выделяются две главные системы круто падающих трещин. Одна из них пересекает породы в СЗ, другая в СВ направлении.

Этот массив, так же как и интрузивные тела предыдущих фаз внедрения, несколько вытянут в запад-северо-западном направлении вдоль господствующих геологических структур района; он расположен в северо-восточном крыле Памбакской синклинали, отчетливо прорывая слагающую ее на этом участке среднеэоценовую толщу полевошпатовых и др. порфиритов, их туфобрекчий, туфопесчаников и туффитов, переходящих выше в эффузивы щелочного состава.

Северо-восточная контактовая зона интрузива на всем своем протяжении прикрыта широко развитыми в подножьи хребта делювиальными наносами, которые, как это видно на фиг. 1, заходят местами наподобие языков довольно глубоко в среднюю часть обнаженной поверхности массива, придавая ему в плане несколько прихотливую конфигурацию. Юго-западная контактовая зона покрыта более тонким слоем наносов и осыпями туфобрекчий и туфопесчаников эоцена. Линия контакта массива с боковыми породами с достаточной точностью определяется по отдельным обнажениям, элювию и морфологическим признакам.

Наиболее хорошие обнажения контакта встречены нами в пунктах: у вершины г. Гильют и на Архашенском участке конического тела Тежсарской щелочной интрузии. В первом из них Гильютский массив отчетливо контактирует с вулканогенной толщей среднего эоцена, породы которой в зоне экзоконтакта явно ороговикованы. На втором участке щелочные сиениты образуют пирогенный контакт с порфириовидными сиенито-гранитами, подвергая последние контактовому изменению. Плоскость контакта здесь проектируется на крутой западный склон оврага, падая на юг, к коническому телу Тежсарской интрузии под углом 80—85°. Судя по этому обнажению, можно предполагать крутое, близкое к вертикальному, падение юго-западного контакта Гильютского массива с некоторым наклоном к югу в сторону Тежсарской интрузии.

К юго-востоку от вершины г. Гильют, массив сиенито-гранитов на протяжении около двух километров контактирует с указанным количественным телом, однако зона контакта здесь, к сожалению, повсеместно задернована. Еще дальше к юго-востоку породы экзоконтакта представлены эоценовыми туфобрекчиями и туфопесчаниками. Контакты с вулканогенными породами здесь также задернованы, однако последние в ближайших к интрузии участках значительно ороговикованы.

Таким образом, образование порфиroidных сиенито-гранитов Амзачимана, несомненно, предшествовало внедрению Тежсарской щелочной интрузии, но, с другой стороны, они моложе верхне-эоценовых щелочноземельных интрузивов района. Впрочем, это обстоятельство достаточно убедительно устанавливается по различному отношению порфиroidных сиенито-гранитов и щелочноземельных интрузивов к фиолетовскому разлому. Последний пересекает Каджерийский гранитовый интрузив, обнажающийся на южном склоне Каджерийского (Геджалинского) хребта, давая зоны дробления и милонитизации, но наряду с этим в указанный разлом интрузирует фиолетовское дайкообразное тело порфиroidных сиенито-гранитов.

Фиолетовский интрузив сиенито-гранитов вытянут вдоль одноименного разлома, секущего здесь осадочно-вулканогенную толщу среднего эоцена. Начиная от сел. Фиолетово он, несмотря на сравнительно плохую обнаженность, прослеживается на ВЮВ, по долине р. Агетев прерывистыми дайкообразными выходами, расположенными в одну линию. Интрузив прорывает также туфопорфиритовую толщу среднего эоцена (нижние ее горизонты) и обнажающуюся здесь салту известняков.

Порфиroidные сиенито-граниты как по оригинальному внешнему облику, так и по своей структуре и составу совершенно сходны с таковыми Гильютского массива. Это обстоятельство, а также близкое расположение фиолетовского тела к Гильютскому массиву позволяют рассматривать его как апофизу последнего.

2. Петрографическая характеристика порфиroidных сиенито-гранитов

Наряду с отчетливо выраженным порфиroidным строением пород рассматриваемой интрузии, чрезвычайно характерно для нее широкое и неравномерное распространение темноцветных, переработанных ксенолитов вмещающих вулканических пород. Ксенолиты эти довольно отчетливо выделяются на более светлом фоне сиенито-гранитов, составляя от 5—7 до 10—15% объема породы. В некоторых случаях, однако, ксенолиты проявляются в виде редких включений, а в других, напротив, количество их настолько значительно, что породы интрузии на первый взгляд оставляют ложное впечатление конгломерата.

Величина ксенолитов весьма различная: от 1 до 10—15 см, а иногда до 20—30 см. Формы ксенолитов в подавляющем большин-

стве случаев эллипсоидальные, сфероидальные, реже неправильные. Порода ксенолитов обычно в той или иной мере перекристаллизована в мелкозернистые темносерые до черного цвета породы диоритового или близкого к нему состава. В юго-западной части Гильютского массива были встречены также ксенолиты, сохранившие реликты порфировой структуры исходной вулканической породы.

Пространственная ориентировка эллипсоидальных ксенолитов по большей части грубо отвечает вытянутости интрузива: их длинные оси лежат близко к направлению СЗ—ЮВ.

Породы, слагающие Гильютский массив, равно как и фиолетовскую дайкообразную апофизу, по внешнему своему облику довольно однообразны. Они резко выделяются своим розовато-серым цветом и хорошо выдерживающимся почти повсеместно отчетливым порфировидным строением.

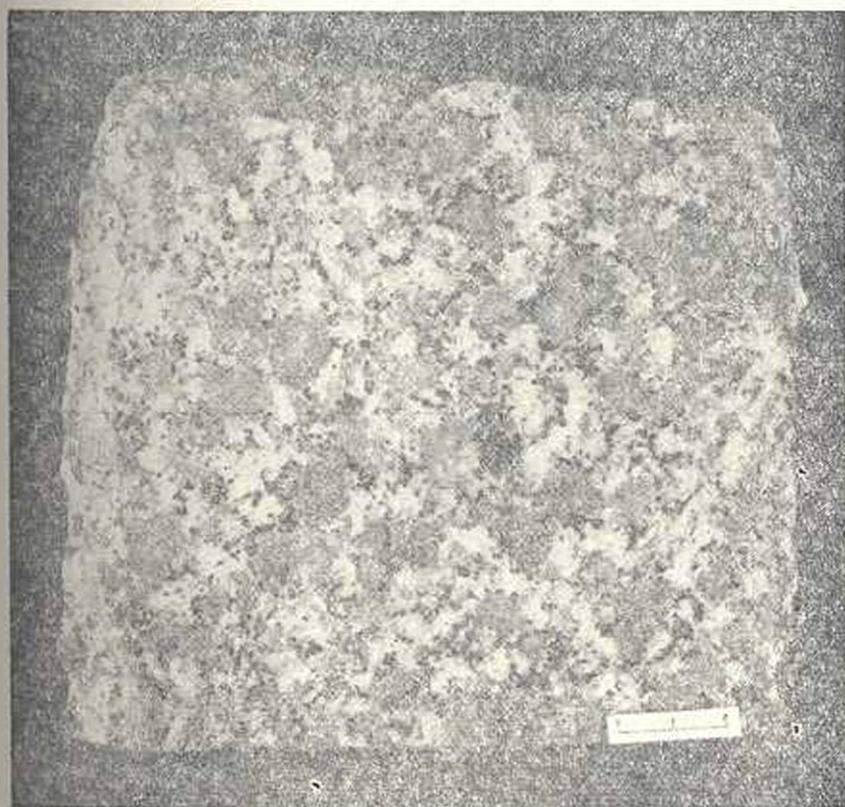
В отличие от этого, в юго-западной краевой части Гильютского массива, там, где он внедряется в эффузивы основного состава, породы его приобретают буровато-серый цвет, причем порфировидная структура выражается нечетко или исчезает совершенно. Типичная для рассматриваемой интрузии порода характеризуется отчетливо выраженным порфировидным строением и светлосерой окраской с зеленоватым оттенком. В среднезернистой основной массе ясно видны, особенно на шлифованной поверхности шпата, призматические, таблитчатые, эллипсоидальные, иногда округлые и неправильные крупные выделения розового калиевого полевого шпата, составляющие примерно 50—60% объема породы. Их размеры большей частью 0,5—1,5 см, но встречаются иногда более крупные, величиной до 2,5 см.

Основная масса породы в свою очередь слагается примерно на 60—70% из светлых кварц-полевошпатовых зерен и на 30—40% из фемических составных частей. Последние распределены неравномерно, участвуя в составе породы большей частью в виде сгустков и пятен неправильной формы и разной величины. На первый взгляд эти темные сгустки оставляют впечатление сингенетической составной части породы и как таковые описывались в работах, предшествующих нашим исследованиям.

Однако при тщательном наблюдении невооруженным глазом, особенно на шлифованной поверхности ряда образцов, нетрудно подметить постепенные переходные различия, от этих сгустков к мелким неполностью дезинтегрированным, таким же темноцветным ксенолитам (фиг. 2.), которые, в свою очередь, через промежуточные различия дают постепенные переходы к более крупным ксенолитам. Как показано ниже, переходы от темноцветных сгустков к мелким ксенолитам прослежены нами также и микроскопически.

Под микроскопом крупные порфировидные выделения представлены богатыми микропертитовыми вростками калиевого полевого шпата. Формы их б. ч. таблитчатые, призматические, изометрические, лейстовидные, характеризующиеся обычно неровными контурами.

Пертитовые вроски альбита, составляющие от 10 до 30, а иногда и до 50% площади кристаллов, выражены жилковатыми, ленточными и пятнистыми формами; наблюдаются также отдельные полисинтетиче-



Фиг. 2.

Порфировидный сиецито-гранит Амзачиманской интрузии; шлифованный штаф. На светлом фоне породы наблюдаются: а) порфировидные выделения калиевого полевого шпата; б) реликт дезинтегрированного ксенолита (в центре снимка); в) широко развитые мелкие разрозненные темноцветные сгустки — фрагменты дезинтегрированных ксенолитов.

сти двойникованные таблички, включающие иногда обрывки вмещающего минерала. В разрезах с симметричным погасанием эти крупные пертитовые включения определяются как плагиоклаз №№ 10—12. Иногда пертитовые вроски альбита закономерно срastaются с кварцем, давая микрографические структуры. Вкрапленники калишпата по краям, а иногда и в средней части своей включают обрывки вмещающей их основной массы, что указывает на более позднее их образование. Но, с другой стороны, альбит, помимо пертитов замещения, образует нередко каемки вокруг зерен более раннего плагиоклаза, имеющего состав основного олигоклаза — кислого андезита.

Весьма заметно развиты в порфириновых выделениях калишпата как ксеноморфные, так и идиоморфные зерна волнистоугасающего кварца, который нередко окружен альбитовой оболочкой. Эти включения более охотно ассоциируются с крупными пертитовыми вростками альбита, а также в виде продолговатых зерен приурочены к стыкам между индивидами калиевого полевого шпата, образующими вкрапленники.

Минералы среднезернистой основной массы, в виде пойкилитовых включений в вкрапленниках калишпата, представлены зернами серицитизированного плагиоклаза, хлоритизированного биотита, амфибола сфена, апатита, циркона.

Таблица 1

№№ шлифов	(001)			
	Ng	Nm	Np	2v
1098	89	7	84	-60
1086	86	5	89	-63
1086	88	4	87	-61
1066	90	5	86	-58

Измерение оптических констант калиевого полевого шпата на Федоровском столике, как видно из таблицы 1, указывает на триклинную ориентировку и сравнительно небольшой угол оптических осей минерала, отвечающего калиевому аноктоклазу.

Микроскопическое изучение ряда специально изготовленных шлифов крупных размеров (в $2 \times 3,5$ см) позволило обнаружить довольно оригинальную структуру и состав породы, особенно ее основной массы.

Основная масса неоднородная, под микроскопом сложена двумя значительно отличающимися по составу и структуре частями (фиг. 3):

1. Среднезернистая преобладающая часть основной массы характеризуется: а) сравнительно свежим обликом слагающих ее минералов, б) бедностью темноцветными компонентами и в) типидиоморфно-зернистой или порфиривидной структурой. Величина зерен большей частью от 0,5 до 2,5 мм.

2. Мелкозернистая основная масса разбросана в среднезернистой основной массе отдельными неправильными участками (островками), хорошо выделяющимися как при одном, так и при скрещенных николях. Эти мелкозернистые участки характеризуются: 1) мелко-равнозернистым строением, 2) богатством темноцветными и аксессуарными минералами, 3) значительной разрушенностью плагиоклазов.

Среднезернистая часть основной массы породы обладает гранитовой структурой, приближающейся то к порфириной, то к гранулитовой структуре; в качестве главных компонентов присутствуют: плагиоклаз, кварц, калиевый полевой шпат, роговая обманка и неравномер-

но разбросанный в породе биотит. Минералы примеси представлены магнетитом, сфеном, апатитом, реже цирконом и рутилом. Магнетит, сфен и апатит количественно значительно варьируют, переходя иногда



Фиг. 3. Микрофото, увел. 10. Ник. +.

Порфиридный сyenито-гранит. Видны две разновидности основной массы: а) среднезернистая с порфиридным строением и свежим обломком; б) мелкозернистая, заметно измененная в виде «островков» в середине левой половины снимка. Справа виден участок ксенолита. Последний через промежуточные стадии развития постепенно переходит в разновидность «б» основной массы.

от состояния аксессуарского к состоянию второстепенного компонента. причем эти колебания наблюдаются как в различных шлифах, так и на различных участках одного и того же шлифа. Значительно варьирует также количество главных компонентов.

Плагиоклаз присутствует в виде призм и таблитчатых кристаллов, большей частью сдвойникован и имеет зональное строение. Зональные зерна нередко прорастают друг друга. По измерениям в разрезах, \perp РМ, кристаллы незонального плагиоклаза принадлежат к № 28—32.

Измерение оптических констант ядра и оболочки зонального плагиоклаза дано в таблице 2.

Таблица 2

№№ шлиф.	\perp (001)			2v	Процент тауратитовой молекулы	
	Ng	Nm	Np			
1098	58	36	76	+84	48	Ядро
1098	85	10	83	90	22	Оболочка

Кварц образует нередко идиоморфные зерна; на стыках с вкрапленниками калиевого шпата достаточно хорошо сохраняются его кристаллографические очертания, причем, иногда несколько близко друг к другу расположенных зерен кварца гаснут одновременно, каковое явление впрочем в известной мере напоминает структуру рапакиви.

В зернах кварца нередко можно видеть в виде включений обрывки калиевого полевого шпата. Роговая обманка, так же как и плагиоклаз, идиоморфна, представлена короткими и длинными призмами в 0,1—0,5 мм; плеохроизм улет от зеленого до бледнозеленого цвета; схема абсорбции: $Ng > Nm > Np$. Часто замещается хлоритом, кальцитом и биотитом. Оптические свойства роговой обманки: $cNg = 17^\circ$, $2v = +68^\circ$. Принадлежит к обыкновенной роговой обманке.

Биотит в породе темнобурый, плеохроизмует до бледножелтого цвета, часто хлоритизирован. Довольно характерна частая ассоциация биотита с рудным минералом, апатитом, нередко также со сфеном и цирконом.

Мелкозернистая часть основной массы представлена отдельными, изолированными, сравнительно меланократовыми участочками размером от 0,7—1 до 3—4 мм, которые довольно отчетливо выделяются в более светлой среднезернистой основной массе породы. Структура ее роговиковая, переходящая часто в панидиоморфно-зернистую. Состоит основная масса из: 1) табличек сильно серицитизированного и карбонатизированного плагиоклаза, включающего призмочки и иголки апатита, 2) листочков биотита, плеохроизирующего от темнобурого до бледножелтого цвета, 3) зерен рудного минерала, 4) вторичного кварца, 5) калиевого полевого шпата, 6) аксессуарных: сфена, апатита и, нередко, циркона.

Микроскопическое сопоставление этих мелкозернистых, богатых фемической частью участочков с явными ксенолитиками показало их большое сходство.

Приведем краткое описание характерного ксенолитика из пород, типичных для Гильютского массива.

Ксенолит макроскопически представляет собой почти черную сравнительно более мелкозернистую, чем основная масса, плотную массу, хорошо выделяющуюся на сером фоне породы своей окраской и округлой формой. Размеры описываемых образцов ксенолитов достигают 0,6—1 см.

Под микроскопом структура породы ксенолита близка к роговиковой, иногда панидиоморфно-зернистая; текстура массивная; величина зерен большей частью — от 0,1 до 0,3 мм (фиг. 4).

В минералогическом составе породы участвуют: 1) биотит — 35—40%; листочки его плеохроизируют от темнобурого до бледножелтого цвета; частично хлоритизирован; размеры листочков в поперечнике — 0,1—0,18 мм; 2) плагиоклаз; составляет — 35—40%, шифа; принадлежит к основному олигоклазу — кислому андезину, густо испещрен чешуйками серицита, кальцитизирован; размеры зерен большей ча-

стью — 0,15—0,25 мм; 3) магнетит — 5—7%, равномерно распространен в ксенолитике в виде идиоморфных зерен; 4) калиевый полевой шпат — 6—8%, значительно пелитизирован; 5) апатит; представлен призмоч-



Фиг. 4. Микрофото, уел. 80. При одном никеле.

Мелкий ксенолит в порфиридном сиепто-граните. Черными представлены листочки биотита и зерна рудного минерала. Последний с более четкими ограничениями. На светлом полевошпатовом фоне породы наблюдается много игольчатых, а также призматических и гексагональных разрезов зерен апатита, реже андалузита. В углу снимка, рядом с крупным листочком биотита, наблюдается томсонит с характерным волокнистым строением.

ками и иголочками, составляющими иногда до 3% площади шлифа; 6) сфен — 1—2%; 7) зерна андалузита; встречаются в шлифах не редко, достигая в отдельных случаях до 1—2%; 8) циркон и не всегда встречающийся рутил составляют не более 1% площади шлифа.

Таким образом, микроскопическое исследование природы заведомых ксенолитов пород Амзачиманской интрузии и темноцветной мелкозернистой составной части этих же пород, представленной обычно бесформенными, реже изометрическими мелкими сгустками, позволило установить большое микроскопическое их сходство и наличие постепенных переходов между ними.

Результаты этого изучения с достаточной убедительностью показывают, что, по меньшей мере, преобладающая темноцветная составная часть порфиридных сиепто-гранитов Амзачиманской интрузии генетически представляет собой разрозненные в породе частички указанных ксенолитов. В качестве магматического темноцветного минерала

выпадала, вероятно, в небольшом количестве лишь роговая обманка, которая никогда не встречается ни в составе явных ксенолитов, ни в описанных мелкозернистых участочках основной массы; она всегда ассоциирует с составными частями среднезернистой, т. е. магматической основной массы породы.

В таблице 3 даются результаты химических анализов типичных образцов пород Гильотского массива. Из них второй заимствован у В. Н. Когляра [7]. Анализы показывают заметное колебание в породах кремнекислоты, глинозема и щелочей, вследствие чего первый образец отвечает составу сиенито-гранита, приближающегося к сиениту, а второй — к граниту.

Таблица 3

Весовые % ₁₀₀	№ № образцов		Числовые характеристики по А. Н. Заварицкому		
	1098	A-35		1098	A-35
SiO ₂	64,70	68,45	a	18,6	12,9
TiO ₂	0,35	0,43	c	2,8	3,1
Al ₂ O ₃	18,60	14,62	в	4,7	5,2
Fe ₂ O ₃	1,01	0,97	з	73,9	79,4
FeO	1,49	1,74	a'	—	—
MnO	0,12	0,11	f'	49,1	37
MgO	1,31	1,80	m'	46,6	43
CaO	2,43	3,78	c'	4,3	20
Na ₂ O	2,40	3,08	n	52,2	52
K ₂ O	6,09	4,30			
H ₂ O +	0,98	0,67			
H ₂ O —	0,22	0,24			
Сумма	100,92	100,19			

При сопоставлении результатов этих анализов со средними химическими составами пород Р. Дэли, на диаграмме А. Н. Заварицкого [5], выявляются следующие особенности химизма наших пород:

1. Образец № 1098 занимает промежуточное положение между щелочными гранитами и нордмаркитами средних составов по Дэли и стоит более близко к последним, причем наша порода незначительно богаче глиноземом (на 1,2%), окисью кальция (0,9%) и, напротив, соответственно бедна окисью железа (1,2%) и щелочами (1%).

2. Образец А-35 сравнительно близко стоит к докембрийскому граниту Дэли, причем отличается от последнего сравнительной бедностью кремнеземом (на 1,4%), окисью железа и несколько повышенным содержанием глинозема (на 0,86%), окиси магния (на 1%) и кальция (на 1,5%).

3. Жильные породы

Для составления несколько более полного представления о рассматриваемой интрузии ниже дается также краткое описание жильных пород, локализованных в этой интрузии. Жильные породы пользуются заметным распространением в Амзачманской интрузии, в частности в ее Гильютском массиве; состоят они из пегматитов, аплитов и даек пород основного ряда. Сравнительно чаще встречаются аплиты, реже пегматиты, а затем лампрофиры.

Пегматиты представлены жилами, а также линзовидными и шлифообразными телами. Первые из них имеют протяжение большей частью от нескольких до десяти метров, а в отдельных случаях простираются на много больше при мощности, измеряющейся десятками сантиметров и изредка превышающей один метр. Исключения составляют две встреченные в СВ части массива крупные жилы пегматита. Линзы и шпильки выражены обычно телами небольших размеров и мощностью до десятков сантиметров.

Макроскопически это весьма светлые с желтоватым и розоватым оттенком крупнокристаллические выделения, иногда с пустотами и друзами.

В минералогическом составе пегматитов участвуют прекрасно выраженные кристаллы калишпата, кварца и плагиоклаза альбит-олигоклазового ряда. Присутствует нередко также мусковит, серицит, реже сфен, цеолит типа томсонита, турмалин, рутил.

Иногда жилы пегматита в залебандах приобретают аплитовидный характер, придавая породе некоторое зональное строение.

Жилы аплита имеют протяжение до десятков метров. Их мощность составляет большей частью от 3 до 10 см. Нередко встречаются также и более мощные жилы.

По своему внешнему облику аплиты обычно светлосерые до розовато-кремового цвета, мелкозернистые. Микроскопически структура породы преимущественно аплитовая; в минералогическом составе ее участвуют (в порядке количественного убывания): кварц, калишпат, плагиоклаз, нередко амфибол и биотит. Акцессорные минералы представлены почти постоянно присутствующим рудным минералом, апатитом, нередко сфеном, реже цирконом, в некоторых случаях турмалином.

Кварц присутствует неправильными и нередко довольно идиоморфными кристаллами, придающими породе гранулитовую структуру; развит в породе недостаточно равномерно. Местами наблюдаются в нем включения калиевого полевого шпата. Калишпат представлен ксеноморфными зернами микропертитового характера. Плагиоклаз присутствует большей частью призмочками, реже в виде неправильных по форме зерен; по измерениям в разрезах с симметричным угасанием содержит 12—15% анортовой молекулы.

Темноцветные минералы количественно обычно резко уступают калиевым компонентам, составляя большей частью 1—2%, реже до

3% объема породы; местами замещаются хлоритом и отчасти эпидотом. Нередко содержание роговой обманки или биотита незначительно.

Жильные породы основного состава встречаются редко; констатированы лишь на отдельных участках в 3—4 пунктах.

Эти породы представлены дайками мощностью от 0,9 до 1,3 м, прослеживающимися на десятки метров, причем мощность даек довольно хорошо выдерживается по простиранию.

По минералогическому составу и структуре эти дайки лампрофиров несколько отличаются друг от друга, близко отвечая диоритовому порфириду и монцониту.

Небезынтересно отметить, что аналогичные жильные породы выявлены нами в соседней Тежсарской интрузии, опять-таки в виде единичных редких даек, петрографическая и химическая характеристика которых описана в наших предыдущих работах.

4. О генезисе порфиroidных сиенито-гранитов Амзачиманской интрузии

Изложенные выше данные полевых наблюдений и микроскопических исследований позволяют выделить следующий ряд характерных черт пород рассматриваемой интрузии.

1. Весьма характерное для этой интрузии отчетливо выраженное порфиroidное строение сиенито-гранитов, обусловленное развитием крупных выделений калиевого полевого шпата, типа вкрапленников, в основной массе породы. В отличие от пород рапакивы, в рассматриваемых породах крупные выделения калишпата не сопровождаются характерной олигоклазовой оболочкой. По своей структуре и составу, равно как и по генетическим особенностям, наши породы близко отвечают порфиroidным гранитам Шилово-Коневского массива из Среднем Урале [8], разновидностям выборгита, названным Валем штерлитами [4], порфиroidным гранитам Воронежского района [10].

2. Порфиroidные выделения калиевого полевого шпата характеризуются неровными контурами; по краям они пойкилитически обрастают, минералы основной массы породы, которые нередко встречаются также в средней части вкрапленников. Подобное структурное соотношение последних с минералами основной массы породы указывает на более позднее образование крупных выделений калишпата, которые, таким образом, несут здесь характер порфиroidобластов.

3. В порфиroidобластах калишпата широко развит процесс альбитизации, причем альбит развивается не только по порфиroidобласту, но и метасоматически замещает зерна плагиоклаза основной массы, образуя вокруг них местами довольно широкие каемки.

4. Кварц в виде идиоморфных и ксеноморфных зерен развивается как в порфиroidобластах калишпата, так и в основной массе, преимущественно на стыке последнего с порфиroidобластами калишпата

Кроме того, он образует иногда мирмекиты, а также сопровождается местами обрывками минералов основной массы породы.

5. Чрезвычайно характерной особенностью Амзачиманской интрузии является широкое и неравномерное развитие в ее породах темно-серых до черного цвета ксенолитов, хорошо выделяющихся на более светлом фоне породы своими преимущественно сферональными, эллипсоидальными и реже неправильными формами.

Макроскопически проследживаются все переходные разности от крупных явных ксенолитов размерами большей частью 5—20 см и до мелких ксенолитиков величиной в 0,5—1 см и от последних к более мелким дезинтегрированным, разрозненным частицам этих ксенолитов, в виде бесформенных темных сгустков и пятен. В первом случае, особенно на участках значительной концентрации ксенолитов, породы интрузива близко отвечают „агматитам“ Седергольма (1926), при наличии здесь более округлых форм включений инородного материала; во втором случае — „небулитам“.

А. Н. Заварицкий [4], разрабатывая вопросы ассимиляции и гибридности на примере Бердяшского плутона на Урале, предлагает называть гибридными или смешанными также породы, в которых ясно различимы объективные петрографические признаки двойственного ее происхождения. В тех же случаях, когда процессы ассимиляции зашли настолько глубоко, что исчезли эти признаки, порода не может быть отнесена к гибридной. Он справедливо считает, что „материал прежних изверженных и осадочных пород может быть входит как существенная составная часть почти всякой магмы, если признать, что магма с ее способностью к извержению зарождается в толще земной коры тем или иным способом“ (стр. 228).

В качестве яркого примера гибридного происхождения пород, указанный автор ссылается на описание А. Харкером (1934) гранофиоров Kilchrist'a острова Скай. В этих породах отмечается частая пятнистость, в виде стяжений темноцветных минералов, причем местами такие пятна переходят в более ясные ксенолиты.

Таким образом, из изложенного в пункте 5 мы видим, что тщательные макроскопические наблюдения пород Амзачиманской интрузии и сопоставление их с приведенными выше примерами с достаточной убедительностью указывают на явную гибридную природу этих пород, в которых по степени мигматизации проследживается вся серия переходов от агматитовой разновидностии до небулитов.

6. Микроскопически в рассматриваемых сиенито-гранитах помимо порфиробластов калишпата выделяются две структурно и минералогически различные разновидности основной массы: среднезернистая лейкократовая и мелкозернистая мезократовая.

Макроскопически первая представляет собой светлую, преимущественно полевошпатовую часть основной массы породы, а вторая — разрозненные темноцветные сгустки или пятна, т. е. частицы дезинтегрированных ксенолитов, которые сравнительно больше, чем ксено-

литы, перекристаллизованы и в той или иной степени мигматизированы, пронитаны кварц-полевошпатовой массой.

Как явствует из уже приведенного выше петрографического описания, микроскопически наблюдаются постепенные переходы от первой разновидности ко второй и от второй к явным ксенолитам. Последние, по степени перекристаллизации, близко соответствуют структуре роговика.

По своему минералогическому составу, а частично и по структуре, выделенные разновидности основной массы колеблются в узких пределах. Среднезернистая часть ее близко отвечает граниту, мелкозернистая — составу гранодиорита, а ксенолиты — кварцевому диориту или диориту.

Сами ксенолиты и мелкозернистая часть основной массы представляет собой по всей видимости две последовательные стадии мигматизации (гранитизации) материала вмещающих вулканогенных пород основного состава под воздействием кислой магмы. В первой стадии гибридная структура материала основной породы более слабая, во второй — довольно интенсивная.

Почти аналогичное явление отмечается А. Н. Заварицким в Бердяушском плутоне. В установленных им явно гибридных породах массива выделяются также две последовательные стадии изменения пород основного состава гранитовой магмой, представленные соответственно „меладiorитами“ и сиеенито-диоритами.

Одним из характерных признаков минералогического состава гибридной породы, образовавшейся вследствие воздействия кислой магмы на породы основного состава, является заметное содержание апатита. Это положение, отмечаемое почти всеми исследователями, достаточно ясно выражено и в наших гибридных породах (см. микроскопическое описание).

Таким образом, как видно из всего вышесказанного, не только тщательные макроскопические наблюдения, но и детальные микроскопические исследования не доставляют ни малейшего сомнения в явно гибридной природе пород Амзачиманской интрузии. При этом характер гибридности здесь, с точки зрения предложенной А. Н. Заварицким классификации, следует считать родственным, мультипо-ступенным.

Анализ и обобщение всего вышесказанного материала приводят нас к следующим *выводам* об условиях образования и генезисе рассматриваемых пород Амзачиманской интрузии.

1. Порфириовидные сиеенито-граниты образовались в результате проникновения и воздействия на вмещающую толщу магматического, гранитизирующего расплава, по составу близкого к аляскинту или лейкократовому граниту.

2. Воздействию кислой магмы подвергалась толща преимущественно туфообломочных пород основного состава, причем проникно-

венно расплава весьма благоприятствовала пирокластическая структура этих пород.

3. Гранитизирующий расплав обладал значительной активностью, обусловленной заметным богатством ее калием и летучими компонентами, на что указывают широкое развитие в породах порфиробластов калиевого полевого шпата, составляющего 50—60% объема породы, и значительное распространение апатита.

4. Воздействие магмы на породы вмещающей толщи сопровождалось интенсивным развитием процессов перекристаллизации этих пород, их мигматизации, растворения и контаминации, давших серию гибридных образований, от своеобразных агматитов и до небулитов.

5. В интенсивности процессов реакции между магматическим расплавом и ксенолитами, помимо резкого различия их химического состава, определенную роль несомненно играли летучие составные части. Впрочем, должная роль в подобных процессах отводится летучим компонентам, как известно, в СССР А. Н. Заварицким [4] и другими исследователями, а за рубежом — С. Ноккольдсом (1933) и др.

6. Процесс воздействия кислого расплава на чуждые ему породы вызывал несомненно нарушение его физико-химического равновесия и широкое развитие метасоматических реакций между ними.

7. Образование порфиробластов калиевого полевого шпата, по природе своей, не может рассматриваться как выделение избыточного в отношении эвтектики компонента. Представления такого рода, высказанные Ф. Ю. Левинсон-Лессингом [9], и нашедшие признание у ряда исследователей по вопросу о порфировидных структурах, далеко не применимы для объяснения генезиса наших пород.

8. Структурные соотношения минералов в исследованных нами породах и др. уже данные, изложенные в пунктах 1—4, указывают на следующий процесс развития в них порфировой структуры.

а) В начальный период воздействия магмы на породы кровли имел место процесс широко развитого калиевого метасоматоза, инфильтрации из магмы в ксенолиты калиевых растворов, давших крупные порфиробласты калиевого полевого шпата.

б) Вслед за этим, вследствие относительного обеднения магмы калием, ушедшим в значительном количестве на образование порфиробластов, в магме относительно повышается концентрация натрия. Растворы натрия вызывают в кристаллизирующихся породах значительный натриевый метасоматоз, выраженный в пертитизации порфиробластов калишпата и образовании альбитовых каемок вокруг зерен плагиоклазов.

в) Метасоматические процессы завершаются в основном инфильтрацией в породы кремнекислоты, что сопровождается образованием зерен более позднего кварца, а также развитием мirmekитовых структур.

9. Наконец, следует отметить, что указанное выше допущение о заметном богатстве магматического расплава калием хорошо согласуется с высказанным автором представлением [2] о развитии магмы

в едином очаге, давшем последовательный ряд внедрений. При этом после внедрения интрузий кварцеводноритового-гранодиоритового ряда эволюция магмы в едином очаге шла в направлении постепенного обогащения калием (в период формирования Амзачиманской интрузии), причем наибольшее обогащение калием было достигнуто несколько позже, в начальный период формирования Тежсарского комплекса щелочных изверженных пород Памбакского хребта.

10. Чрезвычайно близким, как по минералогическому составу, так и по условиям образования аналогом рассматриваемых пород на территории республики являются порфириовидные граниты Мегринского района южной Армении, образование которых описывается аналогично нашим породам А. И. Адамяном [1].

Генетическое сходство указанных пород, равно как и ряда петрогенетических особенностей других интрузий Памбакского хребта и Мегринского плутона, еще более подкрепляет представление о большом сходстве, по крайней мере, основных черт истории развития третичного глубинного вулканизма указанных двух областей.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступило 5 VII 1954.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адамян А. И. Об образовании полевошпатовых вкрапленников в порфириовидных гранитах Мегринского района Армянской ССР. Изв. АН АрмССР, том II, № 1, 1949, Ереван.
2. Вагдасарян Г. П. О механизме внедрения и этапах формирования Тежсарской щелочной интрузии в Армении. Изв. АН Армянской ССР, том III, № 8, 1950, Ереван.
3. Белякин Д. С. и Петросян В. Л. О шаровом граните из Капгашикеми. Труды Петрогр. инст. АН СССР, 1933, вып. 3, стр. 21—37.
4. Заварицкий А. Н. Петрография Бердяушского плутона. ОНТИ—НКТП—СССР, Москва—Ленинград, 1937.
5. Заварицкий А. Н. Пересчет химических анализов изверженных горных пород. Изд. АН СССР, 1941.
6. Котляр В. Н. Интрузивные породы центральной части Армянской ССР. Сборник «Интрузивы Закавказья», стр. 228—276, Тбилиси, 1941. Издательство Техника да Шрома.
7. Котляр В. Н. Памбакский комплекс щелочных пород. Изв. АН СССР, серия геологич., 1945, № 2.
8. Куплетский Б. М. Об образовании некоторых порфириовидных гранитов Среднего Урала. Сборник трудов, посвященный академику Д. С. Белякину. Изд. АН СССР, 1946, Москва, стр. 211—219.
9. Лейнсон-Лессинг Ф. Ю. Порфириовидное строение и эвтектика. Избранные труды, том I, стр. 292—297. Изд. АН СССР, 1949.
10. Лодочников В. Н. К петрологии Воронежской кристаллической глыбы. Матер. по общей и прикл. геологии, вып. 69, Геолоком, 1927.

Գ. Պ. Յաղղասարյան

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ-Ի ՀԱՄՋԱԶԻՄԱՆԻ ԻՆՏՐՈԻԶԻԱՅԻ ՊՈՐՖԻՐԱՆՄԱՆ
ՍԻԵՆԻՏԱ-ԳՐԱՆԻՏՆԵՐԻ ՊԵՏՐՈԳԵՆԵՏԻԿ ԱՌԱՆՁՆԱԶԱՏ-
ԿՈՒՅՅՈՒՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

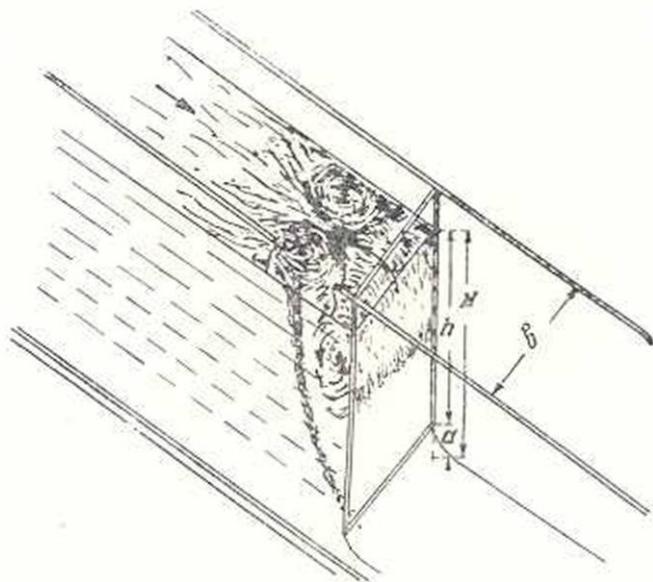
Հոդվածում արված է Հայկական ՍՍՌ-ի Համդաշիմանի ինտրուզիայի պորֆիրանման սիենիտա-գրանիտների պարզորակ փեյզմանրամասն նկարագիրը: Փաստական նյութի վերլուծումն ու ընդհանրացումը բերում են այն եզրակացություն, որ նշված սիենիտա-գրանիտները պարզորոշ կերպով հիբրիդային բնույթ ունեն: Ապարներում կալիումային գաշտաշպտաի պորֆիրանման անջատումները գիտվում են որպես կալիումային մետասոմատոզի հետևանքով առաջացած ուշ զոյացումներ:

С. М. Матинян (Исаакян)

Метод измерения пространственного поля скоростей в неустановившемся потоке в условиях воронкообразования

1. Введение

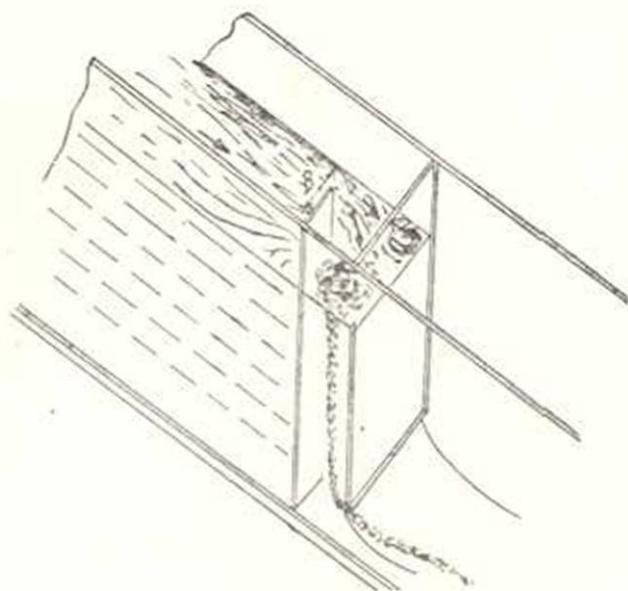
Воронки, которые образуются при истечении воды из отверстий как естественным путем (фиг. 1), так и искусственно, например, путем внесения в поток обтекаемых экранов по фиг. 2, периодически меняют свою интенсивность, тем самым создавая пульсирующее поле скоростей.



фиг. 1.

Учитывая, что воронка создает пространственное пульсирующее поле скоростей, в современной технике гидравлической лаборатории не находим соответствующего способа измерения скоростей.

Известны способы фиксации пространственного поля скоростей в стационарном потоке при помощи шарового зонда, плоского, но пульсирующего потока кино съемкой быстроходным аппаратом [1], фо-



фиг. 2.

тометрические методы, изображающие предметы стереопарой [2]. Однако, все они не удовлетворяют двум условиям одновременно, т. е. не фиксируют пространство и время параллельно.

Такой возможностью обладает стереокино, применение которого в лабораторной практике пока остается неосуществимым вследствие недоступности соответствующей аппаратуры.

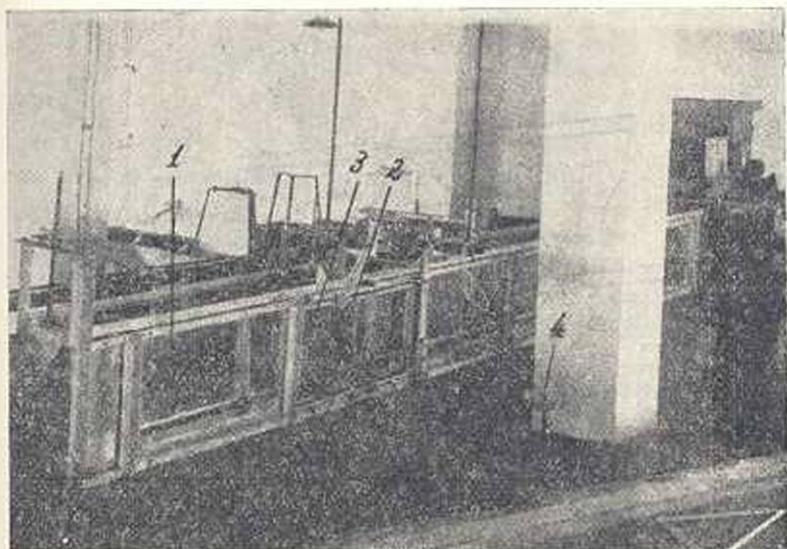
Однако в исследуемом нами сооружении (истечение из-под щита) оказываются другие возможности, которые позволяют получить пространственные координаты движущейся точки с помощью однообъективного киноаппарата и некоторых простых приспособлений.

2. Метод измерения скоростей в воронках

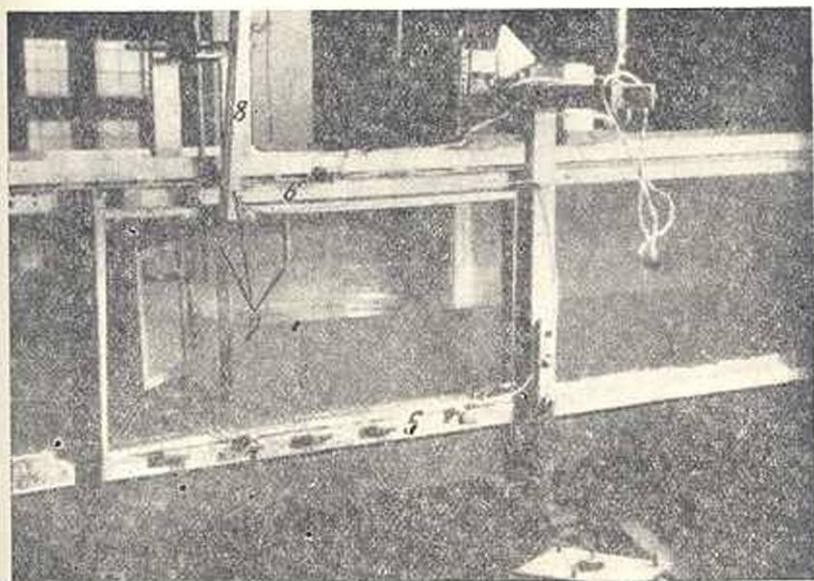
Имеем прямой лоток со стеклянными боковыми стенками. Вертикально опускаем приспособленный к подъемному механизму плоский щит из плексигласа (фиг. 3). Визуализируем частицу, двигающуюся в верхнем бьефе с помощью внесения в поток электрической лампочки малых размеров, привязанной к тонкой гибкой проволоке*. Одновременной фиксацией ее положения в каждый определенный момент времени в двух проекциях — со стороны стеклянной стенки лотка и с нормальной к ней стороны, — нижнего бьефа щита, можно восстановить движение частицы. При этом, в зависимости от величины чередующихся фиксаций и от величины скоростей, можно с определенной

* Цоколь с лампочки удален и объемный вес стеклянной части приведен к объемному весу воды с помощью покрытия поверхности металлической сеткой. Толщина провода составляет несколько микронов.

точно определить направление и величину вектора скорости в каждой зафиксированной точке.



Фиг. 3.

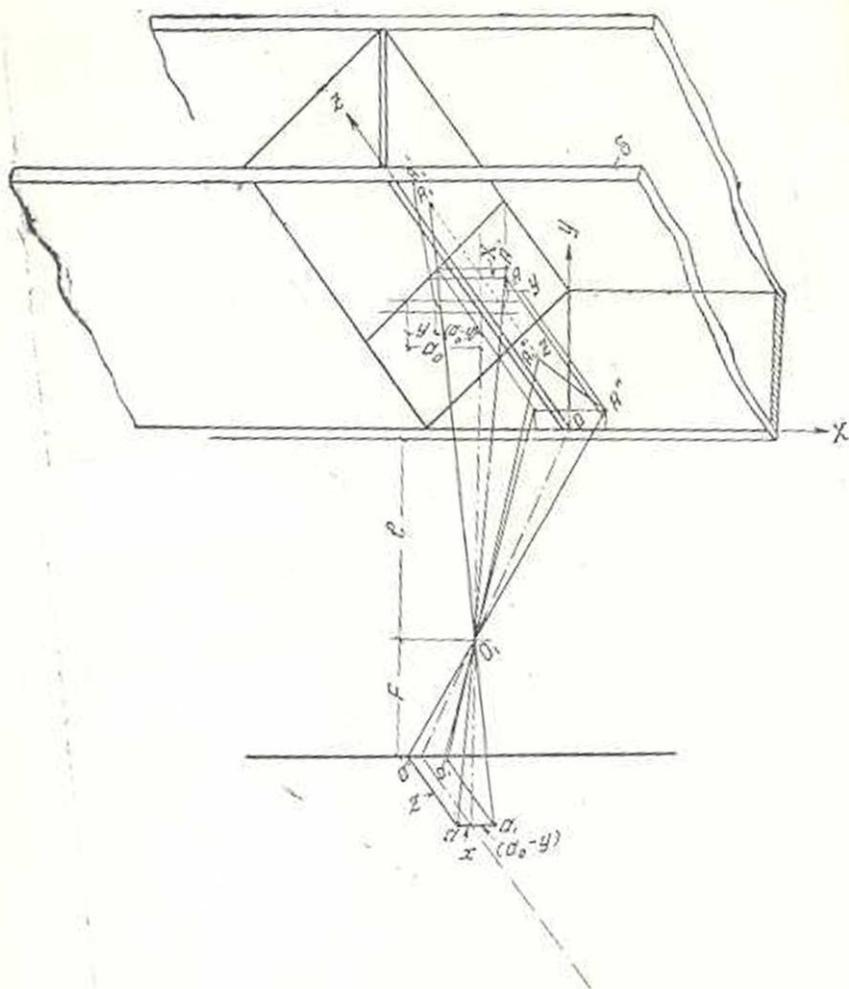


Фиг. 3а

Такая фиксация могла бы быть осуществлена с помощью двух простых киноаппаратов синхронизированного действия, при их расположении в указанных взаимно перпендикулярных направлениях.

Наличие в нашей лаборатории только одного такого аппарата заставило нас искать другое решение задачи, и с этой целью второй киноаппарат был заменен зеркалом, отражающим вторую проекцию

Известия VIII, № 2-5



Фиг. 4.

светящейся точки также в первый аппарат. Таким образом, нам удастся на одном кадре пленки получить обе проекции движущейся точки (в данный момент).

3. Теоретические основы методики

Направим оси X, Y, Z вдоль стенки лотка, по линиям пересечения плоскости щита со стенкой и с дном лотка. Со стороны нижнего бьефа под углом 45° к щиту (на плане) расположим зеркало внешнего отражения (фиг. 4).

Пусть имеется в потоке светящаяся точка A . Ее изображение в зеркале совпадает с точкой A_1 . При расположении аппарата в точке O на расстоянии l от лотка и при фокусном расстоянии аппарата F , точка A и ее зеркальное изображение A_1 на кинокадре располагаются в точках a и a_1 , ориентированных относительно указанных на кадре горизонтальной и вертикальной осей.

Из очевидного подобия двух пирамид, образованных лучами $Aa, A''a''$, вертикальной осевой плоскостью, плоскостью кинокадра и плоскостью XOZ , проходящей через точку A (с высотами F и $l+Y$) имеем:

$$\frac{X}{x} = \frac{Z}{z} = \frac{l+Y}{F}$$

С другой стороны, по фиг. 5, изображающей зеркальное отражение A' точки A и их картин на пленке a и a' , имеем:

$$\frac{a_0 - Y}{y} = \frac{l + a_0 + Y}{F}$$

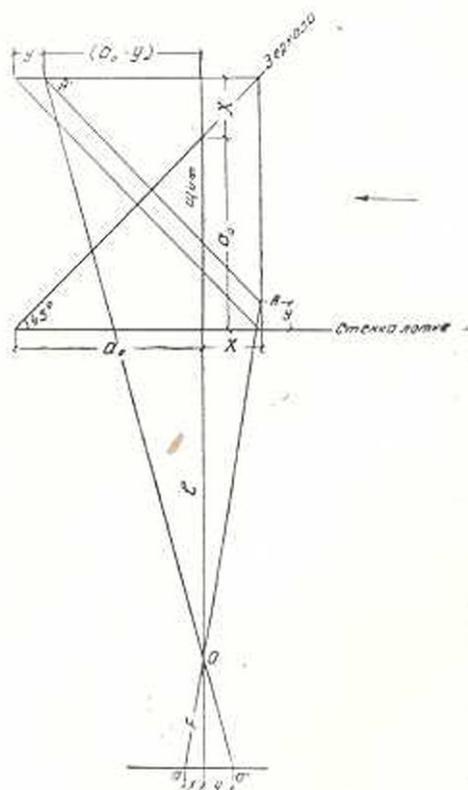
здесь X, Y, Z — координаты точки A в лотке,

x, y, z — координаты ее

на кадре,

a_0 — основание треугольника, образованного зеркалом, щитом и стенкой лотка.

Имея размеры установки l, a_0, F и x, y, z из кинопленки, легко определить все три координаты точки в лотке из выражений:



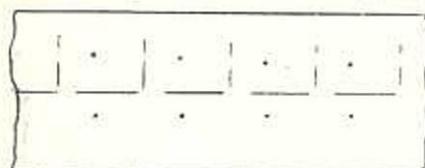
фиг. 5.

$$Y = \frac{1}{1 + \frac{xy}{F^2}} \left[a_0 - \left(\frac{l + a_0}{F} + \frac{lX}{F^2} \right) y \right],$$

$$X = \frac{l+Y}{F} x,$$

$$Z = \frac{l+Y}{F} z.$$

Снимая на киноплёнку движущуюся точку А, на каждом кадре получаем две проекции точки в данное мгновение (см. фиг. 6). Зная время



Фиг. 6.

t прохождения точки от положения X_1, Y_1, Z_1 к положению X_2, Y_2, Z_2 , легко определить величину и направление вектора скорости в данное мгновение в данной точке из известных соотношений:

$$v = \frac{1}{t} \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}.$$

$$\cos(v, X) = \frac{X_2 - X_1}{t |v|},$$

$$\cos(v, Y) = \frac{Y_2 - Y_1}{t |v|},$$

$$\cos(v, Z) = \frac{Z_2 - Z_1}{t |v|}.$$

В приведенных рассуждениях мы не учли то обстоятельство, что лучи, идущие к аппарату от светящейся точки, проходят путь через разнородную среду и на поверхностях раздела этих сред претерпевают преломление.

При рассмотрении этого вопроса основываемся на известных положениях геометрической оптики [3]:

1. Законе Декарта-Снелля, гласящем, что как луч, падающий на плоскость, так и лучи, отраженные и преломленные, находятся в одной плоскости вместе с нормалью, восстановленной к плоскости преломления или отражения в точке падения луча.

2. Принципе Ферма о том, что луч проходит по такому пути, где длина оптического пути имеет экстремальное значение.

Основываясь на первом положении, заключаем, что координаты X и Z , полученные от картины действительной точки на кадре, не искажаются.

Имея в виду первый и второй принципы, приходим к выводу, что координата y на пленке, соответствующая действительному значению $(a_0 - Y)$, получается также без искажения.

Таким образом приходим к выводу, что при предложенной схеме использования зеркала с киноаппаратом удастся определить все

три координаты точки в пространстве и во времени, избегнув как сложной аппаратуры, так и кропотливых вычислений.

4. Опытная установка

Опытная установка состоит из:

1. *Лотка*, длиной 10 м, шириной 20 см, глубиной 50 см. Шарнирно закрепленного одним концом, а другим подвешенного к междуэтажному перекрытию на подвесках, с возможностью изменять уклон дна лотка (фиг. 3).

Боковые стенки лотка стеклянные, толщиной 0,7 см, дно деревянное. Они собраны в металлическом каркасе. Вода подается из общей циркуляционной системы лаборатории. Расход воды измеряется треугольным водосливом.

2. *Щит* — плоского, прозрачного (из плексигласа), толщиной 0,4 см. Размеры щита 20×30 см. Он перекрывает всю ширину лотка. Щит снабжен подъемным механизмом и опирается на упоры из полосового железа, плотно прилегающие к стенкам лотка. Положение щита строго вертикальное; углы между щитом и боковыми стенками лотка прямые (фиг. 3).

3. *Зеркала* — внешнего отражения, размерами 20×23 см. Оно помещено в деревянной раме, привешенной к щиту со стороны нижнего бьефа и имеющей вращение вокруг вертикальной стороны, прилегающей к щиту. Угол между зеркалом и щитом равен 45° . Зеркало имеет подтяжку для его грубой фиксации, а также винты для микрорегулировки его положения.

4. *Киноаппарата* марки Луто с одним объективом. Фокусное расстояние объектива $F = 47$ мм. Для установки аппарата с левой стороны объектива приделана визирная труба, ось которой составляет некоторый угол с оптической осью объектива. Для центрировки аппарата в центре объектива визирной трубы имеются взаимно перпендикулярные пересекающиеся нити. Аппарат жестко привинчивается к стенду, имеющему регулировку в горизонтальной плоскости. Стенд сидит на треноге, которая имеет возможность жесткой фиксации на плане, а на ней с помощью специальной рукоятки стенд может перемещаться по вертикали.

5. *Координатной системы* — для ориентировки положения точки в отношении неподвижной системы (так как съемка производится в темноте и видна только движущаяся частица). Она представляет собой хромоникелевую проволоку, натянутую по горизонтальному дну лотка и по линии пересечения верхней плоскости щита со стенкой лотка.

Путем экранирования раскаленной проволоки через каждые 10 см на длине 5 см горизонтальная ось разделяется на отрезки, позволяющие определить масштаб (фиг. 3а).

6. *Линейных шкал* по осям ОХ и ОУ.

7. Откидной рамы с жестко соединенными двумя лампочками и вертикального стержня с жестко соединенной одной лампочкой (по 6,5 вольт) для установки зеркала.

8. Лампочки с рамой для центрировки аппарата (фиг. 3а).

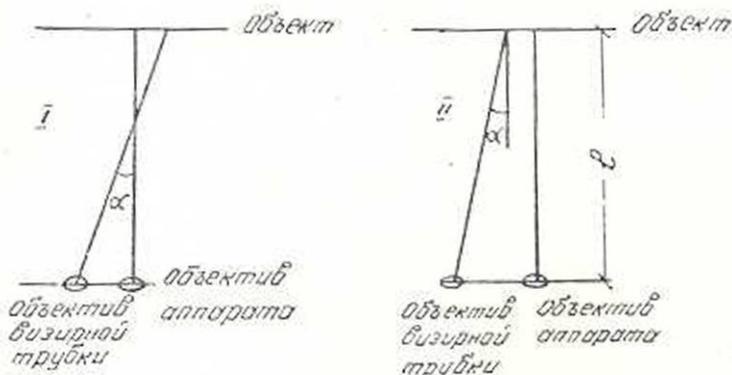
5. Наладка установки

После установления высоты открытия щита и расхода воды аппарат приводится в горизонтальное положение. Грубо устанавливается зеркало под углом 45° к щиту, затем оптическим способом уточняется его положение.

Для этого устанавливаются две светящиеся точки в области зеркала вне лотка, закрепленные к проволочной раме 7 и имеющие горизонтальное расположение; совмещается горизонтальная линия креста визирной трубки аппарата с ними. Помещается другая светящаяся точка в верхнем бьефе с таким расположением, чтобы ее изображение в зеркале совпало бы с изображением одной из вышеуказанных точек и фиксируется ордината у этой точки. Затем, эта точка передвигается параллельно оси ОУ на расстояние, соответствующее расстоянию двух закрепленных точек у зеркала. При этом должны иметь совпадение второй из этих точек со вторым расположением движущейся точки в зеркальном изображении.

На этой основе последующими попытками уточняется положение зеркала микродвижениями.

Последующим шагом центрируется киноаппарат, т. е. объектив аппарата направляется в центр области, подлежащей съемке.



фиг. 7.

Габариты съемки определяются с помощью визирной трубки. Ее ось составляет некоторый угол с оптической осью объектива, поэтому в общем случае ожидается отклонение рамы съемки от наблюдаемой через визирную трубку.

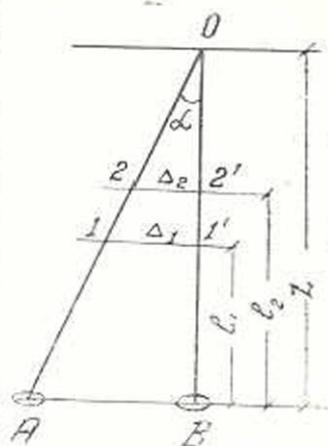
В зависимости от величины угла α и расстояния аппарата от объекта возможны два случая отклонения лучей (фиг. 7). Первый слу-

чай будет иметь место при больших углах α или больших расстояниях l , второй — наоборот.

Предварительные съемки показали, что в нашем случае ($l = 1$ м) имеет место вторая схема.

По фиг. (8) пусть А — объектив визирной трубы, В — объектив киноаппарата; ОА и ОВ — оптические оси визирной трубы и киноаппарата. 1—1 — плоскость размещения объекта на расстоянии l_1 , 2—2 — плоскость размещения объекта на расстоянии l_2 от аппарата.

Если фокусное расстояние объектива аппарата F , то, согласно фиг. 8, будем иметь расхождение оптических осей ОА и ОВ на расстоянии l_1 :



фиг. 8.

$$\Delta_1 = \frac{l_1}{F} \Delta_1', \quad (1)$$

где Δ_1' — расхождение осей на пленке.

На расстоянии l_2 это же расхождение:

$$\Delta_2 = \frac{l_2}{F} \Delta_2', \quad (2)$$

где Δ_2' — величина Δ_2 на пленке.

Исходя из подобия треугольников $OI'I'$ и $O2'2'$ (учитывая, что $I'I'$ параллельна $2'2'$) будем иметь:

$$\frac{OI'I'}{O2'2'} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad (3)$$

откуда
$$O2'2' = \frac{OI'I' - O2'2'}{\Delta_1 - \Delta_2} \Delta_2. \quad (4)$$

Определив после двухкратной съемки Δ_1' и Δ_2' и вычислив Δ_1 и Δ_2 по приведенным выше соотношениям (1) и (2), а также учитывая, что $OI'I' - O2'2' = l_2 - l_1$, получим:

$$O2'2' = \frac{l_2 - l_1}{\Delta_1 - \Delta_2} \Delta_2.$$

Тогда легко определить смещение двух осей Δ на расстоянии аппарата l .

$$\Delta = (L - l) \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

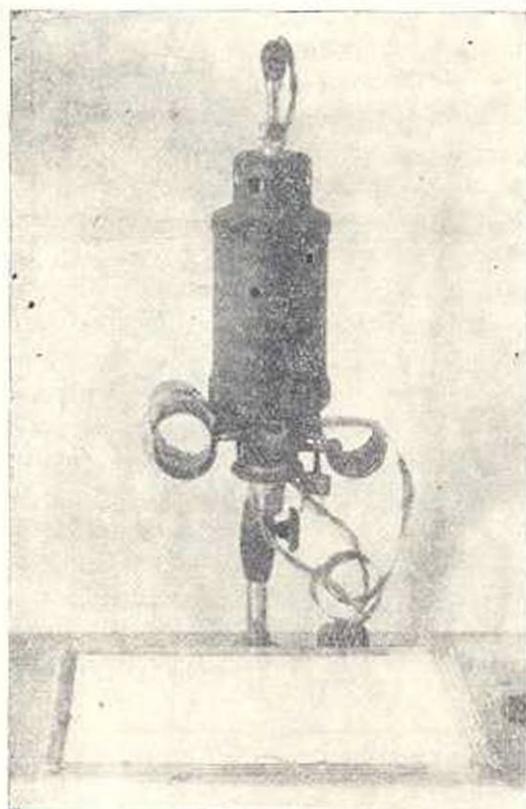
где

$$L_1 = l + O2'2', \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta_2}{O2'2'}.$$

Центрированием визирной трубки аппарата с таким эксцентриситетом достигается совмещение центров намеченной области съемки и кадра.

6. Производство опыта

После наладки установки и центрирования аппарата убираются из области съемки вспомогательные лампочки со своими рамами,



фиг. 9.

предназначенными для наладки установки. Остается одна лампочка, установленная в верхнем бьефе с фиксированным значением координаты y .

Выключается свет. Короткой очередью съемки фиксируется положение этой светящейся точки на пленке для вычисления z_0 .

Убирается и эта лампочка. Зажигается лампочка-поплавок, свободно привешенная к тонкой длинной проволоке.

Лампочка опускается в воду за пределами поля съемки аппарата и одновременно начинается съемка. Лампочка, свободно двигаясь вместе с водой, у щита притягивается к воронке, затем, вращаясь, увлекается ее шлейфом в нижний бьеф.

Движение лампочки фиксируется на кинопленке, каждый кадр которой успевает охватить одно мгновенное положение лампочки в виде точки. Для примера на фиг. 6 приведена копия нескольких смежных кадров.

Скорость съемки—24 кадра в секунду.

7. Обработка экспериментального материала

После проявки кинопленки обработка съемки заключается в определении координат x , y , z точки на каждом кадрике.

Для увеличения точности измерений обработка производится на увеличенных кадрах. Для сокращения времени обработки последняя

производится непосредственно на увеличителе к фотоаппарату ФЭД У-2, приспособив к нему специальный экран.

Экран, изображенный на фиг. 9, имеет горизонтальную и вертикальную шкалы с нониусами, точность отсчета по которым составляет 0,1 мм.

Имея на кадрике величину 10 см натуры, соответствующую длине пунктира, составляющего горизонтальную ось, первым шагом устанавливаем степень увеличения кадра на экране, приложенном к У-2, затем читаем координаты точки x , z с одной проекции и y с другой. При наличии такого материала и скорости съемки определение величины и направления скорости в каждой точке, пройденной лампочкой, не представляет никакой трудности (см. § 3).

Водно-энергетический институт

АН Армянской ССР

Поступило 4 VI 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Минский Е. М. Турбулентность руслового потока. Гидрометеиздат, 1952.
2. Федоров Н. Н. Опыт применения стереофотограмметрии к экспериментальному изучению скоростной структуры водных потоков, Труды ГПИ, в. 28 (82), 1951.
3. Папалевский Н. Д. Курс физики, т. 2, 1947.

Ս. Մ. Մատինյան (Խառնակյան)

ԶԱԳԱՐԱԳՈՅԱՑՄԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ԶԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ՀՈՍԱՆՔՈՒՄ ԱՐԱԳՈՒՅՑՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԶԱՓՄԱՆ ՄԵՓՈԴ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Զագարագոյացման պայմաններում նեղուկի շարժման արագութեան դաշտը ներկայացնում է փոփոխական տարածական պատկեր: Այդ դաշտի ֆիզիկական համար դոյութունը չունի շարժման համապատասխան միջոց:

Առաջագրված խնդիրը հաղվածում յուծված է պարզ կինոապարտաի և արտաքին անդրադարձման հաշիւու միջոցով, որոնց հարմար փոխդասափորութեամբ հաջողվել է շարժվող կետի տարածական կոորդինատներն ստանալ յուրաքանչյուր $\frac{1}{24}$ վայրկյանում, միաժամանակ խոստովելով մանրակրկիտ հաշիւներից և բարդ ապարատաւրայից:

Փորձնական հիդրոդինամիկայի ասպարեզում ավյալ մեթոդն ունի քնդհանուր կիրառական նշանակութեան:

ГИДРОЭНЕРГЕТИКА

М. С. Торгомян

Характеристика водных ресурсов горных рек с точки зрения их энергетического использования

При перспективном проектировании гидроэнергостроительства (стадия схемы использования водотока), необходимо иметь объективные данные о ценности водных ресурсов района, подлежащего электрификации.

Интенсивное строительство ГЭС, работающих на бытовом (незарегулированном) стоке, вызывает необходимость в детальном анализе естественного режима горных водотоков, обобщения гидрологических показателей рек для перехода от них к водно-энергетическим показателям.

В данной статье ставится задача — установить, как естественный режим водотоков влияет на показатели использования стока. При этом одновременно рассматривается взаимосвязь между характеристиками естественного режима рек и водно-энергетическими характеристиками ГЭС с учетом пропускной способности деривации гидростанции.

Хотя при анализе использован фактический материал только по водотокам Армянской ССР, однако методика, применяемая при этом анализе, может быть использована для любых незарегулированных ГЭС, сооружаемых на горных реках.

Необходимо указать, что в технической литературе нет работ, в которых бы устанавливались гидрологические характеристики какого-либо района с отмеченной выше целью, т. е. где были бы даны толстые оценки влияния различных параметров речного стока на показатели использования водной энергии. Если и имеются работы, в которых достаточно подробно изучаются закономерности речного стока различных видов как для разработки методики установления некоторых параметров речного стока для неизученных рек, так и в энергетических целях, то нет работы, где эти закономерности относились бы к целому району.

Реки, текущие на территории Армянской ССР, относятся к группе рек с весенним половодьем. Весеннее половодье характеризуется одной сильно растянутой волной, продолжительность которой достигает в среднем примерно 3 месяцев (с апреля по июнь). Летне-осенние паводки сравнительно не велики и носят случайный характер. Наименьшая водность обычно наблюдается зимой (в январе).

В работе автора [3] был изложен способ определения энергетической ценности той или иной реки, исходя из ее падения и средне-многолетней водности.

Предложенные автором критерии могут служить для суждения о потенциальных ресурсах водотока в целом.

При переходе к вопросу реального использования стока, несомненно, нельзя энергию, вырабатываемую гидростанциями, рассчитывать по средне-многолетним расходам. Такой расчет возможен только при полном многолетнем регулировании стока водохранилищами.

Для незарегулированных гидростанций, входящих в энергетическую систему, располагаемая мощность, в пределах пропускной способности деривации, зависит от водного режима рек в многолетнем, годовом, месячном и суточном разрезах; следовательно, необходимо определять все параметры речного стока, а также установить — какие из них являются главными и какие второстепенными.

Для вышеуказанных ГЭС большое значение имеет колебание в многолетнем разрезе годовых, месячных и суточных расходов, от чего зависят и колебания мощности, следовательно, и выработки энергии ГЭС.

С этой целью в статье дается некоторое обобщение характеристик стока рек Армянской ССР, по которым имеются многолетние данные наблюдения по расходам.

Величина годового стока этих рек в многолетнем разрезе колеблется в значительных пределах [4], в связи с чем коэффициент изменчивости годового стока ($C_{v_{\text{год}}}$) колеблется в пределах от 0,08 до 0,4. Преобладающее число рек имеет коэффициент изменчивости в пределах от 0,15 до 0,25. В среднем по данным для всех рек $C_{v_{\text{год}}} = 0,2$.

Отношение крайних значений модульных коэффициентов $K_{r_{\text{макс}}}$ и $K_{r_{\text{мин}}}$ колеблется в пределах от 1,5 до 3,2.

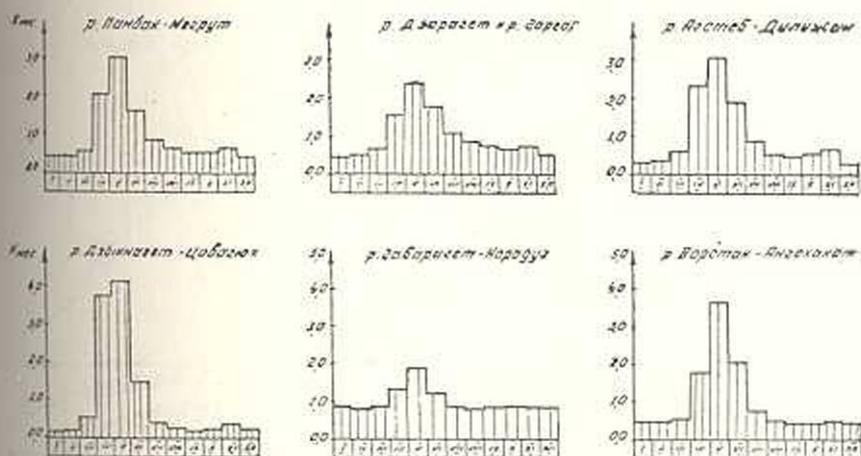
Довольно чувствительное колебание дают средние величины месячных расходов для различных рек за многолетие: от 0,18 до 4,2 (фиг. 1).

Характер внутригодового распределения стока для рассматриваемых рек представлен на фиг. 1 в виде, выраженном через модульные коэффициенты.

Для характеристики размера обеспеченности располагаемой мощности по водотоку гидроустановки и определения возможной выработки энергии может служить кривая обеспеченности среднесуточных расходов.

Для суждения о возможных колебаниях как продолжительностей, так и расходов за многолетие, особенно для ГЭС, можно построить для каждого расхода кривую обеспеченности его продолжительности и для каждой характерной продолжительности кривую обеспеченности расходов по годам).

*Среднее внутригодовое распределение месячных
модульных коэффициентов стока*



Фиг. 1.

На фиг. 2 приводятся вышеуказанные характеристики для р. Азат.

На основании этой совокупности кривых можно судить, для водотока в целом, об обеспеченности определенного расхода, об изменчивости продолжительности этого расхода, о величине расхода исковой обеспеченности и об изменчивости величины расхода фиксированной продолжительности.

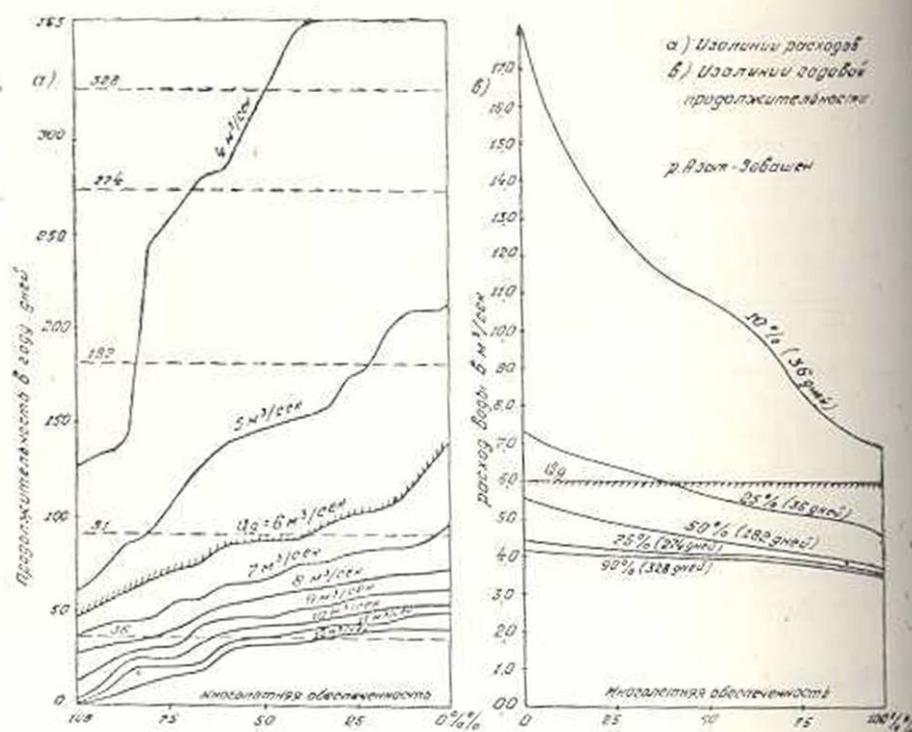
При определенном расчетном расходе деривации (Q_d) представляет интерес та часть графиков (фиг. 2), которая соответствует расходам, меньшим Q_d . Например, при расчетном расходе деривации $6 \text{ м}^3/\text{сек}$ зона графика выше изолинии, соответствующей этому расходу, охватывает диапазон изменений в многолетнем разрезе продолжительности расходов, пропускаемых данной деривацией.

Так как получение таких характеристик связано с большими вычислительными работами, то при технико-экономическом проектировании ГЭС ограничиваются получением кривых обеспеченности среднесуточных расходов.

Кривые обеспеченности среднесуточных расходов за отдельные годы отличаются друг от друга и имеют разнообразные очертания (фиг. 3). Поэтому в практике проектирования применяются результирующие кривые обеспеченности среднесуточных расходов, полученные на основании кривых продолжительности для конкретных лет.

Учитывая, что кривые обеспеченности среднесуточных расходов, являются одной из основных характеристик, используемых при водохозяйственных расчетах, особенно при проектировании незарегулированных ГЭС, ниже дается анализ этих кривых для 24 основных рек Армянской ССР (по данным 35 постов с многолетним рядом).

На фиг. 4 приводятся результирующие кривые обеспеченности



Фиг. 2.

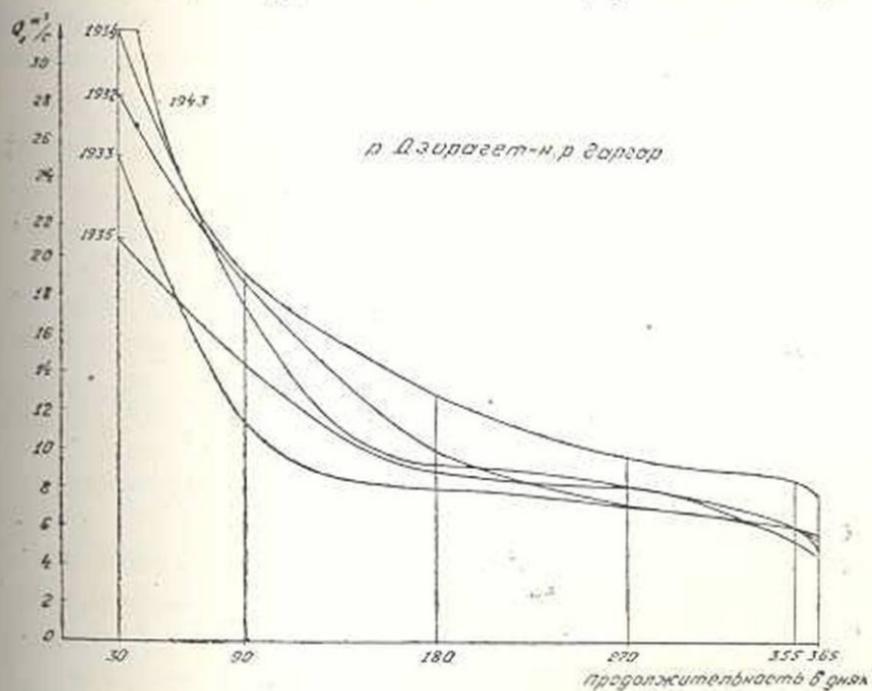
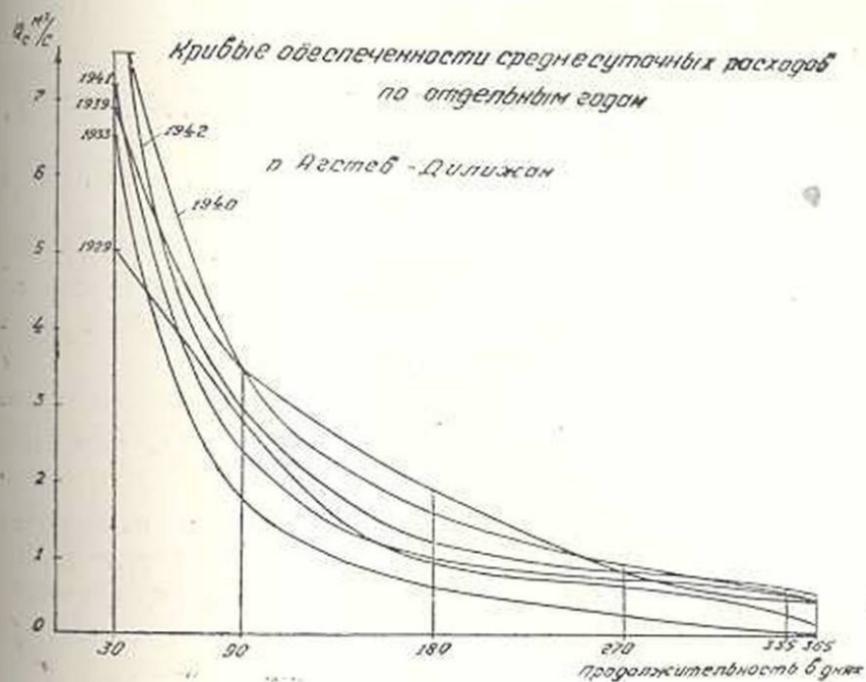
среднесуточных расходов для некоторых рек Армянской ССР, построенные на основе данных по модульным коэффициентам по расходам характерных обеспеченностей $K_{об} = \frac{\bar{Q}_{об}}{\bar{Q}_0}$, где $\bar{Q}_{об}$ — среднегодичные значения среднесуточных расходов различной продолжительности (30, 90, 180, 270, 355 дней), выраженные в м³/сек.

На этой же фигуре виден характер колебаний для тех же рек отношений наибольших и наименьших величин модульных коэффициентов.

Из фиг. 4 видно, что значение $\frac{K_{наиб.}}{K_{наим.}}$ для рек Армянской ССР колеблется от 1,9 до 9,1. Для средних значений обеспеченностей это отношение близко к наименьшему значению и увеличивается в обе стороны от среднего.

Такая характеристика суточных расходов различной продолжительности еще не дает возможности сравнивать отдельные водотоки с точки зрения их естественной зарегулированности. Критерием для такого сравнения может служить коэффициент естественной зарегулированности $\bar{\varphi}_0$ (по Д. Л. Соколовскому [2]).

Анализ коэффициентов естественной зарегулированности показал, что реки Армянской ССР в основном можно разбить, по признаку зарегулированности, на три категории:



Фиг. 3.

I. Слабо зарегулированные: $\bar{\varphi}_0 < 0,6$ (к этой категории относятся реки Агстев, Веди, Мармарик и др.).

II. Средне зарегулированные: $\bar{\varphi}_0 = 0,6-0,75$ (рр. Памбак, Ворган, Дзорaget и др.).

III. Сильно зарегулированные: $\bar{\varphi}_0 > 0,75$ (рр. Азат, Гаварaget и др.).

Необходимо отметить, что преобладающее число рек первой категории имеет $\bar{\varphi}_0 = 0,5-0,6$. Более низкие значения встречаются очень редко (например, для р. Дзыкнаget — 0,477). Среднее же значение $\bar{\varphi}_0$ для этой категории равно 0,55.

Для второй категории рек среднее значение выражается величиной 0,68, соответственно для третьей категории $\bar{\varphi}_0 = 0,8$ (максимальное же значение $\bar{\varphi}_0 = 0,872$ — р. Гаварaget).

Ясно, что показатель φ_0 одновременно является и коэффициентом использования стока реки незарегулированными гидростанциями при пропускной способности деривации, равной среднемноголетнему расходу, т. е. при $\bar{K}_0 = 1$. Отсюда следует, что чем больше φ_0 , тем полнее можно использовать водные ресурсы данной реки.

На фиг. 4 видно, что при ограничении кривой обеспеченности максимальным расходом (т. е. при $\bar{K}_{\text{макс}}$) коэффициент использования стока будет равен единице. А при ограничениях $\bar{K}_{\text{экс}}$ и $\bar{K}_{\text{мин}}$ для всех рек коэффициент использования стока меняется в следующих пределах:

$\bar{\varphi}_{\text{экс}} = 0,657-0,1$; среднее взвешенное значение 0,283.

$\bar{\varphi}_{\text{мин}} = 0,63-0,07$; среднее взвешенное значение 0,248.

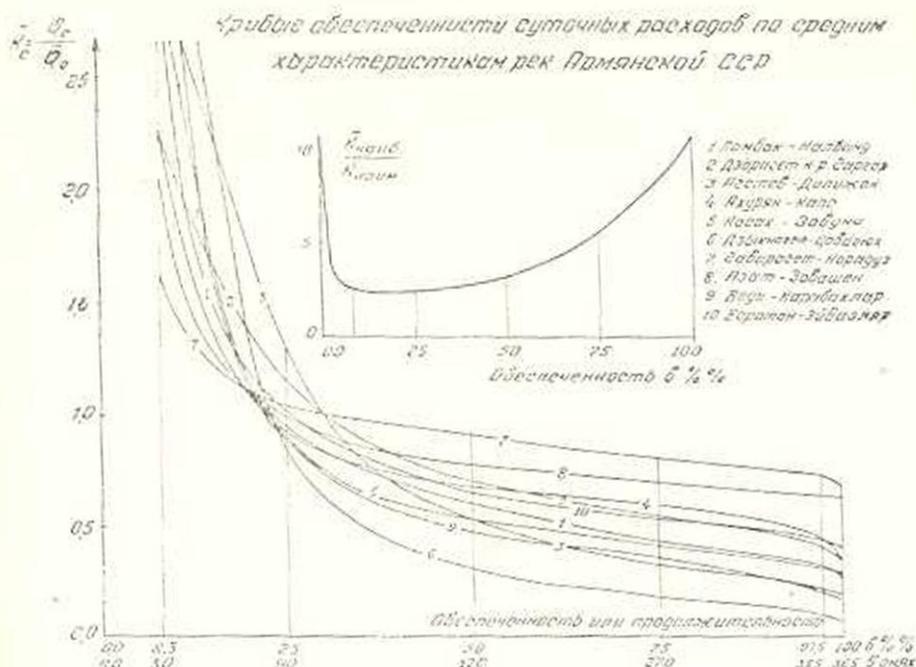
Важным показателем также является обеспеченность среднемноголетнего расхода (\bar{p}_0), получаемая из кривой обеспеченности суточных расходов (т. е. при $\bar{K}_0 = 1$) и имеющая для рек Армянской ССР значения, меняющиеся примерно в пределах 22—30%. Ее среднее взвешенное значение равно 25% (фиг. 4).

Этот показатель хорошо характеризует несимметричность кривых обеспеченности суточных расходов.

Исследования показали, что продолжительность среднемноголетнего расхода \bar{p}_0 не связана с φ_0 (фиг. 4), т. е. если река зарегулирована хорошо, это еще не значит, что при $\bar{K}_0 = 1$ \bar{p}_0 велико.

Для выявления многолетних характеристик и параметров кривых обеспеченности изучены ежегодные кривые обеспеченности расходов для рек с числом лет наблюдений от 7 до 20. Общее же число лет составляет около 450.

Для выявления изменчивости параметров, характеризующих эти кривые в многолетнем разрезе в данной работе вводится понятие годового коэффициента естественной зарегулированности φ_g , который



Фиг. 4.

характеризуется площадью, ограниченной кривой обеспеченности для каждого года и срезкой на уровне $K_0=1$.

Исследования показали [4], что имеются различия в амплитудах колебаний $a_2 = \varphi_1 \bar{z}_0$ для разных рек. Коэффициент изменчивости этой части стока (C_{V_2}) колеблется в пределах от 0,06 до 0,22. В среднем, по данным для всех рек, $C_{V_2} = 0,12$.

Для большей части рек Армянской ССР C_{V_2} может колебаться в пределах от 0,08 до 0,16.

С целью перехода от показателей соответствующих полному стоку к показателям стока, вызванным ограниченностью пропускной способности деривации ГЭС (при $K_0=1$), необходимо установить связь между $C_{V_{\text{год}}}$ и C_{V_2} .

На фиг. 5 дан график зависимости между $C_{V_{\text{год}}}$ и C_{V_2} . Из графика видно, что C_{V_2} всегда меньше, чем коэффициент изменчивости годового стока. На основании этого графика связь ориентировочно можно выразить уравнением прямой вида: $C_{V_2} = 0,6 C_{V_{\text{год}}}$.

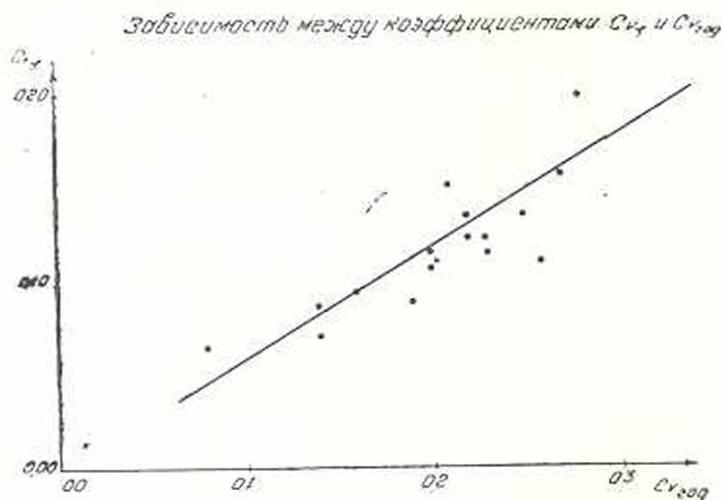
Проведенный с той же целью анализ модульных коэффициентов полного годового стока и части стока показал, что для одной и той же реки нет связи между этими показателями, т. е. используемые

части стока (a_2) не зависят от полного годового стока того же года ($K_{год}$).

Таким образом, видно, что нет какой-либо связи между межениными стоками и стоками половодья для одной и той же реки, так как они зависят от многих физико-географических факторов.

Для незарегулированных ГЭС большое значение имеет величина минимальной мощности, при определении которой недостаточно наличие кривой обеспеченности, потому что при переходе от одной ГЭС к группе их необходимо учитывать совпадение по времени минимальных расходов как в годовом, так и в многолетнем разрезе.

Учитывая то обстоятельство, что минимальный среднемесячный сток наблюдается в январе и что этот месяц для энергетики является критическим (так как потребность в электроэнергии зимой, как правило, наибольшая), ниже приводится анализ показателей естественного стока для этого месяца.



Фиг. 5.

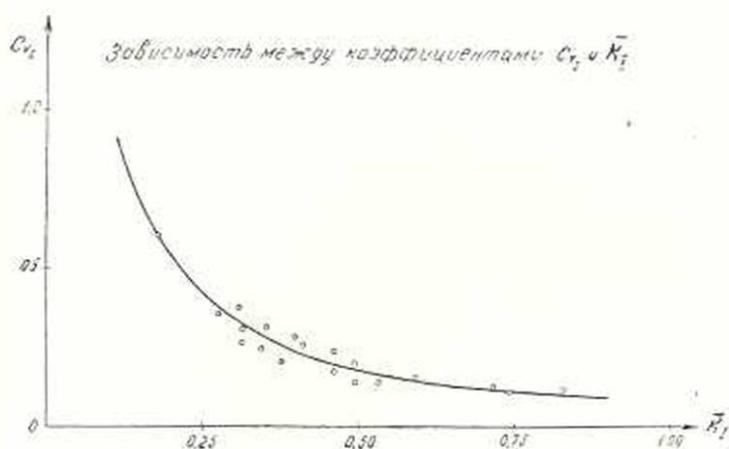
Январский сток чувствительно колеблется за многолетие, так что коэффициент изменчивости этого стока по данным всех рек составляет 0.25. Колебания же среднесуточных расходов в течение этого месяца малы: Это дает возможность пользоваться только среднемесячными значениями расходов.

На фиг. 6 приведена зависимость между среднееголетним январским расходом, характеризующимся модульным коэффициентом \bar{K}_1 и коэффициентом изменчивости этих расходов за многолетие (C_{V_1}). Для практического применения этой зависимости найдено ее аналитическое выражение (с использованием способа наименьших квадратов) в виде:

$$C_{V_1} = 0,08 \cdot \bar{K}_1^{-1,2}$$

Также были получены графики связи между основными параметрами речного стока ($C_{v_{год}}$, $\bar{K}_{мес}$, \bar{K}_{335}), и коэффициентом $\bar{\varphi}_0$. Эти графики здесь не приводятся. На основании этих графиков сделан вывод, что в качестве основного показателя естественной зарегулированности реки вообще можно принять коэффициент $\bar{\varphi}_0$, учитывая еще то обстоятельство, что этот параметр отражает также степень использования ресурсов реки.

Горные реки с весенним половодьем по классификации Б. Д. Зайкова отнесены к 10 типам (от № 6 до № 15) [1].



Фиг. 6.

Качественный анализ режима наших рек, с точки зрения характера внутригодового распределения стока и степени естественной зарегулированности, показал, что эти реки относятся к 6, 7, 11, 12, 13, 14 и 15-му типам и отличаются друг от друга, в основном, только степенью зарегулированности.

Отсюда ясно, что полученные выше зависимости применимы только для рек указанных типов, но метод подхода к вопросу оценки влияния различных параметров на показатели использования стока является общим при переходе от гидрологических характеристик водотока к водно-энергетическим характеристикам незарегулированных ГЭС.

Выводы

1. В результате анализа выяснено, что ввиду разнообразия генетических условий, определяющих режим рек Армянской ССР, эти режимы столь разнообразны и внутригодовое распределение стока по годам меняется в таких широких пределах, что не удается для одной и той же реки иметь какую-либо связь между ее параметрами.

Искомые связи получаются только для среднееголетних значений этих параметров в результате сопоставления данных по всем рекам Армянской ССР.

2. В качестве универсальной гидрологической характеристики водотока может быть применен коэффициент его естественной зарегулированности ($\bar{\psi}_0$)

3. Результаты анализа речного стока по всем основным его показателям дают возможность оценить влияние последних на показатели использования стока и перейти от гидрологических характеристик реки к водно-энергетическим характеристикам незарегулированных ГЭС.

Водно-энергетический институт
АН Армянской ССР

Поступило 14 X 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Зайков Б. Д. Средний сток и его распределение в году на территории Кавказа. Гидрометеонадат, Л., 1946.
2. Соколовский Д. Л. Речной сток (методы исследования и расчетов). Гидрометеонадат, Л., 1952.
3. Торгоман М. С. К классификации рек Армянской ССР. Известия АН Армянской ССР, т. II, № 4, 1949.
4. Торгоман М. С. Цикличность в ходе водности рек и ее влияние на колебания выработки электроэнергии. Известия АН Армянской ССР (физ.-мат., естеств. и техн. науки), т. IV, № 4, 1951.

Մ. Ս. Թորգոման

ԼԵՒՆԱՅԻՆ ԳԵՏԵՐԻ ԶՐԱՅԻՆ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՒՄԸ ՆՐԱՆՑ ԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ՕԳՏԱԳՈՐԾՄԱՆ ՏԵՍԱՆԿՑՈՒՆՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արված է բնության գետերի բնական սեփականության վերլուծումը բազմազարյա հիդրոլոգիական գիտաձևերի այբայբերի հիման վրա:

Վերլուծման արդյունքները նախադրաբար են ապրիս գնահատելու այդ գետերի ջրային սեռերաները և ըստ այնմ բնարելու հիմնախնդրի աշխիվերապ ցուցանելը: Ստացված են մի շարք բնութագրեր, որոնք թույլ են ապրիս գետերի հիդրոլոգիական ցուցանիշների հիման վրա որոշելու հաննախարված հիդրոէլեկտրական ջրա-էներգետիկ բնութագրերը, ելնելով գետերի բնական կանոնադրվածությունը առախնանից:

МАШИНОСТРОЕНИЕ

А. Т. Газаров

О некоторых вопросах синтеза шарнирных
четырёхзвенников

1. Одним из основных и наиболее распространенных механизмов с низшими парами в современной технике является шарнирный четырёхзвенник, включая и его частный случай — механизм кривошипно-шатунный. Кроме того, он является тем основным механизмом, из которого развиваются и многие многозвенные механизмы. Этим объясняется тот значительный интерес, который вызывает к себе этот механизм.

Область применения этих механизмов непрерывно расширяется благодаря внедрению во все отрасли народного хозяйства СССР все новых машин и механизмов, в результате широко проводимой механизации и автоматизации производства. Этому способствует также и то обстоятельство, что значительные удельные давления, возникающие в высших кинематических парах, сопровождающиеся интенсивным износом трущихся поверхностей, при существующей тенденции в современной технике к непрерывному увеличению величин сил и скоростей, вынуждают прибегать к замене механизмов с высшими кинематическими парами, механизмами с низшими и, в частности, шарнирно-рычажными. Стремление к созданию механизма со схемами, устойчивыми в динамическом отношении, привело к тому, что в настоящее время различные задачи синтеза механизмов быстроходных машин часто решаются проектированием не кулачковых, а шарнирно-рычажных механизмов* [2].

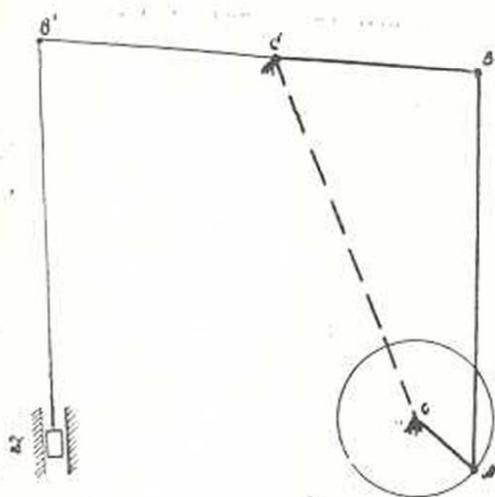
Успешному применению этих механизмов для разрешения большого количества технических задач, выдвигаемых практикой, в значительной мере способствовало также развитие методов их проектирования, разработанных в основном советскими учеными.

Следствием такого широкого распространения этих механизмов является настолько большое многообразие требований, которые ставятся на практике при их синтезе, что, несмотря на значительное количество различных методов, разработанных для синтеза механизмов с низшими парами и, в частности, шарнирных четырёхзвенников, в этой области остаются еще неограниченные возможности. Оценка крупнейшего представителя советской школы теории механизмов и машин,

академика И. И. Артоболевского, существующих методов синтеза механизмов, как еще далеко несовершенных, и его мнение, что в этой области советским ученым предстоит еще большая и упорная работа, может быть полностью отнесена и к вопросам синтеза шарнирных четырехзвенников, несмотря на значительное количество весьма ценных работ, проведенных у нас в этой области.

2. Из различных задач, которые на практике ставятся при синтезе шарнирных четырехзвенников, большое количество исследований проведено и проводятся в настоящее время в основном для двух групп задач: воспроизведение заданной траектории и воспроизведение заданного закона движения ведомого звена. Не отрицая актуальности этих задач, нельзя однако считать, что ими исчерпываются все актуальные практические задачи синтеза шарнирных четырехзвенников. В целом ряде случаев при синтезе ставятся совершенно другие требования, отличные от указанных выше, и для них должны быть проведены свои исследования. В частности, во многих отраслях промышленности и особенно в тяжелом машиностроении можно выделить группу задач с особыми требованиями к их синтезу.

Так, например, на фиг. 1 изображена схема одного из весьма распространенного в нефтяной промышленности механизма — ставка-скачалки.



Фиг. 1

Как видно из этой фигуры, механизм OABC является кривошипнокоромысловым четырехзвенником, в котором:

- OA — кривошип,
- AB — шатун,
- BC — коромысло,
- CO — стойка.

В конце B' коромысла подвешена колонна штанг, связанная с плунжером глубокого насоса. Качательное движение точки B используется для получения возвратно поступательного движения плунжера насоса.

При синтезе этого механизма задан ход плунжера глубокого насоса, чем предопределяется амплитуда колебания точки B коромысла. Кроме того, пределы для выбора λ — отношение длины кривошипа к длине шатуна — обычно задаются в достаточно узких пределах. Представленному условию будет удовлетворять бесчисленное множество различных шарнирных четырехзвенников; однако не все решения будут одинаково целесообразными. При выборе схемы механизма необходимо учесть ту его особенность, что на него действуют значитель-

ные нагрузки. Если в этом механизме углы передач не будут достаточно большими, то звенья механизма и кинематические пары будут нагружены значительными силами, что должно сказаться на размерах звеньев и их соединений, а также и на к. п. д. механизма. Таким образом, из всех вариантов конструктор должен выбрать тот, который имеет наибольшие углы передачи ψ .

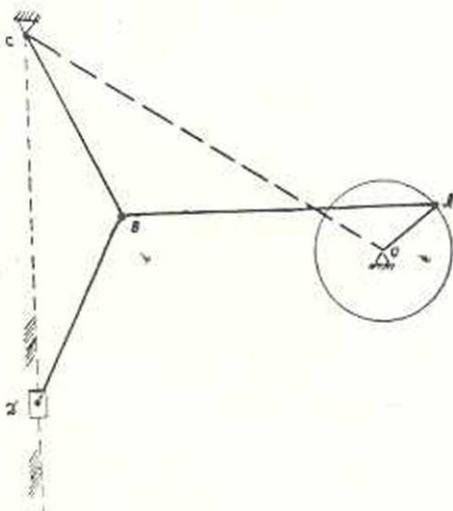
Можно привести значительное количество и других механизмов, широко распространенных в технике, для которых будут аналогичные условия синтеза. Так, например, на фигурах 2, 2а и 2б изображены схемы механизмов, которые широко применяются в кузнечно-прессовом оборудовании и, в частности, в различных автоматах, чекающих прессах, горизонтально-ковочных машинах и т. д. [3].

Эти механизмы состоят из шарнирных четырехзвенников $OABC$, с одной из точек коромысла которого связан исполнительный механизм. Во всех этих случаях является заданным движение ползуна D , которое предопределяет движение точки B коромысла, задаются в достаточно узких пределах λ и ставится требование получения наименьшего значения для крутящих моментов на кривошипном валу, наибольшей производительности машины и минимального веса их.

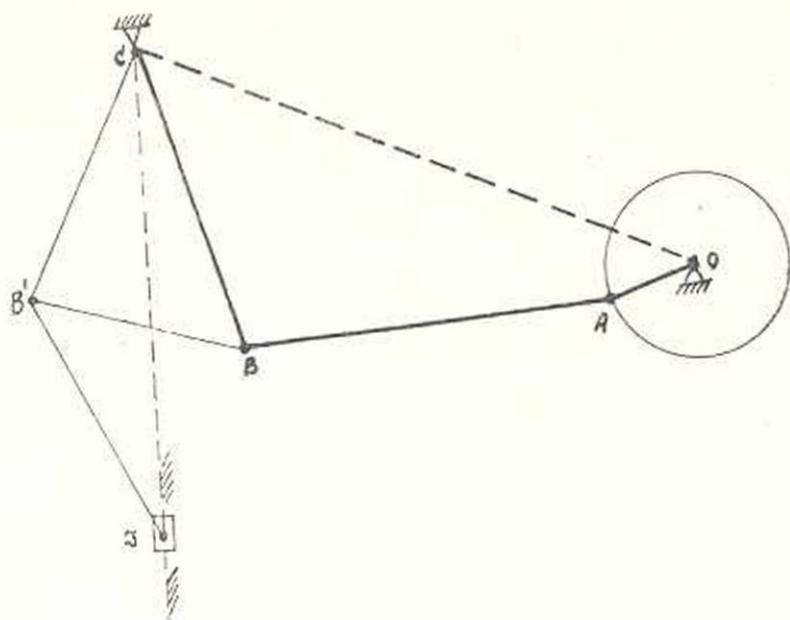
На фиг. 2в изображена схема механизма щековой дробилки, которая отличается от приведенной на фиг. 2 тем, что в ней к шарнирному четырехзвеннику присоединяется вместо группы II класса II вида, группа II класса I вида. Здесь также будут аналогичные требования к синтезу механизма. Аналогичные же требования предъявляются и при синтезе различных чистокривошипных прессов.

Можно было бы привести еще ряд механизмов, применяемых в машинах, распространенных в различных отраслях промышленности, для которых будут такие же требования к синтезу, однако приведенных примеров достаточно, чтобы убедиться в актуальности поставленной задачи.

Задание величины λ также не делает задачу определенной, и перед конструктором всегда стоит вопрос: где целесообразно расположить кривошипный центр и центр качания коромысла? Так как во всех этих механизмах мы имеем дело со значительными силами, действующими на звенья механизма, то очевидно выбор положения точек O



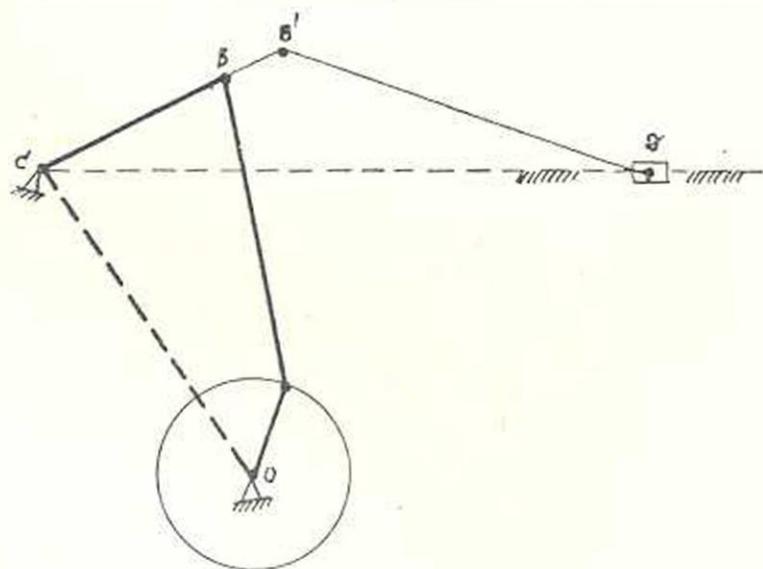
Фиг. 2.



Фиг. 2а.

и C не безразличен и при проектировании механизма конструктор должен стремиться выбрать оптимальный вариант.

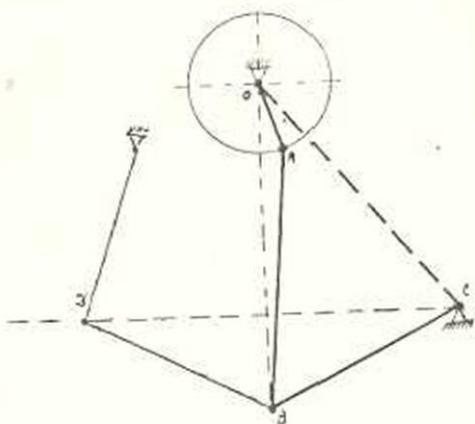
Вообще при синтезе шарнирных четырехзвенных механизмов, во многих практических задачах, получаются значительные затруднения,



Фиг. 2б.

вызванные тем, что задача определения размеров звеньев механизма получается неопределенной, ибо поставленным условиям отвечает бесчисленное множество различных четырехзвездников. Стремись выбрать

наилучшее решение из всех возможных, конструктор, при применяемых в настоящее время графических методах синтеза, должен вычертить несколько вариантов схем и, сравнивая их, выбрать окончательную схему. При этом в большинстве случаев он, выбрав какую-либо схему, все остальные варианты получает из нее путем изменения положений центра привеса коромысла и кривошипного центра. Не зная закономерностей изменения элементов четырехзвенника при изменении положений этих точек, он их берет случайными и, проведя громоздкую работу, не может все же найти наилучшее решение. Очевидно, что только в том случае конструктор сможет действительно найти желательный результат, если он будет знать закономерности изменений элементов четырехзвенника с изменением положения центра привеса



Фиг. 2в.

коромысла и кривошипного центра. Установление этих закономерностей является тем более актуальной задачей, что даже в результате разработки аналитических методов синтеза и установления параметров оптимальных механизмов, избежать процесса варьирования нельзя, ибо слишком жесткие требования, предъявляемые к размерам звеньев оптимального механизма часто заставляют конструктора смотреть на него как на основной вариант, от которого он должен путем варьирования получить удовлетворяющее его решение.

При проектировании кривошипно-коромыслового механизма работа еще осложняется тем, что, изменяя какой-либо из размеров звеньев, необходимо каждый раз проверять, чтобы выбранная схема удовлетворяла условию существования кривошипа. Отсутствие научно-обоснованных основ синтеза многих механизмов, получивших широкое распространение в современной технике, при наличии в литературе лишь описаний существующих конструкций, без их анализа, приводит к тому, что конструктор вынужден при синтезе новых механизмов прибегать к эмпирическому методу, при котором он, пользуясь аналогией, принимает за основу одну из существующих схем, которые часто являются необоснованными, случайными и нерациональными.

Ярким примером может служить весьма распространенная за границей и описанная почти во всех наших литературных источниках по кузнечно-прессовому оборудованию схема горизонтально ковочной машины „Еумуко“ (фиг. 2б), в которой, вследствие неудачного выбора положения точки сочленения присоединяемого звена к коромыслу, ухудшаются условия работы машины, вызывая нерациональное увеличение крутящих моментов, следствием чего являются ничем не оправданные

увеличения размеров коленчатого вала, звеньев механизма и других деталей, габаритных размеров машин и его веса, потребной мощности и т. д.

Аналогичными недостатками обладают и многие другие механизмы, которые конструктор принимает за основу, когда он пользуется аналогией.

Разве можно считать рациональными конструкции типа указанных на фиг. 2, 2а и 2б, в которых в короткие промежутки времени пиковых нагрузок нагружены все звенья шестизвенника нагрузками, достигающими тысячи тонн, при чем некоторые звенья работают на продольный изгиб?

Насколько целесообразны существующие зажимные механизмы для закрытия матриц в кузнечно-прессовых автоматах, которые в период „выстоя“ (по требованиям технологии производства) продолжают двигаться под пиковыми нагрузками, открывая при этом частично матрицы и для компенсации этого открытия создается значительный предварительный распор станины?

Нормально ли такое положение, когда во многих существующих конструкциях прессов продолжительность холостого хода почти равна продолжительности рабочего, что снижает производительность?

Исследованию такого важного фактора, как коэффициент изменения скорости хода, не уделялось до сего времени внимания, а в этой величине таятся резервы повышения производительности машины.

Мы боремся за десятые доли процента к. п. д. в кинематических парах звеньев механизма, а применяя не обоснованные схемы, получаем значительные усилия, действующие по оси его звеньев, которые бесцельно нагружают эти же пары, вызывая в них повышенные моменты трения, значительно снижающие к. п. д. машины.

Подобных случаев из различных отраслей машиностроения можно привести много. По аналогии с этими механизмами конструктор проектирует новые; при этом органические недостатки, присущие этим схемам, перейдут и на проектируемые. В лучшем случае конструктор, приняв одну из этих схем за основу, вычертит несколько таких же случайных схем, близких к выбранному и, сравнив их графическим методом, выберет „лучший вариант из худших“.

Опыт введения нормального ряда станков-качалок в нефтяной промышленности СССР в 1945 году показывает, какое большое значение имеет научно-обоснованный синтез механизма с наибольшими углами передач.

Только в результате вывода математических зависимостей, связывающих элементы шарнирного четырехзвенного механизма с параметрами, характеризующими этот механизм, анализа этих зависимостей и установления закономерностей изменения элементов механизма в зависимости от изменения этих параметров, можно обоснованно решать вопросы синтеза механизмов. В качестве параметров, характеризующих механизм, могут быть выбраны различные группы величин и,

очевидно, что выбор для всех случаев одной и той же группы величин в качестве основных параметров не может оказаться целесообразным. При решении каждой группы задач целесообразно выбрать за параметры величины, характерные для этой группы задач, и успех решения поставленной задачи, в значительной мере, будет зависеть от рационального выбора их.

Чем для большего количества различных групп величин, характеризующих шарнирный четырехзвенник и выбранных в качестве основных параметров, будет произведен анализ, тем яснее выявятся основные закономерности в четырехзвеннике и тем больше будет возможностей для рационального решения задач синтеза механизма. Выбираемые обычно в качестве параметров различные комбинации длин звеньев и углов между ними не могут исчерпать всех возможностей хотя бы по той причине, что ряд важных величин выражается через них весьма сложными и громоздкими уравнениями. В частности, вызывает значительные затруднения решение таких вопросов, как влияние выбора положения кривошипного центра и центра привеса коромысла на длины звеньев механизма, на угол передачи и т. д. Так же весьма затруднительно установление пределов, в которых могут быть выбраны длины звеньев механизмов и отношение длины кривошипа к длине шатуна, установление предельных положений, которые могут занимать кривошипный центр и центр привеса коромысла при соблюдении условия существования кривошипа и т. д. Очевидно, что этот пробел может быть восполнен соответствующим выбором параметров, при котором возможно получение достаточно простых математических зависимостей, допускающих возможность ответить на эти вопросы.

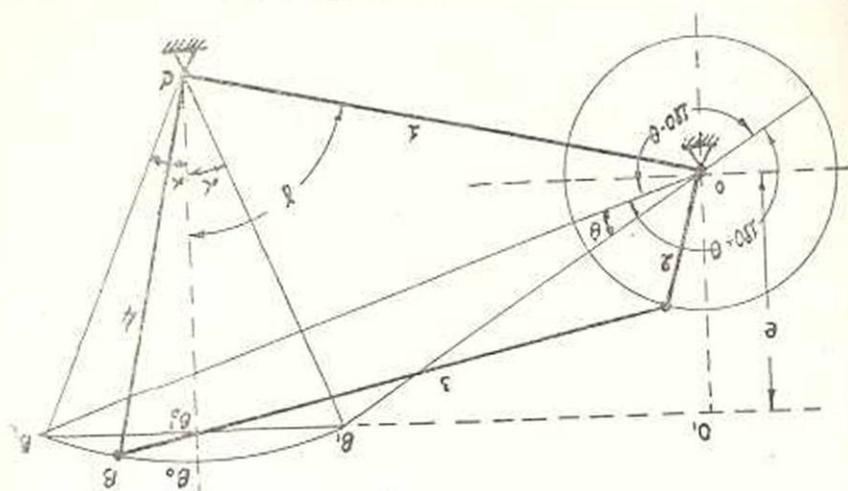
3. Для определенности задачи синтеза кривошипно-коромыслового шарнирного четырехзвенника необходимо задание четырех независимых элементов, его характеризующих. Эти элементы в дальнейшем будем называть параметрами. В качестве таких параметров могут быть выбраны любые комбинации линейных и угловых элементов четырехзвенника, причем угловые элементы должны быть заданы для определенного положения механизма, так как при движении механизма они изменяются.

В качестве одного из параметров, характеризующих шарнирный четырехзвенник, выберем амплитуду колебания проекции точки сочленения шатуна с коромыслом на ось X (фиг. 3).

Как уже было указано выше, выбор этой величины целесообразен потому, что на практике она характеризует обычно ход исполнительного механизма и часто бывает задана.

При выборе второго параметра целесообразно остановиться на одной из величин, определяющих положение кривошипного центра. Введем понятие эксцентриситета шарнирного четырехзвенника, понимая под ней расстояние от кривошипного центра до прямой $B_1 B_2$, проходящей через два крайних положения точки B , сочленение шатуна с

коромыслом. Эту величину, являющуюся ординатой кривошипного центра, примем за второй параметр. Сама по себе величина e еще не может определить положение кривошипного центра и для определенности положения точки O необходимо задание еще и абсциссы X точ-



Фиг. 3.

ки O , в качестве третьего параметра, однако выбор величины X не целесообразен, ибо она в явной форме не характеризует свойство шарнирно-четырёхзвенного механизма. Целесообразнее ее заменить другой величиной — углом θ , который характеризует коэффициент изменения скорости хода и связан с ним известным соотношением

$$\theta = 180 \frac{K - 1}{K + 1},$$

где K — коэффициент изменения скорости хода.

Хотя эта величина при синтезе механизма не всегда бывает задана, однако с ней по возможности следует считаться, ибо она существенно влияет на такие важные факторы, как величины минимального значения угла передачи, величины инерционных сил и т. д.

На практике нередко можно встретить случай, когда, в результате игнорирования e -ой величиной, создавались механизмы, работающие в неблагоприятных условиях, как, например, станки-качалки, применяющиеся за границей до настоящего времени и выпускавшиеся у нас до введения нормального ряда станков-качалок.

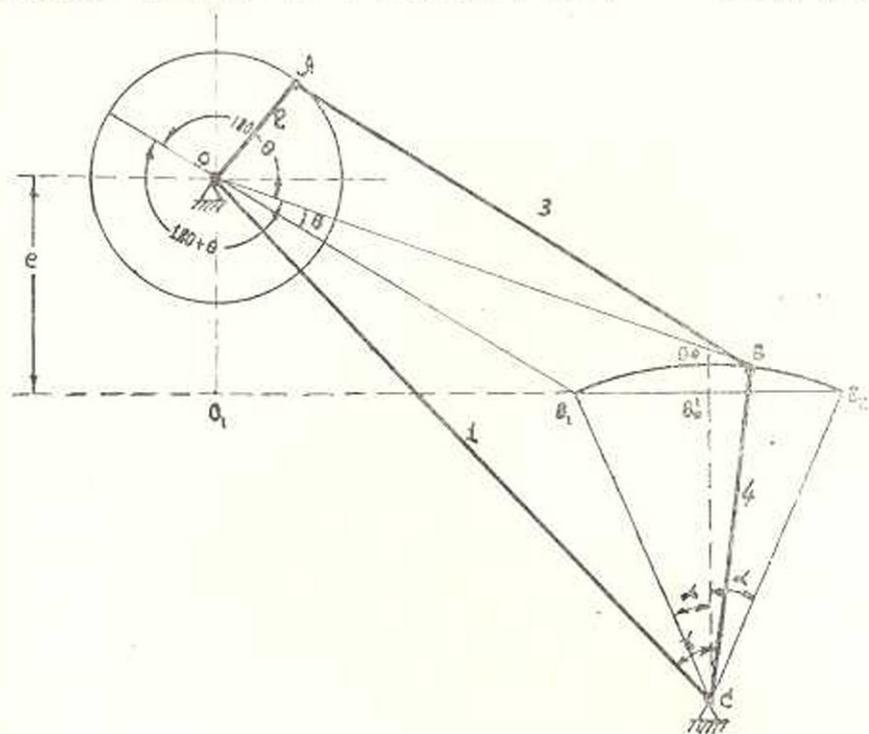
Два параметра — эксцентриситет и коэффициент изменения скорости хода — вполне определяют положение кривошипного центра.

В качестве четвертого параметра выберем угловую амплитуду качания коромысла, которая при заданной величине a вполне определяет положение центра привеса коромысла C .

Такой выбор параметра при изучении шарнирного четырехзвенного механизма должен облегчить вопрос синтеза не только для приведенной выше группы задач, но и во многих других случаях и в

частности тогда, когда положение кривошипного центра и центра привеса коромысла оказывается неопределенным, как, например, при синтезе четырехзвенника по заданному коэффициенту изменения скорости хода или при синтезе по двум заданным положениям ведомого звена и т. д.

На фиг. 3 изображен шарнирный четырехзвенный механизм, в котором центр качания коромысла C и кривошипный центр расположены по одну сторону от прямой $V_1 V_2$, в данном случае ниже этой прямой, и для этого случая мы приняли знак эксцентриситета положительным. Очевидно, что в шарнирном четырехзвеннике на фиг. 4.



Фиг. 4.

в котором кривошипный центр O и центр привеса коромысла C располагаются по обе стороны от прямой $V_1 V_2$, следует принять для эксцентриситета e отрицательный знак.

При вращении кривошипа по часовой стрелке рабочему ходу от V_1 к V_2 соответствует на фиг. 3 угол поворотов кривошипа $180 - \theta$, а обратному ходу $180 + \theta$, и коэффициент изменения скорости хода будет

$$K_v = \frac{180 + \theta}{180 - \theta} > 1.$$

Сохраняя то же направление вращения по часовой стрелке и рабочий ход от V_1 к V_2 для шарнирного четырехзвенника, изображенного на фиг. 4, будем иметь угол поворота кривошипа соответствующий

щий рабочему ходу $180 - \theta$ и обратному $180 + \theta$. Тогда коэффициент изменения скорости хода будет

$$K_2 = \frac{180 - \theta}{180 + \theta} < 1.$$

Как видно,

$$K_2 = \frac{1}{K_1}.$$

Чтобы сохранился тот же коэффициент изменения скорости хода, как и в четырехзвеннике по фиг. 3, необходимо изменить направление вращения кривошипа на противоположное, т. е. против часовой стрелки. Выражение для K_2 можно в этом случае представить в виде

$$K_2 = \frac{180 + (-\theta)}{180 - (-\theta)},$$

т. е. оно будет иметь такой же вид, как и K_1 , если считать при $e < 0$ угол θ также отрицательным.

Таким образом, для угла θ знак будем считать положительным при положительном e и отрицательным — при отрицательном.

4. При обозначениях, принятых на фиг. 3, можно написать из треугольника OB_1B_2

$$4a^2 = (l_1 + l_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 - 2(l_1 + l_2)(l_1 - l_2) \cos \theta,$$

откуда

$$a^2 = l_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + l_2^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1)$$

Из той же фигуры имеем

$$2ae = (l_1^2 - l_2^2) \sin \theta. \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), найдем

$$l_2 = a \sqrt{1 - \frac{e}{a} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}, \quad (3)$$

$$l_1 = a \sqrt{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) видно, что при заданном a длины кривошипа и шатуна зависят от эксцентриситета e и коэффициента изменения скорости хода и вполне определяются заданием этих величин. Очевидно, что от них же зависит и величина

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \frac{e}{a} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}}. \quad (5)$$

Из той же фиг. 3 можно написать

$$\begin{aligned}(l_1 + l_2)^2 &= (l_1 \sin \gamma + a)^2 + e^2, \\ (l_1 - l_2)^2 &= (l_1 \sin \gamma - a)^2 + e^2,\end{aligned}\quad (6)$$

откуда

$$l_1 \sin \gamma = \frac{l_2 l_3}{a}.\quad (7)$$

Внося в (7) значения l_2 и l_3 из (3) и (4), получим

$$l_1 \sin \gamma = \sqrt{a^2 - e^2 + 2ae \operatorname{ctg} \theta}.\quad (8)$$

Из фиг. 3 имеем

$$l_1 \cos \gamma = l_4 \cos \alpha - e.\quad (9)$$

Возвысив обе части этого уравнения в квадрат и заменив в нем

$$\begin{aligned}l_1^2 \cos^2 \gamma &= l_1^2 - l_1^2 \sin^2 \gamma, \\ l_1^2 \cos^2 \alpha &= l_4^2 - a^2,\end{aligned}$$

получим

$$l_1^2 \sin^2 \gamma = l_1^2 - l_4^2 + a^2 + 2el_4 \cos \alpha - e^2.$$

Решая это уравнение совместно с (8), найдем

$$l_1^2 = l_4^2 - 2el_4 \cos \alpha + 2ae \operatorname{ctg} \theta,$$

откуда

$$\frac{l_1}{l_4} = \sqrt{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta}}.\quad (10)$$

Так как

$$l_1 = \frac{a}{\sin \alpha},\quad (11)$$

то

$$l_4 = \frac{a}{\sin \alpha} \sqrt{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta}}.\quad (12)$$

Из (11) и (12) видно, что при заданном a длина коромысла зависит от параметра α , а длина стойки, кроме того, от тех же параметров e и θ . Таким образом, четыре параметра a , e , α и θ вполне характеризуют схему шарнирного четырехзвенника, и если выбраны эти четыре параметра, то из зависимостей (3), (4), (11) и (12) можно вычислить длины звеньев механизма, а также определить из (5) величину λ . Зависимости эти достаточно простые и пользование ими проще методов графических, и по сравнению с последними они имеют то преимущество, что вычисление размеров звеньев механизма можно производить с любой степенью точности, что весьма важно для многих механизмов с высокой чувствительностью к небольшим изменениям размеров, точность же графических методов ограничена. Кроме того, при

графическом методе невозможно оценить погрешность, полученную при построении.

Значение зависимостей (3), (4), (11) и (12) не ограничивается только приведенными выше соображениями. Не менее важным является то обстоятельство, что при наличии аналитических уравнений можно исследовать закономерности изменения элементов шарнирного четырехзвенника в зависимости от изменения тех или других факторов, производя это в общем виде, и установить пределы изменения их, в то время как при применении графических методов подобная задача может решаться лишь только для какой-то одной определенной схемы и то в результате весьма трудоемкой работы по графическому построению большого количества вариантов и их сравнения.

Так как кривошипно-шатунный механизм является частным случаем шарнирного четырехзвенника, когда центр привеса коромысла C удален в бесконечность, то (3) и (4) могут быть применены и к механизмам кривошипно-шатунным, ибо, как видно из этих выражений, длины кривошипа и шатуна не зависят от положения центра привеса коромысла.

Выведенные формулы справедливы для схемы шарнирного четырехзвенника, изображенного на фиг. 3, при котором точки C и O располагаются по одну сторону от прямой $B_1 B_2$. Если эти точки располагаются по разные стороны от этой прямой, как это изображено на фиг. 4, то (9) примет вид

$$l_4 \cos \gamma - l_1 \cos \alpha = e. \quad (9')$$

Возвысив обе части равенства в квадрат, после соответствующей замены получим

$$l_4^2 - l_1^2 \sin^2 \gamma - l_4^2 - a^2 - 2el_4 \cos \alpha = e^2.$$

Решая ее совместно с (8), получим

$$l_4^2 - l_1^2 - 2el_4 \cos \alpha + 2ae \operatorname{ctg} \theta.$$

откуда

$$\frac{l_4}{l_1} = \sqrt{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \theta)}{\sin \theta}} \quad (10')$$

Нетрудно видеть, что если учесть правило знаков, установленное выше, то из (10) получится (10'). Что же касается соотношений (3), (4) и (11), то они не изменяются для схемы по фиг. 4. Таким образом при учете знаков уравнения (3), (4), (10) и (11) применимы для всякого кривошипно-коромыслового шарнирного четырехзвенника.

Решая совместно (6) и (7), получим

$$l_3^2 + l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \gamma = a^2 + e^2. \quad (13)$$

К числу важных элементов четырехзвенника, с которыми приходится считаться при их проектировании, относится наибольший и

наименьший углы передачи механизма, которые обозначим соответственно через ψ_m и ψ_m'' .

Из выражения для косинусов углов передач следует [1], что

$$\cos \psi_m = A + B,$$

$$\cos \psi_m'' = A - B,$$

где

$$A = \frac{l_3^2 + l_4^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_3l_4} \quad (14)$$

$$B = \frac{l_1l_2}{l_3l_4} \quad (15)$$

Возвышая в квадрат обе части (9), после преобразований получим

$$l_1^2 \sin^2 \gamma = l_1^2 - l_3^2 + a^2 + 2el_4 \cos \alpha - e^2.$$

Внеся в (13), найдем

$$l_3^2 + l_4^2 - l_1^2 - l_2^2 = 2(a^2 - e^2) + 2el_4 \cos \alpha.$$

Из (14) имеем

$$l_3^2 + l_4^2 - l_1^2 - l_2^2 = 2Al_3l_4.$$

Решая с предыдущим уравнением, получим

$$A = \frac{a^2 - l_2^2}{l_3l_4} + \frac{e}{l_2} \cos \alpha. \quad (16)$$

Но из фиг. 3 можно написать

$$ae = \frac{1}{2} (l_3^2 - l_2^2) \sin \theta,$$

поэтому (1) после некоторых преобразований примет вид

$$a^2 - l_2^2 = a \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Внеся это в (16), получим

$$A = \frac{e}{l_2} \frac{\cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2}},$$

или внеся сюда значение l_2 ,

$$A = \frac{\frac{e}{a}}{\sqrt{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \frac{\cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\cos \frac{\theta}{2}}. \quad (17)$$

Так как выражение для B можно представить в виде

$$B = \lambda \frac{l_1}{l_2}$$

то для B окончательно получим

$$B = \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta}}{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \left(1 - \frac{e}{a} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi_m^+ &= \frac{\frac{e}{a} \cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} + \\ &+ \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta}}{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \left(1 - \frac{e}{a} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \cos \varphi_m^- &= \frac{\frac{e}{a} \cos \left(\alpha - \frac{\theta}{2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \cos \frac{\theta}{2} - \\ &- \sqrt{\frac{1 + 2 \frac{e}{a} \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \theta)}{\sin \theta}}{1 + \frac{e}{a} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}} \left(1 - \frac{e}{a} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

С помощью уравнений (19) и (20) величины $\cos \varphi_m^+$ и $\cos \varphi_m^-$ выражены через четыре основных параметра a , b , e и α .

С помощью этих уравнений можно решить все поставленные выше вопросы синтеза как четырехзвенных, так и других многозвенных механизмов, которые развиваются из механизмов четырехзвенных и, таким образом, получается возможность научно-обоснованно решать третью задачу синтеза механизмов с низшими парами — синтез механизма с наибольшими углами передач, коэффициентами изменения скорости хода и наименьшими габаритными размерами и весом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин, 1953.
2. Артоболевский И. И., Блок З. Ш., Добровольский В. В. Синтез механизмов. ОГИЗ, Гостехиздат, 1944.
3. ЭМС, том 8.

Ս. Տ. Գալստյով

ՀՈԳԱԿԱՊՍՅՆ ՔԱՌՕՂԱԿԱՆԻՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՄԻ ՔԱՆԻ
ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիվածուժ արտածված են անսլիտիկ արտահայտութիւններ՝ քառ-
օդականի մեխանիզմների նիմնական տարրերի համար:

Այս նպատակով մտածված են վերահիշյալ մեխանիզմների առանձնա-
նատկութիւնները բնորոշող հասուկ անկախ մեծութիւններ:

Արտածված հավասարումները ննարարութիւն են տալիս ցանկա-
ցած ճշտութեամբ անսլիտիկորեն հաշվելու մեխանիզմ կազմող օդակների
մեծութիւնը և կատարելու մեխանիզմների ընդհանուր առումնատկու-
թիւնը, որը ննարարութիւն ունեցող զրաֆիկ մեթոդներով:

СТРОИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

И. А. Тер-Азарьян

Влияние износа инструмента на удельные усилия при резании камня

Работами предыдущих лет [1] была установлена зависимость между подачей и удельными усилиями резания, при неизменной скорости резания, в виде:

$$p = \frac{C_1}{S^2} \text{ кг/м.м}^2, \text{ где}$$

C_1 — коэффициент, зависящий от свойств обрабатываемого камня, S — подача (на зуб при фрезеровании, на оборот при точении и т. д.).

Большой практический интерес представляет увязка этой зависимости с износом инструмента. Это даст, с одной стороны, возможность определить величину p при любом износе инструмента, с другой — определить ту величину износа, которая должна быть принята максимально допустимой с точки зрения благоприятности протекания самого процесса резания.

Опыты были поставлены на трех породах:

1. Туф армянский прочностью на сжатие 415—420 кг/см².
2. Туф болнисский " " 450—485 кг/см².
3. Базальт ереванский " " 1400—1600 кг/см².

Методика проведения экспериментов заключалась в том, что, определив зависимость p от S при остром состоянии режущей кромки резца из твердого сплава ВК-8, последний доводился до определенного затупления на какой-то подаче, замерялся износ, после чего вновь устанавливалась зависимость p от S при этом состоянии инструмента и т. д.

На фиг. 1 приведены измеряемые элементы износа инструмента.

В таблицах 1, 2 и 3 приведены экспериментальные данные.

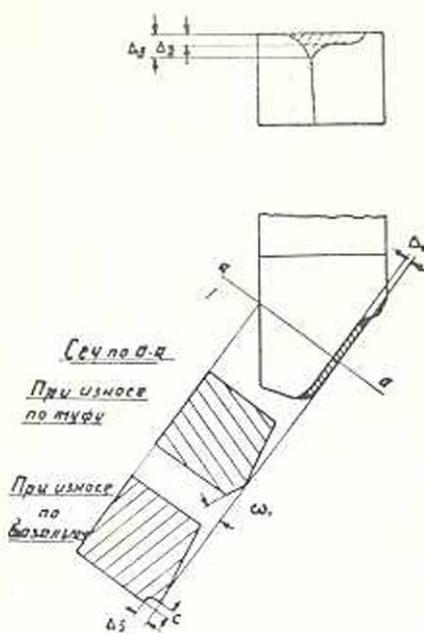
Основные данные таблиц 1—3 представлены графически на фиг. 2, 3, 4.

Как видно из приведенных данных, с увеличением износа инструмента по задней грани значения удельных усилий также возрастают, однако интенсивность возрастания удельных усилий все время

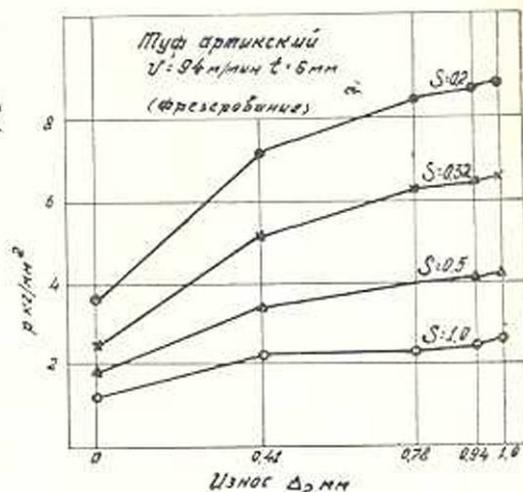
* Местонахождение в Грузинской ССР

отстает от роста износа по задней грани Δ_2 и после определенной величины износа, практически, значения удельных усилий стабилизируются.

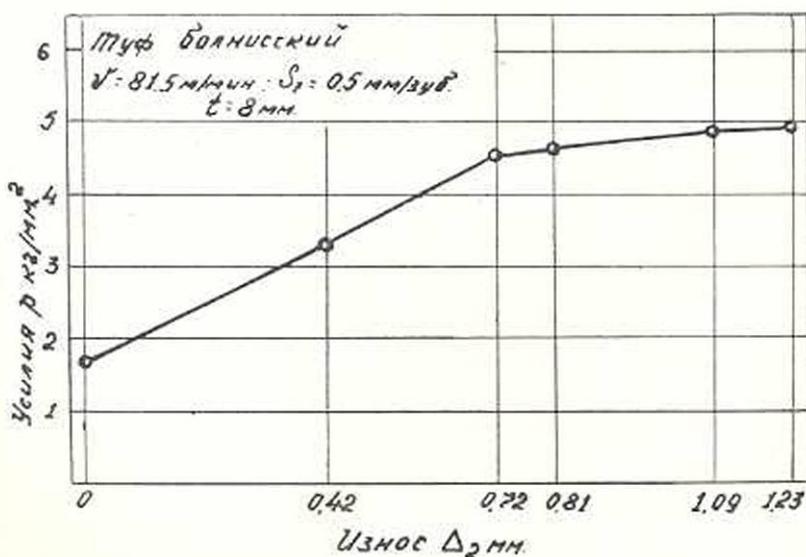
Такое поведение p с изменением износа инструмента, несомненно связано с ухудшением состояния инструмента, однако ни один из замеряемых элементов износа не может характеризовать такое поведение p . На самом деле, из



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

фиг. 5—6 видно, что с увеличением продолжительности работы инструмента замеряемые элементы износа Δ_1 , Δ_2 растут с неизменной

интенсивностью, а из фиг. 2—4 видно, что удельные усилия имеют стремление к стабилизации, после определенного износа

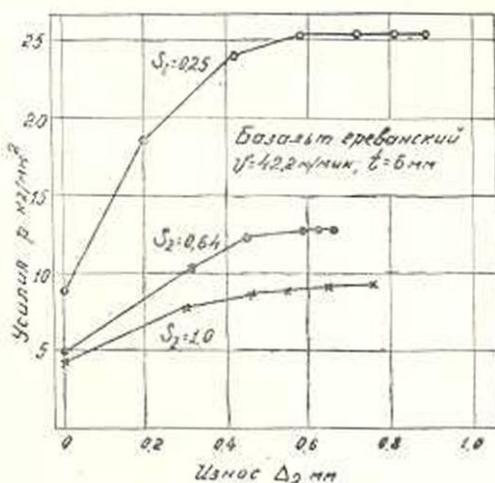
Поскольку величины Δ_1 и Δ_2 характеризуют износ инструмента по задней грани, а фаска износа по задней грани является основной трущейся частью инструмента (по задней грани), то, следовательно, значения p с износом инструмента увеличиваются не за счет той части работы резания, которая затрачивается на трение по задней грани.

Работа резания $W_{рез}$ имеет выражение:

$$W_{рез} = W_{тр} + W_{разр}$$

где $W_{тр}$ — полная работа трения,

$W_{разр}$ — работа разрушения,



Фиг. 4.

Таблица 1

Туф арктический (фрезерование)

Обработ. поверхность, в м²	Износ в мм		Усилия p кг/мм² при подаче на зуб						Постоянные факторы
	Δ_1	Δ_2	0,2	0,32	0,5	0,64	0,8	1,0	
0	0	0	3,53	2,54	1,9	—	1,35	1,05	$v=94$ м/мин
0,74	0,41	0,64	7,2	5,19	3,55	3,07	2,56	2,27	$t=6$ мм
1,48	0,78	1,02	8,5	6,42	4,1	—	3,0	2,4	$\varphi=60^\circ$, $\varphi_1=10^\circ$
2,22	0,94	1,35	8,9	6,65	4,25	—	3,22	2,52	$\alpha=10^\circ$, $\gamma=0$
2,96	1,0	1,41	9,5	6,8	4,35	—	3,23	2,57	$\tau=0$, $\lambda=0$

Таблица 2

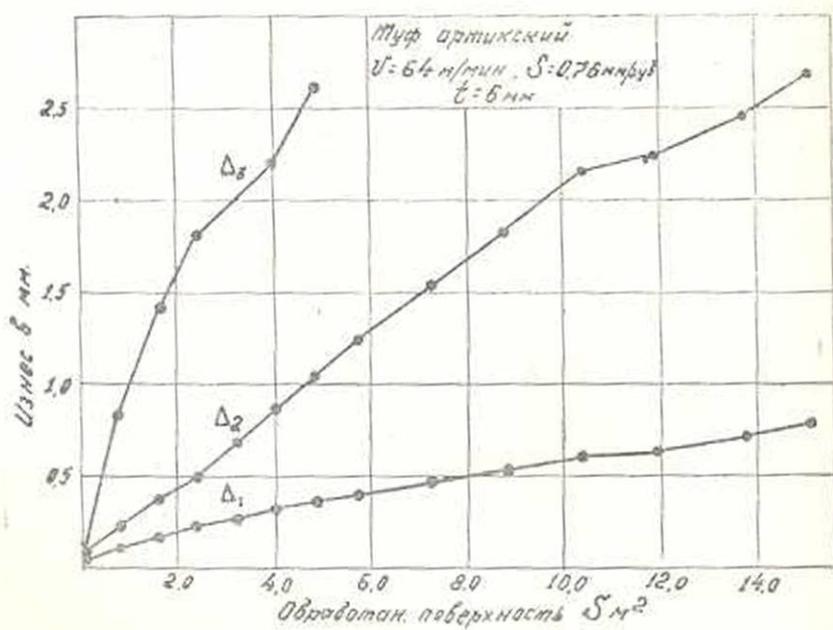
Туф болнисский (фрезерование)

Обработ. поверхность, в м²	Износ Δ_2 в мм	Усилия p кг/мм²	Постоянные факторы
0	0	1,65	$v=81,5$ м/мин, $t=8$ мм
0,23	0,42	3,28	$s_z=0,5$ мм/зуб
0,505	0,72	4,55	$\varphi=86^\circ$, $\alpha=16^\circ$, $\varphi_1=10^\circ$
0,615	0,81	4,65	$\gamma=0$, $\tau=0$, $\lambda=0$
0,89	1,09	4,9	
1,055	1,22	5,0	

Таблица 3

Базальт срезанский (фрезирование)

Обработ. по- верхность в м^2	Подача $s_2 =$ $= 0,252 \text{ мм/зуб}$			Подача $s_1 =$ $= 0,64 \text{ мм/зуб}$			Подача $s_3 =$ $= 1 \text{ мм/зуб}$			Постоянные факторы
	Δ_1 мм	Δ_2 мм	p кг/мм ²	Δ_1 мм	Δ_2 мм	p кг/мм ²	Δ_1 мм	Δ_2 мм	p кг/мм	
0	0	0	9,1	0	0	5,2	0	0	1,3	$v = 42,2 \text{ м/мин}$
0,012	—	—	15,0	—	—	—	—	—	—	$t = 6 \text{ мм}$
0,024	0,25	0,59	18,6	—	—	8,4	—	—	—	$\varphi = 60^\circ, \varphi_1 = 10^\circ$
0,036	—	—	21,6	—	—	—	—	—	—	$\tau = 10; \gamma = 0$
0,048	0,43	—	24,0	0,31	0,56	10,35	0,3	0,62	7,9	$z = 0, \lambda = 0$
0,06	—	—	25,8	—	—	—	—	—	—	
0,072	0,58	—	25,4	—	—	11,0	—	—	—	
0,084	—	—	25,9	—	—	—	—	—	—	
0,096	0,73	1,17	25,4	0,45	0,81	12,4	0,46	1,0	8,6	
0,108	0,81	—	25,4	—	—	—	—	—	—	
0,12	0,9	1,28	25,4	—	—	12,4	—	—	—	
0,135	—	—	—	0,58	0,98	12,6	—	—	—	
0,145	—	—	—	—	—	—	0,55	1,09	8,85	
0,168	—	—	—	0,62	1,06	12,8	—	—	—	
0,18	—	—	—	0,66	1,18	12,8	—	—	—	
0,195	—	—	—	—	—	—	0,65	1,21	9,25	
0,24	—	—	—	—	—	—	0,76	1,35	9,35	



Фиг. 5.

и, следовательно, рост удельных усилий с износом инструмента происходит либо за счет работы разрушения $W_{разр.}$, либо за счет работы трения по передней грани.

Причина роста удельных усилий за счет увеличения работы разрушения видна из следующего.

Воздействие обрабатываемого материала на режущий инструмент при остром его состоянии оказывается исключительно через переднюю грань и возможно, что если бы не было первоначального износа по передней грани, не имел бы место и износ по задней, так как трущейся частью реза по задней грани в остром состоянии теоретически является сама режущая кромка. Следовательно, при неизменном воздействии обрабатываемого материала на переднюю грань инструмента, величина фаски износа по задней грани (при отсутствии износа по передней грани, т. е. при условии совпадения направления плоскости фаски износа с плоскостью резания) не может оказать никакого влияния на величину работы трения, так как будет иметь место равенство:

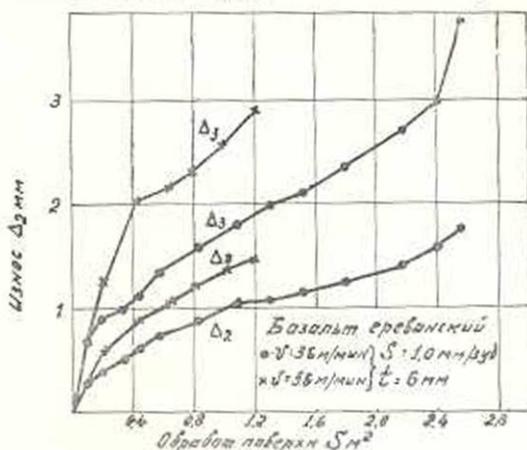
$$\Delta_{21} b_1 p_1^1 = \Delta_{22} b_2 p_2^1,$$

где p_1^1 — удельные усилия при фаске износа Δ_{21} ,
 p_2^1 — " " " " " " " " Δ_{22} .

Эти обстоятельства привели к мысли, что величина p при изношенном состоянии инструмента является функцией состояния самой режущей кромки, ее режущей способности. Однако, ввиду разнородного характера износа инструмента при обработке твердых и мягких пород [2], такое предположение требовало самой серьезной проверки. С этой целью были изучены известные ранее данные [1], а также поставлены специальные эксперименты.

Прежде чем перейти к непосредственному изложению имевшихся данных, необходимо коротко остановиться на общих закономерностях износа инструмента при обработке камня, каковые разрешат правильно оценить влияние износа из характер поведения удельных усилий.

Как известно [2], при обработке туфа износ характеризуется тем, что на месте режущей кромки образуется площадка, наклоненная под углом $90^\circ - \phi$ к горизонтальной плоскости (см. фиг. 1). Проекция ширины этой площадки на горизонтальную и вертикальную плоскости соответственно суть: Δ_1 и Δ_2 . Тогда ширина этой площадки



Фиг. 6.

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 - \Delta_2^2}$$

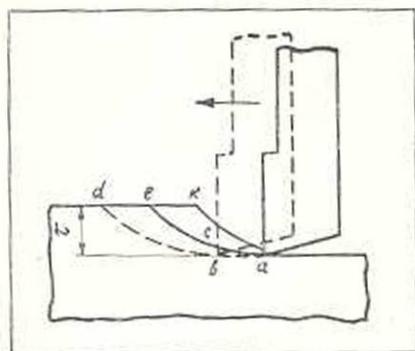
Износ инструмента при обработке твердых пород (базальта и гранита) совершенно иной и характеризуется появлением по передней грани папочки шириной Δ_2 и высотой ϵ (см. фиг. 1).

Разнохарактерность износа инструмента при обработке камней, принадлежащих к группе хрупких тел, фактически не должна наблюдаться. Происходит же это ввиду резкой интенсивности износа инструмента по передней и задней граням с изменением физико-механических свойств обрабатываемых камней.

При малом сопротивлении породы разрушению и достаточно большой абразивности износ в основном будет оформляться по задней грани (туф). С увеличением прочности породы износ проявляется и по передней грани (базальт, гранит).

При резании прочных известняков, в частности мраморов, с прочностью до 1200—1600 кг/см², обладающих малой абразивностью, наблюдается износ в основном по передней грани. Износ же по задней грани в начальной стадии по сути дела сводится к тому, что закругляется режущая кромка.

На фиг. 7 приведена схема работы остроугольного резца в сечении, перпендикулярном режущей кромке.



Фиг. 7.

Наиболее энергоемкой частью процесса является разрушение породы в зоне abc , несмотря на то, что наибольшее усилие потребно для совершения откола очередного элемента.

Износ инструмента, приводящий к округлению или разрушению режущей кромки, несомненно должен увеличить степень диспергирования материала в зоне дробления, так как, с одной стороны, происходит сминание в зоне высотой, равной половине радиуса округления режущей кромки (при разрушении кромки эта зона увеличится), а с другой — округление кромки, уменьшая концентрацию напряжений вдоль режущей кромки, увеличит высоту площадки bc , что в свою очередь должно привести к увеличению объема мелкого разрушения abc .

Такое поведение режущего инструмента должно найти определенное отражение во фракционном составе продуктов разрушения. При этом количественное отношение мелкой фракции должно увеличиваться с увеличением износа инструмента и чувствительно отражать состояние режущей кромки. Отсюда естественно предположить, что качественный характер увеличения фракции с износом инструмента

должен быть таким же как и характер изменения удельных усилий резания.

Приведенные в табл. 4 и 5 данные по силовому анализу продуктов разрушения при фрезеровании базальта [1] и точении болнисского туфа подтверждают это.

Базальт срезанский (фрезерование)

Таблица 4

Режимы резания			Процентное соотношение фракций				Обработ. поверхность в м ²
<i>v</i> м/мин	<i>t</i> мм	<i>s_r</i> мм/зуб	более 2,5 мм	2,5—0,1 мм	0,5—0,011 мм	менее 0,08 мм	
40,0	6,0	1,25	—	6,0	44,0	50,0	0
40,0	6,0	1,25	—	2,8	38,7	58,5	0,12
40,0	6,0	1,25	—	5,8	35,2	59,0	0,36
40,0	6,0	0,5	0,7	22,7	41,2	35,4	0
40,0	6,0	0,5	—	19,1	38,9	42,0	0,04
40,0	6,0	0,5	—	14,2	39,8	46,0	0,12
40,0	6,0	0,5	—	11,9	38,1	50,0	0,4
40,0	6,0	1,0	8,9	36,6	30,3	24,2	0
40,0	6,0	1,0	4,0	30,6	31,3	31,1	0,19
40,0	6,0	1,0	3,8	29,6	33,6	33,0	0,44
40,0	6,0	2,5	40,0	26,0	21,3	16,7	0
40,0	6,0	2,5	32,2	24,1	22,8	21,9	0,16
40,0	6,0	2,5	28,6	27,1	23,0	21,3	0,4

Туф болнисский (точение)

Таблица 5

Режимы резания			Процентное соотношение фракций				Износ Δ_2 мм
<i>v</i> м/мин	<i>t</i> мм	<i>s_r</i> мм/об	более 3,0 мм	3,0—1,0 мм	1,0—0,16 мм	менее 0,16 мм	
83—85	6	0,6	0,5	32,6	40,2	26,7	0
83—85	6	0,6	0,3	30,6	40,2	28,9	0,29
83—85	6	0,6	—	30,8	41,2	29,0	0,41
83—85	6	0,6	—	29,2	41,2	29,6	0,67
83—85	6	1,0	11,5	41,6	28,0	18,2	0
83—85	6	1,0	8,1	43,2	28,0	21,0	0,29
83—85	6	1,0	7,5	43,2	28,3	21,3	0,41
83—85	6	1,0	6,8	42,6	28,2	22,2	0,67
83—85	6	1,0	6,7	41,9	28,7	22,9	1,0

Поскольку рост удельных усилий резания является результатом ухудшения состояния режущей кромки инструмента, представляет несомненный интерес динамика этого ухудшения. Изложенное ранее разрешает в общих чертах сделать определенное заключение о механизме изменения состояния режущей кромки инструмента, которое

сводится к тому, что в процессе работы режущая кромка, в зависимости от обрабатываемой породы и условий, претерпевает определенные изменения — округляется или выкрашивается. Однако округление или выкрашивание не может продолжаться сколь угодно долго, так как одновременный износ по задней грани способствует снятию выкрашенных мест и уменьшению радиуса округления кромки. В итоге наступает момент, когда состояние режущей кромки стабилизируется, в результате ее как-бы „самозатачивания“, которое можно характеризовать как „предельное“ для данных условий резания.

Помимо обрабатываемой породы, наибольшее влияние на это „предельное“ состояние инструмента оказывают подача и скорость резания. При этом, чем больше подача и скорость, тем большим округлением и выкрашиванием режущей кромки характеризуется „предельное“ состояние инструмента.

В таблице 6 приведены некоторые данные при фрезеровании базальта ереванского месторождения.

Таблица 6

Базальт ереванский

Обрабатываемая поверхность, м ²	Режимы резания			Износ в мм				
	v м/мин	f мм	S_z мм/зуб	Δ_1	Δ_2	ϵ	Δ_3	Δ_4
0,04	38	0,5	0,5	0,21	0,35	0,015	0,065	0,065
0,12	38	0,5	0,5	0,17	0,64	0,045	0,13	0,09
0,2	38	0,5	0,5	0,59	0,825	0,045	0,12	0,11
0,36	38	0,5	0,5	0,87	1,2	0,05	0,12	0,12
0,44	38	0,5	0,5	1,01	1,35	0,05	0,11	0,125
0,09	38	5,0	1,0	0,3	0,53	0,03	0,13	0,1
0,25	38	5,0	1,0	0,485	0,89	0,05	0,13	0,12
0,41	38	5,0	1,0	0,61	0,95	0,1	0,17	0,14
0,57	38	5,0	1,0	0,84	1,24	0,14	0,21	0,14
0,73	38	5,0	1,0	0,94	1,33	0,14	0,21	0,16
0,9	38	5,0	1,0	1,04	1,45	0,15	0,21	0,18
0,68	38	5,0	1,5	0,24	0,4	0,3	0,125	0,085
0,21	38	5,0	1,5	0,4	0,6	0,065	0,19	0,12
0,4	38	5,0	1,5	0,55	0,85	0,08	0,19	0,145
0,72	38	5,0	1,5	0,69	1,02	0,11	0,3	0,19
0,58	38	5,0	1,5	0,8	1,1	0,145	0,295	0,21
0,105	38	5,0	2,0	0,31	0,56	0,14	0,17	0,12
0,24	38	5,0	2,0	0,51	0,8	0,08	0,25	0,13
0,4	38	5,0	2,0	0,6	1,0	0,1	0,26	0,15
0,56	38	5,0	2,0	0,67	1,05	0,105	0,235	0,21
0,88	38	5,0	2,0	0,715	1,2	0,135	0,35	0,13

Как видно из таблицы, такие элементы износа, характеризующие состояние режущей кромки, как Δ_2 , Δ'_2 и C , стабилизируются и тем раньше, чем меньше подача.

Поскольку увеличение удельных усилий с износом инструмента, как было показано выше, в основном определяется ухудшением состояния режущей кромки, то представляет интерес, какой из износов по задней или передней грани, является причиной такого ухудшения. Износ по задней грани каким-бы интенсивным он ни был (имеется в виду резание хрупких тел без учета теплового фактора), не может чувствительно отразиться на состоянии режущей кромки, оставляя на задней грани фаску износа, так же как это было бы возможно сделать на любом абразивном круге большой зернистости. Ухудшение состояния режущей кромки определяется в основном износом по передней грани.

Как указывалось ранее, представляет большой практический интерес определение удельных усилий с износом инструмента. При этом следует удельные усилия увязать с тем элементом износа инструмента, который поддается наилучшему контролю и измерению. Таким элементом износа является износ по задней грани Δ_2 . Как видно из приведенных данных, что подтверждается также другими наблюдениями, при износе инструмента по задней грани $\Delta_2=1-1.2$ мм, значения p уже стремятся к стабилизации и увеличиваются в среднем в 2.5-3 раза. При этом меньшие значения соответствуют крупным подачам. Пренебрегая этим и принимая рост p при $\Delta_2=1-1.2$ мм в 2.75 раза, в очень грубой форме, зависимость удельных усилий от подачи и износа можно записать в виде:

$$p = \frac{C_1}{S^2} \sqrt{1 - 6,6\Delta_2}$$

При $\Delta_2 > 1-1.2$ мм для расчетов значения p следует принимать как для $\Delta_2=1-1.2$ мм.

Выводы

1. С увеличением износа инструмента значения удельных усилий резания p увеличиваются. Однако рост удельных усилий отстает от роста таких элементов износа, как Δ_2 , Δ'_2 и после определенного износа величина удельного усилия практически стабилизируется.
2. Причина такого поведения удельных усилий — ухудшение состояния режущей кромки с износом инструмента.
3. В процессе износа инструмента состояние режущей кромки стремится к „предельному“ для данного вида разрушения состоянию, характеризуемому условиями обработки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Касьян М. И., Тер-Азарьяев И. А. Усилия резания при обработке естественных камней. «Вестник инженеров и техников», № 3, 1952.
2. Касьян М. В., Акопов А. А. и Тер-Азарьяев И. А. Характеристика износа режущего инструмента при обработке туфа, базальта и гранита. «Известия Академии наук Армянской ССР», т. III, № 4 1950.

Հ. Թ. Տեր-Յարյաև

ԿՏՐԻՋԻ ՄԱՇՎԱԾՔԻ ԱԶԴԵՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ՏԵՍԱԿԱՐԱՐ ՃԻԳԵՐԻ ՎՐԱ՝
ՔԱՐԱՀԱՏՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Նախորդ տարիների աշխատանքների շնորհիվ որոշ տանջաթիյուն էր ստանալոված մատուցման և նստման տեսակարար ճիգերի միջև կարող եղբի սուր վիճակի զեղչումը:

Այս նպատակով տվյալներ են բերվում նստման տեսակարար ճիգերի վրա գործիքի մաշվածքի ազդեցության վերաբերյալ և ցույց է տրվում այդ տանջաթիյան բնույթը:

Բերված տվյալներից երևում է, որ կարիչի տեսակարար ճիգերի և նրա հետևի նիստի մաշվածքի փոփոխությունները ասորբեր բնույթ ունեն. գործիքի աշխատանքի ակտիվությունը կրկնապատկու հետևանքով նրա մաշումը կատարվում է նստատառան ինտենսիվությամբ, իսկ տեսակարար ճիգերի աճումը ետ է մնում մաշման աճումից և, գործնականորեն, գործիքի որոշ մաշվածքի զեղչում ձգտում է կայունացման:

Էքսպերիմենտալ տվյալների վերլուծման հիման վրա կզրահանգվում է, որ այդ երևույթը հիմնականում բացատրվում է գործիքի կարիչ եղբի համապատասխան վիճակով: