

М. М. Джрбашян, А. Б. Тавадян

Некоторые экстремальные задачи для целых функций

§ 1. Некоторые экстремальные свойства целых функций экспоненциального типа

Обозначим через W_σ класс всех целых функций $f(z)$ экспоненциального типа с показателем $\leq \sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

Как доказали Палей и Винер [1], класс W_σ совпадает с множеством всех целых функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \varphi(u) du, \quad (2)$$

где $\varphi(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$; при этом по теореме Планшереля

$$\mu(f) = \left\{ 2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} |\varphi(u)|^2 du \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Пусть

$$a_0, a_2, \dots, a_{2p-2}; a_1, a_3, \dots, a_{2q-1} \quad (p \geq 1, q \geq 1)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $W_\sigma \{a_{2p-2}; 0\}$, ($p \geq 1$) все целые функции класса W_σ , для которых

$$f^{(2k)}(0) = a_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1). \quad (4)$$

Аналогично к классу $W_\sigma \{0; a_{2q-1}\}$ ($q \geq 1$) отнесем все целые функции $f(z)$ класса W_σ , для которых

$$f^{(2k+1)}(0) = a_{2k+1}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1). \quad (4')$$

Наконец, к классу $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ ($p \geq 1, q \geq 1$) отнесем те функции $f(z)$ из W_σ , которые удовлетворяют условиям (4) и (4') одновременно.

В настоящем параграфе мы дадим параметрическое представление функций определенных выше классов, что даст возможность

решить экстремальную задачу: среди всех функций $f(z)$, принадлежащих к любому из классов $W_p \{a_{2p-2}; 0\}$; $W_p \{0; a_{2q-1}\}$ или $W_p \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, найти функцию, минимизирующую интеграл $\mu(f)$.

Из этой экстремальной задачи следует необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять числа a_k ($k=0, 1, 2, \dots$), для того, чтобы существовала целая функция $f(z) \in W_p$ и такая, что $f^{(k)}(0) = a_k$, ($k=0, 1, 2, \dots$).

1. Пусть

$$\hat{X}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \hat{X}_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{(2k)!!} \frac{d^k(x^2-1)^k}{dx^k}, \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5)$$

нормированные и ортогональные на отрезке $(-1, +1)$ полными Лежандра. Известно, что для любой функции $\varphi(x) \in L_2(-1, +1)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-1}^{+1} |\varphi(x)|^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2; \quad \alpha_k = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \hat{X}_k(x) dx. \quad (6)$$

Пусть $\mu_0, \mu_2, \dots, \mu_{2p-2}; \mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{2q-1}$ ($p \geq 1, q \geq 1$) произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; 0\}$ все функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, для которых

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^{2k} dx = \mu_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1). \quad (7)$$

Аналогично к классу $L_2\{(-1, +1); 0; \mu_{2q-1}\}$ отнесем все функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, для которых

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^{2k+1} dx = \mu_{2k+1}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1). \quad (8)$$

Наконец, к классу $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$ отнесем те функции $\varphi(x)$ из $L_2(-1, +1)$, которые одновременно удовлетворяют обоим условиям (7) и (8). Условимся классы $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-p}; 0\}$ и $L_2\{(-1, +1); 0; \mu_{2q-1}\}$ считать крайними случаями класса $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$, когда из этот класс не накладываются соответственно условия (7) или (8).

Пусть

$$\hat{X}_{2k}(x) = b_0^{(2k)} + b_2^{(2k)} x^2 + \dots + b_{2k}^{(2k)} x_{2k}$$

и

$$\hat{X}_{2k+1}(x) = b_1^{(2k+1)} x + b_3^{(2k+1)} x^3 + \dots + b_{2k+1}^{(2k+1)} x^{2k+1},$$

так как $\hat{X}_{2k}(x)$ четный, а $\hat{X}_{2k+1}(x)$ нечетный полином.

Лемма 1. Функции $\varphi(x)$ класса $L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$ характеризуются тем, что в их разложении в ряд Фурье по полиномам (5) коэффициенты α_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots, p-1$), α_{2k+1} ($k=0, 1, 2, \dots, q-1$), получаемые из (6), вполне определены и отыскиваются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2k} &= b_0^{(2k)} \mu_0 + b_2^{(2k)} \mu_2 + \dots + b_{2k}^{(2k)} \mu_{2k}, & (k=0, 1, 2, \dots, p-1) \\ \alpha_{2k+1} &= b_1^{(2k+1)} \mu_1 + b_3^{(2k+1)} \mu_3 + \dots + b_{2k+1}^{(2k+1)} \mu_{2k+1}, & (k=0, 1, 2, \dots, q-1) \end{aligned} \right\} (9)$$

где $\mu_0, \mu_2, \dots, \mu_{2k}$ ($k=0, 1, 2, \dots, p-1$); $\mu_1, \mu_3, \dots, \mu_{2k+1}$ ($k=0, 1, 2, \dots, q-1$) определяются из условий (7) и (8).

Доказательство. В самом деле, $\hat{X}_{2k}(x)$ является четным полиномом и поэтому в силу (7)

$$\begin{aligned} \alpha_{2k} &= \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \hat{X}_{2k}(x) dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) (b_0^{(2k)} + b_2^{(2k)} x^2 + \dots + b_{2k}^{(2k)} x^{2k}) dx = \\ &= b_0^{(2k)} \int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx + b_2^{(2k)} \int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^2 dx + \dots + b_{2k}^{(2k)} \int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^{2k} dx = \\ &= b_0^{(2k)} \mu_0 + b_2^{(2k)} \mu_2 + \dots + b_{2k}^{(2k)} \mu_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1). \end{aligned}$$

Таким же образом определяются числа α_{2k+1} ($k=0, 1, 2, \dots, q-1$)

$$\alpha_{2k+1} = b_1^{(2k+1)} \mu_1 + b_3^{(2k+1)} \mu_3 + \dots + b_{2k+1}^{(2k+1)} \mu_{2k+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1),$$

так как $\hat{X}_{2k+1}(x)$ есть нечетный полином.

Теорема 1. В семействе функций $\varphi(x) \in L_2\{(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}\}$ минимум интеграла

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \int_{-1}^{+1} |\varphi(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

реализует функция

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{2k} \hat{X}_{2k}(x) + \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{2k+1} \hat{X}_{2k+1}(x), \quad (11)$$

где α_{2k} и α_{2k+1} определяются из (9).

Кроме того,

$$\min \Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi_0) = \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} |\alpha_{2k}|^2 + \sum_{k=0}^{q-1} |\alpha_{2k+1}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Доказательство. Так как из (6)

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \int_{-1}^{+1} |\varphi(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то в силу (9) $\min \Gamma(\varphi)$ достигается при $\alpha_k = 0$ ($k=2p, 2p+2, \dots, 2q+1, 2q+3, \dots$), отсюда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Как нетрудно видеть, результаты леммы и теоремы остаются справедливыми и для крайних классов

$$L_2[(-1, +1); \mu_{2p-2}; 0] \text{ и } L_2[(-1, +1); 0; \mu_{2q-1}],$$

если только в соответствующих формулировках и формулах оставить лишь выражения, характеризующие данный класс. Например, для класса функций $L_2[(-1, +1); \mu_{2p-2}; 0]$ характерным является определяемость из системы (9) лишь коэффициентов α_{2k} ($k=0, 1, 2, \dots, p-1$) в разложении этих функций в ряд Фурье по полиномам (5). Для этого же класса минимум интеграла $\Gamma(\varphi)$ реализует функция

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{2k} \dot{X}_{2k}(x), \quad (13)$$

при этом

$$\min \Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi_0) = \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} |\alpha_{2k}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

2. Установим теперь непустоту класса функций $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, а затем приведем решение поставленной выше экстремальной задачи.

Лемма 2. Класс функций $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление в виде

$$f(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) du, \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\in L_2(-1, +1); \mu_{2p-2}; \mu_{2q-1}, \\ \mu_k &= \frac{i^{-k} a_k}{\sigma^{k+1}}, \quad (k=0, 2, \dots, 2p-2; 1, 3, \dots, 2q-1). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Доказательство. По лемме 1 функции $\varphi(x)$, принадлежащие к классу (16), существуют. Отсюда следует, что функции $f(z)$, представимые в виде (15), не только принадлежат к классу W_σ , но и к классу $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$.

Обратно, если $f(z) \in W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, то тем более $f(z) \in W_\sigma$, и по теореме Палей и Винера имеет место представление (15), где $\varphi(x) \in L_2(-1, +1)$. Но если иметь в виду условия (4) и (4'), характеризующие класс $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, то из (15) заключаем, что функция $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16).

Теорема 2. Среди всех функций $f(z)$ класса $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ ($p \geq 1, q \geq 1$) минимум интеграла (1) реализует функция

$$f_0(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{2k} \dot{X}_{2k}\left(\frac{u}{\sigma}\right) + \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{2k+1} \dot{X}_{2k+1}\left(\frac{u}{\sigma}\right) \right\} e^{iuz} du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \alpha_{2k} \sqrt{(4k+1)\pi\sigma} \frac{I_{2k+\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}} + \\
 &+ i \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \alpha_{2k+1} \sqrt{(4k+3)\pi\sigma} \frac{I_{2k+\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

где $I_{n+\frac{1}{2}}(\sigma z)$ — функция Бесселя, и коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из формул (9), где

$$\begin{aligned}
 \mu_{2k} &= (-1)^k \frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1), \\
 \mu_{2k+1} &= (-1)^{k+1} \frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}} i, \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1),
 \end{aligned}$$

кроме того,

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left(2\pi\sigma \left[\sum_{k=0}^{p-1} |\alpha_{2k}|^2 + \sum_{k=0}^{q-1} |\alpha_{2k+1}|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Доказательство. Если $f(z) \in W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$, то имеет место представление (15), где, по лемме 2, $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16). Но по формуле Парсеваля из (15) следует, что

$$\mu(f) = \left(2\pi \int_{-\sigma}^{\sigma} \left| \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) \right|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi\sigma} \Gamma(\varphi). \quad (19)$$

Так как $\varphi(x)$ принадлежит к классу (16), то по теореме 1 $\min \Gamma(\varphi)$ достигается только для функции $\varphi_0(x)$, определяемой из (11), где коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются по (9). Отсюда и из (19) следует первая из формул (17). Но известно [2], что

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iux} X_n\left(\frac{u}{\sigma}\right) du = \sigma e^{n\frac{\pi}{2}i} \left(\frac{2\pi}{\sigma z}\right)^{\frac{1}{2}} I_{n+\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

где

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \hat{X}_n(x). \quad (5')$$

Из (17), (20) и (5') следует второе из формул (17).

Как нетрудно видеть, и здесь результаты леммы 2 и теоремы 2 остаются справедливыми для крайних классов:

$$W_\sigma \{a_{2p-2}; 0\} \text{ и } W_\sigma \{0; a_{2q-1}\}$$

при соответствующих видоизменениях в формулировках. Таким образом, имеют место:

Следствие 1. Функции класса $W_\sigma \{a_{2p-2}; 0\}$ представляются в виде (15), где $\varphi(x) \in L_2(-1, +1)$; $\mu_{2p-2}; 0$; $\mu_{2k} = (-1)^k \frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}}$ ($k=0, 1, 2, \dots, p-1$), при этом среди них минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{2k} \hat{X}_{2k} \left(\frac{u}{\sigma} \right) \right\} e^{iuz} du =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \alpha_{2k} \sqrt{(4k+1)\pi\sigma} \frac{I_{2k+\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}; \quad (17')$$

кроме того,

$$\mu(f_0) = \left\{ 2\pi\sigma \sum_{k=0}^{p-1} |\alpha_{2k}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (18')$$

где коэффициенты $\{\alpha_{2k}\}$ определяются следующим образом

$$\alpha_{2k} = b_0^{(2k)} \mu_0 + b_2^{(2k)} \mu_2 + \dots + b_{2k}^{(2k)} \mu_{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1),$$

$$\mu_{2k} = (-1)^k \frac{a_{2k}}{\sigma^{2k+1}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, p-1).$$

Следствие 2. Функции класса $W_\sigma(0; a_{2q-1})$ представляются в виде (15), где

$$\varphi(x) \in L_2\{(-1, +1); 0; \mu_{2q-1}\}, \quad \mu_{2k+1} = (-1)^{k+1} \frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}} i \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1),$$

при этом среди них минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_{2k+1} \hat{X}_{2k+1} \left(\frac{u}{\sigma} \right) \right\} e^{iuz} du =$$

$$= i \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^k \alpha_{2k+1} \sqrt{(4k+3)\pi\sigma} \frac{I_{2k+\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}}, \quad (17'')$$

при этом

$$\mu(f_0) = \left\{ 2\pi\sigma \sum_{k=0}^{q-1} |\alpha_{2k+1}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (18'')$$

где коэффициенты $\{\alpha_{2k+1}\}$ определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{2k+1} &= b_0^{(2k+1)} \mu_1 + b_2^{(2k+1)} \mu_3 + \dots + b_{2k+1}^{(2k+1)} \mu_{2k+1}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1), \\ \mu_{2k+1} &= (-1)^{k+1} \frac{a_{2k+1}}{\sigma^{2k+2}} i, \quad (k=0, 1, 2, \dots, q-1). \end{aligned} \right\}$$

Следствие 3. Среди всех функций класса $W_\sigma(a_0; a_1)$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z) = \frac{a_0}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{I_{\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}} + \frac{3a_1}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{I_{\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}} =$$

$$= a_0 \frac{\sin \sigma z}{\sigma z} + \frac{3a_1}{\sigma} \left[\frac{\sin \sigma z}{(\sigma z)^2} - \frac{\cos \sigma z}{\sigma z} \right]; \quad (20')$$

при этом

$$\mu(f_0) = \left\{ \pi \left[\frac{|a_0|^2}{\sigma} + \frac{3|a_1|^2}{\sigma^2} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (20')$$

Это следует из теоремы 2, при $p=1$ и $q=1$, если заметить, что

$$\mu_0 = \frac{a_0}{\sigma}, \quad \mu_1 = \frac{a_1}{\sigma^2 i}, \quad b_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b_1^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{\sigma \sqrt{2}} \quad \text{и}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a_1}{i \sigma^2}.$$

Следствие 1'. Среди всех функций класса $W_0(a_0; 0)$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z) = \frac{a_0}{\sigma} \sqrt{\frac{\pi \sigma}{2}} \frac{I_{\frac{1}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}} = a_0 \frac{\sin \sigma z}{\sigma z}, \quad (21)$$

при этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} |a_0|. \quad (21')$$

Это следует из следствия 1, при $p=1$, если заметить, что

$$\mu_0 = \frac{a_0}{\sigma}, \quad b_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \alpha_0 = \frac{a_0}{\sigma \sqrt{2}}.$$

Следствие 2'. Среди всех функций класса $W_0(0; a_1)$ минимум интеграла $\mu(f)$ реализует функция

$$f_0(z) = \frac{3a_1}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\pi \sigma}{2}} \frac{I_{\frac{3}{2}}(\sigma z)}{\sqrt{z}} =$$

$$= \frac{3a_1}{\sigma^2} \left[\frac{\sin \sigma z}{(\sigma z)^2} - \frac{\cos \sigma z}{\sigma z} \right], \quad (22)$$

при этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^2}} |a_1|. \quad (22')$$

Это следует из следствия 2, при $q=1$, если заметить, что

$$\mu_1 = \frac{a_1}{\sigma^2 i}, \quad b_1^{(1)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a_1}{i \sigma^2}.$$

3. Пусть $\{a_k\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел. Ставится вопрос: каково необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять эта последовательность, чтобы существовала функция $f(z) \in W_0$, такая, что

$$f^{(k)}(0) = a_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Теорема 3. Для существования функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям (23), необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty, \quad (24)$$

где

$$a_{2k} = \sum_{r=0}^k (-1)^k b_{2r}^{(2k)} \frac{\beta_{2r}}{\sigma^{2r+1}},$$

$$a_{2k+1} = i \sum_{r=0}^k (-1)^{k+1} b_{2r+1}^{(2k+1)} \frac{\beta_{2r+1}}{\sigma^{2r+2}}. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть существует функция $f_*(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы, тогда будем иметь

$$f_*(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) du,$$

где $\varphi(x) \in L_2(-1, +1)$. Но из (23) следует, что

$$a_k = i^k \int_{-\sigma}^{\sigma} u^k \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) du = i^k \sigma^{k+1} \int_{-1}^{+1} \varphi(x) x^k dx, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Обозначая

$$a_k = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \hat{X}_k(x) dx, \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

очевидно имеем $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty$. При этом, имея в виду представления

$$\hat{X}_{2k}(x) = \sum_{r=0}^k b_{2r}^{(2k)} x^{2k}, \quad \hat{X}_{2k+1}(x) = \sum_{r=0}^k b_{2r+1}^{(2k+1)} x^{2r+1},$$

получим формулы (24') для чисел $\{a_{2k}\}$ и $\{a_{2k+1}\}$.

Обратно, положим, что для последовательности $\{a_k\}$, определяемой из (24'), сходится ряд (25). Тогда по теореме Рисс — Фишера существует функция $\varphi(x) \in L_2(-1, +1)$, такая, что

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) \hat{X}_k(x) dx = a_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (26)$$

Функция

$$f_*(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) du \quad (27)$$

принадлежит к классу W , по теореме Палей — Винера. Покажем, что

$$f_*^{(k)}(0) = a_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (28)$$

Действительно, из (27) имеем, например,

$$f_*^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_{-1}^1 u^{2k} \varphi\left(\frac{u}{\sigma}\right) du = (-1)^k \sigma^{2k+1} \int_{-1}^1 \varphi(x) x^{2k} dx. \quad (29)$$

С другой стороны, из (26), в силу (29), имеем:

$$\alpha_{2k} = \sum_{r=0}^k b_{2r}^{(2k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) x^{2r} dx = \sum_{r=0}^k (-1)^r b_{2r}^{(2k)} \frac{f_*^{(2r)}(0)}{\sigma^{2r+1}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Аналогично получим

$$\alpha_{2k+1} = i \sum_{r=0}^k (-1)^{r+1} b_{2r+1}^{(2k+1)} \frac{f_*^{(2r+1)}(0)}{\sigma^{2r+2}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (31)$$

Сравнивая (30) и (31) с формулами (24'), приходим к заключению (28).

§ 2. Некоторые экстремальные свойства целых функций порядка $\frac{1}{2}$ и конечного типа

1. Обозначим через $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ класс всех целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leq \sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Докажем лемму, которая является непосредственным следствием теоремы Палей—Винера.

Лемма 3. Класс $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ совпадает с множеством всех целых функций $f(z)$, допускающих представление

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \cos \sqrt{xz} \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (2)$$

где

$$\int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx < +\infty. \quad (2')$$

При этом

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

В самом деле очевидно, что $f(z^2)$ — функция экспоненциального типа $\leq \sigma$. Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2)|^2 dt = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{-1} dx$$

следует, что $f(z^2) \in W_\sigma$ и поэтому по теореме Палей — Винера имеет место представление

$$f(\zeta^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \psi(u) e^{i u \zeta} du, \quad (4)$$

где $\psi(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

Но по формуле обращения Планшереля почти всюду на $(-\sigma, \sigma)$

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n f(x^2) e^{-i x u} dx = \\ &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n f(x^2) \cos x u dx. \end{aligned}$$

Поэтому $\psi(u)$ четная функция, и следовательно,

$$f(\zeta^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma} \psi(u) \cos u \zeta du.$$

Обозначив $\psi(x^{\frac{1}{2}}) = \varphi(x)$, после замены $u = x^{\frac{1}{2}}$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \cos \sqrt{xz} \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Далее, по равенству Парсеваля из (4) получим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{-1} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2)|^2 dt = \int_{-\sigma}^{\sigma} |\psi(u)|^2 du = \\ &= 2 \int_0^{\sigma} |\psi(u)|^2 du = \int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 x^{-1} dx < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть

$$a_0, a_1, \dots, a_r \quad (r \geq 0)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$ ($r \geq 0$) все целые функции $f(z)$ класса $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, для которых

$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r). \quad (5)$$

В настоящем параграфе дается параметрическое представление функций класса $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, что дает возможность решить следующую экстремальную задачу:

Среди всех функций $f(z)$, принадлежащих к классу $D_{\frac{1}{2}}\{\sigma; a_r\}$, найти функцию минимизирующую интеграл $\mu(f)$.

Из этой экстремальной задачи следует необходимое и достаточное условие, которому должны удовлетворять числа a_n ($n=0, 1, 2, \dots$) для того, чтобы существовала целая функция $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, такая, что $f^{(n)}(0) = a_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

2. Пусть $\hat{P}_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — нормированные и ортогональные на отрезке $(0, \sigma^2)$ полиномы Якоби с весом $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{P}_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}, \\ \hat{P}_n(x) &= \frac{1}{(2n)!!} \sqrt{\frac{4n+1}{2\sigma}} \cdot \frac{1}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \left[\left(\frac{2x-\sigma^2}{\sigma^2} \right)^2 - 1 \right]^n p(x) \right\} = \\ &= \sum_{k=1}^n B_k^{(n)} x^k, \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (6)$$

Известно, что для любой функции $\varphi(x)$ из класса (2') имеет место равенство Парсеваля

$$\int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2, \quad (7)$$

где $c_n = \int_0^{\sigma^2} \varphi(x) \hat{P}_n(x) x^{-\frac{1}{2}} dx$.

Пусть $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ ($r \geq 0$) — произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $L_2\{(0, \sigma^2); \mu_r\}$ все функции $\varphi(x)$ из класса (2'), для которых

$$\int_0^{\sigma^2} \varphi(x) x^{n-\frac{1}{2}} dx = \mu_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r). \quad (8)$$

Лемма 4. Функции $\varphi(x)$ класса (8) характеризуются тем, что в их разложении в ряд Фурье по полиномам (6) коэффициенты c_0, c_1, \dots, c_r отыскиваются следующим образом:

$$c_n = B_0^{(n)} \mu_0 + B_1^{(n)} \mu_1 + \dots + B_r^{(n)} \mu_r \quad (n=0, 1, 2, \dots, r), \quad (9)$$

где $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_r$ ($n=0, 1, 2, \dots, r$) определяются из условия (8).

Доказательство. В самом деле, при $n=0, 1, 2, \dots, r$

$$c_n = \int_0^{\sigma^2} \varphi(x) \hat{P}_n(x) x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int_0^{\sigma^2} \varphi(x) (B_0^{(n)} + B_1^{(n)}x + \dots + B_n^{(n)}x^n) x^{-\frac{1}{2}} dx = \sum_{k=0}^n B_k^{(n)} \mu_k.$$

Теорема 4. В семействе функций $L_2((0, \sigma^2); \mu_r)$ минимум интеграла

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

реализует функция

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=0}^r c_n \hat{P}_n(x); \quad (11)$$

при этом

$$\min \Gamma(\varphi) = \Gamma(\varphi_0) = \left\{ \sum_{n=0}^r |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Так как по (7)

$$\Gamma(\varphi) = \left\{ \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

то в силу (9) $\min \Gamma(\varphi)$ достигается при $c_n = 0$ ($n = r+1, r+2, \dots$). Отсюда следует утверждение теоремы.

Установим непустоту класса $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$.

Лемма 5. Класс функции $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$ совпадает с множеством целых функций, допускающих представление в виде

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \cos \sqrt{xz} \varphi(x) x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (12)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &\in L_2((0, \sigma^2); \mu_r), \\ \mu_n &= (-1)^n \sqrt{2\pi} a_n \frac{(2n)!}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Доказательство. По лемме 4 функции, принадлежащие к классу (13), существуют. Отсюда следует, что функции $f(z)$, представимые в виде (12), не только принадлежат к классу $D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, но и к классу $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$, так как из (12) имеем:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left\{ \frac{(-1)^n}{2n! \sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \varphi(x) x^{n-\frac{1}{2}} dx \right\},$$

и по (8)
$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \frac{\mu_n}{2n! \sqrt{2\pi}} = \frac{a_n}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r).$$

т. е.
$$f^{(n)}(0) = a_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r).$$

Обратно, если $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$, то тем более $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$ и по лемме 3 имеет место представление (12), где $\varphi(x)$ из класса (2'). Но если иметь в виду условия (5), характеризующие класс $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$, то из (12) будем иметь:

$$\int_0^{\sigma^2} \varphi(x) x^{n-1} dx = (-1)^n \sqrt{2\pi} a_n \frac{2n!}{n!} = \mu_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r),$$

т. е. $\varphi(x) \in L_2(0, \sigma^2; \mu_r)$.

Теорема 5. Среди всех функций $f(z)$ класса $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$ минимум интеграла (1) реализует функция

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \left\{ \sum_{n=0}^r c_n \dot{P}_n(x) \right\} \cos \sqrt{xz} x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (14)$$

где коэффициенты $\{c_n\}$ определяются из (9), и

$$\mu_n = (-1)^n \sqrt{2\pi} a_n \frac{2n!}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r).$$

Кроме того,

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left\{ \sum_{n=0}^r |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Если $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_r)$, то имеет место представление (12), где, по лемме 3, $\varphi(x)$ принадлежит к классу (13). Но по лемме 3 из (12) следует, что

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{-\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \Gamma(\varphi). \quad (15)$$

Так как $\varphi(x)$ принадлежит к классу (13), то по теореме 4 $\min \Gamma(\varphi)$ достигается только для функции $\varphi_0(x)$, определяемой из (11), где коэффициенты $\{c_n\}$ определяются по (9). Отсюда и из (15) следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Среди всех функций класса $D_{\frac{1}{2}}(\sigma; a_0)$ минимум интеграла (1) реализует функция

$$f_0(z) = a_0 \frac{\sin \sigma \sqrt{z}}{\sigma \sqrt{z}}; \quad (16)$$

при этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} |a_0|.$$

Это следует из теоремы 2, при $r=0$, если заметить, что

$$\mu_0 = \sqrt{2\pi} a_0; \quad B_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \quad \text{и} \quad c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}}.$$

3. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность комплексных чисел тогда имеет место теорема:

Теорема 6. Для существования функции $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}(\sigma)$, удовлетворяющей условиям (16), необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty, \quad (17)$$

где

$$c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k B_k^{(n)} \frac{2k!}{k!}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, поэтому опускается.

4. Обозначим через $D_{\frac{1}{2}}^*(\sigma)$ класс всех целых функций $f(z)$ порядка $\frac{1}{2}$ и типа $\leq \sigma$, для которых существует интеграл

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Докажем лемму:

Лемма 3. Класс $D_{\frac{1}{2}}^*(\sigma)$ совпадает с множеством всех целых функций, допускающих представление

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} \varphi(x) x^{\frac{1}{2}} dx, \quad (19)$$

где

$$\int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx < +\infty. \quad (19')$$

Кроме того,

$$\mu(f) = \left\{ \int_0^{\sigma} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

В самом деле очевидно, что $zf(z^2)$ функция экспоненциального типа $\leq \sigma$. Из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t^2)t|^2 dt = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx$$

следует, что $zf(z^2) \in W_{\sigma}$ и поэтому по теореме Палей — Винера имеет место представление

$$\zeta f(z^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma} \psi(u) e^{iuz} du, \quad (21)$$

где $\psi(u) \in L_2(-\sigma; \sigma)$.

Но по формуле обращения Планшереля почти всюду на $(-\sigma, \sigma)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n xi(x^2) e^{-iux} dx = \\ &= \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^n xf(x^2) \sin ux dx.\end{aligned}$$

Поэтому $\psi(u)$ нечетная функция на $(-\sigma, \sigma)$ и, следовательно,

$$\zeta i(\zeta^2) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\sigma \psi(u) \sin u \zeta du.$$

Обозначив $i\psi(x^2) = \varphi(x)$, после замены $u = x^2$, имеем представление

$$i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} \varphi(x) x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Далее, по равенству Парсеваля из (4) получим:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |i(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx &= \int_{-\infty}^\infty |f(t^2)|^2 dt = \int_{-\sigma}^\sigma |\psi(u)|^2 du = \\ &= 2 \int_0^\sigma |\psi(u)|^2 du = \int_0^{\sigma^2} |\varphi(x)|^2 x^{\frac{1}{2}} dx < +\infty.\end{aligned}$$

Пусть

$$a_0, a_1, \dots, a_r \quad (r \geq 0)$$

произвольные комплексные числа. Отнесем к классу $D_1^*(\sigma; a_r)$ все целые функции $i(z)$ класса $D_1^*(\sigma)$, для которых

$$i^{(n)}(0) = a_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r). \quad (22)$$

При помощи этих лемм устанавливаются следующие предложения, доказательства которых мы опускаем, так как они вполне аналогичны доказательствам теорем 5 и 6.

Теорема 5'. Среди всех функций $i(z)$ класса $D_1^*(\sigma; a_r)$ ($r \geq 0$) минимум интеграла реализует функция

$$i_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^r c_n \hat{Q}_n(x) \right) \frac{\sin \sqrt{xz}}{\sqrt{xz}} x^{\frac{1}{2}} dx,$$

где $\hat{Q}_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} x^k$, ($n=0, 1, 2, \dots$) — нормированные и ортогональ-

ные на отрезке $(0, \sigma^2)$ полиномы Якоби с весом $\rho(x) = x^{\frac{1}{2}}$, а коэффициенты $\{c_n\}$ определяются следующим образом:

$$c_n = A_0^{(n)} \mu_0 + A_1^{(n)} \mu_1 + \dots + A_n^{(n)} \mu_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r),$$

где
$$\mu_n = (-1)^n \sqrt{2\pi} a_n \frac{(2n+1)!}{n!}, \quad (n=0, 1, 2, \dots, r).$$

При этом

$$\min \mu(f) = \mu(f_0) = \left\{ \sum_{n=0}^r |c_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 1. Среди всех функций класса $D_{\frac{1}{2}}^*(\sigma; a_0)$ минимум интеграла (18) реализует функция

$$f_0(z) = 3a_0 \left\{ \frac{\sin \sigma \sqrt{z}}{(\sigma \sqrt{z})^2} - \frac{\cos \sigma \sqrt{z}}{(\sigma \sqrt{z})^3} \right\}.$$

Это следует из теоремы 2', при $r=0$, если заметить, что в этом случае

$$\mu_0 = a_0 \sqrt{2\pi}; \quad A_0^{(0)} = \sqrt{\frac{3}{2\sigma^2}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^3}}.$$

При этом

$$\mu(f_0) = \sqrt{\frac{3\pi}{\sigma^3}} |a_0|.$$

Аналогично и в этом случае имеет место:

Теорема 6'. Для существования функции, $f(z) \in D_{\frac{1}{2}}^*(0; a_2)$, удовлетворяющей условиям (16), необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

где
$$c_n = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k A_k^{(n)} \frac{(2k+1)!}{k!}.$$

Сектор математики и механики АН Арм. ССР
и Ереванский госуниверситет им. Е. М. Мологова

Поступило 28 VI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Paley R. and Wiener N. Fourier Transforms in the complex Domain (1934), pp. 12—15.
2. Watson Г. Н. Теория бесселевых функций (1949), гл. III.

Մ. Մ. ԶԻՐԱՅԱՆ, Ս. Ռ. ԹԱՎԱԴՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԱՄԲՈՂԶ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Նշանակենք W_σ բոլոր այն էքստրեմալ նշվող ամբողջ ֆունկցիաների դասը, որոնց ցուցիչը $< \sigma$ և որոնց համար դոմայնի լուծում ունի

$$\mu(f) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^\sigma dx \right\} \quad (1)$$

ինտեգրալը:

Վերագրենք $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ ($p \geq 1, q \geq 1$) դասին W_σ դասի այն ֆունկցիաները, որոնք բավարարում են

$$\begin{cases} f^{(2k)}(0) = a_{2k} & (k=0, 1, \dots, p-1) \\ f^{(2k+1)}(0) = a_{2k+1} & (k=0, 1, \dots, q-1) \end{cases} \quad (2)$$

պայմաններին, որտեղ $a_0, \dots, a_{2p-2}; a_1, \dots, a_{2q-1}$ կամավոր կամ պիտի թվեր են:

Հոդվածում բերվում է $W_\sigma \{a_{2p-2}; a_{2q-1}\}$ դասի ֆունկցիաների պարամետրական ներկայացումը, ինչպես նաև արվում է այդ դասի մեջ $\mu(f)$ ֆունկցիոնալին մինիմում տվող ֆունկցիան:

Նմանօրինակ էքստրեմալ խնդիր դրվում և լուծվում է նաև $\frac{1}{2}$ կարգի և նորմալ ախի ամբողջ ֆունկցիաների համար:



ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапожжян

Изгиб эллиптической плиты

В работе, методом Н. И. Мусхелишвили [1], решен ряд задач об изгибе зашцеиленной по всеиу контуру эллиптической плиты при нагрузке, равномерно-распределенной: 1) по площади эллипса конфокальной с данной, 2) по площади круга, центр которого совпадает с центром плиты, 3) по длине одного из главных диаметров эллипса.

§ 1. Общее решение задачи об изгибе зашцеиленной эллиптической плиты

Расположим оси x и y по большим и малым диаметрам эллипса. Прогиб плиты — $w(x, y)$ — определяется из дифференциального уравнения

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (1.1)$$

где D — жесткость плиты, p — интенсивность нормальной нагрузки.

Решение (1.1) представим в виде

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y), \quad (1.2)$$

где f — частное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее, при частичной нагрузке, условиям сопряжения нагруженной и ненагруженной частей плиты; Φ — бигармоническая функция

$$\Phi = \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.3)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — аналитические функции комплексного переменного z , функции $\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\chi}(\bar{z})$ — сопряженные с ними.

Функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$, следовательно и бигармоническая функция Φ , определяются из контурных условий. Когда плита зашцеилена по контуру, контурные условия будут

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (1.4)$$

где n — внешняя нормаль к контуру.

Из (1.4) следует

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad (1.5)$$

где s — касательная к контуру.

Из (1.5) следует, что на контуре $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ и $w = A = \text{const}$. Следовательно, (1.4) можно заменить условием (1.5) и дополнительным условием $A = 0$.

Пусть каждая из функций f и Φ на контуре представляется рядом Фурье. Обозначим постоянные члены рядов для f_s и Φ_s через $\Pi[f_s]$ и $\Pi[\Phi_s]$; тогда условие $A = 0$, согласно (1.2), заменяется

$$\Pi[f_s] + \Pi[\Phi_s] = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом (1.5) и (1.6) эквивалентны условиям (1.4).

Имея в виду (1.2), (1.3) и тождество

$$\frac{\partial w}{\partial n} - i \frac{\partial w}{\partial s} = -2i \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s},$$

из (1.5) и (1.6) получим контурные условия защемленной плиты:

$$\bar{z}_s \varphi'(z_s) + \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \psi(z_s) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s, \quad (1.7)$$

$$\Pi[\bar{z}_s \varphi(z_s) + z_s \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \chi(z_s) + \bar{\chi}(\bar{z}_s)] = - \Pi[f_s], \quad (1.8)$$

где
$$\varphi'(z) = \frac{d}{dz}[\varphi(z)], \quad \psi(z) = \frac{d}{dz}[\chi(z)]. \quad (1.9)$$

Н. И. Мусхелишвили представил контурные условия плоской задачи теории упругости при заданных на контуре внешних силах в виде

$$\bar{z}_s \varphi'(z) + \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \psi(z_s) = f_1 - if_2. \quad (1.10)$$

Сопоставляя (1.7) и (1.10) заключаем, что если для плоской задачи найдены функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, то, заменив в них $f_1 - if_2$ через $\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s$, получим значения функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для задачи изгиба плиты, защемленной по всему контуру. Функция же $\chi(z)$ определяется по (1.9)

$$\chi(z) = \int \psi(z) dz + C, \quad (1.11)$$

при этом C определяется по (1.8).

Н. И. Мусхелишвили [1] дано эффективное решение плоской задачи сплошного эллипса. Приведем основные результаты этого решения. С помощью разреза по отрезку, соединяющему фокусы эллипса, превратим односвязную область эллипса в двухсвязную. Этот разрез можно рассматривать как эллипс, малая полуось которого равна нулю. Полученная двухсвязная область эллипса отображается с помощью функции

$$z = K \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right), \quad (\zeta = \rho e^{i\theta}) \quad (1.12)$$

на кольцо в плоскости ζ с внутренним радиусом $\rho = 1$ и внешним $\rho = \rho_0 > 1$. R и ρ_0 имеют значения

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}, \quad (1.13)$$

где a и b — полуоси эллипса.

Пользуясь условием (1.10) и имея в виду, что точкам $\zeta = e^{i\theta}$ и $\zeta = e^{-i\theta}$ соответствует одна и та же точка на отрезке, соединяющем фокусы эллипса, получим следующие выражения для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ [1]:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right), \quad (1.14)$$

$$\psi(z) = \psi_1(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta^{-2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\zeta^k - \frac{1}{\zeta^{k+2}} \right), \quad (1.15)$$

$$a_1 = \bar{a}_1 = \frac{\rho_0 A_{-1}}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}, \quad (1.16)$$

$$a_k = \frac{k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})c_k - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})\bar{c}_k}{k^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})^2 - (\rho_0^{2k} - \rho_0^{-2k})^2}, \quad k = (2, 3, \dots), \quad (1.17)$$

$$b_k = A_k \rho_0^{-k} - (k+2)\rho_0^2 a_{k+2} + \rho_0^{-2(k+2)} \bar{a}_{k+2} - k\rho_0^{-2} a_k - \rho_0^{-2k} a_k, \quad k = (0, 1, 2, \dots), \quad (1.18)$$

$$c_0 = 0, \quad c_{2k} = \sum_{n=0}^{k-1} [A_{2n} \rho_0^{-2n} + A_{2(n+1)} \rho_0^{2(n+1)}], \quad (1.19)$$

$$k = (1, 2, \dots),$$

$$c_{2k+1} = \rho_0 A_{-1} + \sum_{n=1}^k [A_{2n-1} \rho_0^{-2n+1} + A_{-2n-1} \rho_0^{2n+1}], \quad (1.20)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Постоянные A_k являются коэффициентами разложения в комплексный ряд Фурье функции

$$(f_1 - if_2)(1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (1.21)$$

Заменяя в (1.21) выражение $f_1 - if_2$ через $\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s$, получим:

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s (1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ik\theta}. \quad (1.22)$$

Формулами (1.14)–(1.21) определяются функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для плоской задачи сплошного эллипса при заданных на контуре внешних силах. Формулы (1.14)–(1.20) и (1.22) определяют функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для задачи об изгибе эллиптической плиты, защемленной по всему контуру при действии произвольной нагрузки. Выражения для $\chi(z)$ определяем согласно (1.11), (1.12) и (1.15)

$$\chi(z) = \chi_1(\zeta) = R \sum_1^{\infty} \frac{b_{k-1}}{k} \left(\zeta^k + \frac{1}{\zeta^k} \right) + C. \quad (1.23)$$

Мнимую часть постоянной C можно выбрать произвольно, в частности принять равной нулю. Тогда, внося (1.14) и (1.23) в (1.8), получим:

$$C = -\frac{1}{2} \Pi [f_3] - \operatorname{Re}_1(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}),$$

или, имея в виду (1.16), получим:

$$C = -\frac{1}{2} \Pi [f_3] - \frac{R\rho_0(\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} A_{-1}. \quad (1.24)$$

Переходим к решению конкретных задач.

§ 2. Эллиптическая плита, защемленная по контуру под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади эллипса, конфокальной с данной

При решении этой задачи мы пользуемся результатами предыдущего параграфа, а также другими результатами, полученными в работе [2].

Внося (1.3) в (1.2), получим:

$$w = f(z, \bar{z}) + \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (2.1)$$

где, согласно [3], для замкнутой области нагруженного эллипса

$$f(z, \bar{z}) = \frac{\rho z^2 \bar{z}^2}{64D} - \frac{\rho}{32D} \left[\frac{m}{3} (\bar{z} z^3 + z \bar{z}^3) - \frac{2R^2(1-m^2)}{m} z \bar{z} - \frac{m^2}{12} (z^4 + \bar{z}^4) - R^2(1-m^2)(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{R^2(1-m^2)(5+m)}{2m^2} \right], \quad (2.2)$$

а для ненагруженной области плиты

$$f(z, \bar{z}) = f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \mu \left[\left(m\zeta \bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta \bar{\zeta}} + m \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} + m \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{1+m^2}{2} \right) \ln(\zeta \bar{\zeta}) + \frac{m}{6} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta^3} + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}^3} + \frac{1}{\zeta^2 \bar{\zeta}} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2 \zeta} \right) + \frac{3m}{2} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} + \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} + \frac{2}{\zeta \bar{\zeta}} \right) - \frac{1+m^2}{24} \left(\frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\bar{\zeta}^4} \right) + \frac{1+m^2}{3} \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{1}{\bar{\zeta}^2} \right) \right], \quad (2.3)$$

где

$$m = \frac{a^0 - b^0}{a^0 + b^0}, \quad R = \frac{1}{2} \sqrt{(a^0)^2 - (b^0)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (2.4)$$

$$\mu = \frac{\rho R^4 (1 - m^2)}{16 m^2 D},$$

a^0 и b^0 — полуоси нагруженного эллипса.

Полагая в (2.3) $\zeta = \rho_0 e^{i\theta}$, найдем значение функции f на контуре плиты:

$$f_s = \mu \left\{ \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{1+m^2}{2} \right] \ln(m\rho_0) + \right. \\ \left. + \frac{m}{6} [\rho_0^{-4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - \rho_0^{-2} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta})] + \frac{3m}{2} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\rho_0^{-2}) - \right. \\ \left. - \frac{1+m^2}{24} \rho_0^{-4} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) + \frac{1+m^2}{3} \rho_0^{-2} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) \right\}. \quad (2.5)$$

Из (2.5) получим:

$$\Pi[f_s] = \mu \left\{ \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} \right] \ln(m\rho_0^2) + 3m\rho_0^{-2} \right\}. \quad (2.6)$$

Согласно (2.3) имеем:

$$(1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \frac{\mu}{R\rho_0} \left\{ m (\rho_0^2 e^{-i\theta} - \rho_0^{-2} e^{-i\theta} + e^{i\theta} - e^{-3i\theta}) \ln(m\rho_0^2) + \right. \\ \left. + \left[m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) e^{-i\theta} + e^{i\theta} + e^{-3i\theta} + \frac{1+m^2}{2} e^{-i\theta} \right] - \frac{m}{6} (3\rho_0^{-2} e^{-5i\theta} + \right. \\ \left. 3\rho_0^{-4} e^{-3i\theta} + \rho_0^{-4} e^{i\theta}) + \frac{1+m^2}{6} \rho_0^{-4} e^{-5i\theta} - \frac{3m}{2} (e^{-3i\theta} + 2\rho_0^{-2} e^{-i\theta} - e^{i\theta}) \right\}. \quad (2.7)$$

Сопоставляя (2.7) с (1.22), определим коэффициенты A_k :

$$A_1 = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left[m \ln(m\rho_0^2) + \frac{5m}{2} - \frac{m}{6} \rho_0^{-4} \right], \quad A_3 = -\frac{\mu m}{6R} \rho_0^{-3},$$

$$A_{-1} = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left[m (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) - 3m - 3m\rho_0^{-2} \right],$$

$$A_{-3} = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left[-m \ln(m\rho_0^2) - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \rho_0^{-4} - \frac{2(1+m^2)}{3} \rho_0^{-2} \right],$$

$$A_{-5} = -\frac{\mu}{R\rho_0} \left(-\frac{m}{2} \rho_0^{-2} + \frac{1+m^2}{6} \rho_0^{-4} \right).$$

Остальные коэффициенты $A_k = 0$.

Подставляя значения A_k в (1.19) и (1.20), получим:

$$c_3 = -\frac{\mu}{2R(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} (3m\rho_0^2 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}),$$

Остальные коэффициенты $c_k = 0$.

Внеся значения A_k и c_3 в (1.16) и (1.17), определим a_k :

$$a_1 = -\frac{\mu}{2R(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left[m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} - 3m\rho_0^{-2} \right], \quad a_2 = -\frac{\mu}{6R} \frac{3m\rho_0^2 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})}.$$

Остальные коэффициенты $a_k = 0$.

Подставляя значения A_1, A_2, a_1 и a_2 в (1.18), определим b_k :

$$b_1 = -\frac{2\mu}{3R} \frac{8m - \rho_0^{-2}(3 + \rho_0^{-4})(1 + m^2)}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})}, \quad b_2 = -\frac{b_1}{4}.$$

Остальные коэффициенты $b_k = 0$.

Внеся (2.6) и значение коэффициента A_{-1} в (1.24), определим C :

$$C = -\frac{\mu}{4} \left[(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \frac{8m - 2m(\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) - (1 + m^2)(\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right].$$

Подставляя значения a_k, b_k и C в (1.14) и (1.23), определим функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = -\frac{\mu}{2R(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left[m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \ln(m\rho_0^2) + m(\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) + \frac{1+m^2}{2} - 3m\rho_0^{-2} \right] \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\mu}{6R} \frac{3m\rho_0^2 - 1 - m^2 - m\rho_0^{-6}}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})} \left(\zeta^3 + \frac{1}{\zeta^3} \right), \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = \chi_1(\zeta) = & -\frac{\mu}{4} \left[(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \right. \\ & \left. + \frac{8m - 2m(\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) - (1 + m^2)(\rho_0^2 + \rho_0^{-2})}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right] - \\ & -\frac{\mu}{24} \frac{8m - \rho_0^{-2}(3 + \rho_0^{-4})(1 + m^2)}{(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4})} \left[8 \left(\zeta^2 + \frac{1}{\zeta^2} \right) - \left(\zeta^4 + \frac{1}{\zeta^4} \right) \right]. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Внеся (2.8) и (2.9) в (2.1), определим прогиб w . В частности, для центра плиты ($z=0, \zeta = \pm i$) получим:

$$w_0 = \frac{\rho R^4(1 - m^2)}{64 m^2 D} \left\{ -2(1 + m^2) \ln(m\rho_0^2) + \frac{1}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4}} [4m(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(\rho_0^4 + 1 + \rho_0^{-4}) - (3\rho_0^4 + \rho_0^{-4}) + m^2(\rho_0^4 + 3\rho_0^{-4}) - 8(1 - m^2)] \right\}. \quad (2.10)$$

При $a^0 = a$ и $b^0 = b$, т. е. когда нагрузка равномерно распределена по всей площади плиты, из (2.10) получим:

$$w_0 = \frac{\rho a^4 b^4}{8D(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)},$$

что совпадает с известным результатом.

§ 3. Эллиптическая плита, защемленная по всему контуру под действием нагрузки, равномерно распределенной по площади круга, центр которого совпадает с центром эллипса

Для рассматриваемой частичной нагрузки общее выражение прогиба можно представить так [3]:

$$w = f(z, z) + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (3.1)$$

где для замкнутой нагруженной области круга

$$f = \frac{Pr_0^2}{16D} \left[2 \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + z\bar{z} - \frac{5}{4} r_0^2 \right], \quad (3.2)$$

а для ненагруженной замкнутой области плиты

$$f = \frac{P}{16\pi D} \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z\bar{z}, \quad (3.3)$$

где p — интенсивность равномерной нагрузки, r_0 — радиус нагруженного круга, $P = \pi r_0^2 p$ — равнодействующая нагрузки.

Согласно (1.12) и (3.3) на контуре имеем:

$$f_s = \frac{P}{16\pi D} \left[R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \left[R^2 (\rho_0 e^{i\theta} + \rho_0^{-1} e^{-i\theta}) (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta}) \right].$$

Полагая $\rho_0 > 1$, разложим f_s в ряд Фурье:

$$f_s = \frac{P}{16\pi D} \left[R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \left\{ 2 \ln(R\rho_0) - \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2ik\theta} + e^{-2ik\theta}}{k\rho_0^{2k}} \right\}.$$

Постоянный член этого ряда будет:

$$\Pi[f_s] = \frac{P}{16\pi D} \left[r_0^2 \ln(R\rho_0) + 2R^2 (\rho_0^2 + \rho_0^{-2}) \ln(R\rho_0) + 2R^2 \rho_0^{-2} \right]. \quad (3.4)$$

Из (3.3) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{P}{16\pi D} \left(z + \bar{z} \ln z \bar{z} + \frac{r_0^2}{2z} \right).$$

Подставляя вместо z выражение (1.12) и разлагая в ряд Фурье полученный результат на контуре, будем иметь:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \frac{P}{16\pi D} \left\{ R (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta}) + R (\rho_0 e^{-i\theta} + \rho_0^{-1} e^{i\theta}) [2 \ln(R\rho_0) - \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{e^{2ik\theta} + e^{-2ik\theta}}{k\rho_0^{2k}}] + \frac{r_0^2}{2R\rho_0} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-i(2k+1)\theta}}{\rho_0^{2k}} \right\}. \quad (3.5)$$

Внеся (3.5) в (1.22) и сравнивая коэффициенты при e^{ikz} , получим:

$$A_{2k} = 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$A_1 = -\lambda \{ 2 [1 + \ln(R\rho_0)] - \rho_0^{-4} \},$$

$$A_{-1} = -\lambda \left\{ (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) [1 + 2 \ln(R\rho_0)] + \frac{r_0^2}{2R^2} \right\},$$

$$A_{-3} = \lambda \left[2 \ln(R\rho_0) + \frac{3}{2} \rho_0^{-4} + \frac{r_0^2}{R^2 \rho_0^2} \right],$$

$$A_{2k-1} = -\lambda \frac{(-1)^k}{(k^2-1)\rho_0^{2k}} \left[\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \frac{1}{k} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \right],$$

$$(k=2, 3, \dots).$$

$$A_{-2k-1} = \lambda \left\{ \frac{(-1)^k}{(k^2-1)\rho_0^{2k}} \left[\rho_0^2 + \rho_0^{-2} + \frac{2k^2-1}{k} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) \right] - \frac{(-1)^k r_0^2}{R\rho_0^{2k-1}} \right\}, \quad (k=2, 3, \dots),$$

3.6

где

$$\lambda = \frac{PR}{16\pi \cdot D\rho_0}.$$

Подставляя значения A_k в (1.19) и (1.20), получим:

$$c_{2k} = 0, \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$c_{2k+1} = \frac{PR}{16\pi D} \left\{ -\rho_0^2 + \frac{1}{2\rho_0^2} + \frac{1}{2\rho_0^6} + \sum_{n=2}^k (-1)^n \left[\rho_0^2 \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) - \rho_0^{-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n(n-1)\rho_0^{4n-4}} - \frac{1}{n(n+1)\rho_0^{4n+2}} \right] \right\} - \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \left[1 + 2 \sum_{n=2}^k (-1)^n \right],$$

или, имея в виду, что

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{(-1)^k}{k}, \quad \sum_{n=2}^k (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^k}{k+1},$$

$$\sum_{n=2}^k (-1)^n \left[\frac{1}{n(n-1)\rho_0^{4n-2}} + \frac{1}{n(n+1)\rho_0^{4n+2}} \right] = \frac{1}{2\rho_0^6} + \frac{(-1)^k}{k(k+1)\rho_0^{4k+2}},$$

$$\sum_{n=1}^k (-1)^n = -\frac{1-(-1)^k}{2}.$$

получим:

$$c_{2k+1} = \frac{PR}{16\pi D} (-1)^k \left[\frac{\rho_0^2}{k} - \frac{1}{(k+1)\rho_0^2} - \frac{1}{k(k+1)\rho_0^{4k+2}} \right] - (-1)^k \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \quad (3.7)$$

Внеся значение A_{-1} из (3.6) в (1.16), определим a_1 :

$$a_1 = -\frac{PR}{32\pi D} [1 + 2\ln(R\rho_0)] - \frac{Pr_0^2}{64\pi DR} \frac{1}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \quad (3.8)$$

Из (1.17) и (1.18), имея в виду (3.6) и (3.7), получим:

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{PR}{16\pi D} \frac{\rho_0^2(k+1) - \rho_0^{-2}k - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1) \left[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2} \right]} - \frac{Pr_0^2}{32\pi DR} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}, \quad (k=1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

$$b_{2k-1} = -\frac{PR}{4\pi D} \frac{(-1)^k k (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} + \frac{Pr_0^2 (-1)^k}{32\pi DR} \left[\frac{(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} - \frac{(2k-1)\rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}}{(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}} \right], \quad (k=1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Из (1.24), (3.4) и (3.6) имеем

$$C = \frac{PR^2}{32\pi D} (\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \left[2\ln(R\rho_0) - \frac{\rho_0^2 + \rho_0^{-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right]. \quad (3.11)$$

Внеся (3.8)–(3.11) в (1.14) и (1.23), определим функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$:

$$\varphi(z) = \varphi_1(\zeta) = -\frac{PR}{64\pi D} \left\{ 2[1 + 2\ln(R\rho_0)] + \frac{r_0^2}{R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \right\} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{PR}{32\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \left[2 \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1)} - \frac{r_0^2}{R^2} \right] \left(\zeta^{2k+1} + \frac{1}{\zeta^{2k+1}} \right). \quad (3.12)$$

$$\chi(z) = \chi_1(\zeta) = \frac{PR^2}{64\pi D} \left[2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - \frac{2r_0^2}{R^2} \ln(R\rho_0) + \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\rho_0^2 + \rho_0^{-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right] - \frac{PR^2}{64\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left[\frac{r_0^2}{R^2} \frac{(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} - \frac{r_0^2}{2} \frac{(2k-1)\rho_0^2 + \rho_0^{-4k+2}}{(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}} \right]$$

$$\left[\frac{8k(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} \right] \left(\zeta^{2k} + \frac{1}{\zeta^{2k}} \right) \quad (3.13)$$

Подставив (3.12) и (3.13) в (3.1) и заменив $z\bar{z}$ через r^2 , а ζ через $\rho e^{i\theta}$, найдем выражение прогиба:

в замкнутой области нагруженного круга

$$w = \frac{Pr^4}{64D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \left(\frac{r}{R\rho_0} \right) - \frac{5}{4} r_0^2 + R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \frac{r_0^2}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left(\rho_0^2 + \rho_0^{-2} - \frac{r^2}{R^2} \right) \right] + \Phi \quad (3.14)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left(r^2 + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \left(\frac{r}{R\rho_0} \right) + \frac{P}{16\pi D} \left[R^2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \frac{r_0^2}{2(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \left(\rho_0^2 - \rho_0^{-2} - \frac{r^2}{R^2} \right) - r^2 \right] + \Phi \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{PR^2}{16\pi D} \sum_1^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1) \left[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2} \right]} - \right. \\ & \left. - \frac{r_0^2}{R^2} \frac{1}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \right\} \left[(\rho^{2k+2} + \rho^{-2k-2}) \cos 2k\theta + \right. \\ & \left. + (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos(2k+2)\theta \right] - \\ & - \frac{PR^2}{32\pi D} \sum_1^{\infty} (-1)^k \left\{ \frac{8(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{r_0^2}{R^2} \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{k \left[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2} \right]} + \right. \\ & \left. + \frac{r_0^2}{R} \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{k \left[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2} \right]} \right\} (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos 2k\theta \quad (3.16) \end{aligned}$$

Полученные ряды сходятся при $\rho_0 > 1$.

Приняв в (3.14), (3.15) и (3.16) радиус нагруженного круга $r_0 = 0$ и $P = \pi r_0^2 p = \text{const}$, получим выражение прогиба защемленной эллиптической плиты, нагруженной в центре силой P :

$$w = \frac{P}{16\pi D} \left(ab - r^2 + 2r^2 \ln \frac{2r}{a+b} \right) + \frac{P(a^2 - b^2)}{64\pi D} \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} \left[(\rho^{2k+2} + \right.$$

$$+ \rho^{-2k-2}) \cos 2k\theta + (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos (2k+2)\theta] -$$

$$-\frac{Pab}{4\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k (\rho^{2k} + \rho^{-2k}) \cos 2k\theta}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)}. \quad (3.17)$$

Задачу об изгибе защемленной по контуру эллиптической плиты, нагруженной в центре, исследовал Л. С. Лейбензон [3], применив ортогональные эллиптические координаты. Решение представлено им в виде рядов, коэффициенты которых определяются из линейного алгебраического уравнения, связывающего последующий коэффициент с предыдущим.

Из найденного решения (3.14) и (3.15) можно с любой точностью определить расчетные величины плиты. Приведем некоторые результаты, имеющие практическое значение.

Определение максимального прогиба. Максимальный прогиб получается в центре плиты $(r=0, \rho=1, \theta = \pm \frac{\pi}{2})$ и, согласно (3.14) и (3.16), равен

$$w_0 = \frac{P}{16\pi D} \left(ab - \frac{5r_0^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{4ab} r_0^2 + r_0^2 \ln \frac{2r_0}{a+b} \right) -$$

$$-\frac{Pab}{2\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} -$$

$$-\frac{Pr_0^2(a^2-b^2)}{64\pi ab D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(2k+1) \rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(2k-1) \rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.18)$$

Полагая $r_0=0$, получим значение максимального прогиба при действии сосредоточенной силы P в центре эллипса:

$$w_0 = \frac{Pab}{16\pi D} \left[1 - \right.$$

$$\left. - 8 \sum_1^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} \right]. \quad (3.19)$$

Заменив верхний предел последнего ряда конечным числом (n), получим значение прогиба с избытком (w_0^+). Чтобы получить значение прогиба с недостатком (w_0^-), пользуемся оценкой

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right) \left(2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}\right)} < \\ \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{\rho_0^{8k-4}} = \frac{1}{\rho_0^{8n-4}(\rho_0^8 - 1)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

Согласно (3.19) и (3.20)

$$w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^8 - 1)}. \quad (3.21)$$

Погрешность в процентах приближенного значения w_0^+ по сравнению с точным значением максимального прогиба меньше, чем

$$\delta = \frac{w_0^+ - w_0^-}{w_0^-} 100.$$

Учитывая первый член ряда в (3.19), получим:

$$w_0^+ = \frac{Pab}{16\pi D} \frac{a^4 + 6a^2b^2 + b^4}{3(a^4 + b^4) + 2a^2b^2}. \quad (3.22)$$

Тогда, приняв в (3.21) $n=1$, определим погрешность

$$\delta = \frac{800}{\rho_0^4(\rho_0^8 - 1) \left[1 - \frac{4}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4}} - \frac{8}{\rho_0^4(\rho_0^8 - 1)} \right]},$$

некоторые значения которой приведены в таблице 1.

Таблица 1

$a:b$	1	1,5	2	3
$\delta\%$	0	0,06	1,6	35

Из таблицы 1 видно, что для отношений $a:b \leq 2$ с достаточной точностью можно (3.22) принять за выражение максимального прогиба. Формула (3.22) другим путем получена Л. С. Лейбензоном [3]. Мы здесь установили пределы применения этой формулы.

Учитывая также второй член ряда в (3.19), т. е. полагая $n=2$, получим:

$$w_0^+ = \frac{Pab}{16\pi D} \left[1 - \frac{4}{4 + \rho_0^4 + \rho_0^{-2}} \left(1 + \frac{2}{6 + \rho_0^8 + \rho_0^4 + \rho_0^{-4} + \rho_0^{-8}} \right) \right], \quad (3.23)$$

$$w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{12} (\rho_0^8 - 1)}$$

При $a:b = 2,5$ $\delta = 0,3\%$, а при $a:b = 3$ $\delta = 1,8\%$.

Если представить максимальный прогиб в виде

$$w_0 = w_0^+ = \alpha \frac{Pb^2}{16\pi D}$$

то, согласно (3.22) и (3.23), для α получим следующие значения (см. табл. 2):

Таблица 2

a:b	1	1,5	2	2,5	3
α	1	1,2934	1,3898	1,4110	1,4339

Определим из (3.18) значение максимального прогиба с избытком (w_0^+) и с недостатком (w_0^-) для случая нагрузки, равномерно-распределенной по площади круга. Все члены первого ряда в (3.18) положительны, а второго ряда будут положительны при условии $\rho_0 \geq 1,25$ ($a:b \leq 4,6$). При этом условии, заменив в (3.18) верхние пределы рядов конечными числами, получим значение прогиба с избытком (w_0^+). Для определения из (3.18) значение прогиба с недостатком (w_0^-) пользуемся оценкой (3.20) и

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(2k+1)\rho_0^0 - \rho_0^{-4k-2}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} - \frac{(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}}{2k-1 + \frac{\rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] < \\ < \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\rho_0^{4k-2}} = \frac{2}{\rho_0^{4m-2}(\rho_0^4-1)} + \rho_0^2 \ln \frac{\rho_0^4}{\rho_0^4-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\rho_0^{4k-2}} \quad (3.24)$$

Тогда

$$w_0^- = w_0^+ - \frac{Pab}{2\pi D} \frac{1}{\rho_0^{8n-4}(\rho_0^8-1)} - \frac{Pr_0^2}{64\pi D} \frac{a^2-b^2}{ab} \left[\frac{2}{\rho_0^{4m-2}(\rho_0^4-1)} + \right. \\ \left. + \rho_0^2 \ln \frac{\rho_0^4}{\rho_0^4-1} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\rho_0^{4k-2}} \right] \quad (3.25)$$

Учитывая в (3.18) первый член первого ряда и первые два члена второго ряда, полагая при этом $a:b = 2$, получим:

$$w_0^+ = 0,08686 \frac{Pb^2}{\pi D} - 0,05474 \frac{Pr_0^2}{\pi D} - 0,06250 \frac{Pr_0^2}{\pi D} \ln \frac{b}{r_0},$$

а из (3.25) имеем

$$w_0^- = 0,08547 \frac{Pb^2}{\pi D} - 0,05499 \frac{Pr_0^2}{\pi D} - 0,06250 \frac{Pr_0^2}{\pi D} \ln \frac{b}{r_0}.$$

Погрешность в процентах

$$\delta = \frac{0,139 + 0,025 \frac{r_0^2}{b^2}}{0,085 - 0,055 \frac{r_0^2}{b^2} - 0,063 \frac{r_0^2}{b^2} \ln \frac{b}{r_0}}$$

Радиус нагруженного круга принимает значения $0 \leq r_0 \leq b$, причем $r_0 = 0$ соответствует случаю сосредоточенной силы, приложенной в центре эллипса. Некоторые значения погрешности приведены в таблице 3.

Таблица 3

$r_0 : b$	0	0,2	0,4	0,5	0,8	1
%	1,6	1,8	2,1	2,7	3,5	5,5

Заметим, что для отношений $a : b < 2$ погрешность уменьшается и обращается в нуль при $a : b = 1$.

Определение контурного максимального изгибающего момента. Изгибающий момент на защемленном контуре определяется формулой

$$M = -D \nabla^2 w. \quad (3.26)$$

Максимальное значение момента получается на концах малого диаметра. Для этих точек ($z = \pm ib$, $\zeta = \pm i\rho_0$), имея в виду (1.12), (3.1), (3.3) и (3.12), из (3.26) получим:

$$M_{\max} = -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{R\rho_0} - \frac{r_0^2}{2ab} \right) - \frac{P}{2\pi (\rho_0^2 + 1) (\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} + \\ + \frac{\Gamma r_0^2}{4\pi ab (\rho_0^2 + 1)} \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k})}{k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}}. \quad (3.27)$$

Эти ряды сходятся при $\rho_0 > 1$.

Приняв в (3.27) $r_0 = 0$ получим значение контурного максимального момента при действии сосредоточенной силы P в центре эллипса:

$$M_{\max} = -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{b}{R\rho_0} \right) - \frac{P(a^2 - b^2)(a-b)}{16\pi a^2 b} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{2k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)}. \quad (3.28)$$

Заменяв верхний предел этого ряда конечным числом (n), получим значение момента с недостатком (M_{\max}^-). Далее, пользуясь оценкой

$$\rho_0 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1)(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1})[(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} \ll$$

$$< \rho_0 \sum_{n+1}^{\infty} \frac{2k+1}{k\rho_0^{2k-3}} = \frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2-1)} - \sum_1^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-1}. \quad (3.29)$$

получим из (3.28) значение момента с избытком (M_{\max}^+):

$$M_{\max}^+ = M_{\max}^- - \frac{P(a+b)(a-b)^2}{16\pi a^2 b} \left[\frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2-1)} - \sum_1^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-1} \right]. \quad (3.30)$$

Найдем значение максимального момента для отношения $a:b=2$. Приняв в (3.28) и (3.30) $n=3$, получим:

$$M_{\max}^- = -0.45028 \frac{P}{\pi}, \quad M_{\max}^+ = -0.46769 \frac{P}{\pi}.$$

Погрешность равна 4%.
Приняв $n=4$, получим:

$$M_{\max}^- = -0.45976 \frac{P}{\pi}, \quad M_{\max}^+ = -0.46545 \frac{P}{\pi}.$$

Погрешность равна 1.2%.
Таким образом, при $a:b=2$ можно принять

$$M_{\max} = -0.46545 \frac{P}{\pi}.$$

Определим теперь значение контурного максимального момента при действии нагрузки, равномерно-распределенной по площади круга. Пользуясь равенством

$$\sum_1^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} = \frac{\rho_0(3\rho_0^2-1)}{(\rho_0^2-1)^2},$$

выражение (3.27) приводим к виду

$$M_{\max} = -\frac{P}{4\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{2b}{a+b} - \frac{r_0^2}{2ab} \right) + \frac{Pr_0^2}{4\pi ab} \frac{3\rho_0^4 - \rho_0^2}{(\rho_0^2+1)(\rho_0^2-1)^2} -$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{P}{2\pi(\rho_0^2+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1)(\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} - \frac{Pr_0^2}{4\pi ab(\rho_0^2+1)} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} (2k+1) \left[\frac{1}{\rho_0^{2k-2}} - \frac{\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Ограничиваясь конечным числом членов рядов в (3.31), получим значение момента с недостатком (M_{\max}^-).

Для получения же значения изгибающего момента с избытком (M_{\max}^+) используем оценку (3.29), а также

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=m+1}^{\infty} (2k+1) \left[\frac{1}{\rho_0^{2k-1}} - \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] = \\
 & = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} \left[1 - \frac{\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2}}{2k+1 + \rho_0^{4k} + \rho_0^{4k-4} + \dots + \rho_0^{-4k}} \right] \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k+1}{\rho_0^{2k-1}} \left[1 - \right. \\
 & \left. - \frac{\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2}}{(2k+1)(\rho_0^{4k} + \rho_0^{-2})} \right] = \sum_{m+1}^{\infty} \frac{2k}{\rho_0^{2k-1}} = \frac{2[(m+1)\rho_0^2 - m]}{\rho_0^{2m-1}(\rho_0^2 - 1)^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда из (3.31) получим:

$$\begin{aligned}
 M_{\max}^+ = M_{\max}^- - \frac{P}{2\pi(\rho_0^2+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})} & \left[\frac{2}{\rho_0^{2n-4}(\rho_0^2-1)} + \rho_0^4 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-1} - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\rho_0^{2k-4}} \right] - \frac{Pr_0^2}{2\pi ab(\rho_0^2+1)} \frac{(m+1)\rho_0^2 - m}{\rho_0^{2m-1}(\rho_0^2-1)^2}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Для случая $a=2b$ берем $n=m=4$. Тогда из (3.31) получим:

$$M_{\max}^- = -\frac{P}{\pi} \left(0.4596 - 0.2109 \frac{r_0^2}{b^2} \right).$$

Согласно (3.32) найдем погрешность в процентах

$$\delta = \frac{|M_{\max}^-| - |M_{\max}^+|}{|M_{\max}^-|} 100 = \frac{0.57 + 0.64 \frac{r_0^2}{b^2}}{0.460 - 0.211 \frac{r_0^2}{b^2}}.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 4.

Таблица 4

$r_0 : b$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
φ_0	1,2	1,3	1,6	2,1	2,0	4,9

Определение максимальной опорной реакции. Максимальная опорная реакция Q_{\max} возникает на концах малого диаметра эллипса и равна перерезывающей силе N_2 , действующей в одной из указанных точек $Q_{\max} = N_2(0, b)$.

Перерезывающие силы N_1, N_2 определяются по формуле

$$N_1 - iN_2 = -8D \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial z}, \quad (3.33)$$

Внося сюда значение w из (3.1) и имея в виду (1.12), (3.3) и (3.12), определим N_1 и N_2 . Заменяя в выражении для N_2 величины z и ζ через ib и $i\rho_0$, определим $N_2(0, b)$, следовательно и Q_{\max} :

$$Q_{\max} = N_2(0, b) = -\frac{P}{2\pi b} + \frac{P}{2\pi R(1+\rho_0^{-2})^2} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) [k(\rho_0^{2k-1} \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k+3})]}{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}} \left[\frac{r_0^2}{R^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}}{k(k+1)} \right]. \quad (3.34)$$

Пользуясь равенством

$$\sum_1^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{\rho_0^{2k+1}} = \frac{9\rho_0^3 - 2\rho_0 + \rho_0^{-1}}{(\rho_0^2 - 1)^3},$$

можно (3.34) представить в виде

$$Q_{\max} = -\frac{P}{2\pi D} + \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab} \frac{9\rho_0^3 - 2\rho_0 + \rho_0^{-1}}{(1+\rho_0^{-2})^3 (\rho_0^2 - 1)^3} - \frac{PR}{\pi(1+\rho_0^{-2})^3 ab} \times \\ \times \sum_1^{\infty} \frac{(2k+1) [(k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} [k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + \\ + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-4k-3})] - \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab(1+\rho_0^{-2})^3} \sum_1^{\infty} (2k+1) \left[\frac{2k+1}{\rho_0^{2k+1}} - \right. \\ \left. - \frac{k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-5})}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right]. \quad (3.35)$$

При $\rho_0 > 1$ все члены обоих рядов положительны. Поэтому, ограничиваясь конечными членами этих рядов, получим значение опорной реакции с недостатком (Q_{\max}^-). Чтобы найти значение опорной реакции с избытком (Q_{\max}^+) используем следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1) [(2k+1)\rho_0^2 - k\rho_0^{-2} - \rho_0^{-4k-2}]}{k(k+1) \left(2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}} \right)} [k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + \\ & \quad + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-3})] \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{k\rho_0^{2k-1}} = \\ & = 2 \frac{(2n+3)\rho_0^2 - 2n-1}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2-1)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2k+1}{k\rho_0^{2k-1}} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2-1} + \rho_0 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-1}, \\ & \sum_{k=m+1}^{\infty} (2k+1) \left[\frac{2k+1}{\rho_0^{2k+1}} - \frac{k(\rho_0^{2k-1} - \rho_0^{-2k-5}) + (k+1)(\rho_0^{2k-3} - \rho_0^{-2k-3})}{2k+1 + \frac{\rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}}{\rho_0^2 - \rho_0^{-2}}} \right] \leq \\ & \leq \sum_{m+1}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{\rho_0^{2k+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2m}(\rho_0^2-1)^3} [(2m+3)^2 \rho_0^3 + \\ & \quad + (2m+1)^2 \rho_0^{-1} - 2(4m^2+8m+1)\rho_0], \end{aligned}$$

в силу которых из (3.35) имеем

$$\begin{aligned} Q_{\max}^+ &= Q_{\max}^- - \frac{PR}{\pi ab (1+\rho_0^{-2})^2} \left[2 \frac{(2n+3)\rho_0^2 - 2n-1}{\rho_0^{2n-1}(\rho_0^2-1)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k\rho_0^{2k-1}} + \frac{2\rho_0}{\rho_0^2-1} + \rho_0 \ln \frac{\rho_0^2}{\rho_0^2-1} \right] - \\ & - \frac{Pr_0^2}{2\pi Rab (1+\rho_0^{-2})^3} [(2m+3)^2 \rho_0^3 + (2m+1)^2 \rho_0^{-1} - 2(4m^2+8m+1)\rho_0]. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Для $a:b=2$ примем $n=m=4$, тогда из (3.35) получим:

$$Q_{\max}^- = -1,1788 \frac{P}{\pi b} + 0,2320 \frac{Pr_0^2}{\pi b^2}. \quad (3.37)$$

Погрешность в процентах будет

$$\delta = \frac{1,018 + 2,879 \frac{r_0^2}{b^2}}{1,1788 - 0,2320 \frac{r_0^2}{\pi b^2}}.$$

Числовые значения для δ приведены в таблице 5.

Таблица 5

$r_0:b$	0	1,2	0,4	0,6	0,8	1,0
δ/ρ_0	0,9	1,0	1,3	1,9	2,8	4,1

Таблицы 1–5 показывают, что при увеличении радиуса нагруженного круга погрешность увеличивается.

§ 4. Эллиптическая плита, защемленная по контуру при нагрузке, равномерно-распределенной по длине большого диаметра

Уравнение упругой поверхности можно представить [3] в виде

$$w = f(z, \bar{z}) + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (4.1)$$

причем

$$f = \frac{iq}{96D} (z - \bar{z})^3, \quad \text{при } y > 0,$$

$$f = -\frac{iq}{96D} (z - \bar{z})^3, \quad \text{при } y < 0, \quad (4.2)$$

где q — нагрузка, действующая на единицу длины большого диаметра.

Из (4.2) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{iq}{32D} (z - \bar{z})^2, \quad \text{при } y > 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{iq}{32D} (z - \bar{z})^2, \quad \text{при } y < 0.$$

Внося (1.12) в (4.2) и (4.3) и полагая $\zeta = \rho_0 e^{i\theta}$, определим контурные значения для f и $\frac{\partial f}{\partial z}$:

$$f_s = \begin{cases} \frac{iqR^3}{96D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^3 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\frac{iqR^3}{96D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^3 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3, & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s = \begin{cases} \frac{iqR^2}{32D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2, & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ -\frac{iqR^2}{32D} (\rho_0 - \rho_0^{-1})^2 (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^2, & \text{при } \pi \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Разложив функции f_s и $-(1 - \rho_0^{-2} e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_s$ в интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$ в комплексные ряды Фурье, будем иметь

$$i_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_k e^{ki\theta},$$

$$-(1 - \rho_0^{-2} - e^{-2i\theta}) \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k e^{ki\theta},$$

где

$$B_0 = \Pi[i_s] = \frac{qb^3}{9\pi D}, \quad (4.6)$$

$$A_{2k-1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \frac{1}{4k^2-1} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right), \quad (4.7)$$

$$(k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$A_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Подставив (4.7) в (1.19) и (1.20), определим коэффициенты c_k :

$$c_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$c_{2k+1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \left\{ \frac{1}{3} (\rho_0 + \rho_0^{-1}) + \sum_{n+1}^k \left[\frac{\rho_0^{-2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n+3} \right) - \frac{\rho_0^{2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n-3} \right) \right] \right\}.$$

Пользуясь равенствами

$$\sum_{n=1}^k \frac{\rho_0^{-2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n+3} \right) = -\frac{\rho_0^{-1}}{3} - \frac{\rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3)},$$

$$\sum_{n=1}^k \frac{\rho_0^{2n+1}}{4n^2-1} \left(\frac{1}{2n+3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2n-3} \right) = \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0^{2k+1}}{(4k^2-1)(2k+3)},$$

из предыдущего получим

$$c_{2k+1} = \frac{qb^3}{2\pi D} \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3)}, \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (4.8)$$

Внеся (4.8) в (1.16) и (1.17), получим

$$a_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$a_{2k+1} = \frac{qb^3}{2\pi D} \frac{\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}}{(4k^2-1)(2k+3) [(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]}, \quad (4.9)$$

$$(k = 0, 1, \dots).$$

Подставляя (4.7) и (4.9) в (1.18), определим b_k :

$$b_{2k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots)$$

$$b_{2k-1} = -\frac{qb^3}{2\pi D} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} + \frac{\rho_0^{-1}}{2k+3} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} + \\
& + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} \Bigg\}. \quad (4.10) \\
& (k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Внеся (4.6) и значения Λ_{-1} из (4.7) в (1.24), получим

$$C = \frac{qb^3}{36\pi D} \frac{\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-2}}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2}. \quad (4.11)$$

Подставив (4.9)–(4.11) в (1.14) и (1.23), определим значения функций $\varphi(z) = \varphi_1(\zeta)$ и $\chi(z) = \chi_1(\zeta)$:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{qb^3}{2\pi D} \sum_0^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1})(\zeta^{2k+1} + \zeta^{-2k-1})}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
\chi_1(\zeta) = & \frac{qb^3}{36\pi D} \frac{\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-4}}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2} - \frac{qb^2 R}{4\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \right. \\
& + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} + \\
& \left. + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \right\} \left(\zeta^{2k} + \frac{1}{\zeta^{2k}} \right). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Внеся (4.12) и (4.13) в (4.1) и заменив ζ через $\rho e^{i\theta}$, а z через $x + iy$, определим прогиб:

при $y \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$$\begin{aligned}
w = & \frac{qy^3}{12D} + \frac{qb^3}{18\pi D} \frac{(\rho_0^2 + 4 + \rho_0^{-4})}{(\rho_0 - \rho_0^{-1})^2} + \frac{qb^2 R}{\pi D} \times \\
& \times \sum_0^{\infty} \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(\rho_0^{2k} + \rho_0^{-2k}) \cos 2k\theta + (\rho_0^{2k+2} + \rho_0^{-2k-2}) \cos (2k+2)\theta]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} - \\
& - \frac{qb^2 R}{2\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \right. \\
& + \frac{(\rho_0^{2k+1} + \rho_0^{-2k-1}) [(2k+1)\rho_0^2 - \rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} + \\
& \left. + \frac{(\rho_0^{2k-1} + \rho_0^{-2k+1}) [(2k-1)\rho_0^{-2} + \rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k-2} - \rho_0^{-4k+2}]} \right\} (\rho^{2k} + \\
& + \rho^{-2k}) \cos 2k\theta. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Отсюда, приняв $y=0$, $\rho=1$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$, получим значение прогиба для центра плиты:

$$w_0 = \frac{qb^3(\rho_0^2+4+\rho_0^{-2})}{18\pi D(\rho_0-\rho_0^{-1})^2} - \frac{qb^2R}{\pi D} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\{ \frac{1}{(4k^2-1)\rho_0^{2k-1}} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{\rho_0^{-2}}{2k+3} \right) + \frac{(\rho_0^{2k+1}+\rho_0^{-2k-1})[(2k+1)\rho_0^2-\rho_0^{-4k-2}]}{(4k^2-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} + \frac{(\rho_0^{2k-1}+\rho_0^{-2k+1})[(2k-1)\rho_0^{-2}+\rho_0^{-4k+2}]}{(4k^2-1)(2k-3)[(2k-1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k-2}-\rho_0^{-4k+2}]} \right\}. \quad (4.15)$$

Приняв $a=b$, получим значение прогиба центра круглой плиты:

$$w_0 = \frac{qb^3}{18\pi D} = 0,05556 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

При $a=2b$ из (4.15) имеем

$$w_0 = \frac{11qb^3}{36\pi D} - \frac{3qb^3}{2\pi D} (0,12090 + 0,00913 - 0,00057 + \dots).$$

Ограничиваясь первыми двумя членами последнего ряда, получим значение прогиба с недостатком

$$w_0^- = 0,11051 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

Учитывая третий член ряда, получим значение прогиба с избытком

$$w_0^+ = 0,11137 \frac{qb^3}{\pi D}.$$

Погрешность равна 0,8%.

Таким образом, при $a \leq 2b$ можно ограничиваться первыми двумя членами ряда (4.15).

Согласно формуле (3.26) определим контурный изгибающий момент:

$$M = -\frac{qy}{2} - \frac{4qb^2}{\pi R} \frac{1}{1+\rho_0^{-4}-2\rho_0^{-2}\cos 2\theta} \times \\ \times \sum_0^{\infty} \frac{\rho_0^{2k+1}+\rho_0^{-2k-1}}{(2k-1)(2k+3)[(2k+3)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} \left[(\rho_0^{2k} + \right. \\ \left. + \rho_0^{-2k-4}) \cos 2k\theta - (\rho_0^{2k-2} + \rho_0^{-2k-2}) \cos (2k+2)\theta \right]. \quad (4.16)$$

Приняв $y=b$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ получим значение максимального момента

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} - \frac{4qb^2\rho_0^3}{\pi R(\rho_0^2+1)} \times$$

$$\times \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(\rho_0^{2k} + \rho_0^{-2k-2})^2}{(2k-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.17)$$

Пользуясь равенством

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)(2k+3)} = -\frac{1}{2},$$

представим значение момента в следующем виде

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} + \frac{2qb^2}{\pi a} + \frac{4qb^2}{\pi a} \times \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-4k-2}}{(2k-1)(2k+3)[(2k+1)(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{4k+2} - \rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.18)$$

Последний ряд сходится быстрее, чем ряд (4.17).

Для круглой плиты (4.18) дает

$$M_{\max} = -\frac{qb(3\pi-8)}{6\pi},$$

а для бесконечной полосы

$$M_{\max} = -\frac{qb}{2} - \frac{2qb}{\pi} \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(4k^2-1)(2k+3)};$$

но, так как

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(4k^2-1)(2k+3)} = -\frac{\pi}{8},$$

то

$$M_{\max} = -\frac{qb}{4},$$

что согласуется с известным результатом.

Для отношений $a:b \leq 2$ можно ограничиться первыми двумя членами ряда (4.18), что даст значение момента с избытком

$$M_{\max}^+ = -\frac{qb}{2} + \frac{2qb^2}{\pi a} - \frac{4qb^2}{\pi a} \left[\frac{\rho_0^2 - 2 - 3\rho_0^{-2}}{6(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})} + \frac{3(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-6}}{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2})(\rho_0^4 + 4 + \rho_0^{-4})} \right] \quad (4.19)$$

Значение момента с недостатком можно получить, учитывая третий член ряда

$$M_{\max}^- = M_{\max}^+ + \frac{4qb^2}{21\pi a} \frac{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) - 2 - 2\rho_0^{-10}}{5(\rho_0^2 - \rho_0^{-2}) + \rho_0^{10} - \rho_0^{-10}} \quad (4.20)$$

При $a = 2b$ из (4.19) и (4.20) получим

$$M_{\max}^+ = -0,20327 qb, \quad M_{\max}^- = -0,20193 qb.$$

Погрешность равна $0,7\%$. Таким образом, формулу (4.19) для значений в $a \leq 2b$ можно принять за расчетную.

Определим значение максимальной опорной реакции. Она возникает в точках $y = \pm b$ и по величине равна перерезывающей силе, действующей в одной из этих точек. Поступая как в предыдущей задаче, найдем:

$$\begin{aligned}
 Q_{\max} = N_2(0, b) = & -\frac{q}{2} + \frac{qb^2(\pi-2)}{\pi a^2} + \frac{4qb^2}{\pi a^2(\rho_0^2+1)} + \frac{8qb^3}{\pi a^2} \times \\
 & \times \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{k[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-1})-2-2\rho_0^{-4k-2}]}{(2k-1)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} + \frac{8qb^3}{\pi a^2(\rho_0^2+1)} \times \\
 & \times \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^2-1+\rho_0^{-4k}-\rho_0^{-4k-2}}{(2k-1)(2k+1)[(2k+1)(\rho_0^2-\rho_0^{-2})+\rho_0^{4k+2}-\rho_0^{-4k-2}]} \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Для круга ($a=b$) и бесконечной полосы ($a \rightarrow \infty$) ряды, входящие в (4.21), обращаются в нуль; для этих случаев соответственно получим:

$$Q_{\max} = -\frac{4-\pi}{2\pi} q = -0,1366 q, \quad Q_{\max} = -0,5 q.$$

Для других значений отношения $a:b$ достаточно учесть только первые члены указанных рядов. Так, при $a=2b$, получим:

$$Q_{\max} = -0,4045 q,$$

что дает погрешность меньше 1% .

Здесь мы рассмотрели случай нагрузки, равномерно-распределенной по длине большого диаметра эллипса. Аналогичным способом решается и задача об изгибе эллиптической плиты при нагрузке, равномерно-распределенной по длине малого диаметра эллипса. Следует лишь взамен (4.2) пользоваться формулой

$$f(z, \bar{z}) = \begin{cases} \frac{q(z+\bar{z})^2}{96D}, & \text{при } x > 0, \\ -\frac{q(z+\bar{z})^2}{96D}, & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 29 IV 1954

ЛИТЕРАТУРА

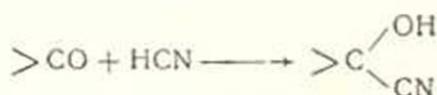
- 1 Мухелишвили Н. Н. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва, 1935.
- 2 Саподжян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института. № 3, 1948.
- 3 Лейбензон Л. С. К теории безбалочных покрытий. Москва, 1915.

С. А. Вартанян, Р. С. Гюли-Кевхян

Конденсация синильной кислоты с β-алкоксикетонами

Сообщение I

В литературе имеется много данных о синтезе и превращениях α-оксинитрилов, получаемых путем конденсации синильной кислоты с содержащими карбонильную группу ароматическими, алициклическими, гетероциклическими и полициклическими соединениями.



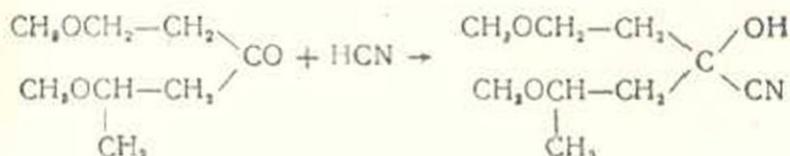
С целью же получения алкокси-α-оксинитрилов и изучения их химических превращений, нами была проведена конденсация синильной кислоты с алкоксикетонами.

Как показали многочисленные работы И. Н. Назарова и его сотрудников, алкоксикетоны легко получают при гидратации углеводов дивинилацетиленового ряда [1], а также при изомеризации винилэтинилкарбинолов [2].

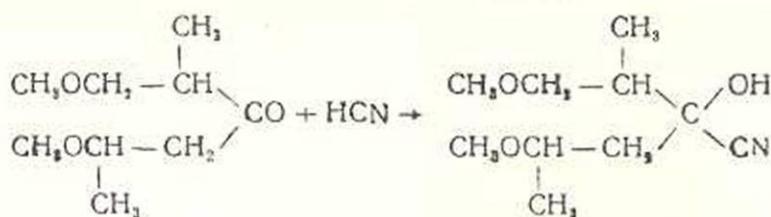
Исходными продуктами для настоящей работы явились β-алкоксикетоны, для синтеза которых были использованы дивинилацетилен и диметилвинилэтинилкарбинол, как самые доступные соединения соответствующих рядов.

Оказалось, что, подобно другим кетонам, β-алкоксикетоны также легко конденсируются в обычных условиях с синильной кислотой, образуя соответствующие γ-алкокси-α-оксинитрилы.

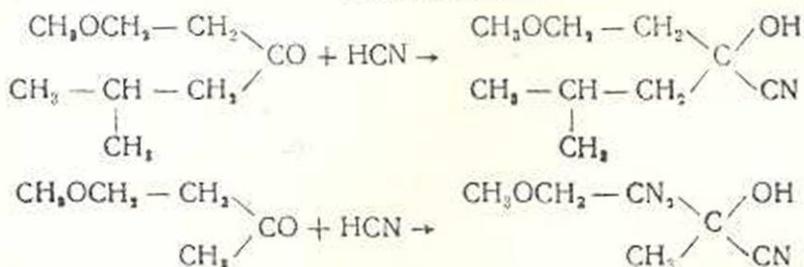
При действии синильной кислоты на 1,5-диметоксигексан-3-он образуется 1,5-диметокси-3-нитрилгексан-3-ол:



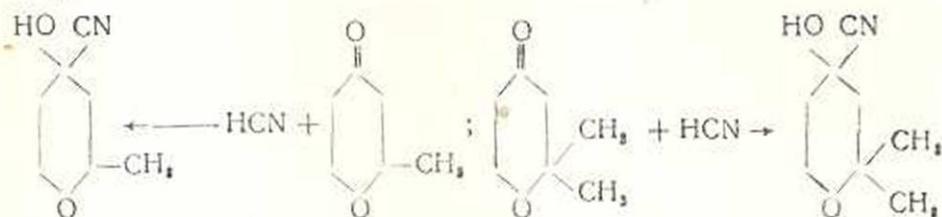
Действием синильной кислоты на 1,5-диметокси-2-метилгексан-3-он образуется 1,5-диметокси-2-метил-3-нитрилгексан-3-ол:



С такой же легкостью синильная кислота конденсируется в тех же условиях с 1-метокси-5-метилгексан-3-оном и 1-метоксибутан-3-оном, в результате чего образуются соответственно: 1-метокси-5-метил-3-нитрилгексан-3-ол и 1-метокси-3-нитрилбутан-3-ол:



При действии синильной кислоты на 2-метилтетрагидро-4-пирон и 2,2-диметилтетрагидро-4-пирон образуются соответственно: 2-метил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол и 2,2-диметил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол:



Экспериментальная часть

Конденсация синильной кислоты с β -алкоксикетонами проводилась в следующих условиях.

К водному раствору цианистого калия или натрия (взятого, за исключением одного случая, в избытке на 11,4—17,5%) и кетона прибавлялась маленькими порциями 30% серная кислота при постоянном взбалтывании и охлаждении реакционной смеси (реакция велась в закрытой системе). Температура поддерживалась в пределах 10—20°. При каждом прибавлении кислоты замечалось повышение температуры на несколько градусов и постепенное выделение на поверхности смеси темножелтого маслянистого слоя.

К отделенному маслянистому слою прибавлялся эфирный экстракт остаточного слоя и просушивался сернистым натрием. После удаления в небольшом вакууме растворителя выделялась соответствующая фракция нитриля.

1,5-диметокси-3-нитрилгексан-3-ол. К смеси 36 г цианистого натрия (0,73 моля) в 100 мл воды и 100 г 1,5-диметоксигексан-3-она [3] (0,62 моля) (т. к. 85—87° при 6 мм; n_D^{20} 1,4293) прибавлено 210 г 30% серной кислоты в течение 24 часов. По окончании реакции смесь обработана вышеописанным образом и после отгонки эфира получено 75,7 г 1,5-диметокси-3-нитрилгексан-3-ола (64,7% теории) в виде бесцветной подвижной жидкости с т. к. 95—97° при 3 мм.

n_D^{20} 1,4345; d_4^{20} 1,0031

MR_D 48,595; вычислено 48,391

0,0985 г вещ.: 7,6 мл азота (29°, 676 мм)

Найдено %: N 7,58

$C_9H_{17}O_3N$. Вычислено %: N 7,48

1,5-диметокси-2-метил-3-нитрилгексан-3-ол. К смеси 7,5 г цианистого калия (0,11 моля) в 30 мл воды и 20 г 1,5-диметокси-2-метилгексан-3-она [4] (0,11 моля) (т. к. 90—92° при 10 мм; n_D^{20} = 1,4270) прибавлено 42 г 30% серной кислоты в течение 1,5 часов при температуре 13—18°. По окончании прибавления кислоты смесь дополнительно перемешана (на болтушке) 6,5 часов. После соответствующей обработки смеси и отгонки растворителя получено 11,1 г 1,5-диметокси-2-метил-3-нитрилгексан-3-ола (48% теории) в виде бесцветной подвижной жидкости с т. к. 119—121° при 13 мм.

n_D^{20} 1,4370; d_4^{20} 0,9909

MR_D 53,143; вычислено 53,009

0,1066 г вещ.: 7,3 мл азота (20°, 680 мм)

Найдено %: N 7,14

$C_{10}H_{19}O_3N$. Вычислено %: N 6,96

1-метокси-5-метил-3-нитрилгексан-3-ол. К смеси 6 г цианистого натрия (0,12 моля) в 20 мл воды и 15,4 г 1-метокси-5-метилгексан-3-она [5] (0,10 моля) (т. к. 64° при 11 мм; n_D^{20} 1,4190) прибавлено 40 г 30% серной кислоты в течение 4 часов. После обычной обработки смеси и отгонки растворителя получено 8,6 г 1-метокси-5-метил-3-нитрилгексан-3-ола (47% теории) в виде бесцветной подвижной жидкости с т. к. 115—117° при 14 мм.

n_D^{20} 1,4370; d_4^{20} 0,9582

MR_D 46,753; вычислено 46,748

0,1106 г вещ.: 8,1 мл азота (20°, 673 мм)

Найдено %: N 8,31

$C_8H_{15}O_3N$. Вычислено %: N 8,18

1-метокси-3-нитрилбутан-3-ол. К смеси 12 г цианистого калия (0,18 моля) в 30 мл воды и 16,5 г 1-метоксибутан-3-она [6] (0,16 моля) (т. к. 134° при 680 мм; n_D^{20} 1,4048) прибавлено 56 г 30% серной кис-

лоты в течение 1 часа при температуре 15—20°. После обработки смеси и отгонки растворителя получено 14,8 г 1-метокси-3-нитрилбутан-3-ола (70,8% теории) в виде бесцветной подвижной жидкости с т. к. 104—106° при 20 мм.

$$n_D^{20} 1,4220; \quad d_4^{20} 0,9956$$

$$MR_D 32,886; \quad \text{вычислено } 32,894$$

$$0,1032 \text{ г вец.: } 11,2 \text{ мл азота (24°, 674 мм)}$$

$$\text{Найдено \%: N } 11,07$$

$$C_6H_{11}O_2N. \quad \text{Вычислено \%: N } 10,85$$

2-метил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол. К смеси 13 г цианистого калия (0,20 моля) в 30 мл воды и 20 г 2-метилтетрагидро-4-пирона [7] (0,17 моля) (т. к. 65° при 17 мм; n_D^{20} 1,4440) прибавлено 60 г 30% серной кислоты в течение 4 часов при температуре 13—20°. Смесь обработана, отогнан растворитель, после чего получено 17,8 г 2-метил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ола (74% теории) в виде бесцветной густой жидкости с т. к. 120—122° при 5 мм.

$$n_D^{20} 1,4575; \quad d_4^{20} 1,0908$$

$$MR_D 35,236; \quad \text{вычислено } 35,312$$

$$0,1016 \text{ г вец.: } 10 \text{ мл азота (18°, 675 мм)}$$

$$\text{Найдено \%: N } 10,25$$

$$C_7H_{11}O_2N. \quad \text{Вычислено \%: N } 9,93$$

2,2-диметил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол. К смеси 9,2 г цианистого калия (0,14 моля) в 20 мл воды и 15,4 г 2,2-диметилтетрагидро-4-пирона [3] (0,12 моля) (т. к. 71° при 16 мм; n_D^{20} 1,4460) прибавлено 40 г 30% серной кислоты в течение 7 часов при температуре 14—20°. Смесь обработана как обычно, отогнан растворитель, после чего остаток закристаллизовался. Получено 10 г 2,2-диметил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ола (53,6% теории) в виде белых кристаллов с т. пл. 82—83° (из бензола).

$$0,1014 \text{ г вец.; } 9,1 \text{ мл азота (18°, 675 мм)}$$

$$\text{Найдено \%: N } 9,35$$

$$C_8H_{13}O_2N. \quad \text{Вычислено \%: N } 9,03$$

$$0,0522 \text{ г вец.: } 14 \text{ мл } CH_4 \text{ (24°, 676 мм)}$$

$$\text{Найдено \%: OH } 1,45$$

$$C_8H_{13}O_4N. \quad \text{Вычислено \%: OH } 1,09.$$

Выводы

Показано, что β-алкоксикетоны, подобно другим карбонилсодержащим соединениям, также легко конденсируются с синильной кислотой, образуя соответствующие γ-алкокси-α-оксинитрилы.

Впервые синтезированы: 1,5-диметокси-3-нитрилгексан-3-ол; 1,5-диметокси-2-метил-3-нитрилгексан-3-ол; 1-метокси-5-метил-3-нитрилгек-

сан-3-ол; 1-метокси-3-нитрилбутан-3-ол; 2-метил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол и 2,2-диметил-4-нитрилтетрагидропиран-4-ол.

Химический институт
АН Армянской ССР

Поступило 23 III 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Назаров И. И. и Зарецкая И. И. Изв. АН СССР, ОХН, 211 (1941), 200 (1942).
2. Назаров И. И. и Елизарова А. Н. Изв. АН СССР, ОХН, 223 (1940), 423 (1941).
3. Назаров И. И. и Зарецкая И. И. Изв. АН СССР, ОХН, 200 (1942).
4. Назаров И. И. и Зарецкая И. И. Изв. АН СССР, ОХН, 211 (1941).
5. Назаров И. И. и Романов В. М. Изв. АН СССР, ОХН, 559 (1940).
6. Killian D. B., Hennion G. F. and Newland I. A. J. Am. Chem. Soc., 58, 892 (1936); Назаров И. И., Вартамян С. А., Мацюян С. Г. и Жамгогорцян В. Н. ЖОХ, 23, 1896 (1953).
7. Назаров И. И., Торгов И. В. и Терехова Л. Н. Изв. АН СССР, ОХН, 50 (1943).

Ս. Լ. Վարդանյան, Լ. Ս. Գյուլի-Ցեվիյան

ԿԱՊՏԱԹՔՎԻ ԿՈՆԴԵՆՍԱՅՈՒՄԸ β -ԱԼԿՈՔՍԻԿԵՏՈՆՆԵՐԻ ՀԵՏ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրված, որ β -ալիլքսիկետոնները՝ կարրոնիլ խումբ պարունակող այլ միացությունների նման՝ հեշտությամբ կոնդենսվում են կապտաթթվի հետ, զոյացնելով համապատասխան γ -ալիլքսի- α -օքսինիտրիլներ:

Առաջին անգամ սինթեզված են՝ 1,5-դիմեթիլօքսի-3-նիտրիլնեքսան-3-օլ, 1,5-դիմեթիլօքսի-2-մեթիլ-3-նիտրիլնեքսան-3-օլ, 1-մեթիլօքսի-5-մեթիլ-3-նիտրիլնեքսան-3-օլ, 1-մեթիլօքսի-3-նիտրիլրուտան-3-օլ, 2-մեթիլ-4-նիտրիլտետրանդրոպերան-4-օլ և 2,2-դիմեթիլ-4-նիտրիլտետրանդրոպերան-4-օլ:

А. М. Азатян

Новый аналитический метод экономического расчета подводящих каналов гидроэлектростанций

§ 1. Введение

Экономический расчет канала, в общем случае решения задачи, сводится к определению экономически наиболее выгодных параметров канала по заданному расчетному расходу его, в зависимости от геологических и топографических условий прохождения трассы на каждом данном участке его.

Наилучший экономический эффект при проектировании подводящего канала достигается при некотором, вполне определенном для каждого конкретного случая, значении потерь напора, при котором эксплуатационные издержки по каналу S_1 , в совокупности (со стоимостью потерянной энергии $S_2 = u \Delta$), представляются минимальными, т. е. при условии минимума функции

$$S = S_1 + u \Delta, \quad (1)$$

где Δ — потерянная энергия в *квт*-часах,
 u — стоимость одного *квт*-часа энергии.

Из условия минимума функции S следует, что

$$u = \frac{\partial S_1}{\partial \Delta}$$

означающем, что себестоимость единицы дополнительной энергии, получаемой благодаря приращению потерь напора вследствие небольшого изменения размеров канала, должна быть равна себестоимости энергии на заменяющих станциях.

Для экономического расчета подводящих каналов, на основе приведенных выше принципов, исходят из следующих условий и данных:

а) Условия расчета. Расчетом должны быть определены экономически выгодные сечения и уклоны по участкам канала; при этом каждый участок должен быть рассчитан на пропуск максимального расхода воды в условиях равномерного движения, с увязкой горизонтов воды при переходе от одного сечения канала к другому.

б) Условия проектирования. Перед тем как приступить к экономическому расчету, следует по отдельным участкам канала установить: тип облицовки, толщину облицовки, заложение откосов,

запас в строительной высоте над расчетным горизонтом воды, коэффициент шероховатости, стоимость единицы отдельных видов работ и пр.

Весьма важным является также правильное назначение расположения расчетного горизонта воды относительно поверхности земли, определяемое на основе изучения геологических и топографических условий прохождения трассы канала, при котором принимаются во внимание: устойчивость косогора в отношении оползней, возможность прорыва борта при мелком заложении канала на косогоре, пригодность вынутого из выемки грунта для устройства насыпных берм, тип облицовки, если таковая применяется, и т. д. Совокупность приведенных выше данных отражает условия проектирования, зависящие как от характерных особенностей трассы канала, так и от технико-экономических соображений.

в) Характерный продольный профиль. Основным техническим документом для проектирования канала и расчетов по нему является характерный продольный профиль трассы канала и поперечные сечения. При пользовании характерным продольным профилем полагают, что в ограниченной полосе вдоль деривации геологические и топографические условия трассы канала являются однотипными при любом расположении трассы в пределах этой полосы и что для выбора наиболее выгодного варианта трассы (т. е. наиболее выгодного уклона ее) можно пользоваться одним продольным профилем, достаточно точно отражающим условия прохождения трассы канала по всем возможным вариантам ее. Иначе говоря, от идеального характерного продольного профиля требуется, чтобы: а) поперечные сечения трассы были бы ограничены сверху прямолинейной поверхностью земли и б) в пределах каждого поперечного сечения геологические условия были бы однообразными. В большинстве случаев практики эти условия, с небольшими отклонениями в ту и другую сторону, соблюдаются; только в исключительных случаях, при проведении трассы канала в сильно пересеченной, холмистой местности, с пестрой геологией, экономический расчет канала производится на основе составления проекта канала по нескольким индивидуальным продольным профилям непосредственным сравнением вариантов канала по отдельным проектам.

§ 2. Существующие методы экономического расчета подводящих каналов

Для экономического расчета подводящих каналов наиболее часто применяется метод сравнительных экономических подсчетов; последовательность расчетов по этому методу, иллюстрирующая его громоздкость, представляется в следующем виде:

а) на характерный продольный профиль наносится линия горизонта воды;

б) в частном случае решения задачи, когда ширина канала по дну известна, задаются не менее чем четырьмя скоростями движения воды и на основе гидравлического расчета получают четыре варианта сечения канала, отличающихся друг от друга глубиной наполнения и уклоном;

в) по каждому сечению канала производится подсчет количества работ по облицовке и по выемке грунта; большой трудоемкостью при этом отличается подсчет количества земляных работ на основе продольного профиля и поперечных сечений по нему;

г) определяют стоимость канала и эксплуатационные издержки по нему для каждого варианта. Определяют также стоимость потерянной энергии по отдельным вариантам.

д) построением экономических кривых находят наиболее выгодную скорость движения воды для заданной ширины канала по дну, по которой и окончательно подбирают сечение канала.

В общем случае решения задачи задаются различной шириной канала по дну, в количестве не меньшем четырех, и для каждого частного значения ширины, в указанной выше последовательности, производят расчет, после чего определяют экономически наиболее выгодные значения ширины канала по дну и глубине наполнения его.

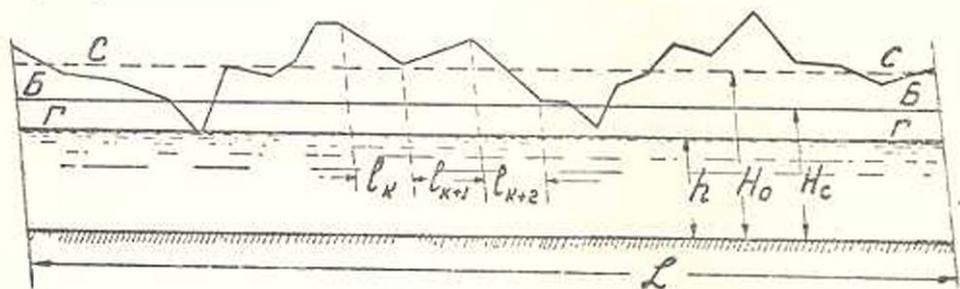
Многими авторами, в целях облегчения расчетов, предложены аналитические методы экономического расчета подводящих каналов. Все эти методы исходят из предположения постоянства глубины и площади поперечного сечения выемки по всей длине канала, при котором продольный профиль трассы канала представляется в виде прямой, параллельной дну канала. Одно только это допущение сильно ограничивает возможность применения этих методов для точного экономического расчета подводящих каналов. Помимо того, эти методы дают решение задачи, исходя из подобия живых сечений потока по различным вариантам канала; получаемое таким образом решение задачи следует признать решенным частным, соответственно принятому част-

ному значению $\beta = \frac{b}{h}$. Отметим также, что при постоянной глубине выемки по длине канала расчет методом сравнительных экономических подсчетов чрезвычайно облегчается, так как при этом отпадает наиболее громоздкая часть работы — подсчет количества работ по продольному профилю, и поэтому аналитические методы существенного ускорения расчета не дают. В силу приведенных выше недостатков существующих аналитических методов в проектной практике в большинстве случаев применяется метод сравнительных экономических подсчетов, гарантирующий, несмотря на громоздкость расчета, достаточную точность решения задачи.

Предлагаемое ниже решение задачи, являясь аналитическим, лишено указанных выше недостатков существующих аналитических методов и не уступает им по простоте своего решения.

§ 3. Предлагаемый метод экономического расчета подводящих каналов

1. Пусть на фиг. 1 представлен характерный продольный профиль канала и требуется определить экономическое сечение канала при показанном на фигуре расположении горизонта воды Г—Г относительно поверхности земли. При заданном расчетном расходе Q_{\max} отдельные варианты канала будут отличаться друг от друга шириной канала по дну b и расчетной глубиной наполнения h . Расчетом требуется определить экономически выгодные значения этих параметров. Зная их, нетрудно будет определить также третью неизвестную величину — уклон канала i .



Фиг. 1.

Отдельные варианты канала будут отличаться стоимостью выемки и стоимостью облицовки; все прочие виды работ по каналу, как-то дренаж, швы облицовки, устройство насыпных берм, нагорных канав, инспекторской дороги и пр., будут иметь одинаковую (или почти одинаковую) стоимость, и при экономическом сравнении вариантов отпадут.

Как было указано в § 1, экономически выгодное сечение подводящего канала должно удовлетворить условию минимума функции (1), где S_1 — эксплуатационные издержки по каналу, определяемые как

$$S_1 = a_b A_b + a_{ob} A_{ob}.$$

Здесь a_b и a_{ob} — нормативные коэффициенты ежегодных отчислений от стоимости выемки A_b и стоимости облицовки A_{ob} .

Обозначая среднюю площадь сечения выемки между последовательными точками продольного профиля через F , расстояние между точками l , стоимость 1 м³ выемки c_b , периметр облицовки χ_{ob} и стоимость 1 м² облицовки с учетом подготовки, облицовки, торкретировки и пр. c_{ob} , получим:

$$A_b = c_b \Sigma Fl.$$

$$A_{ob} = c_{ob} \chi_{ob} L.$$

При наличии водосбросного сооружения в конце подводящего канала потерянная энергия равна:

$$\mathcal{E} = 9,81 Q_{c9} LiT\eta, \quad (2)$$

где $Q_{\text{ср}}$ — среднегодовой расход подводящего канала,
 T — число часов в году,
 η — к. п. д. турбины и генератора,
 i — уклон канала.

Подставляя значения Λ_b , Λ_{06} и Θ в (1), получим:

$$S = a_b c_b \Sigma F l + a_{06} c_{06} \chi_{06} L + 9,81 Q_{\text{ср}} L i T \eta u.$$

Определяя уклон канала по показательной формуле

$$i = \frac{Q_{\text{max}}^2 n^2}{\omega^2 R^{1+2y}}$$

и обозначая постоянную величину

$$9,81 Q_{\text{ср}} T \eta u Q_{\text{max}}^2 n^2 = M, \quad (3)$$

получим окончательно:

$$S = a_b c_b \Sigma F l + a_{06} c_{06} \chi_{06} L + ML \frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}}. \quad (4)$$

Полученное выражение представляет функцию двух независимых переменных b и h .

Минимум этой функции будем иметь при

$$a_b c_b \Sigma l \frac{\partial F}{\partial b} + a_{06} c_{06} L \frac{\partial \chi_{06}}{\partial b} + ML \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right) = 0; \quad (5)$$

$$a_b c_b \Sigma l \frac{\partial F}{\partial h} + a_{06} c_{06} L \frac{\partial \chi_{06}}{\partial h} + ML \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right) = 0. \quad (6)$$

2 Определение значения частных производных

а) Определение $\Sigma l \frac{\partial F}{\partial b}$ и $\Sigma l \frac{\partial F}{\partial h}$

В общем случае какого угодно сечения канала, при уширении канала на Δb (при неизменном положении оси канала), получим приращение площади сечения выемки в виде заштрихованных на фигуре 2

полосок шириной $\frac{\Delta b}{2}$ по откосам канала; очевидно, что предел отношения

$\frac{\Delta F}{\Delta b}$ будет равен полусумме проекций откосов выемки на вертикаль, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = Y. \quad (7)$$

Точно так же, при заглублении канала на Δh , при неизменной ширине канала по дну b , получим приращение в площади сечения выемки в виде заштрихованных на фигуре 3 полосок; при этом

$$\Delta F = (b + Y_1 m_1 + Y_2 m_2) \Delta h;$$

$$\frac{\partial F}{\partial h} = b + Y_1 m_1 + Y_2 m_2 = X.$$

В частном случае, когда $m_1 = m_2$,

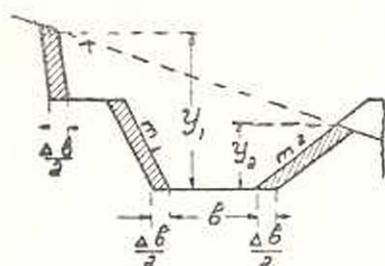
$$X = b + 2mY. \quad (8)$$

Так как Y и X линейные величины, то

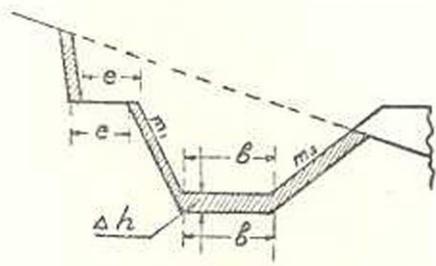
$$\Sigma l \frac{\partial F}{\partial b} = \Sigma l Y = LY_0. \quad (9)$$

$$\Sigma l \frac{\partial F}{\partial h} = \Sigma l X = LX_0, \quad (10)$$

где L —длина рассматриваемого участка подводящего канала $L = \Sigma l$; Y_0 и X_0 —значения линейных величин Y и X при $H = H_0$, где H_0 —средняя глубина выемки на длине участка L .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Совершенно точно величина H_0 может быть определена по формуле $H_0 = \frac{\Sigma l H}{L}$. С достаточной точностью эта величина может быть

определена графически проведением на продольном профиле линии С—С (фиг. 1), параллельно линии горизонта воды с таким расчетом, чтобы суммарная площадь выступов продольного профиля над этой линией была бы равна площади впадин под ней. Определение положения линии С—С на продольном профиле по предлагаемому методу равносильно подсчету количества работ по каналу методом сравнительных экономических подсчетов и притом для всех возможных вариантов канала.

Значения Y и X для наиболее часто встречающихся сечений канала приводятся в приложении I.

$$б) \text{Определение } \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right) \text{ и } \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right).$$

При одинаковых откосах канала m , подставляя

$$\omega = (b + mh)h = (\beta + m)h^2,$$

$$\chi = b + kh = (\beta + k)h,$$

где ω —живое сечение, χ —смоченный периметр,

$$\beta = \frac{b}{h}, \quad (11)$$

$$k = 2 \sqrt{1 + m^2}. \quad (12)$$

после дифференцирования получим:

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right) = \frac{(\beta+k)^{2y} [(1+2y)(\beta+m) - (3+2y)(\beta+k)]}{(\beta+m)^{4+2y} h^{6+2y}} =$$

$$= \frac{1}{h^{6+2y} \varphi(\beta)}. \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{1}{\omega^2 R^{1+2y}} \right) = \frac{(\beta+k)^{2y} [(1+2y)(\beta+m)k - (3-2y)(\beta+k)(\beta+2m)]}{(\beta+m)^{4+2y} h^{6+2y}} =$$

$$= \frac{1}{h^{6+2y} f(\beta)}. \quad (14)$$

В приложении приведены значения функции $\varphi(\beta)$, $f(\beta)$ и $h^{6.4}$ для часто употребляемого значения $y=0,2$, при котором, следовательно,

$$C = \frac{1}{n} R^{0.2}.$$

в) Определение $\frac{\partial \chi_{об}}{\partial b}$ и $\frac{\partial \chi_{об}}{\partial h}$.

При одинаковых откосах канала,

$$\chi_{об} = b + k(h+z),$$

где z —запас в строительной высоте облицовки над расчетным горизонтом; $k = 2\sqrt{1+m^2}$

$$\frac{\partial \chi_{об}}{\partial b} = 1; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \chi_{об}}{\partial h} = k. \quad (16)$$

3. Расчетные формулы. Подставляя полученные значения частных производных из (9), (10), (13), (14), (15) и (16) в (5) и (6), получим окончательно формулы:

$$(a_b c_b V_0 + a_{об} c_{об}) h^{6.4} \varphi(\beta) = M, \quad (17)$$

$$(a_b c_b X_0 + k a_{об} c_{об}) h^{6.4} f(\beta) = M. \quad (18)$$

При наличии готовых таблиц значений $\varphi(\beta)$ и $f(\beta)$ решение задачи по определению экономического сечения подводящего канала сильно упрощается. При этом, только в общем случае решения задачи следует пользоваться обоими расчетными уравнениями. В частных случаях, когда известна одна из величин b , h или β , достаточно пользоваться только уравнением (17).

4. Для иллюстрации метода ниже приводим решение 3 примеров для случая подводящего канала с водосбросным сооружением в конце.

Условия задачи: $Q_{max} = 30 \text{ м}^3/\text{сек}$; $Q_{cp} = 20 \text{ м}^3/\text{сек}$; $m=1$; $m'=4$; $m_1=0,5$; $n=0,016$. Тип сечения канала № 1; $e=2,0 \text{ м}$. Толщина облицовки

с подготовкой $\bar{d}=0,3$ м, при стоимости облицовки по дну $c_{об}=50$ руб/м² и по откосам $c'_{об}=60$ руб/м²; $c_b=12$ руб/м³; $a_b=0,05$; $a_{об}=0,07$, $u=0,03$ руб/квт-час; $\eta=0,825$; $z=0,5$ м; пусть, помимо этого, по продольному профилю положение линии С—С (см. фиг. 1) получилось на 1,10 м выше горизонта воды в канале.

Пример I. Определить сечение канала при расчетном наполнении $h=2,5$ м.

Решение: Пользуемся уравнением (17).

$$[0,05 \cdot 12,0 Y_0 + 0,07 \cdot 50] 2,50^{6,4} \varphi(\beta) = M$$

$$M = 9,81 \cdot 0,03 \cdot 20 \cdot 8760 \cdot 0,825 (30 \cdot 0,016)^2 = 9770$$

$$H_c = 0,30 + 2,50 + 0,50 = 3,30 \text{ м}$$

$$0,5 P = 0,5 B + 3,30; H - H_c = 1,10 - 0,5 = 0,60 \text{ м}$$

$$Y_0 = 3,30 + 0,5 \cdot \left[\frac{0,5 B + 3,30 + 0,6 \cdot 4}{4 - 0,5} - \frac{0,5 B + 3,30 - 2,4}{4 + 0,5} \right],$$

или

$$Y_0 = 3,30 + 0,5 [1,43 - 0,032 B].$$

Полагая предварительно $B=3,0$ м, получим $Y_0=4,06$ м. Уравнение (17) примет вид:

$$[0,6 \cdot 4,06 + 3,5] 352,2 \varphi(\beta) = 9770,$$

откуда $\varphi(\beta)=4,68$, $\beta=1,87$, $b=1,87 \cdot 2,50=4,67$ м. Перерасчета по новому значению $b=4,67$ м не производим, так как это почти не скажется на результате.

Пример II. Определить сечение канала при ширине его по дну $b=2,80$ м.

Решение: $B=2,80 + 2 \cdot 0,30 \cdot 0,41 = 3,05$ м; $H_c = h + 0,80$ м.

$$0,5 P = \frac{3,05}{2} + h + 0,80 = 2,32 + h;$$

$$Y_0 = h + 0,80 + 0,5 \cdot \left[\frac{0,5 \cdot 3,05 + h + 0,80 + 2,40}{3,5} - \frac{0,5 \cdot 3,05 + h + 0,80 - 2,4}{4,5} \right],$$

или

$$Y_0 = 1,032 h + 1,527.$$

Расчетное уравнение примет вид:

$$[0,6(1,032 h + 1,527) + 3,50] h^{6,4} \varphi(\beta) = 9770,$$

или

$$[0,62 h + 4,42] h^{6,4} \varphi(\beta) = 9770.$$

Задаваясь различными значениями h , будем определять соответствующие значения b . Расчет ведем в табличной форме.

Построением кривой $b=f(h)$ найдем, что при ширине канала $b=2,80$ м соответствующее наполнение канала будет $h=3,09$ м, при котором уклон канала равен $i=0,00036$. Точно так же решается задача при заданной величине β .

Пример III. Решим задачу в общем случае. Пользуемся обоими расчетными уравнениями (17) и (18). На основе (17) составляем таб-

Таблица 1

h	[]	$h^{6.4}$	$f(\beta)$	β	b
2,0	5,65	84,44	20,45	2,33	6,66
2,50	5,97	352,2	4,64	1,87	4,67
3,00	6,28	1134	1,373	1,07	3,21
3,50	6,59	3034	0,488	0,58	2,03

лицу 1 (см. пример II). На основе уравнения (18) составляем таблицу 2.

$$X_0 = B + 2mY_0,$$

так как $B = b + 0,25$; $m = 1$; $Y_0 = 1,032h + 1,527$.

Поэтому $X_0 = b + 1,032h + 1,78$.

Уравнение (18) примет вид:

$$[0,05 \cdot 12X + 0,07 \cdot 60 \cdot 2,83] h^{6.4} f(\beta) = 9770,$$

или $[0,06b + 0,62h + 12,95] h^{6.4} f(\beta) = 9770.$

Таблица 2

h	b	[]	$h^{6.4}$	$f(\beta)$	β'	β
2,0	6,65	17,62	84,44	6,57	4,80	3,33
2,50	4,67	17,34	352,2	1,60	2,20	1,87
3,0	3,21	16,74	1134	0,513	1,18	1,07
3,5	2,03	17,16	3034	0,188	0,56	0,58

Построением кривых $\beta = f_1(h)$ и $\beta' = f_2(h)$ найдем в пересечении их искомые параметры канала: $h = 3,43$ м; $\beta = 0,64$; $b = 0,64 \cdot 3 \cdot 43 = 2,20$ м.

§ 4. Случай саморегулирующегося подводящего канала

(Без водосбросного сооружения в конце канала)

Сечение саморегулирующегося подводящего канала обычно подбирается по условию пропуска среднекубического расхода в условиях равномерного движения.

Расчет канала по среднекубическому расходу производится по выведенным в § 3 формулам (17) и (18) с той только разницей, что потери напора в данном случае выражаются через среднекубический расход $Q_{ср.к.} = \sqrt[3]{\frac{\Sigma Q^3 t}{T}}$, в соответствии с чем параметр M будет иметь вид:

$$M = 9,81 \text{ и } \eta T n^2 Q^3 \text{ ср.к.}$$

Помимо этого, при определении V_0 и X_0 величину H_0 следует определять для сечения канала со средней площадью выемки, т. е. для сечения примерно в середине длины деривации; отметим попутно, что расчет саморегулирующегося подводящего канала производится по индивидуальному продольному профилю (а не по характерному), ввиду единственности трассы канала, при обычно принимаемых горизонтальных бермах.

Полученное в результате расчета сечение должно быть проверено на пропуск максимального расчетного расхода, с построением кривой спада по известной глубине воды в голове канала. В случае интенсивной формы кривой спада, а тем более образования критической глубины в конце деривации, приведенный выше метод экономического расчета не может быть рекомендован. В этом случае следует подобрать, по условию пропуск максимального расчетного расхода, такое сечение канала, при котором эксплуатационные издержки для среднекубического расхода были бы минимальными.

§ 5. Расчет канала по заданной средней скорости потока

Такую задачу чаще всего приходится решать для деривационного канала в земляном русле, когда по условию неразрывности русла ограничивают скорость движения потока.

При одинаковом живом сечении канала $\omega = \frac{Q}{v}$ отдельные варианты его будут отличаться друг от друга шириной по дну b , расчетной глубиной наполнения h и зависящим от этих величин уклоном канала i . Исключая поэтому при экономическом сравнении вариантов постоянную величину ω , получим расчетное уравнение в виде:

$$[a_b c_b (V_0 - h) + a_{06} c_{06}] h^{6.4} \varphi(\beta) = M.$$

Вторым уравнением для определения β и h будет:

$$\omega = (\infty + m) h^2.$$

§ 6. Расчет канала по заданному уклону

Разделив уравнение (18) на (17), получим:

$$\frac{X_0 + gk}{V_0 + g} = \psi(\beta),$$

где $g = \frac{a_{06} c_{06}}{a_b c_b}$, $\psi(\beta) = \frac{\varphi(\beta)}{f(\beta)}$.

По этой формуле можно определить экономическое сечение канала по заданной пропускной способности его

$$K = \frac{Q}{Vi}.$$

В частном случае необлицованного канала формула примет вид (после подстановки $X_0 = b + 2mY_0$)

$$\frac{b}{Y_0} = \psi(\beta) - 2m.$$

Выводы

Предлагаемый метод экономического расчета подводящих каналов ГЭС дает возможность быстрого и точного определения экономически выгодных параметров канала, как в общем, так и в частных случаях решения задачи. При пользовании прилагаемыми таблицами весь расчет сводится к простым арифметическим выкладкам.

Предлагаемым методом можно производить экономический расчет подводящего канала, проходящего полностью в насыпи, или имеющего одну или две бортовые подпорные стены, а также учесть различную стоимость выемки грунта по глубине выемки.

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступило 25 III 1953

Приложение 1

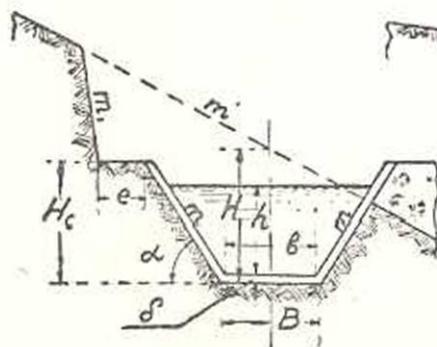
Формулы для определения Y и X для различных сечений канала.

1. Для сечения канала по фиг. 4:

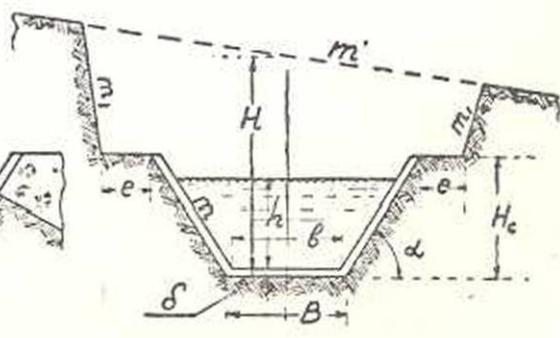
$$Y = \frac{H + H_c}{2} + \frac{1}{2} \left[\frac{0,5P + (H - H_c)(m' - m) + e}{m' - m_1} - \frac{0,5P}{m' + m} \right].$$

2. При $m_1 = m$, получим:

$$Y = H + 0,5P\lambda + \frac{e}{2(m' - m)}.$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

3. При $m_1 = m$ и $e = 0$,

$$Y = H + 0,5P\lambda.$$

4. Для сечения канала по фиг. 5:

$$Y = H + 0,5 [B + 2m H_c + 2e + 2m_1(H - H_c)] \frac{m_1}{m'^2 - m_1^2}.$$

Приложение 2 (продолжение)

h	h ^{6.4}								
1,76	37,26	2,26	184,6	2,76	663,5	3,26	1926	3,76	4800
1,77	38,64	2,27	189,9	2,77	679,0	3,27	1964	3,77	4832
1,78	40,06	2,28	195,3	2,78	694,9	3,28	2003	3,78	4965
1,79	41,52	2,29	200,9	2,79	711,0	3,29	2042	3,79	5050
1,80	43,03	2,30	206,6	2,80	727,5	3,30	2082	3,80	5136
1,81	44,58	2,31	212,4	2,81	744,3	3,31	2123	3,81	5223
1,82	46,18	2,32	218,3	2,82	761,4	3,32	2164	3,82	5311
1,83	47,83	2,33	224,4	2,83	778,8	3,33	2206	3,83	5401
1,84	49,53	2,34	230,7	2,84	796,6	3,34	2249	3,84	5492
1,85	51,28	2,35	237,0	2,85	814,7	3,35	2292	3,85	5583
1,86	53,07	2,36	243,6	2,86	833,2	3,36	2337	3,86	5677
1,87	54,93	2,37	250,2	2,87	852,0	3,37	2381	3,87	5772
1,88	56,83	2,38	257,6	2,88	871,2	3,38	2427	3,88	5869
1,89	58,80	2,39	264,1	2,89	890,7	3,39	2473	3,89	5966
1,90	60,82	2,40	271,2	2,90	910,6	3,40	2520	3,90	6065
1,91	62,90	2,41	278,6	2,91	930,9	3,41	2568	3,91	6165
1,92	65,03	2,42	292,7	2,92	961,6	3,42	2617	3,92	6267
1,93	67,23	2,43	298,7	2,93	972,6	3,43	2666	3,93	6370
1,94	69,49	2,44	301,5	2,94	994,1	3,44	2716	3,94	6474
1,95	71,82	2,45	309,5	2,95	1016	3,45	2767	3,95	6580
1,96	74,21	2,46	317,7	2,96	1038	3,46	2819	3,96	6687
1,97	76,66	2,47	326,0	2,97	1061	3,47	2872	3,97	6796
1,98	79,17	2,48	334,6	2,98	1084	3,48	2925	3,98	6907
1,99	81,78	2,49	343,3	2,99	1107	3,49	2979	3,99	7018
2,00	84,44	2,50	352,2	3,00	1131	3,50	3034	4,00	7132
2,01	87,19	2,51	361,3	3,01	1156	3,51	3090	4,01	7246
2,02	88,89	2,52	370,6	3,02	1181	3,52	3147	4,02	7363
2,03	93,53	2,53	380,2	3,03	1206	3,53	3204	4,03	7481
2,04	95,86	2,54	389,9	3,04	1231	3,54	3263	4,04	7600
2,05	98,97	2,55	399,8	3,05	1258	3,55	3323	4,05	7722
2,06	102,3	2,56	410,0	3,06	1284	3,56	3383	4,06	7845
2,07	105,2	2,57	420,3	3,07	1311	3,57	3444	4,07	7968
2,08	108,5	2,58	430,9	3,08	1339	3,58	3506	4,08	8095
2,09	111,9	2,59	441,7	3,09	1367	3,59	3570	4,09	8223
2,10	115,4	2,60	452,7	3,10	1396	3,60	3634	4,10	8353
2,11	119,0	2,61	464,0	3,11	1425	3,61	3701	4,11	8484
2,12	122,6	2,62	475,5	3,12	1454	3,62	3765	4,12	8616
2,13	126,4	2,63	487,2	3,13	1484	3,63	3832	4,13	8731
2,14	130,2	2,64	499,2	3,14	1515	3,64	3900	4,14	8888
2,15	134,2	2,65	511,4	3,15	1548	3,65	3969	4,15	4026
2,16	138,2	2,66	523,9	3,16	1578	3,66	4039	4,16	9167
2,17	142,3	2,67	536,6	3,17	1610	3,67	4110	4,17	9308
2,18	146,5	2,68	549,6	3,18	1643	3,68	4182	4,18	9452
2,19	151,0	2,69	562,9	3,19	1676	3,69	4256	4,19	9598
2,20	155,4	2,70	576,4	3,20	1710	3,70	4330	4,20	9748
2,21	160,0	2,71	590,3	3,21	1744	3,71	4406	4,21	9895
2,22	164,7	2,72	604,3	3,22	1779	3,72	4482	4,22	10050
2,23	169,5	2,73	618,6	3,23	1815	3,73	4560	4,23	10200
2,24	174,4	2,74	633,3	3,24	1851	3,74	4639	4,24	10355
2,25	179,5	2,75	648,2	3,25	1888	3,75	4719	4,25	10512

Приложение 2 (продолжение)

h	$h^{6,4}$								
4,26	10672	4,62	17935	4,98	28991	5,34	45317	5,70	68795
4,27	10833	4,63	18185	4,99	29365	5,35	45861	5,71	69583
4,28	10995	4,64	18438	5,00	29744	5,36	46411	5,72	70365
4,29	11162	4,65	18693	5,01	30129	5,37	46967	5,73	71149
4,30	11329	4,66	18951	5,02	30513	5,38	47532	5,74	71949
4,31	11499	4,67	19216	5,03	30904	5,39	48103	5,75	72760
4,32	11670	4,68	19480	5,04	31300	5,40	48674	5,76	73568
4,33	11845	4,69	19746	5,05	31700	5,41	49259	5,77	74397
4,34	12021	4,70	20015	5,06	32104	5,42	49842	5,78	75255
4,35	12201	4,71	20291	5,07	32513	5,43	50433	5,79	76058
4,36	12380	4,72	20569	5,08	32923	5,44	51031	5,80	76904
4,37	12562	4,73	20850	5,09	33343	5,45	51637	5,81	77758
4,38	12747	4,74	21135	5,10	33763	5,46	52242	5,82	78611
4,39	12934	4,75	21420	5,11	34189	5,47	52861	5,83	79485
4,40	13125	4,76	21712	5,12	34620	5,48	53480	5,84	80356
4,41	13318	4,77	22005	5,13	35057	5,49	54106	5,85	81251
4,42	13511	4,78	22302	5,14	35493	5,50	54740	5,86	82142
4,43	13708	4,79	22605	5,15	35940	5,51	55381	5,87	83041
4,44	13907	4,80	22903	5,16	36388	5,52	56030	5,88	83952
4,45	14109	4,81	23215	5,17	36842	5,53	56686	5,89	84874
4,46	14312	4,82	23525	5,18	37300	5,54	57340	5,90	85790
4,47	14520	4,83	23839	5,19	37765	5,55	58004	5,91	86731
4,48	14730	4,84	24157	5,20	38230	5,56	58673	5,92	87670
4,49	14942	4,85	24476	5,21	38705	5,57	59362	5,93	88618
4,50	15155	4,86	24803	5,22	39183	5,58	60039	5,94	89590
4,51	15373	4,87	25130	5,23	39665	5,59	60734	5,95	90575
4,52	15592	4,88	25461	5,24	40152	5,60	61435	5,96	91538
4,53	15814	4,89	25799	5,25	40647	5,61	62136	5,97	92514
4,54	16039	4,90	26138	5,26	41147	5,62	62854	5,98	93517
4,55	16265	4,91	26480	5,27	41647	5,63	63572	5,99	94526
4,56	16494	4,92	26830	5,28	42153	5,64	64297	6,00	95534
4,57	16730	4,93	27180	5,29	42672	5,65	65031		
4,58	16965	4,94	27531	5,30	43191	5,66	65773		
4,59	17202	4,95	27894	5,31	43709	5,67	66514		
4,60	17444	4,96	28253	5,32	44240	5,68	67273		
4,61	17688	4,97	28612	5,33	44779	5,69	68030		

Приложение 3

ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\varphi(\beta)$ И $f(\beta)$

β	$m=0$		$m=0,5$		$m=1,0$		$m=1,5$	
	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$
0,20	0,000075	0,000355	0,0202	0,0197	0,1660	0,030	0,574	—
0,30	0,000185	0,00133	0,0315	0,0295	0,2280	0,104	0,718	0,222
0,40	0,00165	0,00382	0,0555	0,0133	0,3050	0,133	0,883	0,262
0,50	0,00123	0,0113	0,0355	0,0323	0,4000	0,165	1,078	0,307
0,60	0,0030	0,0200	0,1235	0,0355	0,5120	0,202	1,300	0,353
0,70	0,0170	0,0318	0,174	0,103	0,6470	0,243	1,555	0,417
0,80	0,0295	0,0458	0,239	0,140	0,8030	0,290	1,845	0,478
0,90	0,0476	0,0645	0,330	0,175	0,9900	0,310	2,160	0,540
1,00	0,073	0,0873	0,417	0,215	1,2010	0,335	2,530	0,613
1,10	0,107	0,1135	0,526	0,259	1,4550	0,459	2,925	0,685
1,20	0,152	0,1405	0,677	0,311	1,73	0,523	3,335	0,772
1,30	0,203	0,172	0,842	0,350	2,05	0,595	3,870	0,856
1,40	0,281	0,210	1,033	0,411	2,40	0,670	4,40	0,942
1,50	0,368	0,250	1,255	0,483	2,79	0,755	4,990	1,010
1,60	0,474	0,313	1,513	0,558	3,24	0,841	5,625	1,145
1,70	0,599	0,388	1,797	0,632	3,73	0,935	6,320	1,250
1,80	0,749	0,415	2,225	0,714	4,25	1,027	7,035	1,360

Приложение 3 (продолжение)

P	m=0		m=0,5		m=1,0		m=1,5	
	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$	$\varphi(\beta)$	$f(\beta)$
1,90	0,918	0,491	2,49	0,802	4,84	1,130	7,915	1,475
2,00	1,122	0,561	2,90	0,894	5,47	1,240	8,780	1,600
2,10	1,352	0,35	3,37	0,992	6,16	1,357	9,750	1,730
2,20	1,615	0,717	3,89	1,093	6,93	1,480	10,770	1,860
2,30	1,913	0,802	4,41	1,200	7,75	1,605	11,875	2,005
2,40	2,245	0,893	5,00	1,315	8,63	1,74	13,05	2,15
2,50	2,615	0,990	5,65	1,430	9,58	1,87	14,30	2,31
2,60	3,030	1,050	6,38	1,560	10,62	2,01	15,65	2,46
2,70	3,49	1,20	7,15	1,71	11,72	2,16	17,05	2,62
2,80	4,00	1,31	8,01	1,85	12,97	2,32	18,50	2,79
2,90	4,56	1,43	8,92	1,97	14,15	2,48	20,13	2,96
3,00	5,15	1,55	9,89	2,12	15,47	2,65	21,85	3,14
3,10	5,81	1,67	10,97	2,27	16,90	2,82	23,35	3,33
3,20	6,55	1,81	12,25	2,44	18,40	3,00	25,50	3,52
3,30	7,37	1,96	13,27	2,60	20,00	3,17	27,50	3,71
3,40	8,17	2,10	14,55	2,77	21,65	3,36	29,50	3,91
3,50	9,07	2,25	15,95	2,94	23,50	3,55	31,75	4,12
3,60	10,07	2,41	17,38	3,13	25,40	3,76	34,00	4,32
3,70	11,12	2,58	18,95	3,31	27,40	3,96	36,45	4,55
3,80	12,13	2,75	20,60	3,51	28,90	4,16	38,90	4,77
3,90	13,33	2,91	22,35	3,71	31,6	4,39	41,60	5,00
4,00	14,72	3,10	22,05	3,91	34,0	4,62	44,35	5,25
4,10	16,10	3,27	26,10	4,12	36,4	4,85	47,30	5,48
4,20	17,50	3,46	28,10	4,34	38,4	5,08	50,15	5,74
4,30	19,07	3,67	30,30	4,56	41,6	5,33	53,30	5,98
4,40	20,65	3,86	32,50	4,79	44,0	5,56	56,65	6,22
4,50	22,40	4,08	34,90	5,02	47,5	5,80	60,00	6,50
4,60	24,20	4,28	37,30	5,25	50,6	6,06	63,60	6,78
4,70	26,15	4,50	39,35	5,50	53,5	6,32	67,20	7,03
4,80	28,15	4,73	42,70	5,75	56,8	6,58	71,20	7,35
4,90	30,25	4,96	45,50	6,00	60,4	6,88	75,20	7,63
5,00	32,50	5,20	48,40	6,26	63,2	7,18	79,25	7,90
5,10	34,80	5,45	51,55	6,53	68,5	7,48	83,50	8,21
5,20	37,30	5,68	54,4	6,81	71,5	7,77	88,00	8,53
5,30	39,50	5,96	58,15	7,08	75,6	8,07	92,60	8,85
5,40	42,00	6,21	61,75	7,41	79,7	8,37	97,50	9,15
5,50	45,4	6,47	65,35	7,67	84,0	8,67	102,50	9,52
5,60	48,3	6,73	69,15	7,98	88,5	8,98	107,50	9,82
5,70	51,5	7,03	73,15	8,30	93,2	9,30	113,00	10,14
5,80	54,7	7,34	77,30	8,62	98,0	9,62	118,00	10,50
5,90	58,0	7,62	81,25	8,92	103,0	9,95	124,00	10,83
6,00	61,4	7,99	85,50	9,25	108,0	10,29	129,50	11,20
6,10	64,9	8,21	90,60	9,67	113,5	10,64	135,50	11,56
6,20	68,9	8,55	95,25	9,5	119,0	10,99	141,60	11,92
6,30	72,9	8,83	100,35	10,25	125,0	11,34	148,00	12,26
6,40	77,0	9,16	105,50	10,60	130,5	11,70	154,50	12,63
6,50	81,1	9,48	110,50	10,95	136,5	12,04	161,50	13,00
6,60	85,5	9,81	115,75	11,22	142,5	12,40	168,30	13,40
6,70	90,0	10,14	121,65	11,66	149,0	12,78	175,60	13,83
6,80	94,5	10,50	127,25	12,03	156,0	13,18	183,00	14,20
6,90	99,3	10,80	133,20	12,37	162,0	13,59	190,50	14,65
7,00	104,2	11,17	139,00	12,77	170,0	14,00	197,00	15,05

Ա. Մ. Ա. Պատյան

ՀԻԴՐՈԷԼԵԿՏՐԱԿԱՅԱՆՆԵՐԻ ԱՌԲԵՐՈՂ ՋՐԱՆՑՔՆԵՐԻ ՏՆՏԵՍԱԿԱՆ
ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՆՈՐ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵՔՈՂ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հիդրոէլեկտրակայանների առերևոյ ջրանցքների տնտեսական հաշվարկման առաջարկվող մեթոդը հնարավորութիւն է տալիս արագ և ճշգրիտ որոշելու ջրանցքի՝ տնտեսական տեսակետից նպատակաւոր պարամետրները խնդրի ինչպէս ընդհանուր, այնպէս էլ մասնաւոր լուծման դեպքերում: Հոդվածում գետեղված աղյուսակներից օգտվելիս ջրանցքի ամբողջ հաշվարկը վերածվում է պարզ իջարանական գործողութիւնների:

Առաջարկվող մեթոդով հնարավոր է կատարել այն առերևոյ ջրանցքի տնտեսական հաշվարկը, որն ամբողջովին անցնում է լիցքով կամ ունի մեկ կամ երկու կողային հենապատեր, ինչպէս նաև հաշվի առնել գրունտահանման տարրեր արժեքներն ըստ փորվածքի խորութիւնը:

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

М. З. Симонов

Самовакуумирование легких бетонов

§ 1. Сущность явления

Легкие бетоны, отличающиеся от обычных значительной пористостью, относительно мало уступают им по своим показателям прочности, водонепроницаемости и морозостойкости. В случае применения таких заполнителей, как литонидная пемза, легкие бетоны, при одинаковых расходах цемента и одинаковой консистенции, обладают даже лучшими показателями, чем обычные бетоны [1].

Указанное обстоятельство может быть объяснено характером капиллярных явлений, происходящих в легких бетонах.

Формирование свойств легких бетонов протекает в условиях взаимодействия двух капиллярных систем: цементного теста, постепенно затвердевающего в цементный камень, и пористого заполнителя. Зерна пористого заполнителя, подобно „микронасосам“, отсасывают из цементного теста воду, „аккумулируют“ ее в капиллярах и отдают воду обратно цементному тесту по мере его затвердевания и высыхания.

Если бы заполнитель поглощал из цементного теста столько воды, сколько вытесняется из его капилляров воздуха, то в тесте происходила бы замена водяных пор равным им объемом воздушных пор, и плотность цементного теста оставалась бы неизменной. В легких бетонах отсасываемый заполнителем из цементного теста объем воды не компенсируется отдачей тесту равного объема воздуха, в результате чего имеет место уплотнение цементного теста на поверхностях контактов с заполнителем.

Это утверждение будет обоснованным при условии доказательства следующих выдвигаемых здесь положений:

а) капилляры пористых заполнителей являются сообщающимися, и если достаточно долгое хранение заполнителей в воде все же не приводит к полному обводнению этих капилляров, то это объясняется защемлением в них воздуха, а не наличием в них „открытых“ и „закрытых“ пор;

б) давление защемленного в порах и капиллярах заполнителей воздуха в общем случае не равно атмосферному; давление это должно быть выше атмосферного при отсасывании заполнителей воды из цементного теста и ниже — при обратном движении воды.

Последнее может иметь место при вакуумной обработке легкобетонной смеси или в процессе затвердевания и высыхания бетона. В обоих случаях будет иметь место градиент давления между цементным тестом (камнем) и заполнителем на поверхностях контактов.

Экспериментальное исследование выдвинутых положений и составляет задачу настоящей работы.

Описанный характер протекающих в легких бетонах капиллярных явлений дает основание говорить о „самовакуумировании“ легких бетонов, поскольку явления эти до известной степени могут быть сравнены с явлениями, имеющими место в бетонах вообще, при вакуумной обработке.

Следует отметить, что если при вакуумной обработке бетона вода может отсасываться из цементного теста с интенсивностью не свыше одной атмосферы, то капиллярные явления, как известно, не связаны с атмосферным давлением и поэтому при „самовакуумировании“ отсасывание воды из цементного теста пористым заполнителем может осуществляться и с более высокой интенсивностью.

При вакуумировании бетона отсасывание воды производится на толщину укладываемого слоя. Поэтому в вакуумированном бетоне может иметь место неоднородность—убывание эффекта вакуумирования по мере удаления от вакуумированной поверхности. В легком бетоне зерна пористых заполнителей, выполняющие роль „вакуумполостей“, равномерно распределены в бетоне. В то же время толщина „самовакумируемого“ слоя в легких бетонах измеряется не десятками сантиметров, как в предыдущем случае, а долями сантиметра и даже миллиметра.

Можно показать расчетами, что толщина „самовакумируемого“ слоя, незначительная по отношению к мелким зернам, быстро растет по мере увеличения крупности зерен. В соответствии с этим, мелкие зерна пористого заполнителя в качестве „вакуумполостей“ будут „заканчивать работу“ и „выключаться“ в начальной же стадии затвердевания бетонной смеси. Из сказанного следует, что эффект „самовакуумирования“, в том смысле, в каком это имеется в виду при вакуумной обработке бетона, будет тем больший, чем крупнее зерна заполнителя, чем меньше (до известной степени) подвижность бетонной смеси и чем медленнее всасываемость данного вида заполнителя. В этом же смысле, „самовакуумирование“ должно дать в легких бетонах больший эффект при их раздельной укладке и применении сухих заполнителей и меньший эффект—при обычном приготовлении бетонной смеси и применении предварительно насыщенных водой заполнителей.

Благодаря самавакуумированию вредные последствия седиментационных явлений в легких бетонах должны сказываться в меньшей степени, чем в обычных бетонах [2].

При обычной вакуумной обработке бетонной смеси отсасывание из нее воды производится в промежутке между окончанием

уплотнения и началом ее схватывания и продолжается обычно 10—15 минут. В легких бетонах процессы самовакумирования, т. е. отсасывание воды из цементного теста зернами заполнителя и затем отдача влаги обратно твердеющему цементному камню, протекают начиная с момента затворения бетонной смеси в течение всего периода формирования бетона. Поэтому предварительное вымачивание пористых заполнителей может «выключить» их из участия в процессах самовакумирования лишь в изначальной стадии, на некотором отрезке времени.

Явление вакуума в бетонах и растворах изучается с 1940 года [3]. В частности, вопрос этот изучался в Институте стройматериалов и сооружений АН Армянской ССР А. А. Аракелянном в 1947 г.

Описанное выше самовакумирование легких бетонов следует отличать от явления вакуума в бетонах, обусловленного контракцией твердеющего цементного камня, неоднократно описанного в литературе [3, 4, 5, 6].

Явление вакуума, обусловленное контракцией, развивается в основном после начала схватывания бетонной смеси, т. е. в период, когда вакуумная обработка с целью ее уплотнения становится бесполезной.

Явление вакуума от контракции неизбежно будет накладываться на явление самовакумирования легких бетонов, соответственно усложняя общую картину.

Из описания сущности самовакумирования можно прийти к выводу, что процесс этот, протекающий в легких бетонах в течение длительного срока и самопроизвольно, может привести как к положительному, так и к отрицательному эффекту. В соответствии с этим, значительный интерес представляет не только изучение факторов, обуславливающих самовакумирование легких бетонов, и влияние этого явления на их качество, но и изучение возможностей управления процессами самовакумирования.

§ 2. Строение капилляров и капиллярные явления в пористых каменных материалах и бетонах

Каменные материалы, используемые в легких бетонах в качестве заполнителей, обладают значительной пористостью. Относительный объем пор в наиболее легких породах камней (аийская пемза) достигает 80%. При приготовлении из таких камней заполнителей к собственной пористости их добавляется еще объем межзерновых пространств.

Объем пор (O) в каменных, бетонных и других капиллярно-пористых материалах легко определяется по одной из следующих формул:

$$O = v \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_s} \right) = v \alpha \quad (1)$$

$$\text{или} \quad O = \frac{P}{\gamma_0} \alpha, \quad (2)$$

где v — объем камня (бетона),

P —вес камня (бетона),

α —относительный объем пор,

γ_0 и γ_y —объемный и удельный вес камня.

Объем пор (O) до известной степени характеризует прочность каменных и бетонных материалов на сжатие и объемный вес. Что же касается таких показателей их, как капиллярная всасываемость, морозостойкость, водонепроницаемость, воздухопроницаемость и др., то эти качества пористых материалов определяются не столько объемом пор и капилляров, сколько размерами и строением последних.

Строение капилляров

В технической литературе иногда указывают на капиллярно-пористые материалы с системой замкнутых или сообщающихся пор. При этом к материалам с замкнутой системой пор относят те из них, в которых, при достаточно долгом выдерживании в воде, часть пор остается заполненной воздухом.

Как уже указывалось выше, автор исходит из допущения, что в большинстве капиллярно-пористых тел капилляры связаны между собой, а неполное заполнение капилляров водой объясняется не „замкнутостью“ пор, а строением капилляров, обуславливающим защемление в них воздуха.

Диаметры капилляров по своим размерам колеблются от нескольких миллиметров в поперечнике до размеров молекул, когда они перестают быть доступными для молекул крупных размеров.

В этих пределах различаются не только диаметры капилляров между собой, но и диаметры одного и того же капилляра по длине. Переменность сечения капилляров выражается как в сужении и расширении их по длине, так и в изменении формы: цилиндрическая форма может переходить в конусообразную, клинообразную, щелевидную форму и т. п. Наряду с этим, следует различать одиночные и ветвистые капилляры со стенками гладкими, пористыми, запыленными и т. д.

Необходимо отметить также, что для развития капиллярной диффузии необходимо наличие в стенках капилляров углублений и микроскопических открытых каналов.

Существует качественное различие в характере капиллярных явлений, протекающих в капиллярах различных размеров, в связи с чем имеются предложения по разделению капилляров на макрокапилляры и микрокапилляры.

По предложению А. В. Лыкова [7], к микрокапиллярам следует отнести капилляры с радиусом, удовлетворяющим условию:

$$0,5 \times 10^{-7} \text{ см} < r < 10^{-5} \text{ см.}$$

Предложение это обосновывается тем, что при более тонких капиллярах радиусы их становятся сравнимыми с радиусом молекулы $\sim 10^{-8}$ см, а для радиуса капилляра $r = 107 \times 10^{-7}$ см давление насыщенного пара над мениском практически не отличается от давления насыщенного пара над плоской поверхностью.

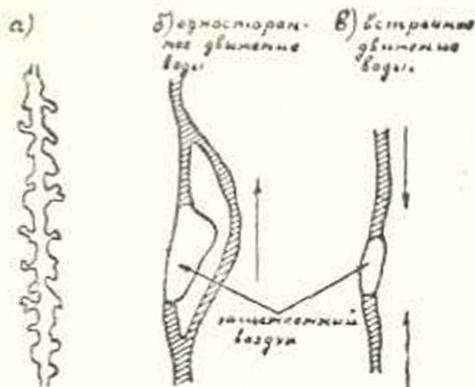
Капилляры с радиусом $r > 10^{-2}$ см относятся к макрокапиллярам.

Деление капилляров на макро- и микрокапилляры обосновывается еще по признакам конденсации в них пара. Толщина адсорбционного слоя пара, согласно многочисленным экспериментальным данным, составляет примерно 10^{-2} см. Таким образом, если капилляр сквозной, то слияние адсорбированных пленок жидкости может произойти, если радиус капилляра в наиболее узком месте будет $r < 10^{-2}$ см. Только тогда образуется мениск, и, следовательно, будет происходить капиллярная конденсация.

Если же $r > 10^{-2}$ см, то в сквозном капилляре мениск не образуется, и капиллярной конденсации быть не может. Такой капилляр может быть заполнен водой только при непосредственном соприкосновении с ней.

Защемление воздуха в капиллярах легко себе представить в случаях соприкосновения капиллярно-пористого тела с водой одновременно по всей поверхности (схема а, фиг. 1), как это имеет место при затворении бетонной смеси, когда движение воды в капиллярах пористого заполнителя будет происходить от периферии к центру.

Но защемление воздуха в капиллярах будет иметь место и в случае одностороннего соприкосновения пористого материала с водой из-за неодинаковой скорости движения воды в капиллярах разных диаметров. Так, например, в капилляре, состоящем из двух ветвей (схема б, фиг. 1), вода подымается по тонкой (правой) ветви и далее будет двигаться по основному стволу капилляра, преграждая выход в этот ствол воздуху, находящемуся в уширении левой ветви.



Фиг. 1. Схемы капилляров.

Методика изучения строения капилляров

Из предыдущего можно сделать вывод, что изучение строения капилляров в капиллярно-пористых телах является достаточно сложной задачей. Представляется возможным получить количественную и качественную характеристику строения капилляров в пористых каменных материалах и бетонах микроскопическим методом, методом капиллярного давления, путем анализа изотерм сорбции и десорбции и т. д.

Микроскопический метод может быть использован для определения размеров капилляров и их распределения в шлифах пористых камней и бетонов по аналогии с методом, принятым в петрографии для определения размеров минералов и их относительных количеств.

Линейным методом микроскопического анализа автором изучены размеры пор и общая пористость ряда пористых каменных материалов и бетонов [8]. Площади, занимаемые крупными порази, микроскопическим методом определяются точнее, чем площади, занимаемые мелкими порази. Поэтому установление размеров пор этим методом можно ограничить определенными диаметрами. Суммарная площадь, занимаемая более тонкими капиллярами, может быть определена как разность между общей площадью пор, вычисляемой, исходя из удельного и объемного весов материала, и объемом пор, обусловливаемым крупными капиллярами. Этот метод основан на предположении о равномерном распределении пор в породе.

Методом капиллярного давления следует именовать метод, применяемый для определения пор ультрафильтров и некоторых других материалов. Этот метод использован В. В. Стольниковым и Е. В. Лавринович для определения размеров пор в цементном растворе и цементном камне [9]. Метод этот основан на использовании функциональной зависимости между величиной капиллярного давления и радиусом кривизны поверхности раздела жидкость-вода. Путем продавливания жидкости из капилляра газом находят то давление, при котором с поверхности образца, обращенной к воде, начинают отрываться отдельные пузырьки воздуха. Диаметр пор D будет равен

$$D = \frac{4\sigma}{1,014 \times 10^6 P} \text{ см}, \quad (3)$$

где σ — поверхностное натяжение на границе жидкость-газ,

P — давление воздуха в атмосферах.

Для определения размеров фракций пор в гетеропорозных телах А. В. Думанским предложено применять метод возрастающего давления.

По предложению А. В. Лыкова [7] представление о строении капиллярно-пористых тел можно получить по форме изотерм сорбции и десорбции. При этом методе исследуемый материал помещают в атмосферу влажного воздуха с определенным давлением водяного пара. По истечении некоторого промежутка времени устанавливается равновесие между содержанием воды в материале и давлением пара в окружающем воздухе. Изменяя последовательно давление пара в окружающем воздухе, можно получить зависимость между давлением пара и содержанием воды в материале в виде некоторой кривой. Кривая эта называется изотермой, поскольку зависимость между содержанием воды в материале и давлением пара устанавливается при неизменной температуре.

Среди исследователей естественных камней и бетонов получил распространение метод качественной оценки их строения по интенсивности и высоте капиллярного подсоса.

Оценка строения капиллярно-пористых тел возможна также по удельной поверхности. Удельная поверхность материалов в существенной мере зависит от того, получены ли они размолот плотных или пористых материалов. Например, порошок цементных клинкеров, молотого кварца, известняков и др., характеризующиеся малой пористостью, обладают малой внутренней поверхностью. Даже в том случае, когда такого рода материал проходит через сито 10000 отверстий на 1 см^2 , поверхность его может составлять доли $1 \text{ м}^2/\text{г}$. В то же время такие материалы как трепела, диатомиты, вулканические цеолы, глины и др. обладают чрезвычайно тонкой пористостью и высоко развитой внутренней поверхностью раздела, достигающей многих сотен $\text{м}^2/\text{г}$.

С точки зрения рассматриваемой задачи особенно большой интерес представляет изучение удельной поверхности капиллярно-пористых тел без диспергирования последних.

Метод определения удельной поверхности сыпучих или пористых тел основан на измерении сопротивления, которое оказывает пористое тело протеканию через него разреженного воздуха [10].

Величина и свойства внутренней поверхности и структура тонких пор могут быть определены также структурным и электронно-микроскопическим методом [11].

По мнению автора, важную косвенную характеристику строения капиллярно-пористого тела можно получить измерением в нем кинематики зацемянения воздуха.

Интенсивность капиллярного всасывания

Водоотсасывающая способность пористого материала зависит от водоподъемной силы капилляров, относительной площади, занимаемой этими капиллярами на поверхности данного материала, и от влажности материала.

Водоподъемная сила капилляра Q находится из известного выражения.

$$Q = \frac{4\sigma}{\alpha} = h\gamma, \quad (4)$$

где σ — поверхностное натяжение воды,

α — диаметр капилляра,

γ — плотность воды,

h — высота поднятия водяного столба.

Из выражения (4) видно, что подъемная сила капилляра равна весу водяного столба.

Каждая частица воды, расположенная на высоте $h' < h$, испытывает растягивающее напряжение $h'\gamma$, а столб воды как бы висит в капиллярной трубке, передавая свой вес на ее стенки.

Относительная площадь, занимаемая капиллярами на поверхности пористого материала, пропорциональна относительному объему пор (α) в материале.

Поэтому водоотсасывающая способность пористого материала (F) в сухом состоянии будет равна произведению водоподъемной силы капилляров на относительный объем пор в материале, а именно

$$F = Q\alpha. \quad (5)$$

Защемление воздуха в капиллярно-пористых телах и методика определения его давления

Выше уже указывалось, что в капиллярно-пористых материалах может иметь защемление воздуха независимо от того — соприкасается ли данный материал с водой всей поверхностью или ее частью.

В зависимости от строения капиллярно-пористых тел относительный объем защемленного воздуха и его давление будут различными.

Объем защемленного воздуха (O_s) во влажном капиллярно-пористом материале определяется весьма просто.

Общий объем пор (O) в материале вычисляется согласно выражению (1) или (2), и общий объем воды, вошедший в капилляры (V) материала, определяется из разности весов влажного и сухого материала. Тогда

$$O_s = O - V. \quad (6)$$

Защемленный воздух, как потерявший связь с атмосферой, в общем случае будет иметь давление, отличающееся от атмосферного. Давление защемленного воздуха в материале будет зависеть от объема вытесняемого из капиллярного воздуха (O_v) при проникновении в них воды.

Среднее давление защемленного воздуха (P_s) по закону Мариотта вычисляется из следующего выражения:

$$P_s = \frac{p(O - O_v)}{O_s}. \quad (7)$$

где P — атмосферное давление.

Объем вытесненного из капилляров воздуха может быть меньше или равен объему воды, вошедшей в капилляры.

Принимая во внимание выражение (6), приходим к выводу, что:

$$\begin{array}{l} \text{при } O_v = V \quad P_s = p \\ \text{и} \quad \text{при } O_v < V \quad P_s > p. \end{array}$$

Из приведенных данных видно, что защемленный воздух будет иметь давление, равное атмосферному только в частном случае. В общем же случае давление защемленного воздуха будет выше атмосферного.

Эти же данные позволяют заключить, что водоотсасывающая

способность пористых тел может изменяться в заметных пределах в зависимости от целого ряда факторов: изменения атмосферного давления, изменения температуры воздуха, температуры воды, наличия в воде примесей поверхностно-активных веществ и др.

Понижение атмосферного давления будет увеличивать всасываемость пористых тел подобно тому, как это приводит к поднятию уровня грунтовых вод.

Изменение температуры заземленного воздуха будет вызывать в нем изменение давления и соответственно вытеснение или дополнительное всасывание капиллярами воды.

Изменение температуры воды или наличие в воде поверхностно-активных веществ будет вызывать изменение поверхностного натяжения воды и, соответственно, изменение водоподъемной силы капилляров.

Давление заземленного воздуха и, соответственно, количество воздуха, вытесняемого из капилляров при проникновении в них воды, можно вычислить на основе данных опыта, проводимого по следующей методике.

Сосуд необходимой емкости с горлышком заполняется исследуемым капиллярно-пористым материалом и заливается водой. Горлышко сосуда закрывается резиновой пробкой с вставленной в нее бюреткой и сверху до некоторой отметки заливается водой. При проведении опыта должны быть обеспечены быстрое заполнение сосуда и бюретки водой и герметизация сосуда. Во избежание испарения воды из бюретки последняя прикрывается, а на поверхность воды наливается капля масла. Уровень воды в бюретке останется неизменным, если объем вытесняемого из капилляров воздуха равен объему воды, проникаемой в капилляры, т. е. если $O_3 = B$.

Понижение уровня воды в бюретке будет указывать на то, что вода проникает в капилляры без вытеснения из них воздуха, т. е. сжимая воздух в них.

По данным изменения уровня воды в бюретке можно сделать необходимые вычисления.

Зная взятую навеску капиллярно-пористого материала, вычисляют, согласно выражению (2), объем пор (O) в нем.

По приращению веса материала в воде вычисляется объем (вес) воды (B), вошедшей в капилляры.

Объем заземленного воздуха вычисляется согласно выражению (6)

$$O_3 = O - B.$$

Давление заземленного воздуха определится из выражения

$$p_3 = \frac{p(O_3 + B_6)}{O_3}, \quad (8)$$

где B_6 — количество воды, „осевшее“ в бюретке ниже нулевой отметки.

Описанная методика тождественна с методикой В. В. Некрасова, предложенной им для определения контракции [6]. Очевидно, что при

изучении, например, свежензготовленных бетонов на пористых заполнителях, количество воды, „осевшее“ в бюретке, будет вызвано как сжатием защемленного воздуха, так и контракцией цементного камня. Поэтому для получения картины сжатия защемленного воздуха в легких бетонах следует отдельно установить картину контракции цемента в бетонах того же состава на плотных заполнителях.

Случай, когда давление защемленного воздуха ниже атмосферного, а именно

$$p_a < p, \quad (9)$$

может иметь место, например, в свежензготовленном бетоне на пористом заполнителе при вакуумной обработке. Вода при вакуумировании будет отсасываться как из цементного теста, так и из капилляров пористых заполнителей. В результате отсасывания из капилляров воды давление защемленного воздуха внутри может упасть ниже атмосферного.

После удаления вакуумщитов вода начнет отсасываться капиллярами в обратную сторону, и давление защемленного воздуха начнет увеличиваться.

Описанная картина служит объяснением высокой эффективности вакуумирования легких бетонов, поскольку в них имеет место суммирование обычного эффекта вакуумирования с явлениями самовакуумирования.

§ 3. Водопоглощение пористых каменных материалов в зависимости от различных факторов

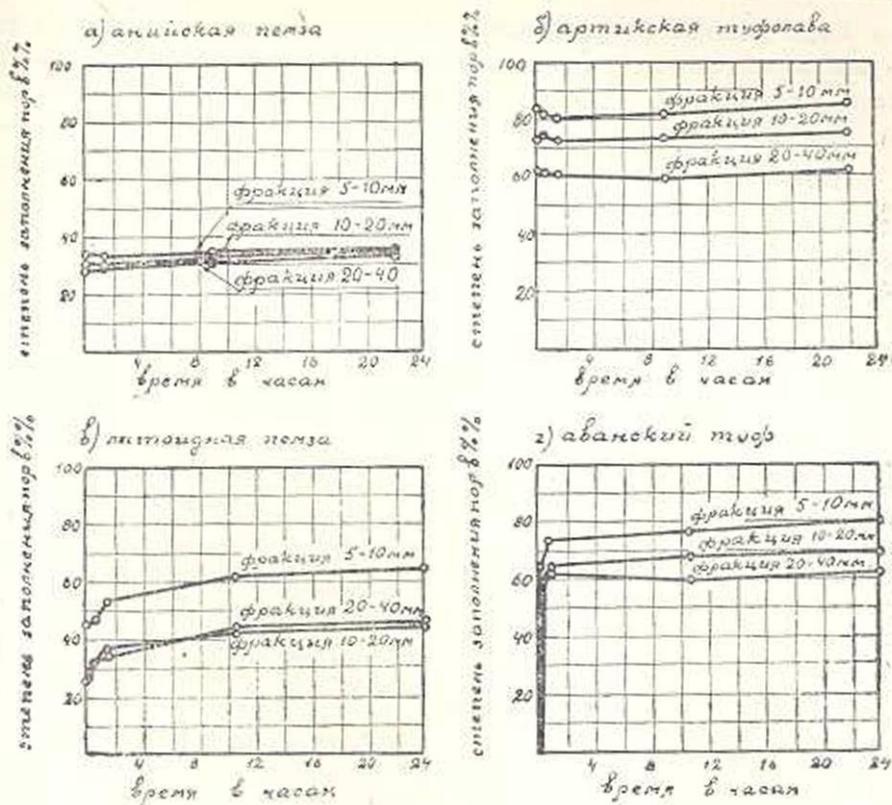
Как уже было отмечено, капилляры пористых камней при погружении в воду, из-за защемления в них воздуха, не могут заполняться водой полностью и что степень заполнения их капилляров зависит от породы камней, от размера их и ряда других причин.

Водопоглощение в зависимости от породы камней и размера образцов

Вопрос этот был подвергнут экспериментальному изучению первоначально на 4 видах пористых заполнителей: из аниийской пемзы, арктической туфолавы, литонидной пемзы и аванского туфа. Для каждого вида заполнителя изучались 3 фракции: с зернами от 5 до 10 мм, от 10 до 20 мм и от 20 до 40 мм.

Водонасыщение заполнителей определялось путем выдерживания их в воде в течение суток. Результаты опытов показаны на фиг. 2.

Как видно из фигуры, ни в одном из изученных заполнителей вода не заполнила полностью всех капилляров и пор. Объемные веса зерен испытанных заполнителей имели значения: для аниийской пемзы—560 кг/м³, арктической туфолавы—1075 кг/м³, литонидной пемзы—1400 кг/м³ и аванского туфа—1550 кг/м³. Пористость зерен заполнителей была наибольшей у аниийской пемзы (0,762) и наименьшей у аванского туфа (0,380).



Фиг. 2. Степень заполнения капилляров зерен заполнителя в проц. в зависимости от крупности зерен и продолжительности выдерживания в воде.

Как показали опыты, уже 15-минутное выдерживание в воде оказалось достаточным для максимального насыщения водой заполнителей из анидсовой пемзы и арктического туфа, в то время как заполнители из аванского туфа и в особенности из литонидной пемзы продолжали впитывать воду и в течение последующего времени. Степень заполнения пор оказалась тем выше, чем мельче зерна заполнителя.

Вопрос о том, в какой степени плотность материала и увеличение размера зерен заполнителя (свыше 20—40 мм) влияют на водопоглощение, был изучен на литонидной пемзе. Образцы были изготовлены кубической формы. Испытанию было подвергнуто 42 образца, с размерами ребер от 4,3 до 6,9 см. Опыты эти показали, что при объемном весе от 1130 до 1777 кг/м³ влагоемкость образцов составила от 5,4 до 18,9% по весу и от 8,8 до 21,6% по объему. В то же время общий объем пор в образцах составлял от 23,7 до 51,5% и при выдерживании их в воде в течение суток поры эти заводнялись водой на 16,4—65,3%. Определенной закономерности между плотностью литонидной пемзы и влагоемкостью не наблюдалось.

Интенсивность водонасыщения, изученная на 3 образцах с ребрами от 4 до 5 см, показана на фиг. 3.

Судя по этой фигуре, наиболее интенсивное водопоглощение имеет место в течение первых 2 часов. Капилляры и поры в течение указанного периода заполняются водой на 25,6—32,6%, в то время как при 25-часовом выдерживании образцов в воде степень заполнения пор составила

всего 28,8—37,5%.

Необходимо отметить, что если наполнитель из литонидной пемзы при зернах от 20 до 40 мм уже при 15-минутном выдерживании в воде показал водопоглощение 7,5% по весу и заполнение пор на 26,2%, то кубики из литонидной же пемзы с ребрами от 4 до 5 см имели примерно те же



Фиг. 3. Влагоемкость литонидной пемзы в проц. от объема в зависимости от продолжит. хранения в воде.

показатели водопоглощения только после 2-часового выдерживания в воде.

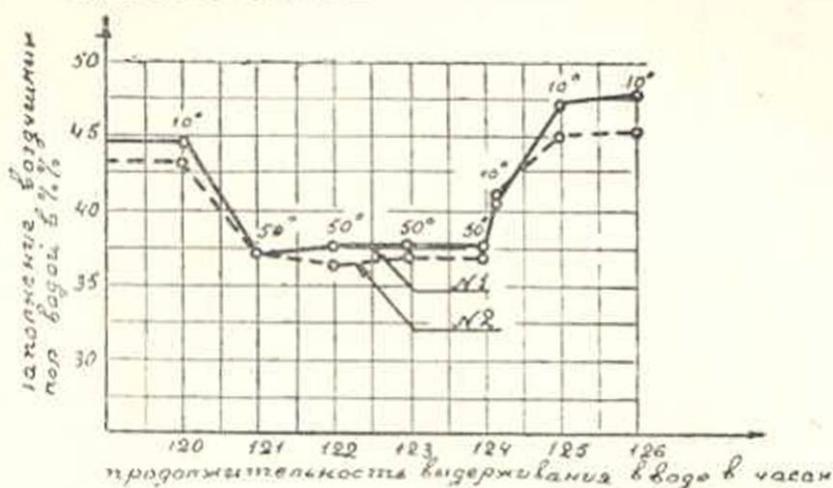
Водопоглощение пористых камней в зависимости от температурного фактора

Согласно представлениям, высказанным выше, капилляры в пористых заполнителях можно рассматривать как бы закрытые с одного конца. Вода, проникая в такие капилляры, должна вызвать постепенное сжатие находящегося внутри их воздуха до момента наступления некоторого равновесия. Последнее должно нарушаться при изменении температуры воздуха: с повышением температуры объем воздуха будет увеличиваться, и вода из капилляров начнет вытесняться наружу и, наоборот, с понижением температуры вода в капиллярах будет двигаться вглубь. Если пренебречь изменением поверхностного натяжения воды и изменением количества воды, расходуемого на насыщение воздуха в капиллярах, в зависимости от температуры, то объем воздуха, заключенный в порах и капиллярах, должен изменяться пропорционально изменению абсолютных температур по известной формуле:

$$v_2 : v_1 = (273 + t_2) : (273 + t_1).$$

Высказанные предположения были подтверждены следующими опытами. Кубики, вышпленные из литонидной пемзы с ребрами от 4 до 5 см, были выдержаны в воде с температурой 10° в течение 5 суток. Затем вода, в которую были уложены образцы, была подогрета в течение 1 часа до 50° и, спустя несколько часов, температура воды вновь была понижена до 10°.

В течение всего этого времени образцы взвешивались и на основании полученных данных делались расчеты по определению степени заполнения в этих образцах пор и капилляров водой. На фиг. 4 показаны полученные результаты.



Фиг. 4. Степень заполнения капилляров литонидной пемзы водой в проц. при повышении температуры воды от 10 до 50°.

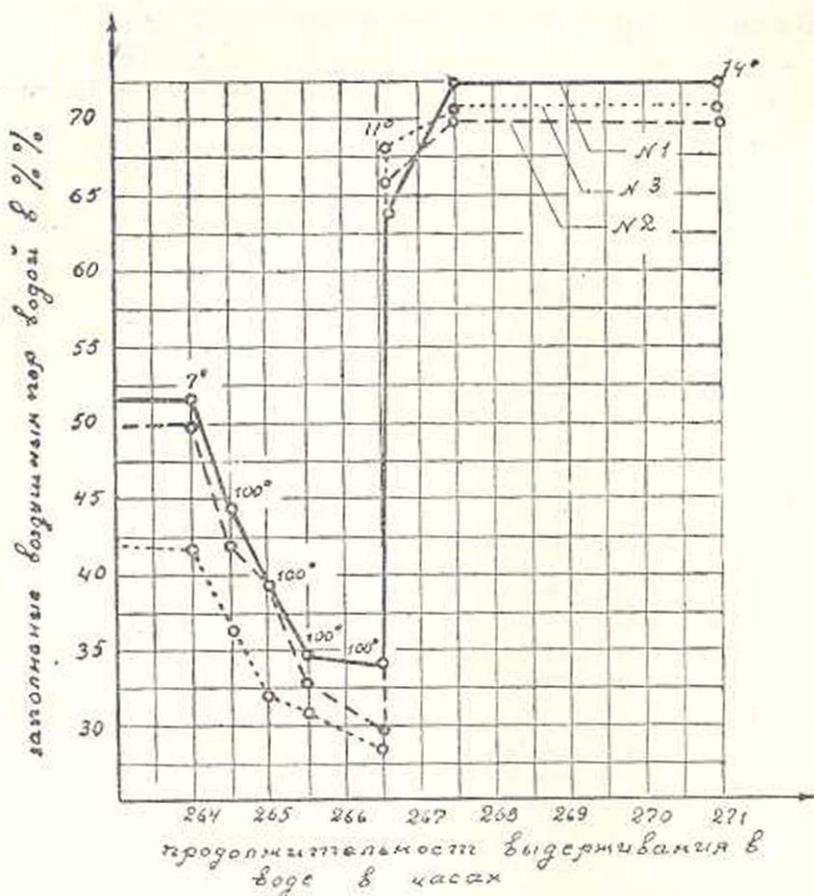
Как видно из фигуры, при повышении температуры воды степень заполнения водой воздушных пор в образцах из литонидной пемзы уменьшается и при восстановлении температуры водной среды степень заполнения воздушных пор восстанавливается, но с некоторым превышением.

Аналогичные результаты соответственно численно большие, были получены в других опытах при повышении температуры воды от 7 до 99° (см. фиг. 5).

Делая допущение, что при изменении температуры заземленного воздуха давление его остается неизменным, были сделаны расчеты по определению объема этого воздуха при двух крайних температурах воды. Как показали опыты, фактические значения объемов вытесненной из капилляров воды приблизительно оказались равными разнице в объемах заземленного воздуха, определенной путем соответствующих расчетов.

В обоих опытах, при восстановлении исходной температуры, степень заполнения пор водой восстанавливалась, но с некоторым превышением. Это явление следует объяснить тем, что в крупных капиллярах, в которых глубина всасывания воды будет соответственно меньшей, чем в мелких капиллярах, заземленный воздух при расширении может вытеснить всю воду и частично потерять также некоторую часть своего объема.

Если повышение температуры среды вызывает уменьшение влагоемкости пористых заполнителей, то снижение температуры среды должно привести к обратному результату. Для проверки этого, обра-



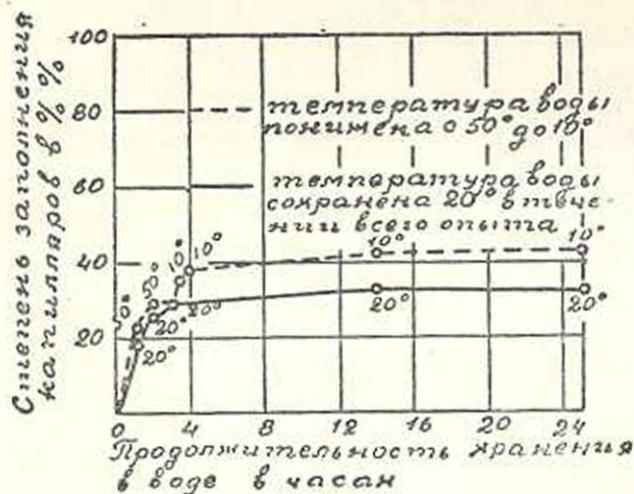
Фиг. 5. Степень заполнения капилляров литонидной пемзы водой в проц. при повышении температуры воды от 7 до 90°.

зец из литонидной пемзы был высушен до постоянного веса и погружен в воду с температурой 50°. Спустя 3 часа, температура воды была понижена до 10°. Данные о влагоемкости этого образца, сопоставленные с данными о влагоемкости того же образца, но выдержанного все время при температуре 20°, показаны на фиг. 6.

Как видно из фигуры, водопоглощение литонидной пемзы при понижении температуры воды с 50 до 10°, в результате уменьшения объема заземленного воздуха, действительно повысилось.

Приведенные данные показывают, что изменением температуры среды можно влиять на водопоглощение пористых заполнителей, причем, чем больше объем заземленного воздуха, тем значительнее будет изменение их водопоглощения.

Можно указать на следующие возможности использования описанных явлений на практике. Если свежесформованные изделия из легкого бетона или легкого железобетона еще задолго до начала схватывания внести в камеру с более низкой температурой, то произойдет дополнительный процесс „самовакуумирования“ этих изделий.



фиг. 6. Влагоемкость литондной пемзы в проц. от объема в зависимости от изменения температуры среды.

При термической обработке изделий из легкого бетона и легко железобетона методом электропрогрева, электрообогрева или прогрева без применения пара опасности пересыхания бетона уменьшаются, поскольку при этом из капилляров заполнителей будет вытесняться некоторая часть аккумулированной в них воды, т. е. произойдет „самоувлажнение“ бетона.

В начальные сроки твердения легких бетонов с повышением температуры в них в результате экзотермических процессов также будет иметь место „самоувлажнение“ бетона, что благотворно будет влиять на твердение бетона. В частности, процесс самоувлажнения легкого бетона явится фактором торможения развития усадочных явлений в легких бетонах, что весьма желательно в целях предупреждения появления трещин в молодом бетоне.

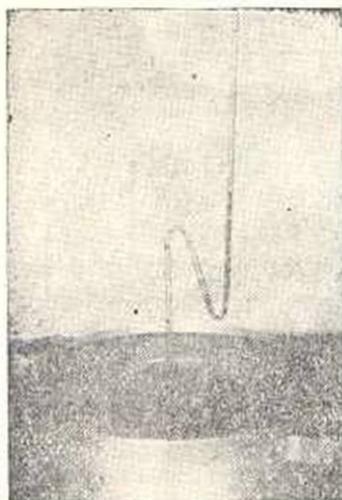
§ 4. Давление заземленного воздуха в пористых камнях и бетонах

Если капилляры пористых каменных материалов являются сообщающимися, то в разреженном пространстве вода должна их заполнить полностью. Исходя из этого, испытуемые заполнители с зернами от 20 до 40 мм были высушены до постоянного веса, высыпаны в камеру, в которой было создано разрежение воздуха в 500 мм ртутного столба и затем залиты водой. Опыты эти показали, что степень заполнения капилляров в легких заполнителях, по сравнению с насыщением их при обычном давлении воздуха, повысилась:

- для ангийской пемзы с 33,5 до 87,5%,
- для арктической туфолавы с 62,6 до 80,7%,
- для литондной пемзы с 44,5 до 97,8%.

Полученные результаты дают основание считать, что в условиях более высокого разрежения заполнение капилляров пористых каменных материалов более близко подойдет к 100% и что стенки между отдельными пораами и капиллярами в легких заполнителях являются проницаемыми для капиллярной воды.

Переходя к вопросу о степени сжатия заземленного воздуха в порах увлажненных легких заполнителей, необходимо прежде всего отметить, что факт сжатия воздуха в них легко устанавливается простым способом, показанным на фиг. 7.



Фиг. 7. Качественное определение сжатия заземленного воздуха в литондной пемзе.

Стеклообразная трубка, изогнутая, как это показано на фигуре, и заполненная в нижнем колене подкрашенной водой или ртутью, устанавливается в отверстие, просверленное в кубике, выпиленном из испытуемого вида заполнителя. После этого кубик погружается в воду. Спустя некоторое время, происходит нарушение равновесия в уровнях ртути, причем последняя начинает перемещаться в сторону открытого конца трубки, как это видно на фиг. 7. Такое движение жидкость может получить только в результате сжатия воздуха в ядровой части кубика.

Описанный опыт может служить только для качественного изучения вопроса. Для определения степени сжатия заземленного воздуха в порах заполнителей был принят метод, описанный выше, подобный принятому В. В. Некрасовым для изучения контракционных явлений [6]. В соответствии с этим методом, стеклянные колбы с узким горлом под самую пробку заполнялись испытуемым материалом, после чего колбы плотно закрывались резиновой пробкой с вставленной в нее бюреткой и сверху до некоторой отметки заливались водой. Во избежание испарения, на поверхность воды в бюретку наливалась капля масла. Наблюдения за уровнем мениска в бюретке в начале опыта производились через каждые 5 минут, а далее — через большие промежутки времени.

Описанным методом сжатие заземленного воздуха было измерено в щебне с зернами от 20 до 40 мм из ангийской пемзы и литондной пемзы, а также в бетонах на тех же заполнителях и для сравнения в бетоне на плотном заполнителе и в тесте из обыкновенного цемента и известково-пемзового вяжущего.

В легких бетонах явление вакуума, как уже указывалось, обусловливается одновременно как водопоглощением пористых заполнителей, так и контракцией системы цемент + вода.

Таблица 1

Количество воды, отсасываемое пористыми камнями, вяжущими и бетонами за счет сжатия зацементированного в них воздуха и контракции

Наименование материалов	Количество воды, отсасываемое в л/м	
	в течение 5 часов	в течение 20 суток
Щебень из ангийской пемзы	25	—
Щебень из литондной пемзы	22,5	—
Тесто из обычн. цемента	4,5	44
Тесто из известк пемзового вяжущего	2	11
Бетон из ангийской пемзе	16	53
Бетон на литондной пемзе	8	28
Бетон на базальт. щебне и кварц. песке	4	13

Как видно из приведенных данных, из испытанных бетонов наибольшее количество воды отсасывается бетоном на ангийской пемзе и наименьшее — обычным бетоном.

Если считать, что отсасывание воды обычном бетоном является результатом только контракционных явлений, и не учитывать это количество в легких бетонах, то можно прийти к выводу, что в бетоне на ангийской пемзе отсасывание воды, сопровождаемое сжатием зацементированного в капиллярах заполнителей воздуха, втрое превышает отсасывание воды в результате контракции. Отсасывание воды бетоном на ангийской пемзе оказывается даже большим, чем отсасывание воды твердеющим цементным камнем, не содержащем заполнителей.

В свою очередь контракционные явления в затвердевшем тесте из обыкновенного цемента оказываются в 4 раза больше, чем в затвердевшем известково-пемзовом вяжущем.

Опыты эти показывают, что явление вакуума в легких бетонах за счет сжатия зацементированного воздуха продолжает развиваться в течение длительного времени, во всяком случае и после того, как в обычном бетоне затухает явление контракции.

Соответствующие расчеты показали, что в капиллярах пористых заполнителей зацемяляется и сжимается только меньшая часть заключенного в них воздуха; большая же часть воздуха, при проникновении в капилляры воды, вытесняется из них.

Все же проведенные опыты позволяют установить новый важный факт, свидетельствующий о том, что следствием самовакуумирования в легких бетонах является не только уменьшение водосодержания цементного теста (простое замещение в нем воды воздухом), но и уплотнение его на величину сжатия зацементированного в капиллярах пористого заполнителя воздуха.

В результате сжатия зацементированного воздуха и контракции в описанных опытах увеличение объемного веса бетонов водного хране-

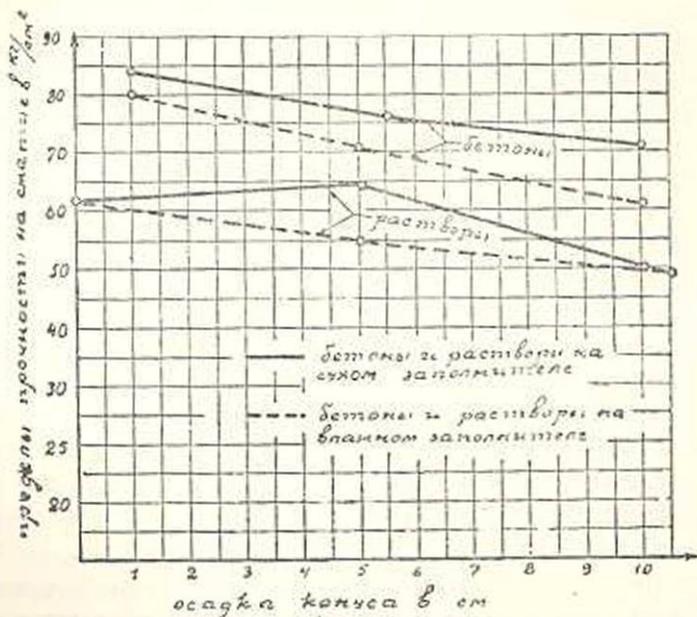
ния по сравнению со свежензготовленными достигало: в обычных бетонах до 13 кг/м^3 и в легких бетонах до 53 кг/м^3 .

§ 5. Влияние водопоглощения пористых заполнителей на прочность бетона при обычном и раздельном методах укладки

Водопоглощение пористых заполнителей обуславливает самоупучивание бетонов, в результате чего может иметь место повышение их прочности.

Экспериментальная проверка этого была проведена на нескольких сериях опытов.

Одна серия опытов автором (совместно с Т. Г. Матузовым) была проведена на бетонах и растворах, изготовленных на литонидной пемзе при одном и том же расходе цемента 300 кг/м^3 . Заполнителем использовались сухие и предварительно увлажненные. Опыты эти показали, что влияние предварительного увлажнения заполнителей отражается как на прочности, так и на весовых показателях бетонов и растворов. Преобладание объемных весов бетонов, изготовленных на предварительно увлажненных заполнителях, над объемными весами бетонов, изготовленных на сухих заполнителях, значительное для слабо разжиженных смесей, заметно уменьшается при смесях с осадкой 10 см .



Фиг. 10. Прочность бетонов на литонидной пемзе на сжатие в 28-дневном возрасте в зависимости от консистенции.

Влияние предварительного увлажнения заполнителей на прочность бетонов можно усмотреть из фиг. 10.

Как видно из фигуры, пределы прочности на сжатие для бетонов

на сухих заполнителях оказываются несколько большими, чем для бетонов на предварительно увлажненных заполнителях.

Другая серия опытов проведена на бетонах, изготовленных на заполнителях из вулканических туфов. Результаты их были опубликованы автором ранее [12]. В этих опытах бетонная смесь заготавливалась маленькими порциями и укладывалась в формы немедленно, дабы возможно большая часть водоотсасывания успевала протекать после окончания формовки образцов.

В связи с этим, результаты как на сжатие, так и на растяжение для бетонов, изготовленных на сухих заполнителях, получились лучшими в еще большей степени.

К мнению о преимуществах изготовления легких бетонов на сухих пористых заполнителях приводят также старые опытные данные Р. М. Михайлова и Н. А. Попова [13]. Ими были испытаны пемза и гранулированный доменный шлак при одном составе бетона (1:3:5) и при одинаковой консистенции (угол наклона желоба при чистом стекании смеси составлял 23°).

В одном случае заполнители предварительно насыщались водой, а в другом случае брались в естественно сухом состоянии. В последнем случае прочность бетона на сжатие неизменно оказывалась выше в пределах около 25%.

В свете приведенных данных необходимо проанализировать утверждение американских исследователей Ф. Э. Рихарта и В. П. Дженсена [14] о важности и желательности предварительного смачивания пористых заполнителей. Указанные исследователи сравнивали между собой легкие бетоны, изготовленные в одном случае на сухих и в другом — на влажных заполнителях, выдерживая для обоих случаев одинаковыми как состав, так и водоцементное отношение. Общий расход воды в обоих случаях был одинаковым, но в одном случае часть воды еще до затворения бетона затрачивалась на замачивание заполнителя и оставшая часть воды — при затворении бетона, в то время как в другом случае (при сухих заполнителях) все количество воды затрачивалось при затворении бетона. При таких условиях опыта бетонная смесь на сухих заполнителях должна была получиться значительно более подвижной, чем на влажных заполнителях. Легко себе представить, что при таких условиях бетонная смесь на влажных заполнителях должна была находиться в более благоприятных условиях, чем изготовленная на сухих заполнителях. Действительно, на увлажнение заполнителей было затрачено количество воды, которое по предположению Рихарта и Дженсена отсасывается сухим заполнителем из бетона. Но из цементного теста вода должна отсасываться заполнителем менее интенсивно, чем непосредственно из воды. Кроме этого, пока в бетоне, приготовленном на сухом заполнителе, последним будет отсосано столько влаги, сколько было затрачено на увлажнение заполнителя, в бетонной смеси

изготовленной на влажных заполнителях, будет иметь место дальнейшее отсасывание воды.

В конечном итоге, при принятой указанными исследованиями методике, бетоны на предварительно увлажненных заполнителях должны были обладать более высокой прочностью, вследствие большей плотности цементного теста.

К неправильному выводу американских исследователей привело то обстоятельство, что они проводили сравнение бетонов не при одинаковой консистенции, а при одинаковом водоцементном отношении, т. е. в несопоставимых условиях.

Как уже указывалось, наибольший эффект самоупучивания легких бетонов должен получиться при раздельном методе их укладки. При этом методе бетонируемое пространство заполняется крупными камневидными частицами и заливается послойно жидким раствором „сверху вниз“ или подается „снизу вверх“ при помощи специальных труб. Автором были поставлены некоторые опыты по изучению эффекта самоупучивания легких бетонов при раздельной укладке. В качестве заполнителей были использованы песок с крупностью зерен до 5 мм и щебень с зернами от 40 до 80 мм из литоидной пемзы. Песок использовался в сухом состоянии, а щебень в одном случае в сухом и в другом — в насыщенном водой состоянии. Раствор изготовлялся с осадкой конуса „СтройЦНИЛ“ 8 и 12 см. Металлические формы 20×20×20 см, заполненные соответственно сухим или влажным щебнем, устанавливались на виброплощадку и в состоянии вибрации заполнялись раствором. Результаты этих опытов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Пределы прочности на сжатие бетонов, изготовленных раздельным методом на сухом и влажном заполнителях

Растворы				Бетоны			
весовая пропорция раствора	w/v	осадка конуса СтройЦНИЛ в см	расход цем. в кг/м ³	расход цем. в кг/м ³	Пределы прочности при сжатии в кг/см ²		превышен. прочн. б-нов на сухих за-полн.
					сухой зап.	влажн. зап.	
1:2,5	1,0	8	391	225—242	134	95	41%
1:2,5	1,12	12	368	216—225	118	88	34%

Учитывая приведенные выше данные и соображения, а также экономические преимущества, следует прийти к выводу о большой перспективности применения раздельного метода укладки легких бетонов.

Выводы

Установлен факт защемления воздуха в пористых каменных материалах и бетонах и дана методика определения объема и давления защемленного воздуха в них.

Установлено в связи с этим, что пористые заполнители в бетонах следует рассматривать не только как низкопрочные и легкие составяющие, но и как возбудители процессов самоупучивания в них. Объем воды, отсасываемый пористым заполнителем из цементного теста в бетоне, менее объема, отдаваемого заполнителем тесту воздуха. За счет этой разницы в объемах, обуславливаемой сжатием защемленного в капиллярах самого заполнителя воздуха, имеет место уплотнение цементного теста и улучшение физико-химической связи его с поверхностью заполнителя в легких бетонах.

Приведенные выводы могут послужить для объяснения ряда особенностей легких бетонов и пористых каменных материалов.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 8 IV 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Ходжа-Эйратов А. А. Новый вид гидротехнического бетона. Журн. „Гидротехн. строительство“, № 11, 1952.
2. Симонов М. Э. Седиментационные процессы в цементном тесте и возможности их регулирования. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 4, 1953.
3. Францман П. Э. Использование явления вакуума, развивающегося при твердении бетона для устройства битумной гидроизоляции. Журн. „Гидротехн. строительство“, № 9, 1940.
4. Скрятина Б. Г. Достижения технологии бетона в СССР и дальнейшие задачи. Труды IV Всесоюзной конференции по бетону и железобетонным конструкциям, ч. III, Стройиздат, 1949.
5. Скрятина Б. Г. и Панфилова Л. И. Исследования явления вакуума в твердеющих цементах. Труды НИИЦЕМЕНТ, вып. II, Москва, 1949.
6. Некрасов В. В. Изменения объема системы при твердении гидравлических вяжущих. Известия АН СССР ОТН, № 6, 1945.
7. Лыков А. В. Теория сушки. Госэнергоиздат, 1950.
8. Симонов М. Э. Исследование некоторых особенностей бетона и железобетона на пористых заполнителях. Диссертация на степень доктора технических наук, 1952.
9. Стольников В. В. и Лавринович Е. Б. Седиментационные процессы в бетонной смеси и их влияние на формирование структуры бетона и его водонепроницаемость. Известия ВНИИГ, т. 47, 1952.
10. Дерягин Б. В., Захаваева Н. И. и Талаев М. В. Прибор для определения удельной поверхности порошков и дисперсных тел по сопротивлению течению разреженного воздуха. Изд. АН СССР, 1951.
11. Джигит О. М., Зайцева М. А., Киселев А. В., Красильников К. Г., Лукьянович В. М. и Радухевич Л. В. Определение удельной поверхности цементов и активных добавок адсорбционным, структурным и электронно-микроскопическим методом. Труды НИИЦЕМЕНТ, вып. III, Москва, 1950.
12. Симонов М. Э. Легкий бетон на пористых заполнителях и его применение. Труды IV Всес. конфер. по бетону и железобет. конструкциям, ч. III, М.—Л., 1949.
13. Михайлов Р. М. и Попов Н. А. Теплый бетон, ч. I, Москва, 1931.
14. Рихарт Ф. Э. и Дженсен В. П. Применение и проектирование гайдитового бетона. Journal of the American Concrete Institute, № 2, 1934.

Մ. Զ. Սիմոնյան

ԹԵԹԵՎ ԲԵՏՈՆՆԵՐԻ ԻՆՔՆԱՎԱԿՈՒՄԱՑՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հողվածում պարզված է ծակոտկեն քարանյութերում և բետոններում օդի ներկալման փաստը և տրված է այդ օդի ծավալի ու ճնշման որոշման մեթոդը:

Այդ կապակցությամբ պարզված է, որ բետոններում ծակոտկեն լցիչները պետք է դիտել ոչ միայն որպես ցածրամուր և թեթևակշիռ բաղադրիչներ, այլև որպես բետոններում ինքնավակուումացման պրոցեսների հարուցիչներ: Բետոնում ցեմենտախմորից ծակոտկեն լցիչի ծծած ջրի ծավալը ավելի փոքր է, քան լցիչի կողմից խմորին տրվող օդի ծավալը: Մավալների այդ տարբերության հաշվին, որը պայմանավորված է լցիչի մաղանոթներում ներկալված օդի սեղմմամբ, անդի առնի ցեմենտախմորի խտացման և թեթև բետոններում լցիչի մակերևույթի հետ նրա ֆիզիկո-քիմիական կապի բարեկալում:

Բերված եզրակացությունները կարող են կիրառվել թեթև բետոնների և ծակոտկեն քարանյութերի մի շարք առանձնահատկությունների բացատրման համար:

Б. К. Карапетян, Л. В. Шахсуварян

Результаты инженерного обследования бюраканского землетрясения

Изучение последствий некоторых землетрясений, как-то: ереванского, севанского и бюраканского (эпицентр первого находился в селе Паразар, где, в основном, и произошли разрушения), показало, что сравнительно не сильные землетрясения, являющиеся безопасными для капитальных зданий городского типа, могут вызвать существенные повреждения в сельских постройках, в случае плохого качества строительных работ и отсутствия антисейсмических мероприятий.

Настоящая статья содержит некоторые результаты инженерного обследования бюраканского землетрясения, происшедшего 3 июня 1949 года в 10 часов 24 минуты по местному времени. Оно является последним разрушительным землетрясением, имевшим место на территории Армении.

Близкими к Бюракану очагами считаются Джамушлинский очаг, находящийся у северо-восточного массива горы Арагац, на Апаранской равнине и Араратская группа очагов, охватывающая очень большой район, протягиваясь от Октемберяна на северо-запад до Садарака на юго-восток [2]. Можно предположить, что бюраканское землетрясение относится к Джамушлинскому очагу.

Плейстосейстовая область бюраканского землетрясения охватила сравнительно малую территорию, примерно 150 кв. км, что может быть объяснено установленным для Кавказа быстрым затуханием сейсмической волны, а также поверхностным расположением очагов землетрясений.

На основании обследований разрушенных зданий и опроса местных жителей была определена интенсивность землетрясения в отдельных населенных пунктах (по шкале ОСТ ВКС 4537):

г. Ереван — 2—3 балла. Ощущалось немногими чуткими лицами, которые находились в покое в верхних этажах зданий.

г. Аштарак — 2—3 балла. Ощущалось немногими как слабое колебание и было осознано лишь после обмена впечатлениями.

с. Усжан — 2—3 балла. Ощущалось немногими как незначительная вибрация.

с. Агарак — 4 балла. Вне зданий ощущалось немногими, внутри — большинством людей. Скрип полов, балок, дрожание мебели.

с. Тегер — 6 баллов. Ощущалось преобладающим большинством людей. В зданиях появились трещины и произошли частичные разрушения

с. Оргов — 6—7 баллов. Ощущалось всеми как волнообразное движение почвы и удар. В зданиях появились трещины, а некоторые из них разрушились.

с. Инаклу — 6—7 баллов. Ощущалось всеми. Имело место разрушение некоторых зданий. Родниковая вода после землетрясения стала мутной.

с. Бюракан — 7 баллов. Вызвало панику среди населения. Часть зданий разрушилась, в некоторых появились трещины. Каменные здания современной конструкции не получили повреждений, появились лишь незначительные трещины.

Бюраканское землетрясение причинило значительные разрушения в основном в селах: Бюракан, Инаклу, Оргов и Тегер.

Основным видом строений в этих селах были одноэтажные здания из рваного бута, сложенные на глиняном растворе. Чрезмерная толщина земляной кровли (до 1 метра), повышая центр тяжести здания и вызывая силы инерции значительной величины, в ряде случаев являлась основной причиной полного разрушения здания (фиг. 1).

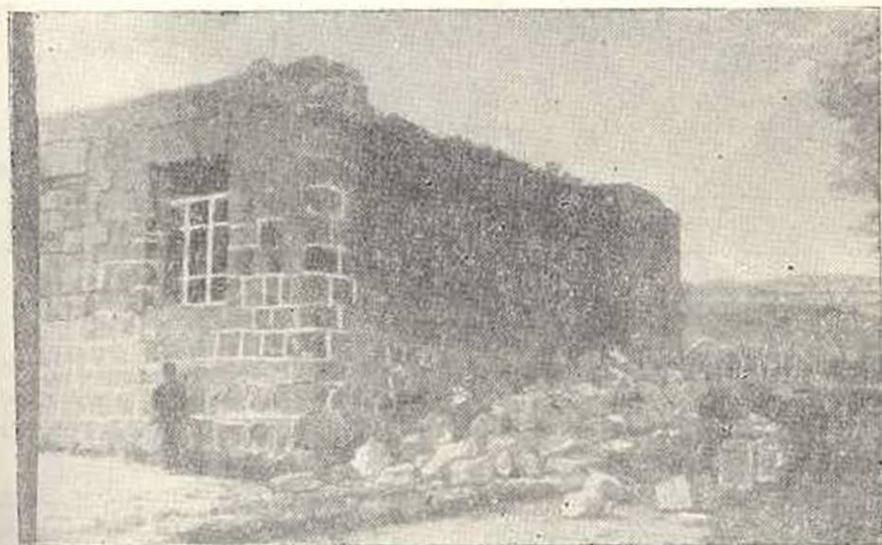


Фиг. 1.

Другой не менее важной причиной разрушения зданий являлась ничтожная прочность раствора, на котором была выложена бутовая кладка. Последнее обстоятельство особенно сильно сказалось в зданиях, где углы были выложены из такого же бутового камня, что и стены. При этом не обеспечивалась надлежащая связь между стенами и происходило разрушение углов здания. В зданиях, где углы были

выложены из постелистого камня и с соблюдением перевязки швов, разрушений не наблюдалось.

Разрушение произошло и в зданиях, стены которых были выложены из постелистого туфового камня на глиняном растворе по системе „мидис“ при отсутствии сквозных или хотя бы достигающих $2/3$ толщины стены тычковых камней. Глиняный раствор, имеющий ничтожную прочность сцепления с камнем, не мог обеспечить надежной связи между слоями кладки, чем и объясняется то обстоятельство, что характерным разрушением при такой кладке являлось отслоение наружного слоя. Внутренний же слой кладки, ввиду опирания на него балок перекрытия, в большинстве случаев не разрушался. Балки перекрытия в лучшем случае опирались на $2/3$ толщины стены, поэтому и происходило разрушение именно наружного слоя. Пример такого разрушения показан на фиг. 2.



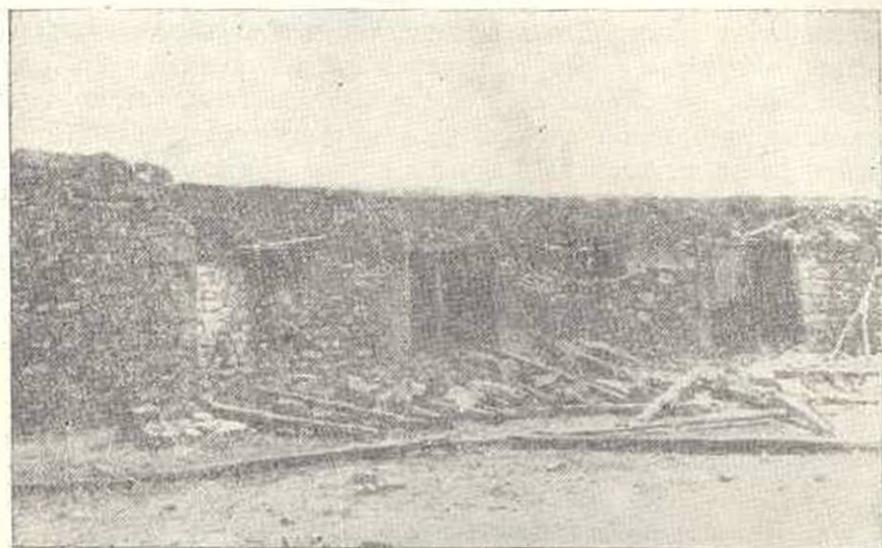
Фиг. 2.

В большинстве зданий, имеющих балконы или навесы, балки перекрытия последних опирались на стены без надежного их присоединения. При землетрясении балконы и навесы разрушились и за собой повлекли наружную часть стен, на которые они опирались. Пример такого разрушения показан на фиг. 3.

В зданиях из постелистого туфа, выложенного на известковом или сложном растворе, обеспечивающих необходимую прочность сцепления раствора с камнем, каковыми являлись здания обсерватории, построенные за последние годы, повреждений не наблюдалось.

В обследованных зданиях отсутствовали присущие сельским постройкам деревянные антисейсмические пояса, которые, например, имелись в большинстве зданий города Аштарак. В некоторых зданиях,

в частности в старом здании школы, были обнаружены напоминающие антисейсмический пояс деревянные брусья, проложенные выше и ниже оконных проемов, однако они прерывались у дверных проемов и потому не выполняли основного назначения пояса, заключающегося в обеспечении жесткой связи стен между собой. Тем не менее, положительная роль этих деревянных брусьев заключалась в обеспе-



Фиг. 3.

чении равномерного распределения нагрузки, передающейся от верхних слоев кладки нижним и, тем самым, создающих сравнительно благоприятные условия для работы кладки при сейсмических воздействиях.

Обобщая результаты обследования бюраканского землетрясения, приходим к выводу, что в основном пострадали здания из мелкого бутового камня на глиняном растворе, из-за несоблюдения горизонтальности рядов кладки, недостаточного сцепления раствора с камнем, не жесткой связи перекрытия с несущими стенами и отсутствия антисейсмических поясов, в частности деревянных, как наиболее приемлемых в сельском строительстве.

Отмеченные факты разрушения имели место также при севанском и ереванском землетрясениях, причинивших аналогичные повреждения в сельских постройках в Севане и Паракаре [3].

Таким образом, к возведению зданий в сельских местностях следует подходить со всей серьезностью, соблюдая все те требования [1], которые предъявляются к опасным с точки зрения сейсмичности областям.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Временная инструкция по проектированию и возведению сельских построек в сейсмических районах Армянской ССР И-5-51. Ереван, 1951.
2. Паффенгольц К. И. Сейсмоструктура Армении и прилежащих частей малого Кавказа. Ереван, 1946.
3. Чураян А. Л. и Назаров А. Г. Инженерное обследование повреждений, вызванных Ереванским землетрясением 7-8 января 1937 г. Тбилиси, 1937.

Բ. Կ. Կարապետյան, Լ. Վ. Շահումյան

ԲՅՈՒՐԱԿԱՆԻ ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԻ ԻՆՃԵՆԵՐԱԿԱՆ ՇԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ
ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ
Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուս բերված է Բյուրականի՝ 1949 թ. հունիսի 3-ի երկրաշարժից գյուղական շինություններում առաջացած վնասվածքների ուսումնասիրությունը: Անալիզի է ենթարկված գյուղական միանոսրկ շինությունների աշխատանքային պայմանները կառուցվածքի սեյսմակայունության տեսակետից: Նշված են մի քանի կոնստրուկտիվ և շինարարական աշխատանքների մասնակ առկա դասը թերություններ, որոնք գլխավորապես պատճառ են դարձել երկրաշարժից կառուցվածքի լրիվ կամ մասնակի ավերմանը: