

М. М. Джрбашян

### О суммировании по Абелю обобщенных интегральных преобразований

В нашей работе [1] была построена теория обобщенных интегральных преобразований с несимметрическими ядрами вида  $e^{-z^p}$  и  $E_p(z; \mu)$ , где

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + np^{-1})}, \quad \left( -\infty < \mu < \infty, \quad p \geq \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

целая функция типа Миттаг-Лефлера порядка  $p$  и типа 1. Было доказано, что если преобразуемая функция непрерывна, удовлетворяет условиям Дирихле и некоторым дополнительным условиям на полуоси  $(0, +\infty)$ , то она представима обобщенным интегралом типа Фурье.

В работе [2] была построена полная теория интегральных преобразований с ядрами вида  $e^{-z^p}$  и  $E_p(z; \mu)$  в классе  $L_2$  и было показано, что теория Планшереля для классического интеграла Фурье распространяется на указанные обобщенные интегральные преобразования.

Полученные результаты позволили установить ряд теорем о приближении целыми функциями на лучах в комплексной области и о параметрическом представлении определенных классов целых функций.

В настоящей работе доказывается, что обобщенные интегральные преобразования с ядрами вида  $e^{-z^p}$  и  $E_p(z; \mu)$  по Абелю суммируются для произвольной непрерывной функции, заданной на полуоси  $(0, +\infty)$  и удовлетворяющей некоторым условиям роста в окрестности точки  $+\infty$ .

Как в вышеуказанных работах, так и в настоящей работе мы существенно будем опираться на асимптотические свойства целой функции  $E_p(z; \mu)$ . Поэтому мы здесь приводим формулировку основных асимптотических свойств функции  $E_p(z; \mu)$ , доказательство которых содержится в работах [1, 3].

*Лемма 1.* а) Пусть  $p > \frac{1}{2}$  и число  $\beta$  определяется из условий

$$\frac{\pi}{2p} < \beta < \pi, \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} < p \leq 1.$$

$$\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \frac{\pi}{\rho}, \quad \text{при } \rho \geq 1. \quad (2)$$

Если  $|\arg z| \leq \beta$ , то при  $|z| \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) \rightarrow \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad (3)$$

а если  $|\arg z| \geq \beta$ , то при  $|z| \rightarrow \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = O\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4)$$

б) Пусть  $\rho = \frac{1}{2}$  и  $\mu > 0$ , тогда при  $x \rightarrow +\infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(-x; \mu) = x^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \cos\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}(1-\mu)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right). \quad (5)$$

Заметим, что асимптотическая формула (3) представляет интерес при  $\mu < 1 + \frac{1}{\rho}$ , а формула (5) — при  $\mu < 3$ .

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В §1 приводятся некоторые предварительные леммы, необходимые в дальнейшем.

В §2 строится преобразование с ядром  $e^{-z^\rho}$  для функций, заданных на полуоси  $(0, +\infty)$ , и доказывается суммируемость по Абелю обратного преобразования с ядром вида  $E_\rho(z; \mu)$ .

В §3 решается обратная задача, т. е. строится преобразование с ядром  $E_\rho(z; \mu)$  для функций, заданных на полуоси  $(0, +\infty)$ , и устанавливается суммируемость по Абелю обратного преобразования с ядром  $e^{-z^\rho}$ .

### § 1. Некоторые предварительные леммы

1°. Из асимптотических формул (3) и (5) следует, что

$$|E_\rho(xe^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)| \leq A_1, \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ |E_\rho(xe^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)| \leq A_2(1+x^{\rho(1-\mu)}), \quad \text{при } x \geq 1, \quad (1.1)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  константы, не зависящие от  $x$ .

Из (1.1) следует, что для любого  $\rho \geq \frac{1}{2}$ ,  $\mu > 0$  и при произвольном  $\varepsilon > 0$  существуют интегралы

$$y^{(\pm)}(u; v; \varepsilon) = \int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon \pm iu^\rho)} E_\rho(vte^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt, \quad (1.2)$$

где  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

Лемма 2. При  $\rho > \frac{1}{2}$ ,  $0 < \mu < 1 + \rho^{-1}$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$  имеет место формула

$$y^{(+)}(u; v; \varepsilon) = \rho^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{(u^{\rho} - i\varepsilon)^{\rho-1-\mu}}{(u^{\rho} - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - v}}. \quad (1.3)$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$R(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}} E_{\rho} t v e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt \quad (1.4)$$

при  $v > 0$  и  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > 0$ .

Если  $v = 0$ , то

$$R(z) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}} t^{\mu\rho-1} dt, \quad (1.5)$$

и интеграл справа существует и представляет аналитическую функцию в области  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > 0$ .

Если  $v > 0$ , то в силу определения функции  $E_{\rho}(z; \mu)$  для любого  $\delta > 0$  при  $t \geq t_0(\delta)$  будем иметь

$$|E_{\rho}(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)| \leq e^{(v^{\rho} + \delta)t^{\rho}}. \quad (1.6)$$

Из (1.4) и (1.6) следует, что функция  $R(z)$  существует и голоморфна в области  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > v^{\rho}$ . Но в силу (1.1)

$$|E_{\rho}(xve^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)| \leq \begin{cases} A_1 & \text{при } 0 \leq xv \leq 1 \\ A_2(1 + (xv)^{\rho(1-\mu)}) & \text{при } xv \geq 1 \end{cases}; \quad (1.1')$$

поэтому функция  $R(z)$  существует и голоморфна в более широкой области

$$\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > 0,$$

т. е. в угле

$$-\frac{\pi}{\rho} < \operatorname{arg} z < 0. \quad (1.7')$$

Но при  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > v^{\rho}$  функцию  $R(z)$  мы можем вычислить непосредственным интегрированием.

Действительно, при  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > v^{\rho}$ , подставляя в (1.4) значение функции  $E_{\rho}(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)$  из ряда (1), мы можем в силу (1.6) написать

$$\begin{aligned} R(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})} \right) t^{\mu\rho-1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})} \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}} t^{n+\mu\rho-1} dt. \end{aligned}$$

Отсюда, после замены  $t^{\rho} = x$ , получим:

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ve^{i\frac{\pi}{2\rho}})^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})} \int_0^{\infty} e^{-x(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho}} x^{\frac{n}{\rho}+\mu-1} dx = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{v}{z} \right)^n = \frac{1}{\rho} e^{-i\frac{\pi}{2}\mu} \frac{z^{1-\mu\rho}}{z-v}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

так как при  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > v^{\rho}$ , очевидно имеем  $v < |z|$ .

Но, как было показано выше, функция  $R(z)$  голоморфна в области (1.7), поэтому формула (1.8), полученная в предположении  $\operatorname{Re}(ze^{i\frac{\pi}{2\rho}})^{\rho} > v^{\rho}$ , справедлива в области (1.7) или, что то же, в области (1.7').

Отметим теперь, что кривая с параметрическим уравнением

$$z = z(u) = \sqrt[\rho]{u^{\rho} - i\varepsilon}, \quad u \geq 0$$

лежит в области угла  $-\frac{\pi}{\rho} < \arg z < 0$ , так как

$$\arg z(u) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{u^{\rho}}$$

и, таким образом, при  $0 \leq u < +\infty$

$$-\frac{\pi}{2\rho} \leq \arg z(u) < 0.$$

Заметив, что

$$\operatorname{Re}(z(u)) = Y^{(+)}(u; v; \varepsilon),$$

отсюда и из (1.8) получим утверждение (1.3) леммы.

2°. Докажем две леммы, полагая, что  $\rho \geq \frac{1}{2}$ .

Лемма 3. Для любого  $u > 0$  при фиксированном  $0 < \delta < u$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_u^{u+\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u-\delta}^u \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv = \frac{\pi}{2} u^{1-\mu\rho}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

б) Если  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} \right| dv = \pi u^{1-\mu\rho}. \quad (2.2)$$

Доказательство. а) Обозначим

$$Y_1(\varepsilon) = \int_u^{u+\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv, \quad (2.3)$$

тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} Y_1(\varepsilon) &= u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log \frac{u + \delta - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}{u - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}} \right\} = \\ &= u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log [u + \delta - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}] \right\} - \\ &- u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log \left[ 1 - \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] \right\} - \\ &- u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log u \right\} = \\ &= Y_1^{(1)}(\varepsilon) + Y_1^{(2)}(\varepsilon) + Y_1^{(3)}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_1^{(1)}(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_1^{(3)}(\varepsilon) = 0. \quad (2.5)$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
 Y_1^{(2)}(\varepsilon) &= -u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left[ 1 - \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \frac{i\varepsilon}{u^\rho} + O(\varepsilon^2) \right] \times \right. \\
 &\times \log \left[ \frac{i\varepsilon}{\rho u^\rho} (1 + O(\varepsilon)) \right] \left. \right\} = -u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ \left[ i + \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \frac{\varepsilon}{u^\rho} + \right. \right. \\
 &+ O(\varepsilon^2) \left. \right] \log \frac{i\varepsilon}{\rho u^\rho} \left. \right\} - u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left[ 1 - \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \frac{i\varepsilon}{u^\rho} + \right. \right. \\
 &+ O(\varepsilon^2) \left. \right] \log [1 + O(\varepsilon)] \left. \right\} = \frac{\pi}{2} u^{1-\mu\rho} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon \log \varepsilon). \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Из (2.4), (2.5) и (2.6) следует первая из формул (2.1).

Аналогично обозначая

$$Y_2(\varepsilon) = \int_{u-\delta}^u \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv, \quad (2.7)$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 Y_2(\varepsilon) &= u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log \frac{u - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}{u - \delta - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}} \right\} = \\
 &= u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log u \right\} + u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - \right. \right. \\
 &- i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \left. \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log \left[ 1 - \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \right] \left. \right\} - u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - \right. \right. \\
 &- i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \left. \right)^{\frac{1}{\rho}-\mu} \log \left[ u - \delta - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} \right] \left. \right\} = \\
 &= Y_2^{(1)}(\varepsilon) + Y_2^{(2)}(\varepsilon) + Y_2^{(3)}(\varepsilon). \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Очевидно,

$$Y_2^{(1)}(\varepsilon) = -Y_1^{(3)}(\varepsilon), \quad Y_2^{(2)}(\varepsilon) = -Y_1^{(2)}(\varepsilon),$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_2^{(1)}(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_2^{(2)}(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2} u^{1-\mu\rho}. \quad (2.9)$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Y_2^{(3)}(\varepsilon) = -u^{1-\mu\rho} \operatorname{Re} (i \log(-\delta)) = \pi u^{1-\mu\rho}. \quad (2.10)$$

\*) Так как точка  $(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}$  находится на нашей кривой  $z = z(u)$  и  $u > 0$ , то легко видеть, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\arg[u - \delta - (u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}] \rightarrow \pi$ .

Из (2.8), (2.9) и (2.10) следует вторая из формул (2.1).

б) Заметим, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} = (u^{2\rho} + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \times$$

$$\times \frac{(u^{2\rho} + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2\rho}} \sin \left( \mu \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right) + v \sin \left[ \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right]}{|(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v|^2}. \quad (2.11)$$

В этом выражении  $u > 0$  фиксировано,  $u - \delta < v < u + \delta$ ,  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ ,

поэтому при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  справа в (2.11) имеем неотрицательную величину. Поэтому при малых  $\varepsilon > 0$

$$\int_{u-\delta}^{u+\delta} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} \right| dv =$$

$$= \int_{u-\delta}^{u+\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv = Y_1(\varepsilon) + Y_2(\varepsilon), \quad (2.12)$$

где  $Y_1(\varepsilon)$  и  $Y_2(\varepsilon)$  были определены формулами (2.3) и (2.7).

Из (2.12) и (2.1) следует утверждение (2.2) леммы.

При  $u = 0$  результат доказанной леммы несколько изменится. Имеет место

*Лемма 4.* Если  $\rho \geq \frac{1}{2}$ ,  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ , то для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} \right| dv =$$

$$= \begin{cases} \pi \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right), & \text{при } \mu = \frac{1}{\rho}, \\ \pi, & \text{при } 0 < \mu < \frac{1}{\rho}. \end{cases} \quad (2.13)$$

*Доказательство.* Обозначим

$$\Omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv.$$

тогда после замены переменной  $v = \varepsilon^{\frac{1}{\rho}} x$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Omega(\varepsilon; \mu; \rho) &= \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{\rho}}} x^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \frac{i(-i)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{x - (-i)^{\frac{1}{\rho}}} dx = \\ &= \int_0^{\varepsilon^{\frac{1}{\rho}}} \frac{x \sin\left(\frac{1}{\rho} - \mu\right) + \sin \frac{\pi\mu}{2}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2\rho} + 1} x^{\mu\rho-1} dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

При  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho \geq \frac{1}{2}$  очевидно подынтегральное выражение в (2.14) неотрицательно, поэтому достаточно показать лишь, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \begin{cases} \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right), & \text{при } \mu = \frac{1}{\rho} \\ \pi, & \text{при } 0 < \mu < \frac{1}{\rho}. \end{cases} \quad (2.13')$$

Если  $\mu = \frac{1}{\rho}$ , то из (2.14) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega\left(\varepsilon; \frac{1}{\rho}; \rho\right) &= \sin \frac{\pi}{2\rho} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2\rho} + 1} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{\pi}{2\rho}}{\sin \frac{\pi}{2\rho}} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \left(\cotg \frac{\pi}{2\rho}\right) = \pi \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

т. е. (2.13') доказано при  $\mu = \frac{1}{\rho}$ .

Если же  $0 < \mu < \frac{1}{\rho}$ , то из (2.14) получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin\left(\frac{1}{\rho} - \mu\right) + \sin \frac{\pi\mu}{2}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2\rho} + 1} x^{\mu\rho-1} dx. \quad (2.16)$$

Но известно [4], что при  $0 < \rho < 2$ ,  $-\pi < \lambda < \pi$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\rho-1}}{x^2 + 2x \cos \lambda + 1} dx = \pi \frac{\sin[(1-\rho)\lambda]}{\sin \lambda \sin \rho \pi}. \quad (2.17)$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu\rho-1}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2\rho} + 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu\rho-1}}{x^2 + 2x \cos \left( \pi - \frac{\pi}{2\rho} \right) + 1} dx =$$

$$= \pi \frac{\sin \left[ \pi(1 - \mu\rho) \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right) \right]}{\sin \pi \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right) \sin \pi \mu\rho} \quad (2.18)$$

так как при  $\rho > \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \pi \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right) < \pi$ ,  $\mu\rho > 0$ .

Аналогично

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu\rho}}{x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{2\rho} + 1} dx = \pi \frac{\sin \pi \mu\rho \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right)}{\sin \pi \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right) \sin \pi \mu\rho} \quad (2.19)$$

так как  $\mu\rho < 1$ .

Из (2.16), (2.17) и (2.18) следует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2\rho} \sin \pi \mu\rho} \left\{ \sin \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \mu \right) \sin \pi \mu\rho \left( 1 - \frac{1}{\rho} \right) + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{\pi \mu}{2} \sin \left[ \pi(1 - \mu\rho) \left( 1 - \frac{1}{2\rho} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi \mu}{2} \sin \pi \mu\rho} \left\{ \cos \pi \left( \frac{1}{2\rho} - \mu\rho \right) - \cos \pi \left( \frac{1}{2\rho} + \mu\rho - \mu \right) + \right.$$

$$\left. + \cos \pi \left( \frac{1}{2\rho} + \mu\rho - \mu \right) - \cos \pi \left( \frac{1}{2\rho} + \mu\rho \right) \right\} = \pi.$$

3°. Докажем теперь следующую лемму, полагая опять, что  $\rho > \frac{1}{2}$ .

*Лемма 5.* Пусть  $u \geq 0$ , тогда для всякого фиксированного  $\delta$  ( $0 < \delta < u$ ) будем иметь

$$a) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_u^{u+\delta} v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} dv =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u-\delta}^u v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} dv = \frac{\pi}{2} \quad (3.1)$$

б) Если  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{u-\delta}^{u+\delta} v^{\mu\rho-1} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} \right| dv = \pi. \quad (3.2)$$

*Доказательство.* Обозначим

$$\gamma_1(\varepsilon) = \int_u^{u+\delta} v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} dv, \quad (3.3)$$

тогда имеем:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\varepsilon) &= -\operatorname{Re} \left\{ i \int_u^{u+\delta} v^{\rho(\mu-1)} (v^\rho - i\varepsilon)^{1-\mu} d \log [(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u] \right\} = \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ i (u+\delta)^{\rho(\mu-1)} [(u+\delta)^\rho - i\varepsilon]^{1-\mu} \log [(u+\delta)^\rho - i\varepsilon]^{\frac{1}{\rho}} - u \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left\{ i u^{\rho(\mu-1)} (u^\rho - i\varepsilon)^{1-\mu} \log [u^\rho - i\varepsilon]^{\frac{1}{\rho}} - u \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left\{ i \int_u^{u+\delta} \log [(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u] d [v^{\rho(\mu-1)} (v^\rho - i\varepsilon)^{1-\mu}] \right\} = \\ &= \gamma_1^{(1)}(\varepsilon) + \gamma_1^{(2)}(\varepsilon) + \gamma_1^{(3)}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_1^{(1)}(\varepsilon) = -\operatorname{Re} \{ i \log \delta \} = 0, \quad (3.5)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_1^{(2)}(\varepsilon) = \operatorname{Re} \left\{ i \int_u^{u+\delta} \log(v-u) d(1) \right\} = 0. \quad (3.6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(2)}(\varepsilon) &= \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{1-\mu} \log u \right\} + \\ &\quad + \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{1-\mu} \log \left[ \left( 1 - i \frac{\varepsilon}{u^\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} - 1 \right] \right\} = \gamma_1^{(4)}(\varepsilon) + \gamma_1^{(5)}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.7)$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_1^{(4)}(\varepsilon) = 0. \quad (3.8)$$

Наконец,

$$\gamma_1^{(5)}(\varepsilon) = \operatorname{Re} \left\{ i \left[ 1 - (1-\mu) \frac{i\varepsilon}{u^\rho} + O(\varepsilon^2) \right] \log \left[ \frac{-i\varepsilon}{\rho u^\rho} (1 + O(\varepsilon)) \right] \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re} \left\{ \left[ i + (1 - \mu) \frac{\varepsilon}{u^\rho} + O(\varepsilon^2) \right] \log \frac{-i\varepsilon}{\rho u^\rho} \right\} + \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ i \left[ 1 - (1 - \mu) \frac{i\varepsilon}{u^\rho} + O(\varepsilon^2) \right] \log(1 + O(\varepsilon)) \right\} = \\
 &= \frac{\pi}{2} + O(\varepsilon) + O(\varepsilon \log \varepsilon). \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Из формул (3.3) — (3.9) следует первое из предельных соотношений (3.1) леммы.

Обозначим теперь

$$\gamma_2(\varepsilon) = \int_{u-\delta}^u v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} dv, \tag{3.10}$$

тогда имеем:

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(\varepsilon) &= -\operatorname{Re} \left\{ i \int_{u-\delta}^u v^{\mu(\rho-1)} (v^\rho - i\varepsilon)^{1-\mu} d \log [(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u] \right\} = \\
 &= -\operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{(u-\delta)^\rho} \right)^{1-\mu} \log \left( \left[ (u-\delta)^\rho - i\varepsilon \right] \right) \right\} + \\
 &+ \operatorname{Re} \left\{ i \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{(u-\delta)^\rho} \right)^{1-\mu} \log \left( \left[ (u-\delta)^\rho - i\varepsilon \right] - u \right) \right\} - \\
 &- \operatorname{Re} \left\{ i \int_{u-\delta}^u \log [(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u] d \left( 1 - \frac{i\varepsilon}{v^\rho} \right)^{1-\mu} \right\} = \\
 &= \gamma_2^{(1)}(\varepsilon) + \gamma_2^{(2)}(\varepsilon) + \gamma_2^{(3)}(\varepsilon). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

По обозначениям, введенным выше,  $\gamma_2^{(1)}(\varepsilon) = -\gamma_1^{(2)}(\varepsilon)$  и поэтому в силу (3.7) — (3.9)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_2^{(1)}(\varepsilon) = -\frac{\pi^*}{2}. \tag{3.12}$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_2^{(3)}(\varepsilon) = 0. \tag{3.13}$$

Наконец, как и выше,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_2^{(2)}(\varepsilon) = 0. \tag{3.14}$$

\*) В этом случае легко видеть, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\arg \left( \left[ (u-\delta)^\rho - i\varepsilon \right]^{\frac{1}{\rho}} - u \right) \rightarrow -\pi.$$

Из (3.11) — (3.14) следует  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \gamma_2(\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$ , т. е. вторая из формул (3.1) леммы.

в) Заменяя в формуле (2.11)  $u$  и  $v$  местами, опять заключаем, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  выражение

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\}$$

неотрицательно, если  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ . Поэтому при малых  $\varepsilon$

$$\int_{u-\delta}^{u+\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - u} \right\} dv = \gamma_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon), \quad (3.15)$$

где  $\gamma_1(\varepsilon)$  и  $\gamma_2(\varepsilon)$  определены выше формулами (3.3) и (3.10).

Из (3.15) и (3.1) следует утверждение (3.2) леммы.

При  $u = 0$  имеет место

*Лемма 6.* Если  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ , то для любого  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} \right| dv = \frac{\pi}{2\rho}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

*Доказательство.* Обозначим

$$\omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \int_0^\delta v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv, \quad (3.17)$$

тогда после замены переменной  $v = \varepsilon^{\frac{1}{\rho}} x^{-\frac{1}{\rho}}$  получим

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon; \mu; \rho) &= \frac{1}{\rho} \int_{\varepsilon\delta^{-\rho}}^{\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(1 - ix)^\mu} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{\varepsilon\delta^{-\rho}}^{\infty} \frac{\sin(\mu \operatorname{arctg} x)}{x(1+x^2)^{\mu/\rho}} dx. \end{aligned} \quad (3.18)$$

При  $\rho \geq \frac{1}{2}$ ,  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$  очевидно, что подынтегральное выражение в (3.18) неотрицательно. Поэтому достаточно лишь показать,

что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \frac{\pi}{2\rho}. \quad (3.16')$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\mu \operatorname{arctg} x)}{x(1+x^2)^{\mu/2}} dx,$$

откуда, после замены  $x = \operatorname{tg} x$ , получим ([4], стр. 182)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon; \mu; \rho) = \frac{1}{\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \mu u}{\sin u} \cos^{\mu-1} u du = \frac{\pi}{2\rho}.$$

Лемма доказана.

4°. Наконец, докажем последнюю лемму, необходимую нам ниже.

*Лемма 7.* Пусть  $f(v)$  измеримая функция, заданная на полуоси  $(0, +\infty)$  и удовлетворяющая условию

а) при данном  $\mu \geq 1$ ,  $\rho \geq \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \quad (4.1)$$

б) при данном  $0 < \mu < 1$ ,  $\rho \geq \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \quad \int_1^{\infty} |f(v)| v^{\rho-1} dv < +\infty. \quad (4.1')$$

*Интеграл*

$$F(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{\infty} f(v) E_{\rho}(vz; \mu) v^{\mu\rho-1} dv \quad (4.2)$$

абсолютно сходится на лучах  $z = te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}$ ,  $t \geq 0$ , причем, когда  $t \rightarrow +\infty$

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})| \ll O(t^{\rho(1-\mu)}). \quad (4.3)$$

*Доказательство.* а) В силу оценки (1.1') при  $\mu \geq 1$

$$|E_{\rho}(vte^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu)| \leq A_{\rho}, \quad v \geq 0, t \geq 0, \quad (4.4)$$

где  $A_{\rho}$  — константа, не зависящая от  $v$  и  $t$ .

Поэтому, если  $\mu \geq 1$ , из оценки (4.4) имеем

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2p}})| \leq \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} A_3 \int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho-1} dv \quad (t > 0). \quad (4.5)$$

Таким образом, в силу условия (4.1) утверждение леммы в случае  $\mu > 1$  доказано.

б) Если  $0 < \mu < 1$ , то из (1.1') следует, что при  $v > 0, t \geq 0$

$$|E_p(vte^{\pm i\frac{\pi}{2p}}; \mu)| \leq A_4 (1 + (vt)^{\rho(1-\mu)}), \quad (4.4)$$

где  $A_4$  — константа, не зависящая от  $v$  и  $t$ .

Поэтому при  $0 < \mu < 1$  из (4.4) имеем:

$$\begin{aligned} |F(te^{\pm i\frac{\pi}{2p}})| &< \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{\infty} |f(v)| (1 + (tv)^{\rho(1-\mu)}) v^{\mu\rho-1} dv = \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} A_4 \left\{ \int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho-1} dv + t^{\rho(1-\mu)} \int_0^{\infty} v^{\rho-1} |f(v)| dv \right\}. \end{aligned} \quad (4.5')$$

Первый интеграл справа в (4.5') сходится в силу первого из условий (4.1'). Второй интеграл также сходится, так как  $0 < \mu < 1$ , и поэтому

$$\int_0^{\infty} |f(v)| v^{\rho-1} dv \leq \int_0^1 |f(v)| v^{\mu\rho-1} dv + \int_1^{\infty} |f(v)| v^{\rho-1} dv,$$

а интегралы, стоящие справа, сходятся в силу условий (4.1').

Что касается утверждения (4.3) леммы, то оно просто следует из оценок (4.5) и (4.5').

## § 2. Преобразование с ядром $e^{-v^{\frac{\rho}{2}}}$ и суммирование по Абелю его обращения

5°. Пусть функция  $\varphi(v)$  измерима на полуоси  $(0, +\infty)$  и при данном  $\rho > \frac{1}{2}$  и  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$  удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |\varphi(v)| v^{\mu\rho-1} dv < +\infty. \quad (5.1)$$

Очевидно, что функция

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^{\frac{\rho}{2}z}} \varphi(v) v^{\mu\rho-1} dv \quad (5.2)$$

голоморфна в области  $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$  и непрерывна на ее границе.

Для любого  $\varepsilon > 0$  и  $0 \leq u < +\infty$  составим функцию

$$\varphi_\varepsilon(u) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho} \Phi(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}) E_\rho(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) \times \right. \\ \times t^{\mu\rho-1} dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon t^\rho} \Phi(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) \times \\ \left. \times E_\rho(ute^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt \right\}, \quad (5.3)$$

которая, в силу оценки (1.1), очевидно непрерывна на полуоси  $(0, +\infty)$ .

Докажем теорему.

*Теорема 1.* Пусть функция  $\varphi(v)$  удовлетворяет указанному выше условию (5.1).

а) Если  $u > 0$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} [\varphi(u+0) + \varphi(u-0)] \quad (5.4)$$

там, где это выражение имеет смысл, и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(u) = \varphi(u) \quad (5.4')$$

почти для всех  $u > 0$ .

б) Если существует значение  $\varphi(+0)$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\rho} \varphi(0). \quad (5.5)$$

*Доказательство.* Подставляя значения  $\Phi(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$  из (5.2) в (5.3), после замены порядка интегрирования получим следующее выражение для функции  $\varphi_\varepsilon(u)$  при любом  $\varepsilon > 0$  и  $0 \leq u < +\infty$ :

$$\varphi_\varepsilon(u) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon + tv^\rho)t^\rho} \times \right. \\ \times E_\rho(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(\varepsilon - tv^\rho)t^\rho} \times \\ \left. \times E_\rho(ute^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt \right\} dv = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{Re} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon + iv^p)t^p} E_p(ute^{i\frac{\pi}{2p}}; \mu) t^{\mu p - 1} dt \right\} dv. \quad (5.6)$$

Но значение внутреннего интеграла, стоящего справа в (5.6), нами уже вычислено в лемме 2, поэтому

$$\varphi_{\epsilon}(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(v) v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv. \quad (5.7)$$

а) Пусть  $u > 0$ , тогда, выбирая число  $\delta > 0$  так, чтобы имели  $0 < u - \delta$ , напомним формулу (5.7) в виде

$$\varphi_{\epsilon}(u) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{u-\delta} + \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^{u+\delta} + \int_{u+\delta}^{\infty}. \quad (5.7')$$

Заметим теперь, что если  $0 \leq v < u - \delta$  или  $u + \delta < v < +\infty$ , то в силу того, что  $0 < \mu p < 1$ ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} = \operatorname{Re} \frac{-iv^{1-\mu p}}{v-u} = 0. \quad (5.8)$$

Поэтому из представления (5.7') в силу условия (5.1) получим

$$\varphi_{\epsilon}(u) = \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^{u+\delta} \varphi(v) v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv + o(1), \quad (5.9)$$

где  $o(1) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Пусть для данного  $u > 0$  существуют числа  $\varphi(u-0)$  и  $\varphi(u+0)$ , тогда (5.9) представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon}(u) &= \varphi(u-0) \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^u v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv + \\ &+ \varphi(u+0) \frac{1}{\pi} \int_u^{u+\delta} v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^u [\varphi(v) - \varphi(u-0)] v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_u^{u+\delta} [\varphi(v) - \varphi(u+0)] v^{\mu p - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p} - \mu}}{(v^p - i\epsilon)^{\frac{1}{p}} - u} \right\} dv + \\ &+ o(1) = R_{\epsilon}^{(1)} + R_{\epsilon}^{(2)} + R_{\epsilon}^{(3)} + R_{\epsilon}^{(4)} + o(1). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Но по формуле (3.1) леммы 5 имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2} \varphi(u-0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{2} \varphi(u+0), \quad (5.11)$$

для любого  $0 < \delta < u$ .

Так как числа  $\varphi(u-0)$  и  $\varphi(u+0)$  существуют, то для любого  $\varepsilon_1 > 0$  число  $\delta > 0$  можно было выбрать так, чтобы имели

$$\begin{aligned} |\varphi(v) - \varphi(u-0)| < \varepsilon_1, & \quad u - \delta \leq v < u, \\ |\varphi(v) - \varphi(u+0)| < \varepsilon_1, & \quad u < v \leq u + \delta. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Для такого  $\delta > 0$  имеем:

$$|R_\varepsilon^{(3)} + R_\varepsilon^{(4)}| \leq \varepsilon_1 \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^{u+\delta} v^{\mu\rho-1} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^\rho - u} \right\} \right| dv,$$

откуда, по формуле (3.2) леммы 5, получим:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |R_\varepsilon^{(3)} + R_\varepsilon^{(4)}| \leq \varepsilon_1. \quad (5.13)$$

Из формулы (5.10) в силу (5.11) — (5.13) следует, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi_\varepsilon(u) - \frac{1}{2} [\varphi(u+0) + \varphi(u-0)]| \leq \varepsilon_1,$$

откуда, так как  $\varepsilon_1 > 0$  произвольно, получим утверждение (5.4) теоремы.

Из (5.4) очевидно следует, что (5.4') имеет место почти для всех  $u > 0$ .

б) Положим, что  $\varphi(+0)$  существует, и для данного  $\varepsilon_1 > 0$  число  $\delta > 0$  выберем так, чтобы имели

$$|\varphi(v) - \varphi(+0)| < \varepsilon_1, \quad 0 < v \leq \delta. \quad (5.14)$$

Из формулы (5.7) имеем представление

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta + \frac{1}{\pi} \int_\delta^{+\infty}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Но при  $\delta \leq v < +\infty$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ -iv^{-\mu\rho} \right\} = 0,$$

поэтому формулу (5.15) можно написать в виде

$$\varphi_\varepsilon(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv + O(1). \quad (5.16)$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \varphi(+0) v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [\varphi(v) - \varphi(+0)] v^{\mu\rho-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{(v^\rho - i\varepsilon)^\mu} \right\} dv + \\ &+ O(1) = \Omega_\varepsilon^{(1)} + \Omega_\varepsilon^{(2)} + O(1). \end{aligned} \quad (5.17)$$

По формуле (3.16) леммы 6 получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{2\rho} \varphi(+0). \quad (5.18)$$

Далее, по (5.14) и по той же формуле (3.16)

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Omega_\varepsilon^{(2)}| \leq \frac{\varepsilon_1}{2\rho} \leq \varepsilon_1. \quad (5.19)$$

Из (5.17), (5.18) и (5.19) следует

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varphi_\varepsilon(0) - \frac{1}{2\rho} \varphi(+0)| \leq \varepsilon_1,$$

откуда, в силу произвольности  $\varepsilon_1$ , получим утверждение (5.5) теоремы.

Таким образом, теорема доказана.

6°. Результат теоремы 1 можно существенно дополнить, если  $\rho \geq 1$ .

Пусть функция  $\varphi(v)$  задана на полуоси  $(0, +\infty)$  и удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty |\varphi(v)| v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \quad (6.1)$$

где при данном  $\rho \geq 1$ ,  $0 < \mu < \frac{1}{\rho}$ .

Заметим, что если  $\rho > 1$  и  $\frac{\pi}{\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ , то

$$\frac{\pi}{2\rho} < \frac{3\pi}{2\rho} \leq \theta + \frac{\pi}{2\rho} \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}, \quad (6.2)$$

$$\frac{\pi}{2\rho} \leq \theta - \frac{\pi}{2\rho} \leq 2\pi - \frac{3\pi}{2\rho} < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Поэтому из асимптотических формул (3) и (4) следует, что при  $\rho > 1$ ,  $\frac{\pi}{\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ ,  $x \geq 1$

$$|E_{\rho}(xe^{i(\theta \pm \frac{\pi}{2\rho})}; \mu)| \leq A(1+x)^{\rho(1-\mu)}, \quad (6.3)$$

где  $A > 0$  константа, не зависящая от  $x$  и  $\theta$ .

Из оценки (6.3) следует, что функция  $\varphi_{\epsilon}(re^{i\theta})$ , определяемая формулой

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon}(re^{i\theta}) = & \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t^{\rho}} \Phi(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}) E_{\rho}(tre^{i(\theta + \frac{\pi}{2\rho})}; \mu) \times \right. \\ & \times t^{\mu\rho-1} dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t^{\rho}} \Phi(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) E_{\rho}(tre^{i(\theta - \frac{\pi}{2\rho})}; \mu) \times \\ & \left. \times t^{\mu\rho-1} dt \right\} \quad (6.4) \end{aligned}$$

существует и непрерывна при любом  $\epsilon > 0$  на лучах  $re^{i\theta}$   $r \geq 0$ , если  $\frac{\pi}{\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ .

*Теорема 2.* Если  $\rho \geq 1$ , то для любого  $\theta$  из отрезка  $\left[ \frac{\pi}{\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{\rho} \right]$  будем иметь

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi_{\epsilon}(re^{i\theta}) = 0, \quad 0 < r < +\infty. \quad (6.5)$$

*Доказательство.* Подставляя значения  $\Phi(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$  из (5.2) в (6.4), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{\epsilon}(re^{i\theta}) = & \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(v) v^{\mu\rho-1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon + iv^{\rho})t^{\rho}} \times \right. \\ & \times E_{\rho}(tre^{i(\theta + \frac{\pi}{2\rho})}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-(\epsilon - iv^{\rho})t^{\rho}} \times \\ & \left. \times E_{\rho}(tre^{i(\theta - \frac{\pi}{2\rho})}; \mu) t^{\mu\rho-1} dt \right\} dv. \quad (6.6) \end{aligned}$$

Для вычисления внутренних интегралов, стоящих справа в (6.6), поступаем вполне аналогичным образом, как при доказательстве леммы 2.

Например, для вычисления первого из указанных интегралов рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} E_{\rho} \left( \operatorname{tr} e^{i \left( \theta + \frac{\pi}{2\rho} \right)}; \mu \right) t^{\mu\rho - 1} dt, \quad (6.7)$$

который в силу (6.2) и (6.3) сходится и представляет аналитическую функцию в области  $\operatorname{Re} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} > 0$ , т. е. в угле  $-\frac{\pi}{\rho} < \arg z < 0$ . Как и в пункте 1°, полагая, что  $\operatorname{Re} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} > r^{\rho}$ , значение интеграла (6.7) вычисляем непосредственным интегрированием

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} E_{\rho} \left( \operatorname{tr} e^{i \left( \theta + \frac{\pi}{2\rho} \right)}; \mu \right) t^{\mu\rho - 1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \operatorname{re}^{i \left( \theta + \frac{\pi}{2\rho} \right)} \right)^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} t^{n + \mu\rho - 1} dt = \\ &= \frac{1}{\rho} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{-\mu\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{re}^{i\theta}}{z} \right)^n = \rho^{-1} e^{-i \frac{\pi}{2} \mu} \frac{z^{1-\mu\rho}}{z - \operatorname{re}^{i\theta}}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

так как при  $\operatorname{Re} \left( z e^{i \frac{\pi}{2\rho}} \right)^{\rho} > r^{\rho}$  очевидно  $|\operatorname{re}^{i\theta}| < |z|$ .

Из (6.8) аналогичным образом, как в лемме 2, получим формулу

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(\varepsilon + iv^{\rho})} E_{\rho} \left( \operatorname{tr} e^{i \left( \theta + \frac{\pi}{2\rho} \right)}; \mu \right) t^{\mu\rho - 1} dt = \\ &= \frac{1}{\rho} e^{-i \frac{\pi}{2} \mu} \frac{(v^{\rho} - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^{\rho} - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - \operatorname{re}^{i\theta}}, \quad (r \geq 0), \end{aligned} \quad (6.9)$$

справедливую при  $\rho \geq 1$ ,  $\frac{\pi}{\rho} = \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ .

Из (6.9) или же просто интегрированием получим также формулу

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(\varepsilon - iv^{\rho})} E_{\rho} \left( \operatorname{tr} e^{i \left( \theta - \frac{\pi}{2\rho} \right)}; \mu \right) t^{\mu\rho - 1} dt = \\ &= \frac{1}{\rho} e^{i \frac{\pi}{2} \mu} \frac{(v^{\rho} + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^{\rho} + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - \operatorname{re}^{i\theta}}, \quad (r \geq 0), \end{aligned} \quad (6.10)$$

справедливую опять при  $\rho \geq 1$ ,  $\frac{\pi}{\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ .

Из (6.6), (6.9) и (6.10) получим

$$\begin{aligned} \varphi_r(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \varphi(v) v^{\mu\rho} - 1 \left\{ \frac{-i(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - re^{i\theta}} + \right. \\ \left. + \frac{i(v^\rho + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(v^\rho + i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - re^{i\theta}} \right\} dv, \quad (r \geq 0) \end{aligned} \quad (6.11)$$

при  $\rho \geq 1$ ,  $\frac{\pi}{\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ .

Из (6.11) в силу условия (6.1) получим утверждение (6.5) теоремы.

Результаты теорем 1 и 2 позволяют построить аппарат для представления функций, непрерывных на двух произвольных лучах, исходящих из начала координат и составляющих заданный угол  $\frac{\pi}{\alpha}$  ( $\alpha \geq 1$ ).

Это можно сделать точно таким же образом, как в работе [1]. Однако мы на этом останавливаться не будем.

### § 3. Преобразование с ядром $E_\rho(vz; \mu)$ и суммирование по Абелю его обращения

В нашей работе [1] для функций, удовлетворяющих условию Дирихле на полуоси  $(0, +\infty)$ , мы рассматривали лишь преобразование с ядром  $e^{-v^\rho z^\rho}$  и его обращение при помощи ядра  $E_\rho(zv; \mu)$ . Обратное преобразование с ядром  $E_\rho(zv; \mu)$  и его обращение там не изучалось. В работе же [2] рассматривались оба преобразования в классе  $L_2$ .

В настоящем параграфе мы рассматриваем преобразование функций при помощи ядра вида  $E_\rho(zv; \mu)$  и доказываем, что обратное преобразование с ядром вида  $e^{-z^\rho v^\rho}$  суммируется по Абелю.

7°. Пусть функция  $f(v)$  измерима на полуоси  $(0, +\infty)$  и удовлетворяет одному из следующих условий:

а) при данном  $\mu \geq 1$ ,  $\rho \geq \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho - 1} dv < +\infty, \quad (7.1)$$

б) при данном  $0 < \mu < 1$ ,  $\rho \geq \frac{1}{2}$

$$\int_0^{\infty} |f(v)| v^{\mu\rho - 1} dv < +\infty, \quad \int_1^{\infty} |f(v)| v^{\rho - 1} dv < +\infty. \quad (7.2)$$

По лемме 7, в обоих случаях интеграл

$$F(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^{\infty} f(v) E_{\rho}(vz; \mu) v^{\mu\rho-1} dv \quad (7.3)$$

абсолютно сходится на лучах  $z = te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}$ ,  $t \geq 0$  и при  $t \rightarrow +\infty$

$$|F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})| \leq O(t^{\rho(1-\mu)}). \quad (7.4)$$

Из (7.4) следует, что при любом  $\varepsilon > 0$  существует функция

$$f_{\varepsilon}(u) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t^{\rho}} F(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}) e^{-it^{\rho} u^{\rho}} t^{\mu\rho-1} dt + \right. \\ \left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t^{\rho}} F(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) e^{it^{\rho} u^{\rho}} t^{\mu\rho-1} dt \right\} \quad (7.5)$$

на полуоси  $0 \leq u < +\infty$ .

Докажем теорему.

*Теорема 3.* Пусть функция  $f(v)$  удовлетворяет одному из условий а) или б), при этом в обоих случаях  $0 < \mu \leq \frac{1}{\rho}$ ; тогда

1) если  $u > 0$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} [f(u+0) + f(u-0)] \quad (7.6)$$

там, где это выражение имеет смысл,

$$и \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(u) = f(u) \quad (7.6')$$

почти для всех  $u > 0$ ;

2) если существует значение  $f(+0)$ , то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(0) = \begin{cases} f(+0), & \text{при } 0 < \mu < \frac{1}{\rho} \\ \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right) f(+0), & \text{при } \mu = \frac{1}{\rho}. \end{cases} \quad (7.7)$$

*Доказательство.* Подставляя значения  $F(te^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}})$  из (7.3) в (7.5), получим, что при любом  $\varepsilon > 0$  и  $0 \leq u < +\infty$

$$f_{\varepsilon}(u) = \frac{\rho}{2\pi} \int_0^{\infty} f(v) v^{\mu\rho-1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}(\varepsilon + iu^{\rho})} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times E_p(vte^{i\frac{\pi}{2p}}; \mu)t^{\mu p-1} dt + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon + iu^\rho)} \times \\
& \times E_p(vte^{-i\frac{\pi}{2p}}; \mu)t^{\mu p-1} dt \Big\} dv = \\
& = \frac{\rho}{\pi} \int_0^\infty f(v)v^{\mu p-1} \left\{ \operatorname{Re} e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-t^\rho(\varepsilon + iu^\rho)} E_p(vte^{i\frac{\pi}{2p}}; \mu) \times \right. \\
& \left. \times t^{\mu p-1} dt \right\} dv = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(v)v^{\mu p-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv \quad (7.8)
\end{aligned}$$

в силу формулы (1.3) леммы 2.

1) Пусть  $u > 0$  и существуют числа  $f(u-0)$  и  $f(u+0)$ . Выберем для данного  $\varepsilon_1 > 0$  число  $\delta = \delta(\varepsilon_1)$  таким образом, чтобы имели  $0 < \delta < u$  и

$$\begin{aligned}
|v^{\mu p-1} f(v) - u^{\mu p-1} f(u-0)| &< \varepsilon_1, \quad u - \delta \leq v < u, \\
|v^{\mu p-1} f(v) - u^{\mu p-1} f(u+0)| &< \varepsilon_1, \quad u < v \leq u + \delta. \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Разбивая последний интеграл в (7.8) на три интеграла, распространенные на интервалы  $(0, u - \delta)$ ,  $(u - \delta, u + \delta)$ ,  $(u + \delta, +\infty)$ , как при доказательстве теоремы 1, заключаем, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^{u+\delta} f(v)v^{\mu p-1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + o(1). \quad (7.10)$$

Далее, функцию  $f_\varepsilon(u)$  представим в виде

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(u) &= u^{\mu p-1} f(u-0) \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^u \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + \\
&+ u^{\mu p-1} f(u+0) \frac{1}{\pi} \int_u^{u+\delta} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{u-\delta}^u [v^{\mu p-1} f(v) - u^{\mu p-1} f(u-0)] \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_u^{u+\delta} [v^{\mu p-1} f(v) - u^{\mu p-1} f(u+0)] \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}-\mu}}{(u^\rho - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + \\
&+ o(1) = R_\varepsilon^{(1)} + R_\varepsilon^{(2)} + R_\varepsilon^{(3)} + R_\varepsilon^{(4)} + o(1). \quad (7.11)
\end{aligned}$$

Но по формуле (2.1) леммы 3 имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\varepsilon}^{(1)} = \frac{1}{2} f(u-0), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_{\varepsilon}^{(2)} = \frac{1}{2} f(u+0). \quad (7.12)$$

Далее, в силу (7.9)

$$|R_{\varepsilon}^{(3)} + R_{\varepsilon}^{(4)}| \leq \varepsilon_1 \frac{1}{\pi} \int_{u-\varepsilon}^{u+\delta} \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(u^{\rho} - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(u^{\rho} - i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} \right| dv,$$

откуда по (2.2)

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |R_{\varepsilon}^{(3)} + R_{\varepsilon}^{(4)}| \leq \varepsilon_1 u^{1-\mu\rho}. \quad (7.13)$$

Из (7.11), (7.12) и (7.13) получим:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} |f_{\varepsilon}(u) - \frac{1}{2} [f(u+0) + f(u-0)]| < \varepsilon_1 u^{1-\mu\rho}, \quad (7.14)$$

откуда, в силу произвольности  $\varepsilon_1 > 0$ , следует утверждение (7.6) теоремы.

Из (7.6) следует, очевидно, что (7.6') имеет место почти во всех  $u > 0$ .

2. Пусть существует значение  $f(+0)$ , тогда для  $\varepsilon_1 > 0$  выберем  $\delta > 0$  таким образом, чтобы имели

$$|f(v) - f(+0)| < \varepsilon_1, \quad 0 < v \leq \delta. \quad (7.15)$$

Из формулы (7.8) получили представление

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} f(v) v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + o(1), \end{aligned} \quad (7.16)$$

так как при  $0 < \mu < \frac{1}{\rho}$ ,  $v \geq \delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} = 0.$$

Далее, имеем:

$$f_{\varepsilon}(0) = f(+0) \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} [f(v) - f(+0)] v^{\mu\rho - 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho} - \mu}}{(-i\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}} - v} \right\} dv + \\
 & + O(1) = \Omega_i^{(1)} + \Omega_i^{(2)} + O(1).
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

Но по формуле (2.13) леммы 4

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega_i^{(1)} = \begin{cases} f(+0), & \text{при } 0 < \mu < \frac{1}{\rho} \\ \left(1 - \frac{1}{2\rho}\right) f(+0), & \text{при } \mu = \frac{1}{\rho}. \end{cases}
 \tag{7.18}$$

Далее, в силу (7.15) и (2.13),

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\Omega_i^{(2)}| \leq \varepsilon_1.
 \tag{7.19}$$

Из (7.17), (7.12) и (7.19) получим утверждение (7.7) теоремы.

В заключение отметим, что из результатов настоящей работы при помощи одной Тауберовой теоремы будет следовать результат нашей работы [1] в более полном виде.

Сектор математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 29 IX 1954

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джрбашян М. М. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 18, № 5 (1954).
2. Джрбашян М. М. ДАН СССР, т. ХСV, № 6 (1954).
3. Джрбашян М. М. ДАН Армянской ССР, т. 19, № 3 (1954).
4. См. напр. Рижик И. М. и Градштейн И. С. Таблицы интегралов, М.—Л. (1951), стр. 158.

**Մ. Մ. ՋԵՐԲԱՅԱՆ**

**ԸՆԴՀԱՆՐԱՑԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՁԵՎԱՓՈՒՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՍՏ  
ԱԲԵԼԻ ԳՈՒՄԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

**Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ**

Մեր աշխատության մեջ [1] կառուցված էր  $e^{-z^\rho}$  և  $E_\rho(z; \mu)$  տեսքի կորիզներով ընդհանրացած ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը, որտեղ՝

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիա է  $\varphi$  կարգի  $\mu$  1 տիպի Ապագուցված էր, որ եթե  $\delta$  ձևափոխվող ֆունկցիան անընդհատ է, բավարարում է Դիրիխլեի պայմաններին, ապա այն ներկայացնելի է Ֆուրյեի տիպի ինտեգրալով:

Մեր մյուս աշխատության մեջ [2] կառուցված էր  $e^{-z^\rho}$  և  $E_\rho(z; \mu)$  տեսքի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների տեսությունը  $L_2$  դասում և ցույց էր տրված, որ Ֆուրյեի կլասիկ ինտեգրալի համար հայտնի Պլանչերելի տեսությունը տարածվում է վերոհիշյալ ընդհանրացած ձևափոխությունների վրա:

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է, որ  $e^{-z^\rho}$  և  $E_\rho(z; \mu)$  տեսքի կորիզներով ինտեգրալ ձևափոխությունների շրջման բանաձևերը ըստ Արելի գումարվում են դեպի ձևափոխվող ֆունկցիան, եթե վերջինս անընդհատ է  $(0, +\infty)$  առանցքի վրա:

Ինչպես վերոհիշյալ աշխատություններում, այնպես էլ այստեղ, մենք էսպես նենվում ենք  $E_\rho(z; \mu)$  ֆունկցիայի ասիմպտոտական հատկությունները վրա:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян

Изгиб полуэллиптической плиты

Решение задачи об изгибе равномерно нагруженной полуэллиптической плиты, защемленной по криволинейному контуру и опертой по прямолинейному, дано Б. Г. Галеркиным [1], причем им рассмотрено два случая: 1) когда полуэллипс получается вследствие разреза эллипса по большому диаметру и 2) по малому диаметру.

Приведенное ниже решение той же задачи нам представляется более эффективным.

§ 1. *Эллиптическая плита, разрезанная по большому диаметру.* Нагрузим защемленную по всему контуру эллиптическую плиту в области  $y > 0$  равномерно распределенной нагрузкой  $p$ , а в области  $y < 0$  — равномерной нагрузкой  $(-p)$  (оси  $x$  и  $y$  совмещены соответственно с большим и малым диаметрами эллипса). При такой нагрузке свободное опирание полуэллиптической плиты по большому диаметру обеспечивается заранее. Поэтому, если мы решим задачу об изгибе защемленной по всему контуру эллиптической плиты при указанной нагрузке, то получим решение задачи об изгибе равномерно нагруженной полуэллиптической плиты, защемленной по криволинейному контуру и опертой по большому диаметру.

При рассматриваемой нагрузке общее выражение прогиба можно представить в следующем виде [2]:

при  $y \geq 0$

$$w = \frac{p}{384 D} (z - \bar{z})^4 + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.1)$$

при  $y \leq 0$

$$w = -\frac{p}{384 D} (z - \bar{z})^4 + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.2)$$

где  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ ,  $D$  — жесткость плиты.

Аналитические функции  $\varphi(z)$  и  $\chi(z)$  определяются из условий защемления эллиптической плиты по всему контуру.

Пользуясь способом, изложенным в предыдущей работе [3], определим эти функции:

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi(z) = \frac{ipb^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})(\zeta^{2k} + \zeta^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]}, \quad (1.3)$$

$$\chi_1(\zeta) = \chi(z) = \frac{ipRb^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} + \rho_0^{-2k}}{(2k + 3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \\ \left. + \frac{(2k + 2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k + 5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} - (2k + 2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} (\zeta^{2k+1} + \zeta^{-2k-1}), \quad (1.4)$$

причем связь между комплексными переменными  $z$  и  $\zeta$  дана с помощью отображающей функции

$$z = R \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2},$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса.

$$\text{На контуре эллипса } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} > 1.$$

Внося (1.3) и (1.4) в (1.1), найдем уравнение упругой поверхности полуэллиптической плиты:

$$w = \frac{p}{24D} y^4 - \frac{2pRb^3}{\pi D} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})(\rho^{2k+1} - \rho^{-2k-1}) \sin(2k-1)\theta +}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} \right. \\ \left. + \frac{(\rho^{2k-1} - \rho^{-2k+1}) \sin(2k+1)\theta}{-(\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})} + \sum_0^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(2k-3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2k+2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k+5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} - (2k+2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right] (\rho^{2k+1} - \right. \\ \left. - \rho_0^{-2k-2}) \sin(2k+1)\theta \right\}. \quad (1.5)$$

Таким образом поставленная задача полностью решена. Ряды, входящие в (1.5), сходятся для всех значений  $\rho_0 > 1$ . При определении расчетных величин легко можно усилить сходимость указанных рядов.

Полагая в (1.5)  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , найдем прогиб по оси симметрии полуэллиптической плиты:

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{\rho y^4}{24D} + \frac{2\rho h^3 y}{\pi D} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})(\rho^{2k} - \rho^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} - \\
 & - \frac{2\rho R b^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)(2k + 1)(2k + 3)} \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) + \rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(2k - 3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} + \right. \\
 & \left. + \frac{(2k + 2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-2k-4}) - (\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2})}{(2k + 5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{4k-4} - (2k + 2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} (\rho^{2k+1} - \rho^{-2k-1}). \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Контурный изгибающий момент выражается формулой:

$$\begin{aligned}
 M = & -\frac{\rho y^2}{2} + \frac{16\rho b^3}{\pi R(1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2} \cos 2\theta)} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} \frac{\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k}}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} \left[ (\rho_0^{2k-1} - \right. \\
 & \left. - \rho_0^{-2k-3}) \sin (2k - 1)\theta - (\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-1}) \sin (2k + 1)\theta \right]. \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Максимальный момент получается в точке  $y = b$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :

$$\begin{aligned}
 M_{\max} = & -\frac{\rho b^2}{2} + \\
 & + \frac{16\rho b^5}{\pi a} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]}. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

В частности, для полукруга получим:

$$M_{\max} = -\frac{\rho b^2}{2} + \frac{16\rho b^2}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = -0,0756 \rho b^2,$$

что совпадает с известным результатом.

Для бесконечной полосы из (1.8) получим

$$M_{\max} = -\frac{\rho b^2}{2} + \frac{48\rho b^2}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = -0,125\rho b^2,$$

что также согласуется с известным результатом.

Пользуясь равенством

$$\sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)} = \frac{1}{12}$$

усиливаем сходимостью ряда (1.8):

$$M_{\max} = -\frac{pb^2}{2} + \frac{4pb^3}{3\pi a} + \frac{32pb^3}{a\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k[k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 1 + \rho_0^{-4k}]}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \quad (1.9)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами последнего ряда, получим значение момента с недостатком

$$M_{\max}^- = -0,5pb^2 + \frac{4pb^3}{3\pi a} + \frac{32pb^2}{15\pi a(\rho_0^2 - 1)} \left[ 1 + \frac{2(2\rho_0^2 + 1 + \rho_0^{-2})}{7\rho_0^4(\rho_0^2 + 2 + 4\rho_0^{-2} + 2\rho_0^{-4} + \rho_0^{-6})} \right] \quad (1.10)$$

Если учесть также и третий член ряда, то получим значение момента с избытком. Вычисления показывают, что допущенная погрешность формулы (1.10) по сравнению с (1.9) при  $a = b$  равна нулю, при  $a = 3b$  меньше, чем 1,4%, а при  $a \rightarrow \infty$  становится 3%. Приведем некоторые значения для  $M_{\max}^-$ , вычисленные по формуле (1.10).

a:b	1	2	3	$\infty$
$\frac{M_{\max}^-}{pb^2}$	-0,0756	-0,1120	-0,1185	-0,1217

Максимальная опорная реакция возникает в точке  $x=0, y=b$  и равна перерезывающей силе, действующей в той же точке.

Учитывая это, найдем максимальную реакцию

$$Q_{\max} = -pb - \frac{16pb^3}{\pi a^2(1 + \rho_0^{-2})} \times \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k[k(1 + \rho_0^{-2})(\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k}) - (1 - \rho_0^{-2})(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2]}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - (\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k})]} \quad (1.11)$$

Полагая  $a=b$ , получим известное значение максимальной опорной реакции для полукруга

$$Q_{\max} = -pb + \frac{16pb}{\pi} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(2k+1)(4k^2-9)} = -0,424 pb.$$

Пользуясь равенствами

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2-1)(4k^2-9)} = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{18}$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-9} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{18},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)(4k^2-9)} = \frac{2}{9} - \frac{\pi}{24},$$

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(4k^2-9)} = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{9}.$$

усиливаем сходимость ряда (1.11):

$$Q_{\max} = -pb + \frac{pb^3}{a^2} - \frac{4pb^4}{3\pi a^3} +$$

$$+ \frac{32pb^4}{\pi a^3} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k^2(\rho_0^2+1)[2k-1+(2k+1)\rho_0^{-2}] + k(1-\rho_0^{-4k})}{(4k^2-1)(4k^2-9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} - 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]}. \quad (1.12)$$

Учитывая первые два члена ряда, получим значение опорной реакции с недостатком

$$Q_{\max}^- = -pb \left( 1 - \frac{b^3}{a^2} + \frac{4b^3}{3\pi a^3} \right) +$$

$$+ \frac{32pb^4}{15\pi a^3} \left\{ \frac{5 + \rho_0^2 + 3\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4}}{\rho_0^4 - \rho_0^{-4} - 2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} + \frac{2(17 + 6\rho_0^2 + 10\rho_0^{-2} - \rho_0^{-8})}{7[\rho_0^8 - \rho_0^{-8} - 4(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\}. \quad (1.13)$$

Учитывая также и третий член ряда, найдем значение реакции с избытком

$$Q_{\max}^+ = Q_{\max}^- - \frac{32pb^4}{315\pi a^3} \frac{37 + 15\rho_0^2 + 21\rho_0^{-2} - \rho_0^{-12}}{\rho_0^{12} - \rho_0^{-12} - 6(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}. \quad (1.14)$$

При  $a = b$  формулы (1.13) и (1.14) совпадают и дают точный результат.

При  $a = 2b$  имеем  $Q_{\max}^- = -0,581 pb$ .

$Q_{\max}^+ = -0,583 pb$ , погрешность  $\delta = 0,3\%$ .

При  $a = 3b$   $Q_{\max}^- = -0,603 pb$ ,  $Q_{\max}^+ = -0,608 pb$ ,  $\delta = 0,8\%$ .

При  $a \rightarrow \infty$   $Q_{\max}^- = -0,6216 pb$ ,

$Q_{\max}^+ = -0,6260 pb$ ,  $\delta = -0,7\%$ .

точное значение  $Q_{\max} = -0,6250 pb$ .

Для практических целей в фигурных скобках (1.13) достаточно сохранение лишь первого слагаемого, тогда

$$Q_{\max} = -pb \left[ 1 - \frac{b^2}{a^2} + \frac{4b^3}{3\pi a^3} - \frac{16(a-b)(a^2 + ab - b^2)}{15\pi a^3} \right].$$

Эта формула при  $a = b$  дает точный результат. При  $a = 2b$  дает погрешность 1,7%, при  $a = 3b - 4\%$ , а при  $a \rightarrow \infty - 6\%$ .

§ 2. *Равномерно нагруженная полуэллиптическая плита, защемленная по криволинейному краю и свободно опертая по малому диаметру.* Эта задача решается таким же способом как и предыдущая; надо только формулы (1.1) и (1.2) заменить следующими:

при  $x \geq 0$

$$w = \frac{P}{384D} (z + \bar{z})^4 + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.1)$$

при  $x < 0$

$$w = -\frac{P}{384D} (z + \bar{z})^4 + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.2)$$

при котором расположение осей координат остается прежним.

Не повторяя деталей решения, приводим окончательные результаты, при  $x \geq 0$ :

$$w = \frac{px^4}{24D} - \frac{2pRa^3}{\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} + 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \times \\ \times [(\rho^{2k+1} + \rho^{-2k-1}) \cos(2k-1)\theta + (\rho^{2k-1} + \rho^{-2k+1}) \cos(2k+1)\theta] + \\ + \frac{2pRa^3}{\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k^2 - 1)(2k+1)(2k+3)} \left\{ \frac{2k(\rho_0^{2k-2} - \rho_0^{-2k+2}) - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(2k-3)[\rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k} + 2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} - \right. \\ \left. - \frac{(2k+2)(\rho_0^{2k+4} - \rho_0^{-7k-4}) + \rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-2k-2}}{(2k+5)[\rho_0^{4k+4} - \rho_0^{-4k-4} + (2k+2)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})]} \right\} \times \\ \times (\rho^{2k+1} + \rho^{2k-1}) \cos(2k+1)\theta. \quad (2.3)$$

Изгибающий момент на контуре определяется формулой

$$M = -\frac{px^2}{2} + \frac{16pa^3}{\pi R(1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2} \cos 2\theta)} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k(\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 9)[2k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k} - \rho_0^{-4k}]} \left[ (\rho_0^{2k-1} + \right. \\ \left. + \rho_0^{-2k-3}) \cos(2k-1)\theta - (\rho_0^{2k-3} + \rho_0^{-2k-1}) \cos(2k+1)\theta \right]. \quad (2.4)$$

Путем несложных преобразований представим выражение (2.4) так:

$$M = -\frac{px^2}{2} + \frac{16pa^3}{\pi R \rho_0 (1 + \rho_0^{-4} - 2\rho_0^{-2} \cos 2\theta)} \times$$

$$\times \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k [\cos(2k-1)\theta - \rho_0^{-2} \cos(2k+1)\theta]}{(4k^2-1)(4k^2-9)} +$$

$$\frac{16\rho_0^2(1-\rho_0^{-2})}{2\rho_0(1+\rho_0^{-4}-2\rho_0^{-2}\cos 2\theta)} \left\{ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k [2k(1+\rho_0^{-2})-1+\rho_0^{-4k}] \cos(2k+1)\theta}{(4k^2-1)(4k^2-9) [2k(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k}-\rho_0^{-4k}]}\right.$$

$$\left. - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k k [2k(\rho_0^2+1)+1-\rho_0^{-4k}] \cos(2k-1)\theta}{(4k^2-1)(4k^2-9) [2k(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k}-\rho_0^{-4k}]}\right\}. \quad (2.5)$$

Ряды, входящие в (2.5), сходятся при  $\rho_0 > 1$  довольно быстро и вычислении их достаточно ограничиться двумя первыми членами. Приведем значения контурного изгибающего момента для случая 2б.

$\theta$	0	30°	45°	60°	75°	90°
$\frac{M}{\rho_0^2}$	0,01747	0,02780	0,03971	0,04451	0,03957	0

Построение эпюры контурного изгибающего момента показывает, что максимальный изгибающий момент возникает в точке  $x = 0,5a$ ,  $y = 0,43a$  ( $\theta = 60^\circ$ ) и равен  $M_{\max} = -0,0445 \rho_0^2$ .

Ереванский политехнический институт  
им. Карла Маркса

Поступило 24 IV 1954

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

- Беркин Б. Г. Упругие тонкие плиты. Госстройиздат, Л.—М., 1933.  
 онджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.  
 онджян О. М. Изгиб эллиптической плиты. Известия АН Армянской ССР, (серия ФМЕТ наук), том V, № 5, 1954.

Օ. Մ. Սապրոնյան

#### ԿԻՍԱԷԼԻՊՏԻԿ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կիսաէլիպտիկ սալի ծաման խնդիրը լուծել է Բ. Գ. Գալյոբիկինը [1], ով երկու դեպք՝  
 1) Նրբ կիսաէլիպսոս ստացվում է էլիպսի հատուկով ըստ մեծ առանց-  
 2) — ըստ փոքր առանցքի: Յուրաքանչյուր դեպքում ենթադրվում է, թե կորագծային եզրատեղով ամրակցված է, իսկ ուղղադասյինով՝ ազատ  
 է: VII, № 6-3

հենված: Պարզության համար դիտվում է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցութեան դեպքը: Վերջնական արդյունքներն ստանալու համար անհրաժեշտ է լինում լուծելու անվերջ հավասարումների սխեման:

Նույն խնդիրը, նույն պայմանների դեպքում, լուծված է ներկա հոդվածում: Օգտագործված է կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդը: Լուծումը ներկայացված է հայտնի գործակիցներ ունեցող շարքերի միջոցով: Ուսումնասիրված են սալի հաշվային մեծությունները:

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Определение напряжений в некоторых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменений модуля мгновенной деформации бетона

Настоящая работа посвящена исследованию напряженного состояния в железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. В работе показывается, что, пользуясь методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2], можно получить решение основных уравнений нелинейной теории ползучести бетона. Сущность метода заключается в том, что решение интегрального уравнения заменяется решением системы алгебраических уравнений. Как пример применения этого метода рассматриваются: 1) напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах и 2) усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах, с учетом нелинейной ползучести бетона. При решении этих задач рассматривается самый общий случай, когда одновременно учитываются старение, наследственность и изменяемость модуля мгновенной деформации бетона.

Общее решение этих задач по линейной теории ползучести бетона было дано в работах [3, 4]. При решении этих задач будем пользоваться нелинейной теорией ползучести, предложенной Н. Х. Арутюняном [3].

§ 1. *Решение интегральных уравнений, определяющих напряженное состояние в железобетонных элементах методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.* Согласно [3], основное уравнение нелинейной теории ползучести бетона имеет вид:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.1)$$

где  $t$  — координата времени,

$\tau_1$  — возраст бетона в момент приложения нагрузки,

$\varepsilon_0(t)$  — полная продольная деформация бетона,

$E(t)$  — модуль мгновенной деформации бетона, изменяющийся во времени,

$C(t, \tau)$  — мера ползучести бетона, т. е. деформация ползучести в момент времени  $t$ , вызванная единичным напряжением ( $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ ) в возрасте бетона  $\tau$ ,

$\sigma_0(t)$  — нормальная составляющая напряжений бетона в момент времени  $t$  с учетом ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона,

$f[\sigma_0(t)]$  — некоторая, определенная из опыта, функция  $\sigma_0(t)$ , характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона. Функция  $f[\sigma_0(t)]$  должна удовлетворять условию

$$f(1) = 1.$$

Пользуясь основным уравнением (1.1), условиями равновесия и совместной работы арматуры и бетона для определения  $\sigma_0(t)$ , получим следующие интегральные уравнения Вольтера [5, 6]:

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) = & \frac{N}{F_0 [1 + \mu m(t)]} + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)} + \\ & + \mu E_a \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

а при отсутствии внешних сил и влиянии только усадки бетона в симметрично армированных железобетонных элементах будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) = & - \frac{\mu E_a}{1 + \mu m(t)} S(t) + \mu E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)} + \\ & + \mu E_a \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1 + \mu m(t)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $E_a$  — модуль деформации арматуры,

$m(t) = \frac{E_a}{E(t)}$  — модульное отношение в данный момент времени,

$F_0$  — площадь поперечного сечения бетона,

$\mu$  — процент армирования,

$N$  — центрально сжимающая сила,

$S(t)$  — функция, характеризующая закон изменения усадки.

Напряжения в арматуре  $\sigma_a(t)$  определяются условием равновесия

$$\sigma_0 F_0 + \sigma_a F_a = N.$$

Решение интегральных уравнений (1.2) и (1.3) сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Полученные уравнения в общем случае не интегрируются. Для их интегрирования нужно предпо-

лагать [5, 6]: 1) что модуль мгновенной деформации бетона во времени не изменяется и 2) функция  $\varphi(t)$  принимает свое предельное значение  $\varphi(\infty) = C_0$ ; это означает, что полученное уравнение будет характеризовать состояние установившейся ползучести бетона. При этих двух предположениях решение интегральных уравнений (1.2) и (1.3) сводится к решению таких нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые интегрируются.

Нужно отметить, что допущение о неизменяемости во времени величины модуля мгновенной деформации  $E = E_0 = \text{const}$  и замена функции  $\varphi(t)$  ее предельным значением, т. е.  $\varphi(\infty) = C_0$ , вносит много условности в физическую достоверность полученного решения. Отсюда следует, что нужно найти такой метод решения данной задачи, который позволил бы с необходимой точностью определять искомые величины и тем самым более точно учесть влияние тех факторов, которые наиболее характерны для исследуемого явления.

Таким приближенным методом может служить метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1, 2]. Этот метод применен к интегральным уравнениям типа Фредгольма, но его можно применить и к интегральным уравнениям Вольтерра. Доказательство этого метода для интегрального уравнения Вольтера можно получить аналогично доказательству, данному для интегрального уравнения Фредгольма. Метод Крылова-Боголюбова к решению уравнения линейной теории ползучести впервые применен Швецовым [4].

Рассмотрим следующее интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \sigma_0(t) = \Phi_0(t) + E(t) \int_{\tau_1}^t \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ + E(t) \int_{\tau_1}^t f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $\Phi_0(t)$  — заданная функция,  $\tau_1 \geq 0$ , а функции  $C(t, \tau)$ ,  $\frac{1}{E(\tau)}$  и  $f[\sigma_0(\tau)]$  имеют произвольный вид, сохраняя конечное значение при  $\tau = 0$  и являясь непрерывным в рассматриваемом промежутке времени  $t - \tau_1$ . Метод Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова состоит в том, что в интегральном уравнении (1.4) нужно верхнему пределу  $t$  дать последовательно возрастающие конкретные значения  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Тогда уравнение (1.4) может быть переписано для каждого значения  $t_n$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_0(t_1) = \Phi_0(t_1) + E(t_1) \int_{\tau_1}^{t_1} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \\ + E(t_1) \int_{\tau_1}^{t_1} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(t_2) = & \Phi_0(t_2) + E(t_2) \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau \right\} + E(t_2) \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(t_n) = & \Phi_0(t_n) + E(t_n) \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_0(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau \right\} + \\ & + E(t_n) \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial C(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Если интегрировать уравнение (1.5) по частям и иметь в виду, что  $C(t_1, t_1) = 0$ , то получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_0(t_1)}{E(t_1)} - \frac{\sigma_0(t_1)}{E(t_1)} - f[\sigma_0(t_1)] C(t_1, t_1) = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{E(\tau)} \frac{\partial \sigma_0(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} C(t_1, \tau) \frac{\partial f[\sigma_0(\tau)]}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned}$$

Применяя к интегралам в правой части полученного выражения теорему о среднем и делая некоторые преобразования, найдем:

$$\begin{aligned} C(t_1, \xi) \int_{t_1}^{t_2} f[\sigma_0(t_1)] + \frac{1}{E(\xi)} \int_{t_1}^{t_2} \sigma_0(t_1) = & \frac{\Phi_0(t_1)}{E(t_1)} - \frac{\sigma_0(t_1)}{E(t_1)} \left[ \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)} \right] - \\ & - f[\sigma_0(\tau_1)] [C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi)]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Символом  $C(t_m, \xi) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{1}{E(\xi)} \int_{t_{k-1}}^{t_k}$  здесь и в дальнейшем обозначено среднее значение функции  $C(t_m, \tau)$  и  $\frac{1}{E(\tau)}$  в интервале  $(t_k, t_{k-1})$ .

Положим, что  $f(\sigma)$  является степенной функцией вида

$$f(\sigma) = \beta_0 \sigma + \beta \sigma^2,$$

где  $\beta$  — некоторый параметр, характеризующий степень нелинейности, и удовлетворяет условию:

$$\beta_0 + \beta = 1.$$

Подставляя значение  $f[\sigma_0(\tau)]$  в (1.8), получим:

$$\beta C(t_1, \xi) \left| \frac{1}{E(\xi)} \right|_{t_1}^2 \sigma_0(t_1) + \left[ \frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_1, \xi) \right]_{t_1}^2 \sigma_0(t_1) - \left\{ \frac{\Phi_0(t_1)}{E(t_1)} - \sigma_0(\tau_1) \left[ \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)} \right]_{t_1} \right\} [C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi)]_{t_1} = 0. \quad (1.9)$$

Решение этого квадратного уравнения будет:

$$\sigma_0(t_1) = - \frac{\frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_1, \xi)}{2\beta C(t_1, \xi)} + \frac{1}{2\beta C(t_1, \xi)} \left\{ \left[ \frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_1, \xi) \right]^2 + 4\beta C(t_1, \xi) \left[ \frac{\Phi_0(t_1)}{E(t_1)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)} \right) - f(\sigma_0(\tau_1)) (C(t_1, \tau_1) - C(t_1, \xi)) \right] \right\}^{1/2}. \quad (1.10)$$

Здесь перед квадратным корнем взят знак плюс, исходя из физических соображений.

Аналогичным образом из уравнений (1.6) и (1.7) получим:

$$\sigma_0(t_2) = - \frac{\frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_2, \xi)}{2\beta C(t_2, \xi)} + \frac{1}{2\beta C(t_2, \xi)} \left\{ \left[ \frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_2, \xi) \right]^2 + 4\beta C(t_2, \xi) \left[ \frac{\Phi_0(t_2)}{E(t_2)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)} \right) - f(\sigma_0(\tau_1)) (C(t_2, \tau_1) - C(t_2, \xi)) - \sigma_0(t_1) \left( \frac{1}{E(\xi)} - \frac{1}{E(\xi)} \right) - f(\sigma_0(t_1)) (C(t_2, \xi) - C(t_2, \xi)) \right] \right\}^{1/2}. \quad (1.11)$$

$$\sigma_0(t_n) = - \frac{\frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_n, \xi)}{2\beta C(t_n, \xi)} + \frac{1}{2\beta C(t_n, \xi)} \left\{ \left[ \frac{1}{E(\xi)} + \beta_0 C(t_n, \xi) \right]^2 + 4\beta C(t_n, \xi) \left[ \frac{\Phi_0(t_n)}{E(t_n)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E(\xi)} \right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -f(\sigma_0(\tau_1)) \left( C(t_n, \tau_1) - C(t_n, \xi) \Big|_{\tau_1}^{t_1} \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_0(t_i) \left( \frac{1}{E(\xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i}} - \frac{1}{E(\xi) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}}} \right) - \\
 & \left. - \sum_{i=1}^{n-1} f(\sigma_0(t_i)) \left( C(t_n, \xi) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - C(t_n, \xi) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \right) \right\}^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

В выражении (1.12)  $n \geq 3$  и принято  $t_0 = \tau_1$ .

При начальном условии

$$\sigma_0(\tau_1) = 0 \tag{1.13}$$

формулы (1.10), (1.11) и (1.12) примут более простой вид.

Формулы (1.10), (1.11) и (1.12) в общем виде являются точным решением уравнения (1.4). Для определения численных значений искомого напряжения  $\sigma_0(t_n)$  необходимо применить приближенный метод определения средних величин

$$\frac{1}{E(\xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k}} \approx C(t_n, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_{k+1}}.$$

Этим единственно определяется приближенный характер данного решения. В практических расчетах эти величины с достаточной точностью могут быть определены с помощью приближенных равенств:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{E(\xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k}} &= \frac{1}{E\left(\frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)}, \\
 C(t_n, \xi) \Big|_{t_{k-1}}^{t_k} &= C\left(t_n, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Подставляя эти выражения в (1.10) (1.11) и (1.12), получим приближенное решение интегрального уравнения (1.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(t_1) &= - \frac{\frac{1}{E\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)}{2\beta C\left(\tau_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \beta C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right]^2 + 4\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \left[ \frac{\Phi_0(t_1)}{E(t_1)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1 + t_1}{2}\right)} \right) - f(\sigma_0(\tau_1)) \left( C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2}\right) \right) \right] \right\}^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\sigma_0(t_2) = \frac{\frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)}{2\beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \right]^2 + 4\beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \left[ \frac{\Phi_0(t_2)}{E(t_2)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} \right) - f(\sigma_0(\tau_1)) \left( C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \right) - \sigma_0(t_1) \left( \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} - \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} \right) - f(\sigma_0(t_1)) \left( C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) - C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (1.16)$$

$$\sigma_0(t_n) = \frac{\frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)}{2\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{E\left(\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) + 4\beta_0 C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) \left[ \frac{\Phi_0(t_n)}{E(t_n)} - \sigma_0(\tau_1) \left( \frac{1}{E(\tau_1)} - \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} \right) - f(\sigma_0(\tau_1)) \left( C(t_n, \tau_1) - C\left(t_n, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_0(t_i) \left( \frac{1}{E\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)} - \frac{1}{E\left(\frac{t_{i-1}+t_{i+1}}{2}\right)} \right) - f(\sigma_0(t_i)) \left( C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_n+t_{n+1}}{2}\right) \right) \right]^{1/2} \right\} \quad (1.17)$$

Последовательно решая эти уравнения, находим искомые величины  $\sigma_0(t_1), \sigma_0(t_2) \dots \sigma_0(t_n)$ .

Уменьшая расчетные интервалы времени, мы можем получить решение любой степени точности. Нужно заметить, что для бетона

и железобетона расчет по формуле (1.17) благодаря медленной изменяемости функций  $E(t)$ ,  $C(t, \tau)$  и  $\Phi_0(t)$  дает в достаточной мере точные результаты даже при сравнительно больших интервалах. В том случае, когда изменения этих величин происходят довольно быстро, расчетные интервалы времени должны фиксировать все характерные моменты этих изменений. Как будет показано ниже, применение этого метода к задачам теории ползучести оказывается весьма эффективным, так как большая точность получается при выборе сравнительно небольшого числа интегралов.

§ 2. *Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона.* Применяя вышележащий метод к интегральному уравнению (1.2), определяющему напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона, получим:

$$\sigma_0(t_1) = \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \right] + 4\beta C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \left[ \left( \frac{1}{\mu E_a} - \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} \right) \sigma_0(\tau_1) - f\left(\sigma_0(\tau_1)\right) \left( C(t_1, \tau_1) - C\left(t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_0(t_2) = \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)}{2\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \frac{1}{2\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} + \beta_0 C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \right]^2 + 4\beta C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \left[ \left( \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} \right) \sigma_0(\tau_1) - f\left(\sigma_0(\tau_1)\right) \left( C(t_2, \tau_1) - C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) \right) - \sigma_0(t_1) \left( \frac{1}{E\left(\frac{\tau_1+t_1}{2}\right)} - \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{E \left( \frac{t_1+t_2}{2} \right)} - f \left( \sigma_0(\tau_1) \right) \left( C \left( t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2} \right) - C \left( t_2, \frac{t_1+t_2}{2} \right) \right) \Bigg]^{1/2}, \quad (2.2) \\
 & \sigma_0(t_n) = - \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right)}{2\beta C \left( t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right)} + \\
 & + \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right) \right]^2 + \\
 & + 4\beta C \left( t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2} \right) \left[ \left( \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{\tau_1+t_1}{2} \right)} \sigma_0(\tau_1) - f \left( \sigma_0(\tau_1) \right) \right) \left( C(t_n, \tau_1) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - C \left( t_n, \frac{\tau_1+t_1}{2} \right) \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_0(t_i) \left( \frac{1}{E \left( \frac{t_{i-1}+t_i}{2} \right)} - \frac{1}{E \left( \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right)} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{i=1}^{n-1} f \left( \sigma_0(t_i) \right) \left[ C \left( t_n, \frac{t_{i-1}+t_i}{2} \right) - C \left( t_n, \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right) \right] \right]^{1/2}. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

где в выражении (2.3)  $n \geq 3$  и  $t_0 = \tau_1$ .

Последовательно решая уравнения (2.1), (2.2) и (2.3), найдем искомые величины  $\sigma_0(t_1)$ ,  $\sigma_0(t_2) \dots \sigma_0(t_n)$ ; определяющие приближенные значения напряжений в бетоне в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Затем с помощью уравнения равновесия

$$F_6 \sigma_0(t) + F_a \sigma_a(t) = N$$

найдем соответствующие напряжения в арматуре.

Точное решение поставленной задачи имеется в двух случаях: 1) при линейной ползучести бетона, когда  $E = E_0 = \text{const}$  у Н. Х. Арутюняна [3] и 2) при нелинейной установившейся ползучести бетона, когда  $E = E_0 = \text{const}$  и  $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$  в нашей работе [5]. Чтобы проверить, какую точность дает вышесказанный приближенный метод, решим эти задачи приближенным методом и сравним результаты приближенного решения с точным решением.

При линейной ползучести, когда  $E = E_0 = \text{const}$ , решения (2.1), (2.2) и (2.3) примут следующий вид:

$$\sigma_0(t_i) = \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C \left( t_1, \frac{\tau_1+t_1}{2} \right) - C(t_1, \tau_1)}{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C \left( t_1, \frac{t_1+\tau_1}{2} \right)} \sigma_0(\tau_1), \quad (2.4)$$

$$\sigma_0(t_2) = \frac{1}{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) - C(t_2, \tau_1) \right] \sigma_0(\tau_1) - \left[ C\left(t_2, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) + C\left(t_2, \frac{t_1+t_2}{2}\right) \right] \sigma_0(t_1) \right\}, \quad (2.5)$$

$$\sigma_0(t_n) = \frac{1}{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C\left(t_n, \frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E_0} + C\left(t_n, \frac{\tau_1+t_1}{2}\right) - C(t_n, \tau_1) \right] \sigma_0(\tau_1) - \sum_{i=1}^n \sigma_0(t_i) \left[ C\left(t_n, \frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right) - C\left(t_n, \frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right) \right] \right\}, \quad (2.6)$$

где в выражении (2.6)  $n \geq 3$  и  $t_0 = \tau_1$ .

Решая уравнения (2.4), (2.5) и (2.6), определим приближенные значения напряжений в бетоне в сжатых железобетонных элементах с учетом линейной ползучести бетона.

На примере следующей задачи вычислим погрешность, получаемую при решении уравнений (2.4), (2.5) и (2.6).

*Пример 1.* Как будут изменяться во времени напряжения  $\sigma_0(t)$  и  $\sigma_s(t)$  в сжатом железобетонном элементе с учетом линейной ползучести бетона, если за характеристику меры ползучести бетона принято следующее выражение:

$$C(t, \tau) = \left( \frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) [1 - e^{-0,026(t-\tau)}] 10^{-5},$$

причем  $\mu = 1\%$ ,  $E_a = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $E = E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $m = \frac{E_a}{E_0} = 10$ .

Для нахождения искомого решения  $\sigma_0(t)$  разобьем промежуток времени в 360 дней на пять последовательно возрастающих интервалов:  $\tau_1 = 28$ ,  $t_1 = 45$ ,  $t_2 = 90$ ,  $t_3 = 180$  и  $t_4 = 360$  дням. Соответствующие значения  $\sigma_0(t)$  и  $\sigma_0(t)/\sigma_0(\tau_1)$  для различных моментов времени  $t$  сведены в таблицу 1.

Сравнивая результаты этой таблицы с результатами точного решения, видим, что погрешность найденных величин не превышает 1%.

Такая же погрешность получается и при решении задачи нелинейной ползучести, когда  $E = E_0 = \text{const}$  и  $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$ .

Отсюда следует, что приближенный метод Крылова и Боголюбова дает хорошие результаты при определении напряжений в сжатом железобетонном элементе.

В качестве конкретного приложения формул (2.1), (2.2) и (2.3) рассмотрим общий случай сжатой железобетонной колонны, когда модуль мгновенной деформации изменяется во времени.

Таблица 1

Значения  $\sigma_b(t)$  в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени  $t$ , при  $\tau_1 = 28$  дням,  $\sigma_b(\tau_1) = 40 \text{ кг/см}^2$

$t$	28 дней	1,5 мес.	3 мес.	6 мес.	1 год
$\sigma_b(t) \text{ кг/см}^2$	40	37,3140	34,3676	33,4532	33,3392
$\sigma_b(t)/\sigma_b(\tau_1)$	1	0,93286	0,85919	0,83633	0,83348

**Пример 2.** Как будет изменяться во времени напряжение  $\sigma_b(t)$  в сжатом железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона, если последний имеет следующий вид [3]:

$$E(t) = 2(1 - e^{-0,03t}) 10^5.$$

Характеристика меры ползучести бетона  $C(t, \tau)$  принимается такая же, как и в предыдущем примере.

Для нахождения искомой функции  $\sigma_b(t)$  опять разобьем промежуток времени в 360 дней на пять интервалов:  $\tau_1 = 28$ ,  $t_1 = 45$ ,  $t_2 = 90$ ,  $t_3 = 180$ ,  $t_4 = 360$  дням. Соответствующие значения  $\sigma_b(t)$  для различных моментов времени  $t$  и при различных значениях параметра нелинейности  $\beta$  сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Значения  $\sigma_b(t)$  в сжатой железобетонной колонне в зависимости от времени  $t$ , модуля мгновенной деформации  $E(t)$ , функции  $\varphi(t)$  и коэффициента нелинейности  $\beta$ , при  $\tau_1 = 28$  дн. и  $\sigma_b(t) = 40 \text{ кг/см}^2$

$t$	$\sigma_b(t) \text{ кг/см}^2$			
	$\beta = 0$	$\beta = 0,001$	$\beta = 0,01$	$\beta = 0,1$
28 дней	40	40	40	40
1,5 мес.	37,428	37,335	36,566	29,738
3 мес.	34,507	34,346	32,871	24,114
6 мес.	33,484	33,294	31,770	23,598
1 год	33,449	33,276	31,751	23,562

Из этой таблицы видно, что: 1) начальное напряжение в бетоне  $\sigma_b(t)$  с течением времени быстро затухает, причем степень затухания доходит до 41%; 2) это затухание зависит от меры нелинейной ползучести  $\beta$ ; чем больше  $\beta$ , тем быстрее происходит затухание; 3) затухание напряжения бетона происходит в течение только первого полугодия, после чего изменения  $\sigma_b(t)$  почти не происходит; 4) сравнивая эту таблицу с таблицами, помещенными в статье [4] для этой же задачи, при  $E = E_0 = \text{const}$  и  $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$ , видим, что при изменчивости  $E(t)$  и  $\varphi(t)$  затухание напряжений бетона происходит быстрее.

С помощью уравнения равновесия

$$F_6 \sigma_6(t) + F_a \sigma_a(t) = N$$

можно найти соответствующие значения напряжения  $\sigma_a(t)$  в арматуре.

§ 3. Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Применяя вышезложенный метод к интегральному уравнению (1.3), определяющему усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона, получим:

$$\sigma_6(t_1) = - \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)}{2\beta_0 C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\beta_0 C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) \right]^n - \right.$$

$$\left. - 4\beta_0 C \left( t_1, \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right) S(t_1) \right\}^{1/2} \quad (3.1)$$

$$\sigma_6(t_2) = - \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right)}{2\beta_0 C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} +$$

$$+ \frac{1}{2\beta_0 C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right]^n - \right.$$

$$- 4\beta_0 C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \left[ S(t_2) + \sigma_6(t_1) \left( \frac{1}{E \left( \frac{\tau_1 + t_1}{2} \right)} - \frac{1}{E \left( \frac{t_1 + t_2}{2} \right)} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + f(\sigma_6(t_1)) \left( C \left( t_2, \frac{\tau_1 + t_2}{2} \right) - C \left( t_2, \frac{t_1 + t_2}{2} \right) \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (3.2)$$

$$\sigma_6(t_n) = - \frac{\frac{1}{\mu E_a} + \frac{1}{E \left( \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right)}{2\beta_0 C \left( t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\beta C \left( t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right)} \left\{ \left[ \frac{1}{\mu E_3} + \frac{1}{E \left( \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right)} + \beta_0 C \left( t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right) \right]^2 - \right. \\
 & - 4\beta C \left( t_n, \frac{t_{n-1} + t_n}{2} \right) \left[ S(t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_0(t_i) \left( \frac{1}{E \left( \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \right)} - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{1}{E \left( \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right)} \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \dot{\epsilon}(\sigma_0(t_i)) \left( C \left( t_n, \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - C \left( t_n, \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \right) \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

где  $n \geq 3$ .

Здесь принято начальное условие

$$\sigma_0(\tau_1) = 0.$$

Последовательно решая уравнения (3.1), (3.2) и (3.3), найдем искомые величины  $\sigma_0(t_1)$ ,  $\sigma_0(t_2) \dots \sigma_0(t_n)$ , определяющие усадочные напряжения в симметрично армированном железобетонном элементе с учетом нелинейной ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона. Затем, с помощью уравнения равновесия

$$F_A \sigma_A(t) + F_B \sigma_0(t) = 0, \quad (3.4)$$

найдем соответствующие напряжению  $\sigma_0(t)$  в арматуре.

Точное решение поставленной задачи имеется также в двух случаях: 1) при линейной ползучести, когда  $E = E_0 = \text{const}$ , у Н. Х. Арутюняна [3] и 2) при нелинейной ползучести, когда  $E = E_0 = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$  в статье [6]. Чтобы получить, какую точность дает вышесказанный приближенный метод при определении усадочных напряжений, решим последнюю задачу приближенным методом и сравним полученные результаты с результатами точного решения.

*Пример 1.* Примем те же данные, которые приводятся в статье [6], т. е.

$$S(t) = S_0(1 - e^{-\alpha t}), \quad C(t, \tau) = C_0[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

$$E = E_0 = \text{const}, \quad E_3 = 2.10^6 \text{ кг/см}^2, \quad m = 10,$$

$$C_0 = 0.9 \cdot 10^{-5}, \quad \gamma = 0.026, \quad \alpha = 0.026, \quad \mu = 1\%,$$

$$\tau_1 = 1 \text{ дню}, \quad \beta = 0.001.$$

Точное решение обозначим через  $\sigma_0(t)$ , а приближенное —  $\widetilde{\sigma_0(t)}$ .

Для нахождения искомой функции  $\sigma_0(t)$  разобьем промежуток времени в 360 дней на шесть последовательно возрастающих интервалов:  $\tau_1 = 1$ ,  $t_1 = 7$ ,  $t_2 = 14$ ,  $t_3 = 28$ ,  $t_4 = 90$  и  $t_5 = 360$  дням.

Соответствующие значения  $\overline{\sigma_0(t)}$  и  $\sigma_0(t)$  для различных моментов времени  $t$  сведены в таблицу 3.

Таблица 3

Значения усадочных напряжений в бетоне  $\sigma_0(t)$  в зависимости от времени  $t$

$t$	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\overline{\sigma_0(t)}$ кг/см <sup>2</sup> ...	-0,50567	-0,99027	-1,7053	-2,8469	-3,0478
$\sigma_0(t)$ кг/см <sup>2</sup> ...	-0,50567	-0,99041	-1,7062	-2,8564	-3,0484

Из этой таблицы видно, что погрешность найденных значений  $\overline{\sigma_0(t)}$  не превышает 0,4%, что полностью подтверждает эффективность применения метода Крылова-Боголюбова к решению задач теории ползучести бетона.

В качестве конкретного приложения формул (3.1), (3.2) и (3.3) рассмотрим общий случай усадочных напряжений в асимметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести и изменчивости модуля мгновенной деформации бетона.

*Пример 2.* Определить значения усадочных напряжений бетона  $\sigma_0(t)$ , если функции  $S(t)$ ,  $C(t, \tau)$  и  $E(t)$  даны в следующем виде [3]:

$$S(t) = 2(e^{-0,011t} - e^{-0,011t}) 10^4,$$

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9\right) [1 - e^{-0,026(t-\tau)}] 10^5,$$

$$E(t) = 2(1 - e^{-0,03t}) 10^5,$$

причем  $\mu = 3\%$ ,  $E_0 = 2 \cdot 10^5$  кг/см<sup>2</sup>,  $\tau_1 = 1$  дню.

Для нахождения искомой функции  $\sigma_0(t)$  опять разобьем промежуток времени в 360 дней на шесть последовательно возрастающих интервалов:  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 7$ ,  $t_3 = 14$ ,  $t_4 = 28$ ,  $t_5 = 90$  и  $t_6 = 360$  дням.

Соответствующие значения  $\sigma_0(t)$  для различных моментов времени  $t$  сведены в таблицу 4.

Таблица 4

Значения  $\sigma_0(t)$  в асимметрично армированных железобетонных элементах в зависимости от времени  $t$ , модуля мгновенной деформации  $E(t)$ , функции  $\varphi(t)$  и коэффициента нелинейности  $\beta$ , при  $\tau_1 = 1$  дню

$t$	$\sigma_0(t)$ кг/см <sup>2</sup>				
	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\beta = 0,001$	-0,17095	-0,46473	-1,30367	-3,54312	-5,45903
$\beta = 0$	-0,20226	-0,56177	-1,31773	-3,54568	-5,4600
без учета ползучести	-0,29333	-0,84353	-1,9960	-5,6066	-

Пользуясь условием равновесия (3.4), получим соответствующие значения напряжений в арматуре  $\sigma_a(t)$ . Эти значения сведены в таблицу 5.

Таблица 5

Значения  $\sigma_a(t)$  в симметрично армированных железобетонных элементах в зависимости от времени  $t$ , модуля мгновенной деформации  $E(t)$ , функции  $\varphi(t)$  и коэффициента нелинейности  $\beta$ , при  $\tau_1 = 1$  дню

t	$\sigma_a(t)$ кг/см <sup>2</sup>				
	7 дней	14 дней	28 дней	3 мес.	1 год
$\beta = 0,001$	5,6083	9,2946	26,0734	70,8622	109,1806
$\beta = 0$	6,7420	11,2354	26,3546	70,9136	109,2000
без учета ползучести	9,7703	16,8706	39,9200	112,1320	179,0760

Из данных, приведенных в таблицах 4 и 5, видно, что: 1) абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне  $\sigma_b(t)$  и арматуре  $\sigma_a(t)$  с течением времени быстро возрастает; 2) при нелинейной ползучести абсолютная величина усадочных напряжений в бетоне и арматуре меньше, чем при линейной ползучести; а как известно [5], если считать  $E = E_0 = \text{const}$  и  $\varphi = \varphi(\infty) = C_0$ , то получается наоборот, т. е. усадочных напряжений по абсолютной величине при нелинейной ползучести больше, чем при линейной ползучести. Это показывает, что допущение о неизменяемости во времени величины модуля мгновенной деформации и замена функции  $\varphi(t)$  ее предельным значением искажает истинную картину напряженного состояния в железобетонных элементах от влияния усадки; 3) с течением времени разность между значениями усадочных напряжений при нелинейной и линейной ползучести уменьшается, причем через 3 месяца эти величины почти совпадают; 4) вследствие ползучести бетона начальные упруго-мгновенные напряжения в армированных элементах от усадки бетона затухают, причем затухание этих напряжений в данном случае, когда она вызваны в возрасте  $\tau_1 = 1$  дню, достигает 55,7%.

Заметим, что наибольшая математическая погрешность найденных значений  $\sigma_b(t)$  и  $\sigma_a(t)$  не превышает 2,5%, в чем нетрудно убедиться, произведя несколько уточненных расчетов при уменьшенных интервалах времени.

Ереванский государственный университет  
имени В. М. Молотова

Поступило 20 IX 1954

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. ДАН, 1929, № 12.
2. Канторвич Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гос. техн. изд-во, Л.-М., 1949.

3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Москва, 1952.
4. Швецов А. В. Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. Гидротехническое строительство, 8, 1952.
5. Манукян М. М. Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 1, 1954.
6. Манукян М. М. Усадочные напряжения в симметрично армированных железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 3, 1954.

#### Մ. Մ. Մանուկյան

### ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՐԿԱԹԱԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԱԿՆԹԱՐԹԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՄՈԴՈՒԼԻ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ, օգտագործելով ինտեգրալ հավասարման մոտավոր արժեքը գտնելու Ն. Մ. Կոխլով—Ն. Ն. Բոգոլյուբովի մեթոդը, կարելի է ստանալ երկաթարևտոն էլեմենտի լարումները, բետոնի ոչ-դժային սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի փոփոխման հաշվառումով: Որպես այս մեթոդի կիրառություն քննարկվում է երկու ինդիք՝

ա) սեղմված երկաթարևտոն էլեմենտի լարվածային վիճակը և

բ) համաչափ երկաթապատված երկաթարևտոն էլեմենտի կծկման լարումները՝ ոչ-դժային սողքի հաշվառումով:

Այս խնդիրները լուծելիս քննարկվում է ամենաընդհանուր դեպքը, երբ միաժամանակ հաշվի է առնվում բետոնի ծերացումը, ժառանգականությունը և ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլի կախումը փաստանակից:

Հոդվածում օգտագործվում է բետոնի ոչ-դժային սողքի մասին Ն. Ս. Հարությունյանի տեսությունը:

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

С. Р. Месчян

К вопросу о ползучести связных грунтов

Когда материал под неизменной внешней нагрузкой, не превышающей эксплуатационной, деформируется во времени, говорят материал ползет [1].

Свойствами ползучести обладают, в той или иной степени, многие материалы, как-то: бетон, дерево, резина, пластмасса, металл—при высоких температурах и др. Свойствами ползучести обладают и грунты, которые под постоянными внешними нагрузками деформируются в течение длительного времени.

Вопрос о ползучести глин впервые был затронут Л. Л. Перковским [2] в 1946 г. на конференции по борьбе с оползнями. Л. Л. Перковский деформацию ползучести характеризовал как медленную, но непрерывно нарастающую, пластическую.

По данным Мушкетова, оползни берегов Волги в районе Ульяновска, Саратова, Вольска и др. становились заметными по истечении года и более с момента оползания [3].

Аналогичное явление имеет место при деформации грунтов на сжатие, причем кривая деформации во времени при малых нагрузках имеет затухающий характер [4].

При решении задач об уплотнении грунтов пользуются теорией консолидации. По этой теории процесс уплотнения грунтов рассматривается как процесс неустановившейся фильтрации в условиях изменения пористости скелета грунта, при той или иной уплотняющей нагрузке, или при изменении граничных условий жидкости, заполняющей поры грунта [5].

До настоящего времени по теории консолидации принималось, что длительность процесса деформации считается обусловленной исключительно вязким сопротивлением воды, вытекающей из пор грунта.

При этом приближенно принималось, что степень уплотнения грунта определяется только скоростью вытекания воды из пор грунта.

Как показывают исследования [6], фильтрационные явления полностью не характеризуют действительную природу деформации грунтов.

Исследованиями [6, 7, 8, 9] установлено, что в процессе уплотнения грунтов внешнее давление воспринимается частицами грунта через адсорбированные пленки воды и передается от частицы к ча-

стице через пленки связанной воды и сцементированные контакты частиц. Одновременно установлено, что в процессе уплотнения грунтов одновременно имеет место упругая деформация частиц, структурная деформация (перемещения частиц и структурных элементов друг относительно друга) и адсорбционная деформация (уменьшение толщины водных пленок при приближении частиц).

Упругие деформации, которые связаны со смещением структурных элементов кристаллической решетки частиц, протекают мгновенно и при небольших нагрузках весьма незначительны.

Структурные деформации грунтов имеют необратимый характер. Что касается адсорбционных деформаций, то они после удаления внешней нагрузки в некоторой степени могут иметь обратимый характер, если силы адсорбции превышают напряжения в контактах.

Продолжительность деформации Н. Я. Денисов [6] объясняет проявлением своеобразной вязкости, присущей структурным элементам грунта, а время, необходимое для протекания деформации, в основном связано со скоростью преодоления вязкого сопротивления взаимодействия между структурными элементами.

Поэтому, при рассмотрении деформации насыщенных водой грунтов (грунтовая масса) надо считаться с проявлением вязкого сопротивления перемещающихся друг относительно друга структурных элементов, выжиманием связанной воды из контактов частиц и удалением свободной воды, причем вязкое сопротивление, оказываемое структурными элементами, значительно больше, чем сопротивление вытекания свободной воды.

Таким образом *деформацией ползучести связанных грунтов* можно назвать структурно-адсорбционные деформации, обусловленные проявлением вязкого перемещения структурных элементов друг относительно друга и удалением связанной и свободной воды при постоянных внешних нагрузках.

Для учета вязко-пластических свойств воды и пластического характера сдвига смещающихся при уплотнении частиц, соприкасающихся друг с другом через оболочки связанной воды, М. Н. Гольдштейн [9] внес некоторую поправку в существующую теорию фильтрационной консолидации. Однако учетом вязко-пластических свойств грунта не исчерпываются все те факторы, которые влияют на процесс деформации, в частности, не учитываются цементационные связи между частицами.

Ясно, что учет всех факторов в явном виде связан с большими трудностями. Поэтому при решении задач уплотнения пористой, водонасыщенной земляной среды деформацию грунта, обусловленную вязким сопротивлением относительно смещению твердых частиц грунта и агрегатов, а также разрушением цементационных связей, вследствие чего при воздействии внешней нагрузки деформации возникают не сразу, а постепенно, В. А. Флорин [10, 11] рассматривает как ползучесть грунта.

Для учета ползучести грунта В. А. Флоринным были использованы уравнения (1) и (2) теории ползучести бетона, предложенной Н. Х. Арутюняном [1], относящиеся к линейной и нелинейной ползучести:

$$\epsilon_0 - \epsilon = l(t) = \sigma(\tau_1) \delta(t, \tau_1) + \int_{\tau_1}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \delta(t, \tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\epsilon_0 - \epsilon = l(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial c(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

где  $\epsilon_0$  — коэффициент пористости до приложения нагрузки,

$\epsilon$  — коэффициент пористости грунта в момент времени  $t$ ,

$\sigma(\tau_1)$  — напряжение в скелете грунта в момент времени  $\tau_1$ ,

$\delta(t, \tau_1)$  — полная относительная деформация в момент времени  $t$  под действием осевой силы единичной интенсивности, приложенной в момент времени  $\tau_1$ .

Полная относительная деформация определяется следующим выражением:

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau), \quad (3)$$

где  $\frac{1}{E(\tau)}$  — упруго-мгновенная деформация,  $C(t, \tau)$  — мера ползучести.

Мера ползучести по теории Н. Х. Арутюняна имеет следующий вид:

$$c(t, \tau) = \theta(\tau) [1 - e^{-\tau(t-\tau)}], \quad (4)$$

где  $\theta(\tau)$  — предельная мера ползучести.

Полную относительную деформацию грунта с единичной осевой нагрузкой В. А. Флорин выразил следующей зависимостью:

$$\delta(t, \tau) = a + \sum_1^m a_n [1 - e^{-\tau(t-\tau)}]. \quad (5)$$

В выражении полной относительной деформации с единичной осевой нагрузкой был принят модуль мгновенной деформации  $E = \frac{1}{a}$ ,

где  $a$  — коэффициент сжимаемости грунта.

Нами были выполнены экспериментальные работы с целью выяснения роли влажности в деформации связного грунта, что в свою очередь привело бы к пониманию процесса ползучести маловлажных грунтов и проверки справедливости выражения меры ползучести теории Н. Х. Арутюняна для описания процесса ползучести грунтов.

Для экспериментальных работ как материал был выбран суглинистый грунт, физические характеристики которого сведены в таблицу 1.

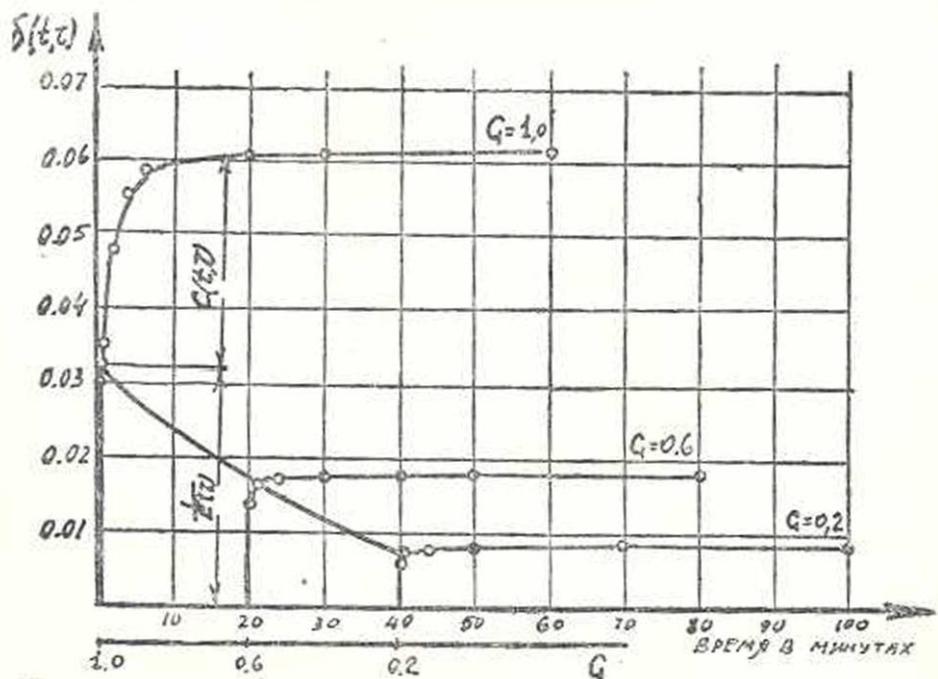
Таблица

Мех. состав		Ест. влаж. в %	Объемн. вес в г/см <sup>3</sup>	Удельн. вес в г/см <sup>3</sup>	Гипр. влаж. в %	Пористость в %	Коэф. пористости	Степень влажн.	Число пластин.	Макс. мол. вл. в %
фракции в мм	к-во в %									
>0,05	49,60									
0,05-0,002	30,81	23,8	1,83	2,75	2,77	46,2	0,86	0,762	10,1	16,4
<0,002	19,59									

Для выяснения роли влажности в деформации ползучести грунта были проведены эксперименты над тремя образцами грунта нарушенной структуры при различных значениях начальной влажности и постоянных начальных значениях пористости ( $\epsilon_0=0,910$ ).

Образцы имели следующие начальные значения влажности:  $w=6,2, 18,7$  и  $31,3\%$ , что соответствовало значениям степени влажности  $G=0,2, 0,6$  и  $1,0$  (значения округлены). Для определения характера ползучести грунтов исследования проводились по обычной методике, которая принята для определения компрессионных свойств грунтов без насыщения водой [12] в однотипных компрессионно-фильтрационных приборах (комфильметрах) Г. И. Тер-Степаняна при постоянной единичной уплотняющей нагрузке.

Размеры испытываемых образцов: диаметр 70 мм, высота 20 мм. На фиг. 1 помещены кривые полной относительной деформации

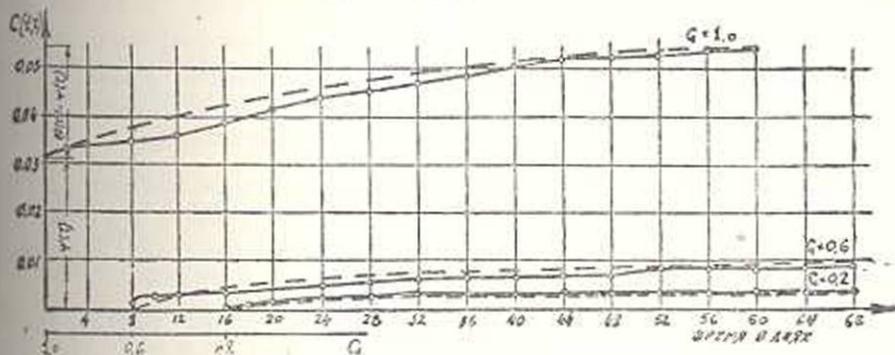


Фиг. 1

грунта при начальной пористости  $\epsilon_0 = 0,910$ , внешней единичной нагрузке в интервале времени до одного часа.

На фиг. 2 помещены кривые ползучести грунта начиная с минуты до шестидесяти суток.

На оси абсцисс графиков фиг. 1 и 2 отложены время  $t$  и степень влажности  $G$ , а на оси ординат — полная относительная деформация  $\delta(t, \tau)$  и мера ползучести грунта  $s(t, \tau)$ .



Фиг. 2.

В данном случае  $t$  представляет собой момент времени, для которого определяется деформация, а  $\tau$  — момент приложения нагрузки, который соответствует данной начальной влажности грунта.

Рассматривая фиг. 1, можно заметить, что для всех образцов, независимо от начальных значений влажности, в течение нескольких минут после приложения внешней нагрузки имеет место интенсивное нарастание деформации, причем с ростом значения влажности растет и деформация.

При влажности  $w \leq 18,7\%$  ( $G \leq 0,6$ ) кривые ползучести грунта, начиная с первого часа после приложения внешней нагрузки, идут параллельно друг к другу, а кривая ползучести для значения влажности  $w = 31,3\%$  несколько отклоняется. Одновременно надо обратить внимание на тот факт, что образец грунта со степенью влажности  $G = 0,6$  ( $w = 18,7\%$ ), который практически можно отнести к маловлажным грунтам, ползет также долго, как и грунт со степенью влажности  $G = 1,0$ .

На основании результатов экспериментов, поведение грунта под нагрузкой можно представить следующим образом. В зависимости от значения влажности после приложения внешней постоянной нагрузки в течение первого часа создается некоторое равновесие за счет упругих и структурно-адсорбционных деформаций с выжиманием части свободной и слабо связанной воды, после чего деформация ползучести развивается значительно медленнее, т. е. наступает процесс установившейся ползучести.

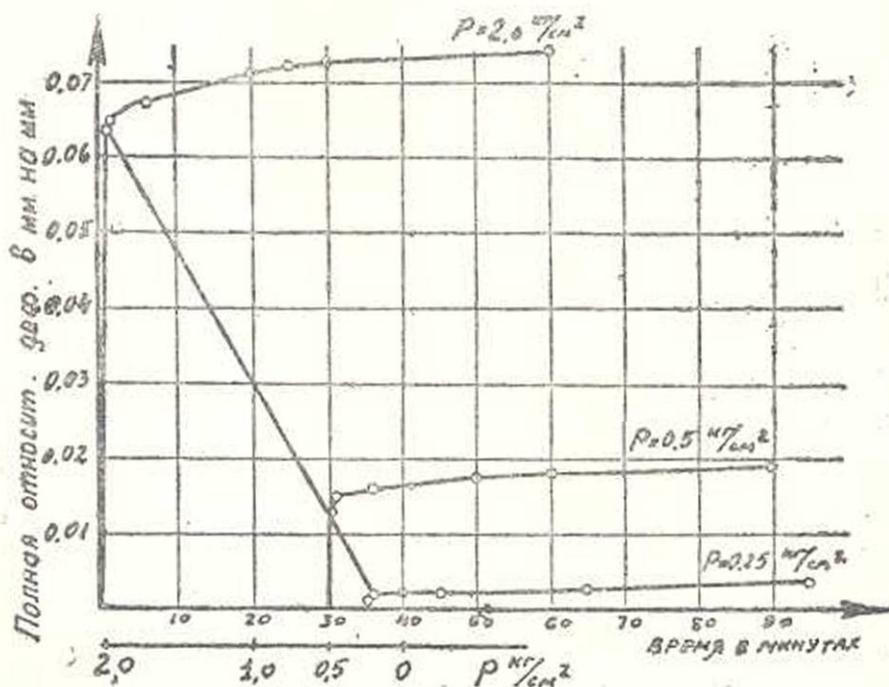
Деформация ползучести образца со степенью влажности  $G = 0,2$  ( $w = 6,2\%$ ) перестала развиваться после 20 суток, т. е. значительно раньше, чем у грунта с  $G = 0,6$ . Это обстоятельство следует также

объяснить влажностью, которая значительно ниже значения максимальной молекулярной влагоемкости данного грунта ( $16,4\%$ ). Следовательно, если при приложении внешней нагрузки грунты с высокими значениями влажности могли уплотняться как за счет выжимания воды из пор и контактов частиц, так и за счет взаимного вязкого перемещения, то в этом случае, так как вся вода в грунте находится в связанном состоянии, уплотнение происходит только за счет взаимного вязкого перемещения частиц, в условиях более высокого значения вязкости связанной воды. Поэтому затухание деформации ползучести грунта, с влажностью ниже максимальной молекулярной влагоемкости, наступило значительно раньше, чем у грунта со степенью влажности  $G=0,6$  ( $w=18,7\%$ ).

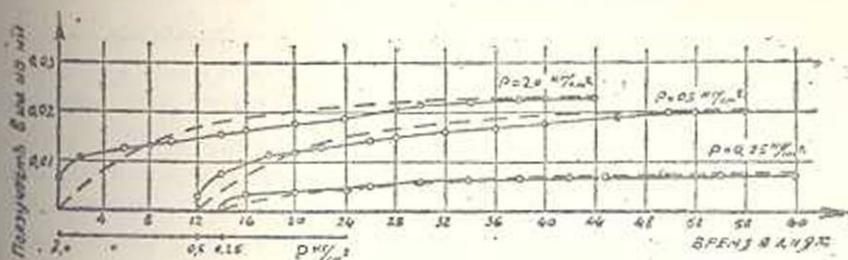
Для проверки справедливости зависимости меры ползучести теория Н. Х. Арутюняна для описания процесса ползучести грунтов, помимо вышесказанного, были проведены эксперименты над образцами грунта естественной структуры при сжатии.

Испытание грунтов ненарушенной структуры на сжатие также проводилось на однотипных комфилметрах Г. И. Тер-Степаняна при следующих размерах образца: диаметр 70 мм, высота 10 мм.

На фиг. 3 и 4 приведены кривые полной относительной деформации и ползучести грунта естественной структуры в зависимости от напряжения и времени при нагрузках 0,25, 0,50 и 2,0  $\text{кг}/\text{см}^2$ .



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Для того, чтобы отделить кривые ползучести из графиков полной относительной деформации, необходимо исключить значения упругой мгновенной деформации.

Если определение упругой мгновенной деформации для твердых тел не связано с трудностями, то для грунтов это определение связано с большими трудностями, ибо деформация грунтов, начиная с момента приложения нагрузки до 30—60 сек., нарастает настолько быстро, что очень трудно проследить за ходом деформации.

Исходя из этого, деформация грунта в интервале времени от момента приложения нагрузки до 30—60 сек. нами условно выделена из общего графика как „псевдо-мгновенная“, а остальная часть деформации рассмотрена как деформация ползучести.

Такое рассуждение допустимо по той причине, что зависимость между „псевдо-мгновенными“ деформациями и напряжениями в этом интервале времени с небольшой погрешностью можно считать линейной. Конечно, этот вопрос нуждается в уточнении, а наше рассуждение можно считать только первым приближением.

На фиг. 2 и 4 приведены графики ползучести исследуемого грунта при сжатии в интервале времени от одной минуты до полного затухания деформации, где сплошными линиями показаны экспериментальные кривые, а пунктирными — кривые, вычисленные по формуле (4), за исключением одной кривой со степенью влажности  $G=1,0$  (фиг. 2).

Как видно из графиков, кривые, вычисленные по формуле (4), дают хорошее совпадение с экспериментальными кривыми.

При описании кривой со степенью влажности  $G=1,0$  (фиг. 2) с резко выраженным ростом деформации в начале кривой формула (4) давала большое расхождение. Чтобы избежать этого, зависимости меры ползучести (4) придали следующий вид:

$$c(t, \tau) = \varphi(\tau) + [\theta(\tau) - \psi(\tau)] [1 - e^{-t(\tau)}], \quad (4a)$$

где  $\varphi(\tau)$  — значение меры ползучести в интервале времени от одной минуты до одного часа.

$\psi(\tau)$  — в данном случае находится в определенной функциональной зависимости от влажности и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } G=0 & \quad \psi(\tau) = \psi(\tau)_{\min}, \\ \text{при } G=1 & \quad \psi(\tau) = \psi(\tau)_{\max}. \end{aligned}$$

Кривая, вычисленная по формуле (4а), как видно из фиг. 2, дает хорошее совпадение с кривой ползучести.

На основании вышеизложенного заключаем, что зависимость (4) теории ползучести Н. Х. Арутюняна остается справедливой и для описания ползучести грунтов, только в случае круглого роста деформации в начальном участке кривой, для получения хорошего совпадения теоретической и экспериментальной кривых зависимости (4) можно придать вид (4а).

Институт строительных материалов  
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 9 VII 1954

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Изд. технико-теоретической лит., М.—Л., 1952.
2. Перковский Л. Л. Деформация в глинистых грунтах и вопросы расчета устойчивости откосов, сложенных глинистыми грунтами. В кн. «Проектирование и возведение земляного полотна железных дорог». Изд. АН СССР, М.—Л., 1954.
3. Нишипорович А. А. Сопротивление связных грунтов сдвигу при расчете гидротехнических сооружений на устойчивость. Стройиздат, 1948.
4. Паталеев А. В., Воженков С. Я. и Бирюков А. А. Механика грунтов, основания и фундаменты. Часть II. Трансжелдориздат, М., 1938.
5. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс. Стройиздат, М.—Л., 1943.
6. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.
7. Васильев А. М. Основы современной методики и техники лабораторных определений физических свойств грунтов. Гос. изд. лит. по строит. и архит., М., 1952.
8. Денисов Н. Я. О значении связанной влаги в деформациях глинистых пород. Гидротехническое строительство, № 9, 1951.
9. Гольдштейн М. Н. Механические свойства грунтов. Изд. лит. по строит. и архит., М., 1952.
10. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей среды. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
11. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1953.
12. Ломтадзе В. Д. Методы лабораторных исследований физико-механических свойств песчаных и глинистых грунтов, Гестеоллиздат., М., 1952.

#### Ս. Ռ. ՄԵՏՉԱՆ

### ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ԳՐՈՒՆՏՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արվում է գրունտների սողքի բնույթը, Գրունտի սողքը դիտվում է որպես սարսկատորա-աղսարքյան ղեֆորմացիա, որը պայմանավորված է գրունտի սարսկատորային էլեմենտների՝ մեկը մյուսի նկատմամբ մածուցիկ անդափոխմամբ, կապակցված և ազատ ջրի նեոացմամբ, արտաքին բեռնվածության հաստատուն պայմաններում.

էքսպերիմենտալ հետազոտութիւնները շնորհիւ պարզված է, որ միևնույն գրունտի համար, կախված նրա խոնավութեան աստիճանից՝ փոփոխվում է նրա սողքի մեծութիւնը, ընդ որում խոնավութեան անձամբ անում է գրունտի սողքի մեծութիւնը:

Յետոնները համար մշակված սողքի չափի արտահայտութիւնը Վ. Ա. Ֆլորինը կիրառել է գրունտները նկատմամբ, օգտվելով բետոնի ոչ-զծային սողքի մասին Ն. Յ. Հարութիւնյանի տեսութիւնից: Մեր կատարած փորձերը հաստատում են այդպիսի կիրառութեան հնարավորութիւնը, ընդ որում էքսպերիմենտալ և տեսական կորերի տարբերութիւնը մեծ չէ:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

С. А. Вартанян, Р. С. Гюли-Кевхян

Конденсация синильной кислоты с β-алкоксикетонами

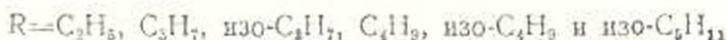
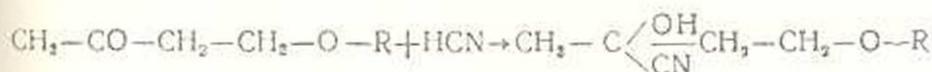
Сообщение II.

Ранее нами было установлено, что β-алкоксикетоны, легко конденсируясь в обычных условиях с синильной кислотой, образуют соответствующие γ-алкокси-α-оксинитрилы [1].

Интересно было изучить эту реакцию с метил-β-алкоксиэтилкетонами, которые получают при гидратации винилацетилен в водных растворах спиртов [2].

Исходными кетонами для настоящей работы явились: β-этокси-, β-пропокси-, β-изопропокси-, β-бутокси-, β-изобутокси- и β-изоентокси-бутан-2-оны.

Результаты наших исследований показали, что во всех случаях при взаимодействии синильной кислоты с упомянутыми выше кетонами происходит аналогичная конденсация и образуются соответствующие γ-алкокси-α-оксинитрилы — бесцветные, подвижные жидкости с характерным нитрильным запахом.



Полученные γ-алкокси-α-оксинитрилы и их константы

Формулы	Т. кип.	$n_D^{20}$	$d_4^{20}$
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	107—108°/22 мм	1,4234	0,9630
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	120—121°/20 мм	1,4275	0,9611
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_2 \end{array}$	99—100°/14 мм	1,4243	0,9471
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$	124—125°/16 мм	1,4296	0,9400
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_2 \end{array}$	120—121°/17 мм	1,4265	0,9312
$\text{CH}_3-\text{C} \begin{array}{l} \text{OH} \\ \text{CN} \end{array} \text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{O}-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH} \begin{array}{l} \text{CH}_3 \\ \text{CH}_2 \end{array}$	132—133°/16 мм	1,4315	0,9271

## Экспериментальная часть

Методика проведения опытов та же, что и в предыдущей работе [1].

1. *4-этоксид-2-нитрилбутан-2-ол.* К смеси 9,2 г цианистого натрия (0,19 моля) в 20 мл воды и 19 г 4-этоксидбутан-2-она (0,13 моля) (т. кип. 147—148°;  $n_D^{20}$  1,4117) прибавлено 70 г серной кислоты в течение 45 минут при температуре 13—20°. По окончании реакции отделен выделившийся слой, прибавлен к нему эфирный экстракт остаточного слоя и просушен сернокислым натрием. После удаления растворителя и разгонки остатка в вакууме получено 13,1 г 4-этоксид-2-нитрилбутан-2-ола (56% теории) с т. кип. 107—108° при 22 мм.

$n_D^{20}$  1,4234;  $d_4^{20}$  0,9630

Найдено:  $MR_D$  37,845

Вычислено:  $MR_D$  37,512

0,1007 г вещ.: 9,3 мл азота (22°, 674 мм)

0,1034 г вещ.: 9,8 мл азота (22°, 676 мм)

Найдено %: N 9,48; 9,74

$C_8H_{15}O_2$  N. Вычислено %: N 9,79.

2. *4-пропокси-2-нитрилбутан-2-ол.* К смеси 11,6 г цианистого натрия (0,24 моля) в 25 мл воды и 19,9 г 4-пропоксибутан-2-она (0,13 моля) (т. кип. 163—164°;  $n_D^{20}$  1,4145) прибавлено 85 г серной кислоты в течение часа при температуре 13—20°. После обработки смеси вышеописанным образом, отгонки растворителя и разгонки остатка в вакууме получено 9 г 4-пропокси-2-нитрилбутан-2-ола (33,3% теории) с т. кип. 120—121° при 20 мм.

$n_D^{20}$  1,4275;  $d_4^{20}$  0,9611

Найдено:  $MR_D$  41,983

Вычислено:  $MR_D$  42,130

0,1023 г вещ.: 9,2 мл азота (22°, 674 мм)

0,1034 г вещ.: 9,0 мл азота (22°, 676 мм)

Найдено %: N 9,23; 9,00

$C_8H_{15}O_2$  N. Вычислено %: N 8,92.

3. *4-изопропокси-2-нитрилбутан-2-ол.* К смеси 5,9 г цианистого натрия (0,12 моля) в 20 мл воды и 13,5 г 4-изопропоксибутан-2-она (0,09 моля) (т. кип. 156—157°;  $n_D^{20}$  1,4092) прибавлено 45 г серной кислоты в течение 40 минут при температуре 15—20°. После соответствующей обработки смеси, удаления растворителя и разгонки остатка в вакууме, получено 5 г 4-изопропокси-2-нитрилбутан-2-ола (30,6% теории) с т. кип. 99—100° при 14 мм.

$n_D^{20}$  1,4243;  $d_4^{20}$  0,9471

Найдено:  $MR_D$  42,323

Вычислено:  $MR_D$  42,130

0,0998 г вещ.: 8,7 мл азота (19°, 676 мм)

0,0975 г вещ.: 8,4 мл азота (19°, 673 мм)

Найдено %: N 9,06; 8,93

$C_8H_{16}O_2N$ . Вычислено %: N 8,92.

4. 4-бутокси-2-нитрилбутан-2-ол. К смеси 4,7 г цианистого натрия (0,10 моля) в 10 мл воды и 9,5 г 4-бутоксидбутан-2-она (0,06 моля) (т. кип. 180—181°;  $n_D^{20}$  1,4218) прибавлено 35 г серной кислоты в течение 20 минут при температуре 13—20°. Смесь обработана обычным образом, отогнан растворитель и остаток разогнан в вакууме. Получено 3,6 г 4-бутокси-2-нитрилбутан-2-ола (31,8% теории) с т. кип. 124—125° при 16 мм.

$n_D^{20}$  1,4296;  $d_4^{20}$  0,9400

Найдено:  $MR_D$  46,955

Вычислено:  $MR_D$  46,748

0,0994 г вещ.: 7,9 мл азота (21°, 674 мм)

0,1000 г вещ.: 8,2 мл азота (21°, 674 мм)

Найдено %: N 8,29; 8,45

$C_9H_{17}O_2N$ . Вычислено %: N 8,19.

5. 4-изобутокси-2-нитрилбутан-2-ол. К смеси 7,8 г цианистого натрия (0,16 моля) в 25 мл воды и 20 г 4-изобутоксидбутан-2-она (0,12 моля) (т. кип. 172—173°;  $n_D^{20}$  1,4130) прибавлено 60 г серной кислоты в течение часа при температуре 12—20°. Смесь обработана соответственно, удален растворитель и остаток разогнан в вакууме. Получено 9,3 г 4-изобутокси-2-нитрилбутан-2-ола (39,1% теории) с т. кип. 120—121° при 17 мм.

$n_D^{20}$  1,4265;  $d_4^{20}$  0,9312

Найдено:  $MR_D$  47,100

Вычислено:  $MR_D$  46,748

0,1009 г вещ.: 8,0 мл азота (15°, 672 мм)

0,1120 г вещ.: 9,1 мл азота (15°, 670 мм)

Найдено %: N 8,30; 8,49

$C_9H_{17}O_2N$ . Вычислено %: N 8,19.

6. 4-изопентокси-2-нитрилбутан-2-ол. К смеси 7,2 г цианистого натрия (0,15 моля) в 20 мл воды и 20 г 4-изопентоксидбутан-2-она (0,10 моля) (т. кип. 190—192°;  $n_D^{20}$  1,4192) прибавлено 55 г серной кислоты в течение 2 часов при температуре 15—20°. Смесь обработана как в предыдущих опытах, отогнан растворитель и остаток разогнан в вакууме. Получено 10,1 г 4-изопентокси-2-нитрилбутан-2-ола (43,1% теории) с т. кип. 132—133° при 16 мм.

$n_D^{20}$  1,4315;  $d_4^{20}$  0,9271

Найдено:  $MR_D$  51,702

Вычислено:  $MR_D$  51,366

0,1024 г. вещ.: 7,8 мл азота (15°, 672 мм)

0,1036 г вещ.: 7,7 мл азота (15°, 670 мм)

Найдено %: N 7,97; 7,76

$C_{10}H_{12}O_2$  N. Вычислено %: N 7,57.

### Выводы

Показано, что метил-β-алкоксиэтилкетоны, подобно другим карбонилсодержащим соединениям, конденсируются с синильной кислотой, образуя соответствующие γ-алкокси-α-оксинитрилы.

Впервые синтезированы: 4-этоксипропан-2-нитрилбутан-2-ол; 4-пропокси-2-нитрилбутан-2-ол; 4-изопропокси-2-нитрилбутан-2-ол; 4-бутокси-2-нитрилбутан-2-ол; 4-изобутокси-2-нитрилбутан-2-ол и 4-изопентокси-2-нитрилбутан-2-ол.

Химический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 25 III 1954

### ЛИТЕРАТУРА

1. Вартамян С. А. и Гюли-Кевхян Р. С. Изв. АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том VII, № 5, 1954.
2. Назаров И. Н., Вартамян С. А., Мацюян С. Г. и Жамагорцян В. Н. ЖОХ, 23, 1896 (1953).

### Ս. Հ. Վարդանյան, Հ. Ս. Գյուլի-Գեվրյան

## ՑԻԱՆԶՐԱՄԱԿԱՆ ԹԹՎԻ ԿՈՆԴԵՆՍԱՑՈՒՄԸ Բ-ԱԼԿՕՔՍԻԿԵՏՈՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Հ ա ղ ո ղ ո լ լ Մ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հստակաձևում ցույց է տրվում, որ մեթիլ-β-ալկոքսիէթիլկետոնները, կարբոնիլ պարունակող այլ միացությունների նման, կոնդենսացվում են ցիանջրածնական թթվի հետ, դրայանելով համապատասխան γ-ալկոքսի-α-օքսինիտրիլներ:

Առաջին անգամ սինթեզված են՝ 4-էթօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ, 4-պրոպօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ, 4-իզոպրոպօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ, 4-բուտօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ, 4-իզոբուտօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ և 4-իզոպենտօքսի-2-նիտրիլբուտան-2-օլ:

ФАРМАЦЕВТИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Л. Миджоян, Н. А. Бабиня

Некоторые тетраалкилдиаминоизопропиловые  
 эфиры п-алкоксибензойных кислот

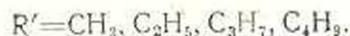
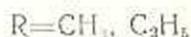
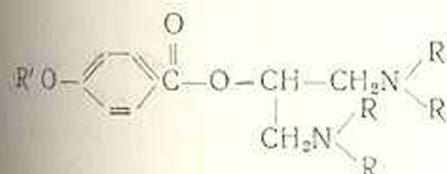
Преимущества местной анестезии при хирургических операциях и отсутствие до настоящего времени местного анестетика, отвечающего всем требованиям современной медицины, побуждают к синтезу новых препаратов.

Синтез алкаминных эфиров п-алкоксибензойных кислот ставился нами с целью получения местноанестетических соединений, в которых структурно исключалась бы возможность снятия эффекта сульфамидных препаратов, а наличие алкоксигруппы в бензольном кольце создавало бы предпосылки снижения токсичности и увеличения липодотропности препаратов.

В отличие от авторов, работавших по синтезу местных анестетиков группы аминоэфиров п-алкоксибензойных кислот, нами был использован тетраалкилдиаминоизопропиловый спирт.

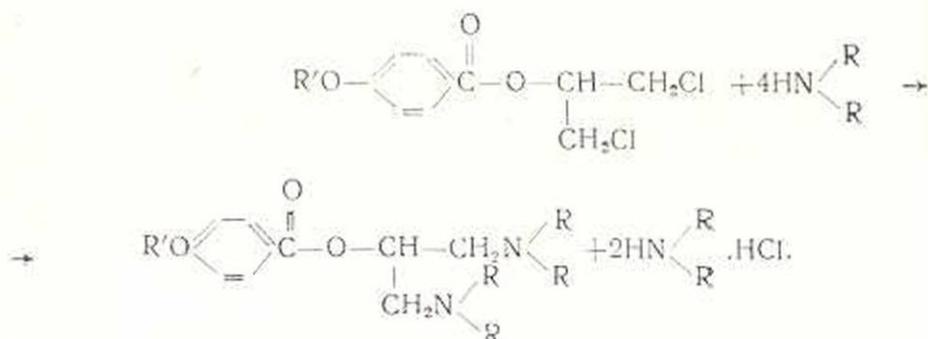
В выборе этой алканольной цепочки мы основывались на наших предыдущих работах [1], которыми было установлено, что введение метилendiалкиламиногруппы в алканольную цепь препаратов новокаинового и дикаинового рядов способствует значительному повышению анестетического эффекта соединений, однако наряду с этим и возрастанию их раздражающих свойств.

Таким образом, учитывая особую роль третичного азота в создании и повышении местноанестетической активности, а также пользуясь данными работ о снижении токсических и раздражающих свойств при введении кислорода в виде эфирной группы [2], мы поставили себе целью синтез тетраалкилдиаминоизопропиловых эфиров п-алкоксибензойных кислот следующего строения:\*



\* Кандидатская диссертация Бабиня Н. А., 1950.

Получение этих соединений осуществлялось взаимодействием хлорангидридов *p*-алкоксибензойных кислот с  $\alpha,\gamma$ -дихлоризопропиловым спиртом, с последующим аминированием полученных хлорэфиров вторичными аминами в бензольной среде.



По этому методу аминоэфиры получались, в основном, с выходами порядка 47—70%.

Непосредственное взаимодействие хлорангидридов *p*-алкоксибензойных кислот с аминоспиртами также приводит к образованию аминоэфиров. Этим способом был получен тетраметилдiamiноизопропиловый эфир *p*-пропокси и этоксибензойных кислот. Однако нас интересовал способ получения тетраалкилдiamiноизопропиловых эфиров через соответствующие хлорэфиры, почему мы и пользовались им в своей работе.

Синтезированные  $\alpha,\gamma$ -дихлоризопропиловые эфиры *p*-метокси-, этокси-, пропокси- и буюксибензойных кислот являются новыми веществами. Они представляют собой хорошо кристаллизующиеся соединения, растворяющиеся в органических растворителях и нерастворяющиеся в воде.

Полученные тетраалкилдiamiноизопропиловые эфиры *p*-алкоксибензойных кислот в литературе не описаны. Они охарактеризованы температурами плавления своих дигидратов, а для тетраметильных производных — также и температурами плавления дихлоргидратов.

Дихлоргидраты тетраэтильных производных кристаллических продуктов не образуют.

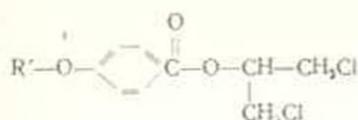
Все полученные аминоэфиры представляют собой густые маслообразные вещества со своеобразным аммиачным запахом, хорошо растворяются в безводных органических растворителях (эфир, бензол, спирт, ацетон) и не растворяются в воде.

Состав и строение аминоэфиров подтверждены аналитическими данными и омылением щелочью на исходную кислоту и аминоспирт.

Результаты анализов и некоторые физикохимические константы синтезированных хлорэфиров и аминоэфиров сведены в таблицы 1, 2 и 3.

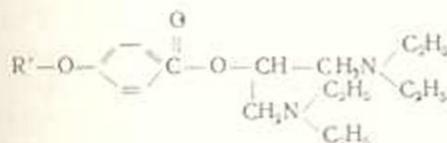
Синтезированные аминоэфиры были подвергнуты испытанию на местноанестетическую активность по методу Ренье.

Таблица 1



R'	Выход в %	Т. пл. °C	Общая формула	Анализ, %	
				Cl	
				вычислено	найдено
-CH <sub>3</sub>	98	77-79	C <sub>11</sub> H <sub>13</sub> O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	26,96	26,71
-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	62,5	56-60	C <sub>13</sub> H <sub>17</sub> O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	25,59	25,43
-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub>	76	44-48	C <sub>15</sub> H <sub>19</sub> O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	24,36	24,29
-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	92,8	39-41	C <sub>17</sub> H <sub>21</sub> O <sub>2</sub> Cl <sub>2</sub>	23,24	23,26

Таблица 2



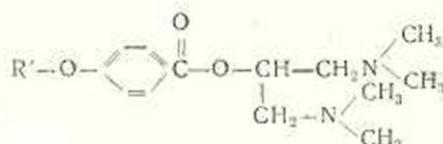
R'	Выход в %	Общая формула	Анализ, %				Дипикрат Т. пл. °C
			C		N		
			найдено	вычислено	найдено	вычислено	
-CH <sub>3</sub>	70	C <sub>19</sub> H <sub>27</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	67,89	67,80	9,81	9,9	187-188
-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	59	C <sub>25</sub> H <sub>35</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	68,49	68,57	9,63	9,79	167-168
-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub>	63	C <sub>27</sub> H <sub>37</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	68,77	69,15	10,0	9,92	106-110
-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	47	C <sub>29</sub> H <sub>39</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	69,94	69,78	9,81	10,1	82-83

Исследования показали, что пять из них обладают местноанестетическим действием, проверенным на 1 и 5% растворах хлоридов аминосфиров.

Сравнение полученных результатов с активностью новокaina свидетельствует о том, что проведенные структурные изменения способствуют резкому повышению анестетического эффекта новокaina при небольшом увеличении его токсичности. В сравнении с данным указанные соединения проявили сильное понижение токсических свойств наряду с сохранением анестезирующего действия, а замена амино- и алкаминогрупп в гиперкаинах и армекаинах алкоксигруппой привела к снижению раздражающих свойств препаратов и увеличила их активность.

Микробиологические наблюдения ростовых зон бактерий Koli при наличии стрептоцида и без него показали, что хлориды синтези-

Таблица 3



R'	Выход, в %	Общая формула	Дихлор- гидрат	Дипикрат	Анализ, % дихлоргидратов Cl	
			Т. пл. °C		найдено	вычислено
-CH <sub>3</sub>	30	C <sub>15</sub> H <sub>24</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	211-212	142-143	19,66	20,08
-C <sub>2</sub> H <sub>5</sub>	60	C <sub>17</sub> H <sub>26</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	217-218	228-230	18,89	19,31
-C <sub>3</sub> H <sub>7</sub>	70	C <sub>19</sub> H <sub>30</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	202-204	215-217	18,07	18,63
-C <sub>4</sub> H <sub>9</sub>	55	C <sub>21</sub> H <sub>34</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub>	187-190	176-178	17,85	18,19

рованных аминоэфиров не проявляют антагонизма в отношении сульфамидных препаратов.

Таким образом, отсутствие антагонизма к сульфамидным препаратам, с одной стороны, и высокая анестетическая активность наряду с малой токсичностью — с другой, показывают на данной группе соединений явное преимущество *p*-алкоксибензойных кислот над *p*-амино- и *p*-алкаминобензойными кислотами, являющимися основными компонентами в синтезе ныне применяемых местных анестетиков.

Фармакологические и микробиологические испытания выполнены сотрудниками отделов фармакологии и химиотерапии лаборатории фармацевтической химии АН Армянской ССР — В. М. Самвелян и Н. А. Аюян.

### Экспериментальная часть

*p*-Оксибензойная кислота получалась диазотированием *p*-аминобензойной кислоты [3]. После перевода ее в этиловый эфир синтезировались *p*-алкоксибензойные кислоты [4].

Взаимодействием эквимолекулярных количеств кислоты и хлористого тионила, взятого с 10% избытком, получались хлорангидриды.

*Хлорангидрид p-этоксibenзойной кислоты.* В круглодонную колбу с обратным холодильником помещалось 8 г *p*-этоксibenзойной кислоты в растворе 25 мл абсолютного бензола, затем прибавлялось 7 г SOCl<sub>2</sub> в 25 мл абсолютного бензола. Реакционная смесь кипятилась на масляной бане при температуре 110–120° в течение 6–8 часов. По окончании реакции обратный холодильник заменялся нисходящим, к реакционной смеси добавлялся абсолютный бензол, который при отгонке увлекал с собой непрореагировавший хлористый тионил. Эта операция повторялась трижды.

Полученный хлорангидрид в бензольном растворе использовался в последующей стадии синтеза.

*α,γ-дихлоризопрпиловые эфиры п-алкоксибензойных кислот.* Дихлоризопрпиловые эфиры п-алкоксибензойных кислот получались взаимодействием эквимолекулярных количеств α,γ-дихлоргидрина глицерина и хлорангидридов п-алкоксибензойных кислот в среде абсолютного бензола. Реакция проводилась на масляной бане при температуре 100—120°. Окончание реакции проверялось по прекращении выделения хлористого водорода. Эстерифицирование обычно заканчивалось в течение 4—8 часов. По охлаждению к реакционной смеси прибавлялся эфир, а затем водный раствор поташа до щелочной реакции на лакмус. Эфирные вытяжки высушивались обезвоженным сернистым натрием. После отгонки эфира остаток в колбе закристаллизовывался. Продукт реакции перекристаллизовывался из водного спирта (2 ч.  $C_2H_5OH + 1$  ч.  $H_2O$ ).

Выходы хлорозэфиров соответствуют 60—98% теор., рассчитанного на взятый α,γ-дихлоргидрин глицерина.

Результаты определения процентного содержания хлора по Карусу дают вполне соответствующие вычисленным данным значения.

*Тетраалкилдиаминоизопрпиловые эфиры п-алкоксибензойных кислот.* Большинство аминоэфиров синтезировались взаимодействием α,γ-дихлоризопрпиловых эфиров с трехкратным избытком вторичных аминов в среде абсолютного бензола в запаянных трубках, при температуре масляной бани 130—150° в течение 24—30 часов.

Действие двукратного количества тетраалкилдиаминоизопрпилового хлорангидрида п-алкоксибензойных кислот в среде абсолютного бензола также приводит к получению аминоэфиров с выходом 60—70% от теории.

*Тетраэтилдиаминоизопрпиловый эфир п-этоксibenзойной кислоты.* В толстостенную трубку помещалось 2,7 г α,γ-дихлоризопрпилового эфира п-этоксibenзойной кислоты и 10 г диэтиламина, растворенного в 15 мл абсолютного бензола; трубка запаявалась и затем помещалась в масляную баню, температура которой во время реакции поддерживалась в пределах 130—140°. Нагревание проводилось в продолжение 27 часов. По окончании реакции хлорид диэтиламина отфильтровывался и дважды промывался абсолютным бензолом. Фильтрат обрабатывался 5—6%-ным раствором соляной кислоты до кислой реакции на Конго. Водный слой несколько раз промывался бензолом, а затем для выделения аминоэфира в виде свободного основания подщелачивался насыщенным раствором поташа.

После трехкратной экстракции эфиром, эфирные вытяжки высушивались обезвоженным сульфатом натрия. По отгонке эфира в колбе оставалось 2,3 г густого маслообразного вещества.

Для очистки аминоэфир повторно переводился (в растворе абс. эфира) в дихлоридат действием эфирного раствора хлористого водорода и, после разложения дихлоридата водным раствором поташа, экстрагировался эфиром. Эфир отгонялся, а остаток использовался для получения солей — пикратов, хлоридратов и цитратов.

Всего получено 2 г тетраэтилдиаминоизопропилового эфира п-этоксibenзойной кислоты, что соответствует 59% теор. выхода, считая на взятый  $\alpha, \gamma$ -дихлоризопропиловый эфир п-этоксibenзойной кислоты.

*Тетраметилдиаминоизопропиловый эфир п-пропоксибензойной кислоты.* В круглодонную колбу, снабженную обратным холодильником с хлоркальциевой трубкой, помещалось 5,9 г хлорангидрида п-пропоксибензойной кислоты в 30 мл абсолютного бензола. При охлаждении реакционной колбы льдом через капельную воронку приливалось 9 г тетраметилдиаминоизопропилового спирта в растворе 25 мл абсолютного бензола. Реакционная смесь оставлялась на ночь, а затем нагревалась на масляной бане в течение 6 часов (температура бани 110—120°).

После обработки насыщенным раствором поташа бензольные экстракты, соединенные вместе, высушивались над обезвоженным  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ . Бензол отгонялся при нормальном давлении, а избыток аминоспирта — в вакууме при 16 мм остаточного давления. Остаток в колбе очищался через дихлоргидрат, как это описано в предыдущем опыте. В результате получено 6,5 г тетраметилдиаминоизопропилового эфира п-пропоксибензойной кислоты, что соответствует 70% выходу, считая на взятый в реакцию хлорангидрид п-пропоксибензойной кислоты.

### Выводы

1. Получено и охарактеризовано 8 новых тетраалкилдиаминоизопропиловых и 4 промежуточных  $\alpha, \gamma$ -дихлоризопропиловых эфиров п-алкоксибензойных кислот.

2. Фармакологические испытания полученных эфиров показали, что некоторые из них являются сильными местными анестетиками, но сила анестезии близкими к дикаину.

3. Микробиологические испытания совместного действия сульфамидных препаратов и синтезированных соединений показали отсутствие антагонизма между ними.

Химический институт  
АН Армянской ССР

Поступило 16 VII 1954

### ЛИТЕРАТУРА

1. Миджоян А. Л. *ЖОХ*, 16, 1033 (1946).
2. Gardner I., Haenni E. I. *Am. Soc.*, 53, 2713 (1931); Laubender B., *Hand. Exp. pharmak.*, 1—20 (1939).
3. Blick F., Smith F., Powers J. I. *Am. Chem. Soc.*, 54, 1465 (1932).
4. Stanson Pierke I., Salisbury I., Frederiksen I. I. *Am. Chem. Soc.*, 64, 1691—4 (1942).

Ա. Լ. ՄՃԶՈՒԱՆԳ, Ն. Ա. ԲԱՔԻՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ Բ-ԱԼԿՕՔՍԻԲԵՆԶՈՒԿԱՆ ԹԹՈՒՆԵՐԻ ՏԵՏՐԱԱԼԿԻԼ-ԴԻԱՄԻՆՈՒԶՈՊՐՈՊԻԼ ԷՍԹԵՐՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Վիրարուծության մեջ տեղական թմրեցում առաջացնող միջոցների լայն կիրառման հետ մեկտեղ, բարձրացել են պահանջները գործածվող պրեպարատների նկատմամբ:

Հանրահայտ նոսոկախնձն անդամ, իր մի շարք դրական հատկությունների հանդերձ, չի բավարարում պրակտիկ բժշկության կողմից առաջադրվող պահանջներին:

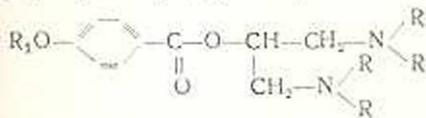
Հատկապես կարևոր է այն փաստը, որ ինչպես նոսոկախնձնը, այնպես էլ կիրառվող մյուս անեստետիկների մեծ մասն իրենցից ներկայացնում են Բ-ամինոբենզոական թթվի ածանցյալներ:

Հայանի է, որ Բ-ամինոբենզոական թթուն և նրա ածանցյալները, լինելով բակտերիային մուսարոլիտներ, վերացնում են սուլֆամիդային դրեպարատների ազդեցությունը և համատեղ գործածության դեպքում վիրարուծին զրկում են ժամանակակից էֆեկտիվ հակաբակտերիալ միջոցների օգտագործման հնարավորությունից:

Նշված հանգամանքն անգամ բավական է ցույց տալու համար, թե ինչու այսօր տեղական թմրեցում առաջացնող նյութերի սինթեզը նույնքան աշխատանք է, որքան սրանից կես դար առաջ: Բ-ամինոբենզոական թթվի ածանցյալների մոտ հայտնաբերված անցանկալի հատկություններից խուսափելու համար մենք նպատակահարմար դատնք սինթեզել Բ-ալիօքսիբենզոական թթվի ածանցյալներ, գտնելով, որ այս շարքում կարելի էլինի հայտնաբերել պրակտիկ բժշկության պահանջներին որոշ չափով բավարարող անեստետիկներ:

Անեստետիկների բնագավառում մեր կատարած աշխատանքներում նոսոկախնի և դիկախնի օրինակների վրա ցույց էր արված, որ լրացուցիչ ազդեցությունը — մեթիլենդիլալիլբուտիլային խմբի ձևով — զգալի չափով բարձրացնում է անեստեզիայի ուժն ու տեղությունը:

Վերևում նշված հանգամանքները խթան հանդիսացան սինթեզելու մի քանի Բ-ալիօքսիբենզոական թթուների տետրաալիլիլբուտիլային օրինակներ, որոնց երկըրրջրածնական աղերը ցուցաբերում են տեղական թմրեցում առաջացնող հատկություններ:



Նշված միացությունների սինթեզներն իրականացված են՝  
 ա) Բ-ալիօքսիբենզոական թթուների քլորանհիդրիդների և համապատասխան ամինոսպիրտների փոխազդեցության ճանապարհով:

բ) Բ-ալիօքսիբենզոական թթուների քլորանհիդրիդների և դիցելինի ալ-դիբորոնիդների փոխազդեցությունից ստացված Բ-ալիօքսիբենզոական թթուների ալ-դիբորոնիդային էսթերների և երկըրրջրային ամինների կոզենացման ճանապարհով:

## Ե Չ Բ Ա Կ Ա Յ Ո Ի Թ Յ Ո Ի Ն Ն Ե Բ

1. Ստացված և բնութագրված են ք-ալիօքսիրենզոական թթուների 8 նոր տեսրաալիլիլիզոպրոպիլ և 4 միջանկյալ ալիլփլորրիզոպրոպիլ էսթերներ:

2. Ստացված 7 էսթերների ֆարմակոլոգիական փորձարկումը ցույց տվեց, որ նրանցից ավելի ակտիվները հանդիսանում են ուժեղ տեղական անեոտետիկներ, որոնք անեստեզիայի ուժով մոտենում են դիկաինին:

Սուլֆամիդների և սինթեզված միացությունների համատեղ ազդեցության միկրոբիոլոգիական փորձարկումը ցույց տվեց, որ նրանց միջև անտագոնիզմ գոյություն չունի:

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Л. А. Вardanянц

Теория „оптических кривых“ Е. С. Федорова  
и вращательного варианта стереоконоскопического  
метода

В в е д е н и е

Вращательный вариант стереоконоскопического метода, как это уже было отмечено нами [2], тождествен методу „оптических кривых“ Е. С. Федорова, предложенному им более полувека назад [4]. При этом методе посредством сочетания некоторых поворотов препарата производится построение на стереографической проекции особых кривых, представляющих геометрическое место проекций погасающих векторов. Используются следующие оси вращения и повороты: поворот шлифа вокруг нормали к его плоскости, т. е. вокруг внутренней вертикальной оси федоровского столика, наклон шлифа к себе и от себя поворотом около оси восток-запад столика и, наконец, поворот самого федоровского столика вместе со столиком микроскопа.

В принятой нами системе обозначений первый поворот определяется по положению индекса и соответствующему отсчету на внутреннем круге федоровского столика и обозначается буквой  $i$ ; второй поворот определяется отсчетом по вертикальному барабану и обозначается буквой  $y$ . Третий поворот получаем из отсчетов по нониусу столика микроскопа и обозначаем его буквой  $F$ . Кривую, построенную при постоянном значении  $F$ , называем элементарной стереофигурой, а сочетание нескольких таких фигур — полной стереофигурой.

Отыскивание погасающих векторов производится следующим образом. При нулевом положении федоровского столика, т. е. когда его ось восток-запад совпадает с главным сечением одного из николей (при этом  $F = 0$  или  $F = 90^\circ$ , что тождественно одно другому), и при некотором произвольном исходном положении индекса  $i$  наклоном шлифа к себе и от себя. Если наблюдалось погасание препарата, то соответствующий вектор наносим на диаграмму обычным образом, пользуясь при этом общезвестной вертушкой с сеткой Вульфа.

После этого поворачиваем шлиф, т. е. внутренний круг федоровского столика, на некоторый угол и вновь наклоняем шлиф к себе и от себя. Этим путем находим второй погасающий вектор и наносим его на диаграмму и т. д. Если погасание при некотором положении

индекса не наблюдалось, то поворачиваем шлиф дальше в том же направлении и т. д., пока внутренний круг совершит поворот на  $180^\circ$  и пока не будет найдено достаточное число точек, чтобы построить по ним плавную кривую. Это будет элементарная стереофигура при  $F = 0$ . Е. С. Федоров называл такие кривые „оптическими кривыми“.

Построив первую стереофигуру, поворачиваем столик микроскопа вместе с федоровским столиком на некоторый угол и, оставляя его постоянным, вновь отыскиваем погасающие векторы наклоном шлифа к себе и от себя при разных положениях индекса. Векторы эти наносим на диаграмму и строим вторую кривую, т. е. стереофигуру для  $F = \mu$ .

Как будет доказано ниже, кривые линии всех элементарных стереофигур обязательно проходят через центр диаграммы, причем у каждой такой фигуры в центре перекрещиваются под  $90^\circ$  две ветви. Исключением служат только разрезы, перпендикулярные к оптической оси, у которых через центр диаграммы проходит лишь одна ветвь каждой стереофигуры. Таким образом, центр диаграммы представляет общую точку всех элементарных стереофигур.

Кроме центра диаграммы, кривые линии всех элементарных стереофигур проходят обязательно и через проекции оптических осей, так как вектор оптической оси бывает погасающим в момент его совмещения с осью микроскопа при прочих любых условиях. Никаких других общих точек пересечения кривых линий всех стереофигур на диаграммах быть не может.

Появление метода „оптических кривых“ связано с той стадией развития федоровского столика, когда он содержал лишь две оси вращения — внутреннюю вертикальную и восток-запад. Но уже вскоре к столику была добавлена еще одна ось, называемая сейчас многими осью север-юг, которая позволяет наклонять шлиф вправо и влево. Удачность такого совмещения осей определила пути дальнейшего развития федоровского метода. В связи с этим метод „оптических кривых“ был отставлен, и о нем после этого лишь очень кратко упоминалось в методической части оптической кристаллографии и при описании методов исследования в петрографии.

Е. С. Федоров установил только некоторые теоретические положения данного метода, полной же его теории мы не имели до самого последнего времени. Разработка такой теории сделалась возможной лишь на базе стереоконоскопического метода, теория которого для его нормального и диагонального вариантов была развита нами с полной детальностью посредством математического анализа на основе составленного нами уравнения стереофигур в общей его форме [1, 2, 3]. Это уравнение вполне применимо и для вращательного варианта, а следовательно и для метода „оптических кривых“ Е. С. Федорова.

При вращательном варианте стереоконоскопического метода остается неиспользованной ось север-юг, так как наклоны вправо и влево не производятся. Поэтому переменная  $x$ , входящая в состав

общей формы уравнения стереофигур, всегда равна нулю. Это дает некоторое упрощение общей формы уравнения. Но вместе с тем сама функция, т. е.  $\operatorname{tg} 2F$ , уже не равна, в общем случае, нулю или бесконечности. Следовательно, появляется новая переменная,  $F$ , представляющая угол поворота николей или, что то же самое, угол поворота столика микроскопа.

Для вращательного варианта общая форма уравнения стереофигур получает следующий вид

$$2F = 2\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} i}{\cos y} -$$

$$-\operatorname{arctg} \frac{\cos y \cos \varphi - \sin y \sin i \sin \varphi}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \cot g(\psi + \nu) - \sin y \cos i (\sin y \sin i \cos \varphi + \cos y \sin \varphi)}$$

$$-\operatorname{arctg} \frac{\cos y \cos \varphi - \sin y \sin i \sin \varphi}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \cot g(\psi - \nu) - \sin y \cos i (\sin y \sin i \cos \varphi + \cos y \sin \varphi)}. \quad (1)$$

И в данном случае, подобно нормальному и диагональному вариантам метода, уравнение представляет непрерывную функцию, причем здесь независимыми переменными, определяющими ориентировку исследуемого сечения и положение федоровского столика в оптической системе, являются  $\nu$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $F$ , а зависимые переменные  $y$  и  $i$  определяют координаты элементарной стереофигуры на стереографической проекции.

Переменная  $F$  имеет всегда два значения, отличающиеся одно от другого на  $90^\circ$ , так как угол поворота николей можно отсчитывать как по отношению к анализатору, так и к поляризатору. Поэтому удобнее оставлять в уравнении удвоенное значение функции, так как  $\operatorname{tg} 2F = \operatorname{tg} (180^\circ + 2F)$ . Нулевое значение  $F = 0$  имеет место, когда оси федоровского столика север-юг и восток-запад совпадают обе с главными сечениями поляризатора и анализатора.

Переменная  $\varphi$  представляет угол между плоскостью шлифа и плоскостью оптических осей. Следующая переменная  $\psi$  — угол между линией пересечения плоскости шлифа с плоскостью оптических осей и близлежащей к ней биссектрисой, а  $i$  — угол между этой линией пересечения плоскостей и осью север-юг, причем этот угол должен отсчитываться всегда в одном направлении.

Общее уравнение стереофигур (1) имеет неявную форму, а приведение его к явной форме, показывающей зависимость переменных  $y$  и  $i$  друг от друга, усложняет уравнение и делает его в ряде случаев очень громоздким, мало пригодным для анализа стереофигур при тех или иных общих условиях. В связи с этим общее исследование проведено нами в некоторых случаях по материалам графических построений стереофигур.

### Общие особенности стереофигур

Прежде чем перейти к анализу стереофигур, необходимо соответствующим образом осветить некоторые общие особенности стереофигур.

1. *Число ветвей стереофигур в центре диаграммы.* Для точки стереофигур, проектирующейся в центре диаграмм, должно быть  $y=0$  поэтому общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$2F = 2\arctg(\operatorname{tgi}) - \arctg \frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}(\psi + v)} - \arctg \frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}(\psi - v)},$$

$$\text{или } \operatorname{tg}2F = \frac{2\operatorname{tgi} \frac{\cos\varphi[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]}{1 - \operatorname{tg}^2i}}{1 + \frac{2\operatorname{tgi} \cos\varphi[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]}{(1 - \operatorname{tg}^2i)[\operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v) - \cos^2\varphi]}}$$

или с условными обозначениями

$$\operatorname{tg}2F = \frac{2B\operatorname{tgi} - A(1 - \operatorname{tg}^2i)}{2A\operatorname{tgi} + B(1 - \operatorname{tg}^2i)}. \text{ Решая это уравнение, получим}$$

$$\operatorname{tgi} = \frac{B - A\operatorname{tg}2F \pm \sec2F\sqrt{A^2 + B^2}}{-(A + B\operatorname{tg}2F)}.$$

Следовательно в общем случае переменная  $i$  имеет при каждом значении  $F$ , т. е. у всех стереофигур, два значения:  $i$  и  $i \pm 90^\circ$ , так как  $\operatorname{tgi} \operatorname{tg}(i \pm 90^\circ) = -1$ , что и соблюдается в уравнении (3). Иначе говоря, кривые линии у каждой стереофигуры должны пересекаться в центре диаграммы под прямым углом.

Но в частном случае, когда в уравнении (3) подкоренное выражение равно нулю, угол  $i$  получает только одно значение. Для этого должно быть  $A^2 + B^2 = 0$ . Подставляя из уравнения (2) значения  $B$  и  $A$ , получим выражение

$$\cos^2\varphi[\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]^2 + [\operatorname{cotg}(\psi + v)\operatorname{cotg}(\psi - v) - \cos^2\varphi]^2 = 0,$$

справедливое только тогда, когда  $\varphi = 90^\circ$  и  $\psi + v = 90^\circ$ , т. е. когда одна из оптических осей проектируется в центре диаграммы. В этом случае, который будет рассмотрен детально ниже, у каждой стереофигуры через центр диаграммы проходит только одна линия (см. ниже случаи, представленные на рис. 13 и 14).

Центр диаграммы всегда заключен внутри сферического треугольника, образуемого проекциями главных сечений индикатрисы. Поэтому внутри этого треугольника каждая линия стереофигуры обязательно проходит через центр диаграммы.

2. *Точки стереофигур на основном круге проекции.* При некоторых значениях угла поворота никелей  $F$  линии стереофигур пересекают основной круг диаграммы и выходят за ее пределы в область нижней полусферы стереографической проекции. Математическое определение таких точек пересечения может быть произведено посредством уравнения (1), если подставить в него  $y = -90^\circ$ .

$$2F = 2\text{arctg} \frac{-\sin i \sin \varphi}{\sin^2 i \cotg(\psi + \nu) - \sin i \cos i \cos \varphi} - \text{arctg} \frac{-\sin i \sin \varphi}{\sin^2 i \cotg(\psi - \nu) - \sin i \cos i \cos \varphi}, \text{ откуда}$$

$$\text{tg} 2F = \frac{\sin \varphi \sin i [\cotg(\psi + \nu) + \cotg(\psi - \nu)] - 2\cos i \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 i \cotg(\psi + \nu) \cotg(\psi - \nu) - \sin i \cos i \cos \varphi [\cotg(\psi + \nu) + \cotg(\psi - \nu)] + \cos^2 i \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} \quad (4)$$

Для общего случая это уравнение позволяет решать задачу только путем подбора значений, т. е. подстановкой разных значений для  $i$  при тех или иных заданных значениях  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\nu$ . В частных же случаях (см. ниже) уравнение (4) решается легко.

Задача может быть решена также и графически с помощью обычной вертушки, применяемой при федоровских измерениях. Последовательность операций при этом следующая. Проектируем кристалл по заданным значениям  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\nu$  на прозрачную бумагу вертушки (рис. 1) и затем находим тот меридиан сетки Вульфа (считая меридианы от центра), который делит пополам угол  $\alpha 2b$ , образуемый меридианами, проходящими через проекции оптических осей. На рис. 1 один из таких меридианов, делящих угол пополам, образует с центральным меридианом угол  $\alpha$ , а другой — угол  $\beta$ . Представим мысленно, что федоровский столик наклонен на  $90^\circ$  от себя, и что ось микроскопа совмещена с осью сетки Вульфа так, что мы смотрим в направлении от полюса 2 к полюсу 1. Если условиться поворачивать николи только по часовой стрелке, то поворот их, при котором происходит погасание, будет равен  $\beta$  (если же столик наклонен на  $90^\circ$  к себе, то мы смотрим в микроскоп в направлении от полюса 1 к полюсу 2, и в этом случае необходимый поворот николей будет  $90^\circ - \beta = \alpha$ ).

Если вернуть федоровский столик в первоначальное положение и поставить шлиф нормально к оси микроскопа, то таковая будет проектироваться в центре диаграммы. При этом одна биссектриса угла  $\alpha 2b$  займет положение  $A_2$ , а другая — положение  $P_2$ . Так как первоначальное (нулевое) положение николей было  $A_0$  и  $P_0$ , то следовательно для получения погасания необходим поворот николей на угол  $\beta$  по часовой стрелке или на  $\alpha$  против часовой стрелки (если же столик был наклонен на  $90^\circ$  к себе, то после его возвращения в первоначальное положение биссектрисы займут положения  $A_1$  и  $P_1$ , и для погасания нужны повороты на угол  $\alpha$  по и на угол  $\beta$  против часовой стрелки).

Так как в общем уравнении стереофигур (1) величиной, определяющей фигуру для каждого данного положения николей, служит  $2F$  или  $\text{tg} 2F$ , то очевидно, что противоположные концы одного и того же диаметра могут принадлежать одной и той же стереофигуре только тогда, когда  $F = 0$  или  $F = 90^\circ$ . Во всех же остальных случаях про-

твояположные концы одного и того же диаметра принадлежат разным стереофигурам, характеризующимся углами  $F_1$  и  $F_2$ , причем  $F_1 + F_2 = 90^\circ$ .

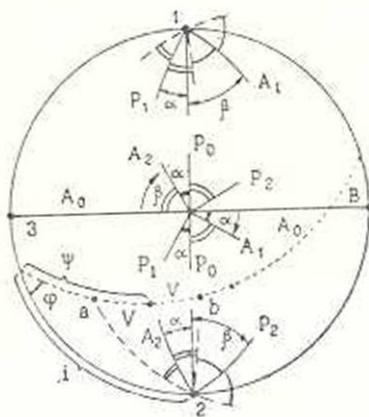


Рис. 1. Графическое решение прямой и обратной задачи по определению точек пересечения стереофигур с основным кругом.

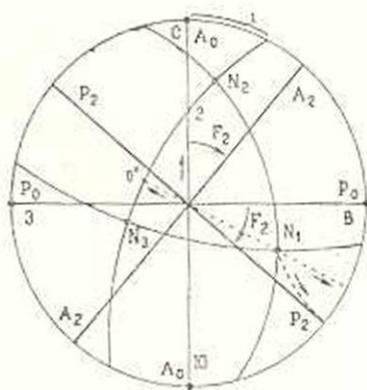


Рис. 2. Графическое решение задачи по определению точек пересечения стереофигур с проекциями главных сечений индикатрисы.

Поворачивая рамку вертушки, можно найти последовательно на основном круге точки, принадлежащие стереофигурам и для других значений угла  $F$ . При этом в некоторых случаях может оказаться, что  $F$  получает действительные значения только в пределах от  $F=0$  до  $F=z$  и от  $F=90^\circ - z$  до  $F=90^\circ$ , для интервала же между  $z$  и  $90^\circ - z$  угол  $F$  не получает действительных значений. Это показывает, что в таких случаях стереофигура не имеет точек на основном круге и представляет замкнутую кривую, подобную восьмерке, поясok которой совпадает с центром диаграммы. Если стереофигура имеет точки на основном круге, то она состоит из одной или двух разомкнутых линий, образующих петлю или крестообразное пересечение в центре диаграммы.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Когда  $i=0$ , т. е. когда плоскость оптических осей проходит через ось север-юг, уравнение (4) приводится к виду  $\operatorname{tg} 2F = -\operatorname{tg} 2\varphi$ , откуда получаем, что  $F_1 = -\varphi$  и  $F_2 = \varphi \pm 90^\circ$ , причем  $F_1 + F_2 = 90^\circ$ .

б) Когда  $F=0$  или  $F=90^\circ$ , числитель уравнения (4) должен быть равен нулю, т. е. должно быть

$$\sin \varphi \sin i [\operatorname{cotg}(\psi + \nu) + \operatorname{cotg}(\psi - \nu)] - 2 \cos i \sin \varphi \cos \varphi = 0. \quad (5)$$

Первым решением будет  $\varphi=0$ , независимо от значений переменных  $\psi$ ,  $\nu$  и  $i$ , поэтому в качестве искоемых точек на основном круге можно принять любые две противоположные точки. Следовательно, если разрез параллелен плоскости оптических осей, то при  $F=0$  и  $F=90^\circ$  основной круг входит полностью в состав стереофигуры. Второе решение дает

$$\operatorname{tgi} = \frac{2\cos\varphi}{\operatorname{cotg}(\psi + \nu) + \operatorname{cotg}(\psi - \nu)}. \quad (6)$$

Это уравнение показывает, что при  $\varphi = 90^\circ$  (в разрезах перпендикулярно к плоскости оптических осей) решением будет  $i = 0$ , и искомыми точками будут концы диаметра, в виде которого проектируется плоскость оптических осей. Такое же решение  $i = 0$  получается и при  $\psi = \nu$ , когда одна оптическая ось параллельна плоскости шлифа. В этом случае искомыми точками служат проекции этой оптической оси на основном круге.

3. *Точки стереофигур на проекциях главных сечений индикатрисы.* Способ отыскивания точек пересечения стереофигур с проекциями главных сечений индикатрисы показан на рис. 2, где  $N_1$ ,  $N_2$  и  $N_3$  — оси индикатрисы,  $A_0A_0$  и  $P_0P_0$  — исходное (нулевое) положение главных сечений поляризатора и анализатора, СЮ и ВЗ — оси север-юг и восток-запад федоровского столика.

Из элементарной теории кристаллоптики известно, что если вектор, лежащий в одной из плоскостей симметрии индикатрисы, совмещен с осью микроскопа, то для приведения шлифа к погасанию нужно (независимо от величины угла оптических осей) повернуть его так, чтобы главное сечение одного из николей совместились с той плоскостью симметрии индикатрисы, в которой лежит данный вектор.

Поэтому при каждом данном расположении на диаграмме треугольника проекций главных сечений индикатрисы точки пересечения этих проекций со стереофигурами не меняют своего положения и остаются постоянными для каждого значения угла  $F$ , независимо как от величины угла оптических осей, так и от наименования осей индикатрисы. В связи с этим можно принимать поочередно каждую ось индикатрисы в качестве оптической оси одноосного кристалла и находить нужные точки на перпендикулярном к ней сечении.

Отыскивание таких точек проще всего производить графически с помощью все той же вертушки. Для этого ставим ее так, чтобы ось сетки Вульфа совпадала с осью восток-запад федоровского столика, т. е. будем считать, что эта ось столика проектируется в полюсах сетки Вульфа. Этим определяется также и нулевое положение главных сечений николей  $A_0A_0$  и  $P_0P_0$ , с которыми совпадают оси СЮ и ВЗ столика (рис. 2).

После этого поворачиваем мысленно николи на угол  $F_2$  по часовой стрелке. При этом главные сечения николей должны занять положения  $A_2A_2$  и  $P_2P_2$ , каковые отмечаем на самой сетке Вульфа. Затем поворачиваем раму вертушки, а вместе с нею и проекцию кристалла так, чтобы ось индикатрисы  $N_1$  (или какая-либо другая) совместились с параллелью, проходящей через один из концов диаметров  $A_2A_2$  или  $P_2P_2$ . Если после этого повернуть кристалл вокруг оси восток-запад так, чтобы проекция той же оси  $N_1$  прошла по параллели (на рис. 2 — вдоль стрелки) и совместились с близлежащим концом диаметра  $A_2A_2$

или  $P_2P_2$  (на рис. 2 — это диаметр  $P_2P_2$ ), то сечение индикатрисы  $N_2N_2$  совместится с главным сечением одного из николей (на рис. 2 с сечением  $A_2A_2$ ). Очевидно, что при этом вектор, совмещенный с центром диаграммы, окажется в положении погасания. Очевидно также, что таким вектором будет тот, который получается от пересечения плоскостей  $N_2N_2$  и  $A_0A_0$  (на рис. 2 этот вектор показан знаком  $\cdot 2^*$ ).

Обратим внимание еще на то, что угол  $F$  поворота николей равен градусному расстоянию или от полюса сетки Вульфа до параллели, или от этой параллели до экватора сетки. Первый случай имеется тогда, когда ось индикатрисы совмещена с параллелью, проходящей через конец диаметра, соответствующего тому сечению николей, которое в нулевом положении было совмещено с осью восток-запад (как на рис. 2). Второй же случай имеет место тогда, когда имеем дело с параллелью, проходящей через конец диаметра, показывающего новое положение того сечения николей, которое первоначально совмещалось с осью север-юг.

Общее правило отыскивания точек на проекциях главных сечений индикатрисы сводится, таким образом, к следующему. Ставим сетку Вульфа как указано выше. Затем ось индикатрисы совмещаем с центральным меридианом на правой стороне сетки и находим градусное значение параллели, считая его от полюса. Это дает значение  $F$ , а искомая точка будет находиться на пересечении основного круга с проекцией сечения индикатрисы, перпендикулярного к данной ее оси. При этом верхняя точка пересечения принадлежит стереофигуре для  $F$ , а нижняя — для  $90^\circ - F$ .

Затем поворачиваем рамку вертушки по часовой стрелке и совмещаем проекцию оси индикатрисы со следующими параллелями, более близкими к экватору сетки Вульфа. При этом искомые точки будут приближаться к середине проекции данного сечения индикатрисы, причем в верхней части значения  $F$  будут увеличиваться, а в нижней части значения  $90^\circ - F$  будут уменьшаться. В середине проекции этого сечения индикатрисы верхний ряд приводит к значению  $F = 90^\circ$ , а нижний — к значению  $F = 0$ , каковые тождественны друг другу. Эти конечные значения получаются тогда, когда ось индикатрисы окажется на экваторе сетки Вульфа, а соответствующая этому искомая точка будет находиться на пересечении проекции этого сечения индикатрисы с диаметром, проведенным через принятую ось индикатрисы (точка  $0^\circ$  на рис. 2). Очевидно, что точки для значений  $F$  и  $90^\circ - F$  всегда располагаются симметрично (в равных расстояниях) от точки  $F = 0$ .

После того, как найдены искомые точки на всех трех главных сечениях индикатрисы, все значения  $F$  на контуре сферического треугольника сечений индикатрисы должны составлять три серии, в которых значения  $F$  изменяются последовательно только в одном направлении, трижды переходя от значений  $F = 0$  к значениям  $\dots F = 10^\circ$ ,  $\dots F = 40^\circ$ ,  $\dots F = 80^\circ$  и  $F = 90^\circ$  (каковое тождественно  $F = 0^\circ$ ), а затем опять в

том же порядке к значению  $F = 90^\circ$  ( $F = 0^\circ$ ) на другом главном сечении индикатрисы и т. д. (рис. 3).

Если имеем дело с одноосным кристаллом, то выбираем на экваториальном сечении индикатрисы любой вектор и, считая его осью индикатрисы, находим искомые точки на перпендикулярном к нему сечении. Наиболее удобно выбирать эти векторы в  $90^\circ$  один от другого и симметрично относительно основного диаметра, проходящего через проекцию оптической оси, так как в этом случае последовательности искомых точек для  $F$  одного и для  $90^\circ - F$  второго дополнительного сечения индикатрисы также симметричны относительно основного диаметра (рис. 4).

4. *Сопряженность стереофигур для  $F$  и  $90^\circ - F$ .* Линии стереофигур, пересекая основной круг, выходят за его пределы, т. е. имеют

свое продолжение на нижней полусфере стереографической проекции, где составляют также какую-то фигуру. При этом, если стереофигура верхней полусферы составлена для угла поворота никелей  $F_1$ , то стереофигура нижней полусферы тождественна на верхней полусфере стереофигуре для  $F_2 = 90^\circ - F_1$ , повернутой на  $180^\circ$  вокруг нормали к плоскости проекции.

Пусть при некотором значении  $i$  положение погасающего вектора определяется наклоном к себе или от себя на угол  $y_1$ , который для нижней полусферы должен быть больше  $90^\circ$  и меньше  $180^\circ$ . Чтобы нанести этот вектор на уже имеющуюся диаграмму внутри основного круга, нужно отложить от центра угол  $180^\circ - y_1$ , притом с обратным знаком по отношению к  $y_1$ . Подставляя это значение в общее уравнение стереофигур (1), найдем, что при этом меняют знак первый член правой части и первое слагаемое числителей второго и третьего членов уравнения, а также второе слагаемое второго члена их знаменателей. Если же принять вместе с тем для  $i$  новое значение  $i_2 = i_1 + 180^\circ$ , то изменим знак второго слагаемого числителей и восстановим первоначальную форму второго члена знаменателей.

Таким образом, при  $i_2 = i_1 + 180^\circ$  стереофигура нижней полусферы, спроектированная на верхнюю полусферу, меняет только свой знак, т. е. получаем  $2F_1 = -2F_2$  и  $F_1 + F_2 = 90^\circ$ , так как  $\text{tg}2F_1 = -\text{tg}(180^\circ - 2F_1)$  и  $\text{tg}2F_1 = -\text{tg}2F_2$ , откуда  $180^\circ - 2F_1 = 2F_2$ . Следовательно, построив обычным путем фигуру для  $F_2 = 90^\circ - F_1$ , и повернув ее на  $180^\circ$  вокруг нормали к плоскости проекции, будем иметь проекцию нижней половины стереофигуры для  $F_1$ , причем линии одной из фигур служат продолжением линий другой из них.

Известия VII, № 6—6

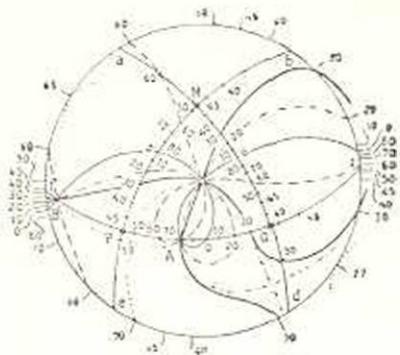


Рис. 3. Теоретическое построение стереофигур двуосного кристалла.

Сопряженную стереофигуру можно строить также и сразу, повернув предварительно диаграмму на  $180^\circ$ , т. е. откладывая каждый раз углы не  $i$ , а  $180^\circ + i$ .

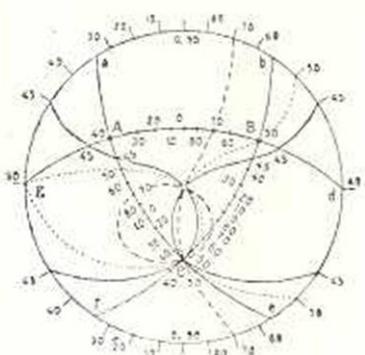


Рис. 4. Теоретическое построение стереофигур одноосного кристалла.

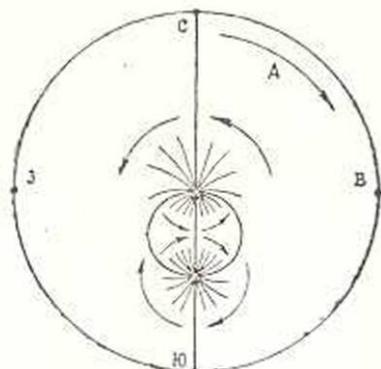


Рис. 5. Соотношение поворотов ветвей стереофигур в зависимости от направления поворотов николей.

5. *Перемещение ветвей стереофигур при поворачивании николей.* Из предыдущего описания общих особенностей стереофигур вытекает закономерность перемещения их линий при поворачивании николей микроскопа. Закономерность эта, в схематическом виде показанная на рис. 5, сводится к тому, что в центре диаграммы линии стереофигур поворачиваются всегда в направлении, обратном направлению поворота николей, а в проекциях оптических осей в том же направлении, в каком происходит поворот николей.

### Стереофигуры одноосных кристаллов

1. *Косые разрезы (рис. 6 и 7).* У косых разрезов одноосных кристаллов  $v = 0$  и  $\varphi = 90^\circ$ . Общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$\operatorname{tg} F = \frac{\sin i \operatorname{ctg} \psi}{\cos y \cos i \operatorname{ctg} \psi - \sin y}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} 2F = \frac{2 \sin i \operatorname{ctg} \psi (\cos y \cos i \operatorname{ctg} \psi - \sin y)}{(\cos y \cos i \operatorname{ctg} \psi - \sin y)^2 - \sin^2 i \operatorname{ctg}^2 \psi}. \quad (8)$$

При  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  должно быть  $2 \sin i \operatorname{ctg} \psi (\cos y \cos i \operatorname{ctg} \psi - \sin y) = 0$   
или  $2 \sin i (\cos i \operatorname{ctg} \psi - \operatorname{tg} y) = 0$ . (9)

Первое решение здесь  $i = 0$  и  $i = 180^\circ$ , т. е. это диаметр, проходящий через проекцию оптической оси, так как в этом случае  $\operatorname{tg} 2F = 0$  при любом значении  $F$ . Вторым решением является уравнение  $\cos i \operatorname{ctg} \psi - \operatorname{tg} y = 0$  или  $\operatorname{tg} y = \cos i \operatorname{ctg} \psi$ . Проверив это уравнение, найдем, что ему отвечает замкнутая кривая, проходящая через

центр диаграммы и через проекцию оптической оси, так как эта кривая не имеет точек на основном круге (для этого должно быть  $\operatorname{tg} \psi = \infty$ , между тем  $\operatorname{cotg} \psi$  представляет конечную величину). Эта замкнутая кривая симметрична относительно диаметра первого решения и пересекает его под углом в  $90^\circ$ . При увеличении значения  $\psi$  средний диаметр этой кривой уменьшается и наоборот.

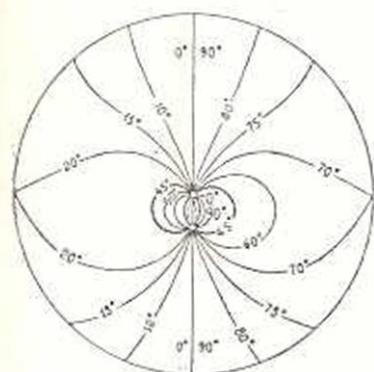


Рис. 6. Полная стереофигура одноосного кристалла для косо́го разреза при  $\psi = 70^\circ$ .

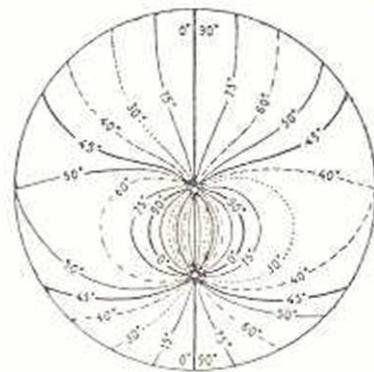


Рис. 7. Полная стереофигура одноосного кристалла для косо́го разреза при  $\psi = 40^\circ$ .

Таким образом, при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  стереофигура представляет сочетание диаметра и замкнутой кривой, т. е. состоит из двух ветвей.

Выясним теперь тип фигуры, когда  $0 < F < 90^\circ$ . В этом случае уравнение (8) приводится к сложному виду уравнения четвертой степени, не удобному для общего анализа. Поэтому исследование проведем косвенным путем. Найдем те значения  $i$ , при которых стереофигура имеет точки на основном круге. Подставив в уравнение (8)  $y = 90^\circ$ , получим новое уравнение

$$\operatorname{tg} 2F = \frac{-2 \sin i \operatorname{cotg} \psi}{1 - \sin^2 i \operatorname{cotg}^2 \psi}, \quad (10)$$

откуда

$$\sin i_1 = \operatorname{cotg} F \operatorname{tg} \psi \quad \text{и} \quad \sin i_2 = \frac{1}{\operatorname{tg} F \operatorname{tg} \psi} = -\operatorname{cotg} (90^\circ - F) \operatorname{tg} \psi; \quad (11, 12)$$

кроме того, имеем  $i_3 = 180^\circ - i_1$  и  $i_4 = 180^\circ - i_2$ . Следовательно в общем случае стереофигура состоит из двух разомкнутых кривых, пересекающихся в центре и в проекциях оптической оси.

При  $F = 45^\circ$  уравнение (8) приводит к условию  $(\cos y \cos i \operatorname{cotg} \psi - \sin y)^2 - \sin^2 i \operatorname{cotg}^2 \psi = 0$ , показывающему, что стереофигура определяется двумя уравнениями  $(\cos y \cos i \operatorname{cotg} \psi - \sin y) \pm \sin i \operatorname{cotg} \psi = 0$ , т. е. состоит из двух кривых, которые при  $\psi > 45^\circ$  замкнуты, так как не имеют точек на основном круге. При  $\psi = 45^\circ$  кривые имеют по одной точке на основном круге, причем должно быть  $i = \pm 90^\circ$ . При  $\psi < 45^\circ$  каждая из кривых становится разомкнутой и имеет на

основном круге по две точки, для которых  $\sin i = \pm \operatorname{tg} \psi$ . Очевидно, что кривые эти зеркально симметричны относительно основного диаметра стереофигуры.

Когда  $F = 0$ , имеем, по уравнению (12),  $i_2 = 0$  и  $i_4 = 180^\circ$ ; уравнение же (11) не имеет решений. Следовательно стереофигура состоит из диаметра и замкнутой кривой, как уже было показано выше. По мере увеличения угла  $F$ , значение  $i_2$  по уравнению (12) тоже увеличивается, а  $i_4$  уменьшается, т. е. концы диаметра, превратившегося в изогнутую линию, последовательно сближаются друг с другом. Замкнутая же кривая выпучивается в сторону, противоположную той, где происходит сближение концов разомкнутой линии.

Если значение  $F$  становится равным  $90^\circ - \psi$ , то по уравнению (12)  $\sin i_2 = 1$ , следовательно  $i_2 = i_4 = 90^\circ$ , т. е. кривая из разомкнутой становится замкнутой с одной точкой на основном круге. При дальнейшем увеличении значения  $F$ , кривая отрывается от основного круга и последовательно стягивается к основному диаметру.

Изменение же замкнутой кривой начальной стереофигуры происходит при увеличении  $F$  в обратном направлении. При  $F = \psi$  она, по уравнению (11), достигает основного круга и получает на нем точку, для которой  $i_1 = i_3 = 90^\circ$ . При дальнейшем увеличении  $F$  кривая становится уже разомкнутой, и ее концы последовательно раздвигаются, приближаясь к концам основного диаметра.

Превращение разомкнутых кривых в замкнутые и наоборот происходит одновременно только при  $\psi = 45^\circ$ . При других значениях  $\psi$  это превращение кривых происходит разновременно, когда  $F = \psi$  и  $F = 90^\circ - \psi$ , и интервал между этими значениями увеличивается с увеличением разности  $\psi - 45^\circ$  или  $45^\circ - \psi$ . В пределах этого интервала стереофигура состоит в общем случае всегда из двух асимметричных разомкнутых кривых. Симметричными они становятся только при  $F = 45^\circ$ .

2. *Разрез параллельно оптической оси (рис. 8).* В таком разрезе  $\psi = 0$ , а для  $\varphi$  можно принять любое значение. Чтобы не изменять уравнений, принимаем  $\varphi = 90^\circ$ . При этих условиях уравнение (8) получает вид

$$\operatorname{tg} 2F = \frac{2 \operatorname{tg} i \cos y}{\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} F = \frac{\operatorname{tg} i}{\cos y} \quad (13)$$

При  $F = 0$  должно быть или  $\operatorname{tg} i \cos y = 0$  или  $\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i = \infty$ . В первом случае имеем  $i = 0$  для произвольных значений  $y$ , и  $y = 90^\circ$  для произвольных значений  $i$ , т. е. это сочетание основного круга с основным диаметром, проходящим через проекцию оптической оси. Во втором случае получаем  $\operatorname{tg} i = \infty$  и  $i = 90^\circ$ , т. е. в состав стереофигуры входит и второй диаметр, перпендикулярный к первому.

Если  $F \neq 0$ , то из уравнения (13) выводим

$$\cos y_1 = \operatorname{tg} i \operatorname{ctg} F \quad \text{и} \quad \cos y_2 = -\operatorname{tg} i \operatorname{tg} F \quad (14, 15)$$

т. е. стереофигура имеет две отдельные кривые, пересекающие основной круг только при  $i=0$  и независимо от значений  $F$ . Кривые эти S-образные, так как должны пересекаться в центре под  $90^\circ$ .

При изменении значения  $F$  изогнутость одной из кривых усиливается, а другая становится более пологой. В пределе, при  $F=0$  и  $F=90^\circ$ , первая из них совмещается с основным кругом и вторым диаметром, а другая — с основным диаметром.

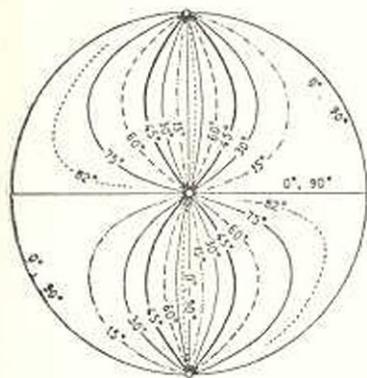


Рис. 8. Полная стереофигура одноосного кристалла для разреза, параллельного оптической оси.

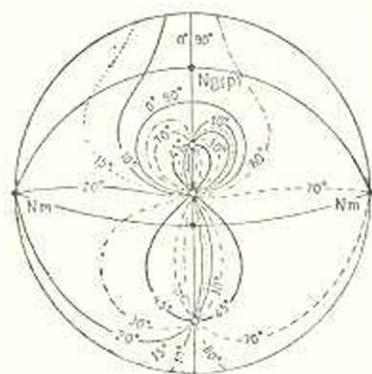


Рис. 9. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси  $Nm$ .  $\varphi=90^\circ$ ,  $\psi=70^\circ$ ,  $v=50^\circ$ ,  $\psi+v > 90^\circ$ .

Полную стереофигуру этого разреза можно вывести из стереофигуры косого разреза (рис. 6 и 7), если подтянуть проекцию оптической оси на основной круг последовательным уменьшением значения  $\psi$ .

3. *Разрез перпендикулярно к оптической оси.* В этом случае  $\varphi=90^\circ$  и  $\psi=90^\circ$ , поэтому уравнения (1) и (8) получают вид  $\operatorname{tg} 2F=0$ , т. е. удовлетворяются при  $F=0$  и  $F=90^\circ$  любыми значениями переменных  $i$  и  $u$ . Вместе с тем уравнение не имеет решений, если  $F$  не равно нулю. При  $F=0$  элементарная стереофигура состоит лишь из основного диаметра, так как должна содержать только одну «кривую», как это было показано выше, в общей части. Замкнутая же кривая стереофигур косых разрезов, уменьшаясь с увеличением угла  $\psi$ , превращается здесь в точку.

Так как в подобных разрезах можно принимать для любого положения шлифа  $i=0$ , то полная стереофигура при  $F=0$  превращается в сплошное темное пятно.

### Стереофигуры двуосных кристаллов

Аналитическое исследование стереофигур двуосных кристаллов дано ниже только для некоторых, более простых разрезов и условий. В остальных же случаях ограничиваемся материалами графического построения фигур на основе общей их теории.

1. Разрез параллельно оси  $N_m$ . Оптические оси проектируются по разные стороны от центра диаграммы (рис. 9). В таких разрезах угол  $\varphi = 90^\circ$ . Подставляя это значение в уравнение (1), получим

$$2F = 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tgi}}{\operatorname{cosy}} - \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{siny} \operatorname{sini}}{(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi + v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}} - \operatorname{arctg} \frac{-\operatorname{siny} \operatorname{sini}}{(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi - v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}}. \quad (16)$$

При  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  условие решаемости этого уравнения имеет следующий вид:

$$2 \operatorname{cosy} \operatorname{tgi} \{[(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi + v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}] \times \\ \times [(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi - v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}] - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{sin}^2 i\} + \\ + [(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \{\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)\} - \\ - 2 \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}] (\operatorname{cos}^2 y - \operatorname{tg}^2 i) \operatorname{siny} \operatorname{sini} = 0. \quad (17)$$

Первое решение этого уравнения  $\operatorname{sini} = 0$  и  $i = 0$ , а соответствующая часть стереофигуры представляет основной диаметр. Освободив уравнение (17) от общего множителя  $\operatorname{sini}$  и преобразовав его, получаем уравнение второй части стереофигуры

$$\operatorname{cosi} = \frac{\operatorname{tgy} [\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)]}{2 \operatorname{cotg}(\psi + v) \operatorname{cotg}(\psi - v)} = \frac{\operatorname{tgy} \operatorname{sin} 2\psi}{\operatorname{cos} 2\psi + \operatorname{cos} 2v}. \quad (18)$$

Кривая, соответствующая уравнению (18), не имеет точек на основном круге. Она симметрична относительно основного диаметра и пересекает его в двух точках, в центре и в расстоянии от центра  $y = \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{cotg}(\psi + v) \operatorname{cotg}(\psi - v)}{\operatorname{cotg}(\psi + v) + \operatorname{cotg}(\psi - v)}$ , причем проходит здесь между биссектрисой и оптической осью, более близкой к центру.

Определим теперь стереофигуру для  $F = 45^\circ$ . В этом случае условие решаемости уравнения (16) выражается уравнением

$$(\operatorname{cos}^2 y - \operatorname{tg}^2 i) \{[(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi + v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}] \times \\ \times [(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{cotg}(\psi - v) - \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}] - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{sin}^2 i\} = 0. \quad (19)$$

Подставляя в это уравнение  $i = 0$ , найдем, что кривая пересекает основной диаметр в точках  $\operatorname{tgy} = \operatorname{cotg}(\psi + v)$  и  $\operatorname{tgy} = \operatorname{cotg}(\psi - v)$ , т. е. в проекциях оптических осей. Подставляя же  $y = 0$ , получим, что  $\operatorname{tg}^2 i = 1$ , т. е.  $i = \pm 45^\circ$ , следовательно кривая дважды проходит через центр. Наконец, подставляя  $y = 90^\circ$  и освобождая уравнение от общего множителя  $\operatorname{sini}$ , учтенного уже выше, найдем, что должно было бы быть

$$\operatorname{cotg}(\psi + v) \operatorname{cotg}(\psi - v) = \operatorname{cosec}^2 i, \quad (20)$$

что невозможно, так как левая часть этого выражения отрицательна, поскольку  $\psi + v > 90^\circ$ . Поэтому кривая не имеет точек на основном

круге и представляет „восьмерку“, симметричную относительно основного диаметра.

Проверим еще стереофигуры при  $0 < F < 90^\circ$ . Определим, в каких точках они пересекают основной круг. Подставляя в уравнение (16)  $y = 90^\circ$ , получаем:

$$2F = 2\arctg \infty - \arctg \frac{-1}{\sin^2 i \cotg(\psi + \nu)} - \arctg \frac{-1}{\sin^2 i \cotg(\psi - \nu)}. \quad (21)$$

$$\text{или} \quad \operatorname{tg} 2F = \frac{\sin^2 i [\cotg(\psi + \nu) + \cotg(\psi - \nu)]}{\sin^4 i \cotg(\psi + \nu) \cotg(\psi - \nu) - 1}. \quad (22)$$

Одно из возможных решений мы уже имели, а именно,  $i = 0$  для стереофигуры при  $F = 0$ . При  $i = \pm 90^\circ$  получаем  $\operatorname{tg} 2F = \pm \operatorname{tg} 2\psi$ , следовательно при  $F = \psi$  и  $F = 90^\circ - \psi$  искомая точка стереофигуры на основном круге находится на его пересечении с диаметром, перпендикулярным к основному диаметру. Для остальных значений  $F$  уравнение приводится к виду

$$\sin^2 i = \frac{\cotg(\psi + \nu) + \cotg(\psi - \nu)}{2\cotg(\psi + \nu) \cotg(\psi - \nu) \operatorname{tg} 2F} \pm \sqrt{\frac{[\cotg(\psi + \nu) + \cotg(\psi - \nu)]^2 + 4\cotg(\psi + \nu) \cotg(\psi - \nu) \operatorname{tg}^2 2F}{2\cotg(\psi + \nu) \cotg(\psi - \nu) \operatorname{tg} 2F}}, \quad (23)$$

дающему только два решения:  $i_1$  и  $i_2 = 180^\circ - i_1$ . Уравнение это слишком сложное для общего анализа, поэтому обзор последовательности изменения стереофигур проведем по материалам графического построения стереофигур (рис. 9). За исходное положение примем фигуру „восьмерки“, получающуюся при  $F = 45^\circ$ . При изменении  $F$  от  $45^\circ$  до 0 или до  $90^\circ$  восьмерка теряет симметричность. Ее меньшая часть вытягивается в сторону замкнутой кривой, уподобляясь последовательно контуру замкнутой кривой, и при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  совмещается с одной из ее половинок и с отрезком основного диаметра внутри замкнутой кривой. Вторая же, большая часть восьмерки вытягивается в противоположную сторону, к основному кругу, и при  $F = \psi$  и  $F = 90^\circ - \psi$  соприкасается с основным кругом в точке на диаметре, перпендикулярном к основному, причем ветви стереофигуры составляют здесь угол в  $90^\circ$ . При дальнейшем изменении  $F$ , от  $F = \psi$  до  $F = 90^\circ$  или от  $F = 90^\circ - \psi$  до  $F = 0$ , стереофигура разрывается в точке соприкосновения с основным кругом, и затем ее концы раздвигаются от этой точки к концам основного диаметра, пересекаясь с основным кругом в точках  $i$  и  $180^\circ - i$ . Такая стереофигура состоит уже из одной разомкнутой и прихотливо изгибающейся кривой, образующей петлю внутри замкнутой кривой фигуры  $F = 0$ . Наконец, когда  $F = 0$  или  $F = 90^\circ$ , разомкнувшиеся ветви стереофигуры совмещаются на одной стороне диаграммы с основным диаметром, а на другой — со второй половиной замкнутой кривой и с отрезком основного диаметра

между этой кривой и основным кругом, причем возникает фигура, состоящая из основного круга и замкнутой кривой.

2. Разрез параллельно оси  $N_m$  и одной из оптических осей (рис. 10). Стереофигуры этого разреза такие же, по типу, как и в предыдущем случае, и их можно получить, если у „восьмерки“ на рис. 9 привести оптическую ось (более удаленную от центра) на основной круг. Главные стереофигуры (при  $F = 0$ ,  $F = 90^\circ$  и  $F = 45^\circ$ ) такие же, т. е. это сочетание основного диаметра с замкнутой кривой и восьмерка. Существенная разница в том, что восьмерка имеет одну точку на основном круге в проекции оптической оси. Изменение стереофигур при изменении значения  $F$  происходит так же, как это было установлено в предыдущем случае. Все главные уравнения существенно изменяются, так как здесь  $\psi - \nu = 0$ .

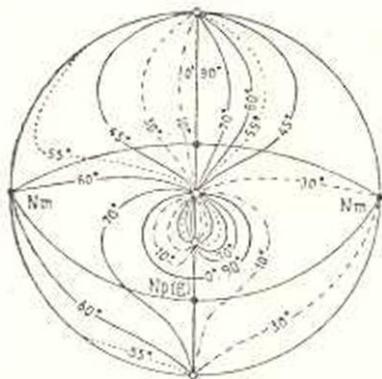


Рис. 10. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси  $N_m$ .  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 30^\circ$ ,  $\nu = 30^\circ$ ,  $\psi - \nu = 0$ .

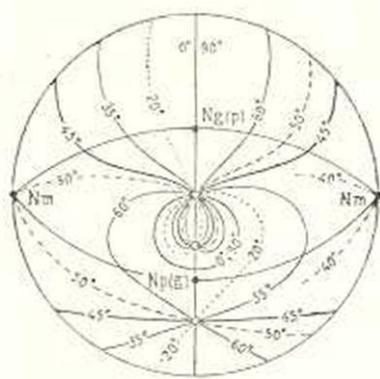


Рис. 11. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси  $N_m$ .  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 40^\circ$ ,  $\nu = 20^\circ$ .

3. Разрез параллельно оси  $N_m$ . Обе оптические оси проектируются по одну сторону от центра диаграммы (рис. 11). Стереофигуры этого разреза можно получить из фигур предыдущего случая, если выдвинуть оптическую ось с основного круга за его пределы. При этом данная оптическая ось вместе с проходящими через нее ветвями стереофигур появится на противоположной стороне диаграммы. Во всем остальном стереофигуры и порядок их изменения такие же, как и в случае рис. 9 и 10. Уравнения имеют, в общем, тот же вид, как и в случае стереофигуры, представленной на рис. 9.

4. Разрез перпендикулярно биссектрисе (рис. 12). В этом случае стереофигуры уже существенно иные, так как здесь, кроме  $\varphi = 90^\circ$ , также и  $\psi = 90^\circ$ . Общее уравнение получает вид

$$2F = 2\arctg \frac{\operatorname{tgi}}{\operatorname{cosy}} + \arctg \frac{-\operatorname{siny} \operatorname{sini}}{(1 - \operatorname{sin}^2 y \operatorname{cos}^2 i) \operatorname{tgv} + \operatorname{siny} \operatorname{cosy} \operatorname{cosi}} +$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{\sin y \sin i}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \operatorname{tg} v - \sin y \cos y \cos i} \quad (24)$$

Условием решаемости этого уравнения при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  может служить уравнение (17), если в нем подставить  $\psi = 90^\circ$ . Первым решением будет  $i = 0$ , т. е. это — основной диаметр. Второе решение, по уравнению (18) при  $\psi = 90^\circ$ , дает  $i = 90^\circ$  — второй диаметр, перпендикулярный к основному. Наконец, подставив в уравнение (17)  $\psi = 90^\circ$  и  $y = 90^\circ$ , найдем, что оно удовлетворяется при любых значениях  $i$ , следовательно в состав стереофигуры входит и основной круг.

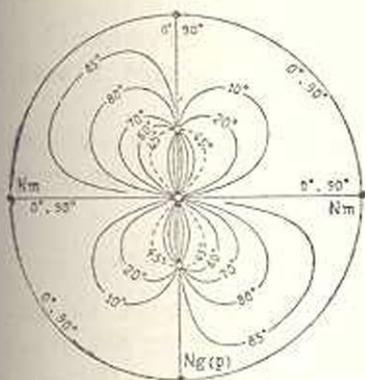


Рис. 12. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно оси  $N_m$  и перпендикулярно к биссектрисе.  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $v = 40^\circ$ .

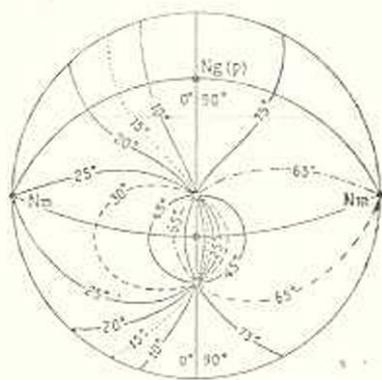


Рис. 13. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза перпендикулярно к оптической оси.  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 65^\circ$ ,  $v = 25^\circ$ ,  $\psi + v = 90^\circ$ .

При  $F = 45^\circ$  находим, по уравнению (19) и (20), подставив  $\psi = 90^\circ$  и  $y = 90^\circ$ , что кривая не имеет точек на основном круге и представляет симметричную «восьмерку». Далее, пользуясь уравнением (22) и подставляя в него  $\psi = 90^\circ$ , получим, что при  $0 < F < 90^\circ$  стереофигуры не имеют точек на основном круге и представляют асимметричные восьмерки. При изменении  $F$  от  $45^\circ$  до  $0$  и до  $90^\circ$ , восьмерка раздувается по одной или по другой диагонали и в пределе сливается с основным кругом и с двумя диаметрами.

5. Разрез перпендикулярно к оптической оси (рис. 13). У таких разрезов  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi + v = 90^\circ$ ,  $\psi - v = 90^\circ - 2v$ . Для анализа можно пользоваться уравнениями, выведенными выше для стереофигур на рис. 9. Подставив в уравнение (17) новые значения переменных, найдем, что при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  стереофигура состоит только из основного диаметра, так как решение этого уравнения  $i = 0$ . По уравнению же (18) найдем, что при новых значениях переменных оно получает вид  $2 \cos i = \operatorname{tg} y \operatorname{tg} 90^\circ$  и может иметь решение только при  $y = 0$ , т. е. это — точка в центре, в каковую превращается замкнутая кривая уравнения (18). Для  $F = 45^\circ$  уравнение (19) при новых условиях дает

$$(\cos^2 y - \operatorname{tg}^2 i) \{[(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \operatorname{tg}^2 v - \sin y \cos y \cos i] \sin y \cos y \cos i - \sin^2 y \sin^2 i\} = 0 \quad (25)$$

и после преобразования приводится к виду  $\operatorname{tgy} = \cos i \operatorname{tg} 2v$ , т. е. представляет замкнутую кривую.

Сравнивая уравнения стереофигур данного разреза при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  с уравнениями стереофигур косоугольного разреза одноосного кристалла (уравнение 9 и выведенные из него), увидим, что они полностью совпадают. Таким образом, при  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$  стереофигура двуосного кристалла представлена одной частью стереофигуры одноосного кристалла (основным диаметром), а при  $F = 45^\circ$  — другой ее частью, замкнутой кривой, которая в точности совмещается с такой же кривой одноосного кристалла. При этом значение  $F$  одноосного кристалла равно  $2F$  двуосного.

Подставив в общую форму уравнения (16) при  $\varphi = 90^\circ$  дополнительные условия данного разреза и кроме того  $y = 90^\circ$ , получим уравнение

$$\sin i = -\operatorname{tg} 2F \cotg 2v = \operatorname{tg} 2F \cotg (180^\circ - 2v), \quad (26)$$

показывающее, что стереофигура может иметь точки на основном круге только при  $2F \leq 2v$  или  $2F > 180^\circ - 2v$ , т. е. при  $F \leq v$  или  $F > 90^\circ - v$ , и в обоих случаях может быть лишь  $i$  и  $180^\circ - i$ , а значит, только две точки и в вместе с тем только одна кривая, как это уже было выяснено выше. Соответствующая фигура тождественна одной части фигуры одноосного кристалла при том условии, что  $F$  одноосного кристалла равно  $2F$  двуосного.

При  $F = 0$  фигура представлена основным диаметром. При  $0 < F < v$  — это разомкнутая кривая. При  $F = v$  концы кривой смыкаются на диаметре, перпендикулярном к основному. Для  $45^\circ > F > v$  фигура представляет асимметричную замкнутую кривую, которая становится симметричной при  $F = 45^\circ$ . Дальнейшее изменение происходит в обратном порядке.

6. *Разрез перпендикулярно к оптической оси при  $2v = 90^\circ$  (рис. 14).* В этом случае  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $\psi + v = 90^\circ$  и  $\psi - v = 0$ . Общее уравнение стереофигур (1) получает вид

$$2F = \arctg \frac{\operatorname{tg} i}{\cos y} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} 2F = \frac{\operatorname{tg} i}{\cos y}. \quad (27)$$

Сравнивая его с уравнением (13) для разреза одноосного кристалла параллельно его оптической оси, можно установить, что стереофигуры этих разрезов геометрически тождественны, а математически отличаются тем, что, во-первых, у двуосного кристалла стереофигура содержит только одну кривую, и, во-вторых, тем, что  $F$  одноосного кристалла, для тождественных фигур, равно  $2F$  двуосного.

7. *Разрез параллельно плоскости оптических осей (рис. 15 и 16).* Здесь  $\varphi = 0$ , а для  $\psi$  можно принять любое значение. Для упро-

щения уравнений лучше принять  $\psi = 0$ . Общее уравнение стереофигур (1) приводится к виду

$$2F = 2\text{arctg} \frac{\text{tg } i}{\cos y} - \text{arctg} \frac{\cos y}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \cotg v - \sin^2 y \sin i \cos i} + \\ + \text{arctg} \frac{\cos y}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \cotg v + \sin^2 y \sin i \cos i} \quad (28)$$

Когда  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$ , уравнение удовлетворяется: при  $y = 90^\circ$  любыми значениями  $i$ ; при  $i = 0$  и  $i = 90^\circ$  — любыми значениями  $y$ . Поэтому стереофигура состоит из основного круга и двух диаметров, проходящих через проекции осей индикатрисы.

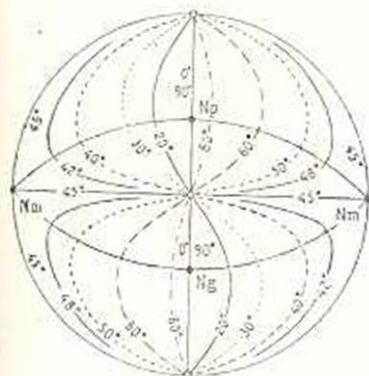


Рис. 14. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза перпендикулярно к оптической оси.  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ$ ,  $v = 45^\circ$ ,  $\psi + v = 90^\circ$ ,  $\psi - v = 0$ .

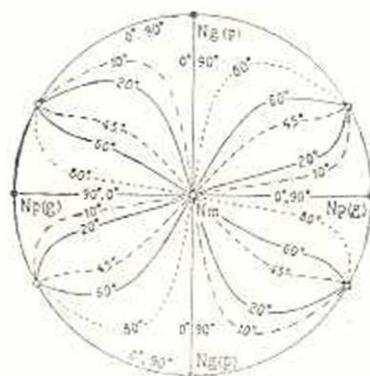


Рис. 15. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно плоскости оптических осей.  $2v < 90^\circ$ .

При  $0 < F < 90^\circ$  и  $y = 90^\circ$  уравнение (28) получает решение только тогда, когда оно приводится к неопределенности, а это может быть при  $i = \pm v$  или  $i = 90^\circ \pm v$ . Следовательно, стереофигура имеет четыре точки на основном круге в проекциях оптических осей и состоит из двух перекрещивающихся кривых. При  $F = 45^\circ$  уравнение (28) имеет условием решаемости выражение  $(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \cotg v \pm \sin^2 y \sin i \cos i = 0$ , которое показывает, что стереофигура состоит из двух симметричных кривых. При изменении  $F$  от  $F = 45^\circ$  до  $F = 0$  или  $F = 90^\circ$ , кривые изгибаются, стремясь вписаться в контур, образуемый основным кругом и диаметрами.

При  $2v = 90^\circ$  стереофигура отличается лишь тем, что в ее составе фигура, соответствующая  $F = 45^\circ$ , представлена прямоугольным крестом двух диаметров, проходящих через проекции оптических осей.

8. Разрез параллельно одной из биссектрис (рис. 17). Для таких разрезов имеется только одно ограничивающее условие,  $\psi = 90^\circ$ , поэтому математический анализ очень усложняется. Общее уравнение (1) приводится к виду

$$2F = 2\text{arctg} \frac{\text{tg } i}{\cos y} +$$

$$+ \text{arctg} \frac{\cos y \cos \varphi - \sin y \sin i \sin \varphi}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \text{tg} y + \sin y \cos i (\sin y \sin i \cos \varphi + \cos y \sin \varphi)}$$

$$- \text{arctg} \frac{\cos y \cos \varphi - \sin y \sin i \sin \varphi}{(1 - \sin^2 y \cos^2 i) \text{tg} y - \sin y \cos i (\sin y \sin i \cos \varphi + \cos y \sin \varphi)}. \quad (29)$$

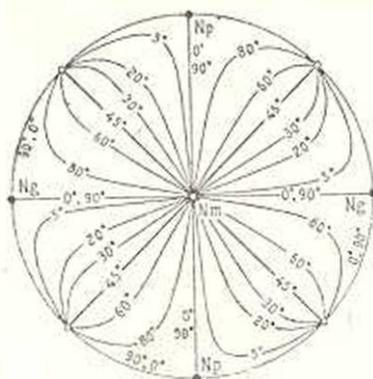


Рис. 16. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно плоскости оптических осей.  $2v = 90^\circ$ .

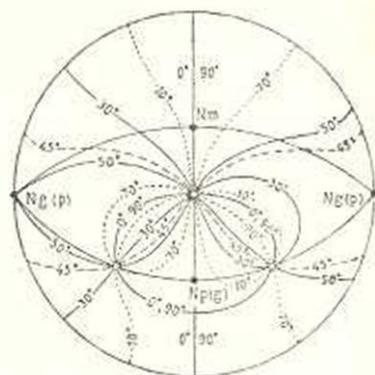


Рис. 17. Полная стереофигура двуосного кристалла для разреза параллельно биссектрисе.  $\varphi = 40^\circ$ ,  $\psi = 90^\circ$ ,  $v = 35^\circ$ .

Когда  $F = 0$  и  $F = 90^\circ$ , стереофигура состоит из диаметра и замкнутой кривой. Наличие диаметра доказывается, если в уравнение (29) подставить  $i = 90^\circ$ . При этом оно получает вид  $2F = 2\text{arctg} \infty$  и  $\text{tg} 2F = -\text{tg} 180^\circ = 0$  и удовлетворяется при всех значениях  $\varphi$  и  $y$ . Присутствие замкнутой кривой доказывается тем, что при дополнительном условии  $y = 90^\circ$  уравнение (29) приводится к виду

$$\text{tg} 2F = \frac{2 \cos i \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 i \text{tg}^2 v - \cos^2 i \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = 0, \quad (30)$$

где решение  $\cos i = 0$  и  $i = 90^\circ$  уже получено выше (диаметр в составе стереофигуры). После исключения множителя  $\cos i$  оставшаяся часть уже не может быть равна нулю ни при каких значениях  $i$  и  $\varphi$ . Следовательно, соответствующая часть стереофигуры должна быть замкнутой кривой.

Не останавливаясь на математическом анализе последовательности изменения стереофигур, укажем, что при изменении  $F$  от  $0$  до  $90^\circ$  фигура диаметра и замкнутой кривой разрывается в точке их пересечения, и стереофигура превращается в сложную кривую, с одной петлей, и пересекается с основным кругом в точках  $i$  и  $180^\circ - i$ . При  $F = v$  и  $F = 90^\circ - v$  стереофигура получает еще третью точку на основном круге,  $i = \pm 90^\circ$ , на противоположной стороне диаграммы, и

в этом случае фигура состоит уже из двух кривых, сходящихся в этой, третьей точке. В интервале же между  $F = v$  и  $F = 90^\circ - v$  стереофигура состоит из двух кривых. Например, при  $F = 45^\circ$  и  $v = 90^\circ$  уравнение (29) приводится к виду  $\sin^2 i \operatorname{tg}^2 v - \cos^2 i \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 0$ ,

откуда выводим, что  $\sin i = \pm \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 v + \cos^2 \varphi}}$ , т. е. что имеется четыре решения:  $\pm i$  и  $\pm(180^\circ - i)$ .

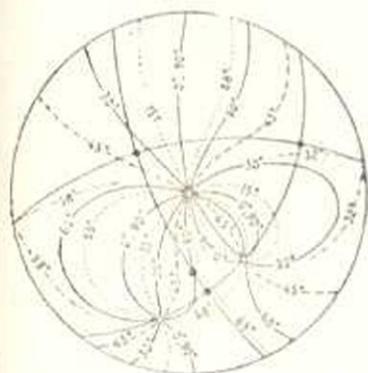


Рис. 18. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для  $2v = 50^\circ$ ,  $\varphi = 40^\circ$ ,  $\psi = 55^\circ$ .

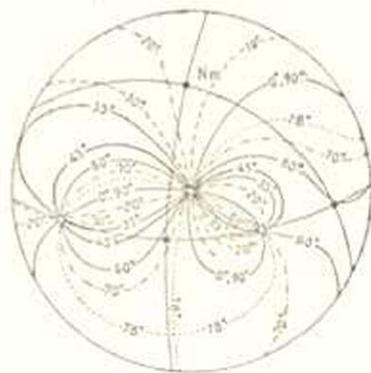


Рис. 19. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для  $2v = 110^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\psi = 75^\circ$ .

9. *Косые разрезы (рис. 18, 19 и 20).* В качестве примера косых разрезов даны полные стереофигуры трех кристаллов: со средним, большим и малым углом оптических осей. Математический анализ для них почти невозможен, так как в стереофигурах не имеется простых форм. Поэтому мы ограничимся лишь сравнением графически построенных фигур со стереофигурой предыдущего случая (рис. 17). Как там, так и здесь, одна из частных стереофигур содержит закинутую кривую, но она асимметричная и сочетается не с диаметром, а с асимметричной же кривой. На рис. 18 такая фигура возникает при  $F = 68^\circ$ , на рис. 19 — при  $F = 78^\circ$ , а на рис. 20 — должна быть при  $45^\circ < F < 60^\circ$ .

Затем, и здесь стереофигуры при изменении угла  $F$  последовательно поворачиваются и превращаются из «восьмерок» в однопетельчатые кривые и в сочетание двух кривых. Обращает внимание крайняя прихотливость кривых, делающая невозможным их аналитическое исследование.

### Теоретическое построение стереофигур

Примеры теоретического построения стереофигур даны на рис. 3 и 4, где на основном круге и на проекциях главных сечений инди-

катрисы показаны точки их пересечения со стереофигурами разных значений  $F$ .

1. *Двуосные кристаллы (рис. 3).* Проведение кривых линий стереофигур начинаем со сферического треугольника  $MPG$ , определяемого

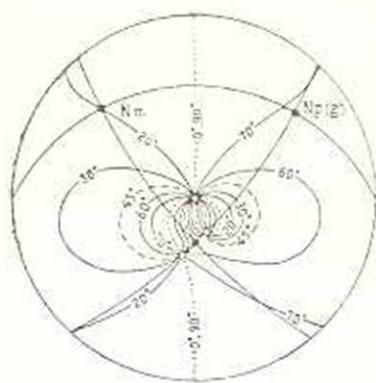


Рис. 20. Полная стереофигура косого разреза двуосного кристалла для  $2v = 20^\circ$ ,  $\varphi = 70^\circ$ ,  $\psi = 70^\circ$ .

проекциями осей индикатрисы, внутри которого лежит всегда и центр диаграммы. На контуре этого треугольника расположены обычно четыре и как исключение — две точки для каждого значения  $F$ , причем одной из них служит проекция оптической оси. Так как внутри треугольника кривые обязательно проходят через центр (и если кривых две, то они пересекаются под  $90^\circ$ ), то можно сразу же соединить накрест имеющиеся четыре точки, а затем проследить их продолжение в смежных контурах. После того, как построена первая стереофигура, построение остальных уже не пред-

ставляет труда, так как они должны поворачиваться в центре в направлении, обратном повороту николей.

Для примера построим стереофигуру для  $F = 20^\circ$ . Соединяем накрест точки внутри треугольника  $MPG$ , причем продолжение кривых входит из этого треугольника внутрь смежных контуров:  $MbcG$ ,  $aMPf$  и  $PGde$ . В первом из них имеется только одна свободная точка для  $F = 20^\circ$ , причем на дуге  $bc$ , поэтому протягиваем кривую к ней. На втором контуре тоже только одна свободная точка для  $F = 20^\circ$ , это — проекция оптической оси  $B$ . Проведя кривую через эту точку  $B$ , входим внутрь контура  $Pei$ , где свободная точка имеется для  $F = 20^\circ$  только на основном круге. В третьем же контуре,  $PGde$ , свободных точек для  $F = 20^\circ$  нет, поэтому вошедшие туда концы кривых соединяем друг с другом.

Так же можно построить стереофигуры и для других значений угла  $F$ . Не приводя следующих примеров такого построения, укажем лишь некоторые случаи, когда проведение линий может показаться затруднительным. Так, при  $F = 45^\circ$  из срединного треугольника  $MPG$  две линии войдут внутрь контура  $MbcG$ , на котором имеются две свободные точки. Обращаясь к смежным контурам  $MaB$  и  $cdG$ , найдем и в них по одной свободной точке на дугах  $ab$  и  $cd$ . Так как ни одна из точек не должна оставаться неиспользованной и так как пересечение кривых внутри контура  $MbcG$  невозможно под  $90^\circ$ , то кривую, проходящую близ оси  $M$ , соединяем с точкой  $F = 45^\circ$  на дуге  $ab$ , а вторую кривую — с точкой на дуге  $cd$ .

Другой сложный случай имеем в контуре PGde для  $F = 30^\circ$ . Сюда из срединного треугольника входят две кривые, и на контуре PGde имеются две свободные точки для  $F = 30^\circ$ . Соединить эти точки можно либо накрест, либо «параллельно». Крестообразное пересечение принимаем только тогда, когда оно происходит под углом почти в  $90^\circ$  (на рис. 3 жирные линии для «параллельного» соединения линий и пунктир «тире — две точки» — для крестообразного). Объяснение кажущейся неопределенности этого случая следующее. При значениях  $F = 27^\circ$  и  $F = 30^\circ$  кривые линии располагаются подобно гиперболам обычной конусокопической фигуры до и после разрыва креста, т. е. по его диагоналям. При поворачивании никелей от  $F = 27^\circ$  до  $F = 30^\circ$  гиперболы, показанные на рис. 3 точечным пунктиром, будут сближаться и при  $F \approx 28.5^\circ$  соединятся друг с другом, образуя крест, который при дальнейшем увеличении угла  $F$  разрывается и дает расходящиеся гиперболы.

Такие крестообразные пересечения уже были установлены выше, при описании стереофигур разных разрезов кристаллов, например, в виде сочетания замкнутой линии с диаметром. В данном случае, на рис. 3, замкнутой кривой является та, которая проходит через точки на дугах dG и cd. Недостающая часть замкнутой кривой находится за пределами основного круга. На противоположной стороне диаграммы к ней очень близка ветвь сопряженной стереофигуры для  $F = 60^\circ$ .

2. *Одноосные кристаллы (рис. 4).* Построение стереофигур одноосного кристалла производится по тому же принципу, как и для двuosного. Для образования срединного сферического треугольника наносим проекции плоскостей AC и BC, пересекающихся под  $90^\circ$  и проходящих через оптическую ось C. Таким образом, кристалл уподобляется двuosному, но с очень малым углом оптических осей. Проведение кривых начинаем с того значения  $F$ , для которого на контуре срединного треугольника ABC имеются четыре точки: по одной на каждой стороне треугольника и, кроме того, проекция оптической оси в вершине C. В частном случае может быть на контуре ABC только три точки, считая и проекцию оптической оси. В этом случае проекция оптической оси соединяется с центром непосредственно двумя кривыми, касательными в точке C к дугам AC и BC.

### З а к л ю ч е н и е

Теоретическое исследование метода «оптических кривых» Е. С. Федорова и тождественного ему вращательного варианта стереоконоскопического метода показывает, что соответствующие им стереофигуры отличаются, в общем, чрезвычайной сложностью. Поэтому такие стереофигуры трудно построить даже и тогда, когда уже имеется проекция главных элементов кристалла для данного его сечения, особенно, если оно косое. В тех же случаях, когда эти элементы неизвестны и их еще нужно найти, применение метода «оптических кривых» не обеспечивает получения положительного результата, ибо не-

возможно правильно построить прихотливо изгибающуюся кривую по небольшому числу точек (т. е. погасающих векторов), притом для сечения с неизвестной ориентировкой. Подбор же большого числа точек требует очень много времени и делает исследование очень трудоемким. Между тем для нормального варианта стереоконоскопического метода достаточно правильное построение первой стереофигуры возможно даже по нескольким точкам.

Это обстоятельство, на которое мы уже раньше обращали внимание, имело своим следствием то, что еще сам Е. С. Федоров отказался от метода «оптических кривых» и перешел к методу непосредственного отыскивания главных сечений индикатрисы.

Но, разработав вместе со своими учениками практическую сторону нового варианта метода, Е. С. Федоров не дал и для него полного теоретического обоснования. В связи с этим еще до сих пор нет соответствующей теоретической основы для способов отыскивания осей индикатрисы, особенно, первой по порядку работы, что, как известно, бывает сопряжено с некоторыми затруднениями. Отсутствие такой теоретической основы не удивительно, так как она могла быть составлена лишь на базе теории вращательного варианта стереоконоскопического метода; таковая же до сих пор не была разработана.

Теоретическое освещение и обоснование процедуры отыскивания осей индикатрисы, позволяющее находить их легко и быстро, будет изложено нами в специальной статье, после опубликования которой можно будет признать, что соответствующее теоретическое обоснование получила и практическая сторона федоровского метода.

Институт геологических наук  
АН Армянской ССР

Поступило 4 XI 1953

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Варданянц Л. А. Основы стереоконоскопического метода. Изд. АН Армянской ССР, 1947.
2. Варданянц Л. А. О стереоконоскопическом методе и его отношении к федоровскому методу. В сборнике «Универсальный столбик Федорова». Изд. АН СССР, 1953. См. также Известия АН Армянской ССР (естеств. науки), 1947, № 1.
3. Варданянц Л. А. Стереоконоскопический метод исследования минералов. ДАН СССР, т. 50, 1945, стр. 425—427.
4. Федоров Е. С. Универсальный метод и изучение полевых шпатов. Часть I. Методические приемы. В сборнике «Универсальный столбик Федорова». Изд. АН СССР, 1953, стр. 66—95.

#### Լ. Ա. Վարդանյանց

### Ե. Ս. ՖԵՐՈՎՐՈՎԻ «ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԿՈՐԵՐԻ» ԵՎ ՍՏԵՐԵՈԿՈՆՍԿՈՊԻԿ ՄԵԹՈՎԻ ՊՏՏԱԿԱՆ ՎԱՐԻԱՆՏԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆԸ

#### Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Հոդվածում շարադրվում է Ե. Ս. Ֆյոդորովի «օպտիկական կորերի» մեթոդի և նրա հետ համընկնող ստերեոկոնոսկոպիկ մեթոդի պատահան վարիանտի տեսությունը: Օպտիկական կորերի մեթոդը երևան է եկել ավելի

քան 50 տարի սրանից առաջ, բայց նրա համար Ս. Ս. Ֆյոդորովը սահմանել է միայն մի քանի նախնական էմպիրիկ ու տեսական դրույթներ, իսկ մեթոդի լրիվ տեսությունը մինչև վերջին ժամանակները մնում էր անհայտ: Այդ տեսության մշակումը հնարավոր դարձավ միմիայն այժմ, այն բանից հետո, երբ սահմանվեց ստերեոկոնստրուկտիվ մեթոդի ընդհանուր տեսությունը: Այդպիսի տեսության հիմք է ծառայում ստերեոկոնստրուկտիվ պատկերների ընդհանուր հավասարումը:

Հոդվածում արված են ստերեոպատկերների մանրամասն նկարագրությունը և մաթեմատիկական վերլուծությունը միառանցքանի ու երկառանցքանի բյուրեղների ախտային կտրվածքների շարքի համար, ինչպես նաև ստերեոպատկերների գրաֆիկ կառուցման եղանակները ամեն մի բյուրեղի կամայական կտրվածքի համար: Այդ եղանակով ապացուցված է, որ ստերեոպատկերները տարբերվում են նրանց կազմող կտրերի բարդությամբ, որոնք անպայման իրար հասում են գլխադրամայի կենտրոնում: Երկառանցքանի բյուրեղներն ընդհանուր դեպքում պետք է օպտիկական առանցքների պրոնեկցիաներում ունենան դարձյալ երկու նույնպիսի կետեր և դրա շնորհիվ կդառնան, ասես, եռառանցքանիներ: Այս հանդամանքը չափազանց դժվարացնում է ստերեոպատկերի կտրերի ճիշտ կառուցումը և օպտիկական կտրերի մեթոդը դորձնական տեսակետից դարձնում է սակավ պիտանի:

Ինչպես հայտնի է, Ֆյոդորովի մեթոդը, շնայած նրա հանրաճանաչվածությանն ու տարածվածությանը, մինչև այժմ լրիվ տեսություն չի ունեցել, և որպես նրա հիմնավորում են ծառայել զլխավորապես էմպիրիկ ստուգմամբ հաստատված տեսական մի քանի նկատարումներ միայն:

Հոդվածում շարադրված տեսությունը, հեղինակի մշակած ստերեոկոնստրուկտիվ մեթոդի նորմալ և պատական վարիանտների ալելի վաղ հրապարակված տեսության հետ մեկտեղ, վերացնում են այդ բացը և լիակատար տեսական հիմք են տալիս Ֆյոդորովի մեթոդի համար:

ГИДРАВЛИКА

Г. А. Амбарцумян

**Определение гидродинамического давления на плоский щит при истечении из-под щита**

Правильное определение величины гидродинамического усилия на плоский щит при истечении из-под него имеет большое практическое и теоретическое значение.

В технической литературе часто допускают, что давление на плоский щит при истечении из-под него подчиняется гидростатическому закону [1].

Как показано нами [2], допущение гидростатического закона распределения давления на плоский щит при истечении из-под него приводит к неправильным результатам.

Кулька [3] и другие проводили теоретические и лабораторные исследования с целью выявления действительных усилий на щит.

Теоретические формулы Кульки, Коха-Корстаньена и других для вычисления горизонтального давления на плоский щит при истечении из-под щита, как показали лабораторные исследования Н. К. Гиринского [4], дают сильно расходящиеся значения давления на щит.

Н. К. Гиринский указывает [5], что значения гидродинамического давления, получаемые по теоретической формуле Кульки при  $h_m = 0,55 H_0$ , дает расхождение более 90%.

Н. Е. Жуковский, рассмотрев истечение из-под щита и усилие, приходящееся на щит, как давление потока на поперечную пластинку, заключенную между двумя параллельными стенками, установленными симметрично относительно потока, получает очень громоздкую формулу для определения давления в любой точке щита (математическая обработка принадлежит Н. К. Гириному).

Сравнение данных, полученных по теоретической формуле Н. Е. Жуковского, с экспериментальными дают хорошее совпадение, но, ввиду чрезмерной громоздкости, для практических целей эта формула не используется.

Н. К. Гиринский на основании обработки данных 62 специальных опытов получил [4] экспериментальную зависимость для вычисления давления на плоский щит. Однако эта формула не получила большого распространения.

По вопросу определения давления воды на плоский щит при наличии истечения из-под него в книге «Гидротехнические сооружения», том I [6] сказано: «... невозможность дать обобщенные формулы

гидродинамического давления, пригодные для различных условий работы затворов, следует прийти к выводу, что расчет затвора без большой погрешности может вестись на горизонтальное давление воды (верхнего и нижнего бьефов), определенное по закону гидростатики...\*

Н. К. Гиринский указывает [5], что по лабораторным данным при незатопленном истечении жидкости из-под щита отношение полного гидродинамического давления на затвор к полному гидростатическому получается:

Таблица 1

$h_{\text{щ}} : H$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$P_x : P_c$	0,955	0,922	0,884	0,867	0,87	0,87

При определении эжекционного эффекта при двухъярусном водоприеме, с целью его использования для улучшения промывки кармана, А. К. Анамян [1] составил уравнение количества движения для двух сечений: одно до отдельной горизонтальной полки, которая разделяет поток на две горизонтальные зоны, а другое после слияния этих потоков за полкой.

При использовании уравнения закона количества движения А. К. Анамян допустил, что гидродинамическое давление на щит при истечении из-под щита подчиняется гидростатическому закону

$$P_{\text{щ}} = \frac{\gamma H^2}{2} \quad (1)$$

Рассмотрев ту же задачу и при этом используя уравнение Бернулли, мы пришли к отличным результатам.

Анализ причин, которые могли дать это расхождение, показал, что при использовании уравнения количества движения неправильно принят гидростатический закон распределения давления на щит при истечении из-под него.

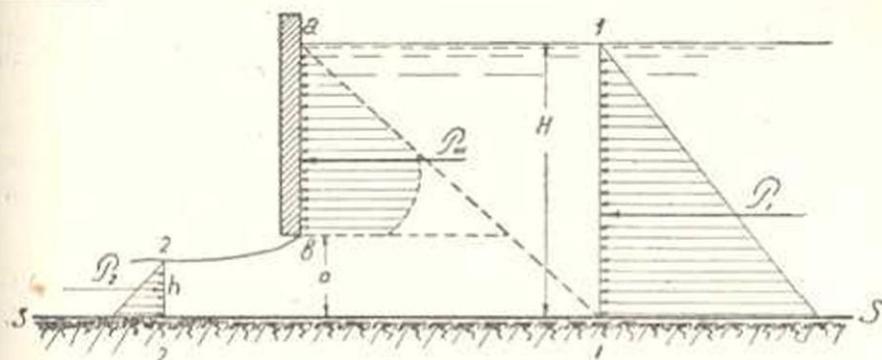
Для установления теоретической величины усилия, действующего на щит при истечении из-под него, рассмотрим случай свободного истечения жидкости из-под щита и применим к рассматриваемому случаю оба закона, т. е. закон количества движения и закон живых сил.

Предположим, что в призматическом русле установлен плоский щит (фиг. 1).

Для пропуска расхода из-под щита при данном открытии щита вода в водоводе должна подниматься до горизонта.

Берем два сечения по длине водовода: 1—1 и 2—2, причем сечение 1—1 берем на таком расстоянии от щита, чтобы возможно было допустить гидростатический закон распределения давления в потоке. Сечение 2—2 берем на некотором отдалении от щита, исходя из тех же соображений.

Применим к объему 1-1-a-b-2-2-1 закон количества движения. За ось проекций прием линию дна водовода S-S и положительное направление этой оси, совпадающей с направлением течения.



Фиг. 1.

При составлении уравнения количества движения делаем следующие допущения:

1. Водоток имеет достаточно малый уклон дна, поэтому можно пренебречь проекцией импульса силы тяжести.
2. Рассматриваемый участок имеет небольшую протяженность, поэтому проекцией импульса силы трения на стенках и на дне можно пренебречь.
3. Допускаем, что коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , учитывающие влияние неравномерности распределения скорости по сечениям 1-1 и 2-2 одинаковы, т. е.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha. \quad (2)$$

Изменение проекции количества движения объема 1-1-a-b-2-2-1 за промежуток времени  $\Delta t$  будет

$$\alpha_0 \frac{\gamma}{g} (\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2) \Delta t. \quad (3)$$

Величина суммы проекции импульсов всех сил, действующих на рассматриваемый объем, при учете выше сделанных допущений, будет сумма проекций импульсов гидродинамических усилий в сечениях 1-1, a-b и 2-2

$$\left( \frac{\gamma H^2}{2} - P_m - \frac{\gamma h^2}{2} \right) \Delta t. \quad (4)$$

Знак минус для импульсов сил в сечениях 2-2 и a-b взят потому, что импульсы сил в этих сечениях и ось проекции направлены в противоположные стороны.

Приравняв выражения (3) и (4) и сокращая на  $\gamma \Delta t$ , получим:

$$\frac{\alpha_0}{g} (\omega_2 v_2^2 - \omega_1 v_1^2) = \frac{H^2}{2} - \frac{P_m}{\gamma} - \frac{h^2}{2}. \quad (5)$$

Для одиночной ширины потока имеем:

$$\omega_2 = h \cdot l \text{ и } \omega_1 = H \cdot l.$$

Подставляя эти значения в уравнение (5), получим:

$$\frac{\alpha_0}{g} (h v_2^2 - H v_1^2) = \frac{H^2}{2} - \frac{P_m}{\gamma} - \frac{h^2}{2}. \quad (6)$$

Для определения величины гидродинамического давления на щит при истечении из-под него определим значение скорости истечения из-под щита  $v_2$  из уравнения Бернулли и подставим в уравнение (6). Скорость истечения будет:

$$v_2 = \varphi \sqrt{2g \left( H - h + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right)}. \quad (7)$$

Подставляя значение  $v_2$  из (7) в (6), получим:

$$\frac{\alpha_0}{g} \left[ \varphi^2 h 2g \left( H - h + \frac{\alpha v_1^2}{2g} \right) - H_1 v_1^2 \right] = \frac{H^2}{2} - \frac{P_m}{\gamma} - \frac{h^2}{2}, \quad (8)$$

откуда

$$P_m = \gamma \left[ H \left( \frac{H}{2} - 2\varphi^2 \alpha_0 h \right) - h^2 \left( \frac{1}{2} - 2\alpha_0 \varphi^2 \right) + \frac{\alpha v_1^2}{g} (H - \alpha_0 \varphi^2 h) \right]. \quad (9)$$

Принимая  $\alpha = \alpha_0 = 1$ , из уравнения (9) получим:

$$P_m = \gamma \left[ H \left( \frac{H}{2} - 2\varphi^2 h \right) - h^2 \left( \frac{1}{2} - 2\varphi^2 \right) + \frac{v_1^2}{g} (H - \varphi^2 h) \right]. \quad (10)$$

Заменив  $h$  через  $\varepsilon a$ , получим:

$$P_m = \gamma \left[ H \left( \frac{H}{2} - 2\varphi^2 \varepsilon^2 a \right) - \varepsilon^2 a^2 \left( \frac{1}{2} - 2\varphi^2 \right) + \frac{v_1^2}{g} (H - \varphi^2 \varepsilon a) \right]. \quad (10')$$

Значение коэффициента скорости  $\varphi$ , как указывается в [7], при свободном истечении из-под щита равняется 0,97—1,00.

Принимая  $\varphi = 1,0$ , уравнение (10) переписывается так:

$$P_m = \frac{\gamma}{2} (H - h) \left( H - 3h + \frac{2v_1^2}{g} \right) \quad (11)$$

или:

$$P_m = \frac{\gamma}{2} (H - \varepsilon a) \left( H - 3\varepsilon a + \frac{2v_1^2}{g} \right). \quad (11')$$

Для построения кривой  $P_m$  в зависимости от открытия щита по формуле (11) заранее установим связь между величиной подпорной скорости и открытием щита при постоянстве расхода воды в водоводе.

Единичный расход щитового отверстия при открытии щита на „а“ будет:

$$q = \varphi \varepsilon a \sqrt{2g \left( H - \varepsilon a + \frac{v_1^2}{2g} \right)}, \quad (12)$$

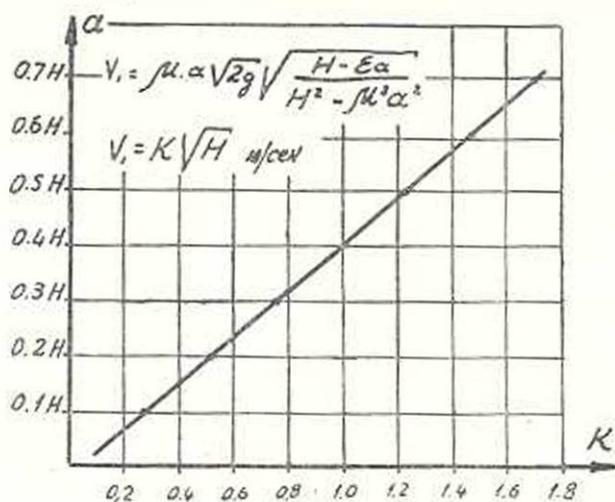
с другой стороны единичный расход равен:

$$q = 1 \cdot H \cdot v. \quad (13)$$

Приравнявая (12) и (13), получим:

$$v_1 = \varphi \varepsilon a \sqrt{2g \frac{H - \varepsilon a}{H^2 - \varepsilon^2 \varphi^2 a^2}} \quad (14)$$

Кривая изменения  $v_1$  в зависимости от открытия щита [при постоянном значении  $H$ ] будет иметь представленный на фиг. 2 вид.



Фиг. 2.

Подставляя значение  $v_1$  из (14) в (11') и учитывая, что  $\varphi = 1$ , получим:

$$P_{ш} = \frac{\gamma H^2}{2} (1-k) \left( 1 - 3k + 4 \frac{k^2}{1+k} \right), \quad (15)$$

где

$$k = \varepsilon \frac{a}{H}.$$

Результаты подсчета показаны на фиг. 3.

Сравнение наших экспериментальных данных с данными Гиринского даны на фиг. 4.

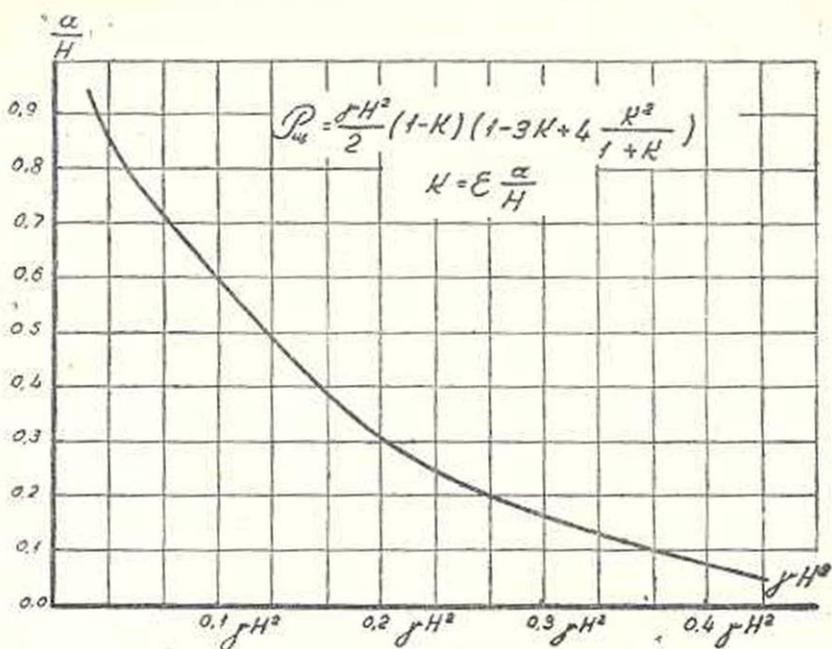
Зависимость (15) можно переписать в следующем виде:

$$P_{ш} = A \frac{\gamma H^2}{2}, \quad (16)$$

где  $A$  — коэффициент давления при истечении и определяется зависимостью:

$$A = (1-k) \left( 1 - 3k + 4 \frac{k^2}{1+k} \right), \quad (17)$$

где величина  $k$  является функцией коэффициента сужения  $\varepsilon$  и относительного открытия щита. Как получено Н. Е. Жуковским [7], величина  $\varepsilon$  в свою очередь есть функция относительного открытия  $\frac{a}{H}$ . Сле-

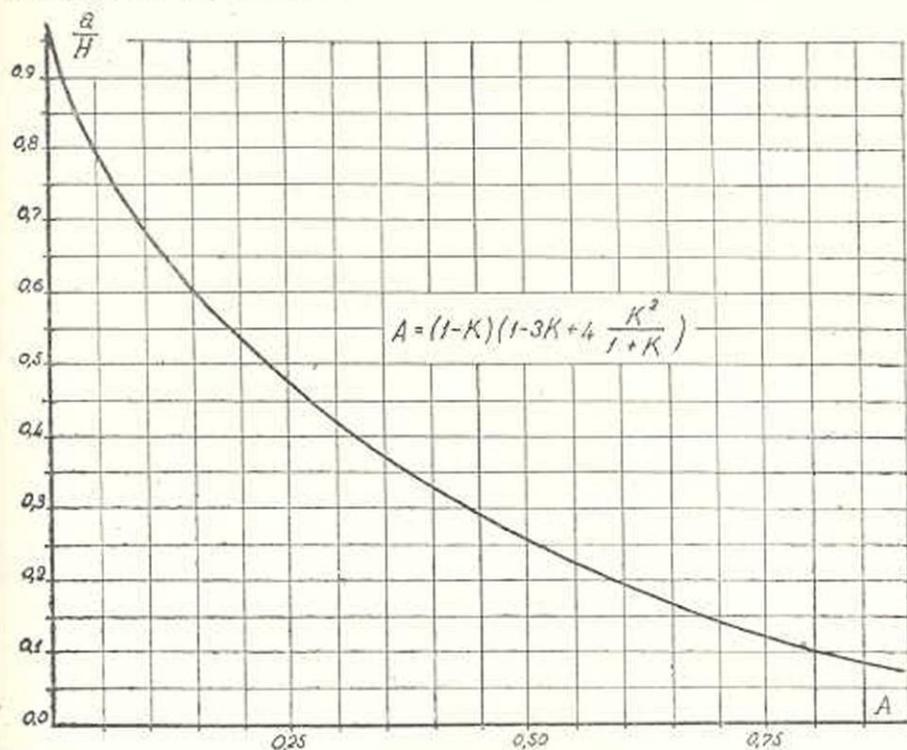


Фиг. 3.



Фиг. 4.

довательно,  $A = i \left( \frac{a}{H} \right)$ . На фиг. 5 приводится кривая  $A = f \left( \frac{a}{H} \right)$  по данным Н. Е. Жуковского.



Фиг. 5.

Величина усилия, действующего на щит, из уравнения (11) может равняться нулю при данном  $H$ , для двух значений  $h$ , а именно:

$$1. P_{ш} = 0 \text{ при } h = H, \quad (18)$$

что соответствует полному открытию щита и

$$2. P_{ш} = 0 \text{ при } h = \frac{H + \frac{2v_1^2}{g}}{3}. \quad (19)$$

Для проверки полученных формул (10) и (11) в гидротехнической лаборатории АрмНИИГиМ были поставлены специальные эксперименты.

В зеркальном лотке шириною  $B = 400$  мм был установлен щит, снабженный подъемным винтом, с помощью которого ему придается необходимое открытие.

Для измерения проекции усилия гидродинамического давления, действующего по направлению  $SS$ , на напорной грани щита установлены пьезометрические трубки, соединенные с манометром.

Эксперименты проводились при разных расходах и открытиях плоского щита.

Данные 18 экспериментов приведены в таблице 2.

Подходные скорости измерялись трубкой Пито-Ребока. При расчетах брались средние скорости сечения по зависимости

$$v_1 = \frac{Q}{bH}$$

Таблица 2

Q л/с	a см	H см	h см	ε	v <sub>1</sub> см/сек	Пьезометры								
						1	2	3	4	5	6	7	8	9
30,2	6,0	26,47	3,62	0,62	28,5	195	219	247	257	261	265	265	265	—
30,2	6,0	18,61	3,78	0,63	40,6	146	162	180	186	186	186	—	—	—
30,2	5,0	33,97	3,10	0,62	22,3	202	238	276	294	294	340	340	340	—
18,6	3,0	30,12	2,40	0,68	15,4	233	261	287	295	298	301	301	301	301
18,6	4,0	17,75	2,52	0,63	26,4	136	152	168	174	174	178	178	—	—
18,6	6,0	10,5	4,0	0,667	44,3	83	98	106	106	106	—	—	—	—
15,0	6,0	12,31	2,52	0,63	30,5	109	115	119	123	123	123	—	—	—
25,0	5,0	22,12	3,10	0,62	28,3	179	200	209	219	221	221	221	221	—
25,0	4,0	29,50	2,48	0,62	21,2	217	247	275	289	291	295	295	295	—
25,0	6,0	16,73	4,0	0,667	37,4	133	147	161	167	167	167	—	—	—
10,0	3,0	12,84	1,86	0,62	19,45	97	117	127	127	127	128	—	—	—
15,0	3,0	25,59	1,83	0,61	14,70	177	222	244	250	251	252	256	256	256
18,0	3,0	30,81	1,83	0,61	14,60	202	265	294	303	304	307	307	309	309
24,5	4,0	30,01	2,50	0,625	20,4	175	249	279	291	292	296	300	300	300
15,0	4,0	12,81	2,52	0,63	29,2	77	85	116	128	128	128	—	—	—
26,4	6,0	21,81	3,72	0,62	30,3	147	185	206	214	214	218	218	—	—
30,8	8,0	17,07	4,96	0,62	45,2	120	148	164	166	170	170	—	—	—
25,7	7,8	12,43	5,36	0,67	51,0	86	96	112	120	124	124	—	—	—

Таблица 3

№№ опытов	a : H	$\frac{H^2}{2}$	$\frac{H_0^2}{2}$	P <sub>шт</sub> по формуле (11)	P <sub>шт</sub> по формуле (10)	P <sub>шт</sub> факти- ческая	P <sub>шт</sub> : P <sub>0</sub>
13	0,098	386,70	389,76	378,92	373,30	372,0	0,955
4	0,10	367,75	370,01	338,9	324,3	330,0	0,90
12	0,117	255,15	257,64	248,86	243,22	243,00	0,95
14	0,133	338,26	343,74	330,34	321,1	322,34	0,94
9	0,136	325,12	331,01	318,97	300,1	310,0	0,94
3	0,147	419,6	426,9	403,4	396,0	391,00	0,92
5	0,225	94,50	99,4	92,95	88,15	89,0	0,91
8	0,225	146,5	153,65	144,65	137,5	135,0	0,89
1	0,226	209,5	217,8	207,4	191,2	196,0	0,90
11	0,234	48,41	50,3	46,58	44,44	45,00	0,89
16	0,275	124,97	132,07	121,8	113,6	119,87	0,87
15	0,312	38,8	42,69	33,30	37,95	37,80	0,89
2	0,322	79,5	90,46	85,9	76,05	75,4	0,835
7	0,325	34,5	35,45	45,74	32,6	32,10	0,9
10	0,358	57,5	60,44	54,3	51,23	52,00	0,86
17	0,468	44,13	51,10	46,0	42,8	42,1	0,825
6	0,570	21,12	22,0	20,80	19,70	19,00	0,865
18	0,643	9,81	15,08	11,3	10,7	10,6	0,71

Усилие, приходящееся на щит, определялось площадью эпюры давления, построенной по показаниям пьезометров.

В таблице 3 приводятся величины усилий, приходящихся на плоский щит, подсчитанных по данным пьезометров, определенных

по формулам (10) и (11), и для сравнения усилия гидростатического давления без учета подходной скорости и с учетом последней.

Как видно из таблицы, получаем очень хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных. То же самое получается и при сравнении с данными Гиринского (см. фиг. 3).

Армянский научно-иссл. институт  
гидротехники и мелiorации

Поступило 3 VI 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Анянян А. К. О пропускной способности двухъярусных водосбросов. Известия АН Армянской ССР, III, № 3, 1950.
2. Амбарцумян Г. А. О работе А. К. Аняняна „О пропускной способности двухъярусных водосбросов“. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 2, 1954.
3. Кульки Г. Металлические затворы плотин. Москва, 1932.
4. Гиринский Н. К. Давление на плоский щит при истечении из-под щита. Гидростроит., № 10, 1934.
5. Захарин Е. А., Гиринский Н. К. и др. Курс гидротехнических сооружений. М., 1940.
6. Близняк Е. В., Гришина М. М. и др. Гидротехнические сооружения, том I, М., 1936.
7. Азроскин И. И. Гидравлика. М., 1950.

Գ. Ս. Համբարձումյան

ՀԱՐԹ ՋՐԹՈՂ ՎԱՀԱՆԻ ՎՐԱ ԱԶԳՈՂ ՀԻԳՐՈԳԻՆԱՄԻԿ ԶՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՆՐԱ ՏԱԿՈՎ ՋՐԻ ԱՐՏԱՀԱՆՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարթ ջրթող վանանի վրա ազդող ճնշման ուժի մեծությունը որոշում են ունի գործնական և տեսական մեծ նշանակություն:

Ժամանակակից տեխնիկական գրականության մեջ մինչև այժմ էլ բնորոշվում է, որ այդ ճնշման ուժի մեծությունն առանց զգալի սխալի կարելի է բնորոշել բաշխման հիդրոստատիկ ճնշման օրենքի համաձայն:

Ն. Ե. Փուկովսկին քննարկելով այս հարցը, ավել է գրա հիդրոմեխանիկական լուծումը, որոշելով ճնշման մեծությունը ջրթող վանանի ցանկացած կետում՝ նրա կամայական բացման մեծություն համար [բանաձևի վերջնական մաթեմատիկական մշակումը ավել է Ն. Կ. Գիրինսկին (4)], բայց բանաձևը, չափազանց բարդ և մեծ լինելու պատճառով, կիրառություն չի գտել:

Ն. Կ. Գիրինսկին, մշակելով իր բաղաձայնի վործերի արդյունքները, ստացել է մի գործնական բանաձև, որի արդյունքները ճշտորեն համընկնում են գործնական ավյալների հետ:

Կուլյան—Կոխ—Կարստենենը և ուրիշները ավել են այլ տեսական լուծումներ, որոնց արդյունքներն զգալիորեն տարբերվում են գործնական ավյալներից:

Ջրթող հարթ վանանի վրա բնոջանուր ճնշման ուժը ժամանակակից տեխնիկական գրականության մեջ առաջարկվում է որոշել հիդրոստատիկ

օրենքի հիման վրա, ճշտելով այն Ն. Կ. Գիրինսկու փորձնական ավյալների վրա կազմված աղյուսակի օգնությամբ (աղյուսակ 1):

Տվյալ հոդվածում գիտելով արտահոսումը հարթ վահանի տակից, կազմվել է կենդանի ուժի և շարժման քանակի հավասարումները երկու հատվածքների համար, ընդ որում մի հատվածքը վերցված է մինչև վահանը, իսկ մյուսը՝ վահանից հետո, սեղմված հատվածքում:

Համառոտ լուծելով այդ երկու հավասարումները, վահանի վրա ազդող հիդրոդինամիկ ուժի համար ստացվել է՝

$$P_m = \frac{\gamma}{2} (H - \varepsilon a) \left( H - 3\varepsilon a + \frac{2V_1^2}{g} \right).$$

Որոշելով հարթ վահանին հեղուկի մոտեցման արագությունը, հայած վահանի բացման շափին, և սեղադրելով նախորդ հավասարման մեջ, կստանանք՝

$$P_m = \frac{\gamma H^2}{2} (1 - k) \left( 1 - 3k + 4 \frac{k^2}{1+k} \right),$$

որտեղ՝  $k = \varepsilon \frac{a}{H},$

քանի որ  $k$ -ի մեծությունը կախված է միայն  $\varepsilon$ -ից և  $\frac{a}{H}$  հարաբերությունից, իսկ, ըստ Ն. Ե. Ժուկովսկու,  $\varepsilon$ -ը իր հերթին կախված է  $\frac{a}{H}$ -ից: Նշանակելով

$$A = (1 - k) \left( 1 - 3k + 4 \frac{k^2}{1+k} \right),$$

կստանանք

$$P_m = A \frac{\gamma H^2}{2}.$$

$A$  գործակցի մեծությունը՝ կախված վահանի բացման աստիճանից՝ արված է նկ. 6-ում:

Հիդրոտեխնիկայի և մեխորոպիայի հայկական գիտահետազոտական ինստիտուտի հիդրոտեխնիկական լաբորատորիայում հատուկ փորձեր են զրվել վերահիշյալ բանաձևի ճշտությունն ստուգելու համար: Փորձերը հաստատել են բանաձևի մեծ ճշտությունը:

## ГИДРОЭНЕРГЕТИКА

С. Г. Саркисян

## К вопросу об определении величины аварийного резерва в энергетической системе

В энергетических системах вопрос установления величины аварийного резерва мощности и энергии имеет существенное значение в деле бесперебойного энергоснабжения потребителей.

Однако способы определения величины необходимого аварийного резерва до настоящего времени не являются строго установленными.

Действующие руководящие указания по проектированию электрических систем [9] предусматривают величину аварийного резерва в размере 10% максимума системы, но не меньше мощности наиболее крупного агрегата. Во всяком случае резервная мощность должна быть такой, чтобы при выходе из строя наиболее мощного агрегата была обеспечена возможность поддержания стандартной частоты без отключения потребителей. Это положение основывается на данных опыта эксплуатации энергетических систем без расчетного обоснования.

Предложенные в научно-технической литературе методы теоретической оценки аварийного резерва основаны на применении законов теории вероятностей, в частности биномиального закона [1, 2, 3, 5, 7, 12], который, как известно, выражается через:

$$P_{n(m)} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (1)$$

где  $p$  — средняя продолжительность аварийного простоя агрегата (показатель аварийности),

$q = 1 - p$  (показатель надежности),

$m$  — число агрегатов в аварии,

$n$  — число рабочих агрегатов системы.

М. А. Мостковым был предложен метод расчета аварийного резерва, основанный на Пуассоновом законе [6].

При вероятностной схеме расчета аварийного резерва обычно принимают, что все рабочие агрегаты по мощности равны либо средней мощности агрегата [2], либо — максимальной [1], т. е. в расчеты вводится приведенное, фиктивное число агрегатов.

Показатель аварийности  $p$  в этих расчетах принимается для некоторого приведенного „единичного“ агрегата, без учета мощности отдельных машин и их места в графике нагрузки системы.

Результаты расчетов при таких допущениях получаются разные, что нетрудно показать на приводимом ниже числовом примере.

В качестве примера принята энергосистема с установленной мощностью  $N_{уст.} = 175$  мвт в 20 агрегатах различной мощности.

Мощность самого крупного агрегата системы равна 25 мвт. Средняя продолжительность аварийного простоя „единичного“ агрегата, в соответствии с имеющимися рекомендациями [11], принята равной 0,007 годового времени.

Средняя мощность агрегата получается равной 8,75 мвт.

Если все агрегаты системы привести к мощности самого крупного агрегата, то система будет состоять из 7 приведенных агрегатов.

Определение вероятностей аварийного выхода из строя агрегатов проведено по формуле (1) в двух вариантах (см. табл. 1). В первом варианте принято, что система состоит из 20 агрегатов мощностью по 8,75 мвт каждый. Во втором варианте принято, что в системе установлено 7 агрегатов мощностью по 25 мвт. Данные таблицы 1 показывают, что вероятности аварийного выхода агрегатов из строя в первом варианте значительно больше, чем во втором.

Таблица 1

Число агрегатов в аварии	1-й вариант $P_n(m)$	2-й вариант $P_n(m)$
один агрегат	0,1208	0,0469
два	0,00809	0,000993
три	0,000342	0,0000116
четыре	0,00001025	0,00000082

Так как выражение (1) представляет „математическое ожидание“, определяющее количественно как вероятность аварийного выхода из строя агрегатов, так и вероятную продолжительность одновременной аварии  $m$  агрегатов при исправном состоянии остальных  $n$  машин системы, то умножение данных таблицы 1 на календарное время дает продолжительности аварийного простоя различного числа агрегатов системы в часах (см. таблицу 2).

Таблица 2

Число агрегатов в аварии	Вероятный простой агрегатов при $n_1 = 20$ в часах	Вероятный простой агрегатов при $n_1 = 7$ в часах	Фактический простой агрегатов в часах
0	7827	8340	7818
1	1059,1	411,31	918,3
2	70,9	8,69	20,7
3	2,91	0,115	2,6
4	0,090	0,00072	0,4

При сопоставлении продолжительности аварийного простоя агрегатов, определенных по вероятностной схеме, с фактическими данными по аварийности гидроагрегатов в рассматриваемой системе, не трудно заметить, что данные первого варианта ближе к фактическим.

Изучение данных таблиц 1 и 2 показывает, что вероятность выхода одновременно четырех агрегатов практически равна нулю.

Следовательно, чтобы обеспечить бесперебойную работу энергосистемы достаточно установить три резервных агрегата. Выработку каждого резервного агрегата нетрудно определить с помощью выражения

$$\mathcal{E}_{\text{рез}} = N_{\text{рез}} P_{n(m)} T_0 k_n, \quad (2)$$

где  $N_{\text{рез}}$  — мощность резервного агрегата,

$T_0$  — календарное время в году,

$k_n$  — коэффициент использования установленной мощности системы.

В таблице 3 даны вероятные выработки электроэнергии резервными агрегатами при коэффициенте  $k_n = 0,515$ .

Таблица 3

Порядковый номер резервных агрегатов		1-й	2-й	3-й
Выработка электроэнергии резервными агрегатами в <i>млн</i>	первый вариант	4760000	318000	13500
	второй вариант	5280000	111800	1305

В первом варианте мощность резервного агрегата принята равной мощности осредненного агрегата, т. е.  $8,75 \text{ мвт}$ , а во втором варианте — мощности самого крупного агрегата —  $25 \text{ мвт}$ .

В результате проведенных выше расчетов по двум вариантам получились весьма разноречивые данные, не позволяющие оценить достоинства того или другого способа. Кроме того, эти способы не дают возможности определить величину выходящей из строя мощности и соответствующую ей аварийную недовыработку электроэнергии в системе.

В практике проектирования и эксплуатации энергетических систем важно знание вероятности аварийного выхода из строя той или иной рабочей мощности системы. Этому требованию в значительной степени удовлетворяет предлагаемый ниже способ расчета вероятностей аварийного выхода из строя различной рабочей мощности. Суть способа поясняется на примере энергетической системы, в которой установлено 20 агрегатов с суммарной мощностью  $260 \text{ мвт}$ . В расчетах принят показатель аварийности единичного агрегата  $p = 0,7\%$  годового времени.

Если допустить, что из 20 рабочих агрегатов  $n_1 = 12$  агрегатов имеют мощность по  $N_1 = 5 \text{ мвт}$ , а  $n_2 = 8$  агрегатов имеют

мощность по  $N_2 = 25$  *мгвт*, то при выходе из строя одного агрегата последний может быть либо мощности  $N_1$ , либо мощности  $N_2$ . В первом случае в работе остается 11 машин мощности  $N_1$  и 8 машин мощности  $N_2$ , а во втором случае в работе будет 12 машин мощности  $N_1$  и 7 машин мощности  $N_2$ .

При выходе из строя двух агрегатов, оба могут оказаться мощности  $N_1$  или мощности  $N_2$ , либо один мощности  $N_1$ , а другой мощности  $N_2$ . В первом случае в работе останется 10  $N_1$  и 8  $N_2$ , во втором случае в работе будут 12  $N_1$  и 6  $N_2$  и, наконец, в третьем случае в работе будут 11  $N_1$  и 7  $N_2$ . Рассуждая подобным образом, можно определить оставшиеся в работе агрегаты при авариях любого числа их.

Вероятность аварийного выхода из строя агрегатов каждой группы и их сочетания определяется с помощью рекуррентной формулы, полученной из выражения (1) следующим путем: вероятность нахождения в аварии  $m$  агрегатов равна:

$$P_{n(m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{m(m-1)\dots 2 \cdot 1 \cdot (n-m)(n-m-1)\dots 2 \cdot 1} p^m q^{n-m}.$$

При выходе из строя  $m+1$  агрегатов из числа  $n$  эта вероятность будет равна:

$$P_{n(m+1)} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} p^{m+1} q^{n-m-1} = \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{(m+1) \cdot m \dots 2 \cdot 1 \cdot (n-m-1)(n-m-2)\dots 2 \cdot 1} p^{m+1} q^{n-m-1}.$$

Из этих двух уравнений получаем

$$P_{n(m+1)} = \frac{n-m}{m+1} \frac{p}{q} P_{n(m)}. \quad (3)$$

Начальное значение  $P_{n(m)}$  получается из выражения (1) при  $m=0$ . Тогда  $p^m=1$ ,  $C_n^m=1$  и выражение  $P_{n(m)} = C_n^m p^m q^{n-m}$  примет вид:

$$P_0 = q^n. \quad (4)$$

В таблице 4 даны вероятности аварийного выхода из строя различной мощности системы, подсчитанные с помощью формул (3) и (4). Ход расчета таков: по формуле (4) определяется вероятность того, что в аварийном простое рабочей мощности нет  $P_0 = 0,8670$ . Далее, по формуле (3) определяются вероятности нахождения в аварии одного агрегата мощности  $N_1 = 5$  *мгвт* и  $N_2 = 25$  *мгвт*, которые соответственно равны  $P_{n_1(m_1+1)} = 0,0734$  и  $P_{n_2(m_2+1)} = 0,0459$ . Вероятности одновре-

менного выхода из строя двух агрегатов мощности  $N_1$  или  $N_2$  также легко определяются по формуле (3), в которую подставляются вероятности выхода из строя одного агрегата мощности  $N_1$  или  $N_2$ .

Таблица 4

m	$m_1$	$m_2$	$n-m$	$n_1-m_1$	$n_2-m_2$	$P_n(m)$	$N_{ав}$	$\Sigma_{ав}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	20	12	8	0,867	0	0
1	1	0	19	11	8	0,0734	5	1650000
	0	1	—	12	7	0,0189	25	5500000
2	2	0	18	10	8	0,00285	10	128000
	0	2	—	12	6	0,00121	59	272000
3	1	1	—	11	7	0,00114	30	558000
	3	0	17	9	8	0,000067	5	4500
	0	3	—	12	5	0,000171	75	5760
4	2	1	—	10	7	0,000161	25	25400
	1	2	—	11	6	0,0001023	55	25300
	4	0	16	8	8	0,00001055	20	95,0
	0	4	—	12	4	0,000000151	100	68,0
	3	1	—	9	7	0,00003379	40	682
	1	3	—	11	5	0,0000144	80	518
	2	2	—	10	6	0,0000397	60	1070

Несколько сложнее определить вероятность совместного выхода из строя двух агрегатов различной мощности —  $N_1$  и  $N_2$ . В этом случае в выражение (1) подставляется вероятность выхода одного агрегата, скажем, мощности  $N_1$ , а в отношении  $\frac{n-m}{m+1}$  — число агрегатов мощности  $N_2$ , считая, что из этого числа выходит из строя один агрегат.

Тогда

$$P_{n,(m_1+1)} = \frac{8}{1} \cdot \frac{0,007}{0,993} \cdot 0,0734 = 0,00414.$$

Отношение  $\frac{P}{q}$  в формуле (1) остается неизменным во всех проведенных расчетах. Можно было бы поступить наоборот, т. е. взять вероятность выхода агрегата мощности  $N_2$ , а в отношении  $\frac{n-m}{m+1}$  подставить число агрегатов  $N_1$ . Результат получился бы один и тот же.

Рассуждая подобным образом, нетрудно подсчитать вероятность выхода из строя трех агрегатов, из которых два имеют мощность  $N_1$ , а один —  $N_2$  и т. д.

В графе 8 таблицы 4 приведены вероятные аварийные мощности системы в мвт, подсчет величины которых проведен по формуле

$$N_{ав} = \sum_{i=1}^k m_i N_{ik}. \quad (6)$$

Здесь индекс  $k=1, 2, 3, \dots$  представляет номер группы, к которой принадлежит агрегат данной мощности.

Аварийная недовыработка электроэнергии (см. графу 9, табл. 4), связанная с выходом из строя различной рабочей мощности системы, была подсчитана с помощью выражения (2) при коэффициенте использования установленной мощности  $k_{из} = 0,515$ .

Проведенный по предлагаемому способу расчет дал возможность определить как вероятности аварийного выхода из строя той или иной мощности, так и вероятную недовыработку электроэнергии в системе. Знание этих двух показателей позволяет правильно оценить необходимую величину резерва мощности и энергии.

В рассматриваемом случае вероятность аварийного выхода из строя свыше двух агрегатов различной мощности весьма незначительна, мала также аварийная недовыработка электроэнергии, которая в сумме составляет всего 63413 *квтч* или 0,78% всей аварийной недовыработки системы. Сказанное позволяет не учитывать возможности аварийного выхода из строя мощности большей, чем 50 *мгвт*.

Если установить резервную мощность, равную, например, 25 *мгвт*, то надежность системы, определяемая по формуле

$$Q_{n(m)} = 1 - \sum P_{n(m)}, \quad (7)$$

будет равна 0,992.

В формуле (7)  $P_{n(m)}$  — вероятность аварийного выхода рабочей мощности, превышающей резервную мощность.

Значительно сократится аварийная недовыработка электроэнергии, которая составит 833 тыс. *квтч* или 10,2% вероятной аварийной недовыработки системы при полном отсутствии резерва. Аварийную недовыработку с учетом резервных мощностей нетрудно определить с помощью формулы

$$\Delta_{ав} = (N_{ав} - N_{рез}) P_{n(m)} T_0 k_{из}. \quad (8)$$

В тех редких случаях, когда из строя выходит мощность, превышающая резервную, приходится отключать часть потребителей во избежание снижения частоты системы. Это мероприятие равноценно включенному резерву мощности на электростанциях.

Как показали исследования [8, 10], некоторые потребители могут быть переведены на работу по переменному режиму без ущерба для их суточного технологического режима. Эти потребители получили название потребителей-регуляторов.

К числу таких потребителей относятся некоторые энергоемкие производства, насосные станции и т. п. Следовательно, к частичному несению функций аварийного резерва могут быть привлечены такие потребители-регуляторы. Недоланная им в часы аварийного от-

ключения энергия в силу ее небольшой величины может быть скомпенсирована в другое время в течение года.

Руководствуясь только изложенными соображениями, нельзя определить величину потребной резервной мощности в системе. Величину аварийного резерва можно окончательно установить путем проведения энерго-экономических расчетов, в которых критерием является требование получить минимум народнохозяйственных затрат при заданном уровне производства электроэнергии.

Однако существующие методы энерго-экономической оценки аварийного резерва, как справедливо отмечает И. М. Маркович [4], наталкиваются на серьезные затруднения, связанные с необходимостью оценки убытков народного хозяйства при перерывах энергоснабжения и поэтому не дают результатов.

Можно, однако, не задаваясь целью проведения энерго-экономического анализа, установить некоторую степень надежности системы и в зависимости от этого определить необходимую величину аварийного резерва.

### В ы в о д ы

1. Существующие способы определения вероятности аварийного выхода из строя агрегатов не позволяют установить величину выходящей из строя мощности и соответствующую ей величину аварийной недовыработки. В целях уточнения проектирования расчет вероятностей аварийного выхода из строя той или иной рабочей мощности следует проводить по способу, предложенному в настоящей статье. Для упрощения расчетов общее число входящих в систему агрегатов следует разбить на несколько групп по мощности.

2. Вопрос надежности энергоснабжения потребителей нужно рассматривать комплексно: энергосистема-потребитель и учитывать возможности частичного переноса функций резерва на потребителя.

Такое решение вопроса позволит сократить величину установленной резервной мощности системы.

3. Учитывая возможность частичного возложения аварийного резерва на потребителя, при разработке энерго-экономического метода в его основу следует положить принцип получения минимума народнохозяйственных издержек в комплексе энергосистема—потребитель.

Водно-энергетический институт  
АН Армянской ССР

Получено 17 V 1954

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Золотарев Т. Л. Гидроэнергетика, ч. I. Госэнергоиздат. М.—Л., 1950.
2. Куценов В. А. О распределении резерва мощности в энергосистемах с крупной регулирующей гидроэлектростанцией. Известия ВНИИ им. Введенского Б. Е., № 43, 1950.

3. Куценов В. А., Замятина Н. М. Роль регулирующей гидростанции в обеспечении резерва для теплоэнергетической системы. „Электричество“, № 3, 1949.
4. Маркович Н. М. Энергетические системы и их режимы. Госэнергоиздат, М. — Л., 1952.
5. Мостков М. А. Основы теории гидроэнергетического проектирования. Госэнергоиздат, 1948.
6. Мостков М. А. Об аварийном резерве мощности и энергии в электроэнергетической системе. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
7. Никитин С. Н. Методика водно-энергетических расчетов. Госэнергоиздат, 1949.
8. Осепян А. М. Карбидные и ферросплавные печи как потребители-регуляторы сезонной гидроэнергии. „Электричество“, № 8, 1949.
9. Руководящие указания по проектированию энергетических систем. „Электричество“, № 10, 1946.
10. Сасоян Г. А. Электрическая печь, как потребитель-регулятор энергосистемы. „Электричество“, № 9, 1950.
11. Саркисян С. Г. Определение показателя аварийности оборудования ГЭС в гидроэнергетических системах. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), № 2, 194.
12. Ферман Р. А. Методы экономической оценки эксплуатационного резерва электрических систем. „Электрические станции“, № 20, 1932.

#### Ս. Գ. Սարգսյան

### ԷՆԵՐԳԵՏԻԿ ՍԻՍԵՄՆԵՐՈՒՄ ՎՅԱՐԱՅԻՆ ՌԵԶԵՐՎԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՇՈՒՐՋԸ

#### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Էլեկտրակայանների աշխատող ազրեզատների վթարայնության հաճախականությունը որոշող եղանակները հնարավորություն չեն տալիս հաշվարկելու շարքից դուրս եկող հզորություն մեծությունը և նրան համապատասխանող էներգիայի կորուստը: Այդ բանը անհրաժեշտ է գիտենալ, որպեսզի էլեկտրակայանների նախագծման ժամանակ կարելի լինի ճիշտ որոշել վթարային սեղերվի մեծությունը:

Հաղվածում առաջարկվում է հնարավոր հզորության շարքից դուրս գալու հավանականությունը որոշելու եղանակ, որը հիմնված է հավանականությունների մեջ հայտնի բիմոմիալ բաշխման օրենքի վրա: Դուրս բերված սեղերենա ջանաձևեր միջոցով որոշվում է այդ հավանականությունը: Հաշվումները հեշտացնելու համար սխառեմի մեջ մտնող բոլոր ազրեզատները խմբավորվում են ըստ հզորության:

Այն դեպքում, երբ վթարային սեղերվը շարքից դուրս եկած աշխատանքային հզորությունից փոքր է, առաջարկվում է անջատել որոշ էներգետիկ սպառիչներ, որանց ակննդողիական սեմիմը թույլ է սալլիս այդ անելու: Սպառիչներին, անջատման պատճառով, չսփած էլեկտրաէներգիան անհրաժեշտ է հատուցել այլ ժամանակաշրջաններում: այն հաշվով, որպեսզի տալիս ընթացքում արտադրանքի կորուստ սեղի չունենա:

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Э. А. Мкртумян

Рецензия на книгу А. М. Марджаняна „Автомобильные двигатели“, Армгиз, 1953 (на армянском языке).

Недавно вышла из печати книга А. Марджаняна „Автомобильные двигатели“\*.

Книга рассчитана на массового читателя. Она включает в себе описание современных конструкций двигателей ряда марок советских автомобилей. В книге достаточно большое место уделено уходу за отдельными механизмами двигателя в эксплуатации.

Впервые в такого рода изданиях на армянском языке пространно описаны конструкции систем питания современных газогенераторных и газобаллонных автомобилей.

К сожалению, рецензируемая книга содержит ряд ошибочных положений, а также недостатков в оформлении и издании, которые значительно обесценивают ее.

Остановимся на основных дефектах рецензируемой книги.

Метод изложения материала всегда играет решающую роль в успехе технической книги. При неудачном методе изложения автор не достигает цели.

Карбюратор — одно из сложнейших устройств в системе механизмов двигателя. Его изучению обычно предшествует разбор так называемого простейшего карбюратора, реально несуществующего. Анализ работы простейшего карбюратора преследует в основном две цели: разъяснить физическую сущность процесса карбюрации и доказать необходимость усложнения этого простого прибора для удовлетворения требований эксплуатации.

В книге изложение принципов работы отдельных компенсационных устройств не вытекает из анализа простейшего карбюратора. Такой анализ вообще отсутствует в ней. Он заменен общими фразами вроде — „Условия работы автомобильного двигателя заставляют коленчатый вал вращаться в широких пределах колебаний числа оборотов. Точно так же колеблется и нагрузка двигателя“ и заключением — „По этим причинам простейший карбюратор не может удовлетворить требованиям автомобильного двигателя“ (стр. 147).

\* А. Марджанян. Автомобильные двигатели, Ереван, Армгиз, 1953 г., объем 15,2 печ. листа, тираж 3000 экз., редактор А. Мкртчян (на армянском языке).

Читателю остается непонятным, по какой причине простейший карбюратор не может быть использован.

VII глава книги озаглавлена — „Питание двигателя“. Подзаголовок под названием „Система питания карбюраторных двигателей“ обещает ознакомить читателя с устройствами, приготовляющими горючую смесь для питания двигателя. Но текст не соответствует подзаголовку: в нем говорится не о системе питания, а о степени очистки топлива и его удельном весе, о нормальной, богатой и бедной смесях, о способах получения бензина и технических условиях экипировки двигателя.

Тема „Степень очистки топлива и его удельный вес“ изложена на 43 строках; из них 5 строк посвящены степени очистки топлива и 5 следующих строк — удельному весу. Остальные 33 строки не соответствуют заголовку: там говорится о температуре самовоспламенения топлива, об испаряемости топлива и т. д. Но что можно написать о степени очистки топлива в 5 строчках? „Применяемое топливо должно быть совершенно чистым и не должно содержать влаги, кислоты и примеси. Грязь и вода забивают трубки, малые отверстия и заставляют двигатель работать с перебоями. Кислоты разъедают и изнашивают стенки цилиндра и клапаны автомобильного двигателя“ (стр. 135). Все это, конечно, не дает читателю необходимых конкретных представлений о степени очистки топлива.

В следующих 5 строках, посвященных удельному весу топлива, отсутствует даже численное значение удельного веса.

Пункт 5 этой же VII главы имеет заголовок — „Способы получения бензина“. Правда, можно было бы и обойтись без него, ибо описание способа получения бензина совершенно не входит в задачи автора. По существу, однако, из 90 строк, составляющих 5-й пункт, лишь в 12 говорится о способах получения бензина. В остальных 78 строках не совсем удачно излагается сущность процесса сгорания и детонации в камере двигателя.

Впоследствии автор исправил свое упущение, назвав VIII главу также „Системой питания“.

Известно, что всякий автор изложение материала ведет в соответствии с уровнем знаний читателя, на которого рассчитана книга. Наряду с элементарным изложением простых истин автор рецензируемой книги использует множество сложных терминов без каких-либо комментариев: прямая гонка, крекинг процесс, фракция, взрывная волна, индукционный период, селективная очистка, ингибитор-конвенция, паратон, суперол, парафлюи, аэролюб, сантолюб и т. д. Подавляющее большинство этих терминов сконцентрировано в разделах, касающихся смежных к двигателю областей, неуместных, на наш взгляд, в общедоступном издании.

Втиснуть большой материал в заранее заданный объем — задача не из простых, если к тому же этот объем не так велик. Здесь необходимо отличить главное от второстепенного, нужное от ненужного.

Неизвестно по какой причине опущен целиком один из важнейших разделов двигателя — система зажигания, хотя можно полагать, что в начале было намерение иметь этот раздел в книге. Об этом можно догадаться по тому, что на стр. 127 автор отсылает читателя к этому разделу.

Вместе с тем, в разделе о смазке автор слишком много места уделяет „способам получения масла“ и, переходя за пределы своей темы, пространно объясняет — какие масла нужны для смазки шасси.

Вряд ли можно недостатком места объяснить отсутствие описания топливных фильтров и современного всережимного регулятора дизельного двигателя, тогда как в книге каждая из 154 фигур сопровождается совершенно ненужной спецификацией. На это потрачено не больше и не меньше как 2500 слов; в то время, как эти же слова имеются в тексте, объясняющем каждую фигуру.

В рецензируемой книге имеются грамматические и стилистические погрешности.

На стр. 157 мы читаем:

«Ասեղի ստորին ծայրը, որ (далее везде подчеркнуто мною — Э. М.) մտնում է դիսայնոր ժիլյոսի անցքը, իր կրկարութեան որոշ տարածութեան վրա ունի փոփոխական հաստիւմ, որն բնորոշ է այն հաշվով, որ ապահովի շարժիչի խնայողարար աշխատանքը՝ ազդատացնել խառնուրդը միջին բեռնվածութեան ղեպքում և հարստացնել խառնուրդը շարժիչի գերբեռնվածութեան ժամանակ բարձր կարողութեան ստանալու նպատակով»:

На стр. 38:

«Երևաններից մեկը վշանալու ղեպքում ամբողջ բոլոր ղեն ղցելու ստիպված չլինելու, ինչպես և նորոգման ղեպքում հարմարութեան ունեւալու նպատակով գործադրում են ղնովի պարկուճներ»:

На стр. 82:

«Ներածման, փականի փոքր բացակի արտաքին նշանները՝ կարբյուրատարում բնեկումներ ու սփռտացնէր» են անղի ունենում»:

На стр. 41:

«2) հատակը ալկի բարձր վերմատիճան ունի, քան մյուս ձևերը»:

На стр. 104:

Շարժիչների ջրային շաղկներին մեջ կոշտ ջուր լցնելու և կոշտ ջրով շարժիչները սառեցնելու նեաեանքով շարժիչների ջրային շաղկների պատերին կախայարար է գոյանում»:

На стр. 194:

«Վառիւմյոսի փոշոքը առաջանալը նեաեանք է վառիւմյոսի շիթը 150—400 մետր վարկյան արողութեանը սեղմած օդի միջավայրը թափանցելուց տաջացած վառիւմյոսի շիթը օդի նեա շփոխուլուն»:

Вообще, у автора рецензируемой книги своеобразный слог. Если, например, хотят выразить мысль о том, что автомобиль находится в эксплуатации во все времена года, то говорят — „автомобиль работает в эксплуатации круглый год“. А у автора книги эта простая мысль выглядит иначе: „амтомобиль работает как летом, так и зимою, позд-

ней осенью и ранней весной» (стр. 106.). Правда, у автора фраза получается изысканней, но ведь можно подумать, что автомобиль ранней осенью и поздней весной не работает.

Взамен простого выражения «հասուկ մեքենաներ» — «հասուկահասուկ մեքենաներ» (стр. 106).

Простейшая мысль, которую можно изложить так: «Վառելանյութը մատուցվում է գրանիշ բոցամուղով բարձր ճնշման տակ» у автора выглядит сложнее:

«Վառելանյութը մատուցվում է բոցամուղով, որի միջով վառելանյութը գրանի մեջ է բնկնում մեծ ճնշման տակ»:

Автор уделяет некоторое место в книге рекомендациям по уходу и эксплуатации двигателя.

На странице 105 приводится рекомендация способа очистки воды: «жесткую воду можно смягчить кипячением или прибавлением к ней содового раствора. Смягченную этим способом воду надо отстоять и влить в систему охлаждения, проведя через матерью». Все как будто понятно. Неизвестно только о какой системе охлаждения идет речь и какой процент соды и какой соды рекомендует автор.

На той же странице автор предлагает рецепт для удаления накипи и продолжает: «этой смесью заливают систему охлаждения до полна и в течение одной ночи воду (? — Э. М.) оставляют в этой системе. На следующее утро запускают двигатель с тем, чтобы система охлаждения нагрелась до *нужной* (? — Э. М.) степени. После этого смесь опорожняют (читай систему опорожняют — Э. М.)». Но читателю многое осталось неясным: заполнили систему смесью и оставляют эту систему на ночь уже не со смесью, а с водой! На следующее утро водитель должен догадаться до какой степени надо подогреть систему, чтобы получилось как раз по замыслу автора.

Даже такая простая операция, как очистка головок от нагара, изложена в книге бессистемно. «Этот способ очистки требует: а) хорошо прогреть двигатель, б) залить (камеры — Э. М.) керосином или денатурированным спиртом 20—30 куб. см (в каждую камеру — Э. М.), в) свечи вывернуть и оставить в таком состоянии двигатель 10—12 часов, г) после этого залить каждый цилиндр небольшим количеством масла и пустить его в ход...».

Для того, чтобы залить в головки 20—30 куб. см керосина, необходимо сначала, а не после снять свечи. Далее, для того, чтобы прогреть двигатель, нужно свечи вновь свернуть обратно.

В книге имеется ряд непонятно или даже неправильно сформулированных положений.

На стр. 50 (фиг. 39) автор пишет, что противовесы на коленчатом валу двигателя М-1 имеют целью уравновесить центробежную силу от вращения двух щек коленчатого вала. В число неуравновешенных масс коленчатого вала входят, кроме указанных автором двух щек, еще 4 колена и 6 других щек коленчатого вала.

На стр. 137, строки 10 и 19 сверху, 10 снизу и на стр. 139 автор утверждает, что при богатых смесях часть бензина в камере не сгорает и, в жидком виде попадая в картер, разжижает смазку.

Трудно себе представить бензин в жидком виде при температуре сгорания в  $2800\text{--}3000^\circ$  абс. Известно, что неполнота горения обычно выражается образованием продуктов неполного сгорания.

Физический смысл процесса карбюрации в книге описан не совсем правильно. На стр. 145 сказано, что поток воздуха, проходящий в карбюраторе мимо края распылителя, уносит с собой частицы топлива. Поэтому автору представляется причиной обеднения смеси снижение уровня топлива в распылителе (см. стр. 146, строка 5 сверху).

Известно, что унос топлива воздухом является следствием фонтанирования топлива из распылителя, а причиной выхода топлива из распылителя является разность давлений между устьем распылителя и поплавковой камерой.

Характеризуя карбюратор как прибор, призванный снабжать двигатель смесью нужного качества, автор добавляет: «водитель должен беспрерывно следить за тем, чтобы это (качественная регулировка — Э. М.) выполнялось точно» (стр. 146, строка 3 снизу). Изменение качества смеси в карбюраторе происходит автоматически и буквально незачем, да и невозможно, беспрерывно следить за этим.

Описывая принцип работы простейшего карбюратора, на стр. 147 автор пишет: «если мы увеличим число оборотов двигателя (открытием дроссельной заслонки), воздух, из-за сопротивления диффузора, поздно (1 — Э. М.) поступит в цилиндры, разрежение у устья распылителя усилится, топливо быстрее будет вытекать из жиклера и смесь обогатится».

Все это не соответствует действительности. Воздух обладает меньшей инерцией, чем топливо, и поэтому с открытием дроссельной заслонки скорость потока воздуха немедленно увеличится. В силу этого у устья жиклера и повышается разрежение, которое вызывает более интенсивное вытекание топлива.

В простейшем карбюраторе с открытием дроссельной заслонки обогащение действительно имеет место, но вовсе не по той причине, на которую ссылается автор.

Карбюратор К49А, который ставится на одну из самых распространенных машин — ГАЗ-51, объясняется неточно. На стр. 168 сказано: «если бы большой диффузор имел обычный профиль, то смесь, подаваемая через главный жиклер, стала бы обогащаться пропорционально росту разрежения, как это происходит в простейшем карбюраторе».

Прежде всего из главного жиклера вытекает топливо, а не смесь; что же касается обогащения смеси, то оно вовсе не пропорционально росту разрежения даже в простейшем карбюраторе.

Объясняя далее действие 3-диффузорного карбюратора на больших нагрузках, автор пишет: «...по этой причине (увеличения на-

грузки — Э. М.) у распылителя главного жиклера разрежение происходит медленнее, чем это имеет место в простейшем карбюраторе, и это явление приводит к обеднению смеси, подаваемой главным жиклером<sup>4</sup>.

На больших нагрузках, в связи с автоматическим открытием упругих пластин наружного диффузора, разрежение у устья распылителя главного жиклера стабилизируется. Стабилизация разрежения в малом диффузоре и увеличение количества воздуха, пропускаемого через большой диффузор, могли бы привести к сильному обеднению смеси, если бы не дополнительный жиклер, который, обогащая смесь, создает нужное качество. Как видно, в 3-диффузорном карбюраторе происходят явления, мало схожие с описанными в рецензируемой книге. Кроме того, неправильно заявлено автором о том, что (см. стр. 108) в трехдиффузорном карбюраторе происходит трехкратный распыл.

Дизельный двигатель сравнительно недавно стал применяться для автомобилей. В книге этому типу двигателя уделено некоторое место. Однако в описании дизельного двигателя автором допущен целый ряд неточностей. На стр. 194, в тексте к фиг. 129, автор описывает схему питания этого двигателя. По этой схеме двигатель совершенно не в состоянии работать.

Неверен текст к фиг. 134 на стр. 199, где объясняется работа топливного насоса. Описанная автором схема отличается от общеизвестной тем, что здесь плунжер за один цикл совершает не только поступательные ходы, но и вращательные.

К сожалению, полное подтверждение схемы работы этого несуществующего дизеля имеется на стр. 203 и на фиг. 139 при описании насоса-форсунки. Здесь также плунжер проделывает свой путь, вращаясь вокруг своей оси.

Не ясно высказана автором мысль на стр. 32 (строка 7 сверху) — «... выхлопные газы начинают выходить из цилиндра под действием давления, содержащегося (! — Э. М.) в них и избыточного давления». Во-первых, выражение «давление», содержащееся в газе», искажает физическую сущность давления и, кроме того, непонятно, как происходит выбрасывание газов из цилиндра с помощью двух давлений, одно из которых, очевидно, не «содержится» в газах.

Вот еще один пример неправильного представления физических законов природы. На стр. 103 (строка 3 снизу) сказано: «...по причине кипения воды в радиаторе атмосферное давление становится больше на  $0,3 \text{ кг/см}^2$ ».

Возможность изменения атмосферного давления с помощью кипящей воды в радиаторе автомобиля — нелепость.

На стр. 211 автор сообщает, что газы тяжелее воздуха (!) и т. д. и т. п.

В рецензируемой книге имеются и другие дефекты, являющиеся, на наш взгляд, следствием небрежности автора и редактора.

Пояснения к схеме фиг. 59 на стр. 73 вызывают недоумение. Здесь нарушены элементарные законы механики.

На фиг. 65 (стр. 80) выхлоп продолжается 240 градусов, в тексте же (стр. 81, строка 16 сверху)—250 градусов.

Схема на фиг. 109 осталась без пояснений.

На стр. 139 (строка 12 сверху) сказано, что удельный вес бензина равен  $0,760 \text{ кг/см}^3$ , т. е. в 10 раз больше чугуна, а на стр. 214, — что теплотворная способность пропана составляет  $10,972 \text{ ккал/кг}$  и бутана —  $10,845 \text{ ккал/кг}$ . Здесь размерность должна быть  $\text{ккал/г}$ .

На стр. 57 (5 строка снизу) подробно описывается конструкция, обеспечивающая очистку картера двигателя автомобиля ЗИС-150 с ссылкой на отсутствующую фигуру.

Шесть первых строчек стр. 81 посвящены тщательному пояснению отсутствующей фигуры.

На стр. 99 помещена фиг. 76-а, изображающая трубу со всеми заводскими размерами для изготовления.

Фиг. 89, 90, 92, 94 не поясняются в тексте, а по фигурам 62 и 63 нет даже и ссылки в тексте.

Мелких недочетов в книге много. Приводим часть из них в виде таблицы (стр. 124).

За последние годы творческой методической работы в наших специальных школах, техникумах и институтах уже более или менее установилась техническая терминология в области автомобилей и тракторов. Терминологическая комиссия при Академии наук Армянской ССР не спешит с обсуждением и окончательным утверждением терминологии в этой области, а в этом давно назрела необходимость.

Автор рецензируемой книги часто не считается даже с общепринятыми международными терминами.

Трудно понять, что означает подпись под фиг. 131 на стр. 197 «*փակ բացվողի կրիթիֆիկացիոն ցողիչ ֆոնզգրիտիքը «բացվուց»*» повидимому, что-то вроде огнемета. Этот термин предложен взамен форсунки, скромная роль которой заключается в впрыскивании совершенно холодного жидкого топлива. Автор, повидимому, упустил из виду, что на стр. 31 (фиг. 21) ту же форсунку он назвал — «*փակելի ցողիչ*».

Слово «*ցողիչ*» — означает распылитель, но что же тогда «*ֆոնզգրիտիքը*». Повидимому тоже распылитель, ибо по-русски приведенное предложение пишется так: «штифтовый распылитель закрытой форсунки».

Термин «дроссельная заслонка» автор переводит несоответствующими сущности детали словами «*հակադղիչ կափարիչ*» (противодействующая крышка). Странно, что эти слова и самому автору не понравились, ибо через несколько страниц он перешел к простому и понятному слову — дроссель. Но еще более странно, что автор не счел нужным предупредить об этом читателя.

Обратный клапан почему-то автором переводится как выпускной клапан (стр. 193, строка 16 сверху).

Надроссельное пространство (стр. 154, строка 2 снизу) передано словами *տրտադրանկային տարածություն*, а надилунжерное пространство (стр. 201, строка 2 снизу) — *քրնդպլունձերային տարածություն*:

Непонятно, какой газ имеет в виду автор под словами *ամփամնային գազ* (стр. 211, строка 8 снизу), что означает *ամախ պտտարի*

Страницы, строки, фиг.	Напечатано	Следует читать
20, 5 сн.	180° կիրառությունը	մեկ կիրառությունը
24, 3 сн.	նորարարություն	նորարարություն
38, 20 сн.	չրին	կեղուկին
40, 8 сн.	մխոցի դրանի պատերի	մխոցի և դրանի պատերի
фиг. 28	մխոցի փեղ	մխոցի փեղ
фиг. 57	12—մխոցի սառցարար	12. մխոցի սառցարար
53, 12 сн.	գրա սնուցող	գրա կա սնուցող
57, 16 сн.	հաղցիված	հաղցիված
62, 8 сн.	(լար)	(լար)
фиг. 55	սեղ	լիսեղ
72, 5 сн.	ՊԱԶ-51, նկ. 66, ՉԻՍ-150 և	ՊԱԶ-51, ՉԻՍ-150 և
	ուրիշները	ուրիշները
81, 16 сн.	250 աստիճան	240 աստիճան
84, 9 сн.	մեխանիկական որակի անկում	մեխանիկական հատուկությունների անկում
89, 7 сн.	վեցանկյունաձևով լույսը	վեցանկյունաձևով լույսը
160, 11 сн.	քառանկյունաձևով լույսը	քառանկյունաձևով լույսը
103, 2 сн.	«Պորեզ» ավտոմոբիլում	«Պորեզ» ավտոմոբիլում
104, 15 сн.	0,3 կգ/սմ <sup>2</sup>	0,3 կգ/սմ <sup>2</sup>
104, 18 сн.	ՊԱԶ-Մ 20 «Պորեզ» ին	ՊԱԶ-Մ 20 շարժիչները
108, 20 сн.	կգ/սմ <sup>2</sup>	կգ/սմ <sup>2</sup>
108, 4 сн.	ավտոմոբիլը	շարժիչը
126, 18 сн.	զործածել 15 անհատանոց	զործածել խոստովանող
136, 2 сн.	սպիրտի 15 տոկոսանոց	սպիրտի 15 տոկոսանոց
136, 7 сн.	դիցերիների և 70 տոկոս	դիցերիների և 70 տոկոս
139, 4 сн.	չրի խոստովանող	չրի խոստովանող
139, 12 сн.	պրոմեյլ	պրոմեյլ
146, 15 сн.	բանիման աստիճան	բանիման աստիճան
153, 5 сн.	գաղղիկը	գաղղիկը
156, 6 сн.	0,700-ից մինչև 0,760 կգ/սմ <sup>2</sup>	0,700-ից մինչև 0,760 կգ/սմ <sup>2</sup>
158, 111	հակադիզել կախարիչ	հակադիզել կախարիչ
160, 6 сн.	մասերի	մասերի
161, 7 сн.	1.—միկայր	1.—ցոցիչ
166, 3 сн.	որ պատվելով փոփոխում է	որ պատվելով փոփոխում են
190, 11 сн.	ձգանի կրկնությունը անցքերը	ձգանի անցքերը
192, 16 сн.	1950 թվականից	1948 թվականից
192, 3 сн.	խողովակը պետք է նստի	խողովակը պետք է փոխել
193, 18 сн.	զրիները փոխել	զրիները փոխել
193, 10 сн.	անձամեծատ աղելի էման է	անձամեծատ աղելի էման է
197, 4 сн.	զաղյուլ	զաղյուլ
197, 15 сн.	և ողի	և ողի
208, 6 сн.	բոցավառվելը դուրը մամանակամիջոց պահելու զեղքում	բոցավառվելը մամանակամիջոցի զեղքում
212, 18 сн.	փակ ցողիչների բոցավառվելը	փակ ցողիչների բոցավառվելը
213, 11 сн.	անկողնի բոցավառում է	անկողնի բոցավառում է
213, 9 сн.	մասերի 3—4-ից աղելի	մասերի 3/4-ից աղելի
214, 10 сн.	չմախույ	չմախույ
	չպետք է լինի	չպետք է լինի
	զուգ պիճակում	զուգ պիճակում
	Չերմությունում	չերմությունում
	10,972 կկալ/կգ է	10972 կկալ/կգ է

նա» (стр. 139, строка 15 снизу), что представляет собой «ցցաշոր» (стр. 77, фиг. 64), что означает «նահապնդողակ» (фиг. 92), «տրամաշափի անցքերը» (стр. 135, строка 7 снизу) и т. д. и т. п.

Объяснить незнакомый термин другим незнакомым термином — прием, конечно, неудачный. Так, на стр. 193, где говорится о требованиях, предъявляемых к дизельному топливу, читаем:

«10. Օժտված լինի բոցավառիկը պահելու փոքր ժամանակամիջոցով աշխարհ՝ ունենա փոքր ինդուկցիան շրջան»:

Дословный перевод часто не отражает физической сущности явления «Բոցավառիկը պահելը» — это неудачный перевод выражения «задержка воспламенения».

Слово «задержка», здесь употреблено в смысле «запаздывания» «ուշացում»:

Однако термин «индукционный период» также нельзя переводить как «Ինդուկցիան շրջան», ибо «период» — здесь имеет только один смысл — период времени. Точный смысл этого термина передается только как «Ինդուկցիան ժամանակամիջոց»:

Неправильный перевод указанного термина затрудняет читателя понять последующее изложение.

Так, автор на стр. 193 пишет:

«Ինդուկցիան շրջանը էական ազդեցություն է թողնում շարժիչի աշխատանքի վրա Այդ պայմաններում միաժամանակ կայրվի վառելանյութի մեծ բաժինը, որն արդեն մուտք է գործել դրանի մեջ: Շարժիչի աշխատանքն ավելի կոշտ է լինում, քանի որ մեշտումը դրանում ավելի արագ է տևում»:

Из всего вышеприведенного читатель ничего не понял, не только потому, что он не знает что означают «Ինդուկցիան շրջան» и «Կոշտ աշխատանք», но и по той причине, что сама мысль изложена в нем не совсем ясно. Поэтому и дальнейшее изложение недоступно для читателя:

«10. Բոցավառումը փոքր ժամանակամիջոց պահելու դեպքում շարժիչի աշխատանքը կատարվում է ավելի փափուկ, քանի որ այրվելու սկզբում մասնակցում է ոչ մեծ քանակությամբ վառելանյութ, որ կարողացել է մտնել դրանի մեջ, իսկ նեաադա մատուցումը շարունակվում է աչրվելու ժամանակ»:

Книга требует коренной переработки. В настоящем издании она не может быть рекомендована читателю.