

МАТЕМАТИКА

В.-К. И. Карабегов

О разрешимости задачи Дирихле для линейных уравнений эллиптического типа

1. В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения

$$L(u) + cu = 0, \quad (A)$$

где

$$L(u) = \sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

есть дифференциальный оператор эллиптического типа, удовлетворяющий условиям, приведенным в работе О. А. Олейник [1].

В работе [1] показано, что если $c \leq 0$, то задачу Дирихле для уравнения (A) и произвольной ограниченной области G можно решить методом Винера.

В настоящей работе вводится достаточное условие для применимости того же метода к решению задачи Дирихле в случае, когда коэффициент „с“ имеет произвольный знак.

Описывается также процесс, с помощью которого можно построить так называемую „обобщенную собственную функцию“ в случае, когда упомянутое условие не выполнено.

2. Пусть $L(u) + cu = 0$ (1) — уравнение вида (A), G — ограниченная область в N -мерном пространстве, Γ — граница области G , E_0 — множество иррегулярных граничных точек. (По поводу определения регулярности точки см. [1] и [2].) Мы будем говорить, что для области G и уравнения (1) удовлетворяется „обобщенное условие единственности“ [условие (O)], если:

тождественно равна нулю каждая функция u такая, что

- а) u удовлетворяет уравнению (1) внутри G ,
- б) $|u(P)| \leq M$ внутри G ,
- в) $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$, когда Q принадлежит множеству $\Gamma - E_0$.

В формулировке обычного условия единственности условие (в) заменяется требованием $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$, когда Q принадлежит Γ .

Ясно, что если область и уравнение удовлетворяют условию (O), то для них выполнено обычное условие единственности.

Однако можно построить примеры таких областей, для кото-

рых обычное условие единственности [для некоторого уравнения вида (A)] выполняется, а условие (O) [для того же уравнения] не выполняется.

3. Пусть для некоторой области G условие (O) не имеет места. Тогда существует хотя бы одно, отличное от тождественного нуля, ограниченное внутри области G решение уравнения (1), предел которого равен нулю в каждой регулярной граничной точке.

Такое решение будем называть *обобщенной собственной функцией*.

Как известно [2], условие (O) имеет место для любой области, если в качестве (1) взять уравнение Лапласа.

Имеет место следующая

Теорема 1. Для уравнения вида $L(u)=0$ в любой ограниченной области G выполняется условие (O)

Доказательство. Известно [2], что множество E_0 иррегулярных

точек границы Γ области G представляет сумму $\sum_{n=1}^{\infty} E_n$, где E_n —

замкнутое множество емкости нуль.

Как показал Эванс, для каждого замкнутого множества F емкости нуль существует такое распределение массы $\mu(e)$, что

$$1) \mu(F) = 1,$$

$$2) \omega_F(P) = \int_F \frac{d\mu(Q)}{PQ^{N-2}} = \begin{cases} +\infty, & \text{когда } P \text{ принадлежит } F, \\ < +\infty & \text{во всех остальных точках.} \end{cases}$$

Построим функцию $\omega_n(P)$ — потенциал Эванса для каждого из замкнутых множеств E_n .

Пусть

$$\omega_n(P) = \int_{E_n} \frac{d\mu_n(Q)}{PQ^{N-2}}.$$

Построим функцию

$$\Omega_n(P) = \int_{E_n} \frac{d\mu_n(Q)}{\rho(P, Q)},$$

где $\frac{1}{\rho(P, Q)}$ есть фундаментальное решение уравнения $L(u)=0$.

Составим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n(P)}{2^n}.$$

Этот ряд будет представлять функцию $\Omega(P)$, ограниченную в каждой области, лежащей внутри G и стремящуюся к $+\infty$, когда P приближается к множеству E_0 . Кроме того, $\Omega(P)$ удовлетворяет внутри G уравнению $L(u) = 0$.

Предположим, что $u(P) \neq 0$ есть обобщенная собственная функция для уравнения $L(u) = 0$ и области G .

$$\text{Рассмотрим функцию } v(P) = \frac{u(P)}{\Omega(P)}.$$

Она будет удовлетворять уравнению

$$\Omega(P) \cdot \sum_{i,k}^N a_{ik} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i^N \bar{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0, \quad (2)$$

где коэффициенты a_{ik} те же, что и в данном операторе L , а коэффициенты $\bar{b}_i$ — регулярны внутри G .

Кроме того, функция v обращается в нуль в каждой точке Γ и ограничена в области G . Следовательно $v \equiv 0$, а потому и $u \equiv 0$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что если функция u удовлетворяет уравнению

$$L(u) + \lambda u = 0 \quad (1, \lambda)$$

внутри G , ограничена и $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = f(Q)$, когда Q регулярная точка Γ , то

$$u(P) - \lambda \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) u(Q) dV_Q = H_\Gamma(P). \quad (3)$$

Здесь $H_\Gamma(P)$ есть обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения $L(u) = 0$ и области G . L — оператор входящий в правую часть уравнения $(1, \lambda)$. $\Gamma(P, Q)$ — функция Грина, построенная для того же уравнения $L(u) = 0$ и области G (см. [1]).

Действительно, функция

$$\Phi(P) = H_\Gamma(P) - u(P) + \lambda \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) u(Q) dV_Q$$

есть обобщенная собственная функция для уравнения $L(u) = 0$ и потому $\Phi(P) \equiv 0$.

4. Так как ядро интегрального уравнения (3) регуляризуемо, то множество тех значений λ , при которых не выполняется условие (О) (при фиксированных уравнении и области), не будет иметь предельных точек в конечной части комплексной плоскости λ .

5. Покажем теперь применимость процесса Винера для построения обобщенного решения задачи Дирихле в том случае, когда условие (О) выполняется для области G и уравнения

$$L(u) + cu = 0. \quad (1)$$

Пусть $f(P)$ — непрерывная функция, заданная на границе Γ области G и непрерывно продолженная на всю область G .

Последовательность нормальных областей $\{G_n\}$ аппроксимирует область G изнутри.

$u_{n,f}(P)$ — решение задачи Дирихле для области G_n , уравнения (1) и граничной функции f .

Положим $M_n = \max |u_{n,f}(P)|$. Тогда имеет место

Теорема II. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$, то условие (O) для области

G и уравнения (1) не выполняется, т. е. существует нетривиальная обобщенная собственная функция.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$V_n(P) = \frac{u_{n,f}(P)}{M_n}. \text{ Покажем, что существует подпоследовательность}$$

этой последовательности, сходящаяся к нетривиальной обобщенной собственной функции.

Ясно, что $|v_n(P)| \leq 1$ и существует точка P_n в замкнутой области $\bar{G}_n$ такая, что $|v_n(P_n)| = 1$.

Выделим из $\{v_n(P)\}$ подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри G . Обозначим ее снова через $\{v_n(P)\}$.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(P) = v_0(P)$. Очевидно, что $|v_0(P)| \leq 1$. Ясно, что $v_n(P)$ удовлетворяет интегральному уравнению:

$$v_n(P) - \int_{G_n} \Gamma_n(P, Q) v_n(Q) dV_Q = \frac{H_{n,f}(P)}{M_n}. \quad (4, n)$$

Устремляя n к бесконечности, получим:

$$v_0(P) - \int_G \Gamma(P, Q) c(Q) v_0(Q) dV_Q = 0 \quad (4, 0)$$

Остается убедиться, что $v_0(P) \neq 0$.

Пусть $v_0(P) \equiv 0$. Покажем, что в этом случае последовательность $\{v_n(P)\}$ будет сходиться к нулю равномерно во всей области G (а не только внутри).

Так как по предположению $M_n \rightarrow \infty$, то функции $\frac{H_{n,f}(P)}{M_n}$

стремятся к нулю равномерно во всей области G .

Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем нормальную область G_ε столь близкую к G , чтобы иметь:

$$\int_{G-G_\varepsilon} |\Gamma_n(P, Q) c(Q)| dV_Q < \frac{\varepsilon}{3},$$

каковы бы ни были n и P .

Это возможно в силу того, что

$$|\Gamma_n(P, Q)| \leq \frac{C}{PQ^{N-2}}, \quad \text{где}$$

PQ — расстояние между точками P и Q , а N — размерность пространства.

В области G_ε , лежащей внутри G , функции $v_n(P)$ равномерно стремятся к нулю и, следовательно, начиная с некоторого n , будем иметь:

$$|v_n(P)| \leq \left| \int_{G-G_\varepsilon} \right| + \left| \int_{G_\varepsilon} \right| + \left| \frac{H_{n,r}(P)}{M_n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

равномерно относительно P .

Между тем мы имели, что $|v_n(P_n)| = 1$.

Полученное противоречие показывает, что функция $v_0(P)$ отлична от тождественного нуля. Теорема II доказана.

б. Теперь нам остается показать, что если для уравнения (1) и области G_0 выполнено условие (O), то задача Дирихле будет разрешима для всех нормальных областей, лежащих внутри G_0 и достаточно близких к этой области.

С этой целью рассмотрим последовательность нормальных областей $\{G_n\}$, аппроксимирующих G_0 изнутри, и соответствующие интегральные уравнения:

$$u_0(P) - \lambda \int_{G_0} \Gamma_0(P, Q) c(Q) u_0(Q) dV_Q = H_0(P) \quad (5,0)$$

$$u_n(P) - \lambda \int_{G_n} \Gamma_n(P, Q) c(Q) u_n(Q) dV_Q = H_n(P) \quad (5,n)$$

Имеет место следующая

Теорема III. Число λ_0 будет собственным значением для уравнения (5,0) тогда и только тогда, когда существует последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ такая, что λ_n есть собственное значение для уравнения (5,n).

(λ_0 и λ_n , вообще говоря, комплексные числа).

Доказательство. Легко показать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать такой полином $T_\varepsilon(P, Q)$ в $2N$ -мерном пространстве (P и Q — точки N -мерного пространства), что

$$\int_{G_0} \int_{G_0} |K_0(P, Q) - T_\varepsilon(P, Q)| dP dQ < \varepsilon \quad (6)$$

$$|T_\varepsilon(P, Q)| < \frac{C_1}{PQ^{N-2}} + C_2 \quad (7)$$

[$C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ не зависят от ε ; $K_0(P, Q)$ — ядро интегрального уравнения (5,0)].

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G_n} \int_{G_n} |K_n(P, Q) - K_0(P, Q)| dP dQ = 0$,

то, начиная с некоторого n , будем иметь

$$\int_{G_n} \int_{G_n} |K_n(P, Q) - T_1(P, Q)| dP dQ < \varepsilon.$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ и положим:

$$K_0(P, Q) = T_1(P, Q) + R_0(P, Q), \quad (8,0)$$

$$K_n(P, Q) = T_1(P, Q) + R_n(P, Q). \quad (8,n)$$

Ясно, что

$$\int_{G_n} \int_{G_n} |R_n(P, Q)| dP dQ < \varepsilon$$

(начиная с достаточно большого n , которое мы будем считать равным единице).

Построим резольвенты ядер $R_i(P, Q)$ ($i = 0, 1, \dots$)

$$\Gamma_i(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} R_i^{(k)}(P, Q). \quad (9,i)$$

Здесь $R_i^{(k)}$ есть k -тая итерация ядра R_i .

Построим числовой ряд, мажорирующий все ряды (9, i) одновременно.

Рассмотрим в качестве ядра функцию $\frac{C}{PQ^{n-2}}$, мажорирующую ядра интегральных уравнений (5, i). Итерации этого ядра (по области G_0) будут ограниченными, начиная с некоторого номера m_0 . Пусть $M_0 > 0$ есть число, превосходящее итерации того же ядра с номерами:

$$m_0, m_0+1, \dots, 2m_0.$$

Тогда, обозначая через Ω объем области G_0 , получим:

$$\begin{aligned} |R_i^{(2m_0+1)}(P, Q)| &\leq \int_{G_i} \int_{G_i} |R_i^{(m_0)}(P, S_1)| |R_i(S_1, S_2)| |R_i^{(m_0)}(S_2, Q)| dS_1 dS_2 \leq \\ &\leq M_0^2 \int_{G_i} \int_{G_i} |R_i(S_1, S_2)| dS_1 dS_2 \leq \varepsilon M_0^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |R_i^{(n(2m_0+1))}(P, Q)| &= \left| \int_{G_i} \int_{G_i} \int_{G_i} R_i^{(m_0)}(P, S_1) R_i^{(n-1)(2m_0+1)}(S_1, S_2) R_i(S_2, S_3) R_i^{(m_0)}(S_3, Q) \right. \\ &\quad \left. dS_1 dS_2 dS_3 \right| \leq \Omega^{n-1} (M_0^2 \varepsilon)^n \quad (i=0, 1, \dots; n=2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Аналогично

$$|R_i^{((2m_0+1)+k)}(P, Q)| \leq \varepsilon M_0^2, \quad |R_i^{(n(2m_0+1)+k)}(P, Q)| \leq \Omega^{n-1} (M_0^2 \varepsilon)^n \quad (k=1, 2, \dots, 2m_0).$$

Выберем теперь $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы иметь

$$(|\lambda_0| + \eta)^{2m_0+1} M^2 \Omega \varepsilon < \alpha,$$

$$\text{где } \eta > 0, 0 < \alpha < 1.$$

Тогда ряд:

$$\frac{1}{\Omega} \left\{ \alpha + \bar{\lambda} \alpha + \dots + \bar{\lambda}^{-2m_0} \alpha + \alpha^2 + \bar{\lambda} \alpha^2 + \dots + \bar{\lambda}^{-2m_0} \alpha^2 + \dots \right\} \bar{\lambda} = |\bar{\lambda}_0| + \eta$$

будет мажорировать все ряды (9, i) одновременно (начиная с $2m_0$ -го члена).

Заменяем теперь уравнения (5, i) эквивалентными им уравнениями с вырожденными ядрами:

$$u_i^*(P) - \int_{G_i} K_i^*(P, Q) u_i^*(Q) dQ = H_i^*(P). \quad (10, i)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\text{если } T_i(P, Q) = \sum_{l=1}^L \varphi_l(P) \xi_l(Q), \text{ то:}$$

$$u_i^*(P) = u_i(P) - \lambda \int_{G_i} R_i(P, Q) u_i(Q) dQ,$$

$$K_i^*(P, Q) = \sum_{l=1}^L \varphi_l(P) B_l^* \xi_l(Q),$$

$$B_l^* \xi_l(Q) = \xi_l(Q) + \lambda \int_{G_i} \Gamma_i(P, Q, \lambda) \xi_l(P) dP,$$

$$\Gamma_i(P, Q, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} R_i^{(k)}(P, Q).$$

Как известно, собственное значение λ уравнения (10) будет нулем функции

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - m_{11}(\lambda)\lambda, -m_{12}(\lambda)\lambda, \dots, -m_{1L}(\lambda)\lambda \\ \vdots \\ -m_{L1}(\lambda)\lambda, -m_{L2}(\lambda)\lambda, \dots, 1 - m_{LL}(\lambda)\lambda \end{vmatrix}$$

Здесь

$$m_{kl}(\lambda) = \int_G \varphi_k(P) B_l^* \xi_l(P) dP = \int_G \varphi_k(P) \xi_l(P) dP + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_G \int_G R^{(j)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_l(Q) dP dQ$$

есть аналитическая функция от λ в круге $|\lambda - \lambda_0| < \eta$.

Следовательно, функция $\Delta(\lambda)$ будет аналитической в том же круге.

Легко доказать, что при каждом фиксированном n имеет место равенство:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{G_i} \int_{G_i} R_i^{(n)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_i(Q) dP dQ = \int_{G_0} \int_{G_0} R_0^{(n)}(P, Q) \varphi_k(P) \xi_i(Q) dP dQ.$$

Отсюда следует, что каждый коэффициент $a_{ik}^{(n)m}$ ряда $m_{ik}^{(n)}(\lambda) = a_{ik}^{(n)0} + \lambda a_{ik}^{(n)1} + \dots$, при $n \rightarrow \infty$ стремится к соответствующему коэффициенту $a_{ik}^{(0)m}$ ряда $m_{ik}^{(0)}(\lambda) = a_{ik}^{(0)0} + \lambda a_{ik}^{(0)1} + \dots$.

Так как для всех рядов $m_{ik}^{(0)}(\lambda)$, $m_{ik}^{(n)}(\lambda)$ существует общий мажорантный числовой ряд

$$M_{ik} \Omega \{ \alpha + \bar{\lambda} \alpha + \dots + \bar{\lambda}^{2m} \alpha + \alpha^2 + \bar{\lambda} \alpha^2 + \dots + \bar{\lambda}^{2m} \alpha^2 + \dots \}, \quad \text{где}$$

$M_{ik} = \max \{ |\varphi_i|, |\xi_k| \}$, то при $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ функции $m_{ik}^{(n)}(\lambda)$ равномерно сходятся к функции $m_{ik}^{(0)}(\lambda)$. Следовательно, функции $\Delta_n(\lambda)$ равномерно сходятся к функции $\Delta_0(\lambda)$ в том же круге.

По известной теореме о нулях равномерно сходящейся последовательности аналитических функций получим, что если $\lambda = \lambda_0$ есть нуль функции $\Delta_0(\lambda)$, то найдется последовательность $\{\lambda_n\}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$ и $\Delta_n(\lambda_n) = 0$.

Обратно, если $\Delta_n(\lambda_n) = 0$ и числа λ_n стремятся к числу λ_0 , то λ_0 будет нулем предельной функции $\Delta_0(\lambda)$.

Так как нули функции $\Delta(\lambda)$ являются собственными значениями соответствующих интегральных уравнений, то теорема III полностью доказана.

7. Теперь становится очевидным, что если для области G_0 и уравнения (1) выполнено условие (O), то задачу Дирихле можно решать методом Винера.

Действительно, так как $\lambda_0 = 1$ в этом случае не является собственным значением уравнения (5,0), то все уравнения $u_n(P) -$

$$- \int_{G_n} K_n(P, Q) u_n(Q) dQ = 0, \quad \text{начиная с некоторого, будут иметь только}$$

тривиальные решения.

Следовательно задача Дирихле для уравнения (1) будет разрешимой при любой непрерывной граничной функции f для всех областей последовательности $\{G_n\}$, начиная с некоторой.

Таким образом, каждой непрерывной функции f , заданной на границе Γ области G , можно сопоставить последовательность $\{u_{n,i}\}$. Далее, в силу теоремы II, $|u_{n,i}(P)| < M$. Следовательно, из последовательности $\{u_{n,i}\}$ можно выделить равномерно сходящуюся подпо-

следовательность, предел которой и будет искомым обобщенным решением задачи Дирихле.

8. В случае, когда $\lambda_0 = 1$ является собственным значением, т. е. условие (O) не выполнено, собственные значения λ_n , сходящиеся к λ_0 (существование которых доказывается в теореме III), могут оказаться комплексными.

Тогда соответствующие им собственные функции $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ будут комплексными.

Пусть $\max_{P \in G_n} |w_n(P)| = M_n$. Рассмотрим нормированные собственные функции $v_n(P) = \frac{w_n(P)}{M_n}$.

Пусть $v_n(P) = a_n(P) + ib_n(P)$. Из последовательности $\{v_n(P)\}$ можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся к функции $v_0(P)$, удовлетворяющей интегральному уравнению

$$v_0(P) - \int_{G_0} \Gamma(P, Q) c(Q) v_0(Q) dV_Q = 0.$$

Следовательно, функции $a_n(P)$ и $b_n(P)$ сходятся к функциям $a_0(P)$ и $b_0(P)$, удовлетворяющим тому же уравнению. Так как $v_n(P)$ — нормированные функции, то их предел не может быть тождественным нулем. Это следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы II. Значит, хотя одна из функций $a_0(P)$ и $b_0(P)$ будет отличной от тождественного нуля, т. е. будет обобщенной собственной функцией уравнения (1).

Итак, процессом Винера можно построить решение задачи Дирихле для области G_0 и уравнения (1), если условие (O) выполнено.

Если же это условие не выполнено, то тем же процессом можно построить хотя бы одну обобщенную собственную функцию.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15 IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Олейник О. А. О задаче Дирихле. Мат. сб., т. 1, 1949.
2. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, УМН, т. VIII, 1941.

Վ. - Վ. 2. Կարաբեգով

ԳԾԱՅԻՆ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ
ԼՈՒՄԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում հետազոտված է Դիրիխլեի խնդիրը

$$L(u) + cu = 0$$

(A)

համապատասխան համար.

Այստեղ

$$L(u) = \sum_{i, k}^N \alpha_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i^N b_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

էլիպտիկ դիֆերենցիալ օպերատոր է և բավարարում է [1] աշխատութեան պայմաններին.

[1] աշխատութեան մեջ ցույց է տրված, որ եթե $c \leq 0$, ապա (A) համասարման և ցանկացած սահմանափակ G տիրույթի համար Դիրիլեյի խնդիրը կարելի է լուծել Վիների մեթոդով:

Հոգովածում ապացուցվում է, որ եթե c գործակիցը կամայական նշան ունի, ապա նույն մեթոդի կիրառման համար բավական է, որ G տիրույթը և (A) համասարմանը բավարարեն «միակութեան ընդհանրացված պայմանին», որը կայանում է հետևյալում:

ամեն մի u ֆունկցիա նույնաբար համասար է զերոյի, եթե նա բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա) u -ն բավարարում է G-ի ներսը (A) համասարմանը,

բ) $|u(P)| \leq M$ G-ի ներսը,

գ) $\lim_{P \rightarrow Q} u(P) = 0$, երբ Q-ն պատկանում է $\Gamma - E_0$

բազմութեանը, որտեղ Γ -ն G տիրույթի եզրագիծն է, իսկ E_0 -ն՝ եզրագծի խեղաչափ կետերի բազմությունը:

МАТЕМАТИКА

Т. М. Тер-Микаэлян

К непрерывности однолистных функций в замкнутых областях, ограниченных некоторыми спрямляемыми кривыми

В настоящей статье рассматривается характер непрерывности в замкнутом круге $|w| \leq 1$ функции $w = f(z)$, конформно отображающей круг $|w| < 1$ на область D , ограниченную некоторой спрямляемой кривой.

В общем виде этот вопрос до конца разрешен М. А. Лаврентьевым [1], который ввел для этого понятие относительного расстояния $\rho(z_1, z_2)$ между двумя точками z_1 и z_2 произвольной ограниченной области D , положив

$$\rho(z_1, z_2) = \min \{ \rho_1(z_1, z_2), \rho_2(z_1, z_2) \},$$

где ρ_1 — нижняя граница длин линий, содержащихся в D и соединяющих точки z_1 и z_2 , а ρ_2 — нижняя граница длин линий, разбивающих область D на две связанные области и отделяющих точки z_1 и z_2 от точки $z=0$ ($z=0 \in D$). Граничной точкой z области D М. А. Лаврентьев называет каждую последовательность $z_1, z_2, \dots$ точек D , имеющую все свои предельные точки на границе Γ области D и такую, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \rho(z_n, z_m) = 0.$$

Относительное расстояние $\rho(z^{(1)}, z^{(2)})$ между двумя граничными точками $z^{(1)} = \{z_n^{(1)}\}$ и $z^{(2)} = \{z_n^{(2)}\}$ определяется как $\lim \rho(z_n^{(1)}, z_n^{(2)})$; если оно равно нулю, то точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ считаются идентичными.

Так, введенное метризованное понятие граничной точки совпадает с понятием простого конца Каратеодори.

При этих обозначениях М. А. Лаврентьев доказывает следующую теорему.

Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$ отображает круг $|w| < 1$ на область D , содержащую внутри себя круг $|z| < 1$. Если z_1 и z_2 — две любые точки области D (граничные или внутренние) и w_1 и w_2 — точки единичного круга, соответствующие им при отображении $w = f(z)$, то имеет место следующее двойное неравенство

$$e^{-\frac{K_1}{\rho^2(z_1, z_2)}} < |w_1 - w_2| < K \sqrt{\rho(z_1, z_2)}, \quad (1)$$

где K — абсолютная константа, K_1 — константа, зависящая лишь от диаметра d области D .

В дальнейшем, методом близким к методу, предложенному М. А. Лаврентьевым [1], указанное двойное неравенство уточняется для следующего частного вида областей.

Обозначим через $D(q)$ произвольную однолистную, односвязную область, содержащую внутри себя круг $|z| < 1$, ограниченную спрямляемой кривой Γ , удовлетворяющей следующему условию: отношение длины $l(\gamma)$ произвольной дуги γ границы Γ к длине $d(\gamma)$ ее хорды ограничено одной и той же константой q , не зависящей от дуги γ ,

$$\frac{l(\gamma)}{d(\gamma)} < q,$$

если только $l(\gamma) < \frac{l(\Gamma)}{2}$, где $l(\Gamma)$ — длина границы Γ .

Для областей $D(q)$ доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. Если на границе области $D(q)$ дана одна дуга γ_ε длины ε , то при конформном отображении $w = f(z)$ области $D(q)$ на круг $|w| < 1$, дуге γ_ε границы области $D(q)$ соответствует на окружности $|w| = 1$ дуга γ_w , длина η которой удовлетворяет неравенствам

$$M \varepsilon^{60q^2} < \eta < 2\pi \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}, \quad (2)$$

где M — константа, зависящая от длины $l(\Gamma)$ границы Γ и числа q . При этом верхняя оценка точная в том смысле, что показатель при ε не может быть понижен.

Теорема 2. Пусть точка z_0 области $D(q)$ отстоит от границы области на расстоянии ε . Тогда при конформном отображении $w = f(z)$, $f(0) = 0$, области $D(q)$ на единичный круг $|w| < 1$ точка $w_0 = F(z_0)$, соответствующая точке z_0 , отстоит от окружности $|w| = 1$ на расстоянии h , которое удовлетворяет неравенствам

$$M \varepsilon^{60q^2} < h < 6\pi \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}, \quad (3)$$

где M зависит от $l(\Gamma)$ и числа q . Правая оценка точная в указанном в теореме 1 смысле.

В правых частях неравенств (2) и (3) уточняется для этого частного вида областей общая оценка М. А. Лаврентьева: показатель

$\frac{1}{2}$ при ε в (1) заменяется показателем $\frac{\pi}{2\pi - 2/q}$, который больше $\frac{1}{2}$ и стремится к $\frac{1}{2}$, когда $q \rightarrow \infty$, т. е. когда мы рассматриваем произвольные области, ограниченные спрямляемыми кривыми.

Перепишем неравенство (3) в виде

$$\frac{1}{360} h^{2(1-\frac{1}{\pi q})} \leq \varepsilon \leq \frac{1}{M} h^{\frac{1}{60q^2}}$$

и заметив, что для круга $|w| < 1$ функцией Грина с полюсом в точке $w=0$ будет функция $\ln |w|$, мы можем сформулировать теорему 2 в следующем виде:

Теорема 2'. Линии уровня функции Грина области $D(q)$ с полюсом в точке $z=0$, на которых функция принимает значение $\ln(1-h)$, $0 < h < 1$, удалены от границы области $D(q)$ на расстояние не мень-

шее $\frac{1}{360} h^{2(1-\frac{1}{\pi q})}$ и не большее $M_1 h^{\frac{1}{60q^2}}$, где M_1 зависит от $I(\Gamma)$ и q .

Сформулируем предварительно некоторые понятия и теоремы, которыми мы воспользуемся при доказательстве теорем 1 и 2.

Пусть область D ограничена жордановой кривой Γ и на Γ задана конечная система попарно непересекающихся дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Рассмотрим гармоническую в D функцию $u(z)$, принимающую значение 1 во внутренних точках дуг γ_i и значение 0 в прочих точках границы Γ . Такая функция всегда существует [2]. Гармонической мерой $\omega(\Sigma \gamma_i, z, D)$ дуг $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ границы Γ области D в точке z называется значение в точке z указанной гармонической функции $u(z)$ [3]. Если мы отобразим функцией $w=f(z)$, $f(z_0)=0$, $z_0 \in D$, область D на круг $|w| < 1$, то сумма длин дуг окружности $|w|=1$, соответствующих при этом отображении дугам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, будет равна $2\pi u(z_0)$ [4].

Заменим теперь дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ также попарно непересекающимися дугами $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$, лежащими вне области D и обозначим через D^* область, содержащую внутри себя область D , ограниченную дугами $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$ и границей Γ . Как гласит принцип расширения области [5], если $z_0 \in D$, то

$$\omega(\Sigma \gamma_i, z_0, D) \geq \omega(\Sigma \gamma_i^*, z_0, D^*).$$

Геометрически это значит, что, если мы отобразим функциями $w=f(z)$, $f(0)=0$, и $w=f^*(z)$, $f^*(0)=0$ соответственно области D и D^* на круг $|w| < 1$, то сумма длин дуг окружности $|w|=1$, соответствующих дугам $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, не меньше суммы длин дуг той же окружности, соответствующих дугам $\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$.

Приведем, наконец, одно неравенство, принадлежащее Р. Неванлинна [6].

Пусть γ — дуга жордановой границы Γ области D и $z_0 \in D$. Соединим точку z_0 с произвольной точкой A дуги γ гладкой кривой L и пусть длина этой кривой от точки A до точки $z_t \in L$ есть l , а расстояние от точки z_t до дополнения $\Gamma - \gamma$ дуги γ до границы Γ

равно $s(l)$. Если $\omega(\gamma, z, D)$ означает гармоническую меру дуги γ в точке $z \in D$ и $m(l)$ означает минимум ω в пересечении D с кругом $(z - z_l) \frac{s(l)}{\varepsilon}$, $\varepsilon = 2, 71, \dots$, то

$$\frac{dm(l)}{dl} < -4 \frac{m(l)}{s(l)}, \quad (4)$$

где под $\frac{dm}{dl}$ понимается нижняя производная.

Перейдем к доказательству правой части неравенства (2), переписав его в виде

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) < \varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}.$$

Возьмем для этого на γ такую точку z^* , чтобы окружность K с центром в точке z^* и радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ содержала дугу γ внутри себя. Без ограничения общности мы можем считать, что точка z^* расположена на отрицательной части действительной оси. Пусть γ^* — дуга окружности K , лежащая внутри области $D(q)$ и разбивающая $D(q)$ на две односвязные области, из которых одна D^* содержит точку $z=0$, а граница другой содержит точку z^* . Мы будем говорить в таких случаях, что дуга γ^* отделяет в области $D(q)$ точку $z=0$ от точки z^* . В силу принципа расширения области $\omega(\gamma, 0, D) \leq \omega(\gamma^*, 0, D^*)$.

Обозначим через $\tilde{D}^*$ дополнение области D^* до расширенной плоскости. Так как граница Γ^* области D^* есть жорданова кривая, то $\tilde{D}^*$ есть односвязная область, содержащая внутри себя точку $z=\infty$. Пусть K_r — окружность с центром в точке z^* и радиуса r . Кривая Γ^* выделяет на окружности K_r счетное множество интервалов, лежащих в области $\tilde{D}^*$. Обозначим через α_r те из них, которые отделяют в области $\tilde{D}^*$ точку $z=\infty$ от точки z^* . Покажем, что длина каждого из интервалов α_r не меньше $\frac{2r}{q}$. Действительно, обозначим через S и F концы интервала α_r . Длина дуги SF границы Γ , содержащей точку z^* , не меньше $2r$; следовательно, длина хорды SF окружности K_r не меньше $\frac{2r}{q}$ и, тем более, длина интервала α_r не меньше $\frac{2r}{q}$.

Совершим теперь замену переменной, положив $z' = 2 \frac{z - z^*}{\varepsilon}$ и обозначим через γ' , Γ' , D' соответственно образы γ^* , Γ^* , D^* . Окруж-

ность K перейдет при этом в единичную окружность $|z|=1$, а дуга γ^* — в дугу γ' этой окружности. При этом, если $\bar{D}'$ есть дополнение D' до расширенной плоскости, то каждый интервал α_r окружности K_r радиуса r и с центром в точке $z'=0$, лежащий внутри области $\bar{D}'$ и отделяющий в области $\bar{D}'$ точку $z'=0$ от точки $z'=\infty$, по длине не меньше $2r/q$.

Если расстояние от точки z^* до точки $z=0$ было равно r_0 , то точка $z=0$ переходит в точку $\frac{2r_0}{\varepsilon}$ на действительной оси и

$$\omega(\gamma^*, 0, \bar{D}^*) = \omega\left(\gamma', \frac{2r_0}{\varepsilon}, \bar{D}'\right).$$

Совершим теперь преобразование инверсии и обозначим через ξ полученную переменную. При этой инверсии область D' перейдет в область D_ε , лежащую внутри единичного круга, граница которой состоит из дуги γ' единичного круга и из жордановой кривой γ_ε , лежащей внутри единичного круга, причем концы дуги γ_ε совпадают с концами дуги γ' . При этом точка $\xi=0$ лежит вне области D_ε . Наконец, точка $\frac{2r_0}{\varepsilon}$ переходит в точку $\varepsilon/2r_0$ и

$$\omega\left(\gamma', \frac{2r_0}{\varepsilon}, \bar{D}'\right) = \omega\left(\gamma', \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right).$$

Кроме того, если $\bar{D}_\varepsilon$ обозначает дополнение области D_ε и α_r обозначает любой из тех интервалов окружности K_r с центром в точке $\xi=0$ и радиуса r , которые лежат внутри области $\bar{D}_\varepsilon$ и отделяют в области $\bar{D}_\varepsilon$ точку $\xi=0$ от точки $\xi=\infty$, то длина α_r не меньше $\frac{2r}{q}$.

Нам достаточно установить — какова форма границы области D_ε , удовлетворяющей только что высказанным свойствам, при которой гармоническая мера $\omega\left(\gamma', \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right)$ достигает своего максимума или, что то же самое, при которой гармоническая мера $\omega\left(\gamma_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2r_0}, \bar{D}_\varepsilon\right)$ достигает своего минимума.

Положим для этого $\zeta = \xi^{\frac{\pi}{\pi-1/q}}$. В силу указанного свойства дополнения $\bar{D}_\varepsilon$ область D_ε перейдет при этом преобразовании в однолиственную область D_ζ , лежащую внутри единичного круга $|\zeta| < 1$, границей которой служит дуга единичной окружности и дуга γ_ζ , соответствующая дуге γ_ε , лежащая внутри единичного круга, причем концы γ_ζ лежат на единичной окружности и точка $\zeta=0$ не принад-

лежит области D_ε . Как это доказывается у Р. Неванлинна [7] минимум гармонической меры дуги γ_ε в точке, лежащей на отрезке $(0,1)$, достигается для случая, когда кривая γ_ε совпадает с отрезком $(-1,0)$. В области D_ε этому отрезку соответствует угол с вершиной в точке $\xi = 0$, раствора $\frac{2}{q}$, биссектрисой которого служит отрицательная часть действительной оси.

Итак, нам надо вычислить гармоническую меру дуги γ' единичной окружности в точке $\varepsilon/2r_0$ относительно области D_ε , состоящей из единичного круга, из которого удален указанный выше угол.

Для этого возведем ξ в степень $\delta = \frac{\pi}{2\left(\pi - \frac{1}{q}\right)}$; тогда наша об-

ласть перейдет в единичный полукруг, опирающийся на мнимую ось и лежащий в правой полуплоскости, а точка $\varepsilon/2r_0$ перейдет в точку $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ на действительной оси, и нам остается вычислить гармоническую меру полуокружности в точке $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ относительно указанного полукруга. Последняя равна [8] величине $2(1 - \Theta/\pi)$, где Θ — угол, под которым виден из точки $(\varepsilon/2r_0)^\delta$ отрезок $(-i, +i)$.

Следовательно

$$\begin{aligned}\omega(\gamma, 0, D) &\leq 2\left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)^\delta\right) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{2r_0}{\varepsilon}\right)^\delta\right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\varepsilon}{2r_0}\right)^\delta \leq \frac{4}{\pi} \left(\frac{\varepsilon}{2r_0}\right)^\delta < \varepsilon^\delta,\end{aligned}$$

так как $\delta > \frac{1}{2}$ и потому $\pi 2^\delta > 3,14 \sqrt{2} > 4$ и $r_0 > 1$.

Выясним теперь степень точности полученной нами верхней оценки.

Из приведенных рассуждений следует, что указанная верхняя оценка достигается для следующего случая. Рассмотрим окружность K

радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ и с центром в точке $z = -1$. Проведем из точки $z = -1$

две бесконечные полупрямые, так, чтобы они образовывали угол α раствора $2/q$, биссектрисой которого служит часть $x < -1$ действительной оси. Обозначим через γ дугу окружности K , лежащую вне

угла α , через ε_1 — длину дуги γ , равную $\varepsilon \left(\pi - \frac{1}{q}\right)$ и через D — об-

ласть, содержащую точку $z = 0$ и ограниченную дугой γ и частями полупрямых, лежащих вне окружности K .

Тогда

$$\omega(\gamma, 0, D) = \frac{4}{\pi 2^{\delta}} \varepsilon^{\delta} = \frac{4}{\pi 2^{\delta} \left(\pi - \frac{1}{q}\right)^{\delta}} \varepsilon_1^{\delta} < \varepsilon_1^{\delta},$$

где $\delta = \frac{\pi}{2\pi - \frac{2}{q}}$.

Обозначим через D_R часть области D , лежащую внутри круга $|z| < R$. При ε достаточно малом область D_R содержит внутри себя круг, близкий к кругу $|z| < 1$. Далее, если K_r — окружность радиуса r с центром в точке $z = -1$, то длина дуги α_r окружности K_r , лежащей вне области D_R , равна $2r/q$, а длина $l(\gamma_r)$ куса γ_r границы области D_R , лежащей внутри окружности K_r , равна

$$2r - 2 \frac{\varepsilon}{2} + 2\pi \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2}{q} \frac{\varepsilon}{2} = 2r + \varepsilon \left(\pi - 1 - \frac{1}{q} \right).$$

Так как при достаточно малом $r > \varepsilon$ длина хорды дуги α_r близка к длине дуги α_r , то мы можем считать, что $\frac{l(\gamma_r)}{d(\gamma_r)} = q$. Итак, область D_r есть область типа $D(q)$.

Так как радиус R может быть сколь угодно велик, то полученная нами верхняя оценка $\varepsilon \frac{\pi}{2\pi - 2/q}$ является точной в том смысле, что показатель при ε для областей типа $D(q)$ не может быть понижен.

Доказательство левой части неравенства (2) проведем в несколько шагов.

1. Покажем, прежде всего, что если $r < \frac{s}{2(2q+1)}$, то на расстоянии r от произвольной точки A границы Γ в области $D(q)$ существует точка B , которая служит центром окружности радиуса $s = \frac{r}{2q}$, принадлежащей области $D(q)$.

Действительно, проведем окружность K с центром в точке A и радиуса r . Кривая Γ выделяет на окружности K счетное множество интервалов, содержащихся в области $D(q)$; среди них есть хотя один, разбивающий область $D(q)$ на две односвязные части, из которых одна содержит точку $z = 0$, а граница другой содержит точку A . Если при любом положении точки B на этом интервале окружность K_s с центром в точке B и радиуса $s = \frac{r}{2q}$ будет пересекать гра-

ницу Γ , то существует на границе Γ дуга $\tilde{\gamma}$, содержащая внутри себя точку A и не имеющая с окружностью K_s иных общих точек, кроме своих концов C и F . Так как $q > 1$, то

$$l(\tilde{\gamma}) > 2r - 2s = 2r - \frac{r}{q} = r \left(2 - \frac{1}{q} \right) > r,$$

и

$$d(\tilde{\gamma}) \leq 2s = \frac{r}{q}.$$

Следовательно

$$\frac{l(\tilde{\gamma})}{d(\tilde{\gamma})} > \frac{r}{\frac{r}{q}} = q,$$

что неверно, так как каждая из точек С и F удалена от точки А на расстояние не большее

$$r + \frac{r}{2q} = r \left(1 + \frac{1}{2q} \right) < \frac{s}{2(2q+1)} \cdot \frac{2q+1}{2q} = \frac{s}{4q}$$

и, следовательно, каждая из дуг СА и FА по длине не больше $\frac{s}{4}$, а

потому и $l(\tilde{\gamma}) < \frac{s}{2}$.

2. Докажем теперь следующее предложение. Пусть L обозначает дугу границы Γ длины l . Будем катить вдоль границы Γ окружность K радиуса s так, чтобы окружность все время принадлежала замкнутой области $\bar{D}(q)$. Пусть L' — кривая, которую опишет центр окружности K , когда окружность при движении вдоль Γ будет иметь общие точки с дугой L . Покажем, что длина кривой не больше $2l + 2\pi s$.

Заменим для этого границу Γ близкой к ней ломанной и обозначим через β тот из двух углов, образованных соседними звеньями ломанной, внутри которого проходит окружность K , когда она катится по ломанной Γ_k так, чтобы лежала внутри той из двух областей, ограниченных ломанной Γ_k , которая не содержит бесконечно удаленной точки. Обозначим через L_k те из звеньев ломанной Γ_k , которых коснется окружность K при движении вдоль Γ_k и будем считать соседними два последовательных звена системы L_k . Когда окружность K катится по двум соседним звеньям системы L_k , угол между которыми есть β , ее центр опишет кривую длины равной сумме длин этих звеньев плюс величина $s(\beta - \pi)$, если $\beta > \pi$, и не большей суммы длин этих звеньев, если $\beta < \pi$. Таким образом, длина кривой L' , которую опишет центр окружности K , когда она катится вдоль L_k , не больше длины L_k плюс $\sum_{\beta > \pi} s(\beta - \pi)$ для всех углов меж-

ду двумя соседними звеньями ломанной L_k , для которых $\beta > \pi$.

Ясно, что $\sum_{\beta > \pi} (\beta - \pi)$ не может быть больше

$$2\pi \left(\frac{\text{длина } L_k}{\text{длина } K} + 1 \right) < 2\pi \left(\frac{l}{2\pi s} + 1 \right) = \frac{l}{s} + 2\pi,$$

так как ломанную Γ_k можно взять сколь угодно близкой по длине к границе Γ .

Итак, длина L' не больше

$$l + s \left(\frac{l}{s} + 2\pi \right) = 2l + 2\pi s.$$

3. Положим теперь $r_0 = \frac{\pi}{4(2q+1)}$.

Соединим отрезком L_1 точку $z=0$ с ближайшей точкой той части границы Γ , которая лежит вне окружности K_0 радиуса r_0 и с центром в произвольной фиксированной точке A дуги γ .

Возьмем окружность K_{s_0} с центром в точке $z=0$ и радиуса $s_0 = \frac{r_0}{4q}$. Окружность $K_{s_0} \subset D$, ибо область $D(q)$ содержит внутри себя круг $|z| < 1$ и $s_0 < 1$. Будем сдвигать центр окружности K_{s_0} вдоль L_1 до тех пор, пока K_{s_0} не коснется границы Γ . При этом центр опишет отрезок L_1 , длина которого меньше s . Далее будем катить окружность K_{s_0} вдоль границы Γ , пока центр ее не совпадет с некоторой точкой B_{s_0} на окружности K_0 . При этом центр окружности опишет кривую L_2 , длина которой не больше

$$2s + 2\pi s_0 = 2s + \frac{\pi^2}{8q(2q+1)}.$$

Покажем, что при этом движении окружность K_{s_0} все время принадлежит области $D(q)$. Для этого будем катить окружность K_{s_0} вдоль Γ пока это возможно, не выходя за пределы области $D(q)$. Если мы остановимся раньше, чем центр K_{s_0} попадет на окружность K_0 , то окружность K_{s_0} будет иметь с Γ не менее двух общих точек, причем две из них, C и F , будут ограничивать дугу CAF границы Γ , содержащую внутри себя точку A и не имеющую с K_{s_0} иных общих точек, кроме своих концов C и F . Ясно при этом, что хорда CF принадлежит области $D(q)$ и разбивает $D(q)$ на две области D_1 и D_2 , из коих D_1 содержит внутри себя точку $z=0$, а граница другой содержит точку A . Если длина дуги CF , дополняющей дугу CAF до Γ , не больше $s/2$, то хорда CF не может быть меньше π/q , ибо область $D(q)$ содержит круг $|z| < 1$, а область D_1 содержит точку $z=0$. Это неверно, так как длина CF не больше диаметра окружности K_{s_0} , равного $2s_0 = \frac{r_0}{2q} = \frac{\pi}{8q(2q+1)} < \frac{\pi}{q}$. Если же длина дуги CAF меньше $s/2$, то она во всяком случае не больше

$$2r_0 - 2s_0 = 2r_0 - \frac{r_0}{2q} = r_0 \left(2 - \frac{1}{2q} \right) > r_0, \quad q > 1.$$

В то же время длина хорды CF не больше $2s_0 = r_0/2q$ и, следовательно, отношение длины дуги CAF к длине ее хорды CF не меньше $2q$, что тоже невозможно.

4. Построим теперь кривую L_3 , соединяющую точку A с точкой B_{r_0} и удовлетворяющую следующему условию: если длина этой кривой от точки A до точки z_l равна l , то точка z_l служит центром окружности радиуса $s(l) = l/15q^2$, целиком принадлежащей области $D(q)$.

Для этого окружность K_{s_0} радиуса $s_0 = r_0/4q$ и с центром в точке B_{r_0} будем катить вдоль Γ до тех пор, пока ее центр не окажется лежащим в точке $B_{r_0/2}$ на окружности радиуса $r_0/2$ и с центром в точке A , что возможно в силу п. 1. Проведем радиус, соединяющий центр $B_{r_0/2}$ с той точкой окружности, с которой Γ имеет общую точку (или с любой из них, если их несколько). Возьмем окружность $K_{s_0/2}$ с центром в точке $B_{r_0/2}$ и радиуса $\frac{s_0}{2} = \frac{r_0}{8q}$ и сдвинем

центр этой окружности вдоль проведенного радиуса, пока окружность $K_{s_0/2}$ не коснется границы. После этого будем катить эту окружность вдоль границы, пока ее центр не окажется лежащим в точке $B_{r_0/4}$ на окружности радиуса $s_0/4$ и с центром в точке A . Заменяем теперь окружность $K_{s_0/2}$ окружностью $K_{s_0/4}$ с центром в той же точке, но радиуса $s_0/4$ и сдвинем центр этой окружности вдоль радиуса, соединяющего точку $B_{r_0/4}$ с ближайшей точкой границы, пока окружность $K_{s_0/4}$ не коснется границы Γ .

Если обозначить через L_3 кривую, которую опишут центры окружностей, то продолжая так шаг за шагом мы получим в пределе кривую, оканчивающуюся в точке A .

Пусть z — некоторая точка этой кривой, служащая центром окружности радиуса $r_0/2^n q$. Вычислим длину l этой кривой от точки A до точки z . Эта длина равна сумме длин прямолинейных участков кривой L_3 , равной

$$\frac{r_0}{2^{n+1}q} + \frac{r_0}{2^{n+2}q} + \dots = \frac{r_0}{2^n q},$$

плюс сумма длин криволинейных участков, которая не больше

$$2l_1 + 2\pi \frac{r_0}{2^n q} + 2l_2 + \frac{r_0}{2^{n+1}q} + \dots = 2(l_1 + l_2 + \dots) + 2\pi \frac{r_0}{2^{n-1}q},$$

где l_1 — длина того куска границы Γ , по которому катится окружность радиуса $r_0/2^n q$, l_2 — длина того куска Γ , по которому катится окружность радиуса $r_0/2^{n+1} q$ и т. д. Следовательно, сумма $l_1 + l_2 + \dots$ не больше длины куска границы Γ от точки A до точки границы, ближайшей к точке z , и потому не больше

$$\left(\frac{r_0}{2^{n-2}} + \frac{r_0}{2^n q} \right) q.$$

Итак,

$$l \leq \frac{r_0}{2^n q} + 2\pi \frac{r_0}{2^{n-1} q} + \frac{r_0 q}{2^{n-3}} + \frac{r_0}{2^{n-1}} = r_0 \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{2^n q}.$$

Таким образом,

$$S(l) > \frac{r_0}{2^n q} > \frac{l}{8q^2 + 2q + 4\pi + 1} > \frac{l}{15q^2},$$

так как $q > \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $2q + 4\pi + 1 \leq 7q^2$; здесь $s(l)$ — расстояние от точки z_l кривой L_3 до границы Γ .

Следовательно, длина $l(L_3)$ всей кривой L_3 , соответствующая случаю $n=2$, не больше

$$l(L_3) \leq r_0 \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{2^2 q} = \frac{\pi}{4(2q+1)} \cdot \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{4q}.$$

5. Обозначим через L^* кривую, соединяющую точку A с точкой $z=0$ и составленную из кривых L_3 , L_2 и L_1 . Если z_l — точка кривой L^* , l — длина этой кривой от точки A до точки z_l и $s(l)$ — расстояние от точки A до границы Γ , то при $z \in L_3$ имеем $s(l) > \frac{l}{15q^2}$, а при $z \in L_2 + L_1$ имеем

$$s(l) = s_0 = \frac{r_0}{4q} = \frac{\pi}{16q(2q+1)} = p(q).$$

Заменим теперь кривую L^* гладкой кривой $\tilde{L}$, соединяющей точку $z=0$ с точкой A , длина $l(\tilde{L})$ которой равна сумме длин кривых $L_1 + L_2 + L_3$ и которая удовлетворяет следующему условию: если l — длина куска этой кривой, отсчитанная от точки A до некоторой точки z и $s(l)$ — расстояние от этой точки до границы Γ , то при $\varepsilon \leq l \leq l(L_3)$ имеем $s(l) > \frac{l-a}{15q^2}$, а при $l(L_3) < l \leq l(\tilde{L})$ имеем $s(l) > p(q) - a$, где a — произвольно малое число, меньшее ε .

Принтегрируем теперь неравенство (4) вдоль кривой $\tilde{L}$ в пределах от ε до $l(\tilde{L})$. Получим

$$-4 \int_{\varepsilon}^{l(\tilde{L})} \frac{dl}{s(l)}$$

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) \geq m(l(L)) \geq m(\varepsilon)$$

=

$$\begin{aligned}
& 60q^2 \int_{\varepsilon}^{l(L_3)} \frac{al}{l-a} - 4 \int_{l(L_2)}^{\tilde{l}(L)} \frac{al}{p(q)-a} \\
& = m(\varepsilon) e^{\dots} \cdot e^{\dots} = \\
& = m(\varepsilon) e^{\frac{60q^2 l(L_3)}{l-a}} \cdot e^{-\left\{ 60q^2 l(L_2) + \frac{4l(L_1+L_2)}{p(q)-a} \right\}} = \\
& = m(\varepsilon) (\varepsilon - a)^{60q^2} \cdot e^{-N(q, l(L_1+L_2), l(L_3))}.
\end{aligned}$$

Следовательно, ввиду произвольности a ,

$$\omega(\gamma, 0, D(q)) > m(\varepsilon) \varepsilon^{60q^2} e^{-N}.$$

$$\text{Так как при этом } l(L_3) \leq \frac{\pi}{4(2q+1)} \cdot \frac{8q^2 + 2q + 4\pi + 1}{4q},$$

$$l(L_1) < S, \quad l(L_2) \leq 2s + \frac{\pi^2}{8q(2q+1)},$$

то

$$e^{-N(q, l(L_1+L_2), l(L_3))} > M_1(s, q).$$

6. Докажем теперь, что

$$m(\varepsilon) > m_1(q),$$

где $m_1(q)$ зависит лишь от q .

Для этого заметим, что точка z_ε кривой L_3 , отстоящая от A на расстояние не большее ε , служит центром окружности радиуса $s(\varepsilon) = \varepsilon/15q^2$, принадлежащей области $D(q)$, а $m(\varepsilon)$ есть минимум гармонической меры дуги γ в точках круга K , концентрическим с предыдущим и радиуса $s(\varepsilon)/e$. Далее, относительная длина $\rho(\gamma)$ дуги γ в области $D(q)$ не меньше ε/q и $m(\varepsilon)$ только уменьшится, если заменить область $D(q)$ той ее связанной частью D' , которая лежит внутри круга радиуса $q(2\varepsilon + \varepsilon/15q^2)$ с центром в точке A и содержит круг K .

Растянем теперь всю плоскость в

$$\frac{1}{s(\varepsilon) - s(\varepsilon)/e} = \frac{15q^2}{\varepsilon} \cdot \frac{e}{e-1}$$

раз и обозначим через γ^* , K^* , D^* соответственно образы γ , K , D' . Тогда расстояние каждой точки круга K^* до границы области D^* будет не меньше единицы, диаметр d области D^* будет не больше

$$2\left(2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{15q^2}\right) q \frac{15q^2}{\varepsilon} \frac{e}{e-1} = N_1(q)$$

и, наконец, относительная длина $\rho(\gamma^*)$ дуги γ^* в области D^* — не меньше $\frac{\varepsilon}{q} \frac{15q^2}{\varepsilon} \frac{e}{e-1} = 15q \frac{e}{e-1}$.

В силу левой части неравенства (1)

$$m(\varepsilon) > e^{\frac{-K_1(a)}{\rho^2(\gamma^*)}} > e^{\frac{-K_1(N_1(q))}{15^2 q^2 \left(\frac{e}{e-1}\right)^2}}.$$

откуда $m(\varepsilon) \geq m_1(q)$.

Таким образом мы доказали и левую часть неравенства (2).

Для доказательства теоремы 2 нам надо будет предварительно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть D_w — область, содержащая точку $w=0$ и ограниченная дугой окружности $|w|=1$ и кривой γ_w принадлежащей кругу $|w|<1$, концы которой лежат на окружности $|w|=1$. Если диаметр кривой γ_w равен $d<1$, то гармоническая мера $\omega(\gamma_w, 0, D_w)$ дуги γ_w в точке $w=0$ относительно области D_w не больше $\frac{4}{\pi} d$:

$$\omega(\gamma, 0, D_w) \leq \frac{4}{\pi} d. \quad (5)$$

Эта теорема является обратной к теореме М. А. Лаврентьева [9], согласно которой

$$\frac{1}{4\pi} d \leq \omega(\gamma_w, 0, D_w). \quad (6)$$

Для доказательства будем считать, что точка w' дуги γ , лежащая на окружности $|w|=1$, совпадает с точкой $w=1$. Так как расстояние от точки w' до любой точки γ_w не больше d , то дуга γ целиком попадет внутрь окружности радиуса d и с центром в точке $w=1$.

Рассмотрим теперь окружность K , ортогональную окружности $|w|=1$, проходящую через точку $w=1-d$, центр которой лежит в точке $w^*=1+\frac{d^2}{2(1-d)}$ и радиус которой равен $\frac{d(2-d)}{2(1-d)}$.

Если окружность K пересекает окружность $|w|=1$ в точках $w_1=e^{i\varphi}$ и $w_2=e^{-i\varphi}$, то по правилу решения прямоугольных треугольников

$$\sin\varphi = \frac{d(2-d)}{d^2-2d+2} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{2(1-d)}{d^2-2d+2}.$$

Ясно, что кривая γ лежит внутри окружности K . Если обозначить через γ^* дугу окружности K , лежащую внутри окружности $|w|=1$ и через D^* — область, содержащую точку $w=0$ и ограниченную дугой γ^* и дугой окружности $|w|=1$, то в силу принципа расширения области,

$$\omega(\gamma, 0, D) \leq \omega(\gamma^*, 0, D^*).$$

Для вычисления последней гармонической меры отображим область D^* преобразованием

$$\frac{1+\xi}{1-\xi} = \frac{(e^{-i\varphi} - z)(e^{i\varphi} - 1 + d)}{(e^{i\varphi} - z)(e^{-i\varphi} - 1 + d)}$$

на полукруг, опирающийся на отрезок $(-1, +1)$ действительной оси и лежащей в верхней полуплоскости. При этом дуга γ^* перейдет в отрезок $(-1, +1)$, а точка $w=0$ — в точку

$$\xi_0 = i \frac{(1-d) \sin \varphi}{1 - (1-d) \cos \varphi} = i \frac{d^2 - 3d + 2}{2-d}$$

на мнимой оси.

Гармоническая мера $\omega(\gamma^*, 0, D^*)$ равна гармонической мере отрезка $(-1, +1)$ в точке ξ_0 полукруга, а последняя равна величине

$$\frac{2}{\pi} \left(\Theta - \frac{\pi}{2} \right),$$

где Θ — угол, под которым виден отрезок $(-1, +1)$ из точки ξ_0 [8]. Таким образом,

$$\begin{aligned} \omega(\gamma^*, 0, D^*) &= \frac{2}{\pi} \left(2 \arctg \frac{1}{|\xi_0|} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi} \arctg \frac{1 - |\xi_0|}{1 + |\xi_0|} = \\ &= \frac{4}{\pi} \arctg \frac{d}{2-d}, \end{aligned}$$

откуда

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \leq \frac{4}{\pi} \frac{d}{2-d} \leq \frac{4}{\pi} d.$$

Таким образом теорема 3 полностью доказана.

С помощью оценок (6) и (5) можно доказать неравенство (3).

Докажем сначала правую часть этого неравенства. Заметим для этого, что при доказательстве правой части неравенства (2) было доказано, что если A — точка границы Γ и γ^* — дуга окружности радиуса ε и с центром в точке A , разбивающая область $D(q)$ на две односвязные области, из которых одна — D^* содержит точку $z=0$, а граница другой содержит точку A , то

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) < (2\varepsilon)^{\frac{\pi}{2\pi - 2/q}}. \quad (7)$$

Отобразим теперь область $D(q)$ на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы точка $z=0$ перешла в точку $w=0$. При этом дуга γ^* перейдет в дугу γ_w , принадлежащую кругу $|w| < 1$, концы которой лежат на окружности $|w| = 1$. Обозначим через D_w область,

содержащую точку $w=0$ и ограниченную дугой единичной окружности и дугой γ_w . Так как при этом $\omega(\gamma^*, 0, D^*) = \omega(\gamma_w, 0, D_w)$, то из неравенств (7) и (6) получаем

$$h < 4\pi(2\varepsilon)^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}} < 6\pi\varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}},$$

где h — диаметр континуума γ_w .

Докажем теперь левую часть неравенства (3).

Для этого соединим точку w_0 с окружностью $|w|=1$ двумя отрезками длины $h+d$, совокупность которых мы обозначим через γ_w , так, чтобы они отсекали на окружности $|w|=1$ дугу длины не больше h и обозначим через D_w область, содержащую точку $w=0$ и ограниченную дугой окружности $|w|=1$ и дугой γ_w . Так как диаметр кривой γ_w равен $h+d$, то согласно неравенству (5) имеем

$$\omega(\gamma_w, 0, D_w) \leq \frac{4}{\pi}(h+d). \quad (8)$$

Кривой γ_w соответствует в области $D(q)$ жорданова дуга γ^* области $D(q)$, концы которой лежат на границе области $D(q)$, а области D_w соответствует в области $D(q)$ область D^* , ограниченная жордановой кривой и при этом

$$\omega(\gamma_w, 0, D_w) = \omega(\gamma^*, 0, D^*). \quad (9)$$

Остается вычислить последнюю гармоническую меру.

Для этого обозначим через z^* один из концов дуги γ^* , лежащий на границе Γ области $D(q)$ и через f — наибольшее расстояние от точки z^* до прочих точек дуги γ^* .

Проведем окружность K радиуса $f+b$, $b>0$, и с центром в точке z^* . Соединим точку z^* с точкой $z=0$ гладкой кривой $\tilde{L}$, удовлетворяющей свойствам, описанным в п. 5 и заметим, что расстояние от точек $\tilde{L}$ до границы Γ области $D(q)$ совпадает с расстоянием от этих точек до дополнения дуги γ^* до границы области D^* . Пусть l_0 — длина кривой $\tilde{L}$ от точки z^* до последней точки встречи кривой $\tilde{L}$ с окружностью K . Ясно, что $l_0 > \varepsilon$. Соединим точку z' с любой точкой дуги γ^* гладкой кривой L' длины l_0 и обозначим через L^* кривую, составленную из кривой L' и куска кривой $\tilde{L}$ от точки z' до точки $z=0$. Пронтегрируем неравенство (4) вдоль кривой L^* в пределах от l_0 до $l(L^*)$. Также, как и в п. 5, получим

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq m(l_0) l_0^{60q^2} e^{-N(q, l(L^*))}$$

и так как $l_0 > \varepsilon$, то

$$\omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq m(l_0) \varepsilon^{60q^2} M_1(s_1q),$$

где $M_1(s_1q)$ зависит только от s и q .

Нам остается оценить $m(l_0)$ снизу. Для этого заметим, что расстояние от точки z' до точек границы области D^* , не принадлежащих дуге γ^* , не меньше $\frac{l_0}{15q^2} + \frac{f}{15q^2}$, относительная длина дуги γ^* в области D^* не меньше f/q и расстояние от точки z^* дуги γ^* до точки z' равно $f+b$. Так как b может быть взято сколь угодно малым, то также, как и в п. 6, можно доказать, что

$$\text{Итак,} \quad \begin{matrix} \text{ЕЩЕ} \\ \text{ОТ} \end{matrix} m(l_0) > m_1(q). \quad \omega(\gamma^*, 0, D^*) \geq M_2 \varepsilon^{60q^2}, \quad (10)$$

где M_2 зависит лишь от s и q .

В силу (8), (9) и (10) имеем

$$h + a \geq \frac{\pi M_2}{4} \varepsilon^{60q^2}$$

и, так как a^* может быть взято сколь угодно малым, то

$$h \geq M \varepsilon^{60q^2},$$

где M зависит лишь от s и q .

Теорема полностью доказана.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15 IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лаврентьев М. А. ДАН СССР, IV, 5, 1936.
2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, 1941, стр. 29.
3. Неванлинна Р. Там же, стр. 32.
4. Неванлинна Р. Там же, стр. 13.
5. Неванлинна Р. Там же, стр. 70.
6. Неванлинна Р. Там же, стр. 84.
7. Неванлинна Р. Там же, стр. 105.
8. Неванлинна Р. Там же, стр. 49.
9. Лаврентьев М. А. Труды Физико-математического института им. В. А. Стеклова, отдел математики, V, 1934, стр. 188.

Թ. Մ. Տեր-Միքայելյան

ՈՐՈՇ ՈՒՂՂԵԼԻ ԿՈՐԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿԱԿԱԾ ՏԻՐՈՒՅՑՆԵՐՈՒՄ
ՍԻԱԹԵՐԹ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է $|w| \leq 1$ փակ շրջանում, $|w| < 1$ շրջանը կոնֆորմ կերպով այնպիսի Γ ուղղիկ կորով սահմանափակված $D(q)$ տիրույթի վրա արտապակերպ $w = \tilde{f}(z)$ ֆունկցիայի անընդհատու-

թյան բնույթը, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին՝ Γ կորի ցանկացած γ աղեղի հարաբերությունն իր լարի երկարությանը, անկախ γ աղեղից, սահմանափակ է q հաստատունով:

Թեորեմ. Եթե $D(q)$ տիրույթի եզրի վրա աված է ε երկարության մեկ γ_ε աղեղ, ապա $w = \tilde{f}(z)$ կոնֆորմ կերպով $D(q)$ տիրույթը $|w| < 1$ շրջանի վրա, արտապատկերման ժամանակ $D(q)$ տիրույթի եզրի γ_ε աղեղին համապատասխանում է $|w| = 1$ շրջանագծի վրա γ_w աղեղը, որի η երկարությունը բավարարում է հետևյալ անհավասարություններին.

$$M\varepsilon^{60q^2} < \eta < 2\pi\varepsilon^{\frac{\pi}{2\pi-2/q}},$$

որտեղ M -ը հաստատուն է, կախված Γ եզրի $l(\Gamma)$ երկարությունից և q թվից:

Նշված թեորեմում տիրույթների մասնավոր գեպքի համար ճշտված են ակադեմիկոս Մ. Ա. Լավրենտևի ստացած ընդհանուր գնահատականները:

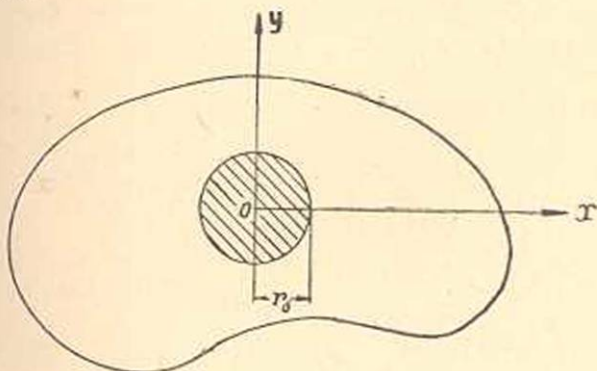
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

О. М. Сапонджян

Изгиб свободно опертой полигональной плиты

В работе дано решение задачи об изгибе свободно опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга. В качестве примера решена задача об изгибе правильной многоугольной плиты.

1. *Определение прогиба упругой поверхности.* Общее выражение прогиба упругой поверхности плиты, при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга (фиг. 1) радиусом r_0 и центром в начале координат плоскости xu , нами ранее представлено в виде [1]:



Фиг. 1.

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{p z^2 \bar{z}^2}{64D} + \frac{P}{16\pi D} \left[2 \left(z \bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln r_0 + \right. \\ \left. + z \bar{z} - \frac{5}{4} r_0^2 \right] + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.1)$$

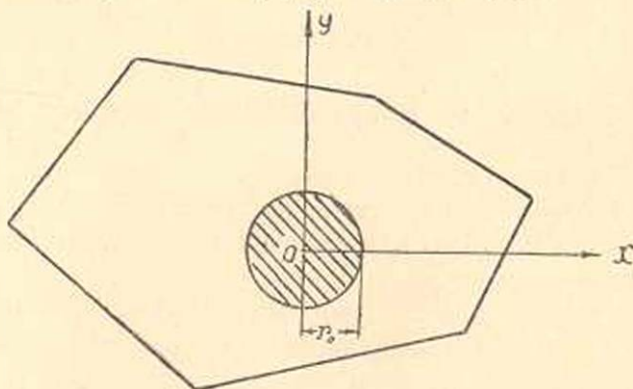
в замкнутой нагруженной области плиты

$$w_1 = \frac{P}{16\pi D} \left(z \bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z \bar{z} + \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + \chi(z) + \bar{\chi}(\bar{z}), \quad (1.2)$$

где p — интенсивность нагрузки, $P = \pi r_0^2 p$ — равнодействующая нагрузки, $Eh^3/12(1 - \sigma^2)$ — жесткость плиты, h — толщина плиты, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\varphi(z)$ и

$\kappa(z)$ — функции комплексного переменного, голоморфные во всей области плиты, $\bar{\varphi}(\bar{z})$ и $\bar{\kappa}(\bar{z})$ — функции, сопряженные с функциями $\varphi(z)$ и $\kappa(z)$.

Для решения задачи об изгибе свободно опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга (фиг. 2) применяем формулы (1.1) и (1.2).



Фиг. 2.

Функции $\varphi(z)$ и $\kappa(z)$ определяем из условий опирания

$$w_1 = 0 \quad \text{и} \quad \nabla^2 w_1 = 0, \quad (1.3)$$

или согласно (1.2)

$$\begin{aligned} z_s \varphi(z_s) + z_s \bar{\varphi}(\bar{z}_s) + \kappa(z_s) + \bar{\kappa}(\bar{z}_s) = \\ = -\frac{P}{16\pi D} \left(z_s \bar{z}_s + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln z_s \bar{z}_s, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\varphi'(z_s) + \bar{\varphi}'(\bar{z}_s) = -\frac{P}{16\pi D} (2 + \ln z_s \bar{z}_s), \quad (1.5)$$

где s — контур плиты.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ при $\omega(0) = 0$ конформно преобразует область единичного круга плоскости комплексного переменного ζ в область многоугольника на плоскости z .

Тогда, обозначив

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi(z), \quad \kappa_1(\zeta) = \kappa(z),$$

а через $t = e^{i\theta}$ — аффикс произвольной точки на окружности единичного круга, и имея в виду, что $\ln t \bar{t} = 0$, из (1.4) и (1.5) получим:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\bar{t}) \varphi_1(t) + \omega(t) \bar{\varphi}_1(\bar{t}) + \kappa_1(t) + \bar{\kappa}_1(\bar{t}) = \\ = -\frac{P}{16\pi D} \left[\omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \left[\ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\bar{\omega}(\bar{t})}{\bar{t}} \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\frac{\varphi_1'(t)}{\omega'(t)} + \frac{\bar{\varphi}_1'(\bar{t})}{\bar{\omega}'(\bar{t})} = -\frac{P}{16\pi D} \left[2 + \ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\bar{\omega}(\bar{t})}{\bar{t}} \right]. \quad (1.8)$$

Из (1.8) легко можно определить функцию $\varphi_1(\zeta)$. Действительно, обозначив через

$$g(\zeta) = \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right], \quad (1.9)$$

согласно (1.8) получим:

$$g(t) + \overline{g(\bar{t})} = 0. \quad (1.10)$$

Так как $g(\zeta)$ голоморфна в области единичного круга, то единственным решением уравнения (1.10) будет:

$$g(\zeta) = ic,$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Таким образом решение уравнения (1.8) представится в следующем виде:

$$\frac{\varphi_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right] + ic. \quad (1.11)$$

Мнимую часть функции $\varphi'(0)$, т. е. $\text{Im}[\varphi'(0)]$, можно зафиксировать произвольно [2], поэтому можем принять

$$\text{Im}[\varphi'(0)] = \text{Im} \left[\frac{\varphi_1'(0)}{\omega'(0)} \right] = -\frac{P}{16\pi D} \text{Im}[\ln \omega'(0)].$$

Тогда из (1.11) получим: $c = 0$, и потому

$$\varphi_1'(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \left[1 + \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} \right] \omega'(\zeta).$$

Интегрируя и полагая $\varphi_1(0) = 0$ [2], получим окончательно

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{P}{16\pi D} \left[\omega(\zeta) \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right]. \quad (1.12)$$

Внеся (1.12) в (1.7), получим:

$$z_1(t) + \overline{z_1(\bar{t})} = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \left[\ln \frac{\omega(t)}{t} + \ln \frac{\overline{\omega(\bar{t})}}{\bar{t}} \right] + \frac{P}{16\pi D} \Omega(t), \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \overline{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \omega(t) \int_0^1 \frac{\overline{\omega(\bar{\zeta})}}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = \\ &= 2 \text{Re} \left[\overline{\omega} \left(\frac{1}{t} \right) \int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.13), полагая $I_m[z(0)] = 0$ [2], найдем:

$$z_1(\zeta) = -\frac{Pr_0^2}{32\pi D} \ln \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} + \frac{P}{16\pi D} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta \right], \quad (1.15)$$

где γ — окружность единичного круга.

Бигармоническая функция

$$\Phi = \bar{z} \varphi(z) + z \bar{\varphi}(\bar{z}) + z(z) + \bar{z}(\bar{z}), \quad (1.16)$$

согласно (1.12) и (1.15), примет вид

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{P}{16\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \left[\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}} + \right. \\ & \left. + 2\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right\}, \quad (1.17) \end{aligned}$$

или же

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{P}{16\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \left[\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \frac{\omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta \bar{\zeta}} + \right. \\ & \left. + 2\bar{\omega}(\bar{\zeta}) \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-|\zeta|^2) \Omega(e^{i\theta})}{1+|\zeta|^2-2|\zeta| \cos(\theta-\arg \zeta)} d\theta \right\}. \quad (1.18) \end{aligned}$$

Функция $\Omega(e^{i\theta})$ непрерывна на окружности γ . В этом случае входящий в (1.18) интеграл Пуассона представляет собою регулярную в области единичного круга гармоническую функцию, непрерывную вплоть до γ , причем на γ этот интеграл принимает значение $\Omega(e^{i\theta})$. В силу этого бигармоническая функция (1.18) также будет непрерывной в области единичного круга, вплоть до γ , причем на γ она принимает значение

$$\Phi_{\gamma} = -\frac{P}{16\pi D} \left[\omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}) + \frac{r_0^2}{2} \right] \ln \omega(t) \bar{\omega}(\bar{t}).$$

Внеся это выражение в (1.2), найдем, что на контуре плиты $w_1 = 0$.

Легко проверить обратным путем, что удовлетворяется и второе условие (1.3).

Имея в виду (1.16) и внеся (1.17) в (1.1) и (1.2), найдем окончательное решение задачи об изгибе опертой полигональной плиты при действии нагрузки равномерно распределенной по площади круга

в замкнутой области нагруженного круга

$$w_0 = \frac{\rho z^2 \bar{z}^2}{64D} - \frac{P}{16\pi D} \left\{ \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2 \zeta \bar{\zeta}} - \right. \\ \left. - z\bar{z} + \frac{5}{4} r_0^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\bar{z} \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right] \right\}, \quad (1.19)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$w_1 = \frac{P}{16\pi D} \left\{ \left(z\bar{z} + \frac{r_0^2}{2} \right) \ln \zeta \bar{\zeta} - 2 \operatorname{Re} \left[\bar{z} \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{t-\zeta} dt \right] \right\}. \quad (1.20)$$

Полагая в (1.19) $z=0$, $\zeta=0$, найдем прогиб в центре нагруженного круга

$$w(0,0) = \frac{P}{32\pi^2 D} \left[\int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta - \pi r_0^2 \ln \frac{|\omega'(0)|^2}{r_0^2} + \frac{5\pi}{2} r_0^2 \right]. \quad (1.21)$$

При $r_0=0$, (1.21) дает значения прогиба под сосредоточенной силой P , приложенной в начале координат

$$w(0,0) = \frac{P}{32\pi^2 D} \int_0^{2\pi} \Omega(e^{i\theta}) d\theta. \quad (1.22)$$

2. *Выражения изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил.* Пользуясь выражениями (1.12), (1.15) и известными формулами теории изгиба тонких плит, получим:

в замкнутой области нагруженного круга

$$M_1 + M_2 = -\frac{\rho(1+\sigma)}{4} z\bar{z} + \frac{P}{4\pi} \left(1 + \ln \frac{z\bar{z}}{r_0^2 \zeta \bar{\zeta}} \right), \quad (2.1)$$

$$M_1 - M_2 + 2i H_1 = -\frac{\rho(1-\sigma)}{8} z^2 + \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{z}}{z} - \right. \\ \left. - \frac{\bar{z}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \frac{r_0^2}{2[\omega'(\zeta)]^2} \left[1 - \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\omega''(\zeta)}{\zeta \omega'(\zeta)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt - \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^3} dt \right\}, \quad (2.2)$$

$$N_1 - iN_2 = -\frac{p}{2} \bar{z} + \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta \omega'(\zeta)} \right], \quad (2.3)$$

в замкнутой ненагруженной области плиты

$$M_1 + M_2 = -\frac{P(1+\sigma)}{4\pi} \ln \zeta \bar{\zeta}, \quad (2.4)$$

$$M_1 - M_2 + 2iH_1 = \frac{P(1-\sigma)}{8\pi} r_0^2 \frac{\omega'(\zeta) + \zeta \omega''(\zeta)}{\zeta^2 [\omega'(\zeta)]^3} - \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{\bar{z}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \right. \\ \left. - \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt + \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}, \quad (2.5)$$

$$N_1 - iN_2 = -\frac{P}{2\pi} \frac{1}{\zeta \omega'(\zeta)}, \quad (2.6)$$

где M_1 , M_2 и H_1 , $H_2 = -H_1$ — изгибающие и крутящие моменты, N_1 , N_2 — перерезающие силы, σ — коэффициент Пуассона.

Формула (2.6) совпадает с формулой Г. Ю. Джанелидзе, выведенной для случая нагрузки, сосредоточенной в начале координат [3].

Полагая в (2.1) — (2.3) $z \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow 0$, получим для центра нагруженного круга

$$M_1 + M_2 = \frac{P}{4\pi} (1+\sigma) \left[1 + \ln \frac{|\omega'(0)|^2}{r_0^2} \right], \quad (2.7)$$

$$M_1 - M_2 + 2iH_1 = -\frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{r_0^2}{24} \frac{9[\omega''(0)]^2 - 4\omega'(0)\omega'''(0)}{[\omega'(0)]^4} - \right. \\ \left. - \frac{\omega''(0)}{[\omega'(0)]^3} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \Omega(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{[\omega'(0)]^2} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-2i\theta} \Omega(e^{i\theta}) d\theta \right\}, \quad (2.8)$$

$$N_1 - iN_2 = \frac{P}{4\pi} \frac{\omega''(0)}{[\omega'(0)]^2}. \quad (2.9)$$

Выражения (2.7) — (2.9) имеют вполне определенные значения, так как $\omega'(0) \neq 0$, а функции $\Omega(e^{i\theta})$ непрерывны на окружности γ .

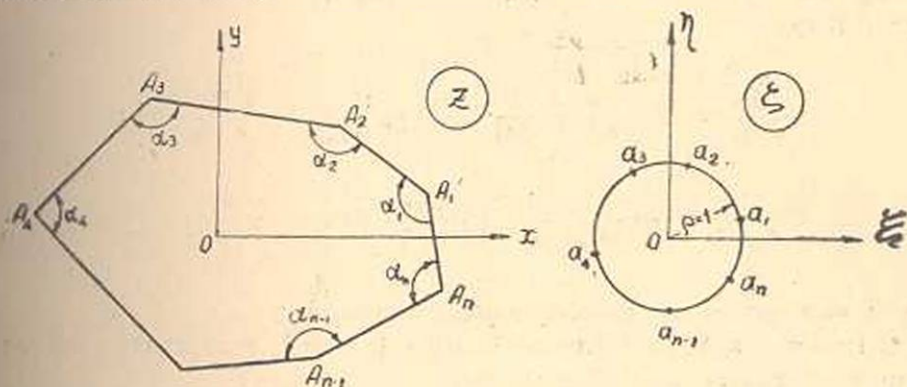
Конформное отображение единичного круга на внутреннюю область многоугольника осуществляется формулой Кристоффеля-Шварца

$$z = \omega(\zeta) = c \int_{\zeta}^{\zeta} (a_1 - \zeta)^{\frac{\alpha_1}{p}-1} (a_2 - \zeta)^{\frac{\alpha_2}{p}-1} \dots (a_n - \zeta)^{\frac{\alpha_n}{p}-1} d\zeta, \quad (2.10)$$

где c — постоянный параметр, p — число сторон многоугольника, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — точки на окружности γ , соответствующие вершинам многоугольника — $A_1, A_2, \dots, A_n$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — внутренние углы многоугольника (фиг. 3).

Легко можно показать, что функция $\omega(t)$ на γ удовлетворяет условию Гельдера $h(\mu)$, причем $\mu = \alpha_{\min}/\pi$, где $\alpha_{\min}$ — наименьший внутренний угол многоугольника.

Тогда, согласно (1.14), $\Omega(t)$ также будет удовлетворять на γ условию $h(\alpha_{\min}/\pi)$. Этим обеспечиваются условия непрерывности изгибающих и крутящих моментов в области плиты (из формулы поперечных сил непосредственно видно, что они также удовлетворяют этим условиям).



Фиг. 3.

Пользуясь формулой (2.10), можно показать, что углы наклона упругой поверхности и внутренние усилия плиты непрерывны влоть до контура, кроме, может быть, угловых точек.

3. *Поведение перерезывающих сил в угловых точках.* Согласно (2.6) и (2.10) имеем:

$$N_1 - iN_2 = -\frac{P}{2\pi c\zeta} (a_1 - \zeta)^{1-\frac{\alpha_1}{\pi}} (a_2 - \zeta)^{1-\frac{\alpha_2}{\pi}} \dots (a_n - \zeta)^{1-\frac{\alpha_n}{\pi}}, \quad (3.1)$$

откуда непосредственно видно, что на вершине угла α_k при $0 < \alpha_k < \pi$,

$$N_1 = N_2 = 0,$$

а при

$$\pi < \alpha_k < 2\pi,$$

$$N_1 - iN_2 \rightarrow \infty.$$

Таким образом, на вершине входящего угла перерезывающая сила (распределенная) принимает бесконечно большое значение. Однако легко можно вывести формулу

$$N ds = -\frac{P}{2\pi} d\theta, \quad (3.2)$$

где N — перерезывающая сила на контуре.

Из (3.2) следует, что равнодействующая перерезывающих сил, действующих в окрестности любого угла многоугольника, стремится к нулю.

Заметим, что из (3.2) следует условие равновесия плиты

$$\int_0^{2\pi} N ds = -P.$$

4. *Поведение угла наклона упругой поверхности плиты в угловых точках.* Обозначим через ν — внешнюю нормаль контура, β — угол между ν и x , а $\partial w / \partial \nu$ — угол наклона упругой поверхности на контуре. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu} = 2e^{i\beta} \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P}{8\pi D} e^{i\beta} \left[\frac{r_0^2}{2\zeta \omega'(\zeta)} - \int_0^{\zeta} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta} d\bar{\zeta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Omega(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right]_{\zeta \rightarrow t_0}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где t_0 — произвольно фиксированная точка на γ .

При $\pi < \alpha_k < 2\pi$ согласно (2.10) $\omega'(a_k) = 0$, вследствие чего для вершины угла α_k из (4.1) получим:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_{A_k} \rightarrow \infty.$$

Этот результат указывает на то, что наше решение в случае входящего угла неточно.

Рассмотрим теперь случай $0 < \alpha_k < \pi$.

Обозначим:

$$\lambda = \frac{\int_0^{a_k} \frac{1}{a_k} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta} d\bar{\zeta}}{\int_0^{a_k} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta}, \quad (4.2)$$

и представим (1.14) в виде:

$$\begin{aligned} \Omega(t) = \lambda \omega(t) \int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \int_0^1 \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta} d\bar{\zeta} - \lambda \left[\omega(t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda} \bar{\omega}\left(\frac{1}{t}\right) \right] \left[\int_0^1 \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta} d\bar{\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Внеся (4.3) в (4.1) и пользуясь известными свойствами интеграла типа Коши, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{P}{8\pi D} e^{i\beta} \left[\frac{r_0^2}{2\zeta \omega'(\zeta)} - \int_0^{\bar{\zeta}} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\zeta} d\bar{\zeta} + \lambda \int_0^{\zeta} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt \right]_{\zeta \rightarrow t_0}, \quad (4.4)$$

где

$$U(t) = \frac{U^*(t)}{1 - \frac{\alpha_k}{\pi} (a_k - t)}, \quad (4.5)$$

$$U^*(t) = \left(1 + \frac{1}{\lambda} e^{-2i\beta} \right) V(t) \left[\int_0^t \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\bar{t}} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right], \quad (4.6)$$

$$V(t) = \omega'(t) (a_k - t)^{1 - \frac{\alpha_k}{\pi}},$$

причем функция $V(t)$ и ее производные непрерывны в точке a_k .

В силу (4.2) и (4.6) $U^*(a_k) = 0$. Первая же производная функции $U^*(t)$ непрерывна в окрестности a_k за исключением точки a_k^+ , где она претерпевает разрыв конечной величины. При наличии указанных условий функция $U(t)$ в окрестности a_k (включая a_k) будет удовлетворять условию $h(\mu)$ [4], причем $\mu = \frac{\alpha_k}{\pi}$.

Благодаря этому

$$\lim_{\zeta \rightarrow a_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt = B_k, \quad (4.7)$$

где B_k — конечное число.

Имея в виду также, что согласно (2.10) и (4.2)

$$\omega'(a_k) \rightarrow \infty \quad (0 < \alpha_k < \pi)$$

и

$$\lambda \int_0^{a_k} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \int_0^{\bar{a}_k} \frac{\bar{\omega}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} = 0, \quad (4.8)$$

из (4.4), полагая $t_0 = a_k$, получим окончательно

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_{A_k} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < \alpha_k < \pi. \quad (4.9)$$

Таким образом угол наклона упругой поверхности на вершине угла $0 < \alpha_k < \pi$ равен нулю.

5. Поведение изгибающих и крутящих моментов в угловых точках плиты. Внеся (4.3) в (2.5), имеем:

$$M_1 - M_2 + 2i H_1 = \frac{P(1-\sigma)}{4\pi} \left\{ \frac{r_0^2}{2} \left[\frac{1}{\zeta^2 [\omega'(\zeta)]^2} + \frac{\omega''(\zeta)}{\zeta [\omega'(\zeta)]^3} \right] - \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta \omega'(\zeta)} - \right. \\ \left. - \lambda \frac{\omega(\zeta)}{\zeta \omega'(\zeta)} + \lambda \frac{\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{t-\zeta} dt - \frac{\lambda}{[\omega'(\zeta)]^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right\}. \quad (5.1)$$

В силу того, что $U(t)$ удовлетворяет условию $h(\alpha_k/\pi)$ при $0 < \alpha_k < \pi$, для окрестности a_k имеем оценку [4],

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right| < \frac{\text{const}}{|a_k - \zeta|^{1 - \frac{\alpha_k}{\pi}}}. \quad (5.2)$$

Тогда, имея в виду также (2.10), получим:

$$\lim_{\zeta \rightarrow a_k} \left[\frac{1}{(\omega'(\zeta))^2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{U(t)}{(t-\zeta)^2} dt \right] \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

$$(0 < \alpha_k < \pi).$$

Далее, имея в виду (2.10), (4.7) и (5.3), из (5.1) получим:

$$(M_1 - M_2 + 2i H_1)_{A_k} = \frac{P(1-\sigma)(\pi - \alpha_k)}{8\pi^2 [V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right] \lim_{\zeta \rightarrow a_k} (a_k - \zeta)^{1 - \frac{2\alpha_k}{\pi}}. \quad (5.4)$$

где $V(a_k) \neq 0$.

Учитывая также, что согласно (2.4) на контуре $M_1 + M_2 = 0$, из (5.4) имеем:

$$\text{при } 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$$

$$(M_1)_{A_k} = (M_2)_{A_k} = (H_1)_{A_k} = (H_2)_{A_k} = 0,$$

$$\text{при } \alpha_k = \frac{\pi}{2}$$

$$(M_1 + iH_1)_{A_k} = \frac{P(1-\sigma)}{32\pi [V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right],$$

$$\text{при } \frac{\pi}{2} < \alpha_k < \pi$$

$$(M_1 + iH_1)_{A_k} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, изгибающие и крутящие моменты на вершине острого угла обращаются в нуль, на вершине прямого угла принимают конечное значение, а на вершине тупого угла становятся бесконечно большими.

Легко проверить, что указанные величины на вершине входящего угла ($\pi < \alpha_k < 2\pi$) также стремятся к бесконечности.

Крутящий момент на боковой поверхности плиты определяется формулой

$$H = -\frac{i}{4} [e^{2i\beta}(M_1 - M_2 + 2iH_1) - e^{-2i\beta}(M_1 - M_2 - 2iH_1)],$$

из которой, имея в виду результаты п. 5, получим:

$$(H)_{\Lambda_k} = 0 \quad \text{при } 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}.$$

Это показывает, что опорная сосредоточенная реакция, заменяющая крутящие моменты, на вершине острого угла равна нулю.

$$\text{При } \alpha_k = \frac{\pi}{2}$$

$$(H)_{\Lambda_k}^{\text{лев.}} = -(H)_{\Lambda_k}^{\text{прав.}} = \frac{P(1-\sigma)}{32\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{ie^{2i\beta_k^{\text{прав.}}}}{[V(a_k)]^2} \left(\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right) \right]. \quad (5.5)$$

В этом случае заменяющая сосредоточенная опорная реакция будет:

$$(Q)_{\Lambda_k} = 2(H)_{\Lambda_k}^{\text{прав.}}. \quad (5.6)$$

$$\text{При } \frac{\pi}{2} < \alpha_k < 2\pi$$

$$(H)_{\Lambda_k}^{\text{лев.}} \rightarrow \infty, \quad (H)_{\Lambda_k}^{\text{прав.}} \rightarrow \infty.$$

Определим результирующий крутящий момент, действующий на произвольном отрезке АВ какой-либо стороны многоугольника.

Имеем по известной формуле

$$H = D(1-\sigma) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right);$$

можно показать, что

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s},$$

где ρ — радиус кривизны кривой s .

Тогда

$$H = D(1-\sigma) \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} \right],$$

откуда

$$\int_A^B H ds = D(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_B - \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_A \right] - D(1-\sigma) \int_A^B \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial s} ds.$$

Последний интеграл на контуре, при $w = 0$, обращается в нуль. Поэтому

$$\int_{\lambda}^B H ds = D(1-\sigma) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_B - \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_\lambda \right]. \quad (5.7)$$

Из этой формулы следует, что при $0 < \alpha_k < \pi$ результирующий крутящий момент вблизи угловой точки (слева и справа от вершины) стремится к нулю, а при $\pi < \alpha_k < 2\pi$ он стремится к бесконечности.

Из той же формулы следует, что если каждый из двух соседних внутренних углов многоугольника меньше π , то крутящие моменты действующие по общей стороне этих углов, статически эквивалентны нулю.

6. Проверка найденного решения. Найденное решение удовлетворяет на контуре многоугольника условиям $w_1 = 0$ и $\nabla^2 w_1 = 0$. Однако необходимо отметить, что для угловых точек полигональной плиты условие $\nabla^2 w_1 = 0$ не выражает равенства нулю изгибающего момента, так как в этих точках радиус кривизны обращается в нуль. При $w_1 = 0$ на контуре, изгибающий момент на контуре выражается формулой

$$M_\nu = -D \left[\nabla^2 w_1 - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right]. \quad (6.1)$$

Поэтому для угловых точек следовало бы использовать условие

$$\left(\nabla^2 w_1 - \frac{1-\sigma}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right)_{\rho \rightarrow 0} = 0. \quad (6.2)$$

Но тогда задача становится весьма сложной и при решении ее могут возникнуть серьезные затруднения математического характера. Поэтому мы заранее отказались от точного удовлетворения контурных условий и основывались на условиях (1.3).

Теперь проверим, удовлетворяет ли найденное решение условию (6.2). Для этого, очевидно, надо проверить условие

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) = 0. \quad (6.3)$$

Заменим угол α_k дугой окружности малого радиуса ρ . Точку пересечения этой дуги с биссектрисой угла α_k обозначим через z^* . Далее, найдем значение выражения $\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu}$ в указанной точке z^* , и, затем, приблизим эту точку по биссектрисе угла α_k к вершине многоугольника, полагая при этом $0 < \alpha_k < \pi$.

Опуская промежуточные выкладки, напомним окончательный результат

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) = - \frac{P(\pi - \alpha_k)}{16\pi^2 D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_k e^{i\delta}}{[V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\lambda B_k \right] \lim_{\zeta^* \rightarrow a_k} (a_k - \zeta)^{1 - \frac{2\alpha_k}{\pi}} \right\}, \quad (6.4)$$

где δ — угол между биссектрисой угла α_k и осью ox , ζ^* — точка внутри единичного круга, соответствующая точке z^* , а

$$c_k = - \frac{e^{i\delta}}{\sin \frac{\alpha_k}{2}} \left(1 - \sin \frac{\alpha_k}{2} \right).$$

Из (6.4) следует:

при $0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) = 0,$$

при $\alpha_k = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right)$ — принимает конечное значение, и при $\frac{\pi}{2} < \alpha_k < \pi$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right) \rightarrow \infty.$$

Таким образом, найденное решение дает точный результат, когда все внутренние углы многоугольника острые, т. е. в случае треугольника с острыми углами.

Если имеется в многоугольнике прямой угол, то в вершине его возникает изгибающий момент, величина которого, согласно (6.1) и (6.4), равна:

$$(M_v)_{A_k} = \frac{(V\sqrt{2} - 1)P(1 - \sigma)}{32\pi D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{2i\delta}}{[V(a_k)]^2} \left[\frac{r_0^2}{a_k} + 2\lambda B_k \right] \right\}. \quad (6.5)$$

Изолированный изгибающий момент (6.5) не может оказать никакого влияния на плиту. Поэтому условия $w_1 = 0$, $\nabla^2 w_1 = 0$ дают точное решение и в случае прямого угла.

В случае тупого угла

$$(M_v)_{A_k} \rightarrow \infty, \quad (H)_{A_k}^{\text{лев.}} \rightarrow \infty, \quad (H)_{A_k}^{\text{прав.}} \rightarrow \infty.$$

Однако легко проверить, что равнодействующая изгибающих моментов, распределенных по дуге окружности малого радиуса ρ , описанной внутри тупого угла, стремится к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Кроме того стремится к нулю и равнодействующая крутящих моментов, действующих в окрестности угловой точки (слева и справа). Поэтому можно полагать, что моменты $(M_v)_{\Lambda_k}$, $(H)_{\Lambda_k}^{\text{асп.}}$ и $(H)_{\Lambda_k}^{\text{нрп.}}$ не окажут существенного влияния на общую работу плиты, если только число тупых углов невелико. Если, например, увеличить число сторон правильного многоугольника до бесконечности, т. е. перейти к кругу, то условия $w_1 = 0$, $\nabla^2 w_1 = 0$ дадут погрешность для расчетных величин в пределах 20–30%.

Вопрос применения этих условий к полигональным плитам с тупыми углами требует дополнительных исследований. Большую пользу для выяснения этого вопроса могут оказать эксперименты.

7. *Представление отображающей функции в виде ряда. Случай правильного многоугольника.* Приводим некоторые результаты, имеющие практическое значение.

Пусть отображающая функция представлена в виде ряда

$$z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k. \quad (7.1)$$

Тогда, согласно (1.21) и (1.14) значение прогиба в центре нагруженного круга (начало координат) будет:

$$w(0,0) = \frac{P}{16\pi D} \left[2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k} - \frac{r_0^2}{2} \ln \frac{|c_1|^2}{r_0^2} - \frac{5}{4} r_0^2 \right]. \quad (7.2)$$

Прогиб под сосредоточенной силой P будет:

$$w(0,0) = \frac{P}{8\pi D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k}, \quad (7.3)$$

где c_k — коэффициенты разложения отображающей функции в ряд Тейлора.

В случае правильного многоугольника (центр многоугольника принят за начало координат, а ось ox проходит через одну из вершин многоугольника)

$$\omega(\zeta) = c \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(1-\zeta^n)^{\frac{2}{n}}} = c \left[\zeta + \frac{2\zeta^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{2(n+2)\zeta^{2n+1}}{n^2(2n+1) \cdot 2!} + \right. \\ \left. + \frac{2(n+2)(2n+2)\zeta^{3n+1}}{n^3(3n+1) \cdot 3!} + \dots \right], \quad (7.4)$$

$$c = \frac{R}{\int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^n)^{\frac{2}{n}}}} = \frac{R n \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)}, \quad (7.5)$$

где n — число сторон многоугольника, R — радиус окружности, описанной вокруг правильного многоугольника, Γ — гамма функция.

На основе (7.5) составлена таблица 1 для значений $\frac{c}{R}$.

Таблица 1

n	3	4	5	6	8	12
$\frac{c}{R}$	0,5661	0,7628	0,8514	0,8985	0,9442	0,9759

Внося (7.4) и (7.2), получим:

$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D} \left[1 + \frac{4}{n^2(n+1)^2} + \frac{4(n+2)^2}{n^4(2n+1)^2(2!)^2} + \right. \\ \left. + \frac{4(n+2)^2(2n+2)^2}{n^6(3n+1)^2(3!)^2} + \dots \right] - \frac{Pr_0^2}{16\pi D} \left(\ln \frac{c}{R} + \frac{5}{4} \right). \quad (7.6)$$

Для сечений, проходящих через центр нагруженного круга (начало координат), согласно (2.7)–(2.9) и (7.4), имеем:

$$M(0,0) = M_1(0,0) = M_2(0,0) = \frac{P(1+\sigma)}{8\pi} \left(1 + 2 \ln \frac{c}{r_0} \right), \quad (7.7)$$

$$H_1(0,0) = H_2(0,0) = 0,$$

$$N_1(0,0) = N_2(0,0) = 0.$$

Перерезывающая сила, действующая в срединных точках сторон многоугольника, равна:

$$N = -\frac{P}{2\pi c} 2^{\frac{2}{n}}. \quad (7.8)$$

Вычисления показывают, что при $n \geq 3$ можно ограничиться первым членом ряда (7.6). Погрешность, допущенная при этом для $w(0,0)$, не превышает 0,9%.

Таким образом, взамен (7.6) можно пользоваться формулой

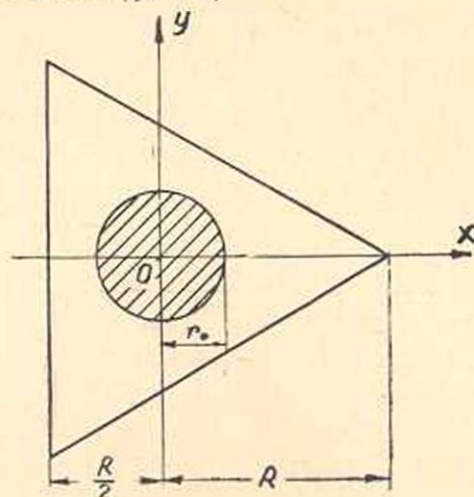
$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D} - \frac{Pr_0^2}{16\pi D} \left(\ln \frac{c}{r_0} + \frac{5}{4} \right). \quad (7.9)$$

Прогиб в центре многоугольника в случае сосредоточенной силы P , приложенной в этом же центре, будет:

$$w(0,0) = \frac{Pc^2}{8\pi D}. \quad (7.10)$$

На основе формул (7.6) и (7.7) составлены таблицы 2, 3 и 4, при $\sigma = 0,3$.

Треугольная плита (фиг. 4).

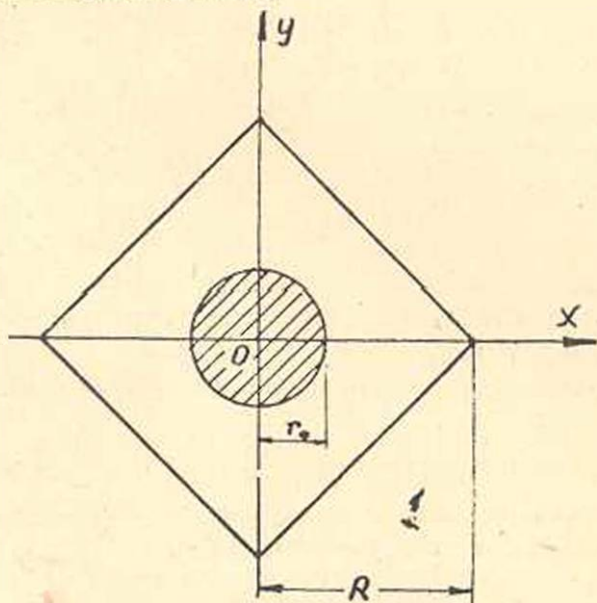


Фиг. 4.

Таблица 2

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	3	2
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,01286	0,01286	0,01285	0,01227	0,01104	0,01029	0,00823	0,00603
$\frac{1}{P} M(0,0)$	∞	0,7071	0,4690	0,2310	0,1593	0,1362	0,1065	0,0645

Квадратная плита (фиг. 5).

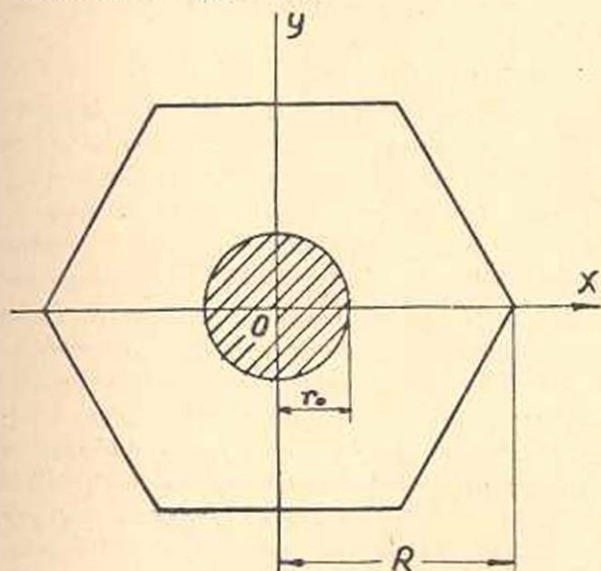


Фиг. 5

Таблица 3

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	3	$\sqrt{2}$
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,02320	0,02320	0,02319	0,02255	0,02114	0,02026	0,01488	0,01001
$\frac{1}{P} M(0,0)$	∞	0,7380	0,4999	0,2618	0,1901	0,1658	0,0946	0,0596

Шестиугольная плита (фиг. 6.).



Фиг. 6.

Таблица 4

$\frac{R}{r_0}$	∞	1000	100	10	5	4	2	$\frac{2}{3} \sqrt{3}$
$\frac{Dw(0,0)}{PR^2}$	0,03218	0,03218	0,03217	0,03149	0,2999	0,02904	0,02305	0,01299
$\frac{1}{P} M(0,0)$	∞	0,7553	0,5171	0,2789	0,2072	0,1841	0,1124	0,0556

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 19-IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сапонджян О. М. Частное решение дифференциального уравнения упругой поверхности тонкой плиты. Сборник трудов Ереванского политехнического института, № 3, 1948.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, Л., 1935.
3. Джанелидзе Г. Ю. Определение перерезывающих сил при изгибе опертых тонких пластинок. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946.

Օ. Մ. Սափոնճյան

ԱԶԱՏ ՇԵՆՎԱԾ ՊՈԼԻԳՈՆԱԼ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է եզրագծով ազատ շենված պոլիգոնալ (բազմանկյուն) սալի ծոման խնդրի ընդհանուր լուծումը, երբ սալին կիրառված արտաքին ուժերն ուղղահայաց են սալի միջին հարթությանը և հավասարաչափ բաշխված շրջանի մակերեսի վրա: Որպես մասնավոր դեպք հետազոտված է կանոնավոր բազմանկյուն սալի ծոման խնդիրը:

Խնդիրը ընդհանուր ձևով լուծելիս սալի ծոման դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրալը ներկայացված է կոմպլեքս փոփոխականի անալիտիկ ֆունկցիաների միջոցով, ըստ է. Գուրսայի բանաձևի: Շրջանի մակերեսի վրա հավասարաչափ բաշխված ուժերի դեպքում, ինչպես ցույց է տրված [1] աշխատության մեջ, դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը կունենա (1.1) և (1.2) տեսքը: Այդպես մասնակցող $\varphi(z)$ և $\chi(z)$ անալիտիկ ֆունկցիաները որոշված են սալի եզրային պայմաններից, օգտագործելով Ն. Ի. Մուսխելիշվիլու մշակած կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդը [2]:

Հոդվածում րերվում է նշված խնդրի ընդհանուր վերջնական լուծումը, (1.19) և (1.20) բանաձևերի տեսքով, որոնց մեջ մասնակցում է միավոր շրջանի տիրույթը բազմանկյան ներսի տիրույթի վրա կոնֆորմ կերպով արտապատկերող ֆունկցիան: Ելնելով Կրիստոֆֆել-Շվարցի արտապատկերման ֆունկցիայից ցույց է տրված, որ սալի հատվածքներում դործող ներքին ճիգերն անընդհատ են սալի տիրույթում, ընդհուպ մինչև եզրագիծը, բացառությամբ, կարող է պատահել, միայն անկյունային կետերից: Հոդվածում ուսումնասիրված է ճիգերի վարքը անկյունային կետերում:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Е. А. Александрян

О кручении некоторых призматических стержней

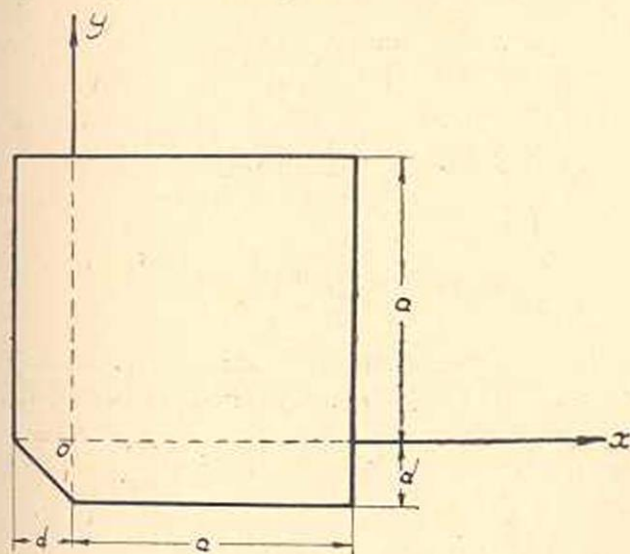
В работе приводится точное решение задачи о кручении некоторых призматических стержней полигонального поперечного сечения с вырезами под углом 45° .

При решении задачи применением метода введения вспомогательных функций [1] решение уравнений задачи с частными производными сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечных регулярных и вполне регулярных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют жесткость при кручении в зависимости от геометрических параметров сечения.

§ 1. Кручение стержней с поперечным сечением в виде квадрата с вырезом под углом 45° (фиг. 1).

1. *Постановка задачи.* Функция напряжений $U(x, y)$ при кручении удовлетворяет уравнению Пуассона



Фиг. 1

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2, \quad (1.1)$$

в области сечения и принимает значение, равное нулю на контуре. Функцию $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{при } x \leq 0, \quad y \leq 0, \\ U_2(x, y) & \text{при } x \geq 0, \quad y \leq 0, \\ U_3(x, y) & \text{при } x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ U_4(x, y) & \text{при } x \leq 0, \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Тогда для непрерывности и однозначности решения достаточно удовлетворить следующим условиям:

$$\nabla^2 U_i = -2 \quad (1.1')$$

$$\begin{cases} U_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ на контуре сечения.} \\ U_1(0, y) = U_2(0, y) \\ U_2(x, 0) = U_3(x, 0) \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=0} \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial y} \right)_{y=0} \end{cases} \quad (1.4)$$

Функции $U_i = (x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) ищем в виде:

$$U_1(x, y) = -\frac{1}{2}(x+y)(x+y+d) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(x+d) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(x+d) \right\} + \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(y+d) \sin \frac{k\pi x}{d} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(y+d) \right] \right\}, \quad (1.5)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (1.6)$$

$$U_3(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (1.7)$$

2. *Решение уравнений задачи.* Согласно условию (1.1') для неизвестных функций $f_k(y)$ и $\phi_k(y)$ получаем следующие уравнения:

$$f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 f_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{2k\pi}{a^2} \left[-\frac{1}{2}(y+d)y + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \sin \frac{p\pi y}{d} \right], \quad (1.8)$$

$$\psi_k(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \psi_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{2k\pi}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(0) \sin \frac{p\pi y}{a}. \quad (1.9)$$

Решения этих уравнений будут:

$$f_k(y) = F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] - \frac{1}{k\pi} y(y+d) + \frac{ad}{k^2\pi^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} - \frac{2a^2}{k^2\pi^3} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}\right) + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \left[\left(\frac{d}{a}\right)^2 k \sin \frac{p\pi y}{d} - \left(\frac{d}{a}\right) p \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right] \frac{a^2}{a^2 p^2 + k^2 d^2}. \quad (1.10)$$

$$\psi_k(y) = M_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(0)}{p^2 + k^2} \left[k \sin \frac{p\pi y}{2} - p \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} \right]. \quad (1.11)$$

3. *Определение коэффициентов интегрирования.* Из выражений (1.10) и (1.11) исключим коэффициенты F_k , L_k , M_k и N_k ; тогда, обозначая

$$f_k(0) = \psi_k(0) = \delta_k, \quad (1.12)$$

получим

$$f_k(y) = \left\{ \delta_k + \frac{2a^2}{k^2\pi^3} - \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y+d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} - \left\{ \frac{2a^2}{k^3\pi^3} - \frac{4a^2}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{k\pi} y(y+d) + \frac{2k}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} A_p \operatorname{sh} p\pi \frac{\sin \frac{p\pi y}{d}}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2}. \quad (1.13)$$

$$\psi_k(y) = \left\{ \delta_k - \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (a-y)}{\operatorname{sh} k\pi} + \frac{4a^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} k\pi} \right) + \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta_p}{p^2 + k^2} \sin \frac{p\pi y}{a}. \quad (1.14)$$

Для определения неизвестных постоянных δ_k и A_k воспользуемся условиями (1.4). В результате получим совокупность трех бесконечных систем линейных уравнений в виде:

$$\begin{aligned}
 & A_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\pi = \\
 & = -\frac{4d^2}{\pi^3(2k-1)^3} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \left(2 \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{2d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} \right) - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{d} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_p^{2,4,6} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + (2k-1)^2}, \\
 & A_{2k} \operatorname{sh} 2k\pi = -\frac{d^2}{2k^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{a}{d} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\
 & + \frac{4}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_p^{1,3,5} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + 4k^2} \quad (1.15) \\
 & \delta_k = \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \frac{4a^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right] - \right. \\
 & - \frac{2a^2}{k^3 \pi^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2} + \frac{ad}{k^2 \pi^2} \left. \right\} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \delta_p}{p^2 + k^2} - \\
 & - \frac{2}{\pi} \left(\frac{d}{a} \right) \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p A_p \operatorname{sh} p \pi}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2}.
 \end{aligned}$$

Введя новые обозначения

$$\begin{aligned}
 & k \delta_k = z_{2k-1}, \\
 & -(2k-1) A_{2k-1} \operatorname{sh}(2k-1)\pi = z_{4k-2}, \\
 & -2k A_{2k} \operatorname{sh} 2k\pi = z_{4k}, \quad (1.16)
 \end{aligned}$$

совокупность бесконечных систем (1.15) можно привести к одной системе

$$z_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{\infty} C_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{2k-1} &= k \cdot b_k = \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \frac{4a^2}{k^2 \pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right] - \frac{2a^2}{k^2 \pi^2} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \frac{ad}{k\pi^2} \right\}, \\ \alpha_{4k-2} &= \frac{4d^2}{\pi^2 (2k-1)^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \left\{ 2 \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi a}{2d} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} \right\}, \\ \alpha_{4k} &= \frac{d^2}{k\pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi}, \\ C_{2k-1, 2p-1} &= \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + k^2}, \\ C_{2k-1, 2p} &= \frac{2k}{\pi} \frac{d}{a} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2}, \\ C_{4k-2, 2p-1} &= \\ &= \frac{2(2k-1)}{\pi} \cdot \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \cdot \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2}, \\ C_{4k-2, 2p} &= \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \cdot \frac{1}{4p^2 + (2k-1)^2}, \\ C_{4k, 2p-1} &= \frac{4k}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \cdot \frac{1}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2}, \\ C_{4k, 2p} &= \frac{8k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \cdot \frac{1}{(2p-1)^2 + 4k^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Докажем регулярность системы (1.17).

Пусть $i = 2k - 1$,

тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{2k-1,j}| = \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} + \right. \\ \left. + \frac{d}{a} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2 \left(\frac{d}{a} \right)^2} \right\} = 1 - \frac{1}{k\pi} \frac{\left(1 + \frac{a}{d} \right)}{\operatorname{cth} \frac{k\pi d}{a} + \operatorname{cth} k\pi} \leq 1. \quad (1.19)$$

Пусть теперь $i = 4k - 2$,

тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{4k-2,j}| = \\ = \frac{2(2k-1)}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\ + \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2 + (2k-1)^2} = \\ = 1 - \frac{1}{\pi(2k-1)} \frac{2 + \frac{d}{a}}{\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi a}{d} + \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi}{2}} \leq 1. \quad (1.20)$$

Пусть, наконец, $i = 4k$, тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{4k,j}| = \frac{4k}{\pi} \frac{a}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + 4k^2 \left(\frac{a}{d} \right)^2} + \\ + \frac{8k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 + 4k^2} = 1 - \\ - \frac{1}{2k\pi} \frac{\frac{d}{a}}{\operatorname{cth} \frac{2k\pi a}{d} + \operatorname{th} k\pi} \leq 1. \quad (1.21)$$

Согласно неравенствам (3.8), (3.9) и (3.10) имеем:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |C_{ij}| \leq 1 \quad (1.22)$$

при всяком $i \geq 1$, т. е. система (3.6) регулярна.

Из теории регулярных бесконечных систем известно [2], что если $|z_i| \leq K\rho_i$, где z_i — свободные члены, K — положительная постоянная, а $\rho_i = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} |C_{ij}|$, то регулярная система уравнений

имеет единственное ограниченное решение $|z_i| \leq K$.

В нашей системе применением лимитант для неизвестных коэффициентов z_i получены следующие оценки:

$$\begin{aligned} 0,19034a^2 &= \bar{z}_1 < z_1 < \bar{z}_1 = 0,21019a^2, \\ 0,02931a^2 &= \bar{z}_2 < z_2 < \bar{z}_2 = 0,06515a^2, \\ 0,03411a^2 &= \bar{z}_3 < z_3 < \bar{z}_3 = 0,06927a^2, \\ 0,02468a^2 &= \bar{z}_4 < z_4 < \bar{z}_4 = 0,08316a^2, \\ 0 < z_k &\leq 0,07434a^2, \\ k &= 5, 6, 7, \dots \end{aligned} \quad (1.23)$$

4. *Определение функции напряжений.* Пользуясь соотношениями (1.2), (1.5), (1.6), (1.7), (1.13), (1.14) и обозначениями (1.16), для функции напряжений получим:

$$\begin{aligned} U(x, y) = & -\frac{1}{2}(x+y)(x+y+d) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{2k}}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x+d) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ & - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (x+d) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y+d) \sin \frac{k\pi x}{d} - \\ & \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (y+d) \right\}, \\ & x \leq 0, y \leq 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} U(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z_{2k-1}}{k} + \frac{2a^2}{k^2\pi^2} - \frac{4a^2}{k^3\pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{a} (y+d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} - \\ & - \left[\frac{2a^2}{k^2\pi^2} - \frac{4a^2}{k^3\pi^2} [1 + (-1)^{k+1}] \right] \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{k\pi} y(y+d) - \end{aligned}$$

$$-\frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p}}{p} \cdot \frac{\sin \frac{p\pi y}{d}}{p^2 + \kappa^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2} \left\{ \sin \frac{\kappa\pi x}{a}, \quad (1.25) \right.$$

$$x \geq 0; \quad y \leq 0.$$

$$U(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{z_{2\kappa-1}}{\kappa} + \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{a} (a-y)}{\operatorname{sh} \kappa\pi} + \right.$$

$$+ \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \kappa\pi} \right) +$$

$$+ \frac{2\kappa}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p-1}}{p(p^2 + \kappa^2)} \sin \frac{p\pi y}{a} \left. \right\} \sin \frac{\kappa\pi x}{a}, \quad (1.26)$$

$$x > 0; y \geq 0.$$

$$U(x, y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{z_{2\kappa-1}}{\kappa} + \frac{2a^2}{\kappa^3\pi^3} - \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{a} (x+d)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d}{a}} - \right.$$

$$- \left[\frac{2a^2}{\kappa^3\pi^3} - \frac{4a^2}{\kappa^3\pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \right] \left(1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d}{a}} \right) - \frac{1}{\kappa\pi} x(x+d) -$$

$$- \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z_{2p} \cdot \sin \frac{p\pi x}{d}}{p \left[p^2 + \kappa^2 \left(\frac{d}{a}\right)^2 \right]} \left. \right\} \sin \frac{\kappa\pi y}{a}. \quad (1.27)$$

$$x \leq 0, y \geq 0.$$

5. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении определяется формулой

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy, \quad (1.28)$$

где Ω — область поперечного сечения стержня, G — модуль сдвига.

Подставляя в (1.28) значение функции напряжений из (1.25)–(1.27) и произведя интегрирование, получим:

$$C = G \left\{ \frac{a^4}{3} + \frac{a^2 d}{3} + \frac{a d^3}{6} + \frac{d^4}{12} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{96}{\pi^2} a^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} - \frac{64}{\pi^2} a^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \\
& + \frac{8a^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k-1}}{k^3} \left(\operatorname{th} \frac{k\pi d}{2a} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right) + \\
& + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2} + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_k^{2,4,6} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \\
& + \frac{8d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{z_{2k}}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{2d}. \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Подставляя сюда коэффициенты z_k из (1.23), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости C .

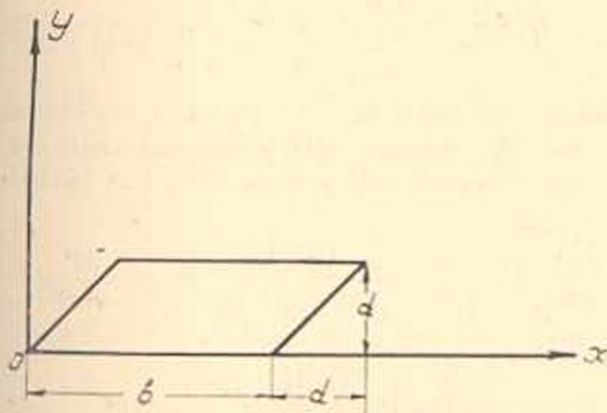
В таблице 1 приведены значения жесткости C при различных отношениях $\frac{d}{a}$.

Таблица 1

$\frac{d}{a}$	0	1/3	1	3	∞
$\bar{C}$	0,141 a^4	0,377 a^4	1,226 a^4	13,114 a^4	0,026 d^4
$\bar{C}$	0,141 a^4	0,412 a^4	1,493 a^4	14,161 a^4	0,026 d^4
C	0,141 a^4	0,395 a^4	1,359 a^4	13,638 a^4	0,026 d^4

Если принять за расчетную формулу жесткости $C = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}$, то погрешность будет не более 10%.

§ 2. Кручение стержня с сечением в виде параллелограмма (фиг. 2).



Фиг. 2

Функцию напряжений $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x < b \\ U_3(x, y) & b \leq x \leq b + d. \end{cases} \quad (2.1)$$

Вспомогательные функции $U_i(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$) должны удовлетворять условиям:

$$\nabla^2 U_i = -2 \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} U_i(x, y) = 0 & \text{на контуре сечения} \\ U_1(d, y) = U_2(d, y) \\ U_2(b, y) = U_3(b, y) \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x}\right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=d} \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}\right)_{x=b} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial x}\right)_{x=b}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Положим

$$U_1(x, y) = y(x - y) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi x}{d} \right], \quad (2.4)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} U_3(x, y) = (y - d)(x - b - y) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (y - d) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y - d) \cdot \sin \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где в силу (2.2)

$$f_k(x) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} + \frac{4d^2}{k^2 \pi^2} [1 + (-1)^{k+1}]. \quad (2.7)$$

Аналогичным образом, как это сделано в первом параграфе работы, определение постоянных интегрирования сводится к решению совокупности двух бесконечных систем линейных уравнений.

$$\begin{aligned} A_k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} + \frac{(-1)^k \operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} B_k = \frac{2d^2}{k^2 \pi^2} (-1)^k - \\ - \frac{2}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + k^2} A_p \operatorname{sh} p\pi, \end{aligned}$$

$$B_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \frac{(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} A_k = \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^2} (-1)^k -$$

$$- \frac{2}{\pi} (-1)^k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p}{p^2 + \kappa^2} B_p \operatorname{sh} p \pi. \quad (2.8)$$

Вычтя из первой системы вторую и введя обозначения

$$\kappa(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi A_k = A_k^*, \quad (2.9)$$

$$\kappa(-1)^k \operatorname{sh} \kappa \pi B_k = B_k^*,$$

получим:

$$A_k^* - B_k^* = - \frac{2\kappa}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^* - B_p^*}{\kappa^2 + p^2}. \quad (2.10)$$

Система (2.10) вполне регулярна, так как

$$\frac{2\kappa}{\pi} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2 + p^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \kappa \pi - \frac{1}{\kappa \pi}}{\operatorname{cth} \kappa \pi - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} < 1 - \theta, \quad \theta > 0. \quad (2.11)$$

Следовательно, система (2.10) имеет единственное ограниченное решение, равное $A_k^* - B_k^* = 0$.

Для определения коэффициентов $A_k^* = B_k^*$ получим бесконечную систему:

$$A_k^* = \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^2} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) + \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} -$$

$$- \frac{2\kappa}{d} \frac{1}{\operatorname{cth} \kappa \pi + \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d) + \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^*}{p^2 + \kappa^2}, \quad (2.12)$$

которая, согласно неравенству (2.11), вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрим случай ромба, т. е. когда $b = a\sqrt{2}$. Для этого случая имеют место неравенства

$$\begin{aligned}\bar{A}_1^* &= 0,09301d^2 \leq A_1^* \leq 0,11304d^2 = \bar{A}_1^*, \\ \bar{A}_2^* &= 0,02345d^2 \leq A_2^* \leq 0,03681d^2 = \bar{A}_2^*, \\ \bar{A}_3^* &= 0,01723d^2 \leq A_3^* \leq 0,02550d^2 = \bar{A}_3^*, \\ \bar{A}_k^* &= 0 \leq A_k^* \leq 0,02519d^2 = \bar{A}_k^*, \\ & \quad k = 4, 5, 6, \dots\end{aligned}\quad (2.13)$$

где $\bar{A}_k^*$ и $\bar{A}_k$ — соответственно значения с недостатком и с избытком неизвестных A_k .

Для функции напряжений получим следующие выражения:

$$U(x, y) = y(x - y) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \cdot \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \quad (2.14)$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d} \left\{ \frac{A_k^* (-1)^k}{k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - d)} \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b - x) - \right. \right. \\ \left. \left. - (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - d) \right] + \frac{4d^2}{k^3 \pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\}, \quad (2.15)$$

$$d \leq x \leq b$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \sin \frac{k\pi}{d} (y - d) - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (y - d) \sin \frac{k\pi}{d} (x - b - d) \right\}, \quad (2.16)$$

$$b \leq x \leq b + d.$$

Жесткость при кручении выразится формулой

$$C = \frac{G}{3} \left\{ bd^3 - \frac{d^4}{2} - \frac{24d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{A_k^*}{k^3} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d) - \right. \\ \left. - \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} A_k^* \left[\operatorname{cth} k\pi + \frac{(-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} k\pi} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Подставляя найденные значения A_k^* из (2.13) в (2.17), при $b=d\sqrt{2}$ для жесткости получим следующие оценки:

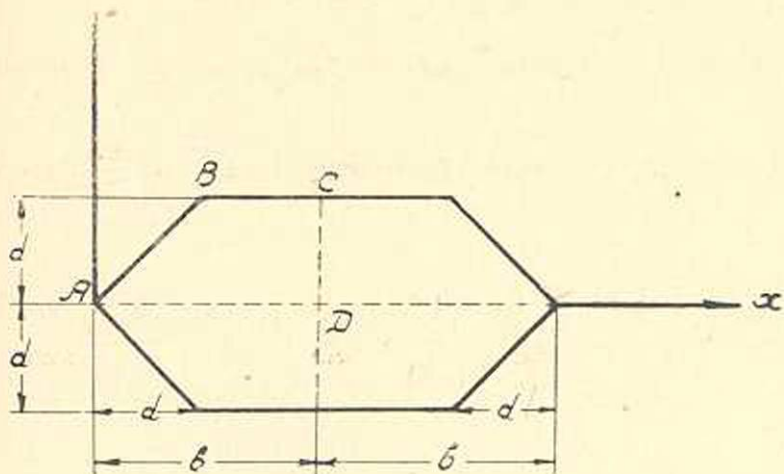
$$\bar{C} = 0,20302 Gd^4 \leq C \leq 0,22097 Gd^4 = \bar{C}. \quad (2.18)$$

За расчетную формулу для жесткости примем

$$C = \frac{\bar{C} + \bar{C}}{2}, \quad (2.19)$$

при этом погрешность будет не более 5% .

§ 3. Кручение стержней стрелковидного поперечного сечения (фиг. 3).



Фиг. 3

Вследствие симметрии достаточно найти функцию напряжений $U(x, y)$ только для части области сечения, т. е. для ABCD.

Функцию $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x \leq b. \end{cases} \quad (3.1)$$

При этом для $U_1(x, y)$ должны выполняться следующие условия:

$$\nabla^2 U_1 = -2$$

$$U_1(x, y) = 0 \quad \text{на контуре}$$

$$U_1(d, y) = U_2(d, y)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=d} \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=b} = 0.$$

Положим

$$U_1(x, y) = x(y - x) + \sum_k^{1,3,5} A_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{2d} \cos \frac{k\pi x}{2d} \right] + \\ + \sum_k^{1,3,5} B_k \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d - x) \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d - y) \cos \frac{k\pi x}{2d} \right], \quad (3.3)$$

$$U_2(x, y) = \sum_k^{1,3,5} f_k(x) \cos \frac{k\pi y}{2d}, \quad (3.4)$$

где $f_k(x) = C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} + D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{2d} + \frac{32d^2}{k^3\pi^3} (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$ (3.5)

Пользуясь условиями (3.2) и (3.5), исключим коэффициенты

B_k , C_k и D_k , тогда, введя обозначение $(-1)^{\frac{k-1}{2}} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2} A_k = A_k^*$, получим:

$$A_k^* = \frac{16d^2}{k^2\pi^2} \frac{1 + 2\operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} + \frac{8d^2}{k\pi^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (b - 2d)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{2d}} + \\ + \frac{64d^2}{\pi^4} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p(p^2 + k^2)} - \\ - \frac{4k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{\pi k}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{A_p^*}{p^2 + k^2}. \quad (3.6)$$

Система (3.6) вполне регулярна, так как

$$\frac{4k}{\pi} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d)} \sum_p^{1,3,5} \frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{1}{1 + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b - d) \cdot \operatorname{cth} \frac{k\pi}{2}} < 1 - \theta,$$

где $\theta > 0$;

следовательно, она однозначно определяет коэффициенты A_k^* .

Функция напряжений будет иметь вид

$$U(x, y) = x(y - x) +$$

$$+ \sum_k^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}} A_k^*}{k \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{2d} \cos \frac{k\pi y}{2d} - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{2d} \cos \frac{k\pi x}{2d} \right] -$$

$$- \frac{8d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^2 \operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \left[\frac{2}{k\pi} - (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d-x) \cos \frac{k\pi y}{2d} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi}{2d} (d-y) \cos \frac{k\pi x}{2d} \right], \quad (3.7)$$

$$0 \leq x \leq d$$

$$U(x, y) = \sum_k^{1,3,5} \cos \frac{k\pi y}{2d} \left\{ \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} A_k^* \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} - \right.$$

$$\left. - \frac{8d^2}{k^2 \pi^2} \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} + \frac{32d^2}{k^2 \pi^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2d} (b-d)} \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$d \leq x \leq b.$$

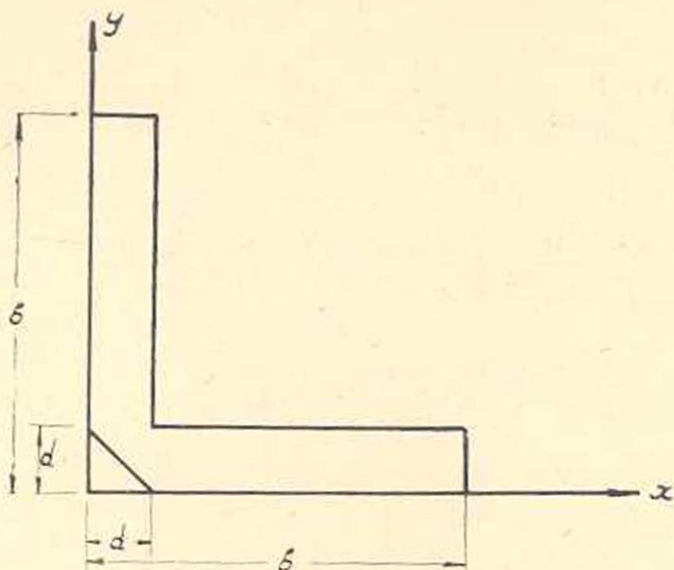
Пользуясь формулой (1.28), для жесткости профиля получим следующее выражение

$$C = G \left\{ \frac{16}{3} bd^3 - 9d^4 + \frac{32d^2}{\pi^2} \sum_k^{1,3,5} \frac{A_k^*}{k^2} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{2}} \right] + \frac{256}{\pi^4} d^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k^4} \left[\operatorname{th} \frac{k\pi}{2} + \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) \right] +$$

$$\left. + \frac{512}{\pi^6} d^4 \sum_k^{1,3,5} \frac{1}{k^6} \left[1 - \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} - 2 \operatorname{th} \frac{k\pi}{2d} (b-d) \right] \right\} \quad (3.10)$$

§ 4. Кручение стержня с поперечным сечением в виде уголка с вырезом под углом 45° (фиг. 4).



Фиг. 4

Функцию напряжений $U(x, y)$ ищем в виде:

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & 0 \leq x \leq d, \quad 0 \leq y \leq d \\ U_2(x, y) & d \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq d \\ U_3(y, x) & 0 \leq x \leq d, \quad d \leq y \leq b. \end{cases} \quad (4.1)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \nabla^2 U_i = -2 \\ U_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, 2) \text{ на контуре} \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} U_1(d, y) = U_3(d, y) \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)_{x=d} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial x} \right)_{x=d} \end{cases} \quad (4.3)$$

Полагаем

$$U_1(x, y) = -\frac{1}{2}(x+y)(x+y-d) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-x) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d}(d-x) - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-y) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d}(d-y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \quad (4.4)$$

$$U_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d},$$

где в силу (4.2)

$$\begin{aligned} \bar{t}_k(x) = C_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \right] + \\ + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} \right]. \end{aligned} \quad (4.4')$$

Тогда воспользовавшись условиями (4.3) и введя обозначение $-kA_k \operatorname{sh} k\pi = A_k^*$, получим

$$\begin{aligned} C_k \left[\operatorname{ch} k\pi - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{d} \operatorname{sh} k\pi \right] = (-1)^k \operatorname{sh} k\pi A_k^* + \frac{2d^2}{k\pi} (-1)^k - \\ - \frac{2d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] + \frac{4d^2}{k^3\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} A_k^* \left[\operatorname{ch} k\pi + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d) - \frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} k\pi} \right] = \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p^*}{p^2 + k^2} [1 - (-1)^{p+k}] - \\ - \frac{4d^2}{k^2\pi^3} \frac{\operatorname{sh} k\pi}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{d}} [1 + (-1)^{k+1}] \left[\operatorname{ch} k\pi + \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b+d) \right] + \\ + \frac{d^2}{k^2\pi^3} [3 + (-1)^{k+1}] + \frac{2d^2}{\pi} \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d) + \\ + \frac{2d^2}{k^2\pi^3} [1 + (-1)^{k+1}] \operatorname{cth} \frac{k\pi}{d} (b-d). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Нетрудно убедиться, что система (4.6) вполне регулярна, а ее свободный член ограничен сверху, поэтому эта система однозначно определяет коэффициенты A_k^* .

Согласно соотношениям (4.1), (4.4), (4.4') и (4.5) функцию напряжений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} U(x, y) = -\frac{1}{2} (x+y-d)(x+y) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^*}{k \operatorname{sh} k\pi} \left\{ \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (d-x) \sin \frac{k\pi y}{d} - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (d-x) - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d} \sin \frac{k\pi}{d} (d-y) + \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (d-y) \sin \frac{k\pi x}{d} \right\}, \\ \text{при } 0 \leq x \leq d; \quad 0 \leq y \leq d. \end{aligned}$$

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{(-1)^k}{k} A_k^* \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-d)} + \frac{2d^2}{k\pi} (-1)^k \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{k\pi}{d} (b-d)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^3 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \frac{\operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-x)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^3 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi x}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \right] \sin \frac{\kappa \pi y}{d},
\end{aligned}$$

при $d \leq x \leq b$; $0 \leq y \leq d$.

$$\begin{aligned}
U(x, y) = & \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left\{ - \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa} A_{\kappa}^* \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \right. \\
& + \frac{2d^2}{\kappa \pi} (-1)^{\kappa} \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} - \frac{2d^2}{\kappa^2 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& + \frac{4d^2}{\kappa^3 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \frac{\operatorname{sh} \kappa \pi}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d} (b-d)} + \\
& \left. + \frac{4d^2}{\kappa^3 \pi^3} [1 + (-1)^{\kappa+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d}} \right] \right\} \sin \frac{\kappa \pi x}{d},
\end{aligned}$$

при $d \leq y \leq b$, $0 \leq x \leq d$.

Согласно формуле (1.28) для жесткости получим следующее выражение:

$$C = G \left\{ \frac{\pi}{3} b d^3 + \frac{4d^2}{\pi^2} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{A_{\kappa}^*}{\kappa^3} \left[\operatorname{cth} \kappa \pi - \frac{(-1)^{\kappa}}{\operatorname{sh} \kappa \pi} \right] + \right.$$

$$+\frac{8d^2}{\pi^2}\sum_k^{1,3,5}\frac{A_k}{k^2}\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)-d^4-\frac{16}{\pi^2}d^4\sum_k^{1,3,5}\frac{1}{k^3}\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)-$$

$$-\frac{32}{\pi^2}d^4\sum_k^{1,3,5}\frac{1}{k^5}\left[\operatorname{th}\frac{k\pi}{2d}(b-d)+2\operatorname{cth}\frac{k\pi b}{d}-\frac{2}{\operatorname{sh}\frac{k\pi b}{d}}\frac{\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2d}(b+d)}{\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2d}(b-d)}\right].$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 15-IV 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х., ПММ, т. XIII, вып. 1, 1949.
2. Князевский Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гос. техн. издат., М., 1949.

Ե. Ա. Ա՛ԽԵԱՆՈՂՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերվում է 45°-ի հատույթներով պոլիգոնալ բնդլայնական հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Կիրառելով օժանդակ ֆունկցիայի մուծման մեթոդը, խնդրի մասնակի ածանցյալներով հավասարումների լուծումը բերված է հաստատուն դորժակիցներով երկրորդ կարգի դժային գիֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինանդրման հաստատունների որոշումը բերված է անվերջ սեզոլյար ելիպսին սեզոլյար դժային հավասարումների սխեմների լուծման:

Ստացված բանաձևերով որոշվում է ձողի կոշտություը ոլորման ժամանակ, կախված հատվածքի երկրաչափական պարամետրներից:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. О. Гулканян

О кручении призматических стержней
 с прямоугольным поперечным сечением
 при наличии продольных трещин

В работе приводится точное решение задачи о кручении призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии продольных трещин. При этом рассматриваются случаи односторонней, двусторонней и внутренней трещины произвольной длины (фиг. 1, 2 и 3). Полученные решения позволяют исследовать вопрос о влиянии глубины трещины на жесткость стержня в указанных случаях, а также определить значения максимальных напряжений в поперечных сечениях.

Получены формулы для определения функции напряжений $U(x, y)$ и жесткости C . В качестве числового примера рассмотрен случай квадратного сечения. Полученные количественные результаты сведены в таблицы 3 и 6.

1. Кручение призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии односторонней продольной трещины

1. *Постановка задачи. Сведение решения задачи к бесконечной системе линейных уравнений.* Определение функции напряжения $U(x, y)$ при кручении призматических стержней с односвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

при условии

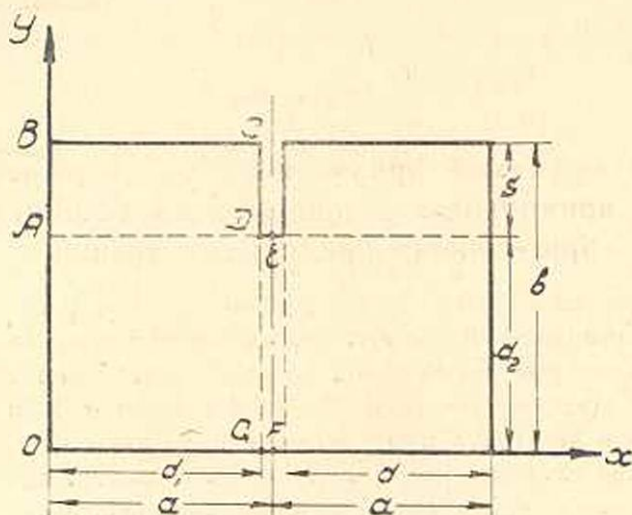
$$U = 0 \text{ на контуре сечения.} \quad (1.2)$$

В силу симметрии поперечного сечения и граничных условий относительно оси EF (фиг. 1) функция напряжений $U(x, y)$ будет также симметричной. Следовательно, достаточно определить функцию $U(x, y)$ в области $OBCDEF$, требуя при этом, чтобы ее нормальная производная на оси симметрии равнялась нулю

$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0. \quad (1.3)$$

Положим, что функция

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{в области } OAEF \\ U_2(x, y) & \text{в области } OBCG. \end{cases} \quad (1.4)$$



фиг. 1

Следуя методу вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1], функции $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ ищем в форме

$$U_1(x, y) = \Psi_1(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } DEFG \\ \Phi_1(x, y) & \text{в области } OADG, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$U_2(x, y) = \Psi_2(x, y) + \begin{cases} 0 & \text{в области } ABCD \\ \Phi_2(x, y) & \text{в области } OADG, \end{cases}$$

где в силу (1.1) Ψ_1 и Ψ_2 должны удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \Psi_1 = -2 \quad \text{и} \quad \nabla^2 \Psi_2 = -2, \quad (1.6)$$

а вспомогательные функции Φ_1 и Φ_2 — уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0, \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0. \quad (1.7)$$

При этом, согласно (1.2) и (1.3), эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, d_1) &= 0, \quad \Psi_1(x, 0) = 0, \quad \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \\ \Psi_2(x, b) &= 0, \quad \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0, \quad \Psi_2(0, y) = 0, \\ \Psi_2(d_1, y) &= 0, \quad \Phi_1(x, 0) = 0, \quad \Phi_2(0, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right|_{x=d_1} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для непрерывности решения Φ_1 и Φ_2 на линиях контакта областей должны удовлетворять также условиям

$$\Phi_1(x, d_2) = \Psi_2(x, d_2), \quad \Phi_1(d_1, y) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \Big|_{x=d_1} = 0, \quad (1.9)$$

$$\Phi_2(x, d_2) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \Big|_{y=d_2} = 0, \quad \Phi_2(d_1, y) = \Psi_1(d_1, y).$$

Функции $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ будем искать в виде

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2}, \quad (1.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}.$$

Граничные условия для определения $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ неоднородны. Следуя идее Гринберга [2], решение для функций $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ будем искать в таком же виде, как и при однородных граничных условиях

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2},$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_2} dy,$$

и

(1.11)

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1},$$

где

$$W_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_2(x, y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx.$$

Уравнения (1.5) — (1.11) полностью определяют функцию напряжения $U(x, y)$ в области OBCDEF, так как определение $f_k(x)$, $\varphi_k(x)$, $V_k(y)$ и $W_k(y)$ сводится к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

В силу (1.6) и (1.10) имеем

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_2}\right)^2 f_k(x) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}], \quad (1.12)$$

$$V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 V_k(y) = -\frac{4}{k\pi} [1 + (-1)^{k+1}].$$

Умножив уравнения (1.7) соответственно на $\frac{2}{d_2} \sin \frac{\kappa \pi y}{d_2}$ и на $\frac{2}{d_1} \sin \frac{\kappa \pi x}{d_1}$ и интегрируя первое из них по „y“ от нуля до d_2 , а второе по „x“ от нуля до d_1 , а также пользуясь условиями (1.8) и (1.9), получим:

$$\varphi_k''(x) - \left(\frac{\kappa \pi}{d_2}\right)^2 \varphi_k(x) = (-1)^k \frac{2\kappa \pi}{d_2^2} \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_1}, \quad (1.13)$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{\kappa \pi}{d_1}\right)^2 W_k(y) = (-1)^k \frac{2\kappa \pi}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_1) \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_2}.$$

Из граничных условий (1.8) и (1.9) следует

$$f_k(a) = V_k(b) = \varphi_k(d_1) = W_k(d_2) = W_k'(d_2) = 0, \quad (1.14)$$

$$f_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \quad V_k(0) + W_k(0) = 0. \quad (1.15)$$

Общие решения уравнений (1.12) и (1.13) на основании условий (1.14) будут

$$\begin{aligned} f_k(x) &= B_k \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_2}(a-x)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_2}} + \frac{4d_2^2}{(\kappa \pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}], \\ V_k(y) &= N_k \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1}(b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d_1}} + \frac{4d_1^2}{(\kappa \pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{d_1}} \right], \\ \varphi_k(x) &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_2}(x-d_1) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p V_p(d_2)}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2} - \\ &\quad - (-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p(d_2) \cdot \sin \frac{p \pi x}{d_1}}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2}, \\ W_k(y) &= (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1}(y-d_2) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p f_p(d_1)}{p^2 + \left(\frac{\kappa d_2}{d_1}\right)^2} - \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$-(-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2}.$$

Подставляя в (1.15) значения $f_k(x)$, $V_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $W_k(y)$ из (1.16), получим две бесконечные системы линейных уравнений вида

$$B_k = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} N_p \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b-d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} -$$

$$-(-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} \cdot \left(\frac{8d_1^2}{\pi^8}\right) \cdot \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{\frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}}}}{p^2 \left[p^2 + \left(\frac{\kappa d_1}{d_2}\right)^2\right]} -$$

$$- \frac{4d_2^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}], \quad (1.17)$$

$$N_k = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{p(-1)^p}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} -$$

$$-(-1)^k \frac{2}{(\kappa\pi)^2} \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \left(1 - \frac{2}{\kappa\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{2d_1}\right) -$$

$$- \frac{4d_1^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}].$$

2. *Исследование и решение бесконечных систем.* Введем в (1.17) следующие обозначения:

$$B_k = S_k \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{(-1)^k}{\kappa} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2},$$

$$N_k = R_k \cdot \alpha \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{(-1)^k}{\kappa} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}.$$
(2.1)

Тогда бесконечная система (1.17) будет приведена к следующему виду:

$$\begin{cases} R_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} S_p + \alpha_k \\ S_k = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} R_p + \beta_k \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{где } a_{kp} = \frac{2k}{\pi \alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(k \frac{d_2}{d_1}\right)^2},$$

$$c_{kp} = \frac{2k\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} \cdot \frac{1}{p^2 + \left(k \frac{d_1}{d_2}\right)^2},$$

$$\alpha_k = -\frac{2}{k\pi^2 \alpha} \cdot \left(1 - \frac{2}{k\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1}\right) + \frac{4}{k^2 \pi^3} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}},$$

$$\beta_k = -\frac{16k}{\pi^3} \cdot \frac{d_1}{d_2^2} \cdot \sum_{p=1,3}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 + \left(k \frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}}\right) +$$

$$+ \frac{4}{k^2 \pi^3} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}}. \quad (2.3)$$

Вводя обозначения $R_k = Z_{2k-1}$, $S_k = Z_{2k}$, $\alpha_k = B_{2k-1}$, $\beta_k = B_{2k}$,

$$A_{2k,2p} = A_{2k-1,2p-1} = 0, \quad a_{kp} = A_{2k-1,2p}, \quad c_{kp} = A_{2k,2p-1}, \quad (2.4)$$

совокупность двух бесконечных систем (2.2) приведем к одной бесконечной системе следующего вида:

$$Z_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu p} Z_p + B_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

где $A_{\nu p}$ и B_ν определяются соотношением (2.4).

Из теории вполне регулярных систем [3] известно, что, если

$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{\nu p}| < 1 - \theta$ для любого ν и $\theta > 0$ и свободные члены системы ограничены $|B_\nu| \leq M$, то система имеет ограниченные решения, удовлетворяющие неравенству $|Z_\nu| \leq K = \frac{M}{\theta}$.

Покажем, что бесконечная система (2.5) вполне регулярна. Пусть $\nu = 2\kappa - 1$. Тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2\kappa-1,p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2}.$$

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_2}} < \frac{2\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right).$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{d_1}\right)^2} = \frac{\kappa}{\pi\alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right) \cdot \frac{\pi d_1}{2\kappa d_2} \left(\operatorname{cth} \frac{d_2}{d_1} \kappa\pi - \frac{d_1}{\kappa\pi d_2}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right) \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Пусть $\nu = 2\kappa$, тогда

$$\sum_{p=1}^{\infty} |A_{2\kappa,p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi} \alpha \cdot \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2}.$$

$$\frac{\operatorname{sh} p\pi \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2)}{\operatorname{sh} \frac{p\pi b}{d_1}} < \frac{2\kappa\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_1}{d_2}\right)^2} = \frac{\kappa\alpha}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\pi d_2}{2\kappa d_1} \left(\operatorname{cth} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{\kappa\pi d_1}\right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

При этом использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (a - d_1) < \frac{1}{2} \left(1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(a - d_1)}\right),$$

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b - d_2) < \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \leq 1. \quad (0 < x \leq \infty).$$

Выберем α так, чтобы $\frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{2}$, т. е. $\alpha = \sqrt{2}$. Тогда для любо-

го $\nu \sum_{p=1}^{\infty} |A_{\nu,p}| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. система (2.5) вполне регулярна и

$$\theta = 0,29289.$$

Свободный член В системы (2.5) ограничен.

$$|z_k| \leq 0,14329 + 0,18244 \cdot \frac{1}{\frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi d_2}{d_1}},$$

$$|\beta_k| \leq 0,20264 + 0,25801 \cdot \frac{1}{\frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi d_1}{d_2}}.$$

Обозначим значения неизвестных Z_ν с избытком через $\bar{Z}_\nu$, а с недостатком через $\tilde{Z}_\nu$, т. е.

$$\bar{Z}_\nu \leq Z_\nu \leq \tilde{Z}_\nu.$$

В случае систем с положительными коэффициентами [3] нахождение конечного числа неизвестных Z_N сводится к решению двух систем

$$\bar{Z}_\nu - \tilde{Z}_\nu = \sum_{p=1}^N A_{\nu,p} (\bar{Z}_p - \tilde{Z}_p) + 2\kappa \cdot \sum_{p=N+1}^{\infty} A_{\nu,p}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, N)$$

$$\bar{Z}_\nu + \tilde{Z}_\nu = \sum_{p=1}^N A_{\nu,p} (\bar{Z}_p + \tilde{Z}_p) + 2B_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \dots, N).$$

Применение лимитант, введенных Кояловичем [3], позволяет оценивать значения неизвестных для $\nu (\nu \geq N+1)$ и уточнить полученные оценки для неизвестных $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$.

В качестве примера рассмотрен квадрат $\left(a = \frac{b}{2}\right)$ с трещиной различной длины S .

Поскольку ширина трещины принимается за нуль, то при вычислениях полагаем $d_1 = a$. После применения лимитант получим следующие оценки для неизвестных (табл. 1 и 2):

Таблица 1

S/b	1/4	1/2	3/4
$\bar{Z}_1$	-0,11168	-0,08660	0,0788
$\bar{Z}_2$	0,01017	-0,09752	-0,18508
$\bar{Z}_3$	-0,11382	-0,12697	-0,11352
$\bar{Z}_4$	-0,10792	-0,14089	-0,16072
$\bar{Z}_{n \geq 5}$	-0,13524	-0,14801	-0,16259

Таблица 2

S/b	1/4	1/2	3/4
$\bar{Z}_1$	-0,09773	-0,06977	0,09404
$\bar{Z}_2$	0,02056	-0,08069	-0,15409
$\bar{Z}_3$	-0,09201	-0,07320	-0,08841
$\bar{Z}_4$	-0,09119	-0,08712	-0,11845
$\bar{Z}_{n \geq 5}$	-0,08229	0	-0,07804

3. *Определение функции напряжений.* Полагая $d_1 = a$ из (1.5), (1.10), (1.11), (1.16), (2.1) и (2.4) для функции напряжений $U(x, y)$ получим следующее выражение:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} ad_2 \frac{(-1)^k}{k} \cdot Z_{2k-1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2k\pi y}{a} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a} \right) + \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \right] \right\} \cdot \sin \frac{k\pi x}{a}$$

в области ABCD,

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{a} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} ad_2 \frac{(-1)^k}{k} \cdot Z_{2k-1} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \cdot \right. \quad (3.1) \\ \left. \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2k\pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a} \right) + \frac{4a^2}{(k\pi)^3} [1 + (-1)^{k+1}] \right\}.$$

$$\cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] + (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p (-1)^p f_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a} \right)^2} -$$

$$- (-1)^k \frac{2\kappa}{\pi} \left(\frac{d_2}{a} \right)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(a) \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_2}}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a} \right)^2} \Bigg\} \text{ в области } OAEF,$$

где
$$f_p(a) = \frac{(-1)^p}{p} a d_2 \cdot Z_{2p} \cdot \operatorname{th} \frac{p \pi a}{d_2} + \frac{4 d_2^2}{(p \pi)^3} [1 + (-1)^{p+1}]. \quad (3.2)$$

4. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении определяется по формуле

$$C = 2G\Theta \iint_{\Omega} U(x, y) dx \cdot dy,$$

где Ω — область поперечного сечения стержня,
 G — модуль сдвига,
 Θ — угол закручивания стержня на единицу длины.

$$C = 4G\Theta \left[\iint_{\Omega} U(x, y) dx dy + \int_0^a \int_{d_2}^b U(x, y) dx \cdot dy \right]. \quad (4.1)$$

Подставляя выражение $U(x, y)$ из (3.1) в (4.1), для вычисления жесткости C получим следующую формулу:

$$C = 4G\Theta b^4 \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{a}{b} \right)^3 - \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi b}{2a} - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{\pi^5} \left(\frac{a}{b} \right)^4 \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_2}{2a} + \frac{d_2}{b} \cdot \frac{2 \sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{a}{b} \right)^3 \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{a} \left(\frac{b}{2} - d_2 \right)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi b}{2a}} - 1 \right] \cdot Z_{2k-1} - \left(\frac{d_2}{b} \right)^2 \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \left(\frac{a}{b} \right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{d_2} \cdot Z_{2k} + \left(\frac{d_2}{b} \right)^4 \cdot \frac{16}{\pi^6} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_2} \Bigg\}.$$

В случае квадратного сечения (т. е. при $a = \frac{b}{2}$) формула для жесткости C будет:

$$\begin{aligned}
C = 4G\Theta b^4 \left\{ 0,01756 - \frac{1}{\pi^5} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d}{b} + \frac{d}{b} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \right. \\
\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} Z_{2k-1} \left[\frac{\operatorname{ch} k\pi \left(2 \frac{d}{b} - 1 \right)}{\operatorname{ch} k\pi} - 1 \right] - \left(\frac{d}{b} \right)^3 \cdot \frac{1}{\pi^2} \cdot \\
\cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot Z_{2k} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{2d} + \left(\frac{d}{b} \right)^4 \cdot \frac{16}{\pi^5} \cdot \\
\left. \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b}{4d} \right\}. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

Подставляя значения $\bar{Z}_k$ и $\bar{Z}_k$ в (4.3), получим верхнюю и нижнюю границы для жесткости C , причем значениям $\bar{Z}_k$ будет соответствовать нижняя граница жесткости $\bar{C}$, а значениям $\bar{Z}_k$ — верхняя граница жесткости $\bar{C}$.

Ниже, в таблице 3, приводятся значения жесткости C для стержня квадратного сечения с продольной трещиной при различной ее длине S .

Таблица 3

S/b	3/4	1/2	1/4	0
$\bar{C}/Gb^4$	0,061	0,079	0,116	0,141
$\bar{C}/Gb^4$	0,062	0,081	0,119	0,141

5. *Определение напряжений.* Напряжения τ_{xz} и τ_{yz} определяются из соотношений

$$\tau_{xz} = G\Theta \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -G\Theta \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Подставляя значение $U(x,y)$ из (3.1) в (6.1), получим:

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{a} \left\{ \frac{1}{2} d_2 \pi (-1)^k \cdot Z_{2k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2k\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}} \cdot \right. \\
\left. \cdot \operatorname{cth} \frac{k\pi b}{a} \cdot \left(1 - \operatorname{cth} \frac{k\pi y}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{2k\pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} \right\}
\end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot d_2 \pi \cdot (-1)^k \cdot Z_{2k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi y}{a} \cdot \operatorname{cth} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} + \\ + (-1)^k \cdot \frac{2}{a^2} \cdot \kappa d_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \cdot \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} - \\ \left. - (-1)^k \cdot \frac{2\kappa d_2}{a^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} \cdot \cos \frac{p \pi y}{d_2} \right\} \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{a} \end{aligned}$$

в области OAEF,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\kappa \pi x}{a} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot d_2 \cdot \pi \cdot (-1)^{k+1} \cdot Z_{2k-1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2\kappa \pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \pi \cdot d_2 \cdot (-1)^{k+1} \cdot Z_{2k-1} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi y}{a}} \right. \\ \cdot \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2\kappa \pi y}{a} - \operatorname{cth} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{2\kappa \pi y}{a} \right) - \frac{4a}{(\kappa \pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi b}{a}} \right] - (-1)^k \cdot \frac{2d_2 \kappa}{a^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{a} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^p \cdot \bar{f}_p(a)}{p^2 + \left(\kappa \frac{d_2}{a}\right)^2} + \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \Psi_i = -2, \quad \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (6.2)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, b_1) = \Psi_1(d_1, y) = \Psi_1(0, y) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi_1(x, y) + \Phi_1(x, y) \right) \Big|_{y=0} = 0, \\ \Phi_1(x, d_2) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=d_2} = \Phi_1(0, y) = 0; \quad \Phi_1(d_1, y) = \Psi_2(d_1, y), \\ \Psi_2(x, d_2) = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)_{x=b_2} = 0; \quad \Psi_2(0, y) + \Phi_2(0, y) = 0, \\ \Phi_2(d_1, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{x=d_1} = 0; \quad \Phi_2(x, d_2) = \Psi_1(x, d_2). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Функции $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) будем искать в виде рядов:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \\ \Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_1}, \quad \text{где } V_k(y) = \frac{2}{d_1} \int_0^{d_1} \Phi_1(x, y) \sin \frac{k\pi x}{d_1} dx, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_{2k-1}(x) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2}, \quad \text{где}$$

$$W_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_2(x, y) \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} dy.$$

Заметим, что системой уравнений (6.1) — (6.4) полностью определяется функция напряжений $U(x, y)$ в области OBCDEF.

Действительно, определение $f_k(y)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, $V_k(y)$ и $W_{2k-1}(x)$ сводится к решению следующих дифференциальных уравнений:

$$f_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(y) = -\frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}],$$

$$\varphi_{2k-1}''(x) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d)^2} \varphi_{2k-1}(x) = -\frac{8}{(2k-1)\pi} \cdot (-1)^{k-1},$$

$$V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 V_k(y) = \frac{2}{d_1} (-1)^k \left(\frac{k\pi}{d_1} \right) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2},$$

$$W_{2k-1}''(x) - \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} \cdot W_{2k-1}(x) = \\ = \frac{2}{d_2} \cdot \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (-1)^{k-1} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{f}_p(d_2) \sin \frac{p\pi x}{d_1},$$

общие решения которых на основании условий (6.3) будут

$$\bar{f}_k(y) = A_k \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1} \right] + \\ + \frac{4d_1^2}{(\kappa\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{d_1}} \right],$$

$$\varphi_{2k-1}(x) = C_{2k-1} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} - \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right] + \\ + \frac{32d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \cdot (-1)^{k-1},$$

$$V_k(y) = \frac{2}{d_1} (-1)^{k+1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (-1)^{p-1}}{\frac{(2p-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} + \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2} \varphi_{2p-1}(d_1) - \\ - \frac{2}{d_1} (-1)^k \left(\frac{k\pi}{d_1}\right) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(d_1) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{\frac{(2p-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2} + \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2}, \quad (6.5)$$

$$W_{2k-1}(x) = \frac{2}{d_2} (-1)^{k-1} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - x) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right) (-1)^p \bar{f}_p(d_2)}{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2}} + \\ + \frac{2}{d_2} \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\bar{f}_p(d_2) \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_1}}{\left(\frac{p\pi}{d_1}\right)^2 + \frac{(2k-1)^2 \pi^2}{(2d_2)^2}}.$$

Подставляя значения функций $\bar{f}_k(y)$, $\varphi_{2k-1}(x)$, $V_k(y)$ и $W_{2k-1}(x)$ из (5.5) в условия $\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$ и $\Psi_2(0, y) + \Phi_2(0, y) = 0$, или соответственно в $\bar{f}_k(0) + V_k(0) = 0$ и $\varphi_{2k-1}(0) + W_{2k-1}(0) = 0$, получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений.

Введем обозначения:

$$A_p^* = -\alpha p (-1)^p A_p \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1}},$$

$$C_{2p-1}^* = (2p-1)(-1)^{p-1} \cdot C_{2p-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2}}, \quad (6.6)$$

тогда совокупность двух бесконечных систем приведем к виду

$$A_k^* = \sum_{p=1}^{\infty} a_{k,2p-1} C_{2p-1}^* + \alpha_k,$$

$$C_{2k-1}^* = \sum_{p=1}^{\infty} b_{2k-1,p} A_p^* + \beta_{2k-1},$$

$$\text{где } a_{k,2p-1} = \frac{2\alpha_k}{\pi} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \frac{1}{(2p-1)^2 + \kappa^2 \left(\frac{2d_2}{d_1}\right)^2} \cdot$$

$$\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{th} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \right],$$

$$b_{2k-1,p} = \frac{4(2k-1)}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot \frac{1}{p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2}\right)^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot$$

$$\cdot \left[\operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{p\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \right],$$

$$\alpha_k = -\frac{4\alpha \cdot d_1^2}{\kappa^2 \pi^3} \cdot [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}} +$$

$$+ \frac{2\alpha d_1^2}{\kappa\pi^2} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \cdot \left[1 - \frac{2}{\kappa\pi} \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1}\right],$$

$$\beta_{2k-1} = -\frac{32d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2}} + \frac{32d_1^2}{\pi^4} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\pi}{2(2k-1)} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right)^2 \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2k-1} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1}\right) \cdot \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi(2k-1)^2} \cdot \left(2 \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \Big] - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2k-1)}{p^2 [p^2 + (2k-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2]} \cdot \frac{\operatorname{sh} p \pi \frac{d_2}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p \pi b_1}{d_1}} \Bigg\}.$$

Подстановкой $A_k^* = Z_{2k-1}$, $C_{2k-1}^* = Z_{2k}$, $\alpha_k^* = \gamma_{2k-1}$, $\beta_{2k-1}^* = \gamma_{2k}$,
 $C_{2k-1, 2p-1} = C_{2k, 2p} = 0$, $a_{k, 2p-1}^* = C_{2k-1, 2p}$ и $b_{2k-1, p}^* = C_{2k, 2p-1}$, (6.7)

совокупность указанных двух бесконечных систем можно привести к одной системе вида

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} E_{kp} \cdot Z_p + \gamma_k, \quad (6.8)$$

где E_{kp} и γ_k определяются соотношением (5.7).

Покажем, что бесконечная система (6.8) вполне регулярна.

Пусть $k = 2i - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |E_{2i-1, p}| &= \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2i-1, 2j-1}| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{i, 2j-1}^*| = \frac{2\alpha i}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \cdot \\ &\cdot \operatorname{th} \frac{i\pi b_1}{d_1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + i^2 \left(\frac{2d_2}{d_1} \right)^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} - \right. \\ &\left. - \operatorname{th} \frac{(2j-1)\pi b_2}{2d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{(2j-1)\pi d_1}{2d_2} \right] < \frac{\alpha i}{\pi} \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2-d_1)} \right] \cdot \\ &\cdot \operatorname{th} \frac{i\pi b_1}{d_1} \cdot \frac{\pi}{4i} \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \operatorname{th} \frac{i\pi d_2}{d_1} \leq \frac{\alpha}{4} \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2-d_1)} \right]. \end{aligned}$$

Если $k = 2i$, то

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} |E_{2i, p}| &= \sum_{j=1}^{\infty} |E_{2i, 2j}| = \sum_{j=1}^{\infty} |b_{2i-1, j}^*| = \frac{4}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \\ &\cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 + (2i-1)^2 \left(\frac{d_1}{2d_2} \right)^2} \cdot \operatorname{ch} \frac{j\pi d_2}{d_1} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{j\pi d_2}{d_1} - \operatorname{cth} \frac{j\pi b_1}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{j\pi d_2}{d_1} \right] < \\ &< \frac{4(2i-1)}{\alpha\pi} \cdot \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \cdot \frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}d_2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2(2i-1)} \cdot \left(\frac{2d_2}{d_1} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\operatorname{cth} \frac{(2i-1)\pi d_1}{2d_2} - \frac{1}{(2i-1) \left(\frac{d_1}{2d_2} \right) \pi} \right] \leq \frac{1}{\alpha} \left(1 + e^{-\frac{2\pi d_2}{d_1}} \right). \end{aligned}$$

Примем, что $\alpha = 2 \sqrt{\frac{1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{d_1}}}{1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2 - d_1)}}}$, тогда для любого k

имеет место следующее неравенство:

$$\sum_{p=1}^{\infty} |E_{kp}| < \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{d_1}}\right) \left[1 + e^{-\frac{\pi}{d_2}(b_2 - d_1)}\right]},$$

т. е. система (6.8) вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрен квадрат ($b_1 = b_2 = d_1 = b$) с двусторонней трещиной различной длины S . Для неизвестных получены следующие оценки (таблицы 4 и 5):

Таблица 4

$S/2b$	1/16	1/8	1/4	3/8
$\tilde{Z}_1/b^2$	0,26273	0,26687	0,21159	0,07542
$\tilde{Z}_2/b^2$	-0,17988	0,00795	0,19450	0,18017
$\tilde{Z}_3/b^2$	0,17941	0,19563	0,19328	0,13049
$\tilde{Z}_4/b^2$	0,09692	0,15592	0,15598	0,08676
$\tilde{Z}_v, v \geq 5$	0	0	0	0

Таблица 5

$S/2b$	1/16	1/8	1/4	3/8
$\bar{Z}_1/b^2$	0,33347	0,34705	0,28532	0,12457
$\bar{Z}_2/b^2$	-0,14348	0,06137	0,26499	0,25691
$\bar{Z}_3/b^2$	0,28208	0,30860	0,29424	0,20511
$\bar{Z}_4/b^2$	0,17888	0,26528	0,28112	0,19892
$\bar{Z}_v/b^2, v \geq 5$	0,25583	0,28603	0,27312	0,21465

7. Определение жесткости C . $C = 2G\Theta \int_0^b \int_0^b U(x, y) dx \cdot dy =$

$$= 8G\Theta \left[\int_0^b \int_0^b U(x, y) dx dy + \int_0^b \int_0^{d_2} U(x, y) dx \cdot dy \right]. \quad (6.1)$$

Согласно (6.1), (6.4), (6.5), (6.6) и (6.7) функция напряжений $U(x, y)$ имеет вид:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{k \sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} k\pi \frac{b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} + \right. \\ \left. + \frac{4b_2^2}{(k\pi)^3} \left[1 + (-1)^{k+1} \right] \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] \right\}, \quad (7.2)$$

в области ABCD,

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{k \sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} k\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] + \frac{4b_2^2}{(k\pi)^3} \cdot \left[1 + (-1)^{k+1} \right] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] + \frac{4d_2}{b_2 \pi} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1) (-1)^{p-1}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \cdot \varphi_{2p-1}(b_2) + \frac{8d_2^2 k}{\pi b_2^2} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \right\} \quad (7.3)$$

в области OAEF, где

$$\varphi_{2p-1}(b_2) = \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \cdot \operatorname{th} \frac{(2p-1) \cdot \pi b_2}{2d_2} \cdot Z_{2p} + \frac{32d_2^2}{(2p-1)^3 \pi^3} \cdot (-1)^{p-1}. \quad (7.4)$$

Подставляя в (7.1) значение $U(x, y)$ из (7.2) и (7.3), для жесткости C получим следующую формулу:

$$C = 8G\theta \left\{ \frac{b_2^2 \sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}}}} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} - \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right) \cdot Z_{2k-1} + \frac{4d_2^2}{\pi^2} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{4d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{2d_2} Z_{2k} - \frac{16b_2^4}{\pi^5} \cdot \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi b_1}{b_2} - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2}} \right] + \frac{128d_2^4}{\pi^5} \sum_{k=1,3}^{\infty} \frac{1}{k^5} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi b_2}{4d_2} + \frac{b_1 b_2^3}{6} \right\}.$$

Для иллюстрации полученных результатов ниже, в таблице 6, приводятся значения для жесткости стержня квадратного сечения с двусторонней трещиной при различных значениях ее длины S .

Таблица 6

$S/2b$	3/8	1/4	1/8	1/16	0
$\tilde{C}/(2b)^4$	0,066	0,091	0,120	0,133	0,141
$\bar{C}/(2b)^4$	0,071	0,1	0,131	0,140	0,141

8. *Определение напряжений* τ_{xz} и τ_{yz} . Подставляя значение $U(x, y)$ из (7.3) в (6.1), получим:

$$\tau_{xz} = G\theta \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} \cdot \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} \left[1 + (-1)^{k+1} \right] \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right\}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{b_2} & \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \right. \\ & \cdot \frac{\pi}{b_2} \cdot \left[\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} \right] - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ & \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} + \frac{4d_2 k}{b_2^2} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \cdot \\ & \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1) (-1)^{p-1}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \varphi_{2p-1}(b_2) - \frac{4d_2 k}{b_2^2} (-1)^{k+1} \cdot \\ & \cdot \left. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \sin \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(\frac{2d_2 k}{b_2} \right)^2} \cdot (2p-1) \right\} \end{aligned}$$

в области OAEF,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi x}{b_2} & \cdot \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot \right. \\ & \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] \cdot Z_{2k-1} - \\ & \cdot \left. \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

в области ABCD,

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = G\Theta \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi x}{b_2} & \left\{ \frac{\pi}{b_2} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{2 \left(1 + e^{-2\pi \frac{d_2}{b_2}} \right)}} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{b_2} \cdot Z_{2k-1} \cdot \right. \\ & \cdot \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{b_2} - \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{b_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2} \right] - \frac{4b_2}{(k\pi)^2} [1 + (-1)^{k+1}] \cdot \\ & \cdot \left. \left[1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b_1}{b_2}} \right] + \frac{4d_2 k}{b_2^2} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{b_2} (y - d_2) \right\} \end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p-1)(-1)^{p-1} \varphi_{2p-1}(b_2)}{(2p-1)^2 + \left(2 \frac{d_2 k}{b_2}\right)^2} + \frac{8d_2^2 k^2 (-1)^k}{b_2^4} \cdot \left. \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2p-1}(b_2) \cdot \cos \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2}}{(2p-1)^2 + \left(2 \frac{d_2 k}{b_2}\right)^2} \right\}$$

в области OAEF,

где $\varphi_{2p-1}(b_2)$ определяется из соотношения (7.4).

III. Кручение призматических стержней с прямоугольным поперечным сечением при наличии внутренней трещины

9. *Постановка задачи. Решение уравнений.* Определение функции напряжений $U(x, y)$ при кручении призматических стержней с двусвязным поперечным сечением сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2$$

при условии, что функция $U(x, y)$ обращается в нуль на внешнем контуре сечения и принимает постоянное значение на внутреннем контуре.

В силу симметрии будем искать функцию напряжений $U(x, y)$ в области OBCDEF (фиг. 3). Для распространения решения на всю область сечения потребуем, чтобы нормальные производные функции $U(x, y)$ на осях симметрии обращались в нуль

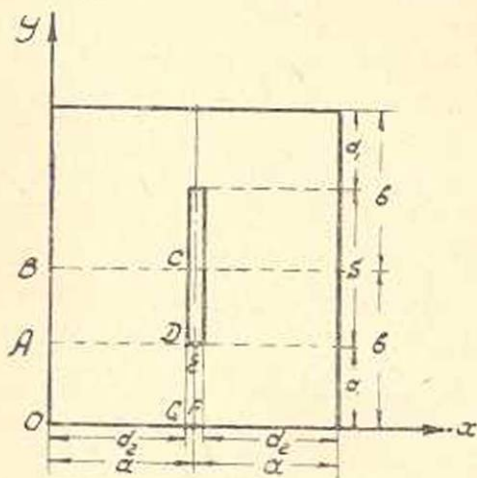
$$\left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0, \quad \left. \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0.$$

Полагаем, что функция $U(x, y)$ принимает значение $U_1(x, y)$ в области OAEF и $U_2(x, y)$ в области OBCG.

Как и в пункте первом функции $U_i(x, y)$ ($i=1, 2$) будем искать в виде:

$$U_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y), \quad (i=1, 2), \quad (9.1)$$

где $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют в области OADG, $\Psi_1(x, y)$ — в области OAEF, а функция $\Psi_2(x, y)$ — в области OBCG.



Фиг. 3.

Функции $\Phi_i(x, y)$ и $\Psi_i(x, y)$ ($i=1,2$) внутри области сечения должны удовлетворять уравнениям:

$$\nabla^2 \Psi_i = -2; \quad \nabla^2 \Phi_i = 0, \quad (i=1,2) \quad (9.2)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=a} = 0, \quad \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \quad \Psi_1(x, d_1) = U_0, \\ \Psi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=b} = 0, \quad \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0, \quad \Psi_2(d_2, y) = U_0, \\ \Phi_1(d_2, y) = \Phi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=d_2} = 0, \quad \Phi_1(x, d_1) = \Psi_2(x, d_1) - U_0, \\ \Phi_2(x, d_1) = \Phi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_1} = 0, \quad \Phi_2(d_2, y) = \Psi_1(d_2, y) - U_0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Представим $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) в виде рядов:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2}, \quad (9.4)$$

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(y) \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2}.$$

Для определения функций $f_k(x)$, $\varphi_k(x)$, $V_k(y)$ и $W_k(y)$ получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(x) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} U_0 - \frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \\ V_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2} \right)^2 V_k(y) &= (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} U_0 - \frac{4}{k\pi} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \end{aligned} \quad (9.5)$$

$$f_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1} \right)^2 f_k(x) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \cdot \sin \frac{p\pi x}{d_2} - (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \cdot U_0,$$

$$W_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{d_2} \right)^2 W_k(y) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \sin \frac{p\pi y}{d_1} - (-1)^k \frac{2k\pi}{d_2^2} \cdot U_0.$$

Общие решения этих уравнений при условиях (9.3) будут

$$\begin{aligned} f_k(x) = B_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d_1} \right) + (-1)^{k+1} \cdot \frac{2U_0}{k\pi} + \\ + \frac{4d_1^2}{(k\pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \end{aligned}$$

$$V_k(y) = N_k \left(\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \operatorname{th} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} \right) + (-1)^{k+1} \cdot \frac{2U_0}{k\pi} + \\ + \frac{4d_2^2}{(k\pi)^2} \cdot [1 + (-1)^{k+1}], \quad (9.6)$$

$$\varphi_k(x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (x - d_1) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + k^2} + \\ + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (x - d_1) \right] - (-1)^k \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \frac{\sin \frac{p\pi x}{d_2}}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + k^2}, \\ W_k(y) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_2} (y - d_1) \cdot \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + k^2} + \\ + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left[1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (y - d_1) \right] - (-1)^k \frac{2k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \frac{\sin \frac{p\pi y}{d_1}}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + k^2}.$$

В силу условий $\Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0$ и $\Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0$ имеем:

$$f_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \quad V_k(0) + W_k(0) = 0. \quad (9.7)$$

Подставляя в (9.7) значения функций $f_k(x)$, $V_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $W_k(y)$ из (9.6), получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений.

Введем обозначения:

$$R_k = S_k \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \cdot \sin \frac{k\pi d_2}{d_1}, \quad N_k = \alpha R_k \cdot d_1 d_2 \cdot \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2}. \quad (9.8)$$

Тогда эти системы можно представить в виде:

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} R_p + \beta_k, \quad R_k = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} S_p + \gamma_k,$$

где
$$a_{kp} = \frac{2}{\pi} k \alpha \frac{d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2} (b - d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \cdot \frac{1}{\left(p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + k^2},$$

$$\beta_k = \frac{2U_0}{k\pi^2} \cdot \frac{1}{d_2^2} - \frac{4}{k^2\pi^2} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot [(-1)^k - 1] \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}} - \\ - \frac{2}{k\pi^2} \cdot \left[1 - \frac{2d_1}{k\pi d_2} \cdot \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \right], \quad (9.9)$$

$$c_{kp} = \frac{2\kappa}{\pi z} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + \kappa^2},$$

$$\gamma_k = \frac{2U_0}{\kappa\pi^2} \cdot \frac{1}{\alpha \cdot d_1^2} - \frac{4}{\kappa^2\pi^2} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot [(-1)^k - 1] \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\kappa\pi d_1}{d_2}} -$$

$$- \frac{2}{\kappa\pi^2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left[1 - \frac{2d_2}{\kappa\pi d_1} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_1}{2d_2} \right].$$

Подстановкой

$$S_k = Z_{2k-1}, \quad R_k = Z_{2k}, \quad \gamma_k = B_{2k}, \quad \beta_k = B_{2k-1}, \quad (9.10)$$

$$A_{2k, 2p-2p} = A_{2k-1, 2p-1} = 0, \quad a_{kp} = A_{2k-1, 2p}, \quad c_{kp} = A_{2k, 2p-1}$$

совокупность двух бесконечных систем (9.9) можем привести к одной системе

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_j + B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (9.11)$$

где $A_{\nu j}$ и B_ν определены соотношением (9.10).

Покажем, что система (9.7) вполне регулярна.

Пусть $\nu = 2k - 1$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{2k-1, j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k-1, 2p}| = \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| = \frac{2}{\pi} \cdot \kappa \cdot \alpha \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2}(b-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \cdot \frac{1}{\left(p \frac{d_1}{d_2}\right)^2 + \kappa^2} \leq \frac{\kappa \alpha}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} \right] \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_2}{d_1} \kappa\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{2} \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-\frac{2p\pi d_1}{d_2}} \right].$$

Если $\nu = 2k$, то

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{2k, j}| = \sum_{p=1}^{\infty} |A_{2k, 2p-1}| = \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| = \frac{2\kappa}{\pi \alpha} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1}}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d_2}{d_1} \cdot p\right)^2 + \kappa^2} \leq \frac{\kappa}{\pi \alpha} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right] \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{d_1}{d_2} \kappa\right)^2} \leq \frac{1}{2\alpha} \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right].$$

При этом использованы следующие неравенства:

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_2}(b-d_1)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi b}{d_2}} \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi} \right],$$

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{p\pi}{d_1}(a-d_2)}{\operatorname{ch} \frac{p\pi a}{d_1}} \leq \frac{1}{2} \left[1 + e^{-\frac{2p\pi}{d_1}(a-d_2)} \right],$$

$$\operatorname{cthx} - \frac{1}{x} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq \infty).$$

$$\text{Выберем } \alpha = \sqrt{\frac{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)}}{1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi}}}.$$

Тогда для любого y имеем неравенства:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{yj}| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_2}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{d_2}p\pi} \right] \cdot \left[1 + e^{-\frac{2\pi}{d_1}(a-d_2)} \right]},$$

или, поскольку ширина трещины практически равна нулю (т. е. $d_2 = a$), то для любого y получим:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{yj}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + e^{-\frac{2\pi}{a}(b-d_1)} - e^{-2\frac{d_1}{a}p\pi}}.$$

Следовательно, система вполне регулярна.

В качестве примера рассмотрен квадрат ($2a = 2b$) с внутренней трещиной длиной $S = a$.

Для неизвестных получены следующие оценки:

$$0,22064 U_0/a^2 - 0,12938 \leq Z_1 \leq 0,58457 U_0/a^2 - 0,17348$$

$$0,49874 U_0/a^2 + 0,10630 \leq Z_2 \leq 0,75823 U_0/a^2 + 0,08465$$

$$\begin{aligned}
 0,16320 U_0/a^2 - 0,08445 &\leq Z_3 \leq 0,50676 U_0/a^2 - 0,14447 \\
 0,1863 U_0/a^2 - 0,06816 &\leq Z_4 \leq 0,56609 U_0/a^2 - 0,10381 \\
 -0,38605 U_0/a^2 = 0,00954 &\leq Z_{v_{\max}} \leq 0,60336 U_0/a^2 - 0,12942.
 \end{aligned}$$

10. *Определение постоянной U_0 .* Постоянная U_0 определяется из теоремы Бредта [4] о циркуляции касательного напряжения при кручении, по которой

$$\int_{C_0} T_s \cdot dS = 2G\tau\Omega, \quad (10.1)$$

где C_0 — внутренний контур сечения, Ω — площадь, ограниченная этим контуром, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура на направление касательной к этому контуру в той же точке.

$$T_s = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} - \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial S} \right) G\tau. \quad (10.2)$$

Подставляя значение T_s в (10.1), после некоторых преобразований получим:

$$\int_{d_2}^a \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=d_2} dy = 2(a-d_2)(b-d_1). \quad (10.3)$$

На основании (9.1), (9.4), (9.6), (9.8) и (9.10) из уравнения (10.3) получаем следующее выражение для определения U_0 :

$$\begin{aligned}
 U_0 = \frac{d_1 d_2}{d_2(a-d_2) + d_1(b-d_1)} &\left\{ 2ab - ad_1 - bd_2 + \frac{d_2^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{2k}}{k^2} \cdot \right. \\
 &\cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-d_1)}{d_2} + \frac{d_1^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_{2k-1}}{k^2} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \\
 &\cdot \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \cdot \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-d_2)}{d_1} - d_1 d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k + \gamma_k}{k} \left. \right\}. \quad (10.4)
 \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования Z_{2k} и Z_{2k-1} в свою очередь зависят от U_0 .

Подставляя в уравнение (10.4) значения Z_{2k} и Z_{2k-1} с избытком и недостатком получаем верхнее и нижнее значения U_0 .

В случае квадрата с внутренней трещиной длиной $S=a$, U_0 принимает следующие значения:

$$0,57335a^2 \leq U_0 \leq 0,6457a^2.$$

11. *Определение жесткости при кручении.* Жесткость при кручении стержней с полым поперечным сечением определяется формулой:

$$C = 2G\Theta \left[-\Omega^* U^* + \Omega_* U_* + \iint_{\Omega} U(x, y) dx \cdot dy \right], \quad (11.1)$$

где G — модуль сдвига,

Θ — угол закручивания на единицу длины стержня,

Ω^* — площадь, ограниченная внешним контуром,

U^* — значение функции напряжений на внешнем контуре,

Ω_* — площадь, ограниченная внутренним контуром,

U_* — значение функции напряжений на внутреннем контуре,

Ω — область поперечного сечения стержня.

Поскольку значение $U(x, y)$ на внешнем контуре принято за нуль и при наличии трещины внутри поперечного сечения $\Omega_* = 0$, то формула для определения жесткости (11.1) принимает следующий вид:

$$C = 2G\Theta \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = 8G \left[\int_0^a \int_0^{d_1} U(x, y) dx dy + \int_0^a \int_0^b U(x, y) dx dy \right]. \quad (11.2)$$

На основании (9.1), (9.4), (9.6), (9.8) и (9.10) функция напряжений будет иметь вид:

$$U_1(x, y) = \frac{U_0 y}{d_1} + y(d_1 - y) + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi a}{d_1}} \cdot \sin \frac{k\pi y}{d_1} \cdot Z_{2k-1} \text{ в области DEFG}, \quad (11.3)$$

$$U_2(x, y) = \frac{U_0}{d_2} x + x(d_2 - x) + \alpha d_1 d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_2}} \cdot \sin \frac{k\pi x}{d_2} \cdot Z_{2k} \text{ в области ABCD},$$

$$U_2(x, y) = x(d_2 - x) + \alpha \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_2} (b-y)}{\operatorname{ch} \frac{k\pi b}{d_2}}.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \cdot Z_{2\kappa} + \frac{2U_0}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_2} (y-d_1) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_2}{d_1} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_2} (y-d_1) \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \\
& \cdot \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_2}{d_1} p\right)^2 + \kappa^2} + \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p \pi x}{d_1}}{\operatorname{sh} \frac{p \pi d_2}{d_1}} \cdot \sin \frac{p \pi y}{d_1} \text{ в области OADG,} \\
U_1(x, y) = & y(d_1 - y) + d_1 \cdot d_2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_2}{d_1} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_1} (a-x)}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_1}} \cdot \\
& \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} \cdot Z_{2\kappa-1} + \frac{2U_0}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa} \cdot \operatorname{ch} \frac{\kappa \pi}{d_1} (x-d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} + \\
& + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi}{d_1} (x-d_2) \cdot \sin \frac{\kappa \pi y}{d_1} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} V_p(d_1) \cdot \\
& \cdot \frac{p(-1)^p}{\left(\frac{d_1}{d_2} p\right)^2 + \kappa^2} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} V_{\kappa}(d_1) \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi y}{d_2}}{\operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_1}{d_2}} \cdot \sin \frac{\kappa \pi x}{d_2} \text{ в области OADG.}
\end{aligned}$$

Подставляя (11.3) в (11.2) и учитывая, что $d_2 = a$, получим:

$$\begin{aligned}
C = & 8G\Theta \left\{ \frac{ad_1^3}{6} + \frac{a^3}{6} (b-d_1) + \frac{U_0 a}{2} (b-d_1) - \frac{2ad_1^3}{\pi^2} \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi a}{d_1}} \right) \cdot Z_{2\kappa-1} + \frac{4U_0 d_1^2}{\pi^3} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_1} + \\
& + \frac{4U_0 a^2}{\pi^3} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_1}{2a} - \frac{16d_1^4}{\pi^5} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^5} \cdot \operatorname{th} \frac{\kappa \pi a}{2d_1} + \\
& + \frac{16a^4}{\pi^5} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^5} \operatorname{th} \frac{\kappa \pi d_1}{2a} - \frac{2a^3 d_1 \alpha}{\pi^2} \cdot \sum_{\kappa=1,3}^{\infty} \frac{1}{\kappa^3} \cdot \\
& \cdot \left[1 - \left(\operatorname{ch} \frac{\kappa \pi d_1}{a} - \operatorname{th} \frac{\kappa \pi b}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{\kappa \pi d_1}{a} \right) \right] \cdot Z_{2\kappa} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

В качестве примера определена жесткость квадрата C с внутренней трещиной длиной $S = a$.

$$\bar{C} = 0,138 G(2a)^4.$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Поступило 25 III 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. ДАН Армянской ССР, т. IX, № 2, 1948. ПММ, т. XIII, № 1, 1949.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1941.
3. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ, М., 1949.
4. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, М.—Л., 1947.

Ն. Օ. Գուլկյան

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԵՂԲԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քերվում է երկայնական ճեղքեր ունեցող ուղղանկյուն լայնական հատվածքով պրիզմատիկ ձողերի սլորման խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Դիտված են այն դեպքերը, երբ ձողը ունի միակողմանի, երկ-
կողմանի և ներքին ճեղքեր՝ կամավոր երկարությամբ: Լարումների ֆունկ-
ցիայի և կոշտության որոշման համար քերված են բացահայտ բանաձևեր,
որոնք հնարավորություն են տալիս հետազոտելու ճեղքի երկարության ազ-
դեցությունը ձողի կոշտության վրա, կախված հատվածքի երկրաչափական
պարամետրներից: Բացի դրանից այդ բանաձևերը թույլ են տալիս որո-
շելու հատվածքում մաքսիմալ լարումների արժեքները: Որպես օրինակ
մանրամասն հետադրույթ է երկայնական ճեղք ունեցող քանակուսի
հատվածքով ձողի դեպքը: Ստացված են թվական արդյունքներ, որոնք
քերված են աղյուսակներում:

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. К. Капанян

О кручении некоторых полых призматических стержней

Как известно, компоненты касательного напряжения по осям координат в сечении стержня, скручиваемого парами, приложенными по концам, будут [1]:

$$X_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1)$$

$$Y_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2)$$

где Φ — функция напряжений, определяемая из уравнения

$$\nabla^2 \Phi = -2G\tau. \quad (3)$$

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, функция Φ на внешнем и внутреннем контурах должна принимать постоянные значения.

Общее решение уравнения (3) в функции комплексных переменных z и $\bar{z}$ выражается в виде:

$$\Phi = -\frac{G\tau}{2} z \bar{z} + \varphi_1(z) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}), \quad (4)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\bar{\varphi}_1(\bar{z})$ — сопряженные аналитические функции z и $\bar{z}$.

Пользуясь теоремой о циркуляции касательного напряжения, доказываем, что для двусвязной области функция $\varphi_1(z)$ однозначна.

Задача о кручении призматического полого стержня постоянного поперечного сечения может быть решена, если известна функция, отображающая двусвязную область данного сечения на кольцо.

В некоторых случаях эту отображающую функцию можно определить следующим приближенным способом.

Пусть $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает некоторую односвязную область плоскости z на внутреннюю или внешнюю область единичного круга в плоскости ζ . Начиная с некоторых $|\zeta| = \rho$ окружностям в плоскости ζ будут соответствовать замкнутые кривые в области z , весьма близкие к окружностям. Таким образом, $z = \omega(\zeta)$ можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую

на кольцо двусвязную область, ограниченную по одному контуру произвольной кривой, а по другому — окружностью.

Введя в (4) $z = \omega(\zeta)$ [2], получим:

$$\Phi = -\frac{G\tau}{2} \omega(\zeta) \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \varphi(\zeta) + \bar{\varphi}(\bar{\zeta}). \quad (5)$$

Функция $\varphi(\zeta)$ голоморфна в области кольца и разлагается в ряд Лорана:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\zeta^k}. \quad (6)$$

Для определения $\varphi(\zeta)$ пользуемся условиями на контуре, приняв на внешнем контуре

$$\Phi = 0, \quad (7)$$

а на внутреннем контуре

$$\Phi = A. \quad (8)$$

Рассмотрим кручение стержня, сечение которого ограничено извне произвольной кривой, а изнутри — окружностью.

Если функция $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает внутренность некоторой односвязной области плоскости z на единичный круг плоскости ζ , то она представляется степенным рядом:

$$\omega(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \zeta^k, \quad (9)$$

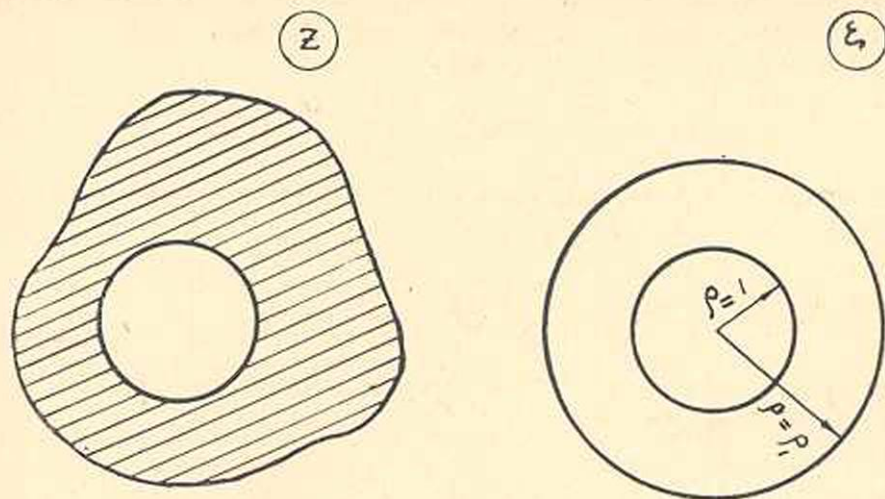
где C_k — постоянные коэффициенты (комплексные или вещественные).

Точкам единичного круга $\zeta = t_0 = e^{i\theta}$ соответствуют точки, лежащие на внешнем контуре области плоскости z . Возьмем внутри круга окружность $\zeta = t_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ с таким радиусом ρ_1 , чтобы соответствующая ей замкнутая кривая на плоскости z была достаточно близка к окружности, и примем эту кривую за внутренний контур сечения (фиг. 1).

Подставив (9) и (6) при $\zeta = t_0$ и $\zeta = t_1$ в (7) и (8), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-ki\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k e^{-ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k e^{ki\theta} = \\ = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{ki\theta} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k e^{-ki\theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho_1^k e^{ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \rho_1^{-k} e^{-ki\theta} + \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \rho_1^k e^{-ki\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \rho_1^{-k} e^{ki\theta} = \\ = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho_1^k e^{ki\theta} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \bar{C}_k \rho_1^k e^{-ki\theta} \right) + A. \end{aligned} \quad (11)$$



Фиг. 1.

Выполнив умножение рядов и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{ki\theta}$ в обеих частях равенств (10) и (11), получим систему уравнений:

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \right),$$

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \rho_1^{2m} \right) + A,$$

$$a_k + \bar{b}_k = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m \right),$$

$$b_k + \bar{a}_k = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m \right),$$

$$a_k \rho_1^k + \bar{b}_k \rho_1^{-k} = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m \rho_1^{2m+k} \right),$$

$$b_k \rho_1^{-k} + \bar{a}_k \rho_1^k = \frac{G\tau}{2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m \rho_1^{2m+k} \right).$$

Решая эту систему, получим:

$$A = \frac{G\tau}{2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m - \sum_{m=1}^{\infty} C_m \bar{C}_m \rho_1^{2m} \right], \quad (12)$$

$$a_k = \frac{G\tau}{2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} C_{m+k} \bar{C}_m [\rho_1^{2m+k} - \rho_1^{-k}]}{\rho_1^k - \rho_1^{-k}}, \quad (13)$$

$$b_k = \frac{G\tau}{2} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \bar{C}_{m+k} C_m [\rho_1^{2m+k} - \rho_1^k]}{\rho_1^{-k} - \rho_1^k}. \quad (14)$$

Таким образом, функции $\varphi(\zeta) = \varphi_1(z)$, а значит и Φ , полностью определены, следовательно, при известных коэффициентах C_k , задача решена.

Этим же способом решается задача о кручении стержня с поперечным сечением, ограниченным извне окружностью, а изнутри — произвольной кривой, при этом для отображения пользуемся функцией $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающей внешность некоторой односвязной области на внешность единичного круга.

В том случае, когда внешний контур сечения — правильный многоугольник, функция $\omega(\zeta)$ определяется из формулы Кристофеля Шварца:

$$\omega(\zeta) = K \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{(1 - \zeta^n)^{2/n}}, \quad (15)$$

где n — число сторон многоугольника,

K — постоянный параметр.

Раскладывая в (15) подынтегральную функцию в ряд и интегрируя, получим:

$$\omega(\zeta) = K \left[\zeta + \frac{2}{n(n+1)} \zeta^{n+1} + \frac{2(n+2)}{n^2(2n+1)2!} \zeta^{2n+1} + \dots \right]. \quad (16)$$

Если в (16) удержать лишь конечное число членов, то получим полином, приближенно отображающий область, ограниченную извне правильным многоугольником, а изнутри — окружностью, на кольцо, у которого внешний радиус $\rho = 1$, а внутренний — $\rho = \rho_1$,

$$\omega(\zeta) = K \sum_{k=0}^{\lambda} C_{nk+1} \zeta^{nk+1}, \quad (17)$$

где λ — число членов полинома,

C_{nk+1} — вещественные коэффициенты.

Решение числовых примеров для квадратного и шестиугольного сечений показало, что при числе членов полинома (17) $\lambda = 7$, внешний контур сечения практически близок к прямолинейному многоугольнику,

а внутренний — при $|\zeta| = \rho_1 \leq \frac{1}{2}$ является замкнутой кривой, у которой разность между наибольшим и наименьшим расстоянием от центра составляет менее 2%.

Имея в виду (17), выражения (12), (13) и (14) можно представить так:

$$A = \frac{G\tau K^2}{2} \left[\sum_{m=0}^{\lambda} C_{mn+1}^2 - \sum_{m=0}^{\lambda} C_{mn+1}^2 \rho_1^{2(mn+1)} \right], \quad (18)$$

$$a_{nk} = \frac{G\tau K^2}{2} \frac{\sum_{m=0}^{\lambda} C_{n(m+k)+1} C_{mn+1} [\rho_1^{n(2m+k)+2} - \rho_1^{-nk}]}{\rho_1^{nk} - \rho_1^{-nk}}, \quad (19)$$

$$b_{nk} = \frac{G\tau K^2}{2} \frac{\sum_{m=0}^{\lambda} C_{n(m+k)+1} C_{mn+1} [\rho_1^{n(2m+k)+2} - \rho_1^{nk}]}{\rho_1^{-nk} - \rho_1^{nk}}. \quad (20)$$

Пример 1. Сечение ограничено извне квадратом, а изнутри — окружностью (фиг. 2).

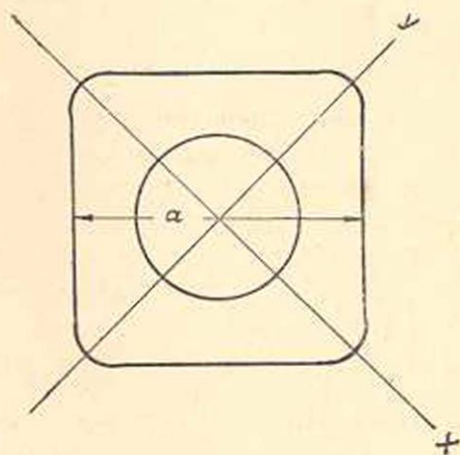
Возьмем функцию $\omega(\zeta)$ в виде суммы семи членов ряда (16); при $p=4$ имеем:

$$z = \omega(\zeta) = K [\zeta + 0,1\zeta^5 + 0,041667\zeta^9 + 0,024038\zeta^{13} + 0,016084\zeta^{17} + 0,011719\zeta^{21} + 0,004331\zeta^{25}]. \quad (21)$$

Коэффициент при седьмом члене полинома (21) взят менее соответствующего коэффициента ряда (16) и вычислен так, чтобы устранить кривизну в точке $\left(r = \frac{a}{2}, \varphi = 45^\circ\right)$ внеш-

него контура, где касательное напряжение принимает максимальное значение, а наличие кривизны искажает величину этого напряжения.

Параметр K определяется из условия, что точке $\left(r = \frac{a}{2}, \varphi = 45^\circ\right)$ на плоскости z соответствует точка $(\rho=1, \theta=45^\circ)$ на плоскости ζ .



Фиг. 2.

$$\kappa = 0,539768 \text{ а.} \quad (22)$$

Определив коэффициенты a_{jk} и b_{jk} функции $\varphi(\zeta)$ по формулам (19) и (20), вычисляем напряжения в точках внешнего и внутреннего контуров из выражения

$$T_n - iT_s = 2i e^{i\alpha} \left[-\frac{G\tau}{2} \bar{\omega}(\bar{\zeta}) + \frac{\varphi_1(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right], \quad (23)$$

где T_n и T_s — проекции касательного напряжения на направления внешней нормали и касательной к контуру в рассматриваемой точке, α — угол, образованный положительным направлением нормали в данной точке контура с осью ox .

Значения напряжений в долях от $G\tau a$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

θ	r	T_s	T_n
0	1	0,315199	0
45°	1	0,685530	0
0	1/2	0,219952	0
45°	1/2	0,317697	0

Для двусвязного контура крутящий момент вычисляется по формуле:

$$M_{кр} = -2A_0 F_0 + 2AF + 2 \iint \Phi dF, \quad (24)$$

где A_0 и A — значения функции напряжений Φ на внешнем и внутреннем контурах сечения (в нашей задаче принято $A_0 = 0$), F_0 и F — площади, ограниченные внешним и внутренним контурами.

Двойной интеграл последнего слагаемого распространен на площадь сечения за вычетом внутренней полости.

В рассматриваемом полом сечении получим:

$$M_{кр} = 0,13260 \text{ Гта}^4.$$

Для сравнения приведем величину крутящего момента для стержня квадратного сплошного поперечного сечения по точному решению

$$M_{кр} = 0,1406 \text{ Гта}^4.$$

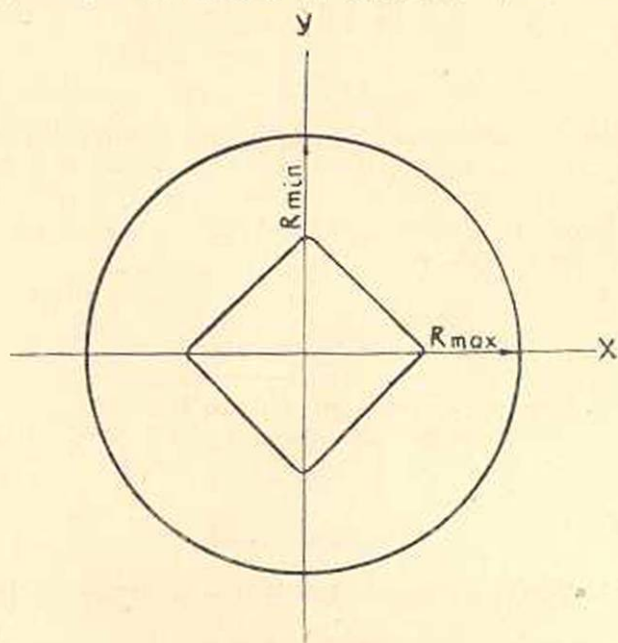
Пример 2. Сечение ограничено извне окружностью, а изнутри — квадратом (фиг. 3).

Функцией, отображающей внешность правильного многоугольника на внешность единичного круга, будет:

$$\omega(\zeta) = K \left[\zeta + \frac{2}{n(n-1)} \zeta^{1-n} + \frac{n-2}{n^2(2n-1)} \zeta^{1-2n} + \dots \right]. \quad (25)$$

Взяв полином из четырех первых членов ряда (25), при $n=4$, получим функцию, достаточно точно отображающую область, ограниченную изнутри квадратом, а извне — окружностью, на кольцо, у которого внутренний радиус $\rho=1$, а внешний $\rho=\rho_1=2$.

$$z = \omega(\zeta) = K [\zeta + 0,166667 \zeta^{-3} + 0,017857 \zeta^{-7} + 0,005681 \zeta^{-11}]. \quad (26)$$



Фиг. 3.

Точкам ($\rho=2$, $\theta=0$) и ($\rho=2$ и $\theta=45^\circ$) на плоскости ζ соответствуют точки ($r=R_{\max}$, $\varphi=0$) и ($r=R_{\min}$, $\varphi=45^\circ$) на плоскости z , где $R_{\max}$ и $R_{\min}$ — максимальное и минимальное расстояния точек внешнего контура сечения от центра, которые отличаются между собой менее чем на 2% .

Параметр K из (26) выразим через $R_{cp} = \frac{R_{\max} + R_{\min}}{2}$,

$$\text{тогда } K = 0,499960 R_{cp}.$$

Коэффициенты функции $\varphi(\zeta)$ определяются тем же способом, как в предыдущем случае.

Напряжения (в долях от $G\tau R_{cp}$), вычисленные по формуле (23), приведены в таблице 2.

Крутящий момент вычисляем по формуле (24) и выражаем в зависимости от среднего радиуса окружности внешнего контура

$$M_{кр} = 1,460354 G\tau R_{cp}^4.$$

Для цилиндрического сплошного стержня круглого поперечного сечения величина крутящего момента

$$M_{кр} = 1,5708 G\tau R^4.$$

Таблица 2

θ	ρ	T_*	T_n
0	1	2,006073	0
45°	1	0,220578	0
0	1/2	0,988767	0
45°	1/2	1,009405	0

Ослабление от квадратного отверстия в круглом сечении составляет 7%.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 10 III 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., 1947.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. М.—Л., 1935.

Լ. Կ. Կապանյան

ՄԻ ՔԱՆԻ ՍՆԱՄԵԶ ՊՐԻՉՄԱՏԻԿ ԶՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մնամեջ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը հնարավոր է լուծել, եթե հայտնի է այդ ձողի հատվածքը ներկայացնող երկկապ տիրույթը օղակի վրա կոնֆորմ ձևով արտապատկերող ֆունկցիան:

Հոդվածում բերված է երկկապ տիրույթները օղակի վրա կոնֆորմ ձևով արտապատկերելու մոտավոր եղանակը, երբ հայտնի է միակապ տիրույթը շրջանի վրա արտապատկերելու ֆունկցիան: Այդ եղանակը օգտագործված է սնամեջ պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդրի լուծման համար, երբ ձողի հատվածքի արտաքին եզրագիծը կանոնավոր բազմանկյուն է, իսկ ներքինը՝ սահմանափակ շառավիղով շրջանագիծ, և ընդհակառակը:

Լուծված օրինակներում արվում են լարումները և կոշտությունները որոշելու համար հաշվարկային բանաձևեր երկու մասնավոր դեպքում՝ ա) երբ ձողի հատվածքի արտաքին եզրագիծը քառակուսի է, իսկ ներքինը՝ շրջանագիծ, և բ) երբ հատվածքի արտաքին եզրագիծը շրջանագիծ է, իսկ ներքինը՝ քառակուսի: