

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян

О приближении полиномами

1. Пусть  $\Omega$  — односвязная область на плоскости комплексного аргумента  $z$ . Обозначим через  $\nu(z)$  положительную функцию, определенную в  $\Omega$  и удовлетворяющую условию

$$\iint_{\Omega} \nu(z) d\sigma < \infty,$$

где  $d\sigma$  — элемент площади.

Определяем  $\Omega_p(\nu)$  как класс функций  $f(z)$ , регулярных в  $\Omega$  и удовлетворяющих условию

$$\iint_{\Omega} \nu(z) |f(z)|^p d\sigma < \infty.$$

В случае, когда  $\Omega$  представляет область типа Каратеодори\*, доказано [2, 3, 4], что в классе  $\Omega_p(1)$  имеет место полнота полиномов, т. е. при любых  $f(z) \in \Omega_p(1)$  и  $\epsilon > 0$  можно подобрать полином  $Q(z)$  такой, что

$$\iint_{\Omega} |f(z) - Q(z)|^p d\sigma < \epsilon$$

Известно также, что в классе  $\Omega_2(\nu)$  из полноты полиномов следует их замкнутость и обратно.

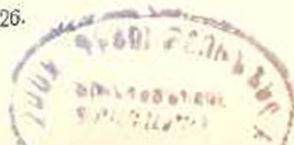
Напомним, что система полиномов называется замкнутой, если из равенств

$$\iint_{\Omega} \nu(z) \cdot \bar{f}(z) \cdot z^n d\sigma = 0$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  вытекает  $f(z) \equiv 0$ .

2. В случае областей, не принадлежащих классу Каратеодори, а также областей неограниченных — задача о полноте или замкнутости менее проста. Здесь, при данном топологическом типе, полнота зависит исключительно от метрических свойств области.

\* Понятие областей Каратеодори, ср. [1], стр. 426.



Для широкого класса областей эта задача решена\* в классе  $\Omega_2(1)$ . Имеются решения этой задачи и для частного типа весовых функций  $\nu(z)$ . В случае достаточно произвольных  $\nu(z)$  эта задача о полноте в  $\Omega_2(\nu)$  не решена.

3. В настоящей статье мы рассматриваем задачу о полноте в классе  $\Omega_p(1)$  в неограниченных областях, а также в областях не-Каратеодоревых.

Рассмотрим эту задачу сначала для одного определенного класса областей.

Пусть  $\Omega$  — неограниченная область, не содержащая угол  $\Delta$ , величины  $\frac{\pi}{\alpha}$  ( $\alpha > 1/2$ ), с вершиной в начале координат. Допустим также, что  $z=0$  лежит вне  $\Omega$ , и при преобразовании  $z = \frac{1}{t}$  область  $\Omega$  переходит в конечную область Каратеодори.

Возьмем произвольную функцию  $f(z) \in \Omega_p(1)$ . Преобразованием  $z = \frac{1}{t}$  переведем  $\Omega$  в конечную область  $\Omega'$ ; тогда условие

$$\iint_{\Omega} |f(z)|^p d\sigma < \infty$$

перейдет в

$$\iint_{\Omega'} \left| f\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^{1/p}} \right|^p d\sigma' < \infty,$$

где  $d\sigma'$  — элемент площади  $\Omega'$ .

Так как  $d\Omega'$  — область типа Каратеодори, то можно построить полиномы  $\{P_n(t)\}$  такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega'} \left| f\left(\frac{1}{t}\right) t^{-1/p} - P_n(t) \right|^p d\sigma' = 0$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega'} \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - t^{1/p} P_n(t) \right|^p \frac{d\sigma'}{|t|^2} = 0.$$

Перейдя на  $z$ -плоскость, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} \left| f(z) - z^{-1/p} P_n\left(\frac{1}{z}\right) \right|^p d\sigma = 0.$$

Отсюда следует, что задача о полноте сводится к задаче аппроксимации полиномами функций

$$\{z^{-m-1/p}\}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Возьмем одну из этих функций  $z^{-m-1/p}$  и исследуем для нее возможность аппроксимации.

\* Ср. напр. обзорную статью [5], где приведена также библиография, относящаяся к этому вопросу.

Пусть  $p'$  — целое число и  $2p' > p$ .

Выведем достаточные условия, которым должна удовлетворять область  $\Omega$ , для того, чтобы существовали полиномы  $\{Q_n(z)\}$  такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z^{-m-p/2} - Q_n(z)|^{2p'} d\sigma = 0.$$

Пусть полином  $Q_n^*(z)$  степени  $\leq n$  минимизирует предыдущий интеграл, т. е.

$$\int_{\Omega} |z^{-m-p/2} - Q_n^*(z)|^{2p'} d\sigma \leq \int_{\Omega} |z^{-m-p/2} - Q_n(z)|^{2p'} d\sigma$$

для любых полиномов степени  $\leq n$ .

Если обозначим экстремальное значение предыдущего интеграла через  $I_n$

$$I_n = \int_{\Omega} |z^{-m-p/2} - Q_n^*(z)|^{2p'} d\sigma,$$

то очевидно

$$I_1 \geq I_2 \geq \dots \geq I_n \geq \dots$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = c.$$

Установим компактность семейства  $\{Q_n^*(z)\}$  в  $\Omega$ . Для этого заметим, что если  $f(z) \in \mathcal{O}_p(1)$  и  $\bar{\Omega}^*$  произвольная замкнутая подобласть в  $\Omega$ , а  $\delta$  — расстояние  $\bar{\Omega}^*$  до границы  $\Omega$ , то при  $z_0 \in \bar{\Omega}^*$

$$\int_{|z-z_0| < \delta} |f(z)|^p d\sigma \geq \pi |f(z_0)|^p \cdot \delta^2.$$

Отсюда

$$|f(z)| \leq \left\{ \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{\Omega} |f(z)|^p d\sigma \right\}^{1/p}$$

при  $z \in \bar{\Omega}^*$ .

Применяя это неравенство в нашем случае, получим

$$|z^{-m-p/2} - Q_n^*(z)| \leq \left\{ \frac{1}{\pi \delta^2} \cdot I_1 \right\}^{1/2p'} = C(\Omega^*),$$

где постоянная  $C(\Omega^*)$  зависит от расстояния между  $\bar{\Omega}^*$  и границей  $\Omega$ .

Очевидно также

$$|I_1| \leq \int_{\Omega} |z|^{-2p'} d\sigma = \text{const.}$$

Предыдущие неравенства показывают компактность семейства функций

$$\{z^{-m-p/2} - Q_n^*(z)\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

а следовательно и компактность

$$\{Q_n^*(z)\}$$

внутри любой замкнутой подобласти, стало быть и в  $\Omega$ .

Выберем подпоследовательность  $\{Q_{n_k}^*(z)\}$ , равномерно сходящуюся внутри  $\Omega$  к некоторой функции  $\varphi(z)$ . Очевидно  $\varphi(z) \in \mathcal{Q}_{2p}$  и

$$\iint_{\Omega} |z^{-m-p/2} - \varphi(z)|^{2p'} d\sigma = C = \inf_n.$$

Обозначим  $z^{-m-p/2} - \varphi(z) = \psi(z)$ .  $\psi(z) \in \mathcal{Q}_{2p}$ .

Составим интеграл

$$\iint_{\Omega} |\psi(z) - \alpha z^n|^{2p'} d\sigma$$

и разложим его по степеням малого значения параметра  $\alpha$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |\psi(z) - \alpha z^n|^{2p'} d\sigma &= \iint_{\Omega} |\psi^{(p')}(z) - \alpha p' \psi^{(p'-1)} z^n + \dots|^{2p'} d\sigma = \\ &= \iint_{\Omega} |\psi(z)|^{2p'} d\sigma - 2 \operatorname{Re} \alpha p' \iint_{\Omega} \overline{\psi}^{p'} \psi^{(p'-1)} z^n d\sigma + \dots \end{aligned}$$

Но так как, очевидно,

$$\iint_{\Omega} |\psi(z) - \alpha z^n|^{2p'} d\sigma \geq \iint_{\Omega} |\psi(z)|^{2p'} d\sigma = C,$$

то из предыдущего равенства следует

$$\iint_{\Omega} \overline{\psi}^{p'} \psi^{(p'-1)} z^n d\sigma = 0 \quad (1)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

В противном случае, при соответствующем выборе параметра  $\alpha$ , мы получили бы, очевидно,

$$\iint_{\Omega} |\psi(z) - \alpha z^n|^{2p'} d\sigma < \iint_{\Omega} |\psi(z)|^{2p'} d\sigma = C,$$

чего не может быть.

4. Составим теперь функцию

$$\Phi(w) = \iint_{\Omega} \frac{\overline{\psi}^{p'} \psi^{(p'-1)}}{z-w} d\sigma \quad (2)$$

и покажем, что при определенных метрических ограничениях, накладываемых на область  $\Omega$ , а также при наличии равенств (1)

$$\Phi(w) = 0, \quad (3)$$

а из этого равенства в дальнейшем выведем  $\psi(z) = 0$ .

Для этого представим  $\frac{1}{z-w}$  в виде

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{w} - \frac{z}{w^2} + \dots - \frac{z^{n-1}}{w^n} + \frac{z^n}{w^n(z-w)}$$

и подставим в (2). Учитывая (1), получим

$$\Phi(w) = \frac{1}{w^n} \int_{\Omega} \frac{z^n \bar{\psi}^{2p'-1} \cdot \psi^{2p'-1}}{z-w} d\sigma. \quad (4)$$

Не ограничивая общность, будем считать угол  $\Delta_*$  совпадающим с

$$-\frac{\pi}{2\alpha} < \arg z < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Через  $\Delta_*^*$  обозначим угол

$$\arg(z-1) < \frac{\pi}{2\alpha}.$$

В равенстве (4) пусть  $w \in \Delta_*^*$ , тогда

$$|\Phi(w)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\alpha}} \cdot \frac{1}{|w|^n} \cdot \int_{\Omega} |\psi|^{2p'-1} \cdot |z|^n d\sigma,$$

$$|\Phi(w)| \leq \frac{\text{const}}{|w|^n} \int_{\Omega} |\psi|^{2p'-1} \cdot |z|^n d\sigma.$$

Применим к оценке этого интеграла неравенство Хелдера

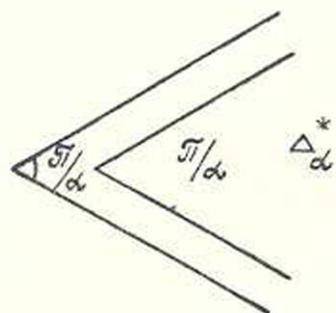
$$\left| \int_{\Omega} \psi d\sigma \right| \leq \left\{ \int_{\Omega} |\psi|^k d\sigma \right\}^{1/k} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |\varphi|^{k'} d\sigma \right\}^{1/k'},$$

где

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1.$$

В данном случае возьмем  $k = \frac{2p'}{2p'-1}$  и  $k' = 2p'$

$$\int_{\Omega} |\psi|^{2p'-1} \cdot |z|^n d\sigma \leq \left\{ \int_{\Omega} |\psi|^{2p'} d\sigma \right\}^{\frac{2p'-1}{2p'}} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |z|^{2p'n} d\sigma \right\}^{\frac{1}{2p'}}.$$



Фиг. 1.

Отсюда следует, что в углу  $\Delta^*$

$$|\Phi(w)| < \frac{c}{|w|^n} \left\{ \iint_{\Omega} |\phi|^{2p'} d\sigma \right\}^{\frac{2p'-1}{2p'}} \cdot \left\{ \iint_{\Omega} |z|^{2p'n} d\sigma \right\}^{\frac{1}{2p'}}$$

т. е.

$$|\Phi(w)| < \frac{c}{|w|^n} \left\{ \iint_{\Omega} |z|^{2p'n} d\sigma \right\}^{\frac{1}{2p'}}. \quad (5)$$

Обозначим через  $e^{-\theta(t)}$  линейную меру совокупности дуг, отсекаемых областью  $\Omega$  на окружности  $|z| = t$ ;  $|w| = r$ . Тогда (5) переписывается в виде

$$|\Phi(w)| < \frac{c}{r^n} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\theta(t)} \cdot t^{2p'n} dt \right\}^{1/2p'}$$

$$|\Phi(w)|^{2p'} < c \int_0^{\infty} e^{-\theta(t)} \cdot \left( \frac{t}{r} \right)^{2p'n} dt. \quad (6)$$

Предполагаем  $\theta(r)$  непрерывным и пусть одновременно существуют интегралы

$$\iint_{\Omega} e^{-\theta(t)} t^n d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

а также интеграл

$$\iint_{\Omega} e^{-A \cdot \theta(t)} dt$$

при любом  $A > 0$ .

Произведем оценку интеграла в (6).

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\theta(t)} \left( \frac{t}{r} \right)^{2p'n} dt &= \int_0^{r_1} e^{-\theta(t)} \left( \frac{t}{r} \right)^{2p'n} dt + \int_{r_1}^r \dots + \int_r^{\infty} \dots < \\ &< \left( \frac{1}{2} \right)^{2p'n} \cdot r + \int_{r_1}^r e^{-\theta(t)} dt + \int_r^{\infty} e^{-\theta(t)} \left( \frac{t}{r} \right)^{2p'n} dt. \end{aligned}$$

После замены переменной в последнем интеграле получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\theta(t)} \left( \frac{t}{r} \right)^{2p'n} dt < r \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^{2p'n} + \int_{r_1}^r e^{-\theta(t)} dt + r \int_r^{\infty} e^{-\theta(t) + 2p' n \lg t} dt.$$

Заменяя  $n$  через  $\frac{\delta}{2p'}$ ,  $E(\theta(r))$ , где  $\delta$  — сколь угодно малое постоян-

ное число, значение которого уточним ниже, получим окончательно

$$|\Phi(w)| < c \cdot r \cdot e^{-\delta_0(r)} + \int_{r_0}^r e^{-\theta(r)t} dt + r \int_1^{\infty} e^{-\theta(r)t + \delta_0(r)lgt} dt. \quad (7)$$

Допустим теперь, что при всех  $t \geq 1$

$$\theta(rt) > \beta \theta(r), \quad (8)$$

и при  $t \geq t_0 > 1$

$$\theta(rt) > 2\delta_1 \theta(r)lgt, \quad (9)$$

где  $\delta_1$  и  $\beta$  — фиксированные постоянные числа.

Тогда при  $r > 2$

$$\int_{r_0}^r e^{-\theta(r)t} dt < \frac{r_0^\beta}{2} e^{-\theta(r)}, \quad (10)$$

Получим также

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-\theta(r)t + \delta_0(r)lgt} dt &= \int_1^{t_0} \dots + \int_{t_0}^{\infty} \dots < e^{-\delta_0(r)} \int_1^{t_0} e^{\delta_0(r)lgt} dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{\theta(r)t}{2}} dt < \\ &< e^{-\delta_0(r)} \cdot \frac{e^{\delta_0(r)lgt_0}}{\delta_0 \cdot \theta(r)} + e^{-\frac{\theta(r) \cdot c}{4}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $c$  — постоянная.

Беря  $\delta < \frac{\beta}{2lgt_0}$ , получим

$$\int_1^{\infty} e^{-\theta(r)t + \delta \theta(r)lgt} dt < e^{-\frac{c\theta(r)}{4}} + \frac{e^{-\frac{\beta}{2}\theta(r)}}{\delta \cdot \theta(r)}. \quad (12)$$

Учитывая, что из (8) следует

$$\theta(r) > \text{const},$$

из (7), (10) и (11) получаем

$$|\Phi(w)| < e^{-c_1 \theta(r)}, \quad (13)$$

для точек  $w$  в  $\bar{\Delta}_x^*$   $c_1$  — некоторое постоянное число.

С другой стороны, так как  $|\Phi(w)|$  — ограниченная в углу  $\Delta_x^*$  функция, то  $\lg^+ |\Phi(w)|$  допускает в  $\Delta_x^*$  гармоническую мажоранту. Как известно, если  $f(z)$  — функция регулярная в  $\text{Re} f(z) > 0$  и  $\lg^+ |f(z)|$  допускает в этой области гармоническую мажоранту, то из условия

$$\int_0^{\infty} \lg |f(iy)f(-iy)| \frac{dy}{1+y^2} dy = -\infty$$

вытекает  $f(z) \equiv 0$ .

В нашем случае в угловой области  $\Delta_\alpha^*$  условие тождественного обращения в нуль функции  $\Phi(w)$  имеет вид

$$\int_0^\infty \lg |\Phi(w)| \frac{dr}{1+r^{1+\alpha}} = \infty. \quad (13')$$

Из неравенств (13) и (14) вытекает

*Лемма 1. Функция*

$$\Phi(w) = \int_{\Omega} \frac{\bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1}}{z-w} d\sigma$$

при условиях

- a)  $\int \frac{\theta(r)}{r^{1+\alpha}} dr = \infty,$   
 b)  $\theta(rt) > \beta \cdot \theta(r), \quad t \geq 1$   
 c)  $\theta(rt) > 2\delta_1 \theta(r) \lg t, \quad t > t_0 > 1$   
 d)  $\int_{\Omega} z^n \bar{\psi}^{p'} \psi^{p'-1} d\sigma = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

где  $\beta$  и  $\delta_1$  постоянные, тождественно обращается в нуль в  $\Delta_\alpha$ .

*Замечание.* Условиям леммы 1 удовлетворяют, например, функции вида

$$\theta(r) = \frac{r^\alpha}{\lg r \cdot \lg |\lg r| \cdots \underbrace{[\lg |\lg \cdots \lg r|]^{1+\beta}}_s},$$

где  $\beta > 0$ , а  $s$  — любое целое число.

Перейдем теперь к решению нашей задачи.

*Теорема 1.* При условиях а, б, с леммы 1 в области  $\Omega$ , не содержащей угол  $\Delta_\alpha$ , имеет место полнота в классе  $\Omega_p(1)$ .

*Доказательство.* В п. 3 задачу о полноте в классе  $\Omega_p(1)$  мы свели к задаче об аппроксимации в среднем функций  $(z^{-m-\frac{2}{p}})$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Эта задача в свою очередь имела бы положительное решение, если бы мы решали задачу об аппроксимации в среднем порядка  $2p' > p$  ( $p'$  — натуральное) тех же функций  $\left\{ z^{-m-\frac{2}{p}} \right\}$ .

Основным результатом п. 3 было сведение этой задачи к следующей:

при каких ограничениях, накладываемых на  $\Omega$ , из условий

$$\int_{\Omega} \bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1} \cdot z^n d\sigma = 0 \quad (14)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\psi \in \Omega_{2p'}$ , вытекает  $\psi \equiv 0$ ?

Для решения этой последней задачи мы составили образующую функцию предыдущих интегралов

$$\Phi(w) = \int_{\Omega} \frac{\bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1}}{z-w} d\sigma. \quad (15)$$

По условиям теоремы и из результата леммы (1) следует

$$\Phi(w) \equiv 0$$

в  $\Delta_2$ . Так как точка  $w = 2$  находится вне  $\Omega$ , то

$$\Phi^{(n)}(w) = \int_{\Omega} \frac{\bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1}}{(z-2)^{n+1}} d\sigma = 0, \quad (16)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Но система  $\{(z-2)^{-n}\}$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) полна в  $\Omega_{2p'}$  (1), так как преобразованием  $w + 1 = \frac{1}{z-2}$  область  $\Omega$  перейдет в конечную область Каратеодори  $\Omega^*$ , а система функций  $\{(z-2)^{-n}\}$  — в систему  $\{(w+1)^n\}$ , которая замкнута  $\Omega_{2p'}$ . Воспользуемся этим, чтобы доказать тождественное обращение  $\psi(z)$  в нуль.

Для этого заметим, что из (14), при  $n = 0$ , и из соотношений (16) следует

$$\int_{\Omega} \bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1} \cdot Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) d\sigma = 0,$$

где  $Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right)$  — совершенно произвольный многочлен относительно степеней  $\frac{1}{z-2}$ .

Пользуясь этим соотношением, оценим

$$\int_{\Omega} |\psi^{p'-1}|^2 d\sigma.$$

Получаем

$$\int_{\Omega} |\psi|^{2p'} d\sigma = \int_{\Omega} \bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1} \left[ \psi - Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) \right] d\sigma.$$

Применим к произведению функций  $f_1(z)$  и  $f_2(z)$

$$f_1(z) = \bar{\psi}^{p'} \cdot \psi^{p'-1},$$

$$f_2(z) = \left[ \psi(z) - Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) \right]$$

неравенство Хелдера

$$\left| \int_{\Omega} f_1 f_2 d\sigma \right| \leq \left\{ \int_{\Omega} |f_1|^k d\sigma \right\}^{1/k} \cdot \left\{ \int_{\Omega} |f_2|^k d\sigma \right\}^{1/k},$$

где  $k_1 = 2p'$ ,  $k = \frac{2p'}{2p'-1}$ .

Получаем

$$\int_{\Omega} |\psi|^{2p'} d\sigma \leq \int_{\Omega} |\psi|^{2p'} d\sigma \cdot \int_{\Omega} \left| \psi(z) - Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) \right|^{2p'} d\sigma.$$

Но как было указано выше, функции  $\left\{ Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) \right\}$  можно подобрать так, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| \psi(z) - Q_n \left( \frac{1}{z-2} \right) \right|^{2p'} d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_{\Omega} |\psi|^{2p'} d\sigma = 0.$$

т. е.  $\psi \equiv 0$ .

Через  $\psi(z)$  в п. 2 мы обозначили разность

$$z^{-m-1/p} - \varphi(z) = \psi(z),$$

причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z^{-m-1/p} - Q_n^*(z)|^{2p'} d\sigma = \int_{\Omega} |z^{-m-1/p} - \varphi(z)|^{2p'} d\sigma.$$

Но так как при выполнении условий теоремы  $\psi \equiv 0$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z^{-m-1/p} - Q_n^*(z)|^{2p'} d\sigma = 0.$$

Тем более

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |z^{-m-1/p} - Q_n^*(z)|^p d\sigma = 0.$$

Возможность последнего равенства можно доказать при любом натуральном  $m$ , отсюда и следует полнота полиномов в  $\Omega_p(1)$  (ср. п. 3).

5. Условие а) леммы 1, вообще говоря, необходимо для выполнения заключения теоремы. Это вытекает из некоторых признаков нормальности семейства аналитических функций. Пусть  $L$  — произвольная простая кривая Жордана в  $\text{Im} z \geq 0$ , определяемая уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , причем  $\varphi(0) = -\infty$ ,  $\varphi(1) = +\infty$ .

Обозначим через  $D$  область с одной стороны от  $L$ , например, область выше  $L$ , а через  $d\omega(t)$  — гармоническую меру дуги  $ds$  кривой  $L$  в точке, соответствующей параметру  $t$ .

*Лемма 2. При предыдущих обозначениях, если совокупность функций  $\{P_{\eta}(z)\}$ , зависящих от параметра  $\eta$ , аналитических в  $D$ , удовлетворяет условиям:*

$$1) \text{ в } D \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg |P_{\eta}(re^{i\theta})|}{r} = 0,$$

при каждом  $P_{\eta}(z)$  равномерно относительно  $\varphi$ ;

2)  $P_\eta(z)$  непрерывны вплоть до  $L$ , и граничные значения  $P_\eta(z(t))$  удовлетворяют условию

$$\int_0^1 \lg^+ |P_\eta(z(t))| d\omega(t) < c,$$

где  $c$  не зависит от  $\eta$ , то  $\{P_\eta(t)\}$  равномерно ограничена в  $D$  неравенством

$$|P_\eta(z)| < e^c.$$

Отсюда, в частности, будет вытекать, что если какая-либо подпоследовательность  $\{P_{\eta_k}(z)\}$  предыдущих функций сходится на кривой  $L$  на совокупности положительной меры (в случае спрямляемости кривой), то она сходится также в любой подобласти  $D' \in D$ .

*Доказательство.* Проведем окружность радиуса  $r$  с центром в начале координат. Пусть  $S'$  — фиксированная точка кривой  $L$ .

Рассмотрим совокупность дуг окружности  $|z| = r$  внутри  $D$ .

Все точки этих дуг, кроме их концов, являются внутренними точками области, а концы находятся на  $L$ .

Каждая из этих дуг делит область  $D$  на две области и поэтому является секущей.

При достаточно большом  $r$  одна из указанных секущих будет разбивать  $D$  на области  $D_1$  и  $D_2$  так, что граница  $D_1$  будет содержать точку  $S$ , а граница  $D_2$  — точку  $z = \infty$ .

Обозначим эту дугу через  $C_r$ . Часть кривой  $L$ , стягиваемую круговой дугой  $C_r$ , обозначим через  $L_r$ .

Так как по условию  $P_\eta(z)$  непрерывна в замкнутой области  $D_1$  и  $\lg |P_\eta(z)|$  субгармонична, то для любой фиксированной внутри  $D_1$  точки  $z$

$$\lg |P_\eta(z)| \leq \int_{L_r} \lg^+ |P_\eta(z(t))| d\omega(t; z, D) + \int_{C_r} \lg^+ |P_\eta(z(t))| d\omega(t; z, D_1);$$

отсюда

$$\lg |P_\eta(z)| \leq \int_{t=0}^1 \lg^+ |P_\eta(z(t))| d\omega(t; z, D_1) + \max \lg^+ |P_\eta(z(t))| \cdot \omega(C_r; z, D_1). \quad (17)$$

Но из принципа расширения Карлемана следует, что гармоническая мера  $\omega(C_r; z, D_1)$  дуги  $C_r$  меньше гармонической меры полуокружности относительно точки  $z$  в полукруге.

Гармоническая мера полуокружности есть величина порядка  $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{y}{r}$  где  $y = \operatorname{Im} z$  ([7], стр. 43).

Поэтому из (17), ввиду условий теоремы, при  $r \rightarrow \infty$  следует

$$|P_\eta(z)| < e^c.$$

что и требовалось доказать.

*Замечание 1.* Условие 1) в теореме можно заменить условием

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg |P_\eta(re^{i\varphi})|}{r} = \text{пост.} = c_1,$$

где  $c_1$  не зависит от  $\eta$ . В этом случае вместо полученного выше выражения получаем

$$|P_\eta(z)| < e^{c_1 + \frac{4y}{\pi}}.$$

Хотя в этом случае семейство  $\{P_\eta(z)\}$  не ограничено в  $D_1$ , но оно все-таки нормально.

*Замечание 2.* Если кривая  $L$  не уходит в бесконечность в обе стороны, т. е., например,

$$x(0), y(0)$$

представляют координаты конечной точки, в этом случае будем рассматривать в качестве области  $D$  всю плоскость с разрезом  $L$ . Обозначим через  $L^+$  и  $L^-$  соответственно два края этого разреза, а через  $d^+\omega(t; z, D)$  и  $d^-\omega(t; z, D)$  гармонические меры дуг на  $L^+$  и  $L^-$ . В этом случае формулируется лемма, аналогичная предыдущей, с той лишь разницей, что в этом случае вместо интеграла в условии 2) будут фигурировать два интеграла соответственно по  $L^+$  и  $L^-$ .

В формулировке приведенных лемм кривая  $L$  фигурирует неявным образом в выражении гармонической меры  $d\omega(t; z, D)$ . В приложениях нужно бывает иметь явное выражение  $d\omega(t; z, D_1)$ . Это можно получить, пользуясь различными теоремами искажения, позволяющими оценить деформацию элементов дуги  $L$  при конформном отображении области  $D$  на полуплоскость. Можно пользоваться, например, известными неравенствами Альфорса либо Варшавского [6—7].

Приведем пример такой формулировки леммы 2. Допустим, кривая  $L$  лежит в  $\text{Im} z \geq 0$  и, кроме того, каждая окружность  $|z| = r > r_0$  пересекает  $L$  лишь в двух точках. Обозначим через  $r^0(r)$  дугу  $C_r$  такой окружности внутри  $D$  и через  $A_r$  точки встречи  $C_r$  с  $L$ .

*Лемма 3.* Если  $\{P_\eta(z)\}$  совокупность функций, регулярных в  $D$  и непрерывных вплоть до контура  $L$ , за исключением может быть точки  $z = \infty$ , то из условий

$$1) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg |P_\eta(re^{i\varphi})|}{r} = 0$$

равномерно относительно  $\varphi$ , где  $re^{i\varphi} \in C_r$ ,

$$2) \quad |P_\eta(z(t))| < e^{p(r)}, \quad \{\eta\},$$

где  $P_\eta(z(t))$  значение  $P_\eta(z)$  на  $L$  и  $p(r)$  положительная возрастающая функция,

$$3) \quad \int \frac{p(r)}{r^2} dr < \text{пост.} = c,$$

следует  $|P_\eta(z)| < e^c$  в  $D$ .

*Доказательство.* Отобразим конформно область  $D$  на полуплоскости  $\text{Reel } \xi > 0$ . При этом будем считать, что начало координат  $O$  лежит на  $L$  и при отображении переходит в  $\xi=0$ , а точка  $z=\infty$  переходит в  $\xi=\infty$ .

Пусть  $C_r^*$  есть образ дуги  $C_r$  на  $\xi$ -плоскости, а  $\rho(r)$  — расстояние  $C_r^*$  до начала координат.

Согласно неравенству Альфорса ([7], стр. 92)

$$\rho(r) > \text{пост.} \cdot e^{\pi \int_0^r \frac{ds}{s^{\theta(s)}}}$$

Но  $\theta(s) \geq \pi$ , поэтому

$$\rho(r) > c \cdot e^{\int_0^r \frac{ds}{s}} = c \cdot r. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь область  $D_r$ , ограниченную полуокружностью

$$|\xi| = \rho(r)$$

и ее диаметром на мнимой оси. На фиг. 2  $C_r$  — полуокружность, а  $ab$  — диаметр.

При указанном конформном отображении  $z = z(\xi)$  функция  $P_r(z)$  перейдет в  $P_r(z(\xi)) = P^*(\xi)$ .

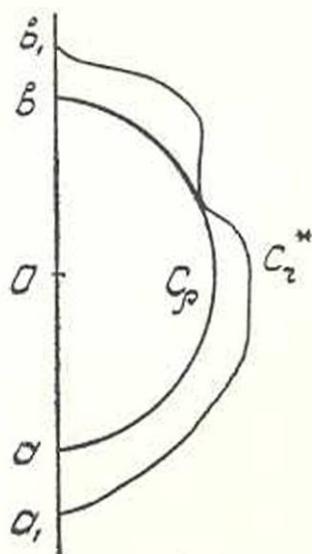
Обозначим через  $M_r(r)$  и  $M^*(\rho)$  соответственно  $\max |P_r(z)|$  на  $C_r$  и  $\max |P^*(z)|$  на  $C_r^*$ . Пусть, наконец,  $D^*$  есть область, ограниченная дугой  $C_r^*$  и отрезком  $a_1 b_1$  мнимой оси. В любой точке  $z$  при достаточно большом  $r$

$$\begin{aligned} \lg |P_r^*(\xi)| &< \int_{t \in C_r^*} \lg^+ |P_r^*(t)| d\omega(t; z, D) + \\ &+ \int_{a_1 b_1} \lg^+ |P_r^*(it)| d\omega(t; z, D). \end{aligned}$$

Гармоническая мера дуги  $C_r^*$  в  $D^*$ , согласно принципу расширения Карлемана, будет меньше, чем гармоническая мера дуги  $C_r$  в полукруге, а эта последняя при  $r \rightarrow \infty$  есть величина порядка  $\frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\rho}$ . На  $a_1 b_1$  при  $\rho \rightarrow \infty$

$d\omega(t; z, D^*) \sim d\omega(t; z, D)$  в полукруге  $\sim \frac{x}{2\pi} \cdot \frac{dt}{t^2 + x^2}$  (ср. [7], стр. 153).

Поэтому при  $r \rightarrow \infty$ , ввиду условий 1) и 2) леммы, а также неравенства (18), получаем



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \lg |P_n^*(\zeta)| &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg M(r)}{r} \cdot \frac{4x}{\pi} + \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \lg |P_n^*(it) P_n^*(-it)| \frac{dt}{t^2+x^2} \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg M(r)}{c \cdot r} \cdot \frac{4x}{\pi} + \frac{x}{\pi} \int_0^{\infty} \lg |P_n^*(it) P_n^*(-it)| \frac{dt}{t^2+x^2}, \\ \lg |P_n^*(\zeta)| &\leq \frac{2x}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p(t)}{t^2+x^2} dt. \end{aligned}$$

Этим неравенством и доказана лемма.

*Дополнения к лемме 3.*

а) Если кривая  $L$  лежит в плоскости с разрезом по полу-прямой и один конец кривой находится в конечной точке, а другой в бесконечности, то при замене условия 3) условием

$$\int_0^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1/\alpha}} dr \quad (19)$$

лемма остается в силе и для плоскости с криволинейным лучевым разрезом.

Для доказательства достаточно перейти преобразованием  $\zeta = \sqrt{z}$  на плоскость  $\zeta$ -аргумента и там применить предыдущую лемму.

в) В частном случае, когда  $L$  превращается в вещественную ось, условия 2) и 3) можно заменить одним менее ограничивающим условием

$$\int_0^1 \lg^+ |P_n(t)| \frac{dt}{1+t^2} < c,$$

где  $c$  не зависит от  $\eta$ .

Леммы 2 и 3 применяются при решении вопроса о необходимых условиях полноты при равномерной аппроксимации, либо при аппроксимации в среднем с некоторым весом на кривой  $L$ .

В качестве примера рассмотрим задачу о весовой равномерной аппроксимации на бесконечной кривой.

*Теорема 2.* Если  $L$  — кривая линия и  $p(r)$  функция, описанная в условиях леммы 3, а  $i(z)$  непрерывная на  $L$  функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-p(r)} i(z) = 0, \quad (*)$$

$|z| = r$ , то равенство

$$\inf_{\{P_n(z)\}} \sup e^{-p(r)} |i(z) - P_n(z)| = 0 \quad (**)$$

в классе всевозможных полиномов, вообще говоря, не возможна.

В самом деле, из (\*) следует, что на  $L$

$$|P_n(z)| < \text{const } e^{p(r)}$$

при всех  $p$ . Это есть условие 2) леммы 2. Условие 1) той же леммы, очевидно, выполняется для полиномов. Таким образом, семейство полиномов нормально в области  $D$ . А отсюда следует, что  $f(z)$  представляет граничное на  $L$  значение аналитической в  $D$ -функции. Следовательно, если  $f(z)$  не является граничным значением аналитической в  $D$ -функции, то равенство (\*\*) выполняться не может.

6. Пусть теперь  $\Omega$  произвольная односвязная область в  $\text{Im}z > 0$ , топологически эквивалентная бесконечной полуплоскости (фиг. 3).

Обозначим через  $L$  некоторую кривую Жордана, соединяющую внутри какую-либо точку  $A$  с граничной точкой  $z = \infty$ .

Полагаем, что область  $\Omega$  допускает построение такой  $L$ , что каждая окружность  $|z| = r$  пересекает  $L$  в одной точке. Аффикс перемещенной точки на  $L$  обозначим через  $t$ . Пусть  $\rho(r)$  есть расстояние точки  $t \in L(|t| = r)$  до границы области  $\Omega$ . Тогда имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** Если функции семейства  $\{P_\eta(z)\}$  регулярны на всей плоскости и удовлетворяют условиям

$$1) \quad \iint_{\Omega} |P_\eta(z)|^p d\sigma < \text{const} = c,$$

где  $c$  не зависит от  $\eta$ ,

$$2) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg M_\eta(r)}{r} = 0,$$

где  $M_\eta(r) = \max |P_\eta(z)|$  на  $|z| = r$ , то из неравенства

$$\int_0^\infty \frac{\lg^+ \rho(r)}{r^{3/2}} dr < \infty \quad (20)$$

вытекает нормальность семейства  $\{P_\eta(z)\}$  в любой конечной части плоскости.

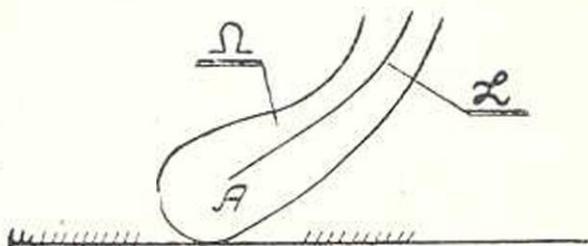
**Доказательство.** Из 1) вытекает

$$\pi \cdot |P_\eta(t)|^p \cdot \rho^2 < c,$$

т. е.

$$|P_\eta(t)| < \frac{\text{const.}}{[\rho(r)]^{2/p}}. \quad (21)$$

Функции  $\{P_\eta(t)\}$  удовлетворяют условиям дополнения а) леммы 3, причем здесь  $\rho(r) = \frac{1}{r} \lg \frac{c}{\rho(r)}$ . Поэтому приведенная теорема является следствием леммы 3.



Фиг. 3.

Если же область  $\Omega$  лежит в полуплоскости  $\text{Im}z > 0$  и топологически эквивалентна полной прямой полосе, то при таких же общих ограничениях, налагаемых на  $\Omega$ , нормальность будет иметь место при

$$\int_0^{\infty} \frac{|g'|/\varrho(r)}{r^2} dr < \infty. \quad (22)$$

Из этих условий (20) и (21) вытекает:

*Следствие.* Если область  $\Omega$ , топологически эквивалентная полуполосе, удовлетворяет условиям теоремы 3, то при  $f(z) \in \Omega_p$  равенство

$$\inf_{\{P_\eta(z)\}} \iint_{\Omega} |f(z) - P_\eta(z)|^p d\sigma = 0 \quad (23)$$

в классе полиномов, вообще говоря, не возможно. Более того, можно утверждать, что из (23) вытекает регулярность  $f(z)$  на всей плоскости.

В самом деле, из (23) следует

$$\iint_{\Omega} |P_\eta(z)|^p d\sigma < \text{const.} = c,$$

где  $c$  не зависит от  $\eta$ . И так как выполняется также условие (20), то семейство  $\{P_\eta(z)\}$  нормально на плоскости. Но из (23) вытекает сходимость  $\{P_\eta(z)\}$  внутри  $\Omega$ . Отсюда, вследствие нормальности, следует регулярность  $f(z)$  на всей плоскости.

Если же область топологически эквивалентна полной прямой полосе, то при условии (22) и (23) вытекает регулярность  $f(z)$  в  $\Omega$  и слева от нее.

6. Вопрос о полноте полиномов в классе  $\Omega_2(1)$  рассматривался нами ранее. Были получены как для неограниченных областей, так и для областей с несвязным дополнением необходимые, а также достаточные метрические критерии полноты [9]. Впоследствии оказалось, что необходимые критерии, найденные нами, точные, а достаточные критерии точны в первом приближении.

Эти уточнения достаточных условий были указаны М. Джрбашьяном [10]. Последний в своем исследовании пользовался интегральной формулой типа интеграла Коши и сведением задачи о полноте к известной проблеме Ватсона, применяемой в вопросе о единственности в проблеме моментов (см. [11], стр. 14—19). Этому пути следуем и мы в настоящей статье.

Джрбашьян доказал, что в области, рассмотренной в теореме 1 настоящей статьи, заключение теоремы для класса  $\Omega_2(1)$  имеет место, если  $\theta(r)$  удовлетворяет следующим условиям:

1) начиная с некоторого значения  $x'$  существует функция  $\theta_0(x)$  такая, что

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \theta_0(x), \\ x\theta_0'(x) &\uparrow \infty \end{aligned} \quad (24)$$

где

монотонно возрастает к бесконечности, при этом допускается невыполнение условия (24) для совокупности  $E$  значений  $\tau$ , удовлетворяющих условию

$$\text{mes } E(x, \infty) < e^{-\lambda(x)}. \quad (25)$$

где  $E(x, \infty)$  есть часть  $E$  на луче  $(x, \infty)$ .

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta_0(x)}{x^2} dx = \infty. \quad (26)$$

Для областей, удовлетворяющих условию (24), этот способ исследования данной задачи оказался наиболее удачным и позволил Джрбашяну указать достаточные условия полноты для многих классов областей.

Мы здесь покажем одной конструкцией существование областей, для которых функция  $\theta(x)$  не удовлетворяет условиям (24) и (25), но для которых выполняются условия леммы I и, следовательно, в них имеет место полнота.

Не ограничивая общности, рассмотрим случай  $\alpha=1$ .

Проведем в координатной системе  $(x, y)$  кривые

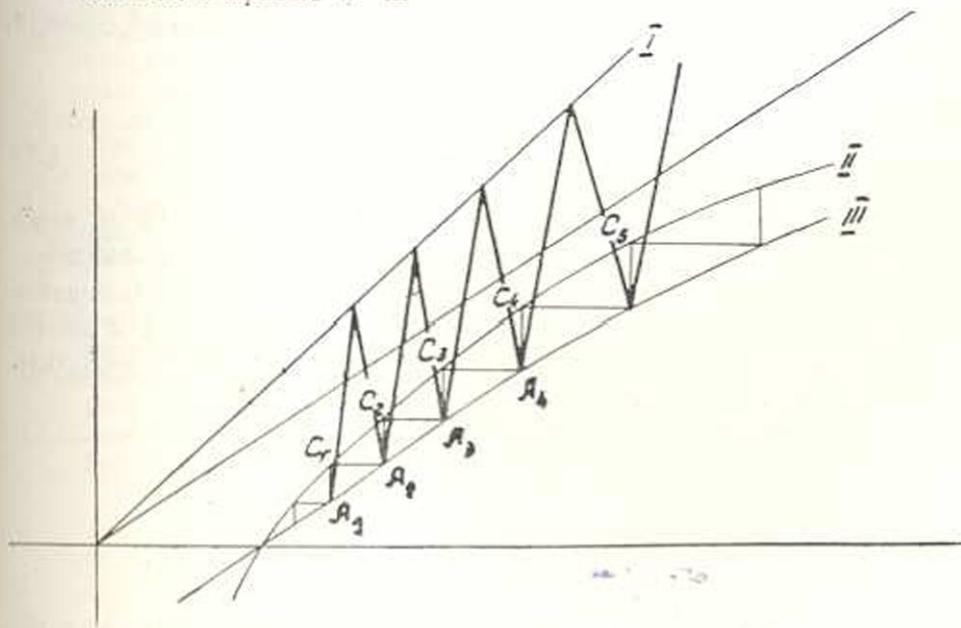
I—III с уравнениями

$$I \quad y=x,$$

$$II \quad y = \frac{x}{(\lg x)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

$$III \quad y = \frac{x}{(\lg x)^{1-2\varepsilon}}.$$

Впишем в кривые II—III



Фиг. 4.

ломаную, состоящую из отрезков, параллельных координатным осям. Обозначим через  $A_1, A_2, \dots$  вершины этой ломаной на III, а через  $C_1, C_2, \dots$  вершины на II. Пусть  $x_1, x_2, \dots$  соответственно координаты точек  $A_1, A_2, \dots$ .

Отметим на прямой I точки  $B_1, B_2, \dots$  с абсциссами

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}, \dots$$

Покажем, что функция

$$y = \theta(x),$$

представляющая ломаную линию  $A_1B_1A_2B_2, \dots$ , и есть искомая.

В самом деле, функция  $y = \theta_0(x)$  не может превышать ординаты ломаной  $A_1C_1A_2C_2, \dots$  так как в противном случае нарушится условие (24).

А если это так, то

$$\theta_0(x) < \frac{x}{(\lg x)^{1+\epsilon}},$$

и поэтому

$$\int \frac{\theta_0(x)}{x^2} dx < \text{const.}$$

т. е. нарушается условие (26).

Таким образом, для построенной функции достаточные условия полноты (24)–(26) Джрбашяна не выполняются. Нетрудно видеть, что в данном случае не существует также функции  $y = \theta_0(x)$ , удовлетворяющей условиям (24) и (26) с исключительным множеством  $E$ , удовлетворяющим условию (25).

Покажем, однако, что наша функция  $y = \theta(x)$  удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, в соответствующей области имеет место полнота.

Во-первых, покажем, что

$$\int \frac{\theta(x) dx}{x^2} = \infty. \quad (27)$$

Для этого проведем прямую  $y = kx$  ( $k < 1$ ) и обозначим через  $x_1, x_2, x_3, \dots$  точки встречи этой прямой с построенной ломаной.

Легко подсчитать, что промежуток  $x_{2k+1}, x_{2k+2}$ , находящийся внутри  $x_{2k+1}, x_{2k}$ , имеет величину такого же порядка, что и  $x_{2k+2} - x_{2k+1}$ . Поэтому доля предыдущего интеграла по этим промежуткам уже дает бесконечность.

С другой стороны, из неравенства

$$\theta(x) > \frac{x}{(\lg x)^{1-2\epsilon}}$$

следует при  $t \geq t_0 > 1$ :

$$\theta(rt) > 2\delta_1 \theta(r) \lg t$$

и

$$t(rt) > \beta \theta(r) \quad \text{при } t > 1.$$

Таким образом, условия леммы 1 выполняются и поэтому в области, соответствующей построенной функции, имеет место полнота.

## Резюме

Целью настоящей статьи было:

1) показать, как перенести известные ранее по теории приближений в комплексной области результаты. моп и Джрбацияна, на случай аппроксимации в среднем произвольного порядка  $p > 0$ ;

2) указать новый класс областей, в которых имеет место полнота;

3) привести некоторые критерии нормальности семейства аналитических функций, применяемые в вопросах полноты полиномов или иных функций.

Мы ограничивались рассмотрением задачи о полноте в бесконечных областях определенного топологического типа, так как уже известная методика позволяет все приведенное выше перенести и на неограниченные области другого типа, либо области с несвязным дополнением.

Сектор математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступило 31 V 1954

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
2. Карлеман Т. Über die Approxim. analyt. Funkt. durch lineare Aggregate von vorgegebenen Potenzen. (Arkiv för Math. Astr. och Fysik, vol. 17, 9, 1922).
3. Фаррель. On approximation to an analytic function by polynomials (Bulletin of the Amer. Math. Soc., Vol. 40, pp. 908-914).
4. Маркушевич А. И. Конформное отображение областей с перемещными границами с приложениями к аппроксимации аналитических функций полиномами. М. Диссертация, 1934.
5. Мергелян С. Н. О полноте систем аналитических функций. УМН, т. VIII, вып. 4 (56), 1953.
6. Альфорс. Untersuchungen zur Theorie der Konformen Abbildung und der Ganzen Funktionen. (Acta Soc. Sci. Fenn. N. S. 1, 9, 1930).
7. Неванлинна. Eindeutige analytische Funktionen. (Berlin, Springer, 1936).
8. Варшавски. On conformal mapping of infinite strips (Trans. Amer. Math. Soc. vol. 51, 2, 1942, pp. 280-335).
9. Шагинян А. Л. О полноте семейств аналитических функций в комплексной области (Сообщения Института мат. и мех. АН АрмССР, вып. 1, 1947).
10. Джрбациян М. М. Метрические теоремы о полноте и о представимости аналитических функций. Диссертация, Ереван, 1948.
11. Шохат и Тамаркин. The problem of Moments. (Math. Surveys, 1, Am. Math. Soc., New York, 1943).





Б. А. Костанян

## О кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы

В работе М. М. Джрбашяна и Б. Л. Абрамяна [1], посвященной решению задачи кручения ступенчатого вала, было отмечено, что предложенным способом может быть решена также задача о кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы.

В настоящей работе приводится точное решение задачи о кручении цилиндрического вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы на поверхности при произвольном симметричном нагружении относительно оси вала.

Решение задачи представляется рядами по бесселевым функциям, коэффициенты которых определяются из бесконечной, вполне регулярной системы линейных уравнений. Получены формулы для определения напряжений при кручении вала.

В качестве примера рассмотрена задача о кручении вала с кольцевой выточкой прямоугольной формы, когда скручивающая нагрузка приложена на двух участках его боковой поверхности.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. М. М. Джрбашяна.

### § 1. Постановка задачи

Возьмем цилиндрическую систему координат и совместим ее ось с осью вала (фиг. 1).

Предполагается [1, 2], что поперечные сечения вала при кручении остаются плоскими и перемещение вдоль радиуса вала равно нулю. При таком предположении из шести составляющих напряжений отличны от нуля только касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{zr}$ .

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} = \tau_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \tau_{zr} = \tau_z &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r},\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $\Phi(r, z)$  — функция напряжений, удовлетворяющая в области осевого сечения уравнению



Пусть на поверхности вала заданы напряжения

$$\begin{aligned}
 \tau_z(r, 0) &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{z=0} = \varphi_1(r), \quad (0 \leq r \leq R) \\
 \tau_r(R, z) &= -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{r=R} = \varphi_2(z), \quad (0 \leq z \leq a) \\
 \tau_z(r, a) &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{z=a} = \varphi_3(r), \quad (s \leq r \leq R) \\
 \tau_r(s, z) &= -\frac{1}{s^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{r=s} = \varphi_4(z), \quad (a \leq z \leq b) \\
 \tau_z(r, b) &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{z=b} = \varphi_5(r), \quad (s \leq r \leq d) \\
 \tau_r(d, z) &= -\frac{1}{d^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{r=d} = \varphi_6(z), \quad (b \leq z \leq c) \\
 \tau_z(r, c) &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{z=c} = \varphi_7(r), \quad (0 \leq r \leq d)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь функции  $\{\varphi_i\}$  кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах и могут быть представлены в виде рядов Фурье и Фурье—Дуни [5]

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_2(z) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a}, \quad (0 < z < a) \\
 \varphi_4(z) &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a}, \quad (a < z < b) \\
 \varphi_6(z) &= \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}, \quad (b < z < c)
 \end{aligned} \right\} \tag{1.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \varphi_1(r) &= \begin{cases} a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left( \mu_k \frac{r}{s} \right), & (0 < r < s) \\
 b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r), & (s < r < R) \end{cases} \\
 \varphi_3(r) &= i_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} i_k W_1(\lambda_k r), \quad (s < r < R) \\
 \varphi_5(r) &= \gamma_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k W_1(\nu_k r), \quad (s < r < d)
 \end{aligned} \right\} \tag{1.10}$$

$$\varphi_7(r) = \begin{cases} \beta_0 r + \sum_{k=1}^n \beta_k J_1\left(\mu_k \frac{r}{s}\right), & (0 < r < s) \\ d_0 r + \sum_{k=1}^n d_k W_1(\nu_k r), & (s < r < d) \end{cases}$$

$$\text{где } W_n(\lambda_k r) = \frac{J_n(\lambda_k r)}{J_2(\lambda_k R)} - \frac{Y_n(\lambda_k r)}{Y_2(\lambda_k R)}, \quad W_n(\nu_k r) = \frac{J_n(\nu_k r)}{J_2(\nu_k d)} - \frac{Y_n(\nu_k r)}{Y_2(\nu_k d)}. \quad (1.11)$$

а числа  $\{\mu_k\}$ ,  $\{\lambda_k\}$  и  $\{\nu_k\}$  являются соответственно корнями уравнений

$$J_2(x) = 0,$$

$$J_2(sx) Y_2(Rx) - J_2(Rx) Y_2(sx) = 0, \quad (1.12)$$

$$J_2(sx) Y_2(dx) - J_2(dx) Y_2(sx) = 0.$$

Для функций  $J_n(x)$  и  $W_n(x)$  справедливы следующие формулы

$$\int_0^s x J_1\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) J_1\left(\frac{\mu_p}{s} x\right) dx = \frac{\mu_k}{\mu_p} \int_0^s x J_2\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) J_2\left(\frac{\mu_p}{s} x\right) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2} [s J_1(\mu_k)]^2, & \text{при } p = k \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\int_s^R x W_1(\lambda_k x) W_1(\lambda_p x) dx = \frac{\lambda_k}{\lambda_p} \int_s^R x W_2(\lambda_k x) W_2(\lambda_p x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2} [(RW_1(\lambda_k R))^2 - (sW_1(\lambda_k s))^2], & \text{при } p = k \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\int_s^d x W_1(\nu_k x) W_1(\nu_p x) dx = \frac{\nu_k}{\nu_p} \int_s^d x W_2(\nu_k x) W_2(\nu_p x) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } p \neq k \\ \frac{1}{2} \{[dW_1(\nu_k d)]^2 - [sW_1(\nu_k s)]^2\}, & \text{при } p = k \end{cases} \quad (1.15)$$

$$\int_0^s x^2 J_1\left(\frac{\mu_k}{s} x\right) dx = \int_s^R x^2 W_1(\lambda_k x) dx = \int_s^d x^2 W_1(\nu_k x) dx = 0. \quad (1.16)$$

Из формул (1.13)–(1.16) следует, что коэффициенты разложений (1.10) определяются единственным образом.

Пользуясь формулами (1.3), (1.4), (1.8), (1.9) и (1.10), легко получить значение функции напряжения  $\Phi(r, z)$  на контуре осевого сечения вала [1], при условии (1.5):

$$\Phi(0, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq c) \quad (1.5)$$

$$\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} r^4 + s r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\mu_k} J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right), \quad (0 \leq r \leq s)$$

$$\Phi(r, 0) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4} (r^4 - s^4) + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r), \quad (s \leq r \leq R)$$

$$\begin{aligned} \Phi(R, z) = & \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2}{2} z - \\ & - \frac{a R^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k} \sin \frac{k \pi z}{a}, \quad (0 \leq z \leq a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, a) = & \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2}{2} a + \frac{f_0}{4} (r^4 - R^4) + \\ & + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r), \quad (s \leq r \leq R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(s, z) = & \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} + \frac{f_0}{4} (s^4 - R^4) - \\ & - \frac{g_0 s^2 (z - a)}{2} - s^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin \frac{k \pi (z - a)}{b - a}, \quad (a \leq z \leq b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, b) = & \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b - a)}{2} + \\ & + \frac{\gamma_0 (r^4 - s^4)}{4} + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\gamma_k} W_2(\gamma_k r), \quad (s \leq r \leq d) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi(d, z) = & \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b - a)}{2} + \\ & + \frac{\gamma_0 (d^4 - s^4)}{4} - \frac{h_0 d^2}{2} (z - b) - \\ & - \frac{d^2 (b - a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k}{k} \sin \frac{k \pi (z - b)}{c - b}, \quad (b \leq z \leq c) \end{aligned}$$

$$\Phi(r, c) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b - a)}{2} +$$

$$+ \frac{\gamma_0 (d^4 - s^4)}{4} - \frac{h_0 d^2}{2} (c - b) + \frac{d_0}{4} (r^4 - d^4) +$$

$$+ r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{\gamma_k} W_2(\gamma_k r), \quad (s \leq r \leq d)$$

$$\Phi(r, c) = \frac{a_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 R^2 a}{2} - \frac{g_0 s^2 (b - a)}{2} +$$

$$+ \frac{\gamma_0 (d^4 - s^4)}{4} - \frac{h_0}{2} d^2 (c - b) + \frac{d_0}{4} (s^4 - d^4) + \frac{\beta_0}{4} (r^4 - s^4) +$$

$$+ sr^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\mu_k} J_2\left(\frac{\mu_k}{s} r\right), \quad (0 \leq r \leq s)$$

Так как должно иметь место соотношение

$$\Phi(0, c) = 0,$$

то последняя формула из (1.17) даст

$$\frac{a_0 - \beta_0}{4} s^4 + \frac{b_0 - f_0}{4} (R^4 - s^4) - \frac{c_0 a R^2}{2} - \frac{g_0 s^2}{2} (b - a) +$$

$$+ \frac{\gamma_0 - d_0}{4} (d^4 - s^4) - \frac{h_0}{2} d^2 (c - b) = 0. \quad (1.18)$$

Это соотношение между введенными постоянными представляет уравнение равновесия действующих на вал крутящих моментов.

Функцию  $\Phi(r, z)$  ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \begin{cases} \Phi_1(r, z), & \text{в области I} \\ \Phi_2(r, z), & \text{в области II} \\ \Phi_3(r, z), & \text{в области III} \\ \Phi_4(r, z), & \text{в области IV} \\ \Phi_5(r, z), & \text{в области V} \end{cases} \quad (1.19)$$

где функции  $\Phi_i(r, z)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) удовлетворяют граничным условиям (1.8)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=b} &= \gamma_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k W_1(\gamma_k r); & (s < r < d) \\ -\frac{1}{d^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{r=d} &= \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}; & (b < z < c) \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{z=c} &= d_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} d_k W_1(\nu_k r); & (s < r < d) \\
 \Phi_2(0, z) &= 0, & (b \leq z \leq c) \\
 \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{z=c} &= \beta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right); & (0 < r < s) \\
 \Phi_3(0, z) &= 0, & (a \leq z \leq b) \\
 -\frac{1}{s^2} \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)_{r=s} &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a}; & (a < z < b) \\
 \Phi_4(0, z) &= 0, & (0 \leq z \leq a) \\
 \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} \right)_{z=0} &= a_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right); & (0 < r < s) \\
 \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_5}{\partial r} \right)_{z=0} &= b_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} b_k W_1(\lambda_k r); & (s < r < R) \\
 -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \Phi_5}{\partial z} \right)_{r=R} &= \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{k\pi z}{a}; & (0 < z < a) \\
 \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \Phi_5}{\partial r} \right)_{z=a} &= f_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} f_k W_1(\lambda_k r). & (s < r < R)
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

На смежных сторонах областей I и II, II и III, III и IV, IV и V должны быть выполнены условия сопряжения

$$\Phi_1(s, z) = \Phi_2(s, z), \quad \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right)_{r=s} = \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{r=s}; \quad (b < z < c) \tag{1.25}$$

$$\Phi_2(r, b) = \Phi_3(r, b), \quad \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=b} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)_{z=b}; \quad (0 < r < s) \tag{1.26}$$

$$\Phi_3(r, a) = \Phi_4(r, a), \quad \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)_{z=a} = \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial z} \right)_{z=a}; \quad (0 < r < s) \tag{1.27}$$

$$\Phi_4(s, z) = \Phi_5(s, z), \quad \left( \frac{\partial \Phi_4}{\partial r} \right)_{r=s} = \left( \frac{\partial \Phi_5}{\partial r} \right)_{r=s}. \quad (0 < z < a) \tag{1.28}$$

На линиях сопряжения  $\tau_r(s, z)$ ,  $\tau_z(r, a)$  и  $\tau_z(r, b)$  определим разложениями

$$\tau_r(s, z) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos \frac{k\pi z}{a}; \quad (0 < z < a) \quad (1.29)$$

$$\tau_z(r, a) = \xi_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right); \quad (0 < r < s) \quad (1.30)$$

$$\tau_z(r, b) = \theta_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right); \quad (0 < r < s) \quad (1.31)$$

$$\tau_r(s, z) = \frac{\zeta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \quad (b < z < c) \quad (1.32)$$

где  $\{\gamma_k\}$ ,  $\{\xi_k\}$ ,  $\{\theta_k\}$  и  $\{\zeta_k\}$  — неизвестные коэффициенты. Решение задачи сводится к нахождению этих коэффициентов.

## § 2. Построение вспомогательных функций

Используя решения (1.6)–(1.7) уравнения (1.2), можно построить функции  $\Phi_i(r, z)$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) так, чтобы удовлетворялись условия (1.20)–(1.24) и (1.29)–(1.32).

Такое построение имеется в работе [1].

Вид функций  $\Phi_3(r, z)$ ,  $\Phi_4(r, z)$  и  $\Phi_5(r, z)$  выбираем, как и в работе [1], а для функций  $\Phi_1(r, z)$  и  $\Phi_2(r, z)$  берем соответственно выражения  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ , сделав преобразование координат (параллельный перенос) и заменив соответствующие коэффициенты.

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, z) = & r^4 \left[ \frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)} (c-z) + \frac{d_0}{4} \right] + \left[ \frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)} d^4 - \frac{h_0 d^2}{2} \right] z + \\ & + D + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} [d_k \operatorname{sh} \nu_k (z-b) + \gamma_k \operatorname{sh} \nu_k (c-z)] \times \\ & \times \frac{\operatorname{csch} \nu_k (c-b)}{\nu_k} W_{\nu_k}(r) + \frac{c-b}{\pi} r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \zeta_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi d}{c-b} \right) - \right. \\ & \left. - h_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right) \right] \frac{\sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{k \Delta \left( \frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right)}, \quad \left( \begin{array}{l} s \leq r \leq b \\ b \leq z \leq c \end{array} \right); \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\Phi_2(r, z) = r^4 \left[ \frac{\theta_0 - \beta_0}{4(c-b)} (c-z) + \frac{\beta_0}{4} \right] + \frac{s^2}{4(c-b)} [(\theta_0 - \beta_0) s^2 - 2\zeta_0 (c-b)] z +$$

$$\begin{aligned}
& + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \beta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (z-b) + \theta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-z) \right] \frac{s}{\mu_k} \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (c-b) \times \\
& \times J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) - r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{ks^2}{(c-b)^2} [b + (-1)^{k+1} c] \cdot \left[ \frac{\xi_0}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{s^2(\beta_0 - \theta_0)}{4(c-b)} \right] \Delta \left( \frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right) + \frac{c-b}{k\pi} \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{c-b} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{c-b} \right)} \right\} \sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \\
& \left( \begin{array}{l} 0 \leq r \leq s \\ b \leq z \leq c \end{array} \right); \quad (2.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3(r, z) &= \frac{r^4}{4(b-a)} [\theta_0(z-a) + \xi_0(b-z)] + \frac{s^2 z}{4(b-a)} [(\xi_0 - \theta_0)s^2 - 2g_0(b-a)] + \\
& + sr^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (b-z) + \theta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (z-a) \right] \frac{1}{\mu_k} \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (b-a) J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) + \\
& + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{s^4}{4} [(\theta_0 - \xi_0)s^2 + 2g_0(b-a)] \frac{a + (-1)^{k+1} b}{(b-a)^2} k\pi \frac{\Delta \left( \frac{k\pi s}{b-a}, \frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{b-a} \right)} - \right. \\
& \left. - \frac{b-a}{k\pi} g_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{b-a} \right)} \right\} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq r \leq s \\ a \leq z \leq b \end{array} \right); \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_4(r, z) &= \frac{r^4}{4a} [\xi_0 z - a_0(a-z)] + \frac{s^2}{4a} [(a_0 - \xi_0)s^2 - 2\eta_0 a] z + \\
& + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{s} + a_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k(a-z)}{s} \right] \frac{s}{\mu_k} \operatorname{csch} \frac{\mu_k a}{s} J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) + \\
& + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1)^k \frac{\pi s^2}{4a^2} [a_0 - \xi_0] s^2 - 2\eta_0 a \right\} k \frac{\Delta \left( \frac{k\pi s}{a}, \frac{k\pi r}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{a} \right)} - \\
& - \frac{a}{k\pi} \eta_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi z}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{a} \right)} \sin \frac{k\pi z}{a}; \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq r \leq s \\ 0 \leq z \leq a \end{array} \right); \quad (2.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(r, z) = & r^4 \left( \frac{f_0 - b_0}{4a} z + \frac{b_0}{4} \right) + \frac{R^2}{4a} [(b_0 - f_0) R^2 - 2ac_0] z + Q + \\ & + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \operatorname{sh} \lambda_k z + b_k \operatorname{sh} \lambda_k (a - z)] \frac{\operatorname{csch} \lambda_k a}{\lambda_k} W_2(\lambda_k r) + \\ & + \frac{ar^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \eta_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a} \right) - c_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right) \right] \frac{\sin \frac{k\pi z}{a}}{k\Delta \left( \frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right)}; \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} s \leq r \leq R \\ 0 \leq z \leq a \end{array} \right), \quad (2.5)$$

где  $\Delta(x, y) = I_2(x) K_2(y) - I_2(y) K_2(x)$ .

Удовлетворяя первым из условий (1.25)–(1.28), т. е.

$$\Phi_1(s, z) = \Phi_2(s, z), \quad (b < z < c); \quad \Phi_1(s, z) = \Phi_3(s, z), \quad (0 < z < a);$$

$$\Phi_2(r, b) = \Phi_3(r, b); \quad (0 < r < s); \quad \Phi_3(r, a) = \Phi_4(r, a), \quad (0 < r < s)$$

и в силу (1.18), для коэффициентов  $\eta_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\theta_0$  и  $\zeta_0$  и для постоянных  $Q$  и  $D$  получим

$$\eta_0 = \frac{f_0 - b_0}{2as^2} (R^4 - s^4) - \frac{R^2}{s^2} c_0, \quad (2.6)$$

$$\xi_0 = a_0 + \frac{b_0 - f_0}{s^4} (R^4 - s^4) - \frac{2R^2 a c_0}{s^4}, \quad (2.7)$$

$$\theta_0 = \beta_0 + \frac{2h_0 d^2}{s^4} (c - b) + \frac{d_0 - \gamma_0}{s^4}, \quad (2.8)$$

$$\zeta_0 = \frac{d_0 - \gamma_0}{2(c-b)s^2} (d^4 - s^4) + \frac{h_0 d^2}{s^2}, \quad (2.9)$$

$$Q = \frac{a_0 - b_0}{4} s^4, \quad (2.10)$$

$$D = \frac{\beta_0 - d_0}{4} s^4 + \frac{c}{4(c-b)} [2h_0 d^2 (c - b) + (d_0 - \gamma_0) d^4]. \quad (2.11)$$

Остальные неизвестные коэффициенты  $\{\bar{z}_k\}$ ,  $\{\eta_k\}$ ,  $\{\theta_k\}$  и  $\{\zeta_k\}$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), которые имеются в формулах (2.1)–(2.5), определяются, если потребовать выполнение также вторых условий сопряжения из (1.25)–(1.28).

### § 3. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений

1. Функции  $\Phi_1(r, z)$  и  $\Phi_2(r, z)$  должны удовлетворять второму из условий (1.25), т. е.

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s} \quad (b < z < c) \quad (3.1)$$

Из (2.1)–(2.2) составим равенство (3.1), используя рекуррентные соотношения для бесселевых функций и формулу Вронского

$$K_{n+1}(x) I_n(x) + K_n(x) I_{n+1}(x) = \frac{1}{x}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d_0 - \gamma_0}{c - b} \cdot \frac{d^4}{s^4} + \frac{2h_0 d^2}{s^2} \right) (c - z) + (\beta_0 - d_0) s - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} [d_k \operatorname{sh} \nu_k (z - b) + \gamma_k \operatorname{sh} \nu_k (c - z)] \operatorname{csch} \nu_k (c - b) W_1(\nu_k s) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \beta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (z - b) + \theta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c - z) \right] \operatorname{csch} \frac{\mu_k (c - b)}{s} J_1(\mu_k) = \\ & = \frac{c - b}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \zeta_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi d}{c - b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c - b}\right)} - h_k \right] \frac{\sin \frac{k\pi (z - b)}{c - b}}{k \Delta\left(\frac{k\pi d}{c - b}, \frac{k\pi s}{c - b}\right)} \quad (b < z < c) \quad (3.2) \end{aligned}$$

Умножая тождество (3.2) на  $\frac{2}{c - b} \sin \frac{p\pi (z - b)}{c - b}$  и интегрируя по  $z$  в пределах  $(b < z < c)$ , получим

$$\begin{aligned} \bar{\zeta}_p = \frac{2p^2 \pi^2 s}{(c - b)^2} \Delta\left(\frac{p\pi d}{c - b}, \frac{p\pi s}{c - b}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c - b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c - b}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{J_1(\mu_k)}{\frac{p^2 \pi^2}{(c - b)^2} + \frac{\mu_k^2}{s^2}} + R_p, \\ (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_p = h_p \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c - b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c - b}\right)} + \frac{2s}{c - b} \Delta\left(\frac{p\pi d}{c - b}, \frac{p\pi s}{c - b}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c - b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi d}{c - b}\right)} \left( \frac{d_0 - \gamma_0}{s^4} d^4 + \right. \\ \left. + \frac{2h_0 d^2}{s^2} (c - b) + [1 + (-1)^{p+1}] (\beta_0 - d_0) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{\pi p}{c-b} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k + (-1)^{p+1} d_k}{p^2 \pi^2 + \gamma_k^2} W_1(\gamma_k s) + \\
 & + (-1)^{p+1} \left( \frac{p\pi}{c-b} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\left( \frac{p\pi}{c-b} \right)^2 + \frac{\mu_k^2}{s^2}} J_1(\mu_k) \Bigg\} \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

2. Функции  $\Phi_2(r, z)$  и  $\Phi_3(r, z)$  должны удовлетворять второму из условий (1.26), т. е.

$$\left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right)_{z=b} = \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)_{z=b} \quad (0 < r < s) \quad (3.5)$$

Из формул (2.2)–(2.3) составим равенство (3.5)

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \theta_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (c-b) \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (b-a) \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a) - \xi_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (b-a) - \right. \\
 & \left. - \beta_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (c-b) \right] J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) + r^2 \left[ \frac{h_0 d^2}{2s^4} + \frac{d_0 - \gamma_0}{4(c-b)s^4} (d^4 - s^4) - \right. \\
 & \left. - \frac{g_0}{2s^2} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k g_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{b-a} \right)} - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{c-b} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{c-b} \right)} \quad (0 < r < s) \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Умножив обе части тождества (3.6) на  $r J_2 \left( \frac{\mu_p}{s} r \right)$  и интегрируя по  $r$  в пределах  $(0, s)$ , используя формулу (1.13), а также значения интегралов

$$\int_0^s r^3 J_2 \left( \frac{\mu_p}{s} r \right) dr = -\frac{s^4}{\mu_p} J_1(\mu_p) \quad (3.7)$$

$$\text{и} \quad \int_0^s r I_2(Ar) J_2 \left( \frac{\mu_p}{s} r \right) dr = -\frac{\mu_p I_2(As) J_1(\mu_p)}{A^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}},$$

получим

$$\begin{aligned}
 & \xi_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (b-a) - \theta_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (c-b) \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (b-a) \operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a) = \\
 & = -\frac{s^2}{\mu_p J_1(\mu_p)} \left[ \frac{g_0}{2s^2} - \frac{h_0 d^2}{2s^4} - \frac{d_0 - \gamma_0}{4(c-b)s^4} (d^4 - s^4) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\frac{2\mu_p}{s^2 J_1(\mu_p)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} \right\} - \beta_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (c-b), \quad p=1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

3. Функции  $\Phi_3(r, z)$  и  $\Phi_4(r, z)$  должны удовлетворять второму из условий (1.27), т. е.

$$\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)_{z=a} = \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial z}\right)_{z=a}, \quad (0 < r < s) \quad (3.9)$$

Из формул (2.3)–(2.4) составляя равенство (3.9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \zeta_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (b-a) \cdot \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} a \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} b - \theta_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} (b-a) - \right. \\ \left. - a_k \operatorname{csch} \frac{\mu_k}{s} a \right] J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) = r^2 \left[ \frac{f_0 - b_0}{4s^4} (R^4 - s^4) + \right. \\ \left. + \frac{R^2 a c_0}{2s^4} - \frac{g_0 a}{2s^2} \right] \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k (-1)^k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{a} \right)} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{b-a} \right)}, \quad (0 < r < s) \quad (3.10) \end{aligned}$$

Умножив обе части тождества (3.10) на  $r J_2 \left( \frac{\mu_p}{s} r \right)$  и интегрируя по  $r$  в пределах  $(0, s)$ , аналогично предыдущему, получим

$$\begin{aligned} \zeta_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (b-a) \cdot \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} a \operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} b - \theta_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s} (b-a) = \\ = \frac{2}{s J_1(\mu_p)} \left\{ \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \eta_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a} \left[ \frac{b_0 - f_0}{4s^4} (R^4 - s^4) + \frac{g_0 a}{2s^2} - \frac{R a c_0}{2s^4} \right] \frac{s^3}{\mu_p} \right\} + \\ + a_p \operatorname{csch} \frac{\mu_p}{s}, \quad p=1, 2, 3, \dots \quad (3.11) \end{aligned}$$

4. Функции  $\Phi_1(r, z)$  и  $\Phi_2(r, z)$  должны удовлетворять второму из условий (1.28), т. е.

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r}\right)_{r=s} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial r}\right)_{r=s}, \quad (0 < z < a) \quad (3.12)$$

Из формул (2.4) и (2.5) составляя равенство (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \frac{a}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)} \cdot \frac{\sin \frac{k\pi z}{a}}{k \cdot \Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \xi_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{s} + a_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k (a-z)}{s} \right] J_1(\mu_k) + (a_0 - b_0) s + \\ & + s \left[ \frac{b_0 - f_0}{a} \cdot \frac{R^4}{s^4} - 2R^2 c_0 \right] z + \frac{a}{\pi s} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sin \frac{k\pi z}{a}}{k \Delta\left(\frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right)} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} [f_k \operatorname{sh} \lambda_k z + b_k \operatorname{sh} \lambda_k (a-z)] \operatorname{csch} \lambda_k a \cdot W_1(\lambda_k s). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$0 < z < a$

Умножив тождество (3.13) на  $\frac{2}{a} \sin \frac{\rho\pi z}{a}$  и интегрируя по  $z$  в пределах  $(0, a)$ , получим:

$$\eta_p = (-1)^{p+1} \frac{2s}{a} \left(\frac{\rho\pi}{a}\right)^2 \Delta\left(\frac{\rho\pi R}{a}, \frac{\rho\pi s}{a}\right) \frac{I_2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{\rho\pi R}{a}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{J_1(\mu_k)}{\frac{\mu_k^2}{s^2} + \left(\frac{\rho\pi}{a}\right)^2} + S_p, \quad (3.14)$$

$(p = 1, 2, 3, \dots)$

где

$$\begin{aligned} S_p = & c_p \frac{I_2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{\rho\pi R}{a}\right)} + \frac{2s}{a} \Delta\left(\frac{\rho\pi R}{a}, \frac{\rho\pi s}{a}\right) \frac{I_2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{\rho\pi R}{a}\right)} \left\{ [1 + (-1)^{p+1}] (a_0 + b_0) s + \right. \\ & + (-1)^{p+1} \left[ (b_0 - f_0) \frac{R^4}{s^4} - \frac{2R^2 a c_0}{s^4} \right] s^4 + \left(\frac{\rho\pi}{a}\right)^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{J_1(\mu_k)}{\frac{\mu_k^2}{s^2} + \left(\frac{\rho\pi}{a}\right)^2} - \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k + (-1)^{p+1} f_k}{\lambda_k^2 + \left(\frac{\rho\pi}{a}\right)^2} W_1(\lambda_k s) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.8) и (3.11) для  $\xi_p$  и  $\eta_p$  получим:

$$\zeta_p \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s} \cdot J_1(\mu_p) \cdot s}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}} = \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} +$$

$$+ \frac{2\mu_p}{s} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-a)}{s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_k}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + G_p, \quad (p=1, 2, 3, \dots), \quad (3.16)$$

где

$$G_p = a_p \frac{s J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}} + 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-a)}{s}} \left\{ \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4s\mu_p} \left[ \frac{d_0 - \gamma_0}{c-b} (d^4 - s^4) - 2g_0 s^2 + 2h_0 d^2 \right] \right\} + \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p}{s^2}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{2a \cdot \mu_p} [(b_0 - f_0) (R^4 - s^4) + 2g_0 a s^2 - 2c_0 a R^2] + \beta_p \frac{s J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-a)}{s}}. \quad (3.17)$$

$$\eta_p \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p c}{s} \cdot s \cdot J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}} = \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} +$$

$$+ 2 \frac{\mu_p}{s} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{(-1)^{k-1}}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + D_p, \quad (p=1, 2, 3, \dots), \quad (3.18)$$

где

$$D_p = a_p \frac{s J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} + 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} \left\{ \frac{\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4a s \mu_p} [(b_0 - f_0) (R^4 - s^4) + 2a s^2 g_0 - 2R^2 a c_0] \right\} +$$

$$+ \frac{2\mu_p}{s} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{(-1)^{k+1}}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \frac{1}{2\mu_p \cdot s} \left[ \frac{d_0 - \gamma_0}{c-b} (d^4 - s^4) - 2g_0 s^2 + \right.$$

$$\left. + 2h_0 d^2 \right] + \beta_p \frac{s J_1(\mu_p)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}}. \quad (3.19)$$

Введем обозначения

$$\xi_p = \frac{s J_1(\mu_p) \operatorname{sh} \frac{\mu_p c}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s} (c-a)} = L_p, \quad (-1)^{k+1} a \eta_k = \alpha E_k, \quad (3.20)$$

$$\eta_p = \frac{s J_1(\mu_p) \operatorname{sh} \frac{\mu_p c}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-a)}{s}} = F_p, \quad (c-b) \zeta_k = \alpha H_k,$$

где  $\alpha > 0$  — подлежащая определению постоянная. Тогда бесконечные системы линейных уравнений (3.3), (3.14), (3.16) и (3.18) приведем к виду:

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} E_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} H_k + G_p, \quad p=1, 2, \dots, \quad (3.21)$$

$$F_p = \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} H_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{pk} E_k + D_p, \quad p=1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

$$E_p = \sum_{k=1}^{\infty} l_{pk} L_k + M_p, \quad p=1, 2, 3, \dots, \quad (3.23)$$

$$H_p = \sum_{k=1}^{\infty} q_{pk} F_k + N_p, \quad p=1, 2, 3, \dots, \quad (3.24)$$

где

$$a_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \quad (3.25)$$

$$b_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{s(c-b)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-b)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p (c-a)}{s}} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \quad (3.26)$$

$$c_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \quad (3.27)$$

$$d_{pk} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}, \quad (3.28)$$

$$I_{pk} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{\pi p}{a} \right)^2 \Delta \left( \frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a} \right) \frac{I_2 \left( \frac{p\pi s}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{p\pi R}{a} \right)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k (c-a)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \times \\ \times \frac{1}{\left( \frac{p\pi}{a} \right)^2 + \frac{\mu_k^2}{s^2}}, \quad (3.29)$$

$$Q_{pk} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{p\pi}{c-b} \right)^2 \Delta \left( \frac{p\pi d}{c-b}, \frac{p\pi s}{c-b} \right) \frac{I_2 \left( \frac{p\pi s}{c-b} \right)}{I_2 \left( \frac{p\pi d}{c-b} \right)} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k (c-b)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \times \\ \times \frac{1}{\left( \frac{p\pi}{c-b} \right)^2 + \frac{\mu_k^2}{s^2}}, \quad (3.30)$$

$$M_p = -\frac{\alpha}{z} (-1)^{p+1} S_p, \quad (3.31)$$

$$N_p = \frac{c-b}{a} R_p. \quad (3.32)$$

Совокупность четырех бесконечных систем линейных уравнений (3.21)–(3.24) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p, \quad (3.33)$$

если ввести обозначения

$$\begin{aligned} Z_{4p-3} &= L_p, & Z_{4p-2} &= F_p, & Z_{4p-1} &= E_p, & Z_{4p} &= H_p, \\ B_{4p-3} &= G_p, & B_{4p-2} &= D_p, & B_{4p-1} &= M_p, & B_{4p} &= N_p, \\ A_{4p-3, 4k-3} &= 0, & A_{4p-3, 4k-2} &= 0, & A_{4p-3, 4k-1} &= a_{pk}, & A_{4p-3, 4k} &= b_{pk}, \\ A_{4p-2, 4k-3} &= 0, & A_{4p-2, 4k-2} &= 0, & A_{4p-2, 4k-1} &= c_{pk}, & A_{4p-2, 4k} &= d_{pk}, \\ A_{4p-1, 4k-3} &= I_{pk}, & A_{4p-1, 4k-2} &= 0, & A_{4p-1, 4k-1} &= 0, & A_{4p-1, 4k} &= 0, \\ A_{4p, 4k-3} &= 0, & A_{4p, 4k-2} &= q_{pk}, & A_{4p, 4k-1} &= 0, & A_{4p, 4k} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

#### § 4. Исследования бесконечной системы линейных уравнений

Докажем, что введенное в обозначение (3.20) число  $\alpha > 0$  можно выбрать таким образом, чтобы система (3.33) была вполне регулярной.

Доказано [1], что совокупность свободных членов ограничена. Это дает возможность, пользуясь теорией бесконечных, вполне регу-

лярных систем линейных уравнений [5], решить систему (3.33) с заданной точностью, т. е. решить эффективно уравнение (1.2) кручения вада с кольцевой выточкой прямоугольной формы при граничных условиях (1.8).

Доказано [1], что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} = \frac{as}{2k\pi} \frac{I_2\left(\frac{k\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right)}; \quad (4.1)$$

$$0 < K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) - K_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) < I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right) K_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right); \quad (4.2)$$

при  $p=1, 2, 3, \dots$

Кроме того,

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1, \quad (0 \leq x \leq \infty). \quad (4.3)$$

Покажем, что при  $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  бесконечная система линейных уравнений (3.33) удовлетворяет условию вполне регулярности.

В силу обозначений (3.34) мы должны рассматривать отдельно четыре случая; заметив, что  $a \leq b < c$ , имеем:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3, k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3, 4k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-3, 4k}| = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| - \frac{2\mu_p \alpha}{as} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} + \\ &+ \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \cdot \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{(c-b)}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}} = \\ &= \alpha \left( c \operatorname{th} \frac{\mu_p a}{s} - \frac{s}{\mu_p a} \right) + \alpha \left[ c \operatorname{th} \frac{\mu_p}{s} (c-b) - \frac{s}{\mu_p (c-b)} \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \leq \\ &\leq \alpha \left[ 1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \right] \leq 2\alpha, \quad (4.4) \end{aligned}$$

в силу обозначений (3.25), (3.26), (3.34) и неравенства (4.3), причем использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left( \operatorname{cth} a\pi - \frac{1}{a\pi} \right) \quad (4.5)$$

и неравенство

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \leq 1.$$

В неравенстве (4.4) оценка справедлива и для предельного случая, когда  $a = b$ , т. е., когда выточка превращается в вырез (трещина).

$$\begin{aligned} 2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2, k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2, 4k-1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-2, 4k}| = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |c_{pk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |d_{pk}| = \frac{2\mu_p \alpha}{s(c-b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2} + \\ &+ \frac{2\mu_p \alpha}{as} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} a}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mu_p}{s}\right)^2} = \\ &= \alpha \left[ \operatorname{cth} \frac{\mu_p}{s} (c-b) - \frac{s}{\mu_p (c-b)} \right] \frac{1}{s} \alpha \left( \operatorname{cth} \frac{\mu_p}{s} a - \frac{s}{\mu_p a} \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} a}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} b} \leq \\ &\leq \alpha \left( 1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} a}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} b} \right) \leq 2\alpha, \quad (4.6) \end{aligned}$$

в силу обозначений (3.27), (3.28) и (3.34), аналогично предыдущему.

$$\begin{aligned} 3. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-1, k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} |I_{pk}| = \\ &= \frac{2}{\alpha} \left( \frac{\rho\pi}{a} \right)^2 \Delta \left( \frac{\rho\pi R}{a}, \frac{\rho\pi s}{a} \right) \frac{I_2 \left( \frac{\rho\pi s}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{\rho\pi R}{a} \right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \cdot \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} c} \times \\ &\times \frac{1}{\left( \frac{\rho\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{\mu_k}{s} \right)^2}. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Но

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \leq \frac{1}{2}, \quad (4.8)$$

и в силу неравенства (4.2)

$$\Delta \left( \frac{\rho \pi R}{a}, \frac{\rho \pi s}{a} \right) \cdot \frac{I_2 \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{\rho \pi R}{a} \right)} \leq I_2 \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right) K_2 \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right); \quad (4.9)$$

поэтому из (4,7), (4,8), (4,9) и (4.1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Lambda_{4p-1, 4k}| \leq \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right) I_2 \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right) K_2 \left( \frac{\rho \pi s}{a} \right). \quad (4.10)$$

Из теории бесселевых функций известно, что если  $n$  целое, то

$$K_n(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(nt) dt, \quad (4.11)$$

при  $x > 0$ ,

откуда ясно, что

$$K_n(x) \leq K_{n-1}(x), \quad \text{при } x > 0. \quad (4.12)$$

Далее

$$I_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 (\operatorname{ch}(x\xi) (1 - \xi^2)^{n-\frac{1}{2}} d\xi,$$

когда

$$R(n) > -\frac{1}{2}.$$

Поэтому, интегрируя последнее выражение по частям, получим

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \int_0^1 \operatorname{ch}(x\xi) (1 - \xi^2)^{n+\frac{1}{2}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \left(n+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n [\operatorname{sh}(x\xi) (1 - \xi^2)^{n+\frac{1}{2}}]_0^1 + \\ &\quad + 2 \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_0^1 \operatorname{sh}(x\xi) (1 - \xi^2)^{n-\frac{1}{2}} \xi d\xi = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \operatorname{sh}(x\xi)(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}} \xi d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \operatorname{ch}(x\xi)(1-\xi^2)^{n-\frac{1}{2}} d\xi = I_n(x),$$

т. е.

$$I_{n+1}(x) \leqslant I_n(x). \quad (4.13)$$

Из соотношения Вронского

$$I_{n+1}(x) K_n(x) + I_n(x) K_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \quad (4.14)$$

ввиду неотрицательности обоих слагаемых, используя неравенства (4.12) и (4.13), получим

$$K_n(x) I_{n+1}(x) \leqslant K_{n+1}(x) I_n(x), \quad (4.15)$$

откуда имеем

$$I_{n+1}(x) K_n(x) \leqslant \frac{1}{2x}. \quad (4.16)$$

В частном случае, когда  $n=2$ , из (4.16) следует

$$I_2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right) K_2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right) \leqslant \frac{1}{2\left(\frac{\rho\pi s}{a}\right)}. \quad (4.17)$$

Из (4.10) и (4.17) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-1, k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p-1, 4k-3}| \leqslant \frac{1}{4z}. \quad (4.18)$$

$$4. \quad \sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p, k}| = \sum_{k=1}^{\infty} |q_{pk}| =$$

$$= \frac{2}{z} \left(\frac{\rho\pi}{c-b}\right)^2 \Delta\left(\frac{\rho\pi d}{c-b}, \frac{\rho\pi s}{c-b}\right) I_2\left(\frac{\rho\pi s}{c-b}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\frac{\rho\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_k^2}{s^2}}. \quad (4.19)$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{4p, k}| \leqslant \frac{1}{4z}. \quad (4.20)$$

Для оценок (4.4), (4.6), (4.18) и (4.20), выбирая  $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{p,k}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

т. е. система (3.33) вполне регулярна.

Как было отмечено выше, совокупность свободных членов  $\{B_p\}$  системы (3.33) ограничена и стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$  (см. [1]).

$$B_p = O(p^{-\delta}), \quad (0 < \delta < 1), \quad \text{при } p \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

### § 5. Определение напряжений

1. При кручении вала напряжения определяются формулами (1.1). Используя обозначения (3.20), пользуясь формулами (1.1) и рекуррентными формулами бesselевых функций, из (2.1)–(2.5) получим: для области I (фиг. 1)

$$\begin{aligned} \tau_r(r, z) = & r^2 \frac{\gamma_0 - d_0}{4(c-b)} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{d_0 - \gamma_0}{4(c-b)} d^4 + \frac{h_0 d^2}{2} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_k \operatorname{ch} \gamma_k (c-z) - d_k \operatorname{ch} \gamma_k (z-b)] \frac{W_2(\gamma_k r)}{\operatorname{sh} \gamma_k (c-b)} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c \frac{z}{c-b} H_k \Delta \left( \frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi r}{c-b} \right) + h_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right) \right] \times \\ & \times \frac{\cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{\Delta \left( \frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right)}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_z(r, z) = & r \left[ \frac{\gamma_0 - d_0}{c-b} (c-z) + d_0 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} [d_k \operatorname{sh} \gamma_k (z-b) + \\ & + \gamma_k \operatorname{sh} \gamma_k (c-z)] \frac{W_1(\gamma_k r)}{\operatorname{sh} \gamma_k (c-b)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ c \frac{z}{c-b} H_k \Omega \left( \frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi r}{c-b} \right) - \right. \\ & \left. - h_k \Omega \left( \frac{k\pi r}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right) \right] \frac{\sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}}{\Delta \left( \frac{k\pi d}{c-b}, \frac{k\pi s}{c-b} \right)}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

для области II

$$\tau_r(r, z) = r^2 \left[ \frac{d_0 - \gamma_0}{4(c-b)s^4} (d^4 - s^4) + \frac{h_0 d^2}{2s^4} \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \beta_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} (z-b) - F_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} (c-z) \right] \times$$

$$\times \frac{J_2\left(\mu_k \frac{r}{s}\right)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)} + \frac{\alpha}{c-b} \sum_{k=1}^{\infty} H_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)} \cos \frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \quad (5.3)$$

$$\tau_z(r, z) = r \left\{ \left[ \frac{2h_0 d^2}{s^4} + \frac{d_0 - \gamma_0}{(c-b)s^4} (d^4 - s^4) \right] (c-z) + \beta_0 \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \beta_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (z-b) + F_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-z) \right] \frac{J_1\left(\frac{\mu_k}{s} r\right)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)}$$

$$- \frac{\alpha}{c-b} \sum_{k=1}^{\infty} H_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{c-b}\right)} \sin \frac{k\pi(z-b)}{c-b}; \quad (5.4)$$

для области III

$$\tau_r(r, z) = \frac{r^2 g_0}{2s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ L_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a) \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} (b-z) - \right.$$

$$- F_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b) \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} (z-a) \left. \right] \frac{J_2\left(\frac{\mu_k}{s} r\right)}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (b-a)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{b-a}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi s}{b-a}\right)} \cos \frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \quad (5.5)$$

$$\tau_z(r, z) = r \left[ \beta_0 + \frac{2h_0 d^2 (c-b)}{s^4} + \frac{d_0 - \gamma_0}{s^4} (d^4 - s^4) + \frac{2g_0 (b-z)}{s^2} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ L_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (c-a)}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (b-z)}{s} + \right. \\
& \left. + F_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (c-b)}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k (z-a)}{s} \right] \frac{J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right)}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (b-a)} - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{I_1 \left( \frac{k\pi r}{b-a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi r}{b-a} \right)} \sin \frac{k\pi(z-a)}{b-a}; \quad (5.6)
\end{aligned}$$

для области IV

$$\begin{aligned}
\tau_1(r, z) &= r^2 \left[ \frac{R^2 c_0}{2s^4} - \frac{b_0 - f_0}{4as^4} (R^4 - s^4) \right] - \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ L_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a)}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} \operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} z - a_k \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k}{s} (a-z)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s}} \right] \times \\
& \times J_2 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) + \frac{z}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} E_k \frac{I_2 \left( \frac{k\pi r}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{a} \right)} \cos \frac{k\pi z}{a}; \quad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2(r, z) &= r \left\{ \left[ \frac{b_0 - f_0}{s^4} (R^4 - s^4) - \frac{2R^2 a c_0}{s^4} \right] \frac{z}{a} + a_0 \right\} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ L_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k (c-a)}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} z}{s \cdot J_1(\mu_k) \operatorname{sh} \frac{\mu_k c}{s}} + a_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k (a-z)}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s}} \right] J_1 \left( \frac{\mu_k}{s} r \right) - \\
& - \frac{z}{a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} E_k \frac{I_1 \left( \frac{k\pi r}{a} \right)}{I_2 \left( \frac{k\pi s}{a} \right)} \sin \frac{k\pi z}{a}; \quad (5.8)
\end{aligned}$$

для области V

$$\begin{aligned}
\tau_3(r, z) &= r^2 \frac{b_0 - f_0}{4a} - \frac{1}{r^2} [(b_0 - f_0)R^2 - 2ac_0] \frac{R^2}{4a} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \operatorname{ch} \lambda_k (a-z) - f_k \operatorname{ch} \lambda_k z] \frac{W_2(\lambda_k r)}{\operatorname{sh} \lambda_k a} \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^{k+1} \frac{z}{a} E_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a} \right) - c_k \Delta \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right) \right] \frac{\cos \frac{k\pi z}{a}}{\Delta \left( \frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right)}; \\
 \tau_z(r, z) = & r \left( \frac{i_0 - b_0}{a} z + b_0 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} [i_k \operatorname{sh} \lambda_k z + b_k \operatorname{sh} \lambda_k (a - z)] \times \\
 & \times \frac{W_1(\lambda_k r)}{\operatorname{sh} \lambda_k r} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (-1)^{k+1} \frac{z}{a} E_k \Omega \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi R}{a} \right) - \right. \\
 & \left. - c_k \Omega \left( \frac{k\pi r}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right) \right] \frac{\sin \frac{k\pi z}{a}}{\Delta \left( \frac{k\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a} \right)} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

В (5.2) и (5.10) введено обозначение

$$\Omega(x, y) = I_1(x) K_2(y) + K_1(x) I_2(y).$$

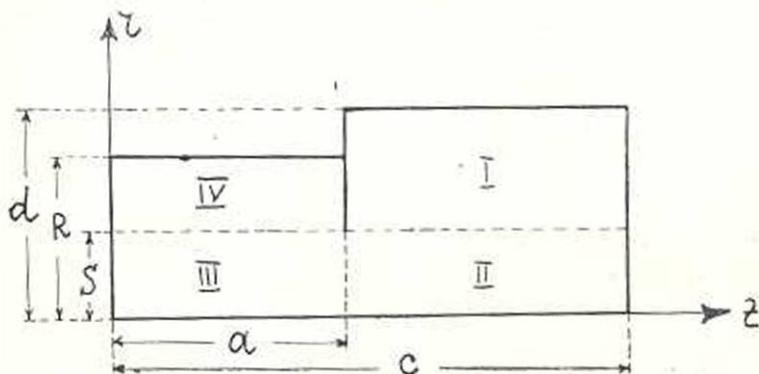
Формулами (5.1)–(5.10) определяются напряжения в любой точке осевого сечения.

### § 6. Предельный случай, когда выточка превращается в трещину

1. Когда  $a=b$ , то выточка превращается в трещину (фиг. 2) и формулы, полученные выше, упрощаются. Предположим, что и на контурах трещины действует внешняя нагрузка. В этом случае область III (фиг. 1) исчезает и потому функцию  $\Phi_3(r, z)$  не будем рассматривать.

Так как  $a=b$ , то

$$\varphi_1(z) = 0 \quad (6.1)$$



Фиг. 2.

тождественно, и коэффициенты разложения (1.9) для  $\varphi_i(z)$

$$g_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.2)$$

При  $a=b$  из (1.30) и (1.31) следует, что

$$b_k = \xi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.3)$$

и в силу (3.20)

$$L_p = F_p \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (6.4)$$

Кроме того, бесконечные системы линейных уравнений (3.21) и (3.22) становятся тождественными, т. е.

$$\begin{aligned} a_{pk} &= d_{pk}, & c_{pk} &= b_{pk}, \\ \bar{G}_p &= D_p. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Тогда бесконечные системы линейных уравнений (3.21), (3.23) и (3.24) принимают следующий вид:

$$L_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} E_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} H_k + G_p; \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (6.6)$$

$$E_p = \sum_{k=1}^{\infty} l_{pk} L_k + M_p; \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.7)$$

$$H_p = \sum_{k=1}^{\infty} q_{pk} L_k + N_p; \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.8)$$

В формулах (3.25)–(3.32) и (3.17) для значений  $a_{pk}$ ,  $b_{pk}$ ,  $l_{pk}$ ,  $q_{pk}$ ,  $G_p$ ,  $M_p$  и  $N_p$  надо иметь в виду (6.2).

Совокупность трех бесконечных систем уравнений (6.6)–(6.8) можно привести к одной системе

$$Z_p = \sum_{k=1}^{\infty} A_{pk} Z_k + B_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.9)$$

если ввести обозначения, аналогичные (3.34).

Вполне регулярность системы (6.9) доказана выше.

Напряжения в любой точке осевого сечения вала определяются соотношениями (5.1)–(5.10). При этом, в силу равенства  $a=b$  и согласно (6.2)–(6.5), эти соотношения упрощаются.

Заметим, что в угловых точках у выточки будет наблюдаться концентрация напряжений [6].

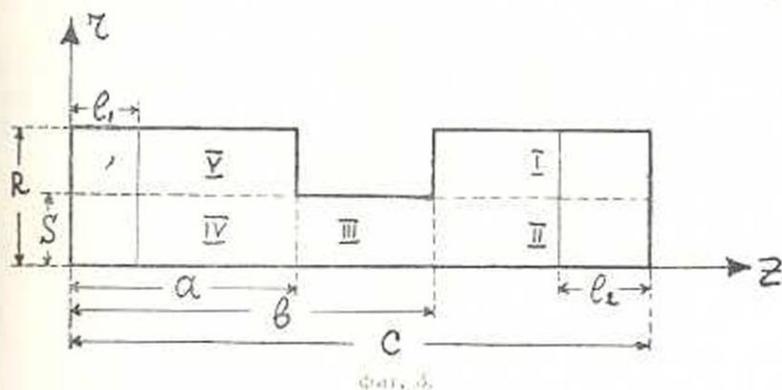
## § 7. Вал с кольцевой выточкой прямоугольной формы, скручиваемый моментами, равномерно распределенными на двух участках боковой поверхности

1. Рассмотрим случай, когда  $d = R$ . Пусть нагрузка приложена на участках длины  $l_1$  и  $l_2$  по концам вала по следующему закону:

$$\begin{aligned}
 \tau_z(r, 0) &= 0, & (0 \leq r \leq R) \\
 \tau_r(R, z) &= -T_1, & (0 \leq z \leq l_1) \\
 \tau_r(R, z) &= 0, & (l_1 \leq z \leq a) \\
 \tau_z(r, a) &= 0, & (s \leq r \leq R) \\
 \tau_r(s, z) &= 0, & (a \leq z \leq b) \\
 \tau_r(r, b) &= 0, & (s \leq r \leq R) \\
 \tau_r(R, z) &= 0, & (b \leq z \leq c - l_2) \\
 \tau_r(R, z) &= T_2, & (c - l_2 \leq z \leq c) \\
 \tau_z(r, c) &= 0, & (0 \leq r \leq R)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

На оси вала должно выполняться условие

$$\tau_z(0, z) = \tau_r(0, z) = 0. \tag{7.2}$$



Пользуясь разложениями (1.9) и (1.10), имеем

$$a_k = b_k = f_k = \gamma_k = \beta_k = d_k = g_k = 0; \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \tag{7.3}$$

$$c_0 = -\frac{2T_1 l_1}{a}; \quad c_k = -\frac{2T_1}{k\pi} \sin \frac{k\pi l_1}{a}; \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{7.4}$$

$$h_0 = \frac{2T_2 l_2}{c-b}; \quad h_k = \frac{2T_2}{k\pi} (-1)^k \sin \frac{k\pi l_2}{c-b}; \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{7.5}$$

Коэффициенты из (7.3), (7.4) и (7.5) должны удовлетворять условию (1.18), т. е. уравнению равновесия крутящих моментов, откуда получим

$$T_1 l_1 = T_2 l_2. \tag{7.6}$$

Подставив коэффициенты (7.3)–(7.5) в (3.25)–(3.32) и имея в виду (3.34), для бесконечной системы (3.33) будем иметь

$$A_{1p-3, 4k-1} = \frac{2\mu_p z}{as} \frac{1}{\frac{k^2 \pi^2}{a^2} + \frac{\mu_p^2}{s^2}} \tag{7.7}$$

$$A_{4p-1, k} = \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \cdot \frac{1}{\frac{k^2 \pi^2}{(c-b)^2} + \frac{\mu_p^2}{s^2}}; \quad (7.8)$$

$$A_{4p-2, k} = \frac{2\mu_p \alpha}{(c-b)s} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}; \quad (7.9)$$

$$A_{4p-2, k} = \frac{2\mu_p \alpha}{as} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{c-b}\right)^2 + \frac{\mu_p^2}{s^2}}; \quad (7.10)$$

$$A_{4p-1, k} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 \Delta \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{k\pi s}{a}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_k a}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-a)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{a}\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} c} \times \\ \times \frac{1}{\frac{\mu_k^2}{s} + \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2}; \quad (7.11)$$

$$A_{4p, k} = \frac{2}{\alpha} \left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2 \Delta \left(\frac{p\pi R}{c-b}, \frac{p\pi s}{c-b}\right) \times \\ \times \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_k b}{s} \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} (c-b)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{c-b}\right) \operatorname{sh} \frac{\mu_k}{s} c} \cdot \frac{1}{\frac{\mu_k^2}{s^2} + \left(\frac{p\pi}{c-b}\right)^2}; \quad (7.12)$$

$$B_{4p-2} = \frac{2R^2 T_1 I_1}{s \mu_p} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{c-b} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-b)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p}{s} (c-a)} \right]; \quad (7.13)$$

$$B_{4p-2} = \frac{2R^2 T_1 I_1}{s \mu_p} \left[ \frac{1}{c-b} + \frac{1}{a} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_p a}{s}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_p b}{s}} \right]; \quad (7.14)$$

$$B_{4p-1} = \left[ \frac{2a}{\alpha} (-1)^p \frac{T_1}{p\pi} \sin \frac{p\pi l_1}{a} + \frac{8T_1 I_1 R^2}{\alpha s^2} \Delta \left(\frac{p\pi R}{a}, \frac{p\pi s}{a}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{a}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{a}\right)} \right]; \quad (7.15)$$

$$B_{4p} = \left[ \frac{2(c-b)}{\alpha} (-1)^p \frac{T_1}{p\pi} \sin \frac{p\pi l_2}{c-b} + \right. \\ \left. + \frac{8T_1 I_1 R^2}{\alpha s^2} \Delta \left(\frac{p\pi R}{c-b}, \frac{p\pi s}{c-b}\right) \frac{I_2\left(\frac{p\pi s}{c-b}\right)}{I_2\left(\frac{p\pi R}{c-b}\right)} \right]; \quad (7.16)$$

2. В качестве численного примера рассмотрим вал с кольцевой выточкой прямоугольной формы, с размерами

$$s = \frac{5}{6}R, \quad a = \frac{119}{12}R, \quad b = \frac{121}{12}R, \quad c = 20R,$$

т. е., когда выточка имеет квадратичную форму со сторонами  $\frac{1}{6}R$ .

Примем  $L_1 = L_2 = R$ .

Для этого случая  $c = a + b$ . Подставляя в (7.7)–(7.16), получим

$$A_{4p-3, 4k-1} = A_{4p-2, 4k-1}, \quad A_{4p-3, 4k} = A_{4p-2, 4k}.$$

$$A_{4p-1, 4k-3} = A_{4p, 4k-2}, \quad B_{4p-3} = B_{4p-2}, \quad B_{4p-1} = B_{4p}.$$

Отсюда следует, что

$$Z_{4p-3} = Z_{4p-2} \text{ и } Z_{4p-1} = Z_{4p}, \text{ т. е. } L_p = F_p \text{ и } E_p = H_p. \quad (4.17)$$

В данном случае все коэффициенты и свободные члены бесконечной системы линейных уравнений (3.33) положительные числа.

Так как

$$|B_p| \leq \max \{|B_{4p-3}|, |B_{4p-2}|, |B_{4p-1}|, |B_{4p}|\}, \quad p=1, 2, \dots$$

то

$$|B_p| \leq 6.69276RT, \quad (7.18)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_{pk}| \leq 0.58267. \quad (7.19)$$

Пользуясь теорией вполне регулярных систем линейных уравнений [5], получим следующие оценки для неизвестных

$$\begin{aligned} 0,18094RT &\leq L_1 \leq 3,25657RT, \\ 0,10379RT &\leq L_2 \leq 2,88106RT, \\ 0,28267RT &\leq E_1 \leq 0,29269RT, \\ 6,44253RT &\leq E_2 \leq 6,50555RT, \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$G_k \leq L_k \leq 5,78558RT, \quad k=3, 4, 5, \dots$$

$$M_k \leq E_k \leq 5,78558RT, \quad k=3, 4, 5, \dots$$

$$F_k = L_k, \quad H_k = E_k, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Пользуясь определенными значениями коэффициентов (7.3) и (7.4), напряжения найдем из формул (5.1)–(5.10).

Подставляя найденные значения неизвестных коэффициентов  $L_k$ ,  $E_k$ ,  $F_k$  и  $H_k$  с избытком и с недостатком, определим верхнюю и нижнюю границы напряжений  $\tau_+$  и  $\tau_-$ .

Некоторые значения напряжений  $\tau_+$  и  $\tau_-$  приведены в таблице 1.

Таблица 1

$\frac{r}{s}$		0	0,5	1	1,2
$\frac{\tau_z \left( r, \frac{a+b}{2} \right)}{T}$	с избытком	0	4,516	17,65	—
	с недостатком	0	3,376	7,12	—
$\frac{\tau_z \left( r, \frac{a+2b}{2} \right)}{T}$	с избытком	0	1,901	4,624	3,83
	с недостатком	0	1,633	3,255	3,68
$\frac{\tau_r \left( r, \frac{a+b}{2} \right)}{T}$		0	0	0	0
$\frac{\tau_r \left( r, \frac{a+2b}{2} \right)}{T}$		0	0,033	0,118	0

Ереванский государственный  
университет им. В. М. Молотова

Поступило 2 VII 1953

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Абрамян Б. Я., Джрбашян М. М.* О кручении валов переменного сечения. П. М. М., 1951. т. XV, в. 4.
2. *Соляник-Красса К. В.* Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
3. *Грей Э., Метьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Гостехиздат, М., 1949.
5. *Кайторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., 1949.
6. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. Гостехиздат, М.—Л., 1947.

#### Բ. Յ. Կոստանդյան

### ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՁԵՎԻ ՕՂԱԿԱԶԵՎ ՓՈՐՎԱԾՔՈՎ ԳԼԱՆԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ԽՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

#### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է ուղղանկյան ձևի օղակաձև փորվածքով գլանի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը կամայական սիմետրիկ բաշխված ընտրի դեպքում:

Կիրառելով օժանդակ ֆունկցիաների ներմուծման մեթոդը, խնդրի լուծումը բերվում է անվերջ, լիտվին սեզուլյար, գծային համաստրումների սիստեմի լուծմանը: Մտացված բանաձևերով, որոնք կախված են գլանի երկրաչափական պարամետրերից, որոշվում են ոլորման ժամանակ լարում-

ներքի Առանձին գիտված է սանձանային դեպքը, երբ փորվածքը դառնում է ձեղք:

Որպես օրինակ ուսումնասիրված է քառակուսային ձևի փորվածքով գլանի սլորումը, երբ փորվածքը տեղափոխված է գլանի երկարությամբ կենտրոնում, իսկ սլորոց բևուռ նախասարաչափ բաշխված է գլանի կողմնային մակերևույթի երկու անդամաներում:

Մասցված են իվային արդյունքներ, որոնք բերված են աղյուսակում:

Սչխատանքը կատարված է պրոֆ. Մ. Մ. Ջրբաշյանի ղեկավարությամբ:

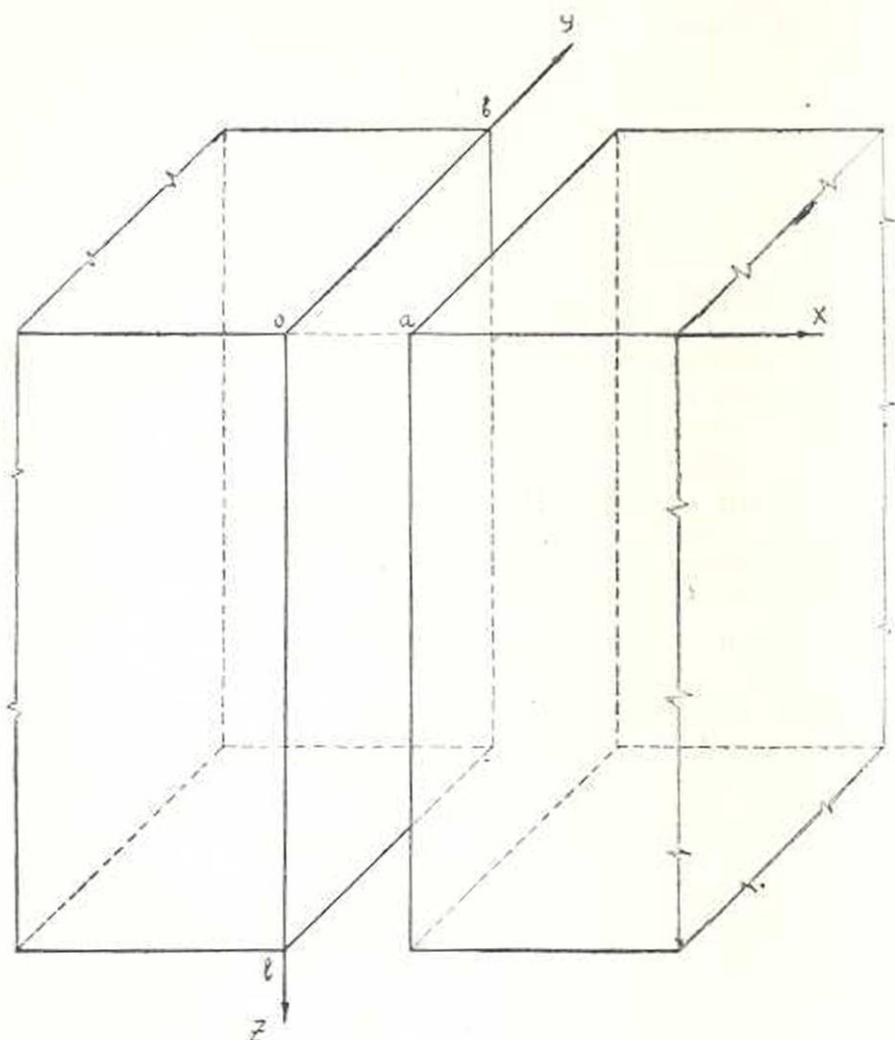
Г. С. Саакян

## О светосиле магнитного спектрометра

Магнитный спектрометр Алиханяна—Алиханова является одним из удобных приборов для измерения абсолютных интенсивностей различных компонент космического излучения, как функций импульсов частиц, составляющих эти компоненты. Однако не все частицы, падающие на установку, обязательно регистрируются. По ряду причин, вероятность регистрации частиц меньше единицы. Установка вносит искажения и получаемая в эксперименте картина не всегда правильно отражает существующее положение в природе. Величина этой вероятности является функцией геометрических параметров установки, напряженности магнитного поля, направления и величины импульса частиц, падающих на прибор, и физических свойств регистрирующей системы. Таким образом, интенсивности потока частиц космического излучения, наблюдаемые в экспериментах с магнитным спектрометром, всегда меньше истинных интенсивностей. Из сказанного следует, что будут искажаться также и импульсные спектры частиц.

Целью настоящей работы является вычисление истинных интенсивностей и спектров частиц по наблюдаемым, т. е. вычисление вероятности регистрации заряженных частиц, падающих на установку магнитного спектрометра. Часть затронутых здесь вопросов рассмотрена в работе [1]. Здесь дается другой подход к решению этих вопросов, а также получены новые формулы, не содержащиеся в цитированной работе.

1. *Дифференциальная вероятность регистрации.* На фиг. 1 приведено схематическое изображение основной части магнитного спектрометра. Выберем систему координат с плоскостью YOZ, совпадающей с поверхностью левого полюса магнита, и направлениями осей так, как это показано на фигуре. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $l$ —размеры поля соответственно по осям X, Y и Z. Точнее,  $a$ —расстояние между рядами „торцовых“ счетчиков, расположенных на полюсах магнита с осями счетчиков, параллельных оси Y. Эти счетчики предназначены для исключения случаев рассеяния частиц на полюсах магнита;  $l$ —расстояние между верхними и нижними координатными рядами счетчиков, оси которых параллельны силовым линиям поля, т. е. направлению X. Счетчики верхнего ряда расположены у верхней границы поля и отмечают координаты частицы при ее входе в поле, а счетчики нижнего ряда расположены на нижней границе поля и отмечают



Фиг. 1. Магнит и выбор системы координат.

координаты частицы в момент ее выхода из поля. Для определения траектории частицы в магнитном поле, кроме указанных рядов, имеется еще один или два горизонтальных ряда счетчиков, расположенных в самом магнитном поле. Наконец,  $b$ —ширина этих координатных рядов счетчиков, задающих размер поля по оси  $Y$ .

Траектория заряженной частицы в магнитном поле определяется уравнениями движения

$$x'' = 0, \quad y'' = \omega z', \quad z'' = \omega y'. \quad (1)$$

где  $\omega = \frac{e\hbar N}{E}$ ,  $e$  и  $E$ —заряд и полная энергия частицы,  $c$ —скорость света и  $N$ —напряженность магнитного поля, которое предполагается однородным ( $H_x = N$ ,  $H_y = H_z = 0$ ). Пусть начальные условия таковы, что при  $t = 0$  частица находилась в точке  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$  и имела ком-

поненты скорости  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ . Решения уравнений (1) с указанными начальными условиями суть

$$\begin{aligned} y &= y_0 + R[\cos \alpha - \cos(\omega t + \alpha)], \\ z &= R[\sin(\omega t + \alpha) - \sin \alpha], \\ x &= x_0 + v_x \cdot t, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R = \frac{1}{\omega} \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = \frac{1}{eH} \sqrt{p_y^2 + p_z^2}$  — радиус кривизны траектории частиц в магнитном поле,  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  — компоненты импульса частиц при  $t=0$ ,

$$\alpha = \arcsin \frac{p_y}{\sqrt{p_y^2 + p_z^2}}. \quad (3)$$

Под импульсом частицы здесь подразумевается обычный импульс, умноженный на скорость света.

Из уравнений (2), исключая время, находим

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{p_x}{eH} \left[ \arcsin \left( \sin \alpha + \frac{z}{R} \right) - \alpha \right], \\ y &= y_0 - R \left[ \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{z}{R} \right)^2} - \cos \alpha \right], \\ t &= \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \sin \alpha + \frac{z}{R} \right) - \alpha \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Для простоты рассмотрим частицы определенного заряда, а именно такие, которые в магнитном поле вращаются против часовой стрелки, если смотреть вдоль положительного направления оси X. Это будет иметь место для частиц положительного заряда, так что  $\omega = \frac{eH}{E} > 0$ .

Так как вероятность регистрации частиц не зависит от знака их заряда, то полученные формулы в равной мере будут относиться и к частицам противоположного заряда, которые в магнитном поле вращаются по часовой стрелке.

Пока предположим, что частицы, падающие на каждый ряд координатных счетчиков, регистрируются с вероятностью достоверного события. Тогда нахождение вероятности регистрации сводится к вычислению вероятности события одновременного прохождения заряженных частиц через ряды координатных счетчиков, расположенных соответственно на плоскостях  $z=0$  (верхняя граница поля) и  $z=l$  (нижняя граница поля). Здесь мы имеем дело с двумя независимыми событиями. Первое из них состоит в незадевании частицы полюсов магнита или, точнее, горцовых счетчиков. Вероятность этого события обозначим  $w_1$  и будем называть вероятностью регистрации по оси X. Второе событие состоит в том, чтобы частица при ее движении от

плоскости  $z=0$  к плоскости  $z=l$  не выходила из поля. Вероятности этого события обозначим  $w_2$  и будем называть вероятностью регистрации по оси  $Y$ . Таким образом, вероятность регистрации частицы равна произведению  $w_1 \cdot w_2$ , и задача сводится к вычислению функций  $w_1$  и  $w_2$ .

Как уже говорилось, одним из необходимых условий регистрации частицы является ее незадевание полюсов магнита. Это условие однозначно выражается неравенствами

$$0 \leq x_0 \leq a \quad \text{и} \quad 0 \leq x(\tau) \leq a, \quad (5)$$

где  $x(\tau)$  — координата частицы при выходе из поля

$$x(\tau) = x_0 + v_x \tau,$$

а  $\tau$  — время пролета частицы через поле

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right) - \alpha \right] = \\ &= \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{p_x (p_y + eHl) - p_y \sqrt{p_x^2 - 2eHl p_y - e^2 H^2 l^2}}{p_y^2 + p_x^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

В магнитных спектрометрах, применяемых в экспериментах с космическими лучами, расстояние  $a$  между полюсами обычно значительно меньше высоты  $l$  полюсов магнита. Поэтому для всех регистрируемых частиц  $p_x^2 \ll p_y^2 + p_x^2$  и, следовательно,  $p_y^2 + p_x^2 \approx p_y^2$ . При выполнении этого условия формулу (6) можно переписать так:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{p_x (p_y + eHl) - p_y \sqrt{p^2 - (p_y + eHl)^2}}{p^2}. \quad (6')$$

При  $v_x > 0$  из требования одновременного выполнения условий (5) следует

$$0 \leq x_0 \leq a - v_x \tau > 0, \quad (7)$$

При  $v_x < 0$  из (5) следует

$$|v_x| \tau \leq x_0 \leq a. \quad (7')$$

Таким образом, чтобы частица при движении нигде не задевала полюса магнита, необходимо и достаточно, чтобы координата  $x_0$  удовлетворяла неравенствам (7) и (7'). Эти ограничения утверждают одно и то же, а именно, что от всей длины  $a$  верхнего ряда счетчиков эффективна в смысле регистрации частиц только ее часть, равная  $a - |v_x| \cdot \tau$ . При попадании частиц на остальную часть длины счетчиков, равную  $|v_x| \cdot \tau$ , они ударяются о полюса магнита, не доходя до нижнего ряда координатных счетчиков, и поэтому не регистрируются установкой. Таким образом, вероятность регистрации  $w_1$  по направле-

нию оси  $x$  равна отношению эффективной длины счетчиков  $a - v_x | \tau$  к их полной длине  $a$

$$w_1 = 1 - \frac{c\tau |p_x|}{aE} \quad (8)$$

Отсюда видно, что для регистрируемых частиц  $p_x$  может изменяться в пределах

$$-\frac{aE}{c\tau} \leq p_x \leq \frac{aE}{c\tau} \quad (9)$$

Перейдем к рассмотрению условий регистрации частиц в плоскости YOZ. На фиг. 2 изображены типичные траектории частиц в магнитном поле, вращающихся против часовой стрелки. У всех кривых радиус кривизны один и тот же. В случаях б) и в) координата  $y$ , при значениях  $z$ , находящихся в интервале  $0 \leq z \leq l$ , имеет минимум (для частиц обратного знака заряда, наоборот,  $y$  имеет максимум). В случае б) минимум координаты  $y$  имеет место при  $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ , а в случае

в) — при  $0 \leq z \leq \frac{1}{2}l$ . В случае а) частица падает на установку справа от вертикали и с возрастанием  $z$  координата  $y$  монотонно убывает. Наконец, в случае з) частица падает на установку слева от вертикали и с возрастанием  $z$  координата  $y$  монотонно растет. Во всех этих случаях рассматривается поток частиц с параллельными проекциями траекторий на плоскость YOZ.

В случае б) от всей ширины координатного ряда счетчиков OA работает лишь отрезок EA, который равен минимальному значению  $y$  для проекции траектории, проходящей через точку A с координатами  $y=b, z=0$ . Для уравнения проекции этой кривой из (4) имеем

$$y = b - R \left[ \sqrt{1 - \left( \sin z + \frac{z}{R} \right)^2} - \cos z \right].$$

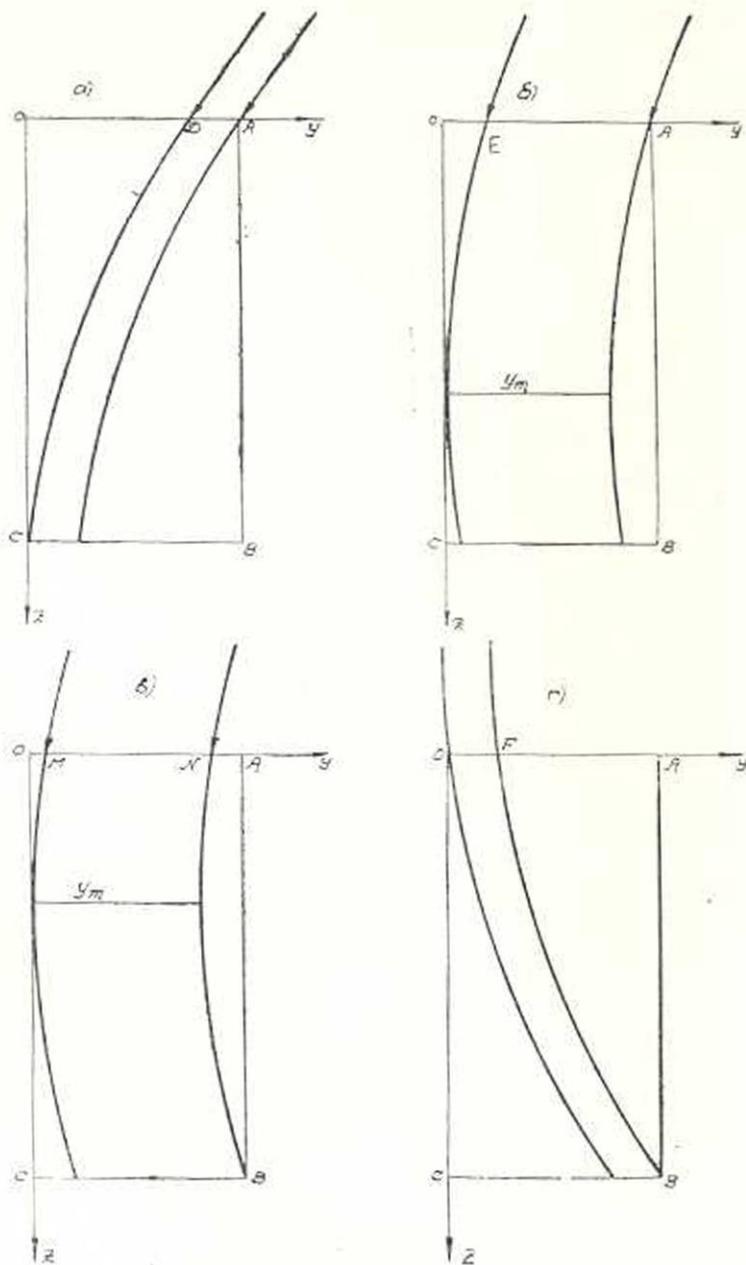
Отсюда находим, что при значениях  $z$ , равных

$$z_m = -R \sin z = -\frac{Ry}{eH} \quad (10)$$

$y$  имеет минимум, равный  $y_m = b - R(1 - \cos z)$ . Частицы, падающие на отрезок OE, не будут регистрироваться, поэтому отношение  $y_m = EA$  к полной ширине  $OA = b$  есть вероятность регистрации  $w_2$  для рассматриваемых типов траекторий частиц

$$w_2 = 1 - \frac{R}{b} (1 - \cos z) \approx 1 - \frac{p - p_x}{eHb}$$

Эта формула верна только для тех случаев, когда  $\frac{l}{2} \leq z_m \leq l$ , что вместе с (10) дает



Фиг. 2. Типичные проекции траекторий на плоскость YOZ для регистрируемых частиц.

$$-e/H \leq p_y \leq -\frac{1}{2} e/H. \quad (12)$$

Итак, вероятность  $w_2$  в области значений  $p_y$ , указанной в (12), выражается формулой (11).

Для дальнейшего необходимо определить также область допустим-

ных значений  $p_y$  при заданном импульсе  $p$ . Однако мы предпочитаем этот вопрос рассмотреть после изучения всех четырех случаев.

В случае *a*) от всего пучка параллельных частиц, падающих на весь ряд счетчиков, установка выделяет и регистрирует только его часть, охватывающую отрезок  $DA$ , тогда как частицы, падающие на отрезок  $OD$ , не регистрируются. Длина отрезка  $DA$  равна разности координат проекций траекторий частиц на плоскость  $YOZ$ , проходящих через точки  $A(y=b, z=0)$  и  $C(y=0, z=l)$ . Из (4) находим

$$DA = b - R \left[ \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right)^2} - \cos \alpha \right] = \\ = b - \frac{1}{eH} \left[ \sqrt{p_z^2 - 2eHl p_y - e^2 H^2 l^2} - p_z \right].$$

Отношение длины отрезков  $DA$  и  $OA$  дает вероятность  $w_2$  для рассматриваемых типов траекторий частиц.

$$w_2 = 1 - \frac{\sqrt{p_z^2 - 2eHl p_y - e^2 H^2 l^2} - p_z}{eHb} \approx 1 - \frac{\sqrt{p^2 - (p_y + eHl)^2} - p_z}{eHb}. \quad (13)$$

Чтобы найти область применения полученной формулы, представим, что однородное поле занимает все полупространство ниже плоскости  $z=0$ . Тогда в рассматриваемом случае  $y$  имел бы минимум при

$$z_m = \frac{p_y}{eH} \gg l. \text{ Следовательно, формула (13) верна лишь при}$$

$$p_y \leq -eHl.$$

Компонента импульса  $p_y$  снизу также ограничена. Ее нижняя граница определяется из требования  $w_2 \geq 0$ , которое дает  $p_y \geq -0,5eHl - \gamma$ , где

$$\gamma = b \sqrt{\frac{p^2}{l^2 + b^2} - \frac{1}{4} e^2 H^2}. \quad (14)$$

При получении этого условия предполагалось  $\sqrt{p_y^2 + p_z^2} \approx p$ . Таким образом, область допустимых значений  $p_y$  в формуле (13) определяется неравенством

$$-0,5eHl - \gamma \leq p_y \leq -eHl. \quad (15)$$

В случае *b*) для всего пучка частиц, падающих на первый ряд координатных счетчиков под заданным углом  $\alpha$ , от всей ширины  $OA$  этого ряда действует только часть ее, а именно отрезок  $MN$ . Длина этого отрезка равна минимальному значению  $y$ , принадлежащему проекции траектории, проходящей через точку  $B(y=b, z=l)$ . Для этой кривой из (4) имеем

$$y = b + R \left[ \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right)^2} - \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{z}{R} \right)^2} \right].$$

Отсюда получаем, что при

$$z_m = -R \sin \alpha = -\frac{p_y}{eH} \quad (10)$$

у имеет минимум, равный  $y_m = b - R \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right)^2} \right]$ . Отношение  $y_m = MN$  и АО дает вероятность  $w_2$

$$w_2 = 1 - \frac{p - \sqrt{p^2 - (p_y + eHl)^2}}{eHb} \quad (16)$$

Эта формула относится к случаям, когда  $0 \leq z_m \leq \frac{1}{2}l$ , поэтому она верна лишь для  $p_y$ , принадлежащих к области

$$-0,5 eHl \leq p_y \leq 0. \quad (17)$$

В случае 2) регистрируются только частицы, падающие на отрезок OF, длина которого равна разности координат у, принадлежащих траекториям частиц, проходящих через точки с координатами  $y = b, z = l$  и  $y = z = 0$ . Из (4) получаем:

$$OF = b - R \left[ \cos \alpha - \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right)^2} \right].$$

Отсюда вероятность  $w_2$  для рассматриваемых типов траекторий равна

$$w_2 = 1 - \frac{R}{b} \left[ \cos \alpha - \sqrt{1 - \left( \sin \alpha + \frac{l}{R} \right)^2} \right] \approx 1 - \frac{p - \sqrt{p^2 - (p_y + eHl)^2}}{eHb} \quad (18)$$

Случай 2) получается из 1) непрерывным возрастанием угла  $\alpha = \arcsin \frac{p_y}{\sqrt{p_y^2 + p_z^2}}$ , поэтому, имея в виду (17), приходим к заключению, что формула (18) относится к случаям  $p_y \geq 0$ . Верхняя граница допустимых значений  $p_y$  определяется из условия  $w_2 > 0$ , которое дает  $p_y \leq -0,5 eHl + \gamma$ . Следовательно, формула (18) относится к значениям  $p_y$ , находящимся в интервале

$$0 \leq p_y \leq -0,5 eHl + \gamma. \quad (19)$$

Итак, сопоставляя все четыре случая и учитывая формулы (15) и (19), приходим к заключению, что при импульсах  $p > eH \frac{b^2 + l^2}{2b}$  для регистрируемых частиц допустимые значения  $p_y$  находятся в интервале

$$-0,5 eHl - \gamma \leq p_y \leq -0,5 eHl + \gamma, \quad (20)$$

причем в разных интервалах значений  $p_y$ , указанных в (15), (12), (17)

и (19), вероятность  $w_2$  выражается соответственно формулами (13), (11), (16) и (18), которые при переходе из одного интервала к другому плавно переходят одна в другую. Наоборот, при импульсах  $p \leq eH \frac{b^2 + l^2}{2b}$  встречаются только случаи б) и в). Тогда область допустимых значений  $p_y$  при заданном  $p$  определяется из условия  $y_m \geq 0$  (т. е.  $w_2 \geq 0$ ), смысл которого становится ясным, если мы обратимся к фиг. 2 и рассмотрим предельные траектории с  $y_m = 0$ . Применение этого условия к случаю б) дает

$$p_y \geq -eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1},$$

а в случае в) оно дает

$$p_y \leq -eHl + eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}.$$

Таким образом, при импульсах  $p \leq eH \frac{b^2 + l^2}{2b}$  проекция импульса  $p_y$  для регистрируемых частиц может находиться в интервале

$$-eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1} \leq p_y \leq -eHl + eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}, \quad (21)$$

причем в интервале

$$-eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1} \leq p_y \leq -\frac{1}{2} eHl$$

вероятность  $w_2$  выражается формулой (11), а в интервале

$$-\frac{1}{2} eHl \leq p_y \leq -eHl + eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}$$

формулой (16).

При импульсах ниже определенного минимального  $p_{\min}$  траектории частиц искривляются в магнитном поле настолько сильно, что частицы выходят из поля, не успев дойти до нижнего ряда координатных счетчиков. Этот импульс соответствует проекции траектории частицы, проходящей через точки А и В и касающейся оси Z в точке  $y=0, z=0,5 l$  (см. фиг. 2). Однако величина  $p_{\min}$  проще всего получается из (21), если в нем ширину области изменений переменной  $p_y$  устремить к нулю. Итак, приравнявая выражения, стоящие в обеих частях неравенства (21), получим

$$p_{\min} = 0,5eHl \left( \frac{l}{4b} + \frac{b}{l} \right). \quad (22)$$

Следовательно, частицы с импульсами  $p \leq p_{\min}$  вообще не могут регистрироваться установкой.

Теперь мы можем определить вероятность регистрации частиц  $w$ . Она равна произведению вероятностей  $w_1$  и  $w_2$ ,

$$w = w_1 \cdot w_2. \quad (23)$$

$w$  является дифференциальной вероятностью регистрации частиц, так как она относится к заданному направлению движения частиц и заданному значению импульса  $p$ .

Произведение величин вероятности  $w$  и площади  $a \cdot b$  координатного ряда счетчиков называется светосилой магнитного спектрометра

$$s = abw. \quad (23')$$

При больших импульсах частиц, когда выполняется условие

$$p_z \gg eH, \quad (24)$$

влиянием магнитного поля на движение заряженных частиц можно пренебречь и тогда формула (23) примет простой вид

$$w = \left(1 - \frac{l}{a} \cdot \frac{|p_x|}{p_z}\right) \left(1 - \frac{l}{b} \cdot \frac{|p_y|}{p_z}\right). \quad (25)$$

Здесь первый множитель получен из (8), а второй — из (18) или из (13) путем предельного перехода  $\omega \rightarrow 0$ . Формула (25) одновременно представляет собою вероятность регистрации для незаряженных частиц, если счетчики Гейгера—Мюллера заменены соответствующими счетчиками, регистрирующими нейтральные частицы.

2. *Определение импульсного спектра и углового распределения частиц.* Знание вероятности (23) позволяет определить истинное распределение частиц по их импульсам и направлениям движения по наблюдаемому в эксперименте распределению. Пусть  $i(p, \theta, \varphi) dp \sin \theta d\theta d\varphi$  есть истинное распределение частиц по их импульсам и направлениям движения, а  $F(p, \theta, \varphi) dp \sin \theta d\theta d\varphi$  — то же самое наблюдаемое на опыте; тогда имеем

$$i(p, \theta, \varphi) = \frac{F(p, \theta, \varphi)}{w(p, \theta, \varphi)}, \quad (26)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — зенитный и азимутальный углы, а  $w(p, \theta, \varphi)$  — вероятность (23), выраженная в сферических координатах  $p_x = p \sin \theta \cos \varphi$ ,  $p_y = p \sin \theta \sin \varphi$  и  $p_z = p \cos \theta$ .

Интегрируя (27) по всем дозволенным направлениям движения частиц, находим импульсный спектр частиц

$$N(p) dp = dp \int_{\Omega(p)} \frac{F(p, \theta, \varphi)}{w(p, \theta, \varphi)} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (27)$$

где  $\Omega(p)$  — телесный угол пучка частиц, доступных к регистрации. Из (9), (20) и (21) непосредственно следует, что этот телесный угол является функцией импульса частиц. При импульсе  $p = p_{\min}$ , где  $p_{\min}$  определяется формулой (22), телесный угол пучка частиц, которые могут попасть в прибор, равен нулю:  $\Omega(p_{\min}) = 0$ . С возрастанием импульса частиц  $\Omega(p)$  растет и при  $p \gg eHl$ , когда влиянием магнитного поля на движение частиц можно пренебречь, телесный угол достигает своего максимального значения, равного при  $a \ll l$

$$\Omega_0 \approx \frac{2a(\sqrt{b^2 + l^2} - l)}{bl} \quad (28)$$

(см. формулу (37)).

Если нас интересует не импульсный спектр частиц, а угловое распределение потока этих частиц с импульсами больше заданного  $p$ , то (26) нужно интегрировать по  $p$

$$\Phi_p(\theta, \varphi) = \int_p^\infty \frac{F(p, \theta, \varphi)}{w(p, \theta, \varphi)} dp. \quad (29)$$

**3. Полная вероятность регистрации частиц.** Если магнитный спектрометр приспособлен для измерения импульсного спектра вертикального потока заряженных частиц (что достигается выбором размеров поля  $a$  и  $b$ , в несколько раз меньшими по сравнению с высотой полюсов  $l$ ), то представляет интерес не дифференциальная вероятность (23), а полная вероятность регистрации частиц с заданным абсолютным значением импульса  $p$ . Для этой вероятности введем обозначение  $w_n(p)$ . Далее, пусть для заданного  $p$  угловое распределение частиц, падающих на установку, описывается функцией  $f(p, \theta, \varphi)$ . Предположим, что эта функция нормирована к единице, т. е.  $f(p, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$  есть вероятность движения частицы с импульсом  $p$  внутри элемента телесного угла  $\sin \theta d\theta d\varphi$ . С другой стороны, частица, движущаяся в заданном направлении, регистрируется с вероятностью  $w(p, \theta, \varphi)$ , определяемой формулой (23). Итак, вероятность того, что частица будет двигаться внутри элемента телесного угла  $\sin \theta d\theta d\varphi$  и будет регистрироваться, равна

$$dw(p, \theta, \varphi) = w(p, \theta, \varphi) f(p, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (30)$$

Интегрируя (30) по телесному углу  $\Omega(p)$ , т. е. по всем дозволенным направлениям регистрации частиц, находим полную вероятность регистрации  $w_n(p) = \iint_{\Omega(p)} w(p, \theta, \varphi) f(p, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$ . Следует отметить,

что в случае  $a \ll l$  и  $b \ll l$  телесный угол  $\Omega(p)$  мал, вследствие чего функция  $f(p, \theta, \varphi)$  внутри этой области интегрирования практически не изменяется и может быть принята за постоянную. Наоборот,  $w(p, \theta, \varphi)$  внутри области интегрирования  $\Omega(p)$  изменяется в пределах от нуля до единицы, т. е. быстро.

В целях удобства интегрирования от угловых координат  $\theta$  и  $\varphi$  перейдем к переменным  $p_x$  и  $p_y$  (абсолютное значение импульса считается заданным).

Итак, произведя в (30) замену переменных  $p_x = p \sin \theta \cos \varphi$  и  $p_y = p \sin \theta \sin \varphi$ , получаем

$$dw(p, p_x, p_y) = w(p, p_x, p_y) F(p, p_x, p_y) \frac{dp_x dp_y}{p \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}},$$

где  $F(p, p_x, p_y)$  — функция углового распределения  $i(p, \theta, \varphi)$  в новых переменных. Полная вероятность регистрации для частиц заданного импульса  $p$  равна

$$w_n = \frac{1}{p} \int_{p_y^-}^{p_y^+} dp_y \int_{p_x^-}^{p_x^+} \frac{w_1(p, p_x, p_y) w_2(p, p_x, p_y) F(p, p_x, p_y)}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} dp_x, \quad (31)$$

где вероятность  $w$  по формуле (23) заменена через  $w_1 \cdot w_2$ . Выясним пределы интегрирования. Сначала рассмотрим интегрирование по  $p_x$ . Из (9) имеем  $p_x^+ = p_x^- = \beta$ , где  $\beta$  — максимально допустимое значение переменной  $p_x$ . Оно определяется из трансцендентного уравнения

$$\beta \arcsin \frac{(p_y + eHl) \sqrt{p^2 - \beta^2 - p_y^2} - p_y \sqrt{p^2 - (p_y + eHl)^2}}{p^2} = eHl. \quad (32)$$

Это уравнение непосредственно вытекает из (6) и (9). При  $a \ll l$  величиной  $\beta$  в аргументе  $\arcsin$  можно будет пренебречь, и вопрос нахождения неизвестной  $\beta$  упрощается.

Перейдем к определению пределов интегрирования по  $p_y$ . При  $p \gg eH \frac{b^2 + l^2}{2b}$ , согласно (20), имеем

$$p_y^- = -0,5 eHl - \gamma, \quad p_y^+ = -0,5 eHl + \gamma, \quad (33)$$

где  $\gamma$  определяется формулой (14). В этом случае необходимо отличить четыре области значений  $p_y$ , а именно:  $-0,5 eHl - \gamma \leq p_y \leq -eHl$ ,  $-eHl \leq p_y \leq -0,5 eHl$ ,  $-0,5 eHl \leq p_y \leq 0$  и  $0 \leq p_y \leq -0,5 eHl + \gamma$ , в которых вероятность  $w_2$  соответственно выражается формулами (11), (13), (16) и (18). Наоборот, при  $p \leq eH \frac{b^2 + l^2}{2b}$

вероятность  $w_2$  определяется только формулами (11) и (16). Тогда интервал возможных значений  $p_y$  определяется формулой (21), согласно которой

$$p_y^- = -eHl \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}, \quad p_y^+ = -eHl + eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}, \quad (34)$$

причем в области

$$-eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1} \leq p_y \leq -0,5 eHl$$

вероятность  $w_2$  определяется формулой (11), а в области

$$-0,5 eHl \leq p_y \leq -eHl + eHb \sqrt{\frac{2p}{eHb} - 1}$$

она определяется формулой (16).

При больших импульсах частиц  $p_x \gg eHl$ , согласно (25), полная вероятность  $w_n$  равна

$$w_n = \frac{4}{p} \int_0^{p_y^{(m)}} dp_y \int_0^{p_x^{(m)}} \left( 1 - \frac{lp_x}{a \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} \right) \left( 1 - \frac{lp_y}{b \sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}} \right) \times \\ \times \frac{F(p, p_x, p_y) dp_x}{\sqrt{p^2 - p_x^2 - p_y^2}}, \quad (35)$$

где пределы интегрирования равны

$$p_x^{(m)} = a \sqrt{\frac{p^2 - p_y^2}{a^2 + l^2}} \approx \frac{a}{l} \sqrt{p^2 - p_y^2}, \quad (36)$$

$$p_y^{(m)} = b \sqrt{\frac{p^2 - p_x^2}{b^2 + l^2}} \approx \frac{bp}{\sqrt{b^2 + l^2}}.$$

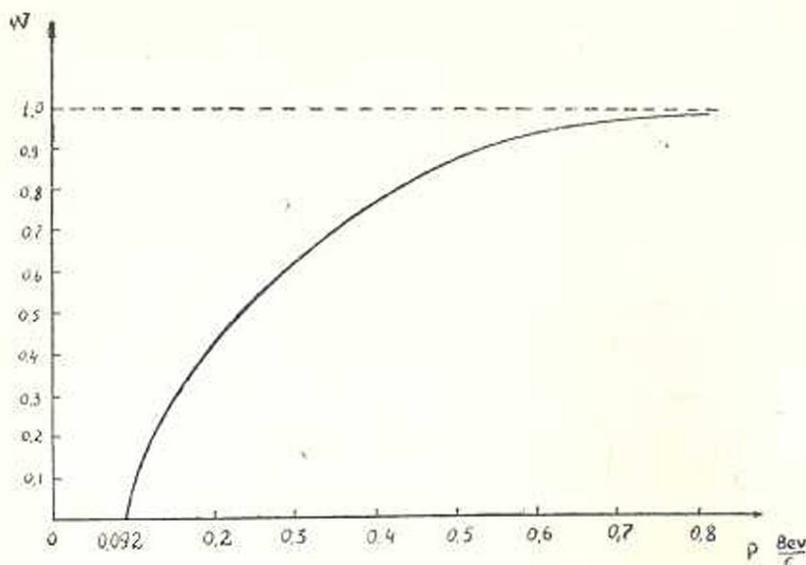
Для действующих в настоящее время магнитных спектрометров телесный угол, охватываемый прибором, мал и практически всегда имеем дело с вертикальным потоком частиц. Внутри этого телесного угла функция углового распределения  $F(p, p_x, p_y)$  почти не меняется, и излучение можно считать изотропным. Так, в случае (35), предполагая  $F(p, p_x, p_y) = \text{const}$ , находим

$$w_n \approx \text{const} \cdot \frac{2a(\sqrt{b^2 + l^2} - l)}{b \cdot l}. \quad (37)$$

Значение  $\text{const}$  определяется из условия нормировки. Удобно вероятность (31) перенормировать так, чтобы  $w_n = 1$

$$\text{при } p \gg eHl,$$

Чтобы вычисление полной вероятности  $w_n$  довести до конца, необходимо знать функцию углового распределения частиц. Если функция  $F(p, p_x, p_y)$ , а также размеры поля  $a$ ,  $b$  и  $l$  заданы, то интегрирование (31) не представляет трудностей и может быть выполнено численно.



Фиг. 3. Кривая зависимости полной вероятности  $w_n$  от импульса частиц для установки с параметрами  $a=8$  см,  $b=17,8$  см,  $l=69$  см и  $H=7200$  эрстед.

На фиг. 3 приведена кривая вероятности  $w_n(p)$  для установки с параметрами  $a=8$  см,  $b=17,8$  см,  $l=69$  см и  $H=7200$  эрстед. Формула (31) имеет простой геометрический смысл. В подынтегральном выражении в ней элемент телесного угла  $\sin \theta d\theta d\varphi = \frac{dp_x}{p \cdot p_z}$  умножен на вероятность регистрации  $F(p, p_x, p_y)$   $w_1(p, p_x, p_y)$   $w_2(p, p_x, p_y)$  и интегрирован по всем дозволенным направлениям регистрации. Следовательно (31) фактически представляет собою усредненный по точкам плоскости нижнего ряда координатных счетчиков телесный угол установки. Отсюда следует, что если в (37) положить  $\text{const} = 1$ , то полученное выражение представит собою геометрический телесный угол прибора ( $H=0$ ), усредненный по точкам плоскости нижнего ряда координатных счетчиков. Таким образом, светосила установки представляет собою произведение величины телесного угла установки  $\Omega(p)$  на площадь нижнего ряда координатных счетчиков  $s=ab$ .

В (31) не учтена эффективность координатного ряда счетчиков. Счетчики могут не фиксировать часть проходящих через них частиц, если между ними имеются щели и эффективность регистрации каждого счетчика не равна  $100\%$ . Поэтому, вообще говоря, (31) не есть полная вероятность регистрации частиц прибором. Для получения этой полной вероятности регистрации необходимо (31) умножить на вероятность регистрации, характеризующую всю систему счетчиков. Вопросы, связанные с эффективностью регистрирующей системы магнитного спектрометра, исследованы в работе [1]. Их рассмотрение возможно и имеет смысл только для определенной установки.

В заключение выражаю благодарность Н. М. Кочаряну и Г. М. Гарибяну за ценное обсуждение этой работы.

Физический институт  
АН Армянской ССР

## Л И Т Е Р А Т У Р А

Кочарян Н. М., Кайтмазов С. Д. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VII, № 2, 1954.

### Գ. Ս. Սահակյան

## ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍՊԵԿՏՐՈՍԵՏՐԻ ԼՈՒՍԱՈՒԺԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարվածում առաջարկվում է մագնիսական սպեկտրոսկոպի լուսաուժի հաշվման բնօրինակը մեթոդը:

Լուսաուժ կաշվում է հաշվիչների կոսրգինատային շարքի մակերևույթի և գործիքի վրա բնկնող լիցքավորված մասնիկների գրանցման հավանականությունից արտադրյալը: Մասնիկների գրանցման հավանականությունն արտահայտվում է (31) ֆորմուլայով: Նա մի մեծություն է, որը ուղիղ համեմատական է գրանցվող մասնիկների փնջի մարմնային անկյանը: Այդ  $\Omega$  մարմնային անկյանը հանդիսանում է ֆունկցիա մասնիկների քիմիայութից: Արտ ձևի իմպուլսի ղեկավարում (տես ֆորմուլա 22), որը որոշվում է մագնիսական դաշտի լարվածությունը և չափերով,  $\Omega=0$ : Մասնիկների իմպուլսի մեծացման հետ  $\Omega$ -ն մեծանում է և այնպիսի իմպուլսների ղեկավարում, երբ մասնիկների արտեկտորիաների շեղումը մագնիսական դաշտում դանում է աննշան, ձգտում է իր սահմանային արժեքին, որը որոշվում է (28) ֆորմուլայով: (31) ֆորմուլայի մեջ մանող ինտեգրման սահմանները որոշվում են արտացենզենա հավասարումներից:

Մանրամասն հետազոտված է այն ղեկավար, երբ մագնիսի բևեռների բարձրությունը շատ մեծ է նրանց միջև եղած հեռավորությունից: Այս ղեկավարում ինտեգրման սահմանների որոշումը պարզեցվում է:

А. А. ТРЧУНЯН

### Некоторые электрохимические свойства сплавов вольфрам-никель

В настоящей работе сообщаются результаты исследований электродных потенциалов при выделении водорода и кислорода на сплавах вольфрама с никелем, а также некоторые данные относительно коррозионной стойкости последних в растворах щелочей.

Эти вопросы уже были частично освещены в литературе. Так, в работах А. Печерской и В. Стендера [1] было измерено перенапряжение водорода на вольфраме и его сплавах с никелем. В статье С. Скаляренко и О. Дружинина [2] приводятся данные относительно защитных свойств вольфрам-никелевых покрытий. Однако в указанных работах было изучено довольно ограниченное число сплавов, состав которых менялся в сравнительно узких пределах. Для получения сплавов никеля с различным содержанием вольфрама при проведении настоящих исследований применялись два метода: электролитический и термический. Из числа различных ванн, рекомендованных для получения вольфрама и его сплавов с никелем, была выбрана ванна, описанная А. Гольцем и В. Харламовым [3] и имеющая следующий состав: 2 г  $WO_3$  + 2 г  $NiSO_4 \cdot 5H_2O$  + 30 г  $(NH_4)_2SO_4$  + 50 г  $NH_4OH$  (25%) + 150 г дистиллированной воды. Для этих ванн бралась вольфрамовая кислота марки „чистая“ производства Мосгорхимпромсоюза. Кроме того, вольфрамовая кислота получалась анодным растворением металлического вольфрама в щелочи и дальнейшим ее осаждением в виде  $WO_3$ . Ванны, приготовленные с вольфрамовой кислотой различного происхождения, давали одинаковые результаты.

В качестве основного металла, на котором получались осадки, служило железо, близкое по составу к железу „армко“. Осадки получались в ваннах ящичного типа без диафрагм с никелевыми анодами. Катоды были двух размеров, 2 и 10 см<sup>2</sup>; первые применялись при изучении катодного поведения сплавов, вторые — для испытания на коррозию. Для каждого случая осаждения применялась свежеприготовленная ванна, при этом изменения процентного содержания вольфрама в сплаве достигались применением различных плотностей тока. Гальванические покрытия при всех случаях производились при температуре 70°C, а время осаждения — 30 минут. Применяемые условия осаждения и аналитические данные представлены в таблице 1.

При более высоких плотностях тока получают рыхлые осадки. Термическим путем сплавы получались в магнетитовых тиглях сплавле-

нием металлического никеля с вольфрамом с последующим плавлением его для получения однородного состава. Из готового сплава отливались пластинки, из которых и готовились катоды.

Электролизер для опытов по измерению катодного и анодного потенциалов представлял собою ванну, в которой анодное пространство отделялось от катодного висящей стеклянной диафрагмой. Анодом при всех случаях служила гладкая платина. Перед измерениями катоды шлифовались и обезжиривались в кипящем 10% растворе KOH. Катодное пространство от окружающей среды (воздуха) не изолировалось, предварительное пропускание водорода через катодит не производилось.

Таблица 1

Соотношение металла и электролита		Плотность тока и, А/см <sup>2</sup>	Вес электрода до осаждения в г	Вес электрода после осаждения в г	Вес сплава и г	Вес в граммах		Процент в сплаве
Ni	W					Ni	W	
3	1	$5 \cdot 10^{-1}$	1,5175	1,5557	0,0382	0,0313	0,0069	18
3	1	$1 \cdot 10^{-1}$	1,4739	1,5609	0,0870	0,0678	0,0192	22
3	1	2·0	1,6055	1,8527	0,1272	0,0848	0,0424	33
3	1	4·0	1,7400	1,9633	0,2433	0,1425	0,0995	40,9
3	1	6·0	1,8708	2,1813	0,3102	0,1706	0,1396	45,3

В качестве электрода сравнения служил окисный ртутный электрод в 20% растворе NaOH. Электролизер помещался в водяном термостате, температура электролита измерялась непосредственным опусканием термометра в анодное пространство. Измерение потенциалов во всех случаях производилось прямым компенсационным методом. Полярирующий ток измерялся микро- и миллиамперметрами со сверенными шкалами.

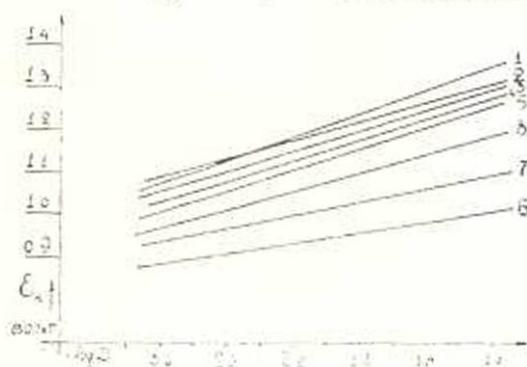


Рис. 1. Зависимость катодного потенциала от логарифма плотности тока на железе (1), никеле (2), вольфраме (3) и сплавах вольфрам-никель с содержанием вольфрама 18% (4), 22% (5), 33% (6), 40,9% (7) и 45,3% (8) в 20% растворе KOH и температуре 70°С.

вов, полученных двумя методами в 20% растворе KOH и температуре 70°С, представлены на фиг. 1.

Из фиг. 1 следует наличие линейной зависимости катодного потенциала от плотности тока. Здесь представлены значения катодных потенциалов, а не величины перенапряжения, так как определение пе-

температура электролита измерялась непосредственным опусканием термометра в анодное пространство. Измерение потенциалов во всех случаях производилось прямым компенсационным методом. Полярирующий ток измерялся микро- и миллиамперметрами со сверенными шкалами.

### Результаты измерений

Зависимость катодного потенциала от логарифма плотности тока для железа, никеля, вольфрама и их спла-



Таблица 3

Материал катода	Температура в °С					
	25		40		70	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
Железо . . . . .	1,675	0,161	1,639	0,156	1,560	0,139
Вольфрам . . . . .	1,615	0,132	1,573	0,125	1,511	0,119
Никель . . . . .	1,607	0,142	1,563	0,140	1,525	0,138
Сплав, полученный методом электроосаждения . . . . .	1,241	0,097	1,192	0,088	1,121	0,067
Сплав, полученный термическим методом . . . . .	1,245	0,100	1,195	0,091	1,132	0,070

Данные таблиц 2 и 3 показывают, что замена железных или никелированных катодов, на катоды из сплава вольфрам-никель снижает катодный потенциал примерно на 0,32 в при плотности тока в  $1 \cdot 10^{-3}$  А/см<sup>2</sup>.

Из диаграммы состояния вольфрам-никель следует [4], что в области 18—45% содержания вольфрама в сплаве имеется химическое соединение состава Ni<sub>2</sub>W. Наблюдаемый на кривой потенциал катода состав минимум как раз лежит в области химического соединения сплава вольфрам-никель. Кривая области химического соединения (см. фиг. 2) является как бы зеркальным отражением кривой потенциал катода-состав. Аналогичная закономерность соответствия двух диаграмм была отмечена рядом исследователей [5].

Анодное исследование производилось в тех же электролизерах, где в качестве катода служила гладкая платина. Измерения проводились в 20% растворе КОН при температурах 25, 40 и 70 С. Результаты измерений показали также наличие линейной зависимости анодного потенциала от плотности тока. Значения постоянных *a* и *b* приведены в таблице 4.

Таблица 4

Материал анода	Температура в °С					
	25		40		70	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
Железо . . . . .	0,950	0,093	0,910	0,091	0,886	0,087
Вольфрам . . . . .	0,357	0,176	0,322	0,235	0,444	0,246
Никель . . . . .	0,957	0,093	0,889	0,092	0,843	0,091
Сплав, полученный методом электроосаждения . . . . .	0,820	0,136	0,815	0,101	0,806	0,091
Сплав, полученный термическим методом . . . . .	0,821	0,139	0,817	0,104	0,813	0,087

Данные таблицы 4 показывают, что повышение температуры несколько уменьшает величину анодного потенциала, причем в случае вольфрама повышение температуры ведет к увеличению скорости анодного его растворения (почти количественное). С другой стороны следует, что на сплавах вольфрам-никель анодный потенциал наиболее низок.

Из данных таблиц 3 и 4 следует, что применение сплава вольфрам-никель с содержанием 25—35% вольфрама, против никелированных катодов и анодов, снижает напряжение ванны на 0,34 в при электролизе воды.

Коррозионные испытания проводились в электролизерах, сконструированных по типу простых уншолярных ванн. Анодами служили: железо, близкое по составу к „армко“, никелированное железо, никель, железо, покрытое сплавом вольфрам-никель, а также металлический вольфрам. Скорость коррозии определялась по убыли веса анодов после длительного пропускания тока при постоянной температуре. Анодная плотность тока во всех опытах составляла 6,5 А/см<sup>2</sup>, температура 20 и 70°C. Приведенные в таблице 5 данные являются средними из ряда измерений.

Таблица 5.

Материал анода	Температура 20°C			Температура 70°C		
	убыль веса в г	потеря веса в мг/см <sup>2</sup> ч	коррози- онная про- ницае- мость в мм/год	убыль веса в г	потеря веса в мг/см <sup>2</sup> ч	коррози- онная про- ницае- мость в мм/год
Вольфрамовая проволока	0,0052	0,08750	0,39958	0,33036	5,50625	252,3456
Вольфрамовая нить от электродов 200 м	0,0060	0,10000	0,45736			— *)
Железо „армко“	0,0033	0,06310	0,70419	0,0390	0,6500	7,4540
Никель металла	0,0023	0,03750	0,37326	0,0030	0,0500	0,49768
Никелированное железо	0,0026	0,04331	0,38115	0,0035	0,05819	0,51215
Сплав Ni—W с содержанием вольфрама 18%	0,0007	0,01250	0,19264	0,0023	0,03750	0,30842
„ „ 22%	0,0008	0,01350	0,10689	0,0019	0,03125	0,25209
„ „ 33%	0,0008	0,01350	0,09639	0,0019	0,03125	0,22343
„ „ 40,9%	0,00113	0,01875	0,11297	0,0020	0,03386	0,23415
„ „ 45,3%	0,0019	0,03125	0,20338	0,0026	0,04375	0,28578

Как видно из таблицы 5, с повышением температуры скорость разрушения анодов увеличивается. Переход от железных анодов к никелированным связан с резким уменьшением скорости коррозии: потеря веса никелированных анодов составляет 0,058 мг/см<sup>2</sup> час, (а никеля 0,05), т. е. почти в 10 раз меньше, чем потеря веса железных анодов, определенных при тех же условиях.

При исследовании влияния добавок на скорость коррозии автором ранее было показано, что введение 2,89 ммол/л вольфрамата в электролит резко уменьшает разрушение никелированных анодов. Наибольшая величина разрушения для добавок вольфрамата составляла 0,04 мг/см<sup>2</sup>ч.

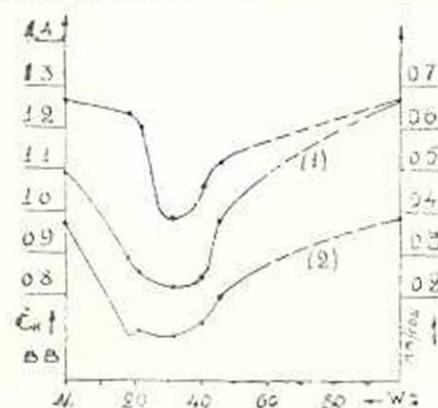
Опыты показали, что в случае сплава вольфрам-никель, полученного термическим методом и электроосаждением, в области содержания 25—35% вольфрама, отвечающая области химического соединения, анодное разрушение почти полностью подавляется. Максимально наблюдаемая в 20% растворе КОН потеря веса оказалась равной

\*) Имеет место количественное растворение.

0,031 мг/см<sup>2</sup>ч, что отвечает уменьшению скорости коррозии никелевых анодов почти в два раза.

Результаты коррозионных испытаний позволяют отметить, что хотя никелировка железных анодов значительно уменьшает скорость их разрушения, но она не гарантирует полной устойчивости. Постепенное растворение анодов может быть связано или с переходом в раствор самого никеля в местах разрыва пассивирующей пленки, или с переходом в раствор железа вследствие наличия пор в никелированных покрытиях (питтинг).

С точки зрения коррозионной стойкости сплава вольфрам-никель можно допустить, что в этом случае железная основа покрывается таким соединением (очевидно химического характера), которое полностью покрывает поверхность железа. Однако анодные исследования показали, что коррозионная стойкость наблюдается не только в области химического соединения, но и до перехода в эту область. Их стойкость может быть объяснена тем, что сплав вольфрам-никель вообще образует сплошную пассивирующую пленку, в которой отсутствует разрыв.



Фиг. 3 Коррозионная проницаемость-состав для 20% раствора КОН для температур 20 (2) и 70°C (1) и потенциал катода-состав при плотности тока  $1 \cdot 10^{-2}$  А/см<sup>2</sup>.

На фиг. 3 сопоставлены величины коррозионной проницаемости с составом, откуда следует, что коррозионная стойкость сплавов вольфрам-никель по отношению к никелю увеличивается в два с лишним раза и такая стойкость лежит в достаточно широких пределах, соответствующих области минимума на кривой потенциал-состав.

## Выводы

1. На сплавах с содержанием 25—35% вольфрама перенапряжение водорода ниже, чем на железе на 0,36 в, на вольфраме—0,34 в, и на никеле—0,33 в.
2. Кислородное перенапряжение меньше на сплавах, чем на никеле на 0,04 в.
3. Для электрохимических исследований сплавов способ получения (термический или электрокристаллизация) не отражается на результатах измерения.
4. Имеется прямая согласованность между диаграммами потенциал-состав и температура-состав системы вольфрам-никель. Кривая потенциал-состав уточняет вид-кривой области химического соединения на диаграмме температура-состав.

5. Коррозионная проницаемость сплава вольфрам-никель, содержащего 33% вольфрама в сплаве, меньше, чем никеля, в 2 раза.

6. С повышением температуры коррозионная проницаемость увеличивается, при этом кривая коррозионная проницаемость-состав проходит через явно выраженный минимум.

Поступило 31 VII 1953

Химический институт АН  
Армянской ССР

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Печерская А., Стендер В. ЖПХ, 12, 1303, 1946.  
Стендер В., Печерская А. ЖПХ, 20, 326, 1947.
2. Скаляренко С., Дружинина О. ЖПХ, 13, 1326, 1940.
3. Гольц Л., Харламов В. ЖПХ, 9, 631, 1936.
4. Приложение к технической энциклопедии. Справочник физ. хим. величин, т. II, стр. 245.
5. Thompson I. и Riel. F. Tr. Am. Electrochem. Soc. 67, 71, 1934.  
Thompson I. и Co Fr. Am. Electrochem. Soc. 67, 71, 1935.  
Курпетов М. ЖФХ, 23, 1949.

### Հ. Ս. Թույուհյան

## ՎՈԼՖՐԱՄ-ՆԻԿԵԼ ՀԱՄԱՋՈՒՎԱԾՔԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԷԼԵԿՏՐՈՒՔԻ ՄԻԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածը նվիրված է հիմքային լուծույթում սրգես էլեկտրոդներ օգտագործվող երկաթի, նիկելի, վոլֆրամի և թերմիկ ու էլեկտրոլիտիկ եղանակով ստացված վոլֆրամ-նիկել համաձուլվածքի վրա ջրածնի և թրթվածնի անջատման մամանակ առաջացած օքսիդացումների և զործածված էլեկտրոդների կորրոզիոն հատկությունների ուսումնասիրությանը:

Ստացված արդյունքների հիման վրա ցույց է տրված, որ՝

1. 25—35% վոլֆրամ պարունակող վոլֆրամ-նիկել համաձուլվածքի վրա ջրածնի զերլարվածությունը ցածր է, քան երկաթինը՝ 0,36 Վ-ով վոլֆրամինը՝ 0,34 Վ-ով և նիկելինը՝ 0,33 Վ-ով:

2. Թթվածնի զերլարվածությունը համաձուլվածքի վրա նիկելի համեմատությամբ ցածր է 0,04 Վ-ով:

3. Համաձուլվածքի ստացման եղանակները (թերմիկ կամ էլեկտրոլիտիկ) էլեկտրոքիմիական ուսումնասիրությանը մամանակ չեն ազդում ստացված արդյունքների վրա:

4. Վոլֆրամ-նիկել սիստեմի օքսիդացում-բազալիզացիան և ջերմաստիճան-բազալիզացիան զրադրամաներում զոյություն ունի որոշակի համապատասխանություն:

5. 33% վոլֆրամ պարունակող համաձուլվածքի կորրոզիոն զիմադրությունը երկու անգամ ավելի մեծ է, քան մաքուր նիկելինը:

6. Ջերմաստիճանի բարձրացմամբ կորրոզիոն զիմադրությունը վերանում է բոլոր պայմաններում, կորրոզիոն թափանցելիություն-բազալիզացիան կորագլծը անցնում է որոշակի արտահայտված միևմուտով:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Л. Миджоян, В. Г. Африкян, О. Л. Миджоян, В. В. Довлатян, А. А. Ароян,  
 Н. А. Бабян, Э. Р. Багдасарян, А. А. Дохикян, М. Т. Григорян

Некоторые методы органического  
 препаративного синтеза

В процессе синтеза физиологически активных препаратов зачастую приходится пользоваться не только известными в химической литературе методами и доступными исходными продуктами, но и заниматься разработкой методов синтеза простых органических соединений, не описанных в литературе, а также новых, более доступных путей синтеза уже известных в литературе препаратов.

В данной работе приведены методы синтеза некоторых органических препаратов, которые были разработаны и использованы в процессе наших исследований при выполнении отдельных тем. Нам кажется, что этот материал может представить некоторый общий интерес с точки зрения препаративного органического синтеза, почему и позволили себе опубликовать его после тщательной проверки эксперимента в виде отдельного сообщения.

2-метил-2-фенил-пропандиол-1,3



В круглодонную колбу емкостью 0,25 л, снабженную обратным холодильником, помещают 14г гидратированного альдегида (т. к. 90°/10 мм), 27 мл формалина (уд. вес 1,081), 7,8 г углекислого калия, 20 мл воды, 17 мл этилового спирта. Реакционную смесь нагревают на кипящей водяной бане в течение 30 часов. Затем обратный холодильник заменяют нисходящим и отгоняют (около 20—25 мл) смеси спирта с водой до тех пор, пока реакционная смесь не помутнеет. К остатку после удаления спирта прибавляют порошкообразный углекислый калий. Выделившийся при этом маслянистый слой, представляющий собой неочищенный 2-метил-2-фенил-пропандиол-1,3, отделяют, а оставшийся водный слой экстрагируют 3 раза по 50 мл эфиром. Эфирные экстракты присоединяют к основному продукту и су-

шат прокаленным поташом. После высушивания отгоняют эфир, затем — фракцию, кипящую до  $90^\circ/10$  мм; остаток перекристаллизовывают из бензина (фракция с т. к.  $65-70^\circ$ ).

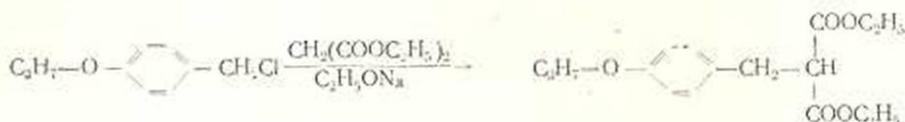
Выход 2-метил-2-фенил-пропандиол-1,3 составляет 14—15 г (80,9—87,7% теоретич.). Игольчатые кристаллы с т. пл.  $80-81^\circ$  легко растворимы в спирте, ацетоне, хлороформе, в горячей воде, труднее — в эфире, бензоле.

0,1090 г вещ. : 0,2888  $\text{CO}_2$ ; 0,0822  $\text{H}_2\text{O}$ .

Найдено %: С 72,26; Н 8,37

$\text{C}_{10}\text{H}_{14}\text{O}_2$ . Вычислено %: С 72,28; Н 8,49

#### Диэтиловый эфир 4-пропоксибензилмалоновой кислоты



В круглодонную 0,5-литровую колбу, снабженную обратным холодильником, помещают 300 мл абсолютного этилового спирта и постепенно вносят 9 г металлического натрия.

По растворении натрия обратный холодильник заменяют нисходящим и отгоняют спирт в 0,5-литровую трехгорлую колбу, снабженную механической мешалкой, капельной воронкой и обратным холодильником с хлоркальциевой трубкой.

К отогнанному спирту (примеч. 1) медленно прибавляют 7,82 г (0,34 г — ат.) свеженарезанного очищенного от корки металлического натрия. После полного растворения натрия реакционную колбу охлаждают до комнатной температуры и при энергичном перемешивании быстрой струей приливают 108 г (0,68 моля) малонового эфира. Через 15 минут по каплям при охлаждении колбы холодной водой добавляют 62,73 г (0,34 моля) свеженарезанного 4-пропоксибензилхлорида с т. кип.  $130-135^\circ/8$  мм. Затем реакционную смесь нагревают на кипящей водяной бане в течение 5 часов.

По окончании реакции обратный холодильник заменяют нисходящим и при перемешивании отгоняют этиловый спирт (на что требуется 1,5—2 ч.).

К остатку после отгонки спирта добавляют 150 мл воды и дважды экстрагируют эфиром порциями по 100 мл.

Соединенные эфирные экстракты высушивают обезвоженным сернокислым натрием. После удаления эфира остаток перегоняют в вакууме. Собирают фракцию, перегоняющуюся при  $173-178^\circ/2$  мм.

Выход диэтилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты (примеч. 2) составляет 75—77 г (71,7—73,9% теоретич.).

Полученный эфир 4-пропоксибензилмалоновой кислоты растворим в органических растворителях, не растворим в воде.

$d_4^{20}$  1,0806  $n_D^{20}$  1,4858.

Найдено  $MR_D$  81,70.

Вычислено  $MR_D$  83,06

0,1256 г веш. 0,3054 г  $CO_2$ ; 0,0886 г  $H_2O$ .

Найдено  $\%$ : С 66,31; Н 7,83;

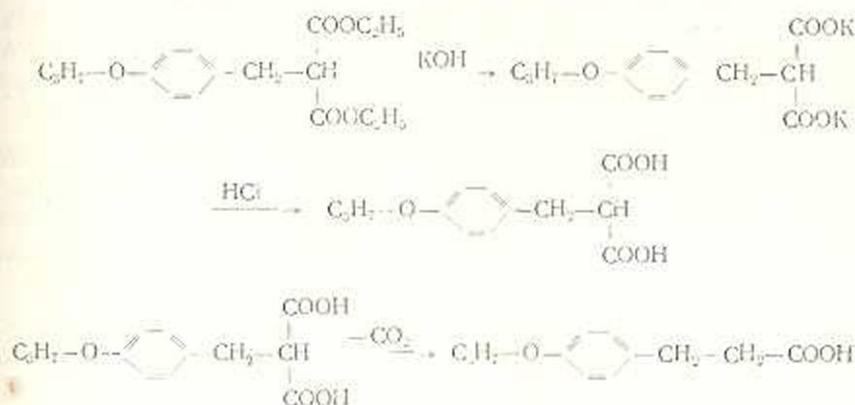
$C_{17}H_{24}O_5$ . Вычислено  $\%$ : С 66,23; Н 7,79.

### Примечания

1. Качество абсолютного спирта существенно влияет на выход продукта реакции. В случае употребления не тщательно абсолютированного этилового спирта выход диэтилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты снижается за счет образования 4-пропоксибензилэтилового эфира.

2. Аналогично могут быть получены диэтиловые эфиры 4-(метокси-, этокси-, изопропокси-, бутокси-, изобутокси-, изоамилокси-) бензилмалоновых кислот.

### $\beta$ -(4-пропоксифенил) пропионовая кислота



В круглодонную колбу, емкостью 0,1 л, снабженную обратным холодильником, помещают 12 г (0,21 моля) едкого кали, растворенного в 12 мл воды. К щелочному раствору при непрерывном перемешивании, мелкими порциями в течение 15—20 минут прибавляют 26 г (0,084 моля) этилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты. Образующаяся в начале эмульсия исчезает после саморазогревания и вспенивания реакционной смеси. Реакционную смесь нагревают на кипящей водяной бане в течение 8 часов. К образовавшейся густой прозрачной соломенно-желтой жидкости приливают 10 мл воды и дважды экстрагируют бензолом по 25 мл для удаления неомыленного этилового эфира 4-пропоксибензилмалоновой кислоты.

Водно-щелочный раствор подкисляют 15% соляной кислотой до кислой реакции на конго.

Неочищенная 4-пропоксибензилмалоновая кислота, выделенная в виде желтого масла, подвергается 3-кратной экстракции эфиром Известия VII, № 4—6

по 25 мл. Соединенные эфирные экстракты высушивают сульфатом натрия.

После отгонки эфира затвердевший остаток перекристаллизовывают из бензола. Выход 4-пропоксибензилмалоновой кислоты с т. пл. 133—134° (примеч. 1) составляет 16,8—17,3 г (79—81,1% теоретич.).

4-пропоксибензилмалоновая кислота—белое кристаллическое вещество, растворимое в эфире, спирте, горячем бензоле, труднорастворимое в воде и лигнине.

0,1160 г вещ.: 0,2622 г CO<sub>2</sub>; 0,0686 г H<sub>2</sub>O.

Найдено%: С 61,64; Н 7,57;

C<sub>13</sub>H<sub>16</sub>O<sub>5</sub>. Вычислено%: С 61,90; Н 6,34.

16 г полученной 4-пропоксибензилмалоновой кислоты переносят в круглодонную колбу емкостью 100 мл, снабженную воздушным холодильником, и нагревают на масляной бане в течение 2 часов, постепенно повышая температуру до 170—175°.

Выделение углекислого газа начинается при температуре 155—160°. Когда выделение пузырьков углекислого газа прекращается, баню удаляют. По охлаждению, реакционный продукт затвердевает. После перекристаллизации из бензина (т. кип. 70—80°) получают 9,8—10,5 г β-(4-пропоксифенил) пропионовой кислоты (примеч. 1) с т. пл. 95—96°. Выход 75,3—80,7%.

β-(4-пропоксифенил) пропионовая кислота белое кристаллическое вещество, растворимое в эфире, спирте, горячем бензоле, не растворимое в воде и лигнине.

0,1138 г вещ.: 0,2836 г CO<sub>2</sub>; 0,0770 г H<sub>2</sub>O.

Найдено%: С 69,16; Н 7,51;

C<sub>12</sub>H<sub>16</sub>O<sub>3</sub>. Вычислено%: С 69,23; Н 7,69.

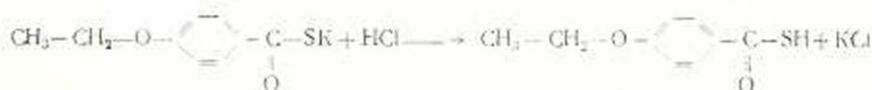
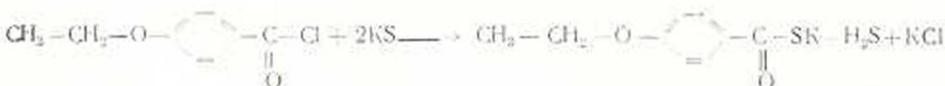
### Примечание

Аналогично могут быть получены 4-алкоксибензилмалоновые и β-(4-алкоксифенил) пропионовые кислоты, в которых R = CH<sub>3</sub>, C<sub>2</sub>H<sub>5</sub>, i-C<sub>3</sub>H<sub>7</sub>, n-C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>, i-C<sub>4</sub>H<sub>9</sub>, i-C<sub>5</sub>H<sub>11</sub>.

### Другие методы получения

1. *Pierce, J. и Coworkers*: J. Am. chem. Soc. 70, 255 (1948).

#### П-этокситиобензойная кислота



В круглодонную четырехгорлую 0,5-литровую колбу, снабженную механической мешалкой, стеклянной трубкой, доходящей почти до дна, термометром и капельной воронкой, помещают раствор 14 г (0,25 моля) едкого кали (примеч. 1) в 170 мл этилового спирта, 50 мл абсолютного этилового спирта и при перемешивании охлаждают содержимое колбы до  $-5^{\circ}$  ( $-7^{\circ}$ ). Затем пропускают через промывную склянку с водой сероводород до привеса колбы на 12—13 г (примеч. 2).

Через капельную воронку в течение 30—40 минут при перемешивании и температуре  $-20^{\circ}$  ( $-21^{\circ}$ ) (примеч. 3) прибавляют раствор 18,5 г (0,1 моля) хлорангидрида п-этоксibenзойной кислоты (т. пл.  $35^{\circ}$ ) в 40 мл абсолютного бензола. Затем, при той же температуре перемешивание продолжают 50—60 минут и еще 3—4 часа при температуре не выше  $-5^{\circ}$ .

По окончании реакции отфильтровывают выпавший хлористый калий и дважды промывают абсолютным этиловым спиртом. Из соединенных фильтратов отгоняют растворитель в вакууме водоструйного насоса.

К сиропообразному остатку прибавляют 200—250 мл абсолютного эфира. Выпавшие кристаллы калиевой соли п-этокситиобензойной кислоты отсасывают, промывают трижды абсолютным эфиром порциями по 25—30 мл и высушивают на воздухе.

Сырой продукт растворяют в 20 мл абсолютного спирта, отфильтровывают и после отгонки спирта осаждают абсолютным эфиром.

Для выделения свободной кислоты (примеч. 4) калиевую соль п-этокситиобензойной кислоты растворяют в воде, отфильтровывают и осаждают 10% соляной кислотой.

Выпавшую п-этокситиобензойную кислоту отсасывают, промывают 2—3 раза водой и высушивают в вакуум-эксикаторе над хлористым кальцием. Выход продукта с т. пл.  $64-66^{\circ}$  составляет 11,5—12 г (63,2—66% теоретич.). Примеч. 5.

Светложелтого цвета кристаллы, растворимые в органических растворах, не растворимые в воде.

4,043 мг веш.: 8,804 мг  $\text{CO}_2$ ; 1,881 мг  $\text{H}_2\text{O}$ .

Найдено %: С 59,43; Н 5,20;

$\text{C}_9\text{H}_{10}\text{O}_2\text{S}$ . Вычислено %: С 59,34; Н 5,02;

4,802 мг. веш.:  $\text{BaSO}_4$  6,16 мг.

Найдено %: S 17,62;

$\text{C}_9\text{H}_{10}\text{O}_2\text{S}$ . Вычислено %: S 17,5.

### Примечания

1. Едкое кали взято с избытком на 2,8 г во избежание образования тиоангидрида п-этоксibenзойной кислоты.

2. Операция насыщения продолжается 3—3,5 часа.

3. Температуру не следует повышать, так как она существенно влияет на выход и чистоту п-этокситиобензойной кислоты.

4. *p*-этокситиобензойную кислоту необходимо хранить в виде калиевой соли.

5. Аналогичным способом можно получить *p*-(метокси-, пропокси-, изопропокси-, бутокси-, изобутокси-, [амилокси-, изоамилокси-]) тиобензойные кислоты.

#### 4-пропоксибензилхлорид



В круглодонную трехгорлую 1-литровую колбу, снабженную мощной механической мешалкой (примеч. 1) с ртутным затвором, стеклянной трубкой, доходящей почти до дна колбы, и отводной трубкой, соединенной с газовой ловушкой, помещают 68 г (0,5 моля) пропоксибензола (т. к. 176—180°), 150 мл бензола и 225 мл концентрированной соляной кислоты (36%).

Колбу погружают в охлаждающую смесь (лед и поваренная соль) и пускают в ход мешалку. Когда температура реакционной смеси достигает -2°, начинают пропускать быстрый ток хлористого водорода (примеч. 2).

После полного насыщения (примеч. 3) к реакционной смеси прибавляют заранее охлажденный раствор 75 г формалина (уд. вес 1,081) в 100 мл концентрированной соляной кислоты.

Затем в течение 12—15 мин. пропускают сильный ток хлористого водорода и, удалив баню со льдом, смесь энергично перемешивают еще 3 часа при комнатной температуре.

По окончании реакции бензольный слой отделяют, водный слой экстрагируют бензолом. Соединенные бензольные экстракты трижды промывают ледяной водой и высушивают обезвоженным сернистым натрием.

После отгонки бензола остаток перегоняют в вакууме при 2 мм остаточного давления. Собирают следующие фракции:

I. фр. до 104° (непрореагировавший пропоксибензол).

II фр. 104—120° 71,5 г (в основном 4-пропоксибензилхлорид).

Вторую фракцию подвергают вторичной перегонке.

Собирают продукт, перегоняющийся при 130—135°/8 мм. Выход 4-пропоксибензилхлорида (примеч. 4) 63—65 г (68,3—70,4% теоретич.).

4-пропоксибензилхлорид хорошо растворим в органических растворителях, нерастворим в воде.

$d_4^{20}$  1,0877,  $n_D^{20}$  1,5300.

Найдено  $M_{RD}$  52,30;

$\text{C}_{10}\text{H}_{13}\text{ClO}$ . Вычислено  $M_{RD}$  51,29

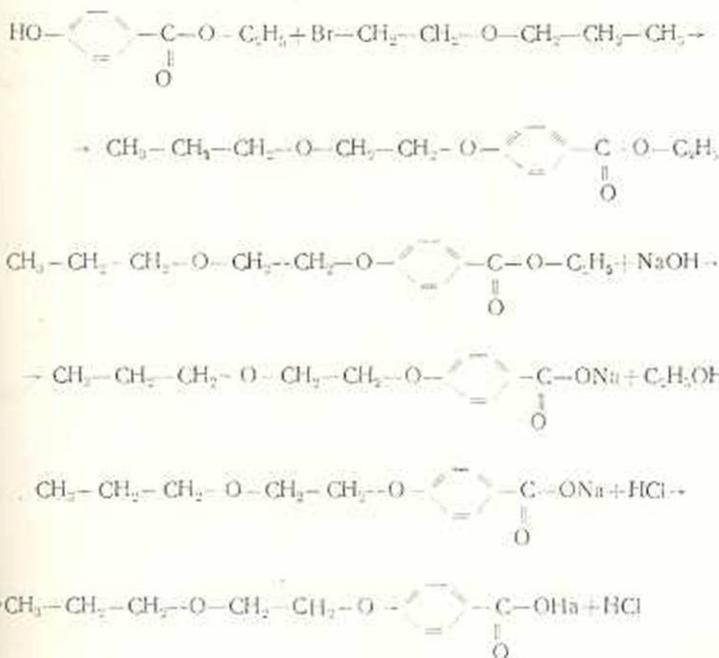
0,1391 г вещ.: 0,1075 г AgCl.

Найдено %: Cl 19,12;  
 $C_{10}H_{12}ClO$ . Вычислено % Cl 19,24.

### Примечания

1. Энергичное перемешивание значительно влияет на повышение выхода.
2. Хлористый водород получают взаимодействием соляной и серной кислот. Для этого в 1-литровую колбу Вюрца наливают до 3/4 ее объема конц. серной кислоты и затем через капельную воронку, отводная трубка которой, вытянутая в капилляр, доходит почти до дна колбы, вводят постепенно концентр. соляную кислоту, так, чтобы обеспечить быстрый ток хлористого водорода.
3. Полное насыщение определяется по энергичному выделению хлористого водорода.
4. Аналогично, с некоторыми изменениями, могут быть получены 4-метокси-, 4-этокси-, 4-изопропокси-, 4-бутокси-, 4-изобутокси-, 4-изоамилоксибензилхлориды.

### П-(β-пропоксиэтилокси) бензойная кислота



В круглодонную трехгорлую 0,5-литровую колбу, снабженную механической мешалкой с ртутным затвором, обратным холодильником и капельной воронкой, помещают 60 мл абсолютного этилового спирта и постепенно вносят 2,9 г (0,12 г—ат.) металлического натрия. К полученному алкоголяту при механическом перемешивании прибавляют 20 г (0,13 моля) этилового эфира п-оксибензойной кислоты (т. пл.

112—114°). После 10-минутного перемешивания добавляют 30,2 г (0,18 моля) β-пропоксиэтилбромида (т. кип. 139—145°). Реакционную смесь нагревают на водяной бане в течение 20 часов. По охлаждении отфильтровывают образовавшийся бромистый натрий, промывают на фильтре абсолютным этиловым спиртом, спирт отгоняют. Остаток, для удаления непрореагировавшего этилового эфира п-оксибензойной кислоты, обрабатывают раствором 0,25 г едкого натра в 12,5 мл 96% этилового спирта и после прибавления 15 мл воды экстрагируют трижды эфиром. Из соединенных эфирных экстрактов отгоняют эфир, остаток переносят в 0,25-литровую круглодонную колбу, снабженную обратным холодильником и добавляют 75 мл 10% раствора едкого натра.

Реакционную смесь нагревают на водяной бане в течение 3 часов. По охлаждении экстрагируют эфиром неомылившийся этиловый эфир п-(β-пропоксиэтилокси) бензойной кислоты, а водный раствор подкисляют 10% раствором соляной кислоты.

Выпавшую в осадок кислоту отсасывают, дважды промывают водой и высушивают на воздухе.

Полученный сырой продукт дважды перекристаллизовывают из смеси бензола и лигнана (1:1).

Выход п-(β-пропоксиэтилокси) бензойной кислоты с т. пл. 114—115° составляет 15,2—16 г (57—59,4% теоретич.). Примеч. 1.

Слегка желтоватого цвета чешуйчатые кристаллы хорошо растворимые в спирте, эфире, ацетоне, труднее в бензоле, толуоле, не растворимые в воде.

0,1296 г вещества: 0,3066 г CO<sub>2</sub>; 0,0844 г H<sub>2</sub>O.

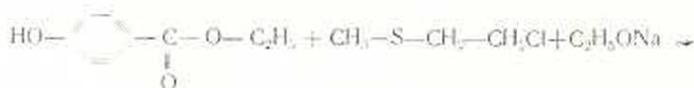
Найдено %: С 64,52; Н 7,23;

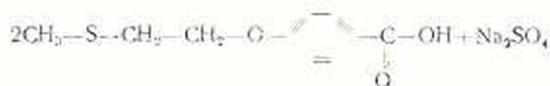
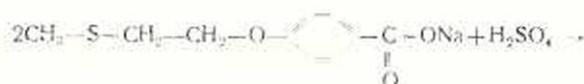
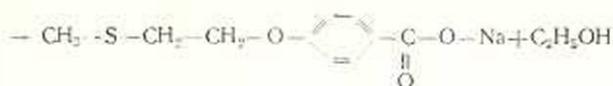
C<sub>12</sub>H<sub>16</sub>O<sub>4</sub>. Вычислено %: С 64,28; Н 7,14.

### Примечание

Аналогичным способом могут быть получены п-[(метокси-, этокси-, изопропокси-, буюкси-, изобуюкси-, изоамилокси-, амилокси-) этилокси] бензойные кислоты.

### П-метилмеркаптоэтилоксибензойная кислота





В круглодонную трехгорлую 0,5-литровую колбу, снабженную механической мешалкой с ртутным затвором и обратным холодильником, помещают 210 мл абсолютного этилового спирта и постепенно вносят 13,8 г (0,6 г. — ат.) металлического натрия. К полученному алкоголяту при перемешивании добавляют 95,9 г (0,6 моля) этилового эфира *p*-оксibenзойной кислоты (т. пл. 112—114°) и 63,8 г (0,6 моля)  $\beta$ -хлорэтилметилсульфида (примеч. 1) (т. кип. 55—56°/30 мм).

Реакционную смесь при перемешивании нагревают на водяной бане в течение 20—24 часов. После охлаждения отфильтровывают выпавший в осадок хлористый натрий, промывают его дважды по 25 мл абсолютного спирта. Из соединенных фильтратов отгоняют спирт; к остатку приливают 25 мл воды и трижды экстрагируют эфиром по 50 мл. Из соединенных экстрактов отгоняют эфир, к остатку добавляют 190 мл 10% едкого натра и нагревают на водяной бане до полного исчезновения маслянистого слоя (примеч. 2).

Для удаления неомылившегося этилового эфира *p*-метилмеркаптоэтилоксibenзойной кислоты, реакционную смесь экстрагируют эфиром.

Водный раствор при перемешивании подкисляют разбавленной серной кислотой (1:1) до кислой реакции на конго. Выделившуюся *p*-метилмеркаптоэтилоксibenзойную кислоту отсасывают, промывают два раза водой и высушивают на воздухе.

После перекристаллизации из бензола выход продукта т. с. пл. 122—113° составляет 31,2—32,7 г (71,9—75,3% теоретич.).

Бесцветные чешуйчатые кристаллы легко растворимы в спирте, хлороформе, ацетоне, труднее в эфире, бензоле, нерастворимы в воде.

0,1058 г вещ.: 0,2202 г CO<sub>2</sub>; 0,0530 г H<sub>2</sub>O.

Найдено %: С 56,76; Н 5,56;

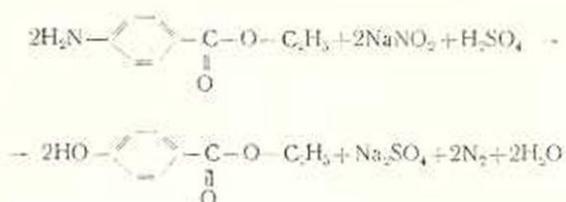
C<sub>10</sub>H<sub>12</sub>O<sub>2</sub>S. Вычислено %: С 56,60; Н 5,66.

### Примечания

1.  $\beta$ -хлорэтилметилсульфид получают по методу, описанному в Сборнике № 2 „Синтезы органических препаратов“, стр. 562 (1949 г.).

2. В случае механического перемешивания омыление заканчивается в течение 2 часов.

## Этиловый эфир п-оксибензойной кислоты



В круглодонную четырехгорлую 1-литровую колбу, снабженную механической мешалкой, термометром, капельной воронкой и обратным холодильником, помещают 35% (0,2 моля) анестезина, 300 мл воды и при перемешивании приливают 40 мл концентрированной серной кислоты (уд. вес 1,84).

К реакционной смеси, нагретой до 80° (примеч. 1), приливают в течение 40—60 минут при энергичном перемешивании (примеч. 2) свежеприготовленный раствор 14 г (0,19 моля) нитрита натрия в 100 мл воды. Перемешивание продолжается еще некоторое время после прибавления нитрита натрия, пока температура не снизится до 18—20°, после чего реакционную смесь оставляют на ночь. Выпавший осадок этилового эфира п-оксибензойной кислоты отфильтровывают, дважды промывают холодной водой и очищают кипячением в течение 10—15 минут с 10 г животного угля и 70 мл спирта. Осадок отфильтровывают в горячем состоянии и промывают на фильтре 40 мл горячего спирта.

К холодному фильтрату, при перемешивании и охлаждении (проточной водой), прибавляют воду до полного осаждения эфира п-оксибензойной кислоты (примеч. 3). Осадок отфильтровывают, дважды промывают небольшими порциями холодной воды и высушивают на воздухе.

Из водноспиртового фильтрата после отгонки спирта можно получить дополнительно 0,7 г этилового эфира п-оксибензойной кислоты. Выход продукта с т. пл. 109—112° составляет 20,7—22,5 г (58,9—62,5% теоретич.). После повторной очистки выход составляет 19,4—20,1 г (55,2—57,1% теоретич.) продукта с т. пл. 112—114°. Выход рассчитан на этиловый эфир п-аминобензойной кислоты.

Этиловый эфир п-оксибензойной кислоты хорошо растворяется в спирте, эфире, трудно—в воде, не растворяется в бензоле. Из водного спирта выкристаллизовывается в виде золотистых игл.

0,1086 вещ.: 0,2588 г CO<sub>2</sub>; 0,0616 г H<sub>2</sub>O.

Найдено %: С 64,99; Н 6,30;

C<sub>9</sub>H<sub>10</sub>O<sub>2</sub>. Вычислено %: С 65,06; Н 5,2.

## Примечания

1. Интенсивное перемешивание заметно влияет на чистоту и выход продукта реакции.

2. При повышении температуры выше  $80^\circ$  увеличивается количество образующейся п-оксibenзойной кислоты.

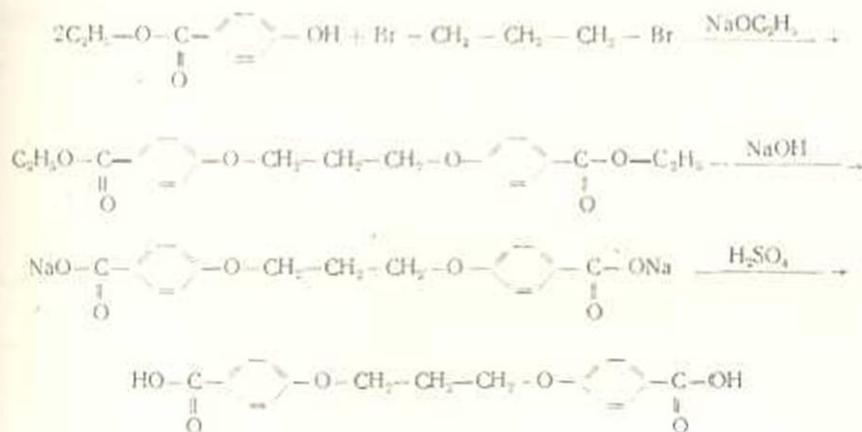
3. Полнота осаждения определяется отсутствием мути при прибавлении воды.

### Другие методы получения

1. Hewitt, Winnill, Soc. 91, 446; Reverdin, Bl[4] 3, 592.

2. Graebe, A. 139, 146; Hartmann, J. pr. [2] 16, 49; Stohmann, Rodatz, Hersberg, J. pr. [2] 36, 368.

### 1,3-пропилен-бис-п-оксibenзойная кислота



В круглодонную трехгорлую 0,5-литровую колбу, снабженную механической мешалкой с ртутным затвором, обратным холодильником и капельной воронкой, помещают 250 мл абсолютного спирта и постепенно вносят 12 г металлического натрия. К полученному алко-голяту при перемешивании добавляют 78 г (0,5 моля) этилового эфира п-оксibenзойной кислоты (т. пл.  $112-114^\circ$ ).

Реакционную смесь нагревают на водяной бане в течение 15—20 минут и затем добавляют 54 г (0,25 моля) дибромпропана (т. кип.  $158-162^\circ$ ). Нагревание продолжают при механическом перемешивании и равномерном кипении 6—8 часов и, заменив обратный холодильник нисходящим, отгоняют полностью спирт (примеч. 1).

После охлаждения реакционной смеси добавляют воду. Выделившийся нерастворимый в воде этиловый эфир 1,3-пропилен-бис-п-оксibenзойной кислоты отфильтровывают, промывают трижды небольшими порциями воды и высушивают на воздухе.

Полученный сырой продукт перекристаллизовывают из бензина (т. кип.  $75-80^\circ$ ).

Выход этилового эфира 1,3-пропилен-бис-п-оксibenзойной кислоты с т. пл.  $107-109^\circ$  составляет 52—54 г (59,4—61,6% теоретич.).

55 г этилового эфира 1,3-пропилен-бис-п-оксibenзойной кислоты помещают в 0,5-литровую круглодонную колбу, снабженную механи-

ческой мешалкой и обратным холодильником и прибавляют раствор 12,5 г едкого натра в 120 мл 50% этилового спирта.

Реакционную смесь нагревают на водяной бане в продолжении 6—8 часов, затем полностью отгоняют спирт и при охлаждении добавляют воду до растворения продукта реакции. Водный раствор экстрагируют эфиром для удаления неомыленного этилового эфира п-дифеноксипропандикарбоновой кислоты и подкисляют 50% серной кислотой до кислой реакции на конго.

Полученную кислоту отсасывают, тщательно промывают горячей водой и высушивают при 80—90°.

Выход 1,3-пропилен-бис-п-оксибензойной кислоты с т. пл. 310—312° составляет 44—45,2 г (94,2—96,7% теоретич., считая на этиловый эфир 1,3-пропилен-бис-п-оксибензойной кислоты). Полученная кислота практически нерастворима в органических растворителях и воде.

0,1120 г вещ.: 0,2624 г  $\text{CO}_2$ ; 0,0568 г  $\text{H}_2\text{O}$ .

Найдено %: С 64,70; Н 5,63;

$\text{C}_{17}\text{H}_{16}\text{O}_6$ . Вычислено %: С 64,55; Н 5,06.

### Примечания

1. Полное удаление спирта существенно влияет на выход этилового эфира п-дифеноксипропандикарбоновой кислоты.

2. Аналогичным способом можно получить п-(дифенокси-(метан-, бутан))-дикарбоновые кислоты.

### Другие методы получения

1. William J. P. Neisle. Rec. Trav. chim, 66, 433—42 (1947) [С. А. 894b (1948)].

Лаборатории фармацевтической  
химии АН Армянской ССР

Поступило 15 V 1954

Ս. Լ. Մեջոյան, Վ. Գ. Աճրիկյան, Հ. Լ. Մեջոյան, Վ. Վ. Գուլյարյան,  
Հ. Հ. Հարոյան, Ն. Ա. Բարիսյան, Լ. Ռ. Բաղդասարյան, Ա. Ա. Գոյսիկյան,  
Մ. Թ. Գրիգորյան

## ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ՊՐԵՊԱՐԱՏԻՎ ՍԻՆԹԵԶԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԵՂԱՆԱԿՆԵՐ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ֆիզիոլոգիական ակտիվությամբ ունեցող միացությունների բնագավառում մեր կատարած սինթեզները հաճախ ստիպում են օգտագործել ոչ միայն քիմիական գրականության մեջ նկարագրված մեթոդներն ու մատչելի էլանյութերը, այլև զբաղվել ինչպես հանրահայտ միացությունների ստացման նոր մեթոդների, այնպես էլ հաճախ պարզ, բայց գրականության մեջ նկարագրված միացությունների ստացման եղանակների մշակմամբ:

Հաշվի առնելով, որ նման աշխատանքները, որպես պրեպարատիվ սինթեզի եղանակներ, կարող են ընդհանուր հետաքրքրություն ներկայացնել օրգանական քիմիայով զբաղվողներին համար, մենք նպատակահարմար գտանք այս աշխատության մեջ ամփոփել մի քանի ինչպես հայտնի, այնպես էլ անհայտ օրգանական միացությունների ստացման եղանակներ, որոնք մշակվել և կիրառվել են մեր կողմից զանազան հետազոտական աշխատանքների ընթացքում:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

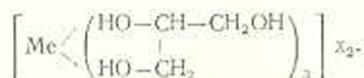
Л. М. Джанполадян

Молекулярные соединения хлористого магния с многоатомными спиртами

Многоатомные спирты, координируясь своими гидроксильными группами с центральным атомом магния, образуют комплексные циклические соединения по типу этилендиаминовых комплексных соединений. Впервые комплексные соединения этого типа получены Грюном, Гушманом и Бокишем [1, 2, 3]. Из кристаллогидратов солей меди, кобальта, никеля и хрома ими получены соединения с глицерином и этиленгликолем.

При действии глицерина на гидрат окиси кальция и хлористый кальций получены:  $\text{CaCl}_2 \cdot 3\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ ,  $\text{Ca}(\text{OH})_2 \cdot 3\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$  и  $\text{Ca}(\text{OH})_2 \cdot 2\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ .

В комплексных соединениях, содержащих три молекулы глицерина, предполагается строение такого типа, где от каждой молекулы глицерина, координированы к металлу по две гидроксильные группы:



С этиленгликолем комплексные соединения сернокислой меди образуются со следующим составом:  $\text{CuSO}_4 \cdot 2\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . Здесь к металлу координируются четыре гидроксильные группы этиленгликоля и 2 гидроксильные группы воды.

Соединений многоатомных спиртов с хлористым магнием не получено. В наших опытах ставилась задача получить их с этиленгликолем, триметиленгликолем и глицерином.

Экспериментальная часть

*Молекулярные соединения хлористого магния с этиленгликолем.* Безводный хлористый магний образует с этиленгликолем густую стекловидную массу, не поддающуюся кристаллизации. Молекулярное соединение хлористого магния с этиленгликолем нами получено путем нагревания гликоля с шестиводным хлористым магнием. Для этого 10,8 г шестиводного  $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  нагревали с 6,2 г этиленгликоля при  $140^\circ$  в течение одного часа. Через сутки в кристаллизаторе образовались кристаллы вещества, которое после промывания петролейным

эфиром соответствовало формуле:  $MgCl_2 \cdot C_2H_4(OH)_2 \cdot 2H_2O$ . Выход кристаллов 4,1 г, т. е. 33,3% теории.

0,1559 г вещ.: 0,1058 г  $CO_2$ ; 0,0890 г  $H_2O$ ;

0,1609 г вещ.: 0,1092 г  $CO_2$ ; 0,0951 г  $H_2O$ ;

0,4972 г вещ.: 0,2188 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

0,3574 г вещ.: 0,1587 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

0,1305 г вещ.: 10,0 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

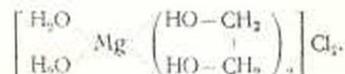
0,2610 г вещ.: 20,4 мл 0,1 н  $AgNO_3$ .

Найдено %: С 18,68, 18,51; Н 6,40, 6,61; Mg 9,61, 9,70; Cl 27,71, 27,75.

$MgCl_2 \cdot C_4H_{10}O_4$  вычислено %: С 18,76; Н 6,32; Mg 9,53; Cl 27,77. Температура плавления четкая: вещество плавится без разложения при 183,5°;  $D_4^{20}$  1,5622. Молекулярный объем: найдено 163,40, вычислено 182,20. Сжатие на одну молекулу 4,68; коэффициент сжатия 0,0663. Теплота образования 40,69 ккал.

Кристаллы мало гигроскопичны. Под микроскопом представлены в виде пластинок. При хранении в эксикаторе с хлористым кальцием вещество в отличие от молекулярных соединений с предельными одноатомными спиртами не выветривается.

Строение полученного вещества можно представить следующим образом:



*Молекулярные соединения хлористого магния с триметиленгликолем.* Триметиленгликоль с безводным хлористым магнием не образует кристаллического соединения. Молекулярное соединение было получено путем нагревания триметиленгликоля с шестиводным хлористым магнием. 10 г триметиленгликоля нагревалось с 4 г  $MgCl_2 \cdot 6H_2O$  в течение одного часа. По прошествии одного месяца в кристаллизаторе появились кристаллы. Отделив от маточного раствора и промыв абсолютным спиртом, вещество выдерживалось в эксикаторе с хлористым кальцием в течение 5 дней. Выход 5,2 г. Анализ показал, что полученное соединение соответствует  $MgCl_2 \cdot 3C_3H_8O_2 \cdot 2H_2O$ .

0,2418 г вещ.: 13,75 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,4179 г вещ.: 23,60 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,4899 г вещ.: 0,1509 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

0,4879 г вещ.: 0,1624 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

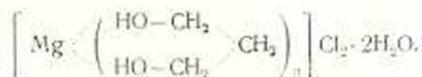
0,2295 г вещ.: 0,2489 г  $CO_2$ ; 0,1623 г  $H_2O$ ;

0,1613 г вещ.: 0,1732 г  $CO_2$ ; 0,1163 г  $H_2O$ .

Найдено %: Mg 6,81, 6,83; Cl 20,16, 20,02; С 29,57, 29,29; H 7,91; 8,07.

$MgCl_2 \cdot 3C_3H_8O_2 \cdot 2H_2O$ . Вычислено %: Mg 6,76; Cl 19,71; С 30,04; H 8,07.

Т. пл. 51°;  $D_4^{20}$  1,3039. Молекулярный объем: найдено 275,82, вычислено 287,01. Сжатие на 1 молекулу 2,25. Коэффициент сжатия 0,0207. Строение полученного соединения можно представить следующим образом:



Здесь к катиону магния координируются шесть гидроксильных групп триметиленгликоля; вода же связана с анионом.

*Молекулярное соединение хлористого магния с глицерином.* Перегнанный в вакууме безводный глицерин с безводным хлористым магнием образовал прозрачную стекловидную массу. 10 г глицерина, нагретого с 6 г шестиводного хлористого магния, через 10 дней образовал в кристаллизаторе кристаллы, лучеобразно расходящиеся во все стороны. Промытый охлажденным абсолютным спиртом и высушенный в эксикаторе кристаллглицеринат соответствовал формуле  $\text{MgCl}_2 \cdot 2\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ .

0,1538 г вещ.: 17,92 мл 0,1 н  $\text{AgNO}_3$ ;

0,1299 г вещ.: 14,69 мл 0,1 н  $\text{AgNO}_3$ ;

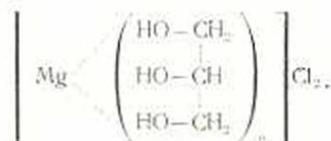
0,5112 г вещ.: 0,2083 г  $\text{Mg}_2\text{P}_2\text{O}_7$ ;

0,4773 г вещ.: 0,1957 г  $\text{Mg}_2\text{P}_2\text{O}_7$ .

Найдено % Cl 25,32, 25,25; Mg 8,90, 8,94.

$\text{MgCl}_2 \cdot 2\text{C}_3\text{H}_5(\text{OH})_3$ . Вычислено %: Cl 25,38; Mg 8,71. Т. пл. 171—173°.  $D_4^{20}$  1,5623. Молекулярный объем: найдено 183,06; вычислено 187,17; сжатие на одну молекулу 2,05. Коэффициент сжатия 0,0283. Теплота образования 37,95 ккал. Кристаллы игольчатые, мало гигроскопичные, водой разлагаются. Выход 6,5 г.

Строение полученного кристаллглицерината можно представить таким образом, где к магнию координированы шесть гидроксильных групп от двух молекул глицерина:



*Молекулярные соединения хлористого магния с этиленхлоргидрином.* Хлористый магний с этиленгликолем, как было сказано, образует сравнительно устойчивое соединение, включающее 2 молекулы воды. Здесь этиленгликоль координируется к Mg двумя атомами кислорода. Рассматривая хлоргидрин этиленгликоля как производное двухатомного спирта этиленгликоля, интересно было получить его молекулярные соединения с хлористым магнием.

В отличие от этиленгликоля реакция его хлоргидрина с безводным хлористым магнием протекает при разогревании.

14,4 г этиленхлоргидрина и 1,4 г хлористого магния нагревались на бане со сплавом Вуда. При охлаждении выделились кристаллы в виде коротких палочек, очень гигроскопичных, отвечающих формуле:  $MgCl_2 \cdot 6C_2H_4ClCH_2OH$ . Выход 6,7 г или 78% теории.

0,2218 г вещ.: 7,58 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,2314 г вещ.: 8,18 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,6190 г вещ.: 0,1220 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

0,5215 г вещ.: 0,0977 г  $Mg_2P_2O_7$ .

Найдено %: Cl 12,12, 12,53; Mg 4,30, 4,09.

$MgCl_2 \cdot 6C_2H_4OCl$ . Вычислено %: Cl 12,26; Mg 4,21. Т. пл. 101—103°.  $D_4^{20}$  1,3891. Молекулярный объем: найдено 416,26, вычислено 443,37; сжатие на одну мол. 4,51. Коэффициент сжатия 0,0672. Теплота образования 31,61 ккал.

Соединение хорошо растворяется в серном эфире, не растворяется в тетрахлорэтаноле и в петролейном эфире.

Полученное молекулярное соединение было вновь растворено в небольшом количестве этиленхлоргидрина и нагрето с 10 г четыреххлористого углерода. Выделенные кристаллы по внешнему виду резко отличались от исходного соединения и представляли собой удлиненные иголки (2—3 мм). Полученное соединение отвечало формуле:  $MgCl_2 \cdot 4C_2H_4ClCH_2OH$ .

0,1193 г вещ.: 5,72 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,1335 г вещ.: 6,33 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

0,3651 г вещ.: 0,1003 г  $Mg_2P_2O_7$ ;

0,4276 г вещ.: 0,1119 г  $Mg_2P_2O_7$ .

Найдено %: Cl 17, 16,82; Mg 6, 5,71.

$MgCl_2 \cdot 4C_2H_4OCl$ . Вычислено %: Cl 16,99; Mg 5,83. Т. пл. 106—108°.  $D_4^{20}$  1,4280. Молекулярный объем: найдено 291,98; вычислено 309,27; сжатие на одну молекулу 4,57. Коэффициент сжатия 0,0681.

Для повторения опыта 5 г этиленхлоргидрина, 0,85 г безводного хлористого магния и 20 г четыреххлористого углерода нагревались в колбе при 90—95° в течение 1 часа. Получено 4,8 г вещества, соответствующего молекулярному соединению с четырьмя молекулами хлоргидрина этиленгликоля.

При нагревании до 130° та же реакционная смесь выделила белую порошкообразную массу, отвечающую  $MgCl_2 \cdot 5C_2H_4ClCH_2OH$ . Вещество имеет более высокую т. пл. — 111—112°.

0,1144 г вещ.: 4,59 мл 0,1 н  $AgNO_3$ ;

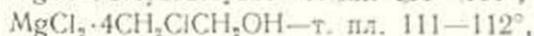
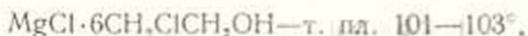
0,1164 г вещ.: 4,62 мл 0,1 н  $AgNO_3$ .

Найдено %: Cl 14,23; 14,15.

$MgCl_2 \cdot 5C_2H_4ClO$ . Вычислено %: 14,24. Молекулярный объем: найдено 341,90; вычислено 376,35; сжатие на одну молекулу 6,81. Коэффициент сжатия 0,1015.  $D_4^{20}$  1,4558.

Полученное соединение нестойкое и быстро выветривается, теряя органическую часть.

Таким образом, этиленхлоргидрин образует с хлористым магнием три соединения:



Из этих трех соединений пентаалкоголят выделяется с более высокой температурой плавления, наибольшим удельным весом, коэффициентом сжатия и малой прочностью.

Соединения, полученные с этиленхлоргидрином, отличаются от молекулярных соединений хлористого магния с этиленгликолем. Замена одной гидроксильной группы на хлор привела к образованию соединений, сходных по способу получения и по свойствам с молекулярными соединениями хлористого магния с одноатомными спиртами.

### Выводы

1. Этиленгликоль образует молекулярное соединение с  $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ . В состав комплекса входят 2 молекулы воды  $\text{MgCl}_2 \cdot 2\text{C}_2\text{H}_4(\text{OH})_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ .
2. Триметиленгликоль образует соединение  $\text{MgCl}_2 \cdot 3\text{C}_3\text{H}_8(\text{OH})_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . Если принять координационное число Mg равным шести, то можно предположить, что 2 молекулы воды координируются с анионом Cl.
3. Глицерин образует  $\text{MgCl}_2 \cdot 2\text{C}_3\text{H}_7(\text{OH})_3$ , где все гидроксильные группы координируются с Mg.
4. Многоатомные спирты с безводным  $\text{MgCl}_2$  кристаллических комплексов не образуют.
5. Этиленхлоргидрин образует три соединения  $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{CH}_2\text{ClCH}_2\text{OH}$ ;  $\text{MgCl}_2 \cdot 5\text{CH}_2\text{ClCH}_2\text{OH}$ ;  $\text{MgCl}_2 \cdot 4\text{CH}_2\text{ClCH}_2\text{OH}$ .

Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева

Поступило 3 III 1952

### ЛИТЕРАТУРА

1. Crün A. и Boeklsch F. В. 41, 3465 (1903).
2. Crün A. и Boedecker B. В. 43, 1051 (1910).
3. Crün A. и Husmann. В 43, 1231 (1910).

## Է. Մ. Ջանփոլազյան

## ՄԱԳՆԵԶԻՈՒՄ ՔԼՈՐԻԴԻ ՄՈԼԵԿՈՒԼՅԱՐ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԲԱԶՄԱՏՈՄ ԱՊԻՐՏՆԵՐԻ ՇԵՏ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Բազմատոմ սպիրտներն ասաջացնում են միացություններ պղնձի, կորալաի, նիկելի և քրոմի աղերի հետ: Ստացված են գլիցերինի մոլեկուլյար միացություններ կալցիում քլորիդի և կալցիում Նիգրոֆոսիդի հետ: Կատարված սինթեզների նպատակն էր՝ ստանալ բազմատոմ սպիրտների մոլեկուլյար միացություններ մագնեզիում քլորիդի հետ: Մագնեզիում քլորիդի անջուր աղը բազմատոմ սպիրտների հետ բյուրեղային միացություններ չի տալիս, իսկ վեց մոլեկուլ ջուր պարունակող աղը այդ սպիրտների հետ երկար պահելուց հետո ասաջացնում է բյուրեղային մոլեկուլյար միացություններ:

Էթիլեն գլիկոլը տալիս է միացություն, որտեղ մեկ մոլեկուլ մագնեզիում քլորիդի հետ կոորդինացված են երկու մոլեկուլ էթիլեն գլիկոլ և երկու մոլեկուլ ջուր՝  $MgCl_2 \cdot 2C_2H_4(OH)_2 \cdot 2H_2O$ : Տրիմեթիլեն գլիկոլի միացությունը մագնեզիում քլորիդի հետ պարունակում է երկու մոլեկուլ ջուր՝  $MgCl_2 \cdot 2C_3H_7(OH)_2 \cdot 2H_2O$ : Եթե մագնեզիումի կոորդինացիան թիվը բնդունենք հավասար վեցի՝ ապա կարելի է ենթադրել, որ այս միացության մեջ երկու մոլեկուլ ջուրը կոորդինացվել է քլոր անիոնի հետ: Գլիցերինը տալիս է՝  $MgCl_2 \cdot 2C_3H_5(OH)_3$ , այստեղ գլիցերինի բոլոր Նիգրոֆոսիլ իմբերը կոորդինացված են մագնեզիումի հետ:

Էթիլենգլյուկոլինը տալիս է 3 մոլեկուլյար միացություններ անջուր մագնեզիում քլորիդի հետ՝  $MgCl_2 \cdot 6CH_2ClCH_2OH$ ,  $MgCl_2 \cdot 5CH_2ClCH_2OH$ ,  $MgCl_2 \cdot 4CH_2ClCH_2OH$ : Այս միացություններն իրենց ստացման եղանակով և հասկոթյուններով ազնվի նման են միատոմային սպիրտների և մագնեզիում քլորիդի մոլեկուլյար միացություններին:

## СТРОИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

М. В. Касьян, И. А. Тер-Азарьев

## Динамика износа инструмента при резании камня

Исследование закономерностей износа инструмента при резании камней позволило установить различный характер износа режущего инструмента в зависимости от физико-механических свойств обрабатываемого камня, материала, инструмента и режимов резания [1, 2].

На фиг. 1 представлен резец, изношенный в процессе обработки туфа.

Износ инструмента при обработке туфа характерен тем, что в течение короткого промежутка времени резания вместо режущей хромки появляется плоская площадка, наклоненная к передней грани под некоторым углом. Ширина этой площадки  $\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}$ . Интенсивности изменения  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  не постоянны и зависят от целого ряда факторов, из которых скорость резания и подача являются наиболее существенными.

В таблице 1 приведены некоторые данные при фрезеровании армянского туфа резцом, армированным твердым сплавом ВК-8.

Не вдаваясь в физическую сущность влияния скорости резания на интенсивность износа, являющееся предметом специального исследования, отметим только то весьма примечательное, обстоятельство,

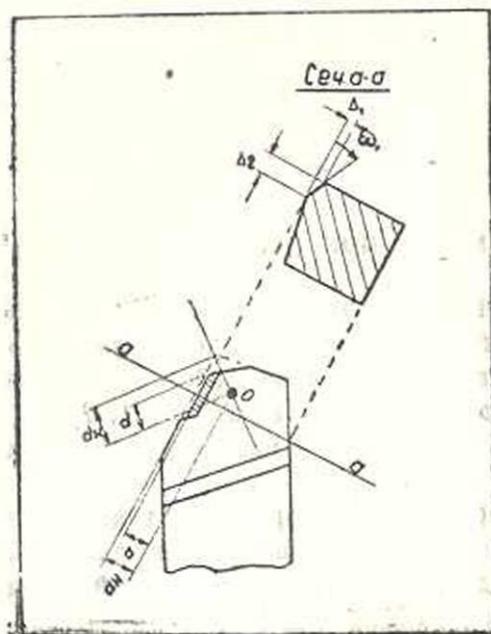
Таблица 1

Режим резания			Текущее время в мин.				Геометрия инструмента
V м/мин	r мм	S <sub>z</sub> мм/зуб	120 мин.		260 мин.		
			Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	
27,5	6	0,79	0,125	0,2	0,225	0,565	α = 50°, γ <sub>2</sub> = 11°, χ = 9 - 10°, γ = 0, τ = 0, λ = 0
64,0	6	0,765	0,175	0,39	0,315	0,90	
145,0	6	0,53	0,215	0,5	0,38	0,98	
187,0	6	0,435	0,24	0,46	0,36	0,95	
255,0	6	0,45	0,305	0,62	0,47	1,23	
424,0	6	0,43	0,495	1,19	0,17	2,12	

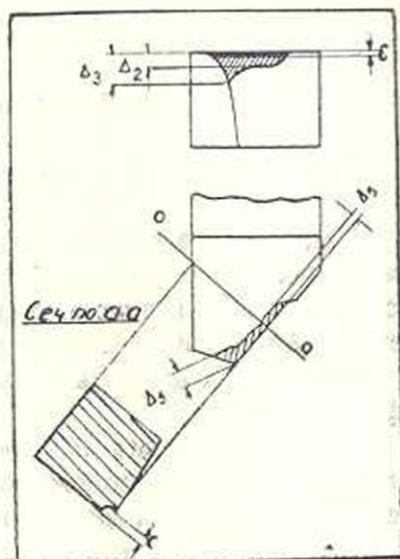
что при обработке туфов площадка износа по главной задней грани инструмента не касательна к плоскости резания, а составляет с ней определенный угол  $\omega_1$  (см. фиг. 1).

Износ резца при обработке базальта имеет иной характер (фиг. 2). Помимо износа по задней грани, на передней грани и режущей

кромке появляются признаки износа, сначала в виде отдельных местных разрушений, образующих в дальнейшем луночку с размытой со стороны задней грани полочкой, в виде уступа.



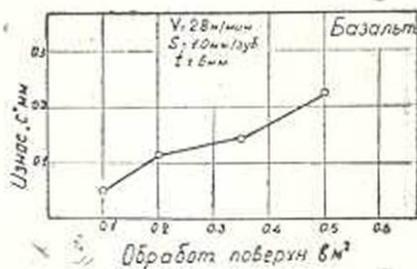
Фиг. 1.



Фиг. 2.

Явления подобного износа обнаруживаются при скорости резания  $V > 25$  м/мин. и протекают тем интенсивнее, чем больше скорость.

На фиг. 3 и 4 приведена динамика изменения высоты уступа в зависимости от скорости резания и продолжительности работы инструмента.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

На фиг. 5 приведены кривые износа различных изнашиваемых элементов резца с изменением скорости.

Как видно из приведенных кривых, интенсивность износа по задней грани  $\Delta_2$  с увеличением скорости резания вначале уменьшается, затем растет. Интенсивность же износа по передней грани непрерывно возрастает.

Характер износа инструмента при обработке гранитов, существенно не отличается от характера износа при обработке базальта с той лишь разницей, что скорость резания, в практически используемом диапазоне 7—16 м/мин., не оказывает существенного влияния на характер износа, изменяя интенсивность его протекания.

Характер износа инструмента при обработке мраморов отличается той особенностью, что начальная стадия резания характеризуется отсутствием износа по задней грани и округлением режущей кромки. При резании мраморов с большой прочностью в начальной же стадии обнаруживается округление и разрушение режущей кромки. В дальнейшем с увеличением продолжительности работы инструмента наличие указанного округления приводит к заметному износу по задней грани, постепенно увеличивающемуся.

На фиг. 6 приведена динамика протекания износа по отдельным его элементам при обработке арзакендского мрамора с прочностью на сжатие 800 кг/см<sup>2</sup>.

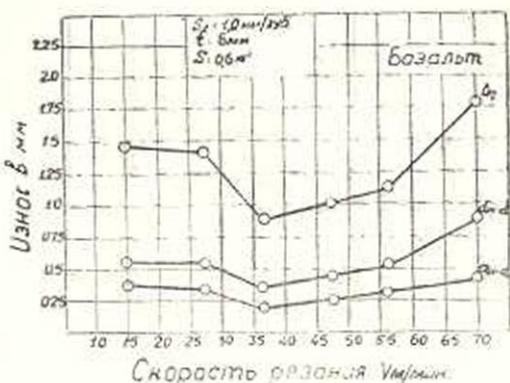
Таким образом, описанные выше особенности износа режущего инструмента показывают различный его характер с изменением физико-механических свойств обрабатываемых камней.

Если мягким породам, типа туфов, свойственно изнашивать инструмент по задней грани, то твердые породы изнашивают инструмент и по задней и по передней граням. Прочные известняки, как, например, прочные мрамора, имеют другую крайность в сравнении с туфами, а именно—свойство интенсивно изнашивать инструмент по передней грани.

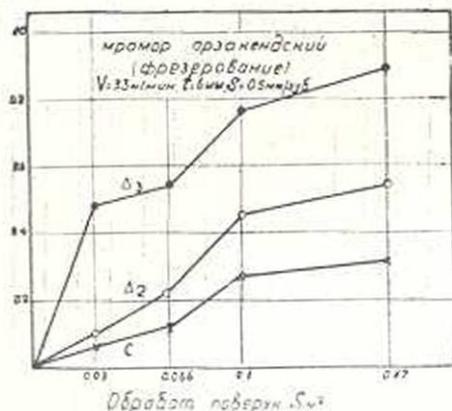
Пренебрегая некоторой пластичностью мраморов, необходимо отметить, что все указанные породы камней, резанием которых исследовался характер износа, принадлежат к группе хрупких тел.

Отсюда мы, казалось бы, вправе вообще предположить одинаковость характера воздействия всех камней (хрупких) на инструмент при разных интенсивностях этого воздействия. Однако опыт показывает несостоятельность такого предположения ввиду недоучета соотношения некоторых физико-механических свойств различных пород камней—абразивности и прочности, приводящих к различной интенсивности износа по передней и задней граням.

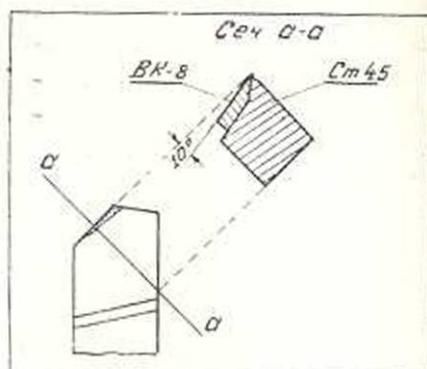
Для выявления влияния интенсивности износа задней грани на износ по передней грани при обработке туфа был изготовлен специальный резец, представленный на фиг. 7. Этот резец разрешает резко умень-



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

шать интенсивность износа по задней грани за счет армирования задней грани твердым сплавом ВК-8. При работе этим резцом было установлено интенсивное образование лунки по передней грани, характерное для случаев обработки твердых пород.

Таким образом, постановка указанного простого эксперимента убеждает в том, что разнохарактерность износов при обработке различных по физико-механическим свойствам пород — результат воздействия на инструмент обрабатываемого материала с разной интенсивностью по передней и задней граням. Различное их сочетание приводит к различным видам износа. Так, например, при обработке базальта со скоростью резания  $V < 25 \text{ м/мин}$ , износ по передней грани протекает с малой интенсивностью и обнаруживается лишь непосредственно на режущей кромке; с увеличением скорости резания износ по передней грани прогрессирует и в дальнейшем растет примерно с постоянной интенсивностью (см. фиг. 3).

При обработке туфа интенсивность износа по передней грани мала ввиду малой прочности туфа, а интенсивность износа по задней грани велика ввиду большой абразивности туфа.

Указанная даже малая интенсивность износа по передней грани является причиной наклона площадки износа под углом  $\omega_1 = \arctg \frac{\Delta_1}{\Delta_2}$  (см. фиг. 1).

Справедливость этого положения подтверждается тем обстоятельством, что с увеличением подачи на зуб увеличивается  $\omega_1$ , ввиду большой толщины отделяемых элементов стружки, а следовательно, удаления центра давления от режущей кромки.

В таблицах 2 и 3 приведены некоторые данные, подтверждающие сказанное выше.

Таблица 2

Подача на зуб	Обработанная поверхность 2,4 м <sup>2</sup>			Обработанная поверхность 4,8 м <sup>2</sup>			Геометрия инструм. и режимы резания
	износ в мм		tg ω <sub>1</sub>	износ в мм		tg ω <sub>1</sub>	
	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>		Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>		
0,19	0,22	0,6	0,367	0,3	0,94	0,319	V=187 м/мин, t=6 мм γ=50°, γ <sub>1</sub> =11°, α=9°, γ=0
0,435	0,2	0,395	0,507	0,285	0,66	0,432	
1,0	0,125	0,215	0,582	0,165	0,32	0,515	

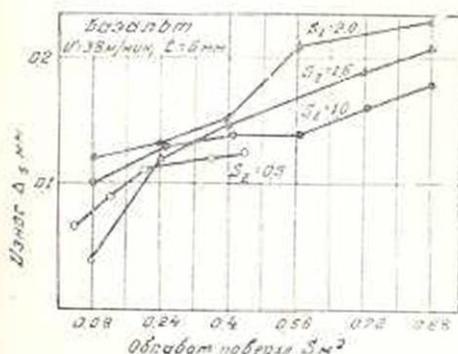
Таблица 3

Подача на зуб	Обработанная поверхность 0,8 м <sup>2</sup>			Обработанная поверхность 4,8 м <sup>2</sup>			Геометрия инструм. и режимы резания
	износ в мм		tg ω <sub>1</sub>	износ в мм		tg ω <sub>1</sub>	
	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>		Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>		
0,26	0,27	0,76	0,355	0,68	2,69	0,252	V=64 м/мин, t=6 мм γ=50°, γ <sub>1</sub> =11°, α=9°, γ=0
1,25	0,1	0,23	0,435	0,21	0,77	0,273	
1,85	0,085	0,18	0,472	0,175	0,49	0,358	
3,0	0,078	0,16	0,488	0,215	0,45	0,478	

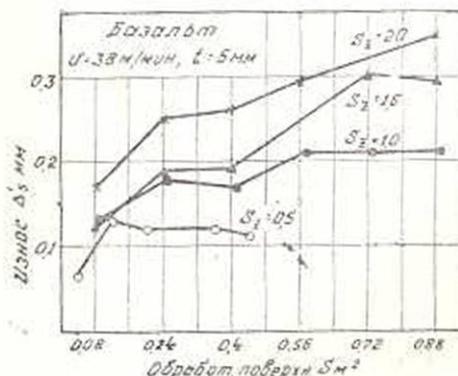
При обработке мрамора ввиду малой его абразивности, но большой прочности износ протекает в основном по передней грани.

Вопросы, связанные с протеканием износа по задней грани при обработке туфов и базальтов, достаточно полно оценены в соответствующих работах [1] при весьма скудном материале об износе инструмента по передней грани, особенно с изменением такого существенного фактора, как подача. Ниже, в таблице 4, приведены некоторые данные при обработке ереванского базальта прочностью 1460 кг/см<sup>2</sup>.

На фиг. 8 и 9 представлена динамика изменения Δ<sub>1</sub> и Δ<sub>2</sub> с увеличением продолжительности работы инструмента.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Как видно из приведенных кривых и таблицы, износ по передней грани не увеличивается бесконечно, а стремится к своему предельному

Таблица 4

Обработанная поверхность, м <sup>2</sup>	Режимы резания			Износ в мм				
	V м/мин.	t мм	S <sub>z</sub> мм/зуб	Δ <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>	c	Δ' <sub>1</sub>	Δ <sub>2</sub>
0,04	38	5	0,5	0,21	0,35	0,015	0,065	0,065
0,12	38	5	0,5	0,47	0,64	0,045	0,13	0,09
0,2	38	5	0,5	0,59	0,82	0,045	0,12	0,11
0,36	38	5	0,5	0,87	1,2	0,05	0,12	0,12
0,44	38	5	0,5	1,01	1,35	0,05	0,11	0,125
0,09	38	5	1,0	0,3	0,58	0,03	0,13	0,1
0,25	38	5	1,0	0,485	0,89	0,06	0,18	0,12
0,41	38	5	1,0	0,61	0,95	0,1	0,17	0,14
0,57	38	5	1,0	0,81	1,24	0,14	0,21	0,14
0,73	38	5	1,0	0,94	1,35	0,14	0,21	0,16
0,9	38	5	1,0	1,04	1,46	0,15	0,21	0,18
0,98	38	5	1,6	0,24	0,4	0,03	0,125	0,085
0,24	38	5	1,6	0,4	0,6	0,065	0,19	0,12
0,4	38	5	1,6	0,55	0,85	0,08	0,19	0,145
0,72	38	5	1,6	0,69	1,02	0,11	0,3	0,19
0,88	38	5	1,6	0,8	1,1	0,145	0,295	0,21
0,08	38	5	2,0	0,31	0,56	0,04	0,17	1,12
0,24	38	5	2,0	0,51	0,8	0,08	0,25	0,13
0,4	38	5	2,0	0,6	1,0	0,1	0,26	0,15
0,56	38	5	2,0	0,67	1,05	0,145	0,295	0,21
0,88	38	5	2,0	0,785	1,2	0,155	0,35	0,23

состоянию для данной подачи ввиду наличия не менее интенсивного износа по задней грани, снимающего часть износа по передней грани. Это состояние соответствует равномерному износу по обеим граням инструмента, характеризуемое стабилизацией.

### В ы в о д ы

1. В процессе воздействия обрабатываемого камня обе рабочие грани режущего инструмента подвергаются износу. Разная интенсивность износа по граням при обработке мягких пород создает впечатление одностороннего износа. Фактически при большой интенсивности износа по задней грани и малой интенсивности по передней наблюдается лишь износ по задней грани и он как-бы снимает износ по передней.

Однако даже малая интенсивность износа по передней грани при обработке туфов в сочетании с износом по задней, приводит к наклону площадки износа на угол  $\omega_1$ .

Угол наклона этой площадки является функцией скорости резания и подачи.

2. При обработке твердых пород камней общее состояние и поведение режущей кромки, являющееся следствием разной интенсивности износа рабочих граней, значительно отличается от поведения режущей кромки при обработке туфов.

При обработке твердых пород износ по передней грани проявляется образованием уступа вдоль режущей кромки и зависит от скорости резания и подачи.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Касьян М. В., Акопов А. А., Тер-Азарьев И. А. Характеристика износа режущего инструмента при обработке туфа, базальта и гранита. Известия АН Армянской ССР (физ.-мат., естеств. и техн. науки), т. III, № 4, 1950.
2. Акопов Р. В. К вопросу о режущих способностях различных инструментальных материалов при обработке камня. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 4, 1952.

Մ. Վ. Կասյան, Ի. Ա. Տեր-Ազարեվ

### ԳՈՐԾԻՔԻ ՄԱՇՄԱՆ ԴԻՆԱՄԻԿԱՆ ՔԱՐԶԱՏՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են ВК-8 կարծր համաձուլվածքից պատրաստված հատուկ գործիքի՝ բնական քարերի հատման ժամանակ մաշմանը վերաբերող չիմնական ավյալները: Էքսպերիմենտալ ավյալները հիման վրա պարզված է, որ փափուկ և կարծր ապարները մշակման ժամանակ մաշման տարրեր բնույթը հետևանք է մաշումների սրտչակի դուրսգրման ըստ գործիքի առջևի ու հետևի նիստերի:

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Г. Г. Костаян

Рецензия на книгу проф. Г. И. Атабекова „Дистанционный принцип защиты дальних электропередач“

Изд. Академии наук Армянской ССР, 1953

Рецензируемая книга проф. Г. И. Атабекова посвящена теоретическому рассмотрению применения дистанционного принципа в защите линий высокого напряжения большой протяженности и сильно нагруженных линий электропередачи.

Вопросы релейной защиты таких линий приобрели в СССР важное значение в связи со строительством дальних электропередач 400 *кв* Куйбышевская ГЭС—Москва и Сталинградская ГЭС—Москва, а также в связи с проектированием, сооружением и эксплуатацией продольно-компенсированных линий электропередачи, несущих значительные нагрузки.

В современной научно-технической литературе до сих пор отсутствовали книги по теории релейной защиты и сетевой электроавтоматике дальних электропередач. Рецензируемая книга является в этой области первой. В ней показан исторический ход развития дистанционного принципа в СССР и теоретически развиты и уточнены основные, принципиальные положения, связанные с применением дистанционных реле в устройствах защиты и электроавтоматики дальних электропередач.

Книга состоит из введения, пяти глав и приложений.

В введении пояснена, в свете решений высших партийных и советских органов, задача внедрения автоматизации в энергосистемах и сформулированы основные вопросы, подлежащие рассмотрению в книге.

В первой главе разобраны характеристики дистанционных реле разных типов и принципы их конструктивного выполнения. Показано, что дистанционные реле с одинаковыми характеристиками могут быть осуществлены на базе различных систем: электромагнитной, индукционной, поляризованной и электронно-ионной. Изложена теория односистемных дистанционных реле от двухфазных коротких замыканий и от замыканий на землю.

Следует заметить, что в сети 110 *кв* одной из энергосистем Союза имеется многолетний опыт эксплуатации односистемных дистанционных защит от замыканий на землю, в основу которых положен прин-

цепи, предложенный автором книги; несмотря на большие величины переходных сопротивлений в месте замыкания на землю в высокогорных условиях сети, опыт эксплуатации этой защиты положителен.

В книге не рассмотрено поведение этой защиты при неполнофазном режиме; между тем для линий электропередач, снабженных устройствами однофазного отключения и автоматического повторного включения, этот вопрос представляет практический интерес.

Желательно было бы также осветить в книге возможность компенсации влияния аргумента (угла) комплексного параметра  $A_{22(1)}^1$ , входящего в выражение (2,53), за счет изменения внутреннего сдвига измерительного органа.

Для линий малой и средней протяженности, для которых  $A_{22(1)}^1 = 1$ , этот вопрос не возникает.

Вторая глава посвящена способам включения цепей тока и напряжения дистанционных реле дальних электропередач. Исследование проведено на основе комплексных схем замещения, в которых схемы прямой, обратной и нулевой последовательностей представлены в виде четырехполюсников. Пользование обобщенными параметрами четырехполюсников дает возможность учесть различные неоднородности линий: конденсаторы продольной компенсации, реакторы поперечной компенсации, влияние емкостной проводимости линии.

К сожалению, в книге не приведены электрические параметры линий электропередачи 400 кВ (на стр. 64 и 65 даны параметры линий 154 кВ).

В случае линий малой и средней протяженности достаточным является учитывать только последовательные сопротивления „Z“; при этом  $A_{11} = A_{22}$ ,  $A_{12} = Z$ ,  $A_{21} = 0$  и все выводы, приводимые в книге, сохраняют силу. Поэтому рецензируемая книга представляет интерес не только применительно к дальним электропередачам 400 кВ, но и к высоковольтным сетям напряжением 110—220 кВ.

В конце главы 2 автор ссылается на сравнение величин зон, защищаемых односистемным дистанционным реле типа ИСБ—182 и направленным дистанционным реле типа ИСБ—183, при переходных сопротивлениях в месте короткого замыкания, однако само аналитическое сравнение в книге не приводится.

Третья и четвертая главы посвящены исследованию дистанционных реле при полнофазных и неполнофазных режимах работы электропередачи, с учетом возможного неравенства и расхождения по фазе э. д. с. эквивалентных источников по концам электропередачи. В книге дана критическая оценка ряду теоретических работ, опубликованных в иностранной печати, и пояснены преимущества предложенного автором графо-аналитического метода исследования работы дистанционных реле, основанного на построении диаграмм в комплексной плоскости проводимостей. Этот метод иллюстрирован четырьмя числовыми примерами (3,1—3,4), наглядно показывающими его эффективность. В отличие от сложных семейств ортогональных круговых

диаграмм полных сопротивлений с неравномерной шкалой углов, автор получает концентрические окружности с равномерной шкалой, построение которых облегчено наличием готовых таблиц (4.1 и 4.2) и числовых примеров.

Данный графо-аналитический метод нашел применение в практике проектирования релейной защиты в Мосэнергопроекте.

Следует заметить, что методы использования комплексных плоскостей сопротивлений и проводимостей имеют определенные преимущества и недостатки: пользование комплексной плоскостью сопротивлений представляет удобства при начальном подборе характеристик дистанционных реле, в то время, как пользование комплексной плоскостью проводимостей облегчает проверку работы дистанционных реле при различных режимах электропередачи. Поэтому эти методы следует рассматривать не как конкурирующие друг с другом, а как взаимно дополняющие методы, имеющие определенные области применения.

Нам представляется, что главу 4 следовало бы пополнить анализами, касающимися поведения реле направления мощности при не-однофазных режимах работы электропередачи.

Пятая глава книги посвящена рассмотрению общих принципов выполнения защиты дальних электропередач, требований, предъявляемых к релейной защите и сетевой электроавтоматике, и условий работы отдельных типов реле, в зависимости от особенностей электропередачи. Эта глава изложена слишком кратко и нуждается в дополнении, особенно в связи с практической возможностью длительной работы линии электропередачи с одной отключенной фазой. Кроме того, к настоящему времени появились сведения о возможности использования для цепей релейной защиты радиотрансляционных линий, работающих на водных сантиметрового диапазона. Этот вопрос может представлять интерес с точки зрения защиты магистральных высоковольтных линий электропередачи ответственного назначения в связи с большим числом каналов, позволяющих по-новому решать вопросы дистанционно-направленных и дифференциально-фазных высокочастотных защит.

В рецензируемой книге имеется ряд опечаток.

На стр. 59 в числителе выражения (2.22) должна быть единица (вместо 2). На стр. 99 (4-я строка сверху) и стр. 100 (5-я строка снизу) в выражение для радиуса окружности должна входить величина  $(A_{12})$  вместо  $(A_{22})$ .

На стр. 101 (5-я строка снизу) в правой части выражения перед цифрой  $77^\circ$  пропущен знак минус. В выражении „ $\Delta Z$ ” для реле фазы „ $A$ ” в таблице 4,1 (стр. 139) пропущены множитель „3” в знаменателе и знак минус перед первой скобкой в числителе.

Несмотря на допущенные опечатки следует признать, что книга издана хорошо: она богато иллюстрирована высококачественно выполненными рисунками и хорошо оформлена.

Труд проф. Г. И. Атабекова, являющийся в литературе первой книгой, посвященной теоретическому исследованию вопросов защиты дальних электропередач, представляет ценный вклад в отечественную науку. Книга написана автором, внесшим много оригинального в развитие отечественной техники релейной защиты. Она читается с интересом и принесет несомненно большую пользу инженерам, работающим в службах релейной защиты и сложной автоматике энергосистем, а также студентам старших курсов энергетических факультетов.

Выпуск в свет этой книги является большой творческой заслугой автора. Прошло 4 года с тех пор, как проф. Г. И. Атабеков опубликовал свою предыдущую монографию „Релейная защита высоковольтных сетей“, переведенную и изданную затем в странах народной демократии (в Венгрии и Румынии).

Неуклонно работая над дальнейшим развитием отечественной релейной техники и, в частности над созданием теоретических основ релейной защиты линий электропередачи большой протяженности и сильно нагруженных линий электропередачи, автор выпустил ныне в свет книгу, которую советский читатель встретит с большим удовлетворением.

Рецензируемая книга, изданная Академией наук Армянской ССР малым тиражом, получила распространение, не поступив в книготоргующую сеть городов Советского Союза. Поэтому она не дошла до многих работников энергосистем и учащихся вузов.

Необходимо, чтобы после внесения в книгу соответствующих исправлений и добавлений, она была выпущена в свет вторым изданием и могла бы быть приобретена читателями через книжные магазины городов Советского Союза.

Поступило 5 VI 1954