

Г. В. Бадалян

Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квази-аналитических функций

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Глава I. Обобщенные формула и ряд Тейлора

- § 1. Обобщение формулы Тейлора
- § 2. Одно преобразование обобщенного ряда Тейлора
- § 3. Оценка $n+1$ -ой производной функции по ее обобщенному ряду Тейлора

Глава II. Разложение аналитических и квази-аналитических функций в соответствующие обобщенные ряды Тейлора

- § 1. Некоторые свойства последовательности чисел $\{\mu_n\}$, определяющей класс функций $C_{\{\mu_n\}}[a, b]$
- § 2. Оценка $n+1$ -ой обобщенной производной многочлена П. Л. Чебышева $T_m(x-1)$ по последовательности чисел $\{\gamma_n\}$ из $(0, 2)$
- § 3. Основная теорема и классы аналитических и квази-аналитических функций

ПРЕДИСЛОВИЕ

Известно, что квази-аналитические функции (в смысле Карлемана) точно так же, как аналитические функции, определяются единственным образом своими последовательными производными в одной точке (элементом).

Известно также, что существует аппарат представления аналитических функций посредством своих элементов.

Настоящая работа в основном посвящена установлению аналогичного аппарата для квази-аналитических функций.

В первой главе рассматривается одно обобщение тейлоровского разложения, которое в основном было исследовано в работе [1], причем здесь существенно уточняется теорема 8 главы II работы [1], по ходу доказательства которой получаем необходимое и достаточное условие разложения функции $f(z)$ в факториальный ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{v=0}^n (z + \gamma_v)}$$

с абсциссой сходимости $\sigma_c > 0$ без ограничения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\gamma_i}} < \infty.$$

Во второй главе прежде всего вводится следующее определение так называемых классов функций $C_{\{\dot{m}_n\}}$ на произвольном сегменте $[a, b]$.

Класс функций $C_{\{\dot{m}_n\}}$ (в смысле Карлемана) назовем классом $C_{\{\dot{m}_n\}}$, если существует последовательность чисел $\{\dot{m}_n\}$ такая, что, начиная с некоторого номера, удовлетворяет условиям:

1. Последовательность $\left\{ \frac{\dot{m}_n}{\dot{m}_{n-1}} : n \right\}$ монотонно возрастает.

$$2. \dot{T}(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{\dot{m}_n} \leq \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n} = T(r).$$

$$3. \int_0^\infty \frac{\ln \dot{T}(r) dr}{r^2} = \infty.$$

Далее доказывается основная теорема, которая гласит: *всякая функция $\varphi(t) \in C_{\{\dot{m}_n\}}[0, 1]$ разлагается в сходящийся на $(0, u]$, $(t \in (0, u])$, $u \in (0, 1)$ ряд*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k(u, t),$$

где

$$\omega_k(u, t) = \int_u^1 t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2-1} dt_2 \dots \int_u^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k-1} dt_k,$$

$$a_k = u^{-\gamma_k + \gamma_{k-1} + 1} \varphi_k(u), \quad \varphi_1(t) = \varphi(t), \dots, \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, \gamma_0 = 0, \quad \text{а} \quad \gamma_k = \delta \frac{\dot{m}_k}{\dot{m}_{k-1}},$$

где $\delta = \delta(u, \{\dot{m}_n\}) > 0$ — некоторое конечное число.

В работе доказывается, что все классы Данжуа квази-аналитических функций являются классами $C_{\{\dot{m}_n\}}$, но пока остается открытым вопрос — все ли классы $C_{\{\dot{m}_n\}}$ Карлемана являются классами $C_{\{\dot{m}_n\}}$?

Продолжение настоящей работы посвящено приложению полученных результатов к суммированию расходящихся рядов; а также вопросу аналитического и квази-аналитического продолжения функций.

Глава I. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛА И РЯД ТЕЙЛОРА

§ 1. Обобщение формулы Тейлора. Рассмотрим последовательность чисел

$$0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots \rightarrow \infty, \text{ где } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty. \quad (1,1)$$

В настоящей работе всегда, говоря о последовательности чисел $\{\gamma_v\}$, $v=0, 1, 2, \dots$, будем считать, что выполняются условия (1,1).

Пусть функция $\varphi(t)$ $(n+1)$ -раз дифференцируема на $(0, u]$, где $u > 0$ — произвольное число.

Введем определение:

Определение 1. Назовем функции

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_2(t) = \left(\frac{\varphi_1(t)}{t^{\gamma_1-1}} \right)', \quad \dots, \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}} \right)', \quad k=2, 3, \dots, n, \\ t \in (0, u]$$

последовательными обобщенными производными функции $\varphi(t)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$.

Замечание 1. В частном случае, когда $\gamma_v = v$, $v=1, 2, \dots$ вышеуказанные обобщенные производные обращаются в производные в классическом их понимании.

Теорема (1.1). Всякая функция $\varphi(t)$, имеющая на некотором $(0, u]$, $(n+1)$ -ую интегрируемую производную, представляется формулой:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k(u, t) + R_n(u, t), \quad (1,2)$$

где $t \in (0, u]$, $a_0 = \varphi(u)$, $a_k = u^{-\gamma_k + \gamma_{k-1} + 1} \varphi_k(u)$, $\gamma_0 = 0$, $k=1, 2, \dots$

$$\omega_k(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dt_2 \dots \int_u^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1} dt_k \quad (1,3)$$

$$R_n(u, t) = \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n \int_u^{t_{n+1}} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1}. \quad (1,4)$$

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\varphi(t) = \varphi(u) + \int_u^t \varphi_1(t_1) dt_1, \quad t \in (0, u].$$

С другой стороны, имеем

$$\varphi_2(t) = \left(\frac{\varphi_1(t)}{t^{\gamma_1-1}} \right)' \quad \text{или} \quad \frac{\varphi_1(t)}{t^{\gamma_1-1}} \Big|_u^t = \int_u^t \varphi_2(t) dt,$$

т. е.

$$\varphi_1(t) = \frac{\varphi_1(u)}{u^{\gamma_1-1}} t^{\gamma_1-1} + t^{\gamma_1-1} \int_u^t \varphi_2(t) dt.$$

Значит

$$\varphi(t) = \varphi(u) + \frac{\varphi_1(u)}{u^{\gamma_1-1}} \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 + \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} \varphi_2(t_2) dt_2.$$

Далее имеем

$$\varphi_2(t) = \frac{\varphi_2(u)}{u^{\gamma_2-\gamma_1-1}} t^{\gamma_2-\gamma_1-1} + t^{\gamma_2-\gamma_1-1} \int_u^t \varphi_3(t) dt.$$

Подставляя значение $\varphi_2(t)$ из последнего тождества в предпоследнее, получим

$$\varphi(t) = \varphi(u) = \frac{\varphi_1(u)}{u^{\gamma_1-1}} \omega_1(u, t) + \frac{\varphi_2(u)}{u^{\gamma_2-\gamma_1-1}} \omega_2(u, t) + R_2(u, t).$$

Продолжая этот процесс, получим формулу, утверждаемую теоремой.

Определение 2. Формулу (1.2) будем называть обобщенной формулой Тейлора, так как при $\gamma_i = \gamma$, $\gamma = 0, 1, \dots$ она обращается в известную формулу Тейлора.

Заметим, что остаточный член $R_n(u, t)$ обобщенной формулы Тейлора можно представить и в другой форме, а именно:

Теорема (1.2). Справедливо тождество

$$\begin{aligned} R_n(u, t) &= \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) dt_0 \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1}-\gamma_{n-2}-1} dt_{n-1} \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dt_n. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что это тождество является результатом n -кратного применения формулы Дирихле о перестановке интегралов в двухкратном интеграле.

Согласно вышеуказанной формуле

$$\int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} = \int_u^{t_{n-1}} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n$$

Обозначим теперь

$$\varphi_{n+1}(t_{n+1}) \int_{t_{n+1}}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n = \Phi_n(t_{n-1}, t_{n+1})$$

и применим снова формулу Дирихле к интегралу

$$\begin{aligned} & \int_u^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} - 1} dt_{n-1} \int_u^{t_{n-1}} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} - 1} dt_{n-1} \int_u^{t_{n-1}} \Phi_n(t_{n-1}, t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^{t_{n-2}} dt_{n+1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} - 1} \Phi_n(t_{n-1}, t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^{t_{n-2}} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n-2}} t_{n-1}^{\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} - 1} dt_{n-1} \int_{t_{n+1}}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n. \end{aligned}$$

Вводя новые обозначения и продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned} & \int_u^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \dots \int_u^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n \int_u^{t_n} \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} = \\ &= \int_u^t \varphi_{n+1}(t_{n+1}) dt_{n+1} \int_{t_{n+1}}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \dots \int_{t_{n+1}}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n, \end{aligned}$$

или, если обозначить $t_{n+1} = t_0$, получим

$$R_n(u, t) = \int_u^t \varphi_{n+1}(t_0) dt_0 \int_{t_0}^t t_1^{\gamma_1 - 1} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} t_n^{\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1} dt_n.$$

Этим теорема доказана.

В частном случае, когда $\gamma_v = \gamma$, $v = 0, 1, 2, \dots$, получаем

$$R_n(u, t) = \frac{1}{n!} \int_u^t \varphi^{(n+1)}(t_0) (t - t_0)^n dt_0,$$

т. е. известную формулу остаточного члена в формуле Тейлора.

Теорема (1,3). Для всякого $t \in (0, u]$ справедлива формула:

$$\begin{aligned} \omega_k(u, t) &= \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dt_2 \dots \int_u^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1} dt_k = \\ &= \frac{(-1)^k u^{\gamma_k}}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{-z} \frac{dz}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma)}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $x > 0$ — произвольное число.

Действительно, после замены переменных $t_m = ut'_m$ $m=1, 2, \dots, k$, получаем

$$\omega_k(u, t) = u^{\gamma_k} \int_1^{\frac{t}{u}} t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_1^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dt_2 \dots \int_1^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1} dt_k,$$

где $0 < \frac{t}{u} \leq 1$.

Значит

$$\omega_k(u, t) = \frac{(-1)^k u^{\gamma_k}}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \left(\frac{t}{u}\right)^{-z} \frac{dz}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma)}, \quad x > 0. \quad (1.5')$$

См. [1], стр. 35.

§ 2. Одно преобразование обобщенного ряда Тейлора. Если в формуле (1.2) при соблюдении условия сходимости перейти к пределу, получим обобщение тейлоровского разложения функций, а именно:

$$\varphi(t) = \varphi(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(u)}{u^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \omega_k(u, t),$$

или

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k(u, t), \quad t \in (0, u]. \quad (1.6)$$

Определение 3. Условимся называть разложение

$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k(u, t)$, где $u > 0$, $t \in (0, u]$, разложением функции $\varphi(t)$

в обобщенный ряд Тейлора в окрестности точки u .

Заметим, что ряд (1.6) может быть представлен также в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{\gamma_n} a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})} = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}, \end{aligned}$$

$$\text{где } b_n = (-1)^n u^{\gamma_n} a_n = b_n^* \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}, \quad (1.6')$$

$t \in (0, u]$, а $x > 0$ — некоторое число.

Ряды последнего типа при $u=1$ довольно подробно исследованы в работе [1].

В частности, там введено понятие порядка равномерной сходимости ряда (1.6) или (1.6') на $(0, u]$, которое определяется следующим образом.

Определение 4. Назовем κ — порядком равномерной сходимости (короче п. р. с.) ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, t)$ на сегменте $[0, u]$, если при вся-

ком $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\kappa+\varepsilon} \omega_n(u, t)$ сходится равномерно на $[0, u]$, тогда как ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\kappa-\varepsilon} \omega_n(u, t)$$

на $[0, u]$ этим свойством не обладает.

Теорема (1, 4). Если функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$ разлагается в факториальный ряд по последовательности $\{\gamma_{\nu}\}$ и начиная с $\nu=1$, $\gamma_{\nu} > \gamma_{\nu-1}$, то функция $f(z)$ разлагается в факто-

риальный ряд также по последовательности $\{\gamma'_v\}$, если только $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_v} = \infty$, причем каждая точка σ , $\text{Im}(\sigma) = 0$ сходимости первого ряда является точкой сходимости и преобразованного ряда.

Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. Пусть последовательности положительных чисел $\{\gamma_v\}$ и $\{\gamma'_v\}$ удовлетворяют условиям $\gamma'_v \geq \gamma_v$, $v = 1, 2, \dots$ тогда

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^v (\zeta + \gamma_k)} d\zeta \geq 0, \quad (1.7)$$

где простой контур C охватывает окрестности точек $\{-\gamma_k\}$ $k = 1, 2, \dots, v$.

Для доказательства леммы разделим 2 случая:

$$1. n < v-1, \quad 2. n \geq v-1.$$

В первом случае в силу того, что подынтегральная функция во внешней к контуру C области не имеет особых точек, получаем, что $I_n = 0$.

В случае $n \geq v-1$ лемма доказывается путем представления

$\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)$ в виде

$$\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k) = M_0 + \sum_{s=1}^n M_s \prod_{k=1}^s (\zeta + \gamma_s).$$

Покажем, что полученные таким образом коэффициенты $M_0, M_1, \dots, M_n$ не отрицательны. Для этого обозначим $\gamma'_1 - \gamma_1 = \beta_{11}$, тогда имеем $\zeta + \gamma'_1 = \zeta + \gamma_1 + \beta_{11}$. Далее

$$\begin{aligned} (\zeta + \gamma'_1)(\zeta + \gamma'_2) &= (\zeta + \gamma_1 + \beta_{11})(\zeta + \gamma'_2) = (\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma'_2) + \\ &+ (\beta_{11} + \beta_{22})(\zeta + \gamma_1) + \beta_{11}\beta_{21}, \end{aligned}$$

где $\beta_{11} + \beta_{22} > 0$, $\beta_{11}, \beta_{21} > 0$.

Пусть теперь

$$\prod_{k=1}^{n-1} (\zeta + \gamma'_k) = M'_0 + \sum_{s=1}^{n-1} M'_s \prod_{k=1}^s (\zeta + \gamma_k), \quad \text{где } M'_s \geq 0.$$

Имеем

$$\prod_{k=0}^s (\zeta + \gamma_k) (\zeta + \gamma'_n) = \prod_{k=1}^{s+1} (\zeta + \gamma_k) + \beta_{n,s+1} \prod_{k=1}^s (\zeta + \gamma_k).$$

Значит

$$\prod_{k=0}^n (\zeta + \gamma'_n) = \sum_{s=1}^n M_s \prod_{k=1}^s (\zeta + \gamma_k) + M_0,$$

где $M_s > 0$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, что при $n \geq \nu - 1$.

$$I_{\nu 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^{\nu} (\zeta + \gamma_k)} d\zeta = \frac{M_{\nu-1}}{2\pi i} \int_C \frac{d\zeta}{\zeta + \gamma_{\nu}} \geq 0.$$

Этим лемма доказана.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее замечание.

Замечание 1. Если функция $f(z)$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$ разлагается в факториальный ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}$, то обязательно $f(z)$ при

$\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$ представляется интегралом

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt, \quad \text{где } \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_1-i\infty}^{z_1+i\infty} t^{-z} f(\zeta) d\zeta, \quad z_1 > \sigma_c \quad (1.8)$$

См. [1] стр. 37.

Лемма 2. Если функция $f(z)$ при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$ разлагается в факториальный ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_{\nu})}$, то функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_1-i\infty}^{z_1+i\infty} t^{-z} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } z_1 > \sigma_c, \quad (1.9)$$

разлагается в обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{|z|=1}^{\infty} \frac{t^{-z} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

с порядком равномерной сходимости λ , равным σ_c .

Для доказательства леммы составим формальный ряд

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-z} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)},$$

где $0 < t \leq 1$, C_n — окружность $|\zeta + \gamma_n| = \gamma_n + \sigma_0$, а $\sigma_0 > 0$ — произвольное число.

Покажем, что этот ряд сходится на $(0, 1]$ и его порядок равномерной сходимости на $[0, 1]$ равен σ_c .

Обозначим

$$A_n = \frac{a_n}{\prod_{v=1}^n (\sigma_v + \gamma_v)}, \quad B_n = \frac{\prod_{v=1}^n (\sigma_v + \gamma_v)}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{t^{-z} d\zeta}{\prod_{k=0}^n (\zeta + \gamma_k)},$$

где $\sigma_1 > \sigma_c > 0$ — произвольное число, и применим к сумме $\Phi_{pq}(t) =$

$= \sum_{n=p}^q A_n B_n$ преобразование Абеля.

Для этого оценим

$$B_v - B_{v+1} = \frac{\prod_{k=1}^v (\sigma_k + \gamma_k)}{2\pi i} \int_{C_{v+1}} \frac{(\zeta - \sigma_1) t^{-z}}{\prod_{k=0}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} d\zeta.$$

Нетрудно заметить, что

$$|B_v - B_{v+1}| < C \frac{\prod_{k=1}^v (\sigma_k + \gamma_k)}{\prod_{k=1}^{v+1} (\sigma_k + \gamma_k)} t^{-\sigma_c},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Аналогичной оценкой получим

$$|B_q| < C \frac{\prod_{k=1}^q (\sigma_1 + \gamma_k)}{\prod_{k=1}^q (\sigma_0 + \gamma_k)} t^{-\sigma_0}.$$

Заметив еще, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \prod_{\nu=0}^n (\sigma_1 + \gamma_{\nu})^{-1}$ при $\sigma_1 > \sigma_0 > 0$ сходится, будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q A_n B_n \right| &= \left| \sum_{\nu=p}^{q-1} (B_{\nu} - B_{\nu+1}) \sum_{m=p}^{\nu} A_m + B_q \sum_{m=p}^q A_m \right| \leq \\ &\leq \varepsilon(p, q) \left\{ \sum_{\nu=p}^{q-1} |B_{\nu} - B_{\nu+1}| + |B_q| \right\}, \end{aligned}$$

где $\varepsilon(p, q) = \max_{p < m < q} \left| \sum_{\nu=p}^m \frac{a_{\nu}}{\prod_{k=1}^{\nu} (\sigma_1 + \gamma_k)} \right|$ и стремится к нулю, когда $p \rightarrow \infty$.

Следовательно

$$|\Phi_{p,q}(t)| = \left| \sum_{n=p}^q A_n B_n \right| < c \varepsilon(p, q) t^{-\sigma_0} \left\{ \sum_{\nu=p}^{q-1} \frac{\prod_{k=1}^{\nu} (\sigma_1 + \gamma_k)}{\prod_{k=1}^{\nu+1} (\sigma_0 + \gamma_k)} + \prod_{k=1}^q \frac{\sigma_1 + \gamma_k}{\sigma_0 + \gamma_k} \right\},$$

причем известно, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\nu} (\sigma_1 + \gamma_k) \prod_{k=1}^{\nu+1} (\sigma_0 + \gamma_k)^{-1}$ при $\sigma_0 > \sigma_1 > 0$ сходится.

Этим, в силу произвольности $\sigma_0 > \sigma_1 > \sigma_c$, доказано, что показатель равномерной сходимости ряда функции $\Phi(t)$ на $[0, 1]$ не больше σ_c .

Покажем теперь, что при $t \in (0, 1]$ $\Phi(t) \equiv \varphi(t)$. Действительно, известна теорема: если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ непрерывных на $[a, b]$ функций $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ сходится равномерно и существует интеграл $\int_a^b |\psi(x)| dx$, тогда

$$\int_a^b \psi(x) \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b \psi(x) \bar{f}_n(x) dx.$$

См. [2] стр. 495.

Нами установлено, что ряд

$$t^{\sigma_c + \delta} \Phi_{p, \infty}(t) = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t) t^{\sigma_c + \delta},$$

где $\delta > 0$ — произвольное число, на $[0, 1]$ сходится равномерно.

Известно также, что существует интеграл $\int_0^1 t^{z-1} dt$. Следовательно, согласно вышеприведенной теореме, при $\operatorname{Re}(z) \geq \sigma_c + 2\delta$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} \Phi(t) dt &= \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \int_0^1 t^{z-1} \omega_n(1, t) dt. \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^1 t^{z-1} \omega_n(1, t) dt = \frac{(-1)^n}{\prod_{\gamma=\gamma_n} (z + \gamma_n)}.$$

Значит

$$\int_0^1 t^{z-1} \Phi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\gamma=\gamma_n} (z + \gamma_n)} = \bar{f}(z),$$

или, согласно формуле обращения Меллина,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} t^{-z} \bar{f}(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } \sigma \geq \sigma_c.$$

Сравнивая эту формулу с (1.9), заключаем, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ для всех $t \in (0, 1]$.

Таким образом показано, что

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t), \quad 0 < t \leq 1,$$

и его п. р. с. σ на $[0, 1]$ не больше σ_c , т. е. $\sigma \leq \sigma_c$.

С другой стороны, покажем, что $\kappa \geq \sigma_c$.

Допустим, что $\kappa < \sigma_c$, тогда ряд

$$t^{\kappa+\delta} \varphi_{p\infty}(t) = \sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t) t^{\kappa+\delta}, \quad p \geq 0, \quad \kappa < \kappa + 2\delta < \sigma_c,$$

сходится равномерно на всем $[0, 1]$.

Следовательно, при $\operatorname{Re}(z) \geq \kappa + 2\delta$

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \int_0^1 t^{z-1} \omega_n(1, t) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n \prod_{\gamma=0} (z + \gamma_n)}. \end{aligned}$$

Получили, что ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n \prod_{\gamma=0} (z + \gamma_n)}$$

сходится при $\operatorname{Re}(z) = \kappa + 2\delta < \sigma_c$, что противоречит условию леммы.

Значит $\kappa = \sigma_c$ и этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если порядок равномерной сходимости ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t), \quad t \in (0, 1]$$

на $[0, 1]$ равен $\kappa > 0$, тогда функция

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt$$

разлагается в факториальный ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n \prod_{\gamma=0} (z + \gamma_n)}$$

с абсциссой сходимости $\sigma_c = \kappa$.

Действительно, при $\operatorname{Re}(z) > \kappa$, имеем

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \omega_n(1, t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n \prod_{\gamma=0} (z + \gamma_n)}.$$

Значит, согласно лемме 2, абсцисса сходимости последнего ряда σ_c не больше, а также не меньше α , т. е. $\sigma_c = \alpha$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы.

$$\text{Пусть } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_{\nu})}, \quad \text{где } \operatorname{Re}(z) > \sigma_c.$$

Тогда ассоциированная с $f(z)$ функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-\zeta} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } x > \sigma_c,$$

будет иметь сходящееся разложение

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma_{\nu})}, \quad (1.10)$$

порядок равномерной сходимости которого равен σ_c (лемма 2).

Разложим теперь функцию $\varphi(t)$ на $0 < t \leq 1$ в обобщенный ряд Тейлора по последовательности $\{\gamma_{\nu}\}$.

$$\text{Имеем } \varphi(t) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k a_k \omega_k(1, t) + R_{n+1}^{(0)}(t),$$

где

$$\omega_k(1, t) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \gamma_{\nu})} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \gamma_{\nu})},$$

а простой контур C_k охватывает окрестности точек

$$0, -\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_k.$$

Запишем обобщенные формулы Тейлора для функций $\{\omega_k(1, t)\}$ $\nu = 1, 2, \dots$ по последовательности $\{\gamma_{\nu}\}$.

Имеем

$$\omega_0(1, t) = 1 = \omega_0'(1, t),$$

$$\omega_1(1, t) = 0 + \alpha_1^{(1)} \omega_1'(1, t) + \alpha_2^{(1)} \omega_2'(1, t) + \dots + \alpha_n^{(1)} \omega_n'(1, t) + R_{n+1}^{(1)}(t),$$

$$\omega_2(1, t) = 0 + 0 + \alpha_2^{(2)} \omega_2'(1, t) + \dots + \alpha_n^{(2)} \omega_n'(1, t) + R_{n+1}^{(2)}(t),$$

.....

$$\omega_n(1, t) = 0 + 0 + \dots + 0 + \alpha_n^{(n)} \omega'_n(1, t) + R_{n+1}^{(n)}(t),$$

$$\omega_{n+1}(1, t) = 0 + 0 + \dots + 0 + 0 + R_{n+1}^{(n+1)}(t),$$

где

$$\omega'_k(1, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_k} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \gamma'_\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^k (\zeta + \gamma'_\nu)}, \quad x > 0.$$

Умножая полученные тождества соответственно на $(-1)^k a_k$, $k = 0, 1, \dots, n+1$ и суммируя, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & b_0 + b_1 \omega'_1(1, t) + \dots + b_n \omega'_n(1, t) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^\nu a_\nu R_{n+1}^{(\nu)}(t) + R_{n+1}^{(0)}(t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$b_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k a_k \alpha_k^{(\nu)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad b_0 = a_0, \quad R_{n+1}^{(0)} = \sum_{k=n+2}^{\infty} (-1)^k a_k \omega(1, t)$$

$$\text{Оценим } \left| \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^\nu a_\nu R_{n+1}^{(\nu)}(t) + R_{n+1}^{(0)}(t) \right|.$$

Для этого рассмотрим

$$r_n(z) = \int_0^1 t^{z-1} \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^\nu a_\nu R_{n+1}^{(\nu)}(t) dt. \quad (1.12)$$

Для оценки $|r_n(z)|$ сверху заметим, что

$$R_{n+1}^{(\nu)}(t) = \int_1^t t_1^{z-1} dt_1 \dots \int_1^{t_{n-1}} t_n^{z-\gamma_{n-1}-1} dt_n \int_1^{t_n} \omega_\nu^{[n+1]}(1, t_{n+1}) dt_{n+1},$$

где

$$\omega_\nu^{[n+1]}(1, t) = \frac{(-1)^{n+1+\nu}}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{t^{-\zeta-\gamma_{n-1}-1} \prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^{\nu} (\zeta + \gamma'_k)} d\zeta$$

и является $n+1$ -ой обобщенной производной $\omega_\nu(1, t)$ по последовательности $\{\gamma'_\nu\}$, а контур C_ν охватывает окрестности нулей функции

$$\prod_{k=1}^{\nu} (\zeta + \gamma'_k).$$

Составим теперь

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt, \quad \text{где } \operatorname{Re}(z) > \sigma_c.$$

Будем иметь

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = \sum_{\nu=0}^n \frac{b_\nu (-1)^\nu}{\prod_{\gamma=0}^n (z + \gamma'_\nu)} + \int_0^1 t^{z-1} R_{n+1}^{(0)}(t) dt + r_n(z),$$

где $\int_0^1 t^{z-1} R_{n+1}^{(0)}(t) dt \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$ (лемма 3), а

$$\begin{aligned} r_n(z) &= \sum_{\nu=1}^{n+1} \int_0^1 t^{z-1} (-1)^\nu a_\nu R_{n+1}^{(\nu)}(t) dt = \sum_{\nu=1}^n \frac{(-1)^{n+1} a_\nu}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{C_\nu} \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma_k)} \left(\int_0^1 t^{z-1} dt \int_1^1 t_1^{z-1} dt_1 \dots \right. \\ &\dots \left. \int_1^{t_{n-1}} t_n^{z-1} dt_n \int_1^{t_n} t_{n+1}^{z-1} dt_{n+1} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Покажем, что при $\operatorname{Re}(z) > \sigma > \sigma_c$ $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z) = 0$.

Имеем

$$\int_0^1 t^{z-1} (-1)^\nu a_\nu R_{n+1}^{(\nu)}(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} a_\nu}{2\pi i} \int_{C_\nu} \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k) d\zeta}{\prod_{k=0}^n (z + \gamma'_k) \prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma_k) (z - \zeta)},$$

где $\sigma_1 = \operatorname{Re}(z) > \sigma = \max \operatorname{Re}(\zeta)$, когда $\zeta \in C_\nu$.

Таким образом получаем

$$r_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{n+1} \int_{C_\nu} \frac{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=0}^n (z + \gamma'_k)} \frac{a_\nu}{\prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma_k)} \frac{d\zeta}{z - \zeta} \quad (1.12')$$

Для оценки сверху модуля полученной суммы будем пользоваться преобразованием Абеля.

Имеем

$$r_n(\sigma_1) = r_n(z) = \sum_{v=1}^{n+1} A_v B_v = \sum_{v=1}^N A_v B_v + \sum_{v=N+1}^{n+1} A_v B_v,$$

где $1 < N < n$,

$$A_v = \frac{a_v}{\prod_{k=1}^v (\sigma + \gamma_k)}, \quad B_v = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_v}^{\zeta_{v+1}} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \prod_{k=1}^v \frac{\sigma + \gamma_k}{\zeta + \gamma_k} \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta},$$

$$\text{а } z = \operatorname{Re}(z) = \sigma_1 > \sigma_c.$$

Начнем с оценки второй суммы.

Имеем

$$\sum_{v=N+1}^{n+1} A_v B_v = \sum_{v=N+1}^n (B_v - B_{v+1}) \sum_{m=N+1}^v A_m + B_{n+1} \sum_{m=N+1}^{n+1} A_m, \quad (1.13)$$

откуда

$$\left| \sum_{v=N+1}^{n+1} A_v B_v \right| \leq \max_{N+1 < v < n+1} \left| \sum_{m=N+1}^v A_m \right| \cdot \left(\sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}| \right). \quad (1.13')$$

Оценим сверху $\sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}|$.

Согласно лемме 1, при $\sigma_1 = \sigma > \sigma_c$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}| &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta_{n+1}}^{\zeta_{n+2}} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \prod_{v=1}^n \frac{\sigma + \gamma_v}{\zeta + \gamma_v} \times \right. \\ &\times \left(\frac{1}{\zeta + \gamma_{N+1}} + \frac{\sigma + \gamma_{N+1}}{(\zeta + \gamma_{N+1})(\zeta + \gamma_{N+2})} + \dots + \frac{\prod_{k=N+1}^n (\sigma + \gamma_k)}{\prod_{k=N+1}^{n+1} (\zeta + \gamma_k)} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{\prod_{k=N+1}^{n+1} (\sigma + \gamma_k)}{(\zeta - \sigma) \prod_{k=N+1}^{n+1} (\zeta - \gamma_k)} \right) \frac{\zeta - \sigma}{\sigma_1 - \zeta} d\zeta \right| + 2|B_{n+1}|. \end{aligned} \quad (1.13'')$$

Действительно, имеем

$$|B_v - B_{v+1}| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{C_{v+1}} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \frac{\prod_{k=1}^v (\sigma + \gamma_k)}{\prod_{k=1}^v (\zeta + \gamma_k)} \left(1 - \frac{\sigma + \gamma_{v+1}}{\zeta + \gamma_{v+1}}\right) \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right|,$$

или в силу леммы 1,

$$|B_v - B_{v+1}| = \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_{v+1}} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \frac{\prod_{k=1}^v (\sigma + \gamma_k)}{\prod_{k=1}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} \frac{\zeta - \sigma}{\sigma_1 - \zeta} d\zeta.$$

Подставляя значения $|B_v - B_{v+1}|$ и $|B_{n+1}|$ в выражение

$$\sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}|$$

получим (1.13'').

Легко заметить, что из (1.13'') следует

$$\begin{aligned} \sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_C \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \prod_{v=1}^N \frac{\sigma + \gamma_v}{\zeta + \gamma_v} \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right| + \\ &+ 2|B_{n+1}|. \end{aligned} \quad (1.13''')$$

В качестве контура C возьмем $|\zeta + \gamma_N| = \gamma_N + z$, где $0 < z < \sigma = \sigma_1$, тогда

$$\max_{\zeta \in C} \left| \frac{\prod_{k=1}^N (\zeta + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^N (\zeta + \gamma_k)} \right| = \frac{\prod_{k=1}^N (z + \gamma'_k)}{\prod_{k=1}^N (z + \gamma_k)}.$$

См. [1], гл. II, лемма 3.

В силу последнего неравенства при $\sigma > z$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}| &\leq \prod_{k=1}^n \frac{(z + \gamma'_k)}{\sigma + \gamma'_k} \cdot \prod_{v=1}^N \frac{\sigma + \gamma_v}{z + \gamma_v} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{d\zeta}{\sigma - \zeta} \right| + 2|B_{n+1}| = \\ &= C(N, z, \sigma) \prod_{k=1}^n \frac{z + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} + 2|B_{n+1}|, \end{aligned}$$

где

$$C(N, z, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{d\zeta}{\zeta - \sigma} \right| \prod_{v=1}^N \frac{\sigma + \gamma_v}{z + \gamma_v}.$$

Таким образом получаем

$$\sum_{v=N+1}^n |B_v - B_{v+1}| + |B_{n+1}| \leq C(N, z, \sigma) e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_1 + \gamma'_k}} + 2|B_{n+1}|.$$

Значит

$$\left| \sum_{v=N+1}^{n+1} A_v B_v \right| \leq \varepsilon_{N,n} [C(N, z, \sigma) e^{-\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma_1 + \gamma'_k}} + 2|B_{n+1}|],$$

где $\varepsilon_{N,n} = \max_{N+1 < k < n+1} \left| \sum_{k=N+1}^v A_k \right|$ и стремится к нулю, когда N беспрестанно возрастает, а $|B_{n+1}|$ — ограничено.

Очевидно, что взяв N и n достаточно большими, будем иметь

$$\left| \sum_{v=N+1}^{n+1} A_v B_v \right| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (1.14')$$

где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Оценим теперь сверху $\left| \sum_{v=1}^N A_v B_v \right| = \left| \sum_{v=1}^N A'_v B'_v \right|$, где

$$A'_v = \frac{a_v}{\prod_{k=1}^v (z + \gamma_k)}, \quad B'_v = \frac{i}{2\pi i} \int_C \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \prod_{k=1}^v \frac{z + \gamma_k}{\zeta + \gamma_k} \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta},$$

причем в качестве контура C , опять берем окружность $|\zeta + \gamma_1| = \gamma_1 + \sigma$, $0 < z < \sigma = \sigma_1$.

Имеем

$$|B'_v| < C_N \prod_{k=1}^n \frac{z + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k}, \quad \text{а } |B'_v - B'_{v+1}| < 2C_N \prod_{k=1}^n \frac{z + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k},$$

где $C_N = \max_{1 < v < N} \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right|$

Значит

$$\left| \sum_{v=1}^N A_v B_v \right| \leq \max_{1 \leq \mu \leq N} \left| \sum_{v=1}^{\mu} \frac{a_v}{\prod_{k=1}^v (\alpha + \gamma_k)} \right| \cdot \left(\sum_{v=1}^{N-1} |B'_v - B'_{v+1}| + |B'_N| \right),$$

или

$$\left| \sum_{v=1}^N A_v B_v \right| < 2NC_N \max_{1 \leq \mu \leq N} \left| \sum_{v=1}^{\mu} \frac{a_v}{\prod_{k=1}^v (\alpha + \gamma_k)} \right| e^{-(\alpha_1 - \alpha) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_1 + \gamma'_k}}.$$

Зная, что $\alpha_1 > \alpha$ и взяв n достаточно большим, будем иметь

$$\left| \sum_{v=1}^N A_v B_v \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.14'')$$

Из (1.14') и (1.14'') получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=1}^{n+1} A_v B_v \right| &= |r_n(\sigma_1)| = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{v=1}^{n+1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1 + \gamma'_k} \prod_{k=1}^n \frac{\zeta + \gamma'_k}{\sigma_1 + \gamma'_k} \times \right. \\ &\times \left. \frac{a_v}{\prod_{k=1}^v (\zeta + \gamma_k)} \cdot \frac{d\zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.14)$$

т. е. $r_n(\sigma_1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sigma_1 = \sigma$.

Этим теорема (1.4) доказана.

Заметим, что нами теорема (1.4) доказана в более сильной формулировке, а именно:

Теорема (1.5). Если функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$ разлагается в факториальный ряд по последовательности $\{\gamma_v\}$ и начиная с $v=1$, $\gamma'_v \geq \gamma_v$, то функция $f(z)$ разлагается в факториальный ряд также по последовательности $\{\gamma'_v\}$, если только $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_v} = \infty$, причем абсцисса сходимости нового ряда удовлетворяет условию

$$\sigma'_c \leq \sigma_c.$$

Это следует из того, что в доказательстве предыдущей теоремы мы берем $\sigma_1 = \sigma$.

Нетрудно заметить, что теорему (1.5) можно выразить также в терминах функции $\varphi(t)$, а именно:

Теорема (1.6). Пусть функция $\varphi(t)$ в окрестности точки $t=1$ разлагается в сходящийся на $(0, 1]$ обобщенный ряд Тейлора по

последовательности $\{\gamma_n\}$ с порядком равномерной сходимости, равным $\kappa > 0$; тогда функция $\varphi(t)$ в окрестности точки $t=1$ разлагается в сходящийся на $(0, 1]$ ряд также по последовательности $\{\gamma'_n\}$,

где начиная с $n=1$ $\gamma'_n \geq \gamma_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_n} = \infty$, причем порядок равномерной сходимости последнего ряда не больше κ .

Для доказательства теоремы заметим, что формула

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_{\nu})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma'_{\nu})}$$

справедлива при $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c = \kappa$.

Применяя теперь формулу обращения Меллина, будем иметь

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} t^{-\zeta} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } x_1 > \kappa,$$

или

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \omega_n(1, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n \omega'_n(1, t),$$

$$\text{где } \omega'_n(1, t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^n (\zeta + \gamma'_{\nu})}.$$

Этим теорема доказана.

В заключение параграфа заметим, что из замечания 1 и лемм 2 и 3 теоремы (1.4) следует также:

• Теорема (1.7). Для того, чтобы функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c > 0$ разлагалась в сходящийся факториальный ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\prod_{\nu=0}^n (z + \gamma_{\nu})},$$

необходимо и достаточно, чтобы она представлялась интегралом Лапласа

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt,$$

где функция $\varphi(t)$ на $(0, 1]$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{t^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}, \quad x_1 > \sigma_c$$

с порядком равномерной сходимости κ , равным σ_c .

§ 3. Оценки n -ой производной функции по ее обобщенному ряду Тейлора. В настоящем параграфе мы покажем, что если функция $\varphi(t)$ разлагается в обобщенный ряд Тейлора, то ее n -ая производная (обычная) должна быть соответствующим образом ограничена.

Теорема (1.8). Пусть функция $\varphi(t)$ в окрестности точки $u > 0$ разлагается в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(t) = \varphi(u) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a_v \prod_{k=1}^v \gamma_k}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod_{k=1}^v (\zeta + \gamma_k)}, \quad (1.15)$$

где показатель сходимости последовательности чисел $\{\gamma_v\}$ — отличное от нуля число, $\kappa > \sigma_c$, а $\sigma_c > 0$ — абсцисса сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-z \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}\right) — \text{конечное число.}$$

$$\text{Тогда} \quad |\varphi^{(n)}(t)| < C(x) \prod_{v=1}^n (x + \gamma_v) (e^2 \omega_n)^n t^{-x-n}, \quad (1.16)$$

здесь $C(x) > 0$ — некоторая постоянная, $t \in (0, u]$,

$$\omega_n = \max_{1 \leq v \leq n} \left(1 + \frac{\gamma_v}{\gamma_1}\right).$$

Для доказательства теоремы докажем 3 леммы.

Лемма 1. Для любых целых положительных чисел v, n при $x \in [\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$, справедливо неравенство:

$$J_{v,n} = \frac{\prod_{k=1}^{v+1} \gamma_k}{2\pi} \left| \int_{C_{v+1}} \frac{e^{\zeta(x-\alpha)} \zeta^n}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} d\zeta \right| < C(x) \prod_{k=1}^n \gamma_k (2 + \varepsilon)^n e^{x(x-\alpha)}, \quad (1.17)$$

где C_{v+1} — окружность $|\zeta + \gamma_{v+1}| = \gamma_{v+1} + 2x$, ($x > 0$) $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, пока-

затель сходимости $\{\gamma_n\}$ отличное от нуля число, а $C(x) > 0$ — некоторая постоянная.

Для доказательства рассмотрим отдельно два случая:

$$1. n \geq \nu, \quad 2. n < \nu.$$

1. Начнем с первого случая.

Прежде всего заметим, что согласно лемме 3 гл. II работы [1] при обозначении $2\gamma_n + x = d$ имеем

$$\max_{\zeta \in C_\nu} \left| \frac{\zeta^{\nu+1}}{\prod_{k=1}^{\nu+1} (\zeta + \gamma_k)} \right| \leq \frac{d^{\nu+1}}{\prod_{k=1}^{\nu+1} (d - \gamma_k)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\nu+1} \left(1 - \frac{\gamma_k}{d}\right)};$$

но $\frac{\gamma_{\nu+1}}{d} < \frac{1}{2}$, значит для всех $k \leq \nu + 1$ будем иметь

$$1 - \frac{\gamma_k}{d} > \frac{1}{2}.$$

следовательно

$$\max_{\zeta \in C_{\nu+1}} \left| \frac{\zeta^{\nu+1}}{\prod_{k=1}^{\nu+1} (\zeta + \gamma_k)} \right| < 2^{\nu+1}. \quad (1.18)$$

С другой стороны, при $\zeta \in C_{\nu+1}$

$$\begin{aligned} |\zeta^{n+1-(\nu+1)}| &\leq d^{n+1-(\nu+1)} = d^{n-\nu} = (2\gamma_{\nu+1} + x)^{n-\nu} < \\ &< C(x)(2 + \varepsilon_1)^{n-\nu} \gamma_{\nu+1}^{n-\nu}, \quad \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (1.18')$$

Из (1.18) и (1.18') следует, что

$$\begin{aligned} J_{\nu n} &= \frac{\prod_{k=1}^{\nu+1} \gamma_k}{2\pi} \int_{C_{\nu+1}} \left| \frac{e^{\zeta(x-\alpha)} \zeta^{n+1}}{\zeta^2 \prod_{k=0}^{\nu+1} (\zeta + \gamma_k)} d\zeta \right| \leq C(x) \prod_{k=1}^{\nu+1} \gamma_k \times \\ &\times \gamma_{\nu+1}^{n-\nu} (2 + \varepsilon_1)^{n+1} e^{x(x-\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_{C_{\nu+1}} \left| \frac{d\zeta}{\zeta^2} \right|, \end{aligned}$$

или

$$J_{\nu n} < C_0 \gamma_n \prod_{k=1}^n \gamma_k (2 + \varepsilon_1)^{n+1} e^{x(x-\alpha)}, \quad (1.17)$$

где $C_0 > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от x_1 и n .

2. При $n < \nu$ имеем

$$\max_{\zeta \in C_{v+1}} \left| \frac{\zeta^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n+1} (\zeta + \gamma_k)} \right| \leq 2^{n+1} \text{ и } \max_{\zeta \in C_{v+1}} \frac{1}{\prod_{k=n+2}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} = \frac{1}{\prod_{k=n+2}^{v+1} (z + \gamma_k)}.$$

Значит

$$J_{v,n} \leq C_0'' \frac{\prod_{k=1}^{v+1} \gamma_k \cdot 2^{n+1} e^{z(x-a)}}{\prod_{k=n+2}^{v+1} (z + \gamma_k)},$$

или

$$J_{v,n} \leq C_0'' \gamma_{n+1} \prod_{k=1}^n \gamma_k (2 + \varepsilon_i)^{n+1} e^{z(x-a)}. \quad (1,17'')$$

Зная, что показатель сходимости последовательности $\{\gamma_n\}$ отличное от нуля число, при любом n и v окончательно получим

$$J_{v,n} \leq C_1(z) \prod_{k=1}^n \gamma_k \cdot (2 + \varepsilon)^n e^{z(x-a)}.$$

Этим лемма доказана.

Лемма 2. При выполнении условий теоремы, ряд

$$\phi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{z(x-a)}}{\zeta \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} d\zeta$$

на любом сегменте $[z, \alpha_0]$, где $0 \leq z < \alpha_0 < \infty$, можно почленно дифференцировать любое число раз, не нарушая его равномерную сходимость.

Лемма будет доказана, если покажем, что ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{z(x-a)} \zeta^n}{\zeta \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} d\zeta,$$

при произвольном целом $n \geq 0$, сходится равномерно на любом сегменте $[z, \alpha_0]$, где $0 \leq z < \alpha_0 < \infty$.

Для этого, зная, что ряд $\sum_{v=1}^{\infty} a_v \exp(-\sigma \lambda_v)$, где $\sigma > \sigma_c$, $\lambda_v =$

$$= \sum_{k=1}^v \frac{1}{\gamma_k}, \text{ сходится, составим сумму}$$

$$\sum_{v=p}^q A_v B_v = \sum_{v=p}^{q-1} (B_v - B_{v+1}) \sum_{m=p}^v A_m + B_q \sum_{m=p}^q A_m,$$

где

$$A_v = a_v e^{-z^{\lambda_v}}, \quad B_v = \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n}{\zeta \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} d\zeta.$$

Для оценки сверху $\left| \sum_{v=p}^q A_v B_v \right|$ нам достаточно оценить

$$|B_q| \quad \text{и} \quad |B_v - B_{v+1}|.$$

Из леммы I имеем

$$|B_q| < \prod_{v=1}^n (x + \gamma_k) e^{-(x-\alpha)\lambda_v} (2+\varepsilon)^n e^{x(x-\alpha)},$$

где

$$x > x_1 > \sigma > \sigma_c$$

Оценим теперь сверху $|B_v - B_{v+1}|$.

Имеем

$$|B_v - B_{v+1}| = \frac{e^{\lambda_v x}}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n}{\zeta \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} d\zeta - \frac{e^{\lambda_{v+1} x}}{2\pi i} \int_{C_{v+1}} \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} d\zeta;$$

значит

$$|B_v - B_{v+1}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_{v+1}} \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n e^{\lambda_v x}}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} \left[1 + \frac{\zeta}{\gamma_{v+1}} - e^{\frac{x}{\gamma_{v+1}}} \right] d\zeta \right|.$$

Заменим $e^{\frac{x}{\gamma_{v+1}}}$ через $1 + \frac{C(\sigma, v)}{\gamma_{v+1}}$, где $C(\sigma, v) > 0$ — ограниченное число.

Учитывая последнее обстоятельство, получим

$$|B_v - B_{v+1}| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_{v+1}} \frac{e^{z(x-\alpha)} \zeta^n e^{\lambda_v x}}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} \left[\frac{C(\sigma, v)}{\gamma_{v+1}} + \frac{\zeta}{\gamma_{v+1}} \right] d\zeta \right|,$$

или

$$|B_v - B_{v+1}| < \frac{C(\sigma_1 v) e^{\lambda_v \sigma} \prod_{k=1}^{v+1} \gamma_k}{2\pi \gamma_{v+1}} \int_{\zeta_{v+1}} \left| \frac{e^{\zeta(x-\sigma)} \zeta^n d\zeta}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} \right| + \\ + \frac{e^{\lambda_v \sigma} \prod_{k=1}^{v+1} \gamma_k}{2\pi \gamma_{v+1}} \int_{\zeta_{v+1}} \left| \frac{e^{\zeta(x-\sigma)} \zeta^{n+1}}{\zeta \prod_{k=1}^{v+1} (\zeta + \gamma_k)} d\zeta \right|.$$

В силу леммы I получаем

$$|B_v - B_{v+1}| < C \prod_{k=1}^n (x + \gamma_k) (2 + \varepsilon)^n e^{x(x-\sigma)} \frac{e^{\lambda_v (x-x_1)}}{\gamma_{v+1}} + \\ + C \prod_{k=1}^{n+1} (x + \gamma_k) (2 + \varepsilon)^{n+1} e^{x(x-\sigma)} \frac{e^{\lambda_v (x-x_1)}}{\gamma_{v+1}},$$

где положено $x > x_1 > \sigma > \sigma_c > 0$.

Таким образом получаем

$$|B_v - B_{v+1}| < C^*(x) \prod_{k=1}^n (x + \gamma_k) (2 + \varepsilon)^n e^{x(x-\sigma)} \frac{e^{\lambda_v (x-x_1)}}{\gamma_{v+1}},$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \frac{1}{2}$, $C^*(x) > 0$ — некоторая постоянная.

Имеем также

$$|B_q| < C(x) \prod_{k=1}^n (x + \gamma_k) e^{-(x_1 - \sigma)\lambda_v} (2 + \varepsilon)^n e^{x(x-\sigma)},$$

где $x > x_1 > \sigma > \sigma_c$.

Теперь нам остается использовать эти оценки в неравенстве:

$$\left| \sum_{v=p}^q A_v B_v \right| \leq \max_{p < v < q} \left| \sum_{m=p}^v A_m \right| \left\{ \sum_{v=p}^{q-1} |B_v - B_{v+1}| + |B_q| \right\}.$$

Получаем:

$$\left| \sum_{v=p}^q \frac{a_v}{2\pi i} \int_{\zeta_v} \frac{e^{\zeta(x-\sigma)} \zeta^n d\zeta}{\zeta \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_k}\right)} \right| = \left| \sum_{v=p}^q A_v B_v \right| < \max_{p < v < q} \left| \sum_{m=p}^v A_m \right| \times$$

$$\times C(x) \prod_{k=1}^n (x + \gamma_k) (2 + \varepsilon')^n e^{x(x-a)} \left\{ \sum_{v=p}^{q-1} \frac{e^{-(x_1-a)\lambda_v}}{\gamma_{v+1}} + e^{-(x_1-a)\lambda_q} \right\}. \quad (1.19)$$

Следовательно, при фиксированном n , для всякого $\varepsilon_0 > 0$ найдется такое $m > 0$, что при $p, q > m = m(\varepsilon_0)$, получим $\left| \sum_{v=p}^q A_v B_v \right| < \varepsilon_0$ для всякого $x \in [\alpha_1, \alpha_0]$.

Этим лемма доказана.

Лемма 3. Пусть функция $\varphi(t)$ дифференцируема не менее чем $n+1$ раз, тогда функция $\psi(x) = \varphi(e^{-x}) = \varphi(t)$ также дифференцируема не менее чем $n+1$ раз и справедлива формула:

$$\varphi_{n+1}(t) = \{ \psi^{(n+1)}(x) + S_1^{(n)} \psi^{(n)}(x) + \dots + S_n^{(n)} \psi'(x) \} e^{(n+1)x}, \quad (1.20)$$

где числа $S_v^{(n)}$, $v = 0, 1, \dots, n$ определяются из тождества

$$\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v) = \sum_{k=0}^n \zeta^{n-k} S_k^{(n)}.$$

Для доказательства леммы заметим, что

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t) = \psi'(x) \frac{dx}{dt} = \psi'(x) e^x,$$

$$\varphi_2(t) = \left(\frac{\varphi_1(t)}{t^{\gamma_1-1}} \right)' = \left[e^{x(\gamma_1-1)} \psi'(x) e^x \right]_1'.$$

Значит $\varphi_2(t) = [\psi''(x) + \gamma_1 \psi'(x)] e^{(\gamma_1+1)x}$.

Далее имеем

$$\varphi_3(t) = \left(\frac{\varphi_2(t)}{t^{\gamma_2-\gamma_1-1}} \right)' = \left[[\psi''(x) + \gamma_1 \psi'(x)] e^{\gamma_1 x} \right]_1',$$

или

$$\varphi_3(t) = [\psi'''(x) + (\gamma_1 + \gamma_2) \psi''(x) + \gamma_1 \gamma_2 \psi'(x)] e^{(\gamma_1+\gamma_2+1)x}.$$

Продолжая этот процесс, получим тождество, утверждаемое леммой.

Докажем теперь теорему (1.8).

Для этого заметим, что в силу леммы 2 имеем

$$\psi^{(n)}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a_v}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{e^{\zeta(x-a)} \zeta^n d\zeta}{\zeta \prod_{k=1}^n (\zeta + \gamma_k)},$$

причем полученный ряд сходится равномерно на всяком сегменте $[z, z_0]$, где $0 \leq z < z_0 < \infty$.

Легко заметить, что для оценки $|\psi^{(n)}(x)|$ сверху, нам достаточно в неравенстве (1.19) полагать $p=0$, $q=\infty$; тогда для достаточно больших n получим

$$|\psi^{(n)}(x)| < C \prod_{k=1}^n (z + \gamma_k) (2 + \varepsilon)^n e^{x(x-z)}, \quad (1.19')$$

где $x \in [z, \infty)$, $C > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от n и x .

Этим теорема еще не доказана, так как в теореме речь идет об оценке сверху $|\varphi^{(n)}(t)|$.

Для оценки $|\varphi^{(n)}(t)|$ заметим, что если в формуле (1.20) леммы 3 положить $\gamma_k = \gamma$, тогда $\gamma_n - \gamma_{n-1} - 1 = 0$; значит $\varphi_n(t) = \varphi^{(n)}(t)$, где

$$\varphi^{(n)}(t) = \left\{ \psi^{(n)}(x) + E_1^{(n-1)} \psi^{(n-1)}(x) + \dots + E_{n-1}^{(n-1)} \psi'(x) \right\} e^{nx}, \quad (1.20')$$

а $E_k^{(n-1)}$ — известные числа Стирлинга и получаются из тождества

$$\prod_{s=1}^{n-1} (\zeta + \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(n-1)} \zeta^{n-1-k}.$$

Оценим теперь сверху $E_k^{(n)}$.

Имеем

$$0 < E_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R} \frac{\prod_{s=1}^n (\zeta + \gamma)}{\zeta^{n-k+1}} d\zeta,$$

откуда

$$0 < E_k^{(n)} < \prod_{s=1}^{n-k} \frac{R + \gamma}{R} \cdot \prod_{s=n-k+1}^n (R + \gamma) = \prod_{s=n-k+1}^n \gamma \prod_{s=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma}{R}\right) \prod_{s=n-k+1}^n \left(1 + \frac{R}{\gamma}\right).$$

Значит

$$0 < E_k^{(n)} < \prod_{s=n-k+1}^n \gamma e^{\frac{1}{R} \sum_{s=1}^{n-k} \gamma + R} \sum_{s=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma}.$$

Примем

$$R = \sqrt{\sum_{s=1}^{n-k} \gamma \left(\sum_{s=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma} \right)^{-1}}, \quad \text{тогда}$$

$$0 < E_k^{(n)} < \prod_{s=n-k+1}^n \gamma \cdot \exp \left(2 \sqrt{\sum_{s=1}^{n-k} \gamma \sum_{s=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma}} \right).$$

или

$$0 < E_k^{(n)} < \prod_{v=n-k+1}^n v \cdot e^n,$$

так как

$$\sum_{v=1}^{n-k} v \sum_{n-k+1}^n \frac{1}{v} < (n-k)[n-(n-k+1)] < (n-k)k \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

Итак:

$$0 < E_k^{(n)} < \prod_{v=n-k+1}^n v \cdot e^n.$$

С другой стороны, для $\varphi^{(n)}(t)$ имеем

$$|\varphi^{(n)}(t)| < e^{nx} \sum_{k=0}^{n-1} E_k^{(n-1)} |\varphi^{(n-k)}(x)|.$$

Учитывая оценку $E_k^{(n)}$, получаем

$$|\varphi^{(n)}(t)| < C e^{nx} \sum_{k=0}^{n-1} e^n \prod_{v=n-k+1}^{n-1} v \cdot \prod_{v=1}^{n-k} (z + \gamma_v) (2 + \varepsilon)^n e^{z(x-n)},$$

где $C = C(z)$ — некоторая постоянная.Из последнего неравенства следует, что для всех n и $0 < \varepsilon' < \frac{1}{2}$

$$|\varphi^{(n)}(t)| < C(z) (e^3 \omega_n)^n \prod_{v=1}^n (z + \gamma_v) e^{(z+n)x},$$

где $\omega_n = \max_{1 \leq v \leq n} \left(1, \frac{v}{\gamma_v}\right)$, $z > \sigma > \sigma_c$, $t \in (0, u]$, $u = e^{-\sigma}$.

Таким образом,

$$|\varphi^{(n)}(t)| < C(z) (\omega_n e^2)^n \prod_{v=1}^n (z + \gamma_v) t^{-x-n}$$

Этим теорема доказана.

ГЛАВА II

РАЗЛОЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И КВАЗИ-АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ В СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ОБОБЩЕННЫЕ РЯДЫ
ТЕЙЛОРА§1. Некоторые свойства последовательности чисел $\{m_n\}$,
определяющей класс функций $C_{\{m_n\}}$ на некотором
сегменте $[a, b]$.

Определение 5. Бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(t)$ на $[a, b]$ принадлежит к классу функций $C_{\{m_n\}}$ на $[a, b]$, если удовлетворяются неравенства

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leq m_n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

для всех $t \in [a, b]$.

См. [1] стр. 49.

Будем рассматривать такие классы $C_{\{m_n\}}$, для которых

$$\int_0^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty, \quad (2.1')$$

где

$$T(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}.$$

Определение 6. Класс функций $C_{\{m_n\}}$ назовем классом $C_{\{\tilde{m}_n\}}$, если существует последовательность чисел $\{\tilde{m}_n\}$ такая, что начиная с некоторого номера p удовлетворяет условиям:

1. Последовательность $\left\{ \frac{\tilde{m}_n}{\tilde{m}_{n-1}} : n \right\}$ монотонно возрастает.

2.
$$\dot{T}(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{\tilde{m}_n} \leq \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n} = T(r).$$

3.
$$\int_0^\infty \frac{\ln \dot{T}(r)}{r^2} dr = \infty.$$

Легко заметить, что все классы аналитических на некотором $[a, b]$ функций удовлетворяют условиям определения 6.

С другой стороны, можно доказать:

Теорема (2.1). Все классы Данжуа квази-аналитических на некотором сегменте $[a, b]$ функций являются классами $C_{\{\tilde{m}_n\}}$.

Для доказательства теоремы предварительно докажем:

Лемма. Пусть имеем функцию

$$y(x) = x(\ln x + k) + \psi(x),$$

где k — некоторое число, а функция $\psi(x)$, начиная с некоторого значения x_0 , имеет положительную вторую производную; тогда последовательность

$$\{y(n) - y(n-1) - \ln n\},$$

начиная с некоторого номера p , монотонно возрастает.

Действительно, обозначим

$$y_1(x) = x(\ln x + k), \quad y_2(x) = \psi(x).$$

Покажем, что

$$\{y_1(n) - y_1(n-1) - \ln n\} \quad \text{при } n > 1 \quad (2.2)$$

монотонно возрастает.

Имеем

$$y_1(n) - y_1(n-1) = n(\ln n + k) - (n-1)[\ln(n-1) + k].$$

Откуда получаем

$$y_1(n) - y_1(n-1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} + k.$$

Из последнего соотношения в силу монотонности функции $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x > 1$ следует монотонное возрастание последовательности (2.2).

С другой стороны, нетрудно заметить, что из положительности второй производной функции $\psi(x)$ при $x > x_0$ следует, что последовательность

$$\{\psi(n) - \psi(n-1)\} \quad \text{при } n > x_0 \quad (2.3)$$

также монотонно возрастает.

Из (2.2) и (2.3) следует, что, начиная с некоторого номера p , последовательность чисел

$$\{y(n) - y(n-1) - \ln n\} \quad (2.4)$$

монотонно возрастает.

Для доказательства теоремы нам остается заметить, что для всякого класса $C_{\{m_n\}}$ квази-аналитических функций Данжуа существует функция

$$y(x) = x(\ln x + k) + \psi(x), \quad \text{такая, что } y(n) = \ln m_n.$$

Это значит, что последовательность чисел $\{m_n\}$, определяю-

щая любой класс квази-аналитических функций Данжуа, уже является последовательностью $\{m_n\}$ и нет необходимости в вспомогательном построении согласно определению 6.

Замечание 2. Заметим, что класс $C_{\{m_n\}}$ при линейном преобразовании инвариантен, а именно при линейном преобразовании сегмента $[a, b]$ на сегмент $[a', b']$ класс функций $C_{\{m_n\}}$ переводится в класс $C_{\{m'_n\}}$, для которого удовлетворяются требования определения 6.

В настоящей работе мы будем рассматривать классы $C_{\{m_n\}}$.

Рассмотрим последовательность чисел $\left\{ \alpha_n = \frac{m_n}{m_{n-1}} \right\}$ и обозначим через $\mu(\gamma)$ модуль максимального члена ряда

$$f(z) = \frac{1}{m_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}. \quad (2.5)$$

Справедливо предложение:

Теорема (2.2). Для любого a , $0 < a < \infty$ ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^a \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)}$$

сходится, если $\beta > \alpha > 0$.

Теорема доказывается при помощи двух простых лемм.

Лемма 1. Обозначим через $\nu(\gamma)$ центральный индекс ряда

$$f(z) = \frac{1}{m_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}. \quad (2.5)$$

Тогда при $0 < \alpha < \beta$ справедливо неравенство:

$$\frac{\mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\nu(\alpha m)}.$$

Обозначим разрывы $\nu(\gamma)$ по порядку их возрастания через $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, где каждое из ρ повторяется столько раз, сколько единиц содержится в величине соответствующего скачка.

Известно, что

$$-\ln |a_n| = -\ln |a_0| + \ln \rho_1 + \ln \rho_2 + \dots + \ln \rho_n.$$

Значит

$$a_n = \frac{a_0}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} = \frac{1}{m_0 \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} \quad (2.6)$$

С другой стороны, имеем

$$a_n = \frac{1}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} \quad (2.6')$$

Сравнивая равенства (2.6) и (2.6'), получаем

$$\rho_n = \alpha_n, \quad n=1, 2, \dots$$

Известно, что с возрастанием r центральный индекс $\nu(r)$ ряда (2.4) монотонно возрастает.

Значит, если обозначить

$$\mu(\alpha m) = \frac{(\alpha m)^{\nu(\alpha m)}}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu(\alpha m)}}, \quad (2.7)$$

тогда для $\mu(\beta m)$ будем иметь оценку

$$\mu(\beta m) = \frac{(\beta m)^{\nu(\beta m)}}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu(\beta m)}} \geq \frac{(\beta m)^{\nu(\alpha m)}}{m_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\nu(\alpha m)}}. \quad (2.7')$$

Из (2.7) и (2.7') следует, что

$$\frac{\mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\nu(\alpha m)}.$$

Пусть теперь

$$\alpha_n = \rho_n \leq \alpha m < \rho_{n+1} = \alpha_{n+1}.$$

Известно, что тогда $\nu(\alpha m) = n$, значит

$$\frac{\mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n.$$

Этим лемма доказана.

Лемма 2. Показатель сходимости последовательности чисел

$$\left\{ \alpha_n = \frac{m_n}{m_{n-1}} \right\} \text{ равен единице.}$$

Из условия, что $\left| \frac{\alpha_n}{\nu} \right|$, начиная с некоторого номера, монотонно возрастает, следует, что показатель сходимости этой последовательности $\sigma \leq 1$.

Покажем теперь, что σ не меньше единицы.

Допустим, что $\sigma < 1$, тогда для всякого σ_1 , $\sigma < \sigma_1 < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{\sigma_1}}$ сходится, тогда известно, что сходится также интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln \mu(r)}{r^{\sigma_1+1}} dr. \quad (2.8)$$

Но согласно нашим обозначениям $\mu(r) = T(r) = \max_{n>1} \frac{r^n}{m_n}$, поэтому

из (2.8) следует, что $\int \frac{\ln T(r)}{r^{2+1}} dr$ сходится; но этого не может быть, так как нами рассматриваются такие классы $C_{(\min)}$, для которых $\int \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty$, следовательно, тем более расходится и интеграл $\int \frac{\ln T(r)}{r^{2+1}} dr$, где $\sigma_1 < 1$.

Таким образом, допущение о том, что $\sigma < 1$ оказалось неверным и $\sigma = 1$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, т. е. докажем сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\sigma} \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)}.$$

Имеем

$$\frac{\mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} \leq \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n.$$

Очевидно это неравенство имеет место для всех n , $S = \alpha m$, $\alpha(m+1)$, ..., $\alpha(m + l_n)$, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_n \leq S \leq \alpha_{n+1}$.

Отсюда следует, что $\alpha l_n \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n$ или

$$l_n \leq \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha}.$$

Учитывая это обстоятельство, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\sigma} \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m\alpha)^{\sigma} \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1}^{\sigma} \frac{l_n \alpha^n}{\beta^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1}^{\sigma} l_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1}^{\sigma-1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n. \end{aligned}$$

Согласно второй лемме показатель сходимости последовательности чисел $\{\alpha_n\}$ равен единице; это значит, что начиная с достаточно большого номера имеют место неравенства $n^{1-\varepsilon_n} < \alpha_n < n^{1+\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом окончательно получаем

$$\begin{aligned} \alpha^n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^n \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)} &< \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1}^{n+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n < \\ &< \frac{C}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(\alpha+1)(1-\varepsilon)} \varepsilon_n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^n. \end{aligned}$$

Известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \delta^n$, где k — произвольное фиксированное число, $|\delta| < 1$, сходится.

Следовательно сходится и наш ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(zm)^n \mu(zm)}{\mu(\beta m)}.$$

Этим теорема (2.2) доказана.

Теорема (2.3). Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}$ сходятся или расходятся одновременно.

Легко заметить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}$ и интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr$ сходятся или расходятся одновременно,

С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n}$ и $\int_1^{\infty} \frac{\ln \mu(r)}{r^2} dr = \int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr$ также сходятся или расходятся одновременно, но

$$\rho_n = \alpha_n = \frac{m_n}{m_{n-1}}.$$

Следовательно ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{n-1}}{m_n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}$ сходятся или

расходятся одновременно.

Примечание: Так как мы рассматриваем такие классы функций $S_{(m_n)}$, для которых интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = \infty,$$

то впредь, говоря о последовательности чисел $\{\gamma_v\}$, будем считать, что γ_n от $\alpha_n = \frac{m_n}{m_{n-1}}$, $n=1, 2, \dots$ отличается только постоянным множителем, следовательно, ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v}$ расходится.

§ 2. Оценка $n+1$ -ой обобщенной производной многочлена П. Л. Чебышева $T_m(x-1)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$ на $(0,2)$

Заметим прежде всего, что из последнего примечания и определения 6 следует, что последовательность $\left\{\frac{\gamma_v}{v}\right\}$, начиная с некоторого номера, во всяком случае не убывающая.

Считая само собою разумеющимся, это обстоятельство впредь не будет оговорено.

Теорема (2.4). Обозначим через $T_m^{[n+1]}(x-1)$, $(n+1)$ -ую обобщенную производную многочлена Чебышева $T_m(x-1) = \arccos \cos m \cos(x-1)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$; тогда справедливо неравенство

$$|T_m^{[n+1]}(x-1)| < C(x) m^{\frac{5}{2}} x^{-x-\gamma_m-1} e^{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot M(ae^{\delta_0} m), \quad (2.9)$$

где $0 < u < 2$, $x \in (0, u)$, $a \geq 1 + \frac{12}{2-u}$, $x > 1$ — произвольное число, δ_0 — постоянная, зависящая только от x и r , где r тот номер, начиная с которого последовательность $\left\{\frac{\gamma_v}{v}\right\}$ монотонно возрастает (не убывает), $C(x)$ — некоторая постоянная, а $M(r) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\prod_{k=1}^n \gamma_k}$.

Для доказательства теоремы мы предварительно докажем пять лемм.

Лемма 1. Для всякого $u \in (0, 2)$ и $x \in (0, u)$ справедлива формула:

$$T_m(x-1) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \frac{\sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z} dz}{\prod_{v=0}^{m-k} (\zeta + \gamma_v)}, \quad (2.9')$$

где $\{\sigma_k^{(m)}(u)\}$ — числовые коэффициенты, а простой контур C охватывает окрестности точек $\{-\gamma_v\}$, $v=0, 1, 2, \dots, (m-k)$.

Действительно, известно, что для $x \in (0, u]$ справедлива формула

$$\left(\frac{x}{u}-1\right)^{m-k} = \frac{(-1)^k(m-k)!}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta+\nu)}. \quad (2.10)$$

Эта формула является частным случаем (1.5), когда $\gamma_\nu = \nu$.

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} T_m(x-1) &= 2^{m-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \sigma_k^{(m)}(u) (x-u)^{m-k} = \\ &= 2^{m-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} \left(\frac{x}{u}-1\right)^{m-k}. \end{aligned}$$

Тогда в силу (2.10) получим

$$T_m(x-1) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \frac{\sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \int_C \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta+\nu)},$$

где $0 < x \leq u$.

Этим лемма доказана.

Лемма 2. Коэффициенты $\sigma_k^{(m)}(u)$, $k=0, 1, 2, \dots, m$, удовлетворяют неравенствам

$$|2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u)| < C_1 \frac{(12em)^{m-k}}{(m-k)^{m-k} [u(2-u)]^{m-k}}, \quad (2.11)$$

где $u \in (0, 2)$, а $C_1 > 0$ — абсолютная постоянная (когда $k=m$, $(m-k)^{m-k}$ следует понимать в смысле $\lim_{k \rightarrow m} (m-k)^{m-k}$).

Для доказательства заметим, что

$$\begin{aligned} 2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u) &= \frac{(-1)^{m-k}}{2\pi i} \int_C \frac{T_m(z-1)}{(z-u)^{m-k+1}} dz = \\ &= \frac{(-1)^{m-k}}{2\pi i} \int_{C'} \frac{T_m(z)}{(z-v)^{m-k+1}} dz, \end{aligned}$$

где $v = u-1 \in (-1, 1)$, а в качестве контура C' можем взять эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с полуосями $a = \frac{1}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right)$ и $b = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right)$, где $\rho = 1 + \frac{m-k}{m}$.

Обозначим $\delta = \min_{z \in C'} |z - v|$; тогда получим

$$|2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u)| < C_1 \frac{\max_{z \in C'} |T_m(z)|}{\delta^{m-k}}, \quad (2.12)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{C'} \left| \frac{dz}{z-v} \right|.$$

Оценим снизу $\delta > 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m-k}{m} + \frac{1}{1 + \frac{m-k}{m}} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{m-k}{m} \right)^2}{1 + \frac{m-k}{m}}. \end{aligned}$$

Так как $0 \leq \frac{m-k}{m} \leq 1$, значит

$$1 + \frac{1}{4} \left(\frac{m-k}{m} \right)^2 < a < 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{m-k}{m} \right)^2. \quad (2.13)$$

Имеем также

$$b = \frac{1}{2} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{2} \frac{1 + 2 \frac{m-k}{m} + \left(\frac{m-k}{m} \right)^2 - 1}{1 + \frac{m-k}{m}},$$

или

$$b = \frac{\frac{m-k}{m}}{1 + \frac{m-k}{m}} + \frac{\left(\frac{m-k}{m} \right)^2}{1 + \frac{m-k}{m}}.$$

Значит

$$b > \frac{1}{2} \frac{m-k}{m} \quad (2.13')$$

Сравнивая (2.13) и (2.13'), замечаем, что $a-1 = o(b)$.

Это обстоятельство заставляет нас рассматривать только такие u , которые принадлежат к $(0, 2)$, что обеспечивает необходимую оценку снизу для $\delta > 0$.

Имеем $\delta = \min_{z \in C'} |z - v|$, где $v = u - 1$, $u \in (0, 2)$; тогда $-1 < v < 1$.

Найдем минимальное расстояние точки $(0, v)$ от эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Возьмем точку (v, y_v) , находящуюся на эллипсе. Очевидно

$$y_v > \frac{b}{2} \sqrt{1-v^2} > \frac{b}{2} (1-|v|).$$

С другой стороны, $1-|v| > \frac{b}{2} (1-|v|)$.

Это значит, что окружность с центром в точке $(v, 0)$ радиусом $\frac{b}{3} (1-|v|)$ целиком находится внутри эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Следовательно $\delta \geq \frac{b}{3} (1-|v|)$, или

$$\delta > \frac{m-k}{2m} \cdot \frac{1}{3} \frac{1-v^2}{2} = \frac{m-k}{12m} (1-v^2).$$

Используя последнее неравенство, из (2.12) получаем

$$|2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u)| < C_1 \frac{\max_{z \in C'} |T_m(z)|}{\left[\frac{m-k}{12m} (1-v^2) \right]^{m-k}},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{dz}{z-v} \right|.$$

Известно, что

$$\max_{z \in C'} |T_m(z)| < \rho^n = \left(1 + \frac{m-k}{m} \right)^m < e^{m-k}.$$

Значит

$$|2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u)| < C_1 \frac{(12em)^{m-k}}{(m-k)^{m-k} (1-v^2)^{m-k}}. \quad (2.11')$$

Последняя оценка, как нетрудно заметить, справедлива для всех $v \in (-1, 1)$.

Зная, что $v = u - 1$, неравенство (2.11'), мы можем выразить в терминах u ; тогда получим

$$|2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u)| < C_1 \frac{(12em)^{m-k}}{(m-k)^{m-k} [u(2-u)]^{m-k}},$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{dz}{z-v} \right|.$$

Этим лемма доказана.

Лемма 3. Обозначим через Γ_1 дугу окружности $|z| = am$, $\operatorname{Re}(z) < \kappa$, где $\kappa > 0$ — произвольное число, а $a \geq 1 + \frac{12}{2-u}$; тогда справедливо неравенство:

$$A_{m-k}^{(n)}(u) = \left| \frac{\sigma_k^{(m)}(u)(m-k)!u^{m-k}}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{u^z x^{-z-\tau_n-1} \prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v)}{\prod_{v=1}^{m-k} (\zeta + \gamma_v)} d\zeta \right| < \\ < C m^{\frac{3}{2}} \prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2} \cdot x^{-z-\tau_n-1}, \quad (2.14)$$

где C — абсолютная постоянная, а $\gamma_v' = \gamma_v + \kappa$.

Для доказательства заметим, что

$$\max_{z \in \Gamma_1} \frac{\prod_{v=1}^n |\zeta + \gamma_v|}{\prod_{v=1}^{m-k} |\zeta + \gamma_v|} \leq \frac{\prod_{v=1}^n |am + \kappa + \gamma_v|}{\prod_{v=1}^{m-k} |am - \gamma_v|} < \frac{\prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2}}{[(a-1)m]^{m-k}}.$$

Поэтому в силу леммы 2 для $A_{m-k}^{(n)}(u)$ получаем оценку:

$$A_{m-k}^{(n)}(u) < C_0 \frac{m(12em)^{m-k}}{[u(2-u)]^{m-k}(m-k)^{m-k}} \times \\ \times \frac{(m-k)!u^{m-k} \prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2}}{[(a-1)m]^{m-k}} \cdot x^{-z-\tau_n-1},$$

или

$$A_{m-k}^{(n)}(u) < C_0 \left[\frac{12}{(2-u)(a-1)} \right]^{m-k} m^{\frac{3}{2}} \prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2} \cdot x^{-z-\tau_n-1}.$$

Так как $a \geq 1 + \frac{12}{2-u}$, значит $\frac{12}{(2-u)(a-1)} \leq 1$.

Тогда для $A_{m-k}^{(n)}(u)$ окончательно получаем

$$0 < A_{m-k}^{(n)}(u) < C_0 m^{\frac{3}{2}} \prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2} \cdot x^{-z-\tau_n-1}.$$

Этим лемма доказана.

По условию последовательность чисел $\left\{\frac{\gamma_v}{v}\right\}$, начиная с некоторого номера p , монотонно возрастает.

Построим последовательность чисел $\left\{\frac{\gamma_v^*}{v}\right\}$, которая возрастает с возрастанием v и $\gamma_v^* = \gamma_v$ для всех $v \geq p$. Назовем это условием (γ^*) .

Тогда справедлива:

Лемма 4. Пусть имеем последовательность чисел $\{\gamma_v' = \gamma_v + \kappa\}$ $v = 1, 2, \dots$, где $\kappa > 0$ — произвольное число; тогда справедливо неравенство

$$\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} < \delta^* \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2}, \quad (2.15)$$

где $\delta^* = \delta^*(p, \kappa)$, а $\{\gamma_v^*\}$ удовлетворяет условию (γ^*) .

Прежде всего заметим, что, с одной стороны,

$$\gamma_v' = \gamma_v + \kappa = \gamma_v \left(1 + \frac{\kappa}{\gamma_v}\right) \leq \alpha^* \gamma_v, \quad \text{где } \alpha^* = 1 + \frac{\kappa}{\gamma_1},$$

а, с другой стороны, для $v \geq n - k + 1$

$$\gamma_v' = \gamma_v + \kappa = \gamma_v \left(1 + \frac{\kappa}{\gamma_v}\right) \geq \gamma_v.$$

Таким образом, получаем

$$\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} < \alpha^* \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v^2}.$$

Но

$$\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v^2} < \Delta \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2}, \quad (2.15')$$

где

$$\Delta = \max_{1 \leq v < p} \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v'^2} : \min_{1 \leq v < p} \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v'^2}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} < \delta^* \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2},$$

где $\delta^* = \Delta \alpha^*$.

Этим лемма доказана.

Лемма 5. Пусть последовательность чисел $\left\{\frac{\gamma_v}{\gamma}\right\}$, начиная с $p = \gamma \geq 1$, монотонно возрастает; тогда справедливо неравенство

$$\prod_{v=1}^n \sqrt{a^2 m^2 + \gamma_v'^2} < C \prod_{v=1}^n \gamma_v'^2 \cdot M(a e^{\frac{\delta_0}{2} m}), \quad (2.16)$$

где $\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}$, δ^* — удовлетворяет условиям леммы 4, C — абсолютная постоянная, а

$$M(r) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|r|^k}{\prod_{v=1}^k \gamma_k}.$$

Имеем

$$\prod_{v=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_v'^2) = \sum_{k=0}^n S_k^{(n)} (a^2 m^2)^{n-k}. \quad (2.16')$$

Очевидно:

$$0 < S_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\prod_{v=1}^n (\zeta + \gamma_v'^2)}{\zeta^{n-k+1}} d\zeta, \quad R > 0.$$

Оценим сверху $S_k^{(n)}$.

Имеем

$$0 < S_k^{(n)} < \frac{\prod_{v=1}^n (R + \gamma_v'^2)}{R^{n-k}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \left| \frac{d\zeta}{\zeta} \right| = \frac{\prod_{v=1}^n (R + \gamma_v'^2)}{R^{n-k}}.$$

Это значит, что

$$\begin{aligned} 0 < S_k^{(n)} &\leq \prod_{v=1}^{n-k} \left(1 + \frac{\gamma_v'^2}{R}\right) \prod_{n-k+1}^n (R + \gamma_v'^2) = \prod_{n-k+1}^n \gamma_v'^2 \times \\ &\times \prod_{v=1}^{n-k} \left(1 + \frac{\gamma_v'^2}{R}\right) \prod_{n-k+1}^n \left(1 + \frac{R}{\gamma_v'^2}\right) < \prod_{v=n-k+1}^n \gamma_v'^2 \times \\ &\times \exp \left(\frac{1}{R} \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 + R \sum_{n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} \right). \end{aligned} \quad (2.17')$$

Положим

$$\frac{1}{R} \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 = R \sum_{n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2},$$

тогда

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2}{\sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2}}}.$$

Подставляя значение R в (2.17'), получим

$$0 < S_k^{(n)} < C' \cdot \prod_{v=n-k+1}^n \gamma_v'^2 \cdot \exp \left(2 \sqrt{\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \cdot \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2}} \right). \quad (2.17'')$$

В силу леммы 4 будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \cdot \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} &= \delta^* \sum_{v=1}^{n-k} v^2 \frac{\gamma_v'^2}{v^2} \cdot \sum_{v=n-k+1}^n \frac{v^2}{v^2 \gamma_v'^2} \leq \\ &\leq \frac{\gamma_{n-k}^{'2}}{(n-k)^2} \delta^* \sum_{v=1}^{n-k} v^2 \frac{(n-k+1)^2}{\gamma_{n-k+1}^{'2}} \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Из монотонного возрастания последовательности $\left\{ \frac{\gamma_v'}{v} \right\}$ следует:

$$\frac{\gamma_{n-k}^{'2}}{(n-k)^2} \cdot \frac{(n-k+1)^2}{\gamma_{n-k+1}^{'2}} \leq 1.$$

Значит

$$\sum_{v=1}^{n-k} \gamma_v'^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_v'^2} \leq \delta^* \sum_{v=1}^{n-k} v^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2}.$$

В силу последней оценки неравенство (2.17'') примет вид:

$$0 < S_k^{(n)} < C' \cdot \prod_{v=n-k+1}^n \gamma_v'^2 \cdot \exp \left(2 \sqrt{\delta^* \sum_{v=1}^{n-k} v^2 \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2}} \right). \quad (2.17''')$$

Оценим теперь сверху $\sum_{v=1}^{n-k} v^2 \cdot \sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2}$.

Известно, что

$$\sum_{v=1}^{n-k} v^2 = \frac{(n-k)(n-k+1)[2(n-k)+1]}{6} < \frac{(n-k)^3}{3-\varepsilon}.$$

С другой стороны, известно, что

$$\sum_{v=n-k+1}^n \frac{1}{v^2} < \frac{1}{n-k}.$$

Значит

$$\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n-k} \gamma_{\nu}^2 \sum_{n-k+1}^n \frac{1}{\gamma_{\nu}^2}} < \frac{n-k}{\sqrt{2}}$$

Из последнего неравенства и (2.17''') следует, что

$$0 < S_k^{(n)} < \prod_{\nu=k+1}^n \gamma_{\nu}^{'2} \cdot e^{\frac{n-k}{2} \sqrt{\delta^*}} \sqrt{\delta^*} = \prod_{\nu=k+1}^n \gamma_{\nu}^{'2} e^{(n-k) \frac{\sqrt{\delta^*}}{2}} \quad (2.17^{IV})$$

Возвращаясь к оценке

$$\prod_{\nu=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_{\nu}^{'2}) = \sum_{k=0}^n S_k^{(n)} (a^2 m^2)^{n-k},$$

в силу неравенства (2.17^{IV}) получим

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_{\nu}^{'2}) &< \sum_{k=0}^n e^{(n-k) \frac{\sqrt{\delta^*}}{2}} (a^2 m^2)^{n-k} \prod_{\nu=k+1}^n \gamma_{\nu}^{'2} = \\ &= \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{'2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a^2 m^2 e^{\frac{\sqrt{\delta^*}}{2}})^{n-k}}{\prod_{\nu=1}^{n-k} \gamma_{\nu}^{'2}} + 1 \right], \end{aligned}$$

или

$$\prod_{\nu=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_{\nu}^{'2}) < C \cdot \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{'2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^2 m^2 e^{\frac{\sqrt{\delta^*}}{2}}}{\prod_{\nu=1}^{n-k} \gamma_{\nu}^{'2}} + 1 \right],$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{\nu=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_{\nu}^{'2})^{\frac{1}{2}} < C \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{'2} M(a e^{\frac{\sqrt{\delta^*}}{2}} m) = C \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{'2} M(a m e^{\frac{\sqrt{\delta^*}}{2}}),$$

где

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}.$$

Этим лемма доказана.

Теперь можем перейти к доказательству теоремы (2.4).

Имеем

$$T_m(x-1) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \frac{\sigma_k^{(m)}(u) (m-k)! u^{m-k}}{2\pi i} \int_C \frac{u^2 x^{-1}}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta_{\nu} + \nu)} d\zeta,$$

где контур C охватывает окрестности точек $0, -1, -2, \dots, -(m-k)$.

После $(n+1)$ -кратного обобщенного дифференцирования по u последовательности $\{\gamma_{\nu}\}$ получаем:

$$T_m^{[n+1]}(x-1) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^m \frac{2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{\zeta} \frac{u^{\zeta} x^{-\zeta-\tau_n-1} \prod_{\nu=1}^n (\zeta+\gamma_{\nu})}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta+\gamma_{\nu})} d\zeta,$$

или

$$T_m^{[n+1]}(x-1) = (-1)^{n+1} 2^{m-1} x^{-\tau_n-1} \sum_{k=0}^m \frac{\sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \times \\ \times \int_{\zeta} \left(\frac{x}{u}\right)^{\zeta} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta+\gamma_{\nu})}{\prod_{\nu=1}^{m-k} (\zeta+\gamma_{\nu})} d\zeta.$$

Обозначим

$$Q_m^{[n+1]}(x-1) = (-1)^{n+1} x^{-\tau_n-1} \sum_{k=0}^m \frac{2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \times \\ \times \int_{\Gamma_1} \left(\frac{u}{x}\right)^{\zeta} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta+\gamma_{\nu})}{\prod_{\nu=1}^{m-k} (\zeta+\gamma_{\nu})} d\zeta, \quad (2.18)$$

$$\tau_m^{[n+1]}(x-1) = (-1)^{n+1} x^{-\tau_n-1} \sum_{k=0}^m \frac{2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} (m-k)!}{2\pi i} \times \\ \times \int_{\Gamma_2} \left(\frac{x}{u}\right)^{\zeta} \frac{\prod_{\nu=1}^n (\zeta+\gamma_{\nu})}{\prod_{\nu=1}^{m-k} (\zeta+\gamma_{\nu})} d\zeta, \quad (2.19)$$

где Γ_1 — кривая, указанная в лемме 3, т. е. является дугой окружности $|z| = am$, $\operatorname{Re} z \leq x$, а Γ_2 — отрезок прямой, соединяющей точки пересечения Γ_1 и прямой $\operatorname{Re} z = x$.

Оценим сверху $|Q_m^{[n+1]}(x-1)|$ и $|\tau_m^{[n+1]}(x-1)|$.

Начнем с оценки $|Q_m^{[n+1]}(x-1)|$.

Согласно лемме 3, имеем

$$|Q_m^{[n+1]}(x-1)| \leq \sum_{k=0}^m A_{m-k}^{(n)}(u) \leq C m^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_{\nu}^2)^{\frac{1}{2}} x^{-\tau_n-1} u^x.$$

Используя (2.16), получаем

$$|Q_m^{[n+1]}(x-1)| \leq C m^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^n \gamma_{\nu}^{\frac{1}{2}} M(am e^{-a}) x^{-\tau_n-1}, \quad (2.18')$$

где

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}.$$

Окончательно получаем

$$|Q_m^{[n+1]}(x-1)| < C_1 \cdot m^{\frac{1}{2}} \prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu \cdot M(am e^{\delta_0}) e^{\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\gamma_\nu}} x^{-x-\tau_{m-1}} \quad (2.18'')$$

Оценим теперь сверху $|\tau_m^{[n+1]}(x-1)|$.

Обозначим

$$f_m(\zeta) = \sum_{k=0}^m \frac{2^{m-1} \sigma_k^{(m)}(u) (m-k)! u^{m-k}}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta + \gamma_\nu)}. \quad (2.20)$$

Легко заметить, что

$$f_m(\zeta) = \int_0^u \left(\frac{x}{u} \right)^{\zeta-1} T_m(x-1) d\left(\frac{x}{u} \right),$$

где $\operatorname{Re}(\zeta) > 0$.

Действительно, имеем

$$T_m(x-1) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \sigma_k^{(m)}(u) u^{m-k} \left(\frac{x}{u} - 1 \right)^{m-k} (-1)^{m-k}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{x}{u} \right)^{\zeta-1} \left(\frac{x}{u} - 1 \right)^{m-k} d\left(\frac{x}{u} \right) &= \int_0^1 t^{\zeta-1} (t-1)^{m-k} dt = \\ &= \frac{(-1)^{m-k} (m-k)!}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta + \gamma_\nu)}. \end{aligned}$$

Значит $f_m(\zeta) = \int_0^u \left(\frac{x}{u} \right)^{\zeta-1} T_m(x-1) d\left(\frac{x}{u} \right)$ и, следовательно,

$$|f_m(\zeta)| < \frac{1}{z}, \text{ где } z = \operatorname{Re}(\zeta) > 0.$$

Имеем

$$|\tau_m^{[n+1]}(x-1)| = \left| \frac{z^{-m-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \prod_{\nu=1}^n (\zeta + \gamma_\nu) \left(\frac{x}{u} \right)^{-\zeta} 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \frac{\sigma_k^{(m)}(u) (m-k)! u^{m-k}}{\prod_{\nu=0}^{m-k} (\zeta + \gamma_\nu)} d\zeta \right|.$$

Так как на Γ ,

$$\max_{\zeta \in \Gamma_{n+1}} \prod_{s=1}^n |\zeta + \gamma_s| = \prod_{s=1}^n (a^2 m^2 + \gamma_s'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

то

$$|T_m^{[n+1]}(x-1)| \leq C_n(z) m x^{-x-2n-1} e^{+\sum_{s=1}^n \frac{1}{\gamma_s}} \prod_{s=1}^n \gamma_s \cdot M(\max^{\delta_n}). \quad (2.19')$$

Из неравенств (2.18') и (2.19') следует, что

$$\begin{aligned} |T_m^{[n+1]}(x-1)| &\leq |Q_m^{[n+1]}(x-1)| + |T_m^{[n+1]}(x-1)| < \\ &< C_n(z) m^{\frac{1}{2}} e^{+\sum_{s=1}^n \frac{1}{\gamma_s}} \prod_{s=1}^n \gamma_s \cdot M(am e^{\delta_n}) x^{-x-2n-1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\delta_n = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}$, δ^* — получено в лемме 4.

Этим теорема (2.4) доказана.

В частности, когда $\gamma_s = \gamma$, $s=1, 2, 3, \dots$, получаем

$$|T_m^{[n+1]}(x-1)| \leq C m^{\frac{1}{2}} n! n^x M_n(a e^{\delta_n} m) x^{-x-2n-1},$$

где $x > 0$,

$$M_n(a e^{\delta_n} m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a e^{\delta_n} m)^n}{n!}. \quad (2.9)$$

§3. Основная теорема и классы аналитических и квази-аналитических функций.

Настоящий параграф мы начнем приведением некоторых сведений из теории наилучших приближений функций многочленами.

Известно, что для всякой дифференцируемой на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} |A_{n-1}| \leq E_n(f) \leq \sum_{s=n-1}^{\infty} |A_s|, \quad (2.21)$$

где $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на $[-1, 1]$ многочленами степени не выше n , а A_n , $n=0, 1, 2, \dots$ — коэффициенты Фурье разложения функции по многочленам Чебышева, т. е.

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\cos \theta) \cos n\theta d\theta$$

См. [4], стр. 72—73.

Нами будет также использована одна из теорем Джексона, которая гласит:

Если у $f(x) \in C[\alpha, \beta]$ существует ограниченная производная $f^{(p)}(x)$ причем $|f^{(p)}(x)| \leq m_p$, когда $x \in [\alpha, \beta]$, то $E_m(f) < \frac{C_p^* (\beta - \alpha)^p m_p}{m^p}$, где

$$C_p^* = \frac{6^p p^p}{p!} (p+1).$$

См. [5], стр. 165.

В частности, когда $\alpha=0$, $\beta=2$, $p=n$ произвольное число, тогда

$$E_m(f) \leq C_1 n^{\frac{1}{2}} (12e)^n \frac{m_n}{m^n} \text{ для всякого } n.$$

Согласно обозначению

$$T(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}, \text{ получаем}$$

$$\max_{n \geq 1} \frac{m^n (be)^{-n}}{m^n} = T\left(\frac{m}{be}\right) > T\left(\frac{m}{be}\right).$$

Полагая $b > 12$, согласно определению для бесконечно дифференцируемой $f(x)$ получим

$$E_m(f) \leq \frac{C_2}{T\left(\frac{m}{be}\right)}. \quad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) следует, что

$$|A_{m+1}| < \sqrt{2} E_m(f),$$

или

$$|A_{m+1}| < \frac{C}{T\left(\frac{m}{be}\right)}, \quad (2.23)$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная, $b > 12$.

Заметим также, что если функция $f(x) \in C[0, 2]$ имеет p -ую конечную производную, тогда ряд

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(x-1),$$

где $T_m(x) = \cos m \arccos x$ в интервале $(0, 2)$ можно почленно дифференцировать $p-2$ раза.

Действительно, ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} E_m(f) < C \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^p} \quad (2.24)$$

сходится при $p > 2$, а ряд $\sum_{m=1}^{\infty} E_m(f)$ является мажорантой ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m T_m(x-1).$$

В формуле (2.8') полагая $p = p-2$, будем иметь

$$|T_m^{(p-2)}(x-1)| < C(p-2)! (p-2) \times x^{-x-p-2} M_{p-2}(aem),$$

где
$$M_{p-2}(aem) = 1 + \frac{aem}{1!} + \dots + \frac{(aem)^{p-2}}{(p-2)!}.$$

Очевидно, что для достаточно больших m будем иметь

$$M_{p-2}(aem) < C_1 \frac{(aem)^{p-2}}{(p-2)!}.$$

Таким образом, получаем

$$|T_m^{(p-2)}(x-1)| < C_2(z)m^{p-2} x^{-x-p-1},$$

где $C_2(z)$ некоторая постоянная.

Из (2.21), (2.24) и (2.25) следует, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} A_m T_m^{(p-2)}(x-1)$ в

интервале (0,2) сходится равномерно.

Из вышеприведенных рассуждений следует:

Теорема (2.5). Если функция $i(x)$ на сегменте $[0,2]$ принадлежит некоторому классу аналитических или квази-аналитических

функций, то ряд $i(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(x-1)$ в интервале (0,2) можно поч-

ленно дифференцировать любое число раз, не нарушая его равномерную сходимость.

Теперь мы можем перейти к доказательству основной теоремы.

Теорема (2.6). (Основная теорема).

Всякая функция $\varphi(x)$, принадлежащая на сегменте $[0,2]$ некоторому классу $C_{\{m_n\}}$ аналитических или квази-аналитических

функций, в окрестности любой точки $u \in (0,2)$ разлагается в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный ряд Тейлора по последовательности

$$\left\{ \gamma_\nu = \frac{m_\nu}{m_{\nu-1}} \delta \right\}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{где } \delta > a b e^{\frac{1}{2} + 1} (1 + \varepsilon), \quad a > 1 + \frac{12}{2-u},$$

$b > 12$, $\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}$, (δ^* — опред. в лемме 4), $a \varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Действительно, имеем

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m T_m(x-1). \quad (2.25)$$

Согласно теореме (2.5) мы можем ряд (2.25) в (0.2) почленно обобщенно дифференцировать по последовательности $\{\gamma_v\}$ (см. определение 1) любое число раз.

Будем иметь

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m T_m^{[n+1]}(x-1).$$

Из теоремы (2.4) и из неравенств (2.21) и (2.22) следует, что

$$|\varphi_{n+1}(x)| < C(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M[ae^{\delta_0}(m+1)]m^2}{\Gamma\left(\frac{m}{be}\right)} \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{\frac{x \sum_{v=1}^n \gamma_v}{1}} x^{-x-\gamma_n-1}, \quad (2.26)$$

где $a \geq 1 + \frac{12}{2-u}$, $b > 12$, $\delta_0 = \sqrt{\frac{\delta^*}{2}}$, $x > 0$ — произвольное число, для всех $x \in (0, u]$.

Известно, что для целых функций $f(z)$ конечного порядка λ при достаточно больших r имеет место неравенство

$$\mu(r) < M(r) < Kr^{\lambda+1}\mu(r),$$

где $K = 2e\beta$, $\beta > \lambda$, $\mu(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{\prod_{v=1}^n \gamma_v}$.

См. [6, решения задач 51 и 54, отдела IV].

Так как порядок целой функции

$$f(z) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z^v}{m_0 \prod_{v=1}^n \gamma_v},$$

в силу условия $\frac{\gamma_v}{v} \leq \frac{\gamma_{v+1}}{v+1}$, при $v \geq p$, не больше единицы, то неравенство (2.26) в силу последней ссылки запишется так:

$$|\varphi_{n+1}(x)| < C(x) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \mu[ae^{\delta_0}(m+1)]m^2}{\Gamma\left(\frac{m}{be}\right)} \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{\frac{x \sum_{v=1}^n \gamma_v}{1}} x^{-x-\gamma_n-1}. \quad (2.26')$$

Используя последовательность $\left\{\gamma_v = \delta \frac{m_v}{m_{v-1}}\right\}$, замечаем, что

$$\Gamma\left(\frac{m}{be}\right) = \mu\left(\frac{m\delta}{be}\right).$$

Из теоремы (2.2) следует, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{3}{2}} \mu[ae^{\delta_0}[m+1]]}{\mu\left(\frac{m\delta}{be}\right)}, \text{ где } \delta > abe^{\delta_0+1}(1+\varepsilon)$$

сходится.

Действительно, из условия $\delta = abe^{\delta_0+1}(1+\varepsilon)$ следует, что $\alpha = \left(1 + \frac{1}{m}\right)ae^{\delta_0} < \frac{\delta}{be} = \beta$, когда $1 + \frac{1}{m} < \varepsilon$; тогда получаем ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{\frac{3}{2}} \mu(\alpha m)}{\mu(\beta m)},$$

который известно, что сходится (см. теорему (2.2)).

Таким образом, получаем:

$$|\varphi_{n+1}(x)| < C_0(x) \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{x \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} x^{-x-\gamma_n-1}, \quad (2.26)$$

где $x \in (0, u]$, $0 < u < 2$, а $C_0(x)$ зависит только от x .

Теперь, согласно теореме (1.1), составим обобщенную формулу Тейлора функции $\varphi(x)$ по последовательности $\{\gamma_v\}$ в окрестности точки u .

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \omega_k(u, x) + R_n(u, x), \quad (1.2')$$

где

$$\omega_k(u, x) = \int_u^x x_1^{\gamma_1-1} dx_1 \int_u^{x_1} x_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dx_2 \dots \int_u^{x_{k-1}} x_k^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1} dx_k \quad (1.3')$$

$$R_n(u, x) = \int_u^x x_1^{\gamma_1-1} dx_1 \dots \int_u^{x_{n-1}} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dx_n \int_u^{x_n} \varphi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1} \quad (1.4')$$

Нам теперь остается показать, что при $x \in (0, u]$, $R_n(u, x) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$.

В силу (2.26') имеем

$$\begin{aligned} |R_n(u, x)| &< C_0(x) \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{x \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \left| \int_u^x x_1^{\gamma_1-1} dx_1 \int_u^{x_1} x_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dx_2 \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \int_u^{x_{n-1}} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dx_n \int_u^{x_n} \varphi_{n+1}(x_{n+1}) dx_{n+1} \right| = \\ &= \pm C_0(x) \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{x \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} \int_u^x x_1^{\gamma_1-1} dx_1 \int_u^{x_1} x_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dx_2 \dots \int_u^{x_n} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-\gamma_n-1} dx_{n+1}. \end{aligned}$$

Согласно теореме (1.2) имеем

$$\int_0^x x_1^{\gamma_1-1} dx_1 \int_0^{x_1} x_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1} dx_n \int_0^{x_n} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}-\gamma_n-1} dx_{n+1} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} u^x}{2\pi i} \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta-x) \prod_{v=1}^n (\zeta+\gamma_v)},$$

где $0 < x < x_1$, $0 < x \leq u < 2$.

Учитывая последнее соотношение, получим

$$|R_n(u, x)| < C_0(x) \prod_{v=1}^n \gamma_v \cdot e^{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} u^x} \left| \int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta-x) \prod_{v=1}^n (\zeta+\gamma_v)} \right|,$$

или

$$|R_n(u, x)| < C_1(u, x) \prod_{v=1}^n \gamma_v e^{\sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v} x^{-x_1}} \frac{1}{\prod_{v=1}^n (x_1 + \gamma_v)}.$$

Нетрудно показать, что

$$\prod_{v=1}^n (\gamma_v + x_1)^{-1} < C \prod_{v=1}^n \gamma_v^{-1} \cdot e^{-\frac{(x_1-x) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}}{x_1}},$$

где $C > 0$ — абсолютная постоянная, $\varepsilon > 0$ — при достаточно больших n является числом сколь угодно малым.

Таким образом, для $|R_n(u, x)|$ окончательно получаем

$$|R_n(u, x)| < C_2(u, x) e^{(x-x_1+\varepsilon) \sum_{v=1}^n \frac{1}{\gamma_v}} x^{-x_1}.$$

Так как ряд $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v}$ расходится, кроме того $x_1 > x$, значит $x - x_1 + \varepsilon < 0$ и, следовательно, при $x \in (0, u]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(u, x) = 0.$$

Этим теорема (2.6) доказана.

Таким образом, мы получили сходящееся на $(0, u]$ разложение функции

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n(u, x), \quad (2.27)$$

где последовательность $\{\gamma_n\}$ зависит от дифференциальных свойств функции $\varphi(x)$ и точки $u \in (0, 2)$.

Совершенно очевидно, что разложение (2.27) охватывает не только класс аналитических, но и квази-аналитических на $[0, 2]$ функций всех классов $C_{\{m_n\}}$.

Следовательно создан аппарат представления квази-аналитических функций классов $C_{\{m_n\}}$ через последовательные производные такой функции в одной точке интервала ее квази-аналитичности.

Действительно, нетрудно заметить, что

$$\frac{\varphi_n(u)}{u^{i_n - i_{n-1} - 1}}, \quad n=1, 2, \dots$$

является линейной комбинацией

$$\{\varphi^{(k)}(u)\}, \quad k=1, 2, 3, \dots, n.$$

Отсюда, между прочим, при $\varphi^{(k)}(n)=0$, $k=0, 1, 2, \dots$ получаем $\varphi(x)=0$, для всякого $x \in (0, u)$.

Разложение (2.27) сходится на $(0, u)$; естественно думать, что существует разложение, аналогичное (2.27), которое сходится на $[u, 2)$.

Найдем теперь такое обобщение тейлоровского ряда, чтобы он сходил на $[v, 2)$, где

$$0 < v < 2.$$

Пусть функция $\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}$ на $[0, 2]$.

Составим функцию $\psi(x) = \varphi(2-x)$.

Очевидно, что эта новая функция $\psi(x) \in C_{\{m_n\}}$ на том же сегменте $[0, 2]$; следовательно, она может быть разложена в соответствующий обобщенный ряд Тейлора в окрестности любой точки $u \in (0, 2)$ и сходящийся на $(0, u)$.

Будем иметь

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{n=0}^{\infty} (\zeta + \gamma_n)},$$

или

$$\varphi(2-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{n=0}^{\infty} (\zeta + \gamma_n)},$$

где $x \in (0, u)$, а $u > 0$.

Обозначим $2-x=x'$, тогда

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{\gamma=1}^{x+1-i} \frac{\left(\frac{2-x'}{u}\right)^{-\gamma}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma)} d\zeta,$$

где $0 < u \leq x < 2$.

Положим $u = 2 - v$, получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\left(\frac{2-x}{2-v}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma)} d\zeta, \quad (2.27')$$

где $0 < v \leq x < 2$.

Действительно, имеем: $2 - x \leq u = 2 - v$, или $2 - x \leq 2 - v$, значит $0 < v \leq x < 2$.

Определим теперь коэффициенты разложения.

Очевидно, что для нахождения значения коэффициентов a_n нам придется находить последовательные обобщенные производные функции (2.27'), полагая в них $x=v$. Тогда получим значения соответствующих коэффициентов через функцию $\varphi(x)$.

Действительно, имеем

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{a_1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\left(\frac{2-x}{2-u}\right)^{-\zeta}}{\zeta(\zeta + \gamma_1)} d\zeta + \frac{a_2}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{\left(\frac{2-x}{2-v}\right)^{-\zeta}}{\zeta(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} d\zeta + \dots,$$

или

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{a_1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta}}{\zeta(\zeta + \gamma_1)} d\zeta + \frac{a_2}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta}}{\zeta(\zeta + \gamma_1)(\zeta + \gamma_2)} d\zeta + \dots, \quad (2.28)$$

где контур C_n охватывает окрестности полюсов подынтегральной функции.

Откуда следует, что

$$a_0 = \varphi(v),$$

так как известно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{d\zeta}{\prod_{\gamma=0}^k (\zeta + \gamma)} = 0 \quad \text{при } k=1, 2, \dots$$

Далее имеем

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta-1}}{\prod_{\gamma=0}^n (\zeta + \gamma)} d\zeta, \quad (2.28')$$

(почленное дифференцирование в любое число раз законно, в силу равномерной сходимости продифференцированного ряда в каждом сегменте $v \leq x \leq 2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$).

$$\begin{aligned} \text{Значит} \quad \varphi'(x) &= a_1(2-v)^{-1}, \\ \text{или} \quad a_1 &= (2-v)\varphi'(v). \end{aligned}$$

Для нахождения a_2 составим

$$\frac{\varphi'(x)}{(2-x)^{n-1}} = a_1(2-v)^{-n} + \frac{a_2}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-v)^{-\zeta-n}}{(\zeta+\gamma_1)(\zeta+\gamma_2)} d\zeta + \dots$$

После дифференцирования получим

$$\begin{aligned} \varphi_{(2)}(x) &= \left[\frac{\varphi'(x)}{(2-x)^{n-1}} \right]' = \frac{a_2}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta-n-1}}{\zeta+\gamma_2} d\zeta + \\ &+ \frac{a_3}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta-n-1}}{(\zeta+\gamma_2)(\zeta+\gamma_3)} d\zeta + \dots \end{aligned} \quad (2.28'')$$

$$\begin{aligned} \text{Значит} \quad \varphi_2(v) &= a_2(2-v)^{-n-1}, \\ \text{или} \quad a_2 &= (2-v)^{n+1} \varphi_{(2)}(v). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{\varphi_2(x)}{(2-x)^{n-1-1}} = a_2(2-v)^{-n-1} + \frac{a_3}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta-n-1}}{(\zeta+\gamma_2)(\zeta+\gamma_3)} d\zeta + \dots,$$

откуда

$$\varphi_{(2)}(x) = \left[\frac{\varphi_2(x)}{(2-x)^{n-1-1}} \right]' = \frac{a_3}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{(2-v)^{\zeta} (2-x)^{-\zeta-n-1}}{\zeta+\gamma_3} d\zeta + \dots$$

$$\text{Значит} \quad \varphi_{(2)}(v) = a_3(2-v)^{-n-1},$$

$$\text{или} \quad a_3 = (2-v)^{n+1} \varphi_{(3)}(v).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$a_{k+1} = (2-v)^{n+1} \varphi_{(k+1)}(v),$$

$$\text{где} \quad \varphi_{(k)}(x) = \left[\frac{\varphi_{(k-1)}(x)}{(2-x)^{n_{k-1}-n_{k-2}-1}} \right]', \quad k = 2, 3, \dots$$

Из вышеприведенных рассуждений и выкладок следует:

Теорема (2.7). Всякая функция $\varphi(x)$, принадлежащая на сегменте $[0, 2]$ некоторому классу $C_{\{\min\}}$ аналитических или квазианалитических функций, в окрестности любой точки $v \in (0, 2)$ разлагается в сходящийся на $[v, 2)$ обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\left(\frac{2-x}{2-v}\right)^{\zeta}}{\prod_{s=0}^n (\zeta+\gamma_s)} d\zeta, \quad (2.28)$$

где $\{\gamma_v\}$, $v = 1, 2, \dots$ удовлетворяет условиям теоремы (2.6), но только $a > 1 + \frac{12}{2-u} = 1 + \frac{12}{v}$,

$$a_k = (2-v)^{2k-1} \varphi_{(k)}(v), \quad k=1, 2, \dots$$

Последовательность $\{\varphi_{(k)}(v)\}$ определяется из рекуррентной формулы

$$\varphi_{(k+1)}(x) = \left[\frac{\varphi_{(k)}(x)}{(2-x)^{2k-1} - k-1} \right], \quad k=1, 2, \dots$$

а простой контур C_n охватывает окрестности точек $0, -\gamma_1, \dots, -\gamma_n$.

Сведение к сегменту $[0, 1]$. Так как в литературе принято квазианалитические функции задавать на сегменте $[0, 1]$, поэтому целесообразно формулы (2.27) и (2.28) преобразовать так, чтобы получить аналогичные формулы для функций $\varphi(x) \in C_{\{\gamma_n\}}$ на сегменте $[0, 1]$.

Пусть функция $\varphi(x) \in C_{\{\gamma_n\}}$ на сегменте $[0, 1]$; тогда функция $\psi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ принадлежит к тому же классу $C_{\{\gamma_n\}}$ уже на $[0, 2]$; следовательно, будем иметь два разложения—(2.27) и (2.28), сходящиеся соответственно на $(0, u]$ и $[v, 2]$:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{s-1-i\infty}^{s+1-i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad (2.27)$$

где $x \in (0, u]$, $x > 0$ и

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_{s-1-i\infty}^{s+1-i\infty} \frac{\left(\frac{2-x}{2-v}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta, \quad (2.28)$$

где $x \in [v, 2]$, $x > 0$.

Из (2.27) следует, что

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{s-1-i\infty}^{s+1-i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta.$$

Обозначая $\frac{x}{2} = x'$, получим

$$\varphi(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{s-1-i\infty}^{s+1-i\infty} \frac{\left(\frac{2x'}{u}\right)^{-z}}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)} d\zeta.$$

или

$$\varphi(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x'}{u'}\right)^{-z} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}, \quad (2.27')$$

где $u' = \frac{u}{2}$, а $x' \in (0, u']$.

Легко заметить, что

$$a_n = (-1)^n u^{n-1+1} \varphi_n(u'), \quad n=1, 2, \dots$$

$$\text{где } \varphi_n(u) = \left[\frac{\varphi_{n-1}(x)}{x^{n-1+1}} \right], \quad n=1, \dots, \gamma_0=0.$$

Таким образом, теорема (2.6) для функций $\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}[0, 1]$ сформулируется следующим образом:

Теорема (2.6'). Всякая функция $\varphi(x)$, принадлежащая на сегменте $[0, 1]$ некоторому классу $C_{\{m_n\}}$ аналитических или квазианалитических функций, в окрестности любой точки $u \in (0, 1)$ разлагается в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный ряд Тейлора

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}, \quad (2.27'')$$

$$\text{где } x > 0, \gamma_v = \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta, \quad \delta > 12 \left(1 + \frac{6}{1-u}\right) e^{\frac{1}{1-u}},$$

$$\delta_0 = \delta_0(u, \{\gamma_v\}), a_n = (-1)^n u^{n-1+1} \varphi_n(u), \quad n=1, 2, \dots$$

Аналогичным способом, преобразуя ряд (2.28), получим теорему:

Теорема (2.7'). Всякая функция $\varphi(x)$, принадлежащая на сегменте $[0, 1]$ некоторому классу $C_{\{m_n\}}$ аналитических или квазианалитических функций, в окрестности любой точки $v \in (0, 1)$ разлагается в сходящийся на $[v, 1)$ обобщенный ряд Тейлора:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{1-x}{1-v}\right)^{-z} d\zeta}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \gamma_v)}, \quad (2.28'')$$

где $x > 0, \{\gamma_v\}, v=1, 2, \dots$ удовлетворяет условиям:

$$\left\{ \gamma_v = \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta \right\}, \quad \delta > 12 \left(1 + \frac{6}{v}\right) \delta_0, \quad \delta_0 = \delta_0(v, \{\gamma_v\})$$

$$a_{k+1} = (1-v)^{T_k+1} \varphi_{k+1}(v), \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_{(k)}(x) = \left[\frac{\varphi_{(k-1)}(x)}{(1-x)^{T_k - T_{k-1} - 1}} \right]', \quad k=1, 2, \dots$$

Замечание 2. В силу теоремы (1.6) в теоремах (2.6), (2.7), а также (2.6') и (2.7') вместо последовательности чисел $\left\{ \gamma_v = \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta \right\}$ можем взять любую последовательность чисел $\left\{ \gamma_v \geq \frac{m_v}{m_{v-1}} \delta \right\}$, если толь-

$$\text{ко } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty.$$

Замечание 3. В доказательствах теорем (2.6) и (2.6'), а также (2.7), (2.7') нами использовано наилучшее приближение $E_m(\varphi)$ функции $\varphi(x)$ на сегменте $[0, 2]$ или на сегменте $[0, 1]$. Согласно известной теореме С.Н. Бернштейна необходимые дифференциальные свойства функции $\varphi(x)$, при заданном приближении многочленами на сегменте, вообще говоря, обеспечены только в интервале $(0, 2)$ или $(0, 1)$.

Это значит, что теоремы (2.6), (2.7) и получающиеся из них другие теоремы доказаны для функций, которые, вообще говоря, аналитичны или квази-аналитичны в интервале $(0, 2)$ (или теоремы (2.6') и (2.7') в интервале $(0, 1)$).

Следуя С. Н. Бернштейну, можно аналитические и квази-аналитические функции классифицировать также в терминах наилучшего приближения функций многочленами.

Определение 7. Функция $\varphi(x)$ принадлежит к классу функций $C_{\{m_n\}}(0, 1)$ ($C_{\{m_n\}}(0, 1)$), если для всякой $\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}(0, 1)$ ($\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}(0, 1)$) найдется число $0 < a < \infty$ такое, что ее наилучшие приближения на $[0, 1]$ многочленами удовлетворяют условиям

$$E_m(\varphi) = \frac{C}{T\left(\frac{m}{a}\right)}, \quad \left(E_m(\varphi) < \frac{C}{T\left(\frac{m}{a}\right)} \right), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{где } T(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}, \quad \left(\hat{T}(r) = \max_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n} \right),$$

$C > 0$ — некоторая постоянная.

Заметим, что $C_{\{m_n\}}[0, 1] \subset C_{\{m_n\}}(0, 1)$.

Это значит, что теоремы (2.6) и (2.7), а также теоремы (2.6') и (2.7') нами доказаны для классов $C_{\{m_n\}}(0, 2)$ и $C_{\{m_n\}}(0, 1)$, которые в себя включают соответственно классы $C_{\{m_n\}}[0, 2]$ и $C_{\{m_n\}}[0, 1]$.

Исходя из результатов, полученных в настоящей работе, может

быть предложена классификация квази-аналитических функций (может не всех) в терминах обобщенного ряда Тейлора.

Определение 8. Функция $\varphi(x)$ на интервале $(0,1)$ принадлежит к классу функций $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right) \left(C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)(0,1)\right)$, если для каждой точки

$u \in (0,1)$ существует число $\delta = \delta(u)$, где $0 < \delta < \infty$, такое, что функция $\varphi(x)$ в окрестности u разлагается в сходящийся на $(0, u]$ обобщенный ряд Тейлора по последовательности $\{\delta \gamma_i\}$, $i=1, 2, 3, \dots$ с конечным порядком равномерной сходимости n .

Приведем два легко доказуемых предложения.

Теорема (2.9). Пусть имеем два класса функций $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)$ и $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma'_i\right)$ на $(0,1)$, где, начиная с $i=1$ и для всех $i > 1$, $\gamma'_i > \gamma_i$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_i} = \infty$, тогда $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right) \subset C\left(\prod_{i=1}^n \gamma'_i\right)$, а обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Действительно, пусть $\varphi(x)$ — произвольная функция класса $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)$, значит $\varphi(x)$ может быть представлена сходящимся при $0 < x < u$ рядом

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z} dz}{\prod_{i=1}^n (\zeta + \delta \gamma_i)}, \quad (2.27^*)$$

где $\delta = \delta(u)$, $x > 0$ — некоторое число.

Согласно теореме (1.6) та же самая функция разлагается также в сходящийся при $0 < x \leq u$ ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z} dz}{\prod_{i=1}^n (\zeta + \delta \gamma'_i)}.$$

Это, в силу произвольности функции $\varphi(x) \in C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)$, значит, что вся-

кая функция $\varphi(x) \in C\left(\prod_{i=1}^n \gamma_i\right)(0,1)$ принадлежит также к классу $C\left(\prod_{i=1}^n \gamma'_i\right)(0,1)$.

Покажем, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно, а именно, существует класс функций $C_{\left\{\prod_1^n \gamma_v\right\}}(0,1)$, и функция

$$\varphi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_v\right\}}(0,1) \text{ такая, что } \varphi(x) \notin C_{\left\{\prod_1^n \gamma_v\right\}}(0,1).$$

$$\text{Обозначим } \prod_1^n \gamma_v = m_n \text{ и } \prod_1^n \gamma'_v = m'_n.$$

$$\text{Известно, что } C_{\{m_n\}}[0,1] \subset C_{\{m'_n\}}[0,1].$$

Пусть теперь классы $C_{\{m_n\}}$ и $C_{\{m'_n\}}$ таковы, что существует функция $\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}[0,1]$, но $\varphi(x) \notin C_{\{m'_n\}}[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое положительное число. Это, например, всегда возможно, когда $C_{\{m_n\}} \subset C_{\{m'_n\}}$ два различных класса Данжуа. Согласно теореме (2.6') для любого $u \in (0,1)$ и $x \in (0,u]$ имеет место сходящееся разложение

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{z-i\infty}^{z+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{u}\right)^{-z} dz}{\prod_{v=0}^n (\zeta + \delta' \gamma'_v)}, \quad (2.27')$$

где $\delta' = \delta'(u)$, $z > 0$ — некоторое конечное число.

Но в силу теоремы (1.7) функция $\varphi(x)$ на $(0,u]$ не разлагается в ряд типа (2.27') по последовательности $\{\delta' \gamma'_v\}$, где $0 < \delta' = \delta'(u) < \infty$.

Действительно, предположим, что $\varphi(x) \in C_{\left\{\prod_1^n \gamma_v\right\}}(0,1)$; тогда, согласно теореме (1.7), имели бы

$$|\varphi^{(n)}(x)| < C(e^2 \omega_n)^n \prod_{v=1}^n (\gamma_v + z) t^{-z-n-1},$$

где $\omega_n = \max_{1 \leq v \leq n} \left(1, \frac{\gamma_v}{z + \gamma_v}\right)$, $C = C(z)$, для всякого $x \in (0,u]$ и $u \in (0,1)$. Это значит, что $\varphi(x) \in C_{\{m_n\}}(0,1)$, что противоречит нашему условию $\varphi(x) \notin C_{\{m'_n\}}[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Теорема (2.10). Если $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{\gamma_n} = \omega'$, где ω и ω' конечные, отличные от нуля числа, тогда

$$C_{\left\{\prod_1^n \gamma_v\right\}}(0,1) = C_{\left\{\prod_1^n \gamma'_v\right\}}(0,1).$$

Из условия теоремы следует, что, начиная с некоторого значения $p_0 = p_0(\varepsilon)$, будем иметь

$$\gamma_n < (\omega' + \varepsilon) \gamma'_n,$$

$$\gamma'_n < \frac{1}{\omega - \varepsilon} \gamma_n,$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое сколь угодно малое число.

Следовательно, можно найти пару чисел k и k' таких, что

$$\gamma_n < k' \gamma'_n \text{ и } \gamma'_n < k \gamma_n,$$

для всех $n = 1, 2, \dots$

Это значит, что всякая функция $\varphi(x) \in C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1)$ входит также в класс $C_{\left\{ \prod_1^n \gamma'_n \right\}}(0,1)$, и, наоборот, всякая функция $\psi(x) \in C_{\left\{ \prod_1^n \gamma'_n \right\}}(0,1)$ входит в класс $C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1)$.

В силу произвольности функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, взятых соответственно из классов $C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1)$ и $C_{\left\{ \prod_1^n \gamma'_n \right\}}(0,1)$, заключаем, что

$$C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1) = C_{\left\{ \prod_1^n \gamma'_n \right\}}(0,1).$$

Сравнивая классы $C_{\{m_n\}}[0,1]$, $C'_{\{m_n\}}(0,1)$ и $C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1)$ замечаем, что

$$C_{\{m_n\}}[0,1] \subset C'_{\{m_n\}}(0,1) \subset C_{\left\{ \prod_1^n \gamma_n \right\}}(0,1).$$

Заметим, что последовательность чисел $\{m_n\}$, удовлетворяющая требованиям определения 6, была введена для оценки произведения

$$\prod_1^n \left(1 + \frac{r^2}{\alpha_v^2} \right).$$

С другой стороны, нетрудно показать, что $\prod_1^n \left(1 + \frac{r^2}{\alpha_v^2} \right)$ легко может быть оценено (причем достаточно точно), если последовательность чисел $\{\alpha_v\}$ составляет регулярную последовательность, удовлетворяющую условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(cr)}{n(r)} \leq C,$$

где $n(r)$ — числовая функция последовательности $\{\alpha_v\}$, $C > 1$ — произвольное число.

Значит, теоремы (2.5), (2.6), (2.7) (а также (2.6'), (2.7')) останутся в силе (не считая изменения постоянных), если бы вместо последовательности $\{m_n\}$ рассмотрели последовательность чисел $\{m_n^*\}$, удовлетворяющую условиям:

1. Последовательность чисел $\left\{\gamma_n = \frac{m_n^*}{m_{n-1}^*}\right\}$ является регулярной последовательностью, удовлетворяющей условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{n(r)} \leq C,$$

где $C > 1$ — произвольное число, $n(r)$ — числовая функция последовательности $\{\gamma_n\}$.

$$2. \quad T^*(r) = \max_{n > 1} \frac{r^n}{m_n} \leq \max_{n > 1} \frac{r^n}{m_n} = T(r).$$

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\ln T^*(r)}{r^2} dr = \infty.$$

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 6 X 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Сообщения Института математики и механики АН Армянской ССР, выпуск 5, 1950, Ереван.
2. Bronwicz T. J. I. An introduction to the theory of infinite series, 1926, London.
3. Mandelbrojt S. Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, 1935, Paris.
4. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов, Ленинград—Москва, 1937.
5. Натансон, Е. П. Конструктивная теория функций, Москва—Ленинград, 1949.
6. Поля и Сеге. Задачи и теоремы из анализа, часть 2, Москва—Ленинград, 1938.

Հ. Վ. Բադալյան

ԹԵՅԼՈՐԻ ՇԱՐՔԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՈՒՄԸ ԵՎ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՈՒ ԿՎԱԶԻ-ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հայտնի է, որ կվազի-անալիտիկ ֆունկցիաները (Կարլեմանի իմաստով), ճիշտ ախտահար, ինչպես անալիտիկ ֆունկցիաները, միակ կերպով որոշվում են մի կետում ունեցած իրենց հաջորդական ածանցյալներով (էլեմենտով):

Մյուս կողմից հայտնի է, որ զոլոմյուն չունի կվազի-անալիտիկ ֆունկցիաներն իրենց էլեմենտների միջոցով ներկայացնելու ապարատ:

Ներկա աշխատությունը հիմնականում նվիրված է այդպիսի ապարատ ստեղծելու խնդրին:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

К расчету длинных оболочек двойкой кривизны

1. Задача расчета прочности весьма пологой слоистой оболочки, составленной из ортотропных слоев, как известно [1, 2, 3], сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \nabla^2 w = 0, \\ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \nabla^2 \varphi = Z, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где, как и в [3, 4], a_{ik} — коэффициенты, характеризующие жесткости растяжения, D_{ik} — жесткости изгиба, Z — внешняя, нормально приложенная нагрузка, α и β — криволинейные, ортогональные координаты, совпадающие с линиями главной кривизны срединной поверхности, относительно которой все слои расположены симметрично,

$$\nabla^2 = k_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad (1.2)$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны координатной поверхности соответственно по линиям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Искомыми в (1.1) являются $w = w(\alpha, \beta)$ — функция перемещений и $\varphi = \varphi(\alpha, \beta)$ — функция напряжений, через которые представляются все внутренние усилия и напряжения в слоях оболочки [3, 4].

2. В случае длинной оболочки в (1.1) полагаем:

$$a_{11} = 0, \quad D_{11} = 0, \quad a_{66} = 0, \quad D_{66} = 0, \quad (2.1)$$

что равносильно принятию известных статических и геометрических гипотез В. З. Власова [5] о малом влиянии продольных изгибающих и крутящих моментов на общее напряженное состояние оболочки и об отсутствии деформаций поперечного удлинения и сдвига.

Далее, для большей простоты здесь и в дальнейшем принимаем коэффициенты Пуассона равными нулю, т. е. в (1.1) считаем, что

$$a_{12} = 0, \quad D_{12} = 0. \quad (2.2)$$

Учитывая (2.1) и (2.2), из (1.1) получим:

$$\begin{aligned} a_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \nabla_r^2 w &= 0, \\ D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \nabla_r^2 \varphi &= Z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полагая [3,4,5]:

$$w = a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4}, \quad \varphi = \nabla_r^2 \Phi, \quad (2.4)$$

тождественно удовлетворим первому уравнению (2.3), а из второго уравнения окончательно получим:

$$D_{22} \frac{1}{C_{11}} \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + \nabla_r^2 \nabla_r^2 \Phi = Z. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является разрешающим для расчета прочности полой достаточно длинной цилиндрической оболочки, искривленной и в продольном направлении.

В (2.5) искомой является функция $\Phi(x, \beta)$, через которую расчетные величины задачи представляются следующим образом [3,4,6]:

изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{D_{11}}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial \beta^4}, & G_2 &= \frac{D_{22}}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6}, \\ H &= -2 \frac{D_{66}}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial \beta^5}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

тангенциальные силы

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \nabla_r^2 \Phi, & T_2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla_r^2 \Phi, \\ S &= - \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \nabla_r^2 \Phi; \end{aligned} \quad (2.7)$$

напряжения в слоях оболочки

$$\begin{aligned} \sigma_x^m &= \frac{E_x^m}{C_{11}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \nabla_r^2 \Phi - \gamma \frac{E_x^m}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x^2 \partial \beta^4}, \\ \sigma_\beta^m &= \frac{E_\beta^m}{C_{22}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla_r^2 \Phi - \gamma \frac{E_\beta^m}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6}, \\ \tau_{x\beta}^m &= - \frac{G_{x\beta}^m}{C_{66}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} \nabla_r^2 \Phi - 2\gamma \frac{G_{x\beta}^m}{C_{11}} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial x \partial \beta^5}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Остальные напряжения интереса не представляют.

В этих формулах приняты следующие обозначения [3,4]:

E_x^m , E_y^m и G_{xy}^m — модули упругости и сдвига материала каждого слоя оболочки, γ — расстояние по нормали от точки (α, β) координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки,

$$\begin{aligned} C_{ik} &= 2 \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right], \\ D_{ik} &= \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $B_{11}^m = E_x^m$, $B_{22}^m = E_y^m$, $B_{66}^m = G_{xy}^m$. (2.10)

Кроме этих приняты следующие известные обозначения [3,4,7]: число слоев — $(2n+1)$ (крайние слои имеют номера 1 и $(2n+1)$, средний слой имеет номер $(n+1)$ и является m по счету), $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n+1}$ — расстояния от срединной поверхности до границ слоев.

3. В частном случае изотропной однородной цилиндрической оболочки, учитывая, что $D_{22} = \frac{Eh^3}{12}$, $C_{11} = Eh$, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{R}$, а также взамен функции $\Phi(\alpha, \beta)$ вводя некоторую комплексную функцию [8,9,10]

$$V = w - i \frac{\sqrt{12}}{Eh^2} \varphi \quad (3.1)$$

в безразмерную систему координат

$$\xi = \frac{\alpha}{R}, \quad \eta = \frac{\beta}{R}, \quad (3.2)$$

из (2.3), для однородной задачи получим безусловно интересное разрешающее уравнение упрощенной теории длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова [10]:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial \eta^4} + i 2b^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0, \quad (3.3)$$

где $2b^2 = \frac{R}{h} \sqrt{12}$, h — толщина оболочки.

Таким образом, на основании вышеприведенного, мы можем констатировать, что упрощенная теория длинных цилиндрических пластин В. В. Новожилова, построенная на основании существенно геометрической гипотезы [10], содержит в себе как статические, так и геометрические гипотезы известной теории ортотропных цилиндрических оболочек средней длины В. З. Власова [5].

4. В заключение отметим, что на основании сравнительного (с точными методами) численного анализа установлено, что предло-

женным приближенным методом расчета пологих длинных цилиндрических оболочек, искривленных и в продольном направлении, с достаточной точностью (порядка $10-15\%$) можно пользоваться при отношении сторон оболочки больше $3,5 \div 4,0$.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 12 IX 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. ТАН Армянской ССР, т. VIII, № 5, 1948.
2. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР, № 9, 1947.
3. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. IV, № 5, 1951.
4. Амбарцумян С. А. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 6, 1952.
5. Власов В. З. Общая теория оболочек, 1949.
6. Гольденвейзер А. Л. ПММ, XI, 4, 1947.
7. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластики, 1947.
8. Векуа И. Н. ПММ, XII, 1, 1948.
9. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек, 1947.
10. Новожиллов В. В. Теория тонких оболочек, 1951.

Ս. Ս. Համբարձումյան

ԿՐԿՆԱԿԻ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԵՐԿԱՐ ԹԱՂԱՆՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ առաջարկվում է կրկնակի կորություն ունեցող երկար թաղանթների հաշվարկման մի նոր մոտավոր մեթոդ:

Յույց է տրվում, որ երկար թաղանթների ամրության խնդիրը բերվում է բավական պարզ (2,5) դժային դիֆերենցիալ հավասարմանը, որն ստացվում է անխզտրուգ թաղանթների ընդհանուր առաջին հավասարումներից՝ (2.1) և (2.2) մոտավորություններն ընդունելու հետևանքով:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулкян

О кручении призм треугольного поперечного сечения

Приближенное решение задачи о кручении призм с поперечным сечением в виде произвольного треугольника, дающее нижнюю оценку для величины жесткости, дано в работах Л. С. Лейбензона [1], А. И. Лурье [2], Л. В. Канторовича [3]. В работе Б. Г. Галеркина [4] приведено точное решение задачи о кручении призм с поперечным сечением в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. Следует отметить, что в работе П. И. Куфарева [5] дано точное решение задачи о кручении и изгибе стержня полигонального сечения, но, как указывает сам автор, практическое применение этого метода чрезвычайно затруднительно.

В настоящей работе дается приближенное решение задачи о кручении призм с треугольным поперечным сечением, когда:

- 1) поперечное сечение стержня—равнобедренный треугольник;
- 2) поперечное сечение—прямоугольный треугольник.

Приведенное решение дает верхнюю оценку для величины жесткости при кручении.

В конце работы приведены формулы и таблицы для вычисления жесткости призм треугольного поперечного сечения при различных углах α , и показано при этом, что максимальная погрешность значения жесткости не превышает 1% для $\alpha \leq 120^\circ$ (сечение—равнобедренный треугольник) и 1,6% для $\alpha \leq 30^\circ$ (сечение—прямоугольный треугольник).

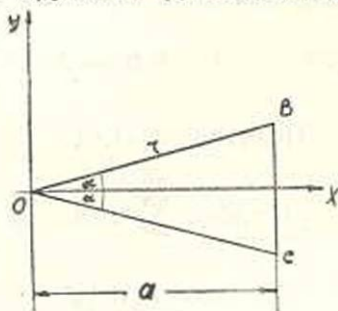
§. 1. *Кручение призм с поперечным сечением в виде равнобедренного треугольника.* Как известно, при кручении функция напряжений $U(x, y)$ внутри области сечения ОВС (фиг. 1) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta^2 U(x, y) = -2 \quad (1.1)$$

и на границе области принимает значения, равные нулю.

Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2. \quad (1.2)$$



Фиг. 1

На границе области должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} U(r, \varphi)|_{r=a} &= 0, & U(r, \varphi)|_{r=0} &= 0, \\ U(r, \varphi)|_{r=0} &= 0, & U(r, \varphi)|_{r=\frac{a}{\cos \varphi}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Решение ищем в виде:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}. \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.2) и разлагая $r^{-2\alpha}$ в ряд по

$\cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k''(r) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(r) \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} - \\ - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4\alpha^2} f_k(r) \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)\pi\varphi}{2\alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$f_k''(r) + \frac{1}{r} f_k'(r) - \frac{1}{r^2} \frac{(2k-1)^2\pi^2}{4\alpha^2} f_k(r) = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1}. \quad (1.5)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} f_k(r) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\mu_k(2-\mu_k)} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 + A_k r^{\mu_k} + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\mu_k(\mu_k+2)} \times \\ \times \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 + B_k r^{-\mu_k}, \end{aligned}$$

где

$$\mu_k = \frac{(2k-1)\pi}{2\alpha}.$$

Для выполнения условия $U(r, \varphi)|_{r=0} = 0$ из (1.3) достаточно, чтобы $f_k(r)|_{r=0} = 0$. Чтобы $f_k(r)$ при $r=0$ было конечным и равнялось нулю, необходимо, чтобы $B_k = 0$, т. е.

$$f_k(r) = A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2. \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.4), получим:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} r^2 \right]. \quad (1.7)$$

Для определения коэффициентов A_k применим метод Трефца [1] смягчения граничных условий, заключающийся в том, что гранич-

ные условия удовлетворяются приближенно, причем так, чтобы средняя квадратичная ошибка ε_0 при этом была минимальная. Крутящий момент, вычисленный по этому методу, больше истинного, т. е. мы получаем верхнюю оценку для жесткости.

Из условия (1.3) имеем $U(x, y)|_{x=a} = 0$.

Средняя квадратичная ошибка

$$\varepsilon_0 = \int_{-a \operatorname{tg} \varphi}^{+a \operatorname{tg} \varphi} [(0 - U(a, y))^2 dy.$$

Условие минимума ε_0 дает

$$\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial A_i} = 2 \int_{-a \operatorname{tg} \varphi}^{+a \operatorname{tg} \varphi} U(a, y) \frac{\partial}{\partial A_i} U(a, y) dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.8) значение $U(x, y)$, согласно (1.7) получим:

$$\int_{-a}^{+a} \cos(\mu_i \varphi) \frac{a^{2i}}{\cos^{2i} \varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k \left(\frac{a}{\cos \varphi} \right)^{2k} + \right. \\ \left. + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} \right] \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 0 \quad (1.9) \\ (i=1, 2, \dots)$$

Жесткость при кручении определяется по формуле:

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (1.10)$$

Подставим значение функции напряжений из (1.7) в (1.10)

$$C = 4G \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} r \left[\sum_{k=1}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{2k} + \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \right] \right] dr \cdot d\varphi, \quad (1.11)$$

где A_k — решения системы (1.9).

Полагая все A_k при $k > 2$ равными нулю, для жесткости получим следующую формулу:

$$C = 4G \frac{a^{2+\mu_1}}{2 + \mu_1} A_1 \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} \cos(\mu_1 \varphi) \frac{1}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi + \\ + \frac{8a^4}{\pi} G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4 - \mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \int_0^{\frac{\pi}{\cos \varphi}} \frac{\cos(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi, \quad (1.12)$$

где A_1 вследствие (1.9) имеет вид:

$$A_1 = \frac{8}{\pi} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos(\mu_1 \varphi) \cos(\mu_k \varphi)}{\cos^{4+\mu_1} \varphi} d\varphi}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2(1+\mu_1)} \varphi} d\varphi} \cdot a^{2-\mu_1}.$$

Формула (1.11) перестает быть годной при $\mu_k = 2$, т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Для случая $\alpha = \frac{\pi}{4}$ решение уравнения (1.5) имеет вид:

$$i_1(r) = -\frac{2}{\pi} r^2 \ln r + A_1 r^2 + \frac{1}{2\pi} r^2, \quad (1.13)$$

$$i_k(r) = A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \text{ для } k \geq 2.$$

Подставляя (1.13) в (1.4), получим:

$$U(r, \varphi) = \cos 2\varphi \left[-\frac{2}{\pi} r^2 \ln r + A_1 r^2 + \frac{1}{2\pi} r^2 \right] + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \cos(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot r^2 \right].$$

Коэффициенты A_k определяются по методу Трефца. Принимая для всех $k \geq 2$ $A_k = 0$, для определения A_1 получим следующее равенство:

$$A_1 = \frac{1}{\int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} dx} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} \ln \frac{a}{\cos x} dx - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x} dx - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{1}{4-\mu_k^2} \cdot \frac{(-1)^k}{2k-1} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\cos^6 x} \cos 2x \cos(\mu_k x) dx \right\}.$$

Подставляя значение $U(r, \varphi)$ из (1.14) в (1.10) и учитывая только A_1 , для вычисления жесткости окончательно получим следующую формулу:

$$C = \frac{8}{\pi} G a^4 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cdot \frac{1}{4-\mu_k^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi -$$

$$-\frac{2}{\pi} Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} \ln \frac{a}{\cos \varphi} d\varphi + A_1 Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi + \\ + \frac{1}{\pi} Ga^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Для иллюстрации вычислены жесткости $\bar{C}$ (верхние оценки) призм с сечениями в виде равнобедренных треугольников для некоторых значений α . Для сравнения вычислены жесткости $\tilde{C}$ (нижние оценки) по формуле Л. С. Лейбензона [1] для тех же углов.

Принимаем за расчетную формулу C среднее арифметическое жесткостей $\bar{C}$ и $\tilde{C}$. Тогда ошибка $\delta = \frac{\bar{C} - C}{2}$.

С увеличением угла ошибка возрастает и достигает 1% для $\alpha = \frac{2}{3}\pi$.

Таблица 1

2α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$
$\bar{C}/Ga^4$	0,00693	0,0191	0,0385	0,1045	0,2365
$\tilde{C}/Ga^4$	0,00693	0,0191	0,0385	0,1042	0,2320
C/Ga^4	0,00693	0,0191	0,385	0,10435	0,23425

* Для случая $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ точное значение жесткости по Галеркину $C = 0,1044 Ga^4$.

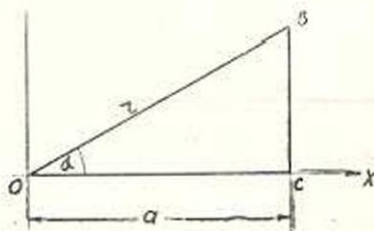
§ 2. Кручение призм с поперечным сечением в виде прямоугольного треугольника. Определение функции напряжений $U(r, \varphi)$ при кручении призматических стержней сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = -2 \quad (2.1)$$

внутри области ОВС (фиг. 2). При этом на границе области должны выполняться следующие условия:

$$U(r, \varphi)|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad U(r, \varphi)|_{\varphi=0} = 0, \quad (2.2)$$

$$U(r, \varphi)|_{r=0} = 0, \quad U(r, \varphi)|_{r=\frac{a}{\cos \varphi}} = 0.$$



Фиг. 2

Решение ищем в виде:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.1) и разлагая ΔU в ряд Фурье по $\sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} - \\ - \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 f_k(r) \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \cdot \sin \frac{k\pi\varphi}{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда:

$$f_k(r) + \frac{1}{r} f_k(r) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)^2 f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \quad (2.4)$$

Это есть уравнение Эйлера. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 + A_k r^{\mu_k} + B_k r^{-\mu_k},$$

где $\mu_k = \frac{k\pi}{\alpha}$.

Чтобы $U(r, \varphi)|_{r=0} = 0$ достаточно, чтобы $f_k(r)|_{r=0} = 0$, т. е.

$$f_k(r) = \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 + A_k r^{\mu_k}. \quad (2.5)$$

Подставляя $f_k(r)$ из (2.5) в (2.3), получим:

$$U(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\mu_k \varphi) \left[A_k r^{\mu_k} + \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} r^2 \right]. \quad (2.6)$$

Для определения коэффициентов A_k применим, как и в §1, метод смягчения граничных условий.

$$\text{Имеем: } \frac{\partial}{\partial A_l} \int_0^{\alpha} [0 - U(a, y)]^2 dy = 0.$$

Для определения коэффициентов A_k получим следующую систему уравнений:

$$\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y}{a}} (a^2 + y^2)^{\frac{\mu_1}{2}} \sin \left(\mu_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right) \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left(\mu_k \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right) \times \\ \times \left[A_k (a^2 + y^2)^{\frac{\mu_k}{2}} + \frac{4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \frac{1}{4 - \mu_k^2} (a^2 + y^2) \right] = 0$$

(i = 1, 2, ...)

Принимая все A_k при $k \geq 2$ равными нулю, для определения коэффициента A_1 получим следующее выражение:

$$A_1 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_1 \varphi) \cdot \sin(\mu_k \varphi)}{\cos^{1+\mu_k} \varphi} d\varphi}{\int_0^{\pi} \frac{\sin^2(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi} a^{2-\mu_1}. \quad (2.7)$$

Подставляя значение функции напряжений из (2.6) в (1.10) для определения жесткости получим следующую формулу:

$$C = 2G \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2+\mu_k}}{\mu_k + 2} A_k \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^{2+\mu_k} \varphi} d\varphi - \\ - \frac{4}{\pi} G a^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Принимая A_k для всех $k \geq 2$ равными нулю, получим:

$$C = 2G \frac{a^{2+\mu_1}}{2 + \mu_1} A_1 \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_1 \varphi)}{\cos^{2+\mu_1} \varphi} d\varphi - \\ - \frac{4}{\pi} G a^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4 - \mu_k^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(\mu_k \varphi)}{\cos^4 \varphi} d\varphi.$$

Здесь A_1 имеет значение (2.7).

В таблице 2 приведены верхние оценки $\bar{C}$ для жесткости призм с сечениями в виде прямоугольных треугольников для некоторых значений угла α , вычисленные по формуле (2.8) и нижние оценки $\hat{C}$ для жесткости, вычисленные по формуле Лейбензона [1]. За расчетную формулу C принимаем среднее арифметическое жесткостей $\hat{C}$ и $\bar{C}$. Как видно из таблицы, с увеличением угла ошибка возрастает, достигая 1,6% для $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Таблица 2

α	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$
$\bar{C}/Ga^4$	0,00115	0,00358	0,00811
$\bar{C}/Ga^4$	0,00114	0,00353	0,00785
C/Ga^4	0,001145	0,003555	0,00798

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 30 VI 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. I, Изд. АН СССР, М., 1951.
2. Лурье А. И. Труды Лен. инд. ин-та, 1939, № 3, физ.-мат. науки, вып. I, стр. 121—126.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, Гос. изд. тех.-теор. лит., М.—Л., 1950.
4. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, т. I, изд. АН СССР, М., 1952.
5. Куфарев П. И. К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения. ПММ, т. I, вып. I, 1937.

Ն. Օ. Գուլկանյան

ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՆԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված է եռանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող պրիզմաների ոլորման խնդրի մոտավոր մի լուծում:

Ուսումնասիրված են հետևյալ դեպքերը՝

ա) ձողի լայնական կտրվածքը հավասարադրուն եռանկյուն է.

բ) լայնական կտրվածքը ուղղանկյուն եռանկյուն է:

Բերված մոտավոր լուծումը տալիս է ոլորման կոշտության համար նրա վերին գնահատականը.

Տրված են կամավոր անկյունով եռանկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող ձողերի ոլորման կոշտությունները հաշվելու համար բանաձևեր: Բերված թվային օրինակների համար կազմված են աղյուսակներ:

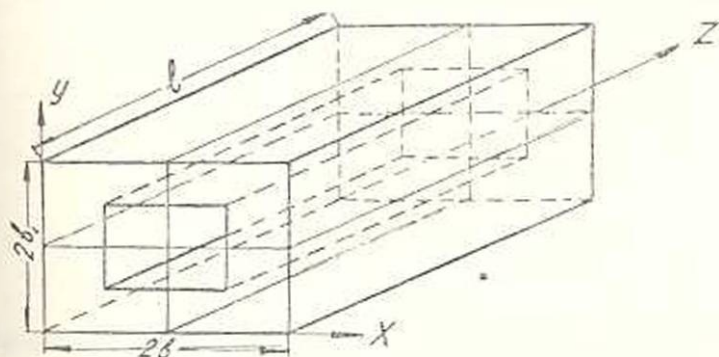
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. С. Минасян

Об установившемся распределении температуры
 в призматическом теле полого прямоугольного
 сечения конечной длины

1. *Постановка задачи и построение решения.* Рассмотрим пространственную задачу об установившемся распределении тепла в призматическом теле конечной длины l с полым прямоугольным сечением, когда задано распределение температуры на поверхности тела, при условии симметрии относительно плоскостей $x=b$ и $y=b_1$ (фиг. 1).

В этом случае функция $U(x, y, z)$ распределения температуры в теле будет удовлетворять уравнению:



Фиг. 1.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям

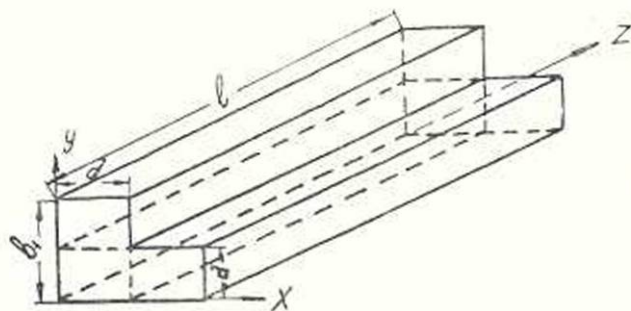
$$U(x, y, 0) = R_0(x, y), \quad U(x, y, l) = R_1(x, y), \quad (1.2)$$

$$U(0, y, z) = U(2b, y, z) = S_0(y, z), \quad U(d_1, y, z) = U(2b - d_1, y, z) = S_1(y, z),$$

$$U(x, 0, z) = U(x, 2b_1, z) = T_0(x, z), \quad U(x, d_2, z) = U(x, 2b_1 - d_2, z) = T_1(x, z).$$

Здесь функции $R_0(x, y)$, $S_1(y, z)$ и $T_1(x, z)$ — заданные температуры поверхности тел, относительно которых предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию, причем эти функции симметричны относительно плоскостей $x=b$ и $y=b_1$.

Вследствие симметрии достаточно ограничиться рассмотрением одной четвертой части тела, ограниченной плоскостями $x=0$, $x=b$, $y=0$ и $y=b_1$ (фиг. 2), причем в остальных частях функция $U(x, y, z)$ продолжается симметричным образом. При этом на плоскостях $x=b$ и $y=b_1$ должны удовлетворяться условия:



Фиг. 2.

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=b} = \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=b_1} = 0. \quad (1.3)$$

Функцию $U(x, y, z)$ ищем в виде ряда Фурье, расположенного по $\sin \frac{k\pi z}{l}$:

$$U(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x, y) \sin \frac{k\pi z}{l}, \quad (1.4)$$

где

$$U_k(x, y) = \frac{2}{l} \int_0^l U(x, y, z) \sin \frac{k\pi z}{l} dz.$$

Для определения $U_k(x, y)$, умножив оператор Лапласа от функции $U(x, y, z)$ на $\frac{2}{l} \sin \frac{k\pi z}{l} dz$ и проинтегрировав от 0 до l , придем, в силу (1.1) и (1.2), к следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_k(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_k(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 U_k(x, y) = \\ = \frac{2k\pi}{l^2} \left[(-1)^k R_1(x, y) - R_0(x, y) \right], \end{aligned} \quad (1.5)$$

или, обозначив для краткости,

$$\varphi_k(x, y) = \frac{2k\pi}{l^2} \left[(-1)^k R_1(x, y) - R_0(x, y) \right], \quad (1.6)$$

к уравнению

$$L_k [U_k(x, y)] = \varphi_k(x, y), \quad (1.7)$$

где L_k — k -ый дифференциальный оператор:

$$L_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Граничные условия для функции $U_k(x, y)$ будут:

$$U_k(0, y) = S_{k,0}(y), \quad U_k(d_1, y) = S_{k,1}(y), \quad U_k(x, 0) = T_{k,0}(x),$$

$$U_k(x, d) = T_{k,1}(x), \quad \left. \frac{\partial U_k}{\partial x} \right|_{x=b} = \left. \frac{\partial U_k}{\partial y} \right|_{y=b} = 0. \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_{k,1}(y) &= \frac{2}{l} \int_0^l S_1(y, z) \sin \frac{k\pi z}{l} dz, \quad T_{k,1}(x) = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l T_1(x, z) \sin \frac{k\pi z}{l} dz. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для построения функции $U_k(x, y)$ поступаем аналогично предыдущему [1]. Представим $U_k(x, y)$ в виде

$$U_k(x, y) = \begin{cases} f_k(x, y) & \text{при } x > d_1 \\ g_k(x, y) & \text{при } x \leq d_1, y \leq d \\ \varphi_k(x, y) & \text{при } y > d. \end{cases} \quad (1.10)$$

Функции $f_k(x, y)$, $g_k(x, y)$ и $\varphi_k(x, y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (1.5), соответствующим граничным условиям (1.8) и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} f_k(d_1, y) &= g_k(d_1, y), \quad \left. \frac{\partial f_k}{\partial x} \right|_{x=d_1} = \left. \frac{\partial g_k}{\partial x} \right|_{x=d_1}, \\ g_k(x, d_1) &= \varphi_k(x, d_1), \quad \left. \frac{\partial g_k}{\partial y} \right|_{y=d} = \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right|_{y=d}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Представим $f_k(x, y)$ и $g_k(x, y)$ в виде рядов Фурье, расположенных по $\sin \frac{p\pi y}{d}$:

$$f_k(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} f_{pk}(x) \sin \frac{p\pi y}{d}, \quad g_k(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} g_{pk}(x) \sin \frac{p\pi y}{d}, \quad (1.12)$$

где

$$f_{pk}(x) = \frac{2}{d} \int_0^d f_k(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy, \quad g_{pk}(x) = \frac{2}{d} \int_0^d g_k(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy.$$

Умножив оператор L_k от функции $f_k(x, y)$ на $\frac{2}{d} \sin \frac{p\pi y}{d} dy$ и проинтегрировав от 0 до d , получим, принимая во внимание (1.7) и (1.8), следующее дифференциальное уравнение для $f_{pk}(x)$:

$$f_{pk}^*(x) - \pi^2 \left(\frac{p^2}{d^2} + \frac{\kappa^2}{p^2} \right) f_{pk}(x) = \frac{2}{d} \left\{ \frac{p\pi}{d} \left[(-1)^p T_{\kappa,1}(x) - T_{\kappa,0}(x) \right] + \int_0^d \rho_{\kappa}(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\}, \quad (1.13)$$

общее решение которого будет

$$f_{pk}(x) = A_{pk} \operatorname{sh} \alpha_{pk} x + B_{pk} \operatorname{ch} \alpha_{pk} x + \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_{d_1}^x \left\{ \frac{p\pi}{d} \left[(-1)^p T_{\kappa,1}(t) - T_{\kappa,0}(t) \right] + \int_0^d \rho_{\kappa}(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\} \operatorname{sh} \alpha_{pk}(x-t) dt; \quad (1.14)$$

$$\text{здесь} \quad \alpha_{pk}^2 = \pi^2 \left(\frac{\kappa^2}{p^2} + \frac{p^2}{d^2} \right). \quad (1.15)$$

Аналогичным образом для $g_{pk}(x)$, согласно (1.7), (1.8) и (1.11), получим:

$$g_{pk}^*(x) - \alpha_{pk}^2 g_{pk}(x) = \frac{2p\pi}{d^2} \left[(-1)^p \varphi_{\kappa}(x, d) - T_{\kappa,0}(x) \right] + \frac{2}{d} \int_0^d \rho_{\kappa}(x, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy. \quad (1.16)$$

В правую часть уравнения (1.16) входит неизвестное значение $\varphi_{\kappa}(x, d)$. Ищем функцию $\varphi_{\kappa}(x, y)$ в виде

$$\varphi_{\kappa}(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{pk}(y) \sin \frac{p\pi x}{d_1}, \quad (1.17)$$

$$\text{где} \quad \varphi_{pk}(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \varphi_{\kappa}(x, y) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx.$$

Подставив значение $\varphi_{\kappa}(x, y)$ из (1.17) в уравнение (1.16) и решая последнее, находим:

$$g_{pk}(x) = C_{pk} \operatorname{sh} \alpha_{pk} x + D_{pk} \operatorname{ch} \alpha_{pk} x + (-1)^{p+1} \frac{2pd}{\pi d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi_{qk}(d)}{q^2 + \gamma^2 \alpha_{pk}^2} \sin \frac{q\pi x}{d_1} - \int_x^{d_1} \left[\frac{p\pi}{d} T_{\kappa,0}(t) - \int_0^d \rho_{\kappa}(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right] \operatorname{sh} \alpha_{pk}(t-x) dt. \quad (1.18)$$

$$\left(\gamma = \frac{d_1}{\pi} \right).$$

Граничные условия для функций $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$, согласно (1.8) и (1.11), будут:

$$f'_{pk}(b)=0, f_{pk}(d_1)=g_{pk}(d_1), f'_{pk}(d_1)=g'_{pk}(d_1), g_{pk}(0)=\xi_{pk}; \quad (1.19)$$

здесь

$$\xi_{pk} = \frac{2}{d} \int_0^d S_{k,0}(y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy = \frac{4}{dl} \int_0^d \int_0^l S_0(y, z) \sin \frac{p\pi y}{d} \sin \frac{k\pi z}{l} dz dy.$$

С другой стороны, умножив оператор L_k от функции $\varphi_k(x, y)$ на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{p\pi x}{d_1}$ и проинтегрировав от 0 до d_1 , в силу (1.7) и (1.8) получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \varphi'_{pk}(y) - \beta_{pk}^2 \varphi_{pk}(y) = \frac{2p\pi}{d_1^2} \left[(-1)^p S_{k,1}(y) - S_{k,0}(y) \right] + \\ + \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \varphi_k(x, y) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx, \end{aligned}$$

общее решение которого будет:

$$\begin{aligned} \varphi_{pk}(y) = E_{pk} \operatorname{sh} \beta_{pk} y + F_{pk} \operatorname{ch} \beta_{pk} y + \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_0^y \left\{ \frac{p\pi}{d_1} \left[(-1)^p S_{k,1}(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - S_{k,0}(t) \right] + \int_0^{d_1} \varphi_k(x, y) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right\} \operatorname{sh} \beta_{pk}(y-t) dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\text{Здесь} \quad \beta_{pk}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{p^2}{d_1^2} \right).$$

Прежде чем найти граничные условия для $\varphi_{pk}(y)$, представим функцию $g_k(x, y)$ в виде ряда

$$g_k(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{pk}(y) \sin \frac{p\pi x}{d_1}, \quad \varphi_{pk}(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} g_k(x, y) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx. \quad (1.21)$$

Поступая аналогично предыдущему, для $\varphi_{pk}(y)$ получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \varphi_{pk}(y) = G_{pk} \operatorname{sh} \beta_{pk} y + H_{pk} \operatorname{ch} \beta_{pk} y - \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_0^y \left[\frac{p\pi}{d_1} S_{k,0}(t) - \right. \\ \left. - \int_0^{d_1} \varphi_k(x, t) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right] \operatorname{sh} \beta_{pk}(t-y) dt + (-1)^{p+1} \frac{2pd^2}{\pi d_1^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f_{qk}(d_1)}{q^2 + \beta_{pk}^2} \sin \frac{q\pi y}{d}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Граничные условия для $\varphi_{pk}(y)$ и $\varphi_{pk}(y)$ будут:

$$\varphi'_{pk}(b_1)=0, \varphi_{pk}(d)=\varphi_{pk}(d), \varphi'_{pk}(d)=\varphi'_{pk}(d), \varphi_{pk}(0)=\xi_{pk} \quad (1.23)$$

где

$$\begin{aligned}\zeta_{pk} &= \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} T_{k,0}(x) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx = \\ &= \frac{4}{d_1 l} \int_0^l \int_0^{d_1} T_0(x, z) \sin \frac{p\pi x}{d_1} \sin \frac{\kappa\pi z}{l} dz dx, \quad \delta = \frac{d}{\pi}.\end{aligned}$$

2. *Выполнение граничных условий (1.19) и (1.23). Исследование полученных систем.* Удовлетворяя граничным условиям (1.19), после некоторых преобразований получим следующие выражения для $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$:

$$\begin{aligned}f_{pk}(x) &= \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_{pk} b} [B_{pk} \operatorname{ch} \alpha_{pk} (b-x) - \nu_{pk} \operatorname{sh} \alpha_{pk} x] + \\ &+ \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_{d_1}^x \left\{ \frac{p\pi}{d} \left[(-1)^p T_{k,1}(t) - T_{k,0}(t) \right] + \right. \\ &\left. + \int_0^d \rho_k(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\} \operatorname{sh} \alpha_{pk} (x-t) dt, \\ g_{pk}(x) &= \frac{\operatorname{sh} \alpha_{pk} x}{\operatorname{ch} \alpha_{pk} b} \left[B_{pk} \frac{\operatorname{ch} \alpha_{pk} (b-d_1)}{\operatorname{sh} \alpha_{pk} d_1} - \nu_{pk} \right] + \mu_{pk} \frac{\operatorname{sh} \alpha_{pk} (d_1-x)}{\operatorname{ch} \alpha_{pk} b} - \\ &- \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_x^d \left\{ \frac{p\pi}{d} T_{k,0}(t) - \int_0^d \rho_k(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\} \operatorname{sh} \alpha_{pk} (t-x) dt + \\ &+ (-1)^{p+1} \frac{2pd_1^2}{\pi d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\varphi_{qk}(d)}{q^2 + \gamma_{pk}^2} \sin \frac{q\pi x}{d_1}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

При этом неизвестные B_{pk} , посредством которых выражаются функции $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$, определяются из уравнений

$$B_{pk} = \frac{2(-1)^p p d_1 \operatorname{sh} \alpha_{pk} d_1}{\alpha_{pk} d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q q \varphi_{qk}(d)}{q^2 + \gamma_{pk}^2} + \mu_{pk}.\quad (2.2)$$

В соотношениях (2.1) и (2.2) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\mu_{pk} &= \xi_{pk} + \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_0^d \left\{ \frac{p\pi}{d} T_{k,0}(t) - \int_0^d \rho_k(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\} \operatorname{sh} \alpha_{pk} t dt, \\ \nu_{pk} &= \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_{d_1}^b \left\{ \frac{p\pi}{d} \left[(-1)^p T_{k,1}(t) - T_{k,0}(t) \right] + \right. \\ &\left. + \int_0^d \rho_k(t, y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy \right\} \operatorname{ch} \alpha_{pk} (b-t) dt.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Аналогично, для $\varphi_{pk}(y)$ и $\psi_{pk}(y)$ будем иметь следующие выражения

$$\begin{aligned}\varphi_{pk}(y) = & \frac{1}{\operatorname{ch} \beta_{pk} b_1} [F_{pk} \operatorname{ch} \beta_{pk} (b_1 - y) - q_{pk} \operatorname{sh} \beta_{pk} y] + \\ & + \frac{2}{\beta_{pk} d} \int_0^y \left\{ \frac{p\pi}{d_1} \left[(-1)^p S_{k,1}(t) - S_{k,0}(t) \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^{d_1} \rho_k(x, t) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right\} \operatorname{sh} \beta_{pk} (y - t) dt, \\ \psi_{pk}(y) = & \frac{\operatorname{sh} \beta_{pk} y}{\operatorname{ch} \beta_{pk} b_1} \left[F_{pk} \frac{\operatorname{ch} \beta_{pk} (b_1 - d)}{\operatorname{sh} \beta_{pk} d} - q_{pk} \right] + r_{pk} \frac{\operatorname{sh} \beta_{pk} (d - y)}{\operatorname{sh} \beta_{pk} d} - \\ & - \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_y^d \left[\frac{p\pi}{d_1} S_{k,0}(t) - \int_0^{d_1} \rho_k(x, t) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right] \operatorname{sh} \beta_{pk} (t - y) dt + \\ & + (-1)^{p+1} \frac{2pd^2}{\pi d_1^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{f_{qk}(d_1)}{q^2 + \beta_{pk}^2} \sin \frac{q\pi y}{d},\end{aligned}\quad (2.4)$$

где обозначено

$$\begin{aligned}q_{pk} = & \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_0^{b_1} \left\{ \frac{p\pi}{d_1} \left[(-1)^p S_{k,1}(t) - S_{k,0}(t) \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^{d_1} \rho_k(x, t) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right\} \operatorname{ch} \beta_{pk} (b_1 - t) dt, \\ r_{pk} = & r_{pk} + \frac{2}{\beta_{pk} d} \int_0^d \left[\frac{p\pi}{d_1} S_{k,0}(t) - \int_0^{d_1} \rho_k(x, t) \sin \frac{p\pi x}{d_1} dx \right] \operatorname{sh} \beta_{pk} t dt.\end{aligned}\quad (2.5)$$

При этом неизвестные F_{pk} , входящие в (2.4), определяются из уравнений

$$F_{pk} = \frac{2(-1)^p p d}{\beta_{pk} d_1^2} \operatorname{sh} \beta_{pk} d \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q q f_{qk}(d_1)}{q^2 + \beta_{pk}^2} + r_{pk}.\quad (2.6)$$

Для нахождения B_{pk} и F_{pk} из (2.2) и (2.6) вводим новые неизвестные m_{pk} и n_{pk} , связанные с прежними следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}m_{pk} = & \frac{(-1)^p p}{\operatorname{ch} \alpha_{pk} b} [B_{pk} \operatorname{ch} \alpha_{pk} (b_1 - d_1) - \gamma_{pk} \operatorname{sh} \alpha_{pk} d_1], \\ n_{pk} = & \frac{(-1)^p p}{\operatorname{ch} \beta_{pk} b_1} [F_{pk} \operatorname{ch} \beta_{pk} (b_1 - d) - q_{pk} \operatorname{sh} \beta_{pk} d].\end{aligned}\quad (2.7)$$

Подставляя значения B_{pk} и F_{pk} из (2.7) в (2.2) и (2.6), для определения m_{pk} и p_{pk} приходим к следующей совокупности двух систем линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 m_{pk} &= \frac{\text{psh} \alpha_{pk} d_1 \text{ch} \alpha_{pk} (b-d_1)}{\text{ch} \alpha_{pk} b} \left\{ \frac{2pd_1}{\alpha_{pk} d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\pi_{qk}}{q^2 + \gamma^2 \alpha_{pk}^2} + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^p \left[\frac{\mu_{pk}}{\text{sh} \alpha_{pk} d_1} - \frac{\gamma_{pk}}{\text{ch} \alpha_{pk} (b-d_1)} \right] \right\}, \\
 p_{pk} &= \frac{\text{psh} \beta_{pk} d \text{ch} \beta_{pk} (b_1-d)}{\text{ch} \beta_{pk} b_1} \left\{ \frac{2pd}{\beta_{pk} d_1^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{m_{qk}}{q^2 + \delta^2 \beta_{pk}^2} + \right. \\
 &\quad \left. + (-1)^p \left[-\frac{\tau_{pk}}{\text{sh} \beta_{pk} d} - \frac{q_{pk}}{\text{ch} \beta_{pk} (b_1-d)} \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

При этом формулы для коэффициентов $f_{pk}(x)$ и $g_{pk}(x)$, выраженные через m_{pk} и p_{pk} , окончательно примут вид:

$$\begin{aligned}
 f_{pk}(x) &= \frac{\text{ch} \alpha_{pk} (b-x)}{\text{ch} \alpha_{pk} (b-d_1)} \left[(-1)^p \frac{m_{pk}}{p} - \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_{d_1}^x P_{pk}(t) \text{sh} \alpha_{pk} (t-d_1) dt \right] - \\
 &\quad - \frac{2 \text{sh} \alpha_{pk} (x-d_1)}{\alpha_{pk} d \text{ch} \alpha_{pk} (b-d_1)} \int_x^b P_{pk}(t) \text{sh} \alpha_{pk} (b-t) dt, \\
 g_{pk}(x) &= \frac{\text{sh} \alpha_{pk} x}{\text{sh} \alpha_{pk} d} \left[(-1)^p \frac{m_{pk}}{p} + \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_x^{d_1} Q_{pk}(t) \text{sh} \alpha_{pk} (d_1-t) dt \right] + \\
 &\quad + \frac{\text{sh} \alpha_{pk} (d_1-x)}{\text{sh} \alpha_{pk} d_1} \left[\xi_{pk} + \frac{2}{\alpha_{pk} d} \int_0^x Q_{pk}(t) \text{sh} \alpha_{pk} t dt \right] + \\
 &\quad + (-1)^{p+1} \frac{2pd_1^2}{\pi d^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q \pi_{qk}}{q(q^2 + \gamma^2 \alpha_{pk}^2)} - \sin \frac{q\pi x}{d_1}.
 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned}
 P_{pk}(x) &= \frac{p\pi}{d} \left[(-1)^p T_{k,1}(x) - T_{k,0}(x) \right] + \int_0^d \rho_k(x,y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy, \\
 Q_{pk}(x) &= \frac{p\pi}{d} T_{k,0}(x) - \int_0^d \rho_k(x,y) \sin \frac{p\pi y}{d} dy.
 \end{aligned}$$

Для $\varphi_{pk}(y)$ и $\psi_{pk}(y)$ получим аналогичные выражения:

$$\begin{aligned}\varphi_{pk}(y) = & \frac{\operatorname{ch} \beta_{pk}(b_1 - y)}{\operatorname{ch} \beta_{pk}(b_1 - d)} \left[(-1)^p \frac{n_{pk}}{p} - \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_d^y N_{pk}(t) \operatorname{sh} \beta_{pk}(t - d) dt \right] - \\ & - \frac{2 \operatorname{sh} \beta_{pk}(y - d)}{\beta_{pk} d_1 \operatorname{ch} \beta_{pk}(b_1 - d)} \int_y^{b_1} N_{pk}(t) \operatorname{sh} \beta_{pk}(b_1 - t) dt, \\ \psi_{pk}(y) = & \frac{\operatorname{sh} \beta_{pk} y}{\operatorname{sh} \beta_{pk} d} \left[(-1)^p \frac{n_{pk}}{p} + \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_y^d M_{pk}(t) \operatorname{sh} \beta_{pk}(d - t) dt \right] + \\ & + \frac{\operatorname{sh} \beta_{pk}(d - y)}{\operatorname{sh} \beta_{pk} d} \left[\zeta_{pk} + \frac{2}{\beta_{pk} d_1} \int_0^y M_{pk}(t) \operatorname{sh} \beta_{pk} t dt \right] + \\ & + (-1)^{p+1} \frac{2 p d^2}{\pi d_1^2} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-1)^q m_{qk}}{q(q^2 + \beta_{pk}^2)} \sin \frac{q \pi y}{d},\end{aligned}\quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}N_{pk}(y) = & \frac{p \pi}{d_1} \left[(-1)^p S_{k,1}(y) - S_{k,0}(y) \right] + \int_0^{d_1} \rho_k(x, y) \sin \frac{p \pi x}{d_1} dx, \\ M_{pk}(y) = & \frac{p \pi}{d_1} S_{k,0}(y) - \int_0^{d_1} \rho_k(x, y) \sin \frac{p \pi x}{d_1} dx.\end{aligned}$$

Исследуем совокупность двух систем линейных уравнений (2.8). Оценим прежде всего суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений этих систем. Легко видеть, что суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений первой и второй систем соответственно равны:

$$\begin{aligned}\sigma_{pk}^{(1)} = & \frac{\operatorname{sh} \alpha_{pk} d_1 \operatorname{ch} \alpha_{pk}(b - d_1)}{\left(1 + \frac{\kappa^2 d_1^2}{p^2 l^2}\right) \operatorname{ch} \alpha_{pk} b} \left(\operatorname{cth} \alpha_{pk} d_1 - \frac{1}{\alpha_{pk} d_1} \right), \\ \sigma_{pk}^{(2)} = & \frac{\operatorname{sh} \beta_{pk} d \operatorname{ch} \beta_{pk}(b_1 - d)}{\left(1 + \frac{\kappa^2 d_1^2}{p^2 l^2}\right) \operatorname{ch} \beta_{pk} b_1} \left(\operatorname{cth} \beta_{pk} d - \frac{1}{\beta_{pk} d} \right),\end{aligned}\quad (2.11)$$

откуда следует, что система (2.8) вполне регулярна всегда, кроме случая, когда одновременно $b = d_1$ и $b_1 = d$. В последнем случае система становится регулярной.

С другой стороны, нетрудно видеть, что свободные члены уравнений систем при сделанных ранее предположениях относительно

распределения температуры на поверхности ограничены в своей совокупности и, следовательно, согласно теоремам о регулярных системах [2], системы (2.8) имеют единственное ограниченное решение.

Задавая значения длин сторон b , b_1 , d , d_1 и l , а также распределением температуры на поверхности, на основании теории регулярных систем, легко оценим сверху и снизу значения неизвестных π_{pk} и ρ_{pk} , посредством которых определяются значения коэффициентов $f_{pk}(x)$, $g_{pk}(x)$, $\varphi_{pk}(y)$ и $\psi_{pk}(y)$.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 17 VI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Минасян Р. С. Об одной задаче теплопроводности. ДАН Армянской ССР, т. XII, № 3, 1950.
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.

Ռ. Ս. Մինասյան

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆԱԶԵՎ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՄԱՐՄՆՈՒՄ ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է վերջավոր երկարությամբ ունեցող ուղղանկյունաձև հատվածքով սնամեջ մարմնի մեջ ջերմության կայունացած բաշխման տարածական խնդիրը, երբ արված է ջերմության բաշխումը մարմնի մակերևույթի վրա:

Ցույց է տրված ստացված գծային հավասարումների անվերջ սխառեմների լիովին ռեզուլյարությունը:

Н. Л. Иванова

Спектрофотометрическое исследование ярких В-звезд Плеяд и Ориона

Введение. Настоящая работа посвящена спектрофотометрическому исследованию некоторых В-звезд Плеяд и Ориона. Изучение велось на участке длин волн $\lambda\lambda$ 5600—3000Å. Особое внимание уделено исследованию ультрафиолетовой области, малоизученной до сих пор и представляющей большой интерес для физики звездных атмосфер.

Наблюдательный материал был получен летом 1949 года в экспедиции ГАО Академии наук СССР, проводившей свою работу в горном районе Армении на высоте 3200 м на новом, отечественного производства, телескопе АСИ-5 [1]. Было получено 24 спектра 12 ярких звезд Плеяд и Ориона, список которых приведен в таблице 1, где даны также их номера по Н. Д., спектральные классы, взятые из работы Стеббинса, Хаффера и Уитфорд [2] и визуальные звездные величины.

Таблица 1

№№	Звезда	Номер по HD	Спектр	m виз.
1	Альциона	23630	B5	2,66
2	Атлас	23850	B8	3,80
3	Майя	23408	B7	4,02
4	Мероп	23480	B5e	4,25
5	Целена	23288	B8	3,43
6	γ Ориона	35468	B2s	1,70
7	β Ориона	34085	cB8	0,34
8	δ Ориона	36486	O9.5	2,48
9	ε Ориона	42560	B0	1,75
10	ζ Ориона	37742	B3	2,05
11	η Ориона	38771	B0.5	2,20
12	λ Ориона	36861	O8	3,66

Для калибровки пластинок были получены спектры α Лиры через 3 диафрагмы различной светопропускаемости.

Величины площадей отверстий диафрагм, вернее их контактных отпечатков, измеренные различными способами (например, планиметром, подсчетом и путем взвешивания на аналитических весах), дали мало отличающиеся друг от друга значения, средние из которых оказались равными: $\lg A = 1,72$, $\lg B = 2,13$, $\lg C = 2,25$, $\lg S = 2,68$, где

A , B , C — площади отверстий диафрагм в см^2 , а S — площадь свободного отверстия телескопа с учетом экранирующей площади малого зеркала.

При обработке каждого рабочего спектра использовались две усредненные характеристические кривые: одна на участке спектра до Бальмеровского скачка, другая — за скачком.

Обработка наблюдений была выполнена в лаборатории ГАО. Спектры фотометрировались на микрофотометре Молля. При исследовании непрерывного спектра употреблялась передача, дающая увеличение масштаба на микрофотограмме по отношению к пластинке в 7 раз, при исследовании линий увеличение бралось равным 50.

При обработке спектров нами были выбраны на участках, свободных от линий, следующие 20 точек: $1/\lambda = 1,66, 1,82, 2,36, 2,42, 2,51, 2,56, 2,62, 2,73, 2,77, 2,82, 2,90, 2,91, 2,96, 2,99, 3,07, 3,08, 3,11, 3,13$.

Дисперсионная кривая спектрографа телескопа была получена с помощью спектров трубки гелия, ртутной лампы, а также железной дуги. Для осуществления этой задачи была собрана специальная автоколлимационная установка (свет в телескоп направлялся особым параболическим зеркалом).

Определение прозрачности атмосферы. В экспедиции была проведена большая работа по исследованию ослабления света в земной атмосфере. Как известно, поглощение и рассеяние света сильнее всего обнаруживается в ультрафиолетовой области, что делает исследование прозрачности для этой области спектра интересным с точки зрения изучения процесса рассеяния в реальной атмосфере.

Определение прозрачности проводилось по так называемому „долгому методу“, заключающемуся в сравнении света одной звезды при разных зенитных расстояниях. Каждую ночь получались снимки 4—6 спектров α Лиры. Наблюдения обрабатывались по методу Буге, сущность которого состоит в следующем: допускается, что прозрачность остается постоянной в течение всей ночи наблюдения; тогда для каждого момента наблюдения t можно написать уравнение:

$$I_{\lambda}(z, t) = I_{0\lambda} p_{\lambda}^{F(z)}, \quad (1)$$

где $I_{\lambda}(z, t)$ — наблюдаемая интенсивность звезды,

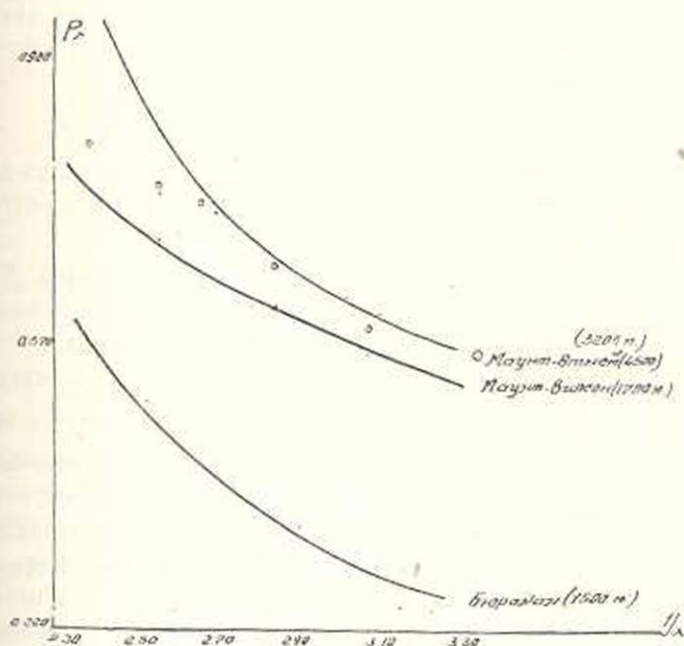
$I_{0\lambda}$ — интенсивность звезды вне атмосферы,

$F(z)$ — воздушная масса в данном направлении, — функция, не меняющаяся с прозрачностью атмосферы и лишь в малой степени зависящая от физического состояния атмосферы; считая атмосферу плоской и пренебрегая рефракцией (для z не превосходящих 70°), можем принять $F(z) = \sec Z$;

p_{λ} — коэффициент прозрачности атмосферы.

Определяя для n положений звезды интенсивности и зенитные расстояния и составляя уравнения типа (1), получаем систему условных уравнений с двумя неизвестными, решение которых по способу

наименьших квадратов и дает искомую величину p_λ . В данной работе был определен средний коэффициент прозрачности для 12 ночей наблюдений. Определялись интенсивности α Лиры для 33 зенитных расстояний и для 8 длин волн спектра. В результате решений 8 систем условных уравнений были получены значения p_λ , которые и приведены в таблице 2. Эти данные в виде зависимости p_λ от длины волны приведены на фиг. 1, где также приведены данные Мирзояна [3] для Бюракана и Шонберга [4] для Маунт-Витней и Маунт-Вильсона. Как видно из этой фигуры, прозрачность для пункта наших наблюдений в ультрафиолетовой части спектра одинакова с прозрачностью на Маунт-Витней, высота которой на тысячу с лишним метров больше.



Фиг. 1.

Таблица 2

λ в Å	4095,0	3882,5	3695,0	3570,0	3520,0	3417,5	3285,0	3185,0
p_λ	0,925	0,748	0,729	0,684	0,707	0,621	0,623	0,738

Получив значения p_λ , можно внести в результаты наблюдений поправки за атмосферное поглощение.

При определении относительных спектрофотометрических градиентов, прежде чем сравнивать между собой исследуемые звезды и звезду сравнения α Лиры, надо привести их к зениту.

Поправку для приведения к зениту можно ввести по формуле:

$$m_z = m_0 - 2,5[F(z) - 1] \lg p. \quad (2)$$

Для редукции за атмосферу поправка вводилась по формуле:

$$\Delta m = -2,5F(z) \lg p. \quad (3)$$

Вычисления показали, что ослабление светового потока от звезды, находящейся в зените, равно для λ 4095 Å всего 0,08 звездной величины, а для самого далекого ультрафиолета — половине звездной величины.

Определение спектрофотометрических градиентов. Как известно, характеристикой относительного распределения энергии в спектре звезды для данного интервала длин волн является цветовая или спектрофотометрическая температура, определяемая путем фотометрического сравнения спектра исследуемой звезды со спектром стандартного источника (звезда, лампа), распределение энергии в котором известно. Относительное распределение энергии выражается в виде относительного спектрофотометрического градиента (при условии, что формула Планка применима как к излучению звезды, так и к излучению источника сравнения)

$$G = -0,921 \frac{d(\Delta m)}{d(1/\lambda)} = \text{const} - \frac{C_2}{T} \left(1 - e^{-\frac{C_2}{\lambda T}} \right)^{-1}, \quad (4)$$

где Δm — разность блеска исследуемой звезды и источника сравнения для данного значения $1/\lambda$, а постоянная зависит от принятой температуры стандартного источника.

В качестве стандартной звезды была взята α Лиры. Она спектрографировалась по возможности в меридиане, и ее снимки проявлялись одновременно с пластинками исследуемых звезд.

Полученные нами цветовые температуры были вычислены для двух участков спектра: T_1 — для длин волн λ 5600—3647 Å и T_2 — для участка λ 3647—3000 Å. Вычисление велось следующим образом: с полученных микрофотограмм брались значения показаний отклонений гальванометра для 20 точек спектра; с помощью соответствующих характеристических кривых получались величины $\lg I$. Затем составлялись системы условных уравнений вида:

$$\Delta m_0 + \frac{1}{\lambda} \frac{d(\Delta m_\lambda)}{d(1/\lambda)} = \Delta m_\lambda, \quad (5)$$

где Δm_0 — некоторая постоянная, $\frac{d(\Delta m_\lambda)}{d(1/\lambda)}$ — искомый градиент, а

Δm_λ — разность интенсивностей, выраженных в звездных величинах, исследуемой звезды и звезды сравнения для данной длины волны, причем обе звезды приведены к зениту, т. е. их интенсивности исправлены за дифференциальное атмосферное поглощение.

Решая системы по способу наименьших квадратов, находим величины $\frac{d(\Delta m_\lambda)}{d(1/\lambda)}$. Подставляя последние в формулу (4), определяем величины G , зная которые легко можно определить и цветовые температуры. Для коротких длин волн и для малых значений T можно воспользоваться формулой Вина:

$$G = \frac{c_2}{T} - \frac{c_2}{T_0}, \quad (6)$$

где T —температура исследуемой звезды, T_0 —температура звезды сравнения, а c_2 —некоторая постоянная равная $14320 \frac{\text{град}}{\text{ед. дл. волны}}$ (длина волны в $\text{\AA}$).

Цветовые температуры вычислялись для трех значений температуры α Лиры: 9000° , 11000° и 13000° . Полученные градиенты и цветовые температуры даны в таблице 3.

Таблица 3

Звезда	G_1	G_2	T_1			T_2			D
			T_{A0} 9000°	T_{A0} 11000°	T_{A0} 13000°	T_{A0} 9000°	T_{A0} 11000°	T_{A0} 13000°	
Целена	-0,55	-0,37	13800	19000	26000	11700	15400	19600	0,23
Майя	-0,27	+0,07	10800	13900	17200	8600	10400	12200	0,28
Меропа	-0,52	-0,45	13400	18400	24700	12600	16800	22000	0,20
Атлас	-0,50	-0,36	13100	17900	23900	11600	15200	19300	0,33
Альциона	-0,22	-0,08	10400	13200	16200	9500	11700	14000	0,25
β Ориона	-0,27	—	10800	13900	17300	—	—	—	0,12
δ Ориона	-0,60	+0,03	14500	20500	28600	8900	10800	12700	0,13
γ Ориона	-0,53	+0,13	13500	18600	23300	8300	10000	11600	0,05
ϵ Ориона	-0,51	+0,01	13300	18100	24300	8900	10900	12900	0,04
ζ Ориона	-0,59	-0,04	14300	20200	28000	9200	11400	13500	0,03
η Ориона	-0,46	-0,33	12600	17000	22300	12200	15700	18600	0,06
λ Ориона	-0,60	-0,44	15700	20500	28500	11300	16600	21600	0,01

В работе сделана попытка определить абсолютный спектрофотометрический градиент α Лиры. Для этой цели в лаборатории ГАО с помощью вышеупомянутой автоколлимационной системы был получен спектр прокалиброванной кварцевой лампы накаливания. Цветовая температура лампы была определена по способу выравнивания и оказалась равной 2600° . Спектры и соответствующие фотометрические шкалы проявлялись одновременно. После обработки спектров на микрофотометре Молля было произведено сравнение распределения энергии в α Лиры и лампе, причем для первой была сделана редукция за атмосферу.

Абсолютный спектрофотометрический градиент α Лиры оказался для области λ 3700—4600 $\text{\AA}$ равным $\Phi_{0,1}=1,14$, а для области λ 3100—3700 $\text{\AA}$ равным $\Phi_{0,2}=1,60$. Абсолютные градиенты исследуемых звезд даны в таблице 4.

Определение величины Бальмеровского скачка. Замечательной особенностью непрерывных спектров звезд ранних классов является скачок в распределении интенсивности на границе серии Бальмера (λ 3647 $\text{\AA}$), свидетельствующий о том, что непрерывные спектры этих звезд не следуют закону Планка. Величина Бальмеровского скачка, обозначаемая обычно буквой D, определяется в виде логарифма отношения интенсивностей непрерывного спектра до и за пределом Бальмеровской серии.

Таблица 4

Звезда	Данные автора			Данные Шалонжа и Барбье		
	$\Phi_{0,1}$	$\Phi_{0,2}$	D	φ_1	φ_2	D
Вега	1,14	1,60	—	1,14	1,43	—
Шелена	0,59	1,23	0,23	—	—	—
Майя	0,87	1,67	0,28	1,06	1,26	0,24
Меропс	0,62	1,15	0,20	—	—	0,16
Атлас	0,64	1,24	0,33	0,86	1,29	0,30
Альциона	0,92	1,52	0,25	—	—	—
δ Ориона	0,54	1,63	0,13	0,67	0,74	0,12
γ Ориона	0,61	1,73	0,05	0,69	0,80	0,03
ϵ Ориона	0,63	1,61	0,04	0,72	0,78	0,03
ζ Ориона	0,55	1,56	0,03	0,73	0,72	0,02
η Ориона	0,68	1,27	0,06	0,75	0,76	0,04
λ Ориона	0,54	1,16	0,01	0,52	0,76	0,01

Величина Бальмеровского скачка определялась следующим образом. Для каждой звезды составлялись уравнения типа (5)

$$x + \frac{1}{\lambda} y = m_{\lambda}, \quad (7)$$

в котором x и y — некоторые неизвестные, а m_{λ} — величина интенсивности непрерывного участка спектра для данной длины волны.

Имея группу уравнений до границы Бальмеровской серии и за границей, решаем их по способу наименьших квадратов. Определив x_1 , y_1 и x_2 , y_2 — значения неизвестных до границы серии Бальмера и за границей, можем при их помощи определить величины $\lg I_{3647+}$ и $\lg I_{3647-}$ (3647 Å — теоретическое значение длины волны скачка, соответствующее волновому числу 2,74). Тогда

$$D = \frac{\lg I_{3647+}}{\lg I_{3647-}}.$$

Величины скачков также даны в таблице 4.

Представляет интерес сравнение полученных градиентов и Бальмеровских скачков с теоретическими результатами, а также с результатами, полученными другими наблюдателями.

Мустель [5] разработал и применил специально к звездам ранних спектральных типов теорию лучистого равновесия с учетом изменения коэффициента поглощения с частотой. Исходя из предположения, что в атмосферах звезд более ранних, чем A0, поглощение излучения, в основном, определяется водородом, он дает теоретическое распределение энергии в непрерывном спектре звезд с эффективными температурами, равными 10500°, 15000°, 20000°. Полученные им результаты приведены в таблице 5 наряду с результатами французских наблюдателей (Шалонж, Барбье) и нашими.

Из таблицы видно, что совпадение наших средних для данного класса результатов с теоретическими данными Мустеля, а также с результатами Шалонжа и Барбье, удовлетворительно. Отклонение

Таблица 5

Автор	A0	B0	B2	B5	B8
Мустель	19000	—	23000	21000	—
Шалонж, Барбье	16500	28000	26500	23000	21000
Иванова	13000	25000	25000	21000	20000
Мустель	10500	—	19000	15000	—
Шалонж, Барбье	11000	20000	19000	16000	13000
Иванова	11000	12000	12000	14000	15000

наблюдается в величинах T_2 для классов B0 и B2. Причина отклонения, возможно, заключается в какой-либо ошибке наблюдательного характера. Однако надо отметить, что ряд исследователей отмечал факт сравнительно низкой цветовой температуры звезд класса В. Так, например, Фесенков [7], на основании измерения распределения энергии в непрерывном спектре звезд, получил для звезд класса В низкие температуры. Ю [8] также отмечает для звезд класса В, имеющих яркие водородные линии, более низкую поверхностную температуру, чем средняя эффективная температура звезд того же типа. Герасимович [9] из сравнения спектров звезд класса В со звездами класса A0, температуру для которых принял равной 10000° и 12000° , получил для звезд B0—B2 температуры соответственно 10800° и 14100° .

Сравнение величины абсолютных градиентов, выведенных в данной работе, с полученными Шалонжем и Барбье (таблица 4) показывает, что до границы Бальмеровской серии наши градиенты для всех звезд систематически ниже (следовательно, спектрофотометрические температуры выше), а за границей серии—выше (спектрофотометрические температуры ниже). Причину этого расхождения пока трудно указать, так как еще не имеется в достаточном количестве точных наблюдений. Разности абсолютных градиентов, полученные Мирзояном [3] для 20 звезд равных классов, представляют величины одного порядка с нашими (абсолютный градиент α Лиры одинаков в обеих работах). В отличие от градиентов, наблюдается хорошее совпадение величин Бальмеровских скачков, полученных нами и французскими астрономами (таблица 4). Для всех звезд данных спектральных типов величины D нормальны. Интересно отметить, что значения Бальмеровских скачков для рассмотренных звезд, полученные Шалонжем и Диван [6] за период 1941—1948 гг., или равны наблюдаемым в 1939 г., или отличаются всего на 0,01—0,02. Однако имеется целый ряд указаний, что спектры рассматриваемых звезд переменные. Так, например, Ц. Пэйн и Ф. Хогг [8] в 1926—27 гг. обнаружили у ряда звезд Плеяд (Меропы, Альциона и др.) сильную эмиссию в H_γ . Ими подчеркивается факт изменений в течение последних 30 лет в спектрах Плеяд. Подобные изменения, повидимому, связанные с выбрасыванием из звезд материи, должны вызывать уменьшения величин D. Относительное постоянство значений D поз-

воляет сделать предположение, что за прошедшие 10 лет не происходило существенных изменений в атмосферах упомянутых звезд.

Определение электронного давления способом подсчета числа линий водородной серии. Известно, что главное квантовое число последнего дискретного уровня (так называемое эффективное квантовое число n_m) зависит от электронной концентрации N_e . Инглис и Теллер [10], теоретически изучив эффект ионизации в окружающих звезды атмосферах, получили, что электронное давление пропорционально $n_m^{-7.5}$. Полученная ими зависимость между электронным давлением p_e , температурой T_e и эффективным квантовым числом n_m имеет следующий вид:

$$\log p_e = 1,19 + \log T_e - 7,5 \log n_m. \quad (8)$$

Этой формулой мы и воспользовались для определения электронного давления в некоторых ярких звездах Плеяд, Бальмеровская серия которых получилась на снимках достаточно отчетливо.

Величина n_m находилась графическим путем. Для нескольких линий вблизи конца серии измерялась интенсивность линии в центре, а также непрерывного спектра вблизи линии. Логарифм отношения интенсивности центра линии к интенсивности непрерывного спектра откладывался по оси ординат, а номер линии—по оси абсцисс. Через полученные точки проводилась прямая, пересечение которой с осью абсцисс и давало величину n_m .

Подставляя величину n_m в формулу (8), получаем величину электронного давления. Результаты вычислений даны в таблице 6 (T_e приведена по Кайперу).

Таблица 6

Звезда	Класс	$\lg T_e$	n_m	p_e в атм
Атлас	B8	4,09	15,0	$2,7 \cdot 10^{-4}$
Майя	B5	4,19	14,2	$5,6 \cdot 10^{-4}$
Иелена	B5	4,19	13,1	$9,5 \cdot 10^{-4}$
Мероп	B5	4,19	12,8	$1,2 \cdot 10^{-4}$

Мирзояном [3] были получены этим же методом электронные давления для звезд класса В порядка 10^{-4} атм. Моллер для звезд главной последовательности A0 получил значение, равное $0,4 \cdot 10^{-4}$ атм. (для той области атмосферы, где возникает граница Бальмеровской серии), для звезды-сверхгиганта α Лебедя—около 10^{-6} атм., а для белых карликов—больше 10^{-2} атм.

Полученные в данной работе электронные давления несколько велики, что можно объяснить самым методом: он дает верхний предел электронного давления. Разрешающая сила инструмента, эффект Доплера, вызванный тепловым движением и вращением звезды, а также эффект давления будут завышать нашу оценку электронного давления.

Определение высот однородных атмосфер звезд. Решение этого вопроса было выполнено по методу О. А. Мельникова [11]. Как известно, одной из основных причин расширения водородных линий у звезд ранних классов является наличие электрических полей ионов и электронов, вызывающих межмолекулярный эффект Штарка.

Струве и Эльвей [12] подсчитали влияние ионных полей на контуры водородных линий и показали, что Штарк-эффект производит ощутимое изменение в контуре: центр линии делается слегка сплюснутым, а крылья значительно расширены, причем сплющивание непропорционально простиранию крыльев; расширение крыльев возрастает по направлению высоких членов серий.

Гольтсмарком [13] было найдено статистическое распределение напряженности поля при учете действия всех окружающих частиц. Он вывел выражение для нормальной напряженности поля:

$$F = 46,8 \left(\frac{2p_e}{T} \right)^{2/3} \text{ CGSE}, \quad (9)$$

где p_e — парциальное давление свободных электронов, а также ионов в барах, а T — температура газа.

Коэффициент поглощения для водородных линий в случае межмолекулярного эффекта Штарка можно представить формулой:

$$k_\lambda = c \frac{F_0^2}{\Delta\lambda^3},$$

где F_0 дается формулой (9), c — постоянная, разная для разных линий, а $\Delta\lambda$ — расстояние от центра линии в Å.

Исходя из выражения, дающего величину эквивалентной ширины линии,

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} A_\lambda d\lambda \quad (10)$$

и пользуясь полуэмпирической формулой Миннаерта [13]

$$\frac{1}{A_\lambda} = \left(\frac{1}{\tau_\lambda} + \frac{1}{A_0} \right), \quad (11)$$

в которой A_λ — глубина линии A_0 — центральная глубина, получаемая из наблюдений, $\tau_\lambda = k_\lambda nH$ (n — число поглощающих атомов в 1 см^2 , H — высота однородной атмосферы), а также подставляя в (10) выражения (9) и (11), получаем путем численного интегрирования следующие соотношения между эквивалентной шириной W , высотой однородной атмосферы H , а также p_e и T :

$$\text{для } H_\gamma \quad W^{1/2} = [-12,48] p_{0.2} H \frac{p_e}{T} A_0^{1/2}, \quad (12)$$

$$\text{для } H_\beta \quad W^{1/2} = [-12,64] p_{0.2} H \frac{p_e}{T} A_0^{1/2}.$$

Отсюда по известным W и A_0 можно получить величину $\lg\left(n_{0,2} N \frac{p_e}{T}\right)$, а зная величину $p_{0,2}$ (число нейтральных атомов водорода во втором состоянии)—и величину N . Число $p_{0,2}$ можно определить из комбинации формул Больцмана и Саха. Приняв $p^+ = p_e$ и, следовательно, $p_e = n_e kT = p^+ kT$, а также переходя от $p_{0,1}$ к $p_{0,2}$ с помощью формулы Больцмана, получим из формулы Саха

$$p_{0,2} = 4p_e^2 \frac{h^3}{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{3/2}} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}, \quad (13)$$

где $\Delta E = 3,38$ eV.

Подставляя в (13) численные значения величин, получаем

$$\lg p_{0,2} = 2 \lg p_e - 3,5 \lg T_e + \frac{17035,2}{T} + 16,942. \quad (14)$$

Определив с помощью этого выражение $p_{0,2}$, перейдем к определению N . Все численные данные, необходимые для определения N , а также величины $\lg N$, даны в таблице 7.

Таблица 7

Звезда	Майя		Атлас		Целена		Меропз	
Линия	H γ	H δ	H γ	H δ	H γ	H δ	H γ	H δ
W	12,58	10,00	11,4	8,70	10,03	8,69	9,86	9,13
A_0	0,41	0,43	0,37	0,37	0,35	0,37	0,34	0,35
$\lg p_e$	2,75	2,75	2,43	2,43	2,98	2,98	3,08	3,08
$\lg T_e$	4,19	4,19	4,09	4,09	4,19	4,19	4,19	4,19
$\lg(n_{0,2})$	8,87	8,87	8,87	8,87	9,33	9,33	9,53	9,53
$\lg\left(n_{0,2} N \frac{p_e}{T}\right)$	15,76	15,69	15,77	15,63	15,66	15,72	15,67	15,72
$\lg N$	8,38	8,26	8,56	8,42	7,54	7,60	7,25	7,30

Как видно из таблицы, величины, полученные по H γ и H δ , оказались достаточно близкими друг к другу, а величины N для всех исследуемых звезд Плеяд оказались одного порядка.

Сравнение величин эквивалентных ширин водородных линий Плеяд с соответствующими величинами, полученными Гюнтером, для нормальных звезд тех же классов, показывает, что для Плеяд эти величины больше.

В заключение выражаю благодарность за постоянную помощь в работе и ценные указания О. А. Мельникову.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

Поступило 2 VII 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мельников О. А. и Иоанисиани Б. А. Изв. ГАО, т. XVII, № 147, вып. 6, 1950.
2. Stebbins J., Huffer C., Whitford A. Ap. I. 91.20, 1941.
3. Мурзоян Л. В. Сообщения Бюраканской обсерватории, вып. VII, 1951.
4. Schoenberg E. H. der Ap. B. II, T. III, 1929.
5. Мустель Э. Р. Астр. Ж., 18, 297, 1941; Астр. Ж. 21, 1944.
6. Barbier D. et Chalonge D. Ann. d. Astr. 1, 293, 1938; 4, 30, 1941; 15, № 3, 1952.
7. Воронцов-Вельяминов. Газовые туманности и Новые звезды.
8. Hogg F. and Payne C. H. C. Obs. C 309, 1927; C 303, 1927.
9. Gerasimovic W. H. C. Obs. C. 339, 1927.
10. Inglis D. and Teller E., Ap. I. V90, № 3, 1939.
11. Мельников О. А., Ученые записки ЛГУ, № 153, 1952.
12. Struve O. Elvey, Ap. I. 10, 40, 1935.
13. Уиндольд. Физика звездных атмосфер, 1949.

Ն. Լ. Իվանովա

ՊԼԵԱԴՆԵՐԻ ԵՎ ՕՐԻՈՆԻ ՊԱՅԾԱՌ Բ-ԱՍՏՂԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐՈՖՈՏՈՄԵՏՐԻԿ ՇԵՏԱՋՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Աշխատության մեջ սպեկտրոֆոտոմետրիկ կառնակով ուսումնասիրված են Պլեադների և Օրիոնի պայծառ 12 Բ տիպի աստղեր՝ $\lambda\lambda$ 3900—5600 Å սպեկտրալ տիրույթում:

Դիտողական նյութն ստացված է նոր, հայրենական ԱՍԻ-5 հեռադիտակով:

Հարարերական սպեկտրոֆոտոմետրիկ գրադիենտների որոշման միջոցով հետադառված է էներգիայի հարարերական բաշխումը (սպեկտրոֆոտոմետրիկ ջերմաստիճանները) աստղերի սպեկտրներում, ինչպես նաև հաշվված են Բալմերյան թուխքի մեծությունները: Որպես համեմատության աստղ ծառայել է Քնարի ա-ն, որի համար քնդունվել են ջերմաստիճանների երեք արժեքներ՝ 9000, 11000 և 13000°:

Ք Քնարի բացարձակ սպեկտրոֆոտոմետրիկ գրադիենտն ստացվել է նրա սպեկտրը կալիբրացված կվարցային լամպի սպեկտրի հետ համեմատելու միջոցով:

Պարզվել է, որ այն համասար է 1,14 λ 3700—4600 Å տիրույթի համար և 1,60 λ 3100—3700 Å տիրույթի համար:

Աշխատության մեջ կատարված է Պլեադների աստղերի սպեկտրալ գծերի ֆոտոմետրիկ հետադառությունը:

Բալմերյան սերիայի վերջին գիտվող գծի համարի որոշման հիման վրա հաշվված են էլեկտրոնային ճնշումները ուսումնասիրված աստղերի համար:

Օգտագործված է Մոլերի հետևյալ ֆորմուլան՝

$$\lg p_e = 1,19 + \lg T_e - 7,5 \lg n_m$$

որտեղ T_e -ն էֆեկտիվ ջերմաստիճանն է ըստ Կայպերի, իսկ n_m -ը՝ Բալմերյան սերիայի վերջին գիտվող գծի համարը: Օ. Ա. Մելնիկովի մեթոդով:

գով որոշված են նաև ջրածնային համասեռ մթնոլորտների բարձրությունները:

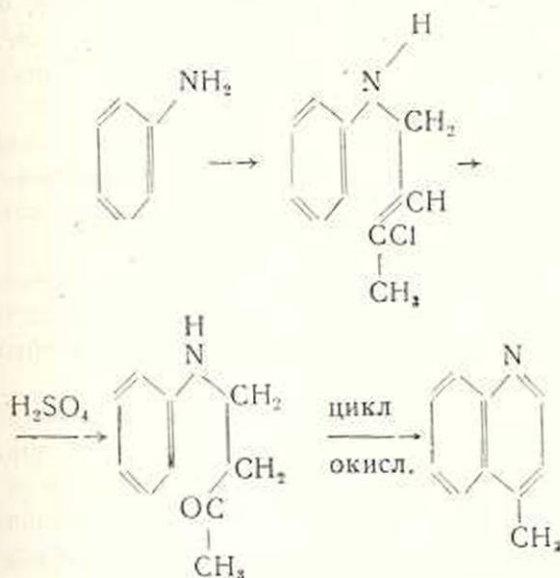
Դիտումների ընթացքում (12 գիշեր) մթնոլորտի թափանցիկության միջին գործակիցի հետազոտությունը ցույց է տվել, որ զենիթում գտնվող աստղից եկող լուսային հոսքի թուլացումը λ 4095 Ա-ի համար հավասար է ընդամենը $0^m.08$, իսկ ամենահեռավոր ուլտրամանուշակագույն մասում՝ $0^m.5$:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Т. Бабаян, Н. П. Гамбарян

О механизме циклизации β-ариламинобутанонов

Ранее нами был разработан новый путь синтеза лепидина и его аналогов, основанный на сернокислотном гидролизе N-(3-хлорбутенил) ариламинов с последующей циклизацией получаемых β-ариламинобутанонов [1]:



Попытка применить этот способ для получения 1-ацетил-4-метилдигидрохинолина из N-ацетиланилинобутанона окончилась неудачей. В условиях циклизации N-ацетиланилинобутанон полностью разлагается на составные части: ацетанилид и метилвинилкетон, далее полимеризующийся. Этот результат наводил на мысль о возможном расщеплении β-ариламинобутанонов до циклизации. Мы решили проверить это предположение добавлением к реакционной смеси при циклизации анилинобутанона другого ароматического амина, считая (основываясь на принятом в литературе мнении [2]), что он может реагировать лишь с отщепившимся метилвинилкетон, но не непосредственно с анилинобутанона. Если бы циклизации подвергался непосредственно анилинобутанон, то в итоге реакции получился бы лепидин и неизменившийся ароматический амин, в противном случае образовалась бы сложная смесь лепидина, его гомолога и обоих аро-

матических аминов. Добавление к реакционной смеси при циклизации анилинобутанона *p*-анизидина привело к образованию трудно разделяемой смеси анилина, *p*-анизидина, лепидина и 6-метоксилепидина. При добавлении β -нафтиламина основным продуктом реакции оказался 5,6-бензолепидин, лепидин же образовался лишь в ничтожных количествах.

Эти опыты доказывают, что основная часть β -ариламинобутанолов распадается на составные части до циклизации.

Исключительное образование 5,6-бензолепидина в опыте с β -нафтиламином очевидно объясняется большей по сравнению с анилином скоростью реагирования β -нафтиламина с метилвинилкетонем. Этот вывод подтверждается двумя параллельно поставленными опытами: в одном нагревалась смесь анилина, в другом — β -нафтиламина, с *N*-ацетиланилинобутаном, отщепляющим в условиях опыта метилвинилкетон. Выход 5,6-бензолепидина (26%) больше, чем лепидина (21%), однако разница незначительна, повидимому, вследствие слишком быстрого распада *N*-ацетиланилинобутанона, способствующего побочной реакции полимеризации метилвинилкетона. При замене *N*-ацетиланилинобутанона *N*-метиланилинобутаном разница в скорости реагирования β -нафтиламина по сравнению с анилином становится более заметной: выход 5,6-бензолепидина (57%) более чем вдвое превышает выход лепидина (25%).

Предварительное расщепление β -ариламинобутанолов указывает, что их циклизация в лепидин и его гомологи родственна реакциям Скраупа и Добнер-Миллера, о механизме которых существуют два представления.

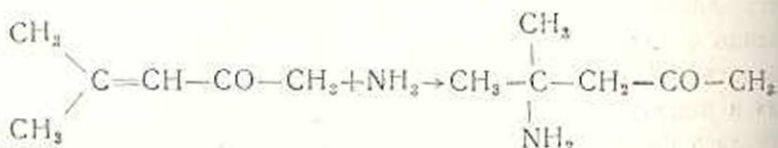
1. Сначала ароматический амин присоединяется к двойной связи ненасыщенного альдегида, а затем уже имеет место циклизация промежуточно образовавшегося карбонильного соединения.

2. Ароматический амин соединяется с карбонильной группой, после чего имеет место циклизация полученного анида.

За первую схему говорят следующие факты:

При реакции Добнер-Миллера конечным продуктом реакции взаимодействия анилина с кротоновым альдегидом является хинальдин. Если бы амин реагировал с кислородом, а не с двойной связью, то конечным продуктом реакции должен был бы быть лепидин, а не хинальдин.

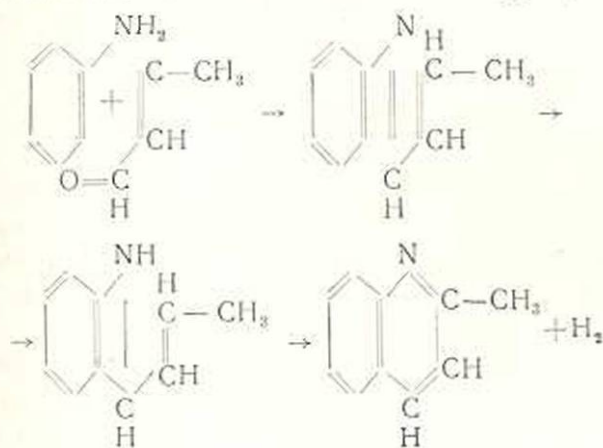
Как указывает Байер [3], аммиак с окисью мезитила образует аминокетон, — продукт присоединения амина к двойной связи, а не к карбонильной группе.



Блез и Меру [4] при проведении конденсации анилина с β-хлор-этилметилкетонем в присутствии воды удалось изолировать анилин-пентаон, а затем уже в присутствии хлоргидрата анилина циклизовать выделенный аминокетон.

Главным доводом за вторую схему считают тот факт, что вторичные амины не вступают в реакцию Скраупа и Дебнер-Миллера [5]. Это понятно с точки зрения второй схемы, где для первой стадии необходимо наличие двух атомов водорода у азота.

Миллер [6] считает маловероятной возможность присоединения амина к двойной связи в условиях циклизации, так как аммиак с окисью мезитила дает 4-метил-4-аминопентанон-2 только при проведении реакции на холоду и в отсутствии кислоты. Если же вместо аммиака взять хлористый аммоний, то на холоду реакция вообще не пойдет, при нагревании же образуется сложная смесь пиридиновых оснований. Поэтому он предположил, что при взаимодействии анилина с кротоновым альдегидом образуется кротонилиденанилин, из которого далее образуется хинальдин по следующей схеме:



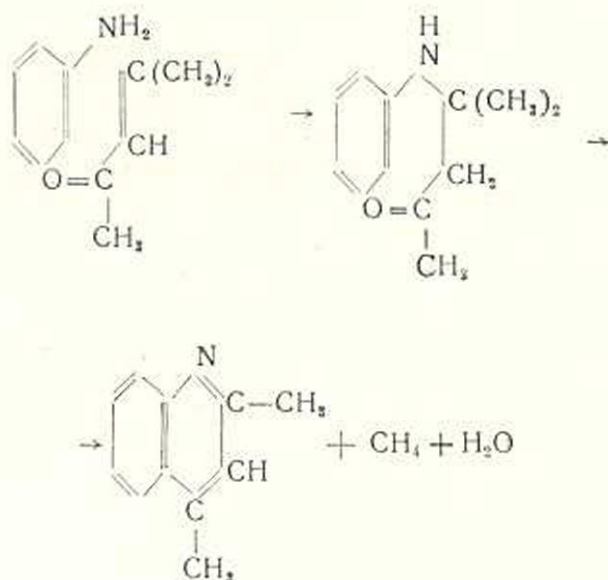
Никаких доказательств предложенной схемы он не приводит.

Ардашеву [7] удалось при проведении реакции на холоду синтезировать из кротонового альдегида и анилина кротонилиденанилин, который при перегонке с несколькими каплями соляной кислоты образует хинальдин. Ардашев считает, что этот опыт доказывает возможность образования хинальдина по схеме, предложенной Миллером, т. е. без возникновения β-фениламиномасляного альдегида.

Нам кажется, что эти доводы в пользу второй схемы недостаточно обоснованы.

Вторичные амины, вступая в реакцию Скраупа и Дебнер-Миллера, давали бы дигидропроизводные хинолина. Между тем, литературные данные говорят о том, что в тех случаях, когда в результате реакции возможно образование лишь дигидропроизводного, то или реакция вообще не идет, или же, если реакцию проводить в более жестких условиях, отщепляется углеводород и образуется

полностью ненасыщенный гетероцикл. Так, например, при конденсации окиси мезитила с анилином при очень высокой температуре образуется диметилхинолин с выделением метана [3,8].



Анилы ацетона, метилэтилкетона и ацетофенона при нагревании с хлористым водородом при 180–200° образуют 2,4-дизамещенные хинолина с выделением метана, этана и бензола [9]. N-метиланилин в жестких условиях тоже дает хинолин, причем отщепляется N-метильная группа.

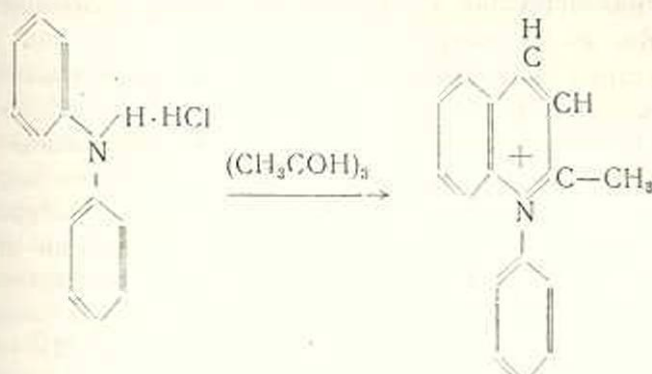
Итак, возможно, что вторичные амины не вступают обычным образом в реакции Скраупа и Дебнер-Миллера не потому, что у них нет двух свободных атомов водорода, а потому, что в результате реакции возможно образование лишь дигидропроизводного, отщепление же углеводорода происходит только в более жестких условиях.

Недостаточно убедителен и приведенный Миллером довод против первой схемы. Действительно, в случае окиси мезитила и хлористого аммония реакция обратима и вполне возможно, что 4-метил-4-аминопентанон-2 образуется, но не накапливается, снова разлагаясь на компоненты в кислой среде. В случае же синтезов Скраупа и Дебнер-Миллера полученный аминокетон сейчас же циклизуется, в результате чего равновесие смещается в сторону его образования.

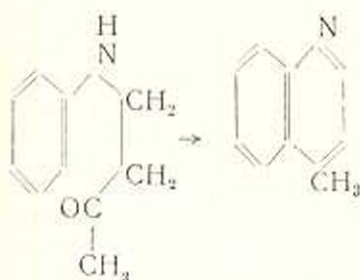
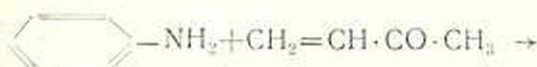
Еще слабее доказательство Ардашева. В условиях его опыта (присутствие соляной кислоты и высокая температура) кротонолиденанилин вполне мог разложиться на компоненты, так что о механизме реакции этот опыт вообще ничего не говорит.

За первую схему говорит недавно появившаяся работа Пилугина [10], показавшего, что вторичные амины, как-то: дифениламин, п-тодилфениламин, п, п'-дитолиламин, о-и п-толил-α-нафтиламины и

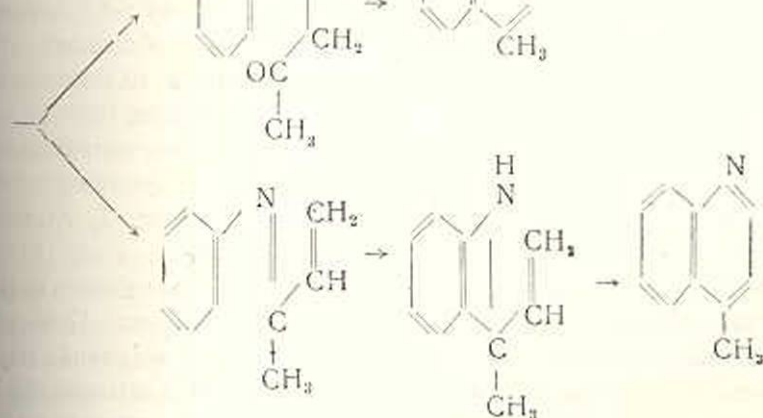
др. при нагревании с паральдегидом в присутствии соляной или хлорной кислоты образуют четвертичные соли производных хинолина.



Нам кажется, что и в нашем случае имеет место обратное присоединение ароматического амина к двойной связи метилвинилкетона (I), а не образование анила метилвинилкетона с его дальнейшим сложным преобразованием в лепидин (II):



(I)



(II)

Экспериментальная часть

Разложение N-ацетиланилинобутанона. Смесь 10,3 г (0,05 моля) N-ацетиланилинобутанона, 8 г солянокислого анилина, 10 г хлористого цинка и 30 мл спирта 8 ч. нагревали на водяной бане. К оставшейся после отгонки спирта темной вязкой массе добавили 50 мл воды и экстрагировали эфиром. Экстракт, после отгонки растворителя перегнали в вакууме. Получили 6,4 г (95% теории) светлых кристаллов и 3,2 г

неперегоняющегося темного остатка, повидимому, смолы метилвинилкетона. Кристаллы, после перекристаллизации из хлороформа, плавилась при 114—114,5°. Смешанная проба с ацетанилидом плавится при той же температуре.

Циклизация анилинобутанона в присутствии п-анизидина. Смесь 8,2 г (0,05 моля) анилинобутанона, 6,15 г (0,05 моля) п-анизидина, 3,2 г нитробензола, 3 г хлористого цинка, 12 мл соляной кислоты и 40 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Остаток после отгонки спирта промыли эфиром, подщелачили и экстрагировали эфиром. Экстракт после отгонки эфира дважды перегнали в вакууме. Получили смесь анилина 1,5 г (12 % т. чл. хлористоводородной соли 197—198°, смешанная проба плавится при той же температуре); п-анизидина 3,2 г (52%) и лепидина (т. пл. пикрата 210—211°, смешанная проба плавится при той же температуре). Из пикрата, полученного при прибавлении спиртового раствора пикриновой кислоты к последней фракции, после многократных перекристаллизаций из бензола удалось выделить небольшое количество пикрата 6-метокси-лепидина с т. пл. 221—222°. Смешанная проба с пикратом 6-метокси-лепидина плавится при 222—223°.

Циклизация анилинобутанона в присутствии β-нафтиламина. А. Смесь 8,2 г (0,05 моля) анилинбутанона, 7,2 г β-нафтиламина (0,05 моля), 3,2 г нитробензола, 3 г хлористого цинка, 12 мл соляной кислоты и 40 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Остаток после отгонки спирта промыли эфиром, подщелачили и экстрагировали эфиром. Эфирную вытяжку высушили и после отгонки растворителя перегнали в вакууме (4 мм). Получили фракции 60—65° 3,9 г (анилин 81%), фракции 65—120° 1,5 г. Из них 0,5 г (7%) лепидина (по пикрату). Т. пл. пикрата 211—212°. Смешанная проба плавится при той же температуре. Фракции 120—183°—1,8 г и фракции 183—187°—7,8 г (80%). Последняя фракция через день полностью закристаллизовалась. Т. пл. полученных кристаллов 101—102°. Смешанная проба с 5,6-бензоленидином плавится при той же температуре. Т. пл. пикрата 224—225°. Смешанная проба не дает депрессии.

Б. Смесь 8,2 г (0,05 моля) анилинобутанона, 11,8 г (0,082 моля) β-нафтиламина, 3,2 г нитробензола, 4 г хлористого цинка, 17 мл соляной кислоты и 100 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. В результате обработки, аналогичной предыдущей, получили 4,4 г (95%) анилина, 4,4 г. не вошедшего в реакцию β-нафтиламина и 8,82 г. 5,6-бензолепидина (выход 90%, считая на израсходованный β-нафтиламин, и 91,4%, считая на взятое количество анилинобутанона).

Анилин с N-ацетиланилинобутанонам. А. Смесь 1,32 (0,01 моля) хлористоводородного анилина, 2,1 г (0,01 моля) N-ацетиланилинобутанона, 4,5 г хлорного железа, 0,3 г хлористого цинка и 15 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Остаток после отгонки спирта подщелачили и перегнали с водяным паром. Из дестилата эфиром экстрагировали 1,7 г. вещества. Из них 0,43 г (30%) лепидина (по пик-

рату). Т. пл. пикрата 210—211°. Смешанная проба плавится при той же температуре.

В. Смесь 0,93 г (0,01 моля) анилина, 3 г N-ацетиланилинобутанона, 0,64 г нитробензола, 0,5 г хлористого цинка, 1,7 мл соляной кислоты и 10 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Остаток после отгонки спирта промыли эфиром, подщелачили и экстрагировали эфиром. К эфирной вытяжке добавили спиртовый раствор пикриновой кислоты. Пикрата, плавящегося при 210—212°, выпало 0,79 г. Выход лепидина 21,2% теории.

β -нафтиламин с N-ацетиланилинобутаном. Смесь 1,43 г (0,01 моля) β -нафтиламина, 3 г N-ацетиланилинобутанона, 0,64 г нитробензола, 0,5 г хлористого цинка, 1,7 мл соляной кислоты и 10 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Остаток после отгонки спирта промыли эфиром, подщелачили и экстрагировали эфиром. К эфирной вытяжке добавили спиртовый раствор пикриновой кислоты. Пикрата получили 1,12—26,1% теории. Пикрат, после перекристаллизации из спирта, плавится при 214—225°. Смешанная проба с пикратом 5, 6-бензолепидина не дает депрессии.

β -нафтиламин с N-метиланилинобутаном. Смесь 0,72 г (0,05 моля) β -нафтиламина, 1,6 г N-метиланилинобутанона, 0,32 г нитробензола, 0,3 г хлористого цинка, 0,9 мл соляной кислоты и 10 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. В результате обработки, аналогичной предыдущей, получено 1,2 г (57%) пикрата 5,6-бензолепидина, с т. пл. 223—224°. Смешанная проба не дает депрессии.

Анилин с N-метиланилинобутаном. Смесь 0,47 г (0,05 моля) анилина, 1,6 г метиланилинобутанона, 0,32 г нитробензола, 0,3 г хлористого цинка, 0,9 мл соляной кислоты и 10 мл спирта нагревали 6 ч. на водяной бане. Пикрата лепидина получено 0,46 г—25% теории. Т. пл. пикрата после перекристаллизации из спирта 211—212°. Смешанная проба не дает депрессии.

В ы в о д ы

1. На примере анилинобутанона показано, что основная часть β -ариламинобутанов при нагревании с соляной кислотой, хлорным железом и хлористым цинком разлагается на ароматический амин и метилвинилкетон до циклизации; отсюда ясно, что циклизация β -ариламинобутанов с образованием лепидина и его аналогов по своему химизму родственна реакциям Скраупа и Дебнер-Миллера.

2. Установлено, что хинолиновые основания можно получать взаимодействием ароматического амина с соединениями, способными к отщеплению метилвинилкетона, как анилинобутанон, N-метиланилинобутанон, N-ацетиланилинобутанон.

3. Взаимодействием β -нафтиламина с анилинобутаном получен 5,6-бензолепидин с выходом 91,4% теории.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабаян А. Т. и Гамбарян Н. П. ЖОХ (1953).
2. Органические реакции. Сборник под редакцией Адамса. 1, стр. 420.
Mannich, Koch, Borkowsky. Ber., 70, 355, (1937)
E. C. du Feu, Meguillin F. G. Robinson R. J. Chem. Soc. 53 (1937).
3. Beyer C. J. pr. 33, 393, (1886).
4. Blaise et Maire. Bl. (4), 3,658 (1908).
5. Ардашев В. И. ЖОХ, 19, 545 (1949).
6. Miller W. V. Ber., 24, 1720 (1891).
7. Ардашев В. И. и Курбатов М. М. ЖОХ, 16, 53 (1946).
8. Knoevenagel E. Baehr, Ber., 55, 1912 (1922).
9. Knoevenagel E., Goos O. Ber., 55, 1929 (1922).
10. Пилюзин Г. Т. Изв. АН СССР, ОХН, № 3, 512 (1952).

Ա. Թ. Բաբայան, Ն. Պ. Դամբարյան

Յ-ԱՐԻԼԱՍԻՆՈՐՈՒՏԱՆՈՆՆԵՐԻ ՑԻԿԼԻԶԱՑՄԱՆ ՄԵԿԱՆԻԶՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լեպիդինի և նրա անալոգների ստացման համար հեղինակները մշակել էին մի նոր մեթոդ, որը հիմնված է N-(3-քլորբուտենիլ)-արիլամինի ծծմբաթթվական հիդրոլիզից ստացվող Յ-արիլամինորուտանոնների հետագա ցիկլիզացման վրա [1]:

N-ացետիլանիլնորուտանոնից այդ ճանապարհով 1-ացետիլ-4-մեթիլ-զիհիդրոսինիլի ստացման փորձն անհաջող անցավ: Փորձի պայմաններում N-ացետիլանիլնորուտանոնը լրիվ ենթարկվեց ճեղքման, տալով ացետանիլիդ և մեթիլիլինիլիկաոն:

Այս արդյունքը հիմք տվեց ենթադրելու, որ փորձի պայմաններում քիմիականապես Յ-արիլամինորուտանոնները ըստ երևույթին ենթարկվում են ճեղքման, տալով արիլամին և մեթիլիլինիլիկաոն, որոնք նորից միաձուլված առաջացնում են ցիկլիկ միացություն: Այս ենթադրությունն ստուգելու համար կատարված փորձերը տվեցին զրակա արդյունք: Այդպես, օրինակ, ցիկլիզացման պայմաններում անիլինորուտանոնի և Յ-նաֆթիլամինի սեակցիայի հիմնական պրոդուկտը հանդիսացավ 5,6-բենզոլլեպիդինը, իսկ լեպիդինն ստացվեց միայն չնչին քանակությամբ:

Այս և հետագա փորձերը հանգեցրին այն եզրակացության, որ Յ-արիլամինորուտանոնների ցիկլիզացումը դեպի լեպիդին և նրա հոմոլոգները նման են Սկրաուպի և Դերենի-Միլլերի սեակցիաներին, որոնց մեխանիզմի մասին գոյություն ունեն հետևյալ երկու պատկերացումները:

Արոմատիկ ամինը նախ միանում է չնագեցած ալգեհիդի կրկնակի կապին, որից հետո առաջացած կարբոնիլային միացությունը ենթարկվում է ցիկլիզացման:

Արոմատիկ ամինը միանում է կարբոնիլ խմբին, որից հետո տեղի է ունենում ստացված անիլի ցիկլիզացումը:

Գրական տվյալների [3, 4, 8, 9, 10] և իրենց կատարած փորձերի հիման վրա հեղինակները ավելի ճշգրտական ենք համարում առաջին սխեման:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Г. Т. Есаян, Р. С. Саркисян

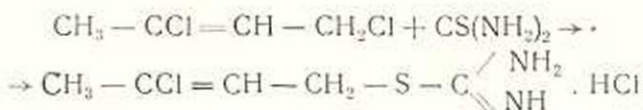
Синтез и превращения S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины

Реакция тиомочевины с галоидосоединениями и спиртами приводит, как известно, к S-производным изотиомочевины [1]. Последние являются удобными исходными продуктами для получения тиолов [2], сульфохлоридов [3] и других сернистых соединений. Для этой реакции особый интерес представляют галоидосоединения с аллильной группой, ввиду их способности подвергаться многообразным химическим превращениям.

В настоящей работе проведена реакция одного из этих соединений—1,3-дихлорбутена-2 с тиомочевинной и изучены некоторые превращения полученного S-производного изотиомочевины.

1,3-дихлорбутен-2 уже применялся А. Л. Клебанским и его сотрудниками для получения других сернистых соединений—соответствующего ксантогената [4] и аналога тиокола [5], а также В. Д. Азатяном и его сотрудниками—для получения сульфидов и дисульфидов [6].

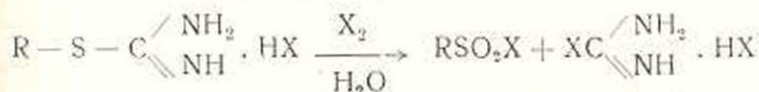
Реакция 1,3-дихлорбутена-2 с тиомочевинной протекает с хорошим выходом, по общей схеме:



Полученный кристаллический продукт реагирует, как это характерно для соединений этого типа [7], с солями органических кислот, обменивая молекулу галоидоводорода на молекулу органической кислоты.

Этим способом нами получена уксуснокислая соль.

Соли S-производных изотиомочевины, как уже было упомянуто выше, служат исходными продуктами для синтеза сульфохлоридов и бромидов. Эти соединения могут быть получены непосредственно, галоидированием упомянутых солей [3].

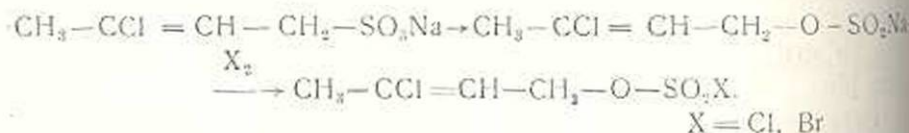


Этим способом нами получен γ-хлоркротилсульфохлорид в виде масла, легко разлагающегося при перегонке. Так как имеются

указания на то, что при хлорировании S-производных изотиомовины может образоваться, с избытком хлора, взрывчатый треххлористый азот [8]. хлорирование нами велось с несколько недостаточным количеством хлора и при охлаждении льдом. Омылением сырого хлорангидрида щелочью получен γ -хлоркротилсульфонат натрия в виде бесцветных кристаллов, хорошо растворимых в воде, х в спирте.

В то время как алифатические сульфонаты стойки к действию галоидов и реагируют с ними только в жестких условиях, образующие галоидозамещенные сульфонаты [9], водные растворы γ -хлоркротилсульфоната натрия реагируют с хлором и бромом уже на холоду, образуя галоидоангидриды γ -хлоркротилового эфира серной кислоты в виде кристаллических осадков. Образование этих соединений можно объяснить предварительной изомеризацией γ -хлоркротилсульфоната натрия в натриевую соль γ -хлоркротилового эфира сернистой кислоты.

На многочисленных примерах А. Е. Арбузов показал возможность подобных превращений [10]. С другой стороны, известно, что соли эфиров сернистой кислоты при действии галоидов превращаются в галоидоангидриды эфиров серной кислоты. Таким образом, в нашем случае образование галоидоангидридов эфиров серной кислоты можно представить следующей схемой:



Строение полученных соединений подтверждено омылением в натриевую соль γ -хлоркротилового эфира серной кислоты, а также получением N-фенилсульфаниловой кислоты с помощью известной реакции хлорангидридов эфиров серной кислоты с анилином [11].

Причиной указанной своеобразной реакции γ -хлоркротилсульфоната натрия с галоидами в водной среде является, по всей вероятности, наличие аллильной группы. Подтверждением этого может служить тот факт, что бутилсульфонат натрия, полученный при взаимодействии бромистого бутила с сернистокислым натрием, совершенно не реагирует с бромом и хлором, что и согласуется с вышеупомянутыми литературными данными о пассивности алифатических сульфонатов в отношении к галоидам.

Экспериментальная часть

1. *Хлористоводородная соль S-(γ -хлоркротил)-изотиомовины.* Смесь 152 г тиомочевины (2 моля), 300 г 1,3-дихлорбутана (20% избыток) и 400 мл этилового спирта кипятилась на водяной бане с обратным холодильником в течение 12 часов. После су-

ного стояния спирт и избыток дихлорбутена удалялись на водяной бане при небольшом разрежении (водоструйный насос). Смесь, еще теплая, сливалась в кристаллизатор. После охлаждения была получена сплошная масса кристаллов, пропитанных тяжелой жидкостью коричневого цвета. Кристаллы отсасывались, промывались несколько раз бензолом и сушились на воздухе. Вес кристаллов 295 г, т. пл. 134—136°. Выход 73,4% теории (считая на тиомочевину).

0,1026 г вещ., 0,1470 г AgCl; % Cl 35,09
 0,1072 г вещ.; 0,0785 г AgCl; % Cl- 18,21
 0,1049 г вещ.; 0,1214 г BaSO₄; % S 15,98
 0,1382 г вещ.: V 19 мл; P 676; t 18°; % N 14,2
 C₅H₁₀SCl₂N₂, вычислено % Cl 35,32; % Cl- 17,66;
 % S 15,42; % N 13,91.

2. Уксуснокислая соль S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины. К раствору 4 г солянокислой соли S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины в 30 мл воды прибавлялось 20 мл 15% водного раствора ацетата натрия. После непродолжительного нагревания на водяной бане реакционная смесь оставлялась на сутки. Выпавшие бесцветные кристаллы отсасывались, промывались небольшим количеством воды и сушились на воздухе. Вес кристаллов 3,5 г, т. пл. 129—130°.

0,1028 г вещ.; 0,0678 г AgCl; % Cl 16,32
 0,1027 г вещ.; 0,1072 г BaSO₄; % S 14,33
 C₅H₁₀O₂ClSN₂, вычислено % Cl 15,8; % S 14,25.

3. γ-хлоркротилсульфонат натрия. Через охлажденный ледяной водой раствор 100 г солянокислой соли S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины в 1 л воды, при частом перемешивании, пропускался умеренный ток хлора, пока не замечалось значительного желтого окрашивания над реакционной смесью. Образовавшееся тяжелое масло промывалось водой и сушилось над хлористым кальцием. Вес сырого продукта—62,5 г. При перегонке в вакууме частично разлагается.

Смесь 57 г хлорангидрида γ-хлоркротилсульфоновой кислоты с 240 г 10% водного раствора едкого натра нагревалась при постоянном перемешивании на водяной бане в течение 8 часов. При этом замечалось значительное осмоление. Содержимое колбы отфильтровывалось: фильтрат выпаривался на водяной бане досуха. Смолистый осадок перекристаллизовывался из воды, затем из этилового спирта и сушился на воздухе. Вес кристаллов 42 г. При нагревании вещество разлагается не плавясь.

0,1021 г вещ., 0,0778 г AgCl, % Cl 18,58
 0,1032 г вещ., 0,1270 г BaSO₄; % S 16,89
 C₄H₆O₂SClNa вычислено % Cl 18,95; % S 16,62.

4. *Хлорангидрид γ -хлоркротилового эфира серной кислоты.* Через раствор 10 г γ -хлоркротилсульфоната натрия в 200 мл воды пропусклся ток хлора до устойчивого желтого окрашивания раствора. Образовавшийся мелкокристаллический бесцветный осадок отфильтровывался, промывался водой и сушился на воздухе. Вес—4,5 г.

После перекристаллизации из спирта—игольчатые кристаллы с т. пл. 109—110°.

0,1114 г вещ.: 0,1557 г AgCl; % Cl 34,59
 0,1014 г вещ.: 0,1418 г AgCl; % Cl 34,50
 0,1020 г вещ.: 0,1158 г BaSO₄; % S 15,58
 0,1054 г вещ.: 0,1204 г BaSO₄; % S 15,61
 C₄H₆Cl₂O₃S вычислено % Cl 34,63; % S 15,61

5. *Бромангидрид γ -хлоркротилового эфира серной кислоты.* К раствору 10 г γ -хлоркротилсульфоната натрия при постоянном перемешивании прибавлялся по каплям бром, до постоянного розового окрашивания. Для этого требовалось 8,5 г брома (т. е. 1 моль брома на 1 моль сульфоната). Выпавшие бесцветные кристаллы отсасывались, промывались водой и сушились на воздухе. Вес—8,5 г. После перекристаллизации из спирта—т. пл. 135—136°.

0,0973 г вещ.: 0,1298 г AgCl + AgBr; % Br 32,27
 0,1017 г вещ.: 0,1331 г AgCl + AgBr; % Br 31,76
 0,1092 г вещ.: 0,1028 г BaSO₄; % S 12,92
 0,1034 г вещ.: 0,0975 г BaSO₄; % S 12,94
 C₄H₆ClBrO₃S вычислено % Br 32,06; % S 12,83

6. *Доказательство строения полученных галоидоангидридов.* Наличие одного подвижного галоида в этих соединениях подтверждено на примере бромпроизводного, омылением 0,1 N раствором едкого натра.

0,1006 г вещ.: 8,2 мл 0,1 N NaOH (T=0,00444).
 Найдено 0,03641 г NaOH; вычислено 0,03565 г NaOH.

Наличие группы—OSO₂X в полученных соединениях подтверждено реакцией с анилином: к спиртовому раствору 2 г хлорпроизводного прибавлено ~2 г анилина. После непродолжительного нагревания на водяной бане реакционная смесь оставлялась несколько суток. Образовавшиеся блестящие желтоватые кристаллы отсасывались, промывались небольшим количеством спирта и сушились на воздухе. Вес ~1 г. Полученное вещество не плавится при нагревании до 270—280°, хорошо растворяется в воде, причем водный раствор имеет кислую реакцию. Проба с водным раствором азотнокислого серебра показывает отсутствие иона галоида. Эти признаки хорошо совпадают со свойствами N-фенилсульфаниловой кислоты [12]. Это подтверждается также и данными определения серы:

0,1798 г вещ.; 0,1666 г BaSO₄; % S 12,72

0,1050 г вещ.; 0,0936 г BaSO₄; % S 12,24

C₁₂H₁₁O₄SN вычислено % S 12,45.

Этот же продукт получен аналогичной реакцией бромангидрида γ-хлоркротилового эфира серной кислоты с анилином.

0,0243 г вещ.; 0,0220 г BaSO₄; % S 12,43

В ы в о д ы

1. Взаимодействием 1,3-дихлорбутена-2 с тиомочевинной получена хлористоводородная соль S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины. Последняя при помощи ацетата натрия переведена в уксуснокислую соль.

2. Путем хлорирования водного раствора хлористоводородной соли S-(γ-хлоркротил)-изотиомочевины получен хлорангидрид γ-хлоркротилсульфоновой кислоты. Омылением последней получен γ-хлоркротилсульфонат натрия.

3. Показано, что в отличие от обычного поведения алифатических сульфонов, сульфогруппа в γ-хлоркротилсульфонате натрия гладко реагирует с хлором и бромом, образуя хлор и бром-ангидриды γ-хлоркротилового эфира серной кислоты, что можно объяснить предварительной изомеризацией сульфоната в натриевую соль γ-хлоркротилсвого эфира серной кислоты.

Химический институт
АН Армянской ССР

Поступило 2 III 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Claus A. 179, 145 (1875); Lecher A. 438; 169 (1924); 445, 35, 77 (1925); Stevens J. chem. Soc. 81, 79 (1912); B. Ziegler и J. M. Sprague Org. chem., 16, 621 (1951).
2. Renshaw R. R. и Scarle D. E. J. Am. chem. Soc., 59, 2056 (1937).
3. Johnson T. B. и Sprague, J. M. J. Am. chem. Soc. 58, 1348 (1936); 59, 1837 (1937), Ziegler C. и Sprague J. M. Org. chem., 16, 621 (1951).
4. Калбачский А. Л. и Чевыкалова, К. К. Синтетический каучук 6, 16 (1935)
5. Калбачский А. Л., Долгопольский Н. и Шаер, М. ЖПХ 9, 1079 (1936).
6. Азатян А. Д., Гюли-Кевхян Р. С. и Мушегян, Н. Г. Изв. АН Арм. ССР 3, 715, (1950).
7. Dunleavy J. J. J. Am. chem. Soc., 58, 1004 (1936); Bonner W. A. J. Am. chem. Soc. 70, 3508 (1948);
8. Folkers K. и др. J. Am. chem. Soc. 63, 3530 (1941).
9. Spring и Winssinger. Ber., 15, 445 (1882); 16, 326 (1883).
10. Арбузов А. Е. ЖРФХО 41, 429, 447 (1909). Арбузов А. Е. и Пишимуки П. С. ЖРФХО 41, 451 (1909).
11. Willcox, Am. chem. J. 32, 468 (1904) [Beil. I. 327].
12. Böhner, A. 333, 283 (1904).

Հ. Տ. Եսայան, Ռ. Մ. Սարգսյան

Տ (Կ-ՔԼՈՐԿՐՈՏԻԼ)-ԻԶՈՏԻՈՍԻԶԱՆՅՈՒԹԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ԵՎ ՆՐԱ
ՓՈԽԱՐԿՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տ-տեղակայված իզոտիոմիզանյութի ածանցյալները հարմար կա-
նյութեր են բազմապիսի օրգանական ծծմբային միացությունների ստաց-
ման համար:

Այս աշխատության մեջ նկարագրված է Տ (Կ-քլորկրոտիլ)-իզոտիոմի-
զանյութի քլորջրածնական աղի ստացումը՝ 2,3-դիքլորբուտեն-2-ի և
տիոմիզանյութի փոխադարձ ներգործության միջոցով: Ուսումնասիրված
են նաև այդ միացության մի շարք փոխարկությունները:

Քլորջրածնական աղի վրա նաաբխումի ապետատ ազդելով, ստացված
է համապատասխան քաղախաթթվական աղը:

Տ-(Կ-քլորկրոտիլ)-իզոտիոմիզանյութի քլորջրածնական աղի ջրային
լուծույթը քլորելու միջոցով ստացվում է Կ-քլորկրոտիլսուլֆոքլորիդ: Վեր-
ջինիս ստացնացումով (կծու նատրիումի ներկայությամբ) ստացված է
Կ-քլորկրոտիլ սուլֆոթթվի նատրիումական աղը:

Ցույց է տրված, որ, ի տարբերություն ալիֆատիկ շարքի սուլֆո-
նատների բնոհանուր հատկությունների, Կ-քլորկրոտիլ սուլֆոթթվի նա-
տրիումական աղը ջրային լուծույթում հեշտությամբ ռեակցիայի մեջ է
մանում քլորի և բրոմի հետ, ապով ծծմբական թթվի Կ-քլորկրոտիլային
էսթերի քլոր և բրոմանիզոմիզները: Կ-քլորկրոտիլսուլֆոնատի յուրա-
տուկ ռեակցիան հալոդենների հետ կարելի է բացատրել այդ միացության
մեջ ալիլային խմբակցության առկայությամբ:

ГЕОЛОГИЯ

И. Г. Магакьян

Металлогенические пояса и некоторые закономерности металлогенической специализации

К категории законов, отражающих объективные процессы, относятся законы геологические и, в числе их, закономерности образования и распределения месторождений полезных ископаемых в земной коре.

Геологи не могут изменить или отменить эти закономерности, но они могут и должны познать их и пользоваться ими для прогнозных оценок и направления поисковых работ.

В науке „Учение о месторождениях полезных ископаемых“ основными являются две проблемы:

1. Происхождение месторождений полезных ископаемых, условия их образования, т. е. проблема генезиса м-ний, и
2. Закономерности, управляющие локализацией полезных ископаемых в земной коре, т. е. проблема минерогенеза (металлогенеза).

Над первой проблемой геологическая мысль работает на протяжении многих веков и все-таки далеко не все здесь ясно; много спорного до сих пор в важнейших вопросах о характере связи эндогенных месторождений с магматическими очагами, о характере рудоносных растворов, типе соединений, в которых переносятся металлы о причинах движения растворов и выпадения из них металлов [8].

Что касается второй проблемы—изучения закономерностей локализации оруденения в тех или иных участках земной коры, надо отметить, что начала она разрабатываться совсем недавно, в последнее десятилетие, советскими учеными.

Основоположниками этого нового плодотворного направления явились прежде всего покойный академик С. С. Смирнов, его товарищи по работе—чл.-корр. АН Ю.А. Билибин, академик Д. И. Щербазков и др. Детальные работы по этой проблеме, сопровождавшиеся составлением металлогенических карт, проведены также в ИГН АН Арм. ССР под руководством автора настоящей статьи. В результате этих работ были выделены и описаны важнейшие металлогенические пояса земной коры—Тихоокеанский, Средиземноморский, Уральский, установлены различия в характере металлогенеза внешних (приплатформенных) и внутренних зон поясов, разграничены платформенный и геосинклинальный типы оруденения [1, 5, 7]. Более того, наметилась

закономерная связь определенных типов месторождений с отдельными тектоно-магматическими комплексами, возникающими в различные этапы развития крупных структурных единиц и обособляющимися пространственно.

Оруденение, металлогения, рассматривается как сложная функция структурного, магматического и литолого-стратиграфического факторов, действующих нередко совместно и определяющих локализацию и тип месторождений полезных ископаемых.

На базе отмеченных работ были сделаны первые попытки составления металлогенических карт, и начала разрабатываться методика составления карт прогнозов, имеющих огромное научное и прикладное значение.

Если обратиться к мировой карте месторождений полезных ископаемых, то даже на картах мелкого масштаба сразу бросается в глаза неравномерное и на первый взгляд как будто беспорядочное, незакономерное распределение месторождений в земной коре: участки с густым расположением месторождений сменяются почти пустыми, значки отдельных видов полезных ископаемых обособляются и концентрируются на небольших или узких участках, совершенно отсутствуя на соседних огромных пространствах.

Может быть распределение месторождений является случайным, может быть, как думают иногда, неравномерность эта объясняется различной степенью изученности отдельных территорий и там, где сейчас нет месторождений будут открыты новые?

Конечно, новые месторождения будут найдены и некоторое число их обнаруживается ежегодно, однако эти новые находки не нарушают существующие закономерности, подчиняются им.

Распределение месторождений отдельных типов в земной коре не является ни случайным, ни зависящим от субъективного фактора — степени изученности территорий. Такие страны, например, как Чили, Боливия и Бразилия изучены примерно одинаково, однако на территории их развито резко различное оруденение: Чили — страна меди, Боливия — олова, вольфрама и сурьмы, Бразилия — страна метаморфенных месторождений железа и марганца, древних высокотемпературных месторождений золота и пегматитов с редкими металлами.

Эти различия, как увидим далее, связаны с различным положением территорий этих стран относительно крупных структурных единиц земной коры: Бразилия располагается почти целиком в пределах Ю. Американского щита, Чили и Боливия — на отрезке Тихоокеанской складчатой зоны и металлогенического пояса, причем Чили — во внутренней, а Боливия во внешней частях пояса.

Вообще следует подчеркнуть, что при всей кажущейся беспорядочности в распределении месторождений, они образуют пояса и узлы, подчиненные крупным структурным единицам — геосинклинальным складчатым областям и щитам или платформам.

Характер минерализации (металлогения) складчатых областей, сох-

ной отороны, и щитов-платформ, с другой, существенно различается, в связи с отличиями в геологической истории развития этих крупных форм земной коры и, повидимому, *специфическими особенностями минерализации докембрийской эпохи*, игравшей решающую роль при формировании щитов и платформ.

* * *

Важнейшими щитами-платформами являются: Канадский, Бразильский, Африканский, Восточно-европейский (Русский), Сибирский, Манчжуро-Корейский, Индийский, Австралийский.

Конечно, в металлогении, как и в истории развития отдельных щитов, есть свои особенности и отличия, но в основном характерна *однотипная металлогения*, специфичная и во многом отличающаяся от металлогении складчатых геосинклинальных зон.

Здесь характерны:

- 1) метаморфогенные месторождения Fe, Mn, (Au): последнее для Африканского щита,
- 2) редкометалльные пегматиты (с Be, Ta, Nb, U, Th, Sn, Mo и др.),
- 3) высокотемпературные месторождения Au и Sn,
- 4) месторождения U (Канада, Африка, Бразилия и др.),
- 5) остаточные и осадочные платформенного типа месторождения Fe, Mn, Al, а также, местами, в связи с более поздними прогибами, разломами и внедрением гипербазитов, основных и щелочных магм (Африка, Сибирский щит, Скандинавия, Канада),
- 6) месторождения хромита,
- 7) месторождения Ni (с Cu, Pt, Pd, Co),
- 8) месторождения апатит-магнетитовых и нефелин-apatитовых руд.

Эпизодическими являются Co—Ag, Cu—цеолитовые, халькопирит-борнитовые (с Cu) руды типа медистых песчаников Катанги и С. Родезии, колчеданные руды.

Надо подчеркнуть, что ряд перечисленных типов: *метаморфогенные м-ния Fe, Mn, Au* и месторождения Cu—Ni сульфидных руд характерны *только* для щитов-платформ.

С другой стороны, многие важные типы месторождений, такие как: сульфидно-касситеритовые, золото-серебряные, сурьмяно-ртутные, медно-молибденовые совершенно отсутствуют здесь.

Неясно только подвергались ли они позднейшей эрозии или изначально отсутствовали в пределах этих структур; мы склоняемся скорее к последнему предположению.

Щиты и платформы дают: 2/3 мировой добычи Fe, 3/4 мировой добычи Au и Pt, 9/10 добычи Ni, Co, U, почти весь Th, Be, Ta, Nb, Zr, 1/3 добычи Mn, 1/4 добычи Cu и Cr (цифры добычи без СССР).

Важнейшими геосинклинальными складчатыми зонами являются: Тихоокеанская и Средиземноморская, сформированные в основном в мезокайнозойе и частью в верхнем палеозойе, и Уральская, сформированная в течение палеозоя.

Им соответствуют одноименные металлогенические пояса.

И опять, несмотря на местные специфические отличия, для всех трех поясов типичны не только одни и те же металлы и семейства (формации) руд, но также сходные условия образования руд и *одинаковый и закономерный порядок* их формирования во времени и пространстве, подчиненный закономерностям развития самих складчатых зон.

Здесь очень характерны осадочные приплатформенные м-ния Fe, Mn, Al, различные остаточные м-ния (тех же металлов и Ni), а также разнообразное эндогенное оруденение, которое развивается обычно в такой последовательности отдельными этапами:

- 1) с доскладчатыми субвулканическими интрузиями и эффузивами—колчеданное (медное и полиметаллическое оруденение),
- 2) с доскладчатыми габбро-пироксенитами—платина,
- 3) с гипербазитами ранних этапов складчатости—хромит,
- 4) с габбро ранних этапов складчатости—титаномagnetит,
- 5) с умеренно-кислыми гранитоидами средних этапов складчатости следующая серия м-ний:

- а) скарновые месторождения Fe, Cu, W (шеелита), Pb, Zn, As,
- б) медно-молибденовые месторождения,
- в) полиметаллические и золото-сульфидные месторождения,
- г) сурьмяно-ртутные месторождения.

Эти первые пять этапов развиты во внутренних частях металлогенических поясов и характерны для Балкан, Малой Азии, Японии, Филиппин, Зап. штатов США, Чили, Перу.

- 6) С кислыми и умеренно-кислыми гранитоидами поздних этапов складчатости связана такая серия месторождений:

- а) пегматитовые месторождения с редкими металлами,
- б) кварц-касситеритовые, вольфрамитовые, молибденитовые м-ния,
- в) золоторудные и золото-сульфидные месторождения,
- г) полиметаллические месторождения,
- д) сурьмяно-ртутные месторождения.

Этот этап развит во внешних частях металлогенических поясов и характерен для С. Испании и Португалии, Корнуолла, Рудных гор и особенно для СВ и ЮВ Азии, Боливии, С. Аргентины.

- 7) С поздние- и постскладчатыми субвулканическими интрузиями от кислого до умеренно-кислого состава связаны следующие месторождения:

- а) медно-турмалиновые (с Au, Mo, As, Sn),
- б) медно-оловянные,
- в) золото-серебряные (с Te, Se),
- г) мышьяковые (реальгар-аурипигментовые).

Пространственно этот последний этап приурочен к молодым прогибам и разломам, которые часто проходят по границе платформ и складчатых областей, захватывая и их периферические части.

Таким образом, отдельные тектоно-магматические комплексы, возникающие в пределах крупных структур и в различные этапы их развития обособлены, как правило, также и в пространстве, располагаясь на отдельных участках крупных структурных единиц.

В связи с этим, пространственно обособлены и различные типы месторождений.

При этом всегда имеет место тесная взаимосвязь и взаимообусловленность структур, магматизма и эндогенного оруденения.

Внутри крупных структур или зон их (внутренней, внешней) могут быть выделены более дробные, подчиненные им единицы — рудные пояса и районы со своей *спецификой* структуры, магматизма и минерогенеза.

В одном конкретном случае, например, на относительно небольшой территории в десятки тысяч *кв. км* могут быть четко выделены, в пределах отрезка внутренней части Средиземноморского пояса, такие разновозрастные и разнородные комплексы, как: 1) юрский вулканический с колчеданным оруденением, 2) верхнемеловой-эоценовый с гипербазитами и хромитом (подчиненный глубинному разлому), 3) миоценовый в пределах антиклинория с гранитоидными интрузиями и медно-молибденовым оруденением, 4) плиоценовый с субвулканическими интрузиями и экструзиями дацитов вдоль молодых разломов, контролирующих сурьмяно-ртутное, мышьяковое (реальгар-аурипигментовое) и золоторудное с теллуридами оруденение.

Далее, детальное изучение центрального антиклинория с Cu—Mo оруденением показывает, что в пределах этой структуры и рудного пояса, по простирацию его, уже на протяжении десятков *км* характер оруденения также имеет свою специфику, в зависимости от погружения или воздымания оси структуры (антиклинория) и глубины эрозионного среза; в местах воздымания оси и глубокой эрозии вскрыты крупные гранитоидные массивы и интенсивное Cu—Mo оруденение с подчиненным ему Pb—Zn , в местах погружения структуры и слабой эрозии — обнажены малые интрузии верхнего структурного яруса, Pb—Zn оруденение с подчиненным ему и тесно связанным с ним более ранним и глубинным Cu—Mo оруденением.

В разбираемом конкретном случае специфика металлогенеза тесно связана не только с тектоно-магматическим фактором; эндогенное оруденение контролируется и обособляется в тесной связи также с литолого-стратиграфическими особенностями района.

Так, не случайна, а вполне закономерна локализация колчеданного оруденения (Cu и Pb—Zn) в стратиграфически хорошо выдержанном горизонте среднеюрских порфиров, или Mn оруденения в верхнемеловых вулканогенно-осадочных толщах; в обоих случаях специфика и литолого-стратиграфический контроль оруденения определяются генетической связью оруденения с корневыми частями тех вулканогенных толщ, которые являются рудовмещающими.

В пределах трех выделенных мировых металлогенических поясов

крупные промышленные концентрации дают Fe, Mn, Al (осадочные геосинклинального типа), магматические месторождения Cr и Pt, различные гидротермальные м-ния редких, цветных и благородных металлов. Геосинклинальные складчатые зоны дают в сумме: 2/3 мировой добычи Mn, 1/3 Fe, 3/4 Al, Cr, Cu, почти всю добычу таких важнейших металлов, как Mo, Sn, W, Pb, Zn, Sb, Hg, Ag и только 1/4 мировой добычи Au (добыча без СССР).

* * *

Все же, при общих для всех складчатых зон закономерностях развития металлогении, разновозрастные структуры существенно отличаются в количественном развитии отдельных металлов и типов месторождений, что не может быть объяснено сколько-нибудь удовлетворительно только эродированностью некоторых типов месторождений в более древних структурах.

Так, осадочные руды Fe характерны в основном для S_{1-2} и Y -Cr эпох, Mn — для олигоцена (!), бокситовые руды для Pz_2 и Cr_2 -Еос.

Среди эндогенных м-ний для палеозоя особенно характерны: Cr, Pt, (Au, Cu), для киммерийской эпохи: Sn, W, Pb, Zn, Au, Sb, для альпийской эпохи: Cu, Mo, Ag, Hg.

Причины такой специализации по эпохам во многом пока неясны. Объяснение общего характера, которое можно высказать, применительно к эндогенным м-ниям, следующее: металлогения не связана с единым магматическим поясом или подкоровым очагом, а обязана возникновению в отдельные эпохи разрозненных магматических очагов различного состава, возникавших как результат расплавления отдельных, отличных по глубине и составу участков земной коры.

Во всяком случае металлогеническая специализация, несомненно имеющая место, лучше всего объясняется не с позиции единого базальтового пояса (?) и базальтовой магмы (Боуэн, Ниггли), а с точки зрения выделения трех, по крайней мере, основных магматических комплексов — гранитоидного, базальтоидного и гипербазитового, возникающих одновременно, *в различных условиях* (структурах) и образующих локально обособленные местные очаги (В. Н. Лодочников, П. Н. Кропоткин, Ю. А. Кузнецов и др.).

Таким образом, обобщая изложенный материал, можно наметить некоторые объективные закономерности металлогенической специализации, пока слабо изученные, но несомненно существующие и активно действующие.

Тип, характер минерогении (металлогении) данной территории зависит от следующих факторов:

Во-первых, от положения ее в пределах крупных структур земной коры (щиты, складчатые зоны) или частей их (внутренние и внешние зоны).

Во-вторых, от принадлежности к определенному этапу развития

этой зоны или части структуры (тектоно-магматические комплексы внутри отдельных зон, или разломы на щитах).

В-третьих, внутри тектоно-магматического комплекса—от погружения и воздымания оси структуры (антиклинория, например), от глубины эрозионного среза, вскрывающего различные ярусы магматических очагов и соответственно оруденения.

В-четвертых, наконец, специфика оруденения тесно связана с местными литолого-стратиграфическими и структурными особенностями (колчеданы и Мп в толщах эффузивов, скарны и метасоматические м-ния в карбонатных толщах, прожилково-вкрапленные и жильные—в интрузивных массивах и песчаниково-сланцевых толщах, телескопированное оруденение в близповерхностных условиях).

Закономерное распределение оруденения в пределах крупных структур, обособление и изменение его в пространстве и во времени в связи с отдельными типами тектоно-магматических комплексов, имеют не только общее научное значение, но должны приобрести и большое практическое значение для прогнозной оценки перспектив крупных регионов и направления поисковых работ.

Необходимо при этом учитывать, что при общих закономерностях развития, *однотипные, но разновозрастные* комплексы имеют и существенные *специфические отличия* в металлогении, ибо развитие земной коры шло сложным путем, представляет необратимый процесс, тесно связанный с общим поступательным развитием Земли.

Материализм базируется на признании развития и круговорота материи. Надо, однако, помнить, что круговорот *не есть* простое повторение.

Институт геологических
наук АН Армянской ССР

Поступило 13 X 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Билибин Ю. А. Вопросы металлогенической эволюции геосинклинальных зон. Изв. АН СССР, сер. геол., № 4, 1948.
2. Кропоткин П. Н. Современные геофизические данные о строении Земли и проблема происхождения базальтовой и гравитной магмы. Изв. АН СССР, сер. геол., № 1, 1953.
3. Кузнецов Ю. А. К проблеме происхождения магматических пород. Изв. АН СССР, сер. геол., № 1, 1953.
4. Мазакиян И. Г. Главные промышленные семейства и типы руд. Зап. Всес. минер. общ., № 4, 1950.
5. Мазакиян И. Г. О металлогенической специализации в некоторых типах тектоно-магматических комплексов. Зап. Всес. мин. общ., № 3, 1952.
6. Смирнов С. С. Очерк металлогении Восточного Забайкалья, 1944.
7. Смирнов С. С. О Тихоокеанском рудном поясе. Изв. АН СССР, сер. геол., № 2, 1946.
8. Смирнов С. С. О современном состоянии теории образования магматогенных рудных месторождений. Зап. Всес. мин. общ., вып. 1, 1947.
9. Щербатов Д. И. Принципы и методика составления металлогенической карты. Сов. геология, № 5, 1945.

2. Գ. Մաղարյան

ՄԵՏԱԼՈԳԵՆ ԳՈՏԻՆԵՐԸ ԵՎ ՄԵՏԱԼՈԳԵՆԻԱԿԱՆ ՄԱՍՆԱԳԻՏԱՑՄԱՆ ՈՐՈՇ ՕՐԻՆԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

1. Երկրի կեղևում մետաղների արդյունաբերական կուտակումները բաշխված են անհավասարաչափ, առաջացնելով գոտիներ կամ հանգույցներ, որոնք ենթակա են խոշոր ստրուկտուրային միավորների՝ գեոսինկլինալների և վահանների:

2. Վահանների և գեոսինկլինալների մետալոգենիայի բնույթը տարբեր է, կապված նրանց զարգացման գեոլոգիական պատմության (մագմատիզմի պրոցեսների, նստվածքների կուտակման և մետամորֆիզմի) տարբերության հետ:

3. Վահանների համար բնորոշ են՝ Fe-ի, Mn-ի, Au-ի մետամորֆոզեն հանքավայրեր, Cu—Ni-ի սուլֆիդային լիկվացիոն հանքավայրեր, պեղմատիտներ և կլարայային երակներ՝ Sn, W, U, Th, Au, Be, Ta, Nb պարունակող, ինչպես նաև U-ի, Cu-ի, Co-ի հիդրոթերմալ, երբեմն էլ Cr-ի և Pt-ի մագմատիկական հանքավայրեր:

4. Գեոսինկլինալային ծալքավոր զոնաների համար շատ բնորոշ են Fe, Mn, Al, նստվածքային հանքանյութերը և ինդոզեն հանքավայրերը, որոնք ձևավորվում են տարբեր պայմաններում և սովորաբար որոշ հերթականությամբ՝ ա) կոլչեզանային հանքանյութեր, բ) պլատին, գ) քրոմիտ, դ) տիտանոմագնետիտ, ե) Fe, Cu, W, Mo և այլ սկառային, հիդրոթերմալ Cu—Mo, Au սուլֆիդային, բազմամետաղային, անթիմոն-սնդիկային հանքավայրեր, ժ) պեղմատիտներ հազվագյուտ մետաղների հետ Sn, W, Mo, Au, Pb, և Zn, Sb և Hg հիդրոթերմալ հանքավայրեր:

5. Հանքավայրերի ախպրի և առանձին մետաղների քանակական զարգացմամբ տարբեր հասակի նույնատիպ ստրուկտուրաները էապես տարբերվում են միմյանցից, որը պետք է բացատրել ոչ միայն էրոզիայի զգալի դերով հնագույն ստրուկտուրաներում, այլև տարբեր մետալոգենիական դարաշրջանների հանքայնացման առանձնահատկություններով:

Վահանների և ծալքավոր զոնաների մետալոգենիայի դանադանությունը հիմնականում նույնպես բացատրվում է մինչքեմբրյան դարաշրջանի մետալոգենիայի սպեցիֆիկայով և վահանների-պլատֆորմաների հետագա զարգացման առանձնահատկություններով:

6. Գոյություն ունեն մետալոգենիական մասնագիտացման օրյեկտիվ օրինաչափություններ. որևէ շրջանի մետալոգենիան կախված է հետևյալ ֆակտորներից՝

ա) շրջանի դիրքից՝ երկրի կեղևի խոշոր ստրուկտուրաների սահմաններում (վահաններ, ծալքավոր զոնաներ) կամ նրանց մասերում (նեքթին և արտաքին զոնաներ, խորը ջարդվածքներ),

բ) այդ ստրուկտուրաների զարգացման այս կամ այն փուլին կամ նրանց մասերին պատկանելությունից: Այս փուլերին հատուկ որոշ տեկ-

տոնո-մագմատիկական կոմպլեքսները, նստվածքների կուտակման և մետամորֆիզմի պրոցեսները պայմանավորում են և հանքայնացումը,

դ) երոզիոն կտրվածքի խորությունից և ստրուկտուրաների առանցքների խորասուզման կամ բարձրացման բնույթից, որոնք ամբողջությամբ վերցրած պայմանավորում են մագմատիկական օջախների և համապատասխանաբար՝ հանքայնացման տարրեր հորիզոնների մերկացման աստիճանը երկրի մակերևույթի վրա,

զ) տեղամասի լիթոլոգո-ստրատիգրաֆիական և ստրուկտուրային առանձնահատկություններից, որոնք պայմանավորում են հանքավայրի տեղադրումը, հաճախ նաև տիպը,

Հանքայնացման օրինաչափ տեղաբաշխումը խոշոր ստրուկտուրաների սահմաններում, նրա տարրեր ափերի անջատումը ժամանակի և տարածության մեջ, կապված տեկտոնո-մագմատիկական կոմպլեքսների առանձին ափերի, նստվածքների կուտակման և մետամորֆիզմի պրոցեսների հետ, ունեն ոչ միայն ընդհանուր գիտական արժեք, այլև այդ օրինաչափությունները պետք է ձևաք բերեն մեծ կիրառական նշանակություն խոշոր շրջանների հանքայնացման հեռանկարները կանխորոշելու և որոնման աշխատանքները նպատակասլաց դարձնելու համար:

ПЕТРОГРАФИЯ

Л. А. Варданянц

Блок-кристаллические типы структур горных пород
и их значение в петрогенезе

Некоторые горные породы обладают структурами, характеризующимися закономерно ориентированным расположением большинства кристаллов главного минерального компонента. Наиболее четким примером таких пород могут служить роговообманковые, слюдяные, хлоритовые и т. п. кристаллические сланцы.

У роговообманковых кристаллических сланцев кристаллы главного их компонента—роговой обманки—расположены так, что третья кристаллографическая ось подавляющего большинства индивидов расположена параллельно одному и тому же направлению. Это имеет своим следствием возникновение волокнистости, так как кристаллы вытянуты вдоль третьей кристаллографической оси, и обладают совершенной спайностью по призме, параллельной этой же оси.

В слюдяных, хлоритовых и т. п. кристаллических сланцах кристаллы главного компонента расположены в подавляющем большинстве так, что нормаль к плоскости совершенной спайности по третьему пинакoidу, почти перпендикулярному к третьей кристаллографической оси, ориентирована одинаково, т. е. параллельно одному направлению.

В связи с такой ориентировкой отдельных индивидов, структура подобного рода кристаллических сланцев характеризуется наличием вектора, общего почти для всех индивидов главного компонента. В роговообманковых кристаллических сланцах таким общим и однозначным вектором индивидов служит их третья кристаллографическая ось, а в слюдяных, хлоритовых и т. п. сланцах—нормаль к третьему пинакoidу, почти совпадающая с третьей кристаллографической осью.

Как у роговой обманки, так и у слюд, хлоритов и т. п. минералов перпендикулярно к такому общему вектору кристаллов расположена ось симметрии. В силу этого в роговообманковых, слюдяных, хлоритовых и т. п. кристаллических сланцах общий вектор кристаллов главного компонента перпендикулярен к оси симметрии почти всех отдельных индивидов. Тем самым плоскость, перпендикулярная к общему вектору, становится геометрическим местом осей

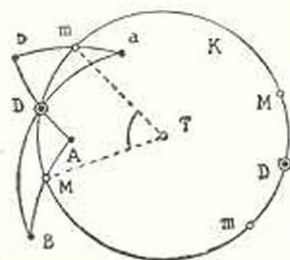
симметрии подавляющего большинства индивидов главного компонента таких горных пород.

В связи с этим обстоятельством структура роговообманковых, слюдяных, хлоритовых и т. п. кристаллических сланцев характеризуется тем, что ориентировка подавляющего большинства индивидов главного компонента выводится из ориентировки одного единственного, условно неподвижного кристалла посредством его поворота на тот или иной угол вокруг общего вектора кристаллов, перпендикулярного к их оси симметрии. В иной формулировке это означает, что в подобных породах любые два индивида главного компонента составляют двойниковую пару, так как у них имеется общий одноименный вектор, перпендикулярный к оси симметрии как одного, так и другого индивида. Двойниковой осью такой пары служит биссектриса угла между их осями симметрии, считая этот угол по направлению того поворота, посредством которого один индивид выводится из другого [3].

Это соотношение показано на стереографической проекции (фиг. 1), где AB и ab — проекции двух индивидов, M и m — их оси двойной симметрии, а T — общий вектор индивидов, перпендикулярный к их осям симметрии (а вместе с тем и к плоскости проекции MmK), вокруг которого один из индивидов повернут относительно другого на угол MTm . Проведя дугу большого круга Ab и найдя на ней вектор D , лежащий в плоскости проекции и перпендикулярный к оси поворота T , получим два сферических треугольника AMD и bmd , которые равны друг другу, так как в них имеется, по условию и по построению, равенство дуг $AM = am = bm$ и равенство углов $ADM = bDm$ и $AMD = bmd$. Из равенства треугольников следует равенство дуг $AD = bD$ и $MD = mD$, а это означает, что вектор D играет в данной паре кристаллов роль их двойниковой оси, так как один из этих кристаллов выводится из другого посредством его поворота на 180° вокруг вектора D .

Фиг. 1. AB и ab — положение кристалла до и после поворота, M и m — ось симметрии кристалла, T и MTm — ось и угол поворота, D — двойниковая ось.

Таким образом, в роговообманковых кристаллических сланцах любая (или, точнее, почти любая) пара кристаллов роговой обманки представляет двойниковую пару, двойниковая ось которой расположена перпендикулярно к общей у них третьей кристаллографической оси, совпадающей с направлением волокнистости породы. Поэтому породу в целом можно рассматривать как гигантский блок-двойниковый кристалл (или как двойниковый блок-кристалл), в котором неограниченно большое число двойниковых осей лежит в одной плоскости, перпендикулярной к направлению волокнистости породы, с которым совпадает вектор общей для всех кристаллов



третьей кристаллографической оси. В теории индексы таких двойниковых осей могут быть совершенно различными, но на практике оси чаще всего совпадают с нормалью к первому пинакоиду, или, что то же самое, двойниковой осью служит чаще всего сама третья кристаллографическая ось.

Применяя этот же путь рассуждений к слюдяным, хлоритовым и т. п. кристаллическим сланцам, можно установить, что и их можно считать гигантскими двойниковыми блок-кристаллами с неограниченно большим числом двойниковых осей, лежащих в одной и той же плоскости, которая здесь совпадает с плоскостью сланцеватости породы. И в этом случае индексы двойниковых осей могут быть, в теории, совершенно различными, на практике же чаще всего наблюдаются, повидимому, такие случаи, когда оси эти совпадают с нормалью к граням типа (110) и (130), определяющим слюдяной двойниковый закон.

Блок-двойниковый характер структур роговообманковых, слюдяных, хлоритовых и т. п. кристаллических сланцев позволяет сделать вывод, что многоиндивидуальная система таких пород должна характеризоваться очень низким значением потенциальной энергии системы, так как образование двойников, как это было установлено нами еще ранее [1, 2], представляет особую стадию становления кристаллического состояния и поэтому в нормальных условиях должно сопровождаться понижением потенциальной энергии всей системы. Говоря иначе, нужно признать, что такого рода горные породы характеризуются очень низким (или даже наиболее низким) значением потенциальной энергии.

Близкую к этому картину мы имеем также и в гнейсах, но у них уже нет столь совершенной, по однообразию расположения, ориентировки главных компонентов. Поэтому в гнейсах значение потенциальной энергии должно быть, повидимому, несколько более высоким, чем в роговообманковых, слюдяных, хлоритовых и т. п. сланцах.

Далее, более или менее однообразной ориентировкой кристаллов главного компонента обладает основная масса изверженных порфировых пород при наличии в ней трахитовой, трахитоидной и т. п. структур. К таким породам в большей или меньшей степени приложимы выведенные выше закономерности, так как у лейст и микролитов полевых шпатов их удлинение совпадает с первой кристаллографической осью, перпендикулярно к которой у всех полевых шпатов расположена ось симметрии (у моноклинных разностей это — обычная ось симметрии, а у триклинных, неизменно двойникованных, — двойниковая ось их альбитового или периклинового двойников). Поэтому в породах с трахитовой, трахитоидной и т. п. структурами основной массы перпендикулярно к направлению струйчатости лежит неограниченно большое число двойниковых осей, связываю-

щих друг с другом те или иные два индивида из числа струйчато расположенных лейст и микролитов.

Приведенные выше примеры показывают, что очень многие горные породы обладают такими структурами, которые позволяют рассматривать каждую из таких пород, независимо от занимаемого ею объема, как один единый гигантский блок-двойниковый кристалл.

Аналогичное этому явление установлено нами [2] и в диабазах, где довольно большое число полисинтетически двойникованных кристаллов плагиоклаза образуют один единый блок-кристалл.

В противоположность этому, такие породы, как граниты или аркозовые песчаники, не обладающие ориентированным расположением компонентов, характеризуются тем, что в них не только у смежных, но даже и у разобщенных кристаллов в подавляющем большинстве случаев не имеется общих векторов (т. е. одноименных векторов, расположенных параллельно друг другу). В связи с этим подобные породы уже не принадлежат к категории блок-кристаллов, так как в них нельзя вывести большинство индивидов из одного единственного, условно неподвижного, посредством его поворота на тот или иной угол вокруг какого-то общего вектора. Поэтому нужно полагать, что такого рода породы должны характеризоваться гораздо более высоким значением потенциальной энергии кристаллической системы, чем в выше рассмотренных примерах.

Показателем относительно очень высокого значения потенциальной энергии таких пород, как граниты, аркозовые песчаники и т. п., может служить также и то, что их структуры чрезвычайно неустойчивы и очень легко сменяются структурами ориентированными. Общеизвестно, с какой легкостью эти породы в зонах дислокаций и смятия теряют все признаки своей, в широком смысле слова, гипидиоморфно- или аллотрио-морфнозернистой структуры.

Такая структурно-энергетическая характеристика вполне понятна в аркозовом песчанике, в котором, как в породе обломочно-осадочной, вообще нельзя было бы рассчитывать на низкое значение потенциальной энергии, так как осаждение обломков минералов происходит безо всякого соблюдения закономерности в их взаимной ориентировке. Для гранита же такая характеристика приводит, как будто бы, к парадоксу.

Если образование гранита связано в основном с кристаллизацией расплава, т. е. с таким процессом, который характеризуется отдачей энергии (а следовательно, и понижением потенциальной энергии системы), то более естественной была бы для него структура с более или менее ориентированным расположением компонентов породы, способствующим понижению потенциальной энергии, как, например в гранитах с первичной гнейсоподобной структурой. Типичная же гранитовая структура более вероятна, как будто бы, в тех случаях, когда образование породы происходит в условиях не отдачи, но привноса энергии, как это имеет место, например, в кон-

тактово-метасоматических породах, обладающих типичной роговиковой (в общем смысле, гранитовой) структурой.

В связи с этим можно допускать, что в процессе образования гранита существенную роль играла перекристаллизация вещества в твердом состоянии под влиянием газовых и жидких растворов и привнесенной ими энергии. До сих пор при попытках решить проблему происхождения гранитов не принимали во внимание особенности их структуры, между тем как они могут иметь здесь существенное значение.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступило 4 III 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданянц Л. А. Триадная теория двойниковых образований минералов. Издание Академии наук Армянской ССР, 1950, Ереван.
2. Варданянц Л. А. Комплексные двойники плагиоклаза. Издание Академии наук Армянской ССР, 1952. Ереван.
3. Варданянц Л. А. Теория поворотов кристалла в двойниках. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 4. 1952, Ереван.

Լ. Ա. Վարդանյանց

ԼԵՌՆԱՅԻՆ ԱՊԱՐՆԵՐԻ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆԵՐԻ ԲԼՈԿ-ԲՅՈՒՐԵՂԱՅԻՆ ՏԻՊԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՆՇԱՆԱԿՈՒԹՅՈՒՆԸ ՊԵՏՐՈԳԵՆԵԶՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիւմով քննարկում են լեռնային ապարների բլոկ-բյուրեղային ստրուկտուրաների մի քանի տիպեր և պարզվում է նրանց հնարավոր նշանակությունը՝ գրանիտաձև ստրուկտուրաների առաջացումը հանկանալու համար, բլոկ-բյուրեղային ստրուկտուրաները, ինչպես, օրինակ, բյուրեղային թերթաքարերում, բնորոշվում են նրանով, որ գլխավոր բաղադրիչ միներալի անհատներն ունեն մեծ մասամբ կրկնակային փոխգտառվորություն:

Այդ կապակցությամբ, նշված տիպերի ստրուկտուրաների պատենցիալ էներգիան, ի հակադրություն գրանիտաձև ստրուկտուրաների, պետք է ունենա միևնույն արժեք: Այս հանգամանքը իրավունք է տալիս եզրակացնել, որ գրանիտաձև ստրուկտուրաների գոյացման պրոցեսում էական դեր է խաղում նյութի վերաբյուրեղացումը նրա կարծր վիճակում:

Л. А. Варданянц

О двойниковых законах порфировых кварцев

Двойниковые образования порфировых кварцев уже давно привлекают внимание исследователей, но пока описаны достаточно детально и полно только морфологические особенности и некоторые кристаллографические закономерности таких сростков. Что же касается генетической стороны, то она остается еще недостаточно освещенной, в связи с чем нет вполне убедительной и обоснованной теории происхождения такого рода образований.

Число возможных двойниковых законов порфировых кварцев, по представлениям некоторых ученых, довольно значительно, но в массовом количестве встречаются из них только очень немногие. Остальные же либо еще ни разу не были обнаружены, либо же наблюдались только в виде единичных экземпляров, хотя кажущаяся их вероятность в некоторых случаях даже и очень высока. В данной работе мы уделим наибольшее внимание четырем законам: Эстерель, Сардиния, Японскому и Самшвильдо. Закон Вёрешпатак, упоминаемый некоторыми авторами, тождествен Японскому, и поэтому в дальнейшем мы не будем упоминать о нем как о самостоятельном законе. Наиболее детально сростки по этим законам описаны в статье Г. Г. Леммлейна [6], где дана и литература по этому вопросу.

В морфологическом отношении двойники порфировых кварцев представляют в подавляющем большинстве сочетание двух, самостоятельно возникших дипирамидальных кристаллов, сросшихся гранями основной дипирамиды (ромбоэдра). Поэтому различия двойниковых законов могут быть сведены к величине угла поворота одного кристалла по отношению к другому вокруг общей нормали к соприкасающимся граням дипирамид.

В связи с этим, условной константой, определяющей тот или иной закон срастания, может служить угол между однозначными концами оси симметрии второго порядка, лежащей в плоскости соприкасающихся граней. Так как при этом осью поворота кристаллов друг относительно друга служит нормаль к четной оси симметрии, присутствующей неизменно как у гексагонального, так и у тригонального кварца, то, согласно нашей теории таких поворотов [3], биссектриса угла поворота всегда, при любом угле поворота, будет обязательной двойниковой осью срастающихся кристаллов. Подобная двойниковая ось, как правило, имеет иррациональные индексы, за исключением тех случаев, когда при некоторых определенных углах поворота происходит совпадение других зон кристаллов.

Наиболее распространенные двойники порфировых кварцев могут быть выведены также посредством поворота кристалла и около других векторов, главнейшими из которых являются нормаль к грани призмы, т. е. $[10\bar{1}0]$, и ось симметрии второго порядка, совпадающая с кристаллографической осью $[1210]$.

В первом из этих случаев ось поворотов служит осью зоны большого числа рациональных граней: $(12\bar{1}0)$, $(12\bar{1}1)$, $(12\bar{1}2)$, $(12\bar{1}5)$ и т. п., а вместе с тем она перпендикулярна к оси симметрии второго порядка. Поэтому при любом угле поворота кристалла около нормали к грани призмы будет получаться двойниковая пара, у которой обязательная двойниковая ось, совпадающая с биссектрисой угла поворота оси двойной симметрии, будет иметь почти всегда индексы, очень близкие к рациональным. Учитывая обычную неточность взаиморасположения индивидов даже и в «точных» двойниках, достигающую ± 2 и даже $\pm 3^\circ$, нужно признать, что поворот на любой угол вокруг нормали к грани призмы будет приводить к образованию обычного двойника. Следовательно, совпадение граней призмы у двух кристаллов кварца должно, в большинстве случаев, иметь своим следствием возникновение двойника.

Во втором из указанных выше случаев осью поворота кристалла служит ось симметрии, зона которой содержит сильнейшие грани кварца (1010) , $(10\bar{1}1)$, (1012) и потенциальные его рациональные грани $(20\bar{2}1)$, $(30\bar{3}1)$, $(10\bar{1}3)$, $(10\bar{1}4)$ и т. п. Поэтому у гексагонального кварца поворот на любой угол около этого вектора также будет приводить к возникновению двойникового расположения кристаллов, причем и здесь обязательная двойниковая ось в большинстве случаев также будет иметь рациональные индексы. У тригонального же кварца двойниковые сочетания кристаллов при таких поворотах могут возникать только при совпадении других зон кристаллов, так как здесь нет четной оси симметрии, перпендикулярной к оси поворота.

Образование двойниковых сростков порфировых кварцев объясняется, по Г. Г. Леммлейну ([6], стр. 125), следующим образом: «Падающий маленький кристаллик приходит в соприкосновение с гранью большего кристалла сперва вершиной, затем ребром и, наконец, гранью. Упав в случайном, не закономерном положении, он, поворачиваясь, скользит по поверхности грани большего кристалла. Когда поворот совпадает с тем или иным закономерным положением, происходит окончательное срастание обоих кристаллов в «двойник» или «закономерный сросток». Однако этот последний существенный момент срастания остается еще неясным».

Такое объяснение нельзя признать убедительным. Во-первых, не указывается в силу каких причин меньший кристалл должен поворачиваться в ту или иную сторону. Ведь этот поворот будет очень затрудняться большой вязкостью кислого силикатного расплава и, кроме того, значительным трением на соприкасающихся поверхностях кристаллов. Следовательно, поворачивающее усилие должно быть очень большим. Непонят-

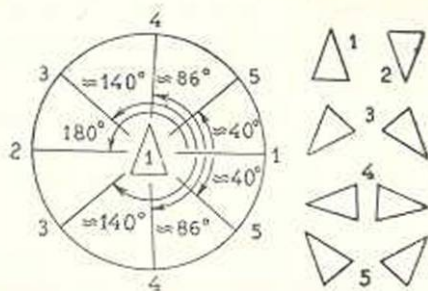
но также и то, почему меньший кристалл начинает поворачиваться только после того, как он уже ляжет на поверхность большого.

Во-вторых, остается не установленным, на какой же предельный угол может повернуться меньший кристалл. Не выходя за рамки разумности, мы должны принимать, что угол этот не может быть значительным и едва ли будет превышать $5-10^\circ$, если грани уже соприкасаются.

В-третьих, статистика, приведенная в статье Г. Г. Леммлейна, заставляет сделать вывод, что меньший кристалл, в момент его падения на поверхность большого, уже имеет обязательно какую-то закономерную ориентировку, ибо почти все наблюдающиеся случаи взаиморасположения кристаллов исчерпываются шестью положениями. Из них два противоположных (фиг. 1, положения 1 и 2) соответствуют параллельным сросткам и двойникам по закону Эстерель, а остальные четыре (фиг. 1, положения 3 и 5) отвечают попарно двойниковым законам Японскому и Самшвильдо. Двойниковый же закон Сардиния (фиг. 1, положение 4) встречается, по указанию самого Г. Г. Леммлейна, чрезвычайно редко (стр. 141).

Принимая точность ориентировки индивидов в сростках такого рода около $\pm 3^\circ$, мы получим, что из всей окружности заполнены только шесть интервалов по 6° , т. е. всего лишь 36° , а 324° остаются «пустыми», ибо среди тысяч исследованных сростков нет или почти нет таких, ориентировка которых соответствовала бы пустующим интервалам. Особенно бросаются в глаза два больших промежутка между положениями 3 и 5 по одну и другую стороны от оси симметрии (фиг. 1), каждый из которых охватывает угол около 100° , и посередине которых должна была бы располагаться ось симметрии кристалла при двойниковом законе Сардиния. Это обстоятельство также не получило у Г. Г. Леммлейна никакого объяснения.

Если исходить из того, что меньший кристалл падает на большой действительно в совершенно случайном положении, и если считать «положением» двойника некоторый интервал в $\pm 3^\circ$ (см. выше), то вероятность той или иной первоначальной ориентировки меньшего кристалла по отношению к большому будет разна для параллельных сростков, как и для закона Эстерель, всего лишь около $1,7\%$, а для закона Японского, как и для законов Сардиния и Самшвильдо, в два раза выше, т. е. около $3,5\%$. Два больших пустующих промежутка, каждый по 100° , охватывают вместе около 55% всего диапазона вероятности. В природе все случаи



Фиг. 1. Схема ориентировки индивидов в параллельных сростках и двойниках. 1—первоначальное положение положительного конца оси симметрии на грани основной дигиприды и положение 31° грани, 2—то же для двойникового закона Эстерель, 3—то же для закона Японского, 4—то же для закона Сардиния, 5—то же для закона Самшвильдо.

ориентировок, падающих на эти два промежутка, отсутствуют почти полностью, поэтому, основываясь на представлениях Г. Г. Леммлейна, нужно было бы сделать вывод, что малые кристаллы в каком-то количестве обязательно получающие первоначально подобную ориентировку, были затем выведены из нее посредством поворота на угол до $50-70^\circ$, и даже до 90° как в одну, так и в другую сторону. При этом подавляющее большинство меньших кристаллов должно было бы повернуться в одну сторону до положения параллельного сростка, а в другую—до двойника Эстерель, почти совсем не задерживаясь на промежуточных (считаемых вполне возможными!) положениях двойников Самшвильдо и лишь в очень небольшой степени закрепляясь на положении Японских двойников, считаваемых очень вероятными.

В результате этого, в положениях параллельных сростков и двойников Эстерель концентрируется свыше $70-75\%$ всех сростков, а остальные сосредоточены почти исключительно в двух интервалах Японского закона. Таким образом, все наблюдаемые случаи двойников оказываются приуроченными, в подавляющем большинстве, лишь к четырем интервалам, каждый всего только по 6° .

Парадоксальность этого особенно резка для закона Эстерель, которому принадлежат до $30-40\%$ всех сростков. В силу этого он должен был бы стягивать к себе меньшие кристаллы с интервала в 120° , т. е. по 60° с одной и другой стороны. Между тем весь промежуток между положениями двойников Японского и Эстерель составляет всего около 40° . Следовательно, закон Эстерель должен был бы притягивать к себе очень большое количество кристаллов «через голову» Японского закона, а если бы это было реальным фактом, то Японский закон в двойниках порфировых кварцев вообще не мог бы реализоваться, или же возникал лишь в редких случаях, подобно закону Самшвильдо.

Такой порядок возникновения сростков нельзя признать убедительным и могущим отвечать действительным условиям. Поэтому нужно сделать вывод, что меньший кристалл получает ту или иную ориентировку еще тогда, когда он не соприкасается с большим. Следовательно, то или иное двойниковое соотношение кристаллов создается уже задолго до их соприкосновения, притом, надо полагать, как следствие взаимодействия энергетических полей кристаллов, распространяющегося, повидимому, на довольно значительное расстояние. Сближение кристаллов, плавающих в очень вязком расплаве, может происходить лишь крайне медленно и должно задерживаться даже и незначительными препятствиями.

Эта схема вполне согласуется с той последовательностью процесса, которая была установлена нами для комплексных двойников плагиоклаза [1, 2], а также была выведена для сростков алюмо-калиевых квасцов на опыте ревизии материалов М. Шаскольской и А. В. Шубникова [4].

Итак, нужно признать, что меньший кристалл кварца получает ту или иную ориентировку относительно большого еще на некотором расстоянии от него, причем сперва, повидимому, располагаются параллельно друг другу плоскости каких-либо граней призм или оси симметрии

второго порядка. Последующие повороты кристаллов вокруг соответствующих векторов приводят к тому или иному двойниковому взаиморасположению, сохраняющемуся до первого соприкосновения кристаллов, которое, в общем случае, еще не создает устойчивого положения одного кристалла на поверхности другого, так как осуществляется чаще всего вершиной или ребром одного кристалла к грани другого. Поэтому переход кристаллов к устойчивому положению требует дополнительных поворотов, в связи с чем в ряде случаев нарушается уже достигнутая закономерная ориентировка, и кристаллы приводятся к новому, порой совершенно иного типа, взаиморасположению, вероятность которого может быть даже и гораздо более низкой.

Это обстоятельство свидетельствует о том, что та статистика частот разных двойниковых законов, которую мы сейчас наблюдаем, и которая указывается в литературе, показывает отнюдь не степень действительной вероятности и «силы» тех или иных двойниковых ориентировок и законов, а лишь конечный результат их искажения в процессе принудительного приведения одного из кристаллов к устойчивому положению на поверхности другого.

Чтобы выяснить возможные виды принудительного изменения первоначальной ориентировки, рассмотрим главнейшие типы двойниковых взаиморасположений кристаллов и обязательные варианты их перехода к другим ориентировкам. При этом будем называть условно один из кристаллов меньшим, а второй — большим.

А. Сростки с параллельными главными осями

В числе таких сростков можно выделить три типа: параллельные сростки, двойники по Дофинейскому закону и двойники по закону Бразильскому.

При параллельном взаиморасположении кристаллов меньший кристалл, сближаясь с любой гранью большего, всегда будет приходить в соприкосновение с ним сразу всей гранью, т. е. сразу же будет получать вполне устойчивое положение, обеспечивающее быстрое и прочное сплаивание кристаллов. Поэтому удельная роль параллельной ориентировки в числе отпечатков должна быть относительно гораздо более низкой, чем среди сростков.

Что касается двойников, как Дофинейских, так и Бразильских, то распространенность их в кристаллах порфиновых кварцев остается еще не установленной, в связи с чем отпадает возможность выяснить их влияние на возникновение той или иной окончательной ориентировки кристаллов.

Б. Сростки с не параллельными главными осями

В связи с господствующим дипирамидальным обликом порфиновых кварцев, плоскостью соприкосновения и срастания индивидов может быть

только грань этой дипирамиды, и разные двойниковые расположения кристаллов будут отличаться друг от друга лишь углом поворота одного кристалла по отношению к другому вокруг общей нормали к плоскости соприкасающихся граней. Поэтому, как уже было показано выше, кристаллы всегда составляют двойниковую пару, у которой обязательной двойниковой осью служит биссектриса угла между однозначными концами оси симметрии, лежащей в плоскости общей грани дипирамиды. Эта двойниковая ось в общем случае иррациональна, рациональной же она становится лишь тогда, когда совпадают друг с другом какие-либо иные одноименные зоны одного и другого кристалла. В таких случаях непременно появляется вторая двойниковая ось, перпендикулярная к первой (обязательной), и именно эта вторая ось определяет закон соответствующего двойника. Обязательная двойниковая ось служит вместе с тем осью совпадающих зон кристаллов.

Если первоначальная ориентировка кристаллов при их еще разобленном состоянии становится двойниковой, то главные оси их и двойниковая ось сродка могут располагаться в одной плоскости, либо же такого совпадения может не быть. Надо полагать, что в первом из этих случаев взаиморасположение кристаллов будет гораздо более устойчивым, так как во втором случае неизбежно должны возникать дополнительные вращающие усилия, как результат косо́го взаиморасположения энергетических полей кристаллов.

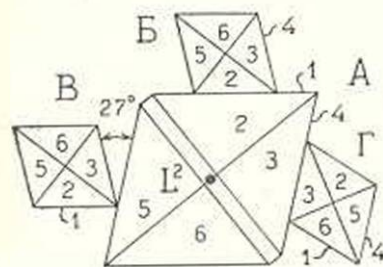
Следствием этого должно быть то, что кристаллы будут стремиться к тому, чтобы главные их оси лежали в одной плоскости, и это может осуществляться, повидимому, в подавляющем большинстве случаев, так как кристаллы имеют обычно полную свободу поворотов в окружающей их среде. Это обстоятельство очень важно для понимания генезиса двойников порфи́ровых кварцев, так как, основываясь на нем, можно дать более убедительное решение вопроса.

а. Двойниковый закон Эспегель. При этом законе двойниковой осью служит нормаль к грани основной дипирамиды. Второй индивид может быть выведен из первого двумя способами: поворотом на 180° около нормали к грани дипирамиды или поворотом на $76^\circ 26'$ вокруг оси симметрии второго порядка, параллельной грани дипирамиды.

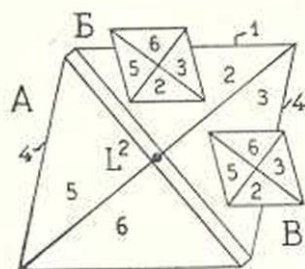
В тех случаях, когда главные оси кристаллов лежат в одной плоскости, меньший кристалл приходит в первоначальное соприкосновение с большим или сразу всей гранью, если плоскостью соприкосновения служит двойниковая плоскость (фиг. 2, кристаллы А и Б или А и Г), или же сначала вершиной, а затем, после поворота на угол около $26,5^\circ$ вокруг общей оси симметрии, уже всей гранью, если плоскостью первоначального соприкосновения служит не двойниковая плоскость, а грань, смежная с нею в зоне с призмой (фиг. 2, кристаллы А и В).

После такого поворота двойниковой осью будет нормаль уже к другой грани дипирамиды, а именно, к грани окончательного соприкосновения. Существенно при этом то, что у высокотемпературного кварца во время такого поворота меньшего кристалла он находится непрерывно в

двойниковом соотношении с большим, так как поворот происходит вокруг вектора, перпендикулярного к шестерной оси симметрии кристалла. Таким образом, в тех случаях, составляющих громадное большинство, когда главные оси кристаллов лежат в одной плоскости, окончательное срастание индивидов происходит без изменения типа двойника.



Фиг. 2. Схема двойника по закону Эстерель. Кристаллы А и Б, а также А и В сдвойникованы по нормали к грани 1, а кристаллы А и Г — по нормали к грани 4. Первоначальное соприкосновение кристаллов либо по двойниковой плоскости (кристаллы Б и Г), либо по грани дипирамиды, смежной с нею в зоне с призмой (кристалл В).



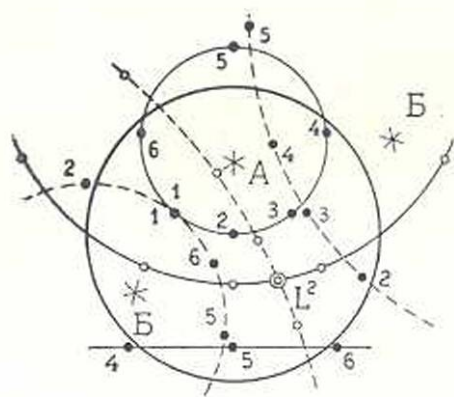
Фиг. 3. Схема первоначального соприкосновения второго индивида в двойнике Эстерель с гранями дипирамиды 2 или 3, смежными с осью симметрии, расположенной параллельно двойниковой плоскости 1.

Если же кристаллы не придут к такому положению, при котором их главные оси лежали бы в одной плоскости, то процесс соединения кристаллов протекает несколько иначе, причем возможны два варианта (фиг. 3). В первом из них сближение происходит не с гранью 1 кристалла А, являющейся двойниковой плоскостью, а либо с его гранью 2 или с симметричной ей гранью 6 (кристаллы А и Б), а во втором — с гранью 3 или с симметричной ей гранью 5 (кристаллы А и В).

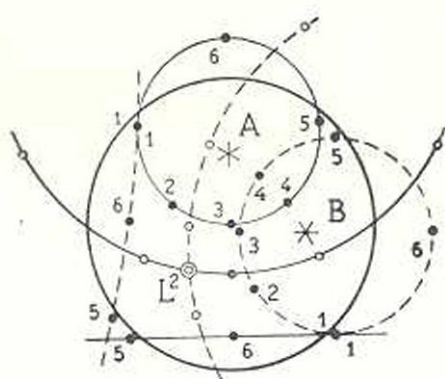
В первом из этих случаев (фиг. 4) кристалл Б получит уже иную окончательную ориентировку, а именно по Японскому закону, так как его грань 6 ляжет, после небольшого поворота кристалла, на наиболее близкую к ней грань 2 кристалла А, причем биссектриса угла между главными осями кристаллов расположится очень близко к нормали к грани (1212). Во втором же варианте (фиг. 5) окончательное соприкосновение кристаллов происходит сразу либо гранями 3 и 3, либо гранями 5 и 5, так как эти грани кристаллов расположены почти параллельно друг другу, составляя в каждой паре угол всего около 9° . Поэтому кристаллы приводятся здесь к двойнику по закону Сардиния, с двойниковой осью по нормали к грани (1012).

Таким образом, в подавляющем большинстве случаев первоначальная ориентировка по закону Эстерель должна сохраняться при окончательном соприкосновении кристаллов, и лишь в небольшом числе случаев она будет заменяться иной ориентировкой, а именно, по закону или Японскому, или же — Сардиния.

Двойниковый закон Эстерель принадлежит к числу наиболее распространенных у кварца, и это вполне согласуется с сильным развитием граней основной дипирамиды (ромбоэдра) на его кристаллах. Другой особенностью этого закона является то, что его вторая (обязательная) двой-



Фиг. 4. Стереографическая проекция сочетания кристаллов А и Б, по фиг. 3, на грань 2 кристалла А.



Фиг. 5. Стереографическая проекция сочетания кристаллов А и Б, по фиг. 3, на грань 3 кристалла А.

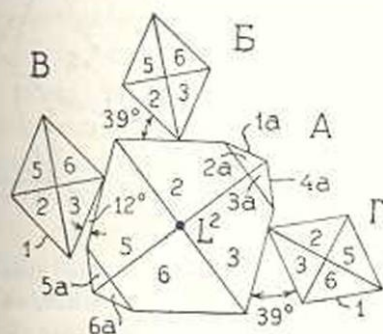
никовая ось всегда (также и у тригонального кварца) рациональна. Она представлена вектором $[10\bar{1}2]$ и почти совпадает с нормалью к грани типа $(30\bar{3}5)$, которая составляет здесь с двойниковой плоскостью угол в $89,5^\circ$. Поэтому закон Эстерель даже и при двух индивидах является полной триадой, а это должно приводить, повидимому, к более значительному снижению потенциальной энергии сростка.

Третьей особенностью закона Эстерель является то, что он обладает слабо выраженной тетрагональностью. Дело в том, что грань основной дипирамиды очень близка к грани дипирамиды $(40\bar{4}5)$ и составляет с нею угол лишь около $60^\circ 20'$, а положительная и отрицательная грани такой дипирамиды, $[40\bar{4}5]$ и $(40\bar{4}5)$, почти перпендикулярны друг к другу, составляя угол в $89^\circ 5'$. Поэтому двойникование по такой дипирамиде дает, даже при двух индивидах, полную триаду и приводит к возникновению блок-кристалла, в котором общая ось симметрии второго порядка становится псевдотетрагональной осью симметрии, а сам сросток уподобляется, по общей его симметрии, тетрагональному трапецоэдру. В связи с этим можно полагать, что в ряде случаев двойники, определяемые как не очень точные сростки типа Эстерель, представляют в действительности сростки по закону нормали к грани дипирамиды $(40\bar{4}5)$.

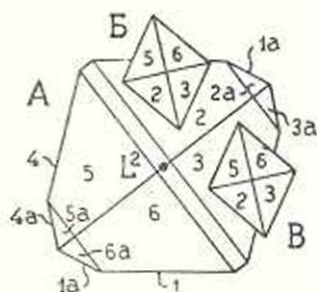
б. Двойниковый закон Сардиния. Двойниковой осью этого закона служит нормаль к грани дипирамиды $(10\bar{1}2)$, составляющей со смежной с нею гранью дипирамиды $(10\bar{1}1)$ угол около 19° . Второй индивид в двойниках Сардиния может быть выведен из первого также поворотом на угол $64^\circ 50'$ вокруг оси симметрии второго порядка или на угол $86^\circ 4'$ вокруг нормали к грани дипирамиды $(10\bar{1}1)$. Вторая (обязательная) двой-

никовая ось в сростках Сардиния представлена вектором $[1101]$, совпадающим с ребром между смежными гранями основного ромбоэдра. Поэтому сростки Сардиния также представляют триаду, притом в следующем составе: $\perp(10\bar{1}2) + [1210] \perp [10\bar{1}]$.

Грани дипирамиды $(10\bar{1}2)$ развиты на кристаллах слабо и обычно даже отсутствуют, т. е. принадлежат к числу слабых, а это должно указывать и на относительно меньшую вероятность двойников по данному закону, тем более в условиях принудительного расположения меньшего кристалла на уже существующих гранях основной дипирамиды большего кристалла.



Фиг. 6. Схема двойника по закону Сардиния. Два случая первоначального соприкосновения кристаллов, когда их главные оси лежат в одной плоскости. 1а... 6а грани дипирамиды $(10\bar{1}2)$. Кристаллы А и Б, а также А и В сдвойникованы по нормали к грани 1а, а кристаллы А и Г—по нормали к грани 4а.

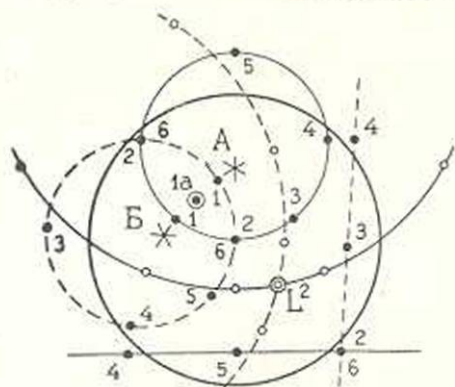


Фиг. 7. Схема первоначального соприкосновения кристаллов Б и В в двойнике Сардиния с гранями 2 и 3 основной дипирамиды кристалла А, смежными с осью симметрии, расположенной параллельно двойниковой плоскости 1а.

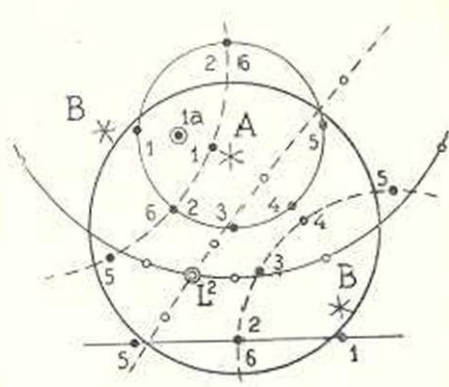
Если при первоначальной ориентировке кристаллов их главные оси располагаются в одной плоскости (фиг. 6), то начальное соприкосновение кристаллов может произойти либо по типу кристаллов А и Б или А и Г, либо же по типу кристаллов А и В. Во всех этих случаях взаиморасположение кристаллов будет неустойчивым, и для приведения его к полной устойчивости необходим поворот в первом случае на угол около 39° по отношению к грани 1, а во втором—на 12° по отношению к грани 4 кристалла А. После этих поворотов ориентировка закона Сардиния исчезает и заменяется ориентировкой по закону Эстерель, как у кристаллов Б и Г на фиг. 2.

Когда же главные оси не лежат в одной плоскости (фиг. 7), то соприкосновение кристаллов может произойти вначале лишь на гранях дипирамиды 2 или 3 кристалла А (соотношение для грани 5 такое же, как для грани 3, а для грани 6—как для грани 2). В первом случае (фиг. 7 и 8, кристаллы А и Б) меньший кристалл ляжет сразу же своей гранью 6 на параллельную ей грань 2 кристалла А, благодаря чему тип двойника не изменится. Во втором же случае (фиг. 7 и 9, кристаллы А и В) меньший

кристалл станет на грань 3 или 5 большего одной из вершин экваториального пояса. Поэтому он должен будет повернуться и ляжет на грань 3 кристалла А одной из четырех граней: 1, 2, 3 или 4. Если это будут грани 3 или 4, то окончательная ориентировка индивидов станет очень близкой к Японскому закону, если же будут грани 1 или 2, то окончательная ориентировка окажется близкой к Самшвильдо.



Фиг. 8. Стереографическая проекция сочетания кристаллов А и Б, по фиг. 7, на грань 2 кристалла А.



Фиг. 9. Стереографическая проекция сочетания кристаллов А и Б, по фиг. 7, на грань 3 кристалла А.

Таким образом, двойниковая ориентировка по закону Сардиния, если она даже и возникает у разобщенных кристаллов, должна будет в подавляющем большинстве случаев исчезнуть и смениться ориентировкой по закону Эстерель, а в остальных случаях—главным образом по законам Японскому и Самшвильдо, и лишь в небольшом числе случаев ориентировка типа Сардиния будет сохраняться и в окончательном сростке. Следовательно, двойниковый закон Сардиния должен быть у порфировых кварцев очень редким явлением, что вполне согласуется с результатами исследований. До сих пор редкость таких двойников не получала исчерпывающего объяснения.

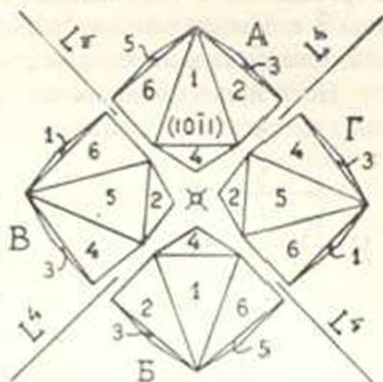
Закон Сардиния может представлять особый интерес, если его рассматривать совместно с законом Эстерель. Дело в том, что совместное двойникование по этим двум законам, если грани дипирамид $(10\bar{1}1)$ и $(01\bar{1}2)$ смежны и соответствуют одна положительному, а другая—отрицательному ромбоэдру, приводит к возникновению кубического блок-кристалла с общей симметрией пентагон триоктаэдра, в котором тройными осями служат главные оси четырех индивидов, а четверными осями—нормали к граням одного из основных ромбоэдров (фиг. 10 и 11). Возможность появления у кварца таких блок-кристаллов была выведена нами уже раньше [1].

в Японский двойниковый закон. У Японского двойникового закона его осью служит нормаль к грани дипирамиды $(12\bar{1}2)$, составляющая с главной осью кристалла угол в $47,7^\circ$. Второй индивид двойника может быть выведен из первого также поворотом на угол около $84,5^\circ$ вокруг нормали к грани призмы, или на угол около $140,7^\circ$ вокруг нормалей

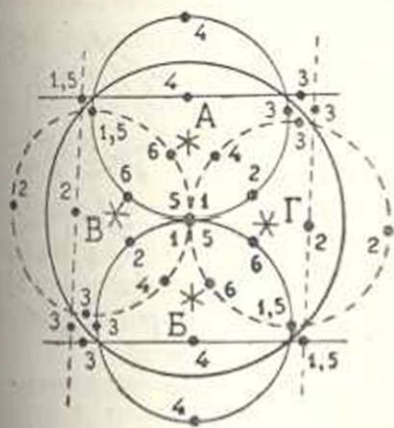
к двум смежным граням дипирамиды $(10\bar{1}1)$, или на угол около 109° вокруг нормалей к двум граням дипирамиды $(11\bar{2}1)$, при общем условии, чтобы все эти грани принадлежали одной зоне. Осью же этой зоны служит вектор типа $[\bar{2}113]$, перпендикулярный к двойниковой оси и почти совпадающий с нормалью к грани $(2\bar{4}25)$. Этот вектор представляет вместе с тем ту обязательную двойниковую ось, которая появляется при любом повороте вокруг нормали к грани дипирамиды $(10\bar{1}1)$.

В таких двойниках общая нормаль к совпадающим граням призм обоих кристаллов является псевдотетрагональной осью симметрии, а сам сросток, если он содержит четыре индивида, уподобляется, по общей симметрии, тетрагональному трапецеэдру (фиг. 12 и 13). Таким образом, сростки по Японскому закону подобны, по общей их симметрии, сросткам Эстерель, откуда можно сделать вывод, что они должны характеризоваться примерно одинаковым значением потенциальной энергии, а вместе с тем и одинаковой вероятностью возникновения.

Примером тетрагонального блок-кристалла, построенного по Японскому двойниковому закону, могут служить сложные сетчатые сростки



Фиг. 10. Схема кубического блок-кристалла кварца, образованного одновременным двойникованием по законам Эстерель и Сардиния. Индивиды А и Б, а также В и Г, сдвойникованы по закону Эстерель, А и В, а также Б и Г—по закону Сардиния, а индивиды А и Г, а также Б и В имеют взаиморасположение, очень близкое к закону Сардиния. Проекция на грань основной дипирамиды, перпендикулярную к четверной оси блока.



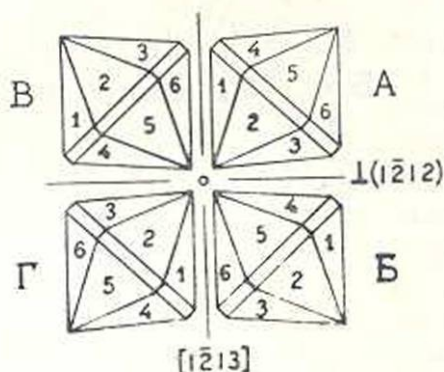
Фиг. 11. Стереографическая проекция кубического блок-кристалла, по фиг. 10, на ту же грань дипирамиды.

большого числа индивидов, описанные в статьях Д. П. Григорьева, И. И. Шаfranовского, П. Рамдора и др. [5, 7 и 8]. Эти примеры показывают, что при особо благоприятных условиях могут возникать по Японскому закону очень сложные блок-кристаллы, общая симметрия которых, в силу взаимопогашения неточностей, становится очень точной тетрагональной.

Можно полагать, что ведущим фактором при возникновении подобных сростков является стремление триады кварца $[10\bar{1}0] + [1\bar{2}13] + \perp (1\bar{2}12)$ к совмещению

сглавнейшей триадой полевого шпата $\perp (010) + [001] + \perp [001] \parallel (010)$. При этом главные оси кристаллов кварца располагаются по отношению к третьей оси полевого шпата как изогнутое коромысло весов по отношению к его точке опоры, благодаря чему совокупность энергетических полей приводится, надо полагать, к минимуму их потенциальной энергии.

Если при возникновении ориентировки по Японскому закону главные оси кристаллов располагаются точно в одной плоскости, то первоначальное их соприкосновение может происходить ребром к ребру (фиг. 12, кристаллы А и Б или А и В; фиг. 14, кристаллы А и Б), причем

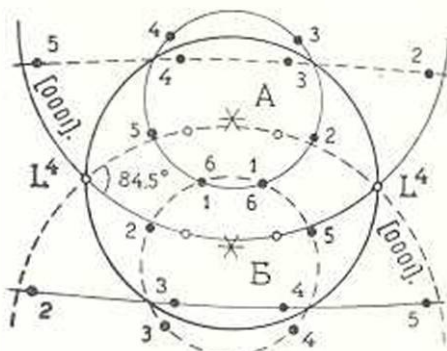


Фиг. 12. Схема тетрагонального блок-кристалла, образованного по Японскому закону. Проекция на плоскость общей грани призмы, перпендикулярную к четверной оси блока. Индивиды А и Б, а также В и Г, сдвойникованы по Японскому закону А и Г, а также Б и В — по закону нормали к грани призмы, а индивиды А и В, а также Б и Г — по закону ребра $[1213]$.

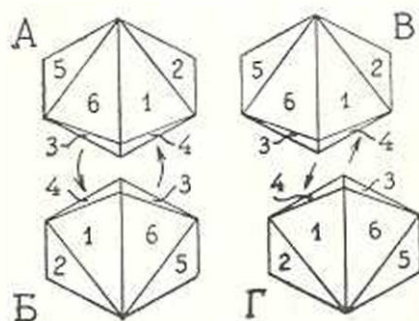
это будут ребра $[2\bar{1}13]$ между смежными гранями основной дипирамиды. В подобных условиях окончательное соприкосновение кристаллов будет совершаться, после некоторого их поворота, лежащими напротив друг друга гранями основной дипирамиды 3 и 4 (фиг. 13 и 14, кристаллы А и Б). Но после этого поворота сочетание кристаллов будет уже двойником не Японским, а Эстерель.

Если же при первоначальном соприкосновении кристаллов их главные оси будут лежать не вполне точно в одной плоскости, то окончательное соприкосновение

кристаллов, после небольшого их сдвига, произойдет наискось расположенными гранями основной дипирамиды 3 и 3 или 4 и 4, симметричными



Фиг. 13. Стереорафическая проекция Японского двойника содержащего индивиды А и Б, по фиг. 12, на плоскость перпендикулярную к двойниковой оси.



Фиг. 14. Схема возможного взаиморасположения индивидов в Японском двойнике. Проекция на плоскость, перпендикулярную к двойниковой оси. У кристаллов А и Б главные их оси в одной плоскости.

в каждой паре относительно двойниковой оси (фиг. 13; фиг. 14, кристаллы В и Г). В этом случае двойник остается Японским.

Наконец, когда меньший кристалл приближается к большему со стороны общей грани призмы (фиг. 14, кристаллы А и Г или Б и В), то окончательное устойчивое их соприкосновение может осуществиться только после очень значительного поворота, направление которого будет определяться, в основном, внешними причинами (влияние тяготения, движение струй расплава, механические препятствия и т. п.). В результате будет получаться совпадение граней дипирамиды 2 с 2, или 5 с 5, или 2 с 5 (фиг. 13 и 14). Могущие при этом возникнуть новые двойниковые ориентировки не представляется возможным предугадать теоретически.

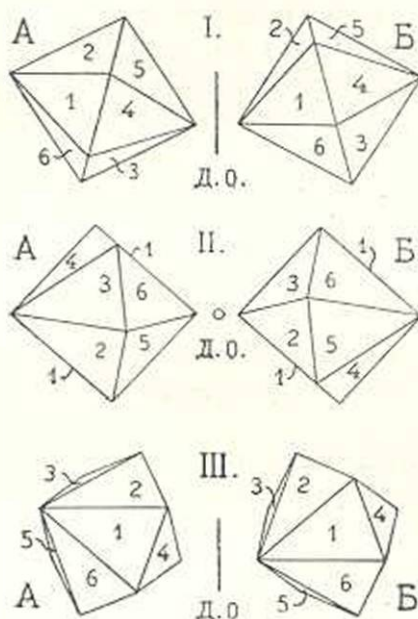
г. *Двойниковый закон Самшвилльдо*. Такого рода срастания, по видимому, не следует квалифицировать как самостоятельный закон, но для нашего исследования мы пока все же примем, что такой закон существует, и что соответствующие ему сrostки могут возникать в качестве самостоятельных образований. Можно принять, что и в этом типе срастаний индивиды будут приходить к ориентированному взаиморасположению еще до их соприкосновения, и что главные оси их будут стремиться к тому, чтобы располагаться в одной плоскости.

Второй индивид в сrostках Самшвилльдо может быть выведен из первого несколькими способами: поворотом на угол около $39,3^\circ$ вокруг нормали к грани основной дипирамиды, на угол в 90° вокруг нормали к грани (1215), на угол около $146,2^\circ$ около вектора, близкого к нормали к грани (2029), на угол $140,8^\circ$ около вектора, близкого к нормали к грани (1218), на $98,7^\circ$ около вектора, близкого к нормали к грани (2027), и на угол около $46,2^\circ$ вокруг вектора [1213]. Эти шесть векторов принадлежат все одной зоне, и среди них нет ни одного из тех двух, $[1\bar{2}10]$ и $[10\bar{1}0]$, главнейших в кристалле, которые фигурируют во всех, уже рассмотренных типах срастаний. Вместе с тем и двойниковая ось в сrostках Самшвилльдо иррациональна, представляя всего лишь только перпендикуляр к вектору [1213], параллельный грани основной дипирамиды.

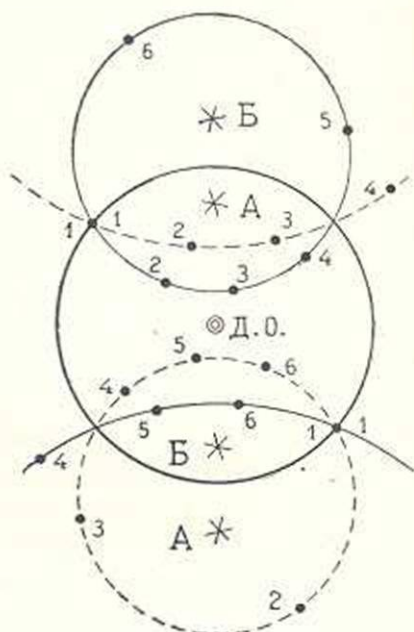
Таким образом, ориентировка Самшвилльдо представляет лишь геометрический двойник, а вместе с тем она вполне подобна, так называемым, сложным законам плагиоклаза, как, например $\perp [100] \parallel (010)$, $\perp [001] \parallel (010)$ и т. п., представляющим третий компонент триад, не играющий в них самостоятельной роли. У кварца аналогичная триада имеет следующий вид $\perp (10\bar{1}1) + [\bar{2}113] + \perp [\bar{2}113] \parallel (10\bar{1}1)$, где первые два компонента, играющие главную роль, представлены двойниковыми осями законов Эстерель и Японского.

При ориентировке Самшвилльдо первоначальное соприкосновение кристаллов будет осуществляться почти всегда вершиной одного к грани другого, т. е. будут возникать крайне неустойчивые положения (фиг. 15). Для приведения их к устойчивости требуются почти во всех случаях очень значительные повороты кристаллов, а это, за редкими исключениями,

приводит к изменению типа срастания. Чтобы выяснить все возможные варианты окончательных устойчивых взаиморасположений кристаллов, составлена стереографическая проекция сростка Самшвилдо на плоскость, перпендикулярную к двойниковой оси, а вместе с тем и к параллельным друг другу гранями 1 и 1 основной дипирамиды обоих кристаллов (фиг. 16).



Фиг. 15. Схема взаиморасположения индивидов в сростке типа Самшвилдо. I—главные оси кристаллов в одной плоскости; проекция на плоскость, параллельную главным осям и двойниковой оси. II—проекция на плоскость, перпендикулярную к двойниковой оси; главные оси кристаллов в одной плоскости. III—проекция на плоскость параллельных друг другу граней дипирамиды I и I.



Фиг. 16. Стереографическая проекция сростка Самшвилдо на плоскость, перпендикулярную к двойниковой оси. Параллельные друг другу грани основной дипирамиды обоих кристаллов обозначены номером 1. Нумерация кристаллов и их граней та же, как и на фиг. 15.

Первый вариант. Главные оси кристаллов лежат в одной плоскости, и первоначальное соприкосновение может произойти либо вершиной граней 2—3—5—6 кристалла Б к ребру граней 2 и 3 кристалла А, или такой же вершиной кристалла А к ребру граней 5 и 6 кристалла Б, либо главной вершиной дипирамиды кристалла Б к ребру граней 5 и 6 кристалла А, или же, наконец, главной вершиной кристалла А к ребру граней 2 и 3 кристалла Б (фиг. 15, 16). Во всех этих случаях кристаллы после значительного поворота приходят к совершенно новой ориентировке, в большинстве к параллельной, и гораздо реже—к положению Японского двойника, как к наиболее устойчивым при условии, что главные оси кристаллов располагаются либо более или менее параллельно, либо перпендикулярно друг другу.

Второй вариант. Главные оси кристаллов не лежат в одной плоскости, в связи с чем второй индивид, кристалл Б, первоначально прикасается к той или иной грани кристалла А. По числу граней дипирамиды возможны шесть случаев (фиг. 15, 16).

Случай 1. Кристалл Б приходит в соприкосновение с гранью 1 кристалла А, притом параллельной ей своей гранью 1. Поэтому кристалл Б получает сразу же устойчивое положение, и тип двойникового срастания не меняется.

Случай 2. Кристалл Б соприкасается с гранью 2 кристалла А, притом обязательно вершиной граней 1—2—4—5. Для приведения к устойчивому положению кристалл Б должен лечь на грань 2 кристалла А одной из указанных выше граней. Наименьший поворот требуется при этом для грани 2, около 30° , для других же граней требуются повороты на углы, превышающие 40° . После поворота главные оси кристаллов будут составлять очень малый угол друг с другом, в связи с чем наиболее вероятной окончательной ориентировкой кристаллов должна быть параллельная.

Случай 3. Соприкосновение кристалла Б с гранью 3 кристалла А. Осуществляется оно вершиной граней 2—3—5—6, одной из которых кристалл Б должен лечь на грань 3 кристалла А. Требующийся для этого поворот будет наименьшим для граней 2 и 3, но и он не меньше 40° , в связи с чем кристаллы должны прийти к совершенно новой взаимной ориентировке, и таковая будет, вероятнее всего, параллельной.

Случай 4. Первоначальное соприкосновение кристаллов осуществляется на грани 4 кристалла А, притом обязательно вершиной граней 3—4—1—6. Здесь единственно вероятным является совмещение грани 3 кристалла Б с гранью 4 кристалла А, но положение оси соответствующего поворота и его направление остаются неопределенными. Поэтому не исключена возможность того, что тип срастания не изменится, но более вероятна полная перестройка, с переходом кристаллов к параллельной или иной, настолько же устойчивой ориентировке.

Случай 5. Кристалл Б приходит в первоначальное соприкосновение с гранью 5 кристалла А, притом главной вершиной дипирамиды. Приведение кристалла Б к устойчивому положению совершается, вероятнее всего, совмещением его грани 4 с гранью 5 кристалла А, для чего требуется поворот на угол около 20° . После поворота кристаллы могут оказаться в параллельном положении, но не исключено и то, что сохранится прежний тип ориентировки.

Случай 6. Соприкосновение кристалла Б с кристаллом А происходит на грани 6 второго, притом главной вершиной дипирамиды кристалла Б. Наиболее вероятным является в этом случае совмещение граней 6 и 6 кристаллов, для чего требуется угол поворота не менее 30° . Окончательная ориентировка будет, повидимому, такой же, как и в случае 5.

Таким образом, в подавляющем большинстве случаев, т. е. когда главные оси кристаллов должны лежать в одной плоскости, ориентировка по типу Самшвилю не может сохраниться. В остальных же случаях, когда главные оси не лежат в одной плоскости, ориентировка Самшвилю

до тоже в большинстве случаев должна будет замениться какой-либо другой. Следовательно, подобная ориентировка, если бы она даже и возникала в качестве самостоятельной, не могла бы сохраниться в окончательно сформированных сростках в сколько-нибудь значительном числе случаев, так как при любом варианте первоначального соприкосновения кристаллов требуются, для приведения их к устойчивому взаимному расположению, столь значительные повороты, что ориентировка эта безусловно должна исчезнуть и замениться иными, гораздо более устойчивыми ориентировками: параллельной или по двойниковым законам Эстерель и Японскому.

Для общей характеристики сростаний по типу Самшвилюдо очень интересные материалы имеются в статье самого Г. Г. Леммлейна [6]. Вероятность возникновения таких сростков он определяет в 3,3%, при точности взаимной ориентировки кристаллов в $\pm 3^\circ$. Между тем статистика сростков, приведенная им, дает совершенно иную картину. Так, для месторождения Самшвилюдо 40% случаев представлены параллельными сростками, и если 1118 сростков по законам Эстерель и Вёрешпатак (Японскому) охватывают даже почти все остающиеся 60%, то 15 сростков Самшвилюдо составят всего лишь около 0,8%, т. е. в четыре раза меньше, чем подсчитанная для них вероятность. Для месторождения Кафан соотношение будет, повидимому, тем же, так как отношение числа случаев сростаний по законам Эстерель и Вёрешпатак к числу случаев Самшвилюдо в этом месторождении такое же, как и в месторождении Самшвилюдо, а именно: $(37+581) : 15 \approx (130+145) : 4$. Далее, для месторождения Корнүэльс $600+300+15$ случаев сростков Эстерель, Вёрешпатак и близких к Самшвилюдо составляют не более 50%, откуда вытекает, что 15 сростков Самшвилюдо (или близких к ним) дадут никак не более 0,8%. Таким образом, для трех месторождений получается совершенно одинаковая частота сростков этого типа, и везде она намного ниже той вероятности, которая была выведена Г. Г. Леммлейном.

Более благоприятная картина получается у Г. Г. Леммлейна в его подсчетах частоты отпечатков, но такой метод решения задачи ошибочен, так как частота отпечатков является прежде всего обратной функцией прочности сростков, а следовательно и их вероятности. В силу этого и получается то, что для параллельной ориентировки мы имеем в числе сростков до 40—50%, в числе же отпечатков—не более 28%. Для ориентировки же Самшвилюдо имеется почти 6% в отпечатках и всего лишь только 0,8% в числе сростков.

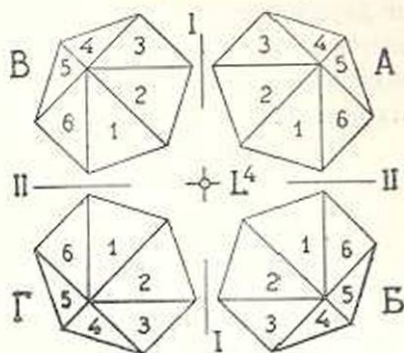
Сравнивая сростки Самшвилюдо с Эстерель и Японскими, можно установить еще следующее различие. Сростки Эстерель и Японские представляют точные триады и вместе с тем тетрагональные блок-кристаллы с приближенной симметрией тетрагонального трапецоэдра, что может служить достаточно надежным показателем их большой устойчивости. При этом у сростков Эстерель тетрагональной осью служит общая для обоих кристаллов ось симметрии второго порядка, а в Японских двойниках—нормаль к общей грани призмы, т. е. в обоих случаях важнейшие

векторы кристаллов. Ориентировка же по типу Самшви́льдо представляет только лишь геометрический двойник, т. е. сросток с иррациональной двойниковой осью, являющейся не самостоятельным компонентом в триаде законов Эстерель и Японского.

Правда, ориентировка Самшви́льдо также содержит в себе элемент тетрагональности, и тетрагональной осью может служить здесь нормаль к грани $(\bar{1}2\bar{1}5)$, так как зоны $[(0001) : (2115)]$ и $[(0001) : (1125)]$ пересекаются под прямым углом. В подобном тетрагональном блок-кристалле главными осями симметрии второго порядка служат перпендикулярные друг к другу пучки совпадающих нормалей к грани призмы одного из кристаллов и к грани $(\bar{1}2\bar{1}1)$ другого (фиг. 17). Но для возникновения такого блок-кристалла необходимо, чтобы двойниковой осью сделалась также и нормаль к грани $(\bar{1}2\bar{1}5)$, а это неминуемо вызывает двойникование и по нормали к грани $(\bar{1}2\bar{1}1)$, т. е. по закону Брейтгаупта. Вместе с тем это превращает нормаль к грани призмы в тетрагональную ось. В таком „соревновании“ победа едва-ли будет на стороне ориентировки Самшви́льдо. Кроме того, двойникование по нормали к грани $(\bar{1}2\bar{1}5)$ вообще мало вероятно, так как оно очень легко перестраивается на более устойчивое срастание готовых кристаллов по Японскому закону $\perp(\bar{1}2\bar{1}2)$.

Основываясь на всем сказанном, мы приходим к выводу, что ориентировку Самшви́льдо не следует считать самостоятельным двойниковым законом. Те, относительно очень немногочисленные случаи такого рода срастаний, которые наблюдаются в природе, объясняются вполне удовлетворительно как следствие искажения первоначальных сочетаний кристаллов по законам Эстерель, Японскому и Сардиния в процессе принудительного приведения одного из кристаллов к окончательному устойчивому расположению на поверхности другого.

Пытаясь доказать «правомерность» ориентировки Самшви́льдо, Г. Г. Леммлейн приводит построение плоской сетки на грани дипирамиды и некоторые расчеты, которые должны показать, что при ориентировке Самшви́льдо якобы возникает комплицированная сетка совпадающих узлов плоских сеток одного и другого кристалла. Мы считаем все это мало убедительным, так как, во-первых, узлы сеток не обладают той симметрией, которая необходима для возникновения комплицированной сет-



Фиг. 17. Схема возможного тетрагонального блок-кристалла из четырех индивидов при повторном двойниковании по типу Самшви́льдо. Тетрагональная ось совпадает с нормалью к грани $(\bar{1}2\bar{1}5)$. У кристаллов А и Б параллельны друг другу грани основной дипирамиды 2 и 2, а двойниковая их ось—I—I. То же у кристаллов В и Г. У кристаллов А и В параллельны друг другу грани основной дипирамиды 1 и 1, а двойниковая их ось—II—II. То же у кристаллов Б и Г.

ки, во-вторых, даже при очень малом отклонении от теоретического угла поворота одной сетки относительно другой отпадает всякая возможность точного совпадения каких бы то ни было рядов сеток, и, в-третьих, если равенство или кратность параметров сеток лишь приблизительные, но не абсолютно точные, то динамическое взаимодействие двух сеток, даже при точном совпадении в них каких-либо рядов, должно приводить не к резонансу или гармонии, а к возникновению биений и к диссонансу, которые едва ли могут способствовать понижению потенциальной энергии в системе двух решеток. Слабой стороной этих построений Г. Г. Леммлейна является также и то, что в них нет ничего, кроме чистой геометрии, а этого, безусловно, недостаточно для решения сложных энергетических взаимоотношений, возникающих при срастаниях кристаллов.

Поэтому мы полагаем, как было указано выше, что ориентировку Самшвилдо не следует считать самостоятельным двойниковым законом.

В ы в о д ы

Критический анализ условий образования двойниковых сростков порфировых кварцев, протекающего в специфической обстановке принудительного (единственно возможного) срастания кристаллов только граниами их основной дипирамиды, приводит к следующим окончательным выводам.

1. Параллельная ориентировка, возникающая у разобценных, первоначально, кристаллов, не нарушается после их соприкосновения и приведения к окончательному устойчивому положению одного на другом. Параллельная ориентировка возникает в окончательном положении также и тогда, когда кристаллы, в силу неустойчивости их взаиморасположения при первоначальном соприкосновении, приходят к такому новому взаиморасположению, при котором их главные оси оказываются более или менее параллельными друг другу.

2. Ориентировка по двойниковому закону Эстерель в большинстве случаев не подвергается нарушению. Лишь в очень небольшом числе случаев она может заменяться в окончательном положении кристаллов ориентировками по законам Японскому или Сардиния.

3. Первоначальная ориентировка по закону Сардиния в подавляющем большинстве случаев не сохраняется при окончательном устойчивом соприкосновении кристаллов и заменяется преимущественно законом Эстерель и в небольшой степени законом Японским. Лишь в очень редких случаях ориентировка по закону Сардиния может сохраниться как таковая.

4. В сочетаниях кристаллов по Японскому закону ориентировка частью сохраняется, частью же заменяется ориентировкой Эстерель, но в ряде случаев она может сменяться другими положениями, предопределять которые теоретически не представляется возможным ввиду большого угла поворота кристаллов при их приведении к окончательному устойчивому взаиморасположению.

5. Ориентировка по типу Самшвильдо, если бы таковая даже и возникла самостоятельно (т. е. при разобщенном состоянии кристаллов), может сохраниться только в относительно очень редких случаях, в подавляющем же большинстве она неминуемо исчезает и заменяется ориентировкой либо параллельной, либо по законам Японскому или Эстерель. Немногочисленные случаи срастаний по типу Самшвильдо, наблюдающиеся в природе, могут быть объяснены вполне удовлетворительно как результат искажения первоначальных сочетаний кристаллов по законам Эстерель, Японскому и Сардиния в процессе принудительного срастания кристаллов гранями основной дипирамиды.

Основываясь на этих выводах, можно дать следующую формулу вероятной частоты окончательно сформированных сростков разных типов:

Параллельные сростки $\geq$ Эстерель $>$ Японский закон $\gg$ сростки Самшвильдо и Сардиния.

Степень же вероятности возникновения этих типов ориентировок кристаллов при их еще разобщенном состоянии должна быть дана в виде существенно иной формулы:

Параллельные сростки $\geq$ Эстерель $\approx$ Японский закон $>$ Сардиния $\gg$ Самшвильдо.

Здесь основанием для признания равной вероятности ориентировок Эстерель и Японской служит то, что они обе приводят к образованию блок-кристаллов, имеющих общую симметрию тетрагонального трапецоэдра, параллельные же сростки обладают, как и сами кристаллы высокотемпературного кварца, общей симметрией гексагонального трапецоэдра.

Первая наша формула в общем совпадает с формулой Г. Г. Леммлейна, предложенной им для «выживших» сростков ([6], стр. 141). Вторая же формула отличается существенно от всех тех формул Г. Г. Леммлейна, которые должны показывать степень вероятности разных сочетаний кристаллов. Как у Г. Г. Леммлейна, так и у нас формулы реальной и вероятной частоты тех или иных сочетаний не совпадают. Проведенный нами анализ показывает достаточно ясно и убедительно причину таких расхождений, между тем как у Г. Г. Леммлейна эта сторона вопроса осталась не решенной, в частности для закона Сардиния (стр. 141). Этим подтверждается действительное значение фактора принудительности той или иной окончательной ориентировки при срастаниях кристаллов обязательно гранями, принадлежащими только некоторым определенным формам. У порфировых кварцев такой формой является основная дипирамида.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

Поступило 19 VI 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Варданянц Л. А., Триада теория двойниковых образований минералов. Издание АН Армянской ССР, 1950.
2. Варданянц Л. А., Комплексные двойники плагиоклаза. Издание АН Армянской ССР, 1952.

3. Варданянц Л. А. Теория поворотов кристалла в двойниках. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том. V, № 4, 1952.
4. Варданянц Л. А. Ревизия кубо-октаэдрического двойникового закона алюмокалиевых квасцов. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том V, № 6, 1952.
5. Григорьев Д. П. и Шафрановский И. И. Эпитаксическое нарастание кварца на полевой шпат. Записки Всерос. минералогич. Общ., часть 75, № 4, 1946.
6. Леммлейн Г. Г. О закономерных срастаниях порфировых кварцев на граните (1011). Труды Лаборат. кристаллографии АН СССР, вып. 2, 1940.
7. Шафрановский И. И. и Осадчев Б. Я. О закономерном срастании кристаллов кварца из тектонической брекчии Волыни. Минералог. сборник Львовского геологич. Общ., № 4, 1950.
8. Ramdohr P. Eine Fundstelle von Berillium-Mineralien im Gebiet der kleinen Spitzkoppe, Südwestafrika, und ihre Paragenesis. Neues Jahrb. f. Min., Geol. und Pal., B.—B., Abt. A, Bd. 76, Hft. 1, 1940.

Լ. Ա. Վարդանյանց

ՊՈՐՓԻՐԱՅԻՆ ԿՎԱՐՑԵՐԻ ԿՐԿՆԱԲՅՈՒՐԵՂԱՑՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հոգիվածում հեղինակը քննադատության է ենթարկում որոշ դիտնականների պատկերացումները պորֆիրային կվարցների կրկնարյուրեղացման ձևերի և օրենքների մասին:

Պորֆիրային կվարցների բյուրեղները սովորաբար հեկսագոնալ դիպիրամիդային են (հիմնական դիպիրամիդա): Բյուրեղները ստանում են այս կամ այն օրինաչափ կողմնորոշումն այն ժամանակ, երբ նրանք դեռ չեն հալվում, ընդորոշում դա կարող է լինել կամ դուրահեռ, և կամ թե որևէ կրկնարյուրեղային կողմնորոշում:

Առաջին դեպքում բյուրեղներն արդեն սկզբնական հալման ժամանակ անմիջապես ստանում են վերջնական կայուն դիրք, ընդորոշում սկզբնական կողմնորոշման ձևը չի փոխվում:

Նրկորող դեպքում բյուրեղներն սկզբնական հալման ժամանակ սովորաբար ստանում են անկայուն դիրք: Կայուն դիրք ստանալու համար բյուրեղներից մեկը և կամ երկուսն էլ պիտի դառնան որոշ անկյամբ: Դրա հետևանքով սկզբնական կողմնորոշումը խախտվում է և նրա փոխարեն առաջանում է մի նորը, ընդորոշում կրկնարյուրեղային կողմնորոշումների որոշ ձևերը՝ օրինակ ըստ Սարգինիայի օրենքի՝ կարող են լինել կամ գրեթե լիովին կորչել:

Հետևաբար՝ օրինաչափ կողմնորոշումների այն հաճախականությունը, որը դիտվում է պորֆիրային կվարցների մոտ, չի կարող որոշել տարբեր կողմնորոշումների իսկական հավանականությունը, սակայն ցույց է տալիս լուրջ սկզբնական (այսինքն ամենահավանական) կողմնորոշումների կանոնավոր կերպով կատարվող խախտման հետևանքը՝ բյուրեղների իրար հետ հիմնական դիպիրամիդային կողերի միջոցով ստիպողական միակցման ընթացքում:

Սրա հիման վրա հեղինակը եզրակացնում է, որ՝

ա) որոշ օրինաչափ կողմնորոշումների համար Գ. Ք. Լեմմլեյնի կողմից արտածած հավանականությունը իրականության չի համապատասխանում, և բ) կրկնարյուրեղային, ըստ Գ. Ք. Լեմմլեյնի, Սամվիլիդո միակցման ձևը չի կարող համարվել անկախ օրենք, քանի որ դա լուրջ երկրաչափական կրկնակ է իրացրեցող առանցքով:

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

М. З. Симонов

Вопросы расчета прочности бетонов

1. Влияние плотности цементного камня на прочность бетона

Распределение напряжений, возникающих в бетоне от приложения внешних сил, будет происходить по различным схемам в зависимости от вида заполнителей, размеров зерен и взаимного расположения их между собой, в зависимости от качества цементного камня и прочности его сцепления с частицами заполнителя, в зависимости от размеров, распределения по сечению и общего объема пор в бетоне и, наконец, в зависимости от собственных напряжений в бетоне.

Напряжения в бетоне будут концентрироваться на его компонентах с высокими модулями упругости. Но даже не находясь под действием нагрузок, на поверхностях спайки цементного камня с заполнителем может иметь место напряженное состояние в результате усадочных и температурных явлений. Поэтому под воздействием внешних сил, прилагаемых с той или иной интенсивностью, напряжения, возникающие в различных точках бетона, будут приближаться к своим критическим значениям различными темпами.

Известно, что прочность цементного камня и пористых заполнителей зависит от их плотности. Можно показать, что когда пористость материала заполнителей близка к нулю, т. е. при плотных заполнителях, прочность бетона с достаточной для практики точностью однозначно определяется плотностью цементного камня в нем.

Действительно, используем закономерность Ферре, выражаемую формулой:

$$R_0 = k \left(\frac{c}{c+v+p} \right)^2, \quad (1)$$

где R_0 — прочность бетона (раствора) на сжатие,

k — коэффициент, зависящий от качества цемента и заполнителей, c, v и p — абсолютные объемы в бетоне цемента, воды и воздушных пор.

Распространяя эту закономерность как на бетоны, так и на растворы, можно заключить, что при одинаковой плотности цементного теста в бетоне и растворе, прочности их должны быть равны. Из этого следует, что при плотности бетона равной плотности цементного раствора при стандартных испытаниях цемента, предел прочности бетона на сжатие должен равняться марке цемента. При-

мом во внимание, что коэффициент „k“ в выражении (1) совмещает в себе влияние нескольких факторов, главными из которых являются качество цемента и качество заполнителя. Заменим коэффициент „k“ соответственно двумя коэффициентами α и β , из которых первый будет учитывать влияние качества заполнителя, а второй—влияние качества цемента. Примем во внимание также, что из сущности высказанной выше закономерности следует, что прочность бетона правильнее рассматривать как функцию не плотности цементного теста, а плотности цементного камня. Обозначая абсолютный объем цемента в затвердевшем бетоне, т. е. цементного камня через c_k , выражение (1) можем написать в следующем виде:

$$R_b = \alpha\beta \left(\frac{c_k}{c+v+n} \right)^2, \quad (2)$$

или

$$R_b = \alpha\beta\delta^2, \quad (3)$$

где $\delta = \frac{c_k}{c+v+n}$ — плотность цементного камня в бетоне.

Значение коэффициента β определим исходя из высказанных ранее соображений.

Активность цемента представляет собой прочность раствора на нормальном (вольском) песке. Методы приготовления, хранения и испытания образцов из стандартного цементного раствора, равно, как и качество песка, применяемого при изготовлении раствора для установления активности цемента, точно регламентированы.

Поэтому пользуясь выражением (3) и принимая значение коэффициента $\alpha = 1$ можем для прочности стандартного цементного раствора (активности цемента) написать:

$$R_a = \beta\delta_p^2, \quad (4)$$

где δ_p — плотность цементного камня в стандартном цементном растворе.

Из (3) и (4) получим:

$$R_b = \alpha \frac{R_a \delta^2}{\delta_p^2}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что, как указывалось выше, при равных плотностях цементного камня в бетоне и стандартном цементном растворе, т. е. при $\delta = \delta_p$ и при $\alpha = 1$ будет иметь место равенства прочности бетона и активности цемента.

Располагая значениями δ_p и δ и зная марку цемента, можно определить прочность бетона по формуле (5).

Формула (5) может быть упрощена путем введения в нее среднего значения плотности цементного камня в стандартных растворах (в трамбованных образцах).

Это значение плотности цементного камня может быть вычислено, если принять во внимание нижеследующие колебания в составе растворов. Удельный вес цемента колеблется в пределах от 3,0 до 3,1. Удельный вес нормального песка—2,65. Нормальная густота

$$\text{раствора—от } \frac{25}{4} + 1 = 7,25\% \text{ до } \frac{30}{4} + 1 = 8,5\%.$$

Расход воды на сухой замес стандартного раствора весом 4 кг составит от $\frac{7,25 \cdot 4}{100} = 0,290$ кг до $\frac{8,5 \cdot 4}{100} = 0,340$ кг.

Среднее значение объема воздушных пор в стандартных растворах, в соответствии с результатами опытной проверки, составляет 6%.

Значение плотности цементного камня в стандартных растворах вычисляются согласно данным, приведенным в табл. 1.

Таблица 1

Данные для расчета плотности цементного камня в стандартных растворах

Пропорция исходных материалов	Абсолютные объемы на 1 замес в л		Абсолютные объемы на 1 м ³ раствора в л	
	от	до	от	до
Цемент 1 кг	0,323	0,333	174	173
Нормальный песок 3 кг	1,131	1,151	610	590
Вода от 7,25 до 8,5%	0,290	0,340	156	177
Воздушные поры 6 %	0,111	0,115	60	60

Принимая во внимание данные табл. 1 и учитывая, что коэффициент увеличения абсолютного объема гидратированного цемента в 28-дневном возрасте должен быть принят 1,55 [1] можно вычислить предельные значения плотности цементного камня в стандартных растворах.

Значения их составят:

$$\text{от } \delta_p^2 = \left(\frac{174 \cdot 1,55}{174 + 150 + 60} \right)^2 = 0,48,$$

$$\text{до } \delta_p^2 = \left(\frac{173 \cdot 1,55}{173 + 177 + 60} \right)^2 = 0,43.$$

Примем среднее значение

$$\delta_p^2 = 0,45.$$

Подставляя в (5), получим:

$$R_0 = \alpha \frac{R_u}{0,45} \delta^2. \quad (6)$$

По сравнению с (5) формула (6) более удобна в том отношении,

что для расчета прочности бетона по ней необходимо знать только активность цемента и плотность бетона.

Формула (6) позволяет определить прочность бетона, состав которого уже имеется.

Для использования при проектировании составов бетона формула (6) может быть видоизменена следующим образом.

Плотность цементного камня в бетоне (δ) может быть вычислена, имея расходы цемента и воды и приняв во внимание объем воздушных пор в уплотненном бетоне.

Объем воздушных пор в свежесжатом бетоне составляет не более 2% от его объема, т. е. около 20 л/м³ [2]. Отношение объема воздушных пор к объему цементного теста определится из следующего расчета. Расход цемента для различных марок бетона можно принять от 200 до 500 кг/м³ и расход воды—от 150 до 220 л/м³. Тогда, расход цементного теста на 1 м³ бетона составит от $\frac{200}{3,1} + 150 = 215$ л до $\frac{500}{3,1} + 220 = 381$ л. Соответственно, отношение объема воздушных пор (n) к объему цементного теста составит:

$$\text{от } \frac{n}{c+v} = \frac{20}{215} = 0,0930,$$

$$\text{до } \frac{n}{c+v} = \frac{20}{381} = 0,0525.$$

Среднее значение составит:

$$\frac{n}{c+v} = 0,073.$$

Принимая во внимание найденные значения, а также то, что абсолютный объем цементного камня находится из выражения $C_k = 0,5 \cdot c$ [1], где c —вес цемента в кг на 1 м³ бетона, можно написать новое выражение для определения плотности цементного камня в бетоне.

$$\delta^2 = \left(\frac{c_k}{c+v+n} \right)^2 = \left[\frac{0,5c}{\frac{c}{3,1} + v + \left(\frac{c}{3,1} + v \right) \cdot 0,073} \right]^2 = \left[\frac{0,5c}{\left(\frac{c}{3,1} + v \right) \cdot 1,073} \right]^2,$$

или

$$\delta^2 = 0,22 \left(\frac{3,1 \frac{c}{v}}{3,1 + \frac{c}{v}} \right)^2.$$

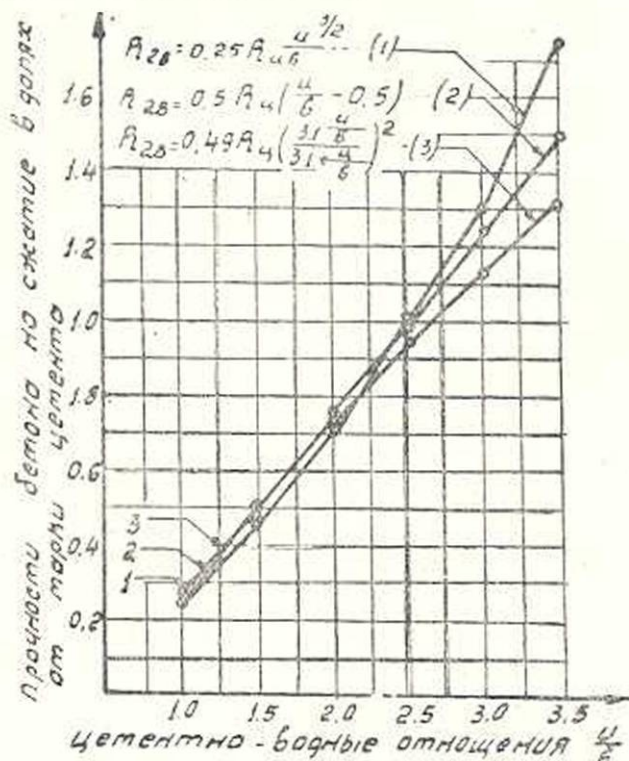
Подставляя найденное значение в (6), получим:

$$R_b = 0,49 \cdot R_n \left(\frac{3,1 \frac{c}{v}}{3,1 + \frac{c}{v}} \right)^2. \quad (7)$$

Формула (7) может быть использована для расчета состава бетона, а формула (6)—для проверки и уточнения рассчитанного состава бетона.

Формула (7) приведена в книге автора и К. С. Завриева [15], но с несколько меньшим значением коэффициента перед α , чем здесь, поскольку при выводе ее в то время автором значение плотности цементного камня в стандартном растворе было принято не среднее, а наибольшее, что приводило к излишним запасам.

На фиг. 1 показаны кривые, построенные по формуле (7) и по формулам, применяемым на практике.



Фиг. 1. Прочности бетона на сжатие в долях от марки цемента, вычисленные по различным расчетным формулам.

На фиг. 1 видно, что выведенная при принятом допущении формула (7) подтверждается известными расчетными формулами, основанными на многочисленных экспериментальных данных, за исключением участков при $\frac{Ц}{В} = 2.5$ и выше.

Но имеющиеся в литературе указания о том, что расчетные формулы дают преувеличенные значения прочности бетонов над фактическими, имеют в виду именно участки с цементноводными отношениями свыше 2.5. Этим самым полностью подтверждается и приня-

тая при выводе формулы (7) предпосылка о зависимости прочности бетонов на обычных заполнителях от плотности цементного камня.

2. Общие закономерности, связывающие прочность бетонов и входящих в них материалов

То обстоятельство, что установление численного выражения зависимости прочности обычного бетона от плотности цементного камня привело к формуле (7), совпадающей по своим результатам с эмпирическими формулами, свидетельствует о том, что в обычных бетонах влияние других факторов, в том числе и прочности заполнителей, на прочность бетонов сказываются незначительно. Объяснение этому можно дать исходя из третьей гипотезы прочности Б. Г. Скрамтаева [3], подтвержденной результатами опытов Н. В. Свечина [4] и единой теории Я. Б. Фридмана [5].

Согласно третьей гипотезе прочности, разрушение бетона происходит от разрыва при поперечном расширении. При этом могут быть три случая:

- разрушение произойдет вследствие разрыва по цементному камню;
- разрушение произойдет из-за нарушения сцепления между цементным камнем и заполнителем;
- разрушение произойдет вследствие разрыва самих зерен заполнителя.

Поскольку прочность обычных бетонов, как вытекает из выражения (7), зависит только от качества цементного камня, то исходя из сказанного приходим к выводу, что в этих бетонах разрыв происходит по цементному камню, как по наиболее слабому месту и что в них прочность при растяжении цементного камня всегда меньше, чем прочность при растяжении заполнителя.

В таком случае ясно, что в обычных бетонах прочность заполнителя свыше некоторого значения не будет отражаться на прочности бетона, как бы велика не была эта прочность.

Второй случай разрушения обычного бетона, когда происходит не разрыв цементного камня, а отрыв его от заполнителя, следует считать не типичным.

Как показывают опыты, проведенные совместно с Т. Г. Матузовым [6], такое явление, например, может иметь место при обсидиановом заполнителе со стекловидной поверхностью, неприменяемой на практике (фиг. 2).

Если разрушение бетонов на плотных заполнителях хорошо объясняется исходя из третьей гипотезы прочности, то тем более не должно быть оснований для отказа от этой гипотезы прочности при объяснении разрушения бетонов на пористых заполнителях.

Б. Г. Скрамтаев считает, что наиболее применимой к легким бетонам является первая его гипотеза прочности, основанная на допущении распределения нормальных напряжений между цементным камнем и заполнителем пропорционально их модулям упругости.

По мнению автора, допущение, положенное в основу первой гипотезы, приемлемо для изучения упругих свойств и напряженного состояния легкого бетона в промежуточных стадиях его загрузки. В предельном же состоянии, как это подтверждает и картина разрушения образцов из легкого бетона, причиной их разрушения следует считать разрыв при поперечном расширении от сжатия. Иначе говоря, исходя из третьей гипотезы прочности следует объяснить разрушение как обычного, так и легкого бетонов. Однако, в отличие от обычного бетона, прочность пористого заполнителя на растяжение может оказаться меньше прочности на растяжение цементного камня или меньше прочности его сцепления с заполнителем. Вообще случаи разрушения бетонов от недостаточного сцепления цементного камня с заполнителем в легких бетонах следует считать исключенным, тем более, что даже в обычных бетонах этот случай является достаточно редким.

А. И. Ваганов для объяснения разрушения легкого бетона также принимает третью гипотезу прочности, но при этом он считает необходимым учитывать не прочности раствора (скелета) и заполнителя, а характеристики их предельной растяжимости [7]. Исходя из того, что предельная растяжимость заполнителя есть величина постоянная, а предельная растяжимость скелета увеличивается с увеличением его прочности, А. И. Ваганов намечает две фазы: первую, на протяжении которой предельная растяжимость раствора (ϵ_p) меньше, чем предельная растяжимость заполнителя (ϵ_z), и вторую, когда $\epsilon_p > \epsilon_z$.

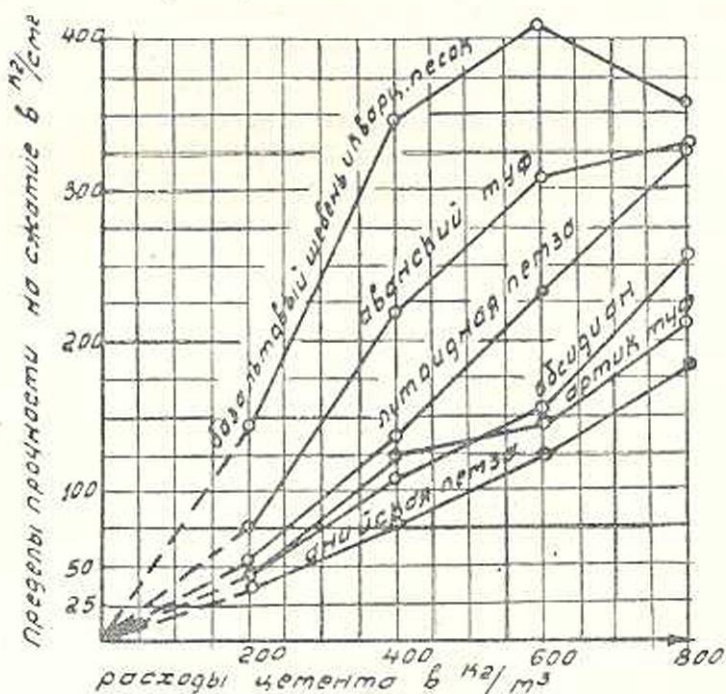
Исходя из этого А. И. Ваганов приходит к выводу, что в течение первой фазы должно иметь место интенсивное нарастание прочности легкого бетона и в течение второй фазы — сильное замедление нарастания его прочности.

Рассмотрение кривых прочностей бетонов и растворов, изготовленных в сравниваемых условиях на различных заполнителях (фиг. 2) показывает наличие первой фазы, т. е. интенсивный рост прочности легких бетонов даже при таких больших расходах цемента, свыше которого теряется практический интерес. Из этого можно заключить, что случаи, когда $\epsilon_p > \epsilon_z$ не являются характерными, а из этого следует, что вместо характеристик деформаций можно рассматривать прочностные характеристики цементного камня и пористого заполнителя.

В соответствии со сказанным, прочность легкого бетона при цементном камне одинаковых качеств будет равна прочности обычного бетона только в случае высокой прочности пористых заполнителей, когда разрыв при поперечном расширении опять-таки будет происходить по цементному камню.

Вообще же прочность легкого бетона будет ниже прочности обычного бетона, поскольку при разрушении его разрыв произойдет частично по цементному камню и частично по заполнителю.

Основываясь на вышесказанных соображениях можно написать общий вид зависимости прочности легких бетонов от основных обуславливающих ее факторов:



Фиг. 2. Кривые прочности на сжатие в 28-дн. возрасте бетонов на различных видах заполнителей.

$$R_b = \frac{R_n}{0,45} \left(\frac{c_k}{c+v+n} \right)^2 \mu_n + R_n (1 - \mu_n) \dots \quad (8)$$

где μ_n — объем цементного камня и части заполнителя, прочность на растяжение которого в бетоне данной марки превышает прочность цементного камня на растяжение.

Считая, что соотношение между площадями, занимаемыми в поперечном сечении бетона цементным камнем и означенной частью заполнителя, пропорциональны занимаемым им в бетоне объемам, коэффициент μ_n следует рассматривать как показатель отношения площади разрыва по цементному камню ко всей площади разрыва.

Если расход цементного теста в л/м³ обозначить через t , то можно написать условие

$$\frac{t}{1000} < \mu_n < 1. \quad (9)$$

Из (9) следует, что в легких бетонах предельными являются следующие два случая:

а) верхний предел

$$\mu_n = 1. \quad (10)$$

В этом случае разрыв будет полностью проходить по цементному камню и прочность легкого бетона в сравниваемых условиях будет равна прочности обычного бетона. Подставив выражение (10) в общий вид зависимости (8), получим то же выражение, что и для обычного бетона, а именно:

$$R\delta = \frac{R_n}{0,45} \left(\frac{c_k}{c+v+n} \right)^2 = 0,49 R_n \left(\frac{3,1 \frac{c}{v}}{3,1 + \frac{c}{v}} \right)^2 \quad (11)$$

б) нижний предел:

$$\mu_n = \frac{t}{1000} \quad (12)$$

В этом случае разрыв будет происходить как по цементному камню, так и по всем без исключения зернам заполнителя, расположенным в сечении, по которому произошел разрыв бетона. При этом, прочность бетона, повидимому, должна быть наиболее низкой, поскольку прочность на растяжение заполнителя в данном случае является меньшей, чем прочность на растяжение цементного камня.

Иначе говоря, можно написать:

$$R_n (1 - \mu_n) \leq \frac{R_n}{0,45} \left(\frac{c_k}{c+v+n} \right)^2 (1 - \mu_n) \dots \quad (13)$$

Формула (8) показывает, что в общем случае, если прочность обычного бетона зависит только от прочности цементного камня, то прочность легкого бетона зависит как от прочности цементного камня, так и от прочности заполнителя.

Исходя из формулы (8) можно сделать следующие выводы.

При увеличении расхода цемента, поскольку расход воды при этом растет незначительно, будет иметь место увеличение прочности цементного камня и соответственно увеличение разницы в прочностях цементного камня и заполнителя. Поэтому, с увеличением расхода цемента будет увеличиваться площадь разрыва по заполнителю, причем, если в начальной стадии разрывались только крупные зерна заполнителей, как наиболее слабые, то по мере увеличения расхода цемента предельного состояния на разрыв будут достигать зерна со все меньшими размерами. В конечном итоге, в легких бетонах, в определенных интервалах может иметь место линейная зависимость между прочностью бетона и расходом цемента, что и подтверждается опытными данными.

Углы наклона прямых, как это видно из фиг. 2, определяются соотношениями прочностей цементного камня и заполнителей.

Тенденция к нарастанию интенсивности увеличения прочности бетона с увеличением расхода цемента, заметна для наиболее низкопрочного пористого заполнителя и тенденция к затуханию нара-

стания интенсивности его — для наиболее высокопрочного пористого заполнителя.

Сказанное объясняется следующим.

При наиболее высокопрочных пористых заполнителях значение коэффициента μ_n приближается к верхнему пределу $\mu_n = 1$. В этом случае разрыв будет происходить почти целиком по цементному камню, минуя зерна заполнителя. Поэтому, поскольку площадь разрыва по цементному камню будет оставаться неизменной, то увеличение прочности бетона при увеличении расхода цемента будет иметь место только за счет увеличения плотности цементного камня, как в обычных бетонах. Однако, как это видно из фиг. 2, увеличение расхода цемента в бетоне свыше определенного количества (в обычном бетоне свыше $500-600 \text{ кг/м}^3$) приводит к затуханию роста и даже уменьшению плотности цементного камня, поскольку зерна цемента начинают раздвигать зерна заполнителя, увеличивая при этом суммарный объем пустот в бетонной смеси. Поэтому, чем высокопрочнее пористый заполнитель, тем скорее начинается затухание интенсивности роста прочности бетона.

При наиболее низкопрочных пористых заполнителях значение коэффициента μ_n приближается к нижнему пределу $\mu_n = \frac{t}{1000}$.

В этом случае разрыв происходит почти через все зерна заполнителя, расположенные в плоскости разрыва. Поэтому увеличение расхода цемента будет приводить к увеличению прочности бетона под влиянием двух факторов: увеличения плотности цементного камня и увеличения площади занимаемой цементным камнем.

Так как фактор увеличения плотности цементного камня, в соответствии с описанным в предыдущем случае, имеет затухающий характер, а фактор увеличения площади — равномерно нарастающий характер, то под совместным влиянием обоих факторов ослабление интенсивности увеличения прочности при низкопрочных заполнителях может наступить позже, чем при высокопрочных заполнителях.

И действительно, для бетонов на ангийской пемзе при расходах цемента вплоть до 800 кг/м^3 интенсивность увеличения прочности оказалась нарастающей.

В заключение следует отметить, что как указывалось выше, при цементном камне одинаковых качеств, прочность легкого бетона будет равна прочности обычного бетона в пределе, когда вследствие высокой прочности пористых заполнителей разрыв при поперечном расширении происходит целиком по цементному камню. Однако качество цементного камня в легких бетонах при одинаковых условиях может быть выше, чем в обычных бетонах, вследствие явления самовакуумирования. Поэтому при одинаковых расходах цемента и консистенции, прочность легкого бетона в пределе может быть не только равной, но и превосходить прочность обычного бетона, в особенности при относительно низких расходах цемента.

3. Расчет прочности легких бетонов

Из предыдущего видно, что качества бетонов на пористых заполнителях находятся в более сложной зависимости от качества их составляющих, чем для обычных бетонов. Поэтому расчеты прочности легких бетонов могут быть сделаны с меньшей точностью.

В предыдущей части было пояснено, что для легких бетонов в известном интервале зависимость между прочностью бетона и расходом цемента в нем может иметь линейный характер, что упрощает построение расчетных формул.

В соответствии с этим и исходя из удобства применения на практике, расчетные формулы целесообразно принять отвечающими уравнению прямой вида

$$R = kc + b, \quad (14)$$

где k — характеристика угла, образуемого прямой с осью расхода цемента;

b — отрезок, отсекаемый прямой на оси прочности бетонов и имеющий как положительный, так и отрицательный знаки.

Расчетные формулы типа (14) автором были разработаны и опубликованы для пемзобетона и арктикуфобетона еще в 1937 году [8].

В соответствии с экспериментальными данными, на основе которых они были тогда построены, формулы эти считались действительными только при марках не превышающих для пемзобетона „70“ и для арктикуфобетона „90“, с консистенцией принимаемой в монолитном железобетонном строительстве при ручном уплотнении бетона. Проведенные в дальнейшем опыты показали, что означенные формулы остаются в силе при расходах цемента вплоть до 800 кг/м^3 .

В течение истекших лет для легких бетонов предложены различные эмпирические формулы. Схематично эти формулы можно свести к следующим группам:

$$R = k_0 R_n \left(\frac{c}{b} - A \right) - \text{Н. А. Попов и Г. Д. Цискрели [9, 10],}$$

$$R = \varphi R_n c - \text{Н. С. Годзиев [11],}$$

$$R = \frac{R_n}{3} \left[\sqrt{1 + 6,6 \frac{R_n}{R_0} \left(\frac{c}{b} - 0,5 \right)} - 1 \right] - \text{В. М. Худавердян [12].}$$

В этих формулах под $\frac{c}{b}$ подразумевается „истинное“ цементно-водное отношение, учитывающее только ту часть воды, которая удерживается цементным тестом (без учета воды, отсасываемой заполнителем). Кроме того, во всех этих формулах влияние заполнителей учитывается коэффициентами, кроме формулы В. М. Худавердяна, в которой зависимость прочности легкого бетона от прочности заполнителя дается в явной форме.

В той общей форме, в которой ставится здесь вопрос, в особенности для сравнения между собой различных видов легких бетонов, наиболее целесообразным следует признать расчетные формулы типа (14). Ниже приводятся рекомендуемые расчетные формулы указанного типа для легких бетонов изготовленных на основных видах пористых заполнителей. При этом, кроме собственных экспериментальных данных использованы также данные других авторов.

Приводим эти формулы.

Для бетонов на ангийской пемзе или на каменноугольных шлаках:

$$R = 0,01 \sqrt{R_n} \cdot c + 10. \quad (15)$$

Для бетонов на арктической туфолаве:

$$R = 0,012 \sqrt{R_n} \cdot c + 10. \quad (16)$$

Для бетонов на керамзитовом гравии:

$$R = 0,013 \sqrt{R_n} \cdot c + 10. \quad (17)$$

Для бетонов на керамзитовом щебне:

$$R = 0,015 \sqrt{R_n} \cdot c + 10. \quad (18)$$

Для бетонов на вулканических туфах, с различными пределами прочности на сжатие (R_s):

$$\text{при } R_s = 70 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,024 \sqrt{R_n} \cdot c; \quad (19)$$

$$\text{при } R_s = 95 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,028 \sqrt{R_n} \cdot c - 10; \quad (20)$$

$$\text{при } R_s = 131 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,030 \sqrt{R_n} \cdot c - 10; \quad (21)$$

$$\text{при } R_s = 164 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,036 \sqrt{R_n} \cdot c - 30; \quad (22)$$

$$\text{при } R_s = 211 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,038 \sqrt{R_n} \cdot c - 40; \quad (23)$$

$$\text{при } R_s = 262 \text{ кг/см}^2 \quad R = 0,050 \sqrt{R_n} \cdot c - 8; \quad (24)$$

$$\text{Для бетонов на литой пемзе } R = 0,036 \sqrt{R_n} \cdot c - 30. \quad (25)$$

Формулы (19)–(24) для бетонов на вулканических туфах выведены на основе экспериментальных данных В. М. Худавердяна [13]. В формуле (25) частично использованы данные А. А. Аракеляна [14].

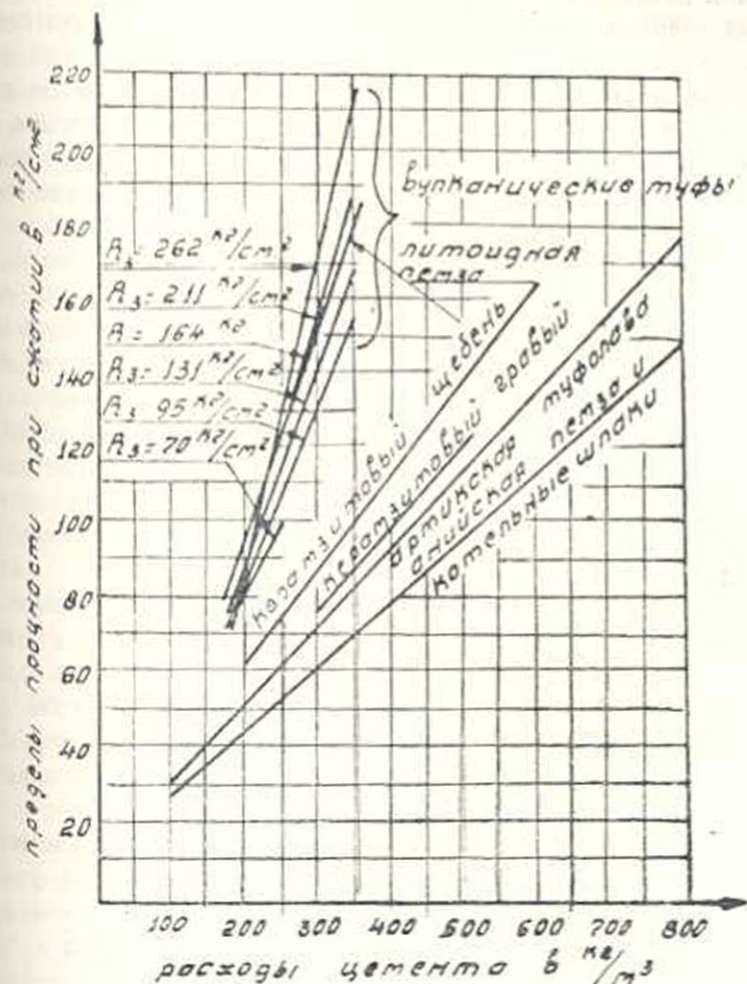
Как показывают формулы (25) и (22), для бетонов на литой пемзе пределы прочности на сжатие получаются одинаковыми с бетонами на вулканических туфах при $R_s = 164 \text{ кг/см}^2$, т. е. на вулканических туфах одинаковой прочности с литой пемзой ($R_s = 150 \text{ кг/см}^2$).

На основании расчетных формул (15)–(25) составлен сводный график прочностей на сжатие бетонов, изготовленных на различных видах заполнителей и цемента марки „300“. Длина прямых для каждого вида легкого бетона принята в соответствии с пределами, в которых они обоснованы экспериментальными данными.

Фиг. 3. позволяет получить наглядное представление о сравнительной прочности легких бетонов, изготовленных на различных видах пористых заполнителей.

При выводе формул (15)–(25) принимались в расчет консистенция бетонной смеси, характеризующаяся осадкой конуса около 3 см и наибольшая крупность зерен заполнителя до 40 мм.

При проектировании составов легких бетонов с использованием расчетных формул (15)–(25) необходимо иметь в виду нижеследующее:



Фиг. 3. Пределы прочности на сжатие в 28-дневном возрасте различных видов легких бетонов по эмпирическим формулам.

а) О водопотребности легких бетонов.

Абсолютные значения водопотребности бетонов на пористых заполнителях в 1,5–2 раза превышают водопотребности обычных бетонов. При этом указанная разница в водопотребностях имеет место для получения начальной подвижности и во всяком случае для подвижности с осадкой не более 3 см; дальнейшее увеличение подвижности бетонной смеси для обычных и легких бетонов требует примерно одинакового количества воды.

При увеличении расхода цемента с 200 до 800 кг/м^3 расход воды в легких бетонах одной и той же консистенции увеличивается

на 10—25%, в то время как при тех же условиях в обычных бетонах расход воды увеличивается на 40—45%. В тех же случаях расход воды в легких и обычных растворах остается без изменения, с некоторой тенденцией уменьшения при повышении расхода цемента с 200 до 600 кг/м³.

б) О влиянии консистенции на прочность легких бетонов.

Наибольшая прочность легких бетонов соответствует консистенции их, при которой при принятом методе уплотнения достигается наибольшая плотность. В строительной практике, в особенности при изготовлении сборных изделий из легкого железобетона, консистенция легкого бетона может быть принята с меньшими осадками, чем принятая при выводе расчетных формул (15)—(25). С другой стороны, могут потребоваться и более разжиженные бетонные смеси. В соответствии с этим, прочности легких бетонов могут быть и большими и меньшими, чем вычисляемые по приведенным формулам.

в) Влияние вида и крупности заполнителя на качества бетона.

Вид заполнителя оказывает на прочность и другие качества легкого бетона почти столь же существенное влияние, как и расход цемента. Чем прочнее легкие заполнители, тем прочнее изготавливаемые на их основе бетоны.

Так как прочность заполнителей в свою очередь зависит от их плотности, то вид заполнителя влияет как на прочность, так и на весовые характеристики бетона.

Влияние вида легких заполнителей на качества бетона усложняется тем, что качества самих заполнителей в отношении прочности, объемного веса, водоотсасывания и водоотдачи зависят от строения заполнителя.

Расчетный объемный вес легких бетонов, т. е. объемный вес легких бетонов, устанавливающийся в эксплуатационных условиях, по данным автора, может быть вычислен грубо приближенно по формуле:

$$\gamma_{\text{расч}} = \frac{3 + 1,5\alpha}{1000}, \quad (26)$$

где $\gamma_{\text{расч}}$ — объемный вес в т/м³,

α и α — веса заполнителя и цемента в кг на 1 м³ бетона.

Наибольшая крупность зерен заполнителя должна устанавливаться исходя не только из толщины конструкции и густоты арматуры, но и из марки бетона: чем низкопрочнее заполнитель и выше требуемая марка бетона, тем в большей мере должна быть ограничена наибольшая крупность зерен заполнителя.

В тех случаях, когда для бетонов основным является не прочностный, а весовой показатель, к заполнителям должны быть предъявлены иные требования: заполнитель должен быть выбран наиболее легковесный, а содержание крупных зерен должно быть доведено до максимально возможного значения.

г) О влиянии зернового состава заполнителя.

При выборе отношения между песком и щебнем оптимальным следует считать отношение, дающее минимальный выход смеси, как обеспечивающий минимальную пустотность. Содержание мелких и пылевидных частиц в заполнителе весьма благоприятно сказывается на удобоукладываемости и прочности бетонов. Поэтому при применении пористых заполнителей более важно ограничивать не максимальное, а минимальное их содержание. Оптимальное количество пылевидных частиц зависит от расхода цемента и области применения: в растворах содержание их должно быть большим, чем в бетонах, поскольку смесь песка и щебня обладают меньшей пустотностью, чем отдельно взятый песок. Для предварительных расчетов можно принять, что содержание цемента и пылевидных частиц ($< 0,15$ мм) в сумме должно быть: в бетонах—не менее 300 кг/м^3 и в растворах—не менее 400 кг/м^3 .

При относительно невысоких расходах цемента фактор плотности бетона имеет большее значение, чем фактор прочности заполнителя. Иначе говоря при относительно невысоких расходах цемента бетоны и, в особенности, растворы на высокопрочных заполнителях, содержащих недостаточное количество пылевидных частиц, могут обладать меньшей прочностью, чем бетоны (растворы) на низкопрочных заполнителях, но содержащих оптимальное количество пылевидных частиц.

д) Об уплотнении бетонной смеси.

Вопросу уплотняемости бетонной смеси как на легких, так и на обычных заполнителях посвящена специальная работа автора [2]. Здесь необходимо отметить, что, в особенности при слабо разжиженных смесях, уплотнение различными методами, при одной и той же объемной дозировке бетонной смеси, может привести к различному уменьшению объема смеси (коэффициенту выхода) и соответственно к различному содержанию цемента в единице объема бетона в уплотненном виде. Прочности бетона при этом будут соответствовать фактическому содержанию цемента, независимо от того каким методом уплотнялась бетонная смесь. Поэтому о составах бетонов необходимо судить не по принимаемой пропорции исходных материалов, а по фактическому расходу материалов в единице объема бетона, уплотненного в условиях подобных производственным.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 18 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Симонов М. З. Седиментационные процессы в цементном тесте и возможности их регулирования. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 4, 1953.
2. Симонов М. З. Элементы теории подвижности и уплотняемости бетонной смеси. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. VI, № 3, 1953.

3. Скрамтаев Б. Г. Исследование прочности бетона и пластичности бетонной смеси, Москва, 1936.
4. Свечин Н. В. К вопросу наименьшей прочности заполнителя бетона. Сборник статей „Исследования по технологии бетона“, ЦНИПС, Стройиздат, 1950.
5. Фридман Я. Б. Единая теория прочности материалов. Оборонгиз, 1943.
6. Симонов М. З. и Матузов Т. Г. Высокопрочные бетоны на пористых заполнителях для тонкостенных сборных железобетонных конструкций. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 1, 1952.
7. Ваганов А. И. Теория прочности керамзитобетона на экспериментальной основе. Труды Центрального научно-исследовательского института речного флота. Вып. XV. Сборник статей по корпусу речного судна, М.—Л., 1952.
8. Симонов М. З. Конструкции и сооружения из легкого железобетона (Инструкция по проектированию и возведению). ТНИС, Тбилиси, 1937.
9. Попов Н. А. Новые виды легких бетонов, Москва, 1939.
10. Цискрели Г. Д. Вопросы проектирования легкого бетона. Труды IV Всесоюзной конференции по бетону и железобетонным конструкциям, ч. III, Стройиздат, 1949.
11. Годзиш Н. С. Вибрирование легких бетонов, Москва, 1951.
12. Худавердян В. М. Принципы проектирования составов туфобетонов. Труды IV Всесоюзной конференции по бетону и железобетонным конструкциям, ч. III, Стройиздат, 1949.
13. Худавердян В. М. Применение туфобетонов в строительстве. Отчет АИС, 1947.
14. Аракелян А. А. Гидротехнический бетон на литондной немзе вибрационной укладки (результаты дополнительных опытов). Отчет № 4, АИС, 1953.
15. Заариев К. С. и Симонов М. З. Проектирование составов бетона. Тбилиси, 1948.

Մ. Զ. ՍԻՄՈՆՈՎ

ԲԵՏՈՆՆԵՐԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ՀԱՐՑԵՐԸ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Խիտ կազմութիւն ունեցող լցիչներով պատրաստած բետոնի ամրութիւնը պայմանաւորված է ցեմենտաքարի խտությամբ: Ելնելով գրանից, արտածված է հաշվարկային ֆորմուլա, որ հաստատվում է հայտնի էմպիրիկ ֆորմուլաներով:

Ծակոտիկէն լցիչներով պատրաստած բետոնի ամրութիւնը պայմանաւորվում է ոչ միայն ցեմենտաքարի խտությամբ, այլև լցիչի ամրությամբ և կազմությամբ: Կիրառելով ամրության երրորդ հիպոթեզը թեթև բետոնների նկատմամբ, կարելի է բացատրել նրանց ամրության կորերի բնույթը:

Գործնական նպատակների համար թեթև բետոնների կազմության նախազեւմը կարելի է կատարել, ելնելով նրանց ամրության և ցեմենտի ծախսի միջև կղած զծային կապից: Հոգովածում բերվում են զանազան ծակոտիկէն լցիչներով պատրաստած բետոնների կազմութիւնը հաշվելու ֆորմուլաներ:

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Г. А. Арзуманян

Исследование некоторых отходов химической промышленности Армянской ССР в качестве антисептиков

В в е д е н и е

В ранее опубликованной работе [1] было показано, что два отхода одного из заводов Еревана—„кубовые остатки“ и „масляный слой“ обладают антисептическими свойствами. Это было установлено путем их испытания на искусственной питательной среде на двух грибах—*Coniophora cerebella* и *Merulius lacrymans*.

Методика испытания на искусственной среде является стандартной для первого испытания новых антисептиков, и получаемые при этом результаты хотя и дают определенное представление о токсических свойствах испытуемых материалов, тем не менее являются условными, так как почти всегда расходятся с предельными дозами, получаемыми непосредственно на дереве.

В настоящей статье приводятся результаты испытания на дереве указанных веществ и их смесей с мазутом, а также результаты опытов по определению их корродирующего действия на металл и влияния на физико-механические свойства древесины.

I

Для определения токсичности исследуемых веществ на дереве была принята методика ЦНИИМОД [2]. Заражение среды производилось деревянными кубиками, предварительно зараженными грибом. После того как гриб разрастался по всей поверхности среды в колбу укладывались испытуемые образцы. В каждую колбу клалось по три образца, пропитанных в одной и той же смеси и по одному не пропитанному—контрольному образцу. В качестве образцов служили пластинки, выпиленные из заболони сосны. Они имели размеры $20 \times 20 \times 5$ мм (последний размер вдоль волокон).

Первоначально было произведено испытание кубовых остатков. В качестве растворителя, для получения нужной концентрации, применялся бензол, который, как известно, не обладает антисептическими свойствами. Были приготовлены смеси бензола и кубовых остатков с содержанием последних в смеси 1, 8, 15, 25, 50 процентов. Были взяты также чистые кубовые остатки. Пропитка велась в закрытых сосудах. Количество введенного в древесину антисепти-

ка определялось путем взвешивания образцов до и после пропитки. Перед пропиткой образцы сушились в сушильном шкафу.

После пропитки и сушки в комнатных условиях, образцы в стерильных условиях помещались в приготовленные колбы с разросшейся культурой гриба.

Колбы с уложенными в них образцами помещались в термостат, где хранились при температуре 23—25°C. Наблюдение велось в течение 45 дней. Здесь, как и при описании результатов последующих опытов, чтобы не загромождать работы, мы не помещаем всего материала о пропитке образцов и их испытания, а приводим лишь те данные, по которым можно судить о предельной дозе.

Образцы с содержанием 27,0, 29,1 и 30% кубовых остатков на 12-й день стали слабо обрастать. Образец с содержанием 27% кубовых остатков к концу испытания очень слабо оброс на половину поверхности, после чего рост гриба замер. Два других образца к этому сроку слегка обросли с одного края, после чего изменений не наблюдалось. Образцы с содержанием 50—60% кубовых остатков совершенно не обросли. Это позволяет полагать, что предельная доза составляет несколько более 30%.

Относительно высокая предельная доза кубовых остатков объясняется, очевидно, наличием в них большого количества легких фракций, имеющих, как было установлено ранее [1], низкую токсичность. Эти фракции обладают острым навязчивым запахом, действующим раздражающе на слизистые оболочки глаз, поэтому надо считать, что исследуемый отход в чистом виде не может быть применен и должен быть использован лишь после удаления из него легких фракций.

Испытание масляного слоя было проведено по этой же методике. Для пропитки были приготовлены смеси бензола и масляного слоя, последний составлял 3, 5, 8, 12 и 15%. Здесь, как и в предыдущих опытах, в колбы клались также контрольные, не пропитанные образцы.

Данные, по которым можно судить о предельной дозе на дереве для гриба *Coniophora cerebella*, сведены в таблицу 1, из которой можно усмотреть, что предельная доза находится между 14 и 17%.

Из сопоставления результатов испытания кубовых остатков и масляного слоя на искусственной питательной среде с результатами испытания на дереве видно, что, если в первом случае предельные дозы были почти одинаковыми, то во втором случае предельная доза масляного слоя оказалась значительно ниже предельной дозы кубовых остатков. Такое расхождение может быть объяснено тем, что при испытании на агаре все количество исследуемого вещества, введенного в среду, участвует в испытании. При испытании же на дереве, ввиду того, что укладка образцов на культуру гриба производится спустя сутки после их пропитки, то при наличии в испытуемом антисептике легких фракций в течение этих суток про-

Таблица 1

Процент содержания масла, слоя в смеси	Процент содержания масла, слоя в древесине	Дни наблюдения после укладки образцов в колбы					
		4	8	12	20	30	45
8	9,2	Поверхность образца чистая, роста гриба нет	Роста нет	Легкое обрастание	Рост продолжается	Рост угнетенный	Слабое обрастание
	8,9	"	"	Роста нет	Появился пушок гриба	Слабый рост	Рост замер
	9,1	"	"	"	"	"	"
12	контроль	"	Слабое обрастание	Рост продолжается	Рост продолжается	Сильное обрастание	Слабое обрастание
	13,6	"	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет
	13,1	"	"	"	Очень слабое обрастание	Слабый рост	Изменений нет
	13,1	"	"	"	"	"	"
	контроль	"	Очень слабое обрастание	Рост продолжается	Рост продолжается	Обрастание образца	Изменений нет
15	18,7	"	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет
	17,1	"	"	"	"	"	"
	17,6	"	"	"	"	"	"
	контроль	"	"	Появился пушок гриба	Рост продолжается	Рост продолжается	Обрастание образца

исходит частичное их улетучивание. Но, так как содержание антисептика в образце определяется по привесу непосредственно после пропитки, то получаемая предельная доза оказывается несколько завышенной. Это очевидно имело место при испытании кубовых остатков, отличающихся от масляного слоя большим содержанием легких фракций.

Таким образом, высокая токсичность масляного слоя по сравнению с кубовыми остатками объясняется прежде всего большим содержанием в масляном слое, как было установлено ранее [1], высокотоксичной тяжелой фракции IV. Поэтому, параллельно с дальнейшими испытаниями масляного слоя, были произведены также испытания фракции IV, как главного компонента, определяющего в основном токсические свойства масляного слоя.

Для испытания фракции IV были приготовлены смеси с бензолом с содержанием в смеси фракции IV—1, 3, 5, 8, 12 и 20%. Пропитанные в этих смесях образцы вместе с контрольными были уложены в колбы с грибом. Часть данных этого опыта сведена в таблицу 2.

Как видно из таблицы, предельная доза на дереве фракции IV для гриба *Coniophora cerebella* равна около 5%.

Результат испытания показывает, что токсичность фракции IV приблизительно равна токсичности креозота. Однако получение ее из исследуемых отходов в настоящее время связано с определенными трудностями, поскольку необходимо производить соответствующую отгонку, что может экономически себя не оправдать. В связи с этим представляется наиболее перспективным применение в качестве антисептика масляного слоя-отхода, обладающего, как показали испытания, достаточно высокой токсичностью.

Высокая токсичность масляного слоя и фракции IV диктует рекомендовать их к применению не в чистом виде, а в разбавленном. С этой целью были произведены испытания их смесей с мазутом.

II

Опытами, произведенными Б. К. Флеровым, Н. М. Шемахановой и К. И. Цешинской [3, 4] установлено, что при разбавлении мазутом происходит снижение антисептичности крезотовых масел, и что падение антисептичности значительно больше, чем можно предполагать по степени разбавления. Так, смесь 50% креозота и 50% мазута дает понижение антисептичности не в 2 раза, а в 4, смесь 25% креозота и 75% мазута дает понижение антисептичности не в 4 раза, а около восьми раз и т. д.

Это положение побудило поставить ряд опытов с целью установить, имеет ли место падение антисептичности при разбавлении мазутом как целого масляного слоя, так и его наиболее токсичного компонента—фракции IV.

Таблица 2

Процент содержания фракции IV в смеси	Процент фракции IV в древесине	Дни наблюдения после укладки образцов в колбы					
		4	8	12	20	30	45
1	1,0	Роста нет	Легкий пушок гриба на поверхности образца	Растет	Рост продолжается	Полное обрастание	Полное обрастание
	0,9	"	Слабое обрастание с краев	"	"	"	"
	1,0	"	"	"	"	"	"
	контроль	Слабый рост с одного края	Рост продолжается	"	"	"	"
	2,9	Роста нет	Появился пушок	Слабый рост	"	Частичное обрастание	"
3	3,1	"	"	"	"	Обрастание всей поверхности	"
	3,2	"	"	"	"	"	"
	контроль	"	"	Рост продолжается	"	"	"
5	5,3	"	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет	Роста нет
	5,1	"	"	"	"	"	"
	5,3	"	"	"	"	"	"
	контроль	"	"	Слабый угнетенный рост	Слабый рост	Рост замер	Изменений нет

Предварительные опыты были поставлены на искусственной питательной среде. Были приготовлены три смеси масляного слоя с мазутом с содержанием масляного слоя в смеси 10, 30 и 50%. Смесь тщательно перемешивалась и вводилась в среду в разливных концентрациях. Среда разливалась по пробиркам, которые затем заражались грибом *Copiorhiza cerebella*. Во всех трех случаях полученные предельные дозы при пересчете на количество масляного слоя в среде, получались такими же, как и при испытании без мазута, т. е. 0,1—0,2%.

Таким образом, можно заключить, что в данном случае мазут является инертной добавкой, не влияющей на токсичность антисептика. Надо полагать, что это положение распространяется и на компоненты масляного слоя. Для проверки были приготовлены две смеси фракции IV с мазутом, с содержанием фракции IV в смеси 5 и 15%.

Смеси эти также были испытаны на искусственной питательной среде и было установлено, что предельная доза при пересчете на количество фракции IV, содержащейся в среде, совпадает с предельной дозой, полученной без мазута.

Результаты, полученные на искусственной среде для смесей масляного слоя и фракции IV с мазутом, хотя и позволяют судить о токсичности этих смесей, тем не менее являются предварительными. Чтобы получить окончательные результаты для определения состава рабочих смесей, были произведены испытания на дереве по принятой методике. Для испытания были приготовлены смеси мазута с масляным слоем с содержанием последнего в смеси 6, 8, 10, 12, 15, 18 и 25%.

В каждой из этих смесей были пропитаны образцы, которые затем были испытаны.

Результаты этого испытания совпали с результатами, полученными ранее, когда в качестве растворителя брался бензол.

Аналогичным путем было проведено также испытание фракции IV на дереве. Были приготовлены смеси мазута с содержанием фракции IV—1, 2, 4 и 6%. Пропитанные в этих смесях образцы были испытаны. Одновременно были испытаны также образцы, пропитанные в чистом мазуте. Испытание показало, что предельная доза на дереве фракции IV при смешании последней с мазутом также не показывает изменений и остается равной около 5%.

Испытание образцов, пропитанных в мазуте показало, что последний до некоторой степени стимулирует рост гриба. Образцы, пропитанные в мазуте, обрастали значительно интенсивнее контрольного, не пропитанного образца. Этим опытом вполне четко опровергается существующее у некоторых строителей мнение о том, что мазут якобы обладает антисептическими свойствами.

Смесь фракции IV с мазутом была также испытана на дереве с грибом *Merulius lacrymans*. Испытание показало, что предельная доза для этого гриба совпадает с предельной дозой, полученной.

для гриба *Coniophora cerebella*. Этим подтвердился результат, полученный ранее на агаре при определении токсичности фракции IV [1], показавший одинаковую предельную дозу для этих двух грибов.

III

Одним из важных требований, предъявляемых к антисептикам, является то, чтобы антисептические составы не вызывали коррозии металлических частей в деревянных конструкциях, как-то: гвоздей, шурупов, болтов, костылей и т. д., а также не оказывали вредного влияния на пропиточную аппаратуру.

При проведении опытов в этом направлении, мы придерживались методики, описанной в работе А. И. Гартмана и Л. М. Волиной [5].

Для испытания были взяты: масляный слой, смесь масляного слоя (50%) с мазутом, фракция IV и смесь фракции IV (20%) с мазутом. Кроме того, те же токсические вещества были испытаны с добавлением к ним не большого количества извести с целью нейтрализовать возможно содержащуюся в них соляную кислоту, так как некоторыми анализами проб масляного слоя было определено в них содержание соляной кислоты до 0,4%.

В качестве контроля были взяты также мазут, креозот и водопроводная вода.

Для опытов были изготовлены из листовой стали пластинки размером 48×18 мм, весом 16—17 г и с поверхностью 20—21 см². В верхней части пластинок были просверлены отверстия для возможности подвешивания. Поверхности пластинок были тщательно отшлифованы наждачной бумагой № 00.

Перед опытом пластинки промывались спиртом и эфиром, после чего взвешивались на аналитических весах. После этого, пластинки подвешивались на нитях к стеклянным палочкам и опускались в стаканчики с исследуемыми веществами так, чтобы стеклянные палочки покоились на краях стаканчика.

Опыты проводились при комнатной температуре (15—18°) в течение 15 дней, после чего пластинки тщательно промывались бензолом, спиртом и эфиром и вновь взвешивались. Данные опытов сведены в таблицу 3.

Как показывают результаты проведенных опытов, рабочая смесь масляного слоя с мазутом при добавлении небольшого количества извести для нейтрализации содержащихся в масляном слое кислоты дает вполне удовлетворительные результаты.

Рабочая смесь фракции IV показывает хорошие результаты даже без добавления извести.

IV

Для рекомендации применения в качестве антисептиков смесей с мазутом масляного слоя и фракции IV, представлял большой интерес вопрос влияния пропитки этими веществами на механические свойства древесины.

Таблица 3

№№ п/п	Исследуемые вещества	Потеря веса металла в процентах	Характер поверхности пластинки после экспо- зиции
1	Масляный слой	0,188	Поверхность пластинки ма- товая
2	Смесь: 50% масляного слоя и 50% мазута	0,025	Поверхность пластинки слег- ка матовая, имеется не- большой налет медно- красного цвета
3	Мазут	0,000	Поверхность блестящая
4	Фракция IV	0,000	Поверхность чуть-чуть ма- товая
5	Смесь: 20% фракции IV и 80% ма- зута	0,000	Поверхность блестящая
6	Масляный слой с добавлением из- вести	0,096	Нижняя часть пластинки вблизи известкового осад- ка—глянцевая, верхняя часть слегка матовая
7	Смесь: 50% масляного слоя и 50% мазута с добавлением извести	0,000	Поверхность блестящая
8	Фракция IV с добавлением извести	0,000	" "
9	Смесь: 20% фракции IV и 80% мазута с добавлением извести	0,000	" "
10	Креозот	0,000	" "
11	Водопроницаемая вода	0,278	Следов коррозии почти не за- метно. Поверхность без изв. На дне стакана осадок $\text{Fe}(\text{OH})_3$

Для выяснения этого вопроса в соответствии с ОСТ-250 [6] были изготовлены из сосновой древесины образцы для испытания на сжатие вдоль волокон, статический изгиб и торцовую твердость. Кроме этих образцов были изготовлены также образцы для определения сопротивления выдергиванию шурупов. В качестве пропиточных составов были взяты: масляный слой, смесь масляного слоя (50%) с мазутом (50%), смесь фракции IV (20%) с мазутом (80%) и чистый мазут. В этих смесях были пропитаны образцы по способу горяче-холодных ванн.

Для исключения влияния влажности, образцы после изготовления в течение трех месяцев были выдержаны в комнатных условиях. По истечении этого срока все образцы достигли приблизительно одной влажности, равной около 9,5%. После пропитки, перед испытанием, образцы были выдержаны в течение шести месяцев. После выдерживания в течение этого срока, было произведено также определение объемного веса пропитанной древесины. Результаты этих определений представлены в таблице 4.

Увеличение объемного веса древесины в результате пропитки ее взятыми составами несколько больше, чем это имеет место при пропитке креозотом. Так, по данным С. И. Вапина [7], у сосны объемный вес древесины, пропитанной креозотом, увеличивается на 20—40%.

Механические испытания образцов были произведены на 10-тонном прессе Шоппера, имеющем переключение на 5 и на 2 тонны.

Таблица 4

№№ п/п	Название пропиточного состава	Объемный вес древе- сины г/см ³	Привес по отношению к непропитанной древе- сине в процентах
1	Масляный слой	0,639	37
2	Смесь: масляный слой 50%, мазут 50%	0,675	44
3	Смесь: фракция IV 20%, мазут 80%	0,726	54
4	Мазут	0,688	46
5	Контроль	0,469	—

Одновременно были испытаны аналогичные непропитанные образцы, которые служили в качестве контроля.

Все полученные результаты испытаний были обработаны методом вариационной статистики.

Из результатов испытаний на сжатие вдоль волокон, приведенных в таблице 5, видно, что пропитка масляным слоем и смесью фракции IV с мазутом несколько увеличивает предел прочности древесины в то время, как пропитка в чистом мазуте приводит к его уменьшению.

Таблица 5

№№ п/п	Название пропиточного со- става	Число образ- цов n	Предел прочности на сжатие вдоль воло- кон кг/см ²	Ошибка m	Вариаци- онный коэф- ф. v %	Прочность по отноше- нию к кон- трольным образцам в проц.	Достовер- ность
1	Масляный слой	17	673	11,4	7,0	108	3,6
2	Смесь: масляный слой 50%, мазут 50 %	18	629	7,6	5,1	100	0,3
3	Смесь: фракция IV 20%, ма- зут 80%	20	658	6,8	4,7	105	3,4
4	Мазут	14	588	7,6	4,6	94	4,0
5	Контроль	18	626	6,4	4,3	100	—

В таблице 6 приведены результаты испытания образцов на статический изгиб. У образцов, пропитанных масляным слоем и пропитанных мазутом, наблюдается некоторое падение крепости. Такое падение имеет место в некоторых случаях при пропитке древесины маслянистыми антисептиками. Так, имеется указание [8] на то, что при пропитке дугласовой пихты креозотом прочность на изгиб падает на 8%. Некоторая тенденция увеличения прочности образцов, пропитанных смесью масляного слоя с мазутом и смесью фракции IV с мазутом по данным обработки результатов испытания методом вариационной статистики, является недостоверной.

Таблица 6

№№ п/п	Название пропиточного состава	Число об- разцов n	Пред. проч- ности на статический изгиб кг/см ²	Ошибка m	Вариацион- ный коэф- фициент v %	Прочность по отноше- нию к кон- трольным образцам в проц.	Достовер- ность
1	Масляный слой	14	785	22,3	10,5	87	4,1
2	Смесь: масляный слой 50%, мазут 80%	14	915	25,2	10,3	101	0,4
3	Смесь: фракций IV 20%, мазут 80%	19	935	15,2	7,2	104	1,3
4	Мазут	14	815	14,6	6,7	90	3,5
5	Контроль	15	908	18,6	7,8	100	—

Определение торцевой твердости производилось по способу Янка. В таблице 7 представлены результаты испытания. Как видно из таблицы, во всех случаях наблюдается понижение торцевой твердости пропитанных образцов по сравнению с контрольными. Объяснить это химическим взаимодействием пропиточных составов с веществами клеточной оболочки нельзя, так как наибольшее снижение твердости показали образцы, пропитанные мазутом, между тем известно, что мазут не оказывает разрушающего действия на древесину.

Таблица 7

№№ п/п	Название пропиточного состава	Число об- разцов n	Торцевая твердость кг/см ²	Ошибка m	Вариацион- ный коэффи- циент v %	Прочность по отноше- нию к кон- трольным образцам в проц.	Достовер- ность
1	Масляный слой	16	235	4,7	7,2	69	12,6
2	Смесь: масляный слой 50%, мазут 50%	18	254	4,1	6,8	74	10,5
3	Смесь: фракция IV 20%, мазут 80%	16	254	6,9	10,8	74	8,9
4	Мазут	15	202	3,3	6,1	59	17,9
5	Контроль	14	342	7,1	7,6	100	—

Кроме перечисленных испытаний было произведено также определение сопротивления выдергиванию шурупов. Испытание это не входит в ОСТ-250, однако результаты его представляют практический интерес.

Для испытания были взяты бруски сечением 35×35 мм, вырезанные из заболонной части сосновой середовой доски. В брусках в радиальном направлении были просверлены отверстия d=2,2 мм, после чего бруски были пропитаны вместе с остальными образцами.

После пропитки через 6 месяцев в просверленные отверстия заворачивались шурупы размером 4×50 мм, и с помощью специального захватного приспособления производилось их выдергивание на прессе. Результаты испытания приведены в таблице 8.

Таблица 8

№№ п/п	Название пропиточного состава	Число образцов п	Усилие вы- дергивания одного шу- рупа кг	Ошибка $\pm$ п	Вариаци- онный коэф- фициент $v^2/\%$	Усилие по отношению к контролю в проц.	Достовер- ность
1	Масляный слой	10	218	3,3	4,7	76	2,8
	Смесь: масляный слой 50%, мазут 50%	10	286	3,3	3,6	99	0,4
	Смесь: фракции IV 20%, мазут 80%	10	303	3,5	3,7	104	1,9
4	Мазут	10	268	2,13	2,55	93	3,0
5	Контроль	10	289	6,5	7,07	100	—

Результаты испытания показывают, что пропитка в масляном слое и в мазуте приводит к некоторому снижению усилия, потребного для выдергивания шурупов, заворачиваемых в древесину. Образцы, пропитанные рекомендуемыми смесями масляного слоя и фракции IV с мазутом, показали с контролем почти одинаковые результаты.

Заключение

Токсические свойства масляного слоя и кубовых остатков определяются главным образом содержанием в них тяжелой фракции IV. Относительно небольшое содержание этой фракции в кубовых остатках и резкий их запах заставляют отказаться от их применения. Однако с осуществлением на заводе предложения по удалению легких фракций и с дальнейшим получением из них исходного продукта, состав кубовых остатков изменится в сторону увеличения в них содержания фракции IV. В настоящее время, до того как это предложение будет осуществлено, для применения в качестве антисептика должен быть рекомендован масляный слой. Применение его в чистом виде не представляется целесообразным, так как это приведет к излишнему запасу биологической прочности пропитанной древесины. В качестве пропиточного состава наиболее целесообразно применять смесь масляного слоя с мазутом с содержанием масляного слоя в смеси 40—50%. Масляный слой хорошо смешивается с мазутом и дает однородную смесь.

Весьма перспективной для применения в качестве антисептика является высокотоксичная фракция IV, получение которой окажется возможным при наличии способа отделения этой фракции, который мог бы себя экономически оправдать.

Антисептика этот должен быть применен также в смеси с мазутом. В качестве рабочей должна быть принята смесь 20% фракции IV и 80% мазута.

Проведенные испытания показали, что рекомендуемые к применению антисептические составы не оказывают вредного действия на физико-механические свойства древесины и на железо в отношении коррозии.

Высокая токсичность масляного слоя и фракции IV позволяет рекомендовать их смеси с мазутом не только для глубокой пропитки древесины, но и для поверхностной ее обработки. Эффективность обработки древесины этими веществами обеспечивается также благодаря тому, что они не смываются водой из обработанной древесины.

Преимуществом масляного слоя и фракции IV по сравнению с креозотом надо считать то, что в отличие от последнего, масляный слой и фракция IV при смешивании с мазутом не теряют токсичности, в результате чего антисептичность смеси получается талая, какая должна быть при данной степени разбавления.



Настоящая работа была выполнена при консультации с доктором биологических наук, профессором А. А. Яценко-Хмелевским.

В статье учтены ценные замечания доктора сельскохозяйственных наук, профессора А. Т. Вакина.

Им обоим автор выражает свою искреннюю благодарность.

Институт строительных материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Поступило 19 XI 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арзуманян Г. А. Антисептические свойства некоторых отходов химической промышленности Армянской ССР, Известия АН Армянской ССР, т. III, № 1, 1950.
2. Вакин А. Т. Сб. Борьба с поражением древесины в жилом фонде Ленинграда. Изд. МХХ РСФСР, 1947.
3. Флеров Б. К. и Цешинская Н. И. Изучение антисептических свойств каменно-угольных креозотовых масел и смесей их с мазутами. Сб. № 20 Науч.-исслед. института пути НКПС, 1932.
4. Флеров Б. К. и Шемаханова Н. М. Антисептические свойства смесей каменно-угольного креозотового масла с мазутами. Н.-и. сектор ЦПТЭУ НКПС, 1931.
5. Гартман А. Н. и Волина Л. М. Коррозирующее действие на металл древесных антисептиков. Сб. № 29, Н.-и. института пути НКПС, 1933.
6. ОСТ-250 НКЛес. Методы физико-механических испытаний древесины, 1938.
7. Ванин С. И. Древесиноведение, Гослесбуиздат, 1949.
8. Перельгин Л. М. Древесиноведение, Гослесбуиздат, 1949.

Գ. Ս. Ս. ԲԵՐԿՄԱՆՅԱՆ

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌԻ ՔԻՄԻԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆԱԲԵՐՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ
ՄՆԱՑՈՒԿՆԵՐԻ՝ ՈՐՊԵՍ ՀԱԿԱՆԵԻԻԶՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Նախորդ հոդվածում [1] ցույց էր տրված, որ Հայկական ՍՍՌ-ի քիմիական արդյունաբերության երկու մնացուկներ՝ «կուրային մնացուկներ» և «յուղային շերտը» փայտատուեկերի նկատմամբ ունեն հակառակիչ հատկություն, բայց որոշ արդյունքները ստացված էին արհեստական միջավայրի վրա կատարված փորձերից:

Տվյալ հոդվածում նկարագրված փորձերը կատարված են նաև մնացուկների և փայտատուեկերի նկատմամբ, սակայն, որպես միջավայր ծառայել է փայտանյութը:

Կատարված են նաև փորձեր մնացուկներից մեկի և նրա բարձր հակառակիչ հատկություն ունեցող ֆրակցիայի մազութի հետ խառնուրդների նկատմամբ:

Փորձերում օգտագործված սուեկերի համար ստացված են սահմանային զոգանքներ:

Առումնասիրված է հակառակիչ հատկություն ունեցող մնացուկների և մազութի հետ նրանց խառնուրդների ազդեցությունը փայտի ֆիզիկամեխանիկական հատկությունների և մետաղի կորոզիայի նկատմամբ:

Ստացված արդյունքները թույլ են տալիս եզրակացնել, որ նշված խառնուրդները կարող են օգտագործվել որպես հակառակիչներ: