ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952. Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. С Минасян

О плоском установившемся распределении температуры в неоднородных призматических телах

В работе решается плоская задача стационарного распределения температуры в неоднородных призматических телах с прямоугольным поперечным сечением.

§ 1. Плоское распространение тепла в неоднородном теле квадратного поперечного сечения при наличии внутренних источников тепла

Постановка задачи и построение решения. Рассмотрим плоское распределение тепла в неоднородном теле, состоящем из двух сред, имеющих в поперечном сечении форму двух вложенных друг в друга квадратов (фиг. 1), когда задано распределение температуры вдоль боковой поверхности, при наличии тепловыделения внутри тела (которое может происходить, например, при переходе электрической энергии в тепловую, экзотермии и т. п.). Для простоты ограничиваемся симметричным случаем.

Обозначим температуру в 1-й среде через $U_1(x, y)$, а во 2-й — через $U_2(x, y)$. Пусть коэффициенты теплопроводности 1-й и 2-й сред будут соответственно λ_1 и λ_2. В этом случае температуры $U_i(x, y)$ в соответствующих средах, как известно [1], удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\lambda_i} Q_i(x, y) \qquad (1.1)$$

и граничным условиям

$$U_1(x, \pm b) = T(x), \quad U_1(\pm b, y) = T(y). \qquad (1.2)$$

Здесь $Q_i(x, y)$ — интенсивность тепловыделения в i-той среде.

Относительно граничных значений $T(x)$, $T(y)$ и интенсивности тепловыделения $Q_i(x, y)$ предполагаем, что они симметричны относительно осей ox и oy, причем $Q_i(x, y) = Q_i(y, x)$. Кроме того, предполагаем, что как $T(x)$, так и $Q_i(x, y)$ имеют ограниченную вариацию.

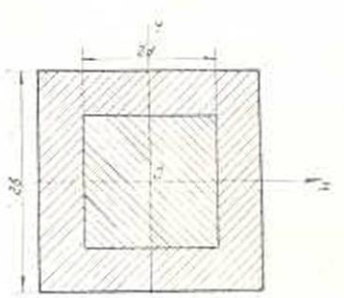
Условия на линиях контакта будут:

$$U_2(x, \pm d) = U_1(x, \pm d), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}\bigg|_{y=\pm d} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y}\bigg|_{y=\pm d},$$

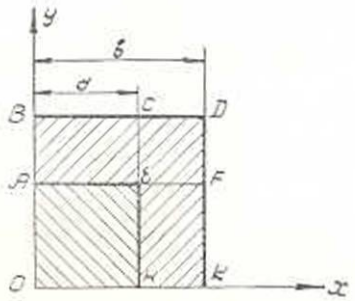
$$U_1(\pm d, x) = U_2(\pm d, x), \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=\pm d} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}\Big|_{x=\pm d}. \qquad (1.3)$$

В силу симметрии достаточно рассмотреть четвертую часть квадрата (фиг. 2), причем на прямых $x = 0$ и $y = 0$ должны удовлетворяться условия

$$\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial U_1}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \qquad (1.4)$$



Фиг. 1.



Фиг 2.

Для построения функции $U_1(x, y)$ применяем способ сшивания [2], являющийся дальнейшим развитием метода наложения вспомогательных функций, предложенного Н. Х. Арутюняном [3].

Представим функцию $U_1(x, y)$ в виде:

$$U_1(x, y) = \begin{cases} V_1(x, y) & \text{при } x \geqslant d, \quad y \leqslant d, \\ V_2(x, y) & \text{“} \quad x \geqslant d, \quad y \geqslant d, \\ V_3(x, y) & \text{“} \quad x \leqslant d, \quad y \geqslant d. \end{cases} \qquad (1.5)$$

При этом $V_3(x, y) = V_1(y, x)$.

Функции $V_i(x, y)$ должны удовлетворять уравнению (1.1), соответствующим граничным условиям (1.2) и (1.4) и условиям сшивания на линиях раздела $x = d$ и $y = d$

$$V_1(x, d) = V_2(x, d), \quad \frac{\partial V_1}{\partial y}\Big|_{y=d} = \frac{\partial V_2}{\partial y}\Big|_{y=d},$$

$$V_2(d, y) = V_3(d, y), \quad \frac{\partial V_2}{\partial x}\Big|_{x=d} = \frac{\partial V_3}{\partial x}\Big|_{x=d}. \qquad (1.6)$$

Следуя идее Г. Л. Гринберга [4], ищем выражения для $U_2(x, y)$ и $V_i(x, y)$ так же, как при однородных граничных условиях.

Разложим функции $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в ряд по $\cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{d}$:

$$V_1(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \cos \alpha_k y, \quad U_2(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \cos \alpha_k y, \qquad (1.7)$$

где $\alpha_\kappa = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}$, причем

$$f_\kappa(x) = \frac{2}{d}\int_0^d V_1(x, y)\cos\alpha_\kappa y\, dy,\quad g_\kappa(x) = \frac{2}{d}\int_0^d U_2(x, y)\cos\alpha_\kappa y\, dy.$$

Выражения (1.7) сходятся соответственно в областях HEFK и OAEH, за исключением линии AF, где все члены рядов (1.7) обращаются в нуль. Отсюда следует [4], что члены рядов убывают не быстрее, чем κ^{-1}. Для усиления сходимости можно, пользуясь известными методами [5], выделить и просуммировать часть, обусловливающую слабую сходимость.

Функцию $V_2(x,y)$, а также $V_3(x, y)$ ищем в виде рядов

$$V_2(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\varphi_\kappa(x)\sin\beta_\kappa(y-d);\quad V_3(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty}\psi_\kappa(x)\sin\beta_\kappa(y-d), \tag{1.8}$$

где $\beta_\kappa = \frac{\kappa\pi}{b-d}$, $\varphi_\kappa(x) = \frac{2}{b-d}\int_d^b V_2(x, y)\sin\beta_\kappa(y-d)\,dy$,

$$\psi_\kappa(x) = \frac{2}{b-d}\int_d^b V_3(x, y)\sin\beta_\kappa(y-d)\,dy.$$

Для определения коэффициентов $f_\kappa(x)$ и $g_\kappa(x)$ умножим оператор Лапласа от функций $V_1(x, y)$ и $U_2(x,y)$ на $\cos\alpha_\kappa y dy$. Интегрируя полученные выражения по y от 0 до d и принимая во внимание (1.1), (1.2), (1.4), а также (1.8), получим:

$$\begin{aligned} f_\kappa''(x) - \alpha_\kappa^2 f_\kappa(x) + (-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p(d)\sin\beta_p(x-d) &= q_\kappa(x),\\ g_\kappa''(x) - \alpha_\kappa^2 g_\kappa(x) + (-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d}\sum_{p=0}^{\infty} f_p(d)\cos\alpha_p x &= r_\kappa(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Аналогично, для $\varphi_\kappa(x)$ и $\psi_\kappa(x)$ получим:

$$\begin{aligned} \varphi_\kappa''(x) - \beta_\kappa^2\varphi_\kappa(x) - \frac{2\beta_\kappa}{b-d}\left[(-1)^\kappa T(x)_x' - \sum_{p=1}^{\infty}\psi_p(d)\sin\beta_p(x-d)\right] &= \tau_\kappa(x),\\ \psi_\kappa''(x) - \beta_\kappa^2\psi_\kappa(x) - \frac{2\beta_\kappa}{b-d}\Bigg[(-1)^\kappa T(x) - \\ - \sum_{p=0}^{\infty} g_p(d)\cos\alpha_p x\Bigg] &= \tau_\kappa(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь

$$q_\kappa(x)=\frac{2}{\lambda_1 d}\int_0^d Q_1(x,y)\cos\alpha_\kappa y\,dy,\quad \tau_\kappa(x)=\frac{2}{\lambda_2 d}\int_0^d Q_2(x,y)\cos\alpha_\kappa y\,dy. \tag{1.11}$$

$$\tau_\kappa(x)=\frac{2}{\lambda_1(b-d)}\int_d^b Q_1(x,y)\sin\beta_\kappa(y-d)\,dy.$$

Принимая во внимание (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6) и разлагая $T(y)$ в ряды по $\cos\alpha_\kappa y$ в промежутке $(0,d)$ и по $\sin\beta_\kappa(y-d)$ в промежутке (d,b), получим граничные условия для $f_\kappa(x)$, $g_\kappa(x)$, $\varphi_\kappa(x)$ и $\psi_\kappa(x)$:

$$\begin{aligned} &f_\kappa(b)=\mu_\kappa,\quad f_\kappa(d)=g_\kappa(d),\quad \lambda_1 f_\kappa'(d)=\lambda_2 g_\kappa'(d),\quad g_\kappa'(0)=0,\\ &\varphi_\kappa(b)=\gamma_\kappa,\quad \varphi_\kappa(d)=\psi_\kappa(d),\quad \varphi_\kappa'(d)=\psi_\kappa'(d),\quad \psi_\kappa'(0)=0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\mu_\kappa=\frac{2}{d}\int_0^d T(y)\cos\alpha_\kappa y\,dy,\quad \gamma_\kappa=\frac{2}{b-d}\int_d^b T(y)\sin\beta_\kappa(y-d)\,dy. \tag{1.13}$$

Решив уравнения (1.9) и (1.10) и удовлетворяя условиям (1.12), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} f_\kappa(x)&=\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}\left[B_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)+\zeta_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa x\right]+\frac{1}{\alpha_\kappa}\int_d^x q_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(x-t)\,dt+\\ &+(-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(d)}{\beta_p^2+\alpha_\kappa^2}\sin\beta_p(x-d),\\ g_\kappa(x)&=\frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa x}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}\left[B_\kappa\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}+\zeta_\kappa\operatorname{th}\alpha_\kappa d\right]+\eta_\kappa\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(d-x)}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}+\\ &+\frac{1}{\alpha_\kappa}\int_x^d r_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(t-x)\,dt+(-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f_p(d)}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2}\cos\alpha_p x,\\ \varphi_\kappa(x)&=\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_\kappa b}\left[F_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-x)+\xi_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa x\right]+\frac{1}{\beta_\kappa}\int_d^x\left[\tau_\kappa(t)+\right.\\ &\left.+T(t)\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(x-t)\,dt+\frac{2\beta_\kappa}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\psi_p(d)}{\beta_p^2+\beta_\kappa^2}\sin\beta_p(x-d),\\ \psi_\kappa(x)&=\frac{\operatorname{ch}\beta_\kappa x}{\operatorname{sh}\beta_\kappa b}\left[F_\kappa\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)}{\operatorname{ch}\beta_\kappa d}+\xi_\kappa\operatorname{th}\beta_\kappa d\right]-\rho_\kappa\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-x)}{\operatorname{ch}\beta_\kappa d}+ \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$+\frac{1}{\beta_\kappa}\int_x^d\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(t-x)\,dt+\frac{2\beta_\kappa}{b-d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{g_p(d)}{\alpha_p^2+\beta_\kappa^2}\cos\alpha_p x.$$

Здесь

$$\zeta_\kappa=\mu_\kappa-\frac{1}{\alpha_\kappa}\int_d^b q_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-t)\,dt,\quad \eta_\kappa=\frac{1}{\alpha_\kappa}\int_0^d r_\kappa(t)\operatorname{ch}\alpha_\kappa t\,dt,$$

$$\xi_\kappa=\gamma_\kappa-\frac{1}{\beta_\kappa}\int_d^b\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-t)\,dt,\qquad(1.15)$$

$$\rho_\kappa=\frac{1}{\beta_\kappa}\int_0^d\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{ch}\beta_\kappa t\,dt.$$

Постоянные B_κ и F_κ, входящие в соотношения (1.14), определяются из следующей системы уравнений

$$B_\kappa=\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}{\lambda_1\operatorname{ch}\alpha_\kappa(b-d)+\lambda_2\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)\operatorname{th}\alpha_\kappa d}\left\{(-1)^\kappa\frac{2}{d}\left[\lambda_1\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p\varphi_p(d)}{\beta_p^2+\alpha_\kappa^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha_p f_p(d)}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2}\right]-\frac{\lambda_2\eta_\kappa}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}+\frac{\zeta_\kappa}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}(\lambda_1\operatorname{ch}\alpha_\kappa d+\lambda_2\operatorname{sh}\alpha_\kappa d\operatorname{th}\alpha_\kappa d)\right\},$$

$$F_\kappa=\operatorname{th}\beta_\kappa b\operatorname{ch}\beta_\kappa d\left\{\frac{2}{b-d}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p\psi_p(d)}{\beta_p^2+\beta_\kappa^2}+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p\alpha_p g_p(d)}{\alpha_p^2+\beta_\kappa^2}\right]-\right.\qquad(1.16)$$

$$\left.-\frac{1}{\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\left(\rho_\kappa-\frac{\xi_\kappa}{\operatorname{sh}\beta_\kappa b}\right)\right\}.$$

Для нахождения неизвестных B_κ и F_κ из уравнений (1.16), преобразуем последние следующим образом: введем новые неизвестные m_κ и n_κ

$$B_\kappa=\frac{(-1)^\kappa m_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa b-\alpha_\kappa d\,\zeta_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa d}{\alpha_\kappa d\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)},$$

$$(1.17)$$

$$F_\kappa=\frac{n_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa b-\beta_\kappa(b-d)\xi_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa d}{\beta_\kappa(b-d)\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)}.$$

Подставив значения B_κ и F_κ из (1.17) в (1.16), после некоторых преобразований приходим к уравнениям:

$$m_\kappa = \frac{\alpha_\kappa}{\lambda_1 \operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d) + \lambda_2 \operatorname{th}\alpha_\kappa d}\left\{\frac{2\lambda_2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\lambda_1}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p}{\beta_p^2+\alpha_\kappa^2} + \frac{\lambda_1\xi_\kappa d}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)} - \frac{\lambda_2 d\,\eta_\kappa}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}\right\}, \qquad (1.18)$$

$$n_\kappa = \frac{\beta_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)\operatorname{ch}\beta_\kappa d}{\operatorname{ch}\beta_\kappa b}\left\{\frac{2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p}{\alpha_p^2+\beta_\kappa^2} + \frac{2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p}{\beta_p^2+\beta_\kappa^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_\kappa(b-d)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)} - \frac{\rho_\kappa(b-d)}{\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\right\}.$$

Полученные соотношения (1.18) представляют совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений. При этом формулы для коэффициентов разложений $f_\kappa(x)$, $g_\kappa(x)$, $\varphi_\kappa(x)$ и $\psi_\kappa(x)$, выраженные через m_κ и n_κ, окончательно примут вид:

$$f_\kappa(x) = \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)}{\alpha_\kappa \operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}\left\{(-1)^\kappa\frac{m_\kappa}{d} - \int_d^x q_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(t-d)\,dt\right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(x-d)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}\left\{\mu_\kappa - \frac{1}{\alpha_\kappa}\int_x^b q_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-t)\,dt\right\} +$$

$$+(-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d(b-d)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p}{\beta_p(\beta_p^2+\alpha_\kappa^2)}\sin\beta_p(x-d),$$

$$g_\kappa(x) = \frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa x}{\alpha_\kappa \operatorname{ch}\alpha_\kappa d}\left\{(-1)^\kappa\frac{m_\kappa}{d} - \int_x^d r_\kappa(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(d-t)\,dt\right\} - \qquad (1.19)$$

$$- \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(d-x)}{\alpha_\kappa \operatorname{ch}\alpha_\kappa d}\int_0^x r_\kappa(t)\operatorname{ch}\alpha_\kappa t\,dt + (-1)^\kappa\frac{2\alpha_\kappa}{d^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p m_p}{\alpha_p(\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2)}\cos\alpha_p x,$$

$$\varphi_\kappa(x) = \frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-x)}{\beta_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)}\left\{\frac{n_\kappa}{b-d} - \int_d^x\left[\tau_\kappa(t) + T(t)\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(t-d)\,dt\right\} +$$

$$+\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(x-d)}{\beta_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)}\left\{\gamma_\kappa-\frac{1}{\rho_\kappa}\int_x^b\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\,\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-t)\,dt\right\}+$$

$$+\frac{2\beta_\kappa}{(b-d)^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p}{\beta_p(\beta_p^2+\beta_\kappa^2)}\sin\beta_p(x-d),$$

$$\psi_\kappa(x)=\frac{\operatorname{ch}\beta_\kappa x}{\beta_\kappa\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\left\{\frac{n_\kappa}{b-d}-\int_x^d\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\,\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-t)\,dt\right\}-$$

$$-\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-x)}{\beta_\kappa\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\int_0^x\left[\tau_\kappa(t)+T(t)\,\frac{2(-1)^\kappa\beta_\kappa}{b-d}\right]\operatorname{ch}\beta_\kappa t\,dt+$$

$$+\frac{2\beta_\kappa}{d(b-d)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p m_p}{\alpha_p(\alpha_p^2+\beta_\kappa^2)}\cos\alpha_p x.$$

Исследование совокупности бесконечных систем (1.18). Прежде всего оценим суммы модулей коэффициентов систем совокупности (1.18).

Имея в виду, что $\alpha_\kappa=\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}$, $\beta_\kappa=\frac{\kappa\pi}{b-d}$, получим, что суммы модулей коэффициентов первой и второй систем соответственно равны

$$\sigma_{\kappa 1}=\frac{2\lambda_2\alpha_\kappa}{d\left[\lambda_1\operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d)+\lambda_2\operatorname{th}\alpha_\kappa d\right]}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2}+\frac{\lambda_1 d}{\lambda_2(b-d)}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2+\alpha_\kappa^2}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{\alpha_\kappa(b-d)}\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1\operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d)+\lambda_2\operatorname{th}\alpha_\kappa d},$$

(1.20)

$$\sigma_{\kappa 2}=\frac{2\beta_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)\operatorname{ch}\beta_\kappa d}{d\operatorname{ch}\beta_\kappa b}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_p^2+\beta_\kappa^2}+\frac{d}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_p^2+\beta_\kappa^2}\right]=$$

$$=1-\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)\operatorname{ch}\beta_\kappa d}{\beta_\kappa(b-d)\operatorname{ch}\beta_\kappa b}.$$

Как видно из (1.20), обе суммы модулей коэффициентов меньше единицы, следовательно, совокупность систем уравнений (1.18) регулярна. Согласно теории регулярных систем [6] эта совокупность имеет ограниченное решение, если отношения свободных членов $\omega_{\kappa i}$ уравнений (1.18) к соответствующим разностям $1-\sigma_{\kappa i}$ ограничены.

Вместе с тем, как легко видеть из (1.11) и (1.13), хотя свободные члены $\omega_{\kappa 2}$ второй системы (1.18) и остаются ограниченными, однако их отношение к $1-\sigma_{\kappa 2}$ неограниченно возрастает в месте с к. Поэтому постараемся преобразовать системы (1.16) таким образом, чтобы свободные члены $\omega'_{\kappa i}$ полученных систем стремились к нулю вместе с $1-\sigma_{\kappa i}$, причем так, чтобы отношения $\frac{\omega'_{\kappa i}}{1-\sigma_{\kappa i}}$ оставались ограниченными. С этой целью, выделив из свободных членов второй системы слагаемые

$$-\frac{2(-1)^{\kappa}\beta_{\kappa}}{\operatorname{ch}\beta_{\kappa} b}\left\{\operatorname{ch}\beta_{\kappa} d\int_{d}^{b} T(t)\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-t)\,dt+\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-d)\int_{0}^{d} T(t)\operatorname{ch}\beta_{\kappa} t\,dt\right\}, \quad (1.21)$$

имеющие переменный знак, введем новые неизвестные m'_{κ} и n'_{κ}, определенные зависимостями

$$m_{\kappa}=m'_{\kappa} \qquad n_{\kappa}=n'_{\kappa}+$$

$$+2(-1)^{\kappa+1}\beta_{\kappa}\left\{e^{-\beta_{\kappa}(b-d)}\int_{d}^{b} T(t)\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-t)\,dt+e^{-\beta_{\kappa} d}\int_{0}^{d} T(t)\operatorname{ch}\beta_{\kappa} t\,dt\right\}. \quad (1.22)$$

Подставляя значения m_{κ} и n_{κ} из (1.22) в (1.18), получим следующую совокупность систем линейных уравнений:

$$m'_{\kappa}=\frac{\alpha_{\kappa}}{\lambda_2\operatorname{cth}\alpha_{\kappa}(b-d)+\lambda_2\operatorname{th}\alpha_{\kappa} d}\left\{\frac{2\lambda_2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m'_p}{\alpha_p^2+\alpha_{\kappa}^2}+\frac{2\lambda_1}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n'_p}{\beta_p^2+\alpha_{\kappa}^2}+\right.$$

$$+\frac{\lambda_1 d\,\xi_{\kappa}}{\operatorname{sh}\alpha_{\kappa}(b-d)}+\frac{\lambda_2 d\,\eta_{\kappa}}{\operatorname{sh}\alpha_{\kappa} d}-$$

$$-\frac{4\lambda_1}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\beta_p}{\beta_p^2+\alpha_{\kappa}^2}\left[e^{-\beta_p(b-d)}\int_{d}^{b} T(t)\operatorname{sh}\beta_p(b-t)\,dt+\right.$$

$$\left.\left.+e^{-\beta_p d}\int_{0}^{d} T(t)\operatorname{ch}\beta_p t\,dt\right]\right\}, \quad (1.23)$$

$$n'_{\kappa}=\frac{\beta_{\kappa}\operatorname{ch}\beta d\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-d)}{\operatorname{ch}\beta_{\kappa} b}\left\{\frac{2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m'_p}{\alpha_p^2+\beta_{\kappa}^2}+\frac{2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n'_p}{\beta_p^2+\beta_{\kappa}^2}+\right.$$

$$+\frac{b-d}{\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-d)}\left[\gamma_{\kappa}^{*}-\frac{1}{\beta_{\kappa}}\int_{d}^{b}\tau_{\kappa}(t)\operatorname{sh}\beta_{\kappa}(b-t)\,dt\right]-$$

$$-\frac{b-d}{\beta_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa d}\int_0^d \tau_\kappa(t)\operatorname{ch}\beta_\kappa t\,dt+$$

$$+2(-1)^\kappa e^{-\beta_\kappa b}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\int_d^b T(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)}\int_0^d T(t)\operatorname{ch}\beta_\kappa t\,dt\right]-$$

$$-\frac{4}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p\beta_p}{\beta_p^2+\beta_\kappa^2}\left[e^{-\beta_p(b-d)}\int_d^b T(t)\operatorname{sh}\beta_p(b-t)\,dt+\right.$$

$$\left.+e^{-\beta_p d}\int_d^b T(t)\operatorname{ch}\beta_p t\,dt\right]\Bigg\}.$$

Последние слагаемые обеих систем представляют знакопеременные ряды, абсолютно и равномерно сходящиеся в силу сделанных в начале параграфа предположений относительно функции $T(x)$.

Как нетрудно видеть из (1.23), свободные члены обеих систем совокупности стремятся к нулю так же, как $\frac{1}{\kappa}$, откуда следует, что совокупность бесконечных систем линейных уравнений (1.23) имеет ограниченное решение.

Вместе с тем полученные выражения свободных членов имеют довольно сложный вид, ибо входящие в них ряды весьма трудно суммируемы. Структура свободных членов совокупности может быть значительно упрощена, если, кроме предполагавшейся ранее ограниченности вариации функции $T(x)$ в промежутке $(0, b)$, потребовать, чтобы $T(x)$ была непрерывна и имела почти всюду в $(0, b)$ производную с ограниченной вариацией.

В этом случае, интегрируя выражение (1.21) по частям, будем иметь:

$$\frac{2(-1)^{\kappa+1}\beta_\kappa}{\operatorname{ch}\beta_\kappa b}\left\{\operatorname{ch}\beta_\kappa d\int_d^t T(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}\beta_\kappa(b-d)\int_0^d T(t)\operatorname{ch}\beta_\kappa t\,dt\right\}=$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{\operatorname{ch}\beta_k b}\left\{ T(d)\operatorname{ch}\beta_k b - T(b)\operatorname{ch}\beta_k d \int_d^b T'(t)\operatorname{ch}\beta_k(b-t)\,dt - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh}\beta_k(b-d)\int_0^d T(t)\operatorname{sh}\beta_k t\,dt \right\}. \qquad (1.24)$$

Выделим главную часть выражения (1.24) и обозначим:

$$m_k = m_k^*, \qquad (1.25)$$

$$n_k = n_k^* + 2(-1)^{k+1}T(d).$$

Тогда совокупность (1.18) преобразуется в следующую

$$m_k^* = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{cth}\alpha_k(b-d) + \lambda_2 \operatorname{th}\alpha_k d}\left\{ \frac{2\lambda_2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p^*}{\alpha_p^2+\alpha_k^2} + \frac{2\lambda_1}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{\beta_p^2+\alpha_k^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_1 d\,\zeta_k}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-d)} - \frac{\lambda_2 d\,\eta_k}{\operatorname{sh}\alpha_k d} - \frac{4\lambda_1 T(d)}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\beta_p^2+\alpha_k^2} \right\},$$

$$n_k^* = \frac{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k(b-d)\operatorname{ch}\beta_k d}{\operatorname{ch}\beta_k b}\left\{ \frac{2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_k^*}{\alpha_p^2+\beta_k^2} + \frac{2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{\beta_p^2+\beta_k^2} + \right. \qquad (1.26)$$

$$+ \frac{b-d}{\operatorname{sh}\beta_k(b-d)}\left[\gamma_k - \frac{1}{\beta_k}\int_d^b \tau_k(t)\operatorname{sh}\beta_k(b-t)\,dt \right] -$$

$$- \frac{b-d}{\beta_k \operatorname{ch}\beta_k d}\int_0^d \tau_k(t)\operatorname{ch}\beta_k t\,dt - \frac{4T(d)}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{\beta_p^2+\beta_k^2} +$$

$$+ \frac{2(-1)^k}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k(b-d)}\left[T(b) - \int_d^b T'(t)\operatorname{ch}\beta_k(b-t)\,dt \right] +$$

$$\left. - \frac{2(-1)^k}{\beta_k \operatorname{ch}\beta_k d}\int_0^d T'(t)\operatorname{sh}\beta_k t\,dt \right\}.$$

Ряды, входящие в выражения свободных членов, легко суммируются, и совокупность систем (1.26) окончательно примет вид:

$$m_k^* = \frac{\alpha_k}{\lambda_1 \operatorname{cth}\alpha_k(b-d) + \lambda_2 \operatorname{th}\alpha_k d}\left\{ \frac{2\lambda_2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p^*}{\alpha_p^2+\alpha_k^2} + \frac{2\lambda_1}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{\beta_p^2+\alpha_k^2} + \right.$$

$$+\frac{\lambda_1 d\,\xi_k}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-d)}-\frac{\lambda_2 d\,\eta_k}{\operatorname{sh}\alpha_k d}-\frac{2\lambda_1 T(d)}{\alpha_k^2(b-d)}\left[1-\frac{\alpha_k(b-d)}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-d)}\right]\Bigg|,$$

$$n_k^*=\frac{\beta_k\operatorname{sh}\beta_k(b-d)\operatorname{sh}\beta_k d}{\operatorname{ch}\beta_k b}\left|\frac{2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p^*}{\alpha_p^2+\beta_k^2}+\frac{2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{\beta_p^2+\beta_k^2}+\right. \tag{1.27}$$

$$+\frac{b-d}{\operatorname{sh}\beta_k(b-d)}\left|\gamma_k-\frac{1}{\beta_k}\int_d^b\tau_k(t)\operatorname{sh}\beta_k(b-t)\,dt\right|-$$

$$-\frac{b-d}{\beta_k\operatorname{ch}\beta_k d}\int_0^d\tau_k(t)\operatorname{ch}\beta_k t\,dt-\frac{2T(d)}{\alpha_k^2(b-d)}\left|1-\frac{\alpha_k(b-d)}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-d)}\right|+$$

$$+\frac{2(-1)^k}{\beta_k\operatorname{sh}\beta_k(b-d)}\left[T(b)-\int_d^b T'(t)\operatorname{ch}\beta_k(b-t)\,dt\right]+$$

$$+\frac{2(-1)^k}{\beta_k\operatorname{ch}\beta_k d}\int_0^d T'(t)\operatorname{sh}\beta_k t\,dt\Bigg|.$$

Свободные члены полученной системы удовлетворяют вышеперечисленным требованиям, откуда следует, что полученная система имеет ограниченное решение.

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера установившееся распределение температуры в неоднородном теле, когда внешние грани его поддерживаются при постоянной температуре T, причем внутри второй среды происходит тепловыделение с постоянной интенсивностью Q_2. Кроме того, примем, что коэффициент теплопроводности второй среды λ_2 в пять раз больше коэффициента теплопроводности первой среды λ_1 и $d=\frac{2}{3}b$*.

В этом случае величины, входящие в предыдущие соотношения, будут:

$$Q_1(x,y)=0,\quad Q_2(x,y)=Q_2,\quad T(x)=T(y)=T,\quad \lambda_2=5\lambda_1,\quad d=\frac{2}{3}b$$

---

* Заметим, что расчет распределения температуры в случае, когда грани поддерживаются при переменной температуре, или когда интенсивность тепловыделения изменяется в зависимости от координат, не представляет никакой принципиальной разницы.

и совокупность бесконечных систем (1.27) примет вид:

$$m_\kappa^* = \frac{4(2\kappa+1)}{\pi[\operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d)+5\operatorname{th}\alpha_\kappa d]}\left\{5\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p^*}{(2p+1)^2+(2\kappa+1)^2}+\right.$$

$$\left.+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{(4p)^2+(2\kappa+1)^2}+\frac{2}{(2\kappa+1)^2}\left[T+5\frac{Q_2 d^2}{\lambda_2\pi(2\kappa+1)}\right]\right\}, \tag{1.28}$$

$$n_\kappa^* = \frac{2\kappa\operatorname{sh}\kappa\pi\operatorname{ch}2\kappa\pi}{\pi\operatorname{ch}3\kappa\pi}\left\{8\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p^*}{(2p+1)^2+(4\kappa)^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p^*}{p^2+\kappa^2}+\frac{T}{\kappa^2}\right\}.$$

$$\left(\alpha_\kappa=\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{d}\right).$$

Обозначим:

$$m_\kappa^* = \gamma m_\kappa'' + 2T, \quad n_\kappa^* = \gamma n_\kappa'' + 2T, \quad \gamma = \frac{40 d^2 Q_2}{\pi^2\lambda_2}. \tag{1.29}$$

Подставляя значения m_κ^* и n_κ^* из (1.29) в (1.28), придем к следующей совокупности двух бесконечных систем:

$$m_\kappa'' = \frac{1}{\operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d)+5\operatorname{th}\alpha_\kappa d}\left\{\frac{2(2\kappa+1)}{\pi}\left[10\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p''}{(2p+1)^2+(2\kappa+1)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p''}{(4p)^2+(2\kappa+1)^2}\right]+\frac{1}{(2\kappa+1)^2}\right\}, \tag{1.30}$$

$$n_\kappa'' = \frac{2\kappa\operatorname{sh}\kappa\pi\operatorname{ch}2\kappa\pi}{\pi\operatorname{ch}3\kappa\pi}\left\{8\sum_{p=0}^{\infty}\frac{m_p''}{(2p+1)^2+(4\kappa)^2}+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p''}{p^2+\kappa^2}\right\},$$

свободные члены которой убывают со скоростью $\frac{1}{\kappa^2}$.

Выражения (1.29) для $f_\kappa(x)$ и $g_\kappa(x)$ примут вид:

$$f_\kappa(x) = \frac{2(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)\pi}\left\{2T+\gamma m_\kappa''\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma\alpha_\kappa^2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n_p''}{\beta_p(\beta_p^2+\alpha_\kappa^2)}\sin\beta_p(x-d)\right\}, \tag{1.31}$$

$$g_\kappa(x) = \frac{2(-1)^\kappa}{(2\kappa+1)\pi}\left\{2T+\frac{\gamma}{5(2\kappa+1)^2}+\gamma m_\kappa''\frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa x}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma\alpha_\kappa^2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p m_p''}{\alpha_p(\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2)}\cos\alpha_p x\right\},$$

откуда для $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ получим:

$$V_1(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{2\kappa+1}\left\{2T+\gamma m''_\kappa\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma\alpha_\kappa^2}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{n''_p}{\beta_p(\beta_p^2+\alpha_\kappa^2)}\sin\beta_p(x-d)\right\}\cos\alpha_\kappa y\,, \tag{1.32}$$

$$U_2(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{2\kappa+1}\left\{2T+\frac{\gamma}{5(2\kappa+1)^2}+\gamma m''_\kappa\frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa x}{\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma\alpha_\kappa^2}{d}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p m''_p}{\alpha_p(\alpha_p^2+\alpha_\kappa^2)}\cos\alpha_p x\right\}\cos\alpha_\kappa y.$$

Для усиления сходимости рядов в правых частях выражений (1.32) выделим предельные значения m''_κ и n''_κ. При этом, как легко видеть из (1.28), $\lim\limits_{\kappa\to\infty} m''_\kappa=\lim\limits_{\kappa\to\infty} n''_\kappa$.

Суммируя получающиеся ряды, а также меняя порядок суммирования в двойных рядах, окончательно получим следующие формулы для $V_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$:

$$V_1(x,y)=T+\gamma\left\{m\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{d}\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(m''_\kappa-m)\frac{(-1)^\kappa}{2\kappa+1}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d)}\cos\alpha_\kappa y+\frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}(n''_\kappa-m)\frac{\operatorname{ch}\beta_\kappa y}{\kappa\operatorname{ch}\beta_\kappa d}\sin\beta_\kappa(x-d)\right\}, \tag{1.33}$$

$$U_2(x,y)=T+\gamma\left\{\frac{m}{2}+\left(1-\frac{y^2}{d^2}\right)\frac{\pi^2}{80}+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa(m''_\kappa-m)\frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa y}{(2\kappa+1)\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}\cos\alpha_\kappa x+$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\sum_{\kappa=0}^{\infty}(-1)^\kappa\left[m''_\kappa-m-\frac{1}{5(2\kappa+1)}\right]\frac{\operatorname{ch}\alpha_\kappa x}{(2\kappa+1)\operatorname{ch}\alpha_\kappa d}\cos\alpha_\kappa y\,.\right.$$

Здесь
$$m=\lim_{\kappa\to\infty} m''_\kappa=\lim_{\kappa\to\infty} n''_\kappa\,. \tag{1.34}$$

Аналогично, для $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ имеем

$$\varphi_k(x) = 2T\frac{1-(-1)^k}{k\pi} + \frac{\gamma}{b-d}\left\{ n_k^- \frac{\operatorname{sh}\beta_k(b-x)}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k d} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\beta_k}{b-d}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p^-}{\beta_p(\beta_p^2+\beta_k^2)} \sin\beta_p(x-d) \right\},$$

$$\psi_k(x) = 2T\frac{1-(-1)^k}{k\pi} + \frac{\gamma}{b-d}\left\{ n_k^- \frac{\operatorname{ch}\beta_k x}{\beta_k \operatorname{ch}\beta_k d} + \right. \tag{1.35}$$

$$\left. + \frac{2\beta_k}{d}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p m_p^-}{\alpha_p(\alpha_p^2+\beta_k^2)} \cos\alpha_p x \right\},$$

откуда для $V_2(x, y)$ получаем следующее выражение

$$V_2(x,y) = T + \gamma\left\{ 2m\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{d}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{y}{d}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(n_k^- - m)\frac{\operatorname{sh}\beta_k(b-x)\sin\beta_k(y-d) + \operatorname{sh}\beta_k(b-y)\sin\beta_k(x-d)}{k \operatorname{sh} k\pi} \right\}. \tag{1.36}$$

Заметим, что пользуясь вторым из соотношений (1.35), для $V_3(x, y) = V_2(y, x)$ получим точно такое же выражение, какое было получено выше.

Перейдем теперь к оценке m_k^- и n_k^-. Пользуясь теоремами о регулярных системах и применяя с двух сторон лимитанты, получим:

$\bar{m}_0^- = 0{,}628$ $\tilde{m}_0^- = 0{,}573$ $\bar{n}_1^- = 0{,}420$ $\tilde{n}_1^- = 0{,}352$

$\bar{m}_1^- = 0{,}527$ $\tilde{m}_1^- = 0{,}448$ $\bar{n}_2^- = 0{,}461$ $\tilde{n}_2^- = 0{,}364$

$\bar{m}_2^- = 0{,}516$ $\tilde{m}_2^- = 0{,}425$ $\bar{n}_3^- = 0{,}474$ $\tilde{n}_3^- = 0{,}367$

$\bar{m}_3^- = 0{,}511$ $\tilde{m}_3^- = 0{,}412$ $\bar{n}_4^- = 0{,}481$ $\tilde{n}_4^- = 0{,}366$

$\bar{m}_4^- = 0{,}509$ $\tilde{m}_4^- = 0{,}404$ $\bar{n}_5^- = 0{,}484$ $\tilde{n}_5^- = 0{,}365$

$\bar{m}_5^- = 0{,}508$ $\tilde{m}_5^- = 0{,}398$ $\bar{n}_6^- = 0{,}488$ $\tilde{n}_6^- = 0{,}364$

$\bar{m}_6^- = 0{,}507$ $\tilde{m}_6^- = 0{,}394$ $\bar{n}_7^- = 0{,}488$ $\tilde{n}_7^- = 0{,}363$

$\bar{m}_7^- = 0{,}507$ $\tilde{m}_7^- = 0{,}390$ $\bar{n}_8^- = 0{,}506$ $\tilde{n}_8^- = 0{,}357$

$\bar{m}_8^- = 0{,}507$ $\tilde{m}_8^- = 0{,}388$ $(k > 7)$

$\bar{m}_k^- = 0{,}506$ $\tilde{m}_k^- = 0{,}357$

$(k > 8)$

Здесь знаки — и ~ обозначают соответственно верхнюю и нижнюю грани $m_к^*$ и $n_к^*$. Подставляя значения $\overline{m}_к^*$, $\overline{n}_к^*$ и $\underline{m}_к^*$, $\underline{n}_к^*$ в (1.32) и (1.36), получим выражения функции распределения температуры U(x, y) в теле с избытком и недостатком.

Прежде чем перейти к вычислению функции распределения температуры U(x, y), представим последнюю в виде:

$$U(x, y) = T + \gamma\, u(x, y) = T + \frac{40\, d^2 Q_2}{\pi^2 \lambda_2}\, u(x, y).$$

Значения u(x, y) для некоторых точек приведены в таблице 1.

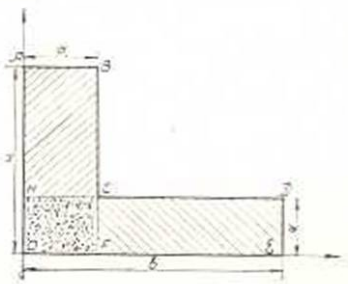
Таблица 1

y \ x	0	$\pm\frac{d}{2}$	$\pm\frac{3d}{4}$	$\pm d$	$\pm\frac{5d}{4}$	$\pm\frac{3d}{2}$
0	0,387 0,360	0,372 0,345	0,353 0,327	0,327 0,302	0,160 0,148	0
$\pm\frac{d}{2}$	0,372 0,345	0,357 0,343	0,337 0,308	0,310 0,283	0,152 0,137	0
$\pm\frac{3d}{4}$	0,353 0,327	0,337 0,308	0,316 0,258	0,287 0,253	0,136 0,120	0
$\pm d$	0,327 0,302	0,310 0,283	0,287 0,253	0,253 0,179	0,101 0,086	0
$\pm\frac{5d}{4}$	0,160 0,148	0,152 0,137	0,136 0,120	0,101 0,086	0,052 0,044	0
$\pm\frac{3d}{2}$	0	0	0	0	0	0

При этом в верхних строчках даны значения u(x, y) с избытком, а в нижних—с недостатком.

§ 2. Распространение тепла в неоднородном призматическом теле с поперечным сечением в виде прямого угла

Рассмотрим плоское распространение тепла в теле с поперечным сечением OABCDE (фиг. 3), состоящем из трех сред с различными коэффициентами теплопроводности, когда задано распределение температуры на сторонах угла.



Фиг. 3.

Обозначим функцию распределения температуры в первой среде через $U_1(x, y)$, во второй—$U_2(x, y)$ и в третьей — $U_3(x, y)$.

Функции $U_i(x, y)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_i(x, y)}{\partial y^2} = 0, \qquad (2.1)$$

соответствующим граничным условиям

$$U_1(x, d)=S(x),\ U_1(x, 0)=S_0(x),\ U_1(b, y)=S_1(y),\ U_2(x, 0)=S_0(x), \tag{2.2}$$

$$U_2(0, y)=T_2(y),\ U_3(0, y)=T_0(y),\ U_3(d_1, y)=T(y),\ U_3(x, b_1)=T_1(x)$$

и условиям на линиях контакта CF и HC

$$U_1(d_1, y)=U_2(d_1, y),\ \lambda_1 \left.\frac{\partial U_1}{\partial x}\right|_{x=d_1} = \lambda_2 \left.\frac{\partial U_2}{\partial x}\right|_{x=d_1} \tag{2.3}$$

$$U_2(x, d)=U_3(x, d),\ \lambda_2 \left.\frac{\partial U_2}{\partial y}\right|_{y=d} = \lambda_3 \left.\frac{\partial U_3}{\partial y}\right|_{y=d}.$$

Здесь $S_0(x)$, $S(x)$, $S_1(y)$, также $T_0(y)$, $T(y)$ и $T_1(x)$—заданные функции распределения температуры соответственно вдоль OE, CD, ED, OA, CB и AB рассматриваемого угла (относительно этих функций предполагаем лишь, что они имеют ограниченную вариацию), λ_i — коэффициент теплопроводности i-ой среды (i = 1, 2, 3).

Представим функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ в виде рядов

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d},\ U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \tag{2.4}$$

где $f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_1(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d}\, dy$, $g_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U_2(x, y) \sin \frac{k\pi y}{d}\, dy$.

Дифференциальные уравнения для $f_k(x)$ и $g_k(x)$ соответственно будут:

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 f_k(x) = \frac{2k\pi}{d^2}\left[(-1)^k S(x) - S_0(x)\right],$$

$$g_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d}\right)^2 g_k(x) = \frac{2k\pi}{d^2}\left[(-1)^k U_3(x, d) - S_0(x)\right]. \tag{2.5}$$

Из (2.2) и (2.3) получим граничные условия для $f_k(x)$ и $g_k(x)$:

$$f_k(b) = s_{k1},\ f_k(d_1) = g_k(d_1),\ \lambda_1 f_k'(d_1) = \lambda_2 g_k'(d_1),\ g_k(0) = t_{k0}. \tag{2.6}$$

Здесь

$$s_{k1} = \frac{2}{d} \int_0^d S_1(y) \sin \frac{k\pi y}{d}\, dy,\ t_{k0} = \frac{2}{d} \int_0^d T_0(y) \sin \frac{k\pi y}{d}\, dy.$$

Представим функцию $U_3(x, y)$ в виде ряда

$$U_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_1},\ \varphi_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^d U_3(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d}\, dx. \tag{2.7}$$

Подставляя значение $U_2(x, y)$ из (2.7) в уравнение (2.5) и решая последнее, а также используя условия (2.6), будем иметь:

$$f_\kappa(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}\left[B_\kappa \operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-x)+r_\kappa \operatorname{sh}\alpha_\kappa x\right] + \\ + \frac{2}{d}\int_{d_1}^{x}\left[(-1)^\kappa S(t)-S_0(t)\right]\operatorname{sh}\alpha_\kappa(x-t)\,dt,$$

$$g_\kappa(x) = \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa x}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa b}\left[B_\kappa\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d_1)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1}+r_\kappa\right]+\rho_\kappa\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(d_1-x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1} - \\ -\frac{2}{d}\int_{x}^{d_1}S_0(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa(t-x)\,dt-(-1)^\kappa\frac{2\gamma^2\kappa}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\psi_p(d)}{p^2+(\gamma\kappa)^2}\sin\alpha_p x. \qquad (2.8)$$

Здесь обозначено

$$\alpha_\kappa=\frac{\kappa\pi}{d},\quad \gamma=\frac{d_1}{d},\quad r_\kappa=s_{\kappa 1}-\frac{2}{d}\int_{d_1}^{b}\left[(-1)^\kappa S(t)-S_0(t)\right]\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-t)\,dt,$$

$$\rho_\kappa=t_{\kappa 0}+\frac{2}{d}\int_{0}^{d_1}S_0(t)\operatorname{sh}\alpha_\kappa t\,dt. \qquad (2.9)$$

Неизвестные постоянные B_κ, входящие в выражения (2.8), определяются из системы уравнений

$$B_\kappa=\frac{1}{\lambda_1\operatorname{ch}\alpha_\kappa(b-d_1)+\lambda_2\operatorname{cth}\alpha_\kappa d_1\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d_1)}\left\{\lambda_2\operatorname{sh}\alpha_\kappa b\times\right.$$

$$\left.\times\left[(-1)^\kappa\frac{2\gamma}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p(-1)^p\psi_p(d_1)}{p^2+(\gamma\kappa)^2}+\frac{\rho_\kappa}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1}\right]+r_\kappa(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{ch}\alpha_\kappa d_1\right\}. \qquad (2.10)$$

Прежде чем найти граничные условия для $\varphi_\kappa(y)$, представим $U_2(x, y)$ в виде ряда

$$U_2(x,y)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\psi_\kappa(y)\sin\frac{\kappa\pi x}{d_1},\quad \psi_\kappa(y)=\frac{2}{d_1}\int_{0}^{d_1}U_2(x,y)\sin\frac{\kappa\pi x}{d_1}\,dx. \qquad (2.11)$$

Аналогично предыдущему, дифференциальные уравнения и граничные условия для $\varphi_\kappa(y)$ и $\psi_\kappa(y)$ соответственно будут:

$$\varphi_\kappa''(y)-\left(\frac{\kappa\pi}{d_1}\right)^2\varphi_\kappa(y)=\frac{2\kappa\pi}{d_1^2}\left[(-1)^\kappa T(y)-T_0(y)\right],$$

$$\psi_\kappa''(y)-\left(\frac{\kappa\pi}{d_1}\right)^2\psi_\kappa(y)=\frac{2\kappa\pi}{d_1^2}\left[(-1)^\kappa\sum_{p=1}^{\infty}f_p(d_1)\sin\frac{p\pi y}{d}-T_0(y)\right], \qquad (2.12)$$

$$\varphi_\kappa(b_1)=t_{\kappa 1},\quad \varphi(d)=\psi_\kappa(d),\quad \lambda_3\varphi_\kappa'(d)=\lambda_2\psi_\kappa'(d),\quad \psi_\kappa(0)=s_{\kappa 0}. \qquad (2.13)$$

Здесь

$$t_{\kappa 1}=\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}T_1(x)\sin\frac{\kappa\pi x}{d_1}dx,\quad s_{\kappa 0}=\frac{2}{d_1}\int_0^{d}S_0(t)\sin\frac{\kappa\pi x}{d_1}dx. \qquad (2.14)$$

Решая (2.12) и удовлетворяя условиям (2.13), получим:

$$\Psi_\kappa(y)=\frac{1}{\operatorname{sh}\beta_\kappa b_1}\left[F_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-y)+q_\kappa\operatorname{sh}\beta_\kappa y\right]+$$
$$+\frac{2}{d_1}\int_d^y\left[(-1)^\kappa T(t)-T_0(t)\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(y-t)\,dt,$$
$$\psi_\kappa(y)=\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa y}{\operatorname{sh}\beta_\kappa b_1}\left[F_\kappa\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-d)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d}+q_\kappa\right]+\tau_\kappa\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-y)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d}- \qquad (2.15)$$
$$-\frac{2}{d_1}\int_y^d T_0(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa(t-y)\,dt+(-1)^{\kappa+1}\frac{2\delta^2\kappa}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p(d_1)}{p^2+(\delta\kappa)^2}\sin\beta_p y.$$

При этом постоянные F_κ определяются из уравнений:

$$F_\kappa=\frac{1}{\lambda_2\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-d)+\lambda_3\operatorname{ch}\beta_\kappa(b_1-d)}\left\{\lambda_2\operatorname{sh}\beta_\kappa b_1\times\right.$$
$$\left.\times\left[(-1)^p\frac{2\delta}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p(-1)^p f_p(d)}{p^2+(\delta\kappa)^2}+\frac{\rho_\kappa}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d}\right]+(\lambda_2-\lambda_3)q_\kappa\operatorname{ch}\beta_\kappa d\right\}. \qquad (2.16)$$

Здесь

$$\beta_\kappa=\frac{\kappa\pi}{d_1},\quad \delta=\frac{1}{\gamma}=\frac{d}{d_1},\quad \tau_\kappa=s_{\kappa 0}+\frac{2}{d_1}\int_0^{d_1}T_0(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa t\,dt.$$

$$q_\kappa(t)=t_{\kappa 1}+\frac{2}{d_1}\int_d^b\left[(-1)^\kappa T(t)-T_0(t)\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-t)\,dt. \qquad (2.17)$$

Преобразуем соотношения (2.10) и (2.17), введя новые неизвестные m_κ и n_κ

$$B_\kappa=\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa(b-d_1)}\left[\frac{(-1)^\kappa}{\kappa}m_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa b-r_\kappa\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1\right],$$

$$F_\kappa = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_\kappa (b_1 - d)} \left[\frac{(-1)^\kappa}{\kappa} n_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa b_1 - q_\kappa \operatorname{sh}\beta_\kappa d \right]. \qquad (2.18)$$

Подставив значения B_κ и F_κ из (2.18) в (2.10) и (2.16), для определения m_κ и n_κ приходим к следующей совокупности двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$m_\kappa = \frac{\lambda_2 \kappa}{\lambda_1 \operatorname{cth}\alpha_\kappa (b - d_1) + \lambda_2 \operatorname{cth}\alpha_\kappa d_1} \left\{ \frac{2\gamma}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p}{p^2 + (\gamma\kappa)^2} + \frac{(-1)^\kappa \rho_\kappa}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1} + \right.$$

$$\left. + (-1)^\kappa \frac{\lambda_1 r_\kappa}{\lambda_2 \operatorname{sh}\alpha_\kappa (b - d_1)} \right\}, \qquad (2.19)$$

$$n_\kappa = \frac{\lambda_2 \kappa}{\lambda_2 \operatorname{cth}\beta_\kappa (b_1 - d) + \lambda_2 \operatorname{cth}\beta_\kappa d} \left\{ \frac{2\delta}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{m_p}{p^2 + (\delta\kappa)^2} + \frac{(-1)^\kappa}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d} \tau_\kappa + \right.$$

$$\left. + (-1)^\kappa \frac{\lambda_2 q}{\lambda_2 \operatorname{sh}\beta_\kappa (b_1 - d)} \right\}.$$

При этом выражения для $f_\kappa(x)$ и $g_\kappa(x)$ окончательно примут вид:

$$f_\kappa(x) = \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa (b - x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa (b - d_1)} \left\{ \frac{(-1)^\kappa}{\kappa} m_\kappa - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{d} \int_{d_1}^{x} [(-1)^\kappa S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh}\alpha_\kappa (t - d_1)\, dt \right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa (x - d_1)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa (b - d_1)} \left\{ s_{\kappa 1} - \frac{2}{d} \int_{x}^{b} [(-1)^\kappa S(t) - S_0(t)] \operatorname{sh}\alpha_\kappa (b - t)\, dt \right\}, \qquad (2.20)$$

$$g_\kappa(x) = \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa x}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1} \left\{ \frac{(-1)^\kappa}{\kappa} m_\kappa + \frac{2}{d} \int_{x}^{d_1} S_0(t) \operatorname{sh}\alpha_\kappa (d_1 - t)\, dt \right\} +$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa (d_1 - x)}{\operatorname{sh}\alpha_\kappa d_1} \left\{ t_{\kappa 0} + \frac{2}{d} \int_{0}^{x} S_0(t) \operatorname{sh}\alpha_\kappa t\, dt \right\} +$$

$$+ (-1)^{\kappa+1} \frac{2\gamma^2 \kappa}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p n_p}{p[p^2 + (\gamma\kappa)^2]} \sin\alpha_p x.$$

Аналогично, для $\varphi_\kappa(y)$ и $\psi_\kappa(y)$ получим:

$$\varphi_\kappa(y) = \frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_2-y)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-d)}\left\{(-1)^\kappa\frac{n_\kappa}{\kappa} - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{d_1}\int_d^y\left[(-1)^\kappa T(t)-T_0(t)\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(t-t)\,dt\right\} +$$

$$+\frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(y-d)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-d)}\left\{t_{\kappa 1}-\frac{2}{d_1}\int_y^{b_1}\left[(-1)^\kappa T(t)-T_0(t)\right]\operatorname{sh}\beta_\kappa(b_1-t)\,dt\right\}, \tag{2.21}$$

$$\psi_\kappa(y) = \frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa y}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d}\left\{(-1)^\kappa\frac{n_\kappa}{\kappa} + \right.$$

$$+\frac{2}{d}\int_y^d T_0(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-t)\,dt\Big\} + \frac{\operatorname{sh}\beta_\kappa(d-y)}{\operatorname{sh}\beta_\kappa d}\left\{s_{\kappa 0} + \right.$$

$$\left. +\frac{2}{d}\int_0^y T_0(t)\operatorname{sh}\beta_\kappa t\,dt\right\} + (-1)^{\kappa+1}\frac{2\delta^2\kappa}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p m_p}{p[p^2+(\delta\kappa)^2]}\sin\beta_p y.$$

Исследуем теперь совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений (2.19). Как легко видеть, суммы модулей коэффициентов первой и второй систем соответственно будут:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1\operatorname{cth}\alpha_\kappa(b-d_1)+\lambda_2\operatorname{cth}\alpha_\kappa d_1}\left(\operatorname{cth}\alpha_\kappa d_1-\frac{1}{\alpha_\kappa d_1}\right)<\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2\operatorname{cth}\beta_\kappa(b_1-d)+\lambda_2\operatorname{cth}\beta_\kappa d}\left(\operatorname{cth}\beta_\kappa d-\frac{1}{\beta_\kappa d}\right)<\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}. \tag{2.22}$$

Таким образом, при ограниченных значениях отношений $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ и $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ совокупность систем (2.19) вполне регулярна.

С другой стороны, из условия ограниченности вариации заданных на границе функций нетрудно видеть, что свободные члены совокупности систем (2.19) ограничены. Из теории регулярных систем [6] следует, что совокупность (2.19) имеет ограниченное решение.

Задаваясь значениями граничных функций и коэффициентов теплопроводности, на основании теорем о вполне регулярных системах, оценим сверху и снизу значения m_κ и n_κ, посредством которых из формул (2.20) и (2.21) определятся $f_\kappa(x)$, $g_\kappa(x)$, $\varphi_\kappa(y)$ и $\psi_\kappa(y)$.

Пример. Рассмотрим в качестве примера задачу о плоском распределении температуры в однородном призматическом теле с угловидным поперечным сечением, когда длина стенок бесконечно велика ($b=b_1=\infty$), толщина их $d=d_1$, причем температура наружных поверхностей поддерживается при 1000°C, а внутренних — 0°C (для этого случая распределение температуры в ряде точек было вычислено А. П. Ваничевым [7] посредством метода сеток).

Величины, входящие в выражения (2.19), (2.20) и (2.21), будут:

$$S_0(x)=T_0(y)=1000^\circ,\quad S(x)=T(y)=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3,\quad \alpha_k=\beta_k=\frac{k\pi}{d},$$

$$s_{k0}=t_{k0}=2000\,\frac{1-(-1)^k}{k\pi},\quad \rho_k=2000\,\frac{\operatorname{ch} k\pi-(-1)^k}{k\pi}. \tag{2.23}$$

$$\frac{r_k}{\operatorname{sh}\alpha_k(b-d)}=\frac{q_k}{\operatorname{sh}\beta_k(b-d)}=\frac{2000}{k\pi}.$$

При этом совокупность (2.19) примет вид:

$$m_k=\frac{k}{1+\operatorname{cth} k\pi}\left\{\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{m_p}{p^2+k^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2000}{k\pi}\left[(-1)^k(1+\operatorname{cth} k\pi)-\frac{1}{\operatorname{sh} k\pi}\right]\right\}. \tag{2.24}$$

Введем новые неизвестные m_k^*, связанные с m_k зависимостью

$$m_k=\frac{1000}{\pi}\left[-m_k^*+2(-1)^k\right]. \tag{2.25}$$

Подставляя значения m_k из (2.25) в (2.24) и перенося к-ый член ряда в левую часть уравнения, придем к следующей бесконечной системе линейных уравнений:

$$m_k^*=\frac{2k}{(1+\operatorname{cth} k\pi)\,k\pi-1}\left\{k\sum_{p=1}^{\infty}{}'\frac{m_p^*}{p^2+k^2}+\frac{1}{k}\right\} \tag{2.26}$$

со стремящимися к нулю свободными членами. Штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $p=k$ опускается. Как нетрудно видеть из (2.26), $\lim\limits_{k\to\infty} m_p^*=0$.

Выражения (2.20) для коэффициентов $f_k(x)$ и $g_k(x)$ после некоторых преобразований примут вид:

$$f_k(x)=\frac{1000}{k\pi}\left[2+(-1)^{k+1}e^{-k\pi\left(\frac{x}{d}-1\right)}m_k^*\right], \tag{2.27}$$

$$g_\kappa(x) = \frac{1000}{\kappa\pi}\left\{2\left[1+(-1)^{\kappa+1}\left(1-\frac{x}{d}\right)\right]+(-1)^{\kappa+1}m_\kappa^*\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa x}{\operatorname{sh}\kappa\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\kappa^2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p m_p^*}{p(p^2+\kappa^2)}\sin\alpha_p x\right\}\quad\left(\alpha_\kappa=\frac{\kappa\pi}{d}\right).$$

Такой же вид будут иметь $\varphi_\kappa(y)$ и $\psi_\kappa(y)$. Найдем выражения для $U_1(x,y)$.

Подставив значение $f_\kappa(x)$ в первое из разложений (2.4), будем иметь:

$$U_1(x,y)=\frac{1000}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa}\left\{(-1)^{\kappa+1}m_\kappa^* e^{-\kappa\pi\left(\frac{x}{d}-1\right)}+2\right\}\sin\frac{\kappa\pi y}{d}$$

Суммируя вторые слагаемые в фигурных скобках, обусловливающие слабую сходимость, получим:

$$U_1(x,y)=1000\left\{1-\frac{y}{d}+\frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa}m_\kappa^* e^{-\kappa\pi\left(\frac{x}{d}-1\right)}\sin\frac{\kappa\pi y}{d}\right\}. \quad (2.28)$$

Далее, подставляя значение $g_\kappa(x)$ из (2.27) во второе из уравнений (2.4), будем иметь:

$$U_2(x,y)=$$

$$=\frac{1000}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\kappa}\left\{2\left[1+(-1)^{\kappa+1}\left(1-\frac{x}{d}\right)\right]+(-1)^{\kappa+1}\frac{\sin\alpha_\kappa x}{\operatorname{sh}\kappa\pi}m_\kappa^*+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\kappa+1}\frac{2\kappa^2}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{m_p^*}{p(p^2+\kappa^2)}\sin\frac{p\pi x}{d}\right\}\sin\frac{\kappa\pi x}{d}.$$

Суммируя первое слагаемое ряда и меняя порядок суммирования в двойном ряду, после некоторых преобразований окончательно получим:

$$U_2(x,y)=1000\left\{1-\frac{xy}{d^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi}\sum_{\kappa=1}^{\infty}(-1)^{\kappa+1}m_\kappa^*\frac{\operatorname{sh}\alpha_\kappa x\sin\alpha_\kappa y+\operatorname{sh}\alpha_\kappa y\sin\alpha_\kappa x}{\kappa\operatorname{sh}\kappa\pi}\right\}. \quad (2.29)$$

Заметим, что $U_2(x,y)=U_1(y,x)$.

Оценим сверху и снизу значения m_κ^*. Согласно теоремам о регулярных системах [6], из (2.26) получим:

$$\overline{m}_1^*=0{,}421,\quad \overline{m}_2^*=0{,}268,\quad \overline{m}_3^*=0{,}210,\quad \overline{m}_4^*=0{,}178,\quad \overline{m}_5^*=0{,}157,$$
$$\overline{m}_6^*=0{,}143,\quad \overline{m}_k^*=0{,}133\ (k>6)$$

$$\widetilde{m}_1^*=0{,}409,\quad \widetilde{m}_2^*=0{,}242,\quad \widetilde{m}_3^*=0{,}185,\quad \widetilde{m}_4^*=0{,}145,\quad \widetilde{m}_5^*=0{,}123,$$
$$\widetilde{m}_6^*=0{,}106,\quad \widetilde{m}_k^*=\frac{k}{\pi}\sum_{p=1}^{6}\frac{\overline{m}_p^*}{p^2+k^2}+\frac{1}{k}\quad (k>6)$$

Подставляя в (2.28) и (2.29) вместо m_k^* значения $\overline{m}_k^*$ и $\widetilde{m}_k^*$, получим верхнюю и нижнюю грани функции $U(x,y)$.

Ниже, в таблице 2, приведены значения $U(x,y)$ для некоторых точек. При этом в верхних строчках даются значения $\overline{U}(x,y)$ с избытком, в средних—с недостатком, в нижних же строчках для сравнения даются значения $U_в(x,y)$, полученные А. П. Ваничевым [7].

Таблица 2

y	x / U(x,y)	0	$\frac{d}{2}$	d	2d	3d
$\frac{d}{4}$	$\overline{U}(x,y)$	1000	902,3	814	754,0	750,2
	$\widetilde{U}(x,y)$	1000	901,5	813	753,9	750,2
	$U_в(x,y)$	1000	899	809	754	751
$\frac{d}{2}$	$\overline{U}(x,y)$	1000	803,0	619	505,8	500,3
	$\widetilde{U}(x,y)$	1000	801,4	614	505,6	500,2
	$U_в(x,y)$	1000	797	603	507	502
$\frac{3d}{4}$	$\overline{U}(x,y)$	1000	704,5	391	254,2	250,2
	$\widetilde{U}(x,y)$	1000	702,3	381	254,1	250,2
	$U_в(x,y)$	1000	694	356	255	251

Заметим, что в случае, если внешние грани тела поддерживаются при температуре T_0, а внутренние—при T, то выражения (2.28) и (2.29) нужно умножить на $\frac{T_0-T}{1000}$ и прибавить T.

Сектор математики
и механики АН Армянской ССР

Поступило 18 X 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н.* и *Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1951.
2. *Минасян Р. С.* Об одной задаче теплопроводности. ДАН Армянской ССР, т. XII, № 3, 1950.

3. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, т. XIII, № 1, 1950.
4. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
5. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Гостехиздат, 1950.
6. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950.
7. *Ванчев А. П.* Приближенный метод решения задач теплопроводности в твердых телах. Труды НИИ-1, № 25, 1947.

Ռ. Ս. Մինասյան

ԱՆՇԱՄԱՍԵՌ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐՈՒՄ ՋԵՐՄՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿԱՅՈՒՆԱՑԱԾ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է երկու տարբեր նյութերից կազմված քառակուսաձև լայնական հատվածքով պրիզմատիկ մարմնում ջերմության հարթ բաշխման խնդիրը, երբ տրված է ջերմության բաշխումը կողերի վրա՝ ջերմատարածրության առկայության դեպքում։ Լուծված է նաև երեք տարբեր նյութերից կազմված՝ անկյունաձև լայնական հատվածք ունեցող մարմնում ջերմության տարածման խնդիրը։

Յուրց է տրված ստացված դծային հավասարումների անվերջ սիստեմների անզուգորդությունը։ Լուծված է երկու օրինակ և ստացված արդյունքները համեմատված են Ա. Պ. Վանչևի (7) տվյալների հետ։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ФИЗИКА

Г. М. Гарибян

Определение масс частиц по изменению импульса

Пусть заряженная частица некоторой массы M проходит слой вещества толщины Δx и мы имеем возможность определить импульсы частицы p_1 и p_2 до и после прохождения этого слоя. В настоящей работе будут приведены графики, позволяющие по известным Δx, p_1 и p_2 определить M в предположении, что частица испытывает в проходимом слое вещества только ионизационные потери. Описанная выше задача была рассмотрена в работе [1], однако предложенный там метод весьма громоздок и практически неприменим.

Мы исходим из известной формулы для ионизационных потерь [2]:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ион}} = \frac{2{,}048 \cdot C}{\beta^2}\left[\ln \frac{1{,}024 \cdot \beta^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2\right], \qquad (1)$$

где энергия измеряется в мэвах, пробег — в $г/см^2$, $\beta = \frac{v}{c}$, I — средний ионизационный потенциал атома, а $C = \pi N \frac{Z}{A} r_0^2 = 0{,}15 \frac{Z}{A}$. Формула (1) применима, когда импульс частицы значительно меньше квадрата ее собственной массы покоя (импульс и массу частицы мы измеряем в мэвах).

Пусть $a = 2{,}048 \cdot C = 0{,}307 \frac{Z}{A}$ и $b^2 = \frac{I}{1{,}024}$. Переходя от энергий к импульсам, будем иметь:

$$\frac{dp}{dx} = -a\left\{\left(1+\frac{M^2}{p^2}\right)^{3/2} \ln \frac{p^2}{M^2 b^2} - \left(1+\frac{M^2}{p^2}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (2)$$

Удобно ввести новую переменную $t = \frac{p}{M}$. Тогда уравнение (2) перепишется следующим образом:

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{a}{M}\left\{2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{3/2} \ln \frac{t}{b} - \left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (3)$$

Если теперь обозначить:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^3}{2(1+t^2)^{3/2} \ln \frac{t}{b} - t^2(1+t^2)^{1/2}}, \qquad (4)$$

то (3) примет вид:

$$\varphi(t)dt = -\frac{1}{M}dx. \qquad (5)$$

Интегрируя, получим:

$$\Delta x = M \int_{t_2}^{t_1} \varphi(t)dt, \qquad (6)$$

где $t_1 = \frac{p_1}{M}$, $t_2 = \frac{p_2}{M}$. При заданных Δx, p_1 и p_2 равенство (6) представляет собой трансцендентное уравнение относительно M.

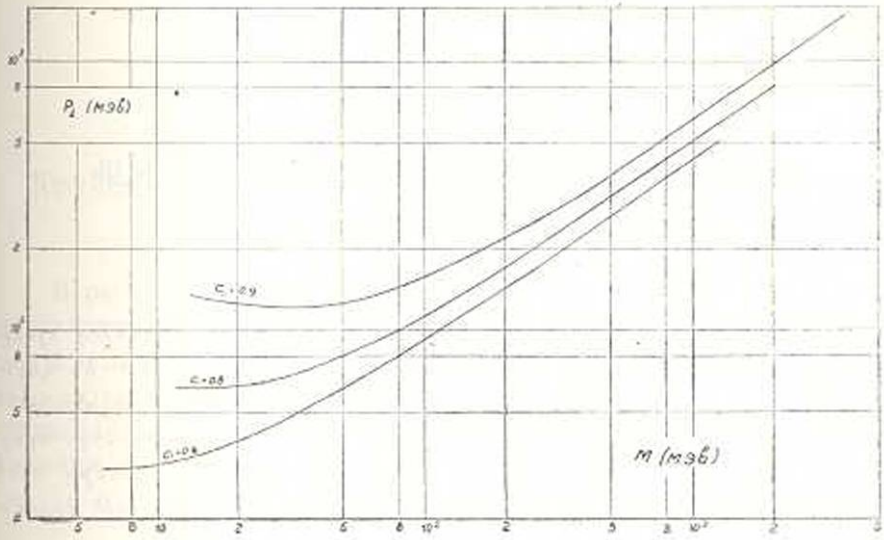
Для решения этого уравнения заметим, что $\frac{p_2}{p_1} = \frac{t_2}{t_1}$, т. е. если мы знаем p_2 и p_1, то пределами интеграла (6) могут быть только те пары значений t_2 и t_1, отношение которых равно отношению p_2 к p_1. Среди этих всевозможных пар t_2 и t_1 будут, вообще говоря, такие две пары t_1', t_2' и t_1'', t_2'' что $t_1' \cdot \frac{\Delta x}{\int_{t_2'}^{t_1'} \varphi(t)dt} = p_1$ (очевидно, что при этом $t_2 \frac{\Delta x}{\int_{t_2}^{t_1} \varphi(t)dt} = p_2$) и аналогично для t_1'', t_2'', которые и являются искомыми. Заметим, что имеющаяся здесь неоднозначность решения практически не существенна, так как обычно одна из масс попадает в область очень малых ее значений.

Таким образом, если мы будем перебирать все пары t_2 и t_1 с заданным отношением $\frac{t_2}{t_1} = c_1$ и будем откладывать на одной оси, например, p_1, а на другой—M, то зависимость между ними изобразится кривой, параметрически представляемой формулами:

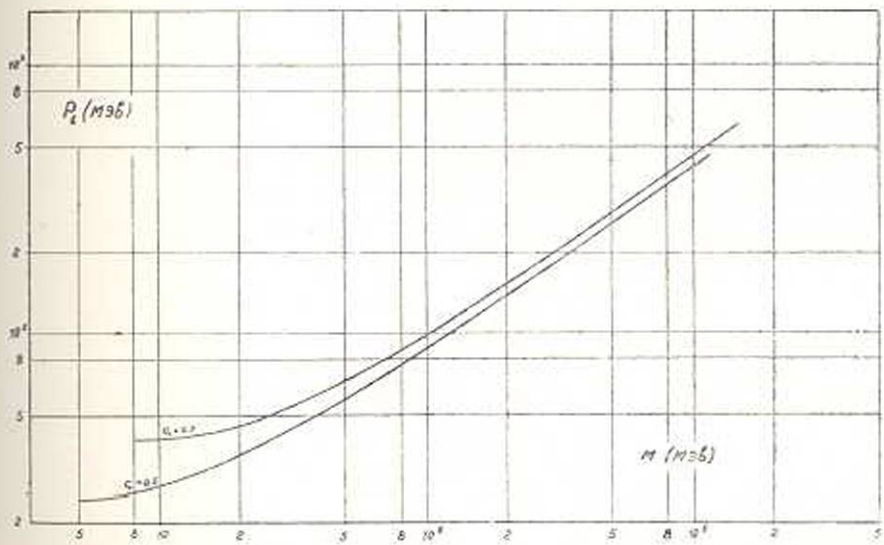
$$M = \frac{\Delta x}{\int_{t_2}^{t_1} \varphi(t)dt}, \qquad p_1 = \frac{\Delta x \cdot t_1}{\int_{t_2}^{t_1} \varphi(t)\,dt}, \qquad \frac{t_2}{t_1} = c_1. \qquad (7)$$

Придавая c_1 значения от 0 до 1 мы получим семейство кривых, решающих графически уравнение (6).

На фиг. 1 и 2 приведены графики для того случая, когда проходимым веществом является свинец. Мы пользовались для I значениями данными в [3], которое, в случае Pb, равно 758.10^{-6} мэв.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Кроме того мы берем $\Delta x = 10 г/см^2$. Ясно, что переход к другим толщинам может быть произведен, как это видно из (7), простым изменением масштабов осей p_1 и M.

Автор благодарен Ц. Минасян за помощь в расчетах.

Физический институт
Академии наук Армянской ССР

Поступило 20 IX 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wheeler J. A.* and *Ladenburg R.*. Phys. Rev. 60, 754, 1941.
2. *Росси и Грейзен*, Взаимодействие космических лучей с веществом. *М.*, 1948.
3. *Bakker C. J.* and *Segre E.*. Phys. Rev. 81, 489, 1951.

Գ. Մ. Ղարիբյան

ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՄԱՍՍԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԸՍՏ ԻՄՊՈՒԼՍԻ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅԱՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Որոշ մասսա ունեցող լիցքավորված մասնիկները անցնելով նյութի միջով կրում են էներգետիկ կորուստներ: Հոդվածում բերված են կորեր, որոնք հնարավորություն են տալիս, գիտենալով մասնիկի սկզբնական և վերջնական իմպուլսները և անցած նյութի շերտի հաստությունը, որոշել մասնիկի մասսան: Ենթադրվում է, որ էներգետիկ կորուստները ունեն միայն իոնիզացիոն բնույթ: Հաշիվներում որպես անցած նյութ վերցված է արճիճը:

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

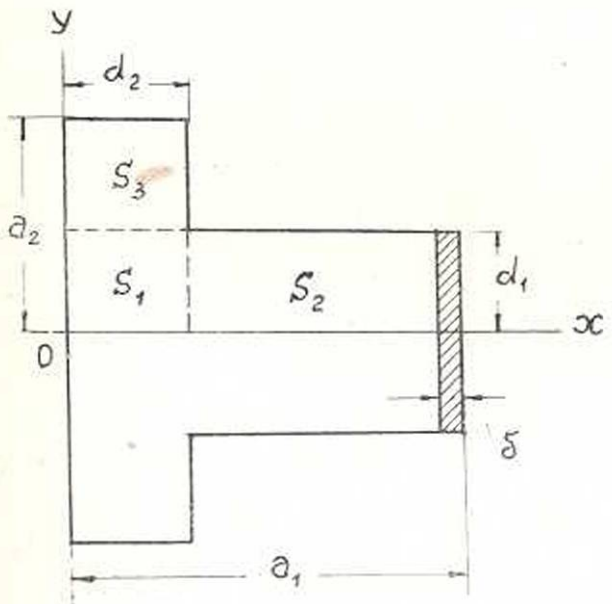
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Х. Манукян

Кручение неоднородного призматического стержня таврового поперечного сечения

В работе приводится решение задачи о кручении призматического стержня таврового поперечного сечения, усиленного вдоль одной его грани боковой поверхности тонким слоем высокомодульного материала постоянной толщины (фиг. 1). Для интегрирования уравнения Пуассона использован метод введения вспомогательных функций, предложенный Н. Х. Арутюняном [1].



Фиг. 1.

1. Дифференциальное уравнение и контурное условие задачи

Определение функции напряжения $U(x, y)$ при кручении для рассматриваемой задачи, как известно, сводится к интегрированию уравнения:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \tag{1}$$

при условии

$$G_1 U + G_2 \delta \frac{\partial U}{\partial n} = C \text{ на контуре } \Gamma \text{ области,} \tag{2}$$

где G_1 и G_2 — модули сдвигов соответственно ядра и усиливающего слоя, δ — толщина последнего, $\frac{\partial U}{\partial n}$ — производная $U(x, y)$ по направлению внешней нормали к контуру сечения.

По симметрии достаточно найти функцию $U(x, y)$ только для части сечения, расположенного в верхней полуплоскости координатной системы.

Введем вспомогательные функции $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$, $(i = 1,2)$ удовлетворяющие условиям:

$$U(x, y) = \begin{cases} \Psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y), & \text{в области } S_1 + S_2 \\ \Psi_2(x, y) + \Phi_2(x, y) & \text{в области } S_1 + S_2 \end{cases} \tag{3}$$

при этом полагая, что функции

$$\Phi_i(x, y) = 0 \qquad i = 1,2 \tag{4}$$

вне области S_1.

Тогда

$$\nabla^2 \Psi_i = -2, \quad i = 1,2 \tag{5}$$

$$\nabla^2 \Phi_i = 0. \quad i = 1,2 \tag{6}$$

Пользуясь введенными функциями Ψ_i и Φ_i контурное условие (2) вместе с условиями симметрии, непрерывности и однозначности можно свести к следующим соотношениям:

$$\Psi_1(x, d_1) = C^*, \tag{7а}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \tag{7б}$$

$$\Psi_1(a_1, y) + \lambda \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right)_{x=a_1} = C^*, \tag{7в}$$

$$\Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = C^*, \tag{7г}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \tag{8а}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=d_2} = 0, \tag{8б}$$

$$\Phi_1(d_2, y) = 0, \tag{8в}$$

$$\Phi_1(x, d_1) = \Psi_2(x, d_1) - C^*, \tag{8г}$$

$$\Psi_2(0, y) = C^*, \tag{9а}$$

$$\Psi_2(x, a_2) = C^*, \tag{9б}$$

$$\Psi_2(d_2, y) = C^*, \tag{9в}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \tag{9г}$$

$$\Phi_2(x, d_1) = 0, \tag{10а}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)_{y=d_1} = 0, \tag{10б}$$

$$\Phi_2(0, y) = 0, \tag{10в}$$

$$\Phi_2(d_2, y) = \Psi_1(d_2, y) - C^*, \tag{10г}$$

где $C^* = C/G_1$ и $\lambda = \frac{\delta G_2}{G_1}$.

2. Определение введенных вспомогательных функций

Условия для определения Ψ_1 и Φ_1 неоднородны, поэтому, следуя идее Г. А. Гринберга [2], будем искать функции Ψ_1 и Φ_1 в виде следующих бесконечных рядов:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cos \frac{2k-1}{2d_1} \pi y, \tag{11}$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \cos \frac{2k-1}{2d_1} \pi y, \tag{12}$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2} x, \tag{13}$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(y) \sin \frac{k\pi}{d_2} x. \tag{14}$$

Из (11), путем умножения его на $\cos \frac{2k-1}{2d_1} \pi y$ и интегрирования в промежутке $(0, d_1)$, найдем:

$$f_k(x) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Psi_1(x, y) \cos \frac{2k-1}{2d_1} \pi y \, dy. \tag{15}$$

Производя те же операции над уравнением (5) при $i = 1$, и используя при этом (9а), (9б) и (15) получаем дифференциальное уравнение для определения функции $f_k(x)$:

$$f_k''(x) - \left(\frac{2k-1}{2d_1} \pi \right)^2 f_k(x) = (-1)^k \frac{\pi(2k-1)}{d_1^2} C^0 + \frac{(-1)^k 8}{\pi(2k-1)}. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид:

$$f_k(x) = A_k \operatorname{sh} \frac{2k-1}{2d_1} \pi x + B_k \operatorname{ch} \frac{2k-1}{2d_1} \pi x + (-1)^{k+1} \left[\frac{\pi(2k-1)}{d_1^2} C^0 + \frac{8}{\pi(2k-1)} \right] \left(\frac{2d_1}{\pi(2k-1)} \right)^2. \tag{17}$$

Аналогично, из (13) и (5), при $i = 2$ с использованием условий (9а) и (9б), для неизвестной функции $\varphi_k(y)$ имеем:

$$\varphi_k(y) = E_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} y + F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} y + [1 - (-1)^k] \left(\frac{2k\pi}{d_1^2} C^0 + \frac{4}{k\pi} \right) \left(\frac{d_2}{k\pi} \right)^2. \tag{18}$$

Согласно (12) и (16), при $i=1$, имеем:

$$v_k''(x)-\left(\frac{2k-1}{2d_1}\pi\right)^2 v_k(x)=$$

$$=(-1)^k\frac{\pi(2k-1)}{d_1^2}\left[\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p(d_1)\sin\frac{p\pi}{d_2}x-C^\circ\right]. \qquad (19)$$

При этом использованы условия (8а), (8г) и выражение Ψ_2, а $\varphi_p(d_1)$ получаем из (18) при $y=d_1$.

Общее решение уравнения (19) имеет вид:

$$v_k(x)=\frac{(-1)^{k+1}4C^\circ}{\pi(2k-1)}\left[\operatorname{ch}\alpha_k(x-d_2)-1\right]+$$

$$+\frac{(-1)^k 8d_1}{\pi d_2}\operatorname{sh}\alpha_k(x-d_2)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(d_1)(-1)^p p}{\left(2p\frac{d_1}{d_2}\right)^2+(2k-1)^2}+$$

$$+\frac{(-1)^{k+1}4(2k-1)}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\varphi_p(d_1)\sin\beta_p x}{\left(2p\frac{d_1}{d_2}\right)^2+(2k-1)^2}, \qquad (20)$$

где $$\alpha_k=\frac{2k-1}{2d_1}\pi,\quad \beta_k=\frac{k\pi}{d_2}.$$

Для исключения постоянных интегрирования здесь использованы условия (8б) и (8в).

Использованием (11), (14) и (6) при $i=2$, и условия (10в) и (10г), для определения функции $w_k(y)$ получаем дифференциальное уравнение типа (19), решая которое, находим:

$$w_k(y)=\frac{(-1)^{k+1}2C^\circ}{k\pi}\left[\operatorname{ch}\beta_k(y-d_1)-1\right]+$$

$$+\frac{(-1)^k d_2}{\pi d_1}\operatorname{sh}\beta_k(d_1-y)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}(2p-1)f_p(d_2)}{\left(\frac{2p-1}{2d_1}d_2\right)^2+k^2}+$$

$$+\frac{(-1)^{k+1}2k}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{f_p(d_2)\cos\alpha_p y}{\left(\frac{2p-1}{2d_1}d_2\right)^2+k^2}. \qquad (21)$$

Для исключения постоянных интегрирования здесь использованы условия (10а) и (10б), а $f_p(d_2)$ получается из (7) подстановкой $x=d_2$.

3. Определение и исключение постоянных интегрирования, входящих в (17) и (18)

Выражая условия (7в), (7г), (9б) и (9г) через функции $f_к$, $\varphi_к$, $v_к$ и $w_к$, имеем:

$$f_к(a_2) + \lambda f_к(a_1) = \frac{(-1)^{к-1}4C^\circ}{\pi(2к-1)}, \qquad (7'в)$$

$$f_к(0) + v_к(0) = \frac{(-1)^{к-1}4C^\circ}{\pi(2к-1)}, \qquad (7'г)$$

$$\varphi_к(a_2) = \frac{2C^\circ}{к\pi}[1-(-1)^к], \qquad (9'б)$$

$$\varphi_к(0) + w_к(0) = 0. \qquad (9'г)$$

Из (17) и (7'в) имеем:

$$A_к = -B_к \frac{ch\alpha_к a_1 - \lambda\alpha_к sh\alpha_к a_1}{sh\alpha_к a_1 + \lambda\alpha_к ch\alpha_к a_1} + \frac{(-1)^к 32d_1^2}{\pi^3(2к-1)^3(sh\alpha_к a_1 + \lambda\alpha_к ch\alpha_к a_1)}, \qquad (22)$$

а из (18) и (9'б) имеем:

$$F_к = -E_к th\beta_к a_2 + \frac{[(-1)^к - 1]4d_2^2}{к^2\pi^2 ch\beta_к a_2}. \qquad (23)$$

Подчинив (17) и (20) условию (7'г), а (18) и (21)—условию (9'г), и заменив в полученных соотношениях $\varphi_p(d_1)$ и $f_p(d_2)$ соответствующими им выражениями, используя при этом зависимости (22) и (23), для определения постоянных $B_к$ и $E_к$, после некоторых преобразований, получим следующие бесконечные системы линейных уравнений:

$$B_к = \frac{(-1)^к 8d_1 sh\alpha_к d_2}{\pi d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p pE_p(sh\beta_p d_1 - th\beta_p a_2 \cdot ch\beta_p d_1)}{\left(2p\frac{d_1}{d_2}\right)^2 + (2к-1)^2} + \frac{(-1)^{к+1}64d_1d_2sh\alpha_к d_2}{\pi^4} \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1 - \frac{ch\beta_p d_1}{ch\beta_p a_2}}{p^2\left[\left(2p\frac{d_1}{d_2}\right)^2 + (2к-1)^2\right]} + \frac{(-1)^к 32d_1^2}{\pi^2(2к-1)^3}, \qquad к = 1, 2, 3, \ldots \qquad (24)$$

$$E_к = \frac{(-1)^{к+1} d_2 ch\beta_к d_1}{\pi d_1} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p (2p-1)\beta_p [\mathrm{sh}\alpha_p (a_1 - d_1) + \lambda\alpha_p \mathrm{ch}\alpha_p (a_1 - d_2)]}{(\mathrm{sh}\alpha_p a_1 + \lambda\alpha_p \mathrm{ch}\alpha_p a_1)\left[\left(\frac{2p-1}{d_1} d_2\right)^2 + \kappa^2\right]} +$$

$$+ \frac{(-1)^\kappa 32 d_1 d_2 \mathrm{ch}\beta_\kappa d_1}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sh}\alpha_p d_2}{\mathrm{sh}\alpha_p a_1 + \lambda\alpha_p \mathrm{ch}\alpha_p a_1}}{(2p-1)^2 \left[\left(\dfrac{2p-1}{2d_1} d_2\right)^2 + \kappa^2\right]} \qquad (25)$$

$$\kappa = 1, 2, 3, \ldots$$

с двумя рядами неизвестных: $B_1, B_2, B_3, \ldots$ и $E_1, E_2, E_3, \ldots$

Таким образом, полное определение неизвестных функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$, а следовательно, и решение задачи свелось к возможности решения полученных бесконечных систем.

Исследование бесконечных систем (24) *и* (25). Введем новые неизвестные B_κ° и E_κ°, полагая

$$B_\kappa = \frac{(-1)^\kappa 3 d_1 d_2 \mathrm{sh}\alpha_\kappa d_2}{2\kappa - 1} B_\kappa^\circ, \qquad (26)$$

$$E_\kappa = \frac{(-1)^\kappa d_1 d_2 \mathrm{ch}\beta_\kappa d_1}{\kappa} E_\kappa^\circ. \qquad (27)$$

Тогда системы (24) и (25) будут приведены к виду:

$$B_\kappa^\circ = \sum_{p=1}^{\infty} c_{\kappa,p} E_p^\circ + \gamma_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \ldots \qquad (28)$$

$$E_\kappa^\circ = \sum_{p=1}^{\infty} \omega_{\kappa,p} B_p^\circ + \varepsilon_\kappa, \quad \kappa = 1, 2, 3, \ldots \qquad (29)$$

где приняты следующие обозначения:

$$c_{\kappa,p} = \frac{8(2\kappa-1) d_1 \mathrm{ch}\beta_p d_1 \cdot \mathrm{sh}\beta_p (a_2 - d_1)}{3\pi d_2 \mathrm{ch}\beta_p a_2 \left[\left(2p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + (2\kappa-1)^2\right]}, \qquad (30)$$

$$\gamma_\kappa = -\frac{64(2\kappa-1)}{3\pi^4} \sum_{p=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{ch}\beta_p d_1}{\mathrm{ch}\beta_p a_2}}{p^2 \left[\left(2p \dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 + (2\kappa-1)^2\right]} +$$

$$+ \frac{32 d_1}{3\pi^3 d_2 (2\kappa-1)^2 \mathrm{sh}\alpha_\kappa d_2}, \qquad (31)$$

$$\omega_{\kappa,p} = \frac{3 d_2 \kappa [\mathrm{sh}\alpha_p (a_1 - d_2) + \lambda\alpha_p \mathrm{ch}\alpha_p (a_1 - d_2)] \mathrm{sh}\alpha_p d_2}{\pi d_1 \left[\left(\dfrac{2p-1}{2d_1} d_2\right)^2 + \kappa^2\right] (\mathrm{sh}\alpha_p a_1 + \lambda\alpha_p \mathrm{ch}\alpha_p a_1)}, \qquad (32)$$

$$\varepsilon_\kappa = -\frac{32\kappa}{\pi^4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{\mathrm{sh}\alpha_p\, d_2}{\mathrm{sh}\alpha_p\, a_1+\lambda\alpha_p\,\mathrm{ch}\alpha_p\, a_1}}{(2p-1)^2\left[\left(\dfrac{2p-1}{2d_1}\,d_2\right)^2+\kappa^2\right]}. \tag{33}$$

Обозначая:

$$Z_{2\kappa-1}=B^{\circ}_{\kappa},\quad A_{2\kappa-1,\,2p}=c_{\kappa,p},\quad A_{2\kappa-1,\,2p-1}=0,\quad q_{2\kappa-1}=\gamma_\kappa,$$

$$Z_{2\kappa}=E^{\circ}_{\kappa},\quad A_{2\kappa,\,2p}=0,\quad A_{2\kappa,2p-1}=\omega_{\kappa,\,p},\quad q_{2\kappa}=\varepsilon_\kappa, \tag{34}$$

получаем возможность представить (28) и (29) в виде одного ряда

$$Z_\kappa=\sum_{p=1}^{\infty}A_{\kappa,\,p}Z_p+q_\kappa,\qquad \kappa=1,\,2,\,3,\ldots \tag{35}$$

Бесконечная система (35) вполне регулярна, так как из (30) и (32) имеем:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|A_{\kappa,\,p}|<0{,}75.\qquad \kappa=1,\,2,\,3,\ldots \tag{36}$$

При оценке суммы использованы:

$$\frac{\mathrm{ch}\beta_p d_1\cdot\mathrm{sh}\beta_p(a_2-d_1)}{\mathrm{ch}\beta_p a_2}<\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\pi\frac{d_1}{d_2}}\right),$$

$$\frac{\mathrm{sh}\alpha_p(a_1-d_2)+\lambda\alpha_p\mathrm{ch}\alpha_p(a_1-d_2)}{\mathrm{sh}\alpha_p a_1+\lambda\alpha_p\mathrm{ch}\alpha_p a_1}<\frac{\mathrm{ch}\alpha_p(a_1-d_2)}{\mathrm{sh}\alpha_p a_1},$$

$$\mathrm{cth}x=\frac{1}{x}+2x\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+\kappa^2\pi^2}\qquad [4].$$

Для свободного члена q_κ системы (35), пользуясь обозначениями (31) и (33), имеем оценку:

$$|q_\kappa|<\begin{cases}\dfrac{8}{3\pi^2}\left[1+\dfrac{4d_1}{\pi d_2\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi d_2}{2d_1}}\right] & \text{при нечетном К,}\\[2ex] \dfrac{32}{\pi^4}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^2\left[\left(\dfrac{2p-1}{2d_1}\,d_2\right)^2+1\right]} & \text{при четном К.}\end{cases} \tag{37}$$

Из неравенств (36) и (37) следует существование единственного ограниченного решения системы (34) [3], т. е. возможность определения неизвестных постоянных B°_{κ} и E°_{κ} укороченной системы.

4. Определение функции напряжений

Функция напряжений (3) имеет вид:

$$U(x, y) = C^\circ + (d_1^2 - y^2) +$$

$$+ 3d_1d_2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa B_\kappa^\circ [sh\alpha_\kappa(a_1 - x) + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa(a_1 - x)] sh\alpha_\kappa d_2}{(2\kappa - 1)(sh\alpha_\kappa a_1 + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1)} \cos\alpha_\kappa y +$$

$$+ \frac{32d_1^2}{\pi^3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa sh\alpha_\kappa x \cdot \cos\alpha_\kappa y}{(2\kappa-1)^3 [sh\alpha_\kappa a_1 + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1]}, \qquad (38)$$

в области S_2 (фиг. 1),

при этом использованы (4), (11), (17) и (28):

$$U(x, y) = (d_1^2 - y^2) + 3d_1d_2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa B_\kappa^\circ \cos\alpha_\kappa y}{(2\kappa - 1)} \times$$

$$\times \left[\frac{sh\alpha_\kappa (a_1 - x) + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa (a_1 - x)}{sh\alpha_\kappa a_1 + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1} sh\alpha_\kappa d_2 - sh\alpha_\kappa (d_2 - x) \right]$$

$$+ \frac{32d_1^2}{\pi^3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \cos\alpha_\kappa y}{(2\kappa - 1)^3} \left[\frac{sh\alpha_\kappa x}{sh\alpha_\kappa a_1 + \lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1} + \frac{sh\alpha_\kappa (d_2 - x)}{sh\alpha_\kappa d_2} \right] +$$

$$+ \frac{4C^\circ}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1} \cos\alpha_\kappa y}{(2\kappa - 1)} \left[ch\alpha_\kappa (x - d_2) - sh\alpha_\kappa (d_2 - x) cth\alpha_\kappa d_2 + \right.$$

$$\left. + \frac{sh\alpha_\kappa (d_2 - x)}{sh\alpha_\kappa d_2} \right] +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1} (2\kappa - 1) \varphi_p (d_1) \sin\beta_p x \cos\alpha_\kappa y}{\left(2p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + (2\kappa - 1)^2} \qquad (39)$$

в области S_1,

при этом использованы (20), (28) и (39), а $\varphi_p(d_1)$ имеет значение

$$\varphi_p (d_1) = \frac{(-1)^p d_1 d_2 ch\beta_p d_1 \cdot sh\beta_p (a_2 - d_1)}{p ch\beta_p a_2} E_p^\circ +$$

$$+ \frac{[(-1)^p - 1] 4d_2^2}{(p\pi)^3} \left(\frac{ch\beta_p d_1}{ch\beta_p a_2} - 1 \right) + \frac{2C^\circ}{p\pi} [1 - (-1)^p];$$

$$U(x, y) = x(d_2 - x) + C^\circ +$$

$$+ d_1d_2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa E_\kappa^\circ ch\beta_\kappa y . sh\beta_\kappa (a_2 - y)}{\kappa \cdot sh\beta_\kappa a_2} \sin\beta_\kappa x -$$

$$-\frac{8d_2^2}{\pi^3}\sum_{\kappa=1,3}^{\infty}\frac{ch\beta_\kappa y.\sin\beta_\kappa x}{\kappa^3 ch\beta_\kappa a_2} \qquad (40)$$

в области S_3,

при этом использованы (4), (13), (18) и (19).

Имея выражения U(x, y), можно написать формулы, определяющие компоненты напряжения:

$$X_z = G_i\tau\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Y_z = -G_i\tau\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (i=1,2).$$

5. Формула жесткости при кручении

Жесткость профиля при кручении определяется по формуле:

$$D = 2G_1\iint_{(F)} U(x, y)dxdy = 2CF, \qquad (41)$$

где F—площадь поперечного сечения скручиваемого стержня, а C—постоянное, определяемое интегрированием (2) по всему контуру сечения.

Пользуясь выражением U(x, y) согласно (38), (39) и (40), для вычисления жесткости получаем расчетную формулу:

$$D = 2G_1\left[\frac{4d_1^3a_1+(a_2-d_1)d_2^3}{3}-2C^\circ d_1d_2\right]+$$

$$+\frac{8G_1d_1^4}{\pi^2}\left\{2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{(2\kappa-1)^3}\left[\frac{8C^\circ}{\pi d_1^2}th\frac{\alpha_\kappa d_2}{2}+\right.\right.$$

$$+\frac{3d_2B_\kappa^\circ}{d_1}\cdot\frac{2\left(ch\frac{\alpha_\kappa d_2}{2}-\lambda\alpha_\kappa sh\frac{\alpha_\kappa d_2}{2}\right)sh\alpha_\kappa\left(a_1-\frac{d_2}{2}\right)+sh\alpha_\kappa d_2}{sh\alpha_\kappa a_1+\lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1}-$$

$$\left.\left.-\frac{32}{\pi^3(2\kappa-1)^2}\left(\frac{ch\alpha_\kappa a_1-1}{sh\alpha_\kappa a_1+\lambda\alpha_\kappa ch\alpha_\kappa a_1}+th\frac{\alpha_\kappa d_2}{2}\right)\right]+\right.$$

$$+\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\sum_{\kappa=1,3}^{\infty}\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{\varphi_\kappa(d_1)}{d_2^2}th\beta_\kappa d_1-\frac{4d_1E_\kappa^\circ sh\beta_\kappa(a_2-d_1)}{\kappa d_2 sh\beta_\kappa a_2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{8}{\pi^3\kappa^3}\left(th\beta_\kappa a_2-\frac{sh\beta_\kappa d_1}{ch\beta_\kappa a_2}\right)\right]\right\}. \qquad (42)$$

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса

Поступило 16 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, том XIII, № 1, М., 1949.
2. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР. М.—Л., 1948.
3. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гос. изд. тех. теорет. лит. М.—Л. 1949.
4. *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. изд. тех. теорет. лит. М.—Л., 1948.

Ա. Հ. Մանուկյան

ՏԱՎՐԱՅԻՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է տավրային լայնական հատվածքով անհամասեռ պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդրի մոտավոր լուծումը այն դեպքի համար, երբ նրա կողմնային մակերևույթի նախաերից մեկը պատված է սահքի բարձր մոդուլ ունեցող նյութի բարակ շերտով։

Խնդրի պիֆերենցիալ հավասարման լուծման համար օգտագործված է Ն. Ի. Հարությունյանի կողմից առաջարկված օժանդակ ֆունկցիաների մեթոդը։

Տրված է նաև հաշվարկային բանաձև ոլորման կոշտությունը որոշելու համար։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տիզ.-մար., բն. և աճխ. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

Л. М. Джанполадян

Молекулярные соединения хлористого магния с предельными спиртами

Спирты с солями металлов образуют молекулярные соединения. С металлами второй группы образуются непрочные молекулярные соединения, легко разлагающиеся водой. Первые соединения этого типа получены с хлористым кальцием. Меншуткиным [1, 2, 3, 4] получены соединения некоторых предельных спиртов с бромистым и иодистым магнием. Соединения этого типа он назвал кристаллалкоголятами. Молекулярные соединения солей металлов со спиртами мало изучены. До сих пор получены кристаллалкоголяты хлористого магния с метиловым, этиловым, н. пропиловым и первичным изобутиловым спиртами $MgCl_2 \cdot 6ROH$ [5, 6, 7, 8]. Однако, ввиду неполноты сведений о свойствах полученных соединений, все они были получены нами вновь.

Мы ставили задачу получить кристаллалкоголяты $MgCl_2$ с различными спиртами—предельными, непредельными, ароматическими, гетероциклическими и многоатомными, изучить их свойства и влияние природы спирта на образование молекулярных соединений.

Получение молекулярных соединений хлористого магния с предельными спиртами дало возможность изучить зависимость комплексообразования от увеличения числа углеродных атомов спирта.

Экспериментальная часть

Методика. Из предельных спиртов изучению подвергались следующие: метиловый, этиловый, бутиловый, н. пропиловый, изопропиловый, все изомеры бутилового спирта, первичный изоамиловый и вторичный октиловый спирты. Все спирты были обезвожены прокаленным сернокислым натрием и перегнаны над металлическим натрием.

Безводный хлористый магний приготовлен по методу Эрдманна [8] нагреванием двойной соли $MgCl_2 \cdot NH_4Cl \cdot 6H_2O$. Полученное вещество содержало —99,86% $MgCl_2$.

Для получения кристаллалкоголята навеска спирта помещалась в колбу, снабженную обратным холодильником, с хлоркальциевой трубкой; к спирту прибавлялся безводный хлористый магний. К концу реакции колба нагревалась до кипения жидкости. Горячий

раствор фильтровался через стеклянный фильтр, закрытый хлоркальциевой трубкой. К фильтрату прибавлялся петролейный эфир и жидкость в кристаллизаторе переносилась в эксикатор для кристаллизации. Выделившиеся кристаллы перекристаллизовывались из спирта, промывались петролейным эфиром, во избежание разложения соединение быстро отжималось между листами фильтровальной бумаги и подвергалось анализу. Устойчивые кристаллалкоголяты просушивались в эксикаторе и хранились в закрытых стаканчиках. Для выделяемых кристаллалкоголятов устанавливались: состав, температура плавления, теплота образования, удельный вес, молекулярный объем, коэффициент сжатия.

Анализ соединений проводился на хлор, магний, иногда на углерод и водород. Удельный вес определялся в петролейном эфире. По удельному весу вычислен молекулярный объем. Теплота образования вычислялась из теплоты разложения кристаллалкоголята в воде

1. *Кристаллалкоголят хлористого магния с метиловым спиртом.* В 20 *г* метилового спирта растворялось 5,4 *г* хлористого магния, реакция протекала бурно: спирт разогревался до кипения. После прибавления 50 *мл* петролейного эфира через день образовались бесцветные кристаллы в виде шестигранных листочков, величиной 1—3 *мм*. Кристаллы очень гигроскопичны, на воздухе расплывались, в воде растворялись с быстрым вращением на поверхности. Выход 13,1 *г* или 41,4% теории. Температура плавления 124—130° (с разложением).

0,1101 *г* вещ. : 8,2 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,1485 *г* вещ. : 10,7 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 24,41; 24,59.
$MgCl_2 . 6CH_3OH$ вычислено %: Cl 24,67.

$D_4^{20} = 1{,}2050$; молекулярный объем: найдено 238,65, вычислено 284,29. Сжатие на одну молекулу 7,61. Теплота образования 31,00 *ккал*.

2. *Кристаллалкоголят хлористого магния с этиловым спиртом.* В 98 *г* этилового спирта растворялось 18,2 *г* хлористого магния, реакция протекала бурно, с разогреванием. После прибавления 100 *мл* петролейного эфира выделились бесцветные кристаллы, собранные в друзы. Вес кристаллов 16,0 *г* или 23,5% теории. Кристаллы гигроскопичны, водой разлагаются; действуют на поляризованный свет; при длительном хранении в эксикаторе спирт выветривается.

Состав молекулярного соединения по анализу—$MgCl_2.6C_2H_5OH$

0,1286 *г* вещ. : 6,95 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,1498 *г* вещ. : 8,10 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.

Найдено %: Cl 19,16; 19,17.
$MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 19,09.

Температура плавления ×7—88°; D_4^{20} 1,1238. Молекулярный объем: найдено 330,63; вычислено 391,21. Сжатие на одну молекулу 10,09. Коэффициент сжатия 0,1867. Теплота образования 26,55 *ккал*.

3. *Кристаллалкоголят хлористого магния с норм. пропиловым спиртом.* В 25 *г* н. пропилового спирта растворялось 4,5 *г* хлористого магния. Реакция протекала с сильным разогреванием. Получены игольчатые кристаллы, чрезвычайно гигроскопичные и по анализу соответствующие $MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$. Выход кристаллов 4,4 *г* или 33,1% теории.

0,2094 *г* вещ.: 5,64 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1296 *г* вещ.: 3,46 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,03; 14,83.
$MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 15,56.

Теплота образования 15,89 *ккал*.

Кристаллалкоголят с содержанием шести молекул спирта неустойчив, быстро теряет одну молекулу спирта, превращаясь в кристаллалкоголят состава $MgCl_2 \cdot 5C_3H_7OH$.

0,1672 *г* вещ.: 8,25 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,0715 *г* вещ.: 3,78 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 17,51; 17,30.
$MgCl_2 \cdot 5C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 17,93.

Неоднократно повторенный опыт подтвердил образование молекулярного соединения с пятью молекулами пропилового спирта.

4. *Кристаллалкоголят хлористого магния с изопропиловым спиртом.* Этот кристаллалкоголят получен впервые. По мнению Меншуткина на основе опытов с $MgBr_2$ и MgJ_2 вторично спиртовая группа образует соединение с четырьмя молекулами спирта. Полученные нами соединения с изопропиловым спиртом имели состав: $MgCl_2 \cdot 6(CH_3)_2CHOH$, $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHOH$, а также $MgCl_2 \cdot 5(CH_3)_2CHOH$.

В 24 *г* изопропилового спирта растворялось 1,5 *г* хлористого магния, растворение сопровождалось сильным разогреванием. Выделившиеся без прибавления петролейного эфира кристаллы по анализу соответствуют $MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$.

0,1533 *г* вещ.: 6,6 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1583 *г* вещ.: 7,0 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,20; 15,62.
$MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 15,56.

Температура плавления 113—116° (с разложением).

При хранении кристаллалкоголят выветривается, теряя спирт.

При нагревании выветривавшегося вещества с изопропиловым спиртом (в смеси с петролейным эфиром при соотношении 1 : 1) выделились игольчатые кристаллы, которые соответствовали кристаллалкоголяту $MgCl_2 \cdot 5\,C_3H_7OH$.

0,1228 *г* вещ. : 6,18 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1163 *г* вещ. : 5,86 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 17,83; 17,88.
$MgCl_2 \cdot 5\,C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 17,93.

Температура плавления 102—106°.

При продолжительном встряхивании с петролейным эфиром веществ, содержащих шесть или пять молекул спирта, получено новое соединение с числом молекул изопропилового спирта, равном четырем: $MgCl_2 \cdot 4\,C_3H_7OH$. Это вещество более устойчиво.

0,1223 *г* вещ. : 7,7 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1032 *г* вещ. : 6,5 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 21,63; 21,03.
$MgCl_2 \cdot 4\,C_3H_7OH$ вычислено %: Cl 21,14.

Температура плавления 130—135 (разл). D_4^{20} 1,0965. Молекулярный объем: найдено 308,91; вычислено 345,53. Сжатие на одну молекулу 9,51; коэффициент сжатия 0,1249. Теплота образования 24,03 *ккал*.

5. *Кристаллалкоголят хлористого магния с бутиловым спиртом.* С нормальным бутиловым спиртом известно соединение $MgCl_2 \cdot 6\,C_4H_9OH$ с температурой плавления 35—60°. Нами получены кристаллалкоголяты:

н. бутилового спирта—
$MgCl_2 \cdot 6\,C_4H_9OH$; $MgCl_2 \cdot 4C_4H_9OH$;
первич. изобутилового спирта—
$MgCl_2 \cdot 6(CH_3)_2CHCH_2OH$; $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHCH_2OH$;
вторично бутилового спирта—
$MgCl_2 \cdot 6\,C_2H_5CHOHCH_3$; $MgCl_2 \cdot 4C_2H_5CHOHCH_3$;
третично бутилового спирта—$MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_3\,COH$.

Кроме того, с н. бутиловым, первично-изобутиловым и третично-бутиловым спиртами получены нестойкие соединения, содержащие по 5 молекул спирта $MgCl_2 \cdot 5\,C_4H_9OH$.

6. *Кристаллалкоголят хлористого магния с н. бутиловым спиртом.* В 20 *г* н. бутилового спирта растворялось 2,3 *г* хлористого магния. К профильтрованному раствору прибавлялось 100 *мл* петролейного эфира и колба с содержимым охлаждалась. Выделились белые игольчатые кристаллы, по составу отвечающие формуле $MgCl_2 \cdot 6\,C_4H_9OH$. Выход 2,9 *г* или 24,5% теории.

0,2271 *г* вещ.: 8,4 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,2486 *г* вещ.: 9,4 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 13,1[8]; 13,39.
$MgCl_2 \cdot 6C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 13,14.

Температура плавления 70—73° (разл.); D_4^{20} 0,9743; молекулярный объем: найдено 554,24; вычислено 593,83. Сжатие на одну молекулу 6,60; коэффициент сжатия 0,0716. Теплота образования 21,63 *ккал*.

Кристаллы гигроскопичны; при хранении теряют спирт. Через четыре часа после получения хранящееся в эксикаторе над хлористым кальцием вещество имело состав $MgCl_2 \cdot 4C_4H_9OH$.

0,3780 *г* вещ.: 16,3 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,1048 *г* вещ.: 5,3 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 17,93; 18,06.
$MgCl_2 \cdot 4C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 18,11.

Температура плавления 60—65° (разл.). D_4^{20} 1,0027; молекулярный объем: найдено 391,00; вычислено 409,57. Сжатие на одну молекулу 4,64; коэффициент сжатия 0,1249. Теплота образования 24,09 *ккал*.

Если образование кристаллалкоголята вести при повышенной температуре, то получается мало гигроскопическое, но не прочное соединение, отвечающее $MgCl_2 \cdot 5C_4H_9OH$.

0,8253 *г* вещ.: 35,9 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,3499 *г* вещ.: 15,4 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,44; 15,25.
$MgCl_2 \cdot 5C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 15,25.

7. Кристаллалкоголят хлористого магния с изобутиловым спиртом. В 25 *г* изобутилового спирта растворялось 2,3 *г* хлористого магния при нагревании 100—109°. После полуторачасового нагревания из горячей жидкости начали выпадать кристаллы; вскоре почти все содержимое колбы закристаллизовалось. В охладительной смеси кристаллы полностью растворились и вновь образовались при нагревании колбы до 80°. Прибавление 50 *мл* петролейного эфира задержало растворение кристаллов при охлаждении.

Кристаллы отжатые между листами фильтровальной бумаги имели состав: $MgCl_2 \cdot 6(CH_3)_2CHCH_2OH$. Выход 9,3 *г* или 30,8% теории.

0,4073 *г* вещ.: 15,16 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,3050 *г* вещ.: 11,16 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 13,19; 12,96.
$MgCl_2 \cdot 6\,C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 13,11.

Температура плавления 112—114°; D_4^{20} 0,9168. Молекулярный объем: найдено 588,75; вычислено 596,53. Сжатие на одну молекулу 1,33; коэффициент сжатия 0,0143. Теплота образования 20,56 *ккал*.

Вещество непрочное и легко выделяет спирт. При хранении в эксикаторе над хлористым кальцием в течение 6 месяцев соединение потеряло большую часть спирта и при анализе соответствовало $MgCl_2 \cdot C_4H_9OH$. Температура плавления 191°.

При растворении безводного хлористого магния в изобутиловом спирте при 150° и добавлении к теплой жидкости петролейного эфира выделился мелкокристаллический осадок, отвечающий по составу $MgCl_2 \cdot 5(CH_3)_2CHCH_2OH$.

0,1152 *г* вещ.: 4,93 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,3291 *г* вещ.: 14,36 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,17; 15,47.
$MgCl_2 \cdot 5C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 15,25.

Встряхивание этого соединения с петролейным эфиром привело к образованию более устойчивого соединения $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHCH_2OH$.

0,1278 *г* вещ.: 6,7 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,1420 *г* вещ.: 7,4 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 18,47; 18,47.
$MgCl_2 \cdot 4C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 18,11.

Температура плавления 135—140°; D_4^{20} 0,9937. Молекулярный объем: найдено 395,05; вычислено 411,37. Сжатие на одну молекулу 4,1; коэффициент сжатия 0,0441. Теплота образования 27,00 *ккал*.

8. *Кристаллалкоголят хлористого магния с вторично бутиловым спиртом*. В 13,5 *г* вторично бутилового спирта растворялось при нагревании 0,92 *г* хлористого магния. После прибавления 25 *мл* петролейного эфира и охлаждении выделились игольчатые кристаллы, отвечающие $MgCl_2 \cdot 6C_2H_5CHOHCH_3$. Выход 4,2 *г* или 81,5% теории.

0,1958 *г* вещ.: 7,66 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,2293 *г* вещ.: 8,90 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 13,77; 13,78:
$MgCl_2 \cdot 6C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 13,14.

Температура плавления 112—114°. D_4^{20} 0,9821. Молекулярный объем: найдено 549,55, вычислено 591,13. Сжатие на одну молекулу 6,93. Коэффициент сжатия 0,0755.

При хранении вещество отдало часть спирта, превратившись в соединение $MgCl_2 \cdot 4C_2H_5CHOHCH_3$.

0,1374 *г* вещ.: 6,98 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,0717 *г* вещ.: 3,58 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.

Найдено %: Cl 18,01; 17,70.
$MgCl_2 \cdot 4C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 18,11.

Вещество перекристаллизованное из вторично бутилового спирта вновь имело состав $MgCl_2 \cdot 6C_2H_5CHOHCH_3$.

9. *Кристаллалкоголят хлористого магния третично бутиловым спиртом.* В 10 *г* триметилкарбинола растворялось 0,95 *г* хлористого магния при нагревании 80—85°. Реакция протекала бурно. После прибавления 25 *мл* петролейного эфира наблюдалось обильное выпадение кристаллов. Промытое петролейным эфиром и высушенное между листами фильтровальной бумаги вещество имело состав $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_3COH$. Выход 3,2 *г* или 84,2% теории.

0,1033 *г* вещ.: 3,2 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1071 *г* вещ.: 5,5 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 17,88; 18,22.
$MgCl_2C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 18,11.

Температура плавления 194°; D_4^{20} 1,0209. Молекулярный объем найдено 383,50, вычислено 416,61. Сжатие на одну молеклу 8,28. Коэффициент сжатия 0,0881. Теплота образования 22,24 *ккал*.

При проведении реакции в присутствии петролейного эфира образовалось мелкокристаллическое вещество, отвечающее по составу $MgCl_2 \cdot 5(CH_3)_3COH$. Соединение нестойкое, быстро теряющее спирт.

0,1691 *г* вещ.: 7,4 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1103 *г* вещ.: 4,8 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,51; 15,36.
$MgCl_2 \cdot 5C_4H_9OH$ вычислено %: Cl 15,25.

10. *Кристаллалкоголят хлористого магния с изоамиловым спиртом.* Осокиным [6] получено соединение с амиловым спиртом $MgCl_2 \cdot 6C_5H_{11}OH$. В наших опытах с первичным изоамиловым спиртом получено соединение $MgCl_2 \cdot 4C_5H_{11}OH$.

В 25 *г* изоамилового спирта с т. к. 130° растворялось 5,0 *г* хлористого магния при нагревании до 100°. Выпавшее кристаллическое вещество после прибавления петролейного эфира соответствовало $MgCl_2 \cdot 4C_5H_{11}OH$. Выход 7,8 *г* или 33,2% теории.

0,7787 *г* вещ.: 34,43 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,3065 *г* вещ.: 13,54 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 15,68; 15,79.
$MgCl_2 \cdot 4C_5H_{11}OH$ вычислено %: Cl 15,84.

Температура плавления 104°; D_4^{20} 1,1270. Молекулярный объем: найдено 442,08; вычислено 476,09. Сжатие на одну молекулу 8,22. Коэффициент сжатия 0,0755. Теплота образования 13,23 *ккал*. Вещество устойчиво, гигроскопично.

11. *Кристаллалкоголят хлористого магния с вторично октиловым спиртом.* В 7 *г* вторично октилового спирта с т. к. 180° растворялось 0,75 *г* хлористого магния при нагревании 130—150°. Содержимое колбы после фильтрования без прибавления петролейного эфира перенесено в кристаллизатор, где оно закристаллизовалось.

Кристаллы, промытые петролейным эфиром, высушенные между листами фильтровальной бумаги имели состав $MgCl_2 \cdot 6\,C_8H_{17}OH$. Выход 4,2 *г* или 61,8% теории.

0,1131 *г* вещ. : 2,7 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$,
0,1718 *г* вещ. : 4.7 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 8,47; 8,16.
$MgCl_2 \cdot 6\,C_8H_{17}OH$ вычислено %: Cl 8,09. Т. пл. 72—74°.

Кристаллы очень гигроскопичны, при хранении выделяли спирт, превращаясь в тетракристаллалкоголят. При действии петролейного эфира кристаллы набухали, затем распадались в мелкокристаллический порошок. Вещество малогигроскопично и по анализу соответствовало $MgCl_2 \cdot 4\,CH_3(CH_2)_5CHOHCH_3$.

0,0950 *г* вещ. : 2,35 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
0,1048 *г* вещ. : 3,50 *мл* 0,1 *н* $AgNO_3$.
Найдено %: Cl 11,31; 11,71.
$MgCl_2 \cdot 4\,C_8H_{17}OH$ вычислено %: Cl 11,51. Т. пл. 132—138°.

Таким образом, октиловый спирт образует с $MgCl_2$ два соединения: $MgCl_2 \cdot 6\,C_8H_{17}OH$ и $MgCl_2 \cdot 4\,C_8H_{17}OH$.

Выводы

1. Хлористый магний с предельными спиртами образует кристаллические молекулярные соединения, гигроскопичные, легко разлагающиеся водой.

2. Получены и изучены следующие соединения хлористого магния:

с метиловым спиртом — $MgCl_2 \cdot 6\,CH_3OH$,
этиловым спиртом — $MgCl_2 \cdot 6\,C_2H_5OH$,
пропиловыми спиртами —
$MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$; $MgCl_2 \cdot 4\,(CH_3)_2CHOH$,
н. бутиловым спиртом —
$MgCl_2 \cdot 6\,C_4H_9OH$; $MgCl_2 \cdot 4\,C_4H_9OH$,
первично изобутиловым спиртом —
$MgCl_2 \cdot 6\,(CH_3)_2CHCH_2OH$; $MgCl_2 \cdot 4\,(CH_3)_2CHCH_2OH$,
вторично бутиловым спиртом —
$MgCl_2 \cdot 6\,C_2H_5CHOHCH_3$; $MgCl_2 \cdot 4\,C_2H_5CHOHCH_3$;
третично бутиловым спиртом — $MgCl_2 \cdot 4\,(CH_3)_3COH$,
вторично октиловым спиртом —
$MgCl_2 \cdot 6\,C_8H_{17}OH_5$; $MgCl \cdot 4\,C_8H_{17}OH$,
изоамиловым спиртом — $MgCl_2 \cdot 4\,C_5H_{11}OH$.

3. Пропиловый, изопропиловый, бутиловый и октиловый спирты образуют с хлористым магнием нестойкое соединение, отвечающее формуле $MgCl_2 \cdot 5\,ROH$. Эти соединения можно сравнить с нестойкими пентагидратами $MgCl_2 \cdot 5H_2O$.

4. Наибольшей прочностью обладают соединения хлористого магния с первыми двумя членами гомологического ряда спиртов. Спирты с вторичной спиртовой группой образуют малостойкие молекулярные соединения с шестью молекулами спирта и более прочные—с четырьмя молекулами.

5. Теплота образования падает с увеличением числа углеродных атомов до трех, а затем повышается.

Московская сельскохозяйственная академия им. К. А. Тимирязева

Поступило 3 III 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меншуткин Б. Н.* Об эфиратах и других молекулярных соединениях бромистого и иодистого магния, Москва, 1907.
2. *Меншуткин Б. Н.* ЖРФХО, 1113 (1912).
3. *Меншуткин Б. Н.* ЖРФХО, 1000 (1907).
4. *Меншуткин Б. Н.* ЖРФХО, 1163 (1905).
5. *Осокин*, ЖОХ, 583 (1938).
6. *Осокин*, ЖОХ, 14 (1938).
7. *Simon S. Y.* ph. ch., 371 (1877).
8. *Oimer, Quinet.* B. Soc. 1579 (1834).
9. *Sabatic.* Bul. Soc. ch., 1,91 (1899).

Լ. Մ. Ջանփոլադյան

ՄԱԳՆԵԶԻՈՒՄ ՔԼՈՐԻԴԻ ՄՈԼԵԿՈՒԼԱՐ ՄԻԱՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ՍՊԻՐՏՆԵՐԻ ՀԵՏ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մագնեզիումի քլորիդը սահմանային սպիրտների հետ տալիս է մոլեկուլյար միացություններ, երկրորդ խմբի սպիրտների հետ առաջանում են անկայուն միացություններ, որոնք հեշտությամբ քայքայվում են ջրով։

Սահմանային սպիրտների հետ մագնեզիումի քլորիդը տալիս է հետևյալ միացությունները՝ $MgCl_2 \cdot 6CH_3OH$, $MgCl_2 \cdot 6C_2H_5OH$, $MgCl_2 \cdot 6C_3H_7OH$ *և* $MgCl_2(CH_3)_2CHOH$։ *Վերջինս հեշտությամբ կորցնում է սպիրտի մի փոխարկվում է* $MgCl_2 \cdot 5(CH_3)_2CHOH$, *որը իզոպրոպիլ սպիրտի հետ առաջացնելիս տալիս է ավելի կայուն* $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHOH$.

Բութիլ սպիրտի հետ առաջված են հետևյալ միացությունները՝ $MgCl_2 \cdot 6C_4H_9OH$, $MgCl_2 \cdot 5C_4H_9OH$. *Իզոբուտիլ սպիրտի հետ՝* $MgCl_2 \cdot 6(CH_3)_2CHCH_2OH$ *և* $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHCH_2OH$.

Եթե մագնեզիումի քլորիդը տաքացնել անջուր իզոբուտիլ սպիրտի հետ 150° C, առաջվում է $MgCl_2 \cdot 5(CH_3)_2CHCH_2OH$։ *Վերջինս պետրոլ եթերի հետ տալիս է ավելի կայուն միացություն՝* $MgCl_2 \cdot 4(CH_3)_2CHCH_2OH$.

Երկրորդային իզոբուտիլ սպիրտը մագնեզիում քլորիդի հետ տալիս է՝ $MgCl_2 \cdot 6(C_2H_5)CHOHCH_3$.

Երրորդային բուտիլ սպիրտը տալիս է՝ $MgCl_2.4(CH_3)_3COH$, եթե ռեակցիան տանել պետրոլ էթերի ներկայությամբ, ստացվում է անկայուն միացություն՝ $MgCl_2.5(CH_3)_3COH$. Մագնեզիում քլորիդը մոլեկուլար միացություններ է տալիս նաև իզոամիլ սպիրտի հետ՝ $MgCl_2.4(CH_3)_2CHCH_2CH_2OH$. Երկրորդային օկտիլ սպիրտի հետ՝ $MgCl_2 \cdot 6C_8H_{17}OH$: Սա հիգրոսկոպիկ միացություն է, հեշտությամբ կորցնում է սպիրտը վերարկվելով $MgCl_2.4C_8H_{17}OH$.

Բոլոր միացությունների համար որոշված են հալման կետերը, մոլեկուլար ծավալները, առաջացման ջերմությունները:

Ամենից կայուն են մոլեկուլար միացությունները մեթիլ և էթիլ ալկոհոլների հետ:

Երկրորդային սպիրտները տալիս են անկայուն միացություններ, որտեղ սպիրտի մոլեկուլների թիվը հավասար է վեցի: Ավելի կայուն են երկրորդային սպիրտների այն միացությունները մագնեզիում քլորիդի հետ, որտեղ սպիրտի մոլեկուլների թիվը հավասար է չորսի:

Երրորդային ամիլ սպիրտի հետ ստացված է միայն տետրակրիստալոհիդրատ:

Ապացուցված է, որ պրոպիլ, իզոպրոպիլ, բուտիլ և օկտիլ սպիրտները մագնեզիում քլորիդի հետ կարող են բարձր ջերմության ազդակ կամ պետրոլ էթերի միջավայրում տալ անկայուն միացություններ՝ $MgCl_2.5ROH$, որոնք նման են մագնեզիում քլորիդի պենտահիդրատին՝ $MgCl_2.5H_2O$.

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մար., բն. և տեխն. գիտություններ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Л. А. Варданянц
чл.-корр. АН Армянской ССР

Цели, задачи и методы исследования плагиоклазов и их двойников

Плагиоклаз является главнейшим породообразующим минералом, поэтому знание его состава имеет существенное значение для диагностики изучаемых горных пород. У нас, в СССР, состав плагиоклаза в петрографических описаниях горных пород указывают обычно в процентах содержания анортита, т. е., по Федорову, в виде номера, от № 0 до № 100, притом с точностью до единиц. Это создает обманчивое представление, что состав плагиоклаза был определен действительно с точностью до одного процента анортита. Между тем такую точность определения его состава может дать только химическое исследование, оптические же методы, применяемые при обычных петрографических исследованиях, обеспечивают точность всего лишь в пределах ± 5 или да же $\pm 6\%$ содержания анортита.

На первый взгляд такое положение может представляться как парадокс, но он будет лишь кажущимся, так как здесь нет никаких противоречий. Дело в том, что при определении состава плагиоклаза тем или иным оптическим методом пользуются, в качестве шкалы сравнения, рабочими диаграммами, показывающими изменение свойств минерала в зависимости от изменения его химического состава. Но при этом всегда забывают, что кривые на таких рабочих диаграммах представляют лишь усредненные значения сильно отклоняющихся друг от друга величин.

Детальные, притом всесторонние (оптические, совместно с химическими) исследования всегда показывают, что все особенности строения кристаллов плагиоклаза и его физические свойства, принимаемые в качестве его констант в оптических методах исследования (показатели свето- и двупреломления, угол оптических осей, углы погасания на тех или иных кристаллографических плоскостях и т. п.), далеко не столь уж постоянны и меняются в довольно широком диапазоне, соответствующем интервалу в 10 или даже 12% содержания анортита. Наиболее ясно это отражено на статистической диаграмме расположения проекций кристаллографических элементов плагиоклаза, составленной В. В. Никитиным [10]. Дополнительные материалы об этом имеются также в статье А. Н. Заварицкого [7].

Диаграмма В. В. Никитина показывает, что у плагиоклазов проекции каждого кристаллографического элемента (грань, ребро и др.), полученные в результате измерения большого числа индивидов с разным содержанием анортита, составляют на диаграмме не линию, а полосу, шириной до 10—12° по дуге большого круга, причем в пределах самой полосы точки проекций концентрируются более густо вдоль ее осевой части.

Для построения осевой линии усредненных значений полосы она была градуирована посредством небольшого числа химических анализов на интервалы через каждые десять процентов анортита, после чего для каждого отрезка полосы была определена средняя точка. Совокупность таких средних точек, отвечающих плагиоклазам с целым числом десятков процентов анортита (0%, 10%, 20% и т. д.), дает среднюю линию полосы, фигурирующую в виде кривой на рабочих диаграммах, применяемых при определении плагиоклазов федоровским методом.

Таким образом, отдельные измерения могут давать значения, отклоняющиеся от средней линии на 5 и даже 6° по дуге большого круга. Столь значительный размах отклонений от средних значений обусловливается лишь в небольшой мере степенью точности и погрешностями измерений (предельные отклонения, получаемые в результате неточности измерений, не выходят за пределы 2°), главным же образом—непостоянством оптических и иных свойств самого плагиоклаза. На это обстоятельство еще раньше обращалось внимание В. Н. Лодочниковым [8, § 114 и др.].

Нет никаких оснований для предположения, что при постоянном составе плагиоклаза отклонения от средних значений должны отражаться на рабочей диаграмме только в направлении, поперечном к осевой линии статистической полосы. Наоборот, более вероятно, что отклонения могут быть в любом направлении от точки среднего статистического значения, т. е. и вдоль полосы, притом в тех же размерах, что и поперек к ней. Поэтому нужно признать, что каждая точка на усредненной кривой имеет свой круг погрешностей (отклонений), диаметр которого должен быть приблизительно равным ширине самой полосы, а именно 10—12° по дуге большого круга.

У двух точек на средней линии, отстоящих одна от другой не более, чем в 10—12° по дуге большого круга, их круги погрешностей должны в большей или меньшей степени перекрывать друг друга. Поэтому даже и в тех случаях, когда проекция замеренного кристаллографического элемента располагается точно на средней линии полосы, необходимо допускать возможность того, что истинным значением данного элемента является не эта точка, но любая другая в пределах 5—6° в одну или в другую сторону.

Иначе говоря, следует признавать возможность ошибки в пределах полсвины ширины статистической полосы на диаграмме В. В. Никитина даже и в тех случаях, когда проекция двойниковой оси или полюса грани попадает точно на ту или иную кривую его рабочей диаграммы. К сожалению, об этом совершенно забывают даже высокоавторитетные ученые,

в силу чего создается ложное представление, что состав плагиоклаза может быть определен федоровским методом с точностью до одного процента.

На рабочей диаграмме В. В. Никитина длина кривых, соответствующих важнейшим кристаллографическим элементам, такова, что изменение состава плагиоклаза на один процент анортита вызывает перемещение точки на усредненной кривой приблизительно на 1°. Поэтому отклонение положения проекции кристаллографического элемента (двойниковой оси, полюса плоскости срастания и т. п.) на 5—6° соответствует в среднем отклонению в составе плагиоклаза на 5—6% анортита.

Таким образом, даже и наиточнейшие измерения при определении состава плагиоклаза федоровским методом дают в действительности значения с возможной ошибкой до 6% анортита. Следовательно, получив по рабочей диаграмме В. В. Никитина, что состав плагиоклаза равен, например, 40% анортита, мы должны понимать и писать результат измерения обязательно лишь в виде № 40 ± 6.

Парадоксом федоровского метода является также и то, что для плагиоклазов от № 0 до № 40—45, т. е. для наиболее важного интервала изоморфного ряда, метод этот в большинстве случаев не дает однозначного решения, как следствие симметричности важнейших кривых относительно олигоклаза (№ 20—21) и относительно главных сечений индикатрисы на рабочей диаграмме В. В. Никитина. В таких случаях для приведения двузначного решения к однозначному обязательно нужно определить, хотя бы и приближенно, светопреломление плагиоклаза, а таковое уже и без федоровских измерений позволяет получить довольно точное представление о составе минерала. Иначе говоря, для плагиоклазов до № 40—45 довольно точное (с ошибкой не более 6% анортита) определение состава может быть сделано очень часто даже по приближенному значению светопреломления, без помощи федоровского столика.

Точность в 5—6% анортита удовлетворяет не всех исследователей, и некоторые из них считают нужным усовершенствовать оптические методы исследования так, чтобы состав плагиоклаза можно было определять с гарактированной точностью до одного процента анортита. Такое стремление является глубоким недоразумением, основанным на непонимании как самих задач исследования, так и реально достижимой точности определения, лимитируемой присущим плагиоклазу непостоянством его оптических констант. Кроме того забывают, что оптические методы позволяют найти оптическую ориентировку плагиоклаза с точностью лишь до 2—3°, а это уже само дает ошибку в составе до 2—3% анортита.

В тех случаях, когда состав плагиоклаза определяется только для обычной диагностики горной породы, точность до одного процента анортита совершенно не нужна, и вполне достаточна точность в 5—6%. Ведь определение (наименование) горной породы нисколько не изменится, если при прочих равных условиях состав плагиоклаза отклонится на 5—6 номеров в одну или другую сторону. Например, габбровая порода останется попрежнему габбровой, независимо от того, будет ли состав ее плагио-

клаза соответствовать номеру 50 или отклонится до № 45 в одну сторону, или до № 55 в другую сторону.

В этом вопросе важно то, что на практике обычно выполняется очень ограниченное (по сравнению с объемом породы) число измерений, притом, как правило, в случайных шлифах и зернах, и в случайных же зонах почти всегда зонального плагиоклаза. При таких условиях никак нельзя расценивать получаемые результаты как гарантированное среднее значение. Более или менее случайный характер получаемых решений подтверждается и тем, что при измерении состава в нескольких индивидах, даже в одном и том же комплексном двойниковом сростке, всегда получаются разные значения, отклоняющиеся друг от друга на 5 номеров и больше.

Вообще говоря, понятие о среднем составе плагиоклаза в массиве изверженной породы не является реальным, и если бы даже кем либо было сделано такого рода определение, оно все равно не имело бы никакой научной ценности. Наоборот, имеет большую научную ценность знание различий в составе минерала в разных сечениях и зонах массива, на разных его уровнях, в том или ином расстоянии от контакта и т. д., а это можно получить посредством и не вполне точных замеров, если амплитуда изменения состава минерала достигает хотя бы трех-четырех процентов анортита. При меньшей же амплитуде колебаний измерение теряет смысл.

Что же касается «среднего» состава плагиоклаза в массиве горной породы, то для определения его нужно было бы произвести измерения во всех зонах зонального плагиоклаза, сопровождая это подсчетом объема каждой отдельной зоны. Кроме того, такие кропотливые измерения следовало бы выполнить в очень большом числе и по всему массиву, причем необходимо было бы использовать, дополнительно к федоровскому методу, и некоторые другие методы. В общем, работа эта настолько трудоемкая и вместе с тем настолько безрезультатна в научном отношении, что в настоящее время едва ли кто нибудь занимается такими исследованиями.

В свете всего сказанного является логичным поднять вопрос о том, что было бы вполне целесообразным отказаться от номерной классификации плагиоклазов и возвратиться к прежней именной классификации посредством уже давно существующих названий их разновидностей (альбит, альбит-олигоклаз, олигоклаз и т. п.), составляющих полный ряд из шести главных и трех или пяти промежуточных членов.

В этом ряду первые пять-шесть членов, охватывающие весь диапазон кислых и средних разностей до № 50, разделены интервалами не более 10 номеров. Следовательно, пользуясь вместо номеров этими названиями, мы будем допускать в определении состава плагиоклаза неточность не более 5% анортита, т. е. не выйдем за пределы ошибки, возможной при определении состава плагиоклаза оптическими методами. Для основной же половины изоморфного ряда, от № 50 до № 100, можно не пользоваться названиями промежуточных членов, так как здесь совер-

шенно не влияет на диагностику горной породы неточность определения состава плагиоклаза даже и в 10 номеров.

Замена номерной классификации именной классификацией представляет интерес еще в одном отношении. Дело в том, что разновидности плагиоклаза были выделены в свое время, повидимому, не случайно, но в связи с тем, что соответствующие им плагиоклазы наблюдаются в природе чаще других. Тем самым именная классификация плагиоклазов предусматривает скрытую возможность того, что не все члены изоморфного ряда, несмотря на его непрерывность, могут быть одинаково вероятными. Причина этого может заключаться в дополнительных явлениях симметрии, присущих только некоторым членам изоморфного ряда.

Так, например, у олигоклаза наибольшая ось оптической индикатрисы почти совпадает со второй кристаллографической осью и этим усиливает псевдомоноклинность кристаллов плагиоклаза. У среднего андезина, близкого к № 33, меньшая ось индикатрисы почти совпадает с первой кристаллографической осью и этим подчеркивает ее псевдотетрагональность. У битовнита, близкого к № 80, индикатриса расположена симметрично по отношению к псевдотетрагональной призме, образуемой вторым и третьим пинакоидами.

Поскольку оптическая индикатриса является функцией каких-то энергетических соотношений в пространственной решетке кристалла, постольку можно сделать вывод, что симметричное положение индикатрисы по отношению к главным кристаллографическим элементам может служить показателем большей устойчивости решетки при соответствующих этим разностям составах минерала. Отсюда вытекает второй вывод, а именно, что плагиоклазы, близкие к № № 20, 33 и 80, должны встречаться чаще, чем с промежуточными составами. Проверка этого предположения должна быть одной из важнейших задач дальнейших работ по изучению плагиоклазов, и если оно подтвердится, то это будет иметь гораздо большее научное значение, чем возможность определять состав плагиоклаза с ошибкой не в ± 5 или ± 6%, а в ± 3%, которая лимитируется точностью измерений на федоровском столике.

Наша многолетняя практика федоровских измерений и ревизия, основанная на результатах этой практики, показывают, что некоторые из методов, предложенных уже десятки лет назад, могут с успехом применяться и в настоящее время. К числу их относятся метод симметричного погасания и, особенно, метод угла погасания в сечениях, перпендикулярных к первой кристаллографической оси. На основе коррективов, выработанных практикой федоровского метода, оба указанных метода могут дать решение с ошибкой до 2—3% анортита, если учитывать ошибки только самого процесса измерения, и до 5—6%, если учитывать и непостоянство физических свойств самого плагиоклаза.

Существенно, что как первый, так и второй из указанных двух методов могут быть использованы непосредственно во время обычного изучения шлифа на обыкновенном поляризационном микроскопе без федоровского столика. Наша практика показывает, что это дает громадную эко-

номию во времени, нисколько не снижая общей научной ценности и обоснованности полученных определений. Поэтому нужно пожелать, чтобы такие простые методы получили у нас повторное признание и вошли в практику камеральных научно-исследовательских работ.

В числе простейших методов нужно указать еще метод определения состава плагиоклаза по его светопреломлению относительно канадского бальзама. Метод этот может быть особенно полезным для общей ориентировки и в качестве контроля при пользовании другими методами.

Чтобы понизить высокую трудоемкость обычного федоровского метода, некоторые исследователи пошли по пути его упрощения. Это привело к созданию «пятиосного» метода Р. Эммонса [12, 13] и его модификации — метода Заварицкого-Эммонса [5, 6]. Эти методы действительно чрезвычайно упрощают технику исследования и превращают его в чисто механическую операцию, не требующую не только какой-либо специальной научной подготовки, но даже и способности к научному мышлению.

В то же время эти упрощенные методы не могут быть причислены к категории вполне научных, так как, во-первых, они основаны на упрощенном же и не отражающем всей сложности закономерностей представлении о процессе двойникования плагиоклазов, а, во-вторых, превращая исследование в чисто механическую операцию, эти методы не содержат в себе никакой возможности контроля полученных результатов.

Даже и очень грубая ошибка, если бы таковая была допущена, не может быть обнаружена в этих методах. Причина этого заключается в том, что в «пятиосных» методах установка осей индикатрисы производится без проверки того, что с осями столика совмещены действительно оси индикатрисы, а не векторы, составляющие с ними больший или меньший угол, причем проверка эта, собственно говоря, даже и невозможна. В обычном же федоровском методе каждую из осей индикатрисы находят, как известно, самостоятельно, и проверкой служит то, что угол между ними должен быть 90°.

Помимо всего сказанного, «пятиосные» методы непригодны в тех случаях, когда задачей исследования является изучение сложного двойника. Обусловлено это тем, что при таких методах индикатриса замеряется только в одном индивиде, в связи с чем теряется возможность найти оптическую ориентировку всех остальных индивидов. В результате этого даже обычный бавенский сросток, состоящий всего лишь из четырех индивидов, представляет для «пятиосных» методов неразрешимую задачу, либо же нужно составлять несколько диаграмм и сводить их затем в одну посредством полной их перестройки.

Подтверждением этого может служить один из примеров применения такого метода, приведенных в статье самого Р. Эммонса [12]. Сделанный нами разбор этого примера [2] показывает, что в сростке из четырех индивидов устанавливаются и выводятся методом Р. Эммонса тринадцать двойниковых связей, вместо шести предельно возможных, причем нет никакой возможности обнаружить, которая из связей является здесь ложной.

Из сказанного не следует, конечно, делать вывод, что «пятиосными» методами нельзя пользоваться ни при каких условиях. Применять их можно, но при этом необходимо помнить, что полученные результаты не имеют гарантированной безупречности и не застрахованы от возможности грубой ошибки. Иначе говоря, эти методы пригодны лишь для предварительных определений.

Федоровский метод в течение десятилетий, после его появления, применялся при исследовании плагиоклазов почти исключительно лишь для определения их состава. При этом само явление двойникования плагиоклазов не было полноценной и самостоятельной целью научного исследования, а играло только подсобную роль. Поэтому сохранились в научном обиходе только самые простые закономерности двойникования плагиоклазов, и были основательно забыты триады, первоначальная теория которых была дана еще в 1910—1915 гг. М. А. Усовым и В. В. Никитиным [9, 11].

В общей сложности, в СССР было произведено федоровским методом много тысяч измерений двойников плагиоклаза, но они, даже все вместе взятые, имеют очень ограниченную научную ценность, будучи непригодны хотя бы даже для простой статистики степени распространенности тех или иных двойников. Обусловлено это дефектностью самих измерений, так как наименование двойниковой оси устанавливается в них, в виде общего правила, без учета ее соотношения с плоскостью срастания, которая обычно даже и не замерялась. Затем, почти совсем не учитывалась симметричность важнейших кривых диаграммы В. В. Никитина относительно главных сечений индикатрисы, и не вводился контроль решения по светопреломлению минерала.

Малая научная ценность имеющихся материалов обусловлена также и тем, что до последних лет еще не была разработана полностью теория двойников плагиоклаза, и поэтому на рабочих диаграммах В. В. Никитина и других авторов отсутствуют некоторые кривые, «конкурирующие» с ранее показанными [1, 3].

Наконец, имело отрицательное значение и неправильное указание В. Н. Лодочникова [8] на редкость таких сростков, в которых двойниковой осью служат перпендикуляр к третьему пинакоиду, первая кристаллографическая ось, перпендикуляры к бавенским граням (бавенские законы) и некоторые другие законы.

Следствием всего этого было то, что при прочих равных условиях некоторые, довольно распространенные двойниковые законы вообще исключались из числа возможных решений, и поэтому статистическим методом нельзя установить их истинную распространенность. В общем же, среди многих тысяч имеющихся измерений сравнительно очень мало таких, которыми можно было бы пользоваться с полным доверием для обобщений и статистики.

В настоящее время положение еще более ухудшается, так как нагромождение подобных, малоценных измерений не только не сокращается, но на оборот, увеличивается нарастающими темпами, во-первых, в связи

с общим увеличением объема геологических работ, а, во-вторых, как следствие распространения «пятиосных» методов. На выполнение таких неполноценных измерений затрачивается колоссальное количество труда, времени и материальных средств, значительную часть которых можно было бы сберечь для более продуктивной и полезной работы, если бы для такого же приблизительного определения состава плагиоклаза (с точностью до 5—6% анортита) более широко применялись простые, нетрудоемкие методы, о которых было сказано выше.

В течение последних лет было установлено, что плагиоклазы образуют не только простые, но и комплексные двойники (псевдогексагональные, псевдотетрагональные и ложнокубические), правильное понимание которых и изучение возможно только на основе триадной теории и триадного метода [3, 4]. Исследование таких двойников может быть произведено и обычным федоровским методом, но требует при этом значительно больше времени, а сама задача становится гораздо более трудно разрешимой.

Что же касается «пятиосных» методов, то прямое применение их для исследования комплексных двойников не дало бы вообще никаких результатов. Такие методы пригодны лишь для приближенного определения состава плагиоклаза, что может быть выполнено с тем же успехом и без помощи федоровского столика. Для решения же более сложных задач, связанных с исследованием закономерностей двойникования плагиоклаза, методы эти оказываются совершенно непригодными, если, конечно, не подвергнуть их коренной переделке, после которой они должны будут потерять все свои специфические особенности и превратятся в подобие триадного метода.

Обобщая все сказанное, можно следующим образом формулировать главные выводы.

1. В связи с непостоянством физических свойств плагиоклаза точность определения его состава оптическими методами, в том числе и федоровским методом, находится в пределах до ± 6% анортита. Точность в 1% анортита практически недостижима, а в обычных условиях она вообще не нужна.

2. Когда исследование плагиоклаза производится только для диагностики горной породы, применение федоровского метода является излишним. В таких случаях вполне достаточная точность в 5—6% анортита может быть достигнута и посредством простых методов, без федоровского столика. Вместе с тем можно признать вполне целесообразным возвращение от номерной к именной классификации плагиоклазов по их составу посредством давно существующих названий их разновидностей (альбит, альбит-олигоклаз, андезин и т. п.), которые обеспечивают ту же точность определения в 5—6% анортита, как и при федоровском методе.

3. Если исследование плагиоклаза производится для точного определения его оптико-минералогических особенностей (в разных частях одного и того же кристалла, в разных участках массива изверженной или иной

породы, или в разных массивах), то применение тех или иных методов не должно ограничиваться.

4. Измерение простых двойников плагиоклаза, выполняемое как вспомогательное средство для определения его состава, ничего не дает для познания законов его двойникования. Законы эти гораздо сложнее, чем это излагается в учебниках и справочниках, и их изучение необходимо проводить на основе триадной теории. Применение в таких случаях упрощенных методов Эммонса или Заварицкого-Эммонса является бесполезным и не может дать положительного результата.

5. Многие тысячи уже сделанных измерений простых двойников, взятые даже в общей их совокупности, не пригодны для научной статистики распространения тех или иных двойниковых законов. Обусловлено это тем, что измерения производились обычно методически неправильно, и кроме того не учитывалось существование «конкурирующих» законов, не показанных на рабочих диаграммах В. В. Никитина и других авторов.

Институт геологических наук
АН Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варданянц Л. А.* Дополнительные кривые к диаграмме В. В. Никитина кристаллографических элементов полевых шпатов. ДАН Армянской ССР, том VII, № 3, 1947.
2. *Варданянц Л. А.* О дефективности определения двойников плагиоклаза „пятиосным методом" Р. Эммонса. Известия АН Армянской ССР, физико-математ. и естественные науки, том I, № 1, 1948.
3. *Варданянц Л. А.* Триадная теория двойниковых образований минералов. Издание АН Армянской ССР, Ереван, 1950.
4. *Варданянц Л. А.* Триадный метод исследования двойников плагиоклаза. Издание АН Армянской ССР, Ереван 1951.
5. *Заварицкий А. Н.* Дальнейший шаг в применении универсального столика. Записки Всероссийского Минералогического Общества, часть 72, № 2, 1943.
6. *Заварицкий А. Н.* Заметки об оптическом определении плагиоклазов. Записки Всероссийского Минералогического Общества, часть 73, № 1, 1944.
7. *Заварицкий А. Н.* О высокотемпературных плагиоклазах. Записки Всесоюзного Минералогического Общества, часть 80, № 3, 1951.
8. *Лодочников В. Н.* Главнейшие породообразующие минералы. Издание второе, 1938.
9. *Никитин В. В.* Универсальный метод Федорова. Вып. 3, 1915, Петроград.
10. *Никитин В. В.* Новые диаграммы для определения полевых шпатов универсальным методом Федорва. Издание Российского Минералогич. Общества и Федоровского Института, 1929.
11. *Усов М. А.* Федоровский или универсальный оптический метод исследования породообразующих минералов, в особенности полевых шпатов. Томск, 1910.
12. *Emmons R. C.* and *Gates R. M.* New method for the determination of feldspar twins. Amer. Miner., V. 24, № 9, 1939.
13. *Emmons R. C.* The universal stage, 1943.

Լ. Ա. Վարդանյանց

ՊԼԱԳԻՈԿԼԱԶՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ԿՐԿՆԱԿՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅԱՆ ՆՊԱՏԱԿՆԵՐՆ ՈՒ ՄԵԹՈԴՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Պլագիոկլազի ֆիզիկական հատկությունների փոփոխականության պատճառով, օպտիկական մեթոդներով, այդ թվում նաև Ֆյոդորովի մեթոդով, նրա բաղադրության որոշման սխալը կարող է հասնել անորթիտի պարունակության 5—6 տոկոսի: Մեկ տոկոսի ճշտությամբ որոշումն անիրագործելի է, իսկ սովորական պայմաններում այն պետք էլ չէ:

Երբ պլագիոկլազը հետազոտվում է միմիայն լեռնային ապարի անվանումը որոշելու համար, սովորաբար անհրաժեշտություն չկա կիրառել Ֆյոդորովի մեթոդը: Նման դեպքերում այդ նույն ճշտությամբ (± 5—6 տոկոս) որոշում կարելի է ստանալ նաև ավելի պարզ մեթոդներով, առանց Ֆյոդորովի սեղանիկի: Այդ կապակցությամբ նպատակահարմար է հարց դնել պլագիոկլազների համարային դասակարգումից անվանականին վերադառնալու մասին, օգտագործելով նրանց տարատեսակների (ալբիտ, ալբիտօլիգոկլազ, անդեզին և այլն) վաղուց գոյություն ունեցող անունները, որոնք ընդհանուր առմամբ տալիս են որոշման նույն ճշտությունը, ինչ և Ֆյոդորովի մեթոդը:

Սակայն, երբ պլագիոկլազներն ուսումնասիրվում են նրանց օպտիկական և այլ հատկությունները ճշտորեն որոշելու նպատակով, այդպիսի դեպքերում այս կամ այն մեթոդի կիրառումը չի սահմանափակվում:

Պլագիոկլազի պարզ կրկնակների չափումը (որպես լոկ նրա բաղադրությունը որոշելու օժանդակ միջոց) ոչինչ չի տալիս նրա կրկնակագոյացման օրենքները հասկանալու համար: Այս օրենքները շատ ավելի բարդ են, քան այդ նկարագրվում է դասագրքերում, և նրանց ուսումնասիրությունն իրագործելի է միայն կրկնակների տրիադային տեսության հիման վրա: Այսպիսի դեպքերում «հինգառանցքային» մեթոդներն անօգուտ են, քանի որ նրանք ի վիճակի չեն տալու շատ թե քիչ բարդ խնդրի լուծումը:

Պլագիոկլազի պարզ կրկնակների արդեն կատարված հազարավոր չափումները, նույնիսկ բոլորը միասին վերցրած, պիտանի չեն այս կամ այն կրկնակային օրենքների տարածվածության աստիճանը որոշելու համար, քանի որ այդ չափումները մեթոդական տեսակետից մեծ մասամբ արատավոր են, և, քանի որ, բացի դրանից, չի նախատեսվել մի շարք այլ օրենքների գոյությունը, որոնք, ըստ նոր տվյալների, բավականաչափ լայն տարածում ունեն:

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ПЕТРОГРАФИЯ

К. А. Карамян

К вопросу о вязкости магмы и структурном рисунке изверженных пород

К числу наиболее распространенных методов структурной петрологии относится расшифровка структурных рисунков изверженных пород, которые раскрывают с достаточной определенностью не только внешние условия (наличие давления, направленность давления), при которых формировалась внедрившаяся или излившаяся магма, но и физико-химическое состояние магмы в период ее внедрения.

В настоящей работе делается попытка расшифровать и дать соответствующее объяснение нескольким структурным рисункам, с которыми автору пришлось столкнуться при изучении интрузивных пород Мегринского массива.

Задачей исследований было определение относительной вязкости монцонитовой и гранодиоритовой магм путем сравнения структурных рисунков этих пород.

Интрузивные породы Мегринского района объединяются в один массив, имеющий значительное площадное распространение. Массив сложен породами четырех* разновременных и различных по составу интрузивных фаз, внедрявшихся в следующей последовательности:

1) габбровая,
2) монцонитовая,
3) гранодиоритовая,
4) щелочных и нефелин—содержащих сиенитов.

Отличительная черта пород монцонитовой фазы—наличие значительного числа различных дифференциатов: монцонитов, кварцевых монцонитов, сиенито-диоритов, сиенитов, диоритов, габбро-диоритов, габбро. Такое значительное количество дифференциатов наводит на мысль, что первичная магма была более основного состава, чем монцонит.

Характерная особенность пород монцонитовой интрузии в структурном отношении—резко выраженная план-параллельная текстура. Этого нельзя сказать в отношении пород гранодиоритовой интрузии, где отсутствие ориентированных минералов ясно обнаруживается при микроскопическом изучении.

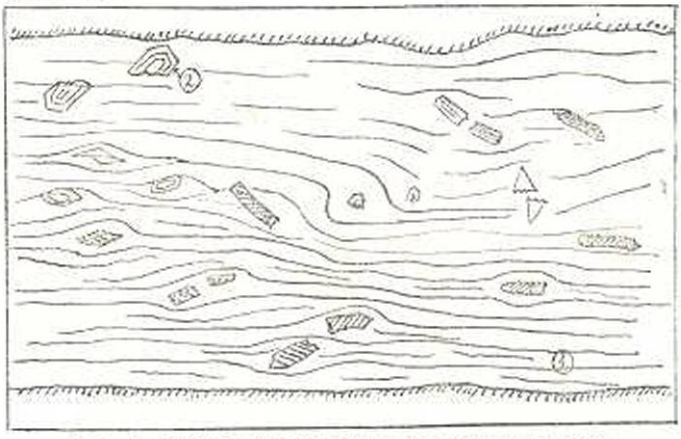
* Для северной части Мегринского плутона С. А. Мовсесян [1] выделяет еще одну фазу—баватитовую, по времени внедрения—между монцонитами и гранодиоритами.

Многочисленные замеры направлений флюидальности в монцонитах показывают, что они повторяют направление контакта интрузии с вмещающими породами. В местах, где контакт делает изгибы, текстура с достаточной точностью следует этим изгибам, причем наиболее резко выражены эти структуры течения в краевых фациях интрузии.

Взаимоотношение между различными направлениями этих структур течений в монцонитах наводит на мысль об относительно слабой вязкости монцонитовой магмы в момент внедрения. Одним из основных доводов в пользу этого мнения можно считать эту, хорошо выраженную структуру течения.

В магме с относительно большей вязкостью не могла возникнуть хорошая ориентация готовых, уже образованных минералов, ибо в вязкой среде сила трения между твердой фазой (в данном случае образовавшийся минерал) и жидкой фазой, обладающей большой вязкостью, превышала бы величину гидростатического давления, которая приводит в движение магму.

В водораздельной части Зангезурского хребта известны выходы дайковых пород, которые являются жильными дериватами гранитной магмы. Среди стекловатой основной массы выделяются отдельные фенокристаллы полевых шпатов, роговой обманки, кварца. В дайковой породе стекловатая, не раскристаллизованная основная масса выражена отчетливыми слоями течения, а фенокристаллы вышеупомянутых минералов не имеют ориентированной линейной структуры и часть из них разбита и катаклазирована (фиг. 1).

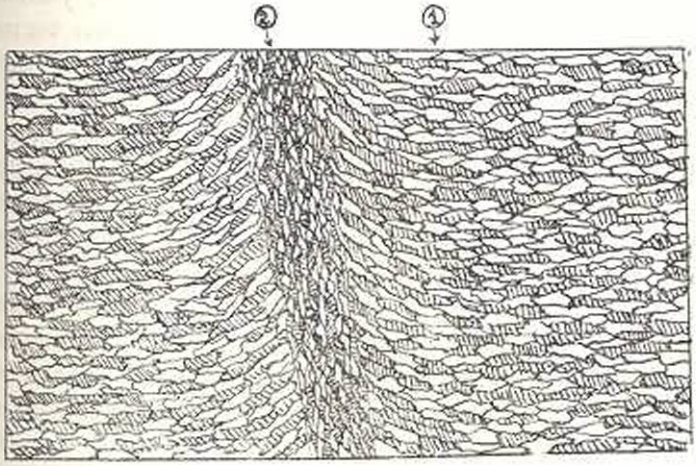


Фиг. 1. Зарисовка структурного рисунка дайки.
1—флюидальная основная масса;
2—катаклазированные фенокристаллы.

Нераскристаллизованность основной массы следует объяснить приповерхностной фацией, которая, можно сказать, вышла на дневную поверхность. Такая особенность структурных рисунков даек свидетельствует о том, что внедрившаяся масса была очень вязкой и величина трения между вязкой стекловатой средой и фенокристаллами превышала величину гидростатического давления внедряющейся вязкой массы. В

свою очередь хрупкость минерала, необходимо полагать, не выдерживала величину гидростатического давления и в результате происходил процесс катаклаза фенокристаллов. Это явление в большой степени происходило также и в результате неодинакового движения соприкасающихся слоев внедряющейся массы, что отчетливо видно в образцах из этих даек.

Интересно привести еще один пример структурных рисунков в монцонитовых породах, который, как мы полагаем, указывает на то, что монцонитовая магма обладала довольно слабой вязкостью. Западнее развалин с. Мюльк, вблизи контакта гранодиоритов с монцонитами, крупнозернистые монцониты с резко выраженной текстурой течения секутся отдельными полосами мелкозернистой породы, образующих подобие инъекции. Инъецирующая масса по составу также отвечает монцонитам. Вследствие прорывания происходит загибание листочков биотита, которые составляют план-параллельную текстуру крупнозернистых монцонитов (фиг. 2).



Фиг. 2. Инъекция крупнозернистого монцонита мелкозернистым.
1—крупнозернистый монцонит;
2—инъекция мелкозернистого монцонита.

Подобное явление также убедительно свидетельствует о слабой вязкости монцонитовой магмы, ибо в вязкой магме такие тонкие инъекции не могли бы вызвать загибы листочков биотита.

Вязкость монцонитовой магмы, и вообще любой магмы, должна повыситься с увеличением в ней количества выкристаллизованных минералов. Отсюда вытекает, что наибольшую вязкость приобретает еще не застывшая монцонитовая магма к моменту кристаллизации полевошпатовой массы. Так как при инъекции происходило загибание листочков биотита (выделявшихся первыми), то это значит, что инъекция происходила намного раньше момента кристализации полевошпатовой массы.

Образование указанных инъекций можно объяснить как наличием конвекционных токов, образующихся вследствие неравномерности застывания магматического очага, так и наличием направленного давления,

которое заставляет выжиматься еще не застывшую магму отдельных локальных участков.

Наши выводы относительно слабой вязкости монцонитовой магмы вполне согласуются с представлением С. А. Мовсесяна [1] о большой расщепляемой способности монцонитовой магмы, большое количество дифференциатов которой вполне можно объяснить этим фактором.

Таким образом, можно сделать вывод, что структурные рисунки изверженных пород вполне могут охарактеризовать вязкость магмы. Менее вязкие магмы (монцонитого состава) дают более отчетливые рисунки вследствие податливости их направленным давлениям. Более вязкие магмы (гранодиоритового состава) в тех же условиях дают менее отчетливые рисунки.

Изучение структурных рисунков изверженных пород имеет большое научно-теоретическое и практическое значение. Структурные рисунки изверженных пород образованы в определенных физико-химических и тектонических условиях и являются как бы отпечатком этих условий. Следовательно, изучая структуры, можно проследить историю тектонического развития данного интрузивного массива, которая находит отражение в первичной ориентированности минералов в момент внедрения, образовании систем трещин отдельности и дальнейшем раскрытии их в возникновении тектонических трещин, контролирующих локализацию руд.

Следует отметить также, что в развитии структурных элементов интрузивного массива намечается явная наследственная зависимость в процессе возникновения новых структур на базе старых. Первичная ориентированность минералов во время внедрения интрузии, зависящая от наличия и ориентированности направленного давления, является основой, на которой развивается в дальнейшем система трещин отдельностей, а на базе последних затем появляются трещины, обязанные своему происхождению тектоническим усилиям, действующим уже после застывания интрузии. По этим трещинам циркулируют постмагматические рудоносные растворы и нередко вдоль этих же раскрытых тектонических трещин отлагаются руды.

Институт геологических
наук АН Армянской ССР

Поступило 26 VI 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мовсесян С. А.* Интрузии центральной части Конгуро-Алангезского хребта и связанные с ним полезные ископаемые. Изв. Арм. филиала АН СССР, 1940.

Ե. Ա. Փաւամյան

ՄԱԳՄԱՅԻ ՄԱԾՈՒՑԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՀՐԱՅԻՆ ԱՊԱՐՆԵՐԻ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻՆ ՆԿԱՐԻ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում պարզաբանվում է մագմայի մածուցիկության կապը հրային ապարների ստրուկտուրային նկարի հետ։

Երկու տարբեր հատակի և տարբեր կազմության ապարների ստրուկտուրային նկարների համեմատության հիման վրա հեղինակը որոշում է այդ ապարների հարաբերական մածուցիկությունը։

Նվազ մածուցիկ մոնոմիներալային կազմության մագմաները տալիս են համեմատաբար լավ արտահայտված ստրուկտուրային նկարներ, իսկ ավելի մածուցիկ գրանոդիորիտային կազմության մագմաները՝ ոչ այնքան պարզ նկարներ։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ГИДРАВЛИКА

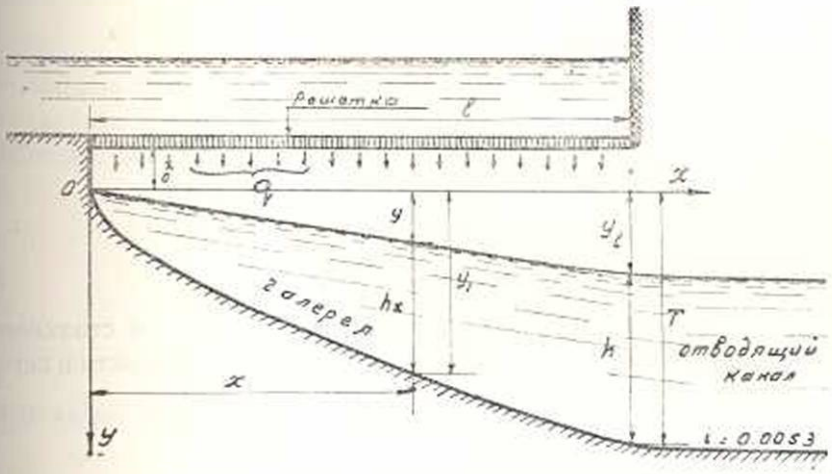
Х. А. Навоян

Расчет галереи горного водозабора с донной решеткой

В предыдущей статье автора [2] был дан расчет пропускной способности донной решетки горного водозабора.

В настоящей статье дается расчет водоприемной галереи и отводящего канала.

Из схемы горного водозабора (фиг. 1) вытекает, что расход галереи переменный; в начальном сечении (при $x = 0$) он равен нулю, а в конце приобретает максимальное значение, равное расчетному расходу водозабора.



Если принять, что решетка однообразна по всей длине галереи, т. е. прутья решетки одинаковы, а также расстояние между ними постоянно (на практике только такие решетки и применяются), то расход поступающий в галерею через погонный метр решетки будет иметь одну и ту же величину по всей длине галереи.

Расход в любом сечении галереи с абсциссой x определится из выражения

$$Q_x = qx, \tag{1}$$

где q—удельный расход, поступающий через решетку в галерею.

Расход в конце галереи будет:

$$Q = ql$$

где l длина галереи.

Общее уравнение установившегося движения жидкости с пере-

менным расходом вдоль потока в применении к координатной системе, приведенной на фигуре 1, имеет следующий вид [1]:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_x (v_x - v_1)}{gQ_x} \frac{dQ_x}{dx} + \frac{v_x}{g} \frac{dv_x}{dx} + Kv_x^2, \tag{2}$$

где y—полная потеря напора от начального до рассматриваемого сечения с абсциссой x; в частном случае для открытых (безнапорных) потоков—ордината свободной поверхности,

v_x — скорость основного потока,

v_1 — проекция скорости присоединяющего потока на направление движения основного потока (в рассматриваемом случае $v_1 = 0$),

Q_x — расход в сечении с абсциссой x,

g — ускорение силы тяжести,

Kv_x^2— член, учитывающий обычные потери на трение о стенки и дно водотока, который в общем случае можно представить в таком виде:

$$Kv_x^2 = \frac{dh_f}{dx}, \tag{3}$$

где h_f — потери на обычное трение.

Подстановка из (1) и (3) в (2) дает:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_x^2}{g} \cdot \frac{1}{x} + \frac{v_x}{g} \cdot \frac{dv_x}{dx} + \frac{dh_f}{dx}. \tag{4}$$

С другой стороны можно написать

$$y = h_v + h_f, \tag{5}$$

где через h_v условно обозначены потери на удар и столкновение частиц между собой, обусловленные изменением скорости и переменностью расхода по длине.

Дифференцируя (5) находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dh_v}{dx} + \frac{dh_f}{dx} \tag{6}$$

Из (4) и (6) имеем:

$$\frac{dh_v}{dx} = \frac{v_x^2}{g} \frac{1}{x} + \frac{v_x}{g} \cdot \frac{dv_x}{dx}, \tag{7}$$

Для решения дифференциального уравнения (4) необходимо задаться или уравнением свободной поверхности, или выражением скорости. Последний путь более прост.

Примем следующую зависимость для скорости

$$v_x = ax^p, \tag{8}$$

где „a" и p—произвольные постоянные величины, однако они поддаются выбору, о чем будет сказано ниже.

Для определения потерь напора на трение о стенки и дно водотока будем полагать, что они выражаются формулой такого же вида, что и при равномерном движении, т. е.

$$\frac{dh_f}{dx} = i_f = \frac{v_x^2}{C^2R}. \tag{9}$$

Здесь C—коэффициент Шези, который будем определять по Маннингу

$$C = \frac{R^{\frac{1}{6}}}{n}, \tag{10}$$

где R—гидравлический радиус,

n—коэффициент шероховатости русла.

Подставляя из (10) в (9), получаем:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{n^2 v_x^2}{R^{\frac{4}{3}}}. \tag{11}$$

Для прямоугольной галереи

$$R = \frac{bh_x}{b+2h_x}, \tag{12}$$

где b — ширина галереи,

h_x — глубина наполнения.

Площадь живого сечения

$$\omega_x = bh_x = \frac{Q_x}{v_x}, \tag{13}$$

откуда

$$h_x = \frac{Q_x}{bv_x}. \tag{14}$$

Подставляя значения Q_x из (1) и v_x из (8) в (14), находим:

$$h_x = \frac{q}{ab} x^{1-p}. \tag{15}$$

Подстановка значения h_x из (15) в (12) дает:

$$R = \frac{bqx^{1-p}}{ab^2 + 2qx^{1-p}}. \tag{16}$$

Имея в виду (8) и (16), перепишем (11) в таком виде:

$$\frac{dh_f}{dx} = a^2 n^2 x^{2p} \left(\frac{ab^2 + 2qx^{1-p}}{bqx^{1-p}}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{17}$$

После несложных преобразований (17) можно представить так:

$$\frac{dh_f}{dx} = \frac{a^{\frac{10}{3}} n^2 b^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{10p-4}{3}} \left(1 + \frac{2q}{ab^2} x^{1-p}\right)^{\frac{4}{3}}. \quad (18)$$

Имея в виду (8), выражение (7) можно представить так:

$$\frac{dh_v}{dx} = \frac{a^2(1+p)}{g} x^{2p-1}. \quad (19)$$

Подставляя значения из (18) и (19) в (6), будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2(1+p)x^{2p-1}}{g} + \frac{a^{\frac{10}{3}} n^2 b^{\frac{4}{3}}}{q^{\frac{4}{3}}} x^{\frac{10p-4}{3}} \left(1 + \frac{2q}{ab^2} x^{1-p}\right)^{\frac{4}{3}}. \quad (20)$$

Пользуясь правилом П. Л. Чебышева об интегрировании дифференциальных биномов, легко показать, что уравнение (20) интегрируется в элементарных функциях только в тех случаях, когда p удовлетворяет одной из следующих двух зависимостей

$$p = 1 - \frac{9}{3N + 10} \quad (21)$$

$$p = 1 - \frac{3}{N+2} \quad (22)$$

где N—любое целое число.

Интегрируя (19), находим:

$$h_v = \frac{a^2(1+p)}{2pg} x^{2p}. \quad (23)$$

Обращаясь к (15) и (23), устанавливаем, что h_x и h_v обращаются в бесконечность соответственно при $p > 1$ и $p \leqslant 0$.

Таким образом, при этих значениях p приведенные выше зависимости теряют физический смысл, и потому p может колебаться в пределах:

$$0 < p \leqslant 1.$$

Для общих выводов проинтегрируем уравнение (20) для $p = \frac{4}{13}$ и $p = 1$; из (21) следует, что эти значения p соответствуют $N = 1$ и $N = \infty$.

Интегрирование уравнения (20) дает:

1. При $p = \frac{4}{13}$

$$y_1 = A_1 x^{\frac{8}{13}} + A_2 \left[\left(1 + A_3 x^{\frac{9}{13}}\right)^{\frac{7}{3}} - 1\right] \quad (24)$$

где

$$A_1 = \frac{17a^2}{8g}, \quad (25)$$

$$A_2 = \frac{13a^4b^3n^2}{42q^2}\sqrt[3]{\frac{ab}{q}}, \tag{26}$$

$$A_3 = \frac{2q}{ab^2}. \tag{27}$$

2. При $p = 1$

$$y = \frac{a^2}{g}x^2 + \frac{a^{\frac{10}{3}}n^2b^{\frac{4}{3}}}{3q^{\frac{4}{3}}}\left(1 + \frac{2q}{ab^2}\right)^{\frac{1}{3}}x^3. \tag{28}$$

В выражениях (24) и (28) вторые члены правой части представляют потери на обычное трение.

Перед тем, как перейти к дальнейшему изложению, рассмотрим один числовой пример.

Даны: $l = 3{,}0$ *м*, $q = 1{,}2$ *м*^{3}/*сек* на 1 пог. *м*,
$b = 1{,}0$ *м*, $n = 0{,}011$.

Вариант 1—принимаем[1] $p = \frac{4}{13}$; $a = 1{,}45$.

По (25)

$$A_1 = \frac{17a^2}{8g} = \frac{17 \cdot 1{,}45^2}{8 \cdot 9{,}81} = 0{,}455.$$

По (26)

$$A_2 = \frac{13a^4b^3n^2}{42^2}\sqrt[3]{\frac{ab}{q}} = \frac{13 \cdot 1{,}45^4 \cdot 1{,}0^3 \cdot 0{,}011^2}{42 \cdot 1{,}2^2} \cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{1{,}45 \cdot 1{,}00}{1{,}2}} = 0{,}000123.$$

По (27) $$A_3 = \frac{2q}{ab^2} = \frac{2 \cdot 1{,}2}{1{,}45 \cdot 1{,}0^2} = 1{,}65.$$

Потери, обусловленные переменностью расхода, в конце галереи составляют:

$$h_v = A_1 l^{\frac{8}{13}} = 0{,}455 \cdot 3{,}0^{\frac{8}{13}} = 0{,}90\ м.$$

Потери на обычное трение

$$h_f = A_2\left[\left(1 + A_3 l^{\frac{9}{13}}\right)^{\frac{7}{13}} - 1\right] = 0{,}000123\left[\left(1 + 1{,}65 \cdot 3{,}0^{\frac{9}{13}}\right)^{\frac{7}{3}} - 1\right] =$$

$$= 0{,}00405\ м.$$

Полные потери по (24)

$$y = h_v + h_f = 0{,}90 + 0{,}00405 = 0{,}904\ м,$$

$$\frac{h_v}{h_f} = 222{,}0.$$

[1] Определение величин p и „a" дается ниже.

Вариант 2—принимаем p=1,0; a=0,87;

$$h_v = \frac{a^2}{g} l^2 = \frac{0{,}87^2 \cdot 3{,}0^2}{9{,}81} = 0{,}694 \text{ м},$$

$$h_f = \frac{a^{\frac{6}{3}} n^2 b^{\frac{4}{3}}}{3q^{\frac{4}{3}}} \left(1 + \frac{2q}{ab^2}\right)^{\frac{4}{3}} l^3 = \frac{0{,}87^{\frac{10}{3}} \cdot 0{,}011^2 \cdot 1{,}0^{\frac{4}{3}}}{3 \cdot 1{,}2} \cdot$$

$$\cdot \left(1 + \frac{2 \cdot 1{,}2}{0{,}87 \cdot 1{,}0}\right)^{\frac{4}{3}} 3{,}0^3 = 0{,}00316 \text{ м}.$$

Полные потери

$$y_l = h_v + h_f = 0{,}694 + 0{,}00316 = 0{,}697 \text{ м}.$$

$$\frac{h_v}{h_f} = 220{,}0$$

Вышеприведенные подсчеты показывают, что потери, обусловленные переменностью расхода, превосходят более чем в 200 раз потери на обычное трение о дно и стенки водотока. Аналогичные расчеты произведены также для ряда других значений p, находящихся в пределах $0 < p \leqslant 1$, при разных q, n и b. Результаты этих подсчетов показывают, что полные потери больше потерь на обычное трение от 100 до 400 раз, т. е. потери на обычное трение ничтожно малы по сравнению с общими потерями. Таким образом приходим к заключению, что в подобных случаях, т. е. на коротких участках и при интенсивном изменении расхода учет потерь на обычное трение выходит за пределы точности обычных инженерных вычислений, и что этими потерями следует пренебречь.

В силу изложенного (20) примет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2(1+p)x^{2p-1}}{g}. \tag{29}$$

Интегрируя, находим уравнение кривой свободной поверхности

$$y = \frac{a^2(1+p)x^{2p}}{2pg}. \tag{30}$$

Уравнение кривой очертания дна галереи представится в следующем виде:

$$y_1 = y + h_x. \tag{31}$$

Подставляя соответствующие значения из (15) и (30) в (31), находим:

$$y_1 = \frac{a^2(1+p)x^{2p}}{2pg} + \frac{qx^{1-p}}{ab}. \tag{32}$$

Полная глубина галереи T в конце ее (фиг. 1) определится из (32) подстановкой $x = l$

$$T = \frac{a^2(1+p)l^{2p}}{2pg} + \frac{ql^{1-p}}{ab}. \tag{33}$$

Из (33) следует, что при заданных q, l и b и при выбранном значении p величина T является функцией только „a", т. е. $T = f(a)$. Так как эта функция непрерывна и на границах (при $a = 0$ и при $a = \infty$) приобретает значение $+\infty$, то при некотором значении величины „a" эта функция должна иметь минимум. Из условия минимума T и найдется оптимальное значение „a".

Это последнее определяется из выражений:

$$a = \frac{1}{l^p}\sqrt[3]{\frac{Qpg}{b(p+1)}}, \tag{34}$$

где $Q = ql$ — расход в концевом сечении галереи, т. е. расчетный расход водозабора;

При оптимальном значении „a" получаем экономически наивыгоднейшее решение задачи при заданных b, l и Q.

Помимо того, при этом дно отводящего канала (следовательно и деривационного или магистрального каналов) располагается на более высоких отметках, что приводит к увеличению полезного напора деривационной ГЭС или подкомандной площади при водозаборе для орошения.

Подстановкой значения „a" из (34) в (8) и (30), находим окончательные выражения для скорости и потерь напора

$$v_x = \left(\frac{x}{l}\right)^p \sqrt[3]{\frac{Qpg}{b(p+1)}}, \tag{35}$$

$$y = \left(\frac{x}{l}\right)^{2p} \sqrt[3]{\frac{Q^2(1+p)}{8gpb^2}}. \tag{36}$$

Скорость и полные потери в конце галереи находим из выражений (35) и (36) заменой в них x через l:

$$v = \sqrt[3]{\frac{Qpg}{b(p+1)}}, \tag{37}$$

$$y_l = \sqrt[3]{\frac{Q^2(1+p)}{8gpb^2}}. \tag{38}$$

Таким образом, приходим к важному выводу: при движении потока с переменным расходом вдоль пути, полные потери не зависят от длины водотока и при заданных поперечных размерах являются лишь функцией конечного расхода.

Этот вывод общий и относится не только к рассматриваемому случаю. В данном конкретном случае этот результат подсказывает, что если гидрология реки позволяет и если конструктивно это целесообразно, следует стремиться к наименьшей длине галереи для забора заданного расхода.

По зависимостям (33)—(38) произведены расчеты для десяти значений p по данным вышеприведенного примера.

Результаты этих расчетов сведены в таблицу 1: они показывают, что с увеличением p уменьшается T и увеличивается v в конце галереи; следовательно, можно было бы полагать, что оптимальное значение $p = 1{,}0$. Однако полный анализ показывает, что при больших значениях p, глубина наполнения в начальной половине галереи увеличивается и, следовательно, уменьшаются скорости, что должно отрицательно повлиять на промывку наносов, проваливающихся через решетку и галерею. Поэтому в рассматриваемом случае, т. е. для случая горного водозабора, как показывает анализ результатов большого числа непосредственных подсчетов, следует принять $p = 0{,}5$. Дальнейшее уменьшение значения p не целесообразно.

Подставляя в соответствующие выражения значение $p = 0{,}5$, находим:

$$v_x = a\sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{Qg}{3b}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}} = v\sqrt{\frac{x}{l}}, \tag{39}$$

$$y = \frac{3a^2}{2g}x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}\cdot\frac{x}{l} = y_l\frac{x}{l}, \tag{40}$$

$$h_x = \frac{q\sqrt{x}}{ab} = \sqrt[3]{\frac{3Q^2}{gb^2}\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{3}{2}}} = h\sqrt{\frac{x}{l}}, \tag{41}$$

$$y_1 = y + h_x. \tag{31}$$

Таблица 1

p	v	h = Q : vb	y_l	T
0,1	1,47	2,45	1,22	3,67
0,2	1,71	2,10	1,00	3,10
0,3	2,01	1,79	0,89	2,68
0,4	2,16	1,67	0,83	2,50
0,5	2,27	1,59	0,79	2,38
0,6	2,36	1,52	0,77	2,28
0,7	2,44	1,47	0,73	2,20
0,8	2,50	1,14	0,72	2,16
0,9	2,55	1,41	0,70	2,11
1,0	2,60	1,38	0,69	2,07

В случае, когда задана скорость в конце траншеи, то требуемая ширина галереи определится из (39) подстановкой в него $x = l$:

$$b = \frac{Qg}{3v^3}. \tag{42}$$

Отметим, что галерея в известном смысле работает как водобойный колодец небольшой длины, равной ширине галереи; поэтому над свободной поверхностью основного потока наблюдается образование вихревой области, в которой движение происходит по круговой и спиралевидной траектории. Указанное явление делает фактическую глубину потока больше вычисленной по (41). Неучет этого фактора влечет за собой подтопление нижней плоскости решетки и уменьшит ее пропускную способность; во избежание этого следует при расчетах галереи предусмотреть некоторый запас в ее высотных размерах. В первом приближении, до последующего количественного изучения описанного явления, следует определить расстояние между решеткой и свободной поверхностью потока в галерее по следующей приближенной зависимости (фиг. 1):

$$\delta = (0{,}4-0{,}5)\ b. \tag{43}$$

Для расчета отводящего канала целесообразно требовать, чтобы скорость в нем была бы такая же, как в концевом сечении траншеи. Скорость в концевом сечении выбирается из условий свободной транспортировки наносов из галереи в отводящий канал и далее в отстойник. Принимая поперечное сечение отводящего канала равным концевому сечению траншеи, определяем уклон отводящего канала

$$i = \frac{v^2}{C^2R} = \frac{n^2v^2}{R^{\frac{4}{3}}} \tag{44}$$

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступило 21 IV 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маккавеев В. М.* Теория гидродинамических процессов с большим гашением энергии. Труды Второго Всесоюзного гидрологического съезда в Ленинграде 20—27 апреля 1928 г. Часть III, Л. 1930.

2. *Навоян Х. А.* Пропускная способность донной решетки горного водозабора. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), т. V, № 4, 1952.

Ս. Ա. Նավոյան

ՀԱՏԱԿԱՅԻՆ ՑԱՆՑՈՎ ԼԵՌՆԱՅԻՆ ՋՐԸՆԴՈՒՆԻՉԻ ՍՏՈՐԱՆՑՔԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում տրված է ջրընդունիչի ստորանցքի հիդրավլիկական հաշվարկը։

Առաջված են հետևյալ հաշվարկային բանաձևերը՝

$$v_x = a\sqrt{x} \tag{39}$$

$$h_x = \frac{q\sqrt{x}}{ab} \tag{41}$$

որտեղ՝

$$a = \sqrt[3]{\frac{gQ}{3bl^2}} \tag{34}$$

Հոսանքի ազատ մակերևույթի և ստորանցքի հատակի կորերը համապատասխանաբար կառուցվում են հետևյալ հավասարումներով՝

$$y = \frac{3a^2}{2g}x \tag{40}$$

$$y_1 = y + h_x = \frac{3a^2}{2g}x + \frac{q\sqrt{x}}{ab} \tag{31}$$

որտեղ՝ y_1 — հոսանքի միջին արագությունն է x աբսցիսա ունեցող հատվածքում,

a — հաշվարկային գործակից է, որը որոշվում է (34) ֆորմուլայով,
h_x — հոսանքի խորությունն է դիտվող հատվածքում,
q — տեսակարար ելքն է,
b — ստորանցքի լայնքն է,
l — ստորանցքի երկարությունն է,
Q — հաշվարկային ելքն է ստորանցքի վերջին հատվածքում,
y — հոսանքի ազատ մակերևույթի օրդինատն է,
y_1 — ստորանցքի հատակի օրդինատն է.

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952 Физ.-мат., естеств. и техн. науки

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Л. М. Вильчур

О форме и размерах единичного электрода переносного заземляющего устройства

Переносное заземляющее устройство передвижных электроустановок отличается от заземления обычных стационарных установок тем, что:

1) располагается всегда в поверхностном слое грунта с неустойчивой удельной проводимостью;

2) может оказаться попеременно в самых разнообразных почвенных условиях;

3) каждый раз вступает в эксплоатацию не пройдя периода улеживания, поэтому его сопротивление растеканию подвержено большим флюктуациям от забивки в грунтах различной плотности и степени влажности.

Отсюда вытекают требования, которым должен удовлетворять единичный электрод-заземлитель переносного заземляющего устройства:

1) легко и быстро закладываться и выниматься из грунта;

2) давать хороший контакт с землей;

3) обладать достаточной механической прочностью, чтобы выдержать многократную закладку и выемку из грунта.

По характеру расположения в грунте переносные электроды могут выполняться вертикальными и горизонтальными.

Вертикальные стержни могут быть различны по форме:

а) цилиндрический (сплошной и полый);

б) конический (сплошной и полый);

в) конический с бороздами гранями—штык;

г) винтовой;

д) штопорообразный.

К горизонтальным относятся протяженные заземлители прямоугольного и круглого сечения, закладываемые на поверхности земли или на небольшой глубине.

Сопротивление растеканию всех названных типов заземлителей может быть вычислено теоретически с той или иной степенью точности в предположении совершенно однородного по удельной проводимости грунта.

В период с октября 1950 по сентябрь 1952 года автором был проведен ряд исследований переносного заземляющего устройства для передвижной подстанции электротракторного агрегата. В первую очередь исследовался вопрос о форме и размерах единичного электрода переносного заземления.

Эксперименты проводились на территории Армянской ССР в различных почвах, орошаемых и неорошаемых.

Вертикальные электроды. Сопротивление растеканию цилиндрического вертикального заземлителя (полого и сплошного), забитого у поверхности земли, вычисляется обычно по формуле:

$$R_з \approx \frac{1}{2\pi\gamma l} \ln \frac{4l}{d}, \qquad (1)$$

где γ — удельная проводимость однородного грунта в $ом^{-1}\,см^{-1}$,

l — длина электрода в *см*, d — внешний диаметр в *см*.

Формула (1) приближенная, так как выводится в допущении, что поверхность уровня комбинированного фиктивного цилиндрического заземлителя является поверхностью полуэллипсоида [1].

Поскольку конический электрод со своим зеркальным изображением даже больше приближается к эллипсоиду, чем цилиндрический, можно воспользоваться этой же формулой и для конического заземлителя. В этом случае d — максимальный диаметр конуса у поверхности земли.

При обычно имеющих место соотношениях диаметра и длины заземлителя, когда $d \ll l$, изменение диаметра даже в несколько раз мало отражается на величине сопротивления растеканию [2]. Поэтому поперечные размеры электрода должны выбираться исключительно из условий механической прочности и скорости забивки.

При выборе длины переносного электрода приходится считаться с неустойчивостью удельной проводимости грунта, участвующего в растекании тока с электрода,—фактической удельной проводимости. Фактическая удельная проводимость зависит от геологического строения слоев земли, степени их разрушенности, их ориентации в направлении поверхности земли, характера и толщины почвенного слоя. При неизменности физико-механических свойств грунта большое влияние на фактическую удельную проводимость оказывает сезонное изменение влажности поверхностного слоя земли, наличие искусственного орошения и подземных грунтовых вод.

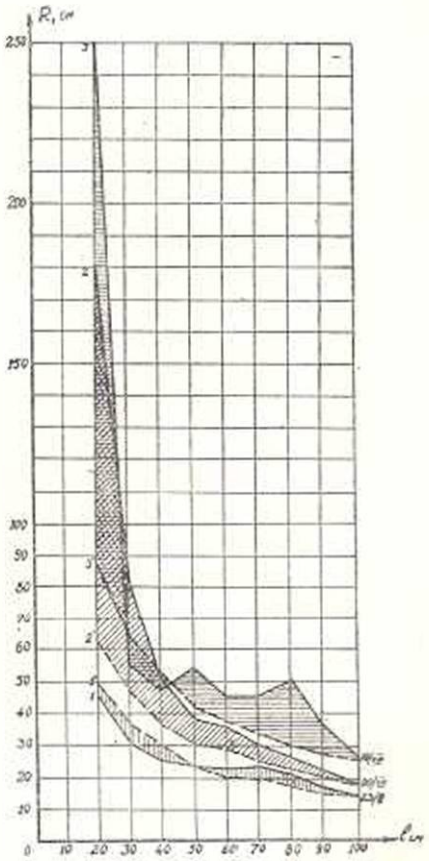
Влияние сезонного изменения влажности почвы на фактическую удельную проводимость для неорошаемого участка показано на фиг. 1. По мере просыхания почвы кривая $R_з = f(l)$ цилиндрического электрода перемещается вверх.

Уменьшение проводимости вследствие естественного просыхания грунта различно по глубине. Чем короче электрод, т. е. чем ближе он к поверхности земли, тем резче растет с просыханием его

сопротивление. На этой же фигуре нанесены пунктирами те же кривые, но в предположении, что фактическая проводимость в верхних слоях почвы та же, что и на глубине забивки электрода. По мере сезонного просыхания почвы наблюдается огромное расхождение кривых в части, прямыкающей к поверхности земли.

Для выяснения длины электрода, при которой неустойчивость верхнего слоя почвы перестает существенно влиять на сопротивление растеканию заземлителя, был поставлен ряд экспериментов.

Так как в новых сельскохозяйственных районах великих строек коммунизма будет исскуственное орошение, мы и в Армянской ССР провели часть экспериментов на орошаемых землях.



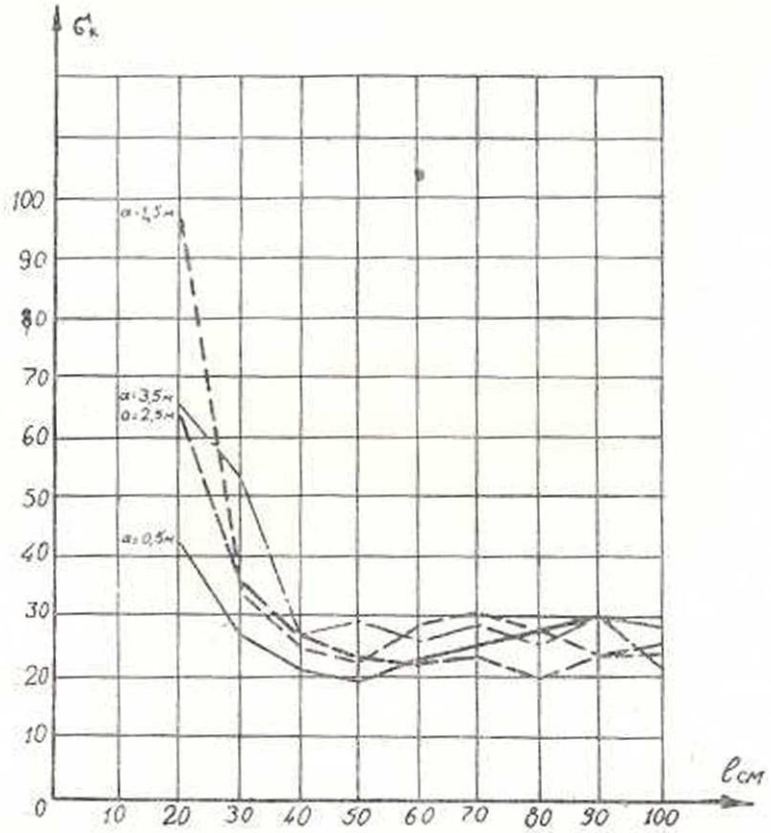
Фиг. 1.

Грунт принадлежал к бурым культурно-поливным почвам на древних речных отложениях. Одинаковые цилиндрические электроды длиною 100 *см* забивались в грунт на расстоянии 0,5—1,5—2,5—3,5 *м* от оросительной канавки. Через каждые 10 *см* забивки измерялось сопротивление растеканию электрода. Опыты были повторены за летний сезон 1951 г. 14 раз.

Для каждой из 4-х точек были определены средняя кривая $R_3 = f(l)$ за сезон измерений и среднее квадратическое отклонение сопротивления растеканию на каждой глубине забивки. Кривые $\sigma_R = f(l)$ показаны на фиг. 2. Кривые начаты от глубины 0 *см*, так как на меньшей глубине из-за сильного просыхания грунта и неплотности забивки сопротивление растеканию в большинстве случаев выходило за пределы измерения прибора (1000 *ом*). Взаимное расположение кривых показывает влияние искусственного орошения. Каждая кривая характеризует влияние просыхания на разброс сопротивления растеканию в данной точке. Особенно велик разброс, вызванный просыханием поверхностного слоя грунта до 40 *см* толщиной. У точки, ближайшей к канавке, начальный разброс равен 44%; у более удаленных точек—65—100%. Начиная с глубины 40—50 *см* влияние полива уже почти не сказывается, но и влияние просыха-

ния перестает зависеть от глубины. В диапазоне 50—100 *см* сохраняется разброс от просыхания грунта ~ 25—27%.

Аналогичные данные были получены в 1951—52 гг. на других почвах Армянской ССР, как орошаемых, так и неорошаемых.



Фиг. 2.

Следовательно, в условиях южных районов сопротивление заземлителей длиною 50 *см*, забитых в поверхностный слой грунта, является безусловно неустойчивым, и для вертикальных заземлителей желательна длина порядка 70 *см*.

Степень неплотности забивки также влияет на выбор длины и формы вертикального электрода. При забивке молотком, пока вертикальный электрод значительно выступает над поверхностью земли, удары по его головке вызывают значительную вибрацию. Вследствие этого в верхних слоях земли вокруг электрода образуется воронка. С углублением электрода в грунт вибрация ослабевает, и прилегание электрода к земле улучшается.

Степень неплотности забивки может быть оценена статистически путем сравнения разброса величины сопротивления растеканию электродов данной формы и размеров в данном грунте. У стержней

конической формы разброс сопротивления растеканию меньше чем у цилиндрических (табл. 1).

Таблица 1

Разброс сопротивлений растеканию различных вертикальных электродов

Вид электрода	Размеры электрода в *см*		Отклонение в % от средних значений		
	длина	диаметр	максим. +	максим. —	среднее квадратическ.
Цилиндрический	70	1,5	29,4	16,1	12,2
»	70	2	8,2	8,2	5,5
»	70	3	23,7	18,7	13,3
»	100	2	17,8	10,5	6,9
Конический	70	1,5/0,5	8,2	4,7	3,0
»	100	2/1	3,7	3,7	3,5

Расчетное соотношение сопротивлений растеканию цилиндрического и конического заземлителей равной длины и диаметра (для конуса — $d_{макс}$) в одинаковом грунте изменяется под влиянием неплотности забивки.

Из (1) для цилиндрического электрода при γ=const

$$R_3 = \frac{\text{const}}{l} \ln \frac{4l}{d}, \qquad (2)$$

для конического

$$R_3 = \frac{\text{const}}{l} \ln \frac{4l_0}{d}, \qquad (3)$$

где: l — глубина забивки, l_0 — полная длина электрода, d — для цилиндра — диаметр, для конуса — наибольший диаметр.

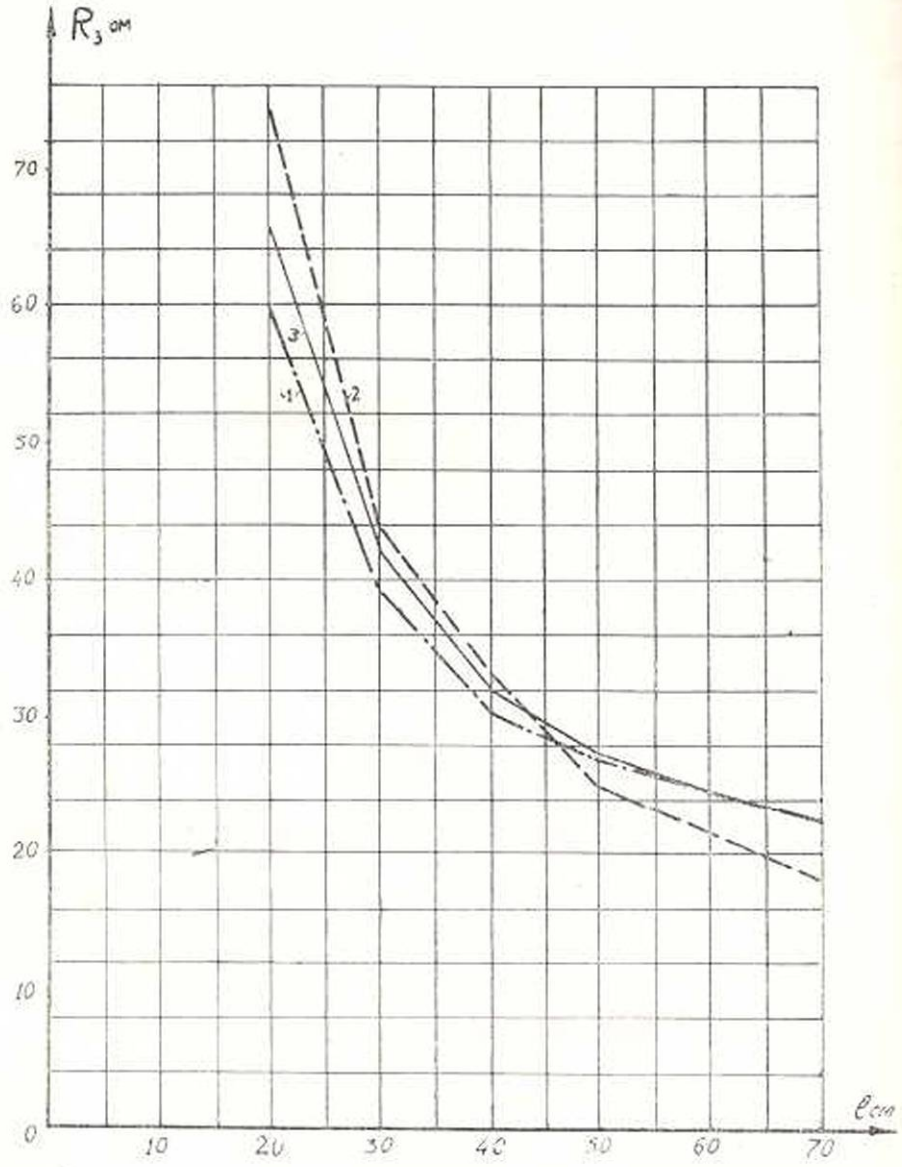
Поэтому кривая R_3 для конуса в начале забивки должна итти выше кривой для цилиндра, приближаясь к ней по мере забивки.

На фиг. 3 дан пример действительного соотношения обеих кривых для цилиндрического электрода с $d = 2$ *см* и конического $d_{макс} = 2$ *см* и $d_{мин} = 1$ *см*.

В начале забивки конический электрод, у которого центр тяжести лежит выше, чем у цилиндрического, сильнее вибрирует и увеличивает свое сопротивление растеканию. Хотя по мере углубления вибрация уменьшается, однако непрерывно происходит разрушение (осыпание) грунта вокруг электрода, что также отрицательно сказывается на величине сопротивления растеканию. У цилиндрического электрода это явление происходит до полной забивки его в грунт. Вокруг конического электрода, кроме того, по мере его углубления происходит спрессование грунта, которое улучшает контакт. С некоторой глубины у конического электрода влияние спрессования превышает влияние осыпания, и прилегание грунта становится лучше, чем для цилиндрического электрода (фиг. 3). На глу-

бине 70 *см* сопротивление конического электрода оказывается на 10—20% меньше чем у цилиндрического.

Опыты показали, что и в других грунтах преимущество остается за коническим заземлителем.



Фиг. 3.

Продолжительность забивки электродов в данном грунте зависит исключительно от их длины и диаметра, но не от формы (см. табл. 2).

Таблица 2

Форма электрода	Длина в *см*	Диаметр в *см*	Продолжительность забивки в *сек*	Примечание
Цилиндрическая	70	1,5	17,7	
•	70	2	27,2	
•	70	3	47,2	
•	100	1	10,8	
•	100	2	41,9	
Коническая	70	1,5 0,5*	20,2	*числитель—$d_{макс.}$
•	100	2,1*	44,4	знаменатель—$d_{мин.}$

При выемке электрода коническая форма значительно облегчает и ускоряет работу. Однако конические стержни длиною 100 *см* требуют для выемки специальный рычаг, в то время как 70-ти сантиметровые в ряде грунтов вынимаются вручную.

Выбор поперечных размеров конического электрода производится по условиям механической прочности, разброса сопротивления растеканию и продолжительности забивки и выемки. После 10-кратной забивки 18 видов конических электродов длиною 70 *см* различного верхнего и нижнего диаметров наилучшие показатели оказались у стержня с верхним диаметром 1,5 *см* и нижним—0,7 *см*.

Сравнение конического электрода со штыком показало, что как заземлители они равноценны.

Полые цилиндрические заземлители (трубы) для переносных заземлений непригодны, так как не обладают достаточной механической прочностью для многократных забивок и плохо поддаются забивке в грунт из-за большого диаметра.

Цилиндрические электроды с винтовой нарезкой были применены на передвижных подстанциях ВИЭСХ—ЭНИН, но оказались неудовлетворительными из-за трудности закладки и выемки из грунта. По этой же причине нерационален и электрод в форме штопора и конический полый электрод с винтовой нарезкой на конце. Проигрыш во времени закладки этих электродов не компенсирует выгрыша в величине сопротивления растеканию от увеличенного диаметра электрода.

Горизонтальные электроды. Неустойчивость удельного сопротивления почвы при глубинах закопки до 50 *см* заставляет отказаться от каких бы то ни было поверхностных или слегка углубленных горизонтальных заземлителей.

Выводы

Наиболее рациональным типом переносного единичного заземлителя следует считать вертикальный конический сплошной электрод длиною 70 *см*, круглого или многогранного (штык) сечения с

верхним диаметром 15 *мм* и нижним—не менее 7 *мм*. Подобный электрод в настоящее время передан в пробную эксплуатацию, в результате которой будут уточнены его механические качества.

Лаборатория электротехники
АН Армянской ССР

Поступило 24 IX 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Марголин Н. Ф.* Токи в земле. Госэнергоиздат, 1947.
2. *Оллендорф Ф.* Токи в земле. ГОНТИ, 1932.

Ա. Մ. Վիլչուր

ՏԵՂԱՓՈԽԵԼԻ ՀՈՂԱՆՑՄԱՆ ՍԱՐՔԱՎՈՐՄԱՆ ՄԻԱՅՆԱԿ ԷԼԵԿՏՐՈԴԻ ՁԵՎԻ ԵՎ ՉԱՓԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Շրջիկ էլեկտրական տեղակայումների տեղափոխելի հողանցման սարքավորումը անշարժ էլեկտրական տեղակայումների հողանցման սարքավորումներից տարբերվում է նրանով, որ՝

1) միշտ տեղավորվում է գետնի վերին շերտերում, որոնք ունեն անկայուն տեսակարար հաղորդականություն,

2) օգտագործվում է բոլորովին տարբեր հողային պայմաններում,

3) ամեն անգամ գտնվում են շահագործելի գետնի մեջ խրվելուց անմիջապես հետո, այդ պատճառով գետինը չի հասցնում նրա շուրջը խտանալու և նրա տարածման դիմադրությունը ենթարկվում է մեծ ֆլյուկտուացիայի, որտեղ գետինն ունի տարբեր խտություն և խոնավություն։

Այսպիսով—տեղափոխելի տարքավորման միայնակ էլեկտրոդից—հողանցիչից պահանջվում է՝

1) գետնի մեջ պետք է խրվի և հանվի հեշտ և արագ,

2) գետնի հետ պետք է ունենա լավ կոնտակտ,

3) պետք է ունենա անհրաժեշտ մեխանիկական ամրություն, որպեսզի գետնի մեջ բազմապատիկ խրվելուց և հանվելուց դիմանա։

Միայնակ հողանցուցիչի տարածման դիմադրությունը որոշելու համար հաշվարկային բանաձևերը կիրառելի են միայն հաստատուն տեսակարար հաղորդականություն ունեցող գետնի համար։

Սկսած 1950 թ. հոկտեմբերից, հեղինակի կողմից կատարվել են հետազոտություններ միայնակ հողանցուցիչի ձևի և չափերի որոշման համար՝ Հայկական ՍՍՀ զանազան հողերում (ռուդեյի և անտոոգելի)։

Որոշվել է այն խորությունը, որի դեպքում հողի վերին շերտերի անկայունությունը գործնում է ազդել էլեկտրոդի տարածման դիմադրության վրա։

Էլեկտրոդի լայնական հատվածքի չափերի ընտրումը կատարվել է,

Ելնելով նրա մեխանիկական ամրության պայմաններից, տարածման դիմադրության տարբեր մեծություններից և գետնի մեջ խրելու և հանելու ժամանակամիջոցից։

Տվյալ գետնի մեջ էլեկտրոդի խրման ժամանակամիջոցը կախված է միայն նրա չափերից։

Պարզվել է, որ տեղափոխելի միայնակ հողանցուցիչի ռացիոնալ տեսքը հանդիսանում է ուղղաձիգ, հարթ, կոնաձև էլեկտրոդը՝ շրջանային կամ բազմանկյունի (սվինաձև) հատվածքով, 70 սմ երկարությամբ, 15 մմ վերևի տրամագծով և առնվազն 7 մմ ներքևի տրամագծով։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխն. գիտութ. V, № 5, 1952, Физ.-мат., естеств. и техн. науки

МАШИНОСТРОЕНИЕ

О. А. Бабаян

О машиностроительной разметке

Известно, что пространственная конструктивная задача (задача на построение совокупности геометрических элементов, удовлетворяющих заранее заданным условиям) в начертательной геометрии получает свое окончательное решение в проекциях, так что полученный образ можно представить себе только мысленно, и что принципиальное решение сложной конструктивной задачи в пространстве может быть намечено и проанализировано последовательным применением геометрических мест [1, 2, 3].

Исследуем процесс разметки исходя из общих положений начертательной геометрии.

Задачей разметки является построение в пространстве такой совокупности геометрических элементов, которая наперед задана проекциями. Разметчик должен по этим проекциям разметить данную заготовку так, чтобы после обработки по указанным разметкой направлениям получилась геометрическая форма, определяемая проекциями.

Таким образом, в отличие от решения задачи на бумаге, разметчик решает пространственную конструктивную задачу непосредственно на заготовке, нанося на нее при помощи рейсмуса следы совокупностей проектирующих лучей, определяющих направления заданных граней и поверхностей, в результате получая не проекции заданной формы, а будущие контуры самого тела.

Отметим, что пока деталь не обработана, ее форму можно представить себе только мысленно, сообразуясь с нанесенными разметчиком рисками. Значит, нанесением рисок можно только задать направления плоскостей и поверхностей обработки, а линии пересечения и ребра получаются (сами собой) в результате взаимных пересечений обработанных плоскостей и поверхностей.

Следовательно, разметчик не проводит линий на поверхностях, а наносит сечение (риску) заданной грани с поверхностью литья. Таким образом движение жала рейсмуса все время происходит в совокупности проектирующих лучей, представляющих собой искомые поверхности и грани.

Ясно, что имея только одну плоскость плиты, как базу для движения рейсмусов с закрепленными жалами, приходится при разметке заготовки (т. е тела, имеющего три измерения) кантовать и устанавливать ее несколько раз.

Таким образом удается осуществить построение граней, ребер, поверхностей и линий пересечений в заранее заданных взаимных положениях, посредством увязки с плоскостью плиты, параллельной выбранной исходной базе заготовки.

Итак, операция разметки по существу является сведением решения пространственной задачи к многократному решению ее в плоскости разметочной плиты, что надо считать принципиально нерациональным, в особенности, если учесть большую затрату времени при кантовках громоздких заготовок. В случаях же, когда необходимо осуществить построение пространственных линий пересечения цилиндра с разными геометрическими телами (конус, призма, пирамида и т. д.), приходится строить развертки, т. е. опять непосредственное решение пространственной задачи сводить к решению плоских задач, требующих много времени.

Анализ всего процесса разметки настоятельно диктует нам дать возможность жалу рейсмуса двигаться не только в горизонтальной плоскости, но и в вертикальной и в наклонной, т. е. в наперед заданных геометрических местах, что позволит задачу объемной разметки решать непосредственно, с одного положения, не раздробляя ее на ряд последовательных задач.

Представленные в работе эскизы (фиг. 1—7) приспособлений, легко и быстро увязываемые с глазом, дают принципиальное решение только что сформулированной задачи, так как эти конструкции обеспечивают движение жала в определенных геометрических местах. Эти геометрические места представляют совокупность проектирующих лучей, следы которых на чертеже являются проекциями ребер и линий пересечений, а на поверхности литья—рисками.

Пространственные рейсмусы и приспособления (являющиеся результатом содружества с А. А. Дмитриевым—разметчиком Ленинградского металлического завода им. И. В. Сталина), описанные ниже, позволяют наносить риски в вертикальных плоскостях, в наклонных плоскостях, разрешают непосредственное построение линии пересечения различных по форме тел с цилиндром и построение кривых заданной кривизны.

Если указанные приспособления и не избавят совершенно разметчика от повторных установок в настоящее время, то они, во всяком случае, сведут их к минимуму, а при надлежащем изменении рабочего места разметчика (плита, разбитая на точные квадратики, направляющие призмы с нониусом, по которым будут скользить рейсмусы и т. д.) и при дальнейшем их развитии и совершенствовании дадут возможность, повидимому, вовсе избежать повторных установок деталей.

В силу изложенного надо считать, что пути развития разметочного дела, как такового (и моделирования), нужно искать в предоставлении жалу рейсмусов больших степеней свободы, с кинематической связью, обеспечивающей движение жала в наперед заданных геометрических местах, так как разметчик на металле решает конструктивную пространственную задачу и для успешного быстрого и рационального разрешения

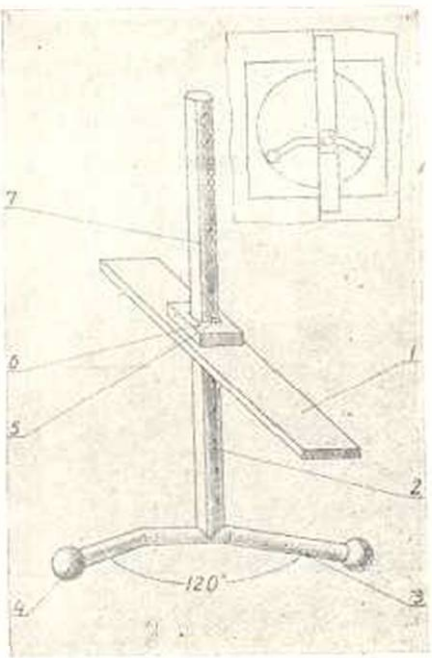
ее он должен максимально применять метод геометрических мест, как базу для претворения образов, заданных проекциями, в металл.

Перейдем к краткому описанию разметочных приспособлений, часть которых уже применяется на Ленинградском металлическом заводе им. И. В. Сталина. (Конструкции приспособлений, представленных на фиг. 1, 2 и 3, разработаны совместно с А. А. Дмитриевым—разметчиком Ленинградского завода им. И. В. Сталина)

1. Глубинный центроискатель

Глубинный центроискатель предназначен для нанесения центровых рисок, когда цилиндрическая поверхность начинается значительно ниже торца детали.

Приспособление (фиг. 1) состоит из широкой, сравнительно массивной линейки 1, которая скользит вдоль цилиндрического стержня 2. Стержень 2 асимметрично приварен к скобе 3, концы которой заканчиваются стальными шариками 4. Вдоль стрежня 2 высверлены отверстия. Шпилькой 5, вставляя в отверстие, фиксируется длина нижней части стержня 2, необходимая для касания шариков к цилиндрической поверхности детали. Ось стержня 2 находится в плоскости, перпендикулярной к линии центров шариков 4. Нижняя грань линейки 1 перпендикулярна к оси стрежня 2.



Фиг. 1.

Левая кромка линейки 1 в рабочем положении должна быть в плоскости, которая перпендикулярна к линии центров шариков 4 и делит ее пополам (геометрическое место точек, равноудаленных от центров шариков 4).

Ясно, что при таком сочетании геометрических элементов только единственное положение левой кромки линейки 1 будет центровой линией, во всех остальных положениях кромка будет только хордой нормального сечения цилиндра.

Чтобы зафиксировать это единственное правильное положение, вдоль стержня 2, по образующей, нанесена риска 7, которая в рабочем положении должна совпадать с риской 6 на линейке 1.

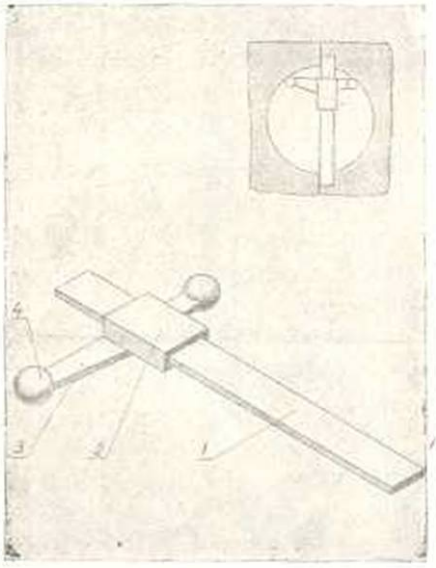
Весь процесс расцентровки детали происходит следующим образом: скобу 3 с шариками 4 опускают до цилиндрической поверхности и фиксируют достигнутую глубину шпилькой 5. Прижав нижнюю грань линейки 1 к обработанному торцу детали передвигают линейку по торцу до соприкосновения шариков 4 с поверхностью цилиндра. Повернув линейку 1 до совпадения рисок 6 и 7 по левой кромке линейки наносят первую центровую риску на обработанных торцовых кромках детали.

Передвинув шарики 4 в новое положение, таким же порядком наносят вторую риску, дающую в пересечении с первой искомой центр.

В целях контроля рекомендуется наносить третью риску.

2. Торцовый центроискатель

Когда цилиндрическая поверхность доходит до торца детали, необходимость в опускании шариков 4 в глубину отпадает и центроискатель принимает более упрощенный вид (фиг. 2), приближающийся к самодельным центроискателям разметчиков.



Фиг. 2.

Стальная линейка 1 скользит в направляющей призме 2, которая неподвижно соединена с хордой 3. Концы хорды заканчиваются стальными шариками 4. Нижняя грань линейки параллельна линии центров шариков.

Левая кромка линейки 1 находится в плоскости перпендикулярной к линии центров шариков 4 в ее середине.

Чтобы расцентровать деталь, достаточно, прижав линейку 1 нижней своей гранью к торцу детали, передвинуть все приспособление так, чтобы оба шарика 4 оказались прижатыми к цилиндрической поверхности; тогда по левой кромке линейки можно нанести первую центровую риску.

Передвинув все приспособление, тем же порядком наносят вторую риску, дающую в пересечении с первой искомый центр.

В целях контроля рекомендуется наносить третью риску.

При наличии на концах хорды каленых шариков 4 достигается большая точность, так как точки касания шариков с поверхностью цилиндра всегда оказываются ниже заусениц верхнего края пересечения цилиндра с торцом.

3. Пространственный рейсмус для нанесения рисок в наклонных плоскостях

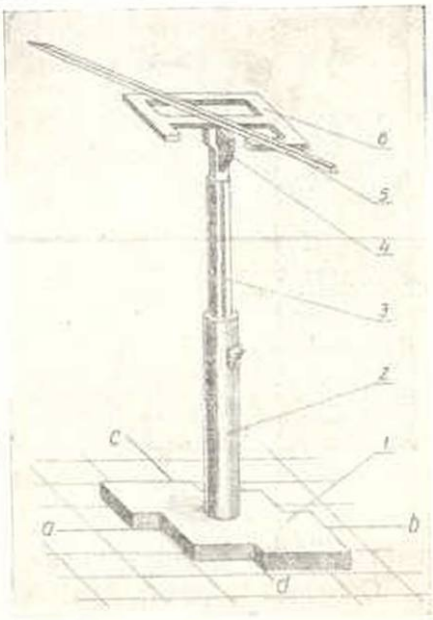
Приспособление (фиг. 3) состоит из отшлифованной рамки 6 (плоскость), шарнирно закрепленной на выдвижной стойке 3, которая скользит без вращения вдоль ножки 2. Плоское шило 5 скользит по поверхности рамки 6 свободно во всех направлениях.

Таким образом, острие шила двигается, все время оставаясь в плоскости рамки 6. Рамка 6 вращается вокруг горизонтальной оси, проекция *ab* которой на плиту совпадает с вырезами основания 1.

Горизонтальная проекция *cd* линии наибольшего ската плоскости рамки 6 совпадает с вырезами основания 1.

Угломер 4 с нониусом отмечает угол поворота рамки 6.

Имея проекцию *cd* линии наибольшего ската плоскости рамки и направление горизонтального следа (линия *ab*), можно точно и быстро установить рейсмус по отношению к размечаемой детали для получения заданного сечения. Описанное приспособление избавляет разметчика от необходимости наклонно устанавливать громоздкие детали на плите для получения косого сечения.

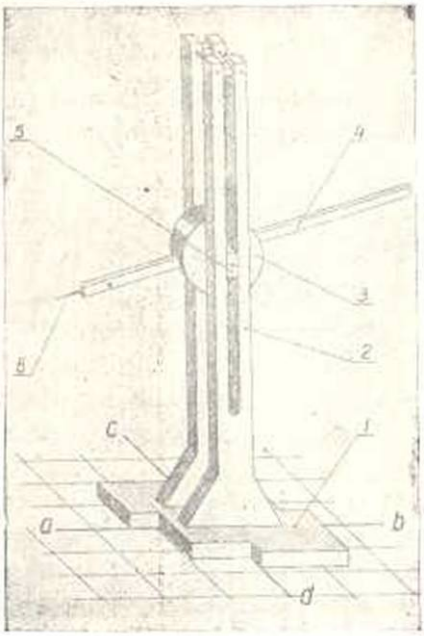


Фиг. 3.

4. Пространственный рейсмус для нанесения рисок в вертикальных плоскостях

Приспособление (фиг. 4) состоит из строго вертикальных направляющих стоек 2, закрепленных на основании 1. Вдоль направляющих скользят ползунки 5, служащие подшипниками для концом валиков, поддерживающих диск 3. В диске скользит рейка 4, снабженная на конце жалом 6. В этом приспособлении жалу рейсмуса придано движение в вертикальной плоскости, горизонтальным следом которой является линия *ab* совпадающая с вырезами основания 1.

Установка по отношению к размечаемой детали такого приспособления очень облегчена, благодаря, с одной стороны, наличию рисок на плите *a*, с другой стороны, вырезов на основании рейсмуса, определяю-



Фиг. 4.

щих след *(ab)* вертикальной плоскости, в которой остаются жало рейсмуса при всех своих перемещениях.

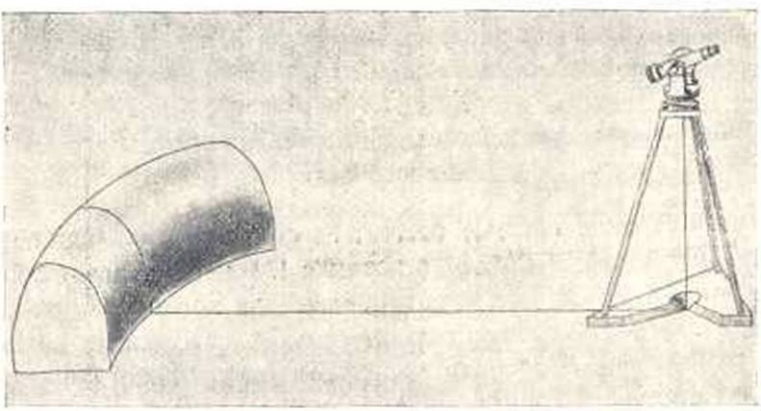
Для ускорения процесса разметки и установки рейсмуса можно применять два таких сопряженных приспособления, движущихся по призме с нанесенными на ней делениями.

Жало реймуса снабжено амортизационной пружиной.

5. Разметочный теодолит для нанесения рисок в вертикальных плоскостях и для проведения прямых линий значительной длины.

Для проведения длинной прямой разметчики обычно прибегают к помощи натянутой струны, выкернивая вдоль нее, по обе стороны отметки. По удалении струны выкернивают середины полученных отметок и эти средние точки соединяют риской.

Обычный теодолит, для точности и удобства установки на плите, смонтирован на железном треножнике (фиг. 5), ножки которого закреплены на чугунном основании с отверстием для установки теодолита в данной точке.



Фиг. 5.

Указанное приспособление вполне может заменить струну, так как трубка теодолита, вращаясь при закрепленном диске, все время остается в вертикальной плоскости, след которой на плите будет искомой линией.

Разметочный теодолит с успехом может быть применен при размет-

ке валов и труб необычно больших размеров, и при его помощи можно легко выкернить вертикальные сечения больших деталей на недоступную для обычных разметочных инструментов высоту.

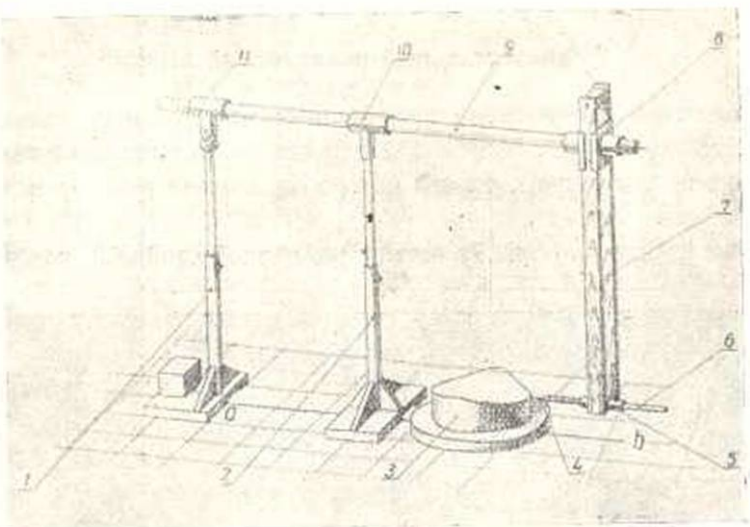
Установив теодолит в центре большого кольца можно быстро и точно разделить последнее на нужное количество частей.

6. Пространственный рейсмус для построения линий пересечения тел заданной формы с цилиндром

При приварке к цилиндрическому корпусу фланцев тел призматической, конической и т. п. форм является необходимость нанесения линий пересечения на поверхностях указанных деталей для последующей обработки под сварку.

Предлагаемое приспособление дает возможность, не прибегая к развертке, построить непосредственно пространственную линию пересечения деталей заданной формы с цилиндром.

Приспособление (фиг. 6) состоит из двух, переменной высоты, вертикальных стоек 1 и 2, заканчивающихся муфтами 10 и 11, в которых сколь-



Фиг. 6.

зит штанга 9. Рейка 7 может передвигаться как вдоль штанги 9, так и в перпендикулярном к штанге направлении. На нижнем конце рейки 7—в муфте 5, скользит стержень 6, ось которого параллельна оси штанги 9. Передвигая рейку в вертикальном направлении, получаем заданный радиус цилиндра (расстояние между осями штанги 9 и стержня 6), к которому должна быть приварена деталь 3. В полученном положении рейка 7 закрепляется между муфтами 8.

Штанга 9 выдвигается и устанавливается на нужной высоте от плиты, на которой стоит все приспособление.

Линия ab находится всегда в одной вертикальной плоскости с осью штанги 9 (горизонтальная проекция штанги 9).

Деталь 3 устанавливается на плите обработанной стороной вниз, так, чтобы ее центральная линия слилась с линией ab.

При нанесении риски конец жала 4 все время находится на поверхности детали 3, на постоянном расстоянии от оси штанги 9, равном заданному радиусу цилиндра.

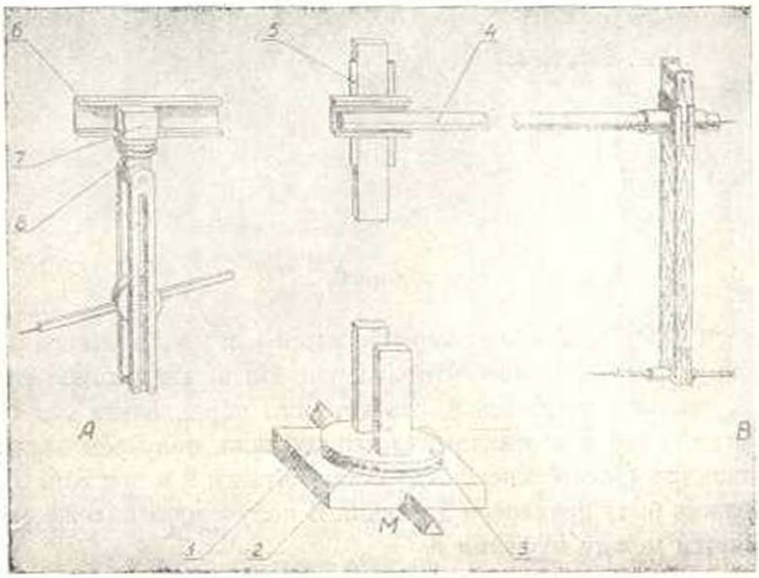
Из конструкции приспособления видно, что конец жала 4, будучи все время прижат к поверхности размечаемой детали, будет одновременно принадлежать к поверхностям обеих деталей, подлежащих соединению, т. е. конец жала будет описывать (на поверхности детали 3) пространственную линию пересечения заданной детали 3 с цилиндром данного радиуса.

Таким же образом, путем параллельного смещения центровой риски детали 3 на заданное чертежом расстояние можно получить линию пересечения при внецентренном пересечении детали 3 с цилиндром. Для нанесения отчетливой риски с боков детали 3 можно применить надевающийся на стержень 6 наконечник с иглой, по форме напоминающей коготь. Жало 4 снабжено амортизационной пружиной.

7. Универсальный разметочный агрегат

Логическим завершением приведенных конструкций должен быть рейсмус с жалом, которое может двигаться во всех направлениях в пространстве, и, движение которого можно ограничить в наперед заданных геометрических местах.

Приспособление (фиг. 7) состоит из парной стойки 2, которая через



Фиг. 7.

поворотный градуированный диск 3 установлена на основании 1. Основание 1 скользит вдоль направляющей призмы M, ребра которой параллельны рискам на плите.

Вдоль стоек 2, благодаря направляющим угольникам 5, передвигаются сопряженные градуированные горизонтальные швеллеры 6 вместе с закрепленной с ними штангой 4. Вдоль швеллеров скользит ползунок 7, к которому подвешен через градуированный поворотный диск 8 описанный ранее рейсмус A для построения вертикальных сечений. Рейсмус A соединяется с поворотным диском 8 посредством горизонтальной оси. Вдоль штанги 4 скользит пространственный рейсмус B для построения линий пересечения тел заданной формы с цилиндром.

В этом приспособлении жало рейсмуса A получает возможность движения в горизонтально-проектирующих плоскостях, расположенных под любым заданным углом, чем достигается возможность построения косых сечений. Кроме того на верхней грани детали можно наносить и прямолинейные риски и кривые линии заданной кривизны.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 20 V 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананов Г. Д.* Применение метода пространственных геометрических мест в начертательной геометрии. Ленинград, 1945.
2. *Каргин Д. А.* Геометрические места в ортогональных проекциях. Ленинград, часть I, 1939, часть II, 1941.
3. *Курдюмов В. И.* Курс начертательной геометрии. Петербург, 1895.

Ա. Ա. Բարայան

ՄԵՔԵՆԱՇԻՆԱԿԱՆ ԳԾԱՆՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մեքենաների ձանրակշիռ մասերի մի քանի անգամ շրջելը (кантовка) գծանշման ասլի վրա երկար ժամանակ է պահանջում։

Գծանշողը լուծում է մեսաղի վրա տարածական երկրաչափական խնդիր, բայց ունենալով նշող գործիքներ (рейсмус), որոնց սահեցնում է գծանշման ասլի հարթության մեջ, ստիպված է տարածական խնդրի լուծումը վերածել մի շարք հարթ խնդիրների լուծման։

Եթե հարկավոր է կատարել գլանի հատման գիծը կոնի, գուգահեռանիստի և այլ մարմինների հետ, դիմում են փոխածքներին, դարձյալ տարածական խնդիրը վերածելով հարթ խնդրի։

Հոդվածում նկարագրված տարածական գծանշող գործիքները հնարավորություն են տալիս տանել ուղղաձիգ գծանիշեր, կատարել թեք հա-

տուֆներ, կառուցել պլանի հատման գիծը երկրաչափական մարմինների հետ և նշել տված կտրուքյան գծերը։

Գծանշման կարգադրման ուղիները պետք է փնտրել գծանշող գործիքների խոյքի ազատության աստիճանի ավելացման և երկրաչափական տեղերի մեթոդի մտքամոլ կիրառման մեջ, որպեսզի տարածական խնդիրները լուծվեն անմիջականորեն, առանց կատարակելու նրանց շատ ժամանակ պահանջող հարթ խնդիրների։