

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян, А. П. Тамадян

О полноте в одном классе нежордановых областей

1. Рассмотрим односвязную область D , расположенную в ограниченной части плоскости, и класс $H_2(D)$ функций $f(z)$, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модуля по площади D . Вопросу о полноте системы полиномов в классе $H_2(D)$, т. е. вопросу о справедливости соотношения

$$\inf_{\{P(z)\}} \int_D |f(z) - P(z)|^2 dx dy = 0$$

для любой $f(z) \in H_2(D)$ посвящен большой цикл работ.

Из полученных в этом направлении результатов отметим теорему Маркушевича-Фарреля, согласно которой полнота имеет место, если D — область Каратеодори, т. е. если граница Γ области D совпадает с границей той из дополнительных к $\bar{D}$ областей, которая содержит бесконечно-удаленную точку (обозначим такую область через D_∞). Непринадлежность области D к классу Каратеодори может быть вызвана или наличием в составе Γ континуальных разрезов, т. е. континуумов, содержащихся в множестве внутренних точек замыкания D , или же таких континуумов, которые принадлежат границе одной из конечных дополнительных к $\bar{D}$ областей и не принадлежат границе D_∞ .

Характерным носителем особенностей первого типа является область, ограниченная двумя внутренне соприкасающимися окружностями, например, область

$$|z| < 1, \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

а также любая область топологически ей эквивалентная.

На примере подобного рода областей М. В. Келдышем впервые была обнаружена [1, 3] зависимость полноты от метрических свойств области (в данном случае от локальных метрических свойств области вблизи кратной граничной точки).

В настоящей статье рассматривается другой характерный класс областей, для которых непринадлежность к классу Каратеодори

объясняется наличием множества континуальных разрезов, в то время как дополнение к D связано и состоит из одной области D_∞ .

Устанавливается достаточный метрический критерий полноты в рассматриваемом классе областей. Получение этого критерия и следствий из него связано с исследованием тех метрических факторов, которые обуславливают полноту в произвольной односвязной области.

2. Пусть P — совершенное, нигде не плотное множество точек, расположенных на окружности $|z|=1$.

Рассмотрим множество L_P отрезков

$$\arg z = \arg t, \quad 1-h \leq |z| \leq 1, \quad (0 < h < 1),$$

для всевозможных точек $t \in P$, т. е. ту часть радиусов, проведенных из начала координат ко всем точкам P , которую отсекает кольцо $1-h \leq |z| \leq 1$.

Пусть D_P — дополнение к рассматриваемому множеству отрезков относительно круга $|z| < 1$. D_P представляет, очевидно, односвязную область, граница Γ_P которой состоит из окружности $|z|=1$ и множества L_P .

Свойства области D_P , могущие влиять на полноту в D_P , полностью определяются, таким образом, совершенным нигде не плотным множеством P .

Теорема. Система полиномов полна в области D_P , если можно указать счетное всюду плотное на P множество M так, что для любой точки этого множества существуют покрывающие ее отрезки Δ сколь угодно малой длины с условием

$$(A) \quad \text{mes}(\Delta \cdot CP) < \exp \left\{ - \exp \frac{C_1 h}{\text{mes} \Delta} \right\},$$

где CP — дополнение к P относительно окружности $|z|=1$, $C_1=31$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что точки $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, составляющие множество M , принадлежат P .

Пусть $\Delta_{k,n}$ ($n=1, 2, \dots$) совокупность дуг окружности $|z|=1$, стягивающихся (при $n \rightarrow \infty$) к z_k , для которых выполнено неравенство (A). Мы будем считать, что при разных k $\Delta_{k,n}$ не пересекаются, так как в противном случае отбросим конечное число $\Delta_{k,n}$ для каждого k и оставшиеся отрезки вновь перенумеруем по n ($n=1, 2, \dots$), а также, что дл. $\Delta_{k,n} < \frac{1}{2n}$ при любом k .

Пусть $z_{k,n}$ есть центр дуги $\Delta_{k,n}$. Через D_k обозначим область, получаемую из единичного круга $|z| < 1$ удалением k отрезков

$$\arg z = \arg z_i, \quad 1-h \leq |z| \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, k,$$

а через $D_{k,n}$ — ту область, которая дополняет до единичного круга систему отрезков

$$\arg z = \arg z_{i,n}, \quad 1-h + \text{дл.} \Delta_{i,n} \leq |z| \leq 1, \quad i=1, 2, \dots, k.$$

функция $w(z)$ пусть отображает область D_p на круг $|w| < 1$ ($w(0) = 0$, $w'(0) > 0$), $w_k(z)$ отображает D_k на $|w| < 1$ ($w_k(0) = 0$, $w'_k(0) > 0$) и $w_{k,n}(z)$ — отображает $D_{k,n}$ на круг $|w| < 1$ ($w_{k,n}(0) = 0$, $w'_{k,n}(0) > 0$).

Области D_k при $k \rightarrow \infty$ сходятся к D_p в смысле Каратеодори как к своему ядру (см. [2]), а области $D_{k,n}$ при $n \rightarrow \infty$ — к D_k . В силу теоремы Каратеодори [1] из этого следует, что на каждом замкнутом подмножестве $F \subset D_p$ $w_k(z)$ равномерно сходится к $w(z)$, а $w'_k(z)$ — к $w'(z)$, а также на каждом замкнутом подмножестве D_k $w_{k,n}(z)$ равномерно сходится к $w_k(z)$, а $w'_{k,n}(z)$ к $w'_k(z)$. Отсюда нетрудно заключить, что при любом фиксированном целом $m > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{D_p} |w'_k(z)[w(z)]^m - w'_{k,n}(z)[w_k(z)]^m|^2 dx dy = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{|z| < 1} |w'_k(z)[w(z)]^m - w'_{k,n}(z)[w_{k,n}(z)]^m|^2 dx dy = 0, \quad k=1,2,\dots$$

Известно (2), что для полноты достаточно выполнение соотношений

$$\inf_{\{\Phi\}} \iint |w'(z)[w(z)]^m - \Phi(z)|^2 dx dy = 0$$

для всех целых $m \geq 0$.

Таким образом, для доказательства полноты в D_p достаточно показать, что для любых фиксированных целых $m \geq 0$ и $k \geq 1$

$$\inf_{\{Q(z)\}} \iint_{D_p} |w'_{k,n}(z)[w_{k,n}(z)]^m - Q(z)|^2 dx dy \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

где нижняя грань берется по всевозможным полиномам.

На дуге $\Delta_{i,n}$ единичной окружности отметим две точки $a_{i,n}$ и $b_{i,n}$ так, чтобы точка $z_{i,n}$ была расположена между $a_{i,n}$ и $b_{i,n}$, причем расстояние $a_{i,n}, b_{i,n}$ как до $z_{i,n}$, так и до концов дуги $\Delta_{i,n}$ превосходило $\frac{1}{6}$ дл. $\Delta_{i,n}$. Через $A_{i,n}, B_{i,n}$ обозначим концы дуги $\Delta_{i,n}$ ($\arg A_{i,n} > \arg B_{i,n}$).

Пусть $H_{i,n}$ означает множество точек, удовлетворяющих условию

$$\arg B_{i,n} \leq \arg z \leq \arg A_{i,n}, \quad 1-h < |z| \leq 1$$

а $G_{i,n}$ — дополнение к $\sum_{i=1}^k H_{i,n}$ относительно единичного круга. Через

$\mathcal{A}_{i,n}$ обозначим кривую, составленную из двух отрезков:

$$\operatorname{arg} z = a_{i,n}, \quad \operatorname{arg} z = b_{i,n}, \quad 1 - h + \frac{1}{2} \text{дл. } \Delta_{i,n} \leq |z| \leq 1 + \frac{1}{2n}$$

и из дуги окружности $|z| = 1 - h + \frac{1}{2} \text{дл. } \Delta_{i,n}$, соединяющей эти отрезки.

Кривые $l_{i,n}$ ($i=1, 2, \dots, k$) разбивают круг $|z| < 1 + \frac{1}{2n}$ на $k+1$ область; ту из них, которая содержит начало координат, мы обозначим через $R_{k,n}$. Граница области $R_{k,n}$ состоит из кривых $l_{i,n}$ ($i=1, 2, \dots, k$) из дуг окружности $|z| = 1 + \frac{1}{2n}$; совокупность этих дуг обозначим через $L_{k,n}$.

Из определения функций $w_{k,n}(z)$ следует, что их можно аналитически продолжить через любую дугу окружности $|z| = 1$, не содержащую точек $z_{i,n}^1$ ($i=1, 2, \dots, k$). Из этого легко усмотреть, что $w_{k,n}(z)$ аналитична и однозначна, в частности на кривой $l_{i,n}$ и во всех точках, расстояние которых до $l_{i,n}$ не превышает $\frac{1}{6} \text{дл. } \Delta_{i,n}$, причем в указанной окрестности $l_{i,n}$

$$|w_{k,n}(z)| \leq 2.$$

Представляя функцию $w_{k,n}(t)$ ($t \in l_{i,n}$, $i=1, 2, \dots, k$) в виде интеграла Коши по окружности $|u-t| = \frac{1}{6} \text{дл. } \Delta_{i,n}$ и дифференцируя находим:

$$|w'_{k,n}(t)| \leq \frac{12}{\text{дл. } \Delta_{i,n}},$$

откуда следует, что в точках $t \in l_{i,n}$

$$|w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m| \leq \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}.$$

Согласно формуле Коши, в точках $z \in G_{k,n}$

$$\begin{aligned} w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{k,n}} \frac{w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m}{t-z} dt + \\ &+ \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{i,n}} \frac{w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m}{t-z} dt = J(z) + \sum_{i=1}^k J_i(z). \end{aligned}$$

Интеграл $J(z)$ представляет функцию, аналитическую в круге $|z| \leq 1$ и аппроксимируется, поэтому полиномами с любой степенью точности в этом круге.

$$\max_{|z| < 1} |J(z) - \Phi_0(z)| < \varepsilon.$$

Равномерная аппроксимация функции $J_i(z)$ на множестве $\bar{G}_{k,n}$ с оценкой максимума модуля аппроксимирующего полинома на $H_{l,n}$ основывается на методе М. В. Келдыша вывода полюсов. Приведем формулировку вспомогательного предложения, которое устанавливается указанным методом.

Лемма*. Пусть $L: z = z(s)$ ($0 \leq s \leq l$) означает спрямляемую жорданову кривую, соединяющую точки $a = z(0)$ и $b = z(l)$, s — длина дуги L от точки a до $z(s)$, G — область, содержащая L , и $\rho(s)$ — расстояние точки $z(s)$ до границы G . Область, составленную из суммы всевозможных кругов $|z - z(t)| < \rho(t)$ для значений t в пределах от $t = s$ до $t = l$ обозначим через R_s . Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно построить полином $P\left(\frac{1}{z-b}\right)$ от $\frac{1}{z-b}$, удовлетворяющий при любом $s, 0 \leq s \leq l$ условиям:

$$\left| \frac{1}{z-b} - P\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \varepsilon$$

всюду вне G ,

$$\left| P\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \exp \left\{ \left[1 + \log \frac{1}{\rho(0)\varepsilon} \right] e^{5 \int_0^s \frac{dt}{\rho(t)}} \right\}$$

всюду вне R_s .

Следствие. Если точка a расположена в круге $|z| < 1$, а точка b — вне этого круга, причем $|z| \geq 1 + \rho(l)$, то дополнение к R_l содержит круг $|z| \leq 1$ и, следовательно, существует полином $Q(z)$ от z , удовлетворяющий неравенству

$$\left| \frac{1}{z-a} - Q(z) \right| < \varepsilon$$

в той части дополнения к G , которая расположена в круге $|z| < 1$, и неравенству

$$|Q(z)| < \exp \left\{ \left[1 + \log \frac{1}{\rho(0)\varepsilon} \right] e^{5 \int_0^l \frac{dt}{\rho(t)}} \right\}$$

в круге $|z| \leq 1$.

В качестве $Q(z)$ можно брать, например, соответствующие отрезки ряда Тейлора функции $P\left(\frac{1}{z-b}\right)$.

* Изложение метода полюсов и доказательство этой леммы приводятся в обзорной статье [3].

Применим это следствие к тому случаю, когда точка a совпадает с произвольной, наперед заданной точкой t кривой $l_{i,n}$, точка b — совпадает с ближайшим к t концом дуги $l_{i,n}$, а G представляет совокупность точек, отстоящих от дуги $l_{i,n}$ на расстоянии, меньшее $\frac{1}{6}$ дл. $\Delta_{i,n}$.

Пусть также $\varepsilon = (\text{дл. } \Delta_{i,n})^3$. В этом случае

$$\rho(s) = \frac{1}{6} \text{ дл. } \Delta_{i,n}, \quad 0 < s \leq l, \quad \rho(0) = \frac{1}{6} \text{ дл. } \Delta_{i,n}, \quad l \leq h + \frac{1}{n}.$$

Через $Q_{i,n}(z)$ обозначим полином от z , удовлетворяющий условиям:

$$\left| \frac{1}{t-z} - Q_{i,n}(z) \right| < (\text{дл. } \Delta_{i,n})^3,$$

$$\max_{|z| \leq 1} |Q_{i,n}(z)| < \exp \left\{ \left[1 + 4 \log \frac{2}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \right] e^{\frac{30 \left(h + \frac{1}{n} \right)}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}} \right\}.$$

Обозначим

$$P_{i,k,n}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{i,n}} w'_{k,n}(t) [w_{k,n}(t)]^m Q_{i,n}(z) dt,$$

$$P_{k,n}(z) = \sum_{i=1}^k P_{i,k,n}(z).$$

Имеем, очевидно, всюду в области $G_{k,n}$

$$|P_{i,k,n}(z) - J_i(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \left(h + \frac{1}{n} \right) \left(\text{дл. } \Delta_{i,n} \right)^3,$$

$$\begin{aligned} |P_{k,n}(z) - \sum_{i=1}^k J_i(z)| &\leq \frac{k}{2\pi} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \left(\text{дл. } \Delta_{i,n} \right)^3 < \\ &< \frac{2^{m+4}}{2\pi} \left(h + \frac{1}{n} \right) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(предполагаем, что $n > k$).

Кроме того,

$$\max_{|z| \leq 1} |P_{k,n}(z)| < \frac{k}{2\pi} \left(2h + \frac{2}{n} \right) \frac{2^{m+4}}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \exp \left\{ \left[1 + 4 \log \frac{2}{\text{дл. } \Delta_{i,n}} \right] e^{\frac{30 \left(h + \frac{1}{n} \right)}{\text{дл. } \Delta_{i,n}}} \right\}.$$

В силу этих неравенств

$$\begin{aligned}
& \int_{D_p} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < \\
& \leq \int_{G_{k,n}} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy + \\
& \quad + \sum_{i=1}^k \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)| \\
& \quad |w_{k,n}(z)|^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < 2\pi \left[\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \right)^2 + \right. \\
& \quad + \varepsilon^2 + 2 \sum_{i=1}^n \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)|^2 dx dy + 2 \sum_{i=1}^k (\text{mes } D_p \cap H_{i,n}) \times \\
& \quad \times \max_{|z| < 1} (|P_{k,n}(z)| + |P_0(z)|)^2.
\end{aligned}$$

Но, согласно (A),

$$\text{mes}(D_p \cap H_{i,n}) \leq h, \text{ д.т. } \Delta_{i,n}, \exp \left\{ -\exp \frac{Ch}{\Delta_{i,n}} \right\}, \quad (C = 31)$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $n > k$ настолько большим, чтобы выполнялись неравенства

$$2 \sum_{i=1}^k [\text{mes}(D_p \cap H_{i,n})] \max_{|z| < 1} (|P_{k,n}(z)| + |P_0(z)|)^2 < \varepsilon,$$

$$2 \sum_{i=1}^k \int_{D_p \cap H_{i,n}} |w'_{k,n}(z)|^2 dx dy < \varepsilon,$$

$$2\pi \left[\frac{1}{2\pi n} 2^{m+4} \left(h + \frac{1}{n} \right) \right] < \varepsilon.$$

Для выбранных значений n имеем:

$$\int_{D_p} \int |w'_{k,n}(z) [w_{k,n}(z)]^m - P_0(z) - P_{k,n}(z)|^2 dx dy < 3\varepsilon + 2\pi\varepsilon^2.$$

Таким образом, полнота системы полиномов в области D_p при выполнении условия (A) доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для полноты системы полиномов в D_p достаточно наложить метрическое ограничение типа (A) на множество P не в каждой точке P , а лишь для счетного, всюду плотного на P множества.

Указанный метрический критерий существенно улучшить нельзя. Его точность характеризуется следующим предложением:

Если в правой части неравенства (А) функцию

$$\exp \left\{ -\exp \frac{C}{\text{mes} \Delta} \right\}$$

заменить на функцию

$$\exp \left\{ -\exp \frac{1}{(\text{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}, \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, то теорема перестает быть справедливой.

Мы докажем это, построив класс совершенных множеств P , для которых выполняется неравенство (А) с заменой правой части на (1), и таких, что в соответствующих им областях полнота не имеет места.

Пусть задана убывающая последовательность чисел $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots$ $\alpha_n \rightarrow 0$ и $z_1^{(0)} = 1$, $z_2^{(0)} = -1$; через $\delta_1^{(0)}$ и $\delta_2^{(0)}$ обозначим две дуги окружности $|z| = 1$ длины α_1 с центрами в точках $z_1^{(0)}$ и $z_2^{(0)}$. Дополнительные к ним дуги единичной окружности обозначим через $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_2^{(1)}$, а их центры — через $z_1^{(1)}$, $z_2^{(1)}$. Дугу окружности $|z| = 1$, concentрическую с $\Delta_1^{(1)}$ длины α_2 обозначим через $\delta_i^{(1)}$ ($i = 1, 2$). Дополнение к сумме $\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \delta_i^{(j)}$ представляет, очевидно, совокупность четырех дуг окружности $|z| = 1$ равной длины

$$\Delta_1^{(2)}, \Delta_2^{(2)}, \Delta_3^{(2)}, \Delta_4^{(2)}.$$

Их центры мы обозначим соответственно через $z_1^{(2)}$, $z_2^{(2)}$, $z_3^{(2)}$, $z_4^{(2)}$. Дугу единичной окружности, concentрическую с $\Delta_1^{(2)}$, длины α_2 обозначим через $\delta_i^{(2)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Дополнение ко всем построенным $\delta_i^{(j)}$, $j \leq 2$ представляет систему 2^2 отрезков

$$\Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}, \dots, \Delta_{2^2}^{(3)}$$

равной длины.

Допустим, что таким образом мы уже построили систему 2^n непересекающихся отрезков $\Delta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) длины h_n . Через $\delta_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^n$) обозначим дугу единичной окружности, concentрическую с $\Delta_i^{(n)}$, длины α_{n+1} , через $z_i^{(n)}$ — центр дуги $\Delta_i^{(n)}$. В предположении, что $\alpha_{n+1} < h_n$, определим $\Delta_i^{(n+1)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$) как систему дуг, дополнительных к $\sum_{i=1}^{2^n} \delta_i^{(n)}$ относительно $\sum_{i=1}^{2^n} \Delta_i^{(n)}$. Длина h_{n+1}

дуги $\Delta_i^{(n+1)}$ равна, очевидно, $\frac{h_n - \alpha_{n+1}}{2}$.

Таким образом, при любом $m \geq 1$ определены дуги $\Delta_i^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, 2^m$).

Пусть

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \Delta_i^{(n)}.$$

Множество P точек окружности $|z|=1$ совершенно, нигде не плотно и определяется заданием достаточно быстро убывающей последовательности чисел $\{\alpha_n\}$.

При этом длина дуг $\Delta_i^{(n)}$ определяется посредством этих чисел равенством

$$h_n = \frac{1}{2^{n-1}} [\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + 2^{n-2} \alpha_n)].$$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$. Числа α_n определим равенствами

$$\alpha_n = \exp \left\{ -\exp \exp \left[n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \log 2 \right] \right\}, \quad n=1, 2, \dots$$

Множество P , соответствующее определенной таким образом последовательности чисел $\{\alpha_n\}$, обладает тем свойством, что для любой его точки можно указать дуги Δ единичной окружности, покрывающие ее и имеющие сколь угодно малую длину, для которых

$$\text{mes}(\Delta, CP) < \exp \left\{ -\exp \frac{1}{(\text{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}.$$

Действительно, в качестве Δ можем брать любую из дуг $\Delta_i^{(n)}$ с достаточно большим номером n , так как при $n > n_1(\varepsilon)$

$$\text{mes}(\Delta_i^{(n)}, CP) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} \text{дл. } \delta_i^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} 2^k \exp \left\{ -\exp \exp \left[(k+1) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \log 2 \right] \right\} \leq \exp \left\{ -\exp \frac{1}{h_n^{1-\varepsilon}} \right\}.$$

Покажем, что в области D_P , определяемой множеством P , система полиномов не полна.

Для этого достаточно показать, что каково бы ни было число r , $h < r < 1$, существует число $M = M(r) < \infty$ так, что из неравенства

$$\iint_{D_P} |Q(z)|^2 dx dy \leq 1 \quad (2)$$

всегда следует, что

$$\max_{|z| < r} |Q(z)| \leq M(r),$$

где $Q(z)$ произвольный полином, а $M(r)$ не зависит от $Q(z)$. В самом деле, если бы при этом полнота в D_r имела место, то для некоторой последовательности полиномов $P_n(z)$

$$\iint_{D_r} |\sqrt{z - \zeta_0} - P_n(z)|^2 dx dy \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

где ζ_0 точка на границе D_r , $|\zeta_0| = h < r$, откуда следует, что $P_n(z)$ равномерно ограничены в среднем по площади D_r , а, следовательно, и по модулю в круге $|z| \leq r$, а также равномерно сходятся на каждом замкнутом подмножестве D_r к $\sqrt{z - \zeta_0}$.

Но из двух последних фактов легко заключить, что полиномы $P_n(z)$ должны равномерно сходить всюду внутри круга $|z| < r$, что невозможно ввиду наличия там особенности у функции $\sqrt{z - \zeta_0}$.

Положим, для краткости

$$r_n = \frac{1+r}{2} - \frac{1-r}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Через $\alpha_i^{(n)}$ и $\beta_i^{(n)}$ обозначим концы дуги $\Delta_i^{(n)}$ ($\arg \alpha_i^{(n)} < \arg \beta_i^{(n)}$). Через $\gamma_i^{(n)}$ обозначим дугу $|z| = r_{n+1}$, $\arg \alpha_i^{(n)} < \arg z \leq \arg \beta_i^{(n)}$, т. е. проекцию $\Delta_i^{(n)}$ из точки $z = 0$ на окружность $|z| = r_{n+1}$. Через $P_i^{(n)}$ обозначим те точки z дуги $\gamma_i^{(n)}$, для которых $e^{i \arg z} \in P$, т. е. пересечение $\gamma_i^{(n)} \cap L_r$ дуги $\gamma_i^{(n)}$ с границей области D_r , через P_i — пересечение окружности $|z| = r$ с множеством отрезков L_r .

Рассмотрим произвольный полином $Q(z)$, удовлетворяющий (2) и пусть

$$M_1 = \max_{z \in P_i} |Q(z)|.$$

Введем ряд обозначений.

Через z_1 обозначим ту точку множества P_i , в которой $|Q(z_1)| = M_1$ (если таких точек несколько, то мы здесь и в дальнейшем условимся выбирать ту, у которой наименьший аргумент).

Так как $e^{i \arg z_1} \in P$, то существует номер i_1 , для которого $e^{i \arg z_1} \in \Delta_{i_1}^{(1)}$ ($1 \leq i_1 \leq 2$).

Обозначим

$$M_2 = \max_{z \in P_{i_1}^{(1)}} |Q(z)|$$

и пусть z_2 — точка множества $P_{i_1}^{(1)}$, для которой

$$|Q(z_2)| = M_2.$$

Число i_2 ($1 \leq i_2 \leq 4$) определяем единственным образом из условия

$$e^{i \arg z_2} \in \Delta_{i_2}^{(2)}.$$

Пусть мы определили уже точки $z_1, z_2, \dots, z_n$, числа $M_1, M_2, \dots, M_n$ и числа $i_1, i_2, \dots, i_n$ так, что для любого k , $2 \leq k \leq n$,

$$M_k = \max_{z \in P} |Q(z)|.$$

$$|Q(z_k)| = M_k, \quad z_k \in P_{i_k}^{(k-1)} \quad (3)$$

$$e^{i \arg z_k} \in \Delta_{i_k}^{(k)}, \quad \Delta_{i_k}^{(k)} \subset \Delta_{i_{k-1}}^{(k-1)}.$$

Через M_{n+1} обозначим

$$\max_{z \in P_n^{(n)}} |Q(z)|;$$

z_{n+1} -та точка $P_n^{(n)}$, в которой $|Q(z_{n+1})| = M_{n+1}$. Число i_{n+1} определим из условия

$$e^{i \arg z_{n+1}} \in \Delta_{i_{n+1}}^{(n+1)}.$$

Таким образом, точки $\{z_n\}$ числа $\{M_n\}$ и $\{i_n\}$ определены, и при любом k выполняются соотношения (3).

Дополнение к дугам $\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \dots, \Delta_{2^n}^{(n)}$ относительно единичной окружности представляет совокупность 2^n дуг $\delta_q^{(p)}$, $1 \leq q \leq 2^p$, $0 \leq p \leq n-1$.

Через $A_i^{(n)}$ и $B_i^{(n)}$ мы обозначим две точки единичной окружности, расположенные вне дуги $\Delta_i^{(n)}$, по разные от нее стороны, на дуговом расстоянии $\frac{1}{2} z_{n-1}$ от $\Delta_i^{(n)}$ ($\arg A_i^{(n)} < \arg B_i^{(n)}$).

Так как из двух дополнительных к $\Delta_i^{(n)}$ дуг $\delta_q^{(p)}$, непосредственно примыкающих к $\Delta_i^{(n)}$, у одной $p = n-1$, а у другой $p < n-1$, то одна из точек $A_i^{(n)}, B_i^{(n)}$ совпадает с центром z_q^{n-1} соответствующей дуги $\delta_q^{(n-1)}$, другая же принадлежит $\delta_q^{(p)}$, где $p < n-1$, поэтому расстояние точек $A_i^{(n)}, B_i^{(n)}$ до $\Delta_i^{(n)}$ превосходит $\frac{1}{4} z_{n-1}$.

Через G_n обозначим ту часть круга $|z| < r_{n+1}$, для которой

$$\arg A_i^{(n)} < \arg z < \arg B_i^{(n)}.$$

Граница области G_n состоит, таким образом, из дуги окружности $|z| = r_{n+1}$, которую мы обозначим через γ_n и двух радиусов

$$\arg z = \arg A_i^{(n)}, \arg z = \arg B_i^{(n)}, |z| \leq r_{n+1}, \quad (4)$$

причем точка $z_n \in G_n$ а z_{n+1} расположена на границе G_n , которую мы обозначим через γ_n .

Кривую γ_n представим в виде суммы трех множеств:

$$\Gamma_n = \Gamma_n^{(1)} + \Gamma_n^{(2)} + \Gamma_n^{(3)},$$

где $\Gamma_n^{(1)} = \gamma_n \cdot L_P$, $\Gamma_n^{(2)} = \gamma_n - \gamma_n \cdot L_P$, а $\Gamma_n^{(3)} = \Gamma_n - \Gamma_n^{(1)} - \Gamma_n^{(2)}$ — совокупность двух отрезков (4).

Пусть $G_n(z, \zeta)$, означает функцию Грина области G_n с особенностью в точке $\zeta = z$.

Так как функция $\log |Q(z)|$ является субгармонической, то всюду внутри G_n имеет место неравенство

$$\log |Q(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta \in \Gamma_n} \log |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial m} |d\zeta|$$

(здесь $\frac{\partial}{\partial m}$ означает дифференцирование по нормали к границе G_n)

Обозначив интеграл по множеству $E \subset \Gamma_n$ от функции

$\frac{1}{2\pi} \log |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial m}$ через $J(E, z)$. Предыдущее неравенство можем записать в виде

$$\log |Q(z)| \leq J(\Gamma_n^{(1)}, z) + J(\Gamma_n^{(2)}, z) + J(\Gamma_n^{(3)}, z).$$

Оценим каждое из трех слагаемых в правой части написанного неравенства, предполагая, что $|z| \leq r_n$.

Заметим, прежде всего, что если $z \in G_n$, а $\varphi_n(z, \zeta)$ — означает функцию, реализующую конформное отображение области G_n на круг $|z| < 1$, при котором точка $z = \zeta$ переходит в начало координат, то $\varphi_n(z, \zeta)$ имеет непрерывную производную в замкнутой области G_n причем в точках ζ границы G_n

$$\frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial m} = |\varphi'_n(z, \zeta)|.$$

где $\frac{\partial}{\partial m}$ — дифференцирование по нормали к границе G_n в точке

ζ . $\varphi'_n(z, \zeta)$ — производная по ζ .

Функция $\varphi_n(z, \zeta)$ легко выражается через элементарные функции; непосредственные подсчеты показывают, что если $z, \zeta \in G_n$, причем $|\zeta| = r_{n+1}$, а $|z| \leq r_n$, то

$$|\varphi'_n(z, \zeta)| \leq C_2 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n}, \quad (5)$$

где C_2 — абсолютная постоянная, а μ_n определяется равенством

$$\arg B_{in}^{(n)} - \arg A_{in}^{(n)} = \frac{\pi}{\mu_n}.$$

Интеграл $J(\Gamma_n^{(1)}, z)$ оцениваем, учитывая, что $|z| = r_n$, а $\zeta \in \Gamma_n^{(1)}$

$$\begin{aligned} |J(\Gamma_n^{(1)}, z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \log M_{n+1} \cdot \int_{\zeta \in \Gamma_n^{(1)}} |\varphi'_n(z, \zeta)| ds \leq \\ &\leq C_2 \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \mu_n \log M_{n+1}. \end{aligned}$$

Для оценки $J(\Gamma_n^{(2)}, z)$ заметим, что подынтегральная функция — нормальная производная функции Грина — оценивается аналогично, на основании неравенства (5).

Оценим теперь $\log |Q(\zeta)|$ для значений $\zeta \in \Gamma_n^{(2)}$. Множество $\Gamma_n^{(2)}$ состоит очевидно из интервалов, дополнительных к множеству γ_n . $L_P = \Gamma_n^{(1)}$ относительно γ_n . Если обозначить проекцию интервала $\delta_j^{(1)}$ из точки $z=0$ на окружность $|z| = r_{n+1}$ через $\delta_{j,n}^{(1)}$, то легко видеть, что подобными дополнительными интервалами служит некоторая часть интервалов $\delta_{j,n}^{(1)}$ при $i \geq n-1$. Поэтому значение $J(\Gamma_n^{(2)}, z)$ мы увеличим, если $\log |Q(\zeta)|$ заменим на $\log^+ |Q(\zeta)|$, а интегрирование распространим на все интервалы $\delta_{j,n}^{(1)}$ ($j=1, 2, \dots, 2^i$, $i=n-1, n, \dots$):

$$\begin{aligned} J(\Gamma_n^{(2)}, z) &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{i=n-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^i} \int_{\delta_{j,n}^{(1)}} \log^+ |Q(\zeta)| \frac{\partial G_n(z, \zeta)}{\partial m} |d\zeta| \leq \\ &\leq C_3 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \sum_{i=n-1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^i} \int_{\delta_{j,n}^{(1)}} \log^+ |Q(t)| ds. \end{aligned}$$

Рассмотрим какую-либо из дуг $\delta_{j,n}^{(1)}$, обозначим ее через (a, b) ; через c обозначим центр дуги (a, b) . Длина (a, b) равна, очевидно, $\alpha_{i+1} r_{n+1}$ при любом j ($1 \leq j \leq 2^i$). Пусть $t = t(\varphi)$ — точка дуги (a, c) , находящаяся на дуговом расстоянии φ от точки a .

Существует, очевидно, зависящая от r постоянная C_3 так, что при этом расстояние $t(\varphi)$ до границы области D_P будет превосходить $C_3 \varphi$.

Согласно (2) и теореме о среднем

$$\pi (C_3 \varphi)^2 |Q(t(\varphi))|^2 \leq \iint_{D_P} |Q(t)|^2 dx dy \leq 1,$$

поэтому

$$\int_{t \in (a, c)}^+ \log^+ |Q(t)| \cdot |dt| \leq \int_0^{\frac{1}{2} \alpha_{i+1}} \log^+ \frac{1}{\sqrt{\pi} C_3 \varphi} \cdot d\varphi \leq C_4 \alpha_{i+1} \log \frac{1}{\alpha_{i+1}}. \quad (6)$$

Аналогично оценивается интеграл по дуге (с, b).
В результате находим

$$\begin{aligned} J(\Gamma_n^{(2)}, z) &\leq C_4 C_2 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \sum_{l=n-1}^{\infty} 2^l \alpha_{l+1} \log \frac{1}{\alpha_{l+1}} < \\ &< C_5 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} 2^n \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n}, \end{aligned}$$

где C_4, C_5 — не зависят от n .

Для оценки $J(\Gamma_n^{(3)}, z)$ заметим, что $\Gamma_n^{(3)}$ состоит из двух отрезков, расстояние каждого из которых до границы области D_R превосходит $C_6 \alpha_{n-1}$, так как эти отрезки направлены из $z=0$ к точкам $A_l^{(n)}, B_l^{(n)}$, расстояние которых до P превосходит $\frac{1}{4} \alpha_{n-1}$, поэтому $\log |Q(t)|$ оцениваем в точках $\Gamma_n^{(3)}$ также согласно теореме о среднем

$$\log |Q(t)| \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n},$$

в силу чего

$$J(\Gamma_n^{(3)}, z) \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n^{(3)}} \frac{\partial G_n}{\partial m} ds \leq C_7 \log \frac{1}{\alpha_n} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \frac{\partial G}{\partial m} ds = C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}$$

(C_6 и C_7 — не зависят от n).

Из этих оценок следует, что, в частности, в точке $z=z_n$

$$\begin{aligned} \log |Q(z_n)| = \log M_n &\leq C_2 \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} \cdot \mu_n \log M_{n+1} + \\ &+ C_5 \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} 2^n \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} + C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Но $\mu_n > C_8 2^n$; учитывая значения r_n, r_{n+1} , получаем

$$2^n \mu_n \left(\frac{r_n}{r_{n+1}} \right)^{\mu_n} < C_9 \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\},$$

где положительные постоянные C_8, C_9, C_{10} не зависят от n , следовательно,

$$\begin{aligned} \log M_n &\leq C_2 2^{-n} \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\} \cdot \log M_{n+1} + \\ &+ C_{11} \exp \left\{ -C_{10} \frac{2^n}{n^2} \right\} \cdot \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} + C_7 \log \frac{1}{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, перенося два последних члена в левую часть и учитывая, что $2^n \cdot \alpha_n \log \frac{1}{\alpha_n} < 1$, находим:

$$C_{12} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log M_n - C_{13} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log \frac{1}{\alpha_n} < \log M_{n+1}.$$

Вводя обозначения

$$A_n = C_{12} \cdot 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right),$$

$$B_n = C_{13} 2^n \exp\left(C_{10} \frac{2^n}{n^2}\right) \log \frac{1}{\alpha_n},$$

получаем последовательность неравенств:

$$A_n \log M_n - B_n < \log M_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Решая эти неравенства, находим:

$$A_1 A_2 \dots A_n \log M_1 - [B_1 A_2 A_3 \dots A_n + B_2 A_3 \dots A_n + \dots + B_{n-1} A_n + B_n] < \log M_{n+1},$$

т. е.

$$A_1 A_2 \dots A_n \left[\log M_1 - \left(\frac{B_1}{A_1} + \frac{B_2}{A_1 A_2} + \dots + \frac{B_n}{A_1 A_2 \dots A_n} \right) \right] < \log M_{n+1}.$$

Из определения чисел α_n следует, что существует независимая от n постоянная C_{14} , для которой

$$\frac{B_n}{A_1 A_2 \dots A_n} < \frac{C_{14}}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому, так как $|z_n| \leq \frac{1+r}{2} < 1$

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \dots A_n [\log M_1 - C_{14}] &< \log M_{n+1} = \\ &= \log |Q(z_{n+1})| \leq \max_{|z| < 1} |Q(z)|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\log M_1 < C_{14} + \frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} \max_{|z| < 1} |Q(z)|.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, находим:

$$\log M_1 \leq C_{14}.$$

Постоянная $C_{14} > 0$ не зависит от $Q(z)$.

Пусть $z = \rho e^{i\theta}$, $h < \rho < r$. Имеем, согласно (6),

$$\log |Q(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Q(re^{i\varphi})| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{t \in \Gamma r} \log |Q(t)| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi + \\
&+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^l} \frac{1}{2^l \pi} \int_{\tilde{\partial}_{j,0}^{(l)}} \log |Q(t)| \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi) + \rho^2} d\varphi \leq \\
&\leq C_{14} + \frac{C_{15}}{\pi} \frac{1}{r - \rho} \sum_{l=1}^{\infty} 2^l \alpha_l \log \frac{1}{\alpha_l} < C(r, \rho).
\end{aligned}$$

Вследствие этого

$$\max_{|z| < \rho} |Q(z)| \leq e^{\min_{\rho < r < 1} C(r, \rho)}.$$

неполнота системы полиномов в области D_ρ доказана.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 14 XII 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Колдыш М. В. Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques. Матем. сб. 5 (47) (1939), 391—402.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 379, 427.
3. Мергелян С. Н. Успехи математических наук, т. VIII, вып. 4 (56), 1953, стр. 21.

Ս. Ն. Մերգելյան, Ա. Պ. Թամազյան

ՈՉ ԺՈՐԴԱՆՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅՔՆԵՐԻ ՄԵԿ ԴԱՍՈՒՄ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Թող P -ն լինի կատարյալ և ոչ խիտ կետերի բազմությունը $|z| = 1$ շրջանագծի վրա: L_P -ով նշանակենք հետևյալ հատվածների բազմությունը՝

$$\arg z = \arg t, \quad 1 - h \leq |z| \leq 1, \quad (0 < h < 1),$$

Բոլոր հնարավոր $t \in P$ համար:

D_ρ -ով նշանակենք L_P բազմության լրացումը $|z| < 1$ շրջանի նկատմամբ:

Հեղինակներն ապացուցում են հետևյալ թեորեմն:

Բազմանդամների սխառմաբեր լրիվ է D_ρ տիրույթում, եթե հնարավոր է նշել P բազմության վրա ամենուրեք խիտ այնպիսի M հաշվելի բազմու-

թյուն, որ այդ բազմությունը ցանկացած կետի համար գոյություն ունենա
այդ կետը ծածկող ցանկացած փոքր երկարություն Δ ինտերվալ, որ

$$\text{mes}(\Delta, \text{CP}) < \exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{\text{mes} \Delta} \right\}, \quad (\text{A})$$

որտեղ CP-ն P-ի լրացումն է $|z| = 1$ շրջանագծի նկատմամբ:

Թեորեմայում նշված հստակա՛ն հատկանիշը էապես չի կարելի լավաց-
նել, այսինքն՝ եթե (A) անհավասարությունը աճ մասում

$$\exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{\text{mes} \Delta} \right\}$$

ֆունկցիան փոխարինենք

$$\exp \left\{ - \exp \frac{31 h}{(\text{mes} \Delta)^{1-\varepsilon}} \right\}$$

ֆունկցիայով, որտեղ ε —ցանկացած փոքր թիվ է, ապա թեորեման դադա-
րում է ճիշտ լինելուց:

Б. К. Карапетян

Метод определения параметров внутреннего трения материала при свободных колебаниях

Вопросу изучения внутреннего трения твердых тел посвящено очень много исследований. Однако, несмотря на это, на сегодня пока что нет окончательно разработанной теории внутреннего трения.

Еще со времен Фохта при составлении дифференциальных уравнений колебаний с затуханием, вызванным внутренним трением, силу трения принимают пропорциональной первой степени скорости деформации [12]. Непосредственных опытов, подтверждающих такую зависимость, не имеется.

Некоторые исследователи „в развитие“ гипотезы Фохта стали высказывать мнение о степенной зависимости силы внутреннего трения от скорости деформации. Так, например, Е. Б. Лунц, на основании результатов проведенных им экспериментов, пришел к выводу, что сила внутреннего трения должна зависеть от n -ой степени скорости деформации; в частности, для стали он получил $n = 2,3 \div 2,15$ [2, 3].

Справедливо отмечает Н. Н. Давиденков, что введением такого коэффициента n вместо 1 еще более усиливается зависимость затухания от скорости, между тем как физическое представление заставляет отказываться от какого бы то ни было связывания внутреннего трения со скоростью или частотой колебаний. Исходя из замкнутой петли гистерезиса и считая, что процесс колебаний должен описываться в соответствии с контуром петли, Н. Н. Давиденков приходит к выводу, что сила внутреннего трения зависит от деформации в нелинейной форме [1].

Пользуясь гипотезой Н. Н. Давиденкова, Г. С. Писаренко решил ряд интересных технических задач. При этом он пользовался методом разложения по степеням малого параметра. Для того, чтобы выразить уравнения кривых, образующих петлю гистерезиса аналитически, в уравнение петли гистерезиса им введены некоторые постоянные параметры, которые определяются из экспериментально полученных виброграмм затухающих свободных колебаний по их логарифмическому декременту [8, 9, 10].

Я. Г. Пановко, сохранив основную идею Н. Н. Давиденкова в отношении нелинейной связи силы внутреннего трения с амплитудой деформации и приняв эллиптическую форму петли гистерезиса, разработал метод учета гистерезисных потерь при колебаниях [7].

Е. С. Сорокиным предложена гипотеза внутреннего трения, где

автор исходит из эллиптической формы петли гистерезиса, соответствующей случаю однотонных стационарных колебаний. Гипотеза эта приводит к столь же простым результатам, что и гипотеза Фохта и, вместе с тем, более правильно отражает природу явления [11].

Исследования А. Г. Назарова показали, что гипотеза Е. С. Сорокина значительно более широкая, а именно — результаты его гипотезы могут быть применены для произвольного закона колебаний, и окончательно гипотеза эта может быть сформулирована так: комплексный вектор напряжений опережает комплексный вектор деформаций на постоянный фазовый угол [4, 6].

В общем случае колебания упругих систем с учетом внутреннего трения описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, решение которых даже приближенными методами связано с большими затруднениями [9].

С целью устранения этих затруднений, А. Г. Назаровым предложен метод учета рассеяния энергии, вызванного внутренним трением. В основе этого метода положено следующее. Периоды свободных колебаний упругих систем и соответствующие им фундаментальные функции, например, при изгибных и крутильных колебаниях, вычисленные без учета энергии рассеяния, достаточно точно отвечают действительности, т. е. при наличии фактора рассеяния. Поэтому они определяются из линейных дифференциальных уравнений, не содержащих членов, учитывающих энергию рассеяния. Установление же закона затухания колебаний осуществляется путем рассматривания потери энергии за полный цикл или полупериод колебаний [5].

В настоящей работе, пользуясь отмеченным [5], автором разработан метод определения параметров, характеризующих энергию рассеяния, отвечающую нормальным и тангенциальным напряжениям при изгибных и крутильных колебаниях. При этом принято, что основной причиной рассеяния энергии при свободных колебаниях упругой системы является упругий гистерезис материала.

Энергия системы в крайних отклоненных положениях выражается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} A f_1^2 &= A f_2^2 + \Omega_1, \\ A f_2^2 &= A f_3^2 + \Omega_2, \\ &\dots \dots \dots \\ A f_i^2 &= A f_{i+1}^2 + \Omega_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$ — энергии рассеяния, а $f_1, f_2, \dots, f_i$ — максимальные прогибы или максимальные углы скручивания в каждый полупериод колебаний.

Обозначим через ω_1 энергию рассеяния, отнесенную к единице объема материала при нагрузке от нормального напряжения $\sigma = 0$ до $\sigma = [\sigma_0]$ и последующей разгрузке до $\sigma = 0$. Чем больше максимальное напряжение σ_0 , тем более раскрытие петли гистерезиса и, стало быть, тем больше энергия рассеяния ω_1 .

Энергию рассеяния ω_1 представляем в виде следующей степенной зависимости от σ_0 :

$$\omega_1 = a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_0^2 + a_3 \sigma_0^3 + \dots = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_0^i. \quad (2)$$

Вид функции (2) можно установить экспериментальным путём.

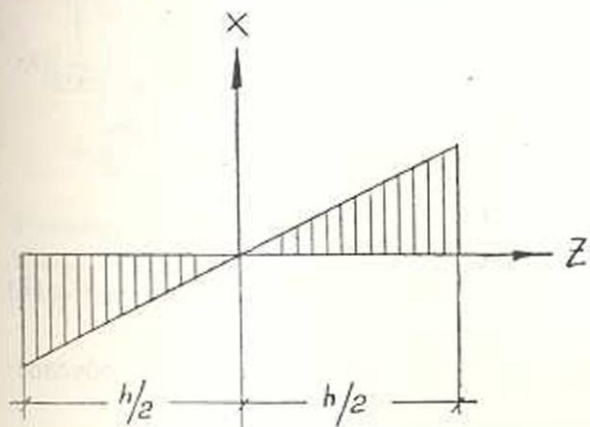
Для тангенциальных напряжений устанавливается аналогичная зависимость:

$$\omega_2 = c_1 \tau_0 + c_2 \tau_0^2 + c_3 \tau_0^3 + \dots = \sum_{i=1}^k c_i \tau_0^i. \quad (3)$$

Зная ω_1 и ω_2 можно вычислить значения полных энергий рассеяния $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, обусловленных нормальными и тангенциальными напряжениями.

Определим, например, значения $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ для балки постоянного поперечного сечения шириной b , высотой h и длиной l , совершающей поперечные колебания.

Распределение нормальных и тангенциальных напряжений в крайнем отклоненном положении балки показано на фигурах 1 и 2.



Фиг. 1

Считаем, что колебания происходят в одной из главных плоскостей изгиба балки и что размеры поперечного сечения балки малы по сравнению с ее длиной. В таком случае для определения $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ можно пользоваться уравнением упругой линии изогнутого стержня, полученного без учета энергии рассеяния.

Вычислим значение $\Omega^{(1)}$. Максимальное краевое напряжение:

$$\sigma_{0 \max} = \frac{M}{w} = \int \frac{E I}{w} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{2} E I \frac{d^2 y}{dx^2} h.$$

Напряжение σ_0 в точке z растянутой части бруса

$$\sigma_0 = E I \frac{d^2 y}{dx^2} z. \quad (4)$$

Энергия рассеяния для дифференциального элемента dx при равенстве площадей петель гистерезиса для растянутой и сжатой зон запишется в виде:

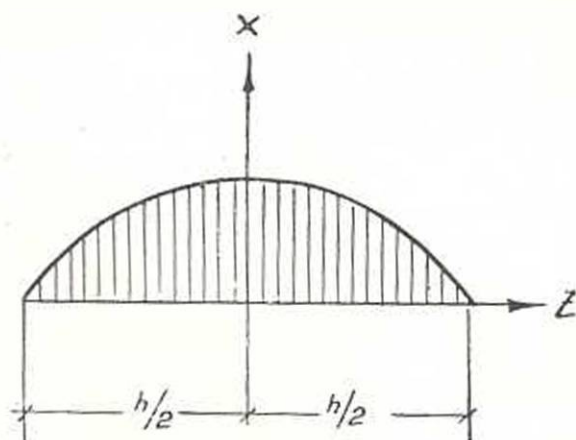
$$d\Omega^{(1)} = 2b dx \int_0^{h/2} \omega_1 dz. \quad (5)$$

Подставляя в (2) значение σ_0 из (4) и осуществляя интегрирование (5), получим

$$d\Omega^{(1)} = 2b dx \sum_{i=1}^n a_i \left[E f \frac{d^2 y}{dx^2} \right]^i \frac{h^{i+1}}{2^{i+1} (i+1)}.$$

Полная энергия рассеяния, обусловленная нормальными напряжениями, будет:

$$\Omega^{(1)} = 2b \int_0^l \sum_{i=1}^n a_i \left[E f \frac{d^2 y}{dx^2} \right]^i \frac{h^{i+1}}{2^{i+1} (i+1)} dx. \quad (6)$$



Фиг. 2.

Определим теперь значение $\Omega^{(2)}$. Известно, что

$$\tau_0 = \frac{Q}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Перерезывающая сила:

$$Q = E I f \frac{d^3 y}{dx^3}.$$

Тогда, имея:

$$\tau_0 = \frac{E}{2} f \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right), \quad (7)$$

получим следующее выражение полной энергии рассеяния, обусловленной тангенциальными напряжениями

$$\Omega^{(2)} = 2b \int_0^l dx \int_0^{h/2} \sum_{i=1}^k c_i \left[\frac{E}{2} f \frac{d^3 y}{dx^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \right]^i dz. \quad (8)$$

При вычислении $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$, мы исходили из допущения о независимости энергий рассеяния ω_1 и ω_2 от сосуществования σ_0 и τ_0 .

Полная энергия рассеяния за каждый полупериод колебаний, в силу равенства площадей петель гистерезиса относительно оси 0—0 (фиг. 3) при переходе от одного крайнего отклоненного положения $f_1 y(x)$ в противоположное — $f_{i+1} y(x)$, будет равна

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right] + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_{i+1}) + \Omega^{(2)}(f_{i+1}) \right]. \quad (9)$$

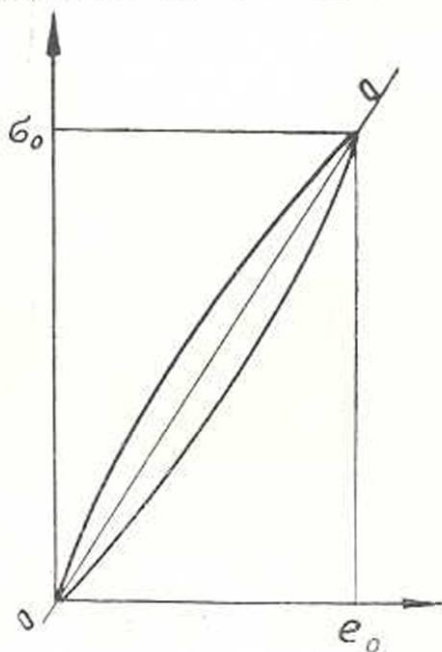
Подставив полученные значения полных энергий рассеяния (9)

в рекуррентные соотношения (1), получим систему уравнений, откуда, имея экспериментально измеренные величины максимальных прогибов, можно определить параметры a_i и c_i , характеризующие энергию рассеяния от максимальных нормальных и тангенциальных напряжений.

В выражения (9) для $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$ входят максимальные прогибы $f_1, f_2, \dots, f_i$ в различных степенях. Имея величину начального максимального прогиба f_1 , можно последовательно определить значения $f_2, f_3, \dots, f_i$ из алгебраических уравнений, наивысшая степень которых зависит от наивысших степеней σ_0 и τ_0 , входящих в (2) и (3).

Во избежание решения алгебраических уравнений высоких степеней, воспользуемся тем, что f_i мало отличается от f_{i+1} . Перепишем, например, первую строчку (1) с подстановкой значения Ω_1 из (9). Получим

$$Af_1^2 = Af_2^2 + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right] + \frac{1}{2} \left[\Omega^{(1)}(f_2) + \Omega^{(2)}(f_2) \right]. \quad (10)$$



Фиг. 3.

Примем, что $f_2 = f_1 + \Delta f$, причем Δf настолько мало, что его степенями, начиная со второй, можно пренебречь.

Тогда (10) перепишется в виде:

$$2Af_1\Delta f + [\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right] \Delta f = 0,$$

откуда

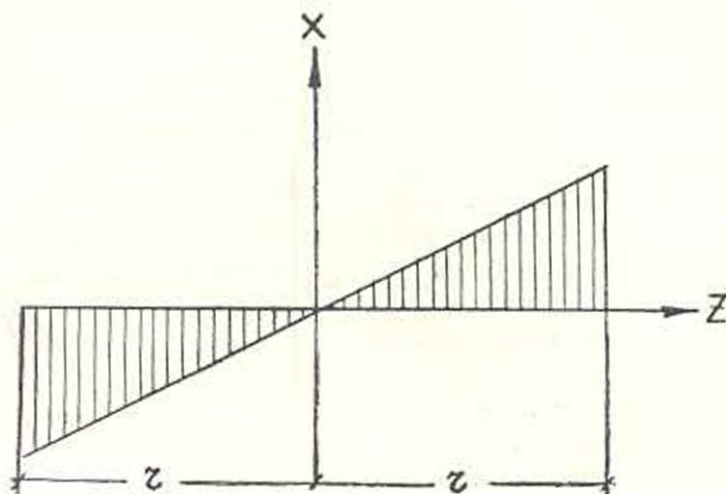
$$\Delta f = - \frac{\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1)}{2Af_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial f} \left[\Omega^{(1)}(f_1) + \Omega^{(2)}(f_1) \right]}. \quad (11)$$

При более крутом затухании свободных колебаний можно сохранить еще члены с $(\Delta f)^2$, что приведет к квадратным уравнениям.

По аналогичной методике можно определить энергию рассеяния при крутильных колебаниях.

Рассмотрим для примера стержень постоянного поперечного сечения диаметром d и длиной l .

Распределение касательных напряжений по сечению образца показано на фигуре 4.



Фиг. 4.

Обозначив угол скручивания образца через $\varphi(x)$, получим следующее значение максимального краевого напряжения

$$\tau_{\max} = r \frac{GJ_p}{W_p} \frac{d\varphi}{dx} = GJ_p \frac{d\varphi}{dx} \cdot r.$$

Напряжение τ_0 в точке z сечения образца будет

$$\tau_0 = GJ_p \frac{d\varphi}{dx} z. \quad (12)$$

Энергия рассеяния для дифференциального элемента стержня dx запишется так

$$d\Omega = dx \int_0^r 2\pi \omega z dz = 2\pi dx \int_0^r \omega z dz. \quad (13)$$

Подставляя в (3) значение τ_0 из (12) и произведя интегрирование (13), получим

$$d\Omega = 2\pi dx \sum_{i=1}^k c_i \left[GJ_p \frac{d\varphi}{dx} \right]^i \frac{r^{i+2}}{i+2}.$$

Полная энергия рассеяния будет

$$\Omega = 2\pi \int_0^l \sum_{i=1}^k c_i \left[GJ_p \frac{d\varphi}{dx} \right]^i \frac{r^{i+2}}{i+2} dx.$$

Остальные операции будут такими же, что и в случае поперечных колебаний.

Таким же образом можно разработать методику определения параметров внутреннего трения и для других видов напряженного состояния материала при колебаниях.

По разработанному методу, на основе экспериментов наших и Е. Б. Лунца над стальными стержнями, произведено исследование внутреннего трения при свободных поперечных и крутильных колебаниях.

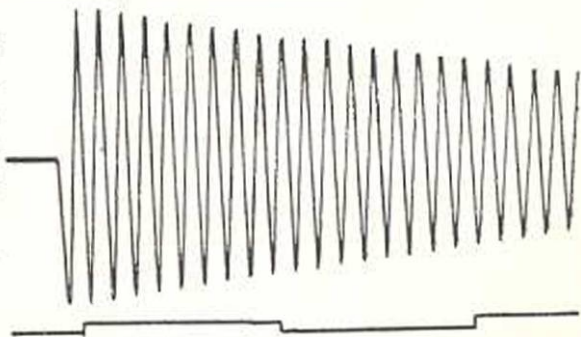
В нашем случае испытания проводились под консольным брусом постоянного поперечного сечения из стали 3, жестко заземленным одним концом.

Свободные поперечные колебания осуществлялись мгновенным освобождением образца от статически приложенной силы, вызывающей начальный прогиб.

Запись колебаний производилась электромагнитным способом. При этом получалась запись скорости колебаний образца.

В качестве примера на фигуре 5 показан начальный отрезок осциллограммы свободных поперечных колебаний образца № 2. Прерывистая линия изображает марку времени (два соседних отрезка соответствуют времени в 1 сек).

Для перехода от скорости к смещению нужно было произвести тарировку, заключающуюся в том, чтобы статически измеренный прогиб образца поставить в соответствие с полученной на осциллограмме скоростью. Это легко было проделать потому, что колебания происходили почти по гармоническому закону, поскольку затухание было незначительное.



Фиг. 5

Геометрические размеры, а также некоторые другие характеристики образцов сведены в таблицу 1.

Как видно из таблицы, колебания образцов происходили при начальных напряжениях порядка 1500 кг/см^2 ; частота колебаний менялась в пределах $\sim 10 \div 65$ герц.

Для определения параметров внутреннего трения стали-3 были использованы полученные осциллограммы.

Испытанные стальные стержни имели различную форму колебания из-за наличия добавочной массы в образцах №№ 2, 4, 6, 8, 10. Уравнение изогнутой оси было принято соответственно форме колебания образца.

Таблица 1

№№ образцов	Размеры образцов в см	Максимальный прогиб в см	Напряжения в кг/см ²	Частота колебаний в герцах	Примечание
1	31,6×2,1×0,8	0,560	1465	65,5	Образцы №№ 2, 4, 6, 8, 10 имели на конце добавочную массу весом 1,750 кг.
2	31,6×2,1×0,8	0,585	1465	17,5	
3	42,6×2,1×0,8	1,090	1520	36,5	
4	42,6×2,1×0,8	1,098	1520	10,7	
5	40,0×2,1×1,2	0,640	1507	59,2	
6	40,0×2,1×1,2	0,649	1507	21,2	
7	47,0×2,1×1,2	0,880	1490	42,5	
8	47,0×2,1×1,2	0,875	1490	16,0	
9	54,0×2,1×1,2	1,210	1555	33,2	
10	54,0×2,1×1,2	1,210	1555	13,3	

Так, для образцов №№ 1, 3, 5, 7, 9 было принято приближенное уравнение изогнутой оси

$$y(x) = \frac{8}{l^4} \left(\frac{Fx^2}{4} - \frac{lx^3}{6} + \frac{x^4}{24} \right). \quad (15)$$

а для образцов №№ 2, 4, 6, 8, 10 —

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} \left(3 - \frac{x}{l} \right). \quad (16)$$

Из-за большой длины испытанных стержней влиянием тангенциальных напряжений пренебрежено и принято, что энергия рассеяния зависит только от нормальных напряжений.

Исходя из результатов эксперимента многих исследователей, показавших, что для стали имеется квадратичная или кубическая зависимость между энергией рассеяния и напряжением, полином (2) нами представлен в виде

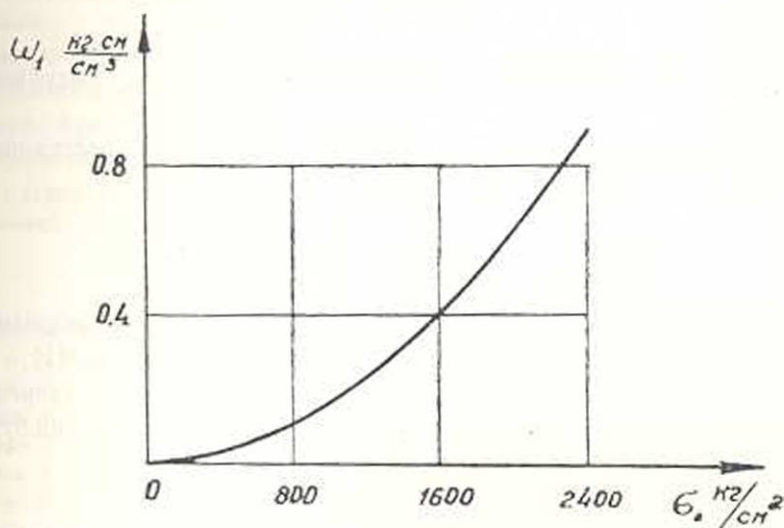
$$\omega_1 = a_2 \sigma_0^2 + a_3 \sigma_0^3. \quad (2')$$

Решая систему уравнений (1), при этом учитывая (2'), получаем значения параметров a_2 и a_3 , на основании которых зависимость удельной энергии рассеяния от максимальных нормальных напряжений можем выразить в следующем виде

$$\omega_1 = 0,16 \cdot 10^{-6} \sigma_0^2 - 0,65 \cdot 10^{-12} \sigma_0^3. \quad (2'')$$

Графическое изображение этой зависимости представлено на фиг. 6.

Полученные параметры подставлены в выражения (11), составленные для каждого образца и вычислены значения последующих амплитуд колебаний.



Фиг. 6.

Сравнение вычисленных амплитуд колебаний с их экспериментальными значениями показывает малое отклонение.

Экспериментальные данные Е. Б. Лунца по свободным крутильным колебаниям металлов имелись лишь для образца из стали ЭУ-11 [2].

Величины максимальных амплитуд угла скручивания, соответствующие им напряжения и некоторые другие характеристики приведены в таблице 2.

Таблица 2

№№ полупериодов	Максимальные углы скручив. в радианах	Максимальные динамич. напряж. в кг/см²	Примечание
0	0,0580	945	Размеры образцов: длина—240 мм, диаметр—10 мм. Модуль касательной упругости $G = 0,801 \cdot 10^9$ кг/см²
10	0,0533	868	
20	0,0493	803	
30	0,0458	746	
40	0,0428	697	
50	0,0401	653	
60	0,0378	616	
70	0,0359	585	
80	0,0341	556	
90	0,0323	525	
100	0,0309	503	
110	0,0296	482	
120	0,0284	483	
130	0,0273	445	
140	0,0262	427	
150	0,0252	410	

Удельную энергию рассеяния при крутильных колебаниях представляем в виде следующей зависимости от максимальных касательных напряжений

$$\omega_2 = c_2 \tau_0^2 + c_3 \tau_0^3. \quad (3')$$

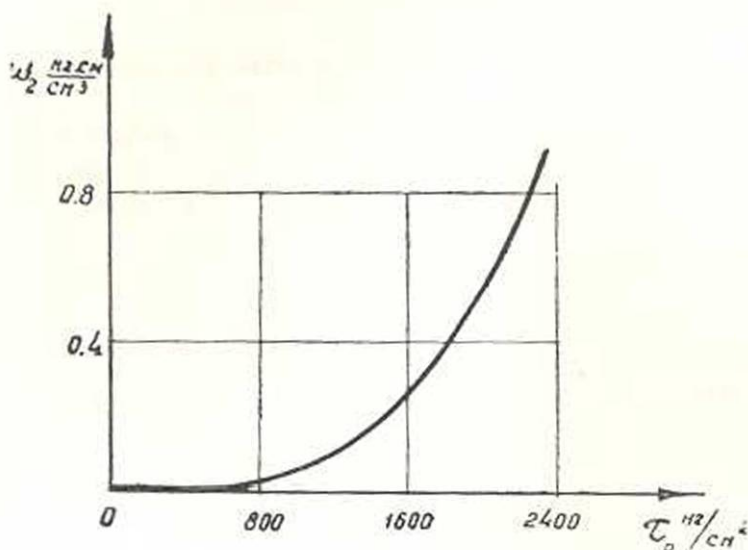
Подставляя (3') в (14) и учитывая, что $\varphi(x) = \frac{x}{l}$, получим следующее выражение для определения полной энергии рассеяния при крутильных колебаниях

$$\Omega^{(2)} = C_2 \frac{\pi r^4}{2l} G^2 f^2 + c_3 \frac{2\pi r^5}{5l^2} G^3 f^3. \quad (14')$$

Взяв из таблицы 2 значения l , соответствующие различным величинам напряжений, подставляем их в систему уравнений (1), решая которую получим значения параметров. Тогда уравнение зависимости энергии рассеяния от максимальных касательных напряжений будет

$$\omega_2 = 0.25 \cdot 10^{-8} \tau_0^2 + 0.66 \cdot 10^{-10} \tau_0^3. \quad (3'')$$

Графическое изображение этой зависимости представлено на фиг. 7.



Фиг. 7.

Анализ экспериментов проведен нами с целью проверки разработанного метода определения параметров внутреннего трения при колебаниях. Величины полученных параметров для сталей-3 и ЭУ-11 являются ориентировочными.

Для определения окончательных величин параметров внутреннего трения необходимо произвести исследование материала при различ-

ных напряженных состояниях. Так, например, целесообразно произвести исследование определенного материала, положим металла, на чистые изгибные и крутильные колебания, определить для этих случаев параметры внутреннего трения и затем сопоставить их с таковыми, полученными при поперечных изгибных колебаниях того же материала.

Такую работу мы намеряем проделать в дальнейшем.

Пользуемся случаем выразить благодарность доктору технических наук профессору Я. Г. Пановко за ценные советы по анализу экспериментальных результатов по разработанному нами методу.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 10 XI 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Давиденков Н. Н. Журнал технической физики, т. VII, вып. 3, 1938.
2. Луц Е. Б. Вестник металлопромышленности, №№ 5, 12, 15, 1936.
3. Луц Е. Б. ПММ, новая серия, т. I, вып. 3, 1938.
4. Назаров А. Г. ДАН Армянской ССР, т. XVI, № 3, 1953.
5. Назаров А. Г. ДАН Армянской ССР, т. XVI, № 4, 1953.
6. Назаров А. Г. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 4, 1953.
7. Пановко Я. Г. Журнал технической физики, т. XXVIII, вып. 3, 1953.
8. Писаренко Г. С. Журнал технической физики, т. XV, вып. 9, 1945.
9. Писаренко Г. С. Инженерный сборник, т. V, вып. I, 1948.
10. Писаренко Г. С. Сборник трудов Института строительной механики АН Украинской ССР, № 15, 1951, Киев.
11. Сорокин Е. С. Сборник ЦНИПС „Исследования по динамике сооружений“, 1951, М.—Л.
12. Voigt W. Wied. Ann. 47, p. 671—693, 1892.

Բ. Կ. Կարապետյան

ԱՋԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԺԱՄԱՆԱԿ ՆՅՈՒԹԻ ՆԵՐՔԻՆ ՇՓՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում արված է ծոման և ոլորման առանձնությունների ժամանակ նորմալ ու տանգենցիալ լարումներին համապատասխան նյութի մեջ ներքին շփումից առաջացած ցրման էներգիայի պարամետրների որոշման եղանակ. Այս եղանակը կարելի է տարածել նյութի նաև այլ լարվածային վիճակների վրա: Ընդունված է, որ առաձգական սխառեմների ուղատ առանձնությունների ժամանակ ցրման էներգիայի պատճառը հիմնականում հանդիսանում է նյութի առաձգական հիստերեզիսը:

Ըստ մշակված եղանակի՝ կլենլով պողպատի ձողերի ծոման և ոլորման ուղատ առանձնությունների փորձարկումներից ստացված տվյալներից, որոշված են պողպատի ներքին շփման պարամետրների մեծությունները և կառուցված են նորմալ և տանգենցիալ լարվածությունների՝ առանկարաբ ցրման էներգիայից կախման կորերը:

АСТРОФИЗИКА

Г. М. Гарибян, И. И. Гольдман

Поляризация излучения релятивистских электронов при движении в магнитных полях туманностей и звезд

1. Астрофизическими наблюдениями последних лет обнаружена поляризация света звезд [1—3] и газовой Крабовидной туманности [4]. Попытка объяснить это явление целиком поляризующим действием межзвездной среды [5] наталкивается, по видимому, на ряд серьезных трудностей. Поэтому представляет интерес проанализировать возможные механизмы испускания поляризованного света самой звездой или туманностью. Очевидно, что поляризация света должна быть связана с наличием определенного направления, выделенного в механизме испускания света. Подобную направленность естественно связать с магнитными полями астрофизических объектов. Как известно, движение электронов в магнитных полях сопровождается излучением электромагнитных волн. При этом интенсивность излучения сильно возрастает с увеличением энергии электронов. В качестве возможного механизма испускания поляризованного света в этой работе рассмотрено излучение релятивистских электронов в магнитных полях.

В п. 2 резюмированы результаты известных расчетов по спектральному составу, угловому распределению и полной интенсивности излучения, испускаемого релятивистским электроном, движущимся в магнитном поле по окружности.

В пп. 3 и 4 исследуется поляризация излучения при движении электрона как по окружности, так и по винтовой линии.

Далее, в п. 5 рассмотрены спектральный состав и поляризация суммарного излучения электронов со степенной функцией распределения по энергиям в однородном магнитном поле. В п. 6, на основании полученных результатов, обсуждается вопрос о поляризации излучения туманностей и звезд.

2. Как известно [6], электрон, не имеющий составляющей скорости вдоль магнитного поля в однородном магнитном поле напряженности H будет вращаться по окружности радиуса

$$r = \frac{mc v}{eH} E \quad (1)$$

с циклической частотой

$$\omega_0 = \frac{eH}{mcE}, \quad (2)$$

где v — скорость электрона, а E — полная энергия электрона, измеренная в единицах массы покоя. Полная интенсивность излучения равна

$$I = \frac{2e^4 H^2 v^2 E^2}{3m^2 c^2}. \quad (3)$$

Если электрон релятивистский ($E \gg 1$), то излучение с каждого элемента траектории направлено вперед по направлению движения электрона и сосредоточено в узком конусе с углом раствора $\sim \frac{1}{E}$.

Спектральный состав излучения определяется следующей формулой для интенсивности n -ой гармоники ($n \gg 1$):

$$I_n = \frac{2e^4 H^2 n^{1/2}}{\sqrt{\pi} m^2 c^2 E^2} \left\{ \Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(x) dx \right\}, \quad (4)$$

где $u = \frac{n^{1/2}}{E}$, а функция Эйри $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) dt$.

Спектральное распределение имеет максимум при $n \sim E^2$, т. е. при больших n . Таким образом, спектр излучения состоит из ряда близких равноотстоящих линий с частотой $\omega = n\omega_0$, т. е. имеет квазинепрерывный вид. Удобно поэтому рассматривать среднюю интенсивность в интервале частот $d\omega \gg \omega_0$, которая равна

$$I_m d\omega = \frac{2e^4 H^2}{\sqrt{\pi} m^2 c^2 E^2} \frac{\omega^{1/2}}{\omega_0^{1/2}} \left\{ \Phi'(u) + \frac{u}{2} \int_u^\infty \Phi(x) dx \right\} d\omega, \quad (5)$$

где $u = \frac{\omega^{1/2}}{\omega_0^{1/2} E}$. Интенсивность, как функция частоты, пропорциональна

$\omega^{1/2}$ при $\omega \ll \frac{eH}{mc} E^2$ и экспоненциально убывает в обратном предельном случае $\omega \gg \frac{eH}{mc} E^2$.

Основная часть излучения сосредоточена в области частот $\omega \sim \frac{eH}{mc} E^2$. Значение интенсивности в максимуме $I_{\max} \sim \frac{e^3 H}{mc^2}$ (не зависит от E); ширина этой области частот $\sim \frac{eH}{mc} E^2$.

* Функция Эйри при больших значениях аргумента имеет вид $\Phi(u) = \frac{\exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{2u^{1/4}}$, поэтому величина в фигурных скобках формулы (5) $\sim \frac{\exp(-\frac{2}{3}u^{3/2})}{2u^{1/4}}$ при $u \rightarrow \infty$. При $u \sim 0$ эта же величина будет $\sim 0,4587$ (см. [6] и [7]).

Анализ формулы (5) показывает, что за излучение в видимой области спектра $\omega \sim (2 \div 5) \cdot 10^5$ должны быть ответственны электроны с энергиями

$$E \sim mc^2 \sqrt{\frac{\omega mc}{eH}} \sim (3 \div 10) \frac{10^9}{\sqrt{H}} \text{ эв.} \quad (6)$$

В области радиочастот $\omega \sim 10^9$,

$$E \sim \frac{6 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^7}{\sqrt{H}} \text{ эв.} \quad (7)$$

3. Исследуем теперь поляризацию излучения, испускаемого электроном при движении по окружности. Для этого надо найти поле излучения на больших расстояниях от электрона. Выберем систему координат, направив ось z вдоль направления магнитного поля, а плоскость yz так, чтобы в ней лежал луч зрения. Тогда компоненты Фурье векторного потенциала в волновой зоне будут равны

$$\begin{aligned} A_{nx} &= -\frac{ie}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi[2^{1/3} n^{2/3} (1-\xi)], \\ A_{ny} &= \frac{e}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \frac{1}{\cos\vartheta} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \Phi[2^{1/3} n^{2/3} (1-\xi)], \\ A_{nz} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где R_0 — расстояние между точкой наблюдения и излучающей областью, $k = \frac{n\omega_0}{c}$, $\xi = \frac{v}{c} \cos\vartheta$, ϑ — угол между лучом зрения и плоскостью орбиты электрона.

Магнитное поле в волновой зоне имеет две отличные от нуля компоненты, одна из которых лежит в плоскости yz .

$$H_n^x = e \frac{n\omega_0}{c} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{2}{n}\right)^{2/3} \Phi[2^{1/3} n^{2/3} (1-\xi)], \quad (9)$$

а другая — вдоль оси x

$$H_n^z = -ie \frac{n\omega_0}{c} \frac{\tan\vartheta}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \Phi[2^{1/3} n^{2/3} (1-\xi)]. \quad (10)$$

Соответствующие интенсивности поляризованного излучения будут равны*:

$$\begin{aligned} dI_n^x &= \frac{c}{2\pi} |H_n^x|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{2e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \omega_0^2 \Phi^2(t_0 + t) d\Omega, \\ dI_n^z &= \frac{c}{2\pi} |H_n^z|^2 R_0^2 d\Omega = \frac{2e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \omega_0^2 \tan^2\vartheta \Phi^2(t_0 + t) d\Omega. \end{aligned} \quad (11)$$

* Направление поляризации совпадает, как это обычно принимается, с направлением колебаний магнитного вектора.

где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ — элемент телесного угла ($\theta = \frac{\pi}{2} - \vartheta$).

$t_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} E^{-2}$, $t = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} 2(1 - \cos\vartheta)$. Так как излучение сосредоточено в узком конусе с углом раствора $\vartheta \sim \frac{1}{E}$, то в формулах (11) $\vartheta \ll 1$ и $t = \left(\frac{n}{2}\right)^{2/3} \vartheta^2$.

Интенсивность, проинтегрированная по всему телесному углу, равна

$$I_n^{\parallel} = \frac{4e^2}{\pi c} \omega_0^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \int_0^{\infty} \Phi^2(t_0 + t) t^{-1/3} dt, \quad (12)$$

$$I_n^{\perp} = \frac{4e^2}{\pi c} \omega_0^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \int_0^{\infty} \Phi^2(t_0 + t) t^{1/3} dt.$$

Воспользовавшись соотношением

$$\Phi^2(\xi) = \frac{1}{2^{1/3} \Gamma^2} \int_0^{\infty} \Phi(2^{1/3} \xi + \eta) \eta^{-1/2} d\eta, \quad (13)^*$$

можно, интегрируя по частям формулы (12) и пользуясь тем, что функция Эйри удовлетворяет уравнению $\Phi''(x) - \Phi(x) = 0$, представить выражения для интегральных интенсивностей в виде

$$I_n^{\parallel} = -\frac{e^2}{V \pi c} \omega_0^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \left\{ t_0 \int_{2^{1/3} t_0}^{\infty} \Phi(\eta) d\eta + \frac{3}{2^{1/3}} \Phi'(2^{1/3} t_0) \right\}, \quad (14)$$

$$I_n^{\perp} = -\frac{e^2}{V \pi c} \omega_0^2 \left(\frac{n}{2}\right)^{1/3} \left\{ t_0 \int_{2^{1/3} t_0}^{\infty} \Phi(\eta) d\eta + \frac{1}{2^{1/3}} \Phi'(2^{1/3} t_0) \right\}.$$

Тогда степень поляризации будет равна

$$\alpha = \frac{I_n^{\parallel} - I_n^{\perp}}{I_n^{\parallel} + I_n^{\perp}} = \frac{2^{1/3} \Phi'(2^{1/3} t_0)}{2 t_0 \int_{2^{1/3} t_0}^{\infty} \Phi(\eta) d\eta + 2^{4/3} \Phi'(2^{1/3} t_0)}. \quad (15)$$

* Эта формула получается из известного соотношения для бесселевых функций $I_n^2(nx) = \frac{2}{n} \int_0^{\pi/2} I_{2n}(2nx \cos\theta) d\theta$, если принять во внимание, что при $n \rightarrow \infty$ и $x \sim 1$

$$I_n(nx) = \left(\frac{2}{n}\right)^{1/3} \frac{1}{V \pi} \Phi\left(2^{1/3} n^{1/3} (1-x)\right).$$

При $t_0 \ll 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. излучение поляризовано на 50%.

При $t_0 \gg 1$, $\alpha = 1$, т. е. излучение полностью поляризовано.

В таблице 1 приведены численные значения α как функции от

$$t_0 = \left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} E^{-2} = \left(\frac{\omega mc}{2eH}\right)^{3/2} E^{-4/3}.$$

Таблица 1*

t_0	α	t_0	α	t_0	α	t_0	α
0	50%	0,8	76%	1,6	87%	2,4	93%
0,2	59	1,0	80	1,8	88	2,6	95
0,4	66	1,2	83	2,0	90	2,8	97
0,6	72	1,4	85	2,2	91	3,0	99

Для дальнейших целей удобно переписать формулы (11) на интервал частот, что возможно ввиду квазинепрерывности спектра. Удобно также написать излучение не за единицу времени, а за время одного оборота, т. е. умножить имеющуюся формулу на период обращения $\frac{2\pi}{\omega_0}$. Тогда получим

$$dl_{\omega}^* = \frac{4e^2}{\pi c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{3/2} \Phi^2(t_0 + t) d\Omega d\omega, \quad (16)$$

$$dl_{\omega}^* = \frac{4e^2}{\pi c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^{1/2} \operatorname{tg}^2 \vartheta \Phi^2(t_0 + t) d\Omega d\omega.$$

4. Рассмотрим теперь излучение, испускаемое электроном, движущимся в магнитном поле при наличии составляющей скорости вдоль магнитного поля. Известно, что в этом случае частица движется по винтовой линии с частотой и радиусом, определяемыми формулами (1) и (2), где теперь под v надо понимать компоненту скорости, перпендикулярную направлению магнитного поля, а E — полная энергия. Движение вдоль оси z является равномерным $z = v_z t$, где v_z — компонента скорости вдоль магнитного поля. Ось z направлена вдоль H , а плоскость yz проходит через луч зрения. Разлагая векторный потенциал в интеграл Фурье

$$\vec{A}_e = e \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\vec{r},$$

мы получим вектор $\vec{H}_e = i[\vec{k} \vec{A}_e]$ со всеми тремя компонентами, отличными от нуля.

Для упрощения расчетов удобно перейти к новой системе коор-

* Все численные расчеты проводились студентами Ереванского госуниверситета им. В. М. Молотова — М. Глухия и В. Шахбазяном, которым авторы выражают свою благодарность.

динат, произведя поворот вокруг оси x на угол ψ такой, что $\operatorname{tg} \psi = \frac{v_z}{v}$.

Этим мы направляем новую ось y' вдоль касательной к винтовой линии. Ось z' будет наклонена к H под тем же углом ψ . Введем также угол $\vartheta' = \vartheta - \psi$. Тогда будут отличны от нуля только компоненты магнитного вектора, лежащая в плоскости $y'z'$

$$H_{\omega}^* = -\frac{2e}{V\pi c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{1/2} \Phi'(t_0 + t) \quad (17)$$

и компонента, перпендикулярная плоскости, проходящей через направление магнитного поля H и луч зрения:

$$H_{\omega}^{\perp} = -i \frac{2e}{V\pi c} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} \Phi(t_0 + t) \vartheta', \quad (18)$$

$$\text{где} \quad t_0 = \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} E^{-2}, \quad t = \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} \vartheta'^2.$$

С помощью этих формул нетрудно получить интенсивности излучений с поляризацией параллельной и перпендикулярной проекции вектора H на плоскость наблюдения (плоскость перпендикулярную лучу зрения). При этом для $\omega \gg \omega_0$ интерференция между излучением с разных витков винтовой линии не играет роли, поэтому достаточно рассмотреть интенсивность излучения с одного витка; она равняется

$$dI_{\omega}^* = \frac{4e^2}{\pi c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} \Phi'^2(t_0 + t) d\Omega d\omega, \quad (19)$$

$$dI_{\omega}^{\perp} = \frac{4e^2}{\pi c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{5/2} \vartheta'^2 \Phi'^2(t_0 + t) d\Omega d\omega.$$

Сравнение формул (19) с формулами (16) показывает, что излучение с одного витка спирали отличается от излучения с одного витка окружности только тем, что магнитное поле эффективно ослабляется в $\cos \psi$ раз (этому соответствует умножение ω_0 на $\cos \psi$).

Таким образом, спектр излучения электрона, движущегося по винтовой линии, сдвигается в область меньших частот по сравнению со спектром излучения электрона, движущегося с той же энергией по окружности.

5. Рассмотрим теперь излучение, испускаемое в магнитном поле совокупностью электронов с некоторой функцией распределения по энергиям $I(E)$. Распределение скоростей по направлениям будем предполагать изотропным. Тогда траектории электронов будут представлять собой винтовые линии со всевозможными углами наклона ψ винтовой линии к плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Вероятность того, что какой-либо электрон будет двигаться по винтовой линии, характеризуемой углом ψ , лежащим в пределах от ψ

до $\psi + d\psi$, равна доле соответствующего телесного угла, т. е. $\frac{1}{2} \cos \psi d\psi$.

Умножим эту вероятность на интенсивность излучения в заданном направлении $d\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos \psi d\psi dl_m^+ &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} \omega_0 \Phi^2(t_0 + t) \cos \psi d\psi d\Omega d\omega, \\ \frac{1}{2} \cos \psi d\psi dl_m^- &= \frac{e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{3/2} \omega_0 \Phi^2(t_0 + t) \cos \psi d\psi d\Omega d\omega, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$t = \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{1/2} \Phi^2, \quad t_0 = \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \cos \psi} \right)^{1/2} E^{-2}, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \Phi = \frac{\pi}{2} - \theta - \psi.$$

(Для dl_m^+ и dl_m^- взяты выражения (19), умноженные на $\frac{\omega_0}{2\pi}$, чтобы получить излучение за единицу времени.)

Ясно, что проинтегрировав (20) по ψ , мы получим усредненную по всем типам траекторий интенсивность излучения от электрона данной энергии.

Интегрирование по ψ заменяем на интегрирование по Φ . При этом, поскольку подинтегральное выражение имеет резкий максимум при $\Phi \sim 0$, везде можно заменить ψ на $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Обозначим усредненную по ψ интенсивность через i_m , тогда

$$\begin{aligned} i_m^+ d\Omega d\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos \psi d\psi dl_m^+ = \frac{e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \sin \theta} \right)^{1/2} \omega_0 \sin \theta \int_0^\infty t^{1/2} \Phi^2(t_0 + t) dt d\Omega d\omega, \\ i_m^- d\Omega d\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} \cos \psi d\psi dl_m^- = \frac{e^2}{\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \sin \theta} \right)^{1/2} \omega_0 \sin \theta \int_0^\infty t^{1/2} \Phi^2(t_0 + t) dt d\Omega d\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$t_0 = \left(\frac{\omega}{2\omega_0 \sin \theta} \right)^{1/2} E^{-2}.$$

Пусть $f(E)dE$ есть число электронов в единице объема с энергиями в интервале $E, E + dE$. Тогда излучение единицы объема за 1 сек в телесный угол $d\Omega$ в интервале частот $d\omega$ будет равно

$$\begin{aligned} I_m^+ d\Omega d\omega &= \int f(E) i_m^+ dE d\Omega d\omega, \\ I_m^- d\Omega d\omega &= \int f(E) i_m^- dE d\Omega d\omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Будем предполагать, что функция распределения имеет вид $f(E) = \frac{\Lambda}{E^3}$.

Интегрирование в (22) удобно произвести, если вместо переменной E ввести переменную t_0 . В результате получим

$$I_{\omega}^{\parallel} = \frac{3}{8} \frac{Ae^2}{\pi^2 c} \left(2 \frac{eH}{mc} \sin \theta \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \omega^{\frac{1-\nu}{2}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{3\nu-5}{4}} \Phi'^2(t_0+t) dt dt_0, \quad (23)$$

$$I_{\omega}^{\perp} = \frac{3}{8} \frac{Ae^2}{\pi^2 c} \left(2 \frac{eH}{mc} \sin \theta \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \omega^{\frac{1-\nu}{2}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{3\nu-5}{4}} \Phi^2(t_0+t) dt dt_0.$$

Если ввести обозначения

$$a = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{3\nu-5}{4}} \Phi'^2(t_0+t) dt dt_0, \quad (24)$$

$$b = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{3\nu-5}{4}} \Phi^2(t_0+t) dt dt_0,$$

то численные расчеты дают следующие значения для приведенных интегралов:

$$\begin{aligned} &\text{при } \nu = 2 \\ &a = 0,2061, \quad b = 0,0354; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{при } \nu = 3 \\ &a = 0,1485, \quad b = 0,0206. \end{aligned}$$

Степень поляризации $\alpha = \frac{I_{\omega}^{\parallel} - I_{\omega}^{\perp}}{I_{\omega}^{\parallel} + I_{\omega}^{\perp}}$ зависит только от показателя

ν и равна 71% при $\nu = 2$ и 76% при $\nu = 3$.

Полная интенсивность излучения, испускаемого единицей объема пространства в направлении $d\Omega$, равна $(I_{\omega}^{\parallel} + I_{\omega}^{\perp}) d\Omega$. Интенсивность же излучения, падающего на 1 см^2 в телесном угле $d\Omega$, от некоторого объема, имеющего линейные размеры R вдоль луча зрения и находящегося от наблюдателя на расстоянии R_0 (причем $R \ll R_0$), как нетрудно видеть, равна $(I_{\omega}^{\parallel} + I_{\omega}^{\perp}) \cdot R \cdot d\Omega$. Это выражение для полной интенсивности совпадает с соответствующей формулой, приведенной в работе В. Л. Гинзбурга и М. И. Фрадкина [8].

6. При применении полученных результатов к астрофизическим вопросам, необходимо иметь в виду, что магнитное поле реальных объектов обычно не является однородным.

Так, поле в туманностях имеет, повидимому, только общую тенденцию быть однородным, сильно отклоняясь от среднего значения в отдельных частях. Поэтому полученные цифры для степени поляризации излучения, испускаемого релятивистскими электронами, дают только верхнюю границу этой величины для туманности.

С другой стороны, надо полагать, что полученные цифры должны давать степень поляризации излучения релятивистских электронов, идущего от достаточно малых областей туманностей, в которых поле можно считать однородным.

В случае звезд пространственное распределение магнитного поля

можно считать более известным. Это, повидимому, поле магнитного диполя.

Благодаря тому, что магнитное поле звезды существенно неоднородно, степень поляризации будет значительно ослаблена. Так, при наблюдении звезды вдоль направления ее магнитного момента поляризации света очевидно не будет. Максимального значения поляризация достигает при наблюдении звезды в направлении, перпендикулярном ее магнитному моменту. Чтобы оценить фактор ослабления степени поляризации в этом случае, сделаем предположение, что функция распределения электронов по энергиям зависит лишь от расстояния от центра звезды и не зависит от широтного угла. Рассмотрим поляризацию излучения, идущего с некоторого сферического слоя звезды. Направим ось z вдоль магнитного момента звезды. Элемент объема в этом слое со сферическими координатами ϑ, φ излучает свет с интенсивностью, определяемой формулами (23), причем первое выражение относится к излучению, поляризованному вдоль проекции магнитного поля на плоскость, перпендикулярную лучу зрения, а второе выражение дает интенсивность излучения, поляризованного в перпендикулярном направлении.

Нам необходимо перейти к интенсивностям света, поляризованного параллельно и перпендикулярно направлению магнитного момента звезды:

$$\begin{aligned} I_{0\omega}^+ &= I_{\omega}^+ \cos^2 \zeta + I_{\omega}^- \sin^2 \zeta, \\ I_{0\omega}^- &= I_{\omega}^+ \sin^2 \zeta + I_{\omega}^- \cos^2 \zeta, \end{aligned} \quad (25)$$

где ζ — угол между осью z и проекцией магнитного поля на плоскость, перпендикулярную лучу зрения. Степень поляризации излучения от этого элемента объема равна

$$z = \frac{I_{0\omega}^+ - I_{0\omega}^-}{I_{0\omega}^+ + I_{0\omega}^-} = \frac{a - b}{a + b} (\cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta), \quad (26)$$

где a и b даются формулами (24).

Усредним эту величину по положению на сфере, т. е. по ϑ и φ , воспользовавшись предположением о независимости функции распределения электронов от положения на сфере. Тогда при усреднении необходимо учесть, что интенсивность излучения с различных участков сферического слоя зависит от углов ϑ и φ , а именно пропорциональна $(H \sin \vartheta)^{\frac{\gamma+1}{2}}$ (см. формулу (23)).

Производя усреднение с таким весовым множителем, находим

$$\bar{z} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \frac{\int (\cos^2 \zeta - \sin^2 \zeta) (H \sin \vartheta)^{\frac{\gamma+1}{2}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{\int (H \sin \vartheta)^{\frac{\gamma+1}{2}} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}, \quad (27)$$

$$\text{где } \sin \vartheta = \sqrt{\frac{3 \cos^2 \vartheta + 1 - 9 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}{3 \cos^2 \vartheta + 1}},$$

$$\cos \zeta = \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{\sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1 - 9 \cos^2 \vartheta \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}$$

$$H = \mu \frac{\sqrt{3 \cos^2 \vartheta + 1}}{r^2}$$

Для $\nu = 2$ и $\nu = 3$ вычисления дают соответственно $\bar{\alpha} = 10\%$ и $\bar{\alpha} = 11\%$.

Полученные цифры относятся к тому случаю, когда релятивистские электроны имеются во всем сферическом слое звезды и потемнение к краю диска не учитывается. Очевидно, что если релятивистские электроны появляются только в результате некоторых процессов вблизи экватора звезды, то степень поляризации света может оказаться большой ввиду того, что поле вблизи экватора относительно однородно. Точно также учет потемнения к краю диска может привести к увеличению степени поляризации излучения звезды со сферически равномерно распределенными электронами.

Степень поляризации света зависит также и от угла наклона магнитного момента звезды к лучу зрения, будучи максимальной при угле равном 90° и равной нулю при 0° .

До сих пор рассматривалась степень поляризации света, испускаемого релятивистскими электронами в магнитном поле. С другой стороны, основные механизмы излучения звезд в непрерывном спектре дают неполяризованный свет. Очевидно, что наблюдаемая степень поляризации будет зависеть от того, какова относительная доля в непрерывном спектре излучения релятивистских электронов. Чем больше будет роль этого механизма излучения, тем больше будет степень поляризации.

В настоящее время невозможно точно ответить на указанный вопрос. Однако, согласно принятым представлениям, надо считать, что в звездах излучение релятивистских электронов должно играть второстепенную роль по сравнению с тепловым излучением звезд.

Поэтому предложенный механизм, возможно, не в состоянии полностью объяснить наблюдаемую поляризацию излучения звезд. Однако есть случаи, когда мы имеем дело с излучением звезд, которое по своей природе, вероятно, отличается от теплового. Так, например, согласно Джою и Хьюмасону [9] переменные карлики типа Т Тельца и UV Кита показывают в своих спектрах интересное явление: обычно непрерывный спектр с линиями поглощения "заливается" непрерывным излучением неизвестной природы, вследствие чего эквивалентная ширина линий поглощения уменьшается. Излучение релятивистских электронов должно было бы производить именно такой эффект "заливания". Прибавим к этому, что все данные говорят о том, что дополнительное излучение этих звезд в периоды максимумов связано с весьма бурными процессами в их атмосферах. Поэтому весьма желательно изучение степени поляризации указанного "заливающего" излучения.

В случае же газовой туманности релятивистские электроны могут играть большую роль в формировании непрерывного спектра, и предложенный механизм излучения поляризованного света будет более эффективен.

Как известно, радиоизлучение Крабовидной туманности заставило высказать предположение о наличии в ней релятивистских электронов, движущихся в магнитных полях. Согласно И. С. Шкловскому [10] этим же объясняется непрерывное излучение этой туманности в области оптических частот. Наблюдения В. А. Домбровского [4], выполненные в Бюраканской астрофизической обсерватории, показали, что свет этой туманности поляризован, причем степень поляризации доходит до 15%. Этот результат находится в соответствии с расчетами приведенными в настоящей работе.

Наконец следует обратить внимание на то, что для выяснения той роли, которую играет излучение релятивистских электронов в Крабовидной туманности большое значение может иметь экспериментальное излучение поляризации радиоизлучения. Если механизм излучения релятивистскими электронами в магнитных полях является доминирующим как в области радиочастот, так и в оптической области, то принимая во внимание, что степень поляризации слабо зависит от вида спектра (см. п. 5), следует ожидать приблизительно одинаковой степени поляризации в обеих областях спектра.

В заключение авторы выражают свою признательность академику В. А. Амбарцумяну за постановку задачи и ценные замечания и В. А. Домбровскому за сообщение результатов своих работ до опубликования.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 25 XII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Домбровский В. А. ДАН Армянской ССР, 10, 193, 1949; 12, 103, 1950.
2. Hiltner. *Ap. J.* 109, 477, 1949.
3. Hall J. S., Mikessell A. H. *Pöbl. Naval Obs. Washington*, 17, 1, 1950.
4. Домбровский В. А. ДАН СССР, 94, 1021, 1954.
5. Davis L. Jr., Greenstein L. *Ap. J.* 114, 206, 1951.
6. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. М.—Л., 1948.
7. Фок В. А. Таблицы функций Эйри. М., 1946.
8. Гинзбург В. Л. и Фрадкин М. И. ДАН СССР, 92, 531, 1953.

Գ. Մ. Դարիբյան, Ի. Ի. Գոլյման

ՄԻԳԱՄԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՍՏՂԵՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐՈՒՄ ՇԱՐԺՎՈՂ ՐԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅՅՄԱՆ Բ Ե Վ Ե Ռ Ա Ց Ո Ւ Մ Ը

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Վերջին տարիներին աստրոֆիզիկական դիտումները բերեցին այն կարևորացության, որ ստաղերի և խեցգետնանման միգամածության արձակած լույսերը բևեռացված են։ Այս երևույթի բացատրություններն այն փորձերը, երբ ճառագայթման բևեռացման պատճառը վերագրվում է միայն միջաստղային միջավայրի աղղեցությանը, ըստ երևույթին հանդիպում է մի շարք լուրջ դժվարությունների։ Այդ պատճառով հետաքրքրություն է ներկայացնում հետազոտել հենց իրենց աստղերի և միգամածությունների կողմից բևեռացված լույսի արձակման հնարավոր մեխանիզմները։

Հոգիածում, որպես բևեռացված լույսի արձակման հնարավոր մեխանիզմ, դիտված է թեյառիփխտիկ էլեկտրոնների ճառագայթումը աստղի և միգամածության մագնիսական դաշտում։

Ամփոփված են մագնիսական դաշտում շրջանազծով շարժվող բեյառիփխտիկ էլեկտրոնների ճառագայթման ինտենսիվության սպեկտրով բաղադրության և անկյունային բաշխման վերաբերյալ եղած աշխատությունների արդյունքները։

Հետազոտված են շրջանազծով և պտուտակազծով շարժվող էլեկտրոնների ճառագայթման բևեռացումը։ Ճառագայթման մագնիսական դաշտի լարվածության գերակշռող տատանումների ուղղությունը համընկնում է դաշտի H վեկտորի սլոնկեյիայի հետ՝ ճառագայթին ուղղահայած հարթության վրա։

Ճառագայթումը կարող է բևեռացած լինել 50% -ից մինչև 100% -ի սահմաններում (տես 1 աղյուսակ)։

Հետազոտված են ըստ իրենց էներգիայի աստիճանային ֆունկցիայով բաշխված էլեկտրոնների ընդհանուր ճառագայթման սպեկտրով բաղադրությունը և բևեռացումը։

Քննարկված է աստղերի և միգամածությունների ճառագայթումների բևեռացման հարցը։ Առաջադրված մեխանիզմը հավանաբար ի վիճակի է լրիվ բացատրելու աստղերի ճառագայթման բևեռացումը։ Ինչ վերաբերում է խեցգետնանման գազային միգամածությանը, ապա պետք է կնխադրել, որ թեյառիփխտիկ էլեկտրոնները կարող են տալ բևեռացած ճառագայթման հիմնական մասը։

Н. М. Кочарян, С. Д. Кайтмазов

Расчет светосилы магнитного масспектрометра

При изучении космического излучения магнитным масспектрометром одной из главных экспериментальных задач является получение спектра интенсивности космического излучения в функции от параметров частицы (массы, импульса, зенитного угла и др.). Физический интерес, разумеется, представляет истинная интенсивность в месте измерения. Спектр, полученный непосредственно, не совпадает с истинной интенсивностью, так как прибор регистрирует частицы с неодинаковой вероятностью, являющейся функцией параметров частицы. Вид этой функции определяется как физическими факторами, так и геометрией прибора. Светосилой называется часть функции, зависящая от геометрии прибора. Понятие светосилы, а также методы ее расчета были введены уже во время первых измерений магнитным масспектрометром Алиханова—Алиханяна [1]; этот вопрос был рассмотрен Харитоновым. В частности, им был рассмотрен метод определения светосилы прибора путем прямого подсчета числа комбинаций счетчиков, соответствующих частицам с данным значением импульса.

В 1951 году авторами проводились измерения углового распределения интенсивности космического излучения. Для регистрации частиц, идущих под большими зенитными углами, на масспектрометре были установлены широкие и короткие полюса.

Для вычисления светосилы такого масспектрометра, мы не могли воспользоваться указанным выше методом, так как последний дает достаточно точные результаты только для небольших углов телескопа. Кроме того, этот метод при большом числе счетчиков в ряду (доходившим у нас до 100) становится слишком громоздким и практически неприменимым.

Нами был усовершенствован и применен аналитический метод расчета светосилы, как функции ρ и θ , где ρ —радиус кривизны проекции траектории частицы на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, а θ —зенитный угол траектории частицы, измеренный в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Этот метод может быть применен при любых углах телескопа. Кроме того, он учитывает наличие щельности между счетчиками и изменение эффективного угла телескопа в плоскости параллельной магнитному полю.

Пусть параллелепипед со сторонами a , b , l (фиг. 1) представляет рабочую часть зазора масспектрометра (b —расстояние между полюсами). Частица может быть зарегистрирована, если только ее траектория уложится в параллелепипед зазора. Разберем плоскую задачу в плоскости XOZ . Траекторию будем характеризировать зенитным уг-

лом θ и радиусом ρ . Обозначим через h расстояние между проекциями на ось X точек, имеющих в области зазора крайние абсциссы. Это будет расстояние $|X_3 - X_0|$ для траектории (а), $|X_1 - X_0|$ — для (б) и $|X_3 - X_1|$ — для (с) (фиг. 2).

Величина h для этих случаев соответственно равна:

$$h_a = |X_3 - X_0| = \rho(1 - \cos\varphi)$$

$$\text{при } \sin\theta < \frac{l}{2\rho},$$

$$h_b = |X_1 - X_0| = \rho(1 - \cos\theta)$$

$$\text{при } \frac{l}{2\rho} \leq \sin\theta < \frac{l}{\rho}, \quad (1)$$

$$h_c = |X_3 - X_1| = \rho|\cos\varphi - \cos\theta|$$

$$\text{при } \sin\theta > \frac{l}{\rho},$$

где φ — угол выхода траектории частицы из магнитного поля, измеренный в плоскости XOZ . Углы φ и θ связаны соотношением $\sin\theta - \sin\varphi = \frac{l}{\rho}$ (в случае (а) и (б) —

$$-\sin\varphi = \frac{l}{\rho} \text{ (в случае (а) и (б) —}$$

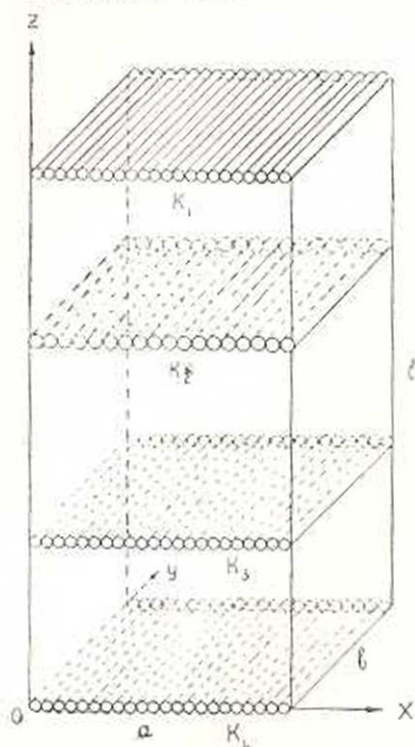
угол φ отрицательный)

Из фиг. 3 видно, что зарегистрируются только траектории, попавшие на участок АВ верхней границы зазора, причем $AB = a - h$. Дифференциальную интенсивность принято относить к единице площади, перпендикулярной траектории (а не к горизонтальной площадке); поэтому, при вычислении эффективной площади телескопа в плоскости XOZ надо брать длину отрезка $A'B = (a - h) \cos\theta$.

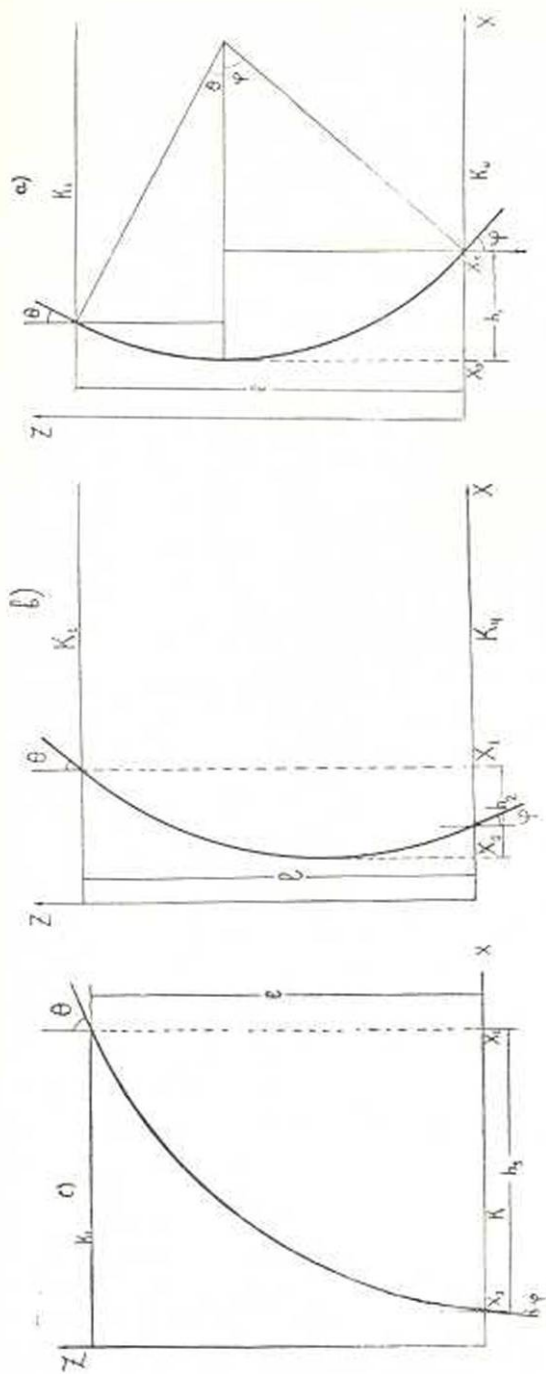
Поскольку светосила пропорциональна эффективной площади телескопа, а последняя в плоскости XOZ измеряется величиной $A'B$, то очевидно, что величина $(a - h) \cos\theta$ войдет множителем в выражение светосилы. Отметим, что величина $a - h$ меняется значительно сильнее остальных переменных членов, входящих в выражение светосилы и в основном определяет последнюю. Разумеется светосила равна 0 при $a - h \leq 0$.

Для полного решения задачи необходимо учесть геометрические параметры в плоскости YOZ .

Разберем плоскую задачу в плоскости YOZ (т. е. рассмотрим траекторию с параметрами $\rho = \infty$, $\theta = 0$). Для траектории, прошедшей через точку С с координатой y_1 (фиг. 4), возможными углами будут углы, лежащие внутри углов α_1 и α_2 , равных соответственно $\arctg \frac{b - y_1}{l}$ и



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$\arctg \frac{y_1}{l}$, а вся светосила будет пропорциональна величине

$$\int_0^b dy \int_{a_1}^{a_2} \cos \alpha dz,$$

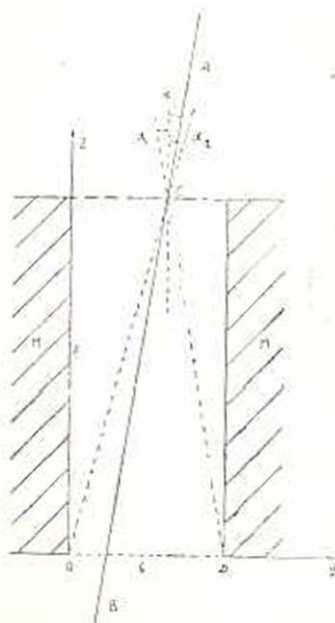
где $\cos \alpha$ под интегралом введен для того, чтобы иметь поток частиц через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения частиц.

Интегрируя (2) получим

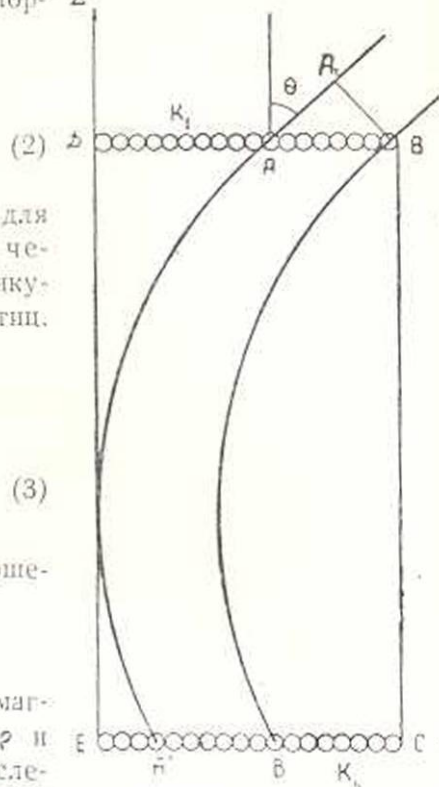
$$2l \left(\sqrt{1 + \left(\frac{b}{l} \right)^2} - 1 \right) \approx \frac{b^2}{l} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right] \quad (3)$$

(пренебрегая членом $\left(\frac{b}{l} \right)^4$ по отношению к 1).

Так как траектория частицы в магнитном поле при любых значениях ρ и b имеет форму винтовой линии, и, следовательно, вид прямой на развертке



Фиг. 4.



Фиг. 3.

цилиндра, то вид формулы (3) сохранится и в общем случае. Только вместо l надо подставить длину проекции траектории на плоскость XOZ , которая равна $|\rho(b-\varphi)|$. При $\rho = \infty$ величина проекции равна $\frac{l}{\cos \theta}$. В зависимости от соотношений величин a , b и l допустимы упрощения. Например, при соотношениях $l = 2a = 3b$, пользуясь формулой*

$$\frac{b^2}{\rho(b-\varphi)} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{l} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

мы допускаем максимальную относительную ошибку равную 1%.

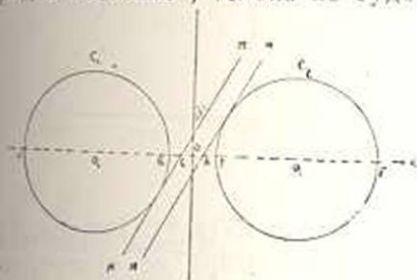
Как видно из формулы (4), сколько угодно малая величина $\frac{b}{l}$ не может

служить основанием тому, чтобы решать

* Вместо точного выражения $2\rho(b-\varphi) \left(\sqrt{1 + \left(\frac{b}{\rho(b-\varphi)} \right)^2} - 1 \right)$.

светосилу, как плоскую задачу в плоскости XOZ. Светосила зависит от относительного изменения угла телескопа в плоскости YOZ, которое не уменьшается при уменьшении самого угла. Наоборот, относительное изменение угла тем меньше, чем меньше $\frac{a}{l}$, так как в этом случае $\rho(\theta - \varphi)$ меньше отличается от l , ($l = \rho(\sin\theta - \sin\varphi)$).

В обычно применяемых телескопах в рядах между счетчиками имеется щель, и поэтому, если частица попадает в щель одного из рядов счетчиков, то она не будет зарегистрирована.



Фиг. 5.

Пусть d —диаметр счетчиков и D —расстояние между центрами счетчиков (фиг. 5). Назовем отношение $\frac{d}{D} = r$ коэффициентом щельности; далее, обозначим через γ угол между проекцией траектории частицы на плоскость XOZ и вертикалью. Для вероятности регистрации в ряду имеем

$$w = \frac{d}{D \cos \gamma} = \frac{r}{\cos \gamma}. \text{ При } \cos \gamma \leq r \text{ вероятность регистрации } w = 1.$$

Обычно в масспектрометре имеется несколько рядов счетчиков в зоре. Угол γ для верхнего и нижнего ряда соответствует углу θ и φ . Угол пересечения ряда, находящегося на расстоянии z от первого ряда, определяется равенством $\sin \gamma = \sin \theta - \frac{z}{\rho}$.

В многих случаях угол γ для центральных рядов может принимать только малые значения и $\cos \gamma$ для них можно считать равным 1.

Таким образом, полное выражение светосилы, при упрощениях, о которых говорилось выше, будет иметь вид для случая (с)

$$S(\rho, \theta) = [a - \rho |\cos \theta - \cos \varphi|] \frac{b^2}{\rho(\theta - \varphi)} \left(1 - \frac{b^2}{4 l^2} \right) \frac{r_1 r_2 r_3 r_4}{\cos \theta \cos \varphi} \cos \theta \text{ рад. см}^2. \quad (5)$$

Для случаев (а) и (б) в формуле (5) величина $|\cos \theta - \cos \varphi|$ заменяется соответственно величинами $1 - \cos \varphi$ и $1 - \cos \theta$.

Как было сказано, функция S нам нужна для получения спектра интенсивности по экспериментальному спектру, который пропорционален интенсивности и светосиле.

Обычно надо получать спектр или как функцию угла θ (для некоторой области импульсов), или как функцию только импульса (проинтегрированную по углам). В первом случае ищется величина

$$\frac{\frac{\Delta N}{\Delta \theta}}{S(\rho, \theta)} = \frac{\frac{\Delta N}{\Delta \sin \theta}}{\frac{S(\rho, \theta)}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\Delta N}{\Delta \sin \theta}}{S'(\rho, \theta)}, \quad (6)$$

где через S' обозначено $\frac{S}{\cos \theta}$. Заметим, что при составлении экспериментального спектра $\frac{\Delta N}{\Delta \sin \theta}$ получается автоматически.

Во втором случае ищется величина

$$\frac{\frac{\Delta N}{\Delta \rho}}{\int S(\rho, \theta) d\theta} = \frac{\frac{\Delta N}{\Delta \rho}}{\int S'(\rho, \theta) d\sin \theta}.$$

Как видно в обоих случаях нам нужна величина $S'(\rho, \theta)$. Вычисление функции S' много проще, чем функции S благодаря ее симметричности относительно углов θ и φ . Объем вычислительных работ значительно уменьшается рациональным выбором системы значений ρ и θ . Из соотношения

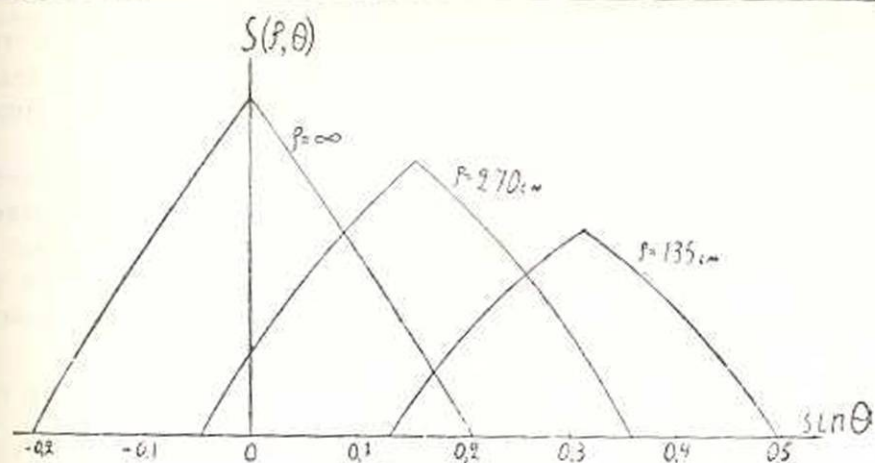
$$\sin \theta - \sin \varphi = \frac{l}{\rho} - k l \quad (k - \text{кривизна})$$

следует, что каждой комбинации значений ρ и θ будет соответствовать некоторое значение угла φ . Но можно так выбрать значения θ и ρ , чтобы угол φ всегда был бы равен одному из возможных значений угла θ . Для этого значения радиуса надо выбрать через равные интервалы кривизны $k_n = nk_0$, а значения угла θ взять равными $\arcsin mk_0 l$; тогда $\sin \varphi = (m - n) k_0 l$, т. е., как и $\sin \theta$, будет всегда кратным величине $k_0 l$.

Удобно вычислять светосилу в виде семейства кривых для разных значений кривизны, как функцию угла θ . Если построена равномерная шкала для $\sin \theta$, то кривые для S' получаются симметричными относительно своего максимума, соответствующего значению $\sin \theta = \frac{1}{2} k l = \frac{1}{2} nk_0 l$ (фиг. 6). Поэтому вычисление производится только для значений $m \geq \frac{n}{2}$.

Для получения светосилы, как функции кривизны, надо проинтегрировать (удобно графически или численно) кривые фигуры 6, так как при равномерной шкале синуса площадь их равна $\int S'(\rho, \theta) d\sin \theta$.

При пользовании интегральной кривой светосилы надо иметь в виду, что пересчет экспериментального спектра на геометрическую светосилу дает правильный результат лишь в том случае, если само



Фиг. 6.

излучение изотропно. На самом же деле интенсивность заметно падает с увеличением зенитного угла. Из семейства кривых на фиг. 6 видно, что траектории малых радиусов регистрируются в среднем под большими зенитными углами, поэтому фактически получается заниженное значение интенсивности частиц малых импульсов.

Для получения точного результата надо экспериментальный спектр импульсов делить не на $\int S(\rho, \theta) d\theta$ (геометрическая светосила), а на функцию

$$\int S(\rho, \theta) J(\theta) d\theta,$$

где $J(\theta)$ — функция углового распределения интенсивности.

Например, для масспектрометра с полюсами размером 20×80 см, принимая $J(\theta) = J_0 \cos^2 \theta$, вычисленная интенсивность малых импульсов меняется примерно на 10%.

Для правильного расчета светосилы очень важно наиболее точно определить величину a . Это видно из того, что член $(a-h)$ доходит до нулевых значений. Однако ввиду того, что граница магнитного поля более или менее размыта, а длина ряда счетчиков обычно не совпадает с длиной поля, выбор величины a осложняется. Наиболее правильно (с нашей точки зрения) определять величину a так: если имеется несколько рядов счетчиков в зазоре, то a следует считать равной расстоянию между краями крайних счетчиков. Если внутри зазора нет рядов счетчиков и ряды счетчиков настолько короче полюса магнита, что для значительной области радиусов траектория не может касаться границы поля, величине a надо дать значение длины ряда счетчиков, но величину h при всех углах считать равной $\rho(\cos \theta - \cos \varphi)$.

Наконец, если геометрия такая, что траектории ограничиваются границей поля, то эту границу можно определить статистически, пу-

тем анализа достаточного числа траекторий, приближающихся к границе поля. В последнем случае величина a имеет значение длины ряда счетчиков или ширины поля, в зависимости от того—траектории данных параметров ограничиваются счетчиками или полем.

В заключение отметим, что учет изменения угла в плоскости YOZ и учет щельности существенно изменяя форму кривых светосилы, как функции от φ и θ , оказывает значительно меньшее влияние на форму кривой относительной светосилы, проинтегрированной по углам. Этот факт следует учитывать при выборе той или иной степени упрощения формул.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступило 27 VII 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алиханян А. И., Алиханов А. И., Вайсенберг А. О. ДАН Армянской ССР, 5, 129, 1946.

Ն. Մ. Գոչարյան, Ս. Դ. Կայտմազով

ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՄԱՍՍՊԵԿՏՐՈՍԵՏՐԻ ԼՈՒՍԱՌԻԺԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոմիտեական ճառագայթների բաղադրության մեջ մտնող մասնիկների բաղադրակ ինտենսիվության և անկյունային բաշխման ուսումնասիրությունը մագնիսական մասսպեկտրոմետրի միջոցով հնարավոր է կատարել՝ զրեանալով սպեկտրոմետրի երկրաչափական պարամետրերից կախում ունեցող այդ մասնիկների զբանցման հալմանականությունը (լուսուժ), որպես նրանց կորուստյան շտապի և անկման անկյան ֆունկցիա:

Հաշվածում շարադրված է մագնիսական մասսպեկտրոմետրի լուսուժի հաշվման անալիտիկ մեթոդը: Տրված է մի քնդհանուր արտահայտություն մասնիկների զբանցման հալմանականությունը որոշելու համար: Բերված են նաև պարզեցված արտահայտություններ, որոնք հարմար են օգտագործման համար և մեծ ճշտությամբ կարող են կիրառվել ներկայումս գոյություն ունեցող մագնիսական մասսպեկտրոմետրերի լուսուժը հաշվելու համար:

НЕОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Г. Т. Галфаян

Применение электролитических методов
восстановления в аналитической химии

Сообщение 10

Объемно-аналитическое определение титана

Весовые методы определения титана не имеют практического значения, так как в присутствии других элементов они не дают хорошего разделения и поэтому приводят к неточным результатам. По этой причине титан определяется обычно колориметрическим или объемно-аналитическим методом. Последний метод применяется для веществ с содержанием титана более 5%.

Объемно-аналитическое определение титана основано на восстановлении четырехвалентного титана металлическим цинком в кислом растворе в атмосфере инертного газа. Восстановленный раствор титруют далее титрованным раствором перманганата или треххлористого железа. Упомянутые методы издавна применяются в аналитической практике [1].

Титан можно также восстановить более сильными восстановителями до двухвалентного его соединения, но ввиду того, что последний еще более не постоянен в атмосферных условиях, этот метод восстановления не получил практического применения в аналитической химии.

Известно, что электролиз сернокислых или хлористых солей четырехвалентного титана (из кислых растворов) не приводит к осаждению металлического титана на катоде. Точно также не наблюдается и восстановление его до трехвалентного.

Однако, если отделить диафрагмой катодит от анолита, то при пропускании электрического тока определенного напряжения находящийся в катодите четырехвалентный титан восстановится до трехвалентного (и поэтому раствор приобретает фиолетовую окраску). На этом основан разработанный с 1808 года электролитический метод препаративного получения соединений трехвалентного титана [2].

В предыдущих работах [3] нами было показано, что метод электровосстановления с успехом может быть применен и в объемном анализе. Так, например, исследуемый раствор, содержащий какой-либо

элемент переменной валентности, может быть восстановлен (с применением для отделения католита от анолита коллодиевой диафрагмы) в католите без добавления какого-либо восстановителя до низших степеней его окисления с последующим его титрованием каким-либо окислителем.

Обычные химические восстановители, применяемые в объемном анализе, числом ограничены и их применение сопряжено с рядом неудобств, а именно: 1) избыток восстановителя мешает дальнейшему ходу определения и поэтому должен быть удален из исследуемого раствора. 2) каждый из употребляемых восстановителей, обладая определенным потенциалом восстановления, может применяться в сравнительно ограниченных пределах.

Между тем, при электровосстановлении, меняя напряжение пропускаемого через исследуемый раствор тока, можно изменить катодный потенциал в широких пределах и, следовательно, восстанавливать многие катионы или производить избирательное восстановление. В этом методе восстановления достойно внимания и то, что исследуемый раствор не загрязняется восстановителем, что делает возможным повторение эксперимента с тем же раствором. Исходя из вышеуказанного, мы решили развить дальше начатое нами исследование, изучив условия количественного электровосстановления титана для применения в объемно-аналитической практике.

Аппарат, применяемый нами для этой цели, был описан ранее [4].

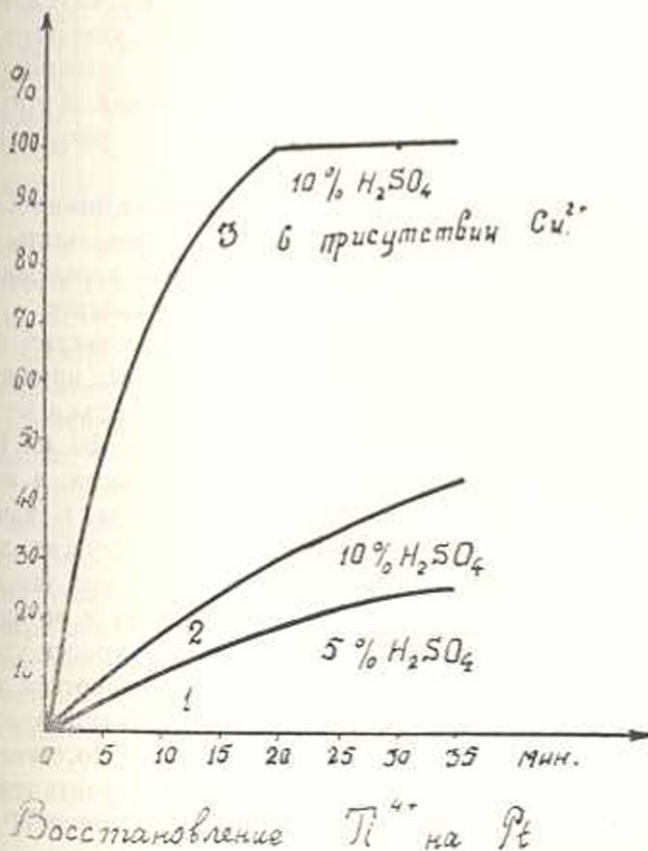
Для приготовления исследуемого раствора известной концентрации в качестве исходного вещества служил химически чистый сернокислый титан. Последний после прокаливании сплавлялся с пиросульфатом калия, а полученный сплав растворялся в 10% серной кислоте. Титр полученного раствора был определен после осаждения аммиаком и прокаливании полученного осадка.

Для определения условий и динамики количественного восстановления четырехвалентного титана были поставлены предварительные опыты. На основании полученных данных были построены кривые (фиг. 1), исходя из которых можно получить представление об условиях, необходимых для количественного электровосстановления четырехвалентного титана, так, например, кислотности раствора, длительности восстановления, материала электрода и т. д.

На приведенном графике на оси абсцисс отмечено время, затрачиваемое на восстановление, а на оси ординат — процент восстановленного титана.

Исходя из вышеприведенного, легко можно прийти к выводу, что применение платиновых электродов как в 5%, так и 10% серной кислоте, не приводит к количественным результатам (кривые 1 и 2). Это следует объяснить тем, что редокспотенциал системы Ti^{4+}/Ti^{3+} равен -0,04 вольта. Следовательно, в кислых растворах ток будет затрачиваться не только на восстановление титана, но и на выделение водорода, и по этой причине при пользовании платиновыми электродами, при на-

пряжении в 3 вольта, в сернокислом растворе титан в течение 30 минут восстанавливается не более чем на 50%. Для устранения этого препятствия мы использовали общеизвестное явление перенапряжения водорода на различных катодах. Замена платины другим металлом, вызывающим сравнительно большое перенапряжение водорода на катоде, должна была привести к количественному восстановлению титана.



Фиг. 1.

В качестве подобного катода нами умышленно был выбран медный электрод. Практически это было осуществлено не заменой платинового электрода медным, а оказалось гораздо более удобным добавлять к исследуемому раствору 1–2 капли раствора сернокислой меди.

В связи с этим при пропускании тока в первую очередь на катоде осаждалась медь и в дальнейшем этот электрод реагировал как медный, что конечно, значительно препятствовало выделению водорода и электрический ток затрачивался в основном на полное восстановление титана. В этих условиях процессе восстановления заканчивался в течение 20 минут (см. крив. 3 на фиг. 1). Важным фактором при электровосстановлении титана является также кислотность раствора,

от которой в большой мере зависит количественный исход процесса восстановления. Известно, что потенциал системы Ti^{4+}/Ti^{3+} сильно зависит от концентрации водородного иона [5]

$$E = -0,04 + 0,058 \lg \frac{[Ti^{4+}][H^+]}{[Ti^{3+}]}$$

Чем ниже концентрация водородного иона в исследуемом растворе, тем выше становится восстановительный потенциал указанной системы и вследствие этого в слабо кислых растворах трехвалентный титан будет затрачиваться на восстановление ионов водорода. В этих условиях нельзя ожидать количественного восстановления четырехвалентного титана (см. крив. 1 на фиг. 1).

Кроме того, при низкой кислотности восстанавливаемого раствора легко будет протекать гидролиз последнего, и результаты также получатся низким. Имея в виду сказанное, мы восстановление четырехвалентного титана осуществляем в 10% серной кислоте.

Количественное определение титана. Сернокислый раствор четырехвалентного титана известной концентрации был помещен во внутреннюю трубку редуктора, после чего общий объем исследуемого раствора доводился 10% серной кислотой до 120—150 мл. После прибавления 1—2 капель 5% раствора сернокислой меди, в испытуемый раствор погружался платиновый электрод Винклера. В качестве анолита применялась 10% серная кислота. Анодом служил платиновый анод Винклера. Затем пропусклся электрический ток напряжением в 3 вольта на клеммах. В течение всего опыта, как и во время титрования, через катодит пропусклся сильный ток двуокиси углерода, не содержащей кислорода. Этим создавалась как инертная атмосфера, так и одновременно достигалось равномерное перемешивание раствора, что чувствительно сокращало время, потребное для восстановления титана. Об окончании восстановления титана можно судить тем, что даже малое количество невосстановленного Ti^{4+} в присутствии Ti^{3+} вызывает помутнение раствора. По завершении процесса восстановления, что длится обычно 20—30 минут, ток прекращают и через 2 минуты, не вынимая катод из раствора, восстановленный титан титруют 0,05 N перманганатом.

В случае необходимости можно оттитрованный раствор повторно восстановить и проверить правильность первого определения.

Остальные условия опыта и полученные результаты приведены в таблице 1.

Определению титана этим способом могут помешать все те катионы, которые имеют переменную валентность, как, например, железо, молибден, ванадий и др., так как они также восстанавливаются в вышеприведенных условиях.

Совместное определение титана и меди. Полученные вышеописанными измерениями данные указывают на возможность совместного определения титана и меди, так как в этих условиях медь,

Таблица 1

Взято TiO_2 в граммах	Найдено TiO_2 в граммах	V	A	Время вос- становле- ния в мину- тах	Примечание
0,0345	0,0344	3,0	1,0	20	В присутствии 1—2 кап. раствора CuSO_4
0,0345	0,0345	3,0	1,0	20	" " " " "
0,0345	0,0343	3,0	1,0	20	" " " " "
0,0345	0,0344	3,0	1,0	20	" " " " "
0,0690	0,0692	3,0	1,0	20	" " " " "
0,0690	0,0691	3,0	1,0	20	" " " " "
0,0690	0,0590	3,0	1,0	29	" " " " "
0,0690	0,0692	3,1	1,0	20	" " " " "

находящаяся в исследуемом растворе, количественно оседает на катоде, а титан в тех же условиях количественно восстанавливается до трехвалентного. Исходя из этого, мы задались целью применить этот метод для электролитического определения меди с одновременным объемно-аналитическим определением титана. С этой целью платиновый катод извешивался как предварительно, так и по окончании опыта. Остальные условия эксперимента были аналогичны вышеприведенным, с той лишь разницей, что в данном случае по завершении процесса восстановления платиновый катод перед прекращением электрического тока необходимо достать из раствора и, не удаляя его из трубки редуктора, отмыть небольшим количеством воды. Лишь после этого прекращают ток и достают электрод из редуктора. Далее, не прекращая тока углекислоты, восстановленный раствор титруют 0,05N перманганатом. Остальные условия опыта и полученные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Взято в граммах		Найдено в граммах		V	A	Время восстанов. в минутах
TiO_2	Cu	TiO_2	Cu			
0,0345	0,0520	0,0343	0,0518	3,0	1,0	20
0,0345	0,0520	0,0344	0,0515	3,0	1,0	20
0,0345	0,0520	0,0343	0,0520	3,0	1,0	20
0,0345	0,0520	0,0345	0,0521	3,0	1,0	20
0,0690	0,0852	0,0690	0,0850	3,0	1,0	20
0,0690	0,0852	0,0688	0,0853	3,0	1,9	20
0,0690	0,0852	0,0689	0,0851	3,0	1,0	20
0,0690	0,0852	0,0688	0,0852	3,0	1,0	20

Определению меди этим методом мешают те металлы, которые в этих условиях электролитически осаждаются одновременно с медью, как, например, никель, кадмий и т. д.

Совместное количественное определение титана, меди и железа. В предыдущих работах нами были разработаны условия количественного восстановления железа, что и было положено в основу объемного определения последнего. Исходя из этих данных легко можно прийти к заключению, что в вышеописанных условиях одновременно с титаном и медью будет восстанавливаться и железо, что и было показано нами экспериментально. Так, из исследуемого раствора, содержащего одновременно указанные 3 элемента, за 20—30 минут медь количественно осаждается на катоде, а находящиеся в растворе трехвалентное железо и четырехвалентный титан восстанавливаются соответственно до двухвалентного и трехвалентного. Таким образом, становится возможным совместное определение меди весовым, а железа и титана—объемным методом. С этой целью для определения суммы титана и железа восстановленный раствор сначала титровался 0,05 N раствором перманганата. Для определения же одного титана оттитрованный раствор вновь восстанавливался, и во второй раз титровался уже титрованным раствором трехвалентного железа с применением в качестве индикатора 10 мл 10% раствора роданида калия. Железо определялось по разности.

Ход определения титана, железа и меди при одновременном их присутствии. Измеренный объем сернокислого раствора, содержащего указанные три элемента, помещался в редуктор, объем раствора доводился 10% серной кислотой до 100—150 мл, после чего в атмосфере углекислоты производилось восстановление электрическим током с применением предварительно взвешенного платинового катода. По завершении опыта катод описанным выше способом извлекался из раствора, медь определялась взвешиванием катода, а восстановленный раствор титровался 0,05 N раствором перманганата. Количество затраченного перманганата соответствовало сумме титана и железа. Далее испытуемый раствор восстанавливался вторично в тех же условиях и для определения одного только титана титровался титрованным раствором треххлористого железа.

Остальные условия и результаты опытов приведены в таблица 3.

Таблица 3

Взято в граммах			Найдено в граммах			V	A	Время восстан. в мину- тах
TiO ₂	Fe ₂ O ₃	Cu	TiO ₂	FeO	Cu			
0,0690	0,0258	0,0520	0,0692	0,0256	0,0520	3,0	1,2	30
0,0650	0,0258	0,0520	0,0688	0,0256	0,0518	3,0	1,2	30
0,0610	0,0258	0,0520	0,0687	0,0259	0,0521	3,0	1,2	39
0,9630	0,0258	0,0520	0,0688	0,0258	0,0519	3,0	1,2	30
0,0345	0,0516	0,0852	0,0343	0,0515	0,0852	3,0	1,2	30
0,0345	0,0516	0,0852	0,0344	0,0517	0,0848	3,0	1,2	30
0,0345	0,0516	0,0852	0,0345	0,0515	0,0850	3,0	1,2	30
0,0345	0,0516	0,0852	0,0342	0,0516	0,0851	3,0	1,2	30

При применении потенциометрического метода титрования необходимость в повторном восстановлении отпадает, так как при титровании перманганатом наблюдаются два скачка потенциала: первый — в эквивалентной для титана точке, второй — после окисления железа.

В ы в о д ы

1. Разработаны условия количественного электровосстановления четырехвалентного титана, что делает возможным применение этого метода для объемного его определения.

2. Показано, что количественное восстановление титана целесообразно осуществлять в присутствии меди, что в свою очередь может быть положено в основу совместного определения меди и титана.

3. Применяя метод электровосстановления, можно за сравнительно короткий промежуток времени определить в испытуемом растворе, содержащем титан, железо и медь, каждые в отдельности.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 20 III 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Knecht E. Ber. 36, 166—69, 1903.
2. Diethelm B. Toerster T. Phys. chem., 62, 138, 1908.
3. Galfajan G. T. Zeit. für anal. chem., 90, 11—12, 1932.
4. Галфаян Г. Т. Известия АН Армянской ССР, I, № 3, 1948.
5. Кольцов И. Объемный анализ, т. II, Госхимтехиздат, 1932.

Գ. Տ. Գալֆայան

ԷԼԵԿՏՐՈԼԻՏԻԿ ՌԵԴՈՒՑՄԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՔԻՄԻԱՅՈՒՄ

Հ ա ղ ո Ր Դ Ո Ւ Մ 10-րդ

ՏԻՏԱՆԻ ԾԱԿԱԿԱՅԻՆ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Տիտանի որոշման հշոային եղանակները սրահարիկ նշանակություն չունեն, այս պատճառով տիտանը սովորաբար որոշում են կոլորիմետրիկ կամ ծավալային եղանակներով: Վերջինս հիմնված է քառավալենտ տիտանի ժխուցությունը թթվային լուծույթից մետաղական ցինկով կամ այլ նյութերով նախապես օկոուցելու վրա:

Քառավալենտ տիտանի թթվային լուծույթները էլեկտրոլիզելիս տիտանը չի նստում կատոդի վրա, չի էլ կարող այդ պայմաններում սեղուցվել նստվալենտի: Բայց եթե միջնապատով բաժանել կատոլիտը անոլիտից

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

խնայելիք զտրեւելիսսմանկէն
մեզուցտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա
զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա զտրեւեա

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Г. Т. Есаян, Р. М. Оганесян

Сернокислотный гидролиз γ-хлоркротилсульфоновой
 кислоты и ее хлорангидрида

Вопрос сернокислотного гидролиза соединений с γ-хлоркротильной группой был предметом широких исследований. Обычно эта реакция приводит к карбонильным соединениям [1] или продуктам их циклизации [2].

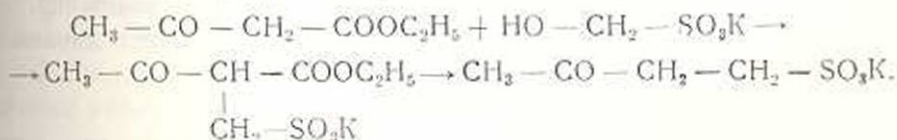
В настоящей работе сообщаются результаты изучения реакции сернокислотного гидролиза γ-хлоркротилсульфокислоты (в виде натриевой соли) и ее хлорангидрида. Эти соединения были ранее получены одним из авторов совместно с Р. С. Саркисян, исходя из хлористоводородной соли S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевинны [3].

Сернокислотный гидролиз γ-хлоркротилсульфоната натрия протекает нормально с образованием соответствующей кетосульфокислоты:



При нейтрализации реакционной смеси поташем, содой и гидроксидом бария получены соответственно калиевая, натриевая и бариевая соли.

Калиевая соль метилэтилкетон-β-сульфокислоты была впервые получена Рашигом и Пралем путем кетонного расщепления продукта конденсации ацетоуксусного эфира с ронголитом [4]:



Точка плавления кетосульфоната ими не указывается. Наличие кетогруппы в наших соединениях доказано реакцией с гидроксиметином.

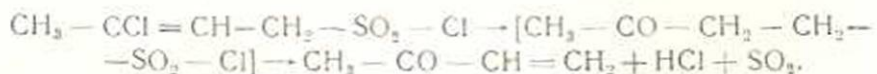
Неизменность сульфогруппы при реакции сернокислотного гидролиза подтверждается стойкостью полученного продукта по отношению к кислотам. Известно, что изомерные сульфокислотам соли моноэфиров сернистой кислоты, подобно средним солям, при действии кислот разлагаются с выделением двуокиси серы.

В то время как γ-хлоркротилсульфокислота дает характерные

для сульфокислот нормальные соли с S-производными изотиомочевин (бензил- и γ -хлоркротил-), аналогичных солей метилэтилкетон- β -сульфокислоты нам получить не удалось. В литературе имеются указания на то, что некоторые альдегидо- и кетосульфокислоты не образуют этих солей, между тем, как аналогичные соединения без карбонильной группы реагируют нормально [5]. Метилэтилкетон- β -сульфокислота не образует соли и с *p*-толуидином.

Кетосульфокислоты получаются обычно присоединением бисульфита к ненасыщенным кетонам [6] взаимодействием галондокетонов с сульфитом натрия или калия [7], а в последнее время — и реакцией кетонов с диоксан-серным ангидридом [8]. Сернокислотный гидролиз сульфосоединений с хлорвинильной группой может явиться новым удобным способом получения этих интересных и относительно малоизученных веществ.

При сернокислотном гидролизе γ -хлоркротилсульфохлорида, в отличие от γ -хлоркротилсульфокислоты, не образуется кетосульфосоединения. В этом случае среди продуктов реакции, кроме хлористоводорода, обнаружены метилвинилкетон и двуокись серы. Ввиду стойкости метилэтилкетон- β -сульфокислоты по отношению к серной кислоте, нужно полагать, что образующийся вначале кетосульфохлорид, не подвергаясь гидролизу (в сульфокислоту), расщепляется на метилвинилкетон, хлористый водород и двуокись серы:



Как известно, аналогичное расщепление имеет место при сернокислотном гидролизе 1,3-дихлорбутена-2 и γ -хлоркротилового спирта [9].



Относительно алифатических кетосульфогалонидов в литературе повидимому не имеется указаний. Имеются данные о некоторых малоустойчивых галонидоангидридах камфорсульфокислот. Так, например, *d*, *l*-камфор- π -сульфохлорид при нагревании до 190° отщепляет двуокись серы с образованием галонидопроизводного камфоры [10].

Экспериментальная часть

Сернокислотный гидролиз γ -хлоркротилсульфоната натрия. К 5 г тонко измельченного γ -хлоркротилсульфоната натрия прибавлено 10 мл концентрированной серной кислоты. При этом замечалось бурное выделение хлористого водорода. Реакционная смесь была оставлена при комнатной температуре в течение трех суток. На дне колбы образовался кристаллический осадок, оказавшийся сернокислым натрием. Реакционная смесь разбавлялась водой, нейтрализовалась поташем и отфильтровывалась. Фильтрат выпаривался на водяной бане

досуха. Остаток несколько раз извлекался абсолютным спиртом при нагревании на водяной бане. Спиртовые экстракты отфильтровывались на горячем фильтре и выпаривались при комнатной температуре. Вес остатка (калиевая соль метилэтилкетон- β -сульфокислоты)—4,3 г, выход—87,2% теорин.

0,1102 г вещ.: 0,1302 г BaSO_4 % S 16,22;

$\text{C}_4\text{H}_7\text{O}_4\text{SK}$ вычислено % S 16,84.

Вещество не имеет четкой точки плавления (в пределах 175—200°).

Аналогичным образом, путем нейтрализации содой получена натриевая соль. Выход 61,4% т. пл. 230°;

0,5184 г вещ.: 0,6772 г BaSO_4 % S 17,94;

$\text{C}_4\text{H}_7\text{O}_4\text{SNa}$ вычислено % S 18,39.

Для получения бариевой соли к 5 г γ -хлоркротилсульфоната натрия прибавлялось 10 мл концентрированной серной кислоты; дальнейшая реакция велась в условиях, указанных выше. Осадок сернокислого натрия отделялся фильтрованием через стеклянный фильтр. Нейтрализация проводилась гидроокисью бария. После фильтрования через фильтрат пропускался углекислый газ (для связывания избытка гидроокиси бария). Раствор снова отфильтровывался и выпаривался на водяной бане досуха. Вес остатка (бариевая соль метилэтилкетон- β -сульфокислоты)—4 г; выход—70,2% т. пл. 236—237°;

0,4778 г вещ.: 0,5002 г BaSO_4 % S 14,37;

$\text{C}_8\text{H}_{14}\text{O}_8\text{S}_2\text{Ba}$ вычислено % S 14,57.

Полученные соли не дают осадка при взаимодействии с семикарбазидом в обычных условиях получения семикарбазонов. Судя по выделению хлористого водорода, они реагируют с солянокислым гидроксиламином. Так, для калиевой соли:

0,100 г вещ.: 4,2 мл 0,1N NaOH; израсходовано 0,0168 г NaOH вычислено 0,0210 г.

Это расхождение можно объяснить тем, что реакция кетосульфокислоты с гидроксиламином практически не идет до конца.

2. *Получение солей γ -хлоркротилсульфокислоты с S-производными изотiomочевин и сп-толудином.* Из смеси охлажденных льдом растворов 1 г γ -хлоркротилсульфоната натрия и 1 г хлористоводородной соли S-бензлизотiomочевин в нескольких мл воды получен осадок, который отфильтровывался, сушился на воздухе и перекристаллизовывался из 50% спирта. Получено 1,5 г соли γ -хлоркротилсульфокислоты с S-бензлизотiomочевинной.

0,1008 г вещ.: 0,0430 г AgCl % Cl 10,56;

0,3026 г вещ.: 0,4220 г BaSO_4 % S 19,15;

$\text{C}_{12}\text{H}_{17}\text{O}_4\text{N}_2\text{ClS}_2$ вычислено % Cl 10,55; % S 19,00.

Аналогично с теми же количествами исходных веществ получено 1,7 г соли γ -хлоркротилсульфокислоты с S-(γ -хлоркротил) изотиомочевинной с т. пл. 80—85°.

0,1698 г вещ.: 0,1448 г AgCl %Cl 21,13;

0,5092 г вещ.: 0,7004 г BaSO₄ %S 18,91;

C₉H₁₆O₂S₂Cl₂N₂ вычислено %Cl 21,16; %S 19,10.

В тех же условиях соли метилэтилкетон- β -сульфокислоты не дали осадка с обоими реактивами.

К теплomu раствору 2 г γ -хлоркротилсульфоната натрия в нескольких мл воды прибавлялось 1 г п-толуидина и несколько мл концентрированной соляной кислоты. После охлаждения льдом выпадали кристаллы, которые отфильтровывались, сушились на воздухе и перекристаллизовывались из 50-процентного спирта. Получено 2,3 г соли γ -хлоркротилсульфокислоты с п-толуидином

0,1440 г вещ. 0,0752 г AgCl; 0,1252 г BaSO₄

% Cl 12,93 %S 11,93;

C₁₁H₁₆O₂SClN вычислено %Cl 12,79; %S 11,53.

В случае солей метилэтилкетон- β -сульфокислоты, полученные осадки оказались хлористоводородной солью п-толуидина.

3. *Сернокислотный гидролиз γ -хлоркротилсульфохлорида.* К 10 г γ -хлоркротилсульфохлорида прибавлялось 20 мл концентрированной серной кислоты. При этом замечалось бурное выделение газов. Водный раствор газов содержал хлористый водород и двуокись серы (последняя обнаружена по запаху и по обесцвечиванию раствора иода). Реакционная смесь оставлялась на двое суток, после чего разбавлялась водой и подвергалась перегонке при небольшом разрежении.

Первый погон в количестве ~ 10 мл имел острый, характерный запах метилвинилкетона. Из него получен семикарбазон в количестве ~ 1 г с т. пл. 141,5—142° (т. пл. семикарбазона метилвинилкетона 140—141°). Смешанная проба с семикарбазоном метилвинилкетона не дала депрессии.

В случае применения 60 и 80% серной кислоты, реакция сернокислотного гидролиза протекает очень медленно, для завершения реакции требуется нагревание, что приводит к значительному осмолению. Судя по выделению двуокиси серы, нужно полагать, что и в этом случае образуется метилвинилкетон. В случае применения 40% серной кислоты, реакция сернокислотного гидролиза практически не идет.

В ы в о д ы

1. Путем сернокислотного гидролиза γ -хлоркротилсульфоната натрия получены калиевая, натриевая и бариевая соли метилэтилкетон- β -сульфокислоты.

2. Показано, что метилэтилкетон- β -сульфокислота, подобно дру-

Իզոթիումիզանյութի Տ-ածանցյալների հետ մեթիլէթիլ-β-սուլֆոթերթուն աղեր չի առաջացնում, որ բնորոշ է մի շարք կետոսուլֆոթերթունների համար: Մեթիլէթիլ-β-սուլֆոթերթուն չի տալիս համապատասխան աղ նաև պ-տոլուիդինի հետ: Դ-քլորկրոտիլսուլֆոթերթուն տալիս է նորմալ աղեր ինչպես իզոթիումիզանյութի Տ-ածանցյալների, այնպես էլ պ-տոլուիդինի հետ:

Ի տարբերություն Դ-քլորկրոտիլսուլֆոթերթից, նրա քլորանհիդրիդը ծծմբաթթվական հիդրոլիզի ժամանակ ենթարկվում է ճեղքման, տալով մեթիլլիթնիլկետոն, ծծումբի դիօքսիդ և քլորաջրածին:

М. С. Абрамян

Новые виды брахиопод из фаменских отложений Армянской ССР

В течение 1947—50 гг. автором совместно с сотрудниками Института геологических наук АН Армянской ССР производилось изучение палеозойских отложений Армянской ССР.

В период полевых работ было собрано большое количество фауны—брахиопод, кораллов и др. На основании собранной фауны и некоторых литологических данных удалось довольно детально расчленить палеозойские отложения.

В ходе обработки фауны, произведенной нами в Ленинграде, были выявлены новые виды и варианты.

Ниже дается описание двух новых видов и одного варианта из верхнефаменских отложений.

Верхнефаменские отложения Армении представлены перемежающимися свитами черных глинистых сланцев, кварцитов, песчаников и известняков. Известняки содержат обильную и характерную для верхнефаменских слоев фауну брахиопод, как то: *Plicatifera simplicior* Whiddb., *Pl. aff. meisteri* Peetz, *Camarotoechia letiensis* Goss., *Pugnoides triaqualis* Goss., *Cyrtospirifer semenoi* Abich, *Cyrt. verneuili* Murch., *Cyrt. pamiricus* Reed и другие.

С этим комплексом фауны встречаются нижеописанные виды, два из которых поднимаются выше—в этренские отложения, совершенно согласно перекрывающие верхнефаменские слои и представленные перемежающимися свитами сильно слюдистых и песчаных сланцев и буровато-малиновых песчаников в основании, известковистых песчаников и известняков.

Известковистые песчаники и известняки содержат характерную и обильную фауну брахиопод и кораллов в основном, а также мшанки, пелециподы, гастроподы и трилобиты, доказывающие этренский возраст содержащих их пород [1].

В общем разрезе палеозойских отложений описываемые формы впервые появляются в верхнефаменских слоях и, как было указано выше, две из них: *Liorhynchus dichotomians* n. sp. и его вариант поднимаются в этренские отложения, а *Pugnoides chanakchiansis* n. sp. встречается только в верхнем фамене.

Имея в виду, что этренские отложения являются переходными между девоном и карбоном, и в них очень часто наряду с каменноуголь-

ными формами находятся также девонские, факт присутствия вышеуказанных форм и в верхнем фамене и в этрене является вполне естественным.

Таким образом, эти формы вследствие своего узкого вертикального распространения являются характерными для данных отложений. Описываемые виды встречены во всех разрезах верхнефаменских и этренских отложений, а именно: в бассейне р. Аргичи, в ущ. р. Чанахчи, в бассейне нижнего течения р. Арпа, но в малом числе, чаще всего они встречаются в районе сел. Кадрлу.

Род *Liorynchus* Hall, 1860

Liorynchus dichotomians n. sp.*

Табл. 1, фиг. 1—3 (a, b, c, d)

Голотип. Из фаменских отложений окрестностей сел. Кадрлу (Вединский район, Армянской ССР). ИГН АН Армянской ССР, колл. 1949 г., обр. ф.—В.

Диагноз. Раковина обычно средних размеров, редко крупная, слабо поперечно вытянутая, умеренно выпуклая с притупленными боками. Ребра широкие, грубые, округленно-угловатые, дихотомирующие, не доходящие до макушки. На возвышении между двумя дихотомирующими ребрами вклинивается более низкое и короткое ребро. Средние ребра более резкие.

Описание. В коллекции 29 экземпляров, из коих 13 полной сохранности.

Раковина обычно средних размеров, слабо поперечно вытянутая (зрелые формы удлиненные) с притупленными боками, округленно-треугольного очертания. Замочный край короткий, изогнутый. Передний край трапециевидно изогнут.

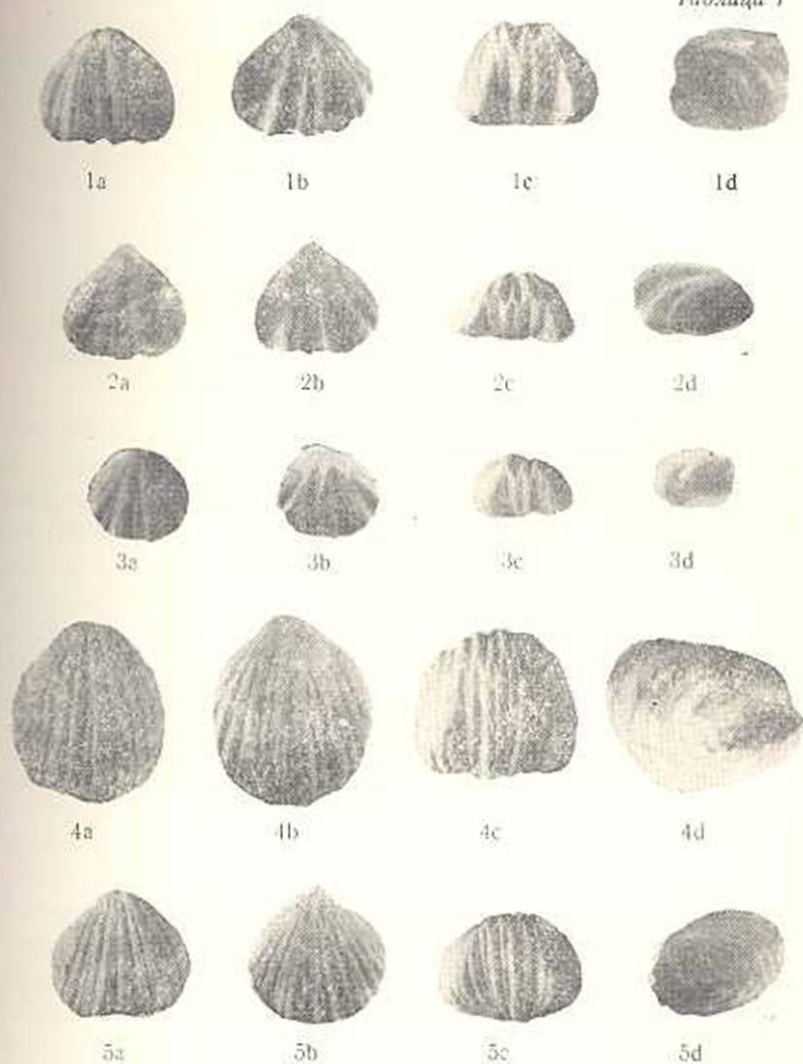
Брюшная створка плоская, слабо изогнутая. Макушка небольшая, слабо загнутая. Примакушечная часть гладкая. Синус заметен с конца примакушечной части, широкий, плоский, с трапециевидным поперечным сечением, равномерно расширяющийся к переднему краю. Язычок синуса широкий, невысокий, трапециевидный, с прямым зубчатым верхним краем.

Спинальная створка выпуклая, с наибольшей высотой почти в середине створки. Возвышение заметно у конца примакушечной части, широкое, низкое, равномерно расширяющееся к переднему краю.

Скульптура состоит из грубых, широких округленно угловатых дихотомирующих ребер. Ребра на возвышении и в синусе более резкие, боковые иногда почти сглаженные. На возвышении на одинаковом расстоянии от макушки, почти с середины створки, дихотомируют два ребра, ограничивающие возвышение. Между ними вклинивается одно более низкое, но такое же резкое ребро. В синусе, почти с самого начала его, дихотомирует одно большое среднее ребро, а по его бокам вклиниваются два маленьких и низких ребра.

* Название *dichotomians* дано по одной из характерных черт, определяющих этот вид.

Таблица 1



Фиг. 1—3. *Liorhynchus dichotomians* nov. sp. а—спинная створка, б—брюшная створка, с—со стороны переднего края, d—сбоку. Обр. ф—В/49.

Фиг. 4—5. *Liorhynchus dichotomians* var. *assimulatus* sp. et var. nov. а—спинная створка, б—брюшная створка, с—со стороны переднего края, d—сбоку.

Таким образом, число первоначальных ребер на возвышении—3, у переднего края—5, в синусе—3, у переднего края—4, боковых 3—4. Внутреннее строение—в брюшной створке две почти параллельные зубные пластины, в спинной—сента.

Измерения

№№ обр.	Ф. 35/47	Ф. V/III/50	Ф. В/49	Ф. 60/47	Ф. IV/50	Ф. 3д/50	Ф. 3д/50	Ф. 3а/50
Длина	30,5	21,7	19,4	18,7	16,7	20,0	22,0	9,3
Ширина	26,7	19,5	20,5	19,4	18,2	20,7	23,4	9,1
Дл./шир.	1,14	1,11	0,94	0,96	0,91	0,96	0,94	1,0
Высота	29,9	16,4	10,3	10,3	10,3	12,2	14,5	6,0
Выс./дл.	0,78	0,75	0,53	0,55	0,61	0,61	0,66	0,63

Изменения с возрастом. Молодые формы меньше размерами, плоские, почти равновыпуклые. Макушка острая, торчащая, с возрастом выпуклость спинной створки увеличивается. Язычок синуса и возвышение более низкие, чем у зрелых особей. У молодых форм бока раковины острые, у зрелых—притупленные.

Изменчивость. Выпуклость раковины варьирует (см. в таблице измерений, последние четыре, почти равномелкие раковины) от 0,53 до 0,66. Изменчива грубость ребер.

Сравнение. Близкий *Liorhynchus lentiformis* Gurich из средней Азии, описанный Д. В. Наливкиным (Брах. верх. и ср. девона Туркестана, стр. 73, табл. IV, ф. 28—30), отличается меньшими размерами и гладкими боками. По характеру средних ребер близок вид *Camartogchia araratica* n. sp. (in litt.), отличающийся меньшими размерами, более тонкими и многочисленными ребрами.

Распространение и возраст. Верхнефаменские слои Армянской ССР поднимаются также в этретские слои.

Местонахождение. Хр. Зинджирлу, обр. ф. 4/49 и обр. ф. 6/49, 3 экз., сел. Кадрлу—ущ. Шамам-дзор—10 экз., ущ. Аршаки-ахбюр—4 экз. и в других разрезах 12 экземпляров. Характерная, но мало распространенная форма.

Liorhynchus dichotomians var. *assimulatus* sp. et var. nov.

Табл. 1, фиг. 4—5 (a, b, c, d)

Голотип. Из фаменских отложений окрестностей сел. Советашен (Вединский район, Армянской ССР), верховья р. Чанахчи. ИГН АН Армянской ССР, колл. 1947, обр. ф.—22.

Диагноз. Раковина средних, иногда крупных размеров, удлинённая с притупленными боками и зубчатым швом округленно-треугольного очертания, умеренно выпуклая.

Ребра дихотомирующие, округленно-угловатые. Средние более резкие. В синусе широкий плоский валик.

Описание. В коллекции 11 экземпляров полной сохранности и 8 экземпляров разбитых раковин.

Раковина средних, иногда крупных размеров умеренно выпуклая, округленно-треугольного очертания. Зрелые экземпляры удлиненные (удлиненность 1,04—1,20) с округленно-ромбическими очертаниями. Замочный край короткий, изогнутый. Передний край трапецидально изогнут. Бока раковины притупленные.

Брюшная створка плоская, слабо изогнутая. Макушка небольшая, загнутая, у молодых экземпляров острая, более или менее загнутая, иногда выступающая. Примакушечная часть гладкая. Синус заметен почти с конца примакушечной части, широкий, плоский, равномерно расширяющийся к переднему краю; несет срединный широкий плоский валик, хорошо развитый у зрелых форм. Язычок синуса более или менее высокий, широкий, трапецидальный, со слабо дугообразным зубчатым верхним краем.

Спинная створка умеренно выпуклая с наибольшей высотой почти в середине створки. Возвышение заметно у конца примакушечной части, широкое, низкое, у зрелых экземпляров более высокое, равномерно расширяется и полого спускается к переднему краю.

Вся поверхность раковины покрыта округленно угловатыми дихотомирующими ребрами. Между ними выклиниваются более низкие мелкие ребрышки. Средние ребра более угловатые, резкие и дихотомируют несколько раз. Боковые более широкие, округленные.

Дихотомирование происходит на различных расстояниях от макушки. Число ребер у переднего края на возвышении 7—9, в синусе—6—8, боковых—4—6.

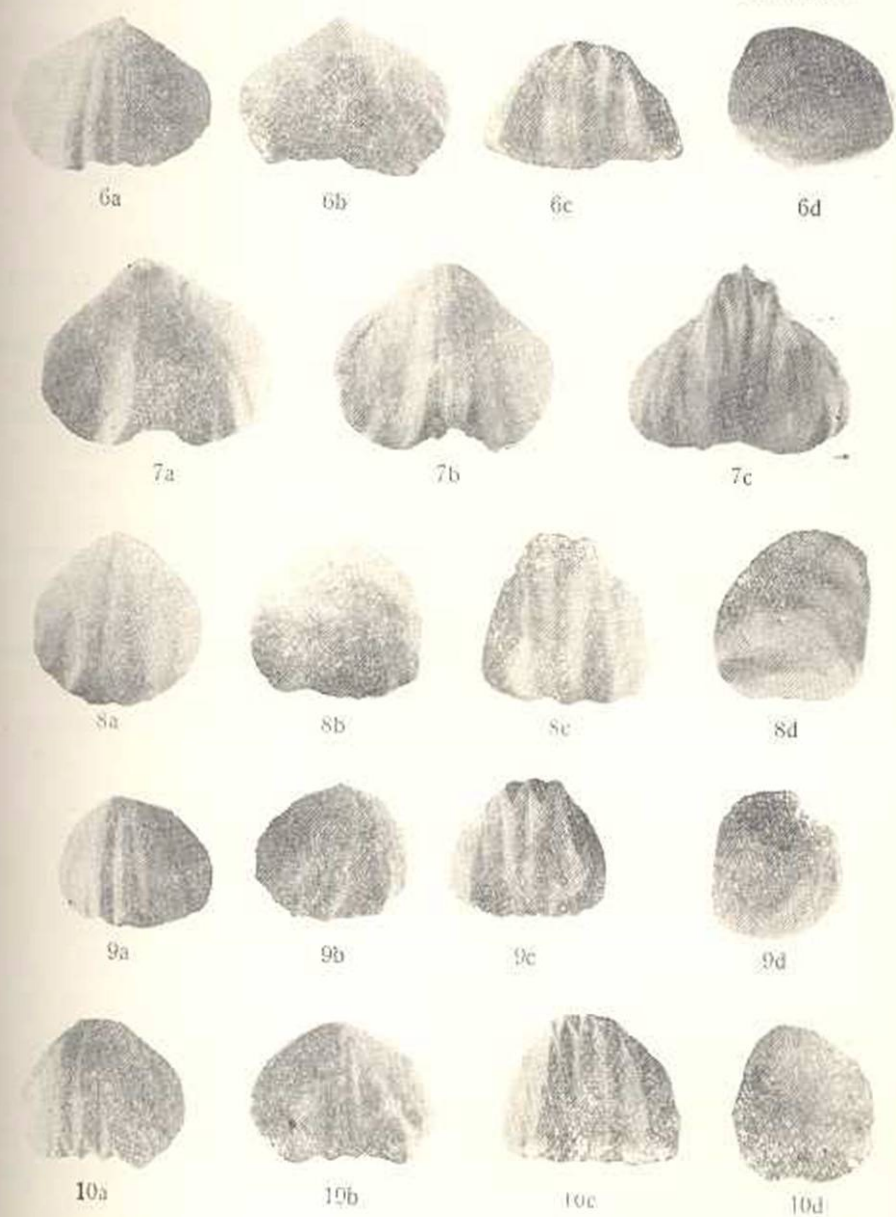
Внутреннее строение. В брюшной створке две почти параллельные зубные пластины, в спинной—септа.

Измерения

№№ обр.	ф. 22/47	ф. 32/47	ф. С/49		ф. V/III/50	ф. 3a/50	ф. 81/47
Длина	23,3	22,5	19,2	23,4	21,4	18,6	24,5
Ширина	24,3	21,8	20,7	25,0	19,4	17,9	25,0
Дл./шир.	1,2	1,03	0,92	0,93	1,10	1,04	0,98
Высота	21,8	15,8	13,7	15,4	16,8	12,2	16,0
Выс./дл.	0,74	0,7	0,71	0,65	0,78	0,65	0,65

Изменения с возрастом. Молодые экземпляры слабо поперечно вытянутые, округленно-треугольного очертания, плоские, почти равновыпуклые; с возрастом выпуклость увеличивается, в особенно-

Таблица II



Фиг. 6—10. *Pugnoides chanakchilensis* sp. nov. а—спинная створка, б—брюшная створка, в—вид со стороны переднего края, д—сбоку.

сти у спинной створки. Молодые экземпляры имеют маленькую, острую, иногда выступающую макушку. Срединный валик в синусе у них не развит, язычок синуса очень низкий. Вклинивание и дихотомирование ребер хорошо заметно. У зрелых форм дихотомизируют почти только средние ребра, вклинивание более мелких и низких ребер бывает только между средними ребрами. Дихотомирование боковых ребер наблюдается редко.

Зрелые формы удлинённые, с округленно-ромбическими очертаниями, возвышение у них более высокое.

Изменчивы размеры и выпуклость раковины, высота язычка и характер синуса.

Сравнение. Характером средних ребер близка *Camarotoechia araratica* n. sp. (in litt.), но отличается формой и меньшими размерами раковины, недихотомизирующими, невлинивающимися боковыми ребрами. От типичной формы вида (*Liorhynchus dichotomians* n. sp.) варие-тет отличается более тонкими и малочисленными ребрами, отсутствием на возвышении среднего недихотомизирующего, более низкого ребра.

Вид и его варие-тет тесно связаны между собой переходными формами. *Liorhynchus dichotomians* var. *assimulatus* sp. et var. nov. легко распознаваемая довольно своеобразная форма.

Распространение и возраст—верхнефаменские и этренские отложения Армянской ССР.

Местонахождения—район сел. Кадрлу (Вединский район) ущ. Аршаки-ахбюр 2 экз., ущ. р. Чанахчи (верховье) 5 экз., и в других местах.

Род *Pugnoides* Weller, 1910

Pugnoides chanakchiensis sp. nov.*

Табл. II, фиг. 6—10 (a, b, c, d)

Голотип. Из фаменских отложений (известняки) окрестностей сел. Кадрлу,—из ущ. Шамаи-дзор (Вединский р-н, Армянской ССР). Обр. ф.—VI, колл. 1949 г. ИГН АН Армянской ССР.

Диагноз. Раковина обычно крупных размеров, поперечно вытянутая, умеренно выпуклая, овальная, с отвесными боками. Характеризуется низкими, округленно-угловатыми, широкими, немногочисленными ребрами, немного не доходящими до макушки, широким плоским синусом и также широким возвышением.

Описание. В коллекции 21 экземпляр, из коих полной сохранности 10 экземпляров.

Раковина обычно большая, умеренно выпуклая, поперечно вытянутая, овальная, с отвесными боками. Замочный край короткий, слабо изогнутый. Передний край трапециевидно изогнут.

Брюшная створка плоская, поперечно вытянутая, округленно-пятиугольного очертания, изогнутая.

* Название *chanakchiensis* дано по имени р. Чанахчи, в бассейне которой этот вид впервые найден.

Макушка маленькая, заостренная, слабо изогнутая. По ее бокам две небольшие луночки.

Синус становится заметным почти с $1/3$ длины створки, — широкий, плоский, равномерно и быстро расширяющийся к переднему краю. Дно синуса плоско-дугобразное. Язычок синуса широкий, обычно невысокий, трапециевидный.

Имеются экземпляры с более узким и очень высоким язычком синуса (3 экз. из 10). Верхний край язычка дугобразный, иногда прямой, зубчатый.

Спинная створка сильно выпуклая, поперечно вытянутая, округленная. Возвышение становится заметным почти с $1/3$ длины створки, плоское, широкое, невысокое, равномерно расширяющееся к переднему краю. Имеются экземпляры с очень сильно выпуклой спинной створкой, у которых возвышение очень высокое (3 экз. из 10).

Поверхность раковины покрыта немногочисленными, широкими, низкими округленно-угловатыми ребрами, немного не доходящими до макушки. В синусе и на возвышении ребра более резкие. Боковые ребра слабо заметные, в особенности у переднебоковых краев, где они почти сглажены. Число ребер в синусе 2—3, на возвышении 3—4. Число боковых ребер 2—3.

Внутреннее строение. Две зубные пластины в брюшной створке и септа в спинной. На ядре брюшной створки слабо заметны мускульные отпечатки.

Измерения

№ экз. обр.	Ф. VI/49	Ф. VI/49	Ф. 31/47	Ф. 31/47	Ф. 67/47		Ф. 11/50	Ф. 32/50	Ф. 17/50
Длина	24,9	17,7	25,0	23,6	24,3	20,2	27,9	20,3	25,5
Ширина	32,5	22,1	32,3	29,6	25,9	23,9	33,5	24,9	30,0
Дл. шир.	0,76	0,8	0,8	0,83	0,93	0,84	0,83	0,8	0,85
Высота	22,3	11,3	17,4	17,4	25,7	21,7	26,2	13,9	18,5
Выс. дл.	1,0	0,63	0,8	0,73	1,06	1,07	0,93	0,67	0,72

Изменения с возрастом. Молодые экземпляры имеют почти плоскую раковину со слабо выпуклой спинной створкой. Язычок синуса и возвышение низкие. Они отличаются также острыми боками и слабо изогнутым передним краем раковины (характер изменения макушки неизвестен из-за недостаточности материала).

Изменчивость. Изменчивы форма и выпуклость раковины, характер возвышения и язычка синуса; экземпляры с высоким возвышением имеют приплюснутые бока. Большого пока нельзя сказать из-за малого количества экземпляров.

Сравнение. По характеру ребристости очень близка *Pugnoides*

triaequalis (Gosselet, Rhynch. Dev. supér. Geol. du Nord, 1887, Ann. XIV, pl. III, f. 1—5, pl. II, f. 11—13, p. 212).

Описываемая форма отличается от *Pugnoides triaequalis* Goss. крупными размерами раковины, более поперечно вытянутой формой, более округленными и широкими ребрами.

Распространение и возраст — верхи верхнефаменских слоев Армянской ССР.

Местонахождение — верховья ущ. р. Чанахчи почти у самого берега 2 экз., сел. Кадзлу — ущ. Шахами-дзор 5 экз., ущ. у сел. Карахач 2 экз., и др. Все экземпляры найдены только в известняках.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступило 9 I 1954

Л И Т Е Р А Т У Р А

Г. Абрамян М. С., Аракелян Р. А. Известия АН Армянской ССР, т. I, № 5, 1948.

Մ. Ս. Յ. Բրախիոպոդներ

ՈՒՍՈՏԱՆԻՆԵՐԻ ՆՈՐ ՏԵՍԱԿՆԵՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՈՒ ՖԱՄԵՆՅԱՆ ՆՍՏՎԱԾՔՆԵՐԻՑ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգովածում նկարագրված է առատանիների երկու նոր տեսակ և մեկ նոր վարիետետ, որոնք նստվածքների ուղղաձիգ կտրվածքում հանդես են գալիս սկսած միայն ֆամենյան հարկից, Նրանցից երկուսը՝ *Liorhynchus dichotomians* n. sp. և նրա վարիետետը բարձրանում են էտրենյան հարկ, իսկ *Pugnoides chanakchiensis* n. sp. հանդիպում է միայն վերին ֆամենյան հասակի նստվածքներում:

Այսպիսով, այս ձևերն իրենց նեղ ուղղաձիգ տարածման հետևանքով միայն հասակի նստվածքների համար բնորոշ են:

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. А. Аракелян

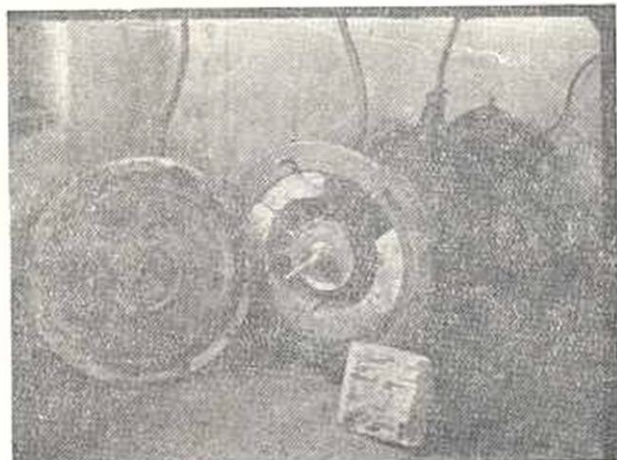
Истираемость строительных материалов
в водной среде

Основными и общими недостатками всех существующих методов испытаний на истираемость строительных материалов, применяемых в гидротехнических сооружениях, являются малые поверхности образцов, подвергающиеся истиранию, затрудняющие испытание бетонов с крупными заполнителями, а также несоответствие с практическим условием службы материалов в гидротехнических сооружениях.

Для испытания на истираемость строительных материалов, применяемых в гидротехнических сооружениях в водной среде, нами разработана система нового аппарата, принцип действия которого заключается в следующем. Испытуемые образцы криволинейной формы размерами $20 \times 20 \times 6-7$ см, в количестве 6 штук, с общей поверхностью истирания около 1600 см^2 , устанавливаются по внутренней поверхности неподвижного металлического барабана с внутренним диаметром 40 см. Внутри барабана вращается второй барабан диаметром 16 см, снабженный 6 лопастями. Зазор между обоими барабанами 4-5 см, заполняется смесью песка и воды (фиг. 1).

Как видно из фиг. 1, аппарат приводится в действие электромотором (3,3kw) через коробку скоростей, дающей возможность вращать внутренний барабан различной скоростью.

Многолетняя практика применения обычного бетона показала, что после продолжительного истирания, поверхность его получается очень скользкой с большими изъятиями и как бы изъеденная. Щебни, теряя связь с бетоном, выпадают из него.



Фиг. 1. Аппарат для определения истираемости строительных материалов в водной среде.

Точно такую же изъеденную и скользкую на ощупь поверхность мы получаем на образцах на нашем аппарате (фиг. 2, 3, 4).



Фиг. 2. Бетон на базальтовом щебне и пемзовом песке после испытания на истираемость.



Фиг. 3. Бетон на базальтовом щебне и кварцевом песке после испытания на истираемость.

Прежде чем приступить к испытанию строительных материалов на истираемость, необходимо было изучать режим работы аппарата.

Опыты показали, что когда барабан заполнен водой без песка или когда внутренний барабан не снабжен допаями, истираемость образцов получается почти незаметной.

В качестве песка нами был принят нормальный вольский песок, а истираемость образцов определялась износом его поверхности в мм, которая вычислялась путем деления потерянного объема образца на площадь его истирания.

Для установления интенсивности истираемости бетона в зависимости от содержания песка в воде, от числа оборотов внутреннего барабана аппарата и от продолжительности времени его вращения, нами проведены соответствующие опыты, дающие возможность заключить следующее:



Фиг. 4. Бетон на пемзовом щебне и пемзовом песке после испытания на истираемость.

а) содержание песка в смеси от веса воды более 12—15% не дает заметного эффекта, поэтому в наших опытах содержание песка принято 12%;

б) чем больше продолжительность времени вращения внутреннего барабана, тем больше эффект истираемости. Все же замечается некоторое падение интенсивности истирания во времени. Для каждого цикла испытания принята продолжительность времени вращения внутреннего барабана 6 часов, что дает возможность за 8-часовой рабочий день провести один цикл испытания;

в) истираемость образцов резко повышается при увеличении скорости вращения внутреннего барабана.

Наблюдается уменьшение интенсивности истирания при скорости вращения внутреннего барабана более 800—900 об/мин, поэтому скорость вращения внутреннего барабана принята 800—900 об/мин.

Эффективность истираемости образцов зависит также от величины зазора между испытуемым материалом и внутренним барабаном. Чем меньше этот зазор, тем выше эффективность истираемости.

Из практических соображений зазор между испытуемыми образцами и вращающимся барабаном принят 4—5 см, при этом зазор между лопастями (при высоте их 2—3 см) и испытуемыми образцами получается 1,5—2 см.

Приняв содержание песка в смеси 12% от веса воды, скорость вращения внутреннего барабана 800—900 об/мин и продолжительность вращения 6 часов, нами определена истираемость различных бетонов.

На фиг. 5 приведены данные, характеризующие истираемость вибрационного и вакуумированного* обычного бетона (на базальтовом щебне и кварцевом песке) различных марок, а также истираемость торкретной штукатурки на кварцевом и немзовом песках.

Из приведенных данных вытекают следующие выводы:

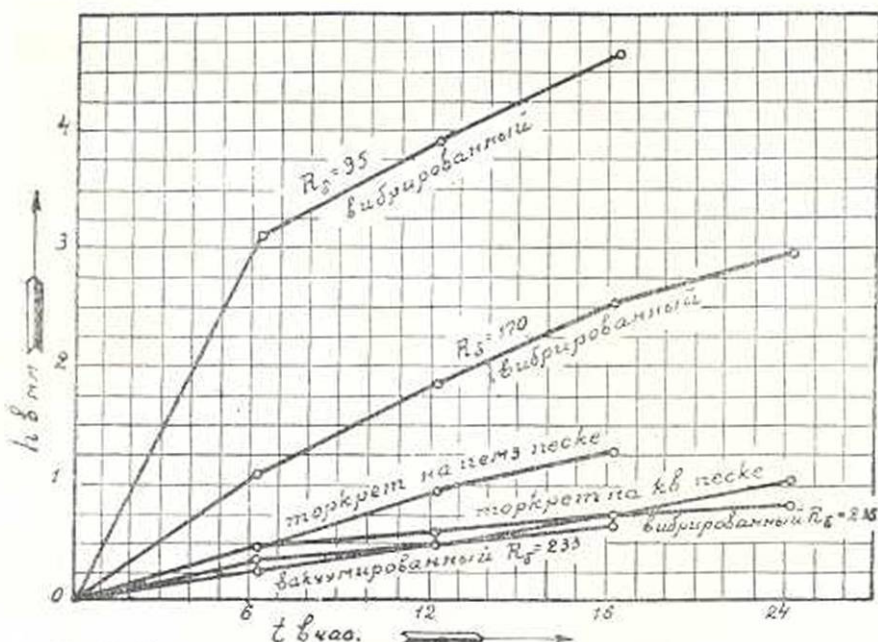
1. Истираемость обычного вибрированного бетона (при расходе цемента 240 кг/м³) 6-месячного возраста мало отличается от вакуумированного. Мало отличаются также их прочности.

Практика применения обычного бетона в гидротехнике показала, что в отношении истираемости наиболее слабой частью бетона является цементный камень. Заполнители же (базальтовый щебень, кварцевый песок) значительно менее подвержены истиранию. Но так как истираемость бетона при вакуумной обработке будет уменьшаться только соответственно увеличению прочности цементного камня, поэтому в нашем случае, когда прочность цементного камня в бетоне 6-месячного возраста вакуумной обработки мало увеличивается, эффект истираемости получается также незначительный.

2. Обычный бетон, приготовленный на смешанном вяжущем (це-

* Испытание образцов вакуумной обработки проведено совместно с инженером Т. Г. Митусовым.

мент+пемзовая пудра), показывает высокую истираемость и малую прочность.



Фиг. 5. Истираемость (h) обычного бетона в зависимости от продолжительности (t) вращения внутреннего барабана.



Фиг. 6. Обычный бетон на смешанном вяжущем (цемент+пемзовая пудра) после испытания на истираемость

После 3—4 циклов испытания бетонов на истираемость заполнители были обнажены в окружающем их цементном камне (фиг. 6). Повидимому, наличие пудры сильно ослабляет клеящую способность цемента с заполнителями.

3. Истираемость торкрета на кварцевом песке значительно меньше, чем на пемзовом песке и почти одинакова по сравнению с обычным вибрированным бетоном.

Следует отметить, что вследствие некачественной работы по торкретированию штукатурка на 2-м и 3-м цикле испытания отрывалась кусками от поверхности бетон-

ных образцов (фиг. 7). Подобные случаи встречаются и на практике в действующих сооружениях.

На фиг. 8 приведены данные, характеризующие истираемость бетона на базальтовом щебне и пемзовом песке (содерж. пылевидной

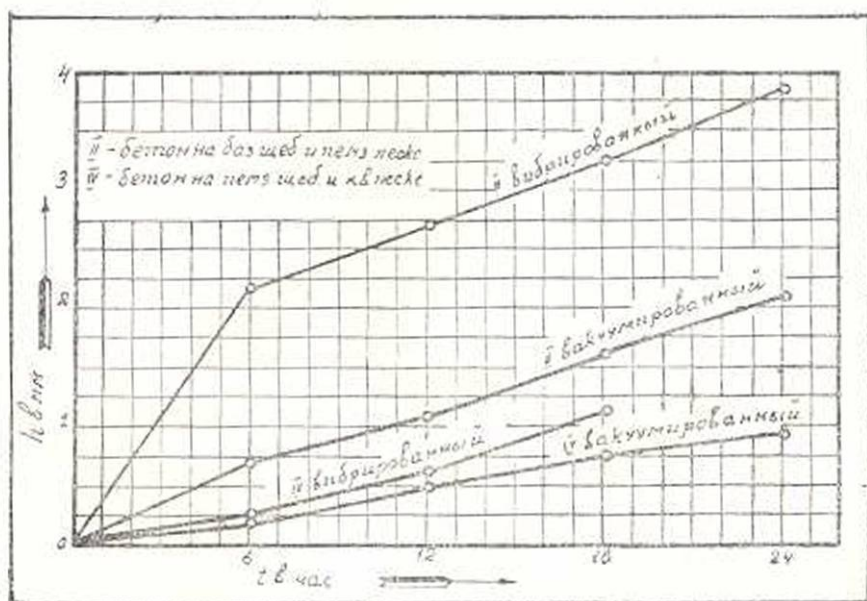
фракции 36%) и на пемзовом щебне и кварцевом песке при вибрационном и вакуумированном способе их укладки.

Из приведенных данных вытекает, что вакуумная обработка вышеуказанных бетонов в отношении истираемости, по сравнению с вибрационной, дает лучший эффект.

После 2—3 циклов испытания на истираемость базальтовый щебень в бетоне (песок пемзовый) обнажался (см. фиг. 6), между тем, как пемзовый щебень (песок кварцевый) вследствие большой истираемости давал ямки на поверхности бетона глубиной 2—3 см (фиг. 1).



Фиг. 7. Торкретная штукатурка после испытания на истираемость.

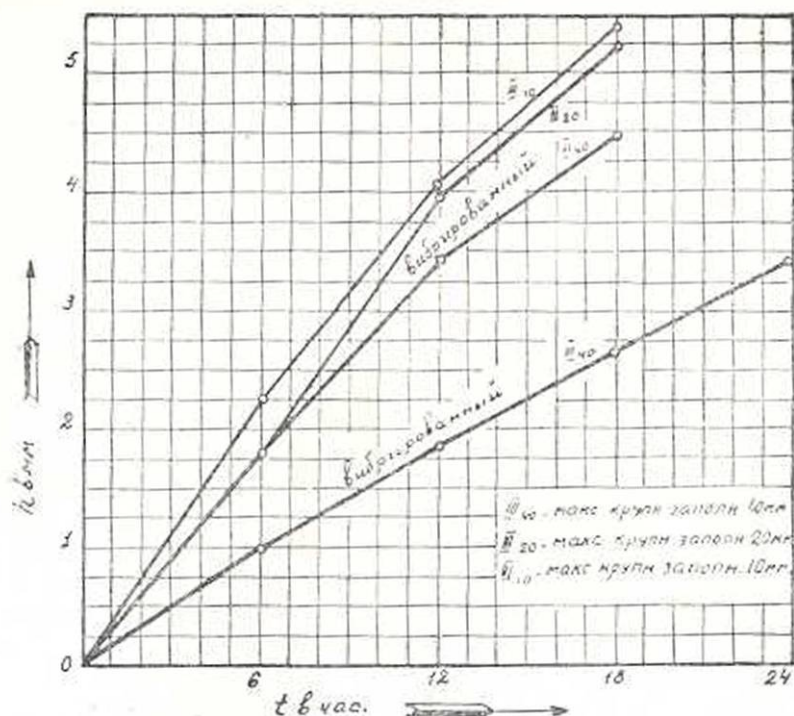


Фиг. 8. Истираемость (n) бетонов в зависимости от продолжительности (t) вращения внутреннего барабана.

На фиг. 9 приведены данные по истираемости легкого бетона вибрационной и вакуумированной укладки, а также при различной крупности отсеивателя.

Из приведенных данных можно заключить следующее:

1. Вакуумная обработка легкого бетона чувствительно увеличивает его износостойчивость.
2. Истираемость бетона при заполнителях с максимальной круп-



Фиг. 9. Истираемость (h) легкого бетона в зависимости от продолжительности (t) вращения внутреннего барабана.

ностью 40 мм меньше, чем при заполнителях с максимальной крупностью ниже 40 мм.

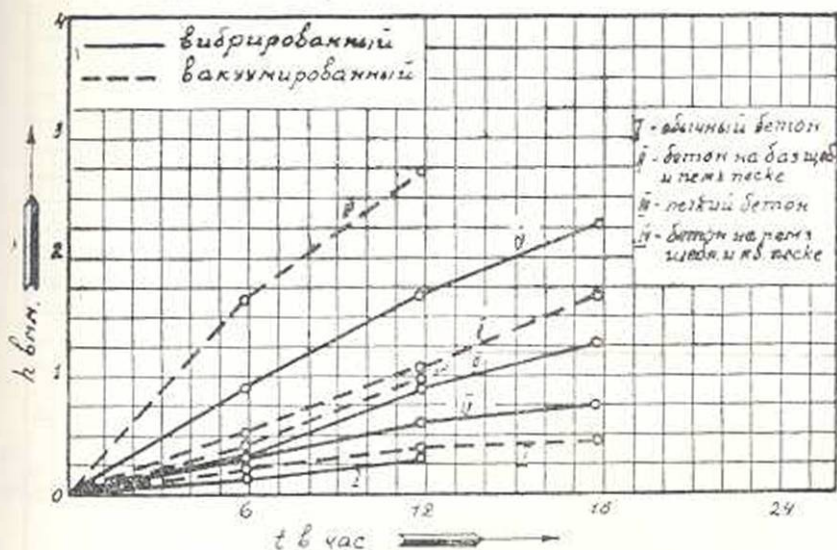
Опыт показывает, что при первом цикле испытания образцов на истираемость цементная корка с их поверхности снимается почти целиком, после чего при дальнейших циклах испытания все компоненты бетона подвергаются одновременному истиранию. Поэтому сравнительный анализ истираемости бетонов будет более точным, если не будут учтены показатели истираемости образцов первого цикла испытания.

Для сравнения между собою истираемости бетонов вибрационной и вакуумированной обработки построен график (фиг. 10) без учета полученных результатов от первого цикла испытания. Согласно приведенным данным составлена таблица 1, показывающая сравнительную

Таблица 1

Способ укладки бетона	Обычный бетон	Бетон на базальт. щебне и пемз. песке	Бетон на пемз. щебне и кварц. песке	Легкий бетон
Вибрирование	1	4,00	2,95	8,30
Вакуумирование	0,90	2,95	1,70	5,25
Коэффициент увелич. износоустойчивости вакуум. бетона	1,1	1,30	1,70	1,60

износоустойчивость бетонов вибрационной и вакуумированной укладки. В табл. 1 за единицу принят показатель истираемости обычного бетона вибрационной укладки.



Фиг. 10. Истираемость (h) вибрированных и вакуумированных бетонов в зависимости от продолжительности (t) вращения внутреннего барабана.

По сравнению с обычным бетоном износоустойчивость легкого бетона меньше в 8 раз, а износоустойчивость бетонов на пемзовом щебне и кварцевом песке или на базальтовом щебне и пемзовом песке — в 3–4 раза.

На фиг. 11 показана связь между прочностью и истираемостью бетонов. За показатель истираемости принята суммарная истираемость в мм, полученная при первых 3 циклах испытания.

Как видно из фиг. 11, между прочностью и показателями истираемости бетонов имеется линейная связь.

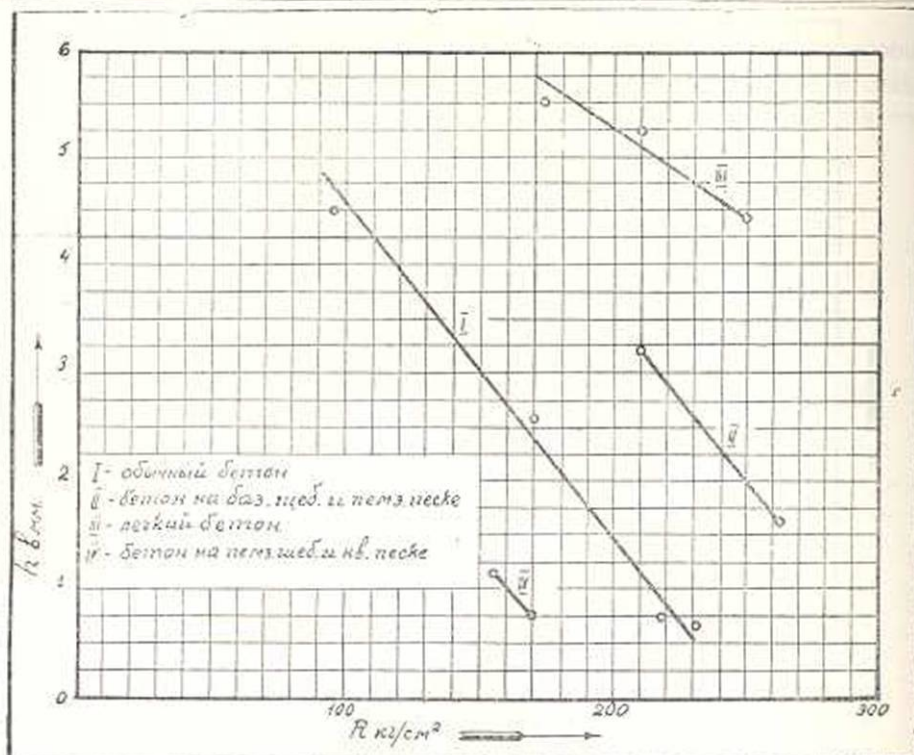
Истираемость бетонов зависит, главным образом, от степени истираемости его компонентов (цементный камень, раствор, щебень), поэтому для более глубокого анализа необходимо изучать истираемость компонентов бетона в отдельности.

Такая работа нами проводится.

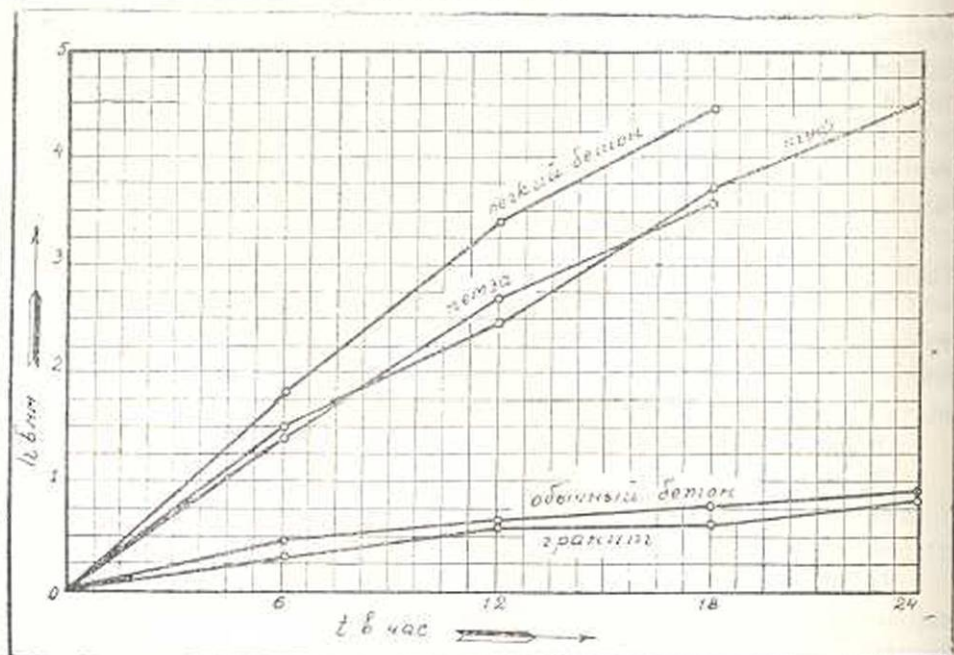
В данной статье приведены результаты изучения истираемости 3 видов камней — литондной пемзы, аванского вулканического туфа и гранита памбакского месторождения.

Плитки криволинейной формы размерами $20 \times 20 \times 6$ см из гранита, литондной пемзы и туфа были испытаны на истираемость при режиме, принятом выше для испытания бетонных образцов.

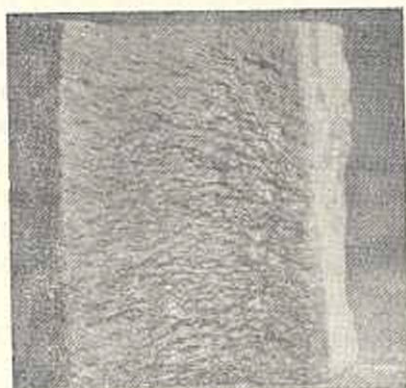
Приведенные данные на фиг. 12 и 13 показывают, что характер нарастания истираемости во времени у легкого бетона и литондной пемзы, а также у обычного бетона и гранита почти одинаковы.



Фиг. 11. Истираемость (h) бетонов в зависимости от предела прочности при сжатии (R).

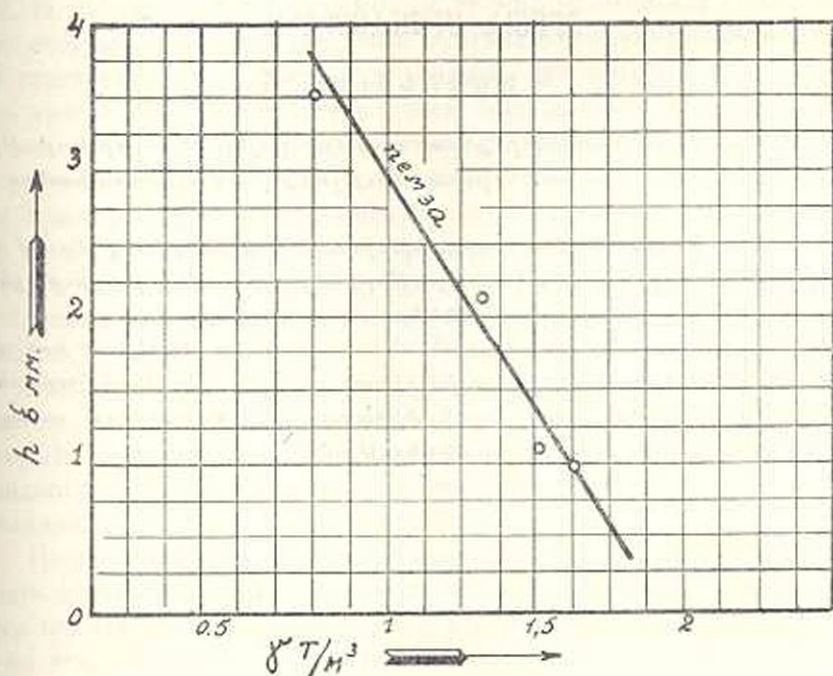


Фиг. 12. Истираемость (h) камней в зависимости от продолжительности (t) вращения внутреннего барабана.



Фиг. 13. Гранитный камень после испытания на истираемость.

На фиг. 14 дается связь между объемными весами пемзового камня и его истираемостью. Как видно из фигуры, эта связь почти прямолнейная.



Фиг. 14. Истираемость (h) литондной пемзы в зависимости от объемного веса (γ).

В ы в о д ы

Исходя из результатов опытов можно сделать следующие выводы:

1. Предложенный нами аппарат, по сравнению с существующими, дает возможность применяемые в гидротехнических сооружениях

строительные материалы подвергать испытанию на истираемость в водной среде и получить сравнительные результаты, приближающие к практическим условиям службы материалов в сооружениях.

2. Между показателями истираемости и физико-механическими свойствами строительных материалов наблюдается определенная связь. Предварительные опыты показывают, что эта связь прямолинейная, характер которой зависит от вида бетона. Поэтому, как видно из фиг. 11, можно получить равноизносоустойчивые бетоны различных видов при различных прочностях.

3. В гидротехнических сооружениях, подвергающихся истиранию, применение легкого бетона даже при вакуумной их обработке рекомендовать нельзя.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 5 XI 1952

Հ. Ս. Սահակյան

ՇԻՆԱՐԱՐԱԿԱՆ ՆՅՈՒԹԵՐԻ ՔԵՐԱՄԱՀԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՋՐԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Շինարարական նյութերի քերամաչառմը որոշելու համար դոյուժյուն ունեցող մեթոդները ապրիս են իրականությունը չհամապատասխանող արդյունքներ:

Հոգիածում բերված են հիդրոտեխնիկական կառուցվածքներում գործածվող մի քանի շինարարական նյութերի՝ ջրային միջավայրում քերամաչելիության ուսումնասիրությունների արդյունքները:

Հեղինակի փորձերը կատարված են նրա կողմից մշակված նոր սարքավորման վրա, որը թույլ է ապրիս շինարարական նյութերի հարաբերական քերամաչումը որոշելու ջրային միջավայրում, ըստ որում ստացված արդյունքները ավելի մոտ են իրականության:

А. В. Шубников

Ответ на статью Л. А. Варданянца
„Ревизия кубо-октаэдрического двойникового закона
алюмо-калиевых квасцов“

[Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952]

В 1933 году в статье [1], посвященной экспериментальному обоснованию возможности образования двойников путем непосредственного срастания готовых кристаллов, автором настоящей заметки совместно с М. П. Шаскольской было, между прочим (в двадцати строках), описано впервые обнаруженное нами оригинальное эпитаксическое явление срастания двух кристаллов квасцов, при котором грань куба одного кристалла ориентируется своей диагональю на грани октаэдра другого кристалла параллельно ребру последнего.

Этот весьма скромный по научному значению, хоть и проверенный опытом и даже зафотографированный случай, эпитаксии, возведенный Л. А. Варданянцем в ранг „кубо-октаэдрического закона“, подвергся с его стороны в 1953 году, т. е. спустя двадцать лет после его опубликования, развернутой „Ревизии“ (1) на десяти страницах с шестью рисунками в тексте [2].

Полагая, что поднятый Л. А. Варданянцем вопрос не принадлежит к категории актуальных, мы вместо подробного ответа на „Ревизию“, который по норме Л. А. Варданянца должен был бы принять размеры солидного тома, вынуждены ограничиться следующими немногими замечаниями.

Наше возражение против „Ревизии“, по сути дела, следовало бы начать с опровержения „Триадной теории“ и „Теории поворотов“ нашего оппонента [3, 4], поскольку „Ревизия“ целиком базируется именно на этих „теориях“. К сожалению, это наше намерение мы осуществить не можем даже в принципе, не говоря уже о том, что для этого нужно иметь много свободного времени. Дело в том, что указанные теории принадлежат к категории *неопровержимых*, ибо опровергать в них *ничего*. Мы хотим этим сказать, что в отличие от всех известных в науке верных и неверных теорий, указанные теории не имеют *никаких отправных предпосылок*, т. е. не имеют того, с чем можно было бы согласиться или не согласиться.

Этот, если позволительно так назвать, замкнутый стиль

научного творчества Л. А. Варданянца отчетливо сказался и на „Ревизии“. Например, нам ставится в упрек то, что мы не „учли“, что в наших опытах „срастание кристаллов может происходить только гранью куба к грани октаэдра“ и „не обратили внимания“ на то, что „такое срастание является здесь принудительным“, тогда как на самом деле, в этом вопросе, наша задача как раз и заключалась в совершенно сознательном и именно принудительном сращивании кристаллов именно по тем граням, которыми они только и обладают, т. е. по граням куба и октаэдра. Столь же странным выглядит и другое обвинение в том, что мы „не обратили внимания“ на то, что наш двойник „объединяет в одно целое два разнородных сростка“. Как же может быть, чтобы мы, сознательно сравнивая разнородные вещи по некоторым признакам их сходства, не могли заметить, что мы сравниваем разнородные вещи. Кстати, автор „Ревизии“ действительно не заметил, что мы сравниваем на самом деле даже не два, а четыре разнородных сростка, изображенных на чертеже в нашей работе.

В заключение заметим, что от дальнейшей дискуссии по затронутому вопросу, как вопросу мало интересному, мы намерены воздержаться, несмотря на любые возможные в будущем „ревизии“ нашего к нему отношения.

Поступило 13 III 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаскольская М. и Шубников А. Об искусственном получении закономерных сростков алюмо-калиевых квасцов. Тр. Ломоносовского ин-та АН СССР, 3, 51, 1933.
2. Варданянц Л. А. Ревизия кубо-октаэдрического двойникового закона алюмо-калиевых квасцов. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
3. Варданянц Л. А. Триада теории двойниковых образований минералов. Ереван, 1950.
4. Варданянц Л. А. Теория поворотов кристалла в двойниках. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 4, 1952.

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Г. А. Амбарцумян

Некоторые замечания по поводу статьи А. К. Ананяна
„О пропускной способности двухярусных водосбросов“

[Известия АН Армянской ССР (физ.-мат., естеств.
и техн. науки), т. III, № 3, 1950]

На одной из строящихся гидростанций Армении головной узел за-проектирован так, что сбросные и промывные устройства объединены в одно общее сооружение.

Через нижнюю галлерею этого сооружения производится сброс паводочных расходов и осуществляется промыв донных наносов, осевших перед порогом водоприемника.

Через верхний ярус осуществляется сброс остальной части паводочных расходов, а также сброс поверхностного льда.

Такая компоновка водосбросных сооружений дает возможность регулировать деление сбросного расхода на поверхностную q_n и донную q_d так, чтобы в створе их встречи получить некоторое разряжение, которое приведет к увеличению скорости истечения через донную галлерею, следовательно и увеличит промывной эффект, не прекращая подачу очищенной воды в канал.

Расчет эффекта эжекции на увеличение донных скоростей и вопрос определения самой величины эжекции все еще не разрешены.

Имеющиеся в литературе работы по определению эффекта эжекции [1, 2, 3, 4] и другие носят или чисто экспериментальный характер, или же задачу решают при неправильных допущениях.

Удачную попытку для решения поставленной задачи сделал А. К. Ананян.

В отличие от других, А. К. Ананян при гидравлическом решении поставленной задачи рассматривает также влияние глубины колодца на эффект эжекции.

В дальнейшем изложении номера формул, обозначения и номера фигур приняты как у А. К. Ананяна.

Не приводя основные исходные предпосылки и допущения, сделанные А. К. Ананяном при решении поставленной задачи, вкратце отметим те упущения, которые вкратце в его работу.

Для решения поставленной задачи А. К. Ананян исходит из уравнения количества движения.

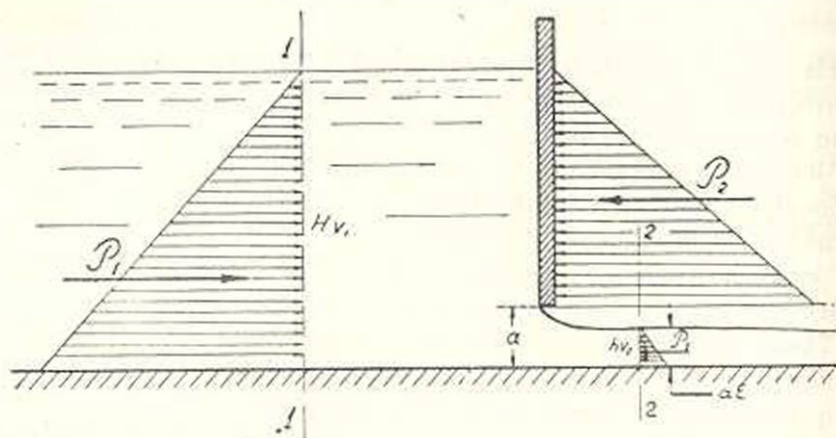
Удобство использования этого уравнения, перед уравнением живых сил при решении аналогичных задач, общеизвестно.

Но при этом требуется точно определить величины действующих усилий.

При решении поставленной задачи автор считает, что давление на щит можно определить из зависимости

$$P_{\text{щ}} = \frac{\gamma h_{\text{м}}^2}{2}.$$

Ошибочность такого допущения станет ясна, если рассмотреть случай простого истечения из-под щита (фиг. 2) взамен двухфазного и применить уравнение количества движения для сечений 1—1 и 2—2.



Фиг. 2.

Уравнение количества движения запишется следующим образом

$$\Delta t \frac{\alpha_0}{g} \gamma (\omega_2 V_2^2 - \omega_1 V_1^2) = \Delta t \cdot \gamma \left[\frac{H^2}{2} - \frac{(H-a)^2}{2} - \frac{a^2 \xi^2}{2} \right].$$

Сокращая на $\Delta t \cdot \gamma$ и принимая $\alpha_0 = 1$, получим

$$\frac{1}{g} (\omega_2 V_2^2 - \omega_1 V_1^2) = \left[\frac{H^2}{2} - \frac{(H-a)^2}{2} - \frac{a^2 \xi^2}{2} \right].$$

Для единичной ширины потока имеем

$$\omega_2 = a \cdot \xi \cdot 1 \quad \text{и} \quad \omega_1 = H \cdot 1.$$

Подставляя эти значения в основное уравнение, получим

$$\frac{1}{g} (a \cdot \xi \cdot V_2^2 - H V_1^2) = \left[\frac{H^2}{2} - \frac{(H-a)^2}{2} - \frac{a^2 \xi^2}{2} \right].$$

Решая относительно V_2 , получим

$$V_2 = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon} \left[H - \frac{a}{2} (1 + \varepsilon^2) + \frac{H V_1^2}{g \cdot a} \right]}$$

Принимая коэффициент сужения $\varepsilon = 0,62$, получим

$$V_2 = \sqrt{1,61g \left(H - 0,69a + \frac{H V_1^2}{g \cdot a} \right)}$$

При малом значении $\frac{H}{a} \frac{V_1^2}{g}$ пренебрегая им, получим

$$V_2 = \sqrt{1,61g(H - 0,69a)}$$

Указанная скорость при использовании уравнения Бернулли будет

$$V_2^1 = \sqrt{2g(H - \varepsilon a)}$$

Сравнив между собой V_2 и V_2^1 , нетрудно заметить существенное расхождение.

Таким образом, допущение о гидростатическом законе распределения давления на щит неверно.

Максимальное понижение давления в сечении 1—1, т. е., максимальный эффект эжекции А. К. Ананян получает отысканием минимума функции (3), т. е. из $\frac{dh_d}{dy_n} = 0$ предполагая, что величина пьезометрического давления в сечении 1—1 в основном зависит от глубины колодца.

Анализ этого условия показывает, что оно не может дать решения поставленной задачи.

В действительности изменение Y_n , т. е. глубина колодца почти не влияет на величину эффекта эжекции. Увеличивая или уменьшая величину колодца, мы фактически не изменяем ни распределения расходов между донным и поверхностным сбросами, ни кривизну этих струек, а также величину h_d . Следовательно и изменение Y_n не может влиять на величину эффекта эжекции.

Поэтому установленная зависимость $h_d = f(Y_n)$ является недостаточной для отыскания $h_{d \max}$ в зависимости от Y_n .

После определения максимальной величины вакуума автор не ставит того ограничительного условия, без которого не будет продолжительное время действовать данный вакуум.

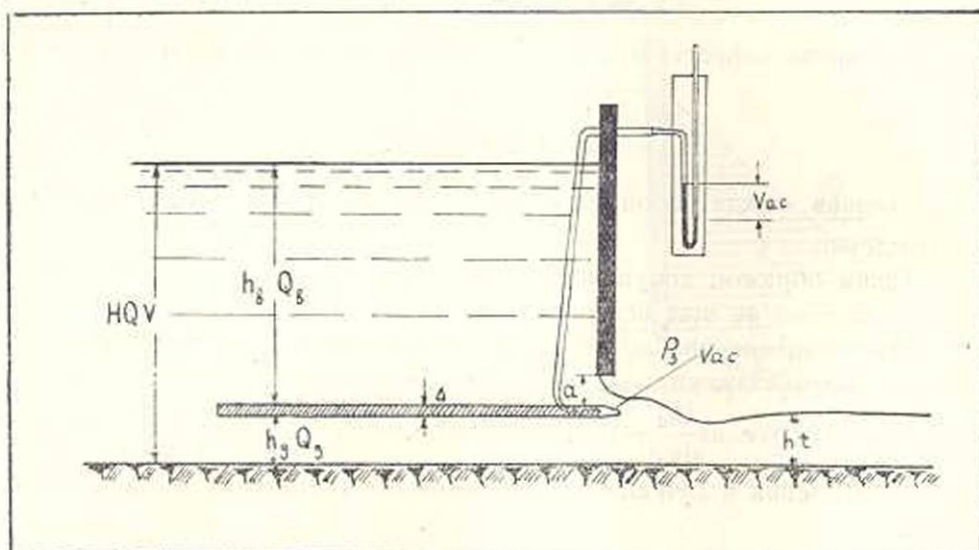
В действительности, если под струей возник некоторый вакуум, то для удержания этого вакуума необходимо соблюдение сплошности вытекающей струи.

Предельное значение $\frac{P_0 - P_2}{\gamma}$ ограничивается физическими усло-

виями величины вакуума, а действительная величина вакуума будет ограничена условием прорыва атмосферного воздуха в зону разряжения.

Давление, при котором может произойти прорыв атмосферного воздуха в зону разряжения (фиг. 1), является функцией толщины вытекающей из-под щита струи жидкости (точнее — прикрывающей толщой) h_1 , скорости истечения $V_{ис}$ и коэффициента кинематической вязкости γ , т. е.

$$\left(\frac{P_0 - P_3}{\gamma} \right)_{\text{прел}} = \varphi(h_1, V_{ис}, \gamma). \quad (a)$$



Фиг. 1.

Для первого приближения можно допустить, что напряжение разрыва определится зависимостью

$$\sigma = K \left(\frac{P_0 - P_3}{h_{ис}} \right), \quad (б)$$

где $h_{ис}$ — минимальная толщина слоя жидкости, вытекающей из-под щита,

σ — напряжение разрыва,

K — коэффициент.

Допуская, что $\gamma = \frac{\sigma}{K}$, из (б) получим

$$P_3 = \gamma \cdot h_{ис} - P_0. \quad (в)$$

(Для статических условий указанная зависимость вполне оправдывается, см. сосуд Мариотта „Гидравлика в задачах“ Н. К. Горчин и М. Д. Чертоусов, 1934.)

Следовательно, величина максимального вакуума, определяемого по зависимости автора, должна быть ограничена условием (8), что им не сделано. Этим можно объяснить возможность увеличения донных скоростей с помощью эффекта эжекции, приведенном в задаче у А. К. Анапяна, где увеличение напора получается около 40% от первоначального.

Указанные основные упущения имеют место в работах и других авторов.

В рассматриваемой работе допущен и ряд обидных ошибок, как-то: величина расхода поверхностного потока определяется по зависимости (5).

$$Q_n = \mu_n \cdot B_n \cdot h_n \sqrt{2g(H - h_n)}. \quad (5)$$

Само собой понятно, что

$$Q_n = \mu_n \cdot B_n \cdot h_n \sqrt{2g\left(H - h_n - \Delta - \frac{a}{2}\right)}, \quad (6)$$

без учета влияния эжекции.

При учете эжекции расход приближенно определяется по формуле:

$$Q_n^I = \mu_n \cdot B_n \cdot h_n \sqrt{2g\left(H - h_n - \Delta - \frac{a}{2} + \frac{P_0 - P}{\gamma}\right)}, \quad (7)$$

где $h_n = \varepsilon \cdot a$.

При рассмотрении действующих сил для применения теоремы о приращении секундного количества движения, автор принимает, что в точках поверхности 5—4 вертикальной грани уступа—давление атмосферное, следовательно, избыточное давление равно нулю.

Такое допущение говорит об исключении случая возникновения вакуума под струей и, следовательно, зависимости, полученные для этого случая, не верны.

Армянский научно-исследовательский
институт гидротехники и мелиорации

Поступило 1 IX 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейс И. И. Известия ВНИИГ им. Вedenсева, № 32, 1947.
2. Кумин Д. И. Известия ВНИИГ им. Вedenсева, № 44, 1951.
3. Егоров С. А. Эжекция в нижний бьеф гидростанции, М.—Л., 1948.
4. Кочановский Б. Д. Известия ВНИИГ им. Вedenсева, № 34, 1947.