

ТЕОРИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА

Н. Х. Арутюнян,
действительный член Академии наук Армянской ССР

**Затухание напряжений в железобетонных элементах
с предварительно натянутой арматурой под влиянием
ползучести и усадки бетона**

§ 1. Предварительные замечания и основные положения

Основное преимущество преднапряженных конструкций перед обычными железобетонными заключается в том, что, благодаря предварительному обжатию бетона в растянутой зоне путем натяжения арматуры, достигается возможность значительного уменьшения собственного веса сооружения в целом, открываются большие перспективы для внедрения в них экономически выгодных марок бетона и стали, а также повышается трещиноустойчивость конструкций.

В монолитных сооружениях, в частности, мостах с большими и средними пролетами, преимущества предварительного напряжения становятся особенно очевидными.

Поэтому, в течение последних лет, изучению предварительно напряженных железобетонных конструкций уделялось особое внимание со стороны исследователей, которые провели и проводят в настоящее время целый ряд исследований как экспериментального, так и теоретического характера.

Основные вопросы по теории расчета и конструирования преднапряженных железобетонных элементов получили свое развитие в работах В. В. Михайлова [2, 3], А. А. Гвоздева [4], П. Л. Пастернака [5], Л. П. Коровкина [6], С. Е. Фрайфельда [1, 7], Э. Г. Ратца [7, 8], С. А. Дмитриева [9] и других.

На основании этих работ IV Всесоюзная конференция по бетону и железобетонным конструкциям, отмечая серьезные достижения советской науки в этой области, одновременно нашла необходимым дальнейшую разработку основных вопросов как теории расчета, так и конструирования преднапряженных железобетонных элементов вести таким образом, чтобы обеспечить их внедрение в строительство в более широких масштабах.

Некоторая необычность и специфичность предварительно напряженных железобетонных конструкций требует более внимательного изучения методов расчета и основных приемов их конструирования.

Несомненно, что для более эффективного применения этих ме-

тодов в инженерной практике необходимо в первую очередь отчетливое представление напряженного состояния данного железобетонного элемента, начиная от момента монтажного натяжения арматуры до полной эксплуатации сооружения в целом.

Действительно, в обычных бетонных и железобетонных сооружениях собственные напряжения* могут возникнуть только от усадки бетона и температурного воздействия. Эти напряжения в течение времени развиваются в связи с нарастанием усадки и ползучести бетона, о которых достаточно подробно сказано в наших предыдущих работах [10].

В предварительно напряженных железобетонных конструкциях, помимо действия усадки, возникают еще собственные напряжения после отпуска натянутой арматуры. С течением времени эти напряжения будут подвергаться непрерывному изменению под влиянием явления ползучести и усадки бетона. Поэтому, для полного и всестороннего изучения работы предварительно напряженных железобетонных конструкций необходимо знать закон изменения этих напряжений во времени t . Это даст нам возможность достаточно обоснованно подойти к разрешению основного практического вопроса о влиянии предварительного напряжения на работу конструкций под нагрузкой в эксплуатационный период, а также определить величину несущей способности данного сооружения.

В настоящей работе приводится решение задачи об определении напряженного состояния в железобетонных элементах с предварительно натянутой арматурой с учетом ползучести и усадки бетона, при следующих предположениях:

1. При обычных отношениях размеров элемента, применяющихся на практике, напряжения в нем как от предварительного натяжения арматуры, так и от усадки бетона, распределяются равномерно на большей части длины элемента и только на концах его наблюдается чувствительная концентрация этих напряжений. Это обстоятельство с предельной полнотой доказано в работе Е. С. Фрайфельда [1].

2. Согласно вышесказанному, при исследовании преднапряженного элемента в дальнейшем будем предполагать, что рассматриваемые сечения его достаточно удалены от концов и, будучи плоскими до деформации, остаются плоскими и после нее.

Вопрос о концентрации местных напряжений у концов элемента здесь рассматривать не будем.

3. Определение напряжений, возникающих в железобетонном элементе как от предварительного натяжения арматуры, так и от действия внешней нагрузки и усадки, основывается на учете пол-

* Собственными напряжениями, согласно терминологии, разработанной Академией наук СССР, называются напряжения, возникающие в теле при отсутствии внешних силовых воздействий.

ных деформативных свойств бетона, выражающихся в наличии как упругой, так и ползучей части деформации.

Рассматривая некоторые задачи по теории расчета предварительно напряженных железобетонных конструкций, мы будем предполагать, что предварительное натяжение арматуры в них вызвано до твердения бетона, причем усилие, возникающее в элементе в момент освобождения арматуры от натяжных приспособлений, принимается как мгновенно приложенное воздействие.

Конечно, расчет железобетонных конструкций, предварительное напряжение в которых вызвано другими способами, будет несколько отличаться от излагаемого, однако, при сохранении принятых предпосылок, общий путь решения останется аналогичным.

§ 2. Затухание напряжений в изгибаемых железобетонных элементах с предварительно натянутой арматурой под влиянием ползучести и усадки бетона

Постановка задачи и основные уравнения. В предварительно напряженных изгибаемых элементах ползучесть и усадка оказывают существенное влияние на интенсивность предварительного напряжения, заставляя последнее затухать во времени. Это объясняется тем, что происходящие в течение времени явления ползучести и усадки в бетоне, вызывают деформации укорочения, вследствие чего первоначальное значение предварительного напряжения падает, а вместе с тем уменьшается и его эффективность.

Таким образом, первоначальное, так называемое монтажное предварительное напряжение в железобетонных элементах под влиянием ползучести и усадки бетона затухает во времени еще до загрузки конструкции внешними силами. Поэтому, при расчете и проектировании преднапряженных конструкций, следует учитывать только остаток предварительного напряжения как в арматуре, так и в бетоне перед вводом его в эксплуатацию.

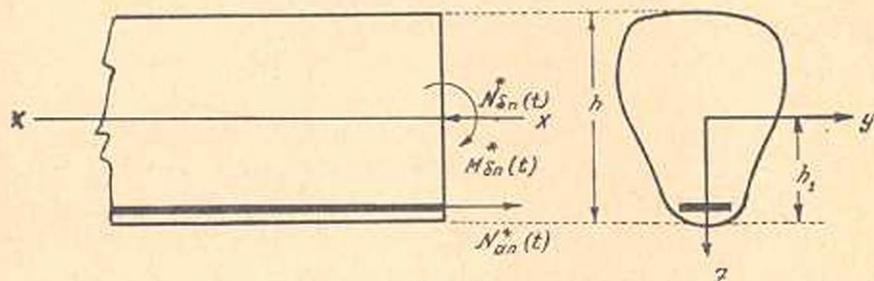
В дальнейшем этот остаток напряжения будем называть *проектным* предварительным напряжением, а напряжение, возникшее в рассматриваемом элементе непосредственно после освобождения арматуры от натяжных приспособлений, — *монтажным*.

Очевидно, что величина проектного напряжения является функцией как возраста бетона τ , при котором была освобождена от натяжных приспособлений арматура, так и времени t . При этом разумеется, что значение проектного напряжения в данном железобетонном элементе в момент времени $t_0 = \tau$, будет равняться монтажному напряжению для этого же элемента.

Рассмотрим изгибаемый железобетонный элемент, поперечные сечения которого симметричны относительно оси действия внешних сил, основные размеры которого показаны на фиг. 1. Пренебрегая работой защитного слоя бетона, предполагаем, что арматура распо-

ложена только в растянутой зоне на расстоянии h_1 от центра тяжести бетонной части поперечного сечения.

Допустим далее, что до затвердения бетона в арматуре заданного железобетонного элемента была вызвана начальная относительная деформация Δ , т. е. было создано предварительное напряжение в ней, равное ΔE_a .



Фиг. 1.

После натяжения арматуры производится бетонировка элемента. Созданное предварительное натяжение арматуры сохраняется до приобретения бетоном достаточной прочности, после чего производится отпуск натяжных приспособлений, т. е. устраняется внешняя монтажная сила, равная $N_{an} = \Delta E_a F_a$, а вызванные ею усилия передаются на железобетонный элемент.

Положим, что отпуск арматуры от натяжных приспособлений был произведен в возрасте бетона $\tau = \tau_1$, причем в этом случае время отсчитывается, как и прежде, от начального момента укладки бетона.

Тогда отпуск арматуры можно рассматривать как воздействие на поперечное сечение железобетонного элемента некоторой сжимающей силы $N_{an} = \Delta E_a F_a$, приложенной на расстоянии h_1 от центра тяжести бетонного сечения в возрасте $\tau = \tau_1$.

Предварительно введем следующие обозначения:

$\sigma_{an,s}^*(t)$ и $\sigma_{bn,s}^*(t)$ — соответственно напряжения в арматуре и бетоне изгибаемого элемента в момент времени t от предварительного натяжения арматуры, вызванного в возрасте бетона $\tau = \tau_1$ с учетом ползучести, усадки и изменения модуля упругости бетона;

$\sigma_{a,s}(t)$ и $\sigma_{b,s}(t)$ — напряжения в арматуре и бетоне изгибаемого элемента в момент времени t от предварительного натяжения, вызванного в возрасте бетона $t = \tau_1$ с учетом только ползучести и усадки бетона;

$\sigma_a^*(t)$ и $\sigma_b^*(t)$ — напряжения в арматуре и бетоне изгибаемого элемента от предварительного натяжения, вызванного в возрасте бетона $t = \tau_1$ с учетом только ползучести бетона;

$\sigma_a(\tau_1)$ и $\sigma_b(\tau_1)$ — соответственно значения монтажных напряжений в арматуре и бетоне в момент отпуска натяжных приспособлений $t = \tau_1$;

F_a — площадь поперечного сечения арматуры;

E_a — модуль упругости арматуры.

При отсутствии внешней нагрузки, уравнения статики в этом случае выражают, что сила $N_{ан,с}^*(t)$, растягивающая арматуру, равна силе $N_{бн,с}^*(t)$, сжимающей бетон для любого момента времени и что момент $M_{ан,с}^*(t)$, изгибающий бетон, равен моменту усилия в арматуре относительно оси, проходящей через центр тяжести бетонного сечения, т. е.

$$\begin{aligned} N_{ан,с}^*(t) + N_{бн,с}^*(t) &= 0, \\ M_{ан,с}^*(t) + M_{бн,с}^*(t) &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

или, замечая, что

$$N_{ан,с}^*(t) = \sigma_{ан,с}^*(t) \cdot F_a \quad \text{и} \quad M_{ан,с}^*(t) = \sigma_{ан,с}^*(t) \cdot F_a \cdot h_1,$$

получим:

$$\begin{aligned} N_{бн,с}^*(t) &= -N_{ан,с}^*(t) = -\sigma_{ан,с}^*(t) \cdot F_a, \\ M_{бн,с}^*(t) &= -M_{ан,с}^*(t) = -\sigma_{ан,с}^*(t) \cdot F_a \cdot h_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где h_1 — расстояние центра тяжести арматуры до оси OY .

Нормальные напряжения в бетоне от усилия $N_{бн,с}^*(t)$ и изгибающего момента $M_{бн,с}^*(t)$, при условии сохранения плоских сечений, выразятся следующей формулой:

$$\sigma_{бн,с}^*(t) = \frac{N_{бн,с}^*(t)}{F_0} + \frac{M_{бн,с}^*(t) \cdot z}{I_0}, \quad (2.3)$$

где F_0 и I_0 — соответственно площадь и момент инерции бетонного сечения относительно оси OY , z — координата точки.

Подставляя значения $N_{бн,с}^*(t)$ и $M_{бн,с}^*(t)$ из (2.2) в (2.3), получим:

$$\sigma_{бн,с}^*(t) = - \left(\mu + \frac{F_a \cdot h_1 z}{I_0} \right) \sigma_{ан,с}^*(t). \quad (2.4)$$

С другой стороны, между полной продольной деформацией бетона $\varepsilon_{бн,с}^*(t)$ и напряжением $\sigma_{бн,с}^*(t)$ существует зависимость:

$$\varepsilon_{бн,с}^*(t) = \frac{\sigma_{бн,с}^*(t)}{E(t)} - S_n(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma_{бн,с}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (2.5)$$

Подставляя из (2.4) значения $\sigma_{бн,с}^*(t)$ в (2.5), находим:

$$\varepsilon_{бн,с}^*(t) = - \frac{\mu \sigma_{ан,с}^*(t) + \frac{\sigma_{ан,с}^*(t) \cdot F_a \cdot h_1 z}{I_0}}{E(t)} - S_n(t) +$$

$$+ \int_{\tau_1}^t \left[\mu \sigma_{ан,а}^*(\tau) + \frac{\sigma_{ан,а}^*(\tau) F_a h_1 z}{I_0} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (2.6)$$

Условие совместности деформаций арматуры и соприкасающегося с ней слоя бетона в данном случае выразится так:

$$\varepsilon_{ан,а}^*(t)_{z=h_1} + \Delta = \varepsilon_{ан,а}^*(t). \quad (2.7)$$

Пользуясь этим соотношением и замечая, что

$$\varepsilon_{ан,а}^*(t) = \frac{\sigma_{ан,а}^*(t)}{E_a}, \quad (2.8)$$

выражение (2.6), после некоторых преобразований, приведем к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{ан,а}^*(t) \left[1 + \left(\mu + \frac{F_a h_1^2}{I_0} \right) m(t) \right] = \Delta E_a - S_a(t) E_a + \\ + \left(\mu + \frac{F_a h_1^2}{I_0} \right) E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_{ан,а}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Но

$$\mu + \frac{F_a h_1^2}{I_0} = \mu + \frac{F_a \mu h_1^2}{I_0} = \mu \frac{I}{I_0} = \mu n_0 \quad (2.10)$$

так как

$$I = I_0 + F_a h_1^2,$$

где I — момент инерции бетонной части поперечного сечения рассматриваемого элемента относительно оси, проходящей через центр тяжести арматуры параллельно оси OY ;

μ — процент армирования;

n_0 — отношение моментов инерции $\frac{I}{I_0}$.

Пользуясь зависимостью (2.10) и преобразуя соотношение (2.9), приведем его окончательно к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{ан,а}^*(t) = \frac{\Delta E_a}{1 + \mu n_0 m(t)} - \frac{E_a S_a(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} + \mu n_0 E_a \int_{\tau_1}^t \sigma_{ан,а}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + \right. \\ \left. + C(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{1 + \mu n_0 m(t)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В первой части выражения (2.11) сумма первых двух слагаемых

представляет упруго-мгновенное выражение в арматуре данного элемента от совместного воздействия предварительного напряжения и усадки без учета ползучести бетона. Обозначим его следующим образом:

$$\sigma_{an,s}(t) = \frac{\Delta E_a}{1 + \mu n_0 m(t)} \frac{E_a S_n(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} \quad (2.12)$$

Следовательно, определение величины проектных предварительных напряжений $\sigma_{an,s}^*(t)$ и $\sigma_{on,s}^*(t)$ в изгибаемых железобетонных элементах с учетом ползучести и усадки бетона сводится к решению интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{an,s}^*(t) &= \sigma_{an,s}(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t \sigma_{an,s}^*(\tau) K(t, \tau) d\tau, \\ \sigma_{on,s}^*(t) &= \sigma_{on,s}(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t \sigma_{on,s}^*(\tau) K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.13)$$

с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{1}{1 + \mu n_0 m(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right], \quad (2.14)$$

свободными членами

$$\begin{aligned} \sigma_{an,s}(t) &= \frac{\Delta E_a}{1 + \mu n_0 m(t)} - \frac{E_a S_n(t)}{1 + \mu n_0 m(t)}, \\ \sigma_{on,s}(t) &= -\frac{\mu n_0 \Delta E_a}{1 + \mu n_0 m(t)} + \frac{\mu n_0 E_a S_n(t)}{1 + \mu n_0 m(t)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

и параметром

$$\lambda_0 = \mu n_0 E_a, \quad (2.16)$$

где

$$n_0 = \frac{1}{l_0} = 1 + \frac{\mu F_a h_1}{l_0}.$$

Для нахождения решений этих уравнений воспользуемся для $C(t, \tau)$ использованной ранее зависимостью общего вида:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (2.17)$$

Подставляя это значение $C(t, \tau)$ в первое из уравнений (2.13) и дифференцируя обе части полученного равенства по t , находим:

$$\begin{aligned} [1 + \mu n_0 m(t)] \sigma_{an,s}^*(t) + \mu n_0 m'(t) \sigma_{an,s}^*(t) &= -E_a S_n'(t) + \\ &+ \mu n_0 E_a \left[\frac{m'(t)}{E_a} - \gamma \varphi(t) \right] \sigma_{an,s}^*(t) + \\ &+ \gamma E_a \mu n_0 \int_{\tau_1}^t [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} \sigma_{an,s}^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Определяя значение последнего интеграла из соотношения (2.18) и подставляя его выражение в исходное уравнение (2.11), получим:

$$\begin{aligned}
 [1 + \mu n_0 m(t)] \sigma_{an,s}''(t) + \gamma [1 + \mu n_0 m(t) + \mu n_0 E_a \varphi(t)] \sigma_{an,s}'(t) = \\
 = \gamma E_a \Delta - \gamma E_a S_n(t) - E_a S_n'(t) + \gamma \mu n_0 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \right. \\
 \left. + \varphi'(\tau) \right] \sigma_{an,s}'(\tau) d\tau.
 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Повторно дифференцируя полученное уравнение по t , окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{an,s}''''(t) + \left[\gamma + \mu n_0 \frac{m'(t) + \gamma E_a \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} \right] \sigma_{an,s}''(t) = \\
 = - \frac{E_a [S_n''(t) + \gamma S_n'(t)]}{1 + \mu n_0 m(t)}.
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Аналогично

$$\sigma_{on,s}''''(t) + \left[\gamma + \mu n_0 \frac{m'(t) + \gamma E_a \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} \right] \sigma_{on,s}''(t) = \mu n_0 E_a \frac{S_n''(t) + \gamma S_n'(t)}{1 + \mu n_0 m(t)}.$$

Таким образом, закон изменения во времени проектных предварительных напряжений $\sigma_{an,s}''(t)$ и $\sigma_{on,s}''(t)$ в изгибаемых железобетонных элементах определяется дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами (2.20).

Затухание предварительных напряжений в изгибаемых железобетонных элементах под влиянием только ползучести бетона. Положим, что модуль упругости бетона в данном железобетонном элементе постоянен и равен E_0 , а мера ползучести его определяется зависимостью

$$C(t, \tau) = \left(\frac{A_1}{\tau} + C_0 \right) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right]. \quad (2.21)$$

Исследуем, как при этих условиях будут изменяться во времени проектные значения предварительных напряжений $\sigma_a^*(t)$ и $\sigma_0^*(t)$ в рассматриваемом железобетонном элементе под действием ползучести бетона. Влияние усадки пока не учитываем.

В этом случае дифференциальные уравнения (2.20) для определения $\sigma_a^*(t)$ и $\sigma_0^*(t)$ примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_a''(t) + \gamma \sigma_a'(t) \left[1 + \frac{E_a \mu n_0 \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} \right] = 0, \\
 \sigma_0''(t) + \gamma \sigma_0'(t) \left[1 + \frac{\mu n_0 E_a \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m(t)} \right] = 0.
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Начальные условия для $\sigma_a^*(t)$ и $\sigma_b^*(t)$, согласно (2.11) и (2.19), будут:

$$\begin{aligned} \sigma_a^*(\tau_1) = \sigma_a(\tau_1) &= \frac{\Delta E_a}{1 + \mu n_0 m}, & \sigma_b^*(\tau_1) = \sigma_b(\tau_1) &= \frac{-\mu n_0 \Delta E_a}{1 + \mu n_0 m}, \\ \sigma_a^*(\tau_1) &= -\frac{\mu n_0 E_a \gamma \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_a(\tau_1), & \sigma_b^*(\tau_1) &= -\frac{\mu n_0 E_a \gamma \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_b(\tau_1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Пользуясь начальными условиями (2.23), решение дифференциальных уравнений (2.22) можно записать в форме:

$$\sigma_a^*(t) = \sigma_a(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\mu n_0 \gamma E_a \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1}}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \tau} \frac{\gamma \mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(z) dz d\tau \right\}, \quad (2.24)$$

$$\sigma_b^*(t) = \sigma_b(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\mu n_0 \gamma E_a \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1}}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \tau} \frac{\gamma \mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^{\tau} \varphi(z) dz d\tau \right\}.$$

Подставляя в выражение (2.24) значение $\varphi(\tau)$ из (2.21) и пользуясь при интегрировании обозначением для функции влияния $\Phi(\xi, \rho)$, окончательно получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_a^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right)}{1 + \mu n_0 m} \cdot \frac{e^{\gamma \tau_1} \tau_1^\rho}{r^{1-\rho}} \left[\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho) \right] \right\}, \\ \sigma_b^*(t) &= \sigma_b(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right)}{1 + \mu n_0 m} \cdot \frac{e^{\gamma \tau_1} \tau_1^\rho}{r^{1-\rho}} \left[\Phi(rt, \rho) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Phi(r\tau_1, \rho) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\text{где } r = \gamma \left(1 + \frac{\mu n_0 E_a C_0}{1 + \mu n_0 m} \right), \quad \rho = \frac{\gamma \mu n_0 E_a A_1}{1 + \mu n_0 m}, \quad \Phi(\xi, \rho) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^\rho} d\tau,$$

m —модульное отношение, равное $\frac{E_a}{E_0}$,

μ —процент армирования,

$\sigma_a(\tau_1)$ и $\sigma_b(\tau_1)$ —величины монтажного преднапряжения в арматуре и бетоне в момент освобождения натяжных приспособлений $t = \tau_1$.

Выражения (2.25) можно представить в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_a^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) H_a^*(t, \tau_1, \mu), \\ \sigma_b^*(t) &= \sigma_b(\tau_1) H_b^*(t, \tau_1, \mu), \end{aligned} \quad (2.26)$$

при этом

$$H_a^*(t, \tau_1, \mu) = H_b^*(t, \tau_1, \mu) = 1 - \frac{\gamma \mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) \frac{e^{\gamma \tau_1} \tau_1^p}{r^{1-p}} \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right]. \quad (2.27)$$

Таким образом, величины $H_a^*(t, \tau_1, \mu)$ и $H_b^*(t, \tau_1, \mu)$ в соотношениях (2.27) представляют коэффициенты затухания предварительных напряжений $\sigma_a^*(t)$ и $\sigma_b^*(t)$ в изгибаемых железобетонных элементах, причем ими определяется закон изменения величины этих напряжений во времени и в зависимости от возраста бетона τ_1 (т. е. до момента времени $t = \tau_1$, при котором были освобождены натяжные приспособления), интенсивности меры ползучести $C(t, \tau_1)$, геометрической формы поперечного сечения и процента армирования μ .

Для иллюстрации величины потери предварительного напряжения в изгибаемых железобетонных элементах от воздействия ползучести бетона вычислим значения коэффициентов затухания предварительных напряжений $H_a^*(t, \tau_1, \mu)$ и $H_b^*(t, \tau_1, \mu)$ железобетонной балки прямоугольного поперечного сечения высотой h и шириной b для различных моментов времени t , процента армирования μ и времени отпуска натяжных приспособлений τ_1 .

При этом характеристики для меры ползучести бетона в (2.21) принимаем: $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-5}$, $C_0 = 0,9 \cdot 10^{-5}$, $\gamma = 0,026$.

Полученные данные сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Значения коэффициентов затухания $H_b^*(t, \tau_1, \mu)$ и $H_a^*(t, \tau_1, \mu)$ в изгибаемых предварительно напряженных железобетонных элементах с прямоугольным поперечным сечением

τ_1	$H_a^*(t, \tau_1, \mu)$, $H_b^*(t, \tau_1, \mu)$								
	7 дней			14 дней			28 дней		
	% армирования μ								
t	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5	0,5	1	1,5
7 дн.	1	1	1	—	—	—	—	—	—
14 "	0,913	0,852	0,810	1	1	1	—	—	—
28 "	0,792	0,698	0,532	0,875	0,835	0,742	1	1	1
90 "	0,622	0,512	0,490	0,703	0,559	0,640	0,760	0,646	0,574
6 мес.	0,600	0,460	0,390	0,680	0,540	0,500	0,722	0,621	0,569
1 год	0,600	0,460	0,390	0,680	0,540	0,500	0,721	0,621	0,569
∞	0,600	0,460	0,380	0,680	0,540	0,500	0,721	0,621	0,569

Из данных, приведенных в этой таблице, видно, что величина потери предварительного напряжения в изгибаемых железобетонных элементах под влиянием ползучести бетона достигает от 30% до 60% в зависимости от того, в каком возрасте бетона произведено освобождение арматуры от натяжных приспособлений и какой процент армирования у данного элемента. При этом степень влияния деформации ползучести на величину убывания предварительного напряжения в изгибаемом элементе сказывается тем сильнее, чем в более раннем возрасте произведен отпуск натянутой арматуры и чем выше у него процент армирования μ .

Эти результаты достаточно наглядно подтверждаются опытами С. А. Дмитриева [9], произведенными в лаборатории железобетонных конструкций ЦНИПС-а.

Затухание предварительных напряжений в изгибаемых железобетонных элементах от совместного воздействия ползучести и усадки бетона. В настоящем пункте этого параграфа мы займемся исследованием вопроса о том, как будут уменьшаться во времени предварительные напряжения в изгибаемых железобетонных элементах при совместном воздействии явлений ползучести и усадки.

Будем полагать, что процесс нарастания явления усадки бетона в рассматриваемом элементе протекает согласно закону

$$S_n(t) = S_n^*(x, z) (e^{-\beta t_1} - e^{-\beta t}), \quad (2.28)$$

при этом считая, что $S_n^*(x, z)$ или постоянно и равно S_0 , или является линейной функцией координаты z .

В этом случае дифференциальные уравнения (2.20) для определения $\sigma_{as}^*(t)$ и $\sigma_{os}^*(t)$ примут следующий вид:

$$\sigma_{as}^{**}(t) + \gamma \left[1 + \frac{\mu n_0 E_s \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m} \right] \sigma_{as}^*(t) = -E_s \frac{S_n''(t) + \gamma S_n(t)}{1 + \mu n_0 m}, \quad (2.29)$$

$$\sigma_{os}^{**}(t) + \gamma \left[1 + \frac{\mu n_0 E_s \varphi(t)}{1 + \mu n_0 m} \right] \sigma_{os}^*(t) = +E_s \mu n_0 \frac{S_n(t) + \gamma S_n(t)}{1 + \mu n_0 m}.$$

Начальные условия для $\sigma_{as}^*(t)$ и $\sigma_{os}^*(t)$, согласно зависимостям (2.11) и (2.18), будут:

$$\begin{aligned} \sigma_{as}^*(\tau_1) &= \sigma_{as}(\tau_1) = \frac{\Delta E_s}{1 + \mu n_0 m} - \frac{E_s S_n(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m}, \\ \sigma_{as}^*(\tau_1) &= -\frac{E_s S_n'(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} - \frac{\mu n_0 \gamma E_s \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_{as}(\tau_1), \\ \sigma_{os}^*(\tau_1) &= \sigma_{os}(\tau_1) = -\frac{\mu n_0 \Delta E_s}{1 + \mu n_0 m} + \frac{\mu n_0 E_s S_n(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m}, \\ \sigma_{os}^*(\tau_1) &= \frac{\mu n_0 E_s S_n'(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} - \frac{\mu n_0 \gamma E_s \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_{os}(\tau_1). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Но, замечая, что в силу (2.28)

$$S_n(\tau_1) = 0,$$

$$S_n^*(\tau_1) = S_0 se^{-s\tau_1},$$

получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{as}^*(\tau_1) &= \sigma_a(\tau_1) = \frac{\Delta E_a}{1 + \mu n_0 m}, \\ \sigma_{as}^*(\tau_1) &= -\frac{E_a S_0 se^{-s\tau_1}}{1 + \mu n_0 m} - \frac{\gamma n_0 \mu E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_a(\tau_1), \\ \sigma_{os}^*(\tau_1) &= \sigma_o(\tau_1) = -\frac{\mu n_0 E_a \Delta}{1 + \mu n_0 m}, \\ \sigma_{os}^*(\tau_1) &= \frac{\mu n_0 E_a S_0 se^{-s\tau_1}}{1 + \mu n_0 m} - \frac{\gamma \mu n_0 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \mu n_0 m} \sigma_o(\tau_1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Пользуясь этими начальными условиями для $\sigma_{as}^*(t)$ и $\sigma_{os}^*(t)$ и замечая, что $\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0$, решения уравнений (2.29) запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{as}^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) + e^{\gamma t} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma z + \frac{\mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^z \left(\frac{A_1}{z} + C_0\right) dz} \left\{ \sigma_{as}^*(\tau_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_a e^{-\gamma \tau_1}}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^{\tau_1} S_0 (\gamma s - s^2) e^{-sz + \gamma z + \frac{\mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^z \left(\frac{A_1}{z} + C_0\right) dz} dz \right\} d\tau, \\ \sigma_{os}^*(t) &= \sigma_o(\tau_1) + e^{\gamma t} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma z + \frac{\mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^z \left(\frac{A_1}{z} + C_0\right) dz} \left\{ \sigma_{os}^*(\tau_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu n_0 E_a e^{-\gamma \tau_1}}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^{\tau_1} S_0 (\gamma s - s^2) e^{-sz + \gamma z + \frac{\mu n_0 E_a}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_1}^z \left(\frac{A_1}{z} + C_0\right) dz} dz \right\} d\tau, \end{aligned}$$

или, вынося постоянные величины за знак интеграла и, для краткости письма, обозначив подобно предыдущему:

$$p = \frac{\mu n_0 \gamma E_a A_1}{1 + \mu n_0 m}, \quad r = \gamma \left[1 + \frac{\mu n_0 E_a C_0}{1 + \mu n_0 m} \right],$$

для $\sigma_{as}^*(t)$ и $\sigma_{os}^*(t)$ получим следующие выражения:

$$\sigma_{as}^*(t) = \sigma_a(\tau_1) + \sigma_{as}^*(\tau_1) e^{r\tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau -$$

$$-\frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{1+\mu n_0 m} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz, \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma_0}^*(t) = & \sigma_0(\tau_1) + \sigma_{\sigma_0}^*(\tau_1) \tau_1^p e^{r\tau_1} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau + \\ & + \frac{\mu n_0 S_0(\gamma-s)sE_a}{1+\mu n_0 m} \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz. \end{aligned}$$

В целях получения приемлемых для практического применения расчетных формул оценим выражения (2.32) для $\sigma_{\sigma_0}^*(t)$ и $\sigma_{\sigma_0}^*(t)$ сверху и снизу следующим образом.

Предварительно проинтегрировав по частям двойной интеграл в первой части выражения (2.32) и замечая, что

$$\int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz = \frac{1}{r} \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} \tau^p d\tau - \frac{e^{-rt}}{r} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau, \quad (2.33)$$

получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma_0}^*(t) = & \sigma_0(\tau_1) + \tau_1^p e^{r\tau_1} \sigma_{\sigma_0}^*(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left\{ t^{-p} \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} \tau^p d\tau - \right. \\ & - t^{-p} e^{-rt} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau + p \int_{\tau_1}^t \tau^{-(1+p)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-sz} z^p dz - \\ & \left. - p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-rt}}{\tau^{1+p}} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz \right\}. \quad (2.34) \end{aligned}$$

Интегрируя по частям предпоследний интеграл этого выражения, после некоторых преобразований приведем его к виду:

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma_0}^*(t) = & \sigma_0(\tau_1) + \tau_1^p e^{r\tau_1} \sigma_{\sigma_0}^*(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left\{ \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} d\tau - \right. \\ & - t^{-p} e^{-rt} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau - p \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-(1+p)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz \left. \right\}. \quad (2.35) \end{aligned}$$

Оценим полученное выражение для $\sigma_{\sigma_0}^*(t)$ сверху и снизу, обозначив через $\bar{\sigma}_{\sigma_0}^*(t)$ значение с избытком, а через $\underline{\sigma}_{\sigma_0}^*(t)$ — с недостатком.

Пользуясь очевидными неравенствами

$$\begin{aligned} \tau_1^p \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-(1+p)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} dz &\leq \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-(1+p)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz \leq \\ &\leq \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} dz, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\tau_1^p \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} d\tau \leq \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau \leq t^p \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} d\tau,$$

которые имеют место при любых значениях t , лежащих в интервале $\tau_1 \leq t < \infty$, при условии $\gamma - s > 0$ будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{as}^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) + \tau_1^p e^{r\tau_1} \sigma_{as}^*(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \\ &- \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left\{ \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} d\tau - e^{-r\left(\frac{\tau_1}{t}\right)^p} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} d\tau - \right. \\ &\left. - p\tau_1^p \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-(1+p)} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} dz \right\}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{as}^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) + \tau_1^p e^{r\tau_1} \sigma_{as}^*(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left\{ \frac{e^{-s\tau_1} - e^{-st}}{s} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{\tau_1}{t}\right)^p \frac{e^{-st} - e^{-r\tau_1 + (r-s)\tau_1}}{r-s} - \right. \\ &\left. - \frac{p\tau_1^p}{r-s} \int_{\tau_1}^t [e^{-s\tau} - e^{-r\tau + (r-s)\tau_1}] \tau^{-(1+p)} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Интегрируя последний интеграл в выражении (2.38) по частям, получим:

$$\bar{\sigma}_{as}^*(t) = \sigma_a \tau_1 + \tau_1^p e^{r\tau_1} \sigma_{as}^*(\tau_1) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left\{ \frac{e^{-s\tau_1} - e^{-st}}{s} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\tau_1}{t} \right)^p \frac{e^{-st} - e^{-rt + (r-s)\tau_1}}{r-s} + \frac{\tau_1^p}{r-s} \left[\frac{e^{-s\tau} - e^{-r\tau + (r-s)\tau_1}}{\tau^p} \int_{\tau_1}^t + \right. \\
 & \left. + s \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-s\tau}}{\tau^p} d\tau - r e^{(r-s)\tau_1} \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau \right] . \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Пользуясь обозначением для функции влияния $\Phi(\xi, \rho)$, можно выражение (2.39) записать в форме:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{as}(t) &= \sigma_a(\tau_1) + e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \sigma_{as}^* [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] - \\
 & - \frac{S_0(\gamma-s)sE_a}{(1+\mu n_0 m)r} \left[\frac{e^{-r\tau_1} - e^{-st}}{s} + \frac{\tau_1^p s^p}{r-s} [\Phi(st, \rho) - \Phi(s\tau_1, \rho)] - \right. \\
 & \left. - \frac{\tau_1^p r^p}{r-s} e^{(r-s)\tau_1} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] \right] . \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Подставляя значение $\sigma_{as}^*(\tau_1)$ из (2.39) в (2.40), после некоторых преобразований окончательно получим следующую формулу:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{as}(t) &= \sigma_a(\tau_1) \left\{ 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) E_a}{1 + \mu n_0 m} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{s(r-\gamma)}{r-s} \cdot \frac{s_0 e^{-s\tau_1}}{\Delta} \right] [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] - \right. \\
 & \left. - \frac{\gamma-s}{r} \cdot \frac{S_0}{\Delta} \left[e^{-s\tau_1} - e^{-st} + \frac{\tau_1 p s^{p+1}}{r-s} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] \right] \right\} , \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

откуда непосредственно имеем:

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{as}(t, \tau_1, \rho) &= \frac{\bar{\sigma}_{as}(t)}{\sigma_a(\tau_1)} = 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) E_a}{1 + \mu n_0 m} + \right. \\
 & \left. + \frac{S_0(r-\gamma)s e^{-s\tau_1}}{(r-s)\Delta} \right] [\Phi(st, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] - \\
 & - \frac{\gamma-s}{r} \cdot \frac{S_0}{\Delta} \left\{ e^{-s\tau_1} - e^{-st} + \frac{\tau_1^p s^{p+1}}{r-s} [\Phi(st, \rho) - \Phi(s\tau_1, \rho)] \right\} . \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (2.36), аналогичным путем из соотношения (2.35) находим:

$$\bar{\sigma}_{as}(t) = \sigma_a(\tau_1) \left\{ 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) E_a}{1 + \mu n_0 m} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{S_0 s e^{-s\tau_1}}{\Delta} \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right] - \frac{(\gamma - s)S_0}{(r - s)r\Delta} \left\{ (r - s)e^{-s\tau_1} - re^{-st} + \right. \\
 & \left. + se^{-rt + (r-s)\tau_1} - ps[E_i(-st) - E_i(-s\tau_1)] + pse^{(r-s)\tau_1}[E_i(-rt) - \right. \\
 & \left. - E_i(-r\tau_1)] \right\}, \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{as}^* = \frac{\bar{\sigma}_{as}^*(t)}{\sigma_a(\tau_1)} = & 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) E_a + \frac{S_0 s e^{-s\tau_1}}{\Delta}}{1 + \mu n_0} \right] \left[\Phi(rt, p) - \right. \\
 & \left. - \Phi(r\tau_1, p) \right] - \frac{(\gamma - s)S_0}{(r - s)r\Delta} \left\{ (r - s)e^{-s\tau_1} - re^{-st} + se^{-rt + (r-s)\tau_1} - \right. \\
 & \left. - ps[E_i(-st) - E_i(-s\tau_1)] + pse^{(r-s)\tau_1}[E_i(-rt) - E_i(-r\tau_1)] \right\}. \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Замечая, что $\bar{\sigma}_{os}^*(t) = -\mu n_0 \bar{\sigma}_{as}^*(t)$, для напряжения в бетоне $\bar{\sigma}_{os}^*(t)$ получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{os}^*(t) = \sigma_o(\tau_1) \left\{ 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{S_0 s e^{-s\tau_1}}{\Delta \mu n_0} \right] \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right] + \frac{(\gamma - s)S_0}{r(r - s)\Delta \mu n_0} \left[(r - s)e^{-s\tau_1} - \right. \right. \\
 \left. \left. - re^{-st} + se^{-rt + (r-s)\tau_1} - ps[E_i(-st) - E_i(-s\tau_1)] + \right. \right. \\
 \left. \left. + pse^{(r-s)\tau_1}[E_i(-rt) - E_i(-r\tau_1)] \right] \right\}, \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \bar{H}_{os}^*(t, \tau_1, \mu) = & 1 - e^{r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) - \right. \\
 \left. - \frac{S_0 s e^{-s\tau_1}}{\Delta \mu n_0} \right] \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right] + \frac{(\gamma - s)S_0}{\Delta(r - s)r\mu n_0} \left\{ (r - s)e^{-s\tau_1} - \right. \\
 \left. - e^{-st} r + se^{-rt + (r-s)\tau_1} - ps[E_i(-st) - E_i(-s\tau_1)] + \right. \\
 \left. + pse^{(r-s)\tau_1}[E_i(-rt) - E_i(-r\tau_1)] \right\}. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{os}^*(t) = \sigma_o(\tau_1) \left\{ 1 - e^{-r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 E_a \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \frac{S_0(r - \gamma)se^{-s\tau_1}}{\Delta(r - s)\mu n_0} \right] \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right] + \frac{S_0(\gamma - s)}{\Delta r \mu n_0} \left[e^{-s\tau_1} - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-e^{-st} + \frac{\tau_1^p s^{p+1}}{r-s} \left(\Phi[st, p] - \Phi[s\tau_1, p] \right) \Bigg]. \quad (2.46)$$

откуда:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{\sigma_a}(t, \tau_1, \mu) = & 1 - e^{-r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1} \left[\frac{\gamma \mu n_0 E_1 \left(\frac{\Lambda_1}{\tau_1} + C_0 \right)}{1 + \mu n_0 m} - \right. \\ & \left. - \frac{S_0(r-s)se^{-s\tau_1}}{\Delta(r-s)\mu n_0} \right] \left[\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_1, p) \right] + \frac{S_0(\gamma-s)}{\Delta r \mu n_0} \left\{ e^{-s\tau_1} - \right. \\ & \left. - e^{-st} + \frac{\tau_1^p s^{p+1}}{r-s} \left[\Phi(st, p) - \Phi[s\tau_1, p] \right] \right\}. \quad (2.46') \end{aligned}$$

Напомним, что здесь $\sigma_a(\tau_1)$ и $\sigma_b(\tau_1)$ — соответственно предварительные напряжения в арматуре и бетоне изгибаемого элемента в момент освобождения натяжных приспособлений $t = \tau_1$, а $E_1(x)$ — интегральная показательная функция, равная

$$E_1(x) = \int_{+\infty}^{-x} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau,$$

значения которой приводятся в таблицах Янке и Эмде.

Таким образом, формулами (2.42), (2.44), (2.45') и (2.46') полностью определяются значения коэффициентов $\bar{H}_{\sigma_a}(t, \tau_1, \mu)$ и $\bar{H}_{\sigma_b}(t, \tau_1, \mu)$, характеризующих закон затухания во времени предварительных напряжений в изгибаемых железобетонных элементах под влиянием ползучести и усадки бетона.

Чтобы проиллюстрировать эффективность полученных оценок (2.42), (2.44), (2.45') и (2.46') при определении верхней и нижней границ коэффициентов затухания $\bar{H}_{\sigma_a}(t, \tau_1)$ или $\bar{H}_{\sigma_b}(t, \tau_1)$, а также выяснить, насколько уменьшается предварительное напряжение в изгибаемых железобетонных элементах от совместного влияния ползучести и усадки бетона, рассмотрим в качестве примера железобетонную балку прямоугольного поперечного сечения при следующих исходных данных:

геометрическая характеристика поперечного сечения $n_0 = 4$,
процент армирования $\mu = 1\%$,

освобождение арматуры от натяжных приспособлений произведено в возрасте бетона $\tau_1 = 14$ дням,

относительное предварительное натяжение арматуры Δ в момент освобождения арматуры равняется $\Delta = 18 \cdot 10^{-4}$,

мера ползучести и усадки бетона принимается та же, что и выше, а именно:

$$C(t, \tau) = \left(\frac{4,82}{\tau} + 0,9 \right) \left[1 - e^{-0,026(t-\tau)} \right] 10^{-5},$$

$$S_n(t) = 2 \cdot 10^{-4} \left(e^{-0,0085t\tau_1} - e^{-0,0085t} \right).$$

Пользуясь формулами (2.42), (2.44) и (2.41); а также исходными данными задачи, вычислим значения коэффициентов затухания предварительного напряжения в данной балке сверху и снизу, т. е. определим величины $\tilde{H}_{as}^*(t, 14)$ и $\tilde{H}_{an}^*(t, 14)$ для различных моментов времени t .

Полученные данные сведены в таблицу 2.

Таблица 2

Значения коэффициента затухания предварительного напряжения $H_{as}^*(t)$ в железобетонной балке с учетом ползучести и усадки бетона при $\rho = 1\%$, $\rho_0 = 4$ и $\tau_1 = 14$ дням, $\Delta = 18 \cdot 10^{-4}$

t в днях	14	28	45	90	360	∞
$H_{as}^*(t, 14)$						
$\tilde{H}_{as}^*(t, 14)$	1	0,789	0,736	0,532	0,485	0,482
$\tilde{H}_{an}^*(t, 14)$	1	0,788	0,733	0,531	0,484	0,482

Из приведенных в этой таблице результатов можно сделать следующие выводы.

1. Полученные для $H_{as}^*(t, \tau_1)$ и $H_{os}^*(t, \tau_1)$ в форме зависимостей (2.42), (2.44), (2.45') и (2.46') оценки достаточно эффективны, так как погрешность при этом не более 0,2 %.

2. Из сравнения приведенных в таблицах 1 и 2 данных видно, что на интенсивность затухания предварительного напряжения в железобетонных балках большее влияние оказывает деформация ползучести бетона, чем усадка. При этом степень влияния ползучести бетона по сравнению с усадкой, по мере увеличения возраста бетона τ_1 , возрастает.

Последнее обстоятельство объясняется тем, что при освобождении арматуры от натяжных приспособлений в позднем возрасте бетона, в работе преднапряженной конструкции выключается первоначальный наиболее интенсивный период нарастания усадки и ползучести бетона. Но, как известно, процесс нарастания последней, по мере увеличения τ_1 , более чувствителен, чем усадки.

Вот почему в рассмотренном выше примере при $\tau_1 = 14$ дням, максимальное уменьшение предварительного напряжения в железобетонной балке только от ползучести бетона составляет 46%, а от совместного действия ползучести и усадки бетона—52%, т. е. усадка увеличивает затухание предварительного напряжения в данном случае, при $\tau_1 = 14$ дням, лишь на 6%.

Напряжения и деформации в изгибаемых железобетонных элементах с предварительно натянутой арматурой в период действия внешней нагрузки с учетом ползучести и усадки бетона. Картина напряженного состояния в изгибаемых железобетонных элементах с предварительно натянутой арматурой в период действия внешней нагрузки значительно усложняется в силу новых условий

деформаций, вследствие чего закон изменения нормальных напряжений становится иным.

Изгибающий момент, вызываемый внешней нагрузкой, начинает действовать на поперечное сечение данного элемента, когда в бетоне и арматуре уже имеется предварительное напряжение с соответствующими изменениями, которые получаются благодаря влиянию ползучести и усадки бетона. Поэтому, в этом случае будут два этапа расчета: первый, охватывающий время с момента освобождения арматуры от натяжных приспособлений $t = \tau_1$ до загрузки конструкций, т.е. до ее распалубки, а второй этап — с момента загрузки и дальше.

Исследование напряженного состояния в предварительно напряженных изгибаемых железобетонных элементах в первом этапе их работы было проведено в предыдущих параграфах.

Ниже мы переходим к изучению напряженного состояния в преднапряженных элементах во втором этапе их работы.

Положим, что в момент времени $t = \tau_2$ к предварительно напряженной железобетонной конструкции была приложена некоторая система внешних сил \bar{P}_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$). Предварительные напряжения в арматуре и бетоне в некотором элементе данной конструкции с учетом ползучести и усадки бетона обозначим соответственно через $\dot{\sigma}_{\sigma_s}(t)$ и $\dot{\sigma}_{\sigma_b}(t)$, напряжения же от совместного действия внешней нагрузки P_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) и предварительного натяжения арматуры с учетом ползучести и усадки будем обозначать через $\dot{\sigma}_{\sigma_s, P_k}(t)$ и $\dot{\sigma}_{\sigma_b, P_k}(t)$.

Разумеется, что значения $\dot{\sigma}_{\sigma_s}(t)$ и $\dot{\sigma}_{\sigma_b}(t)$ полностью определяются формулами (2.41), (2.43), (2.45) и (2.46) для всех значений t , лежащих в интервале $\tau_1 \leq t \leq \tau_2$.

При этих условиях полная продольная деформация бетона $\dot{\epsilon}_{\sigma_b, P_k}(t)$ для любого момента времени $t \geq \tau_2$ выразится зависимостью

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{\sigma_b, P_k}(t) = & \frac{\dot{\sigma}_{\sigma_b, P_k}(t)}{E_0} - S_b(t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma_b}(t) \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau - \\ & - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma_b, P_k}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где $\dot{\sigma}_{\sigma_b}(t)$ — предварительное напряжение в бетоне изгибаемого элемента с учетом ползучести и усадки бетона, определяемое формулами (2.45) и (2.46).

Условие равновесия в этом случае выразится следующим образом:

а) усилие $N_{a, \rho_{кс}}^*(t)$, растягивающее арматуру, должно равняться в любой момент времени $t \geq \tau_2$ силе $N_{б, \rho_{кс}}^*(t)$, сжимающей бетон;

б) сумма моментов этих усилий относительно центра тяжести бетонного сечения должна равняться изгибаемому моменту внешних сил M_x .

Таким образом, имеем:

$$N_{a, \rho_{кс}}^*(t) + N_{б, \rho_{кс}}^*(t) = 0,$$

$$M_{a, \rho_{кс}}^*(t) + M_{б, \rho_{кс}}^*(t) = M_x, \quad (2.48)$$

или, замечая, что

$$N_{a, \rho_{кс}}^*(t) = \sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t) F_a,$$

$$M_{a, \rho_{кс}}^*(t) = \sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t) F_a h_1, \quad (2.49)$$

получим:

$$N_{б, \rho_{кс}}^*(t) = -N_{a, \rho_{кс}}^*(t) = -\sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t) F_a,$$

$$M_{б, \rho_{кс}}^*(t) = M_x - M_{a, \rho_{кс}}^*(t) = M_x - \sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t) F_a h_1, \quad (2.50)$$

где F_a — площадь поперечного сечения арматуры,

h_1 — расстояние центра тяжести бетонной части поперечного сечения данного элемента до арматуры.

Нормальные напряжения в бетоне от совместного действия осевой силы $N_{б, \rho_{кс}}^*(t)$ и изгибающего момента $M_{б, \rho_{кс}}^*(t)$ выражаются следующей формулой:

$$\sigma_{б, \rho_{кс}}^*(t) = \frac{N_{б, \rho_{кс}}^*(t)}{F_б} + \frac{M_{б, \rho_{кс}}^*(t) \cdot z}{I_б}, \quad (2.51)$$

где z — координата точки,

$I_б$ — момент инерции бетонной части поперечного сечения элемента относительно оси, проходящей через центр тяжести (фиг. 1).

Подставляя значения $N_{б, \rho_{кс}}^*(t)$ и $M_{б, \rho_{кс}}^*(t)$ из (2.50) в (2.51), получим:

$$\sigma_{б, \rho_{кс}}^*(t) = -\frac{F_a \sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t)}{F_б} + \frac{[M_x - F_a h_1 \sigma_{a, \rho_{кс}}^*(t)] z}{I_б}. \quad (2.52)$$

С другой стороны, из условия совместности деформаций арматуры и соприкасающегося слоя бетона, имеем:

$$\epsilon_{б, \rho_{кс}}^*(t) / z = h_1 + \Delta = \epsilon_{a, \rho_{кс}}^*(t), \quad (2.53)$$

где Δ — начальная относительная деформация арматуры в момент освобождения ее от натяжных приспособлений $t = \tau_1$,

$\dot{\varepsilon}_{a, \rho_{кс}}(t)$ — относительная деформация арматуры в момент времени $t > \tau_2$ от совместного действия предварительного натяжения и внешней нагрузки с учетом ползучести и усадки бетона.

Замечая, что $\dot{\varepsilon}_{a, \rho_{кс}}(t) = \frac{\dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t)}{E_a}$, (2.54)

приведем условие (2.53) к виду

$$\dot{\varepsilon}_{\sigma, \rho_{кс}}(t)/z-h_1 + \Delta = \frac{\dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t)}{E_a} \sqrt{\quad} \quad (2.55)$$

Подставляя значение $\dot{\varepsilon}_{\sigma, \rho_{кс}}(t)$ из соотношения (2.47) в (2.55) и одновременно замечая, что $\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{кс}}(t)$ выражается через $\dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t)$ посредством зависимости (2.52), находим:

$$\Delta + \frac{\sigma_{a, \rho_{кс}}(t)}{E_0} = \frac{1}{E_0} \left[\frac{M_x h_1}{I_0} - \mu n_0 \dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t) \right] - S_n(t) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_{\tau_1}^t \left[\frac{M_x h_1}{I_0} - \mu n_0 \dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(\tau) \right] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2.56)$$

где μ — процент армирования,

E_0 — модуль упругости бетона,

E_a — модуль упругости арматуры,

I — момент инерции бетонной части поперечного сечения рассматриваемого элемента относительно оси, проходящей через центр тяжести арматуры и параллельной оси ОУ (фиг. 1). При этом

$$I = I_0 + F_0 h_1^2$$

n_0 — отношение моментов инерции $\frac{I}{I_0}$.

Произведя интегрирование в (2.56), после некоторых преобразований, для определения $\dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t)$ получим следующее уравнение:

$$\dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t) = \frac{E_a [\Delta - S_n(t)]}{1 + \mu n_0} + \frac{M_x h_1 m [1 + E_0 C(t, \tau_2)]}{I_0 [1 + \mu n_0 m]} - \frac{E_a}{1 + \mu n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu n_0} \int_{\tau_2}^t \dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.57)$$

Замечая, что

$$\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{кс}}(t) = \frac{M_x h_1}{I_0} - \mu n_0 \dot{\sigma}_{a, \rho_{кс}}(t), \quad (2.58)$$

из зависимости (2.57) для $\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t)$ получим аналогичное уравнение:

$$\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t) = \frac{M_x h_1}{I_0 [1 + \mu m n_0]} - \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu m n_0} [\Delta - S_n(t)] + \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu m n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma s}(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu n_0 m} \int_{\tau_2}^t \dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.59)$$

Таким образом задача определения напряженного состояния в предварительно напряженных железобетонных изгибаемых элементах при одновременном действии внешней нагрузки с учетом ползучести и усадки бетона сводится к решению интегральных уравнений:

$$\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t) = F(t) + \lambda_0 \int_{\tau_2}^t \dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

и

$$\dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t) = \Phi(t) + \lambda_0 \int_{\tau_2}^t \dot{\sigma}_{\sigma, \rho_{k s}}(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.60)$$

с ядром, равным производной меры ползучести бетона, т. е.

$$K(t, \tau) = \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \quad (2.61)$$

свободными членами

$$F(t) = \frac{E_a [\Delta - S_n(t)]}{1 + \mu n_0 m} + \frac{M_x h_1 m}{I_0 [1 + \mu m n_0]} [1 + E_0 C(t, \tau)] - \frac{E_a}{1 + \mu m n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma s}(\tau) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.62)$$

$$\Phi(t) = \frac{M_x h_1}{I_0 [1 + \mu m n_0]} - \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu m n_0} [\Delta - S_n(t)] + \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu m n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\sigma s}(t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

и параметром

$$\lambda_0 = \frac{\mu E_a n_0}{1 + \mu m n_0}. \quad (2.63)$$

где m — модульное отношение, равное $\frac{E_a}{E_0}$,

$\dot{\sigma}_{\text{н}}(t)$ и $\dot{\sigma}_{\text{о}}(t)$ — натяжения в рассматриваемом элементе в момент времени t только от предварительного натяжения с учетом ползучести и усадки, значения которых определяются по формулам (2.42), (2.43) и (2.45).

Для определения значений нормальных напряжений в предварительно напряженных изгибаемых железобетонных элементах при одновременном действии внешней нагрузки с учетом ползучести и усадки бетона воспользуемся соответствующими зависимостями (2.17) и (2.28) для $C(t, \tau)$ и $S_{\text{n}}(t)$ и, поступая аналогичным способом, как в предыдущих параграфах, приведем интегральные уравнения (2.60) к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}''(t) + \gamma [1 + \lambda_0 \varphi(t)] \dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}''(t) &= -\frac{\lambda_0}{\mu n_0} [S_{\text{n}}''(t) + \gamma S_{\text{n}}'(t)], \\ \dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}''(t) + \gamma [1 + \lambda_0 \varphi(t)] \dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}''(t) &= \lambda_0 [S_{\text{n}}''(t) + \gamma S_{\text{n}}'(t)]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

При этом, согласно (2.57) и (2.59), для $\dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}'(t)$ и $\dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}'(t)$ будем иметь следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) &= \frac{E_{\text{n}} [\Delta - S_{\text{n}}(\tau_2)]}{1 + \mu m n_0} + \frac{M_{\text{x}} h_1 m}{I_0 [1 + \mu m n_0]} - \\ &- \frac{E_{\text{n}}}{1 + \mu m n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\text{н}}(\tau) \frac{\partial C(\tau_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) &= -\lambda_0 \varphi(\tau_2) \gamma \dot{\sigma}_{\text{н}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) - \\ &- \frac{E_{\text{n}} \dot{S}_{\text{n}}(\tau_2)}{1 + \mu m n_0} + \frac{M_{\text{x}} h_1 E_{\text{n}} \gamma \varphi(\tau_2)}{I_0 [1 + \mu m n_0]}, \quad (2.65) \\ \dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) &= \frac{M_{\text{x}} h_1}{I_0 [1 + \mu m n_0]} - \frac{\mu E_{\text{n}} n_0}{1 + \mu m n_0} [\Delta - S_{\text{n}}(\tau_2)] + \\ &+ \frac{\mu E_{\text{n}} n_0}{1 + \mu m n_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{\sigma}_{\text{о}}(\tau) \frac{\partial C(\tau_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \\ \dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) &= -\lambda_0 \gamma \varphi(\tau_2) \dot{\sigma}_{\text{о}, \rho_{\text{к}}}'(\tau_2) + \\ &+ \frac{E_{\text{n}} \mu n_0 S_{\text{n}}(\tau_2)}{1 + \mu m n_0} - \frac{M_{\text{x}} h_1 E_{\text{n}} \gamma \mu n_0 \varphi(\tau_2)}{I_0 [1 + \mu m n_0]}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими условиями, а также замечая, что согласно (2.17) и (2.28)

$$\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0,$$

(2.66)

$$S_{\text{n}}(t) = S_0 \left[e^{-s\tau_1} - e^{-st} \right],$$

решение уравнений (2.64) для $\sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t)$ можно представить в форме:

$$\begin{aligned} \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t) = & \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) + \left\{ \frac{M_x h_1}{I_0} \cdot \frac{E_a \gamma}{1 + \mu n_0} \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) - \right. \\ & - \frac{E_a S_0 s e^{-s\tau_2}}{1 + \mu n_0} + \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) \left. \right\} \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_2, p)] - \\ & - \frac{E_a S_0 s (\gamma - s)}{1 + \mu n_0} \int_{\tau_2}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau \int_{\tau_2}^{\tau} e^{(r-s)x} x^p dx. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Имея же в виду, что

$$\sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(t) = \frac{M_x h_1}{I_0} - \mu n_0 \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t), \quad (2.68)$$

и подставляя значения $\sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t)$ из (2.67) в (2.68), для $\sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(t)$ получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(t) = & \sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) + \left\{ \lambda_0 S_0 s e^{-s\tau_2} - \right. \\ & - \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) \left. \right\} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_2, p)] \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} + \\ & + \lambda S_0 s (\gamma - s) \int_{\tau_2}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau \int_{\tau_2}^{\tau} e^{(r-s)x} x^p dx. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Оценивая аналогичным образом, как и в предыдущих параграфах, выражения (2.67) и (2.69) сверху и снизу, получим для $\sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t)$ и $\sigma_{o, \rho_{k^*}}^*(t)$ следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(t) = & \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) + \left\{ \frac{M_x h_1}{I_0} \cdot \frac{E_a \gamma}{1 + \mu n_0} \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) - \frac{E_a S_0 s e^{-s\tau_2}}{1 + \mu n_0} - \right. \\ & - \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{a, \rho_{k^*}}^*(\tau_2) \left. \right\} \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_2, p)] - \\ & - \frac{E_a S_0 s (\gamma - s)}{1 + \mu n_0} \cdot \frac{\tau_2^p}{r-s} \left\{ \frac{1}{s^{1-p}} [\Phi(st, p) - \Phi(s\tau_2, p)] - \right. \\ & \left. - \frac{e^{(r-s)\tau_2}}{r^{1-p}} [\Phi(rt, p) - \Phi(r\tau_2, p)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(t) &= \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) + \left\{ \frac{M_x h_1}{I_0} \cdot \frac{E_0 \gamma}{1 + \mu m n_0} \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) - \frac{E_0 S_0 s e^{-s\tau_2}}{1 + \mu m n_0} \right. \\ &- \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) \left. \right\} \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_2, \rho)] - \\ &- \frac{E_0 S_0 s (\gamma - s)}{1 + \mu m n_0} \cdot \frac{e^{-s\tau_2}}{r - s} \left[\frac{1 - e^{-s(t-\tau_2)}}{s} - \frac{1 - e^{-r(t-\tau_2)}}{r} \right], \\ \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(t) &= \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) = \left\{ \lambda_0 S_0 s e^{-s\tau_2} - \right. \\ &- \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) \left. \right\} \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_2, \rho)] + \\ &+ \lambda_0 S_0 s (\gamma - s) \frac{e^{-s\tau_2}}{r - s} \left[\frac{1 - e^{-s(t-\tau_2)}}{s} - \frac{1 - e^{-r(t-\tau_2)}}{r} \right], \quad (2.71) \\ \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(t) &= \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) + \left\{ \lambda_0 S_0 s e^{-s\tau_2} - \right. \\ &- \lambda_0 \gamma \left(\frac{A_1}{\tau_2} + C_0 \right) \sigma_{\sigma, \rho, s}^*(\tau_2) \left. \right\} \frac{e^{r\tau_2} \tau_2^p}{r^{1-p}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_2, \rho)] + \\ &+ \lambda_0 S_0 s (\gamma - s) \frac{\tau_2^p}{r - s} \left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{r^{1-p}} [\Phi(st, \rho) - \Phi(s\tau_2, \rho)] - \right. \\ &- \left. \frac{e^{[r-s]\tau_2}}{r^{1-p}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_2, \rho)] \right\}, \end{aligned}$$

где $\rho = A_1 \lambda_0 \gamma$, $\tau = \gamma(1 + \lambda_0 C_0)$, $\lambda_0 = \frac{\mu E_0 n_0}{1 + \mu m n_0}$.

§ 3. Затухание предварительных напряжений в железобетонных трубах под влиянием ползучести и усадки бетона

Постановка задачи и основные уравнения. Обычные железобетонные трубы, применяемые при строительстве напорных трубопроводов, резервуаров и т. п. без предварительного напряжения, имеют тот существенный недостаток, что в их стенках уже в раннем возрасте появляются трещины.

Эти трещины в стенках железобетонных труб возникают под влиянием растягивающих кольцевых напряжений, вызванных действием внутреннего давления воды и объясняются низкой сопротивляемостью бетона растяжению.

Кроме внешних нагрузок причинами появления трещин в стенках железобетонных труб часто являются также усадка бетона и температурные воздействия.

Поэтому, трещины в стенках железобетонных труб, работающих преимущественно на растяжение, можно считать почти неизбежными, если предполагать, что растягивающие напряжения должны восприниматься главным образом бетоном.

Для повышения водонепроницаемости железобетонных труб обычно применяют водонепроницаемую штукатурку, бетон высокой плотности и ряд других мероприятий.

Однако можно считать установленным, что никакая изоляция, кроме сплошной металлической рубашки, не гарантирует полной водонепроницаемости отдельных участков в стенках этих труб до тех пор, пока не удастся передать наибольшую часть возникших в них растягивающих напряжений на арматуру с таким расчетом, чтобы достигнуть условий работы бетона в пределах допускаемых напряжений и тем самым исключить появление в нем трещин.

Кроме того, конструкции железобетонных труб без применения предварительного напряжения оказываются также неэкономичными как по расходу основных материалов (сталь, бетон, дерево), так и по стоимости сооружений в целом.

Поэтому, зачастую, несмотря на очевидные преимущества железобетона как материала для трубопроводов, резервуаров и т. п. по сравнению с металлом, отдают предпочтение последнему.

Радикальным средством, обеспечивающим отсутствие трещин в стенках железобетонных труб, с одновременным достижением значительной экономичности, является предварительное напряжение.

Идея предварительного напряжения железобетонной трубы заключается в предварительном сжатии бетона в стенках настолько, чтобы при давлении воды и других факторах воздействия (усадка, температурные напряжения) растягивающие напряжения в бетоне не имели места, а уменьшалось только его предварительное сжатие.

Опыт строительства предварительно напряженных железобетонных труб показал полную возможность обеспечения их трещиностойкости при одновременном достижении значительной экономии в их стоимости.

В настоящем параграфе приводится решение задачи о затухании предварительного напряжения в железобетонной трубе от воздействия ползучести и усадки бетона. При этом предполагается, что труба достаточно длинна и поэтому влиянием закрепления торцов можно пренебречь.

Рассмотрим круглую железобетонную трубу, в которой наружная поверхность бетона радиуса $r=b$ соприкасается с арматурой толщиной δ , а внутренняя поверхность имеет радиус $r=a$. Для простоты, работой защитного слоя бетона будем пренебрегать.

Обозначим через F_a площадь арматуры на погонную единицу длины трубы. Очевидно, что $F_a = \delta \cdot l = \delta$ (фиг. 2).

Положим, что арматура в железобетонной трубе предварительно вытянута на относительную величину Δ , которая сохраняется до ее

освобождения от натяжных приспособлений. Если бы арматура при своей деформации после освобождения не встречала сопротивления, то относительное уменьшение ее радиуса было бы $\frac{\Delta}{2\pi}$. При совместной работе

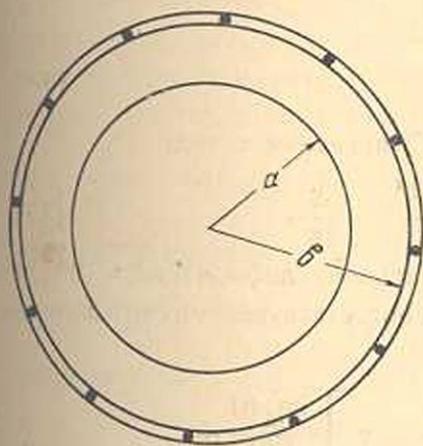
бетона и арматуры, между ними возникает сила взаимодействия $q_{\Delta}^*(t)$, сжимающая бетонный цилиндр и растягивающая арматуру, причем, в силу симметрии, касательные напряжения будут равняться нулю. Расчетные схемы показаны на фигурах 3 и 4.

Рассмотрим сначала задачу Ляме для бетонного слоя и арматуры в отдельности под влиянием нагрузки $q_{\Delta}^*(t)$.

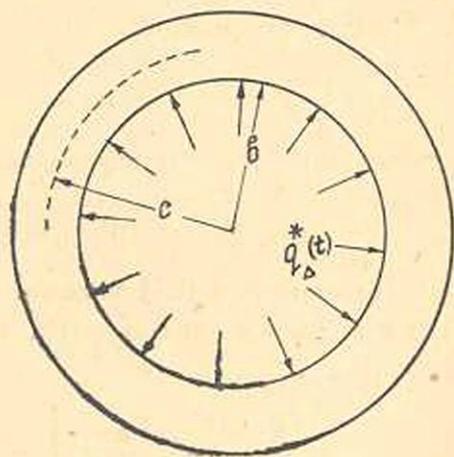
Нормальные напряжения $\sigma_{\theta\varphi}^*(t)$ и $\sigma_{or}^*(t)$ и радиальное перемещение $v_{\theta}^*(t)$ в бетонном слое (фиг. 2) выразятся через усилие $q_{\Delta}^*(t)$ следующими формулами:

$$\sigma_{\theta\varphi}^*(t) = -\frac{b}{r} \frac{q_{\Delta}^*(t)}{\ln b/a}, \quad \sigma_{or}^*(t) = -\frac{b}{r} \frac{\ln r/a}{\ln b/a} \cdot q_{\Delta}^*(t), \quad (3.1)$$

$$v_{\theta}^*(t) = -\frac{1-\nu_1^2}{E(t)} \cdot \frac{b}{\ln b/a} q_{\Delta}^*(t).$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Напряжение же $\sigma_{a\varphi}^*(t)$ в арматуре и радиальное перемещение ее $v_a^*(t)$ будут:

$$\sigma_{a\varphi}^*(t) = \frac{bq_{\Delta}^*(t)}{\delta}, \quad v_a^*(t) = \frac{q_{\Delta}^*(t)c^2}{F_a E_a} = q_{\Delta}^*(t), \quad (3.2)$$

где $c = b + \frac{\delta}{2} \approx b$,

E_a — модуль упругости арматуры,

δ — толщина стенки, т. е. приведенная толщина арматуры,

ν_1 — коэффициент Пуассона для бетона.

Переходим к определению закона затухания предварительных напряжений в железобетонной трубе под влиянием ползучести и изменения модуля упругости бетона, т. е. к определению величины проектного предварительного напряжения в зависимости от времени t .

Радиальная деформация бетона при плоском напряженном состоянии железобетонной трубы выразится формулой:

$$\varepsilon_0^*(t) = \frac{\sigma_{0\varphi}^*(t) - \nu_1 \sigma_{0r}^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_{0\varphi}^*(\tau) - \nu_1 \sigma_{0r}^*(\tau) \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] d\tau. \quad (3.3)$$

С другой стороны, условие совместности деформаций в этом случае выразится равенством:

$$v_0^*(t)_{r=b} = v_a^*(t) - \frac{\Delta}{2\pi} \quad (3.4)$$

или

$$v_0^*(t)_{r=b} = \frac{q_{\Delta}^*(t)b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi}, \quad (3.5)$$

где, для простоты, принято $c = b$.

Далее, замечая, что

$$\varepsilon_0^*(t) = \frac{v_0^*(t)}{r}, \quad (3.6)$$

условие совместности деформаций (3.5) приведем к виду

$$r \varepsilon_0^*(t)_{r=b} = \frac{q_{\Delta}^*(t)b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Подставляя в (3.7) значение радиальной деформации $\varepsilon_0^*(t)$ из (3.3) и пользуясь для $\sigma_{0\varphi}^*(t)$ и $\sigma_{0r}^*(t)$ соответствующими выражениями (3.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{q_{\Delta}^*(t)b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi} = & \left[-\frac{1}{\ln \frac{b}{a}} + \nu_1 \right] \frac{bq_{\Delta}^*(t)}{E(t)} + \\ & + \int_{\tau_1}^t \left[\frac{1}{\ln \frac{b}{a}} - \nu_1 \right] bq_{\Delta}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (3.8)$$

или, умножая обе части уравнения (3.8) на $\frac{E_a F_a}{b}$ и имея в виду, что

$\frac{E_a}{E(t)} = m(t)$, находим:

$$q_{\Delta}^*(t) = \frac{\Delta}{2\pi} \cdot \frac{E_a F_a}{b} - \frac{F_a}{b} \left(\frac{1}{\ln \beta} - \nu_1 \right) m(t) q_{\Delta}^*(t) + \\ + \frac{E_a F_a}{b} \left(\frac{1}{\ln \beta} - \nu_1 \right) \int_{\tau_1}^t q_{\Delta}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] dt, \quad (3.9)$$

где F_a — площадь арматуры,

$$\beta = \frac{b}{a}.$$

Произведя группировку подобных членов в соотношении (3.9), будем иметь:

$$q_{\Delta}^*(t) = \frac{F_a}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_a}{1 + \lambda m(t)} + \\ + \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t q_{\Delta}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{1 + \lambda m(t)}. \quad (3.10)$$

Здесь принято обозначение

$$\lambda_1 = \frac{F_a}{b} \cdot \frac{1 - \nu_1 \ln \beta}{\ln \beta}.$$

Таким образом, задача определения усилия $q_{\Delta}^*(t)$, возникающего между бетонным слоем и арматурой железобетонной трубы от воздействия предварительного натяжения арматуры с учетом ползучести, сводится к решению интегрального уравнения (3.10) с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{1}{1 + \lambda_1 m(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right], \quad (3.11)$$

свободным членом

$$\frac{F_a}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_a}{1 + \lambda_1 m(t)} \quad (3.12)$$

и параметром

$$\lambda_0 = \lambda_1 E_a = \frac{F_a F_a}{b} \cdot \frac{1 - \nu_1 \ln \beta}{\ln \beta}. \quad (3.13)$$

Для нахождения решения этого уравнения воспользуемся для $c(t, \tau)$ зависимостью $c(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$.

Подставляя значение $c(t, \tau)$ в уравнение (3.10), получим:

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta}^*(t) = \frac{\Delta E_a F_a}{2\pi b^2} + \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \varphi'(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] - \right. \\ \left. - \gamma \varphi(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} \right] q_{\Delta}^*(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t , находим

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta}^*(t) = -\gamma \lambda_1 E_a \varphi(t) q_{\Delta}^* + \\ + \gamma \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} q_{\Delta}^*(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Но, из (3.14) имеем:

$$\lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} q_{\Delta}^*(\tau) d\tau = \frac{\Delta E_a F_a}{2\pi b^2} - \\ - [1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta}^*(t) + \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \varphi'(\tau) \right] q_{\Delta}^*(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Подставляя значение этого интеграла в соотношение (3.15), после некоторых преобразований получим:

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta}^*(t) + \gamma [1 + \lambda_1 m(t) + \lambda_1 E_a \varphi(t)] q_{\Delta}^*(t) = \\ = \frac{\gamma F_a E_a \Delta}{2\pi b^2} + \gamma \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \varphi'(\tau) \right] q_{\Delta}^*(\tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Повторно продифференцировав это уравнение, окончательно находим:

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta}^*(t) + \gamma [1 + \lambda_1 m(t) + \lambda_1 E_a \varphi(t)] q_{\Delta}^*(t) = 0. \quad (3.18)$$

Таким образом, закон изменения усилия $q_{\Delta}^*(t)$ в предварительно напряженной железобетонной трубе определяется дифференциальным уравнением (3.18).

После того как величина $q_{\Delta}^*(t)$ определена из уравнения (3.18), проектные предварительные напряжения в железобетонной трубе $\sigma_{\sigma\varphi}^*(t)$, $\sigma_{\sigma r}^*(t)$ и $\sigma_{\sigma a}^*(t)$ с учетом ползучести и переменности модуля упругости бетона определяются по формулам (3.1) и (3.2).

Затухание предварительных напряжений в железобетонных трубах под влиянием только ползучести бетона. Положим для простоты, что в данной железобетонной трубе модуль упругости бетона постоянен и равен E_0 , а мера ползучести его определяется зависимостью (2.21).

Исследуем как при этих условиях будут изменяться во времени проектные значения предварительных напряжений $\sigma_{\sigma\varphi}^*(t)$ и $\sigma_{\sigma\varphi}^*(t)$ в рассматриваемом железобетонном элементе под действием ползучести бетона. Влияние усадки пока учитывать не будем.

В таком случае дифференциальное уравнение (3.18), для определения $q_{\Delta}^*(t)$ примет следующий вид:

$$q_{\Delta}^{**}(t) + \gamma \left[1 + \frac{\lambda_1 E_a \varphi(t)}{1 + \lambda_1 m} \right] q_{\Delta}^*(t) = 0. \quad (3.19)$$

Начальные условия для $q_{\Delta}^*(t)$, согласно (3.10) и (3.15), будут:

$$q_{\Delta}^*(\tau_1) = q_{\Delta}(\tau_1) = \frac{F_a \Delta E_a}{2\pi b^2 [1 + \lambda_1 m]}, \quad (3.20)$$

$$q_{\Delta}^*(\tau_1) = - \frac{\gamma \lambda_1 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \lambda_1 m} q_{\Delta}^*(\tau_1).$$

Пользуясь этими условиями, решение дифференциального уравнения (3.19) можно написать в следующей форме:

$$q_{\Delta}^*(t) = q_{\Delta}(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma \lambda_1 E_a \varphi(\tau_1) e^{\gamma \tau_1}}{1 + \lambda_1 m} \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma z} \left[1 + \frac{\lambda E_a}{1 + \lambda_1 m} \varphi(z) \right] dz \right\}. \quad (3.21)$$

Подставляя в выражение (3.21) значение $\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0$ и пользуясь при интегрировании обозначением для функций влияния $\Phi(\xi, \rho)$, окончательно получим формулу:

$$q_{\Delta}^*(t) = q_{\Delta}(\tau_1) \left\{ 1 - \frac{\gamma \lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m} \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) \frac{\tau_1^{\rho} e^{\gamma \tau_1}}{r^{1-\rho}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] \right\}. \quad (3.22)$$

Здесь принято:

$$\rho = \frac{A_1 \gamma \lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m}, \quad r = \gamma \left[1 + \frac{\lambda_1 E_a C_0}{1 + \lambda_1 m} \right], \quad (3.23)$$

$$\lambda_1 = \frac{F_a}{b} \cdot \frac{1 - \gamma \ln \beta}{\ln \beta}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad m = \frac{E_a}{E_0},$$

$q_{\Delta}(\tau_1)$ — величина усилия $q_{\Delta}^*(t)$ в момент освобождения арматуры от пятажных приспособлений $t = \tau_1$.

Подставляя значение $q_{\Delta}^*(t)$ из соотношения (3.22) в выражения (3.1) и (3.2) для $\sigma_{\delta\varphi}^*(t)$ и $\sigma_{a\varphi}^*(t)$, приведем их к следующему виду:

$$\begin{aligned}\sigma_{\delta\varphi}^*(t) &= \sigma_{\delta}(\tau_1) H_{\delta\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right), \\ \sigma_{a\varphi}^*(t) &= \sigma_a(\tau_1) H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right).\end{aligned}\quad (3.24)$$

При этом

$$\begin{aligned}H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right) &= H_{\delta\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right) = \\ &= 1 - \frac{\gamma\lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m} \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) \frac{\tau_1^p e^{r\tau_1}}{r^{1-p}} [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)].\end{aligned}\quad (3.25)$$

Заметим, что процент армирования трубы связан с ее геометрическими размерами следующей зависимостью:

$$\mu = \frac{\beta}{\beta - 1} \cdot \frac{\delta}{b}.$$

Таким образом, величины $H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$ и $H_{\delta\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$, определяемые соотношением (3.25), представляют коэффициенты затухания предварительных напряжений в железобетонной трубе, причем ими определяется закон изменения величин этих напряжений во времени в зависимости от возраста бетона τ_1 (т. е. от момента времени $t = \tau_1$, при котором были освобождены натяжные приспособления), интенсивности меры ползучести $s(t, \tau)$, геометрической формы поперечного сечения трубы и процента армирования μ .

Для иллюстрации в количественном отношении величины потери предварительного напряжения в железобетонных трубах от воздействия ползучести бетона, нами вычислены значения коэффициентов затухания преднапряжения $H_{\delta\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$ и $H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$ для различных моментов времени t , процента армирования μ и времени отпуска натяжных приспособлений τ_1 , при $\frac{\delta}{b} = 0,002$; мера ползучести бетона $s(t, \tau)$ такая же, как и в предыдущих параграфах.

Значения этих коэффициентов приведены в таблице 3.

Из таблицы видно, что величина потери предварительного напряжения в железобетонных трубах под влиянием ползучести бетона оказывается меньше, чем в изгибаемых балках. Объясняется это тем, что железобетонная труба находится в условиях плоского напряженного состояния, при котором влияние деформации ползучести бетона на напряженное состояние данного элемента сказывается

слабее, чем при линейном напряженном состоянии. Одновременно здесь следует отметить, что по мере увеличения отношения $\beta = \frac{b}{a}$, коэффициент затухания преднапряжения в трубах увеличивается. Это показывает, что при данном отношении $\frac{\delta}{b}$ ползучесть оказывает более сильное влияние в тех случаях, когда труба тонкостенная. В среднем, при изменении $\beta = \frac{b}{a}$ от 1,1 до 1,5, максимальное значение потери преднапряжения при $\tau_1 = 7$ дням достигает от 60 до 30%.

Таблица 3

Значения коэффициентов затухания предварительных напряжений $H_{a\varphi}^*$ ($t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a}$) и $H_{a\varphi}^*$ ($t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a}$) в железобетонной трубе в различные моменты t при $\frac{\delta}{b} = 0,002$

$$H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right) \text{ и } H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$$

$\frac{b}{a}$	1,1 ($\mu = 2,2\%$)			1,2 ($\mu = 1,2\%$)			1,3 ($\mu = 0,867\%$)			1,5 ($\mu = 0,6\%$)		
	τ_1	7	14	28	7	14	28	7	14	28	7	14
7	1	—	—	1	—	—	1	—	—	1	—	—
14	0,8262	1	—	0,8931	1	—	0,9205	1	—	0,9433	1	—
28	0,6154	0,7631	1	0,7515	0,8510	1	0,8112	0,8886	1	0,8615	0,9191	1
45	0,4849	0,6217	0,7637	0,6554	0,7500	0,8507	0,7317	0,8075	0,8784	0,8020	0,8601	0,9201
90	0,3941	0,5144	0,5843	0,5667	0,6564	0,7124	0,6544	0,7284	0,7600	0,7388	0,7968	0,8345
360	0,3780	0,4964	0,5542	0,5450	0,6336	0,6782	0,6326	0,7066	0,7267	0,7170	0,7760	0,8050
∞	0,3780	0,4964	0,5542	0,5450	0,6336	0,6782	0,6326	0,7066	0,7267	0,7170	0,7760	0,8050

Однако при фиксированном значении отношения $\beta = \frac{b}{a}$ в данной железобетонной трубе по мере возрастания $\frac{\delta}{b}$, т. е. с увеличением процента армирования μ коэффициент затухания предварительного напряжения $H_{a\varphi}^* \left(t, \tau_1, \frac{\delta}{b}, \frac{b}{a} \right)$ будет также убывать.

Кроме того, следует отметить, что при возрастании τ_1 величина потери будет уменьшаться и когда τ_1 стремится к бесконечности, т. е. практически при старом возрасте бетона эта потеря будет стремиться к нулю.

Затухание предварительных напряжений в железобетонной трубе от совместного влияния ползучести и усадки бетона. Переходим к изучению вопроса о затухании предварительных напряжений в железобетонных трубах от совместного влияния ползучести и усадки бетона. Будем полагать, что процессе нарастания явления усадки бетона в них протекает согласно закону

$$S_n(t) = S_n^0(r, \varphi) \left[e^{-s\tau_1} - e^{-st} \right] \quad (3.26)$$

считая при этом, что $S_n^0(r, \varphi)$ или постоянно, равно S_0 , или является линейной функцией координаты r .

В этом случае радиальная деформация бетона в рассматриваемой трубе выразится следующей зависимостью:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma_s}^*(t) = & \frac{\sigma_{\sigma_s, \varphi_s}^*(t) - \nu_1 \sigma_{\sigma_s, r_s}(t)}{E(t)} - s(t) - \\ & - \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_{\sigma_s, \varphi_s}^*(\tau) - \nu_1 \sigma_{\sigma_s, r_s}(\tau) \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.27)$$

С другой стороны, условие совместности деформаций будет:

$$v_{\sigma_s}^*(t)/r=b = v_{\sigma_s}^*(t) - \frac{\Delta}{2\pi}, \quad (3.28)$$

или

$$v_{\sigma_s}^*(t)/r=b = \frac{q_{\Delta s}^*(t) b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi}. \quad (3.29)$$

Здесь $q_{\Delta s}^*(t)$ есть радиальное усилие, возникающее между бетонным слоем и арматурой от предварительного натяжения последней, с учетом ползучести и усадки бетона.

Замечая, что

$$\varepsilon_{\sigma_s}^*(t) = \frac{v_{\sigma_s}^*(t)}{r}, \quad (3.30)$$

условие совместности деформаций (3.29) приведем к виду:

$$r\varepsilon_{\sigma_s}^*(t)/r=b = \frac{q_{\Delta s}^*(t) b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi}, \quad (3.31)$$

причем здесь, для простоты, принято $c \approx b$.

Подставляя в (3.31) значение радиальной деформации из (3.27) и пользуясь для $\sigma_{\sigma_s, \varphi_s}^*(t)$ и $\sigma_{\sigma_s, r_s}^*(t)$ соответствующими выражениями (3.1), получим:

$$\frac{q_{\Delta s}^*(t) b^2}{E_a F_a} - \frac{\Delta}{2\pi} = -bS_n(t) - \frac{b(1 - \nu_1 \ln \beta)}{E(t) \ln \beta} q_{\Delta s}^*(t) +$$

$$+ \frac{b(1 - \nu_1 \ln \beta)}{\ln \beta} \int_{\tau_1}^t q_{\Delta s}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] d\tau. \quad (3.32)$$

Произведя группировку подобных членов в соотношении (3.32) после некоторых преобразований будем иметь:

$$q_{\Delta s}^*(t) = \frac{F_s}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_s}{1 + \lambda_1 m(t)} - \frac{E_s F_s S_n(t)}{b[1 + \lambda_1 m(t)]} + \lambda_1 E_s \int_{\tau_1}^t q_{\Delta s}^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] \frac{d\tau}{1 + \lambda_1 m(t)}. \quad (3.33)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad m(t) = \frac{E_s}{E(t)}, \quad \lambda_1 = \frac{E_s (1 - \nu_1 \ln \beta)}{b \ln \beta} \quad (3.34)$$

Δ — начальная относительная деформация арматуры в момент освобождения ее от натяжных приспособлений $t = \tau_1$.

В первой части уравнения (3.33) сумма первых двух слагаемых представляет значение упруго-мгновенного усилия, возникшего между бетонным слоем трубы и арматурой от совместного действия предварительного натяжения и усадки без учета ползучести бетона. Обозначим это усилие так:

$$q_{\Delta s}(t) = \frac{F_s}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_s}{1 + \lambda_1 m(t)} - \frac{E_s F_s S_n(t)}{b[1 + \lambda_1 m(t)]}. \quad (3.35)$$

Таким образом, задача определения величины усилия $q_{\Delta s}^*(t)$ возникающего между бетонным слоем и арматурой железобетонной трубы от воздействия предварительного напряжения с учетом ползучести и усадки бетона сводится к решению интегрального уравнения

$$q_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(t) + \lambda_0 \int_{\tau_1}^t q_{\Delta s}^*(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (3.36)$$

с ядром

$$K(t, \tau) = \frac{1}{1 + \lambda_1 m(t)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right], \quad (3.37)$$

свободным членом

$$q_{\Delta s}(t) = \frac{F_s}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_s}{1 + \lambda_1 m(t)} - \frac{E_s F_s S_n(t)}{b[1 + \lambda_1 m(t)]} \quad (3.38)$$

и параметром

$$\lambda_0 = \lambda_1 E_s, \quad (3.39)$$

где $\lambda_1 = \frac{F_s (1 - \nu_1 \ln \beta)}{b \ln \beta}$, $m(t) = \frac{E_s}{E(t)}$, $\beta = \frac{b}{a}$,

ν_1 — коэффициент Пуассона для бетона.

Для нахождения решения этих уравнений воспользуемся для $c(t, \tau)$ зависимостью (2.17).

Подставляя значение $c(t, \tau)$ из (2.17) в уравнение (3.36) и дифференцируя обе части полученного равенства по t , аналогичным образом, как в пункте 2^о, параграфа 2, находим:

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta s}^*(t) = -\frac{E_a F_a}{b} S_n(t) - \lambda_1 E_a \gamma \varphi(t) q_{\Delta s}^*(t) + \\ + \gamma \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} q_{\Delta s}^*(\tau) d\tau. \quad (3.40)$$

Но, из исходного уравнения (3.33), имеем

$$\lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t [\varphi'(\tau) + \gamma \varphi(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} q_{\Delta s}^*(\tau) d\tau = \frac{E_a \Delta F_a}{2\pi b^2} - \frac{E_a F_a S_n(t)}{b} - \\ - [1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta s}^*(t) + \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \varphi'(\tau) \right] q_{\Delta s}^*(\tau) d\tau. \quad (3.41)$$

Подставляя значения этого интеграла в соотношение (3.40), получим:

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta s}^*(t) + \gamma [1 + \lambda_1 m(t) + \lambda_1 E_a \varphi(t)] q_{\Delta s}^*(t) = \gamma \frac{F_a \Delta E_a}{2\pi b^2} - \\ - \frac{E_a F_a}{b} [S_n'(t) + \gamma S_n(t)] + \gamma \lambda_1 E_a \int_{\tau_1}^t \left[\frac{m'(\tau)}{E_a} + \varphi'(\tau) \right] q_{\Delta s}^*(\tau) d\tau. \quad (3.42)$$

Вторично дифференцируя это уравнение по t , находим

$$[1 + \lambda_1 m(t)] q_{\Delta s}^{**}(t) + \{\lambda_1 m'(t) + \gamma [1 + \lambda_1 m(t) + \lambda_1 E_a \varphi(t)]\} q_{\Delta s}^*(t) = \\ = -\frac{E_a F_a}{b} [S_n''(t) + \gamma S_n'(t)], \quad (3.43)$$

или, после деления обеих частей уравнения (3.43) на $[1 + \lambda_1 m(t)]$, окончательно приведем его к следующему виду:

$$q_{\Delta s}^{**}(t) + \left\{ \gamma + \lambda_1 \frac{m'(t) + \gamma E_a \varphi(t)}{1 + \lambda_1 m(t)} \right\} q_{\Delta s}^*(t) = -\frac{E_a F_a}{b} \cdot \frac{S_n''(t) + \gamma S_n'(t)}{1 + \lambda_1 m(t)}. \quad (3.44)$$

Таким образом, закон изменения во времени величины усилия $q_{\Delta s}^*(t)$ в железобетонных трубах определяется дифференциальным уравнением (3.44).

Для простоты, рассмотрим тот случай, когда в данной железобетонной трубе модуль упругости постоянен и равен E_a , а $c(t, \tau)$ и $S_n(t)$ определяются зависимостями (2.17) и (3.26).

В этом случае дифференциальное уравнение (3.44) для определения $q_{\Delta s}^*(t)$ примет следующий вид:

$$q_{\Delta s}^*(t) + \gamma \left[1 + \frac{\lambda_1 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \lambda_1 m} \right] q_{\Delta s}^*(t) = - \frac{E_a F_a}{b} \cdot \frac{S_n''(t) + \gamma S_n'(t)}{1 + \lambda_1 m(t)}. \quad (3.45)$$

Начальные условия для $q_{\Delta s}^*(t)$, согласно (3.33) и (3.40), будут:

$$q_{\Delta s}^*(\tau_1) = q_{\Delta s}(\tau_1) = \frac{F_a}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta F_a}{1 + \lambda_1 m} - \frac{E_a F_a S_n(\tau_1)}{b [1 + \lambda_1 m]}$$

$$q_{\Delta s}^*(\tau_1) = - \frac{E_a F_a S_n(\tau_1)}{[1 + \lambda_1 m] b} - \frac{\gamma \lambda_1 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \lambda_1 m} q_{\Delta s}(\tau_1), \quad (3.46)$$

или замечая, что согласно (3.26)

$$S_n(\tau_1) = 0$$

$$S_n(\tau_1) = S_0 s e^{-s\tau_1},$$

получим:

$$q_{\Delta s}^*(\tau_1) = q_{\Delta s}(\tau_1) = \frac{F_a}{2\pi b^2} \cdot \frac{\Delta E_a}{1 + \lambda_1 m}$$

$$q_{\Delta s}^*(\tau_1) = - \frac{E_a F_a S_0 s e^{-s\tau_1}}{b (1 + \lambda_1 m)} - \frac{\gamma \lambda_1 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \lambda_1 m} q_{\Delta s}(\tau_1).$$

Пользуясь этими условиями решение дифференциального уравнения (3.45) можно написать в форме:

$$q_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) - \int_{\tau_1}^t e^{-\gamma \int_{\tau_1}^z \left[1 + \frac{\lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m} \varphi(z) \right] dz} \left\{ \frac{E_a F_a S_n(\tau_1)}{[1 + \lambda_1 m] b} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma \lambda_1 E_a \varphi(\tau_1)}{1 + \lambda_1 m} q_{\Delta s}(\tau_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{E_a F_a}{b (1 + \lambda_1 m)} \int_{\tau_1}^z [S_n''(z) + \gamma S_n'(z)] e^{-\gamma \int_{\tau_1}^y \left[1 + \frac{\lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m} \varphi(y) \right] dy} dz \right\} d\tau. \quad (3.47)$$

Подставляя в выражение (3.47) значение $\varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0$ и $S_n(t) = S_0 [e^{-s\tau_1} - e^{-st}]$, и произведя некоторые квадратуры, получим:

$$q_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) - \frac{E_a}{1 + \lambda_1 m} \left[\frac{F_a S_0 s}{b} e^{-s\tau_1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) \left] e^{r\tau_1} \tau_1^p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \right. \\
 & \left. - \frac{E_a F_a S_0 s (\gamma - s)}{b(1 + \lambda_1 m)} \int_{\tau_1}^t e^{-r\tau} \tau^{-p} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz, \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

$$\text{где } p = \frac{A_1 \gamma \lambda_1 E_a}{1 + \lambda_1 m}, \quad r = \gamma \left(1 + \frac{\lambda_1 E_a C_0}{1 + \lambda_1 m} \right).$$

Для получения в замкнутом виде расчетных формул, удобных для практического применения, оценим выражение (3.48) сверху и снизу аналогичным путем, как в параграфе 2.

Для этого, предварительно проинтегрировав по частям двойной интеграл в правой части выражения (3.48) и пользуясь зависимостью (2.33), приведем это выражение к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 q_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) & - \frac{E_a}{1 + \lambda_1 m} \left[\frac{S_0 s F_a}{b} + \right. \\
 & + \gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) \left] e^{r\tau_1} \tau_1^p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \\
 & - \frac{E_a F_a S_0 s (\gamma - s)}{r b (1 + \lambda_1 m)} \left\{ t^{-p} \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} \tau^p d\tau - t^{-p} e^{-r\tau} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau + \right. \\
 & \left. + p \int_{\tau_1}^t \frac{d\tau}{\tau^{1+p}} \int_{\tau_1}^{\tau} e^{-sz} z^p dz - p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^{1+p}} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz \right\}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям предпоследний интеграл в соотношении (3.49), после соответствующих сокращений получим:

$$\begin{aligned}
 q_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) & - \frac{E_a e^{r\tau_1} \tau_1^p}{1 + \lambda_1 m} \left[\frac{S_0 s F_a e^{-s\tau_1}}{b} + \right. \\
 & + \gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) \left] \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0 s (\gamma - s) E_a F_a}{r b (1 + \lambda_1 m)} \left\{ \int_{\tau_1}^t e^{-s\tau} d\tau - \right. \\
 & \left. t^{-p} e^{-rt} \int_{\tau_1}^t e^{(r-s)\tau} \tau^p d\tau - p \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-r\tau}}{\tau^{1+p}} d\tau \int_{\tau_1}^{\tau} e^{(r-s)z} z^p dz \right\}. \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

Оценим теперь это выражение сверху и снизу в том случае, когда $\gamma - s > 0$. Обозначив значение $q_{\Delta s}^*(t)$ с избытком через $\bar{q}_{\Delta s}^*(t)$, а с недостатком — через $\underline{q}_{\Delta s}^*(t)$ и пользуясь неравенством (2.36), будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\Delta s}^*(t) = & q_{\Delta s}(\tau_1) - \frac{E_a e^{r\tau_1} \tau_1^p}{1 + \lambda_1 m} \left[\frac{S_0 s F_a e^{-s\tau_1}}{b} + \right. \\ & \left. + \gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) \right] \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \\ & - \frac{S_0 s (\gamma - s) E_a F_a}{r b (1 + \lambda_1 m)} \left\{ \int_{\tau_1}^1 e^{-s\tau} d\tau - \left(\frac{\tau_1}{t} \right)^p e^{-rt} \int_{\tau_1}^1 e^{(r-s)z} dz - \right. \\ & \left. - p \tau_1^p \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-r\tau}}{\tau^{1+p}} d\tau \int_{\tau_1}^z e^{(r-s)z} dz \right\}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

или

$$\begin{aligned} \underline{q}_{\Delta s}^*(t) = & q_{\Delta s}(\tau_1) - \frac{E_a e^{r\tau_1} \tau_1^p}{1 + \lambda_1 m} \left[\frac{S_0 s F_a e^{-s\tau_1}}{b} + \right. \\ & \left. + \gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} - C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) \right] \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-s\tau}}{\tau} d\tau - \\ & - \frac{S_0 s (\gamma - s) E_a F_a}{r b (1 + \lambda_1 m)} \left\{ \frac{e^{-s\tau_1} - e^{-st}}{s} - \left(\frac{\tau_1}{t} \right)^p \frac{e^{-st} - e^{-rt + (r-s)\tau_1}}{r-s} - \right. \\ & \left. - \frac{p \tau_1^p}{r-s} \int_{\tau_1}^1 \left[e^{-s\tau} - e^{-r\tau + (r-s)\tau_1} \right] \frac{d\tau}{\tau^{1+p}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Интегрируя по частям последний интеграл в выражении (3.52), после группировки найдем:

$$\begin{aligned} \underline{q}_{\Delta s}^*(t) = & q_{\Delta s}(\tau_1) \frac{E_a e^{r\tau_1} \tau_1^p}{1 + \lambda_1 m} \left[\gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \frac{S_0 s (r - \gamma) F_a}{b(r-s)} e^{-s\tau_1} \right] \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-r\tau}}{\tau^p} d\tau - \frac{S_0 s (\gamma - s) E_a F_a}{r b (1 + \lambda_1 m)} \left\{ \frac{e^{-s\tau_1} - e^{-st}}{s} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\tau_1^p s}{r-s} \int_{\tau_1}^1 \frac{e^{-s\tau}}{\tau} d\tau \Big\}. \quad (3.53)$$

Пользуясь обозначением для функции влияния $\Phi(\xi, \rho)$, выражение (3.53) окончательно запишем в виде:

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) - \frac{E_a e^{-r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1}}{1 + \lambda_{1m}} \left[\gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) + \right. \\ \left. + \frac{S_0 s (r-\gamma) F_a e^{-s\tau_1}}{b(r-s)} \right] \left[\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho) \right] - \frac{S_0 (\gamma-s) E_a F_a}{rb(1 + \lambda_{1m})} \left\{ e^{-s\tau_1} - \right. \\ \left. - e^{-st} + \frac{\tau_1^p s^{p+1}}{r-s} [\Phi(st, \rho) - \Phi(s\tau_1, \rho)] \right\}. \quad (3.54) \end{aligned}$$

Аналогичным путем, из соотношения (3.50), находим

$$\begin{aligned} \bar{q}_{\Delta s}^*(t) = q_{\Delta s}(\tau_1) - \frac{E_a e^{-r\tau_1} \tau_1^p r^{p-1}}{1 + \lambda_{1m}} \left[\gamma \lambda_1 \left(\frac{A_1}{\tau_1} + C_0 \right) q_{\Delta s}(\tau_1) + \right. \\ \left. + \frac{S_0 s F_a e^{-s\tau_1}}{b} \right] \cdot [\Phi(rt, \rho) - \Phi(r\tau_1, \rho)] - \frac{S_0 (\gamma-s) E_a F_a}{rb(1 + \lambda_{1m})} \left\{ (r-s) e^{-s\tau_1} - \right. \\ \left. - r e^{-st} + s e^{-rt + (r-s)\tau_1} - ps [E_i(-st) - E_i(-s\tau_1)] + \right. \\ \left. + ps e^{(r-s)\tau_1} [E_i(-rt) - E_i(-r\tau_1)] \right\}. \quad (3.55) \end{aligned}$$

После того, как верхняя и нижняя грани величины усилия $q_{\Delta s}^*(t)$ определены по формулам (3.54) и (3.55), значения проектных предварительных напряжений $\sigma_{\sigma\varphi, s}^*(t)$ и $\sigma_{a\varphi, s}^*(t)$ в железобетонной трубе с учетом ползучести и усадки бетона определяются по формулам (3.1) и (3.2).

В заключение отметим, что задачу по определению напряжений в железобетонной трубе от совместного действия внешней нагрузки и предварительного натяжения арматуры с учетом ползучести и усадки бетона можно решить таким же путем, как и в случае изгибаемых железобетонных элементов, приведенном в § 2 настоящей работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фрайфельд С. Е.—Собственные напряжения в железобетоне, 1941.
2. Михайлов В. В.—Непрерывное армирование предварительно напряженных конструкций. Сборник статей „Предварительно напряженные железобетонные конструкции“, Стройиздат, 1947.
3. Михайлов В. В.—Опыты определения трещиностойчивости напряженно-армированных центрифугированных балок. Сборник статей „Предварительно напряженные железобетонные конструкции“, Стройиздат, 1947.
4. Гвоздев А. А.—Усиление железобетонной оболочки с применением предварительно напряженной арматуры. Там же.
5. Пастернак П. Л.—Предварительно напряженные железобетонные конструкции, Там же.
6. Коровкин А. П.—Расчет железобетонных предварительно напряженных элементов на изгиб, Там же.
7. Фрайфельд С. Е. и Ратц Э. Г.—Расчет предварительно напряженных железобетонных элементов. Там же.
8. Ратц Э. Г.—Предварительно напряженные железобетонные резервуары. Стройиздат, 1948.
9. Дмитриев С. А.—Усадка и ползучесть центробежного бетона в предварительно напряженных железобетонных элементах. Сборник статей „Предварительно напряженные железобетонные конструкции“, Стройиздат, 1947.
10. Арутюнян Н. Х.—Некоторые задачи теории расчета железобетонных элементов с учетом ползучести и усадки бетона. Труды ЕрПИ, № 4, 1950.

Ն. Խ. Հարությունյան

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՐՈՒՄԸ ՆԱԽԱՊԵՍ ԶԳՎԱԾ ԱՐՄԱՏՈՒՐԱՅՈՎ
ԵՐԿԱՔԱԲԵՏՈՆ ԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐՈՒՄ՝ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԿՄԿՍԱՆ
ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը մեջ հետազոտված է նախնական լարումներ ունեցող բնական կառուցվածքների լարված վիճակը:

Նման կառուցվածքների իրականացման դեպքում՝ արմատության ձեռքման միջոցով բևտոնում նախնական սեղմում առաջացնելու շնորհիվ սաացվում է կառուցվածքի սեփական բաշի իջեցում:

Այս ախյի կառուցվածքների համար պահանջվում են հաշվարկի նոր եղանակներ:

Նախնական լարումներ ունեցող երկաթարևտոն կոնստրուկցիաներում բևտոնի կծկման ազդեցությունից բացի արմատության ձգումը վերացնելուց հետո առաջ են դալլա նաև սեփական լարումներ: Ժամանակի ընթացքում այդ լարումները բևտոնի սողքի և կծկման ազդեցության տակ ենթարկվում են անբնդհատ փոփոխման: Այդ պատճառով նախնական լարումներ ունեցող երկաթարևտոն կոնստրուկցիաների աշխատանքի լրիվ և բազմակողմանի ուսումնասիրություն համար անհրաժեշտ է իմանալ նաև նրանց սեփական լարումների փոփոխման օրենքը՝ ժամանակից կախված:

վարք զտեաջատա երկուս զքի դ
վարք զտեաջատա դքի վեափնայմսփիցե յամի զտքստիշուչ իմի վեզնուրաթ
-ակատչ զսփնայմսփիցե վնսադմ չ զտիցցիչ մքունմս վեզնուրաթ զտեաջատա
-ատա եվուրաթ վեզնուրաթ զտեաջատա իչ սեղանայմս զտեաջատա իչ սեղանայմս
զտեաջատա վեափնայմս սեղանայմս վեափնայմս վեափնայմս

3. Երկուստեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս

4. Երկուստեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս

5. Երկուստեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս

6. Երկուստեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս

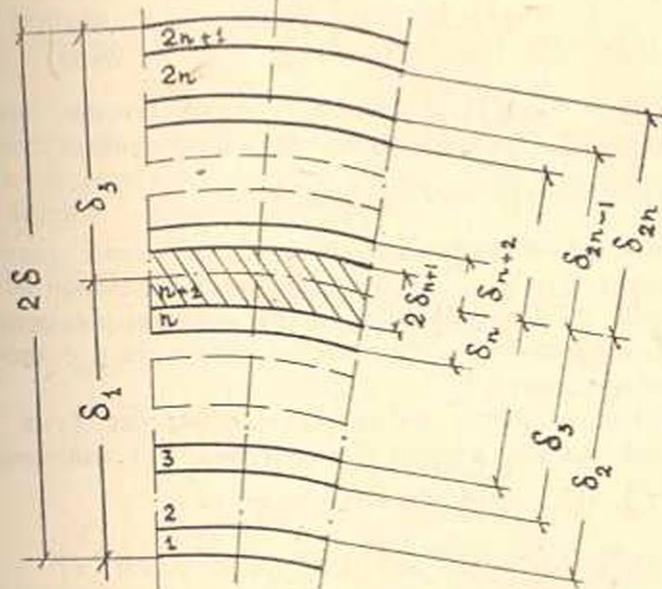
7. Երկուստեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս
զտեաջատա վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս վեափնայմս

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев

1. Рассмотрим многослойную тонкую цилиндрическую оболочку, построенную из нечетного числа однородных анизотропных слоев, симметрично расположенных относительно срединной поверхности оболочки. Эта поверхность одновременно является срединной поверхностью среднего слоя (фиг. 1.).



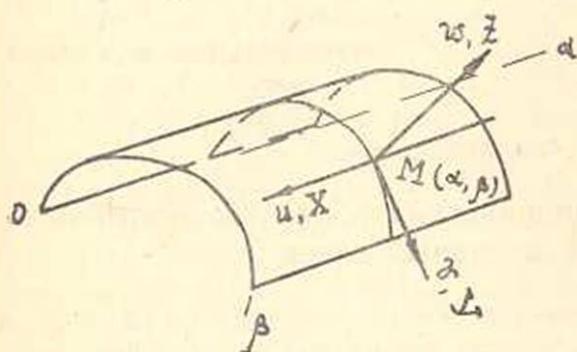
Фиг. 1.

Считаем, что материал каждого слоя подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности оболочки [1].

Предполагается также, что все слои при деформировании остаются упругими и работают совместно, т. е. скольжения слоев по поверхностям контакта не возможны.

Положение точек на срединной поверхности цилиндрической оболочки будем определять координатами: α — вдоль образующей, и β — по дуге поперечного сечения срединной поверхности (фиг. 2).

Коэффициенты первой квадратичной формы в этой системе координат имеют следующие значения: $A = B = 1$, т. е. срединная поверхность цилиндрической оболочки имеет метрику плоскости.



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} + \kappa w, & \omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ z_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, & z_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, & \tau &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$, $w = w(\alpha, \beta)$ — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения точки (α, β) срединной поверхности,

$\kappa = \frac{1}{R}$ — кривизна срединной поверхности.

Для слоистой анизотропной оболочки в целом считаем справедливой гипотезу о том, что нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки, после деформации, остается прямолинейным, нормальным к срединной поверхности и сохраняет свою первоначальную длину [2].

В силу этой гипотезы, из обобщенного закона Гука в случае наличия одной плоскости упругой симметрии, для напряжений

σ_α^m , σ_β^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$, m -го слоя оболочки получим:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^m &= B_{11}^m \varepsilon_1 + B_{12}^m \varepsilon_2 + B_{16}^m \omega + \gamma (B_{11}^m z_1 + B_{12}^m z_2 + B_{16}^m \tau) \\ \sigma_\beta^m &= B_{12}^m \varepsilon_1 + B_{22}^m \varepsilon_2 + B_{26}^m \omega + \gamma (B_{12}^m z_1 + B_{22}^m z_2 + B_{26}^m \tau) \\ \tau_{\alpha\beta}^m &= B_{16}^m \varepsilon_1 + B_{26}^m \varepsilon_2 + B_{66}^m \omega + \gamma (B_{16}^m z_1 + B_{26}^m z_2 + B_{66}^m \tau), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где аналогично тому, что у С. Г. Лехницкого [1]:

$$B_{ik}^m = \frac{A_{ik}^m A_{33}^m - A_{i3}^m A_{k3}^m}{A_{33}^m} \quad (i, k = 1, 2, 6) \quad (2.3)$$

Здесь A_{ik}^m являются упругими постоянными. Общее число независимых упругих постоянных равно 13. В силу симметрии матрицы

коэффициентов обобщенного закона Гука $A_{ik}^m = A_{ki}^m$.

Остальные три составляющие тензора напряжений определяем из условий равновесия дифференциального элемента m -го слоя оболочки [2].

Ограничиваясь точностью формул (2.1) для напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$, получим:

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma}^m &= - \int \left[\frac{\partial \sigma_{\alpha}^m}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \beta} \right] d\gamma + \varphi_m(\alpha, \beta) \\ \tau_{\beta\gamma}^m &= - \int \left[\frac{\partial \sigma_{\beta}^m}{\partial \beta} + \frac{\partial \tau_{\alpha\beta}^m}{\partial \alpha} \right] d\gamma + \psi_m(\alpha, \beta),\end{aligned}\quad (2.4)$$

где $\varphi_m(\alpha, \beta)$ и $\psi_m(\alpha, \beta)$ — функции, появившиеся в силу интегрирования по γ . Функции φ_m и ψ_m определяем как в слоистых пластинках [3], т. е. из условий на поверхностях контакта смежных слоев и на внешних поверхностях оболочки (фиг. 1).

а) На верхней поверхности $\gamma = \delta$

$$\tau_{\alpha\gamma}^{2n+1} = X, \quad \tau_{\beta\gamma}^{2n+1} = Y, \quad (2.5)$$

где $X(\alpha, \beta)$ и $Y(\alpha, \beta)$ являются тангенциальными составляющими интенсивности внешней нагрузки, δ — половина толщины оболочки.

б) на нижней поверхности $\gamma = -\delta$

$$\tau_{\alpha\gamma}^1 = 0, \quad \tau_{\beta\gamma}^1 = 0. \quad (2.6)$$

в) на поверхностях контакта смежных слоев:

при $\gamma = \delta$ $m = (n+1), (n+2), \dots, 2n,$

при $\gamma = -\delta$ $m = 2, 3, 4 \dots (n+1),$

$$u_m = u_{m-1}, \quad v_m = v_{m-1}, \quad (2.7)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \tau_{\alpha\gamma}^{m-1}, \quad \tau_{\beta\gamma}^m = \tau_{\beta\gamma}^{m-1}. \quad (2.8)$$

В силу того, что основная гипотеза дана для всего пакета оболочки в целом, условия контакта (2.7) выполняются автоматически.

Подставляя значения напряжений σ_{α}^m , σ_{β}^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$ из (2.2) в (2.4), и учитывая (2.1), (2.5), (2.6) и (2.8), для касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$, получим [4]:

для слоев от внутреннего (1-го) до среднего $(n+1)$ -го включительно, т. е. для $m = 1, 2, 3 \dots (n+1)$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^m &= \frac{\gamma^2}{2} E(B_{ik}^m) w - \gamma [P_\alpha(B_{ik}^m) u + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^m) v + R_\alpha(B_{ik}^m) w] - \\ &- \frac{\delta^2}{2} E(g_{ik}^m) w - \delta [P_\alpha(t_{ik}^m) u + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^m) v + R_\alpha(t_{ik}^m) w], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\gamma}^m &= \frac{\gamma^2}{2} F(B_{ik}^m) w - \gamma [P_\beta(B_{ik}^m) v + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^m) u + R_\beta(B_{ik}^m) w] - \\ &- \frac{\delta^2}{2} F(g_{ik}^m) w - \delta [P_\beta(t_{ik}^m) v + Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^m) u + R_\beta(t_{ik}^m) w]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для слоев от наружного $(2n+1)$ -го до среднего $(n+1)$ -го включительно, т. е. для $m = (n+1), (n+2) \dots (2n+1)$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^m &= \frac{\gamma^2}{2} E(B_{ik}^{2n+2-m}) w - \gamma [P_\alpha(B_{ik}^{2n+2-m}) u + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^{2n+2-m}) v + \\ &+ R_\alpha(B_{ik}^{2n+2-m}) w] - \frac{\delta^2}{2} E(g_{ik}^{2n+2-m}) w - \delta [P_\alpha(t_{ik}^{2n+2-m}) u + \\ &+ Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^{2n+2-m}) v + R_\alpha(t_{ik}^{2n+2-m}) w] + X, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\gamma}^m &= \frac{\gamma^2}{2} F(B_{ik}^{2n+2-m}) w - \gamma [P_\beta(B_{ik}^{2n+2-m}) v + Q_{\alpha\beta}(B_{ik}^{2n+2-m}) u + \\ &+ R_\beta(B_{ik}^{2n+2-m}) w] - \frac{\delta^2}{2} F(g_{ik}^{2n+2-m}) w - \delta [P_\beta(t_{ik}^{2n+2-m}) v + \\ &+ Q_{\alpha\beta}(t_{ik}^{2n+2-m}) u + R_\beta(t_{ik}^{2n+2-m}) w] + Y. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_\alpha(b_{ik}) &= b_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2b_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ Q_{\alpha\beta}(b_{ik}) &= b_{16} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{26} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \\ P_\beta(b_{ik}) &= b_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2b_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + b_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$R_\alpha(b_{ik}) = \left[b_{12} \frac{\partial}{\partial \alpha} + b_{26} \frac{\partial}{\partial \beta} \right] \kappa, \quad (2.14)$$

$$R_\beta(b_{ik}) = \left[b_{22} \frac{\partial}{\partial \beta} + b_{26} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right] \kappa.$$

$$E(b_{ik}) = b_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + 3b_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + b_{26} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3}, \quad (2.15)$$

$$F(b_{ik}) = b_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + 3b_{26} \frac{\partial^3}{\partial \beta^2 \partial \alpha} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + b_{16} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}. \quad (2.16)$$

Коэффициентами линейных операторов служат:

$$t_{ik}^m = \frac{1}{\delta} \left[\delta_m B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s - \delta_{s+1}) \right], \quad t_{ik}^1 = B_{ik}^1 \quad (2.17)$$

$$g_{ik}^m = \frac{1}{\delta^2} \left[\delta_m^2 B_{ik}^m + \sum_{s=1}^{m-1} B_{ik}^s (\delta_s^2 - \delta_{s+1}^2) \right], \quad g_{ik}^1 = B_{ik}^1 \quad (2.18)$$

где $m = 2, 3, 4 \dots (n+1)$.

3. Напряжения в каждом слое оболочки вызывают внутренние, статически эквивалентные им обобщенные усилия [2, 4, 5]:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{11} u + c_{16} v) + \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{12} v + c_{16} u) + c_{17} k w, \\ T_2 &= \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{22} v + c_{26} u) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{12} u + c_{26} v) + c_{22} k w, \\ S &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (c_{16} u + c_{66} v) + \frac{\partial}{\partial \beta} (c_{26} v + c_{66} u) + c_{26} k w. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Изгибающие и крутящий моменты:

$$\begin{aligned} G_1 &= D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ G_2 &= D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ H &= - \left(2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поперечные силы:

$$N_1 = -E(D_{ik}) w, \quad N_2 = -F(D_{ik}) w, \quad (3.3)$$

где $E(D_{ik})$ и $F(D_{ik})$ — вышеприведенные линейные операторы третьего порядка.

Здесь и в дальнейшем коэффициенты c_{ik} и D_{ik} являются соответственно жесткостями растяжения (сжатия) и изгиба. Их можно определить посредством следующих формул [4,5]:

$$c_{ik} = 2 \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1} + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m - \delta_{m+1}) \right] \quad (3.4)$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \left[B_{ik}^{n+1} \delta_{n+1}^3 + \sum_{m=1}^n B_{ik}^m (\delta_m^3 - \delta_{m+1}^3) \right]. \quad (3.5)$$

4. Из общих уравнений статики [2], после некоторых преобразований, для пологой цилиндрической оболочки получим следующие уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} + X = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \alpha} + Y = 0 \\ \kappa T_2 + L(D_{ik})w - Z = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $L(D_{ik})$ — линейный оператор четвертого порядка:

$$\begin{aligned} L(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Как четвертое уравнение системы (4.1) может служить уравнение неразрывности [2,6], которое для анизотропной слоистой цилиндрической оболочки имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (a_{11}T_2 - a_{12}T_1 - a_{16}S) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (a_{66}S - a_{26}T_1 - a_{16}T_2) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} (a_{22}T_1 - a_{12}T_2 - a_{26}S) - \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}\Omega}, \\ a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \\ a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}\Omega}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\Omega = c_{66}^2 \left[(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2 \right]. \quad (4.5)$$

5. Пусть искомыми будут составляющие перемещения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$, через которые посредством формул (3.1) — (3.3) выражены все внутренние усилия.

Подставляя значения T_1 , T_2 и S из (3.1) в (4.1), получим полную систему дифференциальных уравнений (5.1) относительно трех основных искомого u , v , w :

$$\begin{aligned} P_\alpha(c_{ik})u + Q_{\alpha\beta}(c_{ik})v + R_\alpha(c_{ik})w + X = 0, \\ P_\beta(c_{ik})v + Q_{\alpha\beta}(c_{ik})u + R_\beta(c_{ik})w + Y = 0, \\ R_\alpha(c_{ik})u + R_\beta(c_{ik})v + L(D_{ik})w + c_{22}\kappa^2w - Z = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Система (5.1) является разрешающей, т. к. имея решение этой системы, при заданных граничных условиях можно определить все

внутренние усилия цилиндрической анизотропной и слоистой оболочки при произвольном нагружении.

Наряду с внутренними усилиями существенный интерес представляют напряжения σ_α^m , σ_β^m и $\tau_{\alpha\beta}^m$ в каждом слое оболочки. Последнее определяем посредством следующих формул:

$$\sigma_\alpha^m = B_{11}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{12}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{16}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{12}^m \kappa w - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2B_{16}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \quad (5.2)$$

$$\sigma_\beta^m = B_{22}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{12}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{22}^m \kappa w - \gamma \left(B_{22}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2B_{26}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right), \quad (5.3)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = B_{16}^m \frac{\partial u}{\partial \alpha} + B_{26}^m \frac{\partial v}{\partial \beta} + B_{66}^m \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + B_{26}^m \kappa w - \gamma \left(B_{16}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{26}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + 2B_{66}^m \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right). \quad (5.4)$$

Определенный интерес представляет случай, когда $X=Y=0$, т. е. случай наличия лишь поверхностной нормальной нагрузки $Z \neq 0$.

В этом случае, полагая:

$$w = L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (5.5)$$

$$u = \kappa \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \Phi, \quad (5.6)$$

$$v = -\kappa \frac{\partial}{\partial \beta} \left[a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2a_{26} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \Phi - a_{16} \kappa \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \Phi, \quad (5.7)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (5.1). При этом третье уравнение принимает следующий вид:

$$L_1(a_{ik}) L(D_{ik}) \Phi + \kappa^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = Z. \quad (5.8)$$

Это разрешающее уравнение восьмого порядка является развитием разрешающего уравнения В. З. Власова [2], данное для изотропной цилиндрической оболочки. Это же уравнение можно было бы получить, воспользовавшись смешанным методом В. З. Власова [2, 7, 8].

В формулу (5.5) и в уравнение (5.8) входит новый линейный оператор четвертого порядка, который имеет следующий вид:

$$L_1(a_{ik}) = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}. \quad (5.9)$$

Подставляя значения $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$ из (5.5), (5.6) и (5.7) в формулы (3.1), для тангенциальных сил получим:

$$T_1 = \kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}, \quad T_2 = \kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}, \quad S = -\kappa \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2}. \quad (5.10)$$

Подставляя значение $w(\alpha, \beta)$ из (5.5) в (3.2) и (3.3), для моментов и поперечных сил получим;

$$\begin{aligned} G_1 &= \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2D_{10} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \\ G_2 &= \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2D_{20} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \\ H &= - \left(2D_{00} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} + D_{10} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{20} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$N_1 = -E (D_{ik}) [L_1(a_{ik})] \Phi, \quad N_2 = -F (D_{ik}) [L_1(a_{ik})] \Phi. \quad (5.12)$$

Напряжения в каждом слое определяем посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x^m &= \left[\left(-a_{12} B_{11}^m + a_{11} B_{22}^m - a_{10} B_{10}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{20} B_{10}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{20} B_{11}^m + a_{10} B_{12}^m - a_{00} B_{10}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{10}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^m &= \left[\left(-a_{12} B_{12}^m + a_{11} B_{22}^m - a_{10} B_{20}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{20} B_{20}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{20} B_{12}^m + a_{10} B_{22}^m - a_{00} B_{20}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{22}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{20}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^m &= \left[\left(-a_{12} B_{10}^m + a_{11} B_{20}^m - a_{10} B_{00}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \left(a_{22} B_{10}^m - a_{12} B_{20}^m - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_{20} B_{00}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \left(a_{20} B_{10}^m + a_{10} B_{20}^m - a_{00} B_{00}^m \right) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ &\quad - \gamma \left(B_{10}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{20}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 2B_{00}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^m = \left[\frac{\gamma^2}{2} E (B_{ik}^m) - \frac{\delta^2}{2} E (g_{ik}^m) \right] L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (5.16)$$

$$\tau_{\beta\gamma}^m = \left[\frac{\gamma^2}{2} F (B_{ik}^m) - \frac{\delta^2}{2} F (g_{ik}^m) \right] L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (5.17)$$

Формулы касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}^m$ и $\tau_{\beta\gamma}^m$ не отличаются от аналогичных формул С. Г. Лехницкого [3,9], данные для анизотропной слоистой пластинки. Это совпадение объясняется наличием исходных предпосылок (2.1).

Рассматривая формулы (5.8)–(5.17), заключаем, что задача расчета пологой анизотропной слоистой цилиндрической оболочки, при действии лишь нормально приложенной нагрузки, сводится к разысканию скалярной функции $\Phi(\alpha, \beta)$, т. е. к решению разрешающего дифференциального уравнения (5.8) при заданных граничных условиях.

6. В инженерной практике широко применяются слоистые оболочки, составленные из ортотропных слоев, т. е. из слоев, материал которых имеет три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии.

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии каждого слоя будет параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две — перпендикулярны к координатным линиям

$$\alpha = \text{Const}, \quad \beta = \text{Const}.$$

Тогда для коэффициентов B_{ik}^m будем иметь:

$$\begin{aligned} B_{11}^m &= \frac{E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, & B_{22}^m &= \frac{E_2^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, & B_{\alpha\alpha}^m &= G_{12}^m, \\ B_{12}^m &= \frac{\mu_{12}^m \mu_{21}^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m} = \frac{\mu_{21}^m E_1^m}{1 - \mu_{12}^m \mu_{21}^m}, & B_{10}^m &= B_{20}^m = 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь $E_1^m = E_\alpha^m$ и $E_2^m = E_\beta^m$ — модули упругости соответственно вдоль главных направлений, $\beta = \text{Const}$, $\alpha = \text{Const}$, $\mu_{12}^m = \mu_{\alpha\beta}^m$ и $\mu_{21}^m = \mu_{\beta\alpha}^m$ — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление действия силы), $G_{12}^m = G_{\alpha\beta}^m$ — модули сдвига.

В силу (6.1), на основании (3.4) и (3.5), получим:

$$c_{10} = c_{20} = 0, \quad D_{10} = D_{20} = 0. \quad (6.2)$$

Разрешающее уравнение (5.8) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_1 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + P_3 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + P_5 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^4 \partial \beta^4} + P_4 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^6} + P_2 \frac{\partial^8 \Phi}{\partial \beta^8} + \\ + \kappa^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = Z, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $P_1 = a_{11} D_{11}$, $P_3 = [D_{11}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{11}(D_{12} + 2D_{66})]$,

$P_2 = a_{22} D_{22}$, $P_4 = [D_{22}(a_{66} - 2a_{12}) + 2a_{22}(D_{12} + 2D_{66})]$,

$P_5 = a_{11} D_{22} + 2(a_{66} - 2a_{12})(D_{12} + 2D_{66}) + a_{22} D_{12}$. (6.4)

Для внутренних тангенциальных сил имеем те же формулы (5.10).

Для моментов и поперечных сил получим:

$$G_1 = \left(D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \quad (6.5)$$

$$G_2 = \left(D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi.$$

$$H = -2D_{66} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.6)$$

$$N_1 = - \left[D_{11} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \frac{\partial}{\partial \alpha} L_1(a_{ik}) \Phi,$$

$$N_2 = - \left[D_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \frac{\partial}{\partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.7)$$

Для напряжений в каждом слое оболочки получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x^m = & \left[(a_{11}B_{12}^m - a_{12}B_{11}^m) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + (a_{22}B_{11}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ & - \gamma \left(B_{11}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta^m = & \left[(a_{22}B_{12}^m - a_{12}B_{22}^m) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{11}B_{22}^m - a_{12}B_{12}^m) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \kappa \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} - \\ & - \gamma \left(B_{22}^m \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + B_{12}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) L_1(a_{ik}) \Phi, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^m = -\kappa a_{66} B_{66}^m \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - 2\gamma B_{66}^m \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} L_1(a_{ik}) \Phi. \quad (6.10)$$

Формулы (5.16) и (5.17) касательных напряжений внешне остаются без изменений.

Линейные операторы, входящие в эти формулы, примут следующий упрощенный вид:

$$L_1(a_{ik}) = a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.11)$$

$$L(D_{ik}) = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}, \quad (6.12)$$

$$E(b_{ik}) = b_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad (6.13)$$

$$F(b_{ik}) = b_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (b_{12} + 2b_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \beta}. \quad (6.14)$$

В этом случае упрощаются также формулы перемещений:

$$w = L_1(a_{1k}) \Phi, \quad (6.15)$$

$$u = k \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \Phi, \quad (6.16)$$

$$v = -k \frac{\partial}{\partial \beta} \left[a_{22} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{66} - a_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right] \Phi. \quad (6.17)$$

7. Пусть пологая цилиндрическая оболочка, перекрывающая прямоугольный план ($a \times b$) несет сосредоточенную силу Q , приложенную в произвольной точке ($\alpha = x$, $\beta = y$).

Если θ — центральный угол поперечного сечения оболочки, то длина дуги этого сечения $b = \frac{\pi R}{180} \theta$.

Пусть оболочка на всех четырех краях $\alpha = 0$, $\alpha = a$, $\beta = 0$ и $\beta = b$ имеет радиальное шарнирно подвижное закрепление. Это значит, что мы должны искать решение дифференциального уравнения (6.3), удовлетворяющее следующим граничным условиям [2]:

$$w = 0, \quad v = 0, \quad G_1 = 0, \quad T_1 = 0 \quad \text{при } \alpha = 0, \quad \alpha = a \quad (7.1)$$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad G_2 = 0, \quad T_2 = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \quad \beta = b$$

Таким решением уравнения (6.3) является:

$$\Phi = \frac{4Q}{ab} \frac{a^8}{\pi^8} \sum_i \sum_k \frac{1}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7.2)$$

где введено обозначение

$$\Delta_{Qik} = P_1 i^8 + P_2 \lambda^2 i^6 k^2 + P_3 \lambda^4 i^4 k^4 + P_4 \lambda^6 i^2 k^6 + P_5 \lambda^8 k^8 + \frac{i^4 a^4}{R^2 \pi^4}. \quad (7.3)$$

Здесь и в дальнейшем $\lambda = \frac{a}{b}$.

Имея значение искомой функции $\Phi(\alpha, \beta)$, посредством ранее приведенных формул найдем расчетные формулы оболочки:

$$w = \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (7.4)$$

$$\text{где } \Delta_{aik} = a_{11} i^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda^2 i^2 k^2 + a_{22} \lambda^4 k^4. \quad (7.5)$$

Для напряжений получим:

$$\sigma_x^m = \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4 R} \sum_i \sum_k \frac{[(a_{11} B_{12}^m - a_{12} B_{11}^m) i^4 + (a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m) \lambda^2 i^2 k^2]}{\Delta_{Qik}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} + \\ & + \gamma \frac{4Q\lambda}{\pi^2} \sum_{i,k} \frac{(B_{11}^m i^2 + B_{12}^m \lambda^2 k^2) \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta}^m &= \frac{4Q\lambda a^2}{\pi^4 R} \sum_{i,k} \frac{[(a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m) \lambda^2 i^2 k^2 + (a_{11} B_{22}^m - a_{12} B_{12}^m) i^4]}{\Delta_{Qik}} \times \\ & \times \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} + \\ & + \gamma \frac{4Q\lambda}{\pi^2} \sum_{i,k} \frac{(B_{22}^m \lambda^2 k^2 + B_{12}^m i^2) \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^m &= \frac{4Q\lambda^2 a^2}{\pi^4 R} a_{66} B_{66}^m \sum_{i,k} \frac{i^3 k}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{i\pi \beta}{b} - \\ & - 2\gamma \frac{4Q\lambda^2}{\pi^2} B_{66}^m \sum_{i,k} \frac{i k \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma}^m &= -\frac{4Q}{\pi b} \sum_{i,k} \left\{ \frac{\left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda^2 i^2 k^2 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} + \right. \\ & \left. + \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2} B_{11}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{11}^m \right) i^3 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \right\} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \cos \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}, \quad (7.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\gamma}^m &= -\frac{4Q}{\pi b} \sum_{i,k} \left\{ \frac{\left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda^2 i^2 k}{\Delta_{Qik}} \Delta_{aik} + \right. \\ & \left. + \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2} B_{22}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{22}^m \right) \lambda^3 k^3 \Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \right\} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \cos \frac{k\pi \beta}{b}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

8. В качестве численного примера рассмотрим трехслойную фанерную оболочку, характерные размеры срединной поверхности которой суть: $a = b = 50$ см, $R = 150$ см.

Пусть оболочка состоит из двух продольных (наружных) и одного поперечного слоев (фиг. 3). Общая толщина фанеры $h = 3,0$ мм, толщина каждого слоя $\delta_0 = 1,0$ мм.

Расчетные толщины $\delta_1 = \delta_2 = 1,5 \text{ мм}$, $\delta_3 = 0,5 \text{ мм}$.

Упругие характеристики каждого слоя приведены в нижеследующей таблице:

	$E_1^m \text{ (кг/см}^2\text{)}$	E_2^m	G_{12}^m	μ_{12}^m	μ_{21}^m
I и II слои	120000	6000	4800	0,6	0,03
III слой	6000	120000	4800	0,03	0,6

На основании приведенных данных, из (3.4) и (3.5) для жесткостей получим:

$$c_{11} = 25000 \text{ кг/см,}$$

$$c_{66} = 1400 \text{ кг/см,}$$

$$D_{11} = 260 \text{ кг/см,}$$

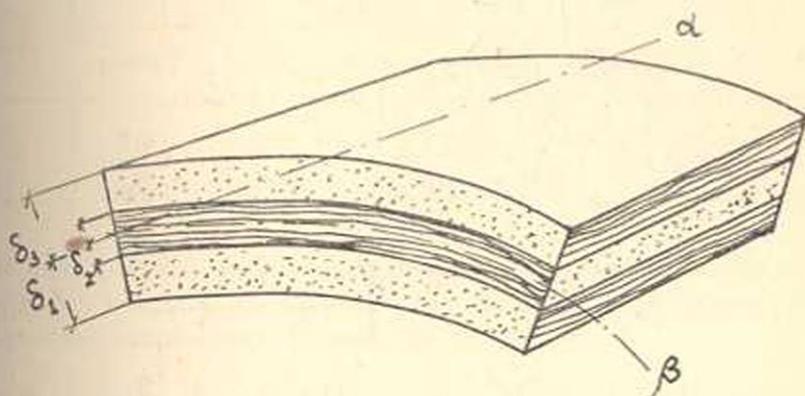
$$D_{66} = 11 \text{ кг/см,}$$

$$c_{22} = 13400 \text{ кг/см,}$$

$$c_{13} = 1100 \text{ кг/см,}$$

$$D_{22} = 23 \text{ кг/см,}$$

$$D_{13} = 8 \text{ кг/см.}$$



Фиг. 3.

Для подсчета напряжений в каждом слое оболочки необходимы значения B_{ik}^m и g_{ik}^m ; их определяем с помощью формул (6.1) и (2.18). Результаты подсчетов помещены в нижеприведенных таблицах:

	$B_{11}^m \text{ (кг/см}^2\text{)}$	B_{22}^m	B_{17}^m	B_{66}^m
I и II слои	120000	6000	3600	4800
III слой	6000	120000	3600	4800

	$g_{11}^m \text{ (кг/см}^2\text{)}$	g_{22}^m	g_{12}^m	g_{66}^m
I и II слои	120000	6000	3600	4800
III слой	107000	18700	3600	4800

Пусть внешняя нагрузка распределена по поверхности оболочки согласно закону:

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

В этом случае расчетные формулы получим, если Q заменим через $q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy$ и полученные выражения проинтегрируем по всей поверхности оболочки.

После соответствующих преобразований для расчетных величин получим:

$$w = q_0 \frac{a^4 \Delta_{a_{11}}}{\pi^4 \Delta_{Q_{11}}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\sigma_x^m = \left[q_0 \frac{a^4 (a_{11} B_{12}^m - a_{12} B_{11}^m) + (a_{22} B_{11}^m - a_{12} B_{12}^m) \lambda^2}{\Delta_{Q_{11}}} + \right. \\ \left. + \gamma q_0 \frac{a^2 (B_{11}^m + B_{12}^m \lambda^2) \Delta_{a_{11}}}{\Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\sigma_y^m = \left[q_0 \frac{a^4 (a_{22} B_{12}^m - a_{12} B_{22}^m) \lambda^2 + (a_{11} B_{22}^m - a_{12} B_{12}^m)}{\Delta_{a_{11}}} + \right. \\ \left. + \gamma q_0 \frac{a^2 (B_{22}^m \lambda^2 + B_{12}^m) \Delta_{a_{11}}}{\Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\tau_{xy}^m = \left[q_0 \frac{a^4 \lambda a_{66} B_{66}^m}{R \Delta_{Q_{11}}} - 2\gamma q_0 \frac{a^2 \lambda B_{66}^m \Delta_{a_{11}}}{\Delta_{Q_{11}}} \right] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b},$$

$$\tau_{x\beta}^m = -q \frac{a}{\pi} \frac{\Delta_{a_{11}}}{\Delta_{Q_{11}}} \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\gamma^2}{2} B_{11}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{11}^m \right) \right\} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$\tau_{\beta y}^m = -q \frac{a}{\pi} \frac{\Delta_{a_{11}}}{\Delta_{Q_{11}}} \left\{ \left[\frac{\gamma^2}{2} (B_{12}^m + 2B_{66}^m) - \frac{\delta^2}{2} (g_{12}^m + 2g_{66}^m) \right] \lambda + \right. \\ \left. + \left(\frac{\gamma^2}{2} B_{66}^m - \frac{\delta^2}{2} g_{32}^m \right) \lambda^2 \right\} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

На основании приведенных данных, учитывая (4.4) и (6.4), а также, что для рассматриваемого численного примера $\lambda = 1$, для основных расчетных величин получим:

прогиб центра $\left(\alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2} \right)$ оболочки $w = 2,6 q_0$,

нормальные напряжения в каждом слое оболочки при

$$\alpha = \frac{a}{2}, \quad \beta = \frac{b}{2}$$

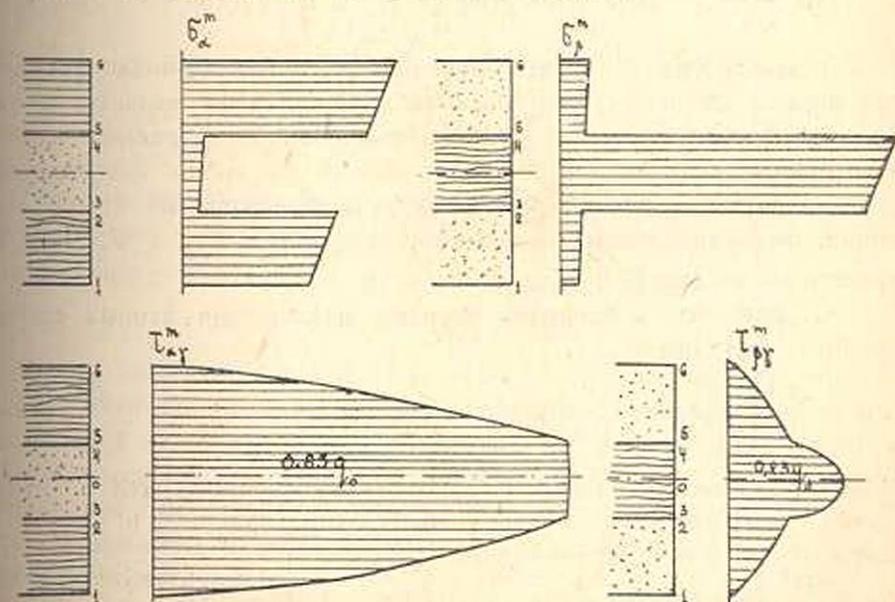
Напряжен.	I слой		II слой		III слой	
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 4	точка 5	точка 6
σ_x^m	520,0 q_0	641,4 q_0	67,1 q_0	76,6 q_0	762,9 q_0	884,3 q_0
σ_y^m	70,2 q_0	79,6 q_0	1248,3 q_0	1367,7 q_0	89,1 q_0	98,5 q_0

максимальные касательные напряжения τ_{xy}^m в сечении $(\alpha=0, \beta=\frac{b}{2})$

и τ_{xy}^m в сечении $(\alpha=\frac{a}{2}, \beta=0)$

Напряж.	I слой		II слой			III слой	
	точка 1	точка 2	точка 3	точка 0	точка 4	точка 5	точка 6
τ_{xy}^m	0,0	0,84 q_0	0,84 q_0	0,85 q_0	0,84 q_0	0,84 q_0	0,0
τ_{xy}^m	0,0	0,12 q_0	0,12 q_0	0,23 q_0	0,12 q_0	0,12 q_0	0,0

На фиг. 4 приведены эпюры вычисленных выше напряжений. Они наглядно показывают влияние слоистости и анизотропности на распределение напряжений по сечению оболочки.



Фиг. 4.

9. Выявим влияние анизотропности материала оболочки на прогиб центра оболочки при различных отношениях сторон.

Из предыдущей задачи для нормального перемещения имеем:

$$w_Q = \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{\Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}$$

при сосредоточенной в точке (x, y) силе Q и

$$w_q = \frac{16qa^4}{\pi^6} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{aik}}{ik \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}$$

при равномерно распределенной нагрузке q .

Выделяя из решения анизотропной оболочки решение прямоугольной изотропной пластинки со сторонами $a \times b$ и с произвольной жесткостью D , для прогибов окончательно получим [2,10]:

$$w_Q = \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4 D} \sum_i \sum_k \frac{\sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}}{(i^2 + \lambda^2 k^2)^2} -$$

$$- \frac{4Qa^2\lambda}{\pi^4 D} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{Qik} - D(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{aik}}{(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b},$$

$$w_q = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_i \sum_k \frac{1}{ik(i^2 + \lambda^2 k^2)^2} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b} -$$

$$- \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \sum_i \sum_k \frac{\Delta_{Qik} - D(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{aik}}{ik(i^2 + \lambda^2 k^2)^2 \Delta_{Qik}} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}.$$

Таким образом для прогибов получаем двучленную формулу, где первая двойная сумма со своим коэффициентом является прогибом произвольной точки (α, β) прямоугольной шарнирно опертой изотропной пластинки, а вторая сумма со своим коэффициентом представляет влияние упругих свойств и кривизны на прогиб оболочки. Значения первых составляющих формул W_Q и W_q берем из известных таблиц Б. Г. Галеркина [11].

Ограничиваясь первыми членами разложения вторых составляющих, получим:

$$w_Q = \frac{Qa^2}{D} \left[\alpha_Q^r - \frac{4\lambda}{\pi^4} \frac{\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}}}{(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b},$$

$$w_q = \frac{qa^4}{D} \left[\alpha_q^r - \frac{16}{\pi^6} \frac{\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}}}{(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{Q_{11}}} \right] \sin \frac{i\pi z}{a} \sin \frac{k\pi \beta}{b}.$$

где α_Q^r и α_q^r — числовые коэффициенты из таблиц Б. Г. Галеркина,

D — цилиндрическая жесткость изотропной пластинки.

Рассмотрим однослойную анизотропную оболочку, геометрические размеры которой суть:

$$2\delta = h = 0,1 \text{ м}, \quad \frac{h}{R} = \frac{1}{50}, \quad \frac{b}{R} = 0,5.$$

Рассмотрим два случая комбинаций упругих постоянных:

	E_1	E_2	μ_{11}	μ_{21}	G_{12}	E_{12}
I случай	E	$0,05 E$	$0,6$	$0,03$	$0,04 E$	$0,03 E$
II случай	$0,05 E$	E	$0,03$	$0,6$	$0,04 E$	$0,03 E$

Для жесткостей получим:

I случай

$$c_{11} = 10 E, \quad c_{22} = 0,5 E, \quad c_{66} = 0,4 E, \quad c_{12} = 0,3 E, \\ D_{11} = 83,3 E, \quad D_{22} = 4,17 E, \quad D_{66} = 3,33 E, \quad D_{12} = 2,5 E.$$

II случай

$$c_{11} = 0,5 E, \quad c_{22} = 10 E, \quad c_{66} = 0,4 E, \\ c_{12} = 0,3 E, \quad D_{11} = 4,17 E, \quad D_{22} = 83,3 E, \\ D_{66} = 3,33 E, \quad D_{12} = 2,5 E.$$

В каждом случае рассматриваем три отношения между a и b :

$$\lambda = \frac{a}{b} = 0,5, \quad \lambda = 1,0, \quad \lambda = 1,5.$$

I случай $\lambda = 0,5$. На основании (4.4), (6.4), (7.3) и (7.5) получим:

$$\Delta_{Q_{11}} = 239,4, \quad \Delta_{a_{11}} = \frac{2,6}{E}.$$

Учитывая, что D можно подобрать произвольно, ищем его значение из условия, что вторые составляющие формул w_Q и w_q должны обращаться в нуль, т. е.

$$\Delta_{Q_{11}} - D(1 + \lambda^2)^2 \Delta_{a_{11}} = 0.$$

Отсюда получим: $D = 58,9 E$. Таким образом мы получили жесткость эквивалентной изотропной пластинки, прогибы которой не отличаются от нормальных перемещений соответствующих точек рассматриваемой анизотропной оболочки.

Поступая аналогичным образом, получаем жесткости эквивалентных изотропных пластинок для всех трех значений λ в каждом рассматриваемом случае.

Жесткости приведенных пластинок

Случай	$\lambda=0,5$	$\lambda=1,0$	$\lambda=1,5$
I	58,9 E	35,4 E	18,1 E
II	16,7 E	35,4 E	48,4 E

Пользуясь предыдущими результатами и таблицами Б. Г. Галеркина, для пригибов центров рассматриваемых анизотропных оболочек, получим:

Нагрузка равномерно распределенная ($q \text{ кг/см}^2$)

$$w_q = \alpha_q \frac{b^4 q}{E}$$

Случай	λ	0,5	1,0	1,5
I	α_q	0,00001	0,00012	0,00046
II		0,00004	0,00012	0,00015

Сосредоточенная сила Q (кг) приложена в центре оболочки

$$w_Q = \alpha_Q \frac{b^2 Q}{E}$$

Случай	λ	0,5	1,0	1,5
I	α_Q	0,00007	0,00033	0,00086
II		0,00025	0,00033	0,00034

Произведенные подсчеты показывают, что в анизотропных цилиндрических оболочках при малых λ , т. е. когда λ меньше единицы, целесообразнее иметь большие жесткости в продольном направлении оболочки, а при больших λ , т. е. когда λ больше единицы, целесообразнее большие жесткости иметь в поперечном направлении оболочки.

Институт стройматериалов
и сооружений Академии наук
Армянской ССР

Поступило 17 IX 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г.—Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. Власов В. З.—Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
3. Лехницкий С. Г.—Прикл. математ. и мех., т. V, вып. 1, 1941.
4. Амбарцумян С. А.—ДАН Армянской ССР, т. XIII, № 5, 1948.
5. Амбарцумян С. А.—ДАН Армянской ССР, т. XI, № 2, 1949.
6. Гольденвейзер А. Л.—Сборник «Пластины и оболочки». Госстройиздат, 1939.

7. Власов В. З.—Прикл. матем. и мех., т. VIII, вып. 2, 1944.
 8. Амбарцумян С. А.—Прикл. матем. и мех., т. XII, вып. I, 1948.
 9. Рабинович А. Л.—Труды Мин. авиапром. СССР, № 675, 1948.
 10. Хачатурян Т. Т.—Сообщ. Ин-та математ. и мех. АН Армянской ССР, вып. 4, 1949.
 11. Галеркин Б. Г.—Упругие тонкие плиты, Госстройиздат, 1934.

Ս. Ա. Համբարձումյան

ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԵՐԻՑ ՀԱՎԱՔՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված են անիզոտրոպ շերտավոր գլանային թաղանթների հաշվման հիմնական հավասարումները և հաշվային բանաձևերը:

Ընդունվում է, որ յուրաքանչյուր շերտի նյութը ենթարկվում է Հուկի քնդհանրացած օրենքին և ամեն մի կետում ունի առաձգականության սիմետրիայի մեկ հարթություն, որը զուգահեռ է միջին մակերևույթին:

Որպես մասնավոր դեպք ուսումնասիրված են օրտաոտոպ շերտերից կազմված գլանային թաղանթները:

Ելնելով տեսական հետազոտություններից բերված են խժեհերական երկու խնդիրների լուծումները:

Б. Л. Абрамян

Изгиб призматического стержня с крестообразным поперечным сечением

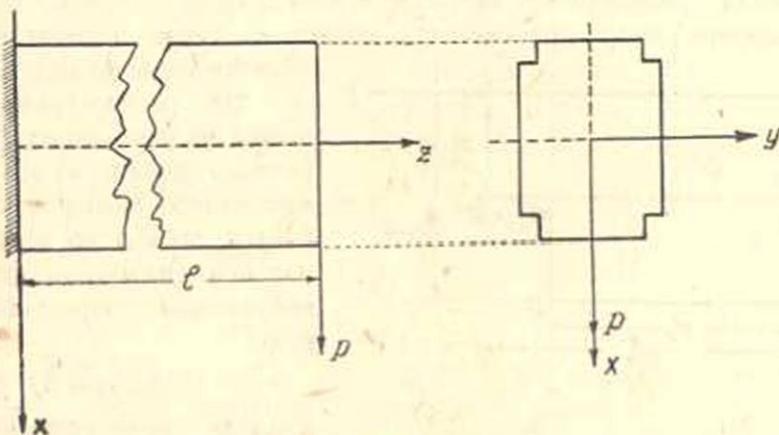
В работе приведено точное решение задачи Сен-Венана об изгибе призматического стержня с поперечным сечением в виде креста.

При решении задачи применен метод введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна [1, 2], с помощью которого решение дифференциального уравнения с частными производными задачи сведено к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а постоянные интегрирования определяются из решения вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Решение задачи приводится в общей алгебраической форме в зависимости от геометрических параметров сечения.

§ 1. Постановка задачи

В работе рассматривается изгиб заделанного одним концом призматического стержня под действием силы P , приложенной к свободному концу стержня вдоль вертикальной оси симметрии поперечного сечения (фиг. 1).



Фиг. 1

Берем начало координат в плоскости заделанного конца в центре тяжести сечения, ось z направляем по оси стержня, а оси x и y направляем по осям симметрии поперечного сечения.

Предполагается (в отличие от чистого изгиба), что из шести составляющих напряжений отличны от нуля только Z_z , X_z и Y_z , причем напряжение Z_z принимается равным

$$Z_z = -\frac{P(l-z)x}{I}, \quad (1.1)$$

где l — длина призматического стержня, I — момент инерции поперечного сечения относительно оси y : $I = \iint_{\Omega} x^2 dx dy$, Ω — область поперечного сечения стержня.

При таких предположениях задача об изгибе призматического стержня сводится к определению функции напряжений $F(x, y)$, которая в области поперечного сечения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P}{1+\nu} y - \frac{P}{2I} f(y), \quad (1.2)$$

и условию на контуре сечения

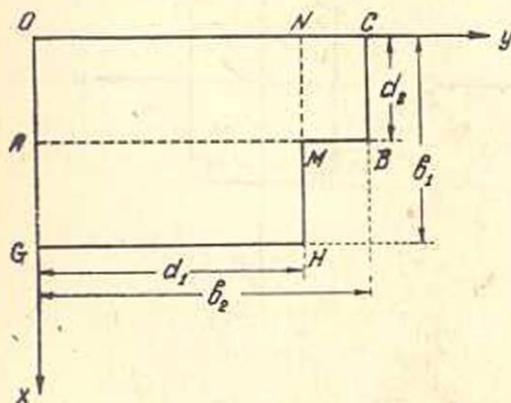
$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)] \frac{dy}{ds}, \quad (1.3)$$

где ν — коэффициент Пуассона, $f(y)$ — произвольная функция, подлежащая определению из условий на контуре, ds — элемент дуги контура.

Напряжения $X_z(x, y)$ и $Y_z(x, y)$ определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} X_z(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} [x^2 - f(y)], \\ Y_z(x, y) &= -\frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ввиду симметричности области поперечного сечения, функция напряжений $F(x, y)$ отыскивается только в одной четвертой части области сечения (фиг. 2).



Фиг. 2

Для распространения решения на всю область поперечного сечения, на основании мембранной аналогии [3], требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция напряжений обращалась в нуль:

$$F(x, y) = 0, \quad (1.5)$$

а вдоль горизонтальной оси симметрии обращалась в нуль ее нормальная производная:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.2), (1.3), (1.5) и (1.6) полностью определяют функцию напряжений $F(x, y)$ для рассматриваемой задачи.

§ 2. Введение вспомогательных функций

Полагаем, что в области $OABC$ (фиг. 2) функция $F(x, y)$ принимает значение $F_1(x, y)$, а в области $ONHG$ —значение $F_2(x, y)$.

Функции $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ должны удовлетворять граничным условиям (1.3), (1.5) и (1.6). Выберем здесь:

$$f(y) = b_1^2, \quad (2.1)$$

тогда из уравнений (1.3), (1.5) и (1.6) для функций $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ получим следующие граничные условия:

$$F_1(x, 0) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0,$$

$$F_1(x, b_2) = -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (2.2)$$

$$F_1(d_2, y) = \begin{cases} -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) & (d_1 \leq y \leq b_2) \\ F_2(d_2, y) & (0 \leq y \leq d_1) \end{cases}$$

и

$$F_2(x, 0) = 0,$$

$$F_2(b_1, y) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$F_2(x, d_1) = \begin{cases} 0 & (d_2 \leq x \leq b_1) \\ F_1(x, d_1) & (0 \leq x \leq d_2) \end{cases}$$

Ищем решения в виде:

$$F_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y) \quad (i=1, 2), \quad (2.4)$$

где вспомогательные функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют только в области $OAMN$ и удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.5)$$

и дополнительным условиям

$$\Phi_1(x, d_1) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=d_1} = 0 \quad (2.6)$$

$$\Phi_2(d_2, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=d_2} = 0,$$

а функции $\Psi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) существуют: $\Psi_1(x, y)$ —в области $OABC$, $\Psi_2(x, y)$ —в области $ONHG$ и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{P}{I} \frac{\nu}{1 + \nu} y. \quad (2.7)$$

Согласно (2.2) и (2.3), функции $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ подчинены условиям:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, 0) + \Phi_1(x, 0) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ \Psi_1(x, b_2) &= -\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(d_2, y) &= -\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1), \\ \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=0} &= 0, \\ \Psi_2(x, 0) &= 0, \\ \Psi_2(b_1, y) &= 0, \\ \Psi_2(x, d_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Функции $\Psi_i(x, y)$ ($i=1, 2$) ищем в виде рядов:

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}, \quad (2.10)$$

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}. \quad (2.11)$$

Заметим, что для определения функции $\Psi_1(x, y)$ граничные условия неоднородны.

Решение, определенное рядом (2.10), отличается от решений, получаемых по методу Фурье-Ламе, ибо каждый отдельный член этого ряда не является частным решением дифференциального уравнения (2.7), а представляет собою лишь один из членов разложения искомой функции в ряд Фурье по одним косинусам от аргументов, нечетно кратных $\frac{\pi x}{2d_2}$ в интервале $0 \leq x \leq d_2$.

Действительно, при $x = d_2$ каждый отдельный член ряда (2.10) обращается в нуль, истинное же значение функции $\Psi_1(d_2, y)$ есть $\frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (d_1 - y)$.

Это объясняется тем, что ряд (2.10) обладает слабою сходимостью, но эту сходимость можно усилить выделением из ряда членов, соответствующих скачкообразному изменению функции $\Psi_1(x, y)$ на границе $x = d_2$ [4].

Аналогичным образом для функции $\Phi_1(x, y)$ ($i=1, 2$) получим условия:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad \Phi_1(d_2, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1), \quad (2.12)$$

$$\Phi_1(x, d_1) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)_{y=d_1} = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, 0) &= 0, \\ \Phi_2(d_2, y) &= 0, \\ \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)_{x=d_2} &= 0,\end{aligned}\quad (2.13)$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(d_1) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}.$$

Здесь также полагаем

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}, \quad (2.14)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}. \quad (2.15)$$

§ 3 Решение уравнений задачи

Из (2.10) имеем:

$$f_k(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx. \quad (3.1)$$

Умножив уравнение (2.7) на $\frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}$ и интегрируя его по x от нуля до d_2 , для функции $\Psi_1(x, y)$ получим:

$$\begin{aligned}\int_0^{d_2} \left(\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial y^2} - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} y \right) \frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\ = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx + f_k''(y) - \\ - \frac{2}{d_2} \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} y \int_0^{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = 0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \frac{2}{d_2} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \right]_0^{d_2} + \\ + \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2\kappa - 1)\pi}{d_2^2} \left[\Psi_1(x, y) \sin \frac{(2\kappa - 1)\pi x}{2d_2} \Big|_0^{d_2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(2\kappa - 1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \Psi_1(x, y) \cos \frac{(2\kappa - 1)\pi x}{2d_2} dx \right] = \\
 &= (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa - 1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) (d_1 - y) - \left[\frac{(2\kappa - 1)\pi}{2d_2} \right]^2 f_{\kappa}(y), \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

при этом использованы условия (2.8) и значение (3.1).

Подставив (3.3) в (3.2), получим:

$$\begin{aligned}
 f_{\kappa}''(y) - \left[\frac{(2\kappa - 1)\pi}{2d_2} \right]^2 f_{\kappa}(y) &= (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} \left[(2\kappa - 1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{8}{(2\kappa - 1)\pi} \right] y - (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa - 1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) d_1. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 f_{\kappa}(y) &= A_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} + B_{\kappa} \operatorname{ch} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} + \\
 &\quad + \frac{2d_2}{(2\kappa - 1)\pi} \int_0^y K_{\kappa}(\xi) \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi}{2d_2} (y - \xi) d\xi, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_{\kappa}(\xi) &= (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} \left[(2\kappa - 1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{8}{(2\kappa - 1)\pi} \right] \xi - \\
 &\quad - (-1)^{\kappa+1} \frac{P}{2l} (2\kappa - 1)\pi \left(\frac{b_1^2}{d_2^2} - 1 \right) d_1. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Подставив (3.6) в (3.5) и произведя интегрирование, получим:

$$\begin{aligned}
 f_{\kappa}(y) &= A_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} + B_{\kappa} \operatorname{ch} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} + \\
 &\quad + (-1)^{\kappa+1} \frac{2P}{l} \frac{1}{(2\kappa - 1)\pi} \left[b_1^2 - d_2^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{8d_2^2}{(2\kappa - 1)^2 \pi^2} \right] \left[\frac{2d_2}{(2\kappa - 1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} - y \right] + \\
 &\quad + (-1)^{\kappa+1} \frac{2P}{l} \frac{1}{(2\kappa - 1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \left[1 - \operatorname{ch} \frac{(2\kappa - 1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Для определения функции $\varphi_{\kappa}(y)$ из (2.14) имеем:

$$\varphi_{\kappa}(y) = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cos \frac{(2\kappa - 1)\pi x}{2d_2} dx. \quad (3.8)$$

Умножив уравнение (2.5) на $\frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2}$ и интегрируя его по x от нуля до d_2 , для функции $\Phi_1(x, y)$ получим:

$$\int_0^{d_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \right) \frac{2}{d_2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \\ = \frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx + \varphi_k''(y) = 0. \quad (3.9)$$

Интегрируя здесь первый член по частям, получим:

$$\frac{2}{d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx = \frac{2}{d_2} \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \Big|_0^{d_2} + \right. \\ \left. + \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx \right] = \\ = \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\Phi_1(x, y) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \Big|_0^{d_2} - \right. \\ \left. - \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \int_0^{d_2} \Phi_1(x, y) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} dx \right] = \\ = (-1)^{k+1} \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \right. \\ \left. + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) \right] - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 \varphi_k(y), \quad (3.10)$$

при этом использованы условия (2.12) и значение (3.8).

Подставив (3.10) в (3.9), получим:

$$\varphi_k''(y) - \left[\frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \right]^2 \varphi_k(y) = \\ = (-1)^k \frac{(2k-1)\pi}{d_2^2} \left[\sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} + \frac{P}{2l} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) \right]. \quad (3.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi_k(y) = C_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} + D_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} + \\ + (-1)^k \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2)}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} \left[2p d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (2k-1)d_1^2 \sin \frac{p\pi y}{d_1} \Big] + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[d_1 - y + \right. \\
 & \left. + \frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} - d_1 \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом для функции $v_k(x)$ и $w_k(x)$ получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$v_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 v_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{y}{1+y} \frac{d_1}{k\pi}, \quad (3.13)$$

$$w_k''(x) - \left(\frac{k\pi}{d_1}\right)^2 w_k(x) = (-1)^k \frac{2k\pi}{d_1^2} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{i}_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}. \quad (3.14)$$

Общие решения этих уравнений имеют вид:

$$v_k(x) = M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{y}{1+y} \left(\frac{d_1}{k\pi}\right)^3 \quad (3.15)$$

и

$$\begin{aligned}
 w_k(x) = & L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + \\
 & + (-1)^k \frac{8kd_2^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\bar{i}_p(d_1)}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} \left[\operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \right]. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Для определения постоянных интегрирования $A_k, B_k, C_k, D_k, M_k, N_k, L_k$ и F_k согласно (2.8), (2.9), (2.12) и (2.13) получим следующие условия:

$$\begin{aligned}
 & \bar{i}_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \\
 & \bar{i}_k(b_2) = (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{1}{(2k-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & v_k(0) + w_k(0) = 0, \\
 & v_k(b_1) = 0, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$$\varphi_k(d_1) = \varphi_k'(d_1) = 0, \quad (3.19)$$

$$w_k(d_2) = w_k'(d_2) = 0, \quad (3.20)$$

§ · Определение постоянных интегрирования

Исключив из значений (3.12) и (3.16) неизвестные коэффициенты посредством условий (3.19) и (3.20), получим:

$$\varphi_k(y) = (-1)^{k+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{V_p(d_2)^p (-1)^p}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2pd_2)^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} d_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p (d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} -$$

$$- (-1)^{k+1} \frac{2P}{I} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y-d_1) - (y-d_1) \right], \quad (4.1)$$

и

$$w_k(x) = (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{d_1} (d_2 - x) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^p}{(2\kappa d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{8\kappa}{\pi} d_2^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}}{(2\kappa d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}. \quad (4.2)$$

Удовлетворяя условиям (3.17) и (3.18) из (3.7), (3.15), (4.1) и (4.2), получим:

$$B_k + (-1)^{k+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) p (-1)^p}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} +$$

$$+ (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + d_1 \right] = 0, \quad (4.3)$$

$$A_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2P}{I} \frac{1}{(2k-1)\pi} \left[(b_1^2 - d_2^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{1+v} \frac{8d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \right] \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - b_2 \right] +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2P}{I} \frac{d_1}{(2k-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) \left[1 - \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] =$$

$$= (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{1}{(2k-1)\pi} (b_1^2 - d_2^2) (b_2 - d_1), \quad (4.4)$$

$$M_k \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} + N_k \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi} \right)^3 = 0, \quad (4.5)$$

и

$$\frac{\kappa\pi}{d_1} \left[M_k + (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^{p+1}}{(2\kappa d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2} \right] = 0. \quad (4.6)$$

Исключив из этих соотношений коэффициенты A_k и M_k , получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений:

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{8}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p (d_2) p (-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)\pi} \left[\frac{2d_2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + d_1 \right], \quad (4.7)$$

и

$$N_k = (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} +$$

$$+ (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_1) (2p-1) (-1)^{p+1}}{(2k d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}, \quad (4.8)$$

где $f_k(d_1)$ и $v_k(d_2)$ имеют значения:

$$f_k(d_1) = B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{chs} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} -$$

$$- (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} +$$

$$+ (-1)^k \frac{P}{1} \frac{v}{1+v} \frac{16d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \left[d_1 - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right], \quad (4.9)$$

$$v_k(d_2) = N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} +$$

$$+ (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{v}{1+v} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^3 \left(1 - \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \right). \quad (4.10)$$

Введем новые неизвестные:

$$B_k = (-1)^{k+1} \frac{16d_1 d_2}{3(2k-1)} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} S_k, \quad (4.11)$$

$$N_k = (-1)^{k+1} \frac{2d_1 d_2}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi b_1}{d_1} R_k. \quad (4.12)$$

Подставляя значения (4.9), (4.10), (4.11) и (4.12) в (4.7) и (4.8), совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений приведем к виду:

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{kp} + \gamma_k$$

$k = 1, 2, \dots$

$$R_k = \sum_{d=1}^{\infty} S_p c_{kp} + \beta_k, \quad (4.13)$$

где введены обозначения:

$$a_{kp} = \frac{3(2k-1)}{\pi} d_1 d_2 \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1} \frac{1}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2}, \quad (4.14)$$

$$\gamma_k = -\frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{12(2k-1)d_1^2}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{p\pi b_1}{d_1}}{(2p)^2 [(2k-1)^2 d_1^2 + (2p d_2)^2]} + \frac{3P}{4l} \frac{b_1^2 - d_2^2}{(2k-1)d_1 \pi^3} \left[1 + \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right], \quad (4.15)$$

$$c_{kp} = \frac{32k}{3\pi} d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \frac{1}{(2k d_1)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}, \quad (4.16)$$

$$\beta_k = -\frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{32k d_2^2}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_1 - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2}}{(2p-1)^2 [(2k d_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2]} + \frac{P}{l} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^2}{d_2 k^2 \pi^3} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \frac{P}{l} \frac{4k}{\pi^2} (b_1^2 + d_2^2) d_1 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2}}{(2k d_1)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}. \quad (4.17)$$

Системы (4.13) могут быть написаны в виде одной системы:

$$Z_\nu = \sum_{j=1}^{\infty} A_{\nu j} Z_j + B_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots), \quad (4.18)$$

где обозначены

$$\begin{aligned} S_k &= Z_{2n-1}, \quad R_k = Z_{2n} \\ A_{2n-1, 2m-1} &= 0, \quad A_{2n-1, 2m} = a_{kp}, \quad B_{2n-1} = \gamma_k \\ A_{2n, 2m} &= 0, \quad A_{2n, 2m-1} = c_{kp}, \quad B_{2n} = \beta_k. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Заметим еще, что для всякого p имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{sch} \frac{p\pi b_1}{d_1} &= \operatorname{th} \frac{p\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch}^2 \frac{p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} < \\ &\leq \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2p\pi d_2}{d_1} - \operatorname{sh} \frac{2p\pi d_2}{d_1} \right) = \frac{1}{2} \left[1 + \exp \left(-\frac{2p\pi d_2}{d_1} \right) \right] < 1, \quad (4.20) \\ \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2d_2} (b_2 - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} &= \\ = \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \operatorname{cth} \frac{(2p-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh}^2 \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} &< \\ &\leq \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} - \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[1 - \exp \left(-\frac{(2p-1)\pi d_1}{d_2} \right) \right] &< \frac{1}{2}. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Для случая $\nu = 2n - 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |a_{kp}| < \frac{3(2k-1)}{\pi} d_1 d_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2pd_2)^2 + (2k-1)^2 d_1^2} = \\ &= \frac{3}{4} \left[\operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} - \frac{2d_2}{(2k-1)\pi d_1} \right] < \frac{3}{4}. \quad (4.22) \end{aligned}$$

При этом использованы неравенства (4.20)

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} < 1 \quad \text{при } 0 < x < \infty \quad (4.23)$$

и значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{ctha}\pi - \frac{1}{a\pi} \right). \quad (4.24)$$

Для случая $\nu = 2n$ имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| &= \sum_{p=1}^{\infty} |c_{kp}| < \frac{16k}{3\pi} d_1 d_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 d_1^2 + (2kd_2)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} < \frac{2}{3}, \quad (4.25) \end{aligned}$$

при этом использованы неравенства (4.21) и значение ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \operatorname{th} \frac{a\pi}{2}. \quad (4.26)$$

Из неравенств (4.22) и (4.25) следует, что для любых чисел ν сумма коэффициентов A_{vj} системы (4.18) удовлетворяет неравенству:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |A_{vj}| < \frac{3}{4}, \quad (4.27)$$

то есть бесконечная система (4.18) вполне регулярна.

Пользуясь теорией вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений [5], неизвестные Z_k определим с любой точностью.

§ 5. Определение функций напряжений

Пользуясь соотношением (4.3), выражение (4.1) для функции $\varphi_k(y)$ приведем к виду:

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = & \left[B_k + (-1)^k \frac{2d_1}{(2k-1)\pi} \frac{P}{1} (b_1^2 - d_1^2) \right] \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} \\ & (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} d_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1}}{(2k-1)^2 d_1^2 + (2pd_2)^2} + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{b_1^2 - d_1^2}{(2k-1)\pi} (y - d_1). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Исключив из выражения (3.7) коэффициент A_k , получим:

$$\begin{aligned} f_k(y) = & B_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \\ & + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_1^2) d_1}{(2k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \\ & + (-1)^k \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu(2k-1)^2 \pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] + \\ & + (-1)^k \frac{2P}{1} \frac{(b_1^2 - d_1^2) (y - d_1)}{(2k-1)\pi}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Аналогичным образом для функций $w_k(x)$ и $v_k(x)$ получим:

$$\begin{aligned} w_k(x) = & -N_k \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (d_2 - x) + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \left(\frac{d_1}{k\pi} \right)^2 \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (d_2 - x) + \\ & + (-1)^{k+1} \frac{8k}{\pi} d_1^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_2) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2}}{(2kd_2)^2 + (2p-1)^2 d_1^2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

и

$$v_k(x) = N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) +$$

$$+(-1)^k \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi} \right)^2 \left(1 - \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{d_1} \right). \quad (5.4)$$

Подставив значения (5.1)–(5.4) в (2.4), получим функцию напряжений

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} [f_{\kappa}(y) + \varphi_{\kappa}(y)] \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} \left\{ B_{\kappa} \left[\operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (d_1-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2\kappa-1)\pi} \left[\operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (y-d_1) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{\kappa P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{16d_2^2}{(2\kappa-1)^2 \pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} \right] \right\} + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \quad (5.5) \end{aligned}$$

для области OAMN.

$$\begin{aligned} F_1(x,y) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} f_{\kappa}(y) \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} = -\frac{P}{2I} (b_1^2 - d_2^2) (y - d_1) + \\ &+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \cos \frac{(2\kappa-1)\pi x}{2d_2} \left\{ B_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{(2\kappa-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi}{2d_2} (b_2-y) \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{\kappa P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{16d_2^2}{(2\kappa-1)^2 \pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2\kappa-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2\kappa-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \right\} \quad (5.6) \end{aligned}$$

для области NMBC.

$$F_2(x,y) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} [v_{\kappa}(x) + w_{\kappa}(x)] \sin \frac{\kappa\pi y}{d_1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_1) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} + \\
 &+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sin \frac{\kappa\pi y}{d_1} \left\{ N_{\kappa} \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{d_1} (b_1 - d_2) + \right. \\
 &\left. + (-1)^{\kappa} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi} \right)^3 \left[1 - \operatorname{th} \frac{\kappa\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{d_1} \right] \right\} \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

для области OAMN

$$\begin{aligned}
 F_2(x, y) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} v_{\kappa}(x) \sin \frac{\kappa\pi y}{d_1} = \\
 &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sin \frac{\kappa\pi y}{d_1} \left\{ N_{\kappa} \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi}{d_1} (b_1 - x) \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} + \right. \\
 &\left. + (-1)^{\kappa} \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{d_1}{\kappa\pi} \right)^2 \left(1 - \operatorname{csh} \frac{\kappa\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{\kappa\pi x}{d_1} \right) \right\} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

для области AMHG.

При этом использованы значения:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{2\kappa-1} \cos(2\kappa-1)x = \frac{\pi}{4} \quad (0 \leq x < \pi) \quad (5.9)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1}}{\kappa^2 + a^2} \sin \kappa x = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} a x}{\operatorname{sh} a \pi} \quad (0 \leq x < \pi) \quad (5.10)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa+1} (2\kappa-1)}{(2\kappa-1)^2 + a^2} \cos(2\kappa-1)x = \frac{\pi}{4} \frac{\operatorname{ch} a x}{\operatorname{ch} \frac{a\pi}{2}} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right) \quad (5.11)$$

В случае, когда $d_1 = b_2 = b$ и $b_1 = d_2 = a$, из (5.7) получим:

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{2P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{b^3}{\pi^3} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa^3} \sin \frac{\kappa\pi y}{b} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{\kappa\pi a}{b} \right) = \\
 &= \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2b^3}{\pi^3} \left[\frac{\pi^3}{12} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa^3} \operatorname{sch} \frac{\kappa\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{\kappa\pi x}{b} \sin \frac{\kappa\pi y}{b} \right]. \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы значения:

$$f_p(d_1)|_{d_1=b_2} = 0$$

и

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\kappa}}{\kappa^3} \sin \frac{\kappa\pi y}{b} = \frac{\pi^3}{12} \left(\frac{y^3}{b^3} - \frac{y}{b} \right) \quad (0 \leq y \leq b) \quad (5.13)$$

Выражение (5.12) есть функция напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением, которая приводится в курсах теории упругости [6].

Функцию напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением можно представить и в другом виде.

Подставив в (5.5) $d_1 = b_2 = b$ и $b_1 = d_2 = a$, получим:

$$F(x, y) = \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \left\{ \frac{1}{2} (x^2 - a^2) y - \frac{16a^2b}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2a} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} \right\}. \quad (5.14)$$

При этом использованы значения:

$$\nu_p(d_2) \Big|_{d_2=b_1} = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} = \frac{\pi^3}{32a^3} (x^2 - a^2) \quad (0 \leq x < a) \quad (5.15)$$

§ 6. Определение напряжений X_z и Y_z

Согласно (1.4) и (2.1) компоненты касательного напряжения определяются соотношениями:

$$X_z(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{P}{2I} (x^2 - b_1^2), \quad Y_z(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (6.1)$$

Пользуясь выражениями (5.5) — (5.8) для функции напряжений, для напряжений X_z и Y_z получим следующие значения:

Для области NMBC:

$$X_z(x, y) = -\frac{P}{2I} \frac{1}{1 + \nu} (x^2 - d_2^2) - \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) - (-1)^{k+1} \frac{2P}{1} (b_1^2 - d_2^2) d_1 \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) + (-1)^k \frac{P}{1} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{16d_2^2 b_2}{(2k-1)^2 \pi^3} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \right\}, \quad (6.2)$$

$$Y_z(x, y) =$$

$$= \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{\pi} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) + \\
 & + (-1)^k \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu(2k-1)^2 \pi^2} \left[y - b_2 \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \right]. \quad (6.3)
 \end{aligned}$$

Для области АМНГ:

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) &= \frac{P}{2l} (b_1^2 - x^2) + \\
 & + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) + \right. \\
 & \left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2 \pi^3} \left(1 - \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \right) \right\}. \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z(x, y) &= \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - x) + \right. \\
 & \left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2 \pi^3} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right\}. \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Для области ОАМН:

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) &= \frac{P}{2l} (b_1^2 - x^2) + \\
 & + \frac{\pi}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) f_p(d_1) \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} \cos \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} + \\
 & + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} + \right. \\
 & \left. + (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2 \pi^3} \left(1 - \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right) \right\}. \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z(x, y) &= \\
 & = \frac{\pi}{2d_2} \sum_{p=1}^{\infty} (2p-1) f_p(d_1) \sin \frac{(2p-1)\pi x}{2d_2} \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2p-1)\pi d_1}{2d_2} - \\
 & - \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ k N_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi}{d_1} (b_1 - d_2) - \right. \\
 & \left. - (-1)^k \frac{2P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{d_1^3}{k^2 \pi^3} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{csh} \frac{k\pi b_1}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} \right\}. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

В области ОАМН (фиг. 2) касательные напряжения, кроме формул (6.6) и (6.7), могут определяться также и значениями:

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) = & \frac{P}{2I} (b_1^2 - x^2) + \frac{\pi}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} pV_p(d_1) \cos \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - \\
 & - \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\
 & - \left. \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(q_1^2 - d_2^2) d_1}{\pi} \left[\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \\
 & - \left. \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] - \\
 & - (-1)^k \frac{P}{I} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{32d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^4} \left[1 - \right. \\
 & \left. - \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \Bigg\}, \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z(x, y) = & - \frac{\pi}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} pV_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_2}{d_1} + \\
 & + \frac{\pi}{2d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2d_2} \left\{ (2k-1)B_k \left[\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \right. \right. \\
 & - \left. \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (d_1 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{2P}{I} \frac{(b_1^2 - d_2^2) d_1}{\pi} \left[\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (b_2 - y) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} + \right. \\
 & + \left. \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2d_2} (y - d_1) \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi d_1}{2d_2} \right] + \\
 & + (-1)^k \frac{P}{I} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{16d_2^2}{(2k-1)^2 \pi^4} \left[y - \right. \\
 & \left. - b_2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right] \Bigg\}. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

В формулах (6.2), (6.9) величины N_k , B_k , $V_p(d_2)$ и $f_p(d_1)$ определены соотношениями (4.9)–(4.12).

Все эти величины выражаются через коэффициенты S_k и R_k , последние же определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных уравнений (4.18).

Формулами (6.2)—(6.9) определяются касательные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

Наибольшее значение касательное напряжение получает на боковых сторонах сечения в серединных точках сторон (в точках $[0, b_2]$ и $[0, -b_2]$).

Напряжение в точке $(0, b_2)$ будет

$$X_z(0, b_2) = \frac{P}{2I} \frac{1}{1+\nu} d_2^2 - \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left\{ \frac{8}{3} d_1 d_2 S_k \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi b_1}{2d_2} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{8d_2^2 b_2}{(2k-1)^2 \pi^2} \operatorname{cth} \frac{(2k-1)\pi b_2}{2d_2} \right\}. \quad (6.10)$$

С удалением от точки $(0, b_2)$ напряжение X_z уменьшается по величине и в точках (d_2, b_2) и $(-d_2, b_2)$ обращается в нуль.

Заметим, что горизонтальный компонент касательного напряжения (Y_z) на боковых сторонах сечения равен нулю:

$$Y_z(x, \pm b_2) = 0.$$

У входящих углов сечения касательные напряжения становятся бесконечно большими, ибо в этих случаях значения напряжений зависят от значений рядов $\sum_{k=1}^{\infty} R_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$, которые, согласно (4.13)—(4.17), расходятся.

На горизонтальных сторонах сечения касательные напряжения будут

$$X_z(b_1, y) = 0 \\ Y_z(b_1, y) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \left\{ d_2 \operatorname{ch} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi b_1}{d_1} R_k - \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{d_1^2}{k^2 \pi^2} \operatorname{cth} \frac{k\pi b_1}{d_1} \right\}. \quad (6.11)$$

Подставив в (6.6) и (6.7) $d_1 = b_2 = b$, $b_1 = d_2 = a$ и, учитывая, что для этого случая $f_p(d_1)|_{d_1=b_2} = 0$, для напряжений при изгибе призматического стержня с прямоугольным поперечным сечением получим:

$$X_z(x, y) = \frac{P}{2I} (a^2 - x^2) + \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \frac{2b^2}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{12} \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \cos \frac{k\pi y}{b} \right\}, \quad (6.12)$$

$$Y_z(x, y) = \frac{P}{l} \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{2b^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{b} \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (6.13)$$

При этом использовано значение ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{k\pi y}{b} = \frac{\pi^2}{12} \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (6.14)$$

Напряжения (6.12) и (6.13) для стержня с прямоугольным поперечным сечением приводятся в курсах теории упругости [6].

Сектор математики
и механики Академии
наук Армянской ССР

Поступило 3 I 1951

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х.—Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Армянской ССР, том IX, № 2, 1948.
2. Арутюнян Н. Х.—Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ПММ, том XIII, № 1, 1949.
3. Тимошенко С. П.—Теория упругости. ОНТИ. ГТТИ, 1934.
4. Гринберг Г. А.—Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И.—Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
6. Папкович П. Ф.—Теория упругости. Оборонгиз, 1939.

Բ. Լ. Աբրահամյան

ԻԱԶԱԶԵՎ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՌԻՆԵՑՈՂ ՊՐԻՋՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ԾՈՌԻՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ բերված է Սեն-Վենանի խնդրի ճիշտ լուծումը խաչաձև հատվածք ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ծաման վերաբերյալ:

Խնդրի լուծման ընթացքում օգտագործված է Ն. Ս. Հարությունյանի օժանդակ ֆունկցիաներ մտցնելու եղանակը, որի միջոցով մասնակի ամանյախներով գիֆֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերված է հաստատուն դործակիցներով զծային երկրորդ կարգի գիֆֆերենցիալ հավասարումների լուծման, իսկ ինտեգրման հաստատունների սրոշումը՝ լիովին ընդգույլար զծային անվերջ հավասարումների սխտեմի լուծման:

Խնդրի լուծումը արված է ընդհանուր հանրահաղական ձևով՝ կախված հատվածքի երկրաչափական պարամետրներից:

Н. А. Словинский

Опытное исследование железобетонных колонн с жесткой арматурой при центральном сжатии

За последние годы железобетонные конструкции с жесткой арматурой нашли довольно большое применение на строительстве ряда гидроузлов, промышленных и высотных зданий. Следует отметить, что целесообразность широкого внедрения в строительство этого вида железобетона была доказана обстоятельными опытно-теоретическими исследованиями, произведенными в ЦНИПС А. А. Гвоздевым и его сотрудниками [1, 2].

В 1948 г. нами была выявлена целесообразность применения жестких арматурных каркасов для железобетонных арочных мостов при существенном увеличении допускаемого напряжения на металл арочного каркаса [3].

В случае навесного способа монтажа в стальном каркасе арки, после его обетонирования, возникают относительно высокие начальные сжимающие напряжения. Вследствие этого возникают опасения в отношении возможного выпучивания предварительно сжатой арматуры в бетоне и раннего трещинообразования в бетоне.

Эти вопросы требовали экспериментальной проверки, так как автором статьи совместно с В. В. Пинадзяном для одного моста было спроектировано железобетонное арочное пролетное строение и для арки этого моста была предложена жесткая арматура, предварительные напряжения которой после обетонирования конструкции по расчету достигают значительной величины.

В свете изложенных соображений нами в 1949 г. в Институте стройматериалов и сооружений Академии наук Армянской ССР были произведены опыты с целью экспериментальной проверки несущей способности центрально-сжатых железобетонных образцов для случая, когда в жесткой арматуре имеются предварительные сжимающие напряжения порядка от 350 до 2000 кг/см².

Нами были испытаны десять образцов, размерами 25×25×112 см. Размеры образцов были продиктованы габаритами и мощностью гидравлического 20-тонного пресса.

Металлические каркасы образцов имели четыре ветви из уголков $50 \times 50 \times 5$ мм ($F_a = 19,2 \text{ см}^2$) с соединительной решеткой треугольной системы из полосовой стали со сварными узлами (фиг. 1).

Процент армирования $\mu = 3,2\%$.

Перед обетонированием каркасы испытывались под нагрузкой от 30 до 35 тонн. При испытании каркасов производился замер деформаций в стойках и связях.

Железобетонные призмы были подразделены на следующие группы:

Группа 1а. Образцы №№ 1, 4, 7 и 10—с предварительно сжатым в специальных приспособлениях металлическим каркасом; защитный слой бетона армирован хомутами из стальной катанки диаметром 5 мм, с шагом 10 см.

Группа 1б. Образец № 6—с предварительно сжатым металлическим каркасом; защитный слой бетона не армирован.

Группа 2а. Образец № 5—металлический каркас которого не подвергался предварительному сжатию; защитный слой бетона армирован хомутами из стальной катанки.

Группа 2б. Образцы №№ 2, 3 и 9—металлический каркас которых не подвергался предварительному сжатию; защитный слой бетона не армирован.

Предварительное сжатие в металлических каркасах осуществлялось специально изготовленными приспособлениями (фиг. 2 и 3), устанавливаемыми в 200-тонный пресс.

Бетон для образцов, а также для контрольных бетонных кубиков $20 \times 20 \times 20$ см был изготовлен на базальтовом щебне, речном песке Эчмиадзинского карьера и цементе Араратского завода имени С. Орджоникидзе.

Предел прочности при сжатии контрольных бетонных кубиков с размерами сторон в 20 см приводится в таблице 1.

Таблица 1

Номера образцов*	1, 2 и 10	4 и 5	и 6	7 и 9	11
Предел прочности при сжатии в кг/см^2 (среднее из трех испытаний)	175	150	140	135	150

Испытание на разрыв стальных образцов нормальной длины, вырезанных из стоек жесткого каркаса, показало, что предел текучести металла колеблется от 24,6 до 28 кг/мм^2 .

Все изготовленные призмы испытывались на 28—30 сутки с момента их бетонирования.

* Призмы от № 1 до № 10 железобетонные, № 11—бетонная.

Испытания на центральное сжатие бетонной призмы (образец № 11), имеющей такие же размеры, как и железобетонные призмы, и соответствующих контрольных бетонных кубиков, показали, что отношение призмевой прочности к кубиковой $\phi = 0,72$.

Кстати, по многочисленным опытам других исследователей, коэффициент ϕ для соотношения $\frac{l}{b} = \frac{112}{25} = 4,5$, при марке бетона 140—170, близок к полученной величине.

При испытании железобетонных призм продольные деформации измерялись: арматуры—тензометрами с точностью 1 микрон на базе 2 см, в четырех точках сечения, бетона—деформометрами с точностью 10 микрон на базе 50 см, также в четырех точках сечения (фиг. 3).

Величины разрушающей нагрузки для железобетонных образцов с жесткой предварительно-напряженной и ненапряженной арматурой приведены в таблице 2.

В пятой графе таблицы 2 приведены, для сравнения, расчетные величины разрушающей продольной силы, вычисленные по несколько видоизмененной формуле Н и Т У—3—49:

$$N_p = \frac{\phi R F_6 + \sigma_r F_a}{1000} \text{ тонн,} \quad (1)$$

где по нашим опытам: $\phi = 0,72$, $F_a = 19,2 \text{ см}^2$, $F_6 = 606 \text{ см}^2$.

По показаниям тензометров, замерявших продольные деформации арматуры, и деформометров, замерявших продольные деформации бетона центрально сжатых железобетонных образцов, было установлено следующее:

1. Равномерно возрастающей осевой нагрузке соответствует плавный рост деформации бетона и арматуры; на кривой за висимости „нагрузка-деформация“ резко выраженных переломов и скачков не выявлено;



Фиг. 3. Испытание образца с предварительно сжатой жесткой арматурой

Таблица 2

№ образцов	Кубиковая прочность бетона в кг/см ² в момент испытания ж. б. образца	Предварительное напряжение арматуры в кг/см ²	Разрушающая нагрузка в тоннах			Расхождение между Н и Т У—3—49 и опытами в процентах	
			по нашим опытам	по формуле Н и Т У—3—49 при:		при $\sigma_T = 2480$ кг/см ²	при $\sigma_T = 2800$ кг/см ²
				$\sigma_T = 2480$ кг/см ²	$\sigma_T = 2800$ кг/см ²		

Преднапряженная арматура с хомутами

10	175	770	126	123	130	+2,5	-3,1
1	175	350	130	123	130	+5,7	0
7	135	2090	117	106	113	+10,5	+3,6
4	150	1320	122	112	119	+9	+2,5

Преднапряженная арматура без хомутов

6	140	825	110	108	115	+1,9	-4,3
---	-----	-----	-----	-----	-----	------	------

Ненапряженная арматура с хомутами

5	150	0	115	112	119	+2,7	-3,4
---	-----	---	-----	-----	-----	------	------

Ненапряженная арматура без хомутов

2	175	0	110	123	130	-10,6	-15,4
9	135	0	106	106	113	0	-6,2
3	140	0	110	108	115	-1,9	-4,4

2. В образцах, арматура которых не подвергалась предварительному загрузению и, в особенности, в образцах без хомутов наблюдалось раннее появление трещин в бетоне. В образцах без хомутов напряжение в арматуре достигало предела текучести после появления трещин в бетоне. В образцах с предварительно напряженной арматурой появление трещин в бетоне происходило не раньше, чем напряжение в арматуре достигало предела текучести.

На основании проведенных опытов приходим к выводу, что при соблюдении нормативных требований в отношении постановки необходимого количества хомутов и марки бетона, предварительное загрузение жесткой арматуры, как и следовало ожидать, не снижает несущей способности железобетонного сжатого элемента.

При большом проценте армирования железобетонных конструкций возможны случаи, когда в стадии разрушения бетон достигнет предела прочности раньше, нежели арматура—предела текучести.

Предварительным загрузением арматуры можно достигнуть такого благоприятного состояния, когда разрушение железобетонного

сжатого элемента с любым процентом армирования произойдет не раньше, чем будет достигнут предел текучести арматуры.

Это положение подтверждается описанными выше опытами.

Институт стройматериалов
и сооружений Академии
наук Армянской ССР

Поступило 26/V 1951

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гвоздев А. А.—Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия, Москва, 1949.
2. Васильев А. П.—Проектирование железобетонных конструкций с жесткой арматурой, Москва, 1943.
3. Славинский Н. А.—Вопросы применения жесткой арматуры в железобетонном мостостроении, Тбилиси, 1948.

Ն. Ա. Սլովինսկի

ԿՈՇՏ ԱՐՄԱՏՈՒՐԱՅՈՎ ԵՐԿԱԹԱԲԵՏՈՆ ՍՅՈՒՆԵՐԻ ՓՈՐՁԱՌԱԿԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ՍԵՂՄՍԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Կոշտ արմատաւրայով երկաթաբետոն սյուների փորձատեղան ուսումնասիրութեանը ջուլը է ապրտ, որ կենտրոնական սեղմման լեպքում՝ արմատաւրայի նախնական բեռնաւորումը մինչև նրա նստունութեան սահմանը՝ չի իջեցնում սյունի կրողական ընդունակութեանը:

Ուստի այդ ախտի կոնստրուկցիաների կիրառումը նպատականարժար է աղեղնաւոր կամուրջներում, որտեղ՝ լաստակների և սղնարկների փոխաջինման նպատակով՝ ննարաւոր է իրականացնել կոշտ արմատաւրայով նախնական զգալի բեռնաւորում:

Կոշտ արմատաւրայի նման օգտագործումը երկաթաբետոն կամուրջներում էապես նվազեցնում է վերջիններիս կառուցման արժեքը և ժամկետը:

