ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. III, № 3, 1950 Физ-мат. естеств. и тех. науки

ГИДРАВЛИКА

И. В. Егиазаров
Действительный член АН АрмССР

Критический анализ исследований Цюрихской гидролаборатории и работ Х. А. Эйнштейна, посвященных расходу влекомых потоком наносов

В работах Мейерпетера, Фавра, Мюллера и Х. Эйнштейна, проведенных за 1932—1937 г.г. в Цюрихской гидролаборатории [1—9], уравнение транспорта наносов сведено к эмпирическому выражению в размерных комплексах $\frac{q^{2/3} i}{d}$ и $\frac{g''^{2/3}}{d}$, где g''—секундный расход влекомых наносов в весовых единицах под водой,

$$\frac{q^{2/3} i}{d} = 17 + 0{,}525 \frac{g''^{2/3}}{d} \tag{1}$$

Это выражение дано для обычных наносов с удельным весом $\gamma_н = 2{,}7$ и для потока не несущего в заметных количествах взвеси.

Для наносов любого удельного веса $\gamma_н$ и для жидкости удельного веса γ Цюрихская лаборатория пришла к эмпирически полученному уравнению также в размерных комплексах:

$$\frac{q^{2/3} i}{d(\gamma_н-\gamma)^{10/9}} = 9{,}57 + 0{,}462 \frac{g''^{2/3}}{d(\gamma_н-\gamma)^{7/9}} \tag{2}$$

Как видно из фиг. 1 и 2, оба эти уравнения удовлетворяют как точкам экспериментов Цюрихской лаборатории, так и точкам других исследований (лабораторий: Гидроэлектрической, Берклейской, USWES), если фракции лежат в пределах размеров, изпользованных Цюрихской лабораторией, для получения приведенных выше зависимостей.

Даже в этих пределах замечается некоторая закономерная сортировка точек по фракциям.

Если на тот же график нанести точки, относящиеся к другим фракциям, что и сделано на фиг. 1 и 3, то получается огромный разброс точек и определенная, резкая, сортировка по фракциям.

Такое положение опытных точек показывает, что предложенная Цюрихской лабораторией зависимость неверно отражает явление транспорта влекомых потоком наносов, не моделирует это явление и не должна применяться за пределами тех фракций и тех чисел Рейнольдса, при которых она получена.

Вместе с тем лаборатория претендовала на моделируемость явления, основываясь на том, что введенные в уравнение два размерных комплекса удовлетворяют критерию Фроуда.

Уравнение (2) может быть приведено к безразмерному виду:

$$\frac{q^{2/3}\, i}{d} \cdot \frac{\gamma^{2/3}}{g^{1/3}(\gamma_н - \gamma)^{2/3}} = 5 + 0{,}4\, \frac{g''^{2/3}}{d} \cdot \frac{1}{g^{1/3}\gamma^{2/3}}, \tag{3}$$

но Цюрихская лаборатория предпочла размерный вид ур. (2), так как опытные точки лаборатории лучше ложатся на зависимость ур. (2), чем на ур. (3)—(см. фиг. 3).

Неудовлетворительное решение задачи для широкого диапазона фракций объясняется чисто эмпирическим её решением с неправильным использованием теории подобия и сведением моделирования только к критерию Фроуда.

Как показано автором [11—13], уравнение транспорта наносов должно удовлетворять трём безразмерным критериям: критерию транспорта $p'' = \frac{g''}{\gamma g'}$; этот критерий охватывает и критерий Фроуда, который входит в состав этого более сложного критерия; критерию трения $i_{тр}$; и критерию влечения $\frac{S - S_0}{S_0}$ или $\frac{S}{S_0}$, который в свою очередь представлен тремя безразмерными соотношениями:

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\gamma}{\gamma_н - \gamma}\, \frac{i_{тр}}{f}\, \frac{R}{d}$$

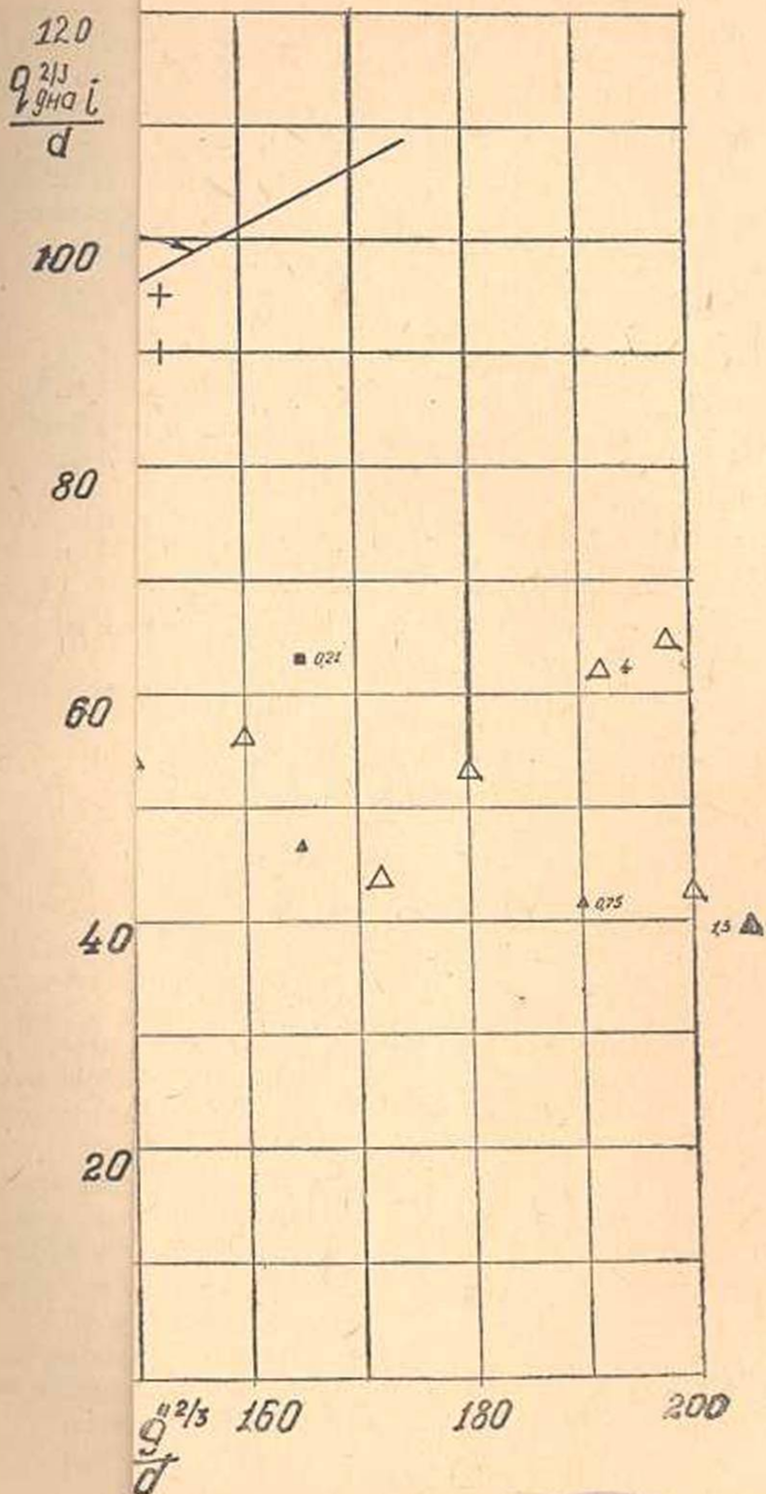
Таким образом, полученное Цюрихской лабораторией решение, удовлетворяющее только критерию Фроуда, не может сколько-нибудь правильно отражать явление.

Это обстоятельство отразилось на разбросе опытных точек и на сортировке этих точек по фракциям (фиг. 1 и 3).

В 1942 году Х. Эйнштейн, переехавший в США, опубликовал новую работу [10], которую построил несколько иначе и решение которой попытался подтвердить теми же опытами Цюрихской лаборатории (опыты были поставлены очень хорошо и против самих опытных данных нельзя возражать).

Первые исследования Эйнштейна [7] относились к статистическому анализу движения отдельных зёрен; но сложность перехода от движения отдельных частиц к их совокупности не позволила использовать старые построения Эйнштейна для получения расчетной зависимости.

В новой работе [10] Эйнштейн отождествляет вероятность от-



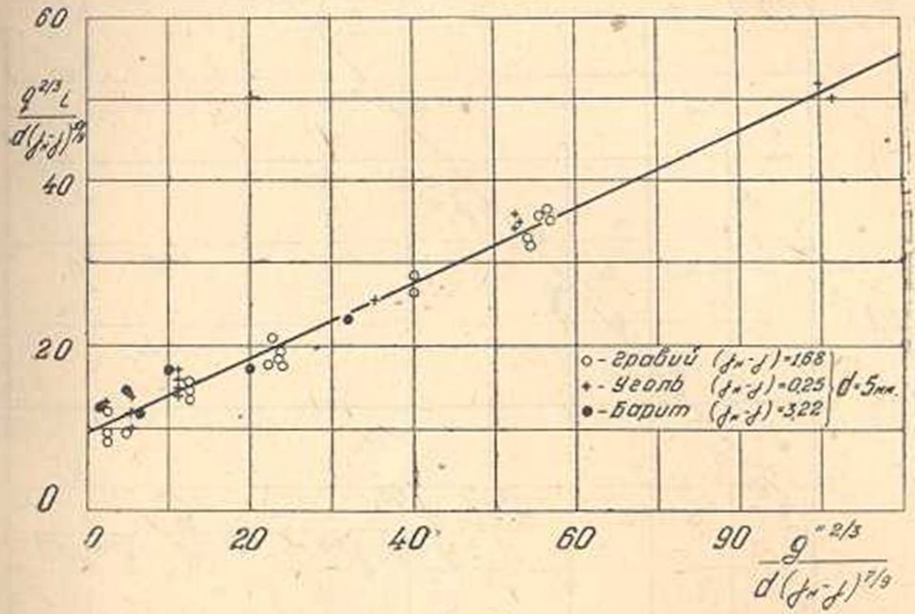
120
q 2/3 дна i / d
100
80
60
40
20
0,21
4
0,75
1,5
160
180
200
g″ 2/3 / d

рыва частицы от дна и прохождения ею некоторого участка с вероятностью невыпадения частицы на этой длине.

Вместо вводимых чл.-корр. АН СССР М. А. Великановым двух вероятностей:

η—вероятности того, что частица в течение времени t_0 будет поднята, т. е. вероятность того, что подъёмная сила в течение этого времени будет больше силы веса;

ε—вероятность того, что эта частица не спустится на дно в те-



Фиг. 2.

чение этого же времени, т. е. вероятности, что вертикальная компонента скорости потока будет больше гидравлической крупности зерна в течение этого времени.

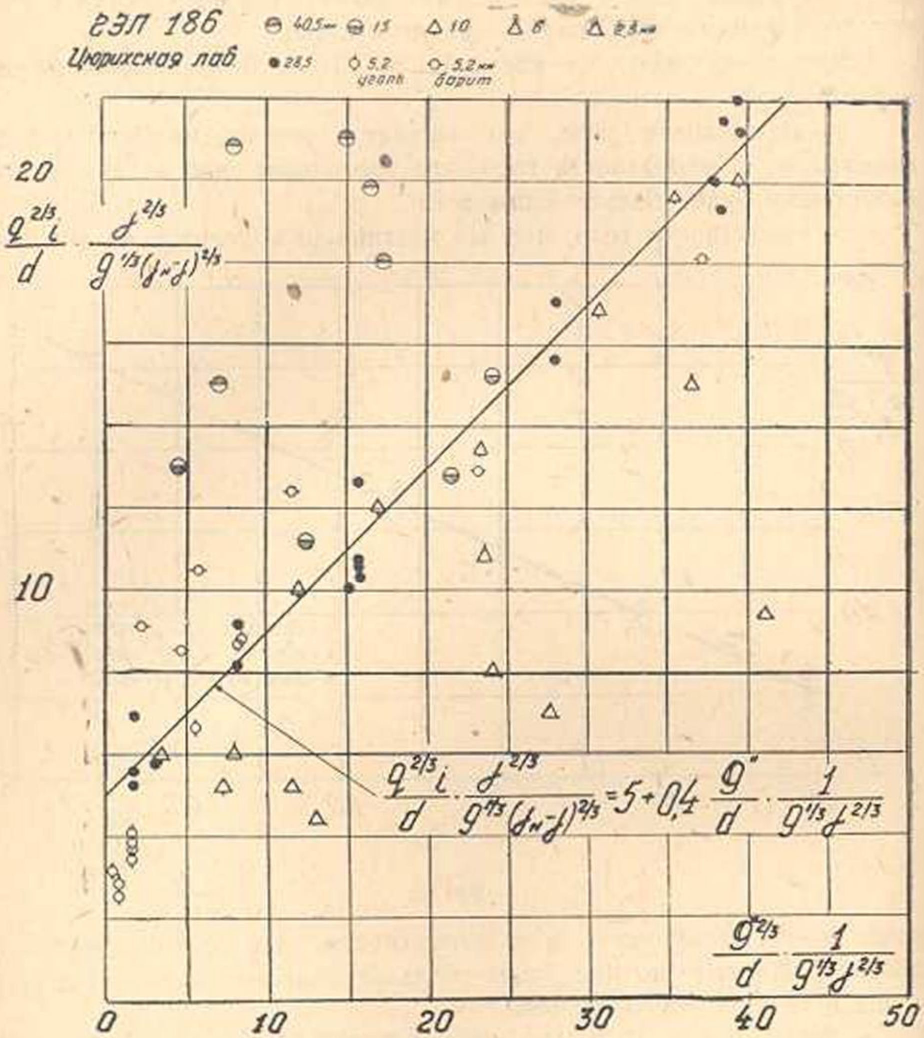
Эйнштейн вводит только одну вероятность, которую считает некоторой неизвестной функцией отношения собственного веса частицы к подъёмной силе.

Длина скачка твердой частицы произвольно принимается пропорциональной среднему её диаметру и, следовательно, постоянной для данного диаметра, что не только не доказано, но не подтверждается ни наблюдениями в наших лабораториях, ни наблюдениями в лабораториях Берлинской и американской USWES.

Произвольно принимается, что время, необходимое для трогания частицы с места, пропорционально времени оседания, деленному на величину её диаметра, т. е. гидравлической крупности зерна.

Поэтому полученные Эйнштейном безразмерные комплексы:

$$\varphi = \frac{1}{F}\,\frac{\gamma^{1/2}}{(\gamma_н-\gamma)^{3/2} g^{3/2}}\,\frac{g''}{d^{3/2}} = \frac{1}{(\gamma_н-\gamma)g}\,\frac{g''}{d\sigma} =$$



Фиг. 3.

$$= \frac{1}{(\gamma_н - \gamma)g} \cdot \frac{g''}{d.\varphi(d)}, \tag{4}$$

где g''—расход влекомых наносов в весовых единицах под водой,
d—средний диаметр частиц,
σ—гидравлическая крупность $= \varphi(d)$,

$$\frac{1}{F} = g^{1/2}\left(\frac{\gamma_н - \gamma}{\gamma}\right)^{1/2} \cdot \frac{d^{1/2}}{\sigma},$$

$$\text{и} \qquad \psi = \frac{\gamma_{н} - \gamma}{\gamma} \frac{d}{Ri} \tag{5}$$

не могут правильно отобразить явление траспорта наносов, и единственное их достоинство—безразмерность.

Использовав точки Цюрихской лаборатории, Эйнштейн в координатной системе, определяемой этими комплексами, получил сложную зависимость, связывающую эти комплексы:

$$0{,}465\ \gamma = e^{-0{,}391\ \psi} \tag{6}$$

$$\frac{0{,}465}{(\gamma_н - \gamma)g} \cdot \frac{g''}{d\sigma} = e^{-0{,}4\ \frac{\gamma_н - \gamma}{\gamma} \frac{d}{Ri}}.$$

Следоватрльно,

$$g'' = 2.15\ (\gamma_н - \gamma)\, g d\sigma e^{-0{,}4\ \frac{\gamma_н - \gamma}{\gamma} \frac{d}{Ri}}. \tag{7}$$

Для начальных условий влечения, когда $g'' = 0$, величина

$$e^{-0{,}4\ \frac{\gamma_н - \gamma}{\gamma} \frac{d}{R_0 i}} = 0$$

и следовательно,

$$0{,}4\ \frac{\gamma_н - \gamma}{\gamma} \frac{d}{R_0 i} = \sim, \tag{8}$$

что приводит к абсурду.

Объясняется это тем, что Эйнштейн совершенно не ввел начальные условия движения зёрен наноса в свои рассуждения. Даже больше, Эйнштейн категорически отрицает факт существования начальной влекущей силы. Таким образом функция ψ неправильно отражает начальные условия и следовательно является неполным критерием влечения, а функция φ не отражает не только критерия транспорта влекомых наносов p'', но даже не отражает влияния критерия Фроуда, входящего в состав более объемлющего критерия транспорта наносов [11, 12].

На фиг. 4, относящейся только к крупным фракциям, видно, что точки, по которым получена зависимость Эйнштейна (6), с некоторым разбросом ложатся на эту зависимость; мелкие фракции, т. е. фракции, обтекаемые не по квадратичному закону, резко отходят от этой зависимости (см. [14]—фиг. 21, [15]—фиг. 150 или [16]—фиг. 57), на что указывает Эйнштейн, сделавший безуспешную попытку связать это расхождение с отношением $\frac{d}{\delta}$. Но нанесение других точек (фиг. 4), обработанных автором настоящей статьи, использованных для получения вида функции критериального уравнения расхода наносов [11—13], показало очень большой разброс и сортировку точек по фракциям.

На фиг. 4 дано изображение в полулогарифметрических координатах, а на фиг. 5 приведена та же зависимость Эйнштейна с точками Цюрихской лаборатории и тоже с нанесением точек для других фракций, больших и меньших, чем исходные, но в простой координатной системе. Отмеченный выше разброс точек и сортировка их по фракциям также ясно выражены и здесь, но выступают менее чётко, что и следовало ожидать при изменении величины φ от значений 0,0001 до значений 1,0, что приводит к очень крутой кривой гиперболического типа.

Ограничившись установлением безразмерности своих комплексов, Эйнштейн не сделал попытки оценить полученные критерии подобия и установить их физический смысл.

Таким образом, не оправдана та положительная оценка, которая дана работе Эйнштейна чл.-корр. АН СССР М. А. Великановым в его очень интересных обзорах научных работ по транспорту наносов ([14], стр. 95—99; [15], стр. 437—443; [16], стр. 290—293).

Гидроэлектрическая лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meyer-Peter*—Wasserfuhrung, Sinkstofführung und Schlammablagerung des alten Rheins 1932 Mitteilung N. 31 des Eidgenossischen Amtes fur Wasserwirtschaft.
2. *H. A. Einstein*—Der hydraulische oder Profilradius. Schweiz. Bauz. 1934, B. 103, Nr. 8.
3. *Meyer-Peter, Favre, A. Einstein*—Neuere Versuchstresultate über den Geschiebetrieb. Schweiz. Bauz. 1934, B. 103, Nr. 13.
4. *Meyer-Peter, Favre, Muller*—Beitrag zur Berechnung dei Geschiebebewegung. Schweiz. Bauz. 1935, B. 105 Nr. 9 u 10.
5. *Meyer-Peter, Hock, Müller*—Beitrag der Versuchsanstalt für Wasserbau zur Lösung des Problems der Rheinregulierung. Sweizer. Bauz. 1937, B. 109 Nr. 16—18.
6. *Meyer-Peter, Favre*—Der wasserbauliche Modellversuch im Dienste der Wasserkraftnutzung und der Flusskorrektion. Festschrift der Technischen Hochschule. Zürich, Ende, 1937.
7. *H. A. Einstein*—Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem. Mitteilung der Versuchsanstalt fur Wasserbau der Techn. Hochschule in Zürich, 1937.
8. *Polya*—Zur Kinematik der Geschiebewegung. Mitteilung der Versuchsanstalt ur Wasserbau der Techn. Hochschule in Zürich. 1937.
9. *Fabre*—Mesure des debits solides der cours d'eau. Annales des ponts et chaussees', 1938.
10. *H. A. Einstein*—Formulas for the transportation of bed load. Tr. Am. S. C. E. 1942, 561—597.
11. *И. В. Егиазаров*—Расход влекомых потоком наносов. Изв. АН Армянской ССР физико-мат., естеств. и техн. науки, № 5, 321, 1949.
12. *И. В. Егиазаров*—Расход донных наносов. ДАН Армянской ССР. Т. XI, № 4, 1950
13. *И. В. Егиазаров*—К определению начальной влекущей силы транспорта наносов

и уточнение уравнения расхода влекомых потоком наносов. Изв. АН Арм. ССР, (физико-мат., естеств. и техн. науки) Т. III, № 1, 1950.
14. *М. А. Великанов*—Движение наносов. 1948.
15. *М. А. Великанов*—Гидрология суши. 1948.
16. *М. А. Великанов*—Динамика русловых процессов. 1949.

Ի. Վ. Եղիազարյան

ՀՈՍԱՆՔՈՎ ՏԱՐՎՈՂ ՋՐԱԲԵՐՈՒԿՆԵՐԻ ԵԼՔԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՑՅՈՒՐԻԽԻ ՀԻԴՐՈԼԱԲՈՐԱՏՈՐԻԱՅԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ Հ. Ա. ԷՅՆՇՏԵՅՆԻ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ՔՆՆԱԴԱՏԱԿԱՆ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ցույց է տրված, որ Ցյուրիխի լաբորատորիայի հրատարակած աշխատանքներում հոսանքով տարվող ջրաբերուկների ելքի համար կախումները վերաբերում են ջրաբերուկների միայն այն ֆրակցիաներին՝ որոնցով լաբորատորիան աշխատանք է կատարել։

Լաբորատորիայում ստացված փորձնական կետերին ավելի խոշոր և ավելի մանր ֆրակցիաների համար նոր կետերի ավելացումը բերում է կետերի մեծ ցրվածության (ֆիգ. 1 և 2) և կետերի տեսակավորման ըստ ֆրակցիաների։

Ցույց է տրված, որ (1—2) կախումները երևույթը չեն մոդելացնում, հետևաբար չեն կարող ընդհանրացվել և հանդիսանում են զուտ էմպիրիկ կախումներ։

Այնուհետև հոդվածում ցույց է տրված, որ Հ. Ա. Էյնշտեյնի նոր աշխատանքը [10] հիմնված է մի շարք կամավոր ենթադրությունների վրա և թեև կապակցված է չափում չունեցող երկու կոմպլեքսների հետ, չի բավարարում նմանության հայտանիշներին՝ ջրաբերուկների տրանսպորտի հայտանիշին, չփման հայտանիշին և տարման հայտանիշին, որոնք առաջարկված են սույն հոդվածի հեղինակի կողմից [11, 12, 13]։

4 և 5 ֆիգուրաների վրա ցույց է տրված կետերի մեծ ցրվածություն և ըստ ֆրակցիաների տեսակավորում այն կետերի, որոնք ստացվում են, եթե Էյնշտեյնի գրաֆիկի վրա ներկայացվեն ավելի խոշոր և ավելի մանր ֆրակցիաների համար փորձից ստացված կետերը։

Այսպիսով, Էյնշտեյնի աշխատանքին ՍՍՌՄ Գիտ. Ակադ. թղթակից-անդամ Մ. Ա. Վելիկանովի տված դրական գնահատականը չի արդարացվում։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. III, № 3, 1950 Физ-мат. естеств. и тех. науки

ГИДРАВЛИКА

А. К. Ананян

О пропускной способности двухярусных водосбросов

Напорные водосбросы встречаются в самых различных областях гидротехнического строительства.

Пропуская способность напорных водосбросов обычно определяется по формуле (1):

$$Q_b = \mu_b \omega_b \sqrt{2gz}, \tag{1}$$

где z—разность горизонтов воды верхнего и нижнего бьефов для случая затопленного выходного отверстия или напора над центром тяжести сечения водовода в случае незатопленного отверстия. Формула (1) очень просто выводится из уравнения Бернулли в предположении, что давление в выходном сечении водовода подчиняется гидростатическому закону. Однако, многочисленные опыты и теоретические исследования [1, 2] показали, что не всегда в выходном сечении напорных водосбросов имеет место гидростатический закон распределения давления. Отклонение от гидростатистического закона обусловлено, главным образом, образованием спада или подпора (рис. 1). Кривая спада или подпора вызывает центробежные силы, которые уменьшают или увеличивают давление под струей в зависимости от направления кривизны свободной поверхности.

Наличие пониженного давления в выходном сечении водосброса фактически увеличивает действующий напор, вследствие чего пропускная способность галлереи увеличивается. Расчетная формула при этом может иметь прежнюю структуру с той только разницей, что напор z определяется не по разности горизонтов верхнего и нижнего бьефов, а по разности отметок горизонта верхнего бьефа и свободной поверхности пьезометра в выходном сечении водовода.

В последнее время в литературе [1, 2, 3,] часто встречаются решения аналогичных задач. Однако, не все решения доведены до такой степени, чтобы их результаты можно было применить в расчетах. Кроме того, имеющиеся решения далеко не охватывают все то разнообразие схем, которое встречается на практике. Необходимо еще указать, что не всегда и не при любых сбросных расходах возможно получить пониженное давление в выходном сечении напорного водовода, благодаря подтоплению со стороны нижнего бьефа.

Цель настоящей работы—показать, что в некоторых случаях возможно получить пониженное давление в выходном сечении двухъярусных водосбросов, а также установить величины этого пониженного давления.

В качестве примера рассмотрим работу сбросного шлюза и донных галлерей для одной гидростанции, строящейся в настоящее время в Армении.

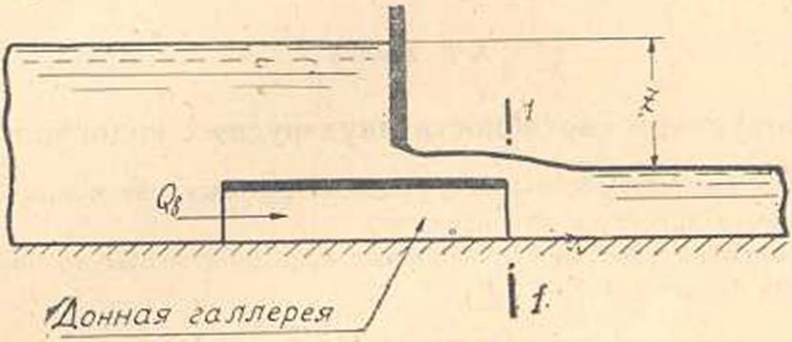


Рис 1.

Здесь сбросные и промывные устройства объеденены в одно общее сооружение (рис. 1). Через нижний ярус отверстий осуществляется сброс паводочных расходов и промыв донных наносов, осевших перед порогом водоприемника. Через верхний ярус отверстий осуществляется сброс остальной части паводочных расходов, а также плавающих тел и льда. Такое объеденение сбросных и промывных устройств в одно сооружение дает возможность подобрать также величины донных и поверхностных сбросных расходов, а также такие геометрические размеры элементов сооружений, при которых можно достигнуть увеличения пропускной способности донных промывных галлерей путем уменьшения давления в сечении 1—1 (рис. 1).

Увеличение пропускной способности донных промывных галлерей путем увеличения напора за счет пониженного давления в сечении 1—1 повышает скорости течения в галлереях, что значительно ускоряет промыв наносов.

Вывод расчетной формулы для определения давления в выходном сечении напорного водовода при слиянии поверхностного и донного потоков

Для определения пьезометрического давления в сечении 1—1 (рис. 2) составляем уравнения изменения проекции количества движения. Выделяем некоторый объем жидкости, ограниченный следующими контрольными поверхностями (рис. 2):

а) сечением 1—1, проведенным вертикально через поверхностную струю в достаточном удалении от низового конца раздельной горизонтальной полки, по верхней поверхности этой полки до ее низового торца, вертикально по сечению потока в торце напорной галлереи и по низовой поверхности порога до дна водобоя:

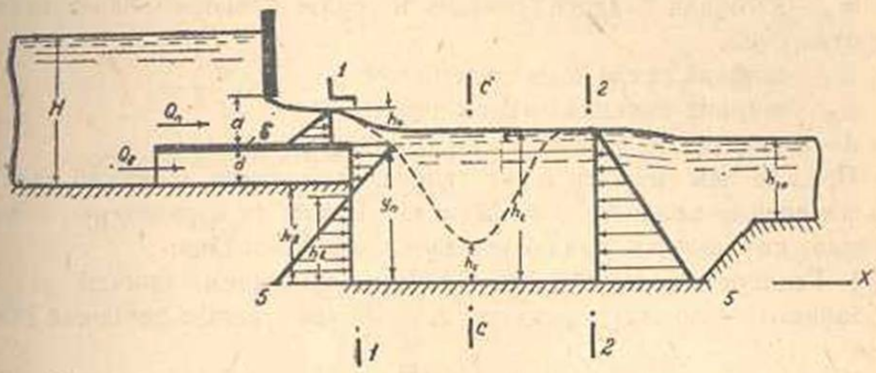


Рис. 2.

б) сечением 2—2, нормальным ко дну отводного канала и находящимся на таком расстоянии от места слияния двух потоков, где можно считать, что имеет место медленно изменяющееся движение;

в) боковыми плоскостями 3—4 и 4—4, совпадающими со стенками канала;

г) нижней плоскостью 5—5, совпадающей с дном канала; при этом принимаем, что дно канала на участке от сечения 1—1 до сечения 2—2 горизонтально;

д) свободной поверхностью жидкости.

Таким образом, все выделенные поверхности представляют из себя плоскости, за исключением свободной поверхности, которая на участке слияния двух потоков имеет небольшой перепад.

Расположим координатную систему нижнего бьефа следующим образом: ось X-ов совместим с дном и направим по течению. Она будет нормальна к плоскости сечения 1—1; ось У-ов направим поперек канала, ось Z-ов—вертикально вверх. Начало координат помещаем на дне потока, у подошвы вертикального уступа.

Примем следующие обозначения.

$Q_п$ —расход поверхностного потока,

Q_b —расход донного потока, поступающего по галлерее,

$h_п$ —глубина поверхностного потока в расчетном сечении,

h_t —глубина в сечении 2—2,

h_{to} —глубина в отводном канале, определяемая по кривой $Q=f\ (h_{to})$,

H—глубина в верхнем бьефе, считая до дна галлерей,

h_b —пьезометрическое давление внутри напорного водовода вблизи его конца,

$y_п$ —высота уступа в сечении 1—1,

$\omega_п$ —площадь сечения поверхностного сброса,

ω_b —площадь сечения галлереи,

ω_t —площадь живого сечения в нижнем бьефе,

ω_n —площадь живого сечения в верхнем бьефе вблизи входных отверстий,

B_t —ширина русла в нижнем бьефе,

B_n —ширина поверхностного порога.

d—диаметр или высота донных галлерей.

Прежде чем перейти к составлению уравнения проекций на ось X-ов изменения количества движения, укажем те ограничения и допущения, которые мы принимаем при решении задачи:

1. Галлерея кончается водобойным колодцем, причем уступ водобойного колодца совпадает с выходной гранью напорной галлереи.

Если при заданных расходах (Q_n+Q_b) глубина нижнего бьефа h_{t_0} такая, что обеспечивает без водобойного колодца затопленный прыжок и если при этом нижний бьеф не затапливает поверхностный поток, в этом случае задача решается аналогично с задачей, когда в нижнем бьефе имеется водобойный колодец. В конкретных условиях рассматриваемой гидростанции отводной канал имеет уклон больше критического; поэтому для достижения спокойного потока в нижнем бьефе необходимо предусмотреть водобойный колодец.

2. Сброс поверхностного потока осуществляется по схеме истечения из-под щита. Это создает определенные ограничения при определении пьезометрического давления в сечении 1—1.

3. Считаем, что поверхностные и донные потоки имеют различные ширины, рассматривая при этом плиту галлереи весьма малой толщины.

4. Высота уступа подбирается таким образом, чтобы обеспечить некоторый перепад между горизонтами поверхностного потока и нижнего бьефа. Глубина нижнего бьефа не должна создавать условий подтопления потока.

5. Силами трения пренебрегаем ввиду их малости.

6. При составлении уравнения приращения количества движения принято, что искомое давление отклоняется от гидростатического закона, но меняется по прямолинейному закону.

Как было сказано выше, причиной отклонения распределения давления от гидростатического закона является кривизна потока. В зависимости от этой кривизны, эпюры изменения давления по глубине могут принимать одну из возможных форм, представленных на рис. 2 и 3.

Составляя уравнения изменения проекции на ось X-ов количества движения, задаемся целью определить давление под струей в сечении 1—1 при заданных расходах Q_n и Q_b, исходя из условия, что глубина нижнего бьефа с учетом глубины колодца равняется h_t.

Действующие силы на выделенный объем и буквенные обозначения показаны на рис. 2.

Уравнение напишется в следующем виде:

$$\left[\gamma\frac{(Q_n+Q_b)}{g}\alpha_t\frac{(Q_n+Q_b)}{\omega_t}\right]-\left[\gamma\frac{Q_b}{g}\alpha_b\frac{Q_b}{\omega_b}+\gamma\frac{Q_n}{g}\alpha_n\frac{Q_n}{\omega_n}\right]=$$

$$=\gamma\frac{h^2_n}{2}B_n-\gamma\frac{(y_n-h_b)^2}{2}B_t+\frac{h^2_b}{2}B_t-\frac{h^2_t}{2}.\,B_t \qquad (2)$$

откуда легко определяется

$$h_b=\frac{2}{y_nB_t}\left\{\left[\frac{\alpha_t(Q_n+Q_b)^2}{g\omega_t}+\frac{h^2_t}{2}.\,B_t\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\alpha_nQ^2_b}{g\omega_n}+\frac{h^2_n}{2}.\,B_n\right]-\frac{\alpha_bQ^2_b}{g\omega_b}\right\}+\frac{y_n}{2} \qquad (3)$$

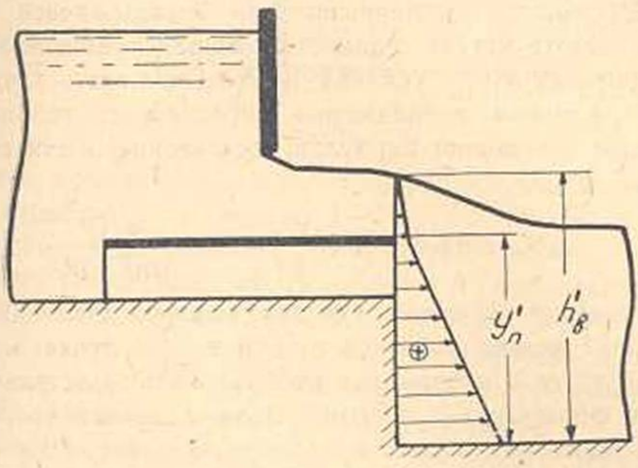


Рис. 3.

В уравнении (3) α_t, α_n и α_b —коррективы скоростей в соответствующих сечениях.

Если требуется определить максимальное понижение давления под струей в сечении 1—1, достаточно найти минимум функции (3), т. е. найти

$$\frac{dh_d}{dy_n}=0.$$

После дифференцирования уравнения (3) по переменной y_n находим наивыгоднейшую высоту уступа y_n.

$$y_n=\sqrt{\frac{4}{B_t}\left\{\left[\frac{\alpha_t(Q_n+Q_b)}{g\omega_t}+\frac{h^2_t}{2}.\,B_b\right]-\left[\frac{\alpha_nQ^2_n}{g\omega_n}+\frac{h^2_n}{2}.\,B_n\right]-\frac{\alpha_bQ^2_b}{g\omega_b}\right\}} \qquad (4),$$

где y_n —есть высота уступа, которая обеспечивает пониженное давление под струей в сечении 1—1* при заданных расходах Q_n и Q_b и

* Аналогичное выражение получено И. И. Вейцем [1] для плоского потока без водобойного колодца в нижнем бьефе и при другой схеме поверхностного сброса.

при глубине нижнего бьефа, равной h_t — (сюда входит и глубина колодца).

Основные величины, входящие в правую часть уравнений (3) и (4) это — поверхностный расход, который определяется по формуле:

$$Q_n = \mu_n B_n h_n \sqrt{2g(H-h_n)}, \text{ где } h_n = \varepsilon a, \tag{5}$$

и донный расход, определяемый по формуле:

$$Q_b = \mu_b \omega_b \sqrt{2g(T_0 - h_b)}, \tag{6}$$

где T_0 — есть расстояние от поверхности воды в верхнем бьефе до дна водобойного колодца. При помощи уравнений (3), (5) и (6) можно определить давление под струей и высоту уступа. Кроме того, необходимо проверить, обеспечивается ли беспрыжковое сопряжение бьефов при высоте уступа, удовлетворяющей уравнению (4).

Для проверки этого условия необходимо знать глубину в сжатом сечении, которая приближенно определяется подбором из приводимого ниже уравнения Бернулли, составленного для сечения 1—1 и С—С рис. (2).

$$(h'_b + d + \delta) + h_n + \frac{V^2_n}{2g} = h_c + \frac{\alpha_t Q^2}{2gB^2_t h^2_c} \tag{7}$$

Из уравнения (3) видно, что пониженного давления под струей в сечении 1—1 можно добиться только в том случае, когда первый член правой части в квадратных скобках больше остальных членов, входящих в формулу (3). Иными словами, правая часть уравнения (3) должна иметь всегда положительное значение. Однако проверка вышеуказанных условий еще недостаточна для окончательного решения задачи, так как в зависимости от горизонта нижнего бьефа, могут иметь место такие случаи, когда под ниспадающей струей образуется воздушное пространство (рис. 4). В этом случае уравнения (3), (6), (7) теряют свой смысл и неприменимы для решения поставленной задачи.

Для проверки этого условия требуется определить глубину воды в сечении 3—4, когда горизонт нижнего бьефа опускается ниже дна донных галлерей (рис. 4). Для решения этой задачи составляем уравнение проекции на ось Х-ов приращения количества движения. С этой целью выделяем объем жидкости, ограниченный контрольной поверхностью 1—3—4—5—6—7—8—9—10—2.

Несколько слов нужно сказать о выборе контрольной поверхности. Было бы проще, если бы выделенный объем жидкости был ограничен контрольной поверхностью 1—3—4—5—10—2 (рис. 4). Однако, это не целесообразно, так как в сечении 5—10 поток имеет значительную кривизну, благодаря чему распределение давления отклоняется от гидростатического закона и войдет в уравнение количества движения как вторая неизвестная величина.

Как известно, уравнение приращения количества движения сохраняет свою силу и в том случае, когда контрольная поверхность, т. е. граница рассматриваемого объема, состоит более чем из одной замкнутой поверхности.

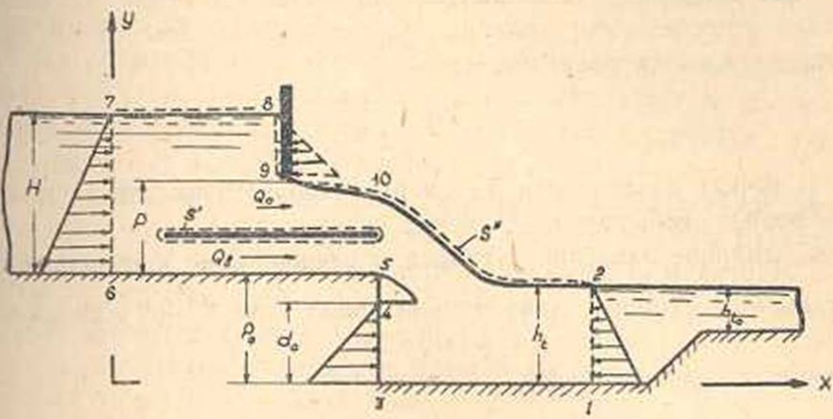


Рис. 4.

В случае, изображенном на рис. 4, рассматриваемый отсек потока между торцевыми сечениями 7—6 и 1—2 ограничен в условиях плоской задачи, поверхностью 7—8—9—10—2 (свободная поверхность верхнего бьефа, напорная грань щита и свободная поверхность вытекающей из-под щита струи) поверхностью 6—5—4—3—1 (дно галлереи, вертикальная грань уступа, дно водобоя) и, кроме того, поверхностью s' (верхняя и нижняя поверхность раздельной горизонтальной полки, включая и поверхность ее торцев).

Применим теорему о приращении секундного количества движения к рассматриваемому отсеку потока. Приращение горизонтальной проекции секундного количества движения при переходе от торцевого сечения 7—6 к торцевому сечению 2—1 необходимо приравнять сумме горизонтальных проекций всех сил, приложенных к отсеку. Поскольку объемная сила веса отсека направлена вертикально, то ее горизонтальная проекция равна нулю. Остается учесть только горизонтальную проекцию поверхностных сил, приложенных в точках боковых поверхностей отсека.

Если пренебрегать силами трения и величиной площадок торцев раздельной горизонтальной полки, то равнодействующая давлений в точках внутренней поверхности s' будет направлена вертикально и ее горизонтальная проекция равна нулю.

В точках свободной поверхности (7—8 и 9—10—2) избыточное давление равно нулю. В точках вертикальной напорной грани щита в первом приближении, принимаем давление распределенным по гидростатическому треугольнику, суммарное давление направлено горизонтально в сторону, противоположную движению:

$$-\gamma B_{п} \frac{(H-p)^2}{2}$$

В точках горизонтальной поверхности 6—5 и 3—1 суммарное давленые направлено вертикально, его горизонтальная проекция равна нулю. Силами трения в точках этой поверхности пренебрегаем. В точках смоченной поверхности вертикальной грани уступа, при наличии атмосферного давления под струей, давление горизонтально и направлено в сторону движения:

$$-\gamma B_t \frac{d_0^2}{2}$$

В точках поверхности 5—4 вертикальной грани уступа давление атмосферное, избыточное давление равно нулю.

Суммарное давление в торцевом сечении 7—6 направлено горизонтально в сторону движения и ровно $+\gamma B_n \frac{H^2}{2}$ и в низовом сечении 2—1 отсека $-\gamma B_t \frac{h^2_t}{2}$.

Предполагается, что движение жидкости между сечениями 6—7 и 2—1, установившееся, что торцевые площадки раздельных бычков, на высоте поверхностных и донных бычков сухие и что под струю, вытекающую из донной галлереи, обеспечен подвод атмосферного воздуха в достаточном количестве, так что давление под струей можно считать практически равным атмосферному.

Если принять коррективы скоростей (коэфициенты Буссинека α) в сечениях 6—7 и 2—1 равными единице, то теорема о приращении секундного количества движения напишется в следующем виде:

$$\gamma\frac{(Q_n+Q_b)^2}{g\omega_t}-\gamma\frac{(Q_n+Q_b)^2}{g\omega_n}=$$

$$=\gamma\frac{H^2}{2}.B_n-\gamma\frac{(H-p)^2}{2}.B_n-\gamma\frac{h^2_t}{2}.B_n+\frac{d^2_0}{2}.B_t, \tag{8}$$

Откуда определяется глубина воды у вертикальной грани уступа 4—3:

$$d_0=\sqrt{\frac{2}{B_t}\left[\frac{(Q_n+Q_b)^2}{g}\left(\frac{1}{\omega_t}-\frac{1}{\omega_n}\right)-\frac{H^2}{2}.B_n+\gamma\frac{(H-p)^2}{2}.B_n+\frac{h^2_t}{2}B_t\right]} \tag{9}$$

Зная глубину воды в сечении 3—4, легко установим наличие или отсутствие воздушного пространства под ниспадающей струей. При этом возможны три случая: 1. $d_0>P_0$; 2. $d_0<P_0$; 3. $d_0=P_0$. В первом и третьем случае под струей отсутствует воздушное пространство и решение задачи по уравнениям (3), (5) и (6) возможно. Во втором случае эти уравнения теряют силу.

Резюмируя все вышесказанное, мы приходим к следующей последовательности решения задачи, если заданы Q_n, Q_b, H и ширина водовода.

1. По кривой $Q=\varphi(h_{t_2})$, где $Q=Q_b+Q_n$ определяется глуби-

на нижнего бьефа h_{t_0}. Если при этом горизонт нижнего бьефа выше, чем дно галлереи, то проверка по формуле (9) отпадает. В противном случае подлежит определению глубина d_0.

2. По формуле (5) определяется глубина h_n в расчетном сечении поверхностного потока.

3. По формуле (3) определяется минимальное пьезометрическое давление в сечении 1—1 в зависимости от высоты уступа y_n и глубины водобойного колодца h_t. В результате строится кривая $y_n = h_b = \varphi(h_t)$ для нескольких значений h_t.

4. По формуле (7) определяется сжатая глубина на дне водобойного колодца, а затем сопряженная с ней глубина при различных высотах уступа y_n, полученная, как указано выше (в пункте 3). В результате строится кривая $h''_c = \varphi(h_t)$.

5. Из семейства кривых $y_n = \varphi_1(h_t)$ и $h''_c = \varphi(h_t)$ (рис. 5) определяется высота уступа и давление под струей в сечении 1—1, удовлетворяющее следующим требованиям:

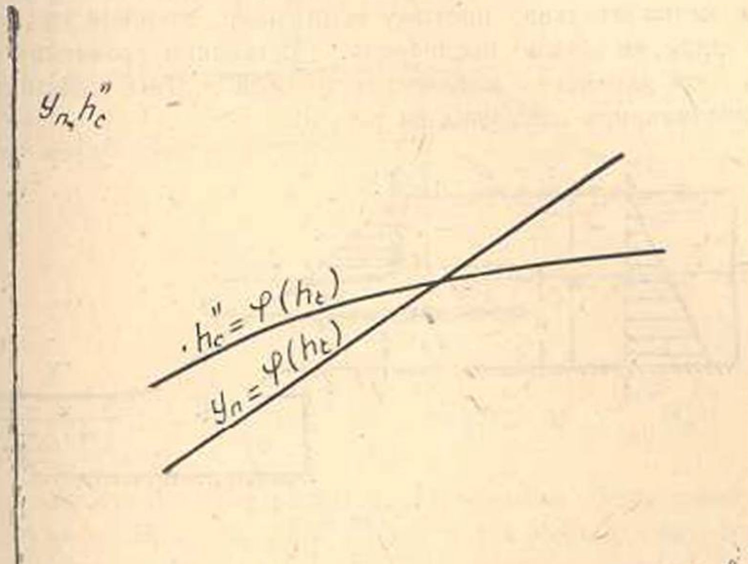


Рис. 5.

а) минимального пьезометрического давления под струей в конце выходного сечения напорного водосброса,

б) минимальной глубины водобойного колодца, обеспечивающей затопленный прыжок в нижнем бьефе.

Эти два условия взаимные, т.е. при удовлетворении одного из них второе удовлетворяется автоматически. Проще решать задачу с удовлетворением требования пункта б.

II. Определение пьезометрического давления в конце напорного водосброса при наличии воздушного пространства под струей в выходном сечении, с учетом влияния поверхностного сброса

Составляем уравнение приращения количества движения в проекции на ось X-ов. Выделяем некоторый объем жидкости, ограниченный двусвязанной поверхностью (рис. 6). Сечение 8—9 берется вблизи конца напорного водовода, где благодаря влиянию кривизны профиля свободной поверхности потока эпюра изменения давления принимает очертание, показанное на рис. 6. Сечение 5—6 выбирается на таком расстоянии от конца водовода, где можно считать, что имеет место гидростатический закон распределения давления. Попрежнему импульсы количества движения учитываются только на участках 2—1, 5—6 и 8—9 контрольной поверхности, так как вся остальная ее часть обтекается потоками (контрольная поверхность s' совпадает со смоченной поверхностью горизонтальной плиты). Кроме того предполагаем, что толщина плиты (потолок галлереи, рис. 6) весьма незначительна; поэтому величиной давления на ее торец в конце галлереи можно пренебречь. Составляем уравнения проекции на ось X-ов изменения количества движения[1] (все действующие силы и обозначения показаны на рис. 6).

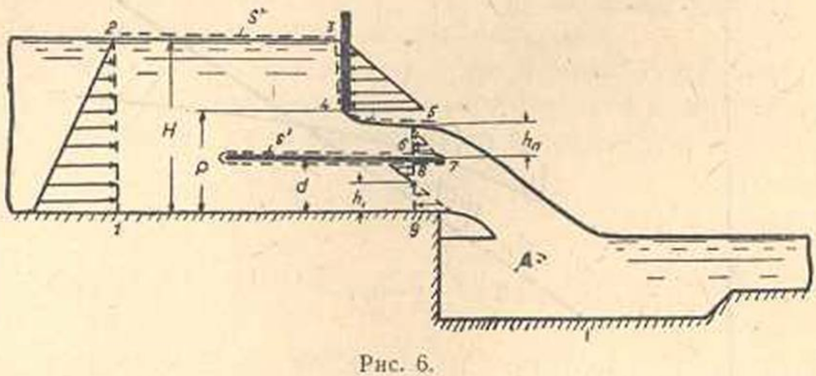


Рис. 6.

$$\left[\gamma\frac{Q_n}{g}\alpha_n\frac{Q_n}{\omega_n}+\gamma\frac{Q_b}{g}\,\frac{\alpha_b Q_b}{\omega_b}\right]-\left[\frac{\gamma}{g}(Q_n+Q_b)\frac{\alpha_n(Q_n+Q_b)}{\omega_n}\right]=$$

$$=\gamma\frac{H^2}{2}\cdot B_n-\gamma\frac{(H-p)^2}{2}B_n-\gamma\frac{h^2{}_n}{2}B_n+\gamma\frac{(d-h_1)^2}{2}B_b-\gamma\frac{h_1^2}{2}B_b \quad (10)$$

Из этого уравнения легко определяется пьезометрическое давление в конце водовода (галлереи), а именно:

[1] Отклонением фактического распределения давления в точках напорной грани щита (точка 4) от гидростатического закона пренебрегаем.

$$h_t = \frac{1}{dB_b}\left[\frac{\alpha_n (Q_n + Q_b)^2}{g\omega_n} + \frac{H^2 B_n}{2} - \frac{\alpha_n Q_n^2}{g\omega_n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha_b Q_b^2}{g\omega_b} - \frac{(H-p)^2}{2} B_n - \frac{h^2_n}{2} B_n + \frac{d^2}{2} B_b \right] \qquad (11)$$

Расход через донные галлереи определяется по формуле (12) путем подбора:

$$Q_b = \mu_b - \omega_b \sqrt{2g(H-h_1)} \qquad (12)$$

где h_1—определяется по формуле (11).

Из уравнения (11) можно получить величину пьезометрического давления в сечении 8—9, если поверхностные щиты полностью закрыты, т. е. расход поверхностного потока равен нулю (рис. 7).

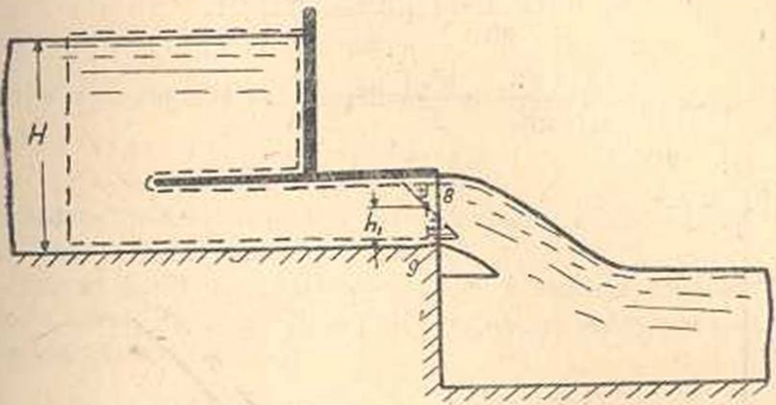


Рис. 7.

$$h_1 = \frac{1}{dB_b}\left[\frac{H^2}{2} B_n - \frac{Q^2_b}{g}\left(\frac{\alpha_b}{\omega_b} - \frac{\alpha_n}{\omega_n}\right) + \frac{(H-d)^2}{2} B_n + \frac{d^2}{2} B_b \right] \qquad (13)$$

Для иллюстрации пользования расчетными формулами решим практический пример, который относится к первому из рассматриваемых случаев.

Для упрощения задачи принимаем, что $B_t = B_b = B_n$, а коэфициенты α_n, α_b и α_t, учитывающие влияние неравномерности распределения скоростей по сечению в выражении для секундного количества движения, равны единице.

Даны следующие величины:

$T = 10{,}3\ м$, $q_b + q_n = 40\ м^2/сек$. $h_{t_0} = 3{,}9\ м$, $d = 2\ м$, $\delta = 0{,}50\ м$ (рис. 9).

Требуется определить необходимое открытие щита и действительную пропускную способность донных галлерей на каждый погонный метр ширины.

В первом приближении по формуле (1) определяем расход через донные галлереи:

$$q_b = \mu_b\, d \sqrt{2gz} = 14{,}6\ м^2/сек$$

Величина поверхностного расхода определяется по формуле:

$$q_n = 40 - q_b = 25{,}4 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

По формуле (5) подбором определяем глубину поверхностного потока в расчетном сечении:

$$q_n = \mu_n h_n \sqrt{2g\,(H - h_n)}, \quad \text{откуда } h_n = 3{,}1 \text{ м}.$$

$$\text{Высота открытия щита } a = \frac{h_n}{\varepsilon} \qquad a = 4{,}70 \text{ м}.$$

По формуле (3) строим кривую:

$$h_b = \frac{1}{y_n}\left\{\left[\frac{(q_n + q_b)^2}{g h_t} + \frac{h^2_t}{2}\right] - \left[\frac{q_n^2}{g h_n} + \frac{h^2_n}{2}\right] - \frac{q_b}{gd}\right\} + \frac{y_n}{2}, \text{ где}$$

$$\frac{(q_n + q_b)^2}{g h_t} + \frac{h^2_t}{2} = \frac{163}{h_t} + \frac{h_t^2}{2}$$

$$\frac{q^2_n}{g h_n} + \frac{h^2_n}{2} = 26; \quad \frac{q^2_b}{gd} = 10{,}9$$

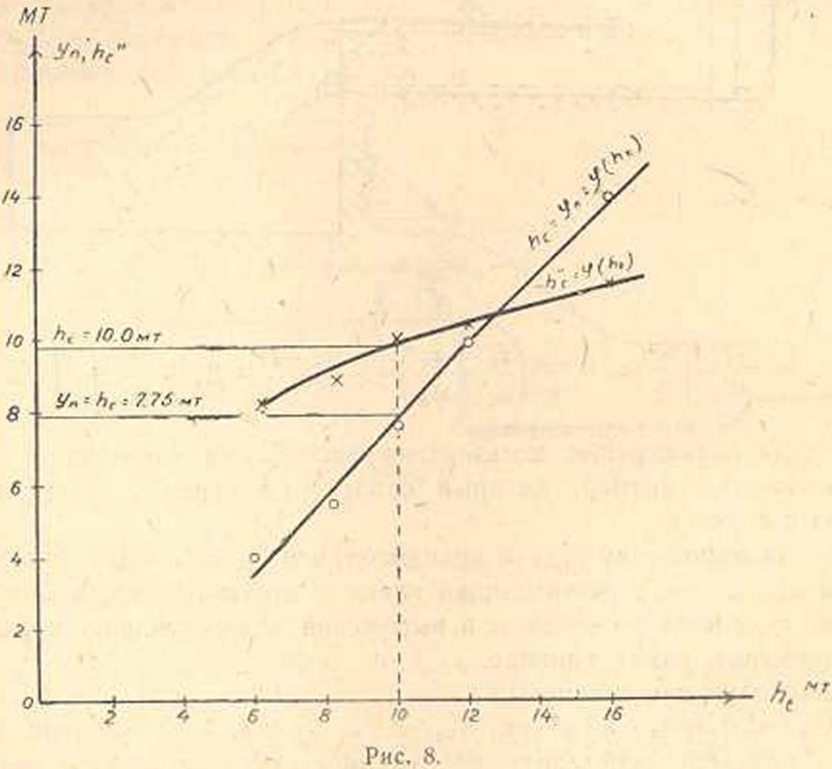


Рис. 8.

Уравнение (3) окончательно примет вид:

$$h_b = \frac{1}{y_n}\left[\varphi(h_t) - 37\right] + \frac{y_n}{2}$$

Принимая $\frac{dh_b}{dh_n} = 0$, получаем высоту уступа, удовлетворяющую

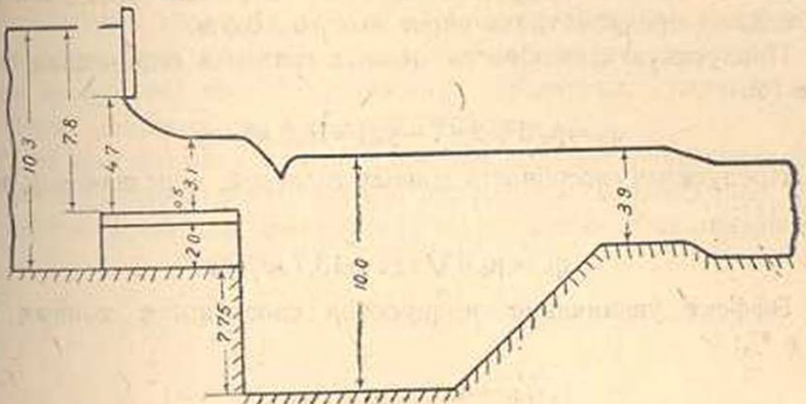


Рис. 9.

условию получения минимального пьезометрического давления под струей:

$$h_b = \sqrt{\varphi h(_t) - 37}$$

Задаваясь рядом значений h_t, построим кривую (рис. 8). Результаты подсчетов сводим в таблицу 1.

По формуле (7) определяем глубину в сжатом сечении на дне колодца, а затем сопряженную с ней глубину, пользуясь при этом вышеприведенными данными:

$$(h'_b + d + \delta) + h_n + \frac{q^2_n}{2gh^2_n} = h_c + \frac{(q_n + q_b)^2}{2gh^2_c}$$

Для облегчения расчета по определению сжатой глубины h_c и сопряженной с ней глубины очень полезно пользоваться графиками 332, 333, 337, составленными акад. Н. Н. Павловским [4]. На основании произведенных подсчетов строим кривую $h''_c = \varphi(h_t)$ (рис. 8).

Результаты подсчетов сводим в таблицу 1.

Из рис. 8 легко видеть, что при $h_t = 10$ *м* $h''_c = 10$ *м*, т. е. имеет место минимальная глубина водобойного колодца. В этом случае $y_n = 7{,}75$ *м*.

Из рис. 8 видно, что глубина воды в колодце получается на 0,5 *м* больше (включая и глубину колодца) глубины в начале отводного канала, определяемой по кривой $q_b + q_n = \varphi(h_{t_c})$.

Таблица 1.

h^2_t	$\frac{163}{h_t} + \frac{h^2_t}{2}$	y_n	T_0	h'_c	h''_c
6	45,2	4,05	10,57	3,28	8,30
8	52,4	5,55	12,07	3,02	8,95
10	66,3	7,75	14,27	2,58	10,00
12	85,6	9,87	16,40	2,40	10,35
16	138,2	14,2	22,00	2,07	11,45

Для сохранения глубины $h_{t_0}=3{,}9$ м в начале отводного канала необходимо предусмотреть порог высотою 0,5 м.

Пропускную способность донных галлерей определяем по формуле (6).

$$q_b' = \mu_b d\sqrt{2g(T-y_n)} = 16{,}2\ м^2/сек.$$

Пропускная способность донных галлерей, определяемая по формуле (1):

$$q_b = \mu_b d\sqrt{2gz} = 13{,}7\ м^2/сек.$$

Эффект увеличения пропускной способности донных галлерей в %:

$$\frac{q_b' - q_b}{q_b} \times 100 = 18\ \%$$

На соответствующую величину увеличиваются скорости в донных галлереях, которые усиливают размыв донных наносов, отложившихся в верхнем бьефе.

Выводы

1. Напорные водосбросы (в том числе и двухярусные) очень часто встречаются в самых различных областях гидротехнического строительства. Пропускная способность их обычно определяется по формуле (1):

$$Q_b = \mu_b\ \omega_b \sqrt{2gz}$$

Многочисленные опыты и теоретические исследования „ГЭЛ" и НИИГ показали, что не всегда в выходном сечении напорных водосбросов имеет место гидростатический закон распределения давления. Отклонения от гидростатического закона обусловлены главным образом образованием кривой спада. Кривая спада вызывает центробежные силы, уменьшающие давление под струей в выходном сечении водосброса. Наличие пониженного давления в выходном сечении водосброса фактически увеличивает действующий напор, вследствие чего пропускная способность галлереи увеличивается. Расчетная формула при этом сохраняет прежнюю структуру (формула 1) с той только разницей, что напор z определяется не по разности горизонтов верхнего и нижнего бьефа, а по разности отметок горизонта воды верхнего бьефа и свободной поверхности пьезометра в выходном сечении водовода.

2. Нами показано, что в некоторых случаях возможно получить пониженное давление в выходном сечении напорных водосбросов, а также установить теоретическим путем величины этого пониженного давления. В качестве примера нами рассматривается один конкретный случай практики, схема которого показана на рис. 2. По этой схеме сбросные и промывные устройства объединены в одно общее

сооружение, что дает возможность так подобрать величины донных и поверхностных сбросных расходов, а также такие геометрические размеры элементов сооружений, при которых можно достигнуть увеличения пропускной способности донных промывных галлерей путем уменьшения давления его выходного сечения.

Расчетная формула для определения пьезометрического напора в выходном сечении двухярусного водосброса согласно рис. 2 определяется из уравнения изменения проекции количества движения (3):

$$h_b = \frac{2}{y_n B_t}\left\{\left[\frac{\alpha_t (Q_n + Q_b)^2}{g\omega_t} + \frac{h^2{}_t}{2} \cdot B_t\right] - \left[\frac{\alpha_n Q_n{}^2}{g\omega_n} + \frac{h^2{}_n}{2} \cdot B_n\right] - \frac{\alpha_b Q^2{}_b}{g\omega_b}\right\} + \frac{y_n}{2}$$

Наивыгоднейшая высота стенки падения, обеспечивающая максимальное понижение давления под струей (при заданных поверхностных и донных расходах), в выходном сечении получается после нахождения минимума функции (3):

$$y'_n = \sqrt{\frac{4}{B_t}\left\{\left[\frac{\alpha_t (Q_n + Q_b)^2}{g\omega_t} + \frac{h^2{}_t}{2} \cdot B_t\right] - \left[\frac{\alpha_n Q^2{}_n}{g\omega_n} + \frac{h^2{}_n}{2} \cdot B_n\right] - \frac{\alpha_b Q^2{}_b}{g\omega_b}\right\}}$$

Q_n — поверхностный расход — определяется по формуле (5):

$$Q_n = \mu_n B_n h_n \sqrt{2g(H - h_n)},$$

Q_b — донный расход определяется по формуле (6):

$$Q_b = \mu_b \omega_b \sqrt{2g(T_0 - h_b)}$$

При помощи уравнений (3), (5), (6) можно определить давление под струей и высоту стенки падения. Необходимо при этом проверить обеспечивается ли беспрыжковое сопряжение бьефов при такой высоте, стенки падения, которая удовлетворяла бы уравнению (3).

Это условие проверяется при помощи выражения (7), получаемого из уравнения Бернулли.

3. Проверка вышеуказанных условий еще недостаточна для окончательного решения задачи, так как в зависимости от горизонта нижнего бьефа могут иметь место случаи, когда под ниспадающей струей образуется воздушное пространство (рис. 4). В этом случае уравнения (3), (6) и (7) теряют свой смысл и неприменимы для решения поставленной задачи. Для проверки этого условия требуется определить глубину воды в сечении 3—4 (рис. 4), когда горизонт нижнего бьефа опускается ниже дна донных галлерей. Для решения этой задачи составляются уравнения проекции приращения количества движений для отсека, показанного на рис. 4.

Высота уступа окончательно определяется по формуле (9):

$$d_0=\sqrt{\frac{2}{B_t}\left\{\frac{(Q_n+Q_b^2)}{g}\left[\frac{1}{\omega_t}-\frac{1}{\omega_n}\right]-\frac{H^2}{2}\cdot B_n+\frac{(H-p)^2}{2}B_n+\frac{h_t^2}{2}\cdot B_t\right\}}$$

Если высота стенки падения, полученная из уравнения (9), больше, чем y'_n, полученное из уравнения (3), тогда задачу можно считать решенной.

4. Если в конце напорного водосброса имеется воздушное пространство под струей ниспадающей струи (рис. 6), тогда пьезометрическое давление в конце напорного водосброса определяется по формуле (11):

$$h_1=\frac{1}{dB_b}\left[\frac{\alpha_n(Q_n+Q_b)^2}{g\omega_n}+\frac{H^2}{2}B_n-\frac{\alpha_n Q_n^2}{g\omega_n}-\frac{\alpha_b Q_b^2}{g\omega_b}-\right.$$

$$\left.-\frac{(H-p)^2}{2}B_n-\frac{h_n^2}{2}B_n+\frac{d^2}{2}B_b\right],$$

где расход через донные отверстия определяется по формуле (12):

$$Q_b=\mu_b\,\omega_b\sqrt{2g\,(H-h_1)}$$

Уравнения (11) и (12) решаются совместно.

Из уравнения (11) легко получается величина пьезометрического давления в выходном сечении донных отверстий, если поверхностный сброс полностью закрыт (рис. 7):

$$h_1=\frac{1}{dB_b}\left[\frac{H^2}{2}B_n-\frac{Q_b^2}{g}\left(\frac{\alpha_b}{\omega_t}-\frac{\alpha_n}{\omega_n}\right)+\frac{(H-d)^2}{2}B_n+\frac{d^2}{2}B_t\right]$$

Гидроэлектрическая Лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Вейц*—Основные задачи соединения двух потоков (плоская задача). Изв. Научно-Исслед. Ин-та Гидротехники им. Б. Е. Веденеева, № 32, 1947.
2. *М. Э. Факторович*—Гидравлика сопряжения с нижним бьефом потока, выходящего из напорных водоводов. Изв. Научно-Исслед. Ин-та Гидротехники им. Б. Е. Веденеева, № 34, 1947.
3. *С. А. Егоров*—Эжекция в нижний бьеф гидростанции. Москва—Ленинград, 1948.
4. *Н. Н. Павловский*—Гидравлический справочник. 1937 г. № 51, Москва—Ленинград.

Ա. Կ. Անանյան

ԵՐԿՀԱՐԿԱՆԻ ՋՐԱԹԱՓՆԵՐԻ ԹՈՂՈՒՆԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ճնշման տակ աշխատող երկհարկանի ջրաթափների շատ հաճախ ենք հանդիպում հիդրոտեխնիկայի տարբեր բնագավառներում։ Այդպիսի ջրաթափների ջրի թողունակությունը սովորաբար որոշվում է հետևյալ բանաձևի օգնությամբ՝

$$Q_b = \mu_b \omega_b \sqrt{2 gz},$$

որտեղից Z-ը որոշվում է վերին և ներքին բյեֆների հորիզոնների տարբերությամբ, եթե ջրաթափը խորասուզված է. ոչ խորասուզված ջրաթափների դեպքում Z-ը որոշվում է ջրատարի ծանրության կենտրոնում եղած ճնշումով։

Z-ի որոշման այսպիսի մեթոդներ կարելի է կիրառել միայն այնպիսի դեպքերում, երբ ջրատարի վերջում ճնշումը ըստ խորության տարածվում է հիդրոստատիկայի օրենքի համաձայն։ „ВНИИГ"-ում և «ՀԷԼՀ»-ում կատարված բազմաթիվ փորձերը ցույց են տալիս, որ ոչ բոլոր դեպքերում է բավարարվում այդ պայմանը։ Շատ հաճախ ջրատարի վերջում առաջանում է անկման կոր, որի հետևանքով առաջացած կենտրոնախույս ուժերը շեղում են ճնշման փոփոխումը (ըստ խորության) հիդրոստատիկայի օրենքից։

Մեր այս հոդվածի նպատակն է տալ Z-ի որոշման համար այնպիսի տեսական բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ճնշման մեծությունը ջրատարի վերջում (պյեզոմետրական ճնշումը), երբ ճնշման տարածումը 1—1 կտրվածքում (նկ. 2) չի ենթարկվում հիդրոստատիկայի օրենքին։ Բացի դրանից արված են այնպիսի հաշվային բանաձևեր, որոնց օգնությամբ ջրատարին (կամ երկհարկանի ջրաթափին) կարելի է տալ այնպիսի չափեր, որի դեպքում նրանց ջրի թողունակությունը կարելի է հասցնել առավելագույն մեծության։

1. Երկհարկանի ջրաթափների դեպքում (նկ. 2) պյեզոմետրական ճնշումը ջրատարի վերջում որոշվում է (3) բանաձևի օգնությամբ, որի մեջ մտնող ելքերի արժեքները՝ Q_a, Q_b որոշվում են (5) և (6) բանաձևերով։

2. Երկհարկանի ջրաթափների վերջում որոշ դեպքերում կարող է առաջանալ օդային տարածություն (նկ. 4), որի առաջանալը կամ չառաջանալը կարելի է ստուգել (9) բանաձևի օգնությամբ. եթե օդային տարածություն է առաջանում, ապա այդպիսի դեպքերում 1 կետում բերված բանաձևերը կորցնում են իրենց ֆիզիկական իմաստը. պյեզոմետրական ճնշման մեծությունն այդպիսի դեպքերում ջրատարի վերջում որոշվում է 11-րդ բանաձևով։

3. Մեկ հարկանի ջրաթափների դեպքում (նկ. 7) ջրատարի վերջում ճնշման մեծությունը կարելի է որոշել (13) բանաձևի օգնությամբ։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. III, № 3, 1950 Физ.-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРОТЕХНИКА

К. Г. Асатур

О решении диференциальных уравнений гидравлического удара Н. Е. Жуковским

После того, как академик С. А. Христианович воспользовался расположенным на характеристиках решением диференциальных уравнений в частных производных при изучении неустановившегося движения жидкости в открытых руслах, по аналогичному пути пошли также исследователи гидравлического удара.

В этих работах и в других исследованиях напорного движения жидкости до сих пор не делалось указаний на то, что пятьдесят лет тому назад основоположником теории гидравлического удара Н. Е. Жуковским характеристики были применены при интегрировании полученных им известных уравнений.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{dv}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt}, \tag{2}$$

где t — время, x — координатная ось трубы, направленная навстречу текущей воде, скорость v которой считается положительной, p — давление, ρ — удельная плотность жидкости, „a“ — скорость распространения волны нарушения при гидравлическом ударе.

Уравнения (1) и (2) принадлежат к гиперболическому типу и обладают двумя семействами действительных и различных характеристик.

Если толщина стенок и диаметр трубопровода постоянны, то величина „a“ в уравнениях (1) и (2) постоянна и они приводятся к квадратурам; при этом мы будем иметь дело с наиболее простым, изученным Риманом, случаем, когда уравнения, определяющие характеристики, обладают интегрируемыми комбинациями и позволяют получить вытекающий из них интеграл в конечном виде.

Интегрирование уравнений Жуковским было осуществлено следующим образом [1].

Раскрыв полные производные в уравнениях (1) и (2), можно придать им вид:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}-v\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\rho a^2\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial t}-v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4}$$

Умножив (3) сперва на „a“, потом на „—a“ и оба раза сложив с (4), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(p-\rho av)=-(a-v)\frac{\partial}{\partial x}(p-\rho av), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(p+\rho av)=(a+v)\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho av). \tag{6}$$

Введем некоторые новые функции

$$s=\frac{p-\rho av}{2}, \tag{7}$$

$$r=\frac{p+\rho av}{2}. \tag{8}$$

Функции s и r далее будем именовать функциями Жуковского.

Используя (7) и (8), уравнениям (5) и (6) можно придать следующий вид[1].

$$ds=\frac{\partial s}{\partial x}dx+\frac{\partial s}{\partial t}dt=\frac{\partial s}{\partial x}\Big[dx-(a-v)dt\Big], \tag{9}$$

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial t}dt=\frac{\partial r}{\partial x}\Big[dx+(a+v)dt\Big]. \tag{10}$$

Из уравнений (9) и (10) следует, что значения функции s переносятся вдоль трубы в положительную сторону оси x со скоростью a — v, а значения функции r переносятся в противоположную сторону со скоростью a+v. Обе скорости не равны между собой и переменны вследствие изменяемости скорости v. Но как показывают опыты, v, по сравнению с „a“, весьма мало и поэтому не делая большой ошибки, можно считать, что значения обеих функций Жуковского переносятся—одной в положительную сторону, другой—в отрицательную сторону оси x с одинаковой постоянной скоростью a.

Мысль эта математически выражается формулами:

$$s=\frac{p_0+\rho av_0-2\rho aF(x-at)}{2}, \tag{11}$$

[1] Подставив их в формулы для диференциалов s и r.

$$r = \frac{p_0 + \rho a v_0 - 2\rho a f(x + at)}{2}, \qquad (12)$$

где F и f—произвольные функции, которые должны быть определены по начальному состоянию течения жидкости и граничным условиям в концах трубы[1].

Зная функции s и r, на основании формул (7) и (8), можно в любой момент определить скорость и давление в каждой точке трубы. Соответствующие зависимости, выраженные через функции F и f, будут:

$$v = F(x - at) - f(x + at), \qquad (13)$$

$$p - p_0 = \rho a[v_0 - F(x - at) - f(x - at)] \qquad (14)$$

Резюмируя, мы можем сказать, что по мысли Жуковского величины давлений и скоростей при гидравлическом ударе должны были определяться из формул (7) и (8) при условии

$$s = \text{const} \quad (15) \qquad \text{при } dx = adt, \qquad (16)$$

$$r = \text{const} \quad (17) \qquad \text{при } dx = -adt. \qquad (18)$$

Равенства (16) и (18), как известно, являются зависимостями, определяющими характеристики уравнений (1) и (2), а совукопность (15), (16), (17) и (18) представляет собой интеграл этих уравнений, расположенный на характеристиках.

Полученные в такой форме разрешающие уравнения гидравлического удара дальнейшей конструктивизации Жуковским не были подвергнуты; решение краевых задач великий ученый оставил своим последователям.

Опубликовавший свою работу тремя годами позже Жуковского Аллиеви конкретизировал задачу для весьма важного в практике частного случая „простого" трубопровода.

В общей части своего решения Аллиеви не дал ничего нового, почти повторив работу Жуковского, причем недостатком работы итальянского инженера является то, что при интегрировании уравнений он сузил решение задачи, воспользовавшись результативными зависимостями типа (13) и (14), известными еще со времен Д'Аламбера и совершенно не упомянув о функциях s и r. В этом существенная разница между решениями Жуковского и Аллиеви, обычно считающимися тождественными.

Разница эта явилась причиной той, в известной мере, отрицательной роли, которую сыграла работа Аллиеви в развитии изучения неустановившегося движения жидкости. Реккурентные уравнения Аллиеви, неразрывно связанные с рассмотренными им граничными

---

[1] В (11) и (12) слагаемые и множители у F и f произвольны: индексом 0 обозначены начальные значения p и v.

условиями, относятся лишь к частному сечению трубопровода, в котором расположена задвижка.

В поисках решения, построенного на характеристиках, Н. Т. Мелещенко получил взамен двух линейных уравнений гидравлического удара одно диференциальное уравнение в частных производных второго порядка [2].

Уравнение это, если пренебречь потерями напора на трение и считать постоянными по длине трубопровода диаметр и толщину его стенок, можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \tag{19}$$

Функция W в (19) удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial W}{\partial t^2} = \omega v = Q, \tag{20}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\omega p}{a\rho} = \frac{g\omega}{a} h, \tag{21}$$

где ω — площадь сечения трубы, Q — расход и h — пьезометрический напор в трубопроводе.

Если от аргументов x и t перейти к характеристическим аргументам:

$$\xi = t - \frac{x}{a}, \tag{22}$$

$$\eta = t + \frac{x}{a}, \tag{23}$$

то из (20) и (21) получим:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(Q - eh) = S, \tag{24}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(Q + eh) = R, \tag{25}$$

$$e = \frac{g\omega}{a} \tag{29}$$

а (19) примет канонический (отнесенный к характеристикам) вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{27}$$

Из (24) и (25) видно, что производные W по характеристикам отличаются от функций Жуковского лишь постоянными множителями $\pm \frac{\omega^1}{\rho a}$;

[1] Для наклонного трубопровода, в (7) и (8) p должно быть заменено $\rho g h$.

$$S = -\frac{\omega}{\rho a} s, \tag{28}$$

$$R = \frac{\omega}{\rho a} r \tag{29}$$

По существу S и R суть те же функции Жуковского, но в форме (24) и (25) ими пользоваться оказывается более удобным.

Из (27) видно, что при

$\xi = \text{const},$ (30) $S = \text{const}.$ (31)

а при $\eta = \text{const},$ (32) $R = \text{const},$ (33)

что полностью совпадает с результатами, полученными Жуковским.

Уравнение (27) можно найти в неопубликованной диссертации А. Н. Бровковича [3].

„Импульсивные расходы" проф. М. А. Мосткова [4]:

$$\pi = Q - \frac{\overline{h}}{2\rho} = \text{const}, \tag{34}$$

$$\Omega = Q + \frac{\overline{h}}{2\rho} = \text{const}, \tag{35}$$

$$\left(\text{где } \overline{h} = \frac{p - p_0}{p_0}; \quad \rho = \frac{a\overline{\rho}}{2\omega p_0}\right),$$

предложенные им на основании работ Шнидера и Томаса, тоже представляют собой функции Жуковского, так как отличаются от S и R лишь постоянным слагаемым и постоянным множителем.

Уравнения (34) и (35) получены без помощи теории характеристик, путем простых преобразований из уравнений Жуковского—Аллиеви.

Хотя операции с уравнениями (34) и (35) у Томаса [5] и Мосткова рассмотрены как некий „численный" прием, по существу эти уравнения тождественны зависимостям (15) и (17), так как вычисления фактически ведутся вдоль характеристик.

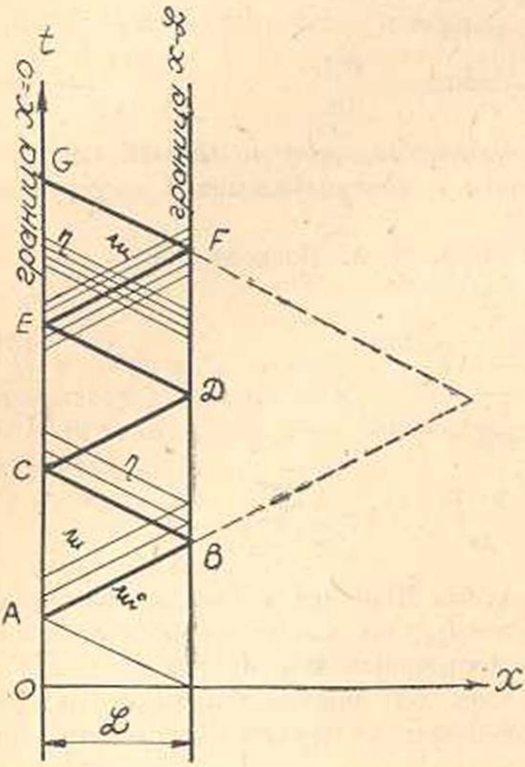
Для придания большей ясности дальнейшему изложению интерпретируем исследование уравнения (27) „вдоль" характеристики обоих семейств графически.

Нанесем на координатную сетку x, t сетку аргументов ξ, η, которая составится из прямых, наклоненных к оси x под углами, соответственно, $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{a}\right)$ и $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{a}\right)$; выделим на координатной плоскости (фиг. 1) область, ограниченную двумя параллельными прямыми $x=0$ и $x=L$ и прямой ξ_0, представляющей собой характеристику начального состояния движения (например, характеристику установившегося режима).

Исследуя в этой области интеграл уравнения (27), мы изучаем движение жидкости в отрезке трубы длиной L.

Совокупность подобных областей для составной системы труб, часто именуемую волновым планом, будем называть планом характеристик.

В каждой области, вдоль характеристических координат, функции Жуковского будут сохранять постоянные значения, определяющиеся на границах области, то-есть на концах отрезка трубы, входящего в систему, по формулам, которые в наиболее полном виде приведены в работе Бровковича, а также имеются у Томаса и Мосткова (некоторые из этих формул будут приведены дальше); значения S и R на характеристике начального состояния движения должны быть предварительно найдены из формул (24) и (25).



Фиг. 1

Каждой характеристике обоих семейств при этом оказывается отвечающим свое значение соответствующей функции Жуковского и поэтому в любой точке области, на пересечении характеристик, из формул (24) и (25) могут быть определены расход и напор.

Построенному на такой основе расчетному методу следовало бы присвоить имя Жуковского. По этому способу ведутся вычисления у Бровковича и Мосткова.

Особенностью метода Жуковского является возможность непрерывного, в процессе расчета, пользования планом характеристик, вследствие чего облегчается изучение общей картины явления; определение значений неизвестных функций оказывается возможным в любой момент времени, в каждом сечении трубопровода, тогда как в приемах, берущих начало от Аллиеви, вычисления ведутся по рекуррентным уравнениям для частных сечений трубопровода.

Это преимущество не достаточно выявляется в численных способах расчета, а у Бровковича, рассмотревшего уравнение (27) как частный случай более общего диференциального уравнения, оно не использовано; вычисления у Бровковича ведутся лишь вдоль непересекающихся характеристик, названных им „главными" (жирные на фиг. 1), а далее уже внутри образованных таким образом треугольных областей[1] путем интерполяции.

Мы рассмотрим методику пользования способом Жуковского, при которой весь план характеристик представляется как непрерывная расчетная область. В качестве примера для этого исследуем вопрос о влиянии контурных условий на поведении функции напоров и расходов внутри всей области плана характеристик.

Известно, что интеграл уравнения (27) непрерывен и допускает непрерывные производные в треугольнике, образованном двумя характеристиками ξ и η при условии, что на прямой, служащей основанием треугольника, производные функции W (то-есть функций S и R), непрерывны. Если они имеют конечное число точек разрыва, то будут разрывны производные вдоль характеристик, проходящих через эти точки на основании треугольника, то-есть оба, отличающиеся на конечную величину, значения функции Жуковского в точке разрыва на основании будут сохраняться вдоль всей характеристики соответствующего семейства, как это следует из (30), (31) или (32), (33). Таковы условия для трубы, в пределах длины которой можно разместить весь треугольник $\xi\eta$, взяв за его основание границу $x=0$.

При ограниченной длине трубы треугольник со стороны вершины будет усечен (см. область ABFG на фиг. 1) границей $x=L$, которая повлияет на поведение функций Жуковского внутри области.

Можно показать, что нарушение непрерывности в точке C (фиг. 1), на границе $x=0$ простого трубопровода, „повторяется" в последующие моменты времены в точках E, G и так далее „отражаясь" от точек D, F границы $x=L$. При разветвленной системе труб на прямой $x=L$, отвечающей узлу пересечения труб, в точках D и F (фиг. 2) разрывы, как правило, будут отражаться и „переломляться".

Все подобного рода положения доказываются одинаковым способом, поэтому достаточно дать доказательство для какого-либо частного случая.

Покажем, например, что нарушение непрерывности в точке C на границе $x=0$, функции S, остающейся при этом ограниченной, приводит к разрыву функции R в точке E на той же границе; ограничимся предположением, что $x=L$ (фиг. 2) соответствует узлу примыкания двух участков трубопровода, имеющих разное значение параметра e.

Граница $x=L$ первого участка трубопровода, для второго участка, будет границей $x=0$.

Граничное уравнение в точке D, в данном случае, будеть иметь вид:

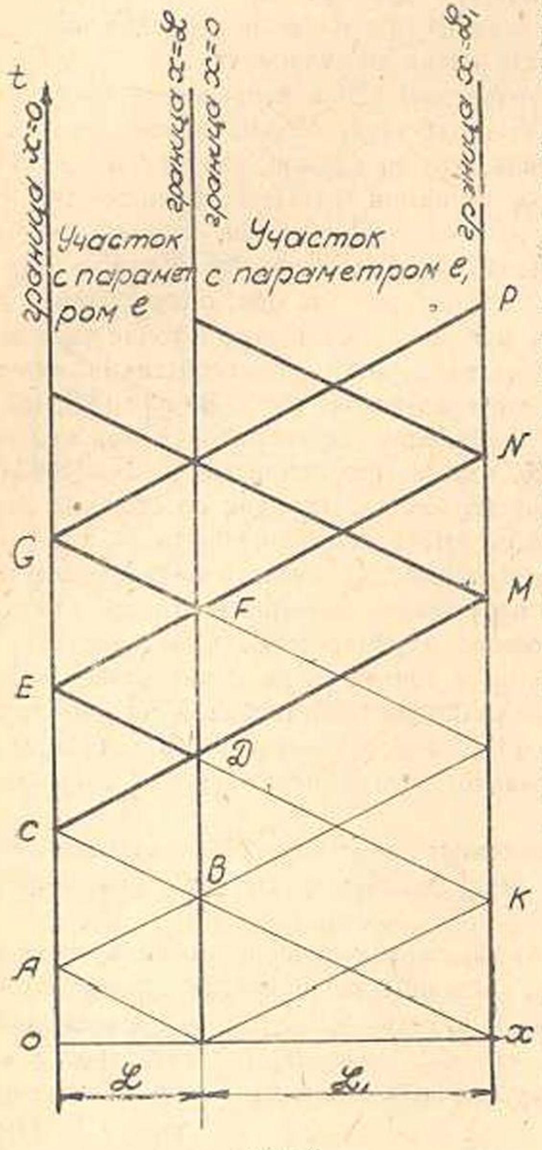
[1] Эти области при разветвленных трубопроводах образуются более сложно.

$$R_{DE} - S_{DC} + 2e\frac{R_{DK} - S_{DC}}{e+e_1}, \tag{36}$$

откуда

$$R_{DE} = \frac{S_{DC}(e-e_1) + 2e_1R_{DK}}{e+e_1} \tag{37}$$

Индексами при S и R обозначены характеристики, вдоль которых их значения постоянны, причем первая буква указывает точку, где взята функция.



Фиг. 2

Пусть при приближении к точке C по прямой $x=0$ с двух сторон имеем два значения S_{CD}; при этом, приближаясь с двух сторон по прямой $x=L$ к точке D, мы получим два значения S_{DC}; в то же время, так как функция R_{DK} не зависит от S_{DC} для R_{DK}, мы можем получить либо одно значение, либо два (если R_{DK} — разрывна). Обозначим через ΔS_{DC} и ΔR_{DK} разность двух значений, соответственно, функций S_{DC} и R_{DK} в точке D.

Так как $e \neq e_1$, то легко видеть, что кроме случая, когда существует соотношение:

$$\Delta S_{DC}(e_1 - e) = 2e_1\,\Delta R_{DK},$$

двум значениям S_{DC}, из (37) будут соответствовать два значения R_{DE} и, следовательно, R_{ED} в точке E будет разрывна.

Из сказанного следует, что разрыв любой из функций Жуковского, в какой-либо из точек границы $x=0$ первого участка трубопровода, дает себя чувствовать на всем плане характеристик выше этой точки; вдоль главных характеристик оказываются сохраняющимися, как правило, два, отличающихся на конечную величину, постоянных значения функции Жуковского. Так как, при этом, на характеристиках, пересекающих главные характеристики, функции Жуковского будут иметь одно постоянное значение, то в точках пересечения, как это следует из формул (24) и (25), будем иметь два значения расхода и напора. Таким образом, вдоль главных характеристик напор и расход будут иметь две разных, непрерывно меняющихся функции, а на других направлениях в точках пересечения с этим характеристиками функции h и Q будут терпеть разрыв непрерывности.

Аналогично тому, как мы исследовали поведение функции Жуковского, можно исследовать поведение функции $\frac{\partial S}{\partial t}$ и $\frac{\partial R}{\partial t}$.

Можно показать, что разрыв функции $\frac{\partial S}{\partial t}$ на границе $x=0$ первого участка трубопровода будет повторяться много раз, отражаясь и переломляясь в точках пересечения главных характеристик с границами участков.

При этом, на главных характеристиках, будут терпеть разрыв непрерывности частные производные функций напоров и расходов по времени. Это значит, что кривые $h=h(t)$ и $Q=Q(t)$ в точках, лежащих на главных характеристиках, будут иметь переломы, отсутствующие для этих же функций вдоль самих характеристик.

Выясним теперь каковы условия напрерывности функций Жуковского и их частных производных по времени для реальных трубопроводов.

Обратимся к граничным условиям у задвижки, которые, если принимать их по Аллиеви, для точки могут быть выражены в виде формулы

$$S_{CD} = \frac{\mu^2 Q_0^2}{2eh_0}\left(\sqrt{1+\frac{8R_{CB}Ch_0}{\mu^2 Q_0^2}}-1\right)-R_{CB},^{1} \tag{38}$$

где μ — относительное открытие задвижки, h_0 — начальное значение напора, Q_0 — расход при $h=h_0$ и $\mu=1$.

В уравнении (38) e, h_0 и Q_0 постоянны. Если ниже точки C не имело место разрывов, то R_{CB} непрерывна и тогда непрерывность функции S в точке C на прямой $x=0$ будет зависеть от непрерывности открытия задвижки μ, являющегося функцией времени. При нарушении непрерывности функции $\mu(t)$, остающейся при этом ограниченной, будет терпеть разрыв непрерывности, оставаясь ограниченной функция S, так как для двух значений μ, в промежутке

[1] При $\mu=0$ мы получаем из (38) граничные условия, соответствующие тупику; (38) справедливо лишь при условии отсчета напоров от плоскости, проходящей через центр задвижки.

$0 < \mu < 1$, из (37) будем иметь два значения S_{CD}; вместе с функцией S_{CD} будут терпеть разрыв непрерывности функции расхода и напора.

Продиференцировав (38) по времени, мы аналогичным образом убедимся в том, что в точке разрыва $\frac{\partial \mu}{\partial t}$, то-есть в точке перелома кривой μ (t), будет терпеть разрыв непрерывности функция $\frac{\partial S}{\partial t}$, а кривые h (t) и Q(t) будут иметь переломы.

В гидравлике изменение открытия задвижки в функции от времени, обычно, принимается в виде непрерывной зависимости, чаще всего в форме прямой линии, причем начало и конец ее являются точками перелома. Мы не будем оценивать степени объективности этой схемы.

В практике встречаются также случаи, когда изменение μ за бесконечно малый промежуток времени принимается конечным, что можно рассматривать в виде предельной схемы фактического процесса действия задвижки, продолжительность которого может измеряться долями секунды; соответствующее явление носит название „мгновенного" удара. При этом следует делать оговорку, которая имеет важное принципиальное значение и касается положения, введенного в гидравлику Буссинеском.

Нарушение непрерывности функций S и R, а вслед за ними h и Q, не позволяет считать изучаемое явление удовлетворяющим условиям медленной изменяемости; волна неустановившегося движения при этом не может считаться „длинной".

Скачкообразное изменение скорости и давления должно захватывать некоторой длины участок вблизи фронта волны и может сопровождаться некоторым рассеянием энергии.

Наличие этих явлений, заметно на физический процесс не влияющих вследствие больших давлений при гидравлическом ударе, вполне возможно в обычной практике.

Таким образом, при мгновенном ударе функции напора и расхода будут терпеть разрыв непрерывности вдоль „лучей" главных характеристик, „берущих начало" в точке разрыва μ (t) на границе x =0 первого участка трубопровода. Расчет дает оба значения функций.

При линейном изменении открытия задвижки, на лучах главных характеристик, берущих начало на границе x=0 из точек начала и конца времени регулирования, будут расположены точки перелома кривых h(t) и Q (t).

Справедливость общей картины описанных выше явлений находит свое подтверждение в целом ряде частных примеров, хорошо известных в литературе по гидравлическому удару.

Практическое значение метода Жуковского громадно, так как позволяя решать общие теоретические вопросы неустановившегося движения, он несомненно даст разрешение многих задач, интересующих технику и физику.

Метод Жуковского легко может быть дополнен внесением учета сопротивлений движению.

Инженерно-Экономический Институт
им. В. М. Молотова. Ленинград.

ЛИТЕРАТУРА

1. *N. Joukowsky*—Записки Императорской Акад. Наук, VIII серия, т. IX, № 5, стр. 1, 1900.
2. *М. Т. Мелещенко*—Изв. Н. И. Ин-та. Гидротехники, № 29, стр. 5, 1941.
3. *А. ц. Бровкович*—Диссертация. Ленинградский Политех. Ин-т. 1941.
4. *М. А. Мостков*—Сообщения АН Груз. ССР, т. V, № 1, стр. 21, 1944.
5. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, v. 64, № 6, p. 1233, 1938.

Կ. Գ. Ասատուր

ՀԻԴՐԱՎԼԻԿ ՀԱՐՎԱԾԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ Ն. Ե. ԺՈՒԿՈՎՍԿՈՒ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հիդրավլիկ հարվածի, մասնավոր ածանցյալներ պարունակող դիֆերենցյալ հավասարումների Ն. Ե. Ժուկովսկու և Ալլիևիի լուծումները համարվում են նույնանման։ Ներկա հոդվածում նշվում է նրանց տարբերությունը և ցույց է տրված, որ Ժուկովսկու լուծումն իրենից ներկայացնում է Ռիմանի խարակտերիստիկների վրա տեղադրված ինտեգրալ։ Այժմյան նոր հաշվարկի մեթոդներն օգտագործում են Ժուկովսկու ֆունկցիաները (Բրովկովիչ, Թոմաս, Մոստկով)։

Օրինակ բերելով, հեղինակը տալիս է Ժուկովսկու մեթոդի կիրառման ձևը, ցույց տալով մեթոդի գլխավոր նշանավոր դրական կողմը—խարակտերիստիկների պլանով անընդհատորեն օգտվելու հնարավորությունը։ Այդպիսով թեթևացվում է խառնակազմ խողովակաշարքերի հաշվարկը և նրանց մեջ հիդրավլիկ հարվածի դեպքում տեղի ունեցող ֆիզիկական երևույթի ընդհանուր նկարի պարզաբանումը։

Օրինակն իրենից ներկայացնում է եզրական պայմանների ազդեցության հետազոտումը ծախսի և ճնշման ֆունկցիաների վարմունքի վրա։

Այդ ֆունկցիաների անընդհատությունը կախված է սողնակի ժամանակից, բացման ֆունկցիայից, որի ամեն տեսակ անընդհատության խախտումը խարակտերիստիկների (ալիքային) պլանի սողնակի համապատասխան սահմանի որևէ կետում անդրադառնում է այդ կետի համապատասխան Ժուկովսկու ֆունկցիաների վրա և ապա զգացվում է խարակտերիստիկների երկայնությամբ, խարակտերիստիկների ամբողջ պլանում, խախտման կետից «բարձր» (ֆիգ. 1)։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. III, № 3 1950 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРОТЕХНИКА

У. Г. Арутюнян

Результаты опытов по исследованию переходных участков открытой деривации

При проектировании и постройке деривационных каналов очень часто бывает необходимо (особенно в горных условиях) осуществлять переходы от одной формы поперечного сечения водовода в другой. Эти переходы диктуются топографическими, геологическими и гидравлическими условиями. Чем больше пересеченность местности и чем чаще меняются геологические условия, тем чаще бывает необходимость прибегать к осуществлению того или иного перехода.

Течение жидкости на переходных участках сопровождается потерями полезного напора. Кроме того, на поверхности воды на самом переходе и за ним возникают волны, опасные с точки зрения переливов через борты канала, или захлебывания портала тоннеля, если переход осуществляется от канала к тоннелю.

Правильное определение потери напора на переходных участках требуется особенно тогда, когда общее число переходов на водоводе велико. В этом случае погрешность при применении неверной формулы или коэфициента может вызвать в одном случае заметные снижения полезного напора станции и выработки энергии, а в другом случае—опасность перелива через борта канала.

Целью настоящей работы является изложение результатов опытов Гидроэлектрической лаборатории Водно-Энергетического Института АН Армянской ССР (ГЭЛ), приведение основных расчетных параметров для переходных участков открытой деривации (очень часто встречающихся в практике гидротехнического строительства) и рекомендация формы перехода, удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к переходным участкам.

В существующей литературе обычно рекомендуется потерю напора на переходных участках определять по формуле Вейсбаха:

$$h_w = \zeta \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}, \qquad (1)$$

где коэфициент ζ берется по данным опытов Хиндса [1]. Однако коэфициенты, полученные Хиндсом, применимы только для условий, близких к условиям опытов этого автора. Для других условий расхождения с данными Хиндса могут быть значительными. Причины этого заключаются в приближенности теоретических допущений, принятых Хиндсом. Вводимый им в уравнение (1) коэфициент потерь ζ меняется только в зависимости от угла расширения и неполностью учитывает все специфические условия движения жидкости. Подробный анализ расчетной формулы (1) и коэфициента ζ приведены А. К. Ананяном [2, 3].

Потери напора на переходах складываются из потерь, вызванных изменением поперечного сечения водовода, изменением эпюры распределения скоростей и потерь, вызванных трением потока о стенки и дно канала.

Экспериментами (эксперименты А. Г. Чаниш вили[1] в Лаборатории ТНИСГЭИ и эксперименты ГЭЛ) доказано, что при переменной форме поперечного сечения, но без изменения площади сечения, имеют место потери напора. Если бы потери определялись по формуле (1), то в данном случае они должны быть равны нулю, так как средние скорости в расчетных сечениях одинаковы. Следовательно, потери напора на переходах должны определяться с учетом неравномерности распределения скорости в потоке, путем введения в уравнение (1) коррективов скоростей коэфициента для соответствующих сечений перехода.

Приближенность формулы заключается еще в том, что потери кинетической энергии, определяемые по средним скоростям, получаются меньше, чем при учете неравномерности распределения скоростей в потоке.

Теоретический анализ и эксперименты [2, 3, 4] показали, что при расчете потерь напора на таких переходах, которые отличаются от переходов, исследованных Хиндсом, пользоваться коэфициентами Хиндса надо с осторожностью, а в ответственных случаях надо ставить специальные гидравлические исследования в лабораторных условиях.

Базируясь в основном на данных экспериментов, проведенных в ГЭЛ, А. К. Ананян дал расчетные формулы для определения потери напора, вызываемой переменой формы поперечного сечения и конструкции перехода. Этими формулами мы пользовались при обработке результатов экспериментов.

Здесь не приводятся обобщающие расчетные формулы, полученные Ананяном; они даны в его работе [2].

Требования, предъявляемые к переходным участкам

Оценка качества того или иного переходного участка может быть дана на основании следующих условий:

1. Потери напора на переходном участке должны быть минимальными.

[1] А. Г. Чанишвили—Гидравлика переходных участков на каналах со спокойным режимом. Отчет, 1948.

2. Сопряжения горизонтов на переходе и за его пределами должны быть плавными, безволновыми.

3. Переходы должны быть простыми в конструктивном отношении.

Это последнее условие диктуется требованиями производства работ при выполнении перехода в натуре.

Необходимость соблюдения условий плавного сопряжения горизонтов очень часто не учитывается проектировщиками. Это объясняется тем, что нет таких расчетных методов, которые давали бы возможность подобрать очертания переходных участков, удовлетворяющие требованиям как гидравлического, так и производственного характера (например метод, предложенный Хиндсом дает довольно сложное очертание переходного участка: по параболическим поверхностям). Чем сложнее переход, тем больше вероятности отклонения при осуществлении перехода от проектной схемы.

Чанишвили в цитированной выше работе указывает, что наиболее рациональной, с точки зрения потери напора и сопряжения горизонтов, является такая форма перехода, при которой изменения скоростных напоров вдоль переходного участка происходят по линейному закону. Вследствие этого, он предлагает форму переходного участка, обеспечивающую безволновое сопряжение горизонта, но этот переход состоит из криволинейных поверхностей, неудобных для осуществления на практике.

Опыты, произведенные в ГЭЛ

Опыты, поставленные в Гидроэлектрической лаборатории для исследования некоторых характерных переходных участков деривации ГЭС, преследовали две цели: определение потерь напора на переходных участках и установление таких форм переходов, при которых будут удовлетворяться все указанные выше требования.

Были исследованы следующие виды переходов, схемы которых сведены в таблицу 1 и представляющие определенный практический интерес.

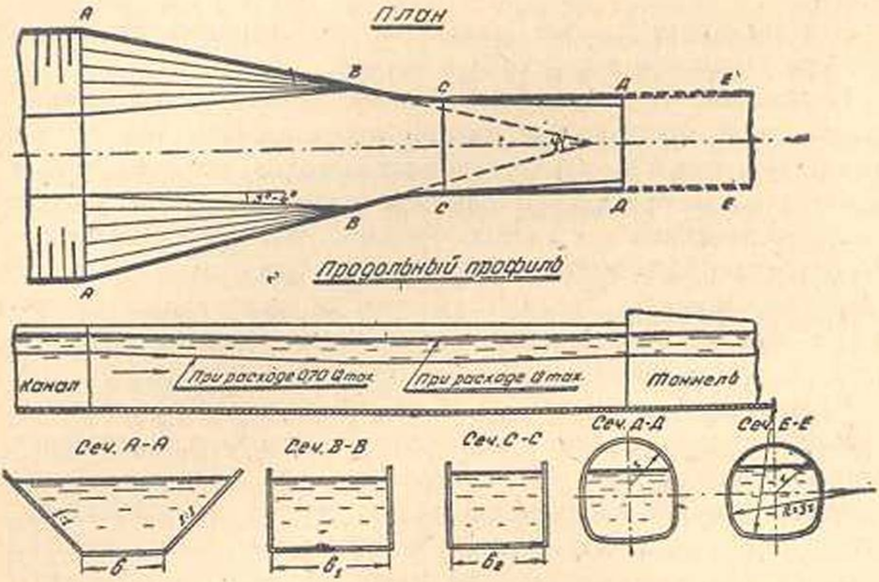
1. Переход № 1 (выход) от тоннеля круглого сечения к каналу прямоугольного сечения (таб. 1, схема 1).

2. Переход № 2 (выход) от тоннеля круглого сечения к каналу трапецоидального сечения (схема 2).

3. Переход № 3 а и 3 б (вход) от канала прямоугольного сечения к тоннелю круглого сечения (схемы 3 и 4).

4. Переход № 5а, 5б и 5с (вход) от канала трапецоидального сечения к тоннелю коробового и круглого сечения (схемы 6, 7, 8 и фиг. 1).

Измерительная аппаратура состояла из пьезометров (наклонных и прямых), трубки Пито-Ребока и тастеров. Пьезометры располагались в начале и в конце каждого перехода. Для получения более точных значений измеряемых величин пьезометры были установлены в трех точках поперечного сечения канала: в середине и по краям сечения.



Фиг. 1.

Моделирование переходных участков производилось по Фроуду. Произведенные опыты находились в автомодельной области с числами Рейнольдса от 25000 до 60000 (фиг. 2). Расчетные формулы для потерь напора и соответствующие им коэфициенты определялись исходя из уравнения Бернулли. Применение уравнения Бурнулли в данном случае может дать более близкие к истине результаты, так как на всех исследованных в ГЭЛ переходных участках имеется плавное расширение, а в расчетных сечениях, как показали опыты, имеется параллелеструйное движение [5].

При составлении уравнения Бернулли величины скоростных напоров определены по взятым из опыта скоростям и введен коэфициент неравномерности (α), также определенный по данным опытов.

На основании сказанного выше считаем, что при вычислении коэфициента потерь напора можно пользоваться уравнением (2), которое для входных участков легко выводится из уравнения Бернулли, а именно:

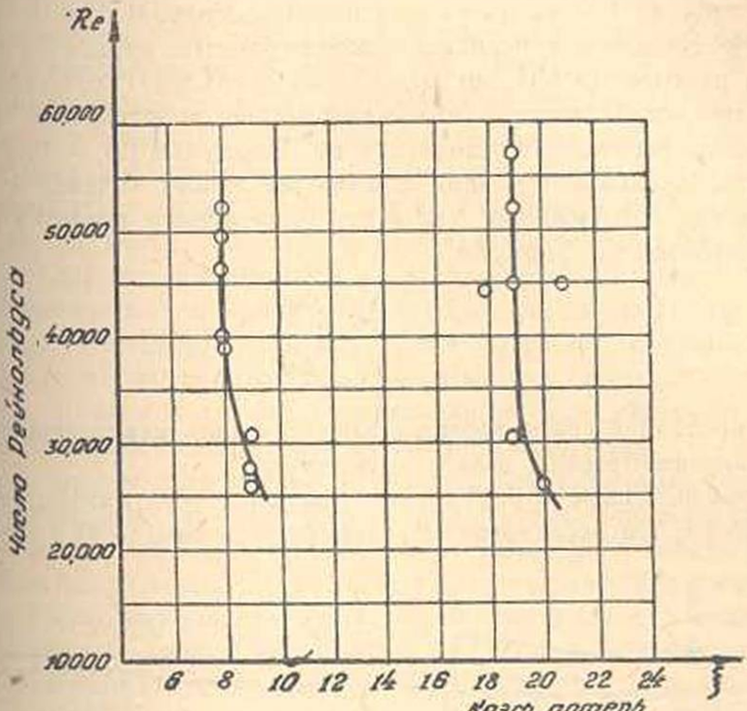
$$\zeta = \frac{\Delta h - h_e}{\dfrac{\alpha_3 V_3^2 - \alpha_1 V_1^2}{2g}} - 1,$$

где Δh — перепад на переходном участке (сечение 1—1 и 3—3, фиг 3), который измерялся при помощи тастера и манометра трубки Пито-Ребока, h_e — потеря напора на трение, определенная приближенно по формуле Шези, считая по гидравлическим элементам средним для начального и конечного сечения.

Коэфициент потери напора (ζ) для выходных участков (выход потока из тоннеля в канал) определяется также исходя из уравнения Бернулли и выражается формулой:

$$\zeta_{вых} = 1 - \frac{\Delta h + h_e}{\frac{\alpha_1 V_1^2 - \alpha_2 V_2^2}{2g}} \qquad (3)$$

Все величины, входящие в правые части формул (2) и (3), определялись из опытов.

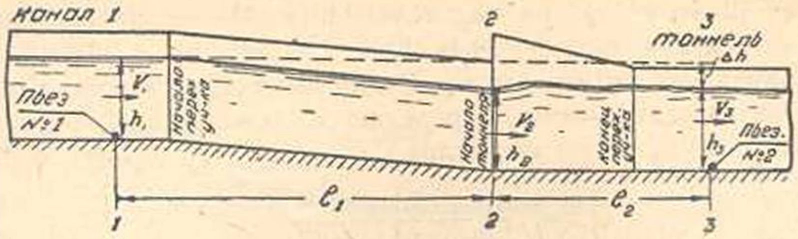


Фиг. 2.

Подробный анализ расчетных формул (2) и (3) дан А. К. Ананяном [3].

Из фиг. 4 видно, что сечения 1—1 и 3—3 взяты на таком расстоянии от начала и конца переходного участка, где влияние кривой спада и волнообразования не сказывается на показаниях пьезометров.

Исследованные в ГЭЛ переходные участки имеют некоторые конструктивные особенности. Как видно из фиг. 4, на дне выходного переходного участка имеется уступ (недалеко от выходного портала тоннеля), а входной переходный участок осуществлен с уклоном более крутым, чем дно канала (перед входом в тоннель). Уступ делается в натуре, для поднятия трассы канала в связи с восстановлением части



Фиг. 3.

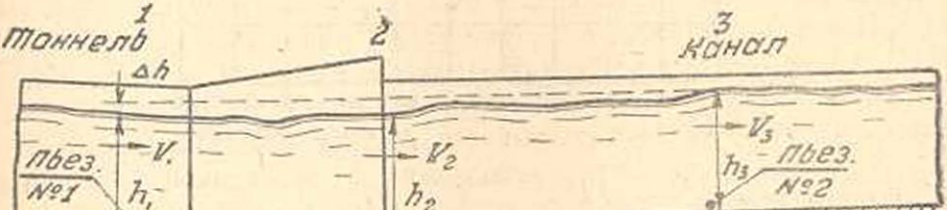
кинетической энергии при выходе потока из тоннеля; изменение же уклона канала на переходе дает возможность избегнуть образования подпора перед входом в тоннель.

В таблице 1 приводятся результаты экспериментов, полностью характеризующие все гидравлические параметры переходов при различных расходах (в натуре) от Q_{max} до $0{,}375\ Q_{max}$. Рассчитанные коэфициенты потерь напора и восстановление кинетической энергии при данных расходах определяются по формулам (2) и (3). На основании имеющихся материалов опытов для живых сечений канала и тоннеля как при сужении, так и при расширении потока коэфициент α расчитан по формуле:

$$\alpha = \frac{\sum V_i^2 \Delta\omega}{V_{cp}^2 \sum \Delta\omega_i}$$

В последней графе таблицы даны значения максимальной высоты волны, вызываемой наличием перехода.

Произведенные в ГЭЛ опыты показали, что коэфициенты потерь напора для исследованных переходов (схемы 1—8) в очень слабой степени меняются в зависимости от расхода (см. таблицу).



Фиг. 4.

Из данных таблицы видно также, что коррективы (коэф. α), вводимые в величины скоростей для выходных переходов, значительно отличаются от единицы и играют существенную роль при установлении величины потери напора.

Таким образом, опыты не подтверждают возможности введения допущений, принятых Хиндсом, и значения коэфициента α при расширении потока значительно отличаются от единицы, даже для более плавных переходов, чем исследованные Хиндсом.

Только при плавном сужении (когда угол сужения φ не превосходит $6^{\circ}-10^{\circ}$) потока среднее значение коэфициента α как в начале, так и в конце переходного участка приближается к единице.

Эксперименты, произведенные в ГЭЛ, показали, что потери напора для исследованных переходных участков имеют минимальную величину, но сопряжение горизонтов при этом происходит не плавно, а в виде волны (фиг. 5). Это обстоятельство говорит о том, что для получения безволнового сопряжения горизонта необходимо, кроме плавности перехода, удовлетворить еще особым условиям (об этом см. ниже).

Образование волн особенно опасно в том случае, когда открытая деривация переходит в безнапорный тоннель, так как при этом возможно захлебывание последнего. Образовавшиеся волны в конце входного переходного участка распространяются вглубь безнапорного тоннеля и постепенно уменьшают свою высоту.

Аналогичные волны возникают и на выходных переходных участках, но они менее опасны в смысле захлебывания тоннеля (фиг. 5).

Учитывая все вышесказанное в ГЭЛ, кроме определения основных гидравлических параметров переходов, результаты каковых исследований приведены в табл. 1, были разработаны такие схемы переходных участков, которые удовлетворяют всем необходимым условиям, а именно: они дают минимальные потери напора, безволновое сопряжение горизонтов и простоту в постройке.

Предложены две схемы. Очертание переходного участка по первой схеме дано на схеме 7 (см. табл. 1). Как видно из схемы 7, переход из канала трапецоидального сечения в тоннель круглого сечения осуществляется таким образом, чтобы в местах сопряжения не было углов, что достигается путем осуществления стенок переходного участка, расположенных по касательным к очертанию тоннеля. Практически это осуществляется следующим образом. На расстоянии, равном примерно одному (или двум) диаметру тоннеля, осуосуществляется переход из тоннеля круглого сечения в канал прямоугольного сечения (участок C—D схемы 7), имеющий ширину, примерно равную диаметру тоннеля.

К переходному участку C—D примыкает участок B—C, имеющий длину, равную (8—10) d, где d—диаметр тоннеля. Далее канал прямоугольного сечения сопрягается с каналом трапецоидального сечения при помощи короткого переходного участка, длиною около 15 *м* (участок A—B), причем образующие переход представляют из себя прямые линии. Смысл участка B—C заключается в том, что в его пределах происходит гашение волн, возникающих при переходе потока от канала трапецоидального сечения к каналу прямоугольного сечения.

Преимущество предложенной схемы перехода заключается в том, что образование волн хотя и имеет место, но волны не опасны в смысле захлебывания тоннеля, так как зона их распространения не переходит, в основном, за пределы прямоугольного соединительного канала (участок B—C). Волны, которые все же проникают в тоннель, уже не опасны, так как их максимальная высота в натуре не превосходит 30 *см*.

Основные параметры предложенной схемы перехода приведены в таблице 1.

В случае осуществления перехода из канала прямоугольного поперечного сечения в тоннель надобность в переходном участке B—C отпадает. Взамен этого удлиняется переходный участок C—D, т. е. уменьшается угол конфузора до 5—7° (схема 4). Единственным недостатком вышеуказанного перехода является то, что при нем возникает необходимость в постройке канала с вертикальными стенками. Если грунты нескальные, то это связано с некоторыми дополнительными материальными затратами.

Стремление максимально сократить длину соединительного канала B—C привело к переходному участку, основные размеры которого приведены на фиг. 1 (таб. 1, схема 8).

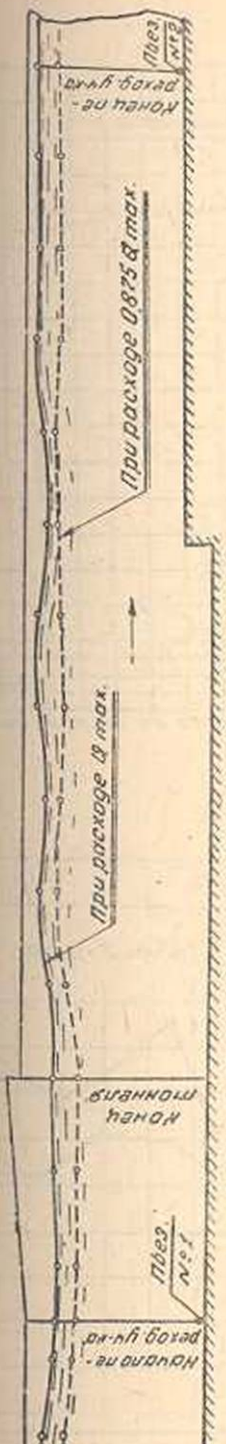
Этот участок состоит из двух переходов, которые сопрягаются между собою при помощи короткого закругления. Первый переход A—B из канала трапецоидального сечения осуществляется обычным способом (образующие переходы составляют прямые линии). Второй переход (участок C—D) сохраняется неизменным, как было предусмотрено в первой схеме. Эти переходные участки сопрягаются между собой при помощи плавных кривых (участок B—C), радиусы закругления которых назначаются с таким расчетом, чтобы концы переходных участков имели направление, совпадающее с касательными к кривым. Необходимо еще указать, что ширина канала по дну на протяжение первого перехода увеличивается до диаметра тоннеля, если она в нормальном сечении была меньше диаметра тоннеля.

Предлагаемые схемы дали весьма приемлемые результаты, так как при этом удовлетворяются все условия, предъявляемые к переходным участкам. Основные гидравлические параметры перехода приведены в таблице 1.

В предлагаемых схемах, обеспечивающих безволновое сопряжение горизонтов, изменение скоростных напоров вдоль переходных участков происходит по закону, близкому к закону прямой линии. Картина изменения скоростного напора для перехода 5 с приведена фиг. 6.

Как видно из фиг. 7, там, где не удовлетворяются условия прямолинейного изменения скоростного напора вдоль переходного участка, возникают довольно высокие волны, опасные в смысле захлебывания тоннеля, несмотря на то, что переход имеет плавные очертания.

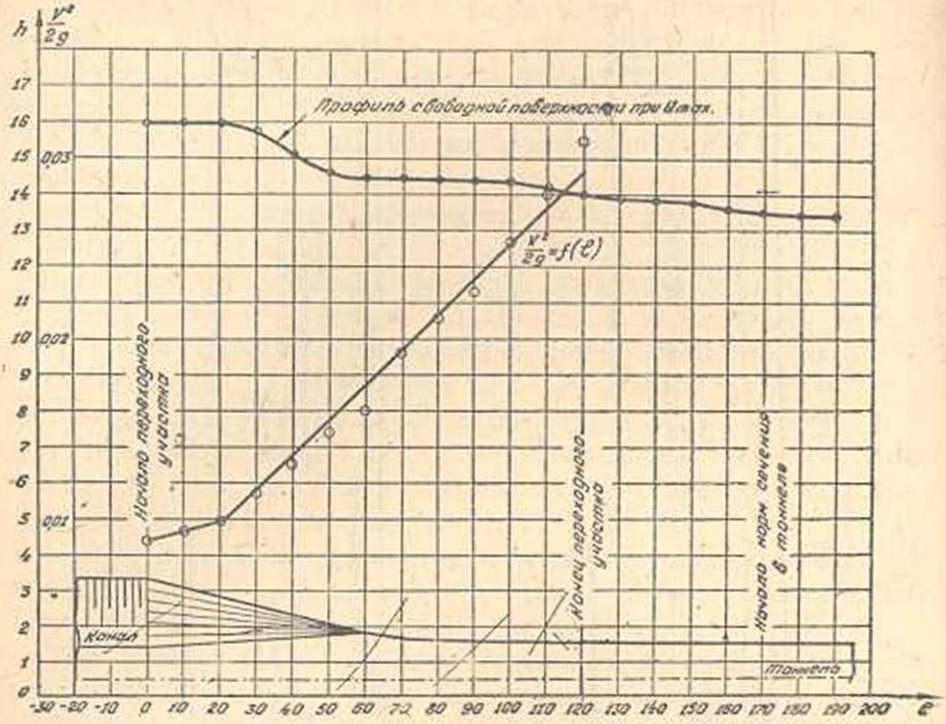
Прямолинейный закон изменения скоростных напоров по длине


Пьез. №2
При расходе 0,875 Q max
При расходе Q max
Пьез. №1

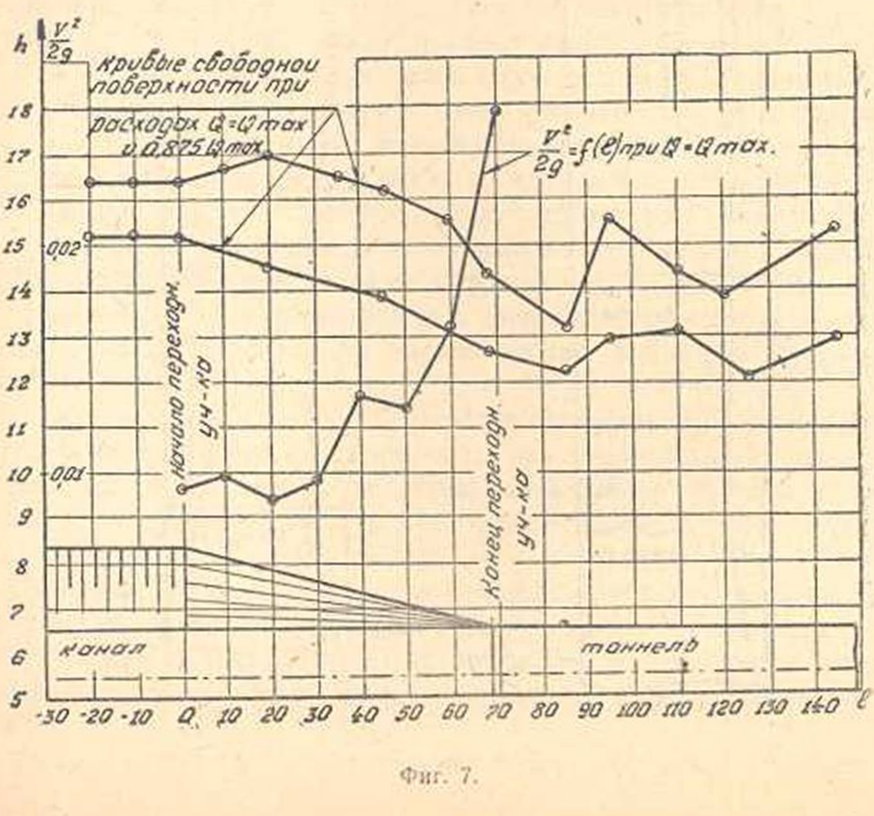
Фиг. 5а


Пьез. №2
Пьез. №1

Фиг. 5б.


Профиль свободной поверхности при Qmax.
$\frac{V^2}{2g}=f(\ell)$
Начало переходного участка
Конец переходного участка
Начало норм. сечения в туннеле
канал
туннель

Фиг. 6


Кривые свободной поверхности при расходах Q = Q max и 0,875 Q max
$\frac{V^2}{2g}=f(\ell)$ при Q = Q max.
Начало переходн. уч-ка
Конец переходн. уч-ка
канал
туннель

Фиг. 7.

переходного участка может служить основным принципом при проектировании переходных участков. Он обеспечивает безволновое сопряжение горизонтов. Средние скорости в каждом сечении такого перехода определяются по формуле $V_{cp} = \frac{Q_{max}}{\omega}$, задаваясь, в первом приближении, прямолинейным законом падения горизонтов вдоль переходного участка. По полученным в этих предположениях поперечным сечениям канала определяется очертание перехода в плане, которое затем корректируется с тем расчетом, чтобы обеспечить прямолинейность образующих. При этом получается переход, близкий по очертанию к переходу, основные контуры которого приведены на фиг. 1.

Далее снова подсчитываются скоростные напоры и указанная операция повторяется. Это продолжается до тех пор, пока будут удовлетворены с достаточной точностью условия прямолинейности изменения скоростных напоров и конструктивной простоты перехода.

Необходимо указать, что принятый принцип не нов; он был впервые высказан канд. тех. наук Чанишвили, но у последнего переход получился сложным (поверхность двоякой кривизны) и неудобным для практического осуществления. Переходный участок, полученный нами и приведенный на фиг. 1, в конструктивном отношении выгодно отличается от предложенного Чанишвили, почему и принят строительством к осуществлению.

Гидравлические исследования предлагаемого переходного участка дали весьма удовлетворительные результаты (максимальная высота волны всего 15 *см* в натуре) и удовлетворяют всем требованиям, предъявляемым к ним. Основные параметры этого перехода приведены в табл. 1.

Выводы

1. Правильно запроектированные переходные участки должны удовлетворять следующим трем условиям: давать минимальные потери напора, обеспечивать безволновое сопряжение горизонтов и иметь простую конструкцию, удобную для осуществления.

2. Опыты, произведенные в ГЭЛ, показали, что переход может быть и плавным и давать минимальные потери напора, но не всегда обеспечивать безволновое сопряжение горизонтов.

3. Для безволнового сопряжения горизонтов необходимо удовлетворять условиям прямолинейности изменения скоростного напора вдоль переходного участка. Это есть необходимое и достаточное условие.

4. Опыты, произведенные в ГЭЛ, подтвердили этот принцип, высказанный Чанишвили. Однако, применение этого принципа в ГЭЛ (независимо от работы Чанишвили) привело к более простой схеме

переходного участка, которая по своей конструкции намного проще по сравнению с переходом, предложенным Чанишвили.

5. Предлагаемые в настоящей работе типы переходов, показанные на схеме 7 и 8, удовлетворяют всем указанным в пункте 1 условиям, причем они отличаются большой простотой.

6. Основные гидравлические параметры (потери напора, коэф. ζ, кривая свободной поверхности и т. д.) для исследованных переходов, с успехом можно применять и для аналогичных переходов, проектируемых для других условий, но близких по своим относительным размерам к переходам, которые исследованы в ГЭЛ (табл. 1, схемы 1—8).

7. Неучет поправочных к скоростям коэфициентов (α_1 и α_2) в уравнении Вейсбаха, который до сих пор имеет место в практике проектирования, может привести к большим ошибкам.

В опытах ГЭЛ эти коэфициенты получились равными: $\alpha_1 = 1{,}1$ и $\alpha_2 = 1{,}2 \div 1{,}3$.

Эти величины и необходимо вводить в уравнение (1) при определении потери напора.

8. Формулу (1) можно рекомендовать к применению только при учете коэфициентов α_1 и α_2, значения которых можно брать из опытов ГЭЛ, учитывая при этом условие, указанное в пункте 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Hinds*—The hydraulic design of flume and siphon transitions. TASCR v. 92, 1928.
2. *А. К. Ананян*—Применение теории пограничного слоя к определению потери напора на переходных участках открытой деривации. Изв. АН. Арм. ССР (физ.-мат., естеств. и техн. науки) т. I., № 7, 1948.
3. *А. К. Ананян*—Потери напора в безнапорных водоводах при плавном расширении потока. Изв. АН Арм. ССР (физ.-мат., естеств. и техн. науки), т II, № 4. 225, 1949.
4. *И. Г. Есьман*—Гидравлика. Москва—Ленинград. 1938.
5. Отчет модельных испытаний по переходным участкам деривации ГюмушГЭС в Гидроэлектрической Лаборатории ВЭНИ—часть I и II, 1949.

Հ. Գ. Հարությունյան

ԲԱՑ ԴԵՐԻՎԱՑԻԱՅԻ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՏԵՂԱՄԱՍԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՓՈՐՁԵՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Անցումային տեղամասերի նախագծումը թելադրվում է տեղագրական գեոլոգիական և հիդրավլիկական պայմաններից։ Ճնշման կորուստի ճիշտ որոշումը անցումային տեղամասերում առանձնապես կարևոր է այն դեպքում, երբ նրանց թիվը բաց դերիվացիայում շատ է։ Բացի ճնշման կորուստներից անցումային տեղամասերում և նրանից հետո առաջանում են ալիքներ, որոնք վտանգավոր են առանձնապես թունելների համար։

Ճիշտ նախագծված անցումային տեղամասերը պետք է բավարարեն հետևյալ երեք պայմաններին՝ պետք է տան ճնշման փոքրագույն կորուստ, ապահովեն հորիզոնների սահուն, ոչ ալիքային կցորդումը և ունենան պարզ կառուցվածք, հեշտ իրականացնելու համար։

Հայկական ՍՍՌ Գիտությունների Ակադեմիայի Ջրաէներգետիկ Ինստիտուտի Հիդրո-էլեկտրիկ լաբորատորիայում կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ անցումային տեղամասը կարող է լինել սահուն և կարող է ունենալ փոքրագույն ճնշման կորուստներ, բայց միշտ չէ, որ կարող է ապահովել հորիզոնների ոչ ալիքային կցորդումը։ Հորիզոնների այդպիսի կցորդման համար անհրաժեշտ է բավարարել արագության ճնշման $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ փոփոխման գծային պայմանը անցումային տեղամասի երկարությամբ։ Այս պայմանը հանդիսանում է անհրաժեշտ և բավարար պայման։

Կատարված փորձերը հաստատում են վերը հիշված օրենքը, որը տվել է տեխ. գիտ. թեկ. Զանիչվիլին։ Սակայն նրա կիրառումը լաբորատորիայում (անկախ Զանիչվիլու աշխատանքից) բերել է ավելի պարզ անցումային տեղամասի իրականացմանը, որն իր կառուցվածքով ավելի պարզ է, Զանիչվիլու անցումային տեղամասի հետ համեմատած։

Այս աշխատանքում առաջարկված անցումային տեղամասերը, որոնք ցույց են տրված 7 և 8 սխեմաներում, բավարարում են վերը հիշված բոլոր պայմաններին և միաժամանակ ունեն պարզ կառուցվածք։

Հիմնական հիդրավլիկական մեծությունները (ճնշման կորուստի գործակիցը, ազատ մակերևույթը և այլն) հետազոտված անցումային տեղամասերի համար հնարավոր է օգտագործել նման տիպի անցումային տեղամասերի դեպքում, որոնք նախագծվում են ուրիշ պայմանների համար, բայց իրենց համեմատական չափերով մոտ են հետազոտվածներին (աղ. 1, սխ. 1—8)։

Արագությունների անհավասարաչափ բաշխման գործակիցների (α_1 և α_2) անտեսումը Վեյսբախի բանաձևում, որը մինչև այժմ օգտագործվում է նախագծման ժամանակ, մեծ սխալների պատճառ կարող է հանդիսանալ։ Այդ բանաձևը կարելի է օգտագործել՝ հաշվի առնելով միայն արագությունների անհավասարաչափ բաշխման գործակիցները, որոնց մեծությունները տրված են 1 աղյուսակում։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. III, № 3, 1950 Физ-мат. естеств. и тех. науки

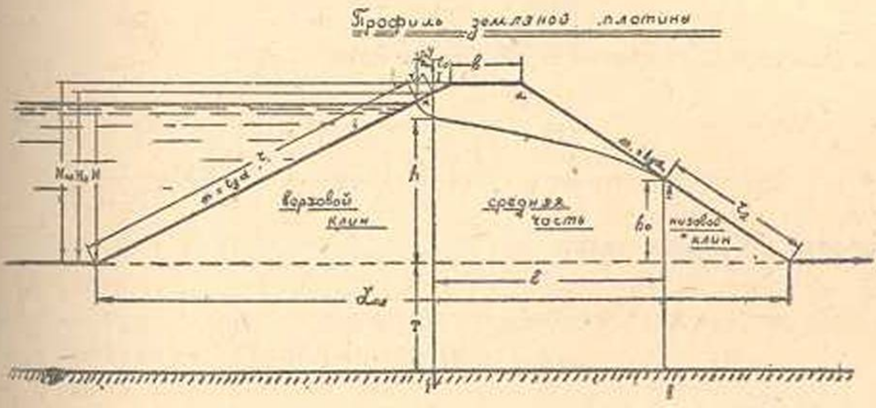
ГИДРОТЕХНИКА

А. М. Мхитарян

Расчет фильтрации воды через земляные плотины на проницаемых основаниях методом средней струйки

Точные гидромеханические решения задач по фильтрации через земляные плотины, основанные на весьма произвольных пограничных условиях (Нельсон-Скорняков [4] и др.), очень сложны и приводят к очень громоздким формулам, неудобным для практических целей.

Наши гидравлические решения [6] и [7] также дали сложные, трудно разрешаемые уравнения. Поэтому должно быть вполне естественным стремление многих исследователей получить простые, для практическое использования, уравнения.



Чертеж 1

Разработанный нами способ дает более простые формулы, не уступающие по точности гидромеханическим решениям. Вывод этих формул основан на следующем.

Земляная плотина трапецоидального профиля на проницаемом основании, разбита на три части точно так же, как это сделано нами ранее [6, 7]: первая часть—верховой клин, вторая—средняя и третья часть—низовой клин (см. черт. 1).

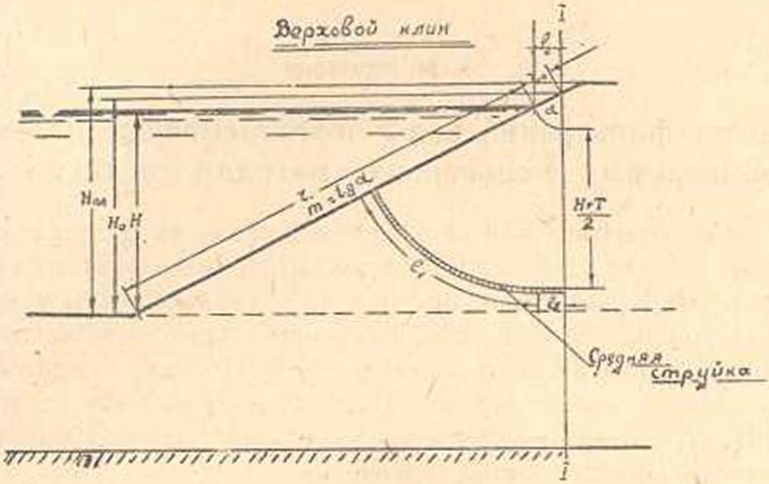
Расчет верхового клина

Решение задачи ведется методом средней струйки, широко использованным проф. Угинчусом в его диссертационной работе [3] для случая фильтрации воды через плотины на непроницаемых основаниях.

Для верхового клина средняя струйка l_{cp} слагается из дуги l_1 и прямолинейного отрезка l_2, т. е.

$$l_{cp} = l_1 + l_2 \qquad \text{(см. черт. 2)},$$

где $l_1 = g_1 \dfrac{H+T}{2}$, $\quad l_2 = 0{,}1mH$[1] и $\qquad g_1 = \beta_1 \dfrac{2\pi\alpha}{360^0}$[2]



Чертеж 2

Гидравлический градиент в верховом клине будет:

$$I = \frac{H-h}{cp} = \frac{H-h}{g_1\left(\dfrac{H+T}{2}\right) + 0{,}1mH}$$

Скорость по Дарси равна:

$$v = kI = k\,\frac{H-h}{g_1\dfrac{H+T}{2} + 0{,}1mH},$$

фильтрационный расход

$$q = v(h+T) \text{ или}$$

$$\frac{q}{k} = \frac{2(H-h)(h+T)}{g_1(H+T) + 0{,}2mH} \tag{1}$$

Расчет средней части

Если h — глубина в начале, а h_0 — в конце потока, то полная потеря напора $h-h_0$, а средняя площадь сечения на единицу ширины будет $\dfrac{h+h_0}{2}+T$ (см. черт. 3). Гидравлический градиент равен $I = \dfrac{h-h_0}{l}$

[1] Значение $l_2 = 0{,}1mH$ см. [6], стр. 43.

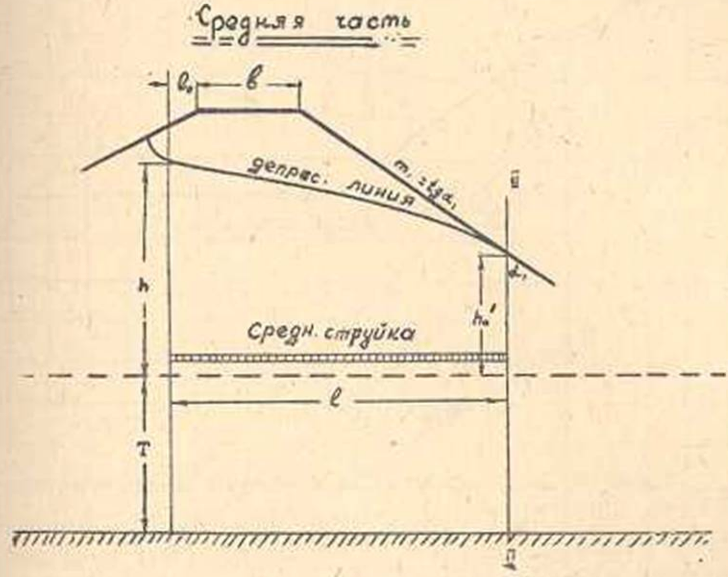
[2] Значение $g_1 = \beta_1 \dfrac{2\pi\alpha}{360^0}$ см. там же, стр. 45, а значение β_1 см. там же, стр. 44.

Скорость по Дарси $v = kI = k\frac{h-h_0}{l}$

$$\text{Расход } q = v\left(\frac{h+h_0}{2}+T\right) = k\frac{h-h_0}{l}\left[\frac{h+h_0}{2}+T\right]$$

$$\text{Окончательно } \frac{q}{k}l = \frac{h^2-h_0^2}{2}+T(h-h_0) \qquad (2)$$

Попутно заметим, что уравнение (2) получено нами [6] другим путем. Это значит, что метод расчета по средней струйке, при средней



Чертеж 3

струйке, при условии подстановки средних величин всех гидравлических элементов, дает точные результаты.

Такой результат не будет получен при подстановке не среднего живого сечения $\frac{h_0+h}{2}+T$, а площади выходного сечения h_0, как делает проф. Угинчус в своей работе [3] для плотин на непроницаемом основании.

Расчет низового клина

Длина средней струйки здесь будет равна

$l_{cp} = g_2\frac{h_0+T}{2}$, где $g_2 = \beta_2\frac{2\pi\alpha_1}{360^0}$ (см. черт. 4).

Потеря напора будет $h' = \frac{h_0+T}{2}\cos\alpha_1$

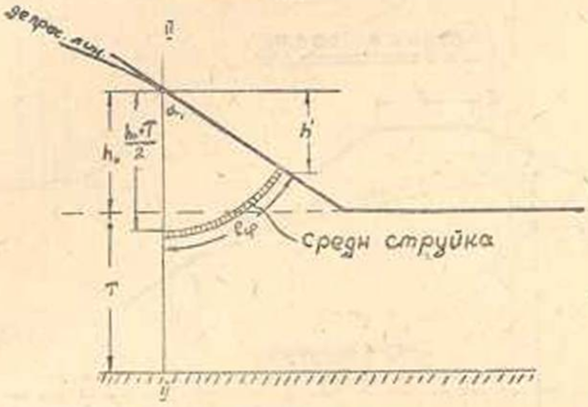
Скорость по Дарси равна $v = kI$, где

I—гидравлический градиент, $I=\frac{h'}{l_{pc}}=\frac{h_0+T}{2}\mathrm{Cos}\alpha_1\frac{2}{g_2(h_0+T)}=\frac{\mathrm{Cos}\alpha_1}{g_2}$,

фильтрационный расход равен $q=kI\,(h_0+T)$, где h_0+T—площадь живого сечения на единицу длины. Подставляя значение, получим:

$$q=k\frac{\mathrm{Cos}\alpha_1}{g_2}\left(h_0+T\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad(3)$$

Низовой клин



Чертеж 4

Результат аналогичен результату, полученному более точным методом (см. [6] стр. 49). Но способ расчета по средней струйке в случаях средней и большой мощности проницаемого слоя T не дает точных результатов; поэтому мы ограничимся случаем малой мощности проницаемого слоя. Получено 3 уравнения с 4-мя неизвестными q, h, h_0 и l.

Четвертое уравнение получаем весьма просто как соотношение между элементами плотины $l=L_{пл}-1{,}1mH-m_1h_0$ (см. черт. 1). Система фильтрационных уравнений по средней струйке следующая:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{q}{k}=\frac{2(H-h)(h+T)}{g_1(H+T)+0{,}2mH} && (1)\\
&\frac{q}{k}\,l=\frac{h^2-h_0^2}{2}+T(h-h_0) && (2)\\
&\frac{q}{k}=\frac{h_0+T}{g_2}\mathrm{Cos}\alpha_1 && (3)\\
&l=L_{пл}-1{,}1mH-m_1h_0 && (4)
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}$$

Решение фильтрационных уравнений

Несмотря на то, что указанная система уравнений решается алгебраически, мы считаем более целесообразным решение их с помощью номограмм. Для этого преобразуем систему следующим образом.

Разделим все уравнения на T и введем обозначения.

$$\frac{h}{T}=\bar{h},\ \frac{H}{T}=\bar{H},\ \frac{h_0}{T}=\bar{h}_0,\ \frac{L_{пл}-1{,}1mH}{T}=\bar{L},\ \frac{q}{kT}=\bar{q}.$$

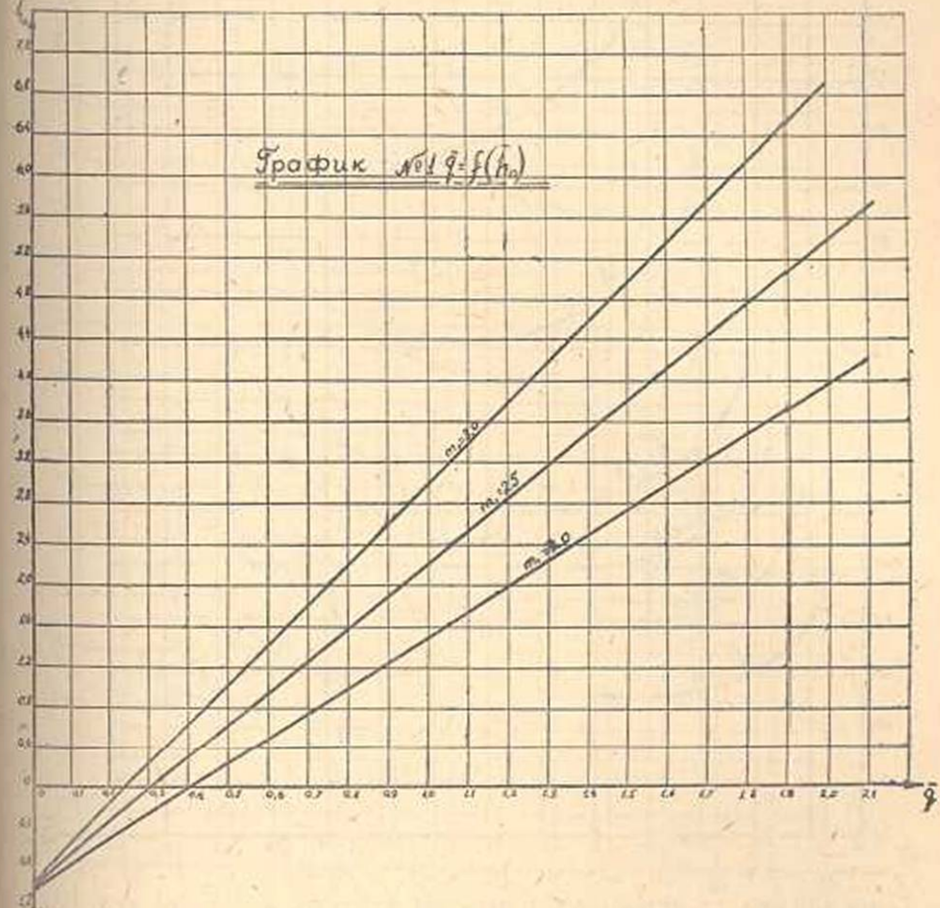


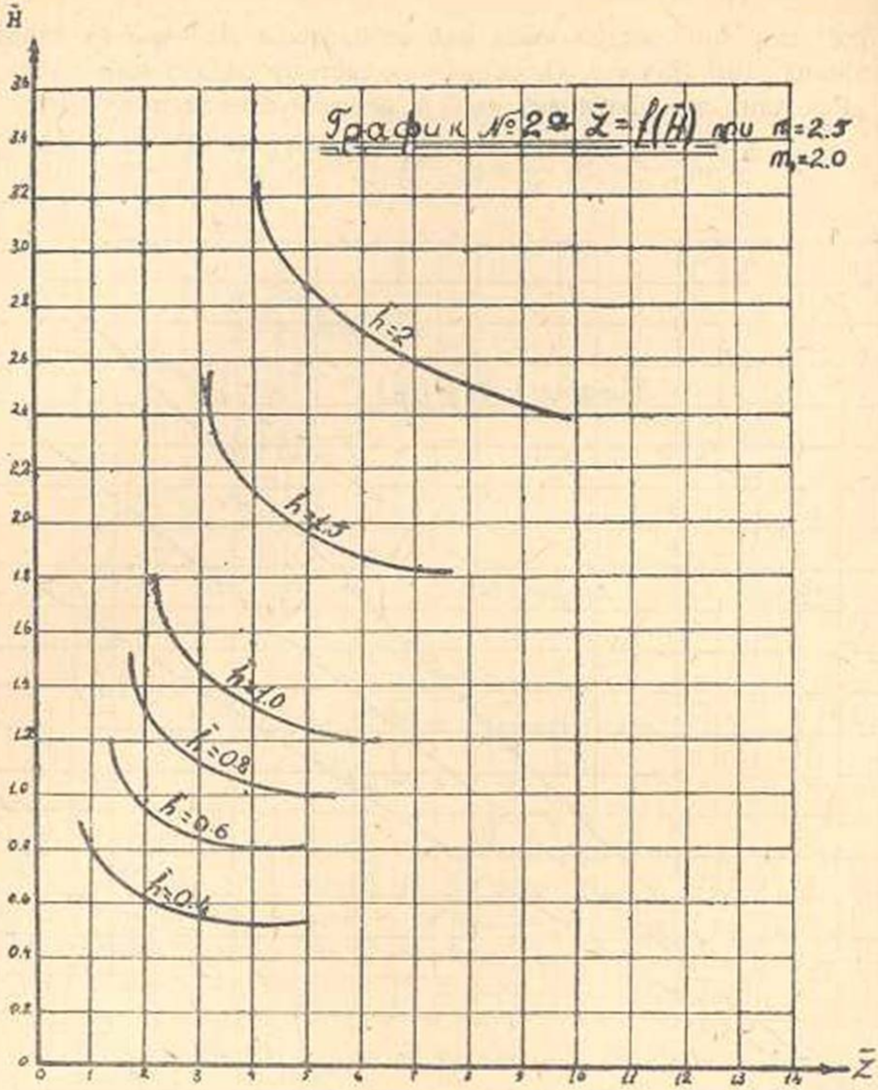
График 1.

В результате подстановки новых величин получим:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{q} &= \frac{2(\bar{H}-\bar{h})(\bar{h}+1)}{g_1(\bar{H}+1)+0{,}2m\bar{H}} && (1')\\
\bar{q}(\bar{L}-m_1\bar{h}_0) &= \frac{\bar{h}^2-\bar{h}_0^2}{2}+\bar{h}-\bar{h}_0 && (2')\\
\bar{q} &= \frac{\bar{h}_0+1}{g_2}\cdot \operatorname{Cos}\alpha_1 && (3')
\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

Из уравнения (3′) видно, что $\bar{q}=f(\bar{h}_0)$.

Для разных α_1, а, следовательно, m_1, задаваясь рядом значений



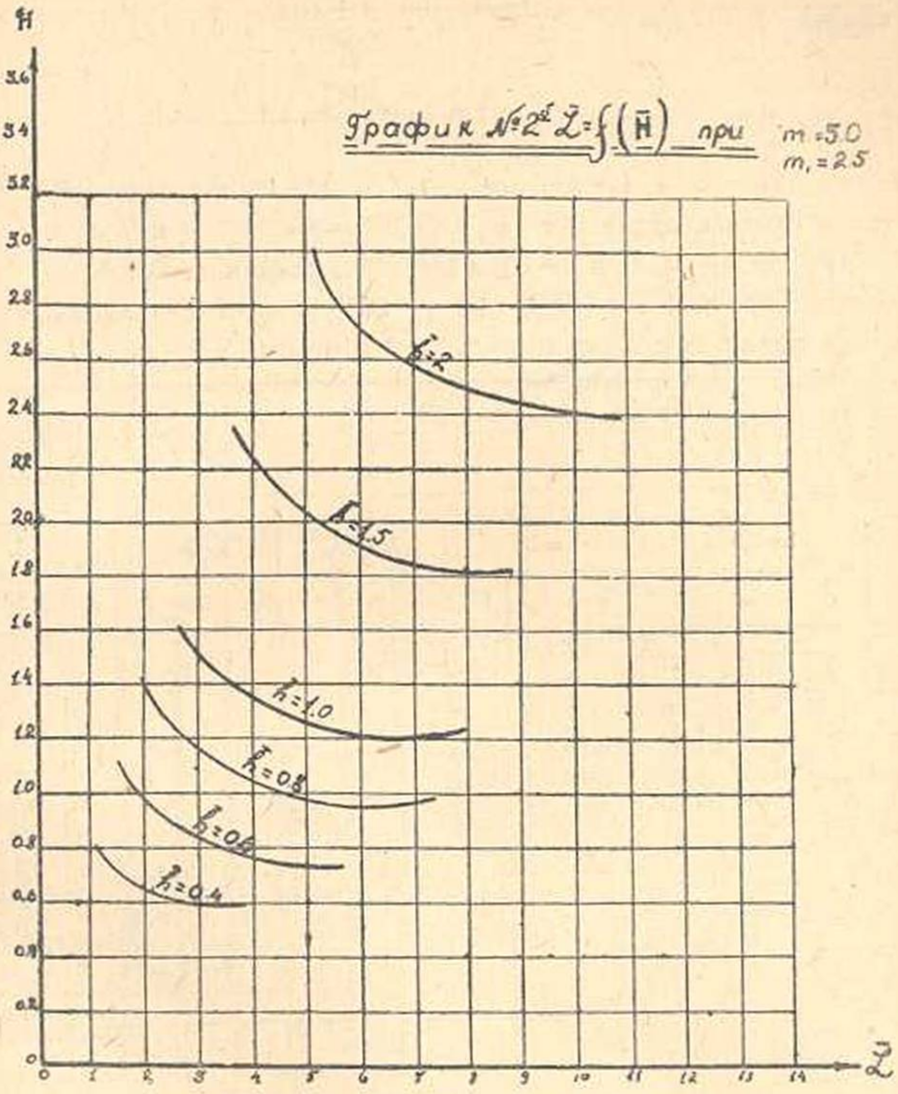
$\bar{h}_0$, определяем $\bar{q}$, используя при этом таблицу 3 (см. [6] стр. 53).

Результаты вычислений сводим в таблицу 1.

Таблица 1.

$\bar{h}_0$	$m_1=2$	$m_1=2{,}5$	$m_1=3$
	$\bar{q}$	$\bar{q}$	$\bar{q}$
0,05	0,424	0,328	0,266
0,10	0,444	0,343	0,278
0,15	0,464	0,359	0,291
0,20	0,485	0,374	0,304
0,25	0,505	0,390	0,316
0,30	0,525	0,406	0,329
0,35	0,546	0,421	0,342
0,40	0,563	0,437	0,354
0,45	0,585	0,453	0,367
0,50	0,406	0,468	0,380

При помощи данной таблицы построены графики № 1 $\bar{q}=f(\bar{h}_0)$.



Из уравнения (I′) системы II видно, что $\bar{q}=f(\bar{H}, \bar{h})$. Задаваясь одним значением $\bar{h}$ и рядом значений $\bar{H}$, определяем $\bar{q}$, по которому, пользуясь графиками $\bar{q}=f(\bar{h}_0)$, соответственно значению m_1, определяем величину приведенной выходной ординаты $\bar{h}_0$. Из уравнения (2′) системы II, при уже известных $\bar{h}$ и $\bar{h}_0$, определяем $\bar{L}$.

Результаты вычислений сведены в таблицу 2 и построены графики 2а и 2б $\bar{L}=f(\bar{H})$.

Решение покажем на простом примере. Даны: напор $H=11$ *м*; толщина проницаемого слоя $T=10$ *м*, откосы $m=3$, $m_1=2{,}5$, $k=0{,}002$ *м*/сек, $L_{пл}=68$ *м*.

Требуется найти элементы кривой депрессии, h и h_0, расстояние l и фильтрационный расход q.

Решение: $$L=\frac{L_{пл}-1{,}1mH}{T}=\frac{68-1{,}1\cdot 3\cdot 11}{10}=3{,}17$$

$$\bar{H}=\frac{H}{T}=\frac{11}{10}=1{,}1$$

По графику 26 $\bar{L}=f(\bar{H})$ при $\bar{L}=3{,}17$ и $\bar{H}=1{,}1$ находим $\bar{h}=0{,}8$.
Отсюда входная ордината $h=\bar{h}\ T=0{,}8\cdot 10=8$ *м* $h=8$ *м*

По таблице 2 при $\bar{h}=0{,}8$ и $\bar{L}=3{,}17$ находим $\bar{q}=0{,}329$.
По графику № 1 $\bar{q}=f(\bar{h}_0)$, при $\bar{q}=0{,}329$ и $m_1=2{,}5$ находим $\bar{h}_0=0{,}2$; отсюда выходная ордината $h_0=\bar{h}_0.T=0{,}2\cdot 10=2$ *м*; $h_0=2$ *м*.

$l=L_{пл}-1{,}1mH-m_1h_0=68-1{,}1\cdot 3\cdot 11-2{,}5\cdot 2=29{,}2$ *м*.

Как видим, расчет элементарно прост.

Таблица 2

$m=2{,}5$; $m_1=2$

$\bar{H}$	$\bar{h}=3{,}5$			$\bar{h}=3{,}0$			$\bar{L}=2{,}5$			$\bar{L}=2{,}0$			$\bar{L}=1{,}5$		
	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	q	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$
5,4	1,657	3,16	7,21												
5,25	1,565	2,905	7,38												
5	1,505	2,76	7,54												
4,75	1,22	2,45	8,32												
4,5	1,023	1,50	9,83	1,394	2,405	6,42									
4,25	0,806	1,14	11,99	1,194	1,98	6,84									
4,0	5,566	0,40	16,95	1,005	1,50	7,86	1,32	2,30	5,12						
3,75				0,798	0,98	9,56	1,09	1,52	5,73						
3,5				0,562	0,39	13,3	0,93	1,44	6,10						
3,25							0,73	0,95	7,95	1,12	1,80	4,12			
3,0							0,55	0,37	10,17	0,95	1,37	4,51			
2,75										0,77	,92	6,29			
2,5										0,55	0,37	6,3	0,92	1,30	3,18
2,4										0,45	0,12	9,83			
2,25										0,30	0,40	13,60	0,77	0,92	3,50
2,0													0,54	0,34	4,79
1,9													0,46	0,14	5,65

$\bar{H}$	$\bar{h}=1$			$\bar{h}=0{,}8$			$\bar{h}=0{,}6$			$\bar{h}=0{,}4$		
	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$
1,75	0,72	0,80	2,20									
1,5	0,53	0,32	2,77	0,656	0,64	1,67						
1,4	0,44	0,09	3,36	0,61	0,52	1,99						
1,35	0,403	0,05	3,73									
1,3	0,354	−0,115	4,13	0,531	0,32	2,05						
1,2	0,248	−0,38	6,52	0,447	0,10	2,48	0,609	0,52	1,4			
1,1	0,131	−0,72	13,52	0,354	−0,115	3,07	0,524	0,30	1,42			
1,0				0,25	−0,38	4,56	0,444	0,10	1,71			
0,95				-0,193	−0,54	6,76	0,3	−0,26	2,83	0,454	0,13	1,00
0,9							0,265	−0,35	3,32	0,516	0,28	0,86
0,8							0,188	−0,55	4,63	0,44	0,08	1,05
0,7										0,353	−0,14	1,43
0,6										0,254	−0,38	2,34

$m=3,0;\ m_1=2,5$

$\bar{H}$	$\bar{h}=4$			$\bar{h}=3,5$			$\bar{h}=3,0$			$\bar{h}=2,5$			$\bar{h}=2,0$		
	$\bar{q}$	$\bar{h}$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$
5,75	1,473	3,70	10,23												
5,5	1,31	3,18	10,81												
5,25	1,14	2,65	11,73												
5,0	0,95	2,03	13,36	1,28	3,09	9,59									
4,75	0,74	1,36	16,52	1,12	2,58	9,76									
4,5	0,53	0,69	22,6	0,97	2,10	10,74									

$\bar{H}$	$\bar{q}=3,5$			$\bar{h}=3,0$			$\bar{h}=2,5$			$\bar{h}=2,0$			$\bar{h}=1,5$		
	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$
4,25	0,74	1,36	13,3	1,09	2,48	7,99									
4,0	0,53	0,69	18,1	0,92	1,94	8,85									
3,75				0,73	1,33	10,54	1,00	2,20	5,60						
3,5				0,51	0,63	14,64	0,91	1,90	5,91						
3,25							0,72	1,3	7,42						
3,0							0,51	0,63	9,95	0,88	1,81	5,14			
2,9							0,42	0,34	13,29	0,81	1,58	5,38			
2,75										0,74	1,36	5,71			
2,5										0,511	0,615	7,70			
2,4										0,42	0,34	9.44			
2,35										0,375	0,20	10,6	0,76	1,40	3,57
2,3										0,32	0,09	12,46	0,727	1,30	—
2,25										0,277	-0,12	14,54	0,71	1,26	3,94
2,10													0,58	0,85	4,72
2,0													0,51	0,63	5,08
1,9													0,42	0,34	6,15
1,8													0,32	0,03	8,17
1,7													0,227	0,26	11,90

$\bar{H}$	$\bar{h}=1,0$			$\bar{h}=0,8$			$\bar{h}=0,6$			$\bar{h}=0,4$		
	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$	$\bar{q}$	$\bar{h}_0$	$\bar{L}$
1,6	0,57	0,82	2,64									
1,5	0,51	0,63	2,88									
1,4	0,417	0,31	3,50	0,562	0,78	2,00						
1,35	0,37	0,19	3,99	0,537	0,72	2,05						
1,3	0,328	0,05	4,285	0,495	0,56	2,22						
1,2	0,23	−0,25	6,835	0,414	0,32	2,59						
1,1	0,121	−0,60	14,36	0,329	0,07	3,35	0,487	0,55	1,535			
0,95				0,232	−0,26	5,14	0,413	0,31	1,78			
0,9				0,18	−0,40	7,54	0,373	0,18	2,00			
0,8				0,123	− 0,60	11,00	0,331	0,07	2,30			
0,75							0,234	− 0,25	3,64	0,41	0,31	1,04
0,70							0,181	−0,40	5,97	0,371	0,18	1,21
							0,125	−0,60	8,10	0,33	0,07	1,40
										0,237	−0,27	2,80

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Павловский*—О фильтрации воды через земляные плотины на непроницаемых основаниях. Москва, 1932.
2. *Ф. Б. Нельсон-Скорняков*—Расчет движения грунтовых вод через земляные плотины. Москва, 1936.
3. *А. А. Угинчус*—Расчет фильтрации через земляные плотины. Москва, 1940.
4. *Ф. Б. Нельсон-Скорняков*—Фильтрация в однородной среде. Москва, 1947.
5. *П. А. Шанкин*—Расчет фильтрации в земляных плотинах. Москва, 1947.
6. *А. М. Мхитарян*—Фильтрация воды через земляные плотины на проницаемых основаниях. Изв. АН. Арм. ССР, № 5, 1947.
7. *А. М. Мхитарян*—Фильтрация воды через земляные плотины на проницаемых основаниях с водой в н. б. Изв. АН Арм. ССР. № 4, 1948.
8. *А. М. Мхитарян*—Фильтрация воды через земляные плотины на проницаемых основаниях без воды в н. б. Изв. АН Арм. ССР. № 2, 1949.

Ա. Մ. Մխիթարյան

ՋՐԱԹԱՓԱՆՑ ՀԻՄՔԵՐԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ՀՈՂԱՅԻՆ ՊԱՏՎԱՐՆԵՐԻ ՄԱՐՄՆՈՎ ՋՐԻ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ՄԻՋԻՆ ՇԻԹԻ ԵՂԱՆԱԿՈՎ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում տրված է ջրաթափանց հիմքերի վրա գտնվող հողային պատվարների մարմնով ջրի ֆիլտրացիայի հաշվումը միջին շիթի եղանակով։

Այս մեթոդն առաջին անգամ կիրառել է պրոֆ. Ուգինչուսը, սակայն ջրաթափանց հիմքերի վրա գտնվող հողային պատվարների համար, որը համարվում է սույն հոդվածի մասնավոր դեպքը։ Պատվարի մարմնով կատարվող ֆիլտրացիայի վերաբերյալ հաշվարկի շատ մեթոդներ կան, սակայն նրանք բարդ են։ Թեև հոդվածում բերված հավասարումներն իրենցից ներկայացնում են բարդ հավասարումներ, այնուամենայնիվ նրանց լուծումը տրվում է գրաֆիկական եղանակով, աղյուսակներ և նոմոգրամաներ կազմելով։

Վերջում բերված են խնդիրներ, որոնց լուծման եղանակը ցույց է տալիս նրա պարզությունը, իսկ արդյունքի համեմատությունները լաբորատորիական տվյալների հետ ցույց է տալիս արտադրությունում օգտագործելու համար նրա միանգամայն պիտանի լինելը։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. III, № 3, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ЭНЕРГЕТИКА

Н. А. Картвелишвили

О критериях качества непрерывного регулирования параллельно работающих машин

Устойчивость любой системы регулирования является необходимым, но отнюдь не достаточным, условием пригодности этой системы к нормальной эксплотации.

С эксплоатационной точки зрения, система регулирования должна удовлетворять требованиям гораздо более жестким, чем условия устойчивости. Эти требования сводятся к следующему.

1. Максимальные отклонения регулируемой величины в переходном процессе от ее номинального значения должны быть, по возможности, малы.

2. Переходный процесс должен затухать с возможно большей скоростью.

3. Переходный процесс должен протекать по возможности спокойно, с наименьшим количеством колебаний регулируемой величины, т. е. система регулирования должна, по возможности, приближаться к апериодической.

Перечисленные требования будем называть условиями качества регулирования.

Вопрос о подборе значений параметров регуляторов, обеспечивающих выполнение условий качества регулирования является более общим и, естественно, гораздо более сложным, чем вопрос об устойчивости регулирования. Полного решения этого вопроса до настоящего времени не имеется даже для систем, содержащих только сосредоточенные постоянные, хотя для таких систем вся проблема представляется более легкой, чем для систем, имеющих кроме сосредоточенных еще и распределенные постоянные. Все работы, посвященные вопросу о качестве регулирования, кроме работ, основанных на так называемом методе частотных характеристик, имеют в виду системы с сосредоточенными постоянными.

Мы будем рассматривать вопрос о качестве регулирования в аспекте параллельной работы гидротурбин в энергетических системах. Такие системы содержат звенья с распределенными постоянными, а именно—напорные трубопроводы турбин. Однако, если гидравлический удар в трубопроводах рассматривать как жесткий удар, а не как упругий, т. е. считать скорость распространения ударных волн бесконечно большой, то в системе уравнений переходного режима все гистеро-диференциальные уравнения переходят в обыкновенные диференциальные, т. е. рассматриваемая система регулирования приводится к системе с сосредоточенными постоянными.

Современное состояние вопроса о качестве регулирования линейных систем с сосредоточенными постоянными можно охарактеризовать так.

Если не считать ряда работ, трактующих некоторые стороны интересующего нас вопроса применительно к простейшим системам регулирования и не представляющих, поэтому, интереса с точки зрения весьма сложного случая параллельной работы машин, то первым исследованием условий качества регулирования нужно считать статью Михайлова [6], в которой устанавливается операторный критерий апериодичности для однопетлевых систем регулирования. Идеи Михайлова получили дальнейшее развитие и обобщение в работе Блоха [1]. Результаты Михайлова и Блоха можно применить к случаю параллельной работы машин, но эти работы отвечают только на весьма узкий вопрос: при каких параметрах системы регулирования переходный процесс будет апериодическим? При соблюдении условий, требуемых этим критерием, система может оказаться апериодически неустойчивой, если одновременно не соблюдены требования критерия устойчивости регулирования. Общий совместный критерий апериодичности и устойчивости регулирования был значительно позже предложен Мееровым [5]. Для системы, имеющей характеристическое уравнение n-ой степени, критерий Меерова сводится к проверке знака $2(n-1)$ определителей порядков $2, 3, \ldots, 2n-1$, составленных по определенному закону из коэфициентов характеристического уравнения.

Одновременно Цыпкиным и Бромбергом [13] были установлены, путем обобщения критерия устойчивости, предложенного Гурвицем условия, которым должны удовлетворять коэфициенты характеристического уравнения системы регулирования для того, чтобы скорость затухания переходного процесса (т. е. абсолютная величина вещественной части корней характеристического уравнения) была не менее некоторой заданной величины. Насколько можно судить по книге Корнилова и Пивень [4], аналогичное обобщение критерия Гурвица было ранее сделано проф. Вознесенским в одном из его докладов. Наконец, Мясников [8] дал обобщение критерия устойчивости Михайлова [7], направленное так же на оценку скорости затухания переходного процесса.

Каждая из перечисленных работ касается только второго, или только третьего условия качества регулирования. Однако, эти условия, вне взаимной связи, мало говорят о характере переходного процесса. Например, апериодичность системы безусловно желательна, если она сопровождается быстрым затуханием переходного процесса и малыми абсолютными значениями экстремумов переходных функций. Но, сама по себе, она отнюдь не является качеством, ради которого следовало бы поступиться другими качествами системы, например, быстротой затухания процесса. Более того, при быстром затухании переходного процесса полная апериодичность системы, обычно трудно достижимая на практике, является излишней (а иногда и вредной, см. ниже), поскольку в этих условиях уже второй экстремум отклонения переходной функции от номинального значения может оказаться практически ничтожным. Кроме того, нужно отметить, что применение результатов Меерова, Цыпкина и Бромберга к интересующему нас случаю параллельной работы машин хотя принципиально и не встречает препятствий, но практически оказывается почти невозможным, приводя к необходимости выполнения чрезвычайно громоздких и трудоемких вычислений.

Если второе и третье условия качества регулирования сводятся только к обеспечению того или иного расположения корней характеристического уравнения системы на комплексной плоскости, то с первым условием дело обстоит значительно сложнее: это условие требует увязки расположения корней с начальными условиями переходного процесса.

Первая, и насколько нам известно, единственная попытка в этом направлении была сделана Фельдбаумом [12], который дал оценку значений переходных функций, но лишь для случая, когда характеристическое уравнение системы регулирования имеет не более одной пары комплексно-сопряженных корней. Этот случай, повидимому, является преобладающим в задачах регулирования отдельных машин, но он почти никогда не встречается даже в простейших случаях параллельной работы агрегатов. Распространение же результатов Фельдбаума на случай, когда характеристическое уравнение имеет более одной пары комплексно-сопряженных корней, представляет значительные математические и вычислительные трудности.

О характере переходного процесса косвенно можно судить по величине интеграла $I = \int^{\infty} x^2 dt$, где x—отклонение регулируемой величины от номинального аначения. Чем меньше величина этого интеграла, тем, вообще говоря, выше качество регулирования. Однако, Фельдбаум [11] показал, что подбор параметров системы регулирования по условию минимума величины J сплошь и рядом приводит к излишней колебательности системы, и что более правильная и объективная оценка процесса регулирования дается величиной интеграла

$$I = \int_0^{\infty} V(x_1, x_2, \ldots x_n)\, dt,$$

в котором V—некоторая определенно-положительная квадратичная форма переходных функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, характеризующих рассматриваемый переходный процесс и определяемых обычными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; x_k$$

Здесь a_{ik} — постоянные, зависящие от параметров системы. В случае устойчивой системы $I = W_0$, причем W_0 — значение, которое принимает при $t=0$ квадратичная форма W, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{dW}{dt} = -V$$

Пусть

$$V = \sum_{j,k=1}^{n} A_{jk} x_j \; x_k \, , \quad W = \sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \, x_i \; x_j$$

Коэфициенты A_{jk} и B_{ij} связаны системой уравнений вида

$$A_{jk} + 2 \sum_{i=1}^{n} B_{ij} \, a_{ik} = 0$$

Из этой системы находятся коэфициенты B_{ij} квадратичной формы W по заданным коэфициентам A_{jk} квадратичной формы V. Подбор последних обусловлен только тем, что квадратичная форма V должна быть определенно положительной. Практически наиболее просто считать форму V канонической

$$V = \sum_{k=1}^{n} x^2_k$$

Применение обобщенного таким образом интегрального критерия сводится, в каждом конкретном случае, к буквенному решению системы уравнений, определяющих коэфициенты B_{ij} и к подбору таких значений a_{ik} (т. е. к подбору таких значений параметров системы), которые обеспечивают минимум величины W_0.

Применение критерия Фельдбаума к интересующему нас случаю наталкивается не только на обычное для расчетов переходных процессов в энергетических системах затруднение — чрезвычайную громоздкость вычислений, в частности, громоздкость буквенного решения системы уравнений определяющих коэфициенты B_{ij}, но и на более существенную трудность отыскания минимума функции W_0, зависящей от большого количества аргументов. Но невозможность применения этого критерия в общем случае не исключает, тем не менее, возможности использования его для решения некоторых частных задач, например, для подбора остаточных неравномерностей регулирования одной-двух машин, при условии, что все остальные параметры системы заданы и остаются без изменения.

Все изложенное выше показывает насколько сложен вопрос о качестве регулирования вообще, а в применении к энергетическим системам, в особенности.

Не ставя себе целью дать исчерпывающее решение вопроса о таком подборе параметров системы регулирования, при котором были бы удовлетворены все три сформулированные в начале данной работы условия, мы изложим здесь общий прием, позволяющий удовлетворить одновременно двум последним условиям. Этот прием является развитием результатов, изложенных в одной из наших работ [2].

Обратимся к уравнениям турбины в переходном режиме. Ее механический момент M и расход q выражаются [3] зависимостями:

$$M = \frac{\xi - \varphi^2\xi_A}{1-\xi_A}\left(M_A + \frac{\alpha - \alpha^*}{1-\alpha^*}\right) - \varphi^2 M_A, \tag{1}$$

$$q = \alpha\left[(1-k)\sqrt{\xi} + k\varphi\right], \tag{2}$$

в которых

ξ—напор турбины,

φ—число ее оборотов,

α—открытие регулирующих органов,

α^*—значение α при холостом ходе турбины, ξ_A, M_A и k—постоянные для данной турбины параметры, определяемые по ее универсальной характеристике. При этом момент M, расход q, напор ζ, число оборотов φ и открытие α, выражены в долях своих номинальных значений, так что при установившемся режиме и работе турбины с полной нагрузкой $\alpha = q = \varphi = \xi = M = 1$.

Учитывая гидравлический удар как удар жесткий, имеем следующее уравнение трубопровода

$$\xi + T_c = \frac{dq}{dt} = 1, \tag{3}$$

где t—время, а T_c — постоянная времени трубопровода, равная $\frac{LQ_0}{gfH_0}$. Здесь L — длина трубопровода, f—площадь его сечения, g—ускорение силы тяжести, Q_0 и H_0—номинальные расход и напор турбины.

Величина α вполне определяется положением поршня сервомотора регулятора скорости турбины, ход которого, отсчитываемый от положения соответствующего полностью закрытым регулирующим органам и выраженный в долях хода соответствующего номинальной мощности, мы будем обозначать через x_s. Таким образом

$$\alpha = \alpha(x_s) \tag{4}$$

При установившемся режиме до начала регулирования переменные в уравнениях (1)—(4) имеют значения

$$\xi = \varphi = 1,\ \alpha = \alpha_0,\ q = q_0 = \alpha_0,\ M = M_0 = \frac{\alpha_0 - \alpha^*}{1 - \alpha^*},\ x_s = x_{s0}$$

В переходном режиме эти переменные получают приращения, обозначаемые, как обычно, значком Δ перед соответствующими буквами. Полагая эти приращения малыми и пренебрегая малыми величинами порядков выше первого, из уравнений (1)—(4) легко получить следующее выражение для операторного изображения приращения механического момента

$$\Delta M \leftarrow \div \left(g - \frac{hT_c p}{1 + bT_c p}\right) S - \left(l + \frac{mT_c p}{1 + bT_c p}\right)\Phi, \qquad (5)$$

где

$$g = \frac{1}{1-\alpha^*}\left(\frac{d\alpha}{dx_s}\right)_0, \quad m = \alpha_0 k\,\frac{M_0 + M_A}{1 - \xi_A}, \qquad b = \alpha_0\,\frac{1-k}{2},$$

$$l = 2\,\frac{\xi_A M_0 + M_A}{1 - \xi_A}, \quad h = \frac{M_0 + M_A}{1 - \xi_A}\left(\frac{d\alpha}{dx_s}\right)_0.$$

$S = S(p)$ и $\Phi = \Phi\,(p)$ суть операторные изображения перемещения поршня сервомотора Δx_s и изменения числа оборотов машины $\Delta\varphi$, а p—оператор Хевисайда.

Электрические связи между всеми n агрегатами системы, а также между агрегатами и моторами нагрузки будем считать абсолютно жесткими, т. е. относительные числа оборотов всех машин φ—одинаковыми. В этом случае уравнение баланса мощностей в энергетической системе будет, как известно [3], иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = P + T_A \frac{d\varphi}{dt}, \qquad (6)$$

где T_A — постоянная инерции системы и

$$\lambda_i = \frac{N_{i0}}{\sum\limits_{i=1}^{n} N_{i0}}, \qquad P = \frac{N}{\varphi \sum\limits_{i=1}^{n} N_{i0}},$$

причем N_{i0} — номинальная мощность i-го аггрегата, а N — электрическая нагрузка системы. Величина P (момент сопротивления сети) может рассматриваться как функция частоты тока, т. е. величины φ, $P = P(\varphi)$. Рассматривая толчок нагрузки величины ΔP, можно написать:

$$P = P_0 + \Delta P + \delta\Delta\varphi, \qquad (7)$$

где $P_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_{oi}$ — значение величины P до толчка, а δ—постоянная, зависящая от состава нагрузки. Можно показать, на чем мы не будем останавливаться, что

$$\delta = \frac{2N_н - N_A}{\sum_{i=1}^{n} N_{io}},$$

где N_A —сумма омической нагрузки и мощности, преобразуемой в мощность постоянного тока, а $N_н$ — насосная (исключая поршневые насосы) и вентиляторная нагрузка.

Из уравнений (5), (6) и (7) легко получить

$$\sum_{i=1} \lambda_i \left(g_i - \frac{h_i T_{ci} p}{1+b_i T_{ci} p}\right) S_i = \left[\delta + T_A p + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 + \frac{m_i T_{ci} p}{1+b_i T_{ci} p}\right)\right] \Phi + \Delta P \quad (8)$$

Операторное уравнение регулятора скорости 1-го агрегата имеет следующий вид:

$$A_i(p)\Phi + B_i(p)S = 0, \quad (9)$$

где $A_i(p)$ и $B_i(p)$—полиномы оператора p с коэфициентами, зависящими только от параметров данного регулятора. Если пренебречь промежуточными усилениями в регуляторе, то

$$A_i(p) = a_i(T_{ki}p + 1), \; B_i(p) = T_{ki}T_{si}p^2 + (\mu'_i T_{ki} + T_{si})p + \mu''_i, \quad (10)$$

где

a_i —коэфициент, зависящий от степени неравномерности центробежного маятника,

T_{ki} — постоянная времени обратной связи,

T_{si}— постоянная времени сервомотора,

μ'_i —коэфициент, зависящий от кинематической схемы обратной связи,

μ''_i —коэфициент, зависящий от остаточной неравномерности регулирования

$$\mu''_i = -\frac{a\Delta\varphi_0}{1-\alpha^*},$$

$\Delta\varphi_0$—остаточная неравномерность регулирования.

Из уравнений (8) и (9) легко получить:

$$\Phi = -\Lambda P \frac{\sigma(p)}{\Delta(p)}, \quad (11)$$

где

$$\sigma(p) = (1+b_1T_{c1}p)\ldots(1+b_nT_{cn}p).B_1(p)\ldots B_n(p),\ \Delta(p)=\sigma(p)\,\Omega(p),$$

$$\Omega(p) = \delta + T_A p + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(l_i + \frac{m_i T_{ci} p}{1+b_i T_{ci} p}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(g_i - \frac{h_i T_{ci} p}{1+b_i T_{ci} p}\right)\frac{A_i(p)}{B_i(p)}$$

Функции $\sigma(p)$ и $\Delta(p)$ являются целыми функциями.

Если r есть степень функции $\Delta(p)$, а $p_1\ p_2\ldots,\ p_r$ ее нули и если эти нули различны, то можно показать, что при начальных условиях рассматриваемой задачи будем иметь:

$$\Delta\varphi = \frac{A\sigma(p_1)}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)\ldots(p_1-p_r)}\left(1-e^{-p_1t}\right)+$$

$$+\frac{A\sigma(p_2)}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)\cdots(p_2-p_r)}\left(1-e^{-p_2t}\right)+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{A\sigma(p_r)}{(p_r-p_1)(p_r-p_2)\ldots(p_r-p_{r-1})}\left(1-e^{-p_rt}\right), \qquad (12)$$

где A—постоянная. Пусть $p_1=-\eta_1+j\omega_1,\ p_2=\bar{p}_1=-\eta_1-j\omega_1,\ldots.$ $p_{2m-1}=-\eta_m+j\omega_m,\ p_{2m}=\bar{p}_{2m-1}=-\eta_m-j\omega_m$ суть комплексные нули $\Delta(p)$, а $p_{2m+1}=-\eta_{2m+1},\ldots.\ p_r=-\eta_r$ — ее вещественные нули. Тогда выражение (12) можно привести к виду:

$$\Delta\varphi = e^{-\eta_1 t}(C_1\sin\omega_1 t + C_2\cos\omega_1 t) + \ldots\ldots +$$

$$+e^{-\eta_m t}(C_{2m-1}\sin\omega_m t + C_m\cos\omega_m t) + C_{2m+1}e^{-\eta_{2m+1}t} + \ldots + C_r e^{-\eta_r t}, \qquad (13)$$

где C_i —постоянные.

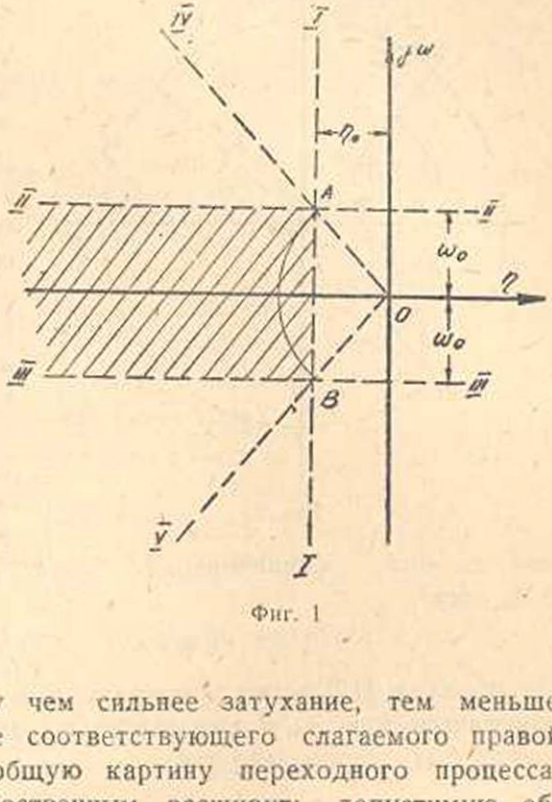
Для того, чтобы любое слагаемое правой части выражения (13) за данное время Δt уменьшилось не менее чем в к раз, должно быть

$$\eta_{min} \geqslant \eta_0 = \frac{l_n\,\kappa}{\Delta t},$$

где η_{min} — наименьшая из величин $\eta_1,\ \eta_2,\ldots\ \eta_{m-1},\ \eta_m,\ \eta_{2m+1},\ \ldots.\ \eta_r$. Другими словами, для удовлетворения второго условия качества регулирования нужно, чтобы на плоскости $p=\eta+j\omega$ все нули $\Delta(p)$ располагались левее прямой 1—1 (фиг. 1), параллельной мнимой оси и проведенной на расстоянии η_0 слева от нее. Для удовлетворения же третьего условия качества регулирования необходимо, чтобы периоды гармонических слагаемых правой части выражения (13) были не менее некоторой заданной величины T_{min}, то-есть, чтобы было

$$\omega_{max} \leqslant \omega_0 = \frac{2\pi}{T_{min}},$$

где ω_{max} — наибольшая из величин $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$. Другими словами, нужно, чтобы все нули $\Delta(p)$ лежали внутри полосы, ограниченной двумя прямыми II—II и III—III, параллельными вещественной оси и проведенными на расстоянии ω_0 от нее. Таким образом, второе и третье условия качества регулирования будут удовлетворены тогда, когда все нули функции $\Delta(p)$ будут расположены внутри области, показанной на фиг. 1 штриховой. В предельном случае апериодической системы $T_{min} = \infty$, $\omega_0 = 0$ и прямые II—II и III—III сливаются с вещественной осью. Однако, как уже указывалось, абсолютная апериодичность процесса является излишней. Те же самые соображения, которые лежат в основе этого утверждения, позволяют облегчить третье условие качества регулирования, допустив меньшие значения периодов колебания (т. е. большие значения ω) при сильном затухании, т. е.



Фиг. 1

при больших η, поскольку чем сильнее затухание, тем меньше будет сказываться влияние соответствующего слагаемого правой части выражения (13) на общую картину переходного процесса. Поэтому представляется естественным расширить допустимую область расположения нулей $\Delta(p)$, ограничив ее не прямыми II—II и III—III, а прямыми O—IV и O—V, построение которых ясно из фиг. 1. Далее, с точки зрения упрощения вычислений при подборе параметров регуляторов, очень удобно заменить отрезок прямой AB дугой круга радиуса OA=OB, что дает некоторое усиление второго условия качества регулирования. Таким образом, окончательно мы имеем допустимую область CABD расположения нулей, функции $\Delta(p)$, представленную на фиг. 2 и характеризуемую параметрами η_0 и ω_0 или

$$\rho_0 = \sqrt{\eta_0^2 + \omega_0^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega_0}{\eta_0},$$

значения которых должны быть заданы на основании данных опыта эксплоатации.

Из выражений (11) и (12) легко усмотреть, что нули функции $\Lambda(p)$ совпадают с нулями $\Omega(p)$. Кроме того, функция $\Omega(p)$ имеет полюсы, которыми являются нули функций $1 + b_i T_{ci} p$, и нули полиномов $B_i(p)$, т. е.

$$p = -\frac{1}{b_i T_{ci}} \text{ и } p = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mu'}{T_s} + \frac{1}{T_k}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu'}{T_s} + \frac{1}{T_k}\right)^2 - \frac{\mu''}{T_k T_s}} \qquad (14)$$

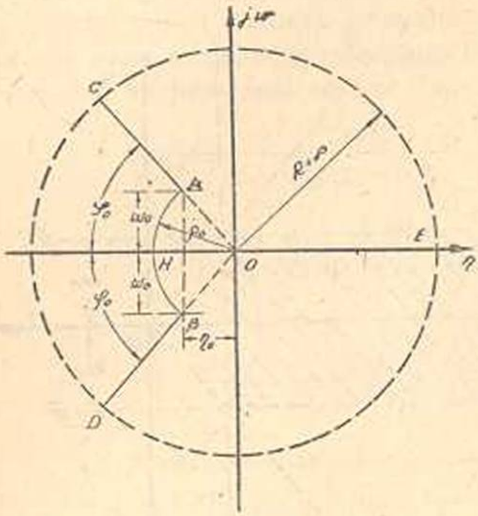


Рис. 2.

Пусть s из этих полюсов лежат вне области допустимого расположения нулей на плоскости p. Так как вне этой области не должно быть ни одного нуля функции $\Omega(p)$, то согласно принципу аргумента, изменение $\arg \Omega(p)$ при обходе контура DECABD должно быть равно $-2\pi s$. Это изменение слагается из изменения $\arg \Omega$ на контуре CABD, которое мы обозначим через ε и из изменения $\arg \Omega$ на контуре DEC, которое мы обозначим через ε'. Таким образом, второе и третье условия качества регулирования будут удовлетворены в том случае, если

$$\varepsilon + \varepsilon' = -2\pi s \qquad (15)$$

Из формулы (12) легко усмотреть, что когда $(p) \to \infty$, функция $\Omega(p)$ изменяется, как $T_\Lambda p$, следовательно, $\varepsilon' = 2(\pi - \varphi_0)$ и условие (15) может быть переписано так:

$$\varepsilon = -2\pi(s+1) + 2\varphi_0 \qquad (16)$$

Так как отображение на плоскость $\Omega(p)$ симметричного относительно вещественной оси контура CABD также симметрично относительно вещественной оси, то для определения величины ε достаточно построить отображение только верхней половины HAC этого контура.

Теперь предлагаемый критерий качества регулирования можно сформулировать так: второе и третье условия качества регулирования будут удовлетворены в том случае, если при изменении p вдоль контура HAC радиус-вектор функции $\Omega(p)$ повернется вокруг начала координат на угол $\pi(s+1) - \varphi_0$.

Представим функцию $\Omega(p)$ в виде:

$$\Omega(p) = G(p) + \sum_{i=1}^{n} Q_i(p) L_i(p), \tag{17}$$

где

$$G(p) = \delta + T_A p + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(l_i + \frac{m_i T_{ci} p}{1 + b_i T_{ci} p} \right),$$

$$Q_i(p) = \lambda_i \left(g_i - \frac{h_i T_{ci} p}{1 + b_i T_{ci} p} \right), \quad L_i(p) = \frac{A_i(p)}{B_i(p)}.$$

Положим $p = \rho(\cos\varphi + j\sin\varphi)$; тогда

$$\operatorname{Re} G(p) = \delta + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i l_i + \rho \left[T_A \cos\varphi + \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i m_i T_c (b_i T_{ci}\rho + \cos\varphi)}{1 + b_i T_{ci}\rho (b_i T_{ci}\rho + \cos\varphi)} \right], \tag{18}$$

$$J_m G(p) = \rho \sin\varphi \left[T_A + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i T_{ci}}{1 + b_i T_{ci}\rho (b_i T_{ci}\rho + \cos\varphi)} \right], \tag{19}$$

$$\operatorname{Re} Q(p) = \lambda g - \frac{\lambda h T_c \rho (b T_c \rho + \cos\varphi)}{1 + b T_c \rho (b T_c \rho + \cos\varphi)}, \tag{20}$$

$$I_m Q(p) = - \frac{\lambda h T_c \rho \sin\varphi}{1 + b T_c \rho (b T_c \rho + \cos\varphi)}, \tag{21}$$

$$\operatorname{Re} L(p) = \frac{a}{(B^2)} \Big\{ \mu'' + (\mu' T_k + T_s) T_k \rho^2 + [(\mu' + \mu'') T_k + T_s + T_k{}^2 T_s \rho^2] \rho\cos\varphi + T_k T_s \rho^2 \cos 2\varphi \Big\}, \tag{22}$$

$$\operatorname{Im} L(p) = \frac{a\rho\sin\varphi}{(B^2)} [(\mu' + \mu'') T_k + T_s - T_k{}^2 T_s \rho^2 + 2(\mu' T_k + T_s) T_k \rho\cos\varphi + 4 T_k{}^2 T_s \rho^2 \cos 2\varphi], \tag{23}$$

$$(B^2) = \mu''^2 + (\mu' T_k + T_s)^2 \rho^2 + T_k{}^2 T_s \rho^4 + 2(\mu' T_k + T_s)(\mu'' + T_k T_s \rho^2) \rho\cos\varphi + 2\mu'' T_k T_s \rho^2 \cos 2\varphi \tag{24}$$

При пользовании этими формулами нужно иметь в виду, что когда p изменяется вдоль дуги НА $\rho = \rho_0 = \text{const}$, а когда p изменяется вдоль прямой АС, то $\varphi = \pi - \varphi_0 = \text{const}$. По формулам (18)—(24) легко построить контуры, описываемые концами радиусов-векторов функций $G(p)$, $Q_i(p)$ и $L_i(p)$, называемые обычно годографами этих функций, и далее, с помощью формулы (17), пользуясь обычными правилами умножения и сложения векторов на комплексной плоскости, построить годограф функции $\Omega(p)$, по которому и судить о том, удовлетворяется ли сформулированный выше критерий качества регулирования. При этом, если для удовлетворения этого критерия приходится изменять параметры одного из регуляторов, то необходимо заново перестраивать только годограф $L_i(p)$ этого регулятора, все же остальные годографы остаются без изменения.

После того, как найдена одна комбинация параметров регуляторов, при которой система удовлетворяет поставленным требованиям, нетрудно найти и ту область изменения параметров, в пределах которой эти требования остаются выполненными. Для этой цели может служить, например, способ, указанный Неймарком [9].

Из формулы (12) видно, что если все нули $\Delta(p)$ различны, то увеличивая модули их разностей всегда можно добиться того, чтобы верхняя граница значений величины $(\Delta\varphi)$ стала меньше любого заданного положительного числа, то есть удовлетворить первому условию качества регулирования. Но вопрос о том, какие параметры нужно задать системе, чтобы получить необходимые модули разностей нулей, наталкивается на исключительные математические трудности. Такого же рода трудности препятствуют и решению вопроса о том, при каких значениях нулей внутри указанной области верхняя граница $(\Delta\varphi)$ будет максимальной. Здесь, однако, на помощь приходят некоторые физические соображения. Совершенно не претендуя на какую-либо математическую строгость и не давая законченного решения, эти соображения могут, тем не менее, до некоторой степени ориентировать в вопросе, почему мы и считаем полезным их здесь привести.

Физически очевидно, что наихудшим, или, во всяком случае, близким к наихудшему, случаем в смысле быстроты затухания переходного процесса и абсолютной величины экстремумов $\Delta\varphi$ будет тот, когда обсолютная величина вещественной части всех нулей $\Delta(p)$ будет равна некоторой наименьшей допустимой величине η_0. Но при условии $\mathrm{Re}\, p^i = \eta_0$ $(i=1,2,\ldots,r)$ функция $\Delta(p)$ может иметь как вещественные, так и комплексные нули. Опять-таки исходя из физических соображений можно утверждать, что наихудшим будет случай, когда комплексные части всех нулей равны между собой, т. к. только в этом случае при тригонометрических членах выражения функции $\Delta\varphi$ появляются вековые множители, увеличивающие размах и длительность колебаний.

Рассмотрим простейший случай изолированной работы гидрогенераторного агрегата. В этом случае остаточная неравномерность регулирования не нужна и, как правило, отсутствует, т. е. $\mu''=0$ и, как легко проверить, выражение (11) приводится к виду:

$$\Phi = \frac{B}{T_э} \frac{\left(p + \frac{1}{T_к} + \frac{\mu'}{T_э}\right)}{p\left[p^2 + \left(\frac{a_1}{T_э} + \frac{1}{T_M}\right)p + \frac{a_2}{T_э T_M}\right]} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(p + \frac{1}{T_к}\right)}{\left(p + \frac{1}{T_к} + \frac{\mu'}{T_э}\right) + \frac{1}{T_э T_э}\left(a_3 p + \frac{a_4}{T_M}\right)\left(p + \frac{1}{T_к}\right)}, \tag{25}$$

где $T_э = b T_A$, $T_M = b T_c$, $a_1 = b(1+\delta) + m$, $a_2 = b(1+\delta)$,
$a_3 = bg$, $a_4 = bg - h$, $B = -b\Delta p$.

В данном случае функция $\Lambda(p)$, т. е. знаменатель правой части выражения (25)—четвертой степени. Здесь могут быть три случая: все нули $\Lambda(p)$ вещественны, два нуля вещественны и два нуля комплексны, все нули комплексны. В соответствии со сказанным выше, примем:

в первом случае $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \eta_0$,

во втором случае $p_1 = p_2 = -\eta_0$, $p_3 = -\eta_0 + j\omega_0$, $p_4 = -\eta_0 - j\omega_0$,

в третьем случае $p_1 = p_2 = -\eta_0 + j\omega_0$, $p_3 = p_4 = -\eta_0 - j\omega_0$.

Это дает в первом случае:

$$\Delta\varphi = \frac{B}{\eta_0 T_э} e^{-\tau}\left[1 - (2 - \beta_1)\frac{\tau}{2} + (1 - \beta_1 + \beta_2)\frac{\tau^2}{6}\right], \tag{26}$$

во втором случае:

$$\Delta\varphi = \frac{B}{\eta_0 T_э} \frac{e^{-\tau}}{\Theta^2}\left[-(2 - \beta_1)(1 - \cos\Theta\tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{1 - \beta_1 + \beta_2 - (\beta_1 - \beta_2)\Theta_2 + \Theta^4}{\Theta(1 + \Theta^2)} \sin\Theta\tau + (1 - \beta_1 + \beta_2)\tau\right], \tag{27}$$

в третьем случае:

$$\Delta\varphi = \frac{B}{\eta_0 T_э} e^{-\tau}\left\{\left[\frac{1 - \beta_1 - \beta_2 + (3 - 2\beta_1 + 2\beta_2)\Theta^3 + (3 - \beta_1 + 2\beta_2)\Theta^4 + \Theta^6}{2\Theta^3(1 + \Theta^2)^2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2 - \beta_1 + (5 - 3\beta_1 + \beta_2)\Theta^2 + \Theta^4}{2\Theta^3(1 + \Theta^2)}\tau\right]\sin\Theta\tau -$$

$$\left. - \frac{1 - \beta_1 + \beta_2 - (\beta_1 - \beta_2)\Theta^2 - \Theta^4}{2\Theta^2(1 + \Theta^2)}\tau\cos\Theta\tau\right\}. \tag{28}$$

В этих формулах

$$\tau = \eta_0 t, \ \Theta = \frac{\omega_0}{\eta_0} \quad \beta_1 = \frac{1}{\eta_0}\left(\frac{1}{T_к} + \frac{\mu'}{T_э}\right), \quad \beta_2 = \frac{1}{\eta_0^2 T_M}\left(\frac{1}{T_к} + \frac{\mu'}{T_э}\right).$$

Из формул (27) и (28) видно, что при одной и той же величине η_0 можно увеличением Θ сделать абсолютную величину экстремумов $\Delta\varphi$ сколь угодно малой при простых комплексных нулях $\Lambda(p)$ и сколь угодно большой—при кратных (или близких).[1] Поэтому,

[1] На это свойство кратных комплексных корней первым обратил внимание, насколько нам известно, Фельдбаум [12].

учитывая, что $\Lambda(p)$ может иметь кратные или близкие комплексные нули, ограничение величины Θ нужно считать необходимым не только с точки зрения третьего, но и с точки зрения первого условия качества регулирования. Из формулы (28) легко усмотреть, что при желании ограничить экстремумы $\Delta\varphi$ какой-либо заданной величиной, можно допускать тем большие значения Θ, чем больше величина η_0. Все это вполне увязывается с той формой области допустимого расположения нулей $\Lambda(p)$, какая была нами принята выше.

Второй вывод, вытекающий из сделанного заключения, сводится к тому, что если при определенных условиях (во всяком случае, тогда, когда Λ имеет одну пару комплексных нулей) увеличением Θ можно уменьшить экстремумы $\Delta\varphi$ (факт хорошо известный из расчетной практики конструкторских бюро турбостроительных заводов), то полная апериодичность системы не только не нужна, но и далеко не всегда желательна.

В предыдущем изложении мы рассматривали энергетические системы с жесткими электрическими связями. Обобщение полученных результатов на случай упругих электрических связей не представляет затруднений, но вместе с тем, не представляет и практического интереса. Сравнительные подсчеты показывают, что если энергетическая система статически устойчива в обычном электротехническом смысле этого понятия, то ее, за крайне редкими исключениями, можно рассматривать как систему с жесткими связями, во всяком случае в пределах той точности, какая требуется в расчетах регулирования первичных двигателей вообще, а тем более в оценках качества регулирования.

К сожалению, предложенный критерий качества регулирования не допускает обобщения на случай систем с распределенными постоянными. Это связано с тем, что при наличии распределенных постоянных функция $\Omega(p)$ имеет бесчисленное множество полюсов вне области допустимого расположения ее нулей.

Некоторые результаты в отношении качества регулирования таких систем даст упоминавшийся выше метод частотных характеристик. Эти результаты изложены в работе Солодовникова [10]. Солодовников основывается на критерии устойчивости Найквиста, заключающегося в том, что система регулирования устойчива в том случае, если ее амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точку (—1, j, 0). В нашей недавней работе [3] этот критерий был обобщен на случай параллельной работы машин и сводится к тому, что замкнутый контур, описываемый на комплексной плоскости концом радиуса вектора функции

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i(p)}{G(p)} L_i(p)$$

(см. формулу (17) при изменении p вдоль мнимой оси, не должен охватывать точку $(-1, j, 0)$. Если учитывать трубопроводы турбин как звенья с распределенными постоянными, то этот критерий остается без всяких изменений, но члены

$$\frac{T_c p}{1+bT_c p}$$

в выражениях функций $G(p)$ и $Q(p)$ должны быть заменены членами

$$\frac{1-e^{-\nu p}}{\frac{1}{\rho}+b+\left(\frac{1}{\rho}-b\right)e^{-\nu p}},$$

где $\rho=\frac{aQ_0}{gfH_0}$, a— скорость распространения волн гидравлического удара по трубопроводу, ν—двойное время пробега волной удара длины трубопровода, т. е. фаза удара.

Солодовников вводит понятие о запасе устойчивости, связывая его с размерами некоторой области U на плоскости W, охватывающей точку $(-1, j, 0)$, и выдвигает требование, чтобы амплитудно-фазовая характеристика не только не охватывала точку $(-1, j, 0)$, но и нигде не пересекала контура области U.

В этой же работе указывается способ общего суждения о качестве переходного процесса по так называемому показателю колебательности M. Пусть $f(t)$—некоторая переходная функция и $F(p) \to f(t)$. При $p=j\omega$, где ω—вещественное число, функцию $F(p)$ можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$F(j\omega)=A(\omega)\,e^{-jB(\omega)}.$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$—некоторые вещественные функции. Функция $A(\omega)$ называется амплитудной характеристикой переходной функции, а ее наибольший максимум—показателем колебательности M.

Понятия запаса устойчивости и показателя колебательности имеют вполне общий характер и применимы не только к случаю регулирования изолированных объектов, который имел в виду Солодовников, но также к интересующему нас случаю параллельной работы машин, и совершенно не связаны с наличием или отсутствием в системе распределенных постоянных—свойство, которым не обладает ни один из рассмотренных выше методов. Однако, этот путь имеет и весьма существенный недостаток, заключающийся в том, что понятия запаса устойчивости и показателя колебательности, не будучи четко связаны с какими-либо параметрами или понятиями, выражающими те или иные физические свойства системы, в общем довольно условны.

Гидро-Электрическая Лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блох З. Ш.*—Об апериодической устойчивости линейных систем. Автоматика и телемеханика. т. X, № 1, 1949.
2. *Картвелишвили Н. А.*—Об условиях качества автоматического регулирования. ДАН СССР т. XI, № 1, 1948.
3. *Картвелишвили Н. А.*—Переходные режимы первичных двигателей в энергетических системах. Изв. Тбилисского Н. И. Ин-та Сооруж. и Гидроэнергетики т. III. 1950.
4. *Корнилов Ю. Г., Пивень В. Д.* Основы теории автоматического регулирования в приложении к теплосиловым установкам. 1947.
5. *Мееров М. В.*—Критерий апериодичности регулирования. Изв. АН СССР. ОТН. № 12, 1945.
6. *Михайлов А. В.*—Критерий апериодичности авторегулирующих систем. Автоматика и телемеханика. № 1, 1941.
7. *Михайлов А. В.*—Метод гармонического анализа в теории регулирования. Автоматика и телемеханика. № 3, 1938.
8. *Мясников Н. Н.*—Критерий Михайлова и оценка корней характеристического уравнения. Автоматика и телемеханика. т. X, № 4, 1949.
9. *Неймарк Ю. И.*—Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. Автоматика и телемеханика. т. IX, № 3, 1948.
10. *Солодовников В. В.* —Применение метода логарифмических частотных характеристик к исследованию устойчивости и оценке качества следящих и регулируемых систем. Автоматика и телемеханика, т. IX, № 2, 1948.
11. *Фельдбаум А. А.*—Интегральные критерии качества регулирования. Автоматика и телемеханика, т. IX, № 1, 1948.
12. *Фельдбаум А. А.*—О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования. Автоматика и телемеханика т. IX, № 4, 1948.
13. *Цыпкин Я. З.* и *Бромберг П. В.*—О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР. № 12, 1945.

Ն. Ա. Քարթվելիշվիլի

ՋՈՒԳԱՀԵՌ ԱՇԽԱՏՈՂ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐԻ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՄԱՆ ՈՐԱԿԻ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված են կանոնավորման որակի գոյություն ունեցող հայտանիշները՝ զուգահեռ աշխատող մեքենաների կանոնավորման որակի գնահատման համար օգտագործելու տեսանկյունով։

Հեղինակը գալիս է այն հետևության, որ զուգահեռ աշխատող մեքենաների համար այդ հայտանիշների կիրառումը հանդիպում է տեխնիկական լուրջ, իսկ մի շարք դեպքերում նաև սկզբունքային դժվարությունների։ Այնուհետև հեղինակը գալիս է այն եզրակացության, որ կանոնավորման անհրաժեշտ որակ ապահովելու համար կանոնավորման սիստեմի հատկանշական հավասարման արմատները պետք է տեղավորվեն ABCDA *ներսում (ֆիգ. 2)։ Քննարկելով հիդրավլիկական տուրբինների զուգահեռ աշխատանքը, հեղինակը ցույց է տալիս, որ այդ պահանջը բավարարվում*

է այն դեպքում, երբ arg $\Omega(p)$ $HAC=\Pi(s+1)-\varphi_0$ եզրագծի վրա է փոփոխվում, որտեղ $\Omega(p)$ որոշվում է *(17)* բանաձևով, իսկ S—$ABCDA$ եզրագծից դուրս Ω ֆունկցիայի բևեռների քանակն է։ Հեղինակը նշում է կանոնավորիչների առանձին ագրեգատների ընտրության թույլատրող երկրաչափական այնպիսի եղանակ, որ arg $\Omega(p)$ վրա դրված սահմանափակումը բավարարվի։