ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 1, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие
Глава III. Некоторые приложения общей теории.
§ 1. Применение к суммированию асимптотических рядов.
§ 2. Факториальные ряды, как аппарат суммирования расходящихся рядов.
§ 3. Аналитическое и квази-аналитическое продолжения функций.

ГА-3888

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая работа является продолжением нашей статьи, помещенной в Известиях АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук, т. VI, № 5—6, 1953 г.) и посвящена применению изложенных там результатов к двум группам вопросов, которые касаются суммирования расходящихся рядов, а также аналитического и квази-аналитического продолжения функций.

В § 1 доказывается, что для того, чтобы асимптотический ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$, определяющий функцию $f(z)$, суммировался методом факториального ряда по последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$ при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c > 0$, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\psi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}\{\alpha, \infty)$, $\alpha \geqslant 0$, такая, что $\psi^{(k)}(\alpha) = c_{k-1}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, причем порядок равномерной сходимости соответствующего e-обобщенного ряда Тейлора равен σ_c.

Далее получается признак суммируемости асимптотических рядов методом факториального ряда.

В § 2 доказывается, что изложенный в работе метод суммирования рядов регулярен и суммирует ряды, которые не поддавались суммированию другими методами.

В § 3 вводятся определения:

Условимся говорить, что:

1. Бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки α, если задана совокупность ее последовательных производных в точке α.

2. Функция $\psi(x)$ аналитична в e-области $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_\nu\}$ и $\alpha \geqslant 0$, если она разлагается в сходящийся при $x \in [\alpha, \infty)$ ряд

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\zeta x}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

Доказывается теорема:

Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$, *заданная своим элементом в окрестности точки* $\alpha \in (0, \infty)$, $\psi^{(n)}(\alpha)=c_{n+1}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, *продолжалась аналитически или квазианалитически по* e-*области* $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}, \text{ где } a_n=\sum_{k=2}^{n+1}c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}, \qquad \prod_{\nu=0}^{m}(t+\gamma_\nu)=\sum_{k=0}^{m}S_k^{(m)}t^{m-k}$$

сходился при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$, $\sigma_c > 0$—*некоторое число;* откуда получается один признак аналитического или квази-аналитического продолжения функций.

Наконец, доказывается теорема об аналитическом продолжении одного класса функций, заданных своими рядами Дирихле.

Последняя теорема дает возможность судить о расположении особенностей всякого факториального ряда на границе его сходимости.

Глава III. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

В настоящей главе обобщенные факториальный ряд и ряд Тейлора применяются к суммированию асимптотических рядов, а также к вопросу аналитического и квази-аналитического продолжения функций.

§ 1. Применение к суммированию асимптотических рядов

Определение 1 (*e*). В отличие обозначений в определении 1 назовем функции

$\psi_1(x)=\psi'(x)$, $\psi_2(x)=[e^{\gamma_1 x}\psi_1(x)]'$, $\ldots$, $\psi_{m+1}(x)=[e^{(\gamma_m-\gamma_{m-1})x}\psi_m(x)]'$, $\ldots$, $m=1, 2, \ldots$, обобщенными последовательными e-производными функции $\psi(x)$ по последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

Там где нет указания о форме обобщенных производных, следует их понимать в смысле определения 1; а в случае e-производных всегда будет соответствующее указание.

Теорема (3.1). Всякая функция $\psi(x)$, *имеющая на некотором* $[\alpha, \infty)$, $(n+1)$-*ую интегрируемую производную, может быть представлена в виде*

$$\psi(x)=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta+r_n(\alpha,\ x), \tag{3.1}$$

где $x\in[\alpha,\ \infty)$, *простой контур* C_ν—*охватывает окрестности точек* $\{-\gamma_k\}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu$, $(\gamma_0=0)$, $a_k=e^{-\gamma_k-\gamma_{k-1}}\ \psi_k(\alpha)$, *где* $\psi_k(x)$—*k-ая e—обобщенная производная функция* $\psi(x)$ *по последовательности* $\{\gamma_\nu\}$, *а*

$$r_n(\alpha,\ x)=\int_\alpha^x e^{-\gamma_1(x_1-\alpha)}dx_1\int_\alpha^{x_1}e^{-(\gamma_2-\gamma_1)(x_2-\alpha)}dx_2\ \ldots$$

$$\ldots\int_\alpha^{x_{n+1}}e^{-(\gamma_n-\gamma_{n-1})(x_n-\alpha)}dx_n\int_\alpha^{x_n}\psi_{n+1}(x_{n+1})dx_{n+1}. \tag{3.2}$$

Эта теорема может быть доказана самостоятельно повторением метода теоремы (1.1), но и может быть получена из нее заменой переменных.

Применим второй способ.

Пусть $\psi(x)-\varphi(e^{-x})=\varphi(t)$.

Очевидно функция $\varphi(t)$ определена на $(0.\ u]$, где $u=e^{-\alpha}$ и там дифференцируема $(n+1)$ раз.

Для функция $\varphi(t)$ имеем представление:

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}+R_n(u,\ t),$$

где $0<t\leqslant u$, $\varkappa=\varkappa(\varphi)>0$—некоторое число.

$$R_n(u,\ t)=\int_u^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\int_u^{t_1}t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1}\,dt_2\ \ldots\int_u^{t_{n-1}}t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dt_n\int_u^{t_n}\varphi_{n+1}(t_{n+1})dt_{n+1}.$$

Значит для функции $\psi(t)$ получим:

$$\psi(x)-\varphi(e^{-x})=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{a_\nu}{2\pi i}\int_{\varkappa-i\infty}^{\varkappa+i\infty}\frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_k)}d\zeta+R_n(e^{-\alpha},\ x); \tag{3.3}$$

здесь $x\in[\alpha,\ \infty)$.

Для определения коэффициентов a_ν и $R_n(e^{-\alpha},\ x)$ в терминах функции $\psi(x)$ нам придется $\varphi_m(t)$ выразить через обобщенные e-производные функции $\psi(x)$.

Для этого заметим, что в лемме 3 теоремы (1.8) доказано, что

$$\varphi_{m+1}(t)=\{\psi^{(m+1)}(x)+S_1^{(m)}\psi^{(m)}(x)+\ldots+S_n^{(m)}\psi'(x)\}\,e^{(\gamma_m+\gamma_1)x}, \tag{3.4}$$

где числа $S_\nu^{(m)}$, $\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ определяются из тождества

$$\prod_{\nu=1}^{m}(\zeta+\gamma_\nu)=\sum_{k=0}^{m}S_k^{(m)}\zeta^{m-k}.$$

Нам теперь остается выразить $(m+1)$-ую обобщенную e-производную функции $\psi(x)$ через ее обыкновенные производные и сравнить полученное выражение с $\varphi_{m+1}(x)$.

Имеем

$$\psi_1(x)=\psi'(x)$$

$$\psi_2(x)=[\psi_1(x)e^{\gamma_1 x}]'=[\psi'(x)e^{\gamma_1 x}]'=[\psi''(x)+\gamma_1\psi'(x)]e^{\gamma_1 x}.$$

Далее имеем

$$\psi_3(x)=[\psi_2(x)e^{(\gamma_2-\gamma_1)x}]'=([\psi''(x)+\gamma_1\psi'(x)]e^{\gamma_1 x})'=$$
$$=[\psi'''(x)+(\gamma_1+\gamma_2)\psi''(x)+\gamma_1\gamma_2\psi'(x)]e^{\gamma_2 x}.$$

Продолжая этот процесс $m+1$ раз, получим

$$\psi_{m+1}(x)=[\psi^{(m+1)}(x)+S_1^{(m)}\psi^{(m)}(x)+\ldots+S_m^{(m)}\psi'(x)]\,e^{\gamma_m x}. \tag{3.5}$$

Сравнивая (3.4) и (3.5), получаем

$$\varphi_{m+1}(t)=\psi_{m+1}(x)e^{x}. \tag{3.6}$$

Используя последнюю формулу, покажем как преобразуется

$$R_n(u,\ t)=\int_u^t t_1^{\gamma_1-1}dt_1\ \ldots\ \int_u^{t_{n-1}}t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}dt_n\int_u^{t_n}\varphi_{n+1}(t_{n+1})dt_{n+1}$$

после замены $t=e^{-x}$.

Нетрудно заметить, что

$$R_n(u,\ t)=r_n(\alpha,\ x)=\int_a^x e^{-\gamma_1 x_1}dx_1\int_a^{x_1}e^{-(\gamma_2-\gamma_1)x_2}\,dx_2\ \ldots$$

$$\ldots\int_a^{x_{n-1}}e^{-(\gamma_n-\gamma_{n-1})x_n}dx_n\int_a^{x_n}\psi_{n+1}(x_{n+1})dx_{n+1},$$

где $x_k=ln\dfrac{1}{t_k}$, $\alpha=ln\dfrac{1}{u}$, причем берем арифметические значения логарифмов.

Для завершения доказательства теоремы нам остается выразить a_ν через производные функции $\psi(x)$.

Заметим, что согласно теоремам (1.1), (1.3) $a_\nu=u^{\gamma_\nu-1+1}\varphi_\nu(u)$ $\nu=2,\ 3,\ \ldots,\ u=e^{-a}$, значит

$$a_\nu = \frac{\psi_n(\alpha)e^{\alpha}}{e^{(\gamma_{\nu-1}+1)\alpha}} = e^{-\gamma_{\nu-1}\alpha}\psi_\nu(\alpha). \tag{3.7}$$

Этим теорема полностью доказана.

Определение 3 (*e*). Формулу

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_k)}\, d\zeta + r_n(\alpha, x), \tag{3.1}$$

где $x \in [\alpha, \infty)$, $\alpha \geqslant 0$, простой контур C_ν охватывает окрестности нулей функции $\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_k)$, а

$$r_n(\alpha, x) = \int_{\alpha}^{x} e^{-\gamma_1 x_1} dx_1 \int_{\alpha}^{x_1} e^{-(\gamma_2-\gamma_1)x_2}\, dx_2 \ldots \int_{\alpha}^{x_n} \psi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1},$$

будем называть обобщенной *e*-формулой Тейлора, а ряд

$$\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_k)}\, d\zeta, \tag{3.1'}$$

который получается из (3.1), после перехода к пределу, когда $n \to \infty$ (при соблюдении условия сходимости), будем называть обобщенным *e*-рядом Тейлора.

Определение 4 (*e*). Число $\varkappa$ называется порядком равномерной сходимости ряда (3.1'), если оно является порядком равномерной сходимости ряда

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{k=0}^{\nu}(\zeta+\gamma_k)}\, d\zeta,$$

где $t = e^{-x}$, $u = e^{-\alpha}$ на сегменте $[0, u]$.

Введем классификацию функций $\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t)$, где $t \in (0,1)$.

Определение 8 (*e*). Функция $\psi(x)$ на $(0, \infty)$ принадлежит к классу функций $C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}$, $\left(C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0, \infty)\right)$, если функция

$$\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0,1).$$

Определение 8′(*e*). Функция $\varphi(x)$ на $[\alpha, \infty)$, где $\alpha \geqslant 0$, принадлежит к классу функций $C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}$, $\left(C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty)\right)$, если функция

$$\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0, u], \text{ где } u = e^{-\alpha}.$$

Из определений 8 и 8′ (*e*) следует.

Теорема (3.2). Пусть функция $\varphi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0, \infty)$, *тогда для всякой точки* $\alpha \in (0, \infty)$ *существует последовательность чисел* $\{\delta\gamma_\nu\}$, *где* $\delta = \delta(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, *такая, что при* $\alpha \leqslant x < \infty$ *сходится ряд*

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{e^{(x-\alpha)\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \delta\gamma_\nu)}\, d\zeta, \tag{3.8}$$

где $\varkappa > 0$ – *некоторое число,* $a_n = e^{-\alpha\gamma_n} \psi_{\gamma_n}(\alpha)$, *а* $\psi_{\gamma_n}(x)$ — *n-ая обобщенная e-производная функции.*

Замечание 5. Не нарушая общности, впредь вместо $\delta\gamma_\nu$ всегда будем писать γ_ν.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что существует число $\varkappa > 0$ такое, что при $t \in (0, u]$, где $u = e^{-\alpha}$, сходится ряд

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n} (\zeta + \gamma_\nu)}\, d\zeta,$$

где $\varphi(t) = \varphi(e^{-x}) = \psi(x)$.

Последняя теорема может быть применена к суммированию асимптотических рядов, а именно справедливо:

Теорема (3.3). Асимптотический ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots + \frac{c_n}{z^n} + \ldots. \tag{3.9}$$

определяющий функцию $i(z)$, *всегда суммируем при помощи факториального ряда по последовательности чисел* $\{\gamma_\nu\}$, *когда* $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$, *где* $\sigma_c > 0$ *некоторое число, если существует* $\psi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0, \infty)$ *такая, что в некоторой точке* $\alpha \in (0, \infty)$,

$\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, \alpha$, $\varkappa = \sigma_c$.

Из условия $\psi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}(0, \infty)$ следует, что

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{\varkappa_1-i\infty}^{\varkappa_1+i\infty}\frac{e^{-(\alpha-x)\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta,$$

где $\alpha\leqslant x<\infty$, $\varkappa_1>0$ некоторое число, превосходящее порядок равномерной сходимости последнего ряда $\varkappa$.

Составим интеграл

$$F(z)-c_0=\int_{\alpha}^{\infty}e^{-(x-\alpha)z}\psi(x)dx. \tag{3.10}$$

который существует для всех z при $\mathrm{Re}(z)>\varkappa$.

Обозначим $x-\alpha=x'$, тогда (3.10) запишется в виде

$$F(z)-c_0=\int_{0}^{\infty}e^{-zx}\psi(\alpha+x)dx. \tag{3.10'}$$

Интегрируя (3.10') по частям, что законно в силу леммы 2 теоремы (1.8), получим

$$F(z)=c_0+\frac{\psi(\alpha)}{z}+\frac{\psi'(\alpha)}{z^2}+\ldots+\frac{\psi^{(n)}(\alpha)}{z^{n+1}}+R_n(z),$$

где

$$R_n(z)=\frac{1}{z^{n+1}}\int_{0}^{\infty}e^{-zx}\psi^{(n+1)}(x+\alpha)dx.$$

По условию теоремы $\psi^{(k)}(\alpha)=c_{k+1}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, значит

$$F(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots+\frac{c_{n+1}}{z^{n+1}}+R_n(z).$$

Оценим теперь сверху $|R_n(z)|$, когда $\mathrm{Re}(x)>\varkappa>0$. Для этого заметим, что в лемме 3 теоремы (1.8) доказано, что

$$|\psi^{(n)}(x)|<C(\varkappa_1)\prod_{k=1}^{n}(\varkappa_1+\gamma_\nu)\,(e-\varepsilon)^n e^{\varkappa_1(x-\alpha)},$$

где $\varkappa_1>\varkappa=\sigma_c$ —произвольное число, $\sigma_c>0$—абсцисса сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left(-z\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right),\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство показывает, что

$$|\psi^{(n)}(x+\alpha)|<C(\varkappa_1)\prod_{k=1}^{n}|(\varkappa_1+\gamma_k)|(e-\varepsilon)^n e^{\varkappa_1 x}.$$

Согласно полученному неравенству имеем

$$|R_n(z)|<\frac{C(\varkappa_1)}{|z|^{n+1}}\prod_{k=1}^{n}(\varkappa_1+\gamma_k)(e-\varepsilon)^n\int_{0}^{\infty}e^{-(\mathrm{Re}z-\varkappa_1)x}dx,$$

или, при $\mathrm{Re}(z)>\varkappa_1>\varkappa$.

$$|R_n(z)| < C_1(\varkappa)\frac{(e-\varepsilon)^n\prod_{k=1}^{n}(\varkappa+\gamma_k)}{|z|^{n+1}} <$$

$$< C_2(\varkappa)\frac{\prod_{k=1}^{n}[(e-\varepsilon)\gamma_k]e^{\varkappa_1\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}}{|z|^{n+1}}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\ldots+\frac{c_n}{z^n}+\ldots$$

определяет функцию $F(z)$ единственным образом, следовательно $F(z)\equiv f(z)$ и

$$f(z)-c_0=\int_0^\infty e^{-zx}\psi(x+\alpha)dx=\int_\alpha^\infty e^{-(x-\alpha)z}\psi(x)dx.$$

Функция $\varphi(t)=\psi(e^{-x})$ на $[0,\ u]$, где $u=e^{-\alpha}$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{\varkappa_1-i\infty}^{\varkappa_1+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta.$$

Значит

$$f(z)-c_0=\int_0^u\left(\frac{t}{u}\right)^z\psi(lnt)d\left(\frac{t}{u}\right)=\int_0^u\left(\frac{t}{u}\right)^x\varphi(t)\frac{dt}{u}=$$

$$=\int_0^u\left(\frac{t}{u}\right)^{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{\varkappa_1-i\infty}^{\varkappa_1+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta\frac{dt}{u},$$

где $\varkappa_1>\varkappa$.

Нетрудно заметить, что при $Re(z)>\varkappa$ будем иметь

$$f(z)-c_0=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^u\left(\frac{t}{u}\right)^{z-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\cdot\frac{dt}{u},$$

где C_n — окружность $|\zeta+\gamma_n|=\gamma_n+\delta$, причем $0<\delta<\varkappa$.

Совершая почленную интеграцию с перестановкой интегралов (что законно), получаем

$$f(z)-c_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{dz}{(z-\zeta)\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

Так как $\mathrm{Re}(z)>\varkappa$, значит z находится во внешней к контуру C_n области, а так как подинтегральное выражение вне контура C_n кроме полюса $\zeta=z$ других особенностей не имеет, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{dz}{(z-\zeta)\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}=\frac{1}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}.$$

Следовательно, ряд

$$f(z)=c_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}$$

сходится при всяком z, $\mathrm{Re}(z)>\varkappa=\sigma_c$.

Этим теорема доказана.

Докажем предложение, являющееся обращением теоремы (3.3).

Теорема (3.4). Если асимптотический ряд $f(z)\sim c_0+\frac{c_1}{z}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots$ *при* $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c>0$ *суммируется методом факториального ряда по последовательности чисел* $\{\gamma_\nu\}$, $\nu=0, 1, 2, \cdots$, $\gamma_0=0$, *тогда существует единственная функция* $\psi(x)$, *принадлежащая к классу*

$$C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty),$$

такая, что $\psi^{(k)}(\alpha)=c_{k+1}$, $k=1, 2, \cdots$, *причем порядок равномерной сходимости* $\varkappa$ *обобщенного е-ряда* $\psi(x)$ *равняется* σ_c.

Действительно, составим ряд

$$f(z)-c_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)},$$

который согласно условию теоремы сходится при $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c$, где $a_n=\sum_{k=2}^{n+1}c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$, а числа $S_k^{(n)}$ определяются из тождества

$$\prod_1^n(x+\gamma_\nu)=\sum_{k=1}^{n}S_k^{(n)}x^{n-k}.$$

Составим теперь функцию

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)},$$

где $x_1>\sigma_c$, $u\in(0,\ 1)$, $t\in(0,\ u]$.

Очевидно, что в силу теорем (1.7) и (1.8)

$$\varphi(t)\in C_{\left\{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}(0,\ 1]$$ и

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty}\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}[f(\zeta)-c_0]d\zeta=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty}\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta.$$

Это значит, что

$$\psi(x)=\varphi(e^{-x})=\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty}\frac{e^{\zeta(x-\alpha)}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta$$

или

$$\psi(x+\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty}\frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta.$$

Легко заметить, что

$$\psi^{(n)}(\alpha)=c_{n+1},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

Действительно, согласно формуле (3.5) имеем

$$\Phi_{m+1}(z)=[\Phi^{(m+1)}(z)+S_1^{(m)}\Phi^{(m)}(z)+\cdots+S_m^{(m)}\Phi'(z)]e^{\gamma_m z}$$

или

$$\Phi_{m+1}(0)=\Phi^{(m+1)}(0)+S_1^{(m)}\Phi^{(m)}(0)+\cdots+S_m^{(m)}\Phi'(0).$$

Полагая $\psi(x+\alpha)=\Phi(x)$, $m+1=n$, получаем

$$a_n=\psi^{(n)}(\alpha)+S_1^{(n-1)}\psi^{(n-1)}(\alpha)+\cdots+S_{n-1}^{(n-1)}\psi'(\alpha).$$

Задавая m значения $m=1,\ 2,\cdots$, получаем треугольную систему линейных уравнений относительно $\psi^{(k)}(\alpha)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ (m+1)$.

Решая имеющуюся систему уравнений и зная, что

$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S^{(n-1)}_{n+1-k}$, получаем $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 1, 2, \cdots$;

нетрудно заметить, что и $c_1 = \psi(\alpha)$. Значит $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$ при $n = 0, 1, 2, \cdots$

С другой стороны, на основании формулы (1.19) леммы 2 теоремы (1.8), а также теоремы (1.7) получаем, что порядок равномерной сходимости обобщенного e-ряда функции $\psi(x)$ равен σ_c.

Этим теорема доказана.

Объединяя теоремы (3.3) и (3.4), получаем:

Теорема (3.5). Для того, чтобы асимптотический ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots,$$

определяющий функцию $f(z)$, *суммировался методом факториального ряда по последовательности чисел* $\{\gamma_\nu\}$ *при* $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция*

$$\psi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty)$$

такая, что $\psi^{(k)}(\alpha) = c_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, *причем порядок равномерной сходимости* $\varkappa$ *соответствующего* e-*обобщенного ряда Тейлора равен* σ_c.

Отметим также предложение.

Теорема (3.6). Если асимптотический ряд

$$f(z) \sim c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots$$

методом факториального ряда суммируем по последовательности $\{\gamma_\nu\}$ *при* $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c > 0$, *тогда этот же асимптотический ряд суммируем по тому же методу по любой последовательности* $\{\gamma'_\nu\}$, *когда начиная с* $\nu = 1$, $\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu$ *и* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty$, *для всякого* z, *при* $\mathrm{Re}(z) > \sigma'_c$, *где* $\sigma'_c \leqslant \sigma_c$.

Действительно, пусть ряд

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n} (z + \gamma_\nu)} \tag{3.11}$$

сходится при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$.[3]

Тогда в силу теоремы (1.5) функция $f(z) - c_0$ разлагается также в факториальный ряд по последовательности $\{\gamma'_\nu\}$, где начиная с $\nu = 1$, $\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu$ и $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty$, причем каждая точка сходимости $\sigma \geqslant \sigma_c$,

$J_m\sigma=0$ ряда (3.11) является точкой сходимости также для ряда

$$f(x)-c_0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}. \tag{3.11'}$$

Этим очевидно устанавливается, что абсцисса сходимости ряда (3.11') не больше σ_c.

Так как числа $E_k^{(n)}$, $k=0, 1, 2, \cdots, n$, получаемые из тождества

$$\prod_{\nu=1}^{n}(z+\nu)=\sum_{k=0}^{n}E_k^{(n)}z^{n-k}$$

называются числами Стирлинга, будет естественно числа $\{S_k^{(n)}\}$, получаемые из тождества

$$\prod_{\nu=1}^{n}(z+\gamma_\nu)=\sum_{k=0}^{n}S_k^{(n)}z^{n-k},$$

называть обобщенными числами Стирлинга.

Впредь под символами $S_k^{(n)}$, $k=0, 1, 2, \cdots, n$ будем понимать обобщенные числа Стирлинга.

Следующие две теоремы могут служить в качестве признаков суммируемости асимптотических рядов методом факториального ряда.

Теорема (3.7). Пусть функция $f(z)$ *задана своим асимптотическим рядом* $f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ *и ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\exp\left(-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right)}{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}\quad \textit{где}\quad a_n=\sum_{k=2}^{n+1}c_k\,S_{n+1-k}^{(n-1)} \tag{3.12}$$

имеет конечную абсциссу сходимости $\sigma_c>0$, *тогда*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)},$$

причем абсцисса сходимости последнего ряда также равняется σ_c.

Для доказательства теоремы заметим, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}$$

сходится для всякого z, удовлетворяющего неравенству $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c$.

Составим далее функции

$$\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Omega_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta$$

и

$$f_1(z)=\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi(x)dx=\int_0^1 t^{z-1}\varphi(t)dt,$$

где

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta,\quad 0<t\leqslant 1.$$

Очевидно, что функция $f_1(z)$ определяется единственным образом в силу единственности функции $\varphi(t)$; учитывая то обстоятельство, что ряд

$$t^{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{t^{-\zeta}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta$$

при $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c$ на $[0,\ 1]$ можно интегрировать почленно, получим

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}.$$

С другой стороны, интегрируя по частям

$$f_1(z)=\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi(x)dx,$$

получим

$$f_1(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\frac{1}{z^n}\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi^{(n)}(x)dx,$$

или

$$f_1(z)\sim\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\cdots$$

Учитывая единственность функции $f(z)$, замечаем, что

$$f_1(z) = f(z).$$

Значит при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}.$$

Последняя теорема существенно упрощается, когда последовательность чисел $\{\gamma_\nu\}$ удовлетворяет условию $\gamma_\nu \leqslant \omega\nu$, где $\nu = 1, 2, \cdots$, а $\omega > 0$—некоторое число.

Теорема (3.7'). *Пусть функция* $f(z)$ *задана своим асимптотическим рядом*

$$f(z) \sim \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots$$

а $|a_n| < C\prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu)$, *где* $\gamma_\nu \leqslant \omega\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots \infty > \omega > 0$, $\varkappa > 0$—*некоторые числа,* $a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k \, E_{n+1-k}^{(n-1)}$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{-n}$ *суммируется методом факториального ряда по последовательности* $\{\gamma_\nu\}$ *при всех* z, *для которых имеет место неравенство* $\mathrm{Re}(z) > \varkappa + \delta$, *где* $\delta > \omega$.

Для доказательства этой теоремы нам достаточно заметить, что из условия

$$|a_n| \leqslant C\prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu)$$

следует, что при достаточно больших n

$$\left|\frac{a_n}{\prod_{1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu+\delta)}\right| < C\frac{|a_n|\,e^{-(\varkappa+\varepsilon)\sum_1^n \frac{1}{\gamma_\nu}}}{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu} e^{-(\delta-\varepsilon_1)\sum_1^n \frac{1}{\gamma_\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant C\,e^{-(\delta-\varepsilon_1)\sum_1^n \frac{1}{\gamma_\nu}} \leqslant Ce^{-\frac{\delta-\varepsilon_1}{\omega}\sum_1^n \frac{1}{\nu}} = C_2 n^{-\frac{\delta-\varepsilon_1}{\omega}},$$

где $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ сколь угодно малые числа, $C_2 = C_2(\varepsilon_1)$.

Так как $\delta > \omega$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{\delta - \varepsilon_1}{\omega}}$ сходится, следовательно, сходится также ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}$, когда $\mathrm{Re}(z) > \varkappa + \delta$.

Дальше доказательство теоремы продолжается так, как в теореме (3.7).

§ 2. Факториальные ряды, как аппарат суммирования расходящихся рядов

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы показывают, что факториальные ряды могут быть рассмотрены как аппарат суммирования рядов.

Для обоснования этого следует показать, что этот процесс удовлетворяет условиям:

1. Метод суммирования регулярен, т. е. всякий сходящийся ряд преобразуется также в сходящийся ряд.

2. Если данный ряд суммируется методом факториальных рядов по двум последовательностям $\{\gamma_\nu\}$ и $\{\gamma'_\nu\}$, то суммируется к единственной сумме, независимо от взятых последовательностей.

ПА-3888

Речь идет о суммировании рядов вида

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots \tag{3.13}$$

Не нарушая общности, мы можем рассматривать ряды вида

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + \cdots \tag{3.13'}$$

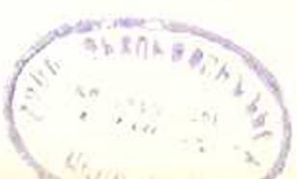
Ряд (3.13) получается из (3.13') при $z = 1$.

Покажем, что процесс суммирования методом факториальных рядов регулярен; для этого заметим, что если в теореме (1.5) гл. I настоящей работы положить $\gamma_\nu = 0$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ (на что мы имеем право, так как в теореме нигде не использовано отличие от нуля чисел γ_ν, $\nu = 1, 2, \cdots$), тогда получим предложение.

Теорема. Если функция $f(z)$ *при* $|z| > \sigma_c > 0$ *представляется сходящимся рядом*

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots, \tag{3.13''}$$

то функция $f(z)$ *разлагается в факториальный ряд по любой последовательности* $\{\gamma'_\nu\}$, *если только* $0 < \gamma'_1 \leqslant \gamma'_2 \leqslant \cdots$ *и* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty$.



причем каждая точка σ, *где* $J_m(\sigma) = 0$, *сходимости ряда (3.13'') является точкой сходимости полученного факториального ряда*

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}.$$

Этим регулярность процесса суммирования по методу факториального ряда можем считать доказанной.

В частности, получаем, что если ряд $c_0 + \frac{c_1}{\sigma} + \cdots + \frac{c_n}{\sigma^n} + \cdots$ сходится, то сходится также ряд

$$c_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{i}^{n}(\sigma+\gamma_\nu')}, \quad \text{где,} \quad a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)},$$

притом к той же сумме.

Теперь покажем, что если данный ряд суммируется по методу факториальных рядов по двум последовательностям $\{\gamma_\nu\}$ и $\{\gamma_\nu'\}$, то суммируется к одной единственной сумме.

Теорема (3.8). Пусть ряды

$$f_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(\sigma+\gamma_\nu)} \quad \text{и} \quad f_2(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n'}{\prod_{\nu=0}^{n}(\sigma+\gamma_\nu')},$$

где

$$a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}, \qquad a_n' = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{'(n-1)}.$$

$$S_k^{(n-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu)}{\zeta^{n-k}} d\zeta, \qquad S_k^{'(n-1)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu')}{\zeta^{n-k}} d\zeta$$

при данном σ, $J_m\sigma = 0$ *сходятся, тогда* $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Составим ассоциированные с функциями $f_1(z)$ и $f_2(z)$ по Лапласу функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$.

Нетрудно показать, что

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}.$$

$$\varphi_2(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n'}{2\pi i}\int\limits_{C_n'}\frac{t^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu')},$$

где контуры C_ν и C_ν'—охватывают окрестности полюсов подинтегральных функций. Эти ряды сходятся на $(0, 1]$, причем порядок равномерной сходимости каждого из них не больше σ.

Сделав замену переменного $t=e^{-x}$, получим:

$$\varphi_1(e^{-x})=\psi_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int\limits_{C_n}\frac{e^{\zeta x}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta,$$

$$\varphi_2(e^{-x})=\psi_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_\nu'}{2\pi i}\int\limits_{C_n'}\frac{e^{\zeta x}}{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta.$$

Имеем

$$f_1(z)=\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_1(x)dx,\qquad f_2(x)=\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_2(z)dx,$$

где $\mathrm{Re}(z)\geqslant\sigma$.

Проинтегрировав последние интегралы по частям, соответственно получим:

$$f_1(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\frac{1}{z^n}\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_1^{(n)}(x)dx,$$

$$f_2(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots+\frac{c_n}{z^n}+\frac{1}{z^n}\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_1^{(n)}(x)dx.$$

Обозначим

$$\frac{1}{z^n}\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_1^{(n)}(x)dx=r_{1n}(z),\qquad \frac{1}{z^n}\int_0^{\infty}e^{-zx}\psi_2^{(n)}(x)dx=r_{2n}(x),$$

где $\mathrm{Re}(z)\geqslant\sigma$.

В силу неравенства (1.19′) имеем

$$|\psi_1^{(n)}(x)|<c(\varkappa)\prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu)(e-\varepsilon)^n e^{\varkappa x},\qquad (1.19')$$

где $x\in[0,\infty)$.

Имеем также

$$|\psi_2^{(n)}(x)|<c(\varkappa)\prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu')(e-\varepsilon)^n e^{\varkappa x},$$

где $$\gamma_n = \delta_1 \frac{\dot{m}_n}{\dot{m}_{n-1}},\quad \gamma'_n = \delta_2 \frac{\dot{m}'_n}{\dot{m}'_{n-1}},\quad n = 1, 2, \cdots$$

Это значит, что $\psi_1(x) \in C_{\{\dot{m}_n\}}[0, \infty)$, $\psi_2(x) \in C_{\{\dot{m}'_n\}}[0, \infty)$, следовательно,

$$|r_{1n}(z)| < \frac{k^n \dot{m}_n}{|z|^n},\quad |r_{2n}(z)| < \frac{k'^n \dot{m}'_n}{|z|^n}$$

$$\mathrm{Re}(z) > \varkappa = \sigma_c > 0.$$

Используя решение проблемы Ватсона, убедимся, что $f_1(z) \equiv f_2(z)$; следовательно $f_1(\sigma) = f_2(\sigma)$.

Этим теорема доказана.

Теперь естественно поставить вопрос возможностей предложенного метода суммирования рядов.

Различим два понятия:

1. Процесс суммирования условимся называть сильным методом, если он данный ряд преобразует в сравнительно быстро сходящийся ряд.

2. Процесс суммирования будем называть мощным методом, если по данному методу суммируются ряды более широкого класса.

Заметим, что сильный процесс суммирования может оказаться маломощным методом (процессом) или, наоборот, более мощный метод суммирования в применении к отдельным рядам может оказаться слабосильным.

Докажем, что метод факториального ряда суммирования рядов, является наиболее мощным методом суммирования.

Действительно, пусть имеем ряд

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$$

или ряд

$$c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

Если этот ряд определяет единственную функцию, то последняя должна быть представлена в виде

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \cdots + \frac{c_n}{z^n} + r_n(z),$$

где $|r_n(z)| \leqslant m_n k^n |z|^{-n}$ для всех z, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Re}(z) > \sigma$ ($\sigma > 0$—некоторое число).

Это значит, что существует функция $\psi(x)$, ассоциированная с $f(z)$ по Лапласу:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-zx} \psi(x) dx$$

и такая, что $\psi(x) \in C_{\{m_n\}}[0, \infty)$, $\psi^{(n)}(0) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ и

$$\lim_{x \to \infty} [e^{-(\sigma+\varepsilon)x} \psi(x)] = 0.$$

Функция $\psi(x)$, а с ней и $f(z)$, определяются единственным образом только тогда, когда класс $C_{\{m_n\}}[0,\infty)$ (в смысле Карлемана) является классом аналитических или квази-аналитических функций.

С другой стороны, известно, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$ суммируем по методу факториального ряда, если существует функция $\psi(x)\in C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}[0,\infty)$, где $\gamma_\nu=\frac{m_\nu}{m_{\nu-1}}\delta$, $\nu=1, 2, \cdots$, $0<\delta<\infty$ такая, что $\psi^{(n)}(0)=c_{n+1}$ $n=0, 1, 2, \cdots$.

Из последних рассуждений заключаем, что асимптотический ряд

$$c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$$

определяет единственную функцию $f(z)$, если ассоциированная с $f(z)$ функция $\psi(x)=\varphi(e^{-x})=\varphi(t)\in C_{\{m_n\}}(0, 1]$, причем существует такое конечное число σ, что $\lim_{t\to 0}t^\sigma\varphi(t)=0$. Но ряд $c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$ суммируется методом факториального ряда, если $\varphi(t)\in C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}(0, 1]$ (в смысле определения 8), где $\gamma_\nu=\frac{m_\nu}{m_{\nu-1}}\delta$, $\nu=1, 2, \cdots$, $0<\delta<\infty$.

Заметим, что

$$C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}(0, 1]\subset C_{\{m_n\}}(0, 1],$$

причем неизвестно

$$C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}(0, 1)\subset C_{\{m_n\}}(0, 1] \quad \text{или} \quad C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}(0, 1]=C_{\{m_n\}}(0, 1].$$

В последнем случае получили бы, что определяемость асимптотического ряда и его суммируемость методом факториального ряда осуществляются одновременно.

Но и без этого, тот факт, что $C_{\{m_n\}}[0, 1]\subset C_{\left\{\prod_1^n\gamma_\nu\right\}}(0, 1]$, говорит о том, что метод факториального ряда является самым мощным из всех известных методов суммирования расходящихся рядов, потому что все известные методы суммирования, возможность суммирования ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$ связывают с фактом аналитичности функции

$$c_0+c_1z+\frac{c_2}{2!}z^2+\cdots+\frac{c_n}{n!}z^n+\cdots$$

в той или другой области.

§ 3. Аналитическое и квази-аналитическое продолжение функций

Определение 9. Условимся говорить, что бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$ задана своим элементом в окрестности точки α, если задана последовательность чисел $\{c_n\}$ $n = 1, 2, \cdots$ такая, что $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

В случае аналитичности функции $\psi(x)$ такое задание функции равносильно заданию тейлоровского разложения функции $\psi(x)$ в окрестности точки α.

В случае квази-аналитичности функции $\psi(x)$ элемент функции также определяет ее в некотором интервале, содержащем точку α.

Очевидно, что другие классы бесконечно дифференцируемых функций своими элементами однозначно не определяются.

Так как аналитические и квази-аналитические функции своими элементами вполне (притом однозначно) определяются, то для них ставится проблема аналитического или квази-аналитического продолжения, когда задан элемент данной функции.

В настоящем параграфе рассматривается несколько теорем такого характера.

Для этого достаточно обратить теоремы (3.5), (3.7), (3.7′) первого параграфа настоящей работы, выражая их в терминах функции $\psi(x)$, являющейся ассоциированной с $f(z)$ по Лапласу функцией.

Определение 10. Мы говорим, что функция аналитична в e-области $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_\nu\}$ и $\alpha \geqslant 0$, если она разлагается в обобщенный e-ряд Тейлора по последовательности $\{\gamma_\nu\}$, сходящийся при $x \in [\alpha, \infty)$.

Замечание 6. Заметим, что если функция $\psi(x)$ аналитична в e-области $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, то $\psi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty) \subset C_{\{m_n\}}[\alpha, \infty)$, где $m_n = \prod_1^n \gamma_\nu$ и, следовательно, или аналитична в некоторой области, содержащей $[\alpha, \infty)$, или квази-аналитична на $[\alpha, \infty)$ с точным указанием класса.

Полученные теоремы соответственно будут занумерованы (3.5*), (3.7*) и (3.7′*).

Теорема (3.5). Для того, чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\psi(x)$, заданная своим элементом в окрестности точки $\alpha \in (0, \infty)$, $\psi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ продолжалась аналитически или квази-аналитически по e-области $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, определяемой последовательностью $\{\gamma_\nu\}$ и α, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}, \quad \text{где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$$

сходился при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$, $\sigma_c > 0$—некоторое число.

Легко заметить, что доказательство этой теоремы отличается от доказательства теоремы (3.5) лишь тем, что в этом случае необходимое и достаточное условия переставлены местами, поэтому мы здесь ее доказывать не будем.

Теперь выразим в терминах функции $\psi(x)$ теоремы (3.7) и (3.7').

Эти теоремы очевидно будут одновременно являться признаками аналитического или квази-аналитического продолжения функции.

Теорема (3.7). Пусть бесконечно дифференцируемая функция* $\psi(x)$ *задана своим элементом в окрестности точки* $\alpha \in [0, \infty)$ $\varphi^{(n)}(\alpha) = c_{n+1}$ *и пусть ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n e^{-z\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}}}{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu}, \quad \text{где } a_n = \sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}$$

сходится при $\mathrm{Re}(z) > \sigma_c$, *тогда функция* $\psi(x)$ *продолжается аналитически или квази-аналитически по e-области, определяемой последовательностью* $\{\gamma_\nu\}$ *и* α.

Эта теорема также не нуждается в доказательстве.

Между прочим, теорема (3.7*) позволяет установить также в каком классе $C_{\left\{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty)$ продолжается функция $\psi(x)$.

Действительно, в силу теоремы (1.6) нетрудно заметить, что если функция $\psi(x)$ продолжается по e-области $D(\alpha, \{\gamma_\nu\})$, то она продолжается также по e-области $D(\alpha, \{\gamma'_\nu\})$, если только, начиная с $\nu=1$, $\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu$

и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma'_\nu} = \infty.$$

Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Замечание 5 в силу теоремы (2.9) показывает, что функция $\psi(x)$ может аналитически или квази-аналитически продолжаться по e-области $D(\alpha, \{\gamma'_\nu\})$ тогда, когда она не продолжается по e-области

$$D(\alpha, \{\gamma_\nu\}).$$

Таким образом, теоремы (3.5*) и (3.7*) не только вообще отвечают на вопрос возможности аналитического или квази-аналитического продолжения, но и указывают класс функций $C_{\left\{\prod_{1}^{n}\gamma_\nu\right\}}[\alpha, \infty)$, которому принадлежит функция $\psi(x)$.

Теорема (3.7'). Пусть бесконечно дифференцируемая функция* $\psi(x)$ *задана своим элементом в окрестности точки* $\alpha \in [0, \infty)$

$$|a_n| = \left|\sum_{k=2}^{n+1} c_k S_{n+1-k}^{(n-1)}\right| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n}(\varkappa+\gamma_\nu).$$

где $\varkappa > 0$, *и начиная с некоторого номера* p, $\gamma_\nu \leqslant \omega\nu$, $(\nu = p, p+1, \cdots)$, *тогда функция* $\varphi(x)$ *аналитична в области*

$$|e^{-\omega(z-\pi)} - 1| < 1.$$

Для доказательства этой теоремы заметим, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu)}$$ сходится при $\mathrm{Re}(z) > \varkappa \div \delta$, где $\delta > \omega > 0$.

Согласно теореме (1.5) функция f(z) при $\mathrm{Re}(z) > \varkappa \div \delta$ разлагается также в ряд

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_n'}{\prod_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu')},$$

где $\gamma_\nu' = \gamma_\nu$, когда $\nu < p$ и $\gamma_\nu' = \omega\nu$, когда $\nu \geqslant p$.

Составим теперь функцию

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_n'}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu')}, \quad x_1 > \varkappa + \delta.$$

Известно, что полученный ряд при $t \in (0, 1]$ можно дифференцировать любое число раз.

После p—кратного обобщенного дифференцирования по последовательности $\{\gamma_\nu'\}$, получим:

$$\varphi_p(t) = (-1)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n'}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{t^{-\zeta+\gamma_{p-1}}}{\prod_{\nu=p}^{n}(\zeta+\gamma_\nu')} d\zeta.$$

В силу формул (4) и (5) главы II работы [1] получаем:

$$\varphi_p(t) = (-1)^p \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-p-1} a_n' \omega_{n-p-1}(t, \gamma_p', \gamma_{p+1}', \cdots, \gamma_n') t^{\gamma_p - \gamma_{p-1}-1} =$$

$$= \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n' t^{\gamma_p - \gamma_{p-1}-1} \int_1^t t_1^{\omega-1} dt_1 \int_1^t t_2^{\omega-1} dt_2 \cdots \int_1^{t_{n-p-1}} t_{n-p}^{\omega-1} dt_{n-p}.$$

или

$$t^{\gamma_{p+1}}\varphi_{p+1}(t) = t^{(p+1)\omega}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \frac{(t^\omega-1)^n}{n!}.$$

причем ряд в правой части последнего соотношения сходится на $(0, 1]$; следовательно он сходится в $|t^\omega - 1| < 1$. Это значит, что функция $\varphi(t)$ регулярна в $|t^\omega - 1| < 1$.

Составим теперь функцию

$$\psi_*(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2\pi i}\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty}\frac{e^{\zeta x}}{\prod_{\nu=0}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\,d\zeta.$$

Очевидно, что функция $\psi_*(x)$ получается из $\varphi(t)$ после замены переменной $t = e^{-x}$. Это значит, что функция $\psi_*(x)$ регулярна в области $|e^{-\omega x} - 1| < 1$.

С другой стороны, замечаем, что

$$\psi_*^{(n)}(0) = c_{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Это значит, что

$$\psi_*(z) = \psi(z+\alpha) = \psi(z'),$$

следовательно, функция $\psi(z')$ регулярна в области

$$|e^{-\omega(z'-\alpha)} - 1| < 1.$$

Этим теорема доказана.

Покажем, что теорема (1.5) может быть использована также для аналитического продолжения некоторых рядов Дирихле, Ньютона и Р. Лагранжа.

Рассмотрим две последовательности чисел $\{\alpha_\nu = u\gamma_\nu\}$, $\{\beta_\nu = v\gamma_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \cdots$, а u и v—произвольные, отличные от нуля комплексные числа.

Пусть последовательность чисел $\{\gamma_\nu\}$ удовлетворяет еще условию

$$\sum_{n=1}\frac{\exp[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}]}{\gamma_n^2} < +\infty,$$ где $\alpha > 0$—некоторое число, а

$$\sigma(\alpha) = \alpha \mathrm{Re}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right).$$

Все эти условия в совокупности будут называться условиями совпадения.

Докажем теперь предложение о совпадении особенностей на общей прямой сходимости некоторого ряда Р. Лагранжа и ассоциированного с ним ряда Дирихле.

Теорема (3.9). При выполнении условий совпадения на общей границе (прямой) сходимости особенности рядов

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right] \tag{3.14}$$

и

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^{n}\frac{1-\frac{z}{\alpha_\nu}}{1+\frac{z}{\beta_\nu}} \tag{3.15}$$

совпадают.

Для доказательства теоремы рассмотрим функцию

$$M(z)=\prod_{\nu=1}^{n}\frac{1-\frac{z}{\alpha_\nu}}{1+\frac{z}{\beta_\nu}}\,e^{z\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)},$$

(в силу условий теоремы функция $M(z)$ существует) и составим разность

$$g_p(z)-\frac{f_p(z)}{M(z)}=\sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right]-$$

$$-\sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right]\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\beta_\nu}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{\frac{z}{\alpha_\nu}}}.$$

После вынесения общего множителя за скобку, получаем

$$g_p(z)-\frac{f_p(z)}{M(z)}=\sum_{n=p}^{\infty} a_n e^{-z\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)}\left[1-\prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1+\frac{z}{\beta_\nu}}{1-\frac{z}{\alpha_\nu}}e^{-\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)z}\right]. \tag{3.16}$$

Докажем, что для произвольного заранее заданного числа $\varepsilon>0$ можно указать целое число $n_0>0$ такое, что для всех $p\geqslant n_0$ будем иметь $\left|g_p(z)-\frac{f_p(z)}{M(z)}\right|<\varepsilon$ равномерно для всех z, удовлетворяющих неравенству $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c-\alpha$, где σ_c — общая абсцисса сходимости рядов (3.14) и (3.15).

Примем обозначения:

$$A_n=a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right],$$

$$B_n = 1 - \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\beta_\nu}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_\nu}}}$$

и применим преобразование Абеля

$$\sum_{n=p}^{q} A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n-1}) \sum_{m=p}^{n} A_m + B_q \sum_{m=p}^{q} A_m.$$

С этой целью составим

$$B_n - B_{n-1} = \prod_{\nu=n+2}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\beta_\nu}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_\nu}}} \left[\frac{\left(1+\frac{z}{\beta_{n+1}}\right)e^{-\frac{z}{\beta_{n+1}}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_{n+1}}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_{n+1}}}} - 1 \right].$$

Известно, что при $n \to \infty$ для конечных z справедливо:

$$\left| \prod_{n+1=\nu}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\beta_\nu}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_\nu}}} \right| \to 1.$$

Для краткости обозначим

$$\frac{\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\beta_\nu}}}{\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)e^{-\frac{z}{\alpha_\nu}}} = e^{v_\nu(z)}.$$

С одной стороны, имеем

$$v_\nu(z) = ln\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right) - \frac{z}{\beta_\nu} - ln\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right) - \frac{z}{\alpha_\nu} \qquad (3.17)$$

а, с другой стороны,

$$\left| e^{v_\nu(z)} - 1 \right| = \left| \frac{v_\nu(z)}{1!} + \frac{v_\nu^2(s)}{2!} + \cdots \right| < |v_\nu(z)| \cdot \exp|v_\nu(z)|.$$

Из (3.17) для достаточно больших ν получаем:

$$|v_\nu(z)| = \left| -\frac{z^2}{2\beta_\nu^2} + \frac{z^3}{3\beta_\nu^3} + \cdots + \left[\frac{z^2}{2\alpha_\nu^2} + \frac{z^3}{3\alpha_\nu^3} + \cdots \right] \right| <$$

$$\leqslant \frac{|z|}{2\cdot|\beta_\nu|^2}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{z}{\beta_\nu}\right|}+\frac{|z|}{2\cdot|\alpha_\nu|^2}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{z}{\alpha_\nu}\right|}<\frac{c}{\gamma_\nu^2}. \tag{3.17'}$$

где c—постоянная, зависящая от $|z|$ и u, v.

Таким образом,

$$|e^{v_\nu(z)}-1|\leqslant\frac{c}{\gamma_\nu^2}. \tag{3.18}$$

Следовательно в силу соотношений (3.17') и (3.18) получаем

$$|B_n-B_{n+1}|<\frac{c_1}{\gamma_{n+1}^2},$$

где c_1 зависит, как и c, от $|z|$, u, v.

Оценим теперь

$$|B_q|=|1-\exp\left(\sum_{\nu=q+1}^{\infty}v_\nu(z)\right)|\leqslant\sum_{\nu=q+1}^{\infty}|v_\nu(z)|\cdot\exp\left(\sum_{\nu=q+1}^{\infty}|v_\nu(z)|\right).$$

Зная, что $|v_\nu(z)|<\frac{c}{\gamma_\nu^2}$ и учитывая сходимость ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu^2}$, будем иметь

$$|B_p|<c_2\sum_{\nu=q+1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu^2},$$

где $c_2=c_2(|z|, v, u)$.

Перейдя теперь в формуле Абеля к модулям, получим

$$\left|\sum_{n=p}^{q}A_nB_n\right|\leqslant\sum_{n=p}^{q}|B_n-B_{n+1}|\cdot\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|+|B_q|\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|.$$

а после замены $|B_n-B_{n+1}|$ и $|B_q|$ своими мажорантами будем иметь

$$\left|\sum_{n=p}^{q}B_nA_n\right|<c_3\left[\sum_{n=p}^{q-1}\frac{1}{\gamma_{n+1}^2}\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|+\left|\sum_{m=p}^{q}A_m\right|\sum\frac{1}{\gamma_n^2}\right]. \tag{3.19}$$

Для завершения доказательства теоремы оценим сверху также $\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|$.

Имеем $$\sum_{m=p}^{n}A_m=\sum_{m=p}^{n}a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right]:$$

обозначим $$A_m'=a_m\exp\left[-(z+\alpha)\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right].$$

$$B_m' = \exp\left[\alpha \sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right].$$

Тогда, имея в виду, что у нас введено обозначение $\mathrm{Re}\left(\frac{\alpha}{u}+\right.$ $\left.+\frac{\alpha}{v}\right)=\sigma(\alpha)$, для $|B_m'|$ и $|B_m'-B_{m+1}'|$ соответственно будем иметь оценки

$$|B_m'|<\exp\left(\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu}\right),$$

$$|B_m'-B_{m+1}'|<\exp\left(\sigma(\alpha)\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu}\right)\frac{\left|\frac{\alpha}{u}+\frac{\alpha}{v}\right|}{\gamma_{m+1}}\exp\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\gamma_{m+1}}\right),$$

так как

$$\left|1-e^{-\frac{\alpha}{\gamma_{m+1}}\cdot\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)}\right|<\frac{\left|\frac{\alpha}{u}+\frac{\alpha}{v}\right|}{\gamma_{m+1}}\exp\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\gamma_{m+1}}\right),$$

или

$$|B_m'-B_{m+1}'|<c\,\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_{m+1}}.$$

Подставляя мажоранты $|B_m'|$ и $|B_m'-B_{m+1}'|$ в неравенство

$$\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|\leqslant\max_{p<m<n}\left|\sum_{k=p}^{m}A_k'\right|\cdot\left\{\sum_{m=p}^{n-1}|B_m'-B_{m+1}'|+|B_n'|\right\}$$

получим

$$\left|\sum_{m=p}^{n}A_m\right|\leqslant\max_{p<m<n}\left|\sum_{k=p}^{m}A_k'\right|c_1\left\{\sum_{k=p}^{n-1}\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{m}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_{m+1}}+\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]\right\},$$

где $c_1=c_1(\alpha,\ u,\ v)$.

Заметим теперь, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty}A_k'$ при $\mathrm{Re}(z)=\sigma_c-\varepsilon_0$, $0<\varepsilon_0<\alpha$, сходится равномерно.

Зададимся теперь сколь угодно малым числом $\varepsilon_1>0$ и возьмем p настолько большим, чтобы

$$\max_{p<m<n}\left|\sum_{k=p}^{m}A_k'\right|<\varepsilon_1.$$

Тогда очевидно будем иметь

$$\left|\sum_{m=p}^{n} A_m\right| < c_3\varepsilon_1 \exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right],$$

где $c_3 = c_3(\alpha, u, v)$.

Это значит, что

$$\left|\sum_{m=p}^{n} A_m\right| < \varepsilon_2 \exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right],$$

где $\varepsilon_2 > 0$ — есть также число сколь угодно малое.

Подставляя мажоранту $\left|\sum_{m=p}^{n} A_m\right|$ в наше основное неравенство (3.19), получим:

$$\left|\sum_{n=p}^{q} A_n B_n\right| \leqslant c_3\varepsilon_2 \left\{\sum_{n=p}^{q-1}\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_{n+1}^2} + \right.$$

$$\left. + \exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^2}\right\} < c_3\varepsilon_2 \sum_{n=q}^{\infty}\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_n^2},$$

так как

$$\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n^2} < \sum_{n=q}^{\infty}\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_n^2}.$$

В силу условий совпадения получаем

$$\left|\sum_{n=p}^{q} A_n B_n\right| < \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = c_3\varepsilon_2 \sum_{n=p}^{\infty}\frac{\exp\left[\sigma(\alpha)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]}{\gamma_n^2}.$$

Вспомним теперь, что

$$\sum_{n=p}^{q} A_n B_n = \sum_{n=p}^{\infty} a_n \exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right]\left\{1 - \right.$$

$$\left. - \prod_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{1+\frac{z}{\beta_\nu}}{1+\frac{z}{\alpha_\nu}}\exp\left[-z\left(\frac{1}{\alpha_\nu}+\frac{1}{\beta_\nu}\right)\right]\right\}.$$

Значит ряд (3.16′) функции

$$g(z)-\frac{f(z)}{M(z)}$$

сходится равномерно также в любой конечной области плоскости z, если только $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c-\varepsilon_0$, где $0<\varepsilon_0\leqslant\alpha$.

Этим доказано совпадение особенностей рядов (3.14) и (3.15) не только на их общей прямой сходимости, но и в полосе

$$\sigma_c-\varepsilon_0<\mathrm{Re}(z)\leqslant\sigma_c\ ,\quad 0<\varepsilon_0\leqslant\alpha.$$

Так как от чисел u и v кроме требования, чтобы они не обращались в нуль (в теореме (3.9)) ничего больше не требовалось, значит мы можем по желанию устремить u или v к бесконечности, тогда соответственно получим теоремы:

Теорема (3.9′). На общей прямой сходимости, при выполнении условий совпадения, особенности факториального ряда

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\beta_\nu}\right)}$$

и ассоциированного с ним ряда Дирихле

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\beta_\nu}\right]$$

совпадают.

Теорема (3.9″). На общей прямой сходимости, при выполнении условий совпадения, особенности ряда Ньютона

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_\nu}\right)$$

и ассоциированного с ним ряда Дирихле

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_\nu}\right]$$

совпадают.

Причем мы можем в последних теоремах соответственно полагать $u=1$, $v=1$.

Заметим теперь, что соединение теорем (1.5) и (3.9′) позволяет сформулировать теорему аналитического продолжения для рядов Дирихле (при выполнении условий совпадения).

Теорема (3.10). Ряд Дирихле

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]$$

в конечной абсциссой сходимости σ_c при выполнении условий сов-

падения аналитически продолжается в область $\mathrm{Re}(z)<\sigma_c$, *если существует такая последовательность чисел* $\{\gamma_\nu'\}$, $\gamma_\nu'>\gamma_\nu$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu'}=\infty$, *что абсцисса сходимости ряда*

$$g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu'}\right],$$

где

$$A_n=\sum_{k=1}^{\nu}a_k\alpha_\nu^{(k)},\quad \alpha_\nu^{(k)}=\frac{\prod_{m=1}^{k}\gamma_m}{2\pi i}\int_C\frac{\prod_{m=1}^{\nu}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_m'}\right)}{\prod_{m=1}^{k}(\zeta+\gamma_m)}d\zeta,$$

меньше σ_c.

Действительно, составим ассоциированный с

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]$$

факториальный ряд

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\prod_{1}^{n}\left(1+\frac{z}{\gamma_\nu}\right)}.$$

Согласно теореме (3.9′) особенности этих рядов на общей прямой сходимости совпадают.

С другой стороны, нетрудно заметить, что, преобразуя последний ряд, согласно теореме (1.5), получим

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\gamma_\nu'}\right)},$$

причем абсцисса сходимости этого ряда совпадает с абсциссой сходимости ряда функции $g_1(z)$.

Когда абсцисса сходимости ряда

$$g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu'}\right]$$

меньше σ_c, это значит, что $f(z)$ на прямой $\mathrm{Re}(z)=\sigma_c$ не имеет особых точек; следовательно, на $\mathrm{Re}(z)=\sigma_c$ особых точек не имеет также и $g(z)$.

Этим теорема доказана.

Заметим также, что теоремы (3.9″) и (3.10) позволяют доказать следующее предложение:

Теорема (3.10). Ряд Ньютона

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\gamma_\nu}\right)$$

с конечной абсциссой сходимости σ_c, *при выполнении условий совпадения, аналитически продолжается в область* $\mathrm{Re}(z)>\sigma_c$, *если существует такая последовательность чисел* $\{\gamma'_\nu\}$, $\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu$, $\nu=1, 2\ldots$, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma'_\nu}=\infty$, *что абсцисса сходимости ряда*

$$g_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left[-z\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma'_\nu}\right],$$

где

$$A_\nu=\sum_{k=1}^{\nu} a_k \alpha_\nu^{(k)},\quad \alpha_\nu^{(k)}=\frac{\prod_{m=1}^{k}\gamma_m}{2\pi i}\int_{C_k}\frac{\prod_{m=1}^{\nu}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma'_m}\right)}{\prod_{m=1}^{k}(\zeta+\gamma_m)}d\zeta,$$

меньше σ_ν.

Замечание 7. Используя свободу выбора последовательности $\{\gamma'_\nu\}$, можем получить сравнительно удобные признаки аналитического продолжения факториального ряда, а также рядов Дирихле и Ньютона.

В заключение параграфа отметим, что теоремы (3.9′) и (1.5) позволяют судить о расположении особенностей суммы всякого факториального ряда на границе его сходимости.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 31 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

Бадалян Г. В. Сообщения Института математики и механики АН Армянской ССР, выпуск 5, 1950, Ереван.

Հ. Վ. Բադալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ ԵՎ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՈՒ ԿՎԱԶԻ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածը հանդիսանում է «Հայկական ՍՍՌ Գիտությունների ակադեմիայի Տեղեկագրի» (ՀՍՌՖՏ գիտությունների սերիա) VI հատորի № 5—6-ում զետեղված մեր հոդվածի շարունակությունը և նվիրված է այնտեղ ստացված արդյունքների կիրառությանը՝ ասիմպտոտիկ շարքերի գումարմանը ֆակտորիալ շարքերի միջոցով, ինչպես նաև ֆունկցիաների անալիտիկ և կվազի-անալիտիկ շարունակման հարցերին։

Известия VII, № 1—3

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 1, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Р. А. Манукян

Расчет высоких балок под действием сосредоточенных сил, приложенных в точках верхней грани

В настоящей работе сделана попытка найти решение задач о равновесии свободно опертых и заделанных высоких балок, нагруженных сосредоточенными силами, приложенными в точках их верхней грани. В имеющихся решениях для прямоугольных пластинок при действии сосредоточенных сил, разрывная часть решения не отделена, вследствие чего вблизи точек приложения нагрузки черезвычайно трудно или невозможно найти численные значения напряжений. Кроме того в них не достаточно точно удовлетворяются граничные условия.

В нашей работе мы стремились отделить разрывную часть, в то же время достаточно точно удовлетворить граничным условиям. Работа состоит из двух глав. В первой главе рассматривается равновесие упругой полуплоскости при действии периодической разрывной нагрузки. Полученные в первой главе результаты используются во второй главе для решения задач о равновесии свободно опертых и заделанных высоких балок.

Результаты, полученные нами в первой главе, аналогичны результатам, полученным С. С. Голушкевичем для расчета свободно опертых тонких плит [1]. В работе С. С. Голушкевича составлены таблицы для некоторых из функций, через которые мы выражаем конечные части наших решений.

Глава I. Равновесие упругой полуплоскости при действии некоторых частных видов нагрузок

§ 1. Решения, выраженные в конечном виде.

1. В этой главе рассматривается напряженное состояние упругой полуплоскости при действии на ее границе исключительно нормальных нагрузок.

Как известно, компоненты напряженного состояния при плоском напряженном состоянии выражаются формулами Колосова [2]

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \\ Y_y - X_x + 2iX_y &= 2[z\Phi(z) + \Psi(z)], \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

где $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$—некоторые функции комплексного переменного z, а

$\overline{\Phi(z)}$—функция, сопряженная с $\Phi(z)$. В случае упругой полуплоскости функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{N+iT}{t-z}dt,\\ \Psi(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N+iT}{t-z}dt-\Phi(z)-z\Phi'(z).\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

где N—интенсивность нормальной нагрузки на границе полуплоскости, а T—интенсивность касательной нагрузки на той же границе. Если касательная нагрузка на границе отсутствует, то из (1.2) получим:

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{N}{t-z}dt,\\ \Psi(z)&=-z\Phi'(z).\end{aligned}\right\}\tag{1.2'}$$

Подставляя значение $\Psi(z)$ из (1.2') в (1.1), получим:

$$\left.\begin{aligned}X_x+Y_y&=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}],\\ Y_y-X_x+2iX_y&=4iy\Phi'(z).\end{aligned}\right\}\tag{1.1'}$$

Решая эту систему для компонентов напряженного состояния получим следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}X_x&=[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}]-y[\Phi'(z)-\overline{\Phi'(z)}],\\ Y_y&=[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}]+y[\Phi'(z)-\overline{\Phi'(z)}],\\ X_y&=-y[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}].\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

Таким образом, все компоненты напряженного состояния определяются через одну функцию $\Phi(z)$ комплексного переменного z и ее первой производной по z. Обозначая удвоенную действительную часть $\Phi(z)$ через $\psi(x, y)$, формулы (1.3) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}X_x&=\psi+y\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ Y_y&=\psi-y\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ X_y&=-y\frac{\partial\psi}{\partial x}.\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

В случае действия на границе полуплоскости нормальной сосредоточенной силы P, приложенной в начале координат, напряжения выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{P}{\pi}\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2},\\ Y_y &= -\frac{P}{\pi}\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2},\\ X_y &= -\frac{P}{\pi}\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}\right| \qquad (1.5)$$

Непосредственным сравнением (1.4) и (1.5) легко заметить, что функция ψ в этом случае равна:

$$\psi_1 = -\frac{P}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}. \qquad (1.6)$$

Если сила действует не в начале координат, в точке (a, 0), то функция ψ_1 примет вид:

$$\psi_1 = -\frac{P}{\pi}\frac{y}{(x-a)^2+y^2}. \qquad (1.6')$$

2. Предположим, что по всей границе полуплоскости действуют сжимающие сосредоточенные силы P на растоянии a друг от друга и равномерно распределенная нагрузка интенсивности $p = \frac{P}{a}$ (фиг. 1). Функцию ψ для совместного действия этих двух нагрузок можно написать в виде:

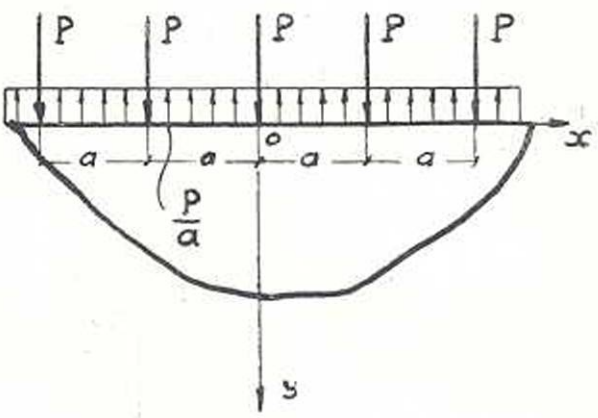
$$\psi_2 = -\frac{P}{\pi}y\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-na)^2+y^2} + \frac{P}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}. \qquad (1.7)$$

Члены ряда, входящего в (1.7), можно представить в виде

$$\frac{y}{(x-na)^2+y^2} = -\operatorname{Jm}\frac{1}{z-na}.$$

Следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-na)^2+y^2} = -\operatorname{Jm}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-na}.$$



Фиг. 1.

Но

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-na} = \frac{\pi}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a}.$$

Следовательно,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-n\alpha)^2+y^2}=-\frac{\pi}{a}\,\mathrm{Jm}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi z}{a}=\frac{\pi}{a}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}}.$$

Второй член в (7) равен

$$\frac{P}{\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\xi}{(x-\xi)^2+y^2}=\frac{P}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\,d\alpha}{\alpha^2+y^2}=\frac{P}{a\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{y}\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{P}{a}\,\frac{y}{|y|}.$$

Подставляя полученные значения в (1.7) получим:

$$\psi_2=-\frac{P}{a}\,\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\mathrm{ch}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}}+\frac{P}{a}\,\frac{y}{|y|}. \qquad (1.8)$$

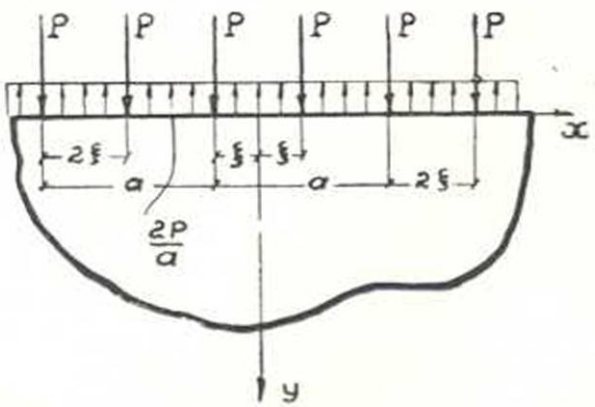
Для нижней полуплоскости $|y|=y$.
Следовательно,

$$\psi_2=-\frac{P}{a}\left[\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\mathrm{ch}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}}-1\right]. \qquad (1.8')$$

Для верхней полуплоскости $|y|=-y$.
Поэтому для нее

$$\psi_2=-\frac{P}{a}\left[\frac{\mathrm{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\mathrm{ch}\frac{2\pi y}{a}-\cos\frac{2\pi x}{a}}+1\right]. \qquad (1.8'')$$

Из решения (1.8) сдвигом сил можно получить решение для нагрузки, показанной на фиг. 2. А именно, в этом случае функция ψ напишется в виде:



Фиг. 2.

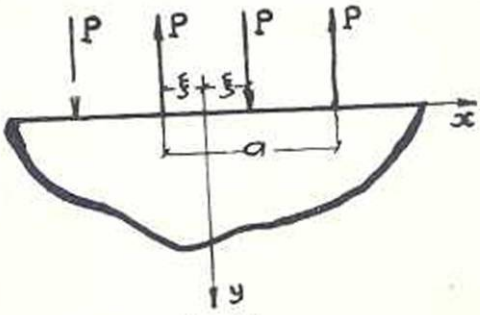
$$\psi_3 = -\frac{P}{a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi(x+\xi)}{a}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi(x-\xi)}{a}} - 2\frac{P}{a}\right]. \qquad (1.9)$$

3. Рассмотрим теперь напряженное состояние упругой полуплоскости при действии нагрузки, показанной на фиг. 3. Присоединим к этой нагрузке равномерно распределенные по оси OX нагрузки

$$p_1 = p = \frac{P}{a},\ p_2 = -p = -\frac{P}{a}.$$

Комбинируя надлежащим образом эти равномерные нагрузки с данными сосредоточенными силами, нетрудно убедиться, что функция ψ в этом случае выразится формулой:



Фиг. 3.

$$\psi_4 = \frac{P}{a}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi(x+\xi)}{a}} - \frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{a} - \cos\frac{2\pi(x-\xi)}{a}}\right]. \qquad (1.10)$$

При $\xi = \frac{a}{4}$ получим:

$$\psi_4 = \frac{4P}{a}\frac{\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{4\pi y}{a} + \cos\frac{4\pi x}{a}}. \qquad (1.10')$$

§ 2. Разложение полученных решений в ряды.

В дальнейшем, наряду с полученными нами конечными решениями, понадобятся и решения в тригонометрических рядах. Непосредственное разложение полученных решений в ряды требует громоздких выкладок, а между тем все эти разложения легко получаются при использовании нижеприведенного разложения $\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a}$, где $z = x + iy$ — комплексное переменное.

Применяя известное тождество

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a} = -i\frac{1+e^{\frac{2\pi iz}{a}}}{1-e^{\frac{2\pi iz}{a}}} \tag{1.11}$$

и разложение

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} x^k, \tag{1.12}$$

можем написать

$$-\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{a} = i + 2i\sum_{1}^{\infty} e^{\frac{2k\pi iz}{a}}. \tag{1.13}$$

Учитывая (1.13), разложение функции ψ_2 из формулы (1.8), можно написать в виде

$$\psi_2 = -\frac{2P}{a}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{2k\pi y}{a}} \cos\frac{2k\pi x}{a}. \tag{1.14}$$

Так же легко находятся разложения решений (1.9) и (1.10). Первое из них имеет вид

$$\psi_3 = -\frac{4P}{a}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{2k\pi y}{a}} \cos\frac{2k\pi\xi}{a}\cos\frac{2k\pi x}{a}, \tag{1.15}$$

второе —

$$\psi_4 = -\frac{4P}{a}\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{2k\pi y}{a}} \sin\frac{2k\pi\xi}{a}\sin\frac{2k\pi x}{a}. \tag{1.16}$$

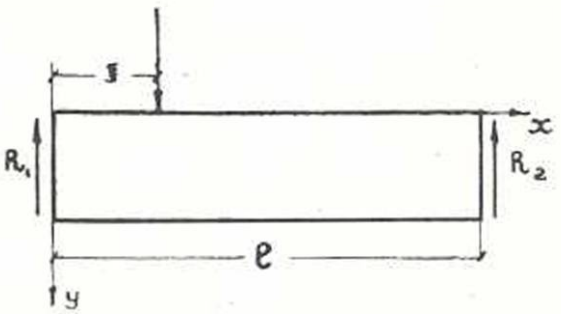
Вследствие наличия под знаком суммы множителя $e^{-\frac{2k\pi y}{a}}$ ряды (1.14), (1.15) и (1.16) сходятся очень быстро со своими производными до n-ого порядка, где n—конечное число, даже при сравнительно малых y.

Г л а в а II. Расчет высоких балок

§ 1. Балка свободно опертая по концам под действием поперечной силы, сосредоточенной в некоторой точке верхней грани.

1. Предположим, что в некоторой точке верхней грани балки, на расстоянии ξ от левого конца, действует сосредоточенная поперечная сила P, направленная по положительной оси OУ (фиг. 4). Пусть по концам балки условия закрепления таковы, что

$$\left.\begin{aligned} &X_x(0,y)=0,\ X_x(l,y)=0\\ &R_1=\int_0^h X_y(0,y)dy,\\ &R_2=\int_0^h X_y(l,y)dy, \end{aligned}\right\}\quad (2.1)$$



Фиг. 4.

где

$$R_1=\frac{P(l-\xi)}{l},\quad R_2=\frac{\xi P}{l}.$$

Для решения этой задачи обратимся к функции ψ_1 из формулы (1.10). Напряженное состояние, выражаемое этой функцией, определяется напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} X_x'&=\frac{P}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}-\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}+\right.\\ &\left.+\frac{\pi y}{l}\left[\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}-\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right]\right\},\\ Y_y'&=\frac{P}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}-\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}-\right.\\ &\left.-\frac{\pi y}{l}\left[\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}-\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right]\right\}, \end{aligned}\right\}\quad (2.2)$$

$$X_y' = \frac{\pi P y}{2l^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}-\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right].$$

На линиях $x=0$ и $x=l$ отсутствуют нормальные напряжения X_x', а касательные напряжения равны:

$$\left.\begin{aligned} X_y'(0,y) &= \frac{\pi P y}{l^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi\xi}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi\xi}{l}\right)^2}, \\ X_y'(l,y) &= -\frac{\pi P y}{l^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi\xi}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi\xi}{l}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Таким образом, для получения решения, удовлетворяющего граничным условиям (2.1), нужно компенсировать напряжения, действующие на грани $y=h$.

Разложение функции ψ_4, согласно формуле (1.16), имеет вид

$$\psi_4 = -\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi y}{l}}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (1.16')$$

Подставляя это выражение в (1.4) для напряжений Y_y' и X_y' получим следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} Y_y'(x,h) &= -\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi h}{l}}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\left(1+\frac{k\pi h}{l}\right), \\ X_y'(x,h) &= \frac{2P}{l}\sum_1^\infty\frac{k\pi h}{l}e^{-\frac{k\pi h}{l}}\sin\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Для компенсации напряжений $Y_y'(x,h)$ и $X_y'(x,h)$ используем решение Файлона в тригонометрических рядах.

2. Напишем функцию напряжений Эри в виде

$$\Phi = \sum_1^\infty F_k(y)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (2.5)$$

где $$F_k(y) = A_k\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} + B_k\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} +$$

$$+C_k \frac{k\pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{l} + D_k \frac{k\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{l}. \tag{2.6}$$

Напряжения при этом напишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} X_x'' &= \sum_1^\infty F_k'' \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ y_y'' &= -\sum_1^\infty \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(y) \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ X_y'' &= -\sum_1^\infty \frac{k\pi}{l} F_k'(y) \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Граничные условия напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &-\sum_1^\infty \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = 0, \\ &-\frac{k\pi}{l} \sum_1^\infty F_k'(0) \cos \frac{k\pi x}{l} = 0, \\ &-\sum_1^\infty \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(h) \sin \frac{k\pi x}{l} = -\frac{2P}{l} \sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi h}{l}} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \left(1 + \frac{k\pi h}{l}\right), \\ &-\sum_1^\infty \frac{k\pi}{l} F_k'(h) \cos \frac{k\pi x}{l} = \frac{2P}{l} \sum_1^\infty \frac{k\pi h}{l} e^{-\frac{k\pi h}{l}} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Из первого уравнения этой системы найдем:

$$A_k = 0.$$

Решая систему следующих трех уравнений, получим:

$$\left.\begin{aligned} B_k &= \frac{2P}{l} \sin \frac{k\pi \xi}{l} \left\{ \frac{\frac{k\pi h}{l}\left(1 + \frac{k\pi h}{l} \operatorname{cth} \frac{k\pi h}{l}\right)}{\left[\operatorname{sh}^2 \frac{k\pi h}{l} - \left(\frac{k\pi h}{l}\right)^2\right]} + \frac{e^{-\frac{k\pi h}{l}}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi h}{l}} \right\} \cdot \left(\frac{l}{k\pi}\right)^3, \\ C_k &= -B_k, \qquad D_k = \frac{2Ph^2 \sin \frac{k\pi \xi}{l}}{l\left[\operatorname{sh}^2 \frac{k\pi h}{l} - \left(\frac{k\pi h}{l}\right)^2\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Таким образом, для компенсирующих напряжений мы получим следующие выражения:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_x^{'} &= -\sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)-D_k\left(2\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{l},\\
Y_y^{'} &= -\sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}-\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)-D_k\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l},\\
X_y^{'} &= \sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}-\right.\\
&\left.-D_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\cos\frac{k\pi x}{l}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.10}
$$

где B_k и D_k определяются по формулам (2.9).

Напряжение в балке при изгибе сосредоточенной силой P, когда граничные условия имеют вид (2.1), определяется как результат вычитания напряжений (2.10) из напряжений (2.2). Для упрощения записи и вычислений, в формулах (2.2) сделаем следующие обозначения:

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}, \quad \varphi_2 = \frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}\frac{\pi y}{l},\\
\varphi_3 &= -\frac{\pi y}{l}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.11}
$$

Имея в виду эти обозначения, выражение для окончательных напряжений можно написать в виде:

$$
\begin{aligned}
X_x &= \frac{P}{2l}\left[\varphi_1(x+\xi, y) - \varphi_1(x-\xi, y) + \varphi_2(x+\xi, y) - \right.\\
&\left. - \psi_2(x-\xi, y)\right] + \sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right) - \right.\\
&\left. - D_k\left(2\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{l},\\
Y_y &= \frac{P}{2l}\left[\varphi_1(x+\xi, y) - \varphi_1(x-\xi, y) - \varphi_2(x+\xi, y) + \right.\\
&\left. \varphi_2(x-\xi, y)\right] + \sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right) + \right.\\
&\left. + D_k\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l},\\
X_y &= \frac{P}{2l}\left[\varphi_3(x+\xi, y) - \varphi_3(x-\xi, y) - \right.\\
&\left. - \sum_1^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[B_k\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - D_k\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} + \right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left. + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\cos\frac{k\pi y}{l}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Для функций φ_1, φ_2 и φ_3 составлены таблицы, которые приведены в конце работы. Пользуясь этими таблицами легко можно вычислить конечные части напряжений (2.12). Что касается вычисления рядов, входящих в формулы (2.12), то благодаря их очень быстрой сходимости достаточно взять два-три, а для достаточно высоких балок, лишь один член этих рядов.

Пример. Балка с пролетом l свободно оперта по концам. В точке верхней грани балки в середине ее пролета действует сосредоточенная поперечная сила P. Отношение высоты балки к ее пролету равно $\frac{1}{2}$. Построить графики изменения напряжений по высоте балки в сечениях $x=\frac{l}{2}$ и $x=0$.

Подставляя в формулы (2.12) $x=\frac{l}{2}$, $\xi=\frac{l}{2}$, получим:

$$
\left.
\begin{aligned}
X_x &= \frac{P}{2l}\left[\varphi_1(l,y)-\varphi_1(0,y)+\varphi_2(l,y)-\varphi_2(0,y)\right]+\\
&+\sum_1^{\infty}\left[B_k^*\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)-D_k^*\left(2\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}+\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\sin\frac{k\pi}{2},\\
Y_y &= \frac{P}{2l}\left[\varphi_1(l,y)-\varphi_1(0,y)-\varphi_2(l,y)+\varphi_2(0,y)\right]+\\
&+\sum_1^{\infty}\left[B_k^*\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}-\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)+D_k^*\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right]\sin\frac{k\pi}{2},\\
X_y &= 0,\\
\text{где}\quad B_k^* &= \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 B_k,\quad D_k^* = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 D_k,
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.12')
$$

а B_k и D_k определяются по формулам (2.9). Вычислим коэффициенты B_k^* и D_k^*:

$$B_{2k}^* = D_{2k}^* = 0,$$

$$B_1^* = 3{,}19353, \qquad D_1^* = 1{,}74462,$$

$$B_3^* = -0{,}017833, \qquad D_3^* = -0{,}013793,$$

$$B_5^* = 0{,}000084441, \qquad D_5^* = 0{,}74369\cdot10^{-4},$$

$$B_7^* = -0{,}83898\cdot10^{-16}, \qquad D_7^* = -0{,}76614\cdot10^{-16}.$$

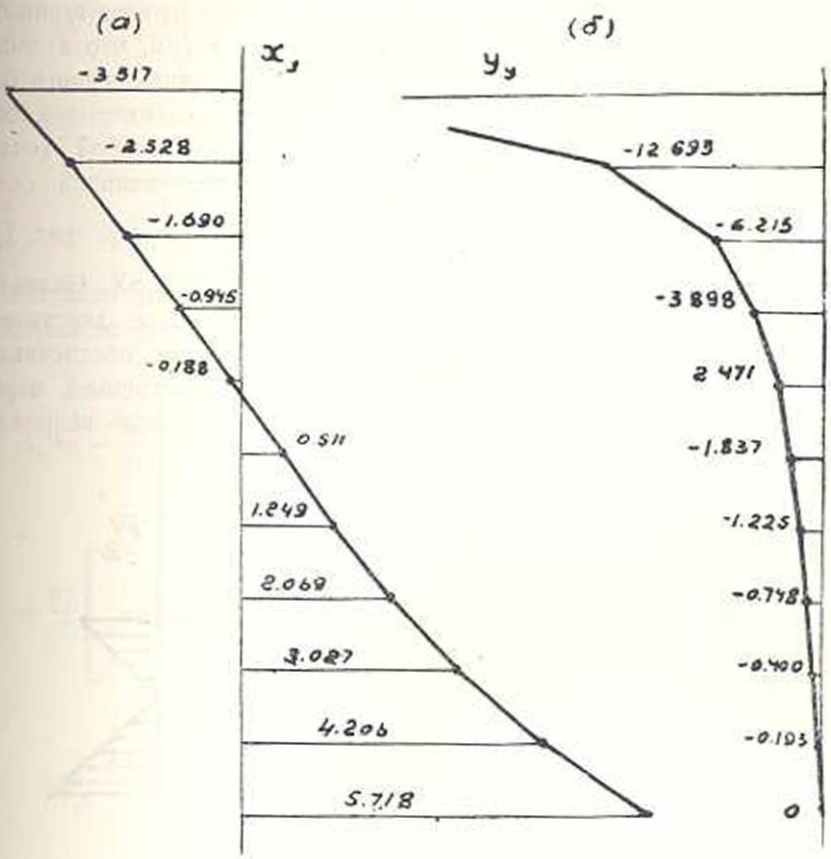
Имея значение коэффициентов B_k^* и D_k^* и пользуясь таблицами функций φ_1, φ_2 и φ_3, без особого труда можно найти значения напряжений в любой точке балки.

На фиг. 5 по вычисленным значениям напряжений X_x и Y_y в сечении $x=\frac{l}{2}$ балки построены графики изменения этих напряжений по высоте балки. При вычислении взяты лишь три члена рядов.

Вычислим теперь напряжения в опорном сечении. При $x=0$ из формул (2.12) имеем:

$$X_x = Y_y = 0,$$

$$X_y = \frac{P}{2l}\left[\varphi_3\left(\frac{l}{2},\ y\right)+\varphi_3\left(\frac{l}{2},\ y\right)\right]-$$



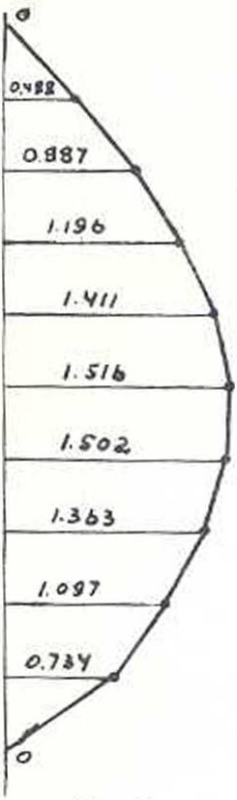
Фиг. 5.

$$-\sum_{1}^{\infty}\left[B_k^{*}\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi v}{l}-D_k^{*}\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)\right].$$

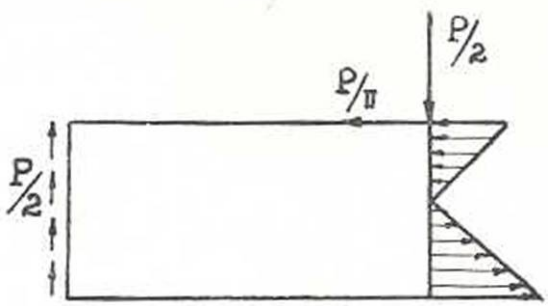
Результаты вычислений по этой формуле графически изображены на фиг. 6.

Таким образом, из решения этого примера видно, что распределение касательных напряжений в опорном сечении мало отличается от параболического закона. Из графика изменения нормальных напряжений X_x в сечении под сосредоточенной силой видно, что нормальное напряжение в этом сечении не следует линейному закону и в крайних волокнах балки напряжения меньше, чем следовало бы ожидать на основании элементарной теории изгиба балок. Более того, с первого взгляда может показаться, что в этом сечении нарушаются условия равновесия, а именно, момент нормальных напряжений X_x относительно центра сечения меньше момента опорной реакции относительно середины пролета, и алгебраическая сумма площадей

эпюры X_x не равна нулю. Если рассматривать левую часть балки, то главный вектор напряжений X_x равен $\sim 0{,}32\ P$ и направлен по положительной оси оX. Но дело в том, что в этом сечении находится особая точка напряженного состояния—точка приложения сосредоточенной силы. Напряжения, действующие в особой точке на левую часть, эквиваленты вертикальной силе $\frac{P}{2}$ и горизонтальной силе $\sim 0{,}32\ P$ (см. фиг. 7), направленной по отрицательной оси оX. Наличие горизонтальной сосредоточенной силы, действующей в точке верхней грани балки, обеспечивая равновесие, увеличивает плечо внутренней пары и тем самым уменьшает максимальные напряжения в сечении.



Фиг. 6.

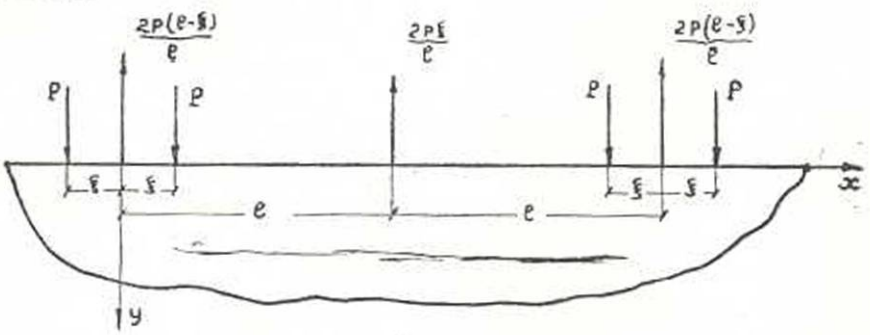


Фиг. 7.

Полученные в этом примере результаты хорошо согласуются с результатами, полученными Зеевальдом.

§ 2. Балка с заделанными концами.

1. Комбинируя решения (1.8), (1.9) и (1.10) можно найти решение для нагрузки, показанной на фиг. 8. Функция φ для такой нагрузки имеет вид:



Фиг. 8.

$$\psi_0 = -\frac{P}{2l}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}\right]-$$

$$-\frac{P}{l}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}-\frac{4P\xi}{l^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{l}-\cos\frac{2\pi x}{l}}. \qquad (2.13)$$

Подставляя это выражение в формулы (1.4), для напряжений получим следующие выражения:

$$X_x' = -\frac{P}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}+\right.$$

$$+\frac{\pi y}{l}\left[\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}+\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{P}{l^2}\left\{(l-\xi)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}+\xi\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}}+\right.$$

$$+\frac{\pi y}{l}\left[(l-\xi)\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}+\xi\frac{1+\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}\right]\Bigg\},$$

$$Y_y' = -\frac{P}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}-\right. \qquad (2.14)$$

$$-\frac{\pi y}{l}\left[\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}+\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{P}{l^2}\left\{(l-\xi)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}}+\xi\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}}-\right.$$

$$-\frac{\pi y}{l}\left[(l-\xi)\frac{1-\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}+\xi\frac{1+\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}\cos\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}\right]\Bigg\},$$

$$X_y'=-\frac{\pi P y}{2l^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi(x+\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+\xi)}{l}\right)^2}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi(x-\xi)}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-\xi)}{l}\right)^2}\right]+$$

$$+\frac{\pi P y}{l^3}\left[(l-\xi)\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}-\xi\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{l}\sin\frac{\pi x}{l}}{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}+\cos\frac{\pi x}{l}\right)^2}\right].$$

Найдем разложения этих напряжений. На основании результатов второго параграфа первой главы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
X_x'&=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi y}{l}}\left(1-\frac{k\pi y}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\cos\frac{k\pi x}{l},\\
Y_y'&=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi y}{l}}\left(1+\frac{k\pi y}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\cos\frac{k\pi x}{l},\\
X_y'&=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty\frac{k\pi y}{l}e^{-\frac{k\pi y}{l}}\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.15)$$

При $x=0$, $X_y'=0$, а

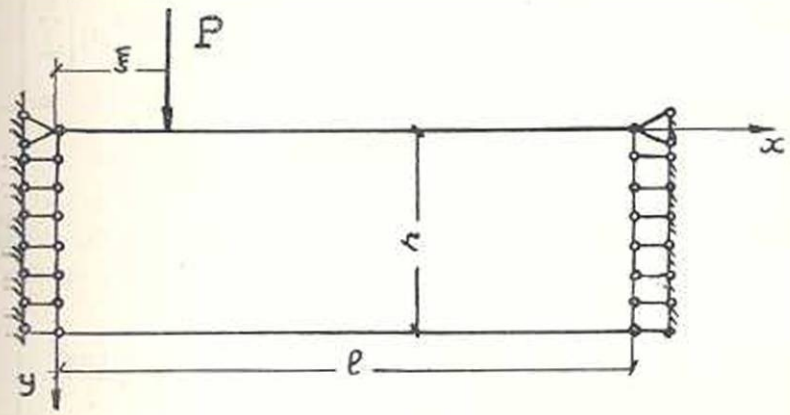
$$X_x'=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi y}{l}}\left(1-\frac{k\pi y}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right].\qquad(2.16)$$

При $x=l$, $X_y'=0$, а

$$X_x'=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty(-1)^k e^{-\frac{k\pi y}{l}}\left(1-\frac{k\pi y}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right].\qquad(2.16')$$

Таким образом, срезая полуплоскость по линиям $x=0$, $x=l$ и $y=h$, снимая при этом возникающие на линии $y=h$ напряжения, мы получим решение задачи изгиба балки сосредоточенной силой. Способ закрепления концов в рассматриваемой задаче показан на фиг. 9. Как видно из фигуры, в точках (0, 0) и (b, 0) предотвращены как верти-

кальные, так и горизонтальные перемещения*. В остальных точках опорных сечений отсутствуют горизонтальные, но возможны вертикальные перемещения.



Фиг. 9.

На линии y=h напряжения равны:

$$\left.\begin{aligned} Y_y' &= -\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi h}{l}}\left(1+\frac{k\pi h}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\cos\frac{k\pi x}{l},\\ X_y' &= -\frac{2P}{l}\sum_1^\infty\frac{k\pi h}{l}e^{-\frac{k\pi h}{l}}\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

Для компенсации этих напряжений используем решение Рибьера в тригонометрических рядах.

2. Напишем функцию напряжений в виде

$$\Phi=\sum_1^\infty F_k(y)\cos\frac{k\pi x}{l}, \quad (2.18)$$

где $F_k(y)$ имеет вид (22). Напряжения при этом будут выражаться формулами:

$$\left.\begin{aligned} X_x' &= \sum_1^\infty F_k''(y)\cos\frac{k\pi x}{l},\\ Y_y' &= -\sum_1^\infty\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(y)\cos\frac{k\pi x}{l},\\ X_y' &= \sum_1^\infty\frac{k\pi}{l}F_k'(y)\sin\frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

* Вместо этих точек возможно закреплять любые другие точки опорных сечений, но тогда, конечно, всего системы сил, показанных на фиг. 8, нужно брать другую систему.

Граничные условия напишутся в виде:

$$\sum_1^\infty \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(0)\cos\frac{k\pi x}{l}=0,$$

$$\sum_1^\infty \frac{k\pi}{l} F_k'(0)\sin\frac{k\pi x}{l}=0,$$

$$\sum_1^\infty \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 F_k(h)\cos\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty e^{-\frac{k\pi h}{l}}\left(1+\frac{k\pi h}{l}\right)\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\cos\frac{k\pi x}{l}, \qquad (2.20)$$

$$\sum_1^\infty \frac{k\pi}{l}F_k'(h)\sin\frac{k\pi x}{l}=$$

$$=-\frac{2P}{l}\sum_1^\infty \frac{k\pi h}{l}e^{-\frac{k\pi h}{l}}\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right]\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$A_k=0.$$

Решая систему остальных трех уравнений, имеем:

$$B_k=\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\frac{2P}{l}\left\{\frac{\frac{k\pi h}{l}+\left(\frac{k\pi h}{l}\right)^2\operatorname{cth}\frac{k\pi h}{l}}{\operatorname{sh}^2\frac{k\pi h}{l}-\left(\frac{k\pi h}{l}\right)^2}-+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{e^{\frac{2k\pi h}{l}}-1}\right\}\left[\cos\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}\right], \qquad (2.21)$$

$$C_k=-B_k,\quad D_k=\frac{2Ph^2}{l}\,\frac{\cos\frac{k\pi\xi}{l}\,\frac{l-\xi}{l}-(-1)^k\frac{\xi}{l}}{\operatorname{sh}^2\frac{k\pi h}{l}-\left(\frac{k\pi h}{l}\right)^2}.$$

Компенсирующие напряжения будут выражаться формулами:

$$X_x''=-\sum_1^\infty\left[B_k^*\left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}\right)-D_k^*\left(2\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l}+\frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l}\right)\right]\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$y''_y = -\sum_1^\infty \left[B^*_k \left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} \right) + D^*_k \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} \right] \cos\frac{k\pi x}{l},$$

$$X''_y = -\sum_1^\infty \left[B^*_k \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - D^*_k \left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} \right) \right] \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $$B^*_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 B_k, \quad D^*_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 D_k.$$

Применяя обозначения (2.11), выражения для окончательных напряжений можно написать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= -\frac{P}{2l}[\varphi_1(x+\xi, y)+\varphi_1(x-\xi, y)+\varphi_2(x+\xi, y)+\varphi_2(x-\xi, y)]+\\
&+\frac{P}{l^2}\left\{(l-\xi)[\varphi_1(x, y)+\varphi_2(x, y)]+\xi[\varphi_1(l-x, y)+\varphi_2(l-x, y)]\right\}+\\
&+\sum_1^\infty \left[B^*_k \left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} \right) - D^*_k \left(2\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} + \right.\right.\\
&\left.\left. + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} \right) \right] \cos\frac{k\pi x}{l},\\
Y_y &= -\frac{P}{2l}[\varphi_1(x+\xi, y)+\varphi_1(x-\xi, y)-\varphi_2(x+\xi, y)-\varphi_2(x-\xi, y)]+\\
&+\frac{P}{l^2}[(l-\xi)[\varphi_1(x, y)-\varphi_2(x, y)]+\xi[\varphi_1(l-x, y)-\varphi_2(l-x, y)]]+\\
&+\sum_1^\infty \left[B^*_k \left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} \right) + D^*_k \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} \right] \cos\frac{k\pi x}{l},\\
X_y &= -\frac{P}{2l}[\varphi_3(x+\xi, y)+\varphi_3(x-\xi, l)]+\frac{P}{l^2}[(l-\xi)\varphi_3(x, y)-\xi\varphi_3(l-x, y)]+\\
&+\sum_1^\infty \left[B^*_k \frac{k\pi y}{l}\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} - D^*_k \left(\operatorname{sh}\frac{k\pi y}{l} + \frac{k\pi y}{l}\operatorname{ch}\frac{k\pi y}{l} \right) \right] \sin\frac{k\pi x}{l}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

При пользовании таблицами функций φ_1, φ_2 и φ_3 напряжения (2.22) вычисляются так же легко, как и напряжения (2.12).

Таблица функций φ_1, φ_2 и φ_3

$\frac{x}{l}=0$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0	∞	$-\infty$	0
0,05	12,76133	—12,70874	0
0,10	6,41930	—6,31477	0
0,15	4,32217	—4,16621	0
0,20	3,28715	—3,08045	0
0,25	2,67604	—2,41952	0
0,30	2,27686	—1,97172	0
0,35	1,99646	—1,64622	0
0,40	1,79571	—1,39766	0
0,45	1,64281	—1,20088	0
0,50	1,52487	—1,04083	0
0,55	1,43214	—0,90789	0
0,60	1,35804	—0,79569	0
0,65	1,29822	—0,69980	0
0,70	1,24945	—0,61704	0
0,75	1,20941	—0,54507	0
0,80	1,17628	—0,48210	0
0,85	1,14876	—0,42677	0
0,90	1,12577	—0,37797	0
0,95	1,10652	—0,33482	0
1,0	1,09033	—0,29660	0

$\frac{x}{l}=0{,}1$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	0
0,05	2,57308	1,55420	2,03744
0,10	3,23599	0,05225	3,18321
0,15	2,01685	—1,05212	2,71098
0,20	2,65106	—1,42492	2,03536
0,25	2,32545	—1,46217	1,51091
0,30	2,03071	—1,33390	1,10586
0,35	1,86215	—1,25447	0,88264
0,40	0,70301	—1,12714	0,69757
0,45	1,57724	—1,00674	0,56194
0,50	1,47697	—0,89702	0,46013
0,55	1,39624	—0,79852	0,38190
0,60	1,33055	—0,71065	0,32054
0,65	1,27681	—0,63242	0,27156
0,70	1,23253	—0,56279	0,23182
0,75	1,19587	—0,50083	0,19918
0,80	1,16534	—0,44558	0,17200
0,85	1,13984	—0,39633	0,14916
0,90	1,11846	—0,35237	0,12976
0,95	1,10047	—0,31315	0,11329
1,0	1,08532	—0,20488	0,07294

$\frac{x}{l}=0{,}2$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	0
0,05	0,77566	0,68753	0,35218
0,10	1,32658	0,81711	1,01757
0,15	1,60763	0,50693	1,46431

$\frac{x}{l}=0{,}3$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	0
0,05	0,37150	0,35287	0,11119
0,10	0,69130	0,56380	0,35030
0,15	0,93062	0,59038	0,67536

$\frac{x}{l}=0,2$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,20	1,69759	0,10465	1,58742
0,25	1,68478	—0,21159	1,50852
0,30	1,62684	—0,41216	1,34717
0,35	1,55418	—0,52072	1,16947
0,40	1,48109	—0,56724	1,00358
0,45	1,41349	—0,57499	0,85845
0,50	1,35357	—0,55970	0,73507
0,55	1,30152	—0,53137	0,63121
0,60	1,25672	—0,49632	0,54391
0,65	1,21847	—0,45838	0,47041
0,70	1,18559	—0,41968	0,40801
0,75	1,15824	—0,38235	0,35538
0,80	1,13479	—0,34651	0,31018
0,85	1,11473	—0,31294	0,27143
0,90	1,09775	—0,28157	0,23781
0,95	1,08330	—0,25275	0,20878
1,00	1,07102	—0,22637	0,18341

$\frac{x}{l}=0,3$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,20	1,08811	0,48375	0,89762
0,25	1,17893	0,32031	1,01664
0,30	1,19484	0,14911	1,00020
0,35	1,21314	0,01782	0,98147
0,40	1,23122	—0,08495	0,95454
0,45	1,21675	—0,15654	0,87554
0,50	1,19772	—0,20204	0,79218
0,55	1,17767	—0,22802	0,71175
0,60	1,15675	—0,23887	0,63426
0,65	1,13753	—0,23990	0,56429
0,70	1,11992	—0,23404	0,50108
0,75	1,10412	—0,22371	0,44452
0,80	1,09008	—0,21062	0,39401
0,85	1,07776	—0,19605	0,34911
0,90	1,06698	—0,18085	0,30922
0,95	1,05760	—0,16564	0,27382
1,00	1,04949	—0,15083	0,24240

$\frac{x}{l}=0,4$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	0
0,05	0,224[illegible]	0,21820	0,04763
0,10	0,43114	0,38683	0,17389
0,15	0,60798	0,47814	0,33886
0,20	0,74917	0,49262	0,50022
0,25	0,85523	0,44978	0,62907
0,30	0,93101	0,37469	0,71385
0,35	0,98234	0,28854	0,75593

$\frac{x}{l}=0,5$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0	0	0
0,05	0,15580	0,15327	0,02417
0,10	0,30422	0,28509	0,09105
0,15	0,43920	0,38033	0,18675
0,20	0,55689	0,43346	0,29068
0,25	0,65580	0,44763	0,38884
0,30	0,73636	0,43144	0,46956
0,35	0,80034	0,39524	0,52762

$\frac{x}{l}=0.4$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,40	1,01536	0,20534	0,76314
0,45	1,03510	0,13253	0,74499
0,50	1,04596	0,07290	0,71021
0,55	1,05067	0,02642	0,66554
0,60	1,05137	−0,00826	0,61594
0,65	1,04966	−0,03304	0,56485
0,70	1,04655	−0,04984	0,51443
0,75	1,04273	−0,06062	0,46604
0,80	1,03861	−0,06633	0,42047
0,85	1,03451	−0,06873	0,37817
0,90	1,03058	−0,06862	0,33913
0,95	1,02691	−0,06686	0,30347
1,00	1,02356	−0,06372	0,27105

$\frac{x}{l}=0.5$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,40	0,85013	0,34828	0,56281
0,45	0,88828	0,29823	0,57677
0,50	0,91715	0,24949	0,57416
0,55	0,93881	0,20501	0,55878
0,60	0,95493	0,16608	0,53431
0,65	0,96688	0,13302	0,50392
0,70	0,97570	0,10557	0,47011
0,75	0,98220	0,08317	0,43479
0,80	0,98696	0,06511	0,39923
0,85	0,99045	4,05070	0,36446
0,90	0,99302	0,03931	0,33108
0,95	0,99490	0,03037	0,29951
1,00	0,99628	0,02338	0,27001

$\frac{x}{l}=0.6$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0	0	0
0,05	0,11937	0,11811	0,01350
0,10	0,23503	0,22536	0,05168
0,15	0,34377	0,31316	0,10834
0,20	0,44315	0,37660	0,17502
0,25	0,53175	0,41476	0,24313
0,30	0,60903	0,42992	0,30517
0,35	0,67525	0,42635	0,35718
0,40	0,73118	0,40898	0,39574
0,45	0,77787	0,38257	0,42065
0,50	0,81659	0,35113	0,43287
0,55	0,84852	0,31769	0,43408
0,60	0,87471	0,28440	0,42633
0,65	0,89619	0,25264	0,41173
0,70	0,91382	0,22322	0,39220
0,75	0,92830	0,19682	0,36937
0,80	0,94019	0,17252	0,34456

$\frac{x}{l}=0.7$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0	0	0
0,05	0,09857	0,09785	0,00783
0,10	0,19503	0,18945	0,03027
0,15	0,28743	0,26979	0,06442
0,20	0,37420	0,33423	0,10616
0,25	0,45423	0,38195	0,15092
0,30	0,52163	0,40458	0,19063
0,35	0,58654	0,42038	0,22942
0,40	0,64922	0,43000	0,26540
0,45	0,69945	0,42155	0,28932
0,50	0,74308	0,40533	0,30493
0,55	0,78097	0,38393	0,31281
0,60	0,81308	0,35882	0,31337
0,65	0,84075	0,33221	0,30826
0,70	0,86437	0,30513	0,29850
0,75	0,88452	0,27846	0,28527
0,80	0,90166	0,25278	0,26957

$\frac{x}{l}=0{,}6$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,85	0,95001	0,15125	0,31888
0,90	0,95811	0,13251	0,29312
0,95	0,96483	0,11604	0,26789
1,00	0,97040	0,10163	0,24362

$\frac{x}{l}=0{,}7$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,85	0,91625	0,22847	0,25232
0,90	0,92866	0,20577	0,23425
0,95	0,93922	0,18476	0,21595
1,00	0,94819	0,16547	0,19786

$\frac{x}{l}=0{,}8$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0,	0	0
0,05	0,08660	0,08613	0,00439
0,10	0,17181	0,16815	0,01707
0,15	0,25434	0,24241	0,03665
0,20	0,33308	0,30609	0,06111
0,25	0,40713	0,35742	0,08809
0,30	0,47588	0,39565	0,11527
0,35	0,53894	0,42105	0,14062
0,40	0,59618	0,43461	0,16261
0,45	0,64763	0,43777	0,18021
0,50	0,69354	0,43228	0,19299
0,55	0,73423	0,41989	0,20089
0,60	0,77003	0,40232	0,20421
0,65	0,80140	0,38106	0,20349
0,70	0,82878	0,35757	0,19946
0,75	0,85260	0,33252	0,19257
0,80	0,87325	0,30716	0,18371
0,85	0,89112	0,28201	0,17341
0,90	0,90654	0,25755	0,16218
0,95	0,91984	0,23415	0,15049
1,00	0,93128	0,21242	0,13868

$\frac{x}{l}=0{,}9$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0	0	0
0,05	0,08033	0,07998	0,00199
0,10	0,15962	0,31353	0,01548
0,15	0,23684	0,22768	0,01671
0,20	0,31112	0,29020	0,02803
0,25	0,38172	0,34272	0,04071
0,30	0,44640	0,38144	0,05333
0,35	0,50971	0,41461	0,06613
0,40	0,56647	0,43408	0,07718
0,45	0,61823	0,44359	0,08634
0,50	0,66507	0,44426	0,09330
0,55	0,70717	0,43749	0,09797
0,60	0,74471	0,42461	0,10041
0,65	0,77802	0,40709	0,10083
0,70	0,80743	0,38614	0,09949
0,75	0,83330	0,36290	0,09671
0,80	0,85594	0,33832	0,09279
0,85	0,87570	0,31319	0,08804
0,90	0,89289	0,28815	0,08272
0,95	0,90781	0,26366	0,07706
1,00	0,92073	0,24012	0,07127

$$\frac{x}{l}=1{,}0$$

$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3	$\frac{y}{l}$	φ_1	φ_2	φ_3
0,0	0	0	0	0,55	0,69830	0,44210	0
0,05	0,07838	0,07806	0	0,60	0,73636	0,43144	0
0,10	0,15580	0,15327	0	0,65	0,77028	0,41521	0
0,15	0,23136	0,22301	0	0,70	0,80033	0,39524	0
0,20	0,30422	0,28509	0	0,75	0,82685	0,37206	0
0,25	0,37368	0,33786	0	0,80	0,85013	0,34843	0
0,30	0,43920	0,38047	0	0,85	0,87051	0,32340	0
0,35	0,50036	0,41214	0	0,90	0,88828	0,29823	0
0,40	0,55690	0,43346	0	0,95	0,90374	0,27346	0
0,45	0,60870	0,44495	0	1,00	0,91715	0,24949	0
0,50	0,65579	0,44763	0				

Ленинградский политехнический
институт им. М. И. Калинина

Поступило 31 VIII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голушкевич С. С.* О равновесии тонких плит. Труды Высшего инженерно-строительного училища В. М. Ф., вып. II, Л., 1942.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.—Л., 1949.

Ռ. Հ. Մանուկյան

ԲԱՐՁՐ ՀԵԹԱՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ՝ ՆՐԱՆՑ ՎԵՐԻՆ ՆԻՍՏԻ ԿԵՏԵՐՈՒՄ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑԱԾ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է ազատ հենված և ծայրերն ամրացված բարձր հեծանների (հեծաններ—պատեր) հավասարակշռության խնդրի լուծումը նրանց վերին նիստի կետերում կիրառված կենտրոնացած ուժերի ազդման դեպքում։ Բոլոր լուծումներն արտահայտված են երկու գումարելիների գումարի տեսքով, որոնցից առաջինն արտահայտված է վերջավոր տեսքով և պարունակում է լարվածային վիճակի բոլոր առանձնահատկությունները։ Երկրորդ գումարելին արտահայտված է Ֆուրյեի շատ արագ զուգամիտող շարքով։ Հաշվումների դյուրության համար կազմված են որոշ ֆունկցիաների աղյուսակներ, որոնց օգնությամբ առանց մեծ դժվարության կարելի է հաշվել ստացված լուծումների վերջավոր մասերը։ Ստացված լուծումների կիրառման իլյուստրացիայի համար բերված է կոնկրետ թվական օրինակ։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 1, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. Манукян

Напряженное состояние в сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести бетона

В работе исследуется напряженное состояние центрально-сжатого железобетонного элемента с учетом ползучести бетона, когда между напряжениями и деформациями ползучести существует нелинейная связь.

Кроме этого, принимается, что бетон обладает свойством изменяемости во времени модуля мгновенной деформации.

Общее решение этой задачи по линейной теории ползучести с учетом старения бетона дано Н. Х. Арутюняном [1], а в случае нелинейной связи между напряжениями и деформациями ползучести без учета старения бетона—П. И. Васильевым [2].

Ниже, при решении задачи, будем исходить из нелинейной теории ползучести бетона, предложенной Н. Х. Арутюняном.

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим железобетонный элемент, находящийся под действием постоянной центральной сжимающей силы N, приложенной в возрасте бетона $t = \tau_1$. Допустим, что этот элемент армирован продольными стержнями и поперечными хомутами. Будем отсчитывать время от начала бетонировки данного элемента. Влияния усадки не будем учитывать.

Напряжение в бетоне рассматриваемого элемента в некоторый момент времени t с учетом ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации обозначим через $\sigma_б(t)$. Ползучестью железа будем пренебрегать ввиду ее незначительности по сравнению с ползучестью бетона. Напряжение в арматуре обозначим через $\sigma_а(t)$.

Эти напряжения при любом t должны удовлетворять уравнению равновесия:

$$\sigma_а(t) F_а + \sigma_б(t) F_б = N. \qquad (1.1)$$

где $F_а$ и $F_б$ — соответственно площади поперечного сечения арматуры и бетона.

Полная продольная деформация бетона $\varepsilon_б(t)$ с учетом его ползучести, согласно [1], будет:

$$\varepsilon_б(t) = \frac{\sigma_б(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t,\tau)}{\partial \tau} d\tau, \qquad (1.2$$

где $\frac{1}{E(t)}$ — упруго-мгновенная деформация, а $C(t, \tau)$ — деформация ползучести к моменту времени t. Очевидно, что $C(t, t) = 0$. $f[\sigma_б(\tau)]$ — некоторая определенная из опыта функция от $\sigma_б(\tau)$, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести для данного бетона.

Из условия совместной работы арматуры и бетона имеет место равенство их относительных продольных деформаций:

$$\varepsilon_б(t) = \varepsilon_а(t). \tag{1.3}$$

С другой стороны, имеем:

$$\varepsilon_а(t) = \frac{\sigma_а(t)}{E_а}, \tag{1.4}$$

где $E_а$ — модуль деформации арматуры.

Из соотношения (1.2), пользуясь равенствами (1.3) и (1.4), находим:

$$\frac{\sigma_а(t)}{E_а} = \frac{\sigma_б(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(t)}\right] d\tau - \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \partial\tau. \tag{1.5}$$

Подставляя значение $\sigma_а(t)$ из (1.1) в (1.5) и сделав некоторые преобразования, получим:

$$\sigma_б(t) = \frac{N}{F_б[1+\mu m(t)]} + \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} \sigma_б(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] \frac{d\tau}{1+\mu m(t)} +$$

$$+ \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} f[\sigma_б(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1+\mu m(t)}, \tag{1.6}$$

где $\mu = \frac{E_а}{E_б}$ — процент армирования, $m(t) = \frac{E_а}{E(t)}$ — модульное отношение в данный момент времени, $E(\tau_1)$ — значение модуля мгновенной деформации бетона в момент $t = \tau_1$.

Пользуясь зависимостями (1.1) и (1.6), получим следующее уравнение для определения напряжения в арматуре $\sigma_а(t)$ как функцию времени t:

$$\sigma_б(t) = \frac{N m(\tau_1)}{F_б[1+\mu m(t)]} + \mu E_а \int_{\tau_1}^{t} \sigma_а(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right] \frac{d\tau}{1+\mu m(t)} -$$

$$- E_а \int_{\tau_1}^{t} f\left[\frac{N - \sigma_а(\tau) F_а}{F_б}\right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{1+\mu m(t)}. \tag{1.7}$$

Таким образом, задача определения нормальных напряжений в арматуре $\sigma_a(t)$ и бетоне $\sigma_б(t)$ в центрально-сжатых железобетонных элементах с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона сводится к решению интегральных уравнений (1.6) и (1.7).

§ 2. *Приведение интегральных уравнений (1.6) и (1.7) к дифференциальным уравнениям.* Закон изменения меры ползучести $C(t,\tau)$ бетона можно принять в виде [1]:

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)\left[1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right], \tag{2.1}$$

где $\varphi(\tau)$ — некоторая функция только возраста материала τ, определяемая из опыта и характеризующая процесс старения данного бетона, а γ — некоторая постоянная. Такое выражение меры ползучести для бетона дает достаточно близкое совпадение с экспериментальными кривыми ползучести бетона как в старом, так и в молодом его возрасте, а также отражает основные свойства явления ползучести бетона во времени, именно — его старение и наследственность.

Подставляя значение $C(t,\tau)$ из (2.1) в (1.6), получим:

$$\sigma_б(t)=\frac{N}{F_б[1+\mu m(t)]}+\mu E_a\int_{\tau_1}^{t}\sigma_б(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]\frac{\partial\tau}{1+\mu m(t)}+$$

$$+\mu E_a\int_{\tau_1}^{t}f[\sigma_б(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\varphi(\tau)\left(1-e^{-\gamma(t-\tau)}\right)\right]\frac{\partial\tau}{1+\mu m(t)}. \tag{2.2}$$

Помножив уравнение (2.2) на $1+\mu m(t)$ и продифференцировав по t, получим:

$$\sigma_б'(t)[1+\mu m(t)]'=\mu E_a\gamma\int_{\tau_1}^{t}f[\sigma_б(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\varphi(\tau)e^{-\gamma(t-\tau)}\right]d\tau-\mu E_a\gamma f[\sigma_б(t)]\varphi(t). \tag{2.3}$$

Отсюда, определяя значение интеграла

$$\int_{\tau_1}^{t}f[\sigma_б(\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\varphi(\tau)\,e^{-\gamma(t-\tau)}\right]d\tau$$

и подставляя в исходное уравнение (2.2), находим:

$$\sigma_б(t)[1+\mu m(t)]=\frac{N}{F_б}+\mu E_a\int_{\tau_1}^{t}\sigma_б(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}\right]d\tau+\mu E_a\int_{\tau_1}^{t}f[\sigma_б(\tau)]\varphi(\tau)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\gamma}\sigma_б'(t)[1+\mu m(t)]-\mu E_a f[\sigma_б(t)]\varphi(t). \tag{2.4}$$

Дифференцируя выражение (2.4) еще раз по t, после некоторых преобразований приведем окончательно к следующему виду:

$$\sigma_б''(t)+\left[\gamma+\frac{\mu m'(t)}{1+\mu m(t)}\right]\sigma_б'(t)+\frac{\mu E_a\gamma}{1+\mu m(t)}f'[\sigma_б(t)]\varphi(t)=0. \qquad (2.5)$$

Аналогичным образом для $\sigma_a(t)$ получим следующее уравнение:

$$\sigma_a''(t)+\left[\gamma+\frac{\mu m'(t)}{1+\mu m(t)}\right]\sigma_a'(t)-\frac{E_a\gamma\varphi(t)}{1+\mu m(t)}f'\left[\frac{N-\sigma_a(t)F_a}{F_б}\right]. \qquad (2.6)$$

Таким образом, решение исходных интегральных уравнений (1.6) и (1.7) сводится к решению дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6). Заметим, что согласно (2.2) и (2.3) для $\sigma_б(t)$ имеют место следующие начальные условия:

$$\sigma_б(\tau_1)=\frac{N}{F_б[1+\mu m(\tau_1)]},\quad \sigma_б'(\tau_1)=-\frac{\mu E_a\gamma}{1+\mu m(\tau_1)}f[\sigma_б(\tau_1)]\varphi(\tau_1). \qquad (2.7)$$

Аналогичные условия получим и для $\sigma_a(t)$

$$\sigma_a(\tau_1)=\frac{N\,m(\tau_1)}{F_б[1+\mu m(\tau_1)]},\quad \sigma_a'(\tau_1)=\frac{E_a\gamma}{1+\mu m(\tau_1)}f\left[\frac{N-\sigma_a(\tau_1)F_a}{F_б}\right]. \qquad (2.8)$$

Положим, что $f(\sigma)$ является степенной функцией вида:

$$f(\sigma)=\sigma+\beta\sigma^2 \qquad (2.9)$$

и характерна тем, что обладает слабой нелинейностью, т. е. параметр β является малым.

Тогда будем иметь:

$$f[\sigma_б(\tau)]=\sigma_б(\tau)+\beta\sigma_б^2(\tau),$$

$$f\left[\frac{N-\sigma_a(\tau)F_a}{F_б}\right]=\frac{N-\sigma_a(\tau)F_a}{F_б}+\beta\left[\frac{N-\sigma_a(\tau)F_a}{F_б}\right]^2. \qquad (2.10)$$

Подставляя значения $f[\sigma_б(\tau)]$ и $f\left[\frac{N-\sigma_a(\tau)F_a}{F_б}\right]$ из (2.10) в (2.5) и (2.6), получим:

$$\sigma_б''(t)+\left\{\gamma\left[1+\frac{\mu E_a\varphi(t)}{1+\mu m(t)}\right]+\frac{\mu m'(t)}{1+\mu m(t)}\right\}\sigma_б'(t)+$$

$$+2\beta\frac{\mu E_a\gamma\varphi(t)}{1+\mu m(t)}\sigma_б(t)\sigma_б'(t)=0. \qquad (2.11)$$

$$\sigma_a''(t)+\left\{\gamma\left[1+\frac{\mu E_a\varphi(t)}{1+\mu m(t)}\right]+2\beta\frac{\mu E_a\gamma N\varphi(t)}{F_б[1+\mu m(t)]}\right\}\sigma_a'(t)-$$

$$-2\beta\frac{\mu^2E_a\gamma\varphi(t)}{1+\mu m(t)}\sigma_a(t)\sigma_a'(t)=0. \qquad (2.12)$$

Таким образом, задача определения нормальных напряжений в арматуре $\sigma_a(t)$ и бетоне $\sigma_б(t)$ в центрально-сжатых железобетонных

элементах с учетом нелинейной ползучести и изменяемости модуля мгновенной деформации бетона сводится к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами вида (2.11) и (2.12).

Положим, что модуль мгновенной деформации бетона $E(t)$ изменяется во времени незначительно и практически его можно считать постоянным, т. е. $E=E_0$; тогда уравнения (2.11) и (2.12) примут вид:

$$\sigma_б''(t)+\gamma\left[1+\frac{\mu E_a}{1+\mu m_0}\varphi(t)\right]\sigma_б'(t)+2\beta\frac{\mu E_a\gamma\varphi(t)}{1+\mu m_0}\sigma_б(t)\sigma_б'(t)=0, \quad (2.13)$$

$$\sigma_a''(t)+\left\{\gamma\left[1+\frac{\mu E_a}{1+\mu m_0}\varphi(t)\right]+2\beta\frac{\mu E_a\gamma}{F_б(1+\mu m_0)}\varphi(t)\right\}\sigma_a'(t)-$$

$$-2\beta\frac{\mu E_a\gamma\varphi(t)}{1+\mu m_0}\sigma_a(t)\sigma_a'(t)=0, \quad (2.14)$$

где $m_0=E_a/E_0$ — постоянная величина.

Уравнения (2.13) и (2.14) определяют нормальные напряжения в арматуре и бетоне в центрально-сжатых железобетонных элементах с учетом только ползучести бетона.

Исследования показывают [1], что для $\varphi(\tau)$ можно принять следующее выражение:

$$\varphi(\tau)=C_0+\frac{A_1}{\tau}, \quad (2.15)$$

где C_0 — предельное значение меры ползучести для данного бетона, A_1 — некоторый параметр, зависящий от свойства и условия старения данного бетона

Если в уравнениях (2.13) и (2.14) заменить функцию $\varphi(t)$ ее предельным значением $\varphi(\infty)=C_0$, то полученные уравнения будут характеризовать состояние ползучести для старого или стареющего бетона. В этом случае уравнения (2.13) и (2.14) примут вид:

$$\sigma_б''(t)+\gamma(1+A)\sigma_б'(t)+2A\beta\gamma\sigma_б(t)\sigma_б'(t)=0, \quad (2.16)$$

$$\sigma_a''(t)+\left[\gamma(1+A)+\frac{2A\beta\gamma N}{F_б}\right]\sigma_a'(t)-2A\beta\mu\gamma\sigma_a(t)\sigma_a'(t)=0, \quad (2.17)$$

где

$$A=\frac{\mu E_a C_0}{1+\mu m_0}.$$

§ 3. *Интегрирование уравнений (2.16) и (2.17).* Интегрируя уравнение (2.16) один раз и принимая во внимание начальные условия (2.7), получим:

$$\sigma_б'(t)+\gamma(1+A)\sigma_б(t)+A\beta\sigma_б^2(t)=\gamma\sigma_б(\tau_1). \quad (3.1)$$

Интегрируя это уравнение еще раз и сделав некоторые преобразования, получим:

$$\sigma_б(t) = y_1 \frac{1-\alpha_1 e^{-A\beta\gamma(y_1-y_2)(t-\tau_1)}}{1-\alpha_2 e^{-A\beta\gamma(y_1-y_2)(t-\tau_1)}}, \tag{3.2}$$

где

$$y_1 = \frac{-(A+1)+\sqrt{(A+1)^2+4A\beta\sigma_б(\tau_1)}}{2A\beta}, \tag{3.3}$$

$$y_2 = \frac{-(A+1)-\sqrt{(A+1)^2+4A\beta\sigma_б(\tau_1)}}{2A\beta}, \tag{3.4}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_б(\tau_1)-y_1}{\sigma_б(\tau_1)-y_2}, \quad \alpha_1 = \frac{y_2}{y_1}\alpha_2. \tag{3.5}$$

Аналогично получим решение уравнения (2.17)

$$\sigma_a(t) = z_1 \frac{1-a_1 e^{A\beta\gamma\mu(z_1-z_2)(t-\tau_1)}}{1-a_2 e^{A\beta\gamma\mu(z_1-z_2)(t-\tau_1)}}, \tag{3.6}$$

где

$$z_1 = \frac{A+1+2A\beta\frac{N}{F_б}+\sqrt{(A+1)^2+\frac{4A\beta}{m(\tau_1)}\sigma_a(\tau_1)}}{2A\beta\mu}, \tag{3.7}$$

$$z_2 = \frac{A+1+2A\beta\frac{N}{F_б}-\sqrt{(A+1)^2+\frac{4A\beta}{m(\tau_1)}\sigma_a(\tau_1)}}{2A\beta\mu}, \tag{3.7}$$

$$a_2 = \frac{\sigma_a(\tau_1)-z_1}{\sigma_a(\tau_1)-z_2}, \quad a_1 = \frac{z_2}{z_1}a_2. \tag{3.8}$$

Выражения (3.2) и (3.6) определяют закон изменения напряжений в бетоне и арматуре в сжатых железобетонных элементах с учетом ползучести бетона. Так как $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, то $A\beta\gamma(y_1 - y_2) > 0$; кроме того, из (3.5) следует, что $0 < \alpha_2 < 1$ и $\alpha_1 < 0$. Отсюда непосредственно следует, что напряжение $\sigma_б(t)$ с течением времени монотонно убывает по (модулю), стремясь к y_1 (когда $t = \infty$, $\sigma_б(t) = y_1$). Аналогично получим, что напряжение $\sigma_a(t)$ с течением времени монотонно возрастает (по модулю), стремясь к z_1 (когда $t = \infty$, $\sigma_a(t) = z_1$).

Ниже приводятся некоторые числовые данные (см. таблицы 1—6), которые характеризуют закон изменения нормальных напряжений в бетоне и арматуре в центрально-сжатых железобетонных элементах в зависимости от возраста бетона τ_1, интенсивности меры его ползучести $C(t, \tau)$, процента армирования и меры нелинейности β. Меры ползучести бетона приняты следующие:

$$C_0 = 0{,}9 \cdot 10^{-5}; \quad \gamma = 0{,}026;$$

$$E_a = 2 \cdot 10^6 кг/см^2; \quad m_0 = 10.$$

Из этих таблиц видно, что: 1) начальные напряжения в бетоне $\sigma_б(\tau_1)$ с течением времени быстро затухают, а в арматуре $\sigma_a(\tau_1)$ быстро возрастают, причем величина затухания $\sigma_б(\tau)$ доходит до 30—35%.

Таблица 1

$\tau_1=28$ дней; $\sigma_б(\tau_1)=40$ *кг/см²*; $\beta=0{,}001$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
28 дней	$\sigma_б(t)$	40	40	40	40	40
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	1	1	1	1	1
1,5 мес.	$\sigma_б(t)$	37,655	36,691	35,816	30,050	34,600
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,941	0,917	0,895	0,876	0,865
3 мес.	$\sigma_б(t)$	34,317	33,241	31,683	30,361	29,174
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,857	0,831	0,792	0,759	0,729
6 мес.	$\sigma_б(t)$	34,271	32,242	30,586	29,217	28,044
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,856	0,806	0,764	0,730	0,701
1 год	$\sigma_б(t)$	34,230	32,202	30,550	29,184	28,017
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,855	0,805	0,763	0,729	0,700
∞	$\sigma_б(t)$	34,230	32,202	30,550	29,184	28,017
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,855	0,805	0,763	0,729	0,700

Таблица 2

$\tau_1=28$ дней; $\sigma_б(\tau_1)=40$*кг/см²*; $\beta=0{,}01$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
28 дней	$\sigma_б(t)$	40	40	40	40	40
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	1	1	1	1	1
1,5 мес.	$\sigma_б(t)$	32,857	30,644	28,882	27,012	26,258
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,821	0,766	0,722	0,675	0,656
3 мес.	$\sigma_б(t)$	32,818	30,607	28,850	26,986	26,255
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,820	0,765	0,721	0,674	0,655
6 мес.	$\sigma_б(t)$	32,818	30,607	28,850	26,986	26,255
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,820	0,765	0,721	0,674	0,655
1 год	$\sigma_б(t)$	32,818	30,607	28,850	26,986	26,255
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,820	0,765	0,721	0,674	0,655
∞	$\sigma_б(t)$	32,818	30,607	28,850	26,986	26,255
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,820	0,765	0,721	0,674	0,655

Таблица 3

$\tau_1 = 14$ дней; $\sigma_б(\tau_1) = 40$ *кг/см²*; $\beta = 0{,}001$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
14 дней	$\sigma_б(t)$	40	40	40	40	40
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	1	1	1	1	1
28 дней	$\sigma_б(t)$	37,817	37,129	36,395	35,693	34,872
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,945	0,928	0,909	0,892	0,871
1,5 мес.	$\sigma_б(t)$	36,475	35,049	33,816	32,447	31,760
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,911	0,876	0,845	0,811	0,794
3 мес.	$\sigma_б(t)$	34,822	32,852	31,240	29,885	28,602
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,871	0,821	0,781	0,747	0,715
6 мес.	$\sigma_б(t)$	34,268	32,237	30,580	29,212	28,025
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,857	0,806	0,764	0,730	0,701
1 год	$\sigma_б(t)$	34,230	32,202	30,550	29,185	28,017
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,853	0,805	0,764	0,729	0,700
∞	$\sigma_б(t)$	34,230	32,202	20,550	29,185	28,017
	$\sigma_б(t)/\sigma_б(\tau_1)$	0,853	0,805	0,764	0,729	0,700

Таблица 4

$\tau_1 = 28$ дней; $\sigma_a(\tau_1) = 400$ *кг/см²*; $\beta = 0{,}001$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
28 дней	$\sigma_a(t)$	400	400	400	400	400
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1	1	1	1	1
1,5 мес.	$\sigma_a(t)$	634,5	620,6	609,2	598,0	580,0
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1,586	1,550	1,523	1,495	1,450
3 мес.	$\sigma_a(t)$	968,3	850,6	815,8	785,6	760,9
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,421	2,126	2,039	1,964	1,902
6 мес.	$\sigma_a(t)$	972,9	917,1	870,7	831,3	798,5
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,432	2,293	2,176	2,078	1,996
1 год	$\sigma_a(t)$	977,0	919,8	872,5	832,6	799,4
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,442	2,299	2,181	2,081	1,998
∞	$\sigma_a(t)$	977,0	919,8	872,5	832,6	799,4
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,442	2,299	2,181	2,081	1,998

Таблица 5

$\tau_1 = 28$ дней; $\sigma_a(\tau_1) = 400$ *кг/см²*; $\beta = 0{,}01$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
28 дней	$\sigma_a(t)$	400	400	400	400	400
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1	1	1	1	1
1,5 мес.	$\sigma_a(t)$	1114,3	1023,7	955,9	919,5	858,1
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,786	2,539	2,340	2,299	2,145
3 мес.	$\sigma_a(t)$	1118,2	1026,2	957,5	920,6	858,2
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,795	2,565	2,394	2,301	2,145
6 мес.	$\sigma_a(t)$	1118,2	1026,2	957,5	920,6	858,2
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,795	2,565	2,394	2,301	2,145
1 год	$\sigma_a(t)$	1118,2	1026,2	957,5	920,6	858,2
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,795	2,565	2,394	2,301	2,145
∞	$\sigma_a(t)$	1118,2	1026,2	957,5	920,6	858,2
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,795	2,565	2,394	2,301	2,145

Таблица 6

$\tau_1 = 14$ дней; $\sigma_a(\tau_1) = 400$ *кг/см²*; $\beta = 0{,}001$

t		$\mu=1\%$	$\mu=1{,}5\%$	$\mu=2\%$	$\mu=2{,}5\%$	$\mu=3\%$
14 дней	$\sigma_a(t)$	400	400	400	400	400
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1	1	1	1	1
28 дней	$\sigma_a(t)$	618,3	591,4	580,7	572,3	570,9
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1,544	1,478	1,452	1,431	1,427
1,5 мес.	$\sigma_a(t)$	752,5	730,1	709,2	702,2	674,7
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	1,881	1,825	1,773	1,755	1,688
3 мес.	$\sigma_a(t)$	917,8	876,5	838,0	804,6	779,9
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,294	2,181	2,095	2,012	1,950
6 мес.	$\sigma_a(t)$	973,2	917,5	871,0	831,5	799,2
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,433	2,294	2,178	2,079	1,998
1 год	$\sigma_a(t)$	977,0	919,9	872,5	834,2	799,4
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,442	2,299	2,181	2,085	1,999
∞	$\sigma_a(t)$	977,0	919,9	872,5	834,2	799,4
	$\sigma_a(t)/\sigma_a(\tau_1)$	2,442	2,299	2,181	2,085	1,999

а возрастание $\sigma_a(\tau)$ доходит до 245—280%; 2) величины затухания $\sigma_б(\tau)$ и нарастания $\sigma_a(\tau)$ зависят от процента армирования μ; чем больше процент армирования, тем быстрее происходит затухание напряжения в бетоне и, наоборот, тем медленнее происходит возрастание напряжения в арматуре; 3) затухание напряжения бетона $\sigma_б(\tau_1)$ и нарастание напряжения арматуры происходят в течение только первого года, после чего изменения этих величин почти не происходят.

Сравнивая эти таблицы с таблицами, полученными Н. Х. Арутюняном [1] для линейной ползучести, видим, что при нелинейной ползучести затухание напряжения бетона $\sigma_б(\tau)$ и нарастание напряжения арматуры $\sigma_a(\tau)$ происходят быстрее, чем при линейной ползучести. При $\beta = 0{,}01$ затухание напряжения бетона $\sigma_б(\tau)$ и нарастание напряжения арматуры $\sigma_a(\tau)$ происходят в течение только первых трех месяцев, после чего изменения этих величин почти не происходят; чем больше меры нелинейной ползучести β, тем быстрее происходят затухание $\sigma_б(\tau)$ и нарастание $\sigma_a(\tau)$.

Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило 11 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Москва, 1952.
2. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. „Известия ВНИИГ", том 49, 1953.

Մ. Մ. Մանուկյան

ՍԵՂՄՎԱԾ ԵՐԿԱԹԱԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ ԲԵՏՈՆԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է սեղմված երկաթբետոն էլեմենտի լարվածային վիճակը, երբ լարվածության և սողքի դեֆորմացիայի միջև գոյություն ունի ոչ-գծային կապ։ Բացի դրանից, ընդունվում է, որ բետոնի ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլը $E(t)$ ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է։

Այս խնդրի ընդհանուր լուծումը բետոնի գծային սողքի դեպքում տվել է Ն. Ի. Հարությունյանը [1], իսկ ոչ-գծային խնդրի լուծումը, առանց բետոնի ձևացումը հաշվի առնելու՝ Գ. Ի. Վասիլևը [2]։

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ բետոնի և արմատուրայի նորմալ լարումների որոշումը բերվում է (1.6) և (1.7) ինտեգրալ հավասարումների և կամ՝ (2.11) և (2.12) փոփոխական գործակիցներով երկրորդ կարգի ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարումների ինտեգրմանը։

Ընդունելով $E = \text{const}$, (2.11) և (2.12) հավասարումների լուծումները ստացվում են (3.2) և (3.6) տեսքով, որոնք տալիս են բետոնի և արմատուրայի լարվածությունների փոփոխման օրենքը, երբ հաշվի է առնվում բետոնի ոչ-գծային սողքը։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

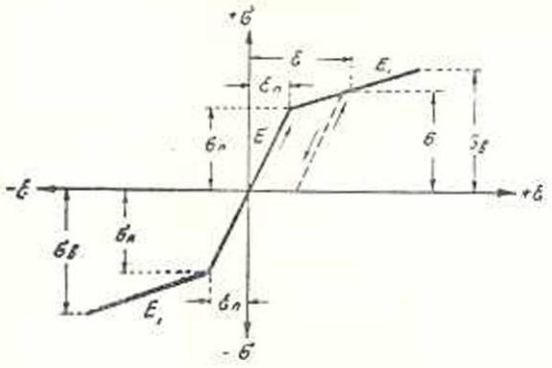
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 1, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В. В. Пинаджян

К вопросу о несущей способности внецентренносжатых стержней стальных конструкций

§ 1. В работе [7] в соответствии с основными положениями расчета конструкций по предельному состоянию [1—12] предложен приближенный метод определения несущей способности сжато-изогнутых элементов любой симметричной формы сечения. Решение основывается на предположении, что изгибающий момент в сжато-изогнутом элементе действует в плоскости симметрии сечения, при этом: плоская форма изгиба устойчива; сечения элемента в стадии упруго-пластической деформации остаются плоскими; материал элемента за пределами упругости характеризуется линейным упрочнением (фиг. 1). Урав-



Фиг. 1.

нение действительной формы изогнутой оси для упрощения решения заменено одним членом тригонометрического ряда*. Рассмотрены следующие возможные деформационные состояния стержня при работе его в упруго-пластической стадии: деформационное состояние I, при котором пластические деформации имеются только в сжатой зоне сечения; деформационное состояние II—характеризуемое односторонней

* Возможность такой замены без ущерба для точности практического расчета симметрично нагруженного стержня при различных законах деформации материала доказана многими исследователями.

пластичностью сечения со стороны растянутых волокон. Наконец, деформационное состояние III, при котором пластические деформации имеются и в сжатых и в растянутых зонах сечения.

На основании [7] несущую способность внецентренносжатого элемента любого симметричного сечения в плоскости изгиба можно определить из следующего выражения:

$$\lambda_s^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot \left(1 - \frac{m \cdot \varphi}{1 + \varphi} \cdot \varkappa\right), \qquad (1.1)$$

где $m = \frac{e_y \cdot F}{W_1}$ — относительный эксцентриситет в плоскости изгиба,

$\varphi = \frac{N_{kp}}{\sigma_n \cdot F}$ — отношение критической силы внецентренносжатого элемента к усилию текучести при осевом сжатии.

В (1.1) знак минус в знаменателе дроби соответствует деформационным состояниям I и III; знак плюс—деформационному состоянию II.

Коэффициент $\varkappa$ в (1.1) характеризует пластические деформации элемента.

При деформационном состоянии I:

$$\varkappa = 1 - \frac{c_1}{h} + (1 - \psi) \cdot \left[\frac{S_{1b}}{a_1 \cdot F} + \frac{1 - \varphi}{m \cdot \varphi} \cdot \frac{I_{1b} + (a_1 - c_1) S_{1b}}{I_x}\right]. \qquad (1.2)$$

Здесь C_1 — высоту пластической зоны в сжатой части сечения— находим из следующего уравнения:

$$S_{1b} + \left(a_1 - c_1 + \frac{m \cdot \varphi}{1 - \varphi} \cdot \frac{W_1}{F}\right) \cdot \frac{\partial S_{1b}}{\partial c_1} - \frac{m\varphi \cdot W_1}{(1 - \psi) \cdot (1 - \varphi)} = 0, \qquad (1.3)$$

где F — площадь сечения, I_x — момент инерции сечения относительно главной оси, перпендикулярной плоскости изгиба, S_{1b} и I_{1b} — статический момент и момент инерции части сечения расположенной выше оси 1—1 относительно этой оси (ось 1—1 проходит по контакту упругой и пластической зон в сжатой части сечения); $\psi = \frac{E_1}{E}$ — отношения модуля упрочнения к модулю упругости материала.

При деформационном состоянии II:

$$\varkappa = 1 - \frac{c_2}{a_2} + (1 - \psi) \cdot \left[\frac{S_{2n}}{a_2 F} + \frac{1 + \varphi}{m \cdot \varphi} \cdot \frac{I_{2n} + S_{2n}(a_2 - c_2)}{I_x}\right]. \qquad (1.4)$$

Значение c_2 — высоту пластической зоны в растянутой части сечения—находим из следующего уравнения:

$$S_{2n} + \left(a_2 - c_2 + \frac{m \cdot \varphi}{1 + \varphi} \cdot \frac{W_1}{F}\right) \cdot \frac{\partial S_{2n}}{\partial c_2} - \frac{m \cdot \varphi \cdot W_1}{(1 - \psi) \cdot (1 + \varphi)} = 0, \qquad (1.5)$$

где $S_{2в}$ и $I_{2в}$ — статический момент и момент инерции части сечения, расположенной ниже оси 2—2 (ось 2—2 проходит по контакту упругой и пластической зон в растянутой части сечения) относительно этой оси.

При деформационном состоянии III:

$$\varkappa = \frac{h-c_1-c_2}{2a_1}\cdot(1-\varphi)+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{m\cdot\varphi\cdot I_x}\times$$

$$\times\left[I_{1b}+I_{2в}+(a_1-c_1)\cdot S_{1b}+(a_2-c_2)\cdot S_{2в}\right]. \qquad (1.6)$$

Значения c_1 и c_2 для (1.6) находим на основании следующих уравнений.

$$S_{1b}+\left(a_1-c_1+\frac{m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\cdot\frac{\partial S_{1b}}{\partial c_1}-\frac{m\cdot\varphi\cdot W_1}{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}=$$

$$=\left[\left(c_2-a_2+\frac{m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\cdot\frac{\partial S_{2в}}{\partial c_2}-S_{2в}\right]\cdot\frac{\partial c_2}{\partial c_1}, \qquad (1.7)$$

$$(h-c_1-c_2)\cdot(1-\varphi)\cdot F=2\cdot(1-\psi)\cdot(S_{1b}-S_{2в})+2F\cdot(a_1-c_1). \qquad (1.8)$$

Для ряда напряженных состояний сложных сечений выражения $\varkappa$ и c_1 получаются более простыми, если взамен S_{1b} и I_{1b} в (1.2), (1.3) и (1.6)—(1.8) подставить соответственно:

$$\left.\begin{aligned} S_{1b}&=S_{1в}-F\cdot(a_1-c_1),\\ I_{1b}&=I_x-I_{1в}+F\cdot(a_1-c_1)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

Здесь $S_{1в}$, $I_{1в}$ — статический момент и момент инерции части сечения расположенной ниже оси 1—1 относительно этой оси;

a_1 — кратчайшее расстояние от центра тяжести сечения до наиболее сжатого волокна сечения.

Границу между областями деформационных состояний I и III находим из условия $\sigma_p=\sigma_n$ на основании следующих уравнений:

$$\lambda^2_{I-III}=\frac{\pi^2\cdot E}{\varphi\cdot\sigma_n}\cdot\left\{1-\frac{1-\psi}{I_x}\cdot\left[I_{1b}+(a_1-c_1)\cdot S_{1b}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F\cdot(1-\varphi)\cdot(h-c_1)\left[S_{1b}+(a_1-c_1)\cdot\frac{\partial S_{1b}}{\partial c_1}\right]}{2\cdot\left[F-(1-\psi)\cdot\frac{\partial S_{1b}}{\partial c_1}\right]}\right]\right\}, \qquad (1.10)$$

$$(1-\varphi)\cdot(h-c_1)\cdot F=2\cdot(1-\psi)\cdot S_{1b}+2F\cdot(a_1-c_1). \qquad (1.11)$$

Границу между областью деформационного состояния II и областью деформационного состояния III находим исходя из условия $\sigma_c=\sigma_n$ на основании следующих уравнений:

$$\lambda^2_{\text{II-III}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot \left\{ 1 - \frac{1-\varphi}{I_x} \cdot \left[I_{2n} + (a_2 - c_2)\, S_{2n} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{F \cdot (1+\varphi) \cdot (h-c_2) \cdot \left[S_{2n} + (a_2 - c_2) \cdot \dfrac{\partial S_{2n}}{\partial c_2} \right]}{2 \cdot \left[F - (1-\varphi) \cdot \dfrac{\partial S_{2n}}{\partial c_2} \right]} \right] \right\}, \qquad (1.12)$$

$$(1+\varphi) \cdot (h-c_2) \cdot F = 2 \cdot (1-\varphi) \cdot S_{2n} + 2 \cdot F \cdot (a_2 - c_2). \qquad (1.13)$$

Верхней границей области деформационного состояния I является гипербола Эйлера, сопряженная с прямой $\varphi = 1$; нижней границей области I является кривая, определяемая уравнениями (1.10) и (1.11). Границами области деформационного состояния II является гипербола Эйлера и линия, определяемая уравнениями (1.12) и (1.13). Области I и II имеют контакт только в одной точке, находящейся на гиперболе Эйлера. Ординату точки контакта находим из условия $|\varepsilon_c| = |\varepsilon_p| = \varepsilon_n$. В этом случае $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $S_{1n} = S_{2n} = 0$. Поэтому на основании (1.11) находим:

$$\varphi_0 = \frac{a_2 - a_1}{h}.$$

Подставляя в это выражение $a_1 = \dfrac{I_x}{W_1}$ и $a_2 = \dfrac{I_x}{W_2}$ и имея в виду, что высота сечения $h = a_1 + a_2$, получим:

$$\varphi_0 = \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2}. \qquad (1.14)$$

Этот же результат получим на основании (1.13).

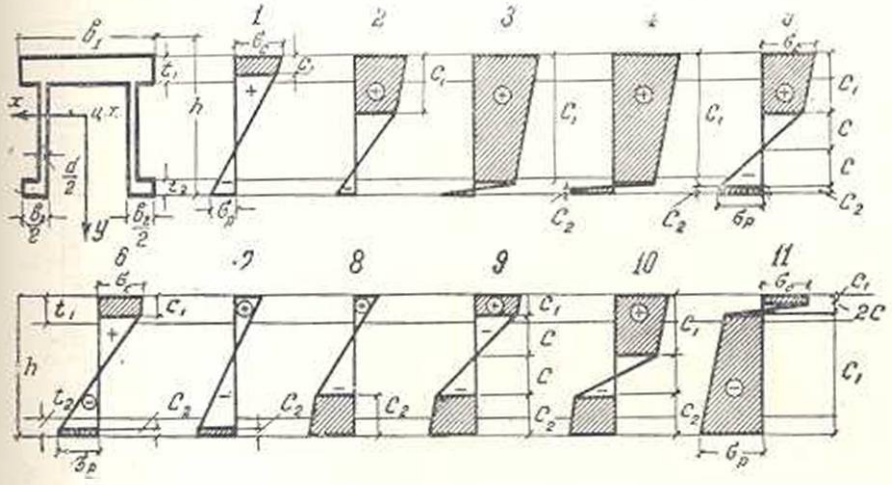
С помощью приведенных выше формул могут быть составлены таблицы (графики) для расчета внецентренносжатых стержней любой симметричной формы сечения.

§ 2. В сжатых и сжато-изогнутых элементах современных стальных конструкций в основном применяются: коробчатое и, реже, двойное зетобразное сечения, главным образом в сквозных тяжелых фермах; Н-образное сечение—в арочных фермах, каркасах высотных и промышленных зданий; швеллерное сечение, тавровое сечение; симметричные и асимметричные двутавровые сечения—главным образом для колонн и стоек [10].

Рассмотрим элемент коробчатого сечения. В зависимости от гибкости стержня и эксцентрицитета приложения нагрузки в сечениях стержня в упруго-пластической стадии его работы могут возникнуть напряженные состояния, показанные на фиг. 2. Напряженные состояния 1, 2, 3 фиг. 2 относятся к деформационному состоянию I; напря-

женные состояния 7,8 — к деформационному состоянию II. Остальные напряженные состояния — к деформационному состоянию III.

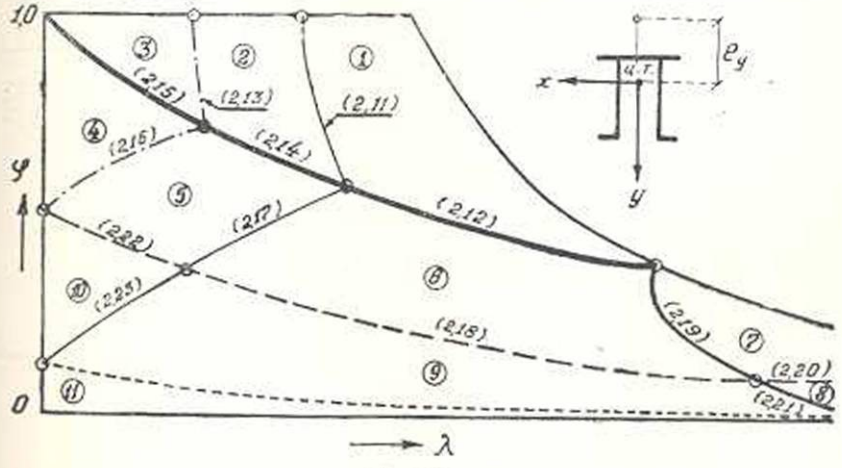
На основании уравнений § 1 в таблице 1 даны частные значения $\varkappa$ для 10 напряженных состояний внецентренносжатого элемента коробчатого сечения. Здесь и в дальнейшем напряженное состояние 11 (фиг. 2_{11}) не рассматривается, так как оно не представляет практического интереса. Кстати говоря, это напряженное состояние может возникнуть в нерациональном сечении с резкой асимметрией при очень



Фиг. 2.

большом эксцентрицитете приложения продольной силы. Формулы для определения границ областей напряженных состояний, показанных на фиг. 2, приведены в таблице 2.

На фиг. 3 в координатном поле $\varphi - \lambda$ показаны области различных напряженных состояний внецентренносжатого стержня коробча-



Фиг. 3.

того сечения. Цифры в кружочках соответствуют областям напряженных состояний сечения, показанных на фиг. 2; цифры в скобках ука-

Таблица 1

Значения $\varkappa$ для внецентренносжатого элемента коробчатого сечения

Деформационное состояние / Напряженное состояние	Коэффициент $\varkappa$	Номера формул
1	2	3
I/1 (фиг. 2_1)	На основании (1.2) $$\varkappa = 1 - \frac{c_1}{a_1} + \frac{1-\psi}{2} \cdot \left[\frac{b_1 c_1^3}{a_1 \cdot F} + \frac{1-\varphi}{m \cdot \varphi} \cdot \frac{b_1 c_1^2 (3a_1 - c_1)}{3 I_x} \right].$$ На основании (1.3) $$\frac{c_1}{h} = \varkappa - \left[\alpha^2 - \frac{2}{1-\psi} \cdot \frac{m\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{W_1}{b_1 h^2} \right]^{1/2}, \text{ где } \alpha = \frac{a_1}{h} + \frac{m\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{W_1}{h \cdot F}.$$	(2.1)
I/2 (фиг. 2_2)	На основании (1.2) $$\varkappa = 1 - \frac{c_1}{a_1} + \frac{1-\psi}{2} \cdot \left[\frac{b_1 \cdot c_1^2 - (b_1 - d) \cdot (c_1 - t_1)^2}{a_1 \cdot F} + \frac{1-\varphi}{m \cdot \varphi} \cdot \frac{b_1 c_1^2 \cdot (3a_1 - c_1) - (b_1 - d) \cdot (c_1 - t_1)^2 \cdot (3a_1 - c_1 - 2t_1)}{3 \cdot I_x} \right].$$ На основании (1.3) $$\frac{c_1}{h} = \varkappa - \left[\alpha^2 + \left(\frac{b_1}{d} - 1 \right) \cdot \left(2\alpha - \frac{t_1}{h} \right) \frac{t_1}{h} - \frac{2}{1-\psi} \cdot \frac{m\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{W_1}{d \cdot h^2} \right]^{1/2}, \text{ где } \alpha = \frac{a_1}{h} + \frac{m\varphi}{1-\varphi} \cdot \frac{W_1}{h \cdot F}.$$	(2.2)
I/3	На основании (1.2) и (1.9) $$\varkappa = (1-\psi) \cdot \left[\frac{b_2 (h - c_1)^2}{2 a_1 F} + \frac{1-\varphi}{m \cdot \varphi} \times \left(1 - \frac{b_2 (h - c_1)^2 \cdot (2h - 3a_1 + c_1)}{6 I_x} \right) \right] + \psi \left(1 - \frac{c_1}{a_1} \right).$$	(2.3)

(фиг. 2_3) | На основании (1.3) и (1.9)

$$\frac{c_1}{h}=1-\alpha-\left[\alpha^2-\frac{2\psi}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{b_2h^2}\right]^{1/2},\quad\text{где}\quad\alpha=\frac{a_2}{h}-\frac{m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{h\cdot F}.$$

III/4 | На основании (1.6 и (1.9) | (2.4)

$$\chi=\frac{h-c_1-c_2}{2a_1}\cdot(1-\varphi)+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{m\cdot\varphi}\times\left[1-\frac{b_2\cdot(h-c_1)^2\cdot(2h-3a_1+c_1)-b_2\cdot c_2^2\cdot(3a_2-c_2)}{6\cdot I_x}\right].$$

(фиг. 2_4)) | На основании (1.7)–(1.9)

$$(1-\psi)\cdot c_2^2-\frac{F\cdot c_2}{b_2}\cdot(1-\varphi)-(1-\psi)(h-c_1)^2+\frac{(1-\varphi)\cdot(h-c_1)\cdot F}{b_2}-\frac{2\psi F}{b_2}(a_1-c_1)=0,$$

$$(h-c_1)^2-2\alpha(h-c_1)+\frac{2\psi}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{b_2}+(c_2^2-2\alpha c_2)\cdot\frac{\partial c_2}{\partial c_1}=0,$$

$$\alpha=a_2-\frac{m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_2}{F}.$$

III/5 | На основании (1.6) и (1.9) | (2.5)

$$\chi=\frac{(h-c_1-c_2)\cdot(1-\varphi)}{2a_1}+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{m\cdot\varphi}\times\left\{1+\frac{3(a_1-c_1)\left[(h-c_1)^2\cdot b_2-(h-c_1-t_2)^2\cdot(b_2-d)\right]+b_2\cdot c_2^2\cdot(3a_2-c_2)}{6\cdot I_x}-\right.$$

$$\left.-\frac{b_2(h-c_1)^3-(h-c_1-t_2)^3\cdot(b_2-d)}{3\cdot I_x}\right\}.$$

(фиг. 2_5) | На основании (1.7) и (1.9)

$$(1-\psi)\cdot c_2^2-\frac{F\cdot c_2}{b_2}\cdot(1-\varphi)+\frac{F(h-c_1)}{b_2}\cdot(1-\varphi)-(1-\psi)\times\left[(h-c_1)^2-(h-c_1-t_2)^2\cdot\left(1-\frac{d}{b_2}\right)\right]-\frac{2\psi F}{b_2}\cdot(a_1-c_1)=0,$$

$$(h-c_1)^2\cdot\left(\frac{b_2}{d}-1\right)\cdot t_2^2+\frac{2\psi}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{d}-2\alpha\left[h-c_1+t_2\left(\frac{b_2}{d}-1\right)\right]+\frac{b_2}{d}(c_2^2-2\alpha c_2)\cdot\frac{\partial c_2}{\partial c_1}=0.$$

1	2	3
III/6 (фиг. 2_6)	На основании (1.6) $$z=\frac{(h-c_1-c_2)\cdot(1-\varphi)}{2a_1}+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{6\cdot I_x\cdot m\cdot\varphi}\times[b_1c_1^2(3a_1-c_1)+b_2\cdot c_2^2\cdot(3a_2-c_2)]\cdot$$ На основании (1.7) и (1.8) $$(1-\psi)\cdot c_2^2-\frac{F\cdot c_2(1-\varphi)}{b_2}+\frac{1}{b_2}\times[F\cdot(1-\varphi)\cdot(h-c_1)-2F(a_1-c_1)-(1-\psi)\,b_1c_1^2]=0,$$ $$c_1^2-2\left(a_1+\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\cdot c_1+\frac{2}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{b_1}+\left[\frac{b_2}{b_1}\cdot c_2^2-2\left(a_2-\frac{m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\times\frac{b_2c_2}{b_1}\right]\times\frac{\partial c_2}{\partial c_1}=0\cdot$$	(2.6)
II/7 (фиг. 2_7)	На основании (1.4) $$z=1-\frac{c_2}{a_2}+\frac{1-\psi}{2}\left[\frac{b_2c_2^2}{a_2F}+\frac{1+\varphi}{m\cdot\varphi}\cdot\frac{b_2\cdot c_2^2\cdot(3a_2-c_2)}{3\cdot I_x}\right]\cdot$$ На основании (1.5) $$\frac{c_2}{h}=z-\left[z^2-\frac{2}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi}{1+\varphi}\cdot\frac{W_1}{b_2\cdot h^2}\right]^{1/2},\quad\text{где}\quad z=\frac{a_2}{h}+\frac{m\varphi}{1+\varphi}\cdot\frac{W_1}{h\cdot F}\cdot$$	(2.7)
II/8 (фиг. 2_8)	На основании (1.4) $$z=1-\frac{c_2}{h}+\frac{1-\psi}{2}\cdot\left[\frac{b_2c_2^2-(b_2-d)\cdot(c_2-t_2)^2}{a_2F}+\frac{1+\varphi}{m\cdot\varphi}\cdot\frac{b_2c_2^2(3a_2-c_2)-(b_2-d)\cdot(c_2-t_2)^2\cdot(3a_2-c_2-2t_2)}{3\cdot I_x}\right]\cdot$$ На основании (1.5) $$c_2^2-2\cdot\left(a_2+\frac{m\varphi}{1+\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\cdot c_2+\frac{1}{d}\times\left[t_2^2\cdot(b_2-d)-2\left(a_2+\frac{m\varphi}{1+\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)\cdot(b_2-d)t_2+\frac{2}{1-\psi}\cdot\frac{m\cdot\varphi\cdot W_1}{1+\varphi}\right]=0\cdot$$	(2.8)

III/9

На основании (1.6)

$$x=\frac{(1-\varphi)\cdot(h-c_1-c_2)}{2a_1}+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{12\cdot m\cdot\varphi\cdot I_x}\times\{6(a_1b_1c_1^2+a_2dc_2^2)+b_2t_2^3+3(b_2-d)\cdot(2c_2-t_2)\cdot(2a_2-t_2)\cdot t_2-2(b_1c_1^3-dc_2^3)\}\cdot \tag{2.9}$$

(фиг. 2_9)

На основании (1.7) и (1.8)

$$c_2^3-\frac{1}{d}\left[\frac{(1-\varphi)\cdot F}{1-\psi}-2(b_2-d)\,t_2\right]c_2+\frac{F}{(1-\psi)\cdot d}\cdot[2a_2-(1+\varphi)\cdot(h-c_1)]-\frac{1}{d}[b_1c_1^2+(b_2-d)\,t_2^2]=0,$$

$$b_1c_1\left(2a_2+c_1-\frac{2m\cdot\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right)-2b_1c_1h+\frac{2m\varphi}{(1-\psi)(1-\varphi)}\cdot W_1=\left\{2[dc_2+(b_2-d)t_2]\times\right.$$

$$\left.\times\left[a_2-\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}\right]-d^2\cdot c_2-(b_2-d)t_2^2\right\}\frac{\partial c_2}{\partial c_1}.$$

III/10

На основании (1.6) и (1.9)

$$x=\frac{(h-c_1-c_2)\cdot(1-\varphi)}{2a_1}+\frac{(1-\psi)\cdot(1-\varphi)}{m\varphi}\times\left\{1+\frac{d(h-c_1)^3}{6\cdot I_x}+\frac{(b_2-d)\cdot(h-c_1-c_2)\cdot t_2^2}{2I_x}-\frac{dc_2^3}{6I_x}-\frac{a_2}{2a_1\cdot W_1}\times\right.$$

$$\left.\times[d\,(h-c_1)^2+(b_2-d)\times(2h-2c_1-t_2)\cdot t_2-dc_2^2-(b_2-d)\cdot(2c_2-t_2)\,t_2]\right\}. \tag{2.10}$$

(фиг. 2_{10})

На основании (1.7) и (1.9)

$$c_2^2-\alpha c_2+\alpha(h-c_1)-(h-c_1)^2-\frac{2\psi\cdot(a_1-c_1)\,F}{(1-\psi)\cdot d}=0,\quad\text{где }\alpha=\frac{1}{d}\left[\frac{1-\varphi}{1-\psi}\cdot F-2(b_2-d)t_2\right],$$

$$d(h-c_1)^2+(b_2-d)\cdot t_2^2-2\beta\cdot[d(h-c_1)+t_2(b_2-d)]=\left\{2\beta\cdot[dc_2+(b_2-d)t_2]-dc_2^2-(b_2-d)\,t_2^2\right\}\times$$

$$\times\frac{\partial c_2}{\partial c_1}-\frac{2\psi}{1-\psi}\cdot\frac{m\varphi W_1}{1-\varphi},\quad\text{где }\beta=a_2-\frac{m\varphi}{1-\varphi}\cdot\frac{W_1}{F}.$$

Таблица 2

Формулы граничных линий областей напряженных состояний внецентренносжатого элемента коробчатого сечения

Уравнения, с помощью которых получена формула граничной линии	Формулы граничных линий	Номера формул
1	2	3
(1.1)—(1.3) при $c_1 = t_1$	Между областями 1 и 2 $$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_a} \cdot \left\{ 1 - \frac{(1-\psi) \cdot b_1 \cdot t_1^3}{12 I_x} \cdot \left[1 + \frac{3F(2a_1 - t_1)^2}{[F-(1-\psi)b_1 t_1] t_2^2} \right] \right\}.$$	(2.11)
(1.10)	Между областями 1 и 6 $$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_a} \cdot \left\{ 1 - \frac{(1-\psi) \cdot b_1 c_1^3}{12 \cdot I_x} \left[1 + \frac{3 \cdot F \cdot (2a_1 - c_1)^2}{[F-(1-\psi) b_1 c_1] c_1^2} \right] \right\},$$ где c_1 определяется из (1.11) при $S_{1b} = \frac{1}{2} \cdot b_1 c_1^2$.	(2.12)
(1.1)—(1.3) и (1.9) при $c_1 = h - t_2$	Между областями 2 и 3 $$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_a} \cdot \left\{ (1-\psi) \cdot \left[\frac{b_2 t_2^3}{12 \cdot I_x} + \frac{\psi \cdot F \cdot (2a_2 - t_2)^2}{4 I_x \left(1 - \psi + \frac{\psi \cdot F}{b_2 \cdot t_2} \right)} \right] + \psi \right\}.$$	(2.13)
(1.10)	Между областями 2 и 5 $$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_a} \cdot \left\{ 1 - \frac{1-\psi}{6 I_x} \times \left[b_1 c_1^3 \cdot (3a_1 - c_1) - (b_1 - d) \cdot (c_1 - t_1)^2 \times (3a^2 - 2t_1 - c_1) + \right. \right.$$	(2.14)

$$+\frac{3}{2}F(1-\varphi)(h-c_1)\cdot\frac{(2a_1-c_1)[dc_1+(b_1-d)t_1]+(c_1-t_1)\cdot(b_2-d)\cdot t_1}{F-(1-\psi)[dc_1+(b_1-d)t_1]}\Bigg]\Bigg\}, \qquad (2.14)$$

где c_1 определяется из (1.11) при $S_{1b}=\frac{1}{2}\cdot[d^2c_1+2c_1\cdot t_1\cdot(b_1-d)-t_1^2\cdot(b_1-d)]$.

(1.9)—(1.11)

Между областями 3 и 4

$$\lambda^2=\frac{\pi^2\cdot E}{\varphi\cdot\sigma_n}\cdot\left\{\frac{(1-\psi)^3\cdot F^3}{12\,b_2^2\cdot I_x}\cdot(1-\varphi)^3+\psi\right\}. \qquad (2.15)$$

(1.1), (1.7)—(1.9)

при $c_1=h-t_2$

Между областями 4 и 5

$$\lambda^2=\frac{\pi^2\cdot E}{\varphi\cdot\sigma_n}\cdot\left[\frac{(1-\psi)\cdot F^3}{12\cdot b_2^2\cdot I_x}\times\left(\frac{2\cdot b_2\cdot t_2}{F}-1+\varphi\right)^3+\psi\right]. \qquad (2.16)$$

(1.1), (1.6) и (1.9)

при $c_1=t_1$

Между областями 5 и 6

$$\lambda^2=\frac{\pi^2\cdot E}{\varphi\cdot\sigma_n}\cdot\left\{1-\frac{m\cdot\varphi\cdot(h-t_1-c_2)}{2a_1}-\frac{(1-\psi)}{6I_x}\cdot[b_1t_1^2(3a_1-t_1)+b_2c_2^2(3a_2-c_2)]\right\}. \qquad (2.17)$$

Здесь m и c_2 определяются на основании двух последних уравнений (2.5) при $c_1=t_1$.

(1.1) и (1.6)

при $c_2=t_2$

Между областями 6 и 9

$$\lambda^2=\frac{\pi^2\cdot E}{\varphi\cdot\sigma_n}\times\left\{1-\frac{1-\psi}{6\cdot I_x}\cdot[b_1c_1^2\cdot(3a_1-c_1)+b_2t_2^2\cdot(3a_2-t_2)]-\frac{m\cdot\varphi\cdot(h-c_1-t_2)}{2a_1}\right\}. \qquad (2.18)$$

Здесь m и c_1 определяются на основании двух последних уравнений (2.6) при $c_2=t_2$.

Продолжение таблицы 2

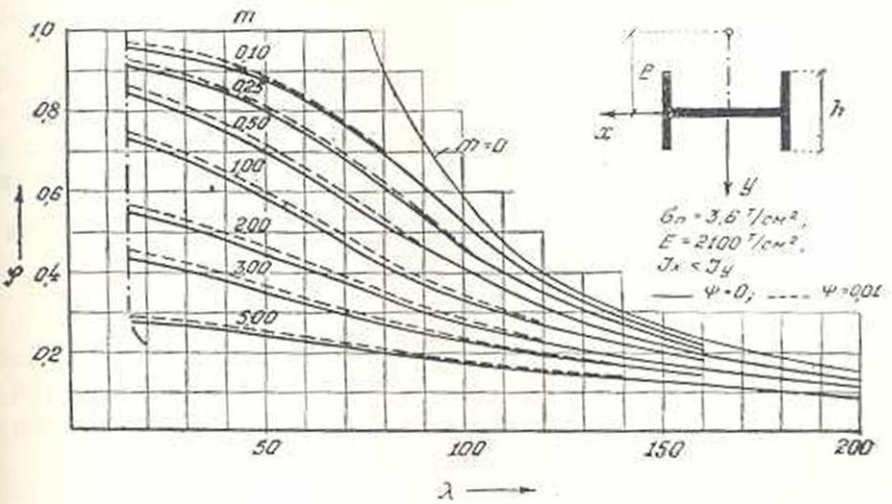
1	2	3
(1.12)	Между областями 6 и 7 $\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \times \left\{ 1 - \frac{(1-\psi) \cdot b_2 \cdot c_2^3}{12\, I_x} \cdot \left[1 + \frac{3 \cdot F \cdot (2a_2 - c_2)^2}{c_2^2 \cdot [F - (1-\psi) b_2 c_2]} \right] \right\}$, где c_2 определяется из (1.13) при $S_{2n} = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot c_2^2$.	(2.19)
(1.1), (1.4) и (1.5) при $c_2 = t_2$	Между областями 7 и 8 $\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot \left\{ 1 - \frac{(1-\psi) \cdot b_2 \cdot t_2^3}{12 \cdot I_x} \times \left[1 + \frac{3 \cdot F \cdot (2a_2 - t_2)^2}{t_2^2 \cdot [F - (1-\psi) \cdot b_2 \cdot t_2]} \right] \right\}$.	(2.20)
(1.12)	Между областями 8 и 9 $\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot \left\{ 1 - \frac{1-\psi}{6I_x} \times \left[b_2 c_2^2 \cdot (3a_2 - c_2) - (b_2 - d) \cdot (c_2 - t_2)^2 \cdot (3a_2 - 2t_2 - c_2) + \right.\right.$ $\left.\left. + \frac{3}{2} (1+\varphi)(h - c_2) F \times \frac{(2a_2 - c_2) \cdot [dc_2 + (b_2 - d) t_2] + (c_2 - t_2) \cdot (b_2 - d) \cdot t_2}{F - (1-\psi) \cdot [dc_2 + (b_2 - d) t_2]} \right] \right\}$, где c_2 определяется из (1.13) при $S_{2n} = \frac{1}{2} \times [dc_2^2 + 2c_2 t_2 \times (b_2 - d) - t_2^2 \cdot (b_2 - d)]$.	(2.21)
(1.1), (1.6)—(1.9) при $c_2 = t_2$	Между областями 5 и 10 $\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \times \left\{ \frac{(1-\psi) \cdot F^3}{12\, d^2 \cdot I_x} \cdot \left(1 - \varphi - \frac{2b_2 t_2}{F} \right)^3 + \psi \right\}$.	(2.22)
(1.1), (1.6)—(1.8) при $c_1 = t_1$	Между областями 9 и 10 $\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \times \left\{ \frac{(1-\psi) \cdot F^3}{12 \cdot d^2 \cdot I_x} \times \left(1 + \varphi - \frac{2b_1 t_1}{F} \right)^3 + \psi \right\}$.	(2.23)

зывают номера формул с помощью которых вычисляются граничные линии.

Формулы § 2 остаются справедливыми и для внецентренносжатого стержня асимметричного двутаврового сечения, при условии действия изгибающего момента в плоскости симметрии сечения. На основании этих формул могут быть получены значения коэффициента $\varkappa$ и выражения граничных линий областей напряженных состояний для основных типов сечений, применяемых в металлоконструкциях. Например, для получения выражений и граничных линий Н-образного и крестообразного сечений в формулах, приведенных в таблицах 1 и 2, следует положить $a_1 = a_2 = \frac{h}{2}$, $t_1 = t_2 = \frac{h - d_2}{2}$, $b_1 = 2d_1$ (d_2 — толщина горизонтала, $2d_1$ — сумма толщин вертикалов). С помощью формулы (1.1) и уравнений, приведенных в § 2, вычислены графики зависимости $\varphi = \varphi(\psi, m, \lambda)$ для Н-образного, крестообразного, коробчатого, швеллерного, таврового и прямоугольного сечений.

Анализ этих графиков показывает, что с увеличением коэффициента линейного упрочнения ψ величина коэффициента φ возрастает, при этом влияние ψ увеличивается с увеличением относительного эксцентрицитета m и уменьшением гибкости элемента λ.

На фиг. 4 представлен график $\varphi = \varphi(\psi, m, \lambda)$ для внецентренносжатого стального стержня Н-образного сечения при пределе пропорцио-



Фиг. 4.

нальности (пределе текучести) стали $\sigma_т = 3{,}6$ *т/см²* и модуле упругости $E = 2100$ *т/см²*: сплошными линиями на графике показаны кривые $\varphi = \varphi(m, \lambda)$ для идеального упруго-пластического материала ($\psi = 0$), а пунктирной линией—аналогичные кривые для марганцовистой стали повышенного качества, не имеющей площадки текучести и с коэффициентом линейного упрочнения $\psi = 0{,}01$ [3].

По кривым на фиг. 2 видим, что при одинаковой величине m и λ разница между φ для значений $\psi=0$ и $\psi=0{,}01$ невелика.

Анализ кривых $\varphi=\varphi(\psi, m, \lambda)$ для различных типов профилей, примененных в металлоконструкциях, показывает, что при изменении ψ от 0 до 0,01

$$1 \leqslant \max \frac{\varphi_{\psi=0{,}01}}{\varphi_{\psi=0}} \leqslant 1{,}06.$$

Следует отметить, что для подавляющего большинства строительных сталей, по многочисленным опытным данным, ψ обычно меньше 0,01.

В свете изложенного строительные стали с площадкой текучести и без таковой при рассмотрении несущей способности элемента могут быть причислены к категории идеального упруго-пластического материала. Это обстоятельство имеет немаловажное значение, так как учет упрочнения стали не дает существенного эффекта в смысле повышения несущей способности сжато-изогнутых элементов стальных конструкций и вместе с тем очень усложняет решение и без того сложной задачи.

§ 3. В сжатых элементах современных стальных сооружений в подавляющем большинстве случаев применяются сечения симметричной формы. В сечениях с одной осью симметрии стараются избегать резкой асимметрии. Например, в коробчатых асимметричных двутавровых сечениях отношение $\frac{a_2}{a_1}$ обычно меньше 1,7. Наряду с этим следует отметить, что нормативные положения лимитируют предельную гибкость сжатых элементов. Как правило, гибкость основных сжатых элементов стальных конструкций $\lambda \leqslant 120$. Исследования показывают, что в сечениях с одной осью симметрии при $\frac{a_2}{a_1} \leqslant 1{,}7$ и $\lambda \leqslant 120$, в зависимости от относительного эксцентрицитета m, возникают деформационные состояния I или III; деформационное состояние II может иметь место только в очень гибких элементах с сечением, имеющим резко выраженную асимметрию. Таким образом, имеющиеся ограничения в отношении конструктивной асимметрии сечения и гибкости элемента позволяют формулой (1.1) пользоваться в следущем виде:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\varphi \cdot \sigma_n} \cdot \left(1 - \frac{m \cdot \varphi}{1-\varphi} \cdot \varkappa\right). \qquad (3.1)$$

На практике пользование громоздким выражением $\varkappa$, входящим в основную формулу (1.1), встречает затруднения. С помощью вычисленных графиков $\varphi=\varphi(\psi, m, \lambda)$ и данных таблиц 1 и 2 для основных типов сечений при заданных параметрах σ_n и E графо-аналитическим путем определялась функциональная зависимость вида:

$$\varkappa = \varkappa(\psi, m, \lambda). \qquad (3.2)$$

Результаты исследования показали, что при изменении σ_n в пределах $2{,}2 \div 3{,}6$ $т/см^2$, $\psi = 0 \div 0{,}01$, $m = 0{,}05 \div 5$, $\lambda = 20 \div 200$, влияние гибкости элемента λ на коэффициент $\varkappa$ существенно, а влияние остальных факторов на $\varkappa$ мало.

Анализ показал, что для внецентренносжатых стальных стержней любой симметричной формы сечения с достаточной для практики точностью зависимость (3.2) можно аппроксимировать в следующем виде:

при $$20 \leqslant \lambda \leqslant 150 \quad \varkappa = A + B \cdot \left(\frac{\lambda}{100}\right), \tag{3.3}$$

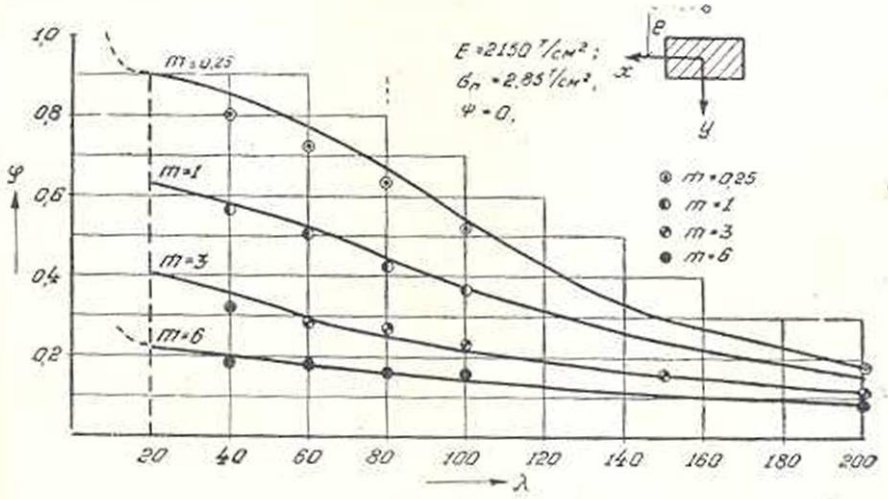
при $$\lambda > 150 \qquad \varkappa = 1.$$

В выражении (3.3) A и B—некоторые постоянные, зависящие от формы поперечного сечения элемента. Значения A и B для основных типов сечений, применимых во внецентренносжатых элементах строительных металлоконструкций, даны в таблице 3.

Таблица 3

Сечение	A	B
Н-образное, крестообразное	0,4	0,4
Швеллерное, коробчатое, тавровое, прямоугольное . .	0,55	0,3
Двутавровое	0,85	0,1
Сечения, близкие к „идеальному профилю" (рассеянные профиля составных стержней)	1,00	0,0

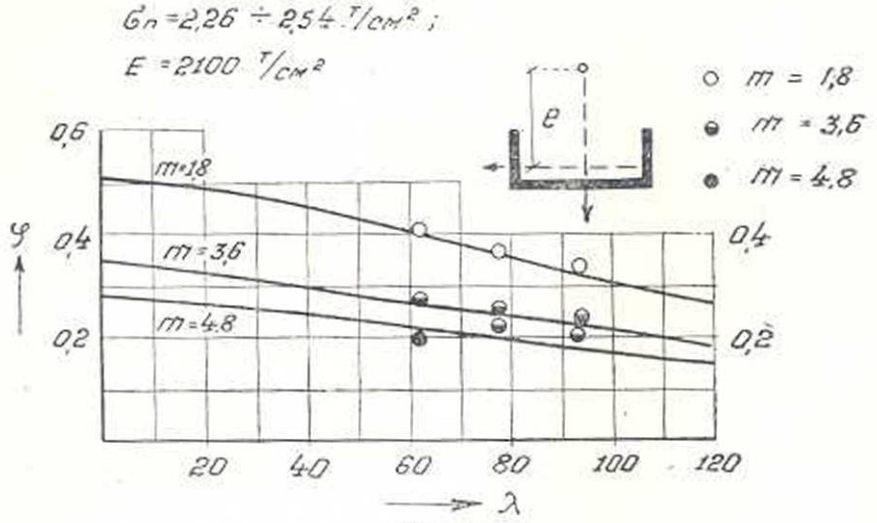
§ 4. Ниже результаты теории сопоставлены с экспериментальными данными. На фиг. 5 сплошными линиями показаны теоретиче-



Фиг. 5.

ские кривые, вычисленные на основании формул (3.1) и (3.3) для прямоугольного сечения при $\sigma_n = 2{,}85\ т/см^2$, $E = 2150\ т/см^2$; значения A и B для (3.3) взяты из таблицы 3; кружочками показаны экспериментальные величины критического значения φ, полученные Колльбрюннером при испытании внецентренносжатых стержней прямоугольного сечения с целью проверки теории Хвалла, Роша и Гартмана [13].

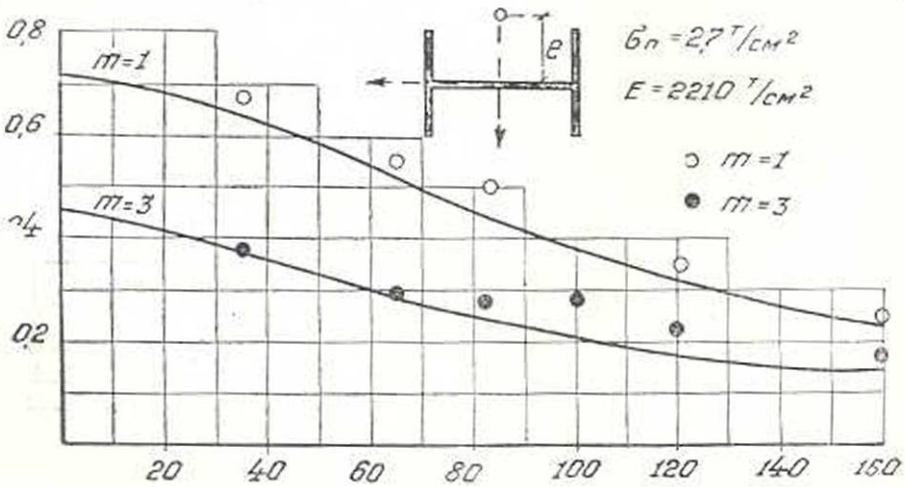
На фиг. 6 сплошными линиями показаны кривые, вычисленные по формулам (3.1) и (3.3), для швеллерного сечения при $\sigma_n = 2{,}4\ т/см^2$ и $E = 2100\ т/см^2$; кружочками показаны опытные данные, получен-



Фиг. 6.

ные автором и А. К. Шапшиевым при испытании внецентренносжатых стержней швеллерного сечения, выполненных из стали марки ст. 3 [6].

На фиг. 7 жирными сплошными линиями показаны теоретические кривые для внецентренносжатого стержня Н-образного сечения при



Фиг. 7

$\sigma_n = 2.7\ т/см^2$ и $E = 2210\ т/см^2$, вычисленные по формулам (3.1) и (3.3) и данным табл. 3. Кружочками показаны экспериментальные величины критического значения коэффициента φ, полученные М. Рошем при испытании внецентренносжатых стальных стержней Н-образного сечения [14].

Совпадение приближенных теоретических формул с опытными данными, как следует из фигур 5, 6, 7, удовлетворительное.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балдин В. А.* и др. Расчет строительных конструкций по предельным состояниям. Под редакцией В. М. Келдыша. Тр. ЦНИПС, М., 1951.
2. *Гвоздев А. А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М., 1949.
3. *Жуйин Н. Д.* Пластичні деформації в стальних конструкціях, ч. II. Изд. АН Укр. ССР, Киев, 1936.
4. *Завриев К. С.* Сопротивление упругих стержней сложному продольному изгибу. СПБ., 1913. Расчетные формулы прочности в особых случаях, М., 1936.
5. *Корноухов Н. В* Перевірка стійкости стиснено-зігнутых конструкцій за границею пружності, ч. I. Изд. АН Укр. ССР, Киев, 1936.
6. *Пинаджян В. В., Шаншиев А. К.* Экспериментальное исследование устойчивости внецентренносжатых стальных стержней. Журн. „Строительная промышленность", № 11, 1938.
7. *Пинаджян В. В.* К вопросу о предельном состоянии сжато-изогнутых стальных стержней любой симметричной формы сечения. ДАН Армянской ССР, том XIV, № 4, 1951.
8. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики стержневых систем. Часть II, М., 1940.
9. *Ржаницын А. Р.* Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Стройвоенмориздат, М., 1949.
10. *Стрелецкий Н. С.* и др., Стальные конструкции, М., 1948.
11. *Туркин Н. С.* Экспериментально-теоретическое исследование упруго-пластической работы стальных балок. Сборник тр. ЦНИПС под ред. С. А. Бернштейна, М., 1938.
12. *Ježek K.* Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl, 1937.
13. *Koilbrunner C.* Zentrischer u. exzentrischer Druck, Stahlbau, H. 6, 1938.
14. *Roš M.* Die Bemessung zentrisch u. exzentrisch gedrückten stäbe auf Knickung, 1929.

Վ. Վ. Փինաջյան

ՊՈՂՊԱՏԵ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ԶՈՂԵՐԻ ԿՐՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա հոդվածը հանդիսանում է [7] աշխատության հետագա զարգացումը։ Հոդվածում քննարկվում է պողպատե կոնստրուկցիաներում կիրառվող պրակտիկ պրոֆիլներ ունեցող արտակենտրոն սեղմված ձողերի սահմանային վիճակը։

Հեղինակի հետազոտություններով պարզված է, որ նյութի գծային ամրապնդումը էական էֆեկտ չի տալիս շինարարական պողպատե կոնստրուկցիաների նկատմամբ. մեծածավալ ֆորմուլանների վերլուծման հետևանքով առաջարկված է կամայական հատվածք ունեցող սիմետրիկ ձողերի հաշվարկման մոտավոր կոմպակտ և պարզ մեթոդ։

Մոտավոր մեթոդը լավ համաձայնում է Մ. Ռուշի, Կ. Կոլբրունների և ուրիշների էքսպերիմենտալ տվյալների հետ։

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. VII, № 1, 1954 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ИНЖЕНЕРНАЯ СЕЙСМОЛОГИЯ

А. Г. Назаров

О сейсмическом районировании

Существующее состояние вопроса о сейсмическом районировании можно вполне конкретно установить по Положению по строительству в сейсмических районах (ПСП-101—51) [1, 4].

В приложении к этому Положению приведены карты сейсмического районирования отдельных сейсмических районов СССР, а также списки основных населенных пунктов с указанием принятой для них сейсмичности в баллах по шкале ОСТ ВКС 4537. Далее в Положении указывается, что уточнение сейсмичности пункта строительства производится на основании карт сейсмического микрорайонирования. При отсутствии таких карт в районах 7 баллов и более уточнение сейсмичности площадки строительства может производиться в сторону уменьшения или увеличения на один балл по материалам общих инженерно-геологических и гидротехнических изысканий. Далее даются краткие характеристики различных грунтов в отношении их сейсмической опасности.

Казалось бы, что формулировки даны достаточно четкие и не должны возникать какие-либо недоразумения при уточнении сейсмической балльности в конкретных случаях. В действительности же возникают существенные недоразумения, на которых считаем необходимым остановиться.

Рассмотрим сначала тот случай, когда нет карты сейсмического микрорайонирования и уточнение балльности осуществляется по материалам изысканий в сторону уменьшения или увеличения на один балл.

Из самой формулировки операции уточнения балльности можно сделать вывод, что в картах сейсмического районирования или, что то же, в списках основных населенных пунктов указаны средние балльности.

Только средние балльности, данные для средних условий, могут быть пересмотрены в сторону уменьшения или увеличения на 1 балл в зависимости от того, насколько местные условия лучше или хуже средних.

Обратимся к картам сейсмического районирования.

Огромные районы, подчас протяженностью в сотни километров,

имеют один и тот же „средний" балл. В один и тот же район могут попасть горные хребты, долины, равнинные участки с различными почвенными условиями и с различной степенью увлажнения почвы, все это протяженностью во много десятков километров. Как понять средние условия для такого района, которым отвечает „средний" балл? Не ясно ли, что такой средний балл вообще невозможно установить и он не может иметь никакого физического смысла.

При составлении карты сейсмического районирования следовало бы указать, к каким конкретным грунтовым и прочим условиям приписана „средняя балльность" рассматриваемого сейсмического района. Это послужило бы ориентиром для сейсмического микрорайонирования.

Действительно, зная что именно данному комплексу почвенных, морфологических и других условий отвечает „средняя" балльность, можно путем сравнений комплексов условий интересующей нас площадки с данным комплексом, принятым за „средний", дать уточнение балльности этой площадки.

К сожалению, к сейсмическим картам не даны пояснения, из которых можно было бы вынести суждение—к каким условиям приписан „средний" балл и, потому, по существу, у нас нет ключа для расшифровки карты в требуемом смысле и для правильного осуществления сейсмического микрорайонирования.

Как же практически протекает работа по сейсмическому микрорайонированию?

Обычно сравниваются почвенные и гидрогеологические условия рассматриваемой площадки с таковыми же условиями на более или менее протяженной территории, скажем в пределах площади, занятой данным населенным пунктом, обычно в радиусе не более 10 *км*.

Для такой территории устанавливаются лучшие и худшие в сейсмическом отношении грунты, создается представление о средних сейсмических условиях и на основе этого решается вопрос: следует ли повысить или понизить сейсмическую балльность для рассматриваемой площадки. Против такого приема трудно было бы что-либо возразить, если „средние условия" для рассматриваемой территории, где находится интересующая нас площадка, совпали бы со „средними условиями" для всего сейсмического района. Ясно, что такие случаи редки. В общем случае различные территории, находящиеся в данном сейсмическом районе, имеют различные „средние условия". Такой прием сейсмического микрорайонирования может привести поэтому к противоречивым результатам.

Покажем это на примере.

Рассмотрим два населенных пункта, скажем пункты А и Б, расположенные в одном и том же сейсмическом районе, балльность которого 8. Пусть пункт А расположен полностью на скале, а в пункте Б микрогеологические условия таковы, что примерно треть площадки занята скалой, треть—неувлажненным аллювием достаточной мощности и, наконец, последняя треть представлена водонасыщенными грунтами.

Сейсмическое микрорайонирование пункта А совершить просто. Так как средний балл дается для средних условий и рассматриваемая площадка совершенно однородна в геологическом отношении, то в данном случае сплошная скала представляет средние условия и потому пункту А следует приписать 8 баллов.

Обратимся теперь к пункту Б. Для этого пункта положение также достаточно ясное; среднее условие представляют неувлажненные аллювиальные отложения, поэтому участку, занятому ими, следует приписать балльность 8, участку, занятому скалой, приписать балльность 7 и, наконец, участку с водонасыщенными грунтами припишется балльность 9.

Пункты А и Б отнесены к одному и тому же сейсмическому району с силой землетрясения в 8 баллов, а одинаковые грунтовые условия в этих пунктах привели к различным балльностям: скальный участок в пункте А получил оценку силы землетрясения 8 баллов, а скальный участок в пункте Б получил оценку силы землетрясения 7 баллов.

Если в том же сейсмическом районе окажется третий населенный пункт, вся территория которого занята водонасыщенными грунтами, то на основании тех же соображений всей этой территории придется приписать 8 баллов, в то время, как для населенного пункта Б такой же участок был отнесен к зоне 9-балльной сейсмичности.

Результат получился противоречивый, что указывает на неточность принятой методики. Приведенные примеры схематичны, но они даны с целью полного обнажения существа вопроса и для возможности отвлечения от множества всяких привходящих обстоятельств, могущих лишь затемнить существо дела.

Существо же разбираемого вопроса, как видно из приведенных примеров, заключается в том, что различным средним микроусловиям для различных пунктов, входящих в единый сейсмический район, отвечает один и тот же сейсмический балл, что, конечно, неправильно.

Стало быть мы не можем в точности осуществить сейсмическое микрорайонирование, принимая балл сейсмической карты для средних условий участка.

Конечно правильнее было бы считать сейсмический балл средним для всего рассматриваемого района, если была бы какая-либо серьезная возможность установить средние сейсмические условия для всего района в целом. Такая возможность не исключена в отдельных благоприятных случаях. Как правило, как это указывалось выше, в особенности если приходится районировать горную страну с разнообразнейшими местными условиями, что обычно и бывает при сейсмическом районировании, трудно всерьез говорить о средних грунтовых и прочих условиях и о средней балльности. Поэтому приходится отказываться и от этого пути.

Обратимся теперь к картам сейсмического микрорайонирования. Составлением таких карт занимались преимущественно Геофизический

институт АН СССР, Институт строительного дела АН Грузинской ССР, Институт стройматериалов и сооружений АН Армянской ССР [2, 3, 8].

При составлении карт сейсмического микрорайонирования неизбежно должно было возникнуть то же противоречие, о котором говорилось выше, может быть в несколько более завуалированной форме.

Если при составлении карты сейсмического микрорайонирования исходили из сейсмической балльности как „средней", то все приведенные выше соображения о дефективности такого пути остаются в силе и потому на них останавливаться не будем.

Некоторые исходят из той предпосылки, что балльность для данного пункта по карте сейсмического районирования является максимальной, т. е. относится к наихудшим грунтовым условиям.

В основу такой предпосылки поставлено следующее соображение.

Сейсмический балл для данного населенного пункта устанавливается на основе оценки разрушительных последствий землетрясения. Наиболее разрушительно землетрясение при неблагоприятных условиях: стало быть балл сейсмического районирования есть балл, отнесенный к наихудшим микрогеологическим, рельефным и др. условиям.

Поэтому балл, указанный в картах сейсмического районирования, является максимальным. Стало быть при составлении карты сейсмического микрорайонирования речь может идти в основном только о снижении сейсмической балльности.

В некоторых случаях, когда, например, вновь застраиваемые участки населенного пункта находятся в сравнительно худших грунтовых условиях, то при уточнении балльности последняя может быть и повышена. Эта точка зрения не лишена здравого смысла, но все же и она имеет ряд сомнительных сторон.

1. Статистические данные о разрушительных землетрясениях в рассматриваемом крупном населенном пункте, характеризующемся определенными почвенными условиями, автоматически распространяются при сейсмическом районировании, подчас на огромную территорию, могущую иметь разнообразные почвенные условия, отличные от тех наихудших почвенных условий крупного населенного пункта, которые предопределили его балльность.

2. Положим, что данный населенный пункт расположен на территории, лишь незначительная площадь которой, скажем 5% от всей территории, находится в неблагоприятных условиях в сейсмическом отношении. Трудно представить, чтобы при оценке силы землетрясения для данного населенного пункта, исходили бы из неблагоприятных условий на этой ничтожной части площади.

Конечно, этот пример также утрирован, и здравый смысл подскажет нам—как поступить в данном конкретном случае. Но спрашивается, какой процент площади данного пострадавшего населенного пункта, на которой имели место наибольшие повреждения, уже должен дать доминирующую балльность для всего населенного пункта? Конечно,

и здесь имеет место произвол, и есть почва для противоречивых толкований.

3. Далеко не все населенные пункты в прошлом подвергались разрушительным землетрясениям и потому отнесение балльности этих пунктов, данных в картах сейсмического районирования, к максимальным, является произвольным и не опирающимся на факты.

4. Если имеются в данном сейсмическом районе фиксированной балльности несколько населенных пунктов сильно различающихся по своим микроусловиям, то возникают те же недоразумения, что и при приеме оценки по „средней" балльности, поскольку невыгоднейшие условия для различных пунктов будут различаться между собою, в то время, как им приписывается один и тот же балл по данным карты сейсмического районирования.

5. При составлении карт сейсмического районирования учитываются не только сейсмостатистические данные, но и данные сейсмотектоники, т. е. карты могут содержать некоторый элемент прогноза, ничего общего не имеющего с худшими сейсмическими условиями населенных пунктов* [5]. Поэтому такая постановка вопроса также не может считаться удовлетворительной.

Как следует из вышеприведенного, все недоразумения, связанные с сейсмическим микрорайонированием, являются прямым следствием неточно поставленной задачи о сейсмическом районировании. Эта задача поставлена неточно потому, что огромные районы протяженностью в сотни километров с разнообразнейшими геологическими, грунтовыми, рельефными и другими условиями отнесены к одному и тому же баллу, причем не дано четкого определения, что понимается под этим баллом и к каким конкретным условиям он отнесен.

Мы считаем, что имеется единственный логически правильный выход из создавшегося положения. Он заключается в следующем.

При составлении карты сейсмического районирования следует полностью отвлечься от факторов, влияющих на местные значения сейсмического балла. Для этого надо рассматриваемую территорию, подлежащую сейсмическому районированию, заменить условной территорией, вполне однообразной по почвенным и другим условиям. Этим самым мы полностью выключим из карты сейсмического районирования факторы, влияющие на местные изменения балльности. Мы предлагаем исходный сейсмический балл для всего данного района относить к одинаковым (приведенным) почвенным условиям и к горизонтальной площадке.

Для получения действительного балла в данном пункте мы должны провести сравнение между действительными почвенными условиями и приведенными и вносить поправку к исходному баллу. Такой прием дает возможность четко отделить задачу сейсмического райо-

* Пункты 1, 3, 5 в равной мере относятся и к сейсмическому микрорайонированию по „средним" условиям.

нирования от задачи сейсмического микрорайонирования. Повидимому, удобнее всего исходный балл относить к скальным породам ненарушенной структуры достаточной мощности.

Интересно, что Институтом строительного дела АН Грузинской ССР одно время применялся следующий прием сейсмического микрорайонирования.

Балльность территории, которая подлежала сейсмическому микрорайонированию, относили к коренному субстрату и уже оттуда, от этого общего уровня сейсмической интенсивности, вели отсчет балльности в зависимости от грунтовых условий на поверхности. Такой прием, поскольку он был применен на малых площадях, не мог дать эффекта. Он даже не позволил уйти от тех противоречий, на которые мы указывали выше. Действительно, соседний участок территории, имеющий ту же балльность, но иные грунтовые условия на поверхности, при отнесении к коренному субстрату даст другой исходный балл.

У нас речь идет о том, что нужно найти исходный балл, отнесенный к скале (или при желании к какому-либо другому однородному грунту), для всей *сейсмической области* и из такого условия составить карту сейсмического районирования.

Карты сейсмического районирования, а также списки основных населенных пунктов следует давать с указанием принятой для них сейсмичности в баллах, в предположении, что грунт скалистый и местность горизонтальна.

При этом условии содержание работы по сейсмическому микрорайонированию станет совершенно четкой.

Зная влияние местных факторов на силу землетрясения (почвенные условия, рельеф и др.), можно вводить коррективы в исходный балл и получить его уточненное значение для целей проектирования и строительства для данной площадки. Ясно, что при сейсмическом районировании таким путем исходные балльности снизятся в пределах 1—3 баллов.

Существенную роль в задачах микрорайонирования должны играть сейсмометрические наблюдения за сравнительной интенсивностью землетрясений при различных почвенных и других условиях с учетом основных динамических характеристик сооружения, для чего могут быть использованы и слабые землетрясения [7].

Итак, мы приходим к следующим выводам:

1. Имеющиеся карты сейсмического районирования отдельных сейсмических районов СССР могут приводить к неточным результатам при сейсмическом микрорайонировании;

2. Сейсмическое районирование должно быть осуществлено в предположении, что вся рассматриваемая территория в отношении почвенных и морфологических условий совершенно однообразна; таким путем устраняется пестрота картины в отношении микроусловий;

желательно исходный балл относить к граниту, при горизонтальной дневной поверхности.

Задачей сейсмического микрорайонирования является уточнение исходного балла применительно к местным условиям, влияющим на величину приращения сейсмического балла, с максимальным использованием данных сейсмометрических наблюдений.

При переработке карт сейсмического районирования, согласно рекомендованному здесь пути, придется совершить довольно значительную работу. Трудно заранее установить в деталях методику, которая должна развиваться в процессе работы.

Ясно лишь одно, что при обработке сейсмостатистического материала самым тщательным образом должны изучаться местные условия для рассматриваемых населенных пунктов с тем, чтобы правильно выделить факторы, влияющие на местные значения сейсмического балла и, таким образом, подойти к установлению исходного балла, отнесенного к скале для рассматриваемого района.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 29 X 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Положение по строительству в сейсмических районах (ПСП-101—51). Госуд. издат. литер. по строительству и архитектуре, Москва, 1952.
2. *Бюс Е. И.* Статьи в трудах Закавказского института сооружений, вып. 3, Тифлис, 1932.
3. *Гзелишвили И. А.* и *Сафарян А. Н.* Итоги сейсмического микрорайонирования населенных пунктов Грузинской ССР. Тр. Института строительного дела АН ГССР, т. I, Тбилиси, 1938.
4. *Горшков Г. П.* Сейсмическое районирование территории СССР. Совещание по антисейсмическому строительству (тезисы докладов), Ереван, 1948.
5. *Губин И. Е.* Сейсмотектонический метод сейсмического районирования. Труды Геофиз. ин. АН СССР, 13 (140), 1950.
6. *Медведев С. В.* Об оценке сейсмической опасности грунтов для сооружений. Совещание по сейсморайонированию Баку и Апшеронского полуострова, 21—25 октября 1949 (тезисы докладов), Баку.
7. *Назаров А. Г.* Известия АН Армянской ССР, 3, 1947.
8. *Шохер В. О.* Сейсмическое районирование городов и нормы антисейсмического строительства. Труды СИ, № 85.

Ա. Գ. Նազարով

ՍԵՅՍՄԻԿ ՇՐՋԱՅՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Հոդվածում քննարկվում են սեյսմիկ շրջայնացման և միկրոշրջայնացման ՊՍՊ-101—51-ում պաշտոնապես ընդունված, գոյություն ունեցող եղանակների թերությունները։ Ցույց է տրված, որ այդ եղանակները կարող են բերել ոչ ճիշտ արդյունքների։

Թյուրիմացությունները խուսափելու համար սեյսմիկ շրջանացման քարտեզը պետք է կազմել՝ ելնելով հորիզոնական մակերևույթի և ստանդարտ գրունտային պայմանների բերված տեղամասի բալից։ Որպես այդպիսի ստանդարտ ցանկալի է ընդունել հոծ գրանիտի ժայռը։