ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. II, № 6, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРОМЕХАНИКА

М. А. Каспаров

Теоретические характеристики поворотно-лопастной гидротурбины

В настоящей статье приводится разработанный нами метод предварительного определения коэфициента полезного действия поворотно-лопастной или пропеллерной гидромашины. Определение *кпд* может быть произведено путем предварительного нахождения качества профилей лопасти гидромашины при известных скоростных характеристиках потока.

Во второй части статьи устанавливается зависимость между скоростными и расчетными параметрами серии турбин. Приведенный анализ позволил сделать вывод о возможности использования коэфициента быстроходности n_s в качестве исходной зависимости не только при выборе типа турбины, но и при расчете лопастей.

В работе установлена связь между скоростным коэфициентом λ и коэфициентом быстроходности n_s. Далее сделан вывод, что характерными величинами для серии турбин являются не величины Q'_1 и n'_1, а их отношение, определяемое скоростным параметром λ.

1. Определение коэфициента полезного действия

Для решения поставленной задачи определим вначале, на основании теоремы Н. Е. Жуковского, силы, действующие на элемент лопасти турбины. Как известно, при обтекании профиля потоком со скоростью W_∞ на профиль действует сила, величина которой может быть найдена из уравнения:

$$dR=\rho\Gamma W_\infty dr \tag{1}$$

Направление этой силы будет перпендикулярно вектору полной относительной скорости $\vec{W}_\infty$ (рис. 1).

Помимо силы dR на элемент лопасти действует еще сила трения, направленная по относительной скорости W_∞. Эта сила появляется от трения жидкости о поверхность элемента и от так называемых кармановских вихрей. Здесь мы будем выражать ее в долях подъемной силы в виде:

$$dX_\mu=\mu dR=\mu\rho\Gamma W_\infty dr, \tag{2}$$

где $\mu=\dfrac{C_x}{C_y}$ есть обратное качество профиля лопасти гидромашины.

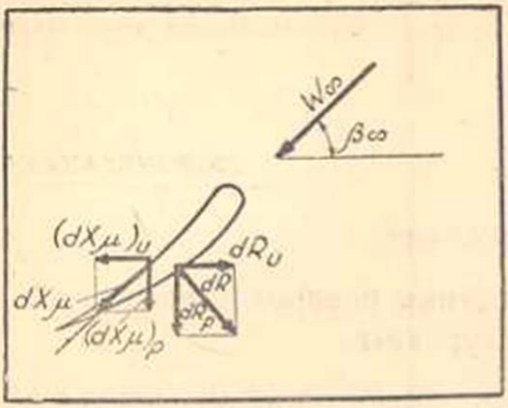


Рис. 1.

Относительная скорость на бесконечности $\vec{W}_\infty$ определится как:

$$W_\infty = \frac{\vec{W}_1 + \vec{W}_2}{2}, \qquad (3)$$

где $\vec{W}_1$ и $\vec{W}_2$ —относительные скорости на бесконечности, соответственно, перед и за решеткой.

Из треугольников скоростей перед и за решеткой устанавливаем значение составляющих вектора относительной скорости.

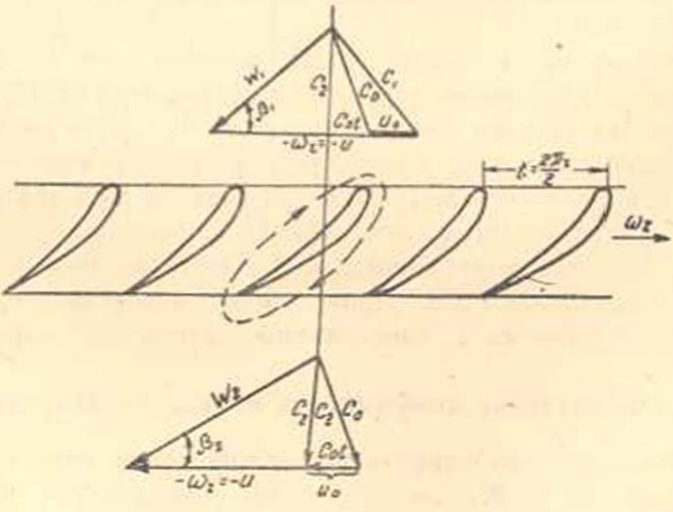


Рис. 2.

Перед решеткой:

$$W_{1t} = W_1 \mathrm{Cos}\beta_1 = \omega r + u_0 - C_{0t}$$
$$W_{1z} = W_1 \mathrm{Sin}\beta_1 = C_z$$

За решеткой:

$$W_{2t} = W_2 \mathrm{Cos}\beta_2 = \omega r + u_0 - C_{0t}$$
$$W_{2z} = W_2 \mathrm{Sin}\beta_2 = C_z$$

Здесь: C_z —осевая составляющая абсолютной скорости потока,

C_{0t} —окружная составляющая скорость невозмущенного потока,

$u_0 = \frac{z\Gamma}{4\pi r}$ —скорость, индуцированная профилями, расположенными в решетке,

откуда $$W_{\infty t} = \frac{W_{1t} + W_{2t}}{2} = \omega r - C_{0t}$$

$$W_{\infty a}=\frac{W_{1a}+W_{2a}}{2}=C_z$$

Проектируя силы dR и dX_μ на направление оси решетки и на направление, перпендикулярное к оси, найдем осевое давление dP и окружную силу dU, действующие на элемент лопасти рабочего колеса.

$$dP=dR\,\mathrm{Cos}\beta+dX_\mu\,\mathrm{Sin}\beta \tag{4}$$

$$dU=dR\,\mathrm{Sin}\beta-dX_\mu\,\mathrm{Cos}\beta \tag{5}$$

Заменяя dR и dX_μ через их значения, получим:

$$dP=\rho\Gamma W_\infty \mathrm{Cos}\beta dt+\mu\rho\Gamma W_\infty \mathrm{Sin}\beta dr \tag{6}$$

$$dU=\rho\Gamma W_\infty \mathrm{Sin}\beta dr-\mu\rho\Gamma W_\infty \mathrm{Cos}\beta dr \tag{7}$$

Замечая, что:

$$W_\infty \mathrm{Cos}\beta_\infty=W_{\infty t}=\omega r-C_{ot}$$

$$W_\infty \mathrm{Sin}\beta_\infty=W_{\infty a}=C_z,$$

мы можем полученные формулы написать в следующем виде:

$$dP=\rho\Gamma[(\omega r-C_{ot})+\mu C_z]dr \tag{8}$$

$$dU=\rho\Gamma[C_z-\mu(\omega r-C_{ot})]dr \tag{9}$$

В том случае, когда поток направлен перпендикулярно к оси решетки или, что то же, перпендикулярно к плоскости рабочего колеса, окружная составляющая скорости невозмущенного потока C_{ot} равна нулю. Тогда уравнения (8) и (9) будут иметь такой вид:

$$dP=\rho\Gamma z(\omega r+\mu C_z)dr \tag{10}$$

$$dU=\rho\Gamma z(C_z-\mu\omega r)dr \tag{11}$$

Мощность, развиваемая турбиной на основании уравнения (11), может быть определена как:

$$N=\rho z\omega\int_{r_0}^{R}\Gamma(C_z-\mu^*\omega r)r\,dr,$$

где μ^*—среднее значение обратного качества μ по размаху лопасти.

Полагая циркуляцию постоянной вдоль по размаху лопасти ($\Gamma=\mathrm{const}$) и интегрируя, получим:

$$N=\rho z\omega\Gamma\left[C_z\,\frac{R^2-r_0^2}{2}-\mu^*\omega\,\frac{(R^3-r_0^3)}{3}\right] \tag{13}$$

Преобразуем полученное уравнение, выделив расход Q

$$N=\rho z\omega\Gamma\left[\frac{\pi(R^2-r_0^2)C_z}{2\pi}-\frac{\mu^*}{3\pi}\,\frac{\omega}{C_z}\left(\frac{R^3-r_0^3}{R^2-r_0^2}\right)\pi(R^2-r_0^2)C_z\right]$$

или, так как $Q=\pi(R^2-r_0^2)C_z$,

то:

$$N = \rho z \omega \Gamma \left[\frac{Q}{2\pi} - \frac{\mu^*}{3\pi} \frac{\omega R}{C_z} \left(\frac{1 - \frac{r_0^3}{R^3}}{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \right) Q \right] \tag{14}$$

Введем безразмерный коэфициент λ, определяемый соотношением:

$$\lambda = \frac{C_z}{\omega R} \tag{15}$$

Этот коэфициент, с одной стороны, определяет скоростные характеристики потока, обтекающего профиль лопасти гидромашины, а, с другой стороны, он пропорционален числу Струхаля.

Критерий Струхаля, как известно [1], определяется соотношением:

$$\lambda = \frac{uT}{L} = \text{const},$$

где u—скорость жидкости, T—характерный промежуток времени, а L—характерная длина.

Этот критерий имеет особое значение для периодических движений в жидкости, движущейся с определенной скоростью. Поэтому он может быть распространен и на движение жидкости, проходящей через вращающееся рабочее колесо гидромашины. В этом случае за характерный промежуток времени следует принять период явления, например время, необходимое для одного оборота колеса. Однако, обычно, в подобных случаях вместо периода T вводят обратную ему величину n—число оборотов в секунду.

Мы ввели вместо n пропорциональную оборотам величину ω —угловую скорость. Величину скорости жидкости u мы заменили осевой составляющей скорости C_z. В качестве характерной длины нами принята величина радиуса рабочего колеса R; тогда условие Струхаля принимает вид, определяемый уравнением (15).

Отношение радиуса втулки r_0 к радиусу колеса R обозначим через ζ.

$$\zeta = \frac{r_0}{R}.$$

Пользуясь принятыми обозначениями, перепишем уравнение (14) в следующем виде:

$$N = \rho \frac{z \omega \Gamma Q}{2\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \mu^* \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2} \right) \right] \tag{16}$$

Уравнение мощности (16) включает две неизвестные величины ω и Γ и параметр λ. Числом лопастей z и отношением $\zeta = \frac{r_0}{R}$ можно задаться.

Интегрируя уравнение (10), получим:

$$P = \rho z \int_{r_0}^{R} \Gamma(\omega r + \mu^* C_z) dr$$

или, на основании принятого допущения о постоянстве циркуляции, после интегрирования получим:

$$P = \rho z \Gamma \left[\omega \left(\frac{R^2 - r_0^2}{2} \right) + \mu^* C_z (R - r_0) \right] \tag{17}$$

Напор H может быть написан так:

$$H = \frac{P}{\rho g \pi (R^2 - r_0^2)} = \frac{z\Gamma}{g\pi (R^2 - r_0^2)} \left[\omega \frac{R^2 - r_0^2}{2} + \mu^* C z (R - r_0) \right]$$

или

$$H = \frac{z\Gamma\omega}{g\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\mu^* C z}{\omega R} \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{R}\right)} \right]$$

Подставляя принятые обозначения, окончательно получим:

$$H = \frac{z\Gamma\omega}{g\pi} \left[\frac{1}{2} + \mu^* \lambda \frac{1}{(1 + \zeta)} \right] \tag{18}$$

В уравнение (18) входят те же две неизвестные величины ω и Γ и параметр λ.

Коэфициент полезного действия определяется из следующего соотношения:

$$\eta = \frac{N}{PC_z} = \frac{N}{N_p}, \tag{19}$$

где полезная мощность N, снимаемая с турбины, может быть определена по уравнению (13′):

$$N = \rho z \omega \Gamma \left[C_z R^2 \frac{1 - \zeta}{2} - \mu^* \omega R^3 \left(\frac{1 - \zeta^3}{3} \right) \right], \tag{13'}$$

а мощность водотока определяется при помощи уравнения (17).

$$Np = PC_z = \rho z \Gamma C_z \left[\omega R^2 \left(\frac{1 - \zeta^2}{2} \right) + \mu^* C_z R (1 - \zeta) \right]$$

Подставляя значение соответствующих величин и производя преобразования, получим:

$$\eta = \frac{1 - \frac{2}{3} \mu^* \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1 - \zeta^3}{1 - \zeta^2} \right)}{1 + 2\mu^* \lambda \frac{1}{1 + \zeta}} \tag{20}$$

Таким образом, *кпд*$-\eta$ есть функция коэфициента λ или, что то же, как это будет показано ниже,—коэфициента быстроходности n_s, а следовательно, угловой скорости ω и радиуса R.

Из уравнения (20) следует, что *кпд* имеет максимальное значение при $\mu^*=0$ и будет равен нулю в том случае, когда числитель уравнения будет равен нулю, т. е. когда:

$$1-\frac{2}{3}\mu^*\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2}\right)=0,$$

откуда получаем значение λ, при котором $\eta=0$

$$\lambda=\frac{2}{3}\mu^*\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2}\right)$$

Примерный график зависимости $\eta=f(\lambda\mu^*)$ при $\zeta=0{,}45$ и с параметром μ^* приведен на рис. 3.

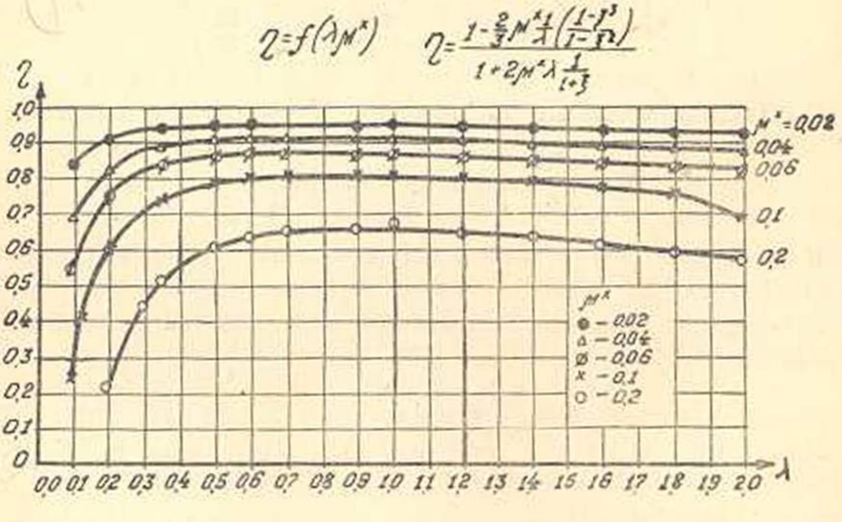


Рис. 3.

В заключение заметим, что разработанный нами метод определения *кпд* гидротурбин по предварительным исследованиям профилей лопасти справедлив для любой гидромашины с поворотным или пропеллерным рабочим колесом.

2. Зависимость между скоростными и расчетными параметрами серии турбин

а) Зависимость между λ *и* n_s

Выбор типа турбины, отвечающего условиям предстоящей ее работы, обычно связывается с предварительным установлением численного значения коэфициента быстроходности. Переходя к проектированию и расчету рабочего колеса, следует этой величиной пользоваться, как исходной.

В области расчета радиально-осевых турбин практика пользования коэфициентом быстроходности подтвердила, что эта характеристика пригодна не только как средство для выбора типа турбины, но и как основа всего расчета главных размеров турбин. Несмотря на то, что в указанной области подобный подход к расчету оправдался при расчете пропеллерных и поворотно-лопастных турбин, коэфициентом быстроходности для этой цели не пользуются. Он служит лишь для выбора типа. Мы предлагаем при расчете турбин указанного типа пользоваться этим коэфициентом. Для этого установим зависимость между коэфициентом быстроходности n_s и характерными для турбины параметрами. Таких параметров желательно иметь возможно меньше.

Установим связь между основным характеристическим коэфициентом, отражающим свойства серии турбин, каким считается коэфициент быстроходности n_s, и введенным нами безразмерным коэфициентом λ.

Значение коэфициента быстроходности, как известно, определяется уравнением:

$$n_s = \frac{n\sqrt{N}}{H\sqrt[4]{H}} \tag{21}$$

Совместное решение уравнений (16) и (18) приводит к установлению зависимости N от Q и H:

$$N = \gamma QH \left[\frac{1 - \frac{2}{3}\mu^* \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta_b^2}\right)}{1+2\mu^*\lambda\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)} \right] \tag{22}$$

Выражение, стоящее в скобках, есть не что иное, как гидравлический *кпд* турбины η, определяемый по уравнению (20). Окончательно уравнение мощности принимает обычный вид:

$$N = \gamma QH\eta \tag{23}$$

Последнее, между прочим, подтверждает справедливость рассуждений и выводов основных формул, приведенных в настоящей работе.

Как было указано выше, безразмерный коэфициент связан с C_z, ω и R зависимостью, определяемой уравнением (15).

Пользуясь уравнением расхода и уравнением мощности, определяем значение скорости C_z как:

$$C_z = \frac{Q}{\pi R^2(1-\zeta^2)} = \frac{N}{\gamma H\pi R^2(1-\zeta_b^2)\eta}$$

Заменяя в уравнении (15) значение скорости C_z последним выражением, будем иметь:

$$\lambda = \frac{N}{\omega\gamma H\pi R^3(1-\zeta^2)\eta},$$

откуда, после соответствующего преобразования, получим:

$$\frac{1}{\lambda} = kn_s \frac{H^{9/4} R^3}{N^{3/2}} \eta, \tag{24}$$

где:

$$k = \frac{2\gamma\pi^2(1-\zeta^2)}{60}$$

Так как в выражении *кпд*—η также входит величина λ, то при более точных условиях расчета, следует уравнение (24) раскрыть полностью. Подставляя значение η, будем иметь:

$$\frac{1}{\lambda} = kn_s \frac{H^{9/4} R^3}{N^{3/2}} \left[\frac{1 - \frac{2}{3}\mu^* \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2}\right)}{1+2\mu^*\lambda\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)} \right],$$

откуда после соответствующих преобразований получим:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{kn_s H^{9/4} R^3 - 2\mu^* N^{3/2} \frac{1}{1+\zeta}}{N^{3/2} + \frac{2}{3}\mu^*\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2}\right) kn_s H^{9/4} \cdot R^3} \tag{25}$$

В том случае, когда потерями можно пренебречь, т. е. считать $\mu^*=0$, уравнение связи будет иметь вид:

$$\frac{1}{\lambda} = kn_s \frac{H^{9/4} R^3}{N^{3/2}} \tag{26}$$

Из полученной зависимости λ от n_s следует, что:

1. задание N и H не определяет динамического подобия модели и натуры;

2. согласно проведенному расчету характеристиками турбины, при заданном числе оборотов n, являются N, H и λ; последний параметр определяется по графикам способом, указанным выше; по величинам N, H и λ определяется R, а при заданном Q—и C_z;

3. параметр λ является функцией N, n, H и R; эти величины определяют динамический характер потока;

4. при прочих равных условиях коэфициент n_s может являться критерием при сравнении турбин различных типов, так как

$$\frac{\lambda_I}{\lambda_{II}} = \frac{n_{s\,I}}{n_{s\,II}}.$$

б) Соотношение между λ и характерными параметрами серии турбин n'_1 и Q'_1.

Как известно, при расчете гидравлических турбин основными расчетными параметрами являются приведенный расход Q'_1 и приведенные обороты n'_1. Эти параметры определяются зависимостями:

$$Q'_1 = \frac{Q}{D^2\sqrt{H}} \tag{27}$$

$$n'_1 = n\frac{D}{\sqrt{H}} \tag{28}$$

Установим зависимость между введенным нами расчетным параметров λ и величинами Q'_1 и n'_1. Получив такую зависимость, мы тем самым свяжем предлагаемый метод расчета по вихревой теории с обычно используемым методом расчета гидротурбин.

Переходя к расходу, перепишем уравнение (15) в следующем виде:

$$\lambda = \frac{Q}{\pi\omega R^3(1-\zeta^2)}, \tag{15'}$$

откуда расход определится как:

$$Q = \frac{\pi^2 n}{30} R^3(1-\zeta^2)\lambda \tag{29}$$

С другой стороны, исключая из уравнений (27) и (28) напор, получим выражение для расхода в виде:

$$Q = \frac{Q'_1}{n'_1} D^3 n \tag{30}$$

Приравнивая правые части уравнений (29) и (30), будем иметь:

$$\frac{Q'_1}{n'_1} D^3 n = \frac{\pi^2 n}{30} R^3(1-\zeta^2)\lambda,$$

откуда:

$$\lambda = K\frac{Q'_1}{n'_1}, \tag{31}$$

где

$$K = \frac{240}{\pi^2(1-\zeta^2)}.$$

Приведенное соотношение (31) позволяет сделать вывод, что характерными величинами для серии турбин являются не величины Q'_1 и n'_1, а их отношение.

Водно-энергетический Институт
Академии Наук Армянской ССР.

Մ. Ա. Կասպարով

ՊՏՏՎՈՂ-ԹԻԱԿԱՅԻՆ ՀԻԴՐՈՏՈՒՐԲԻՆՆԵՐԻ ՏԵՍԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված է հեղինակի մշակած մեթոդը՝ պտտվող-թիակային կամ պրոպելլերային հիդրոմեքենաների օգտակար գործողության գործակիցը նախապես որոշելու համար։

Օգտակար գործողության գործակցի որոշումը կատարվում է նախապես գտնելով հիդրոմեքենայի թիակների պրոֆիլի որակը՝ հոսանքի արագությունների պատկերի հայտնի լինելու դեպքում։

Դիտարկելով ցանցի (աշխատող անիվի թիակների) առանցքի և նրան ուղղահայաց ուղղությունների վրա թիակի հատվածի վրա գործող ուժերը, ստացվել են (10) և (11) բանաձևերը, որոնցով կարելի է գտնել առանցքային տուրբինների աշխատող անիվի ընտրած հատվածի վրա ընկած առանցքային ճնշումը՝ dP և շրջագծային ուժը՝ dU։

Ստացված բանաձևերի հիման վրա տուրբինի հզորության համար առաջարկված է մի արտահայտություն, որի մեջ մտնում է հիդրոմեքենայի աշխատող անիվի թիակների շրջանցող հոսանքի արագությունները բնորոշող բացարձակ գործակից՝

$$\lambda = \frac{C_z}{\omega R},$$

ընդ որում այդ գործակիցը համեմատական է Ստրուխալի թվին և ունի որոշակի նշանակություն հիդրոմեքենաների պտտվող աշխատող անիվների միջով անցնող հեղուկների պարբերական շարժման համար։

Այնուհետև օգտակար գործողության գործակցի համար հեղինակը տալիս է մի բանաձև, որն արտահայտում է այդ գործակցի կապը՝ արագությունների և աշխատող անիվի էլեմենտների կոնստրուկցիայի հետ՝

$$\eta = \frac{1 + \frac{2}{3}\mu^* \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-\zeta^3}{1-\zeta^2}\right)}{1 - 2\mu^*\lambda \frac{1}{1+\zeta}}$$

Բացի այդ, հեղինակը λ գործակցի և արագընթացության գործակցի միջև կապ է սահմանում և ցույց է տալիս, որ

$$\frac{\lambda_1}{\lambda I_1} = \frac{n_s I_1}{n_{s1}}$$

հարաբերությունը հաստատում է այն դրույթը, որ արագընթացության գործակից n_s-ը կարող է համարվել հայտանիշ՝ տարբեր տիպի տուրբինները համեմատելիս։

Ապացուցվում է, որ n_s գործակիցը կարող է նաև հիմք ծառայել տուրբինի թիակները հաշվելիս։

Աշխատանքում նաև արված է եզրակացություն, որ տուրբինների սերիաները բնորոշող մեծությունները համարվում են ոչ թե բերված միավոր ելքը Q'_1 և պտույտների թիվը n'_1, ինչպես այդ ընդունված է մինչ այժմ, այլ նրանց հարաբերությունը, որը որոշվում է λ գործակցով։ λ, Q'_1 և n'_1 միջև հաստատված կապը հնարավորություն է տալիս օգտագործել հեղինակի առաջադրած հաշվային մեթոդը՝ ջրապտույտային շարժման թեորիայի սովորական մեթոդով հիդրոմեքենաների հաշվման մեթոդին համապատասխան։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. II, № 6, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРАВЛИКА

Г. А. Амбарцумян

Структура потока на боковом водосливе

Все до сих пор произведенные экспериментальные исследования боковых водосливов были посвящены только установлению вида свободной поверхности воды на участке бокового водослива. При этом оказалось, что свободная поверхность на участке бокового водослива получается или в виде кривой подпора, или кривой спада, а иногда, при особых условиях сопряжения, в виде прыжка.

Аналогичные результаты получаются и при анализе уравнения свободной поверхности, получаемого или с применением уравнения количества движения, или закона живых сил для упрощенной схемы питания водослива.

В предыдущих работах структура потока у бокового водослива не была исследована.

Однако, при делении потока возникает очень сложная картина взаимодействия различных частей потока.

Правильное решение вопроса о структуре потока было сильно задержано ненаучными утверждениями немецкой школы гидравликов (Шоклич, Буле, Форхгеймер, Де-Марки и других), которые ввиду поверхностного изучения данного вопроса, неправильно освещали как роль высоты водосливной стенки, величин угла отвода, так и постоянство удельной энергии на участке бокового водослива*.

Проведенные автором, под руководством проф. И. В. Егиазарова, сопоставления результатов предыдущих теоретических исследований показали, что эти последние по существу являются идентичными. Различные на первый взгляд уравнения свободной поверхности, фактически являются частными случаями одного общего уравнения, полученного доктором тех. наук Г. А. Петровым (неопубликованная докторская диссертация) и, независимо от него, автором этой статьи, и имеющего следующий вид:

---

* Относительно постоянства удельной энергии потока по длине бокового водослива нужно отметить, что на основании экспериментов в ГЭЛ можно утверждать, что изменение удельной энергии по длине бокового водослива происходит в пределах до 30%, причем главным фактором, вызывающим изменение энергии, является интенсивность, с которой происходит отвод воды через боковой водослив.

Только при малых интенсивностях этого отбора можно условно допустить сохранение постоянства энергии.

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - i_f - \left(2 - \frac{V_x}{V}\right)\frac{\alpha_0 Q}{g\omega^2}\frac{dQ}{ds} + \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{h^2}{\omega}\sin\alpha^{*}}{1 - \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3}}$$

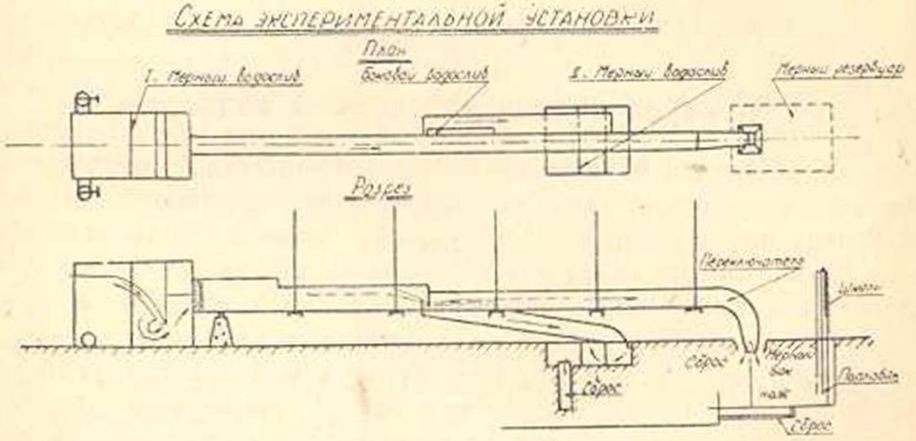


Рис. 1. План и разрез экспериментального лотка.

Все вышеизложенное заставило поставить экспериментальное исследование структуры потока и механизма питания водослива и на основании такого изучения дать обоснованную опытами схему этого питания.

Для установления реальной схемы работы бокового водослива были поставлены специальные эксперименты в Гидроэлектрической Лаборатории (ГЭЛ) Водно-Энергетического Института Академии Наук Армянской ССР.

В проведении экспериментов, помимо автора, приняла участие также сотрудница Института У. Арутюнян.

Эксперименты проводились в большом стеклянном лотке длиною 15.0 *м* при двух ширинах лотка 50 и 40 *см*, и различных длинах гребня бокового водослива, равных 197,5; 152,5; 125,0; 77,5 и 30 *см*.

Высота водосливной стенки „Р" бралась равной 10,0, 18,0 и 20 *см*, а уклоны лотка и гребня i водослива совпадали и равнялись 0; 0,0005; 0,001; 0,005 и 0,008, причем последние два уклона больше критического.

Расход в начале лотка менялся от 125 л/сек до 98 л/сек, причем через боковой водослив сбрасывался расход от 10 до 83 л/сек.

Измерения скорости и давления производились шаровым зондом и трубкой Пито-Ребока, снабженной поворотным наконечником, с помощью которого определялись все три проекции скорости.

* α—может быть до 7°.

Направление донных скоростей и границы раздельных поверхностей фиксировались с помощью шелковых нитей.

При экспериментировании в лотке искусственно создавался равномерный режим после бокового водослива с помощью щита.

На основании целого ряда подготовительных экспериментов окончательно была принята следующая схема экспериментирования.

В головном баке, по пьезометру и тастеру устанавливался переливающийся слой необходимой высоты, обеспечивающий расход Q_1. Переливающийся через боковой водослив расход $Q_б$ измерялся с помощью П-мерного водослива, установленного в нижнем баке. Оставшийся расход в лотке за водосливом Q_2 измерялся с помощью протарированного мерного бака. Результаты измерений проверялись выражением

$$Q_1 = Q_2 + Q_б$$

Горизонты воды измерялись тастерами. По ширине лотка бралось 8, а по длине—120 точек на 15 поперечниках. Расстояние между точками и поперечниками выбиралось в соответствии с видом свободной поверхности. Единичный расход воды в различных точках гребня водослива измерялся с помощью желобка шириною 5 *см*, мерного протарированного бака и секундомера. Результаты измерений проверялись по формуле

$$Q_б = \sum_1^n \Delta q$$

Направления поверхностных и донных скоростей измерялись с помощью нити и транспортира. Линии поверхностных и донных токов фотографировались. Всего было произведено 22 эксперимента при уклоне меньше критического и 4 эксперимента при уклоне больше критического.

На основании произведенных исследований, в результате изучения поля скоростей и давлений, установлена следующая схема питания бокового водослива (рис. 3).

Поток, движущийся по каналу, при подходе к прорезу в боковой стенке меняет свое направление и часть расхода сливается в сторону, переливаясь через низко расположенный гребень водослива. При этом на участке водослива возникает на поверхности потока линия 1—2 раздела, ограничивающая два потока: движущийся вдоль канала и сливающийся вбок. Возникающие поверхности раздела внутри потока сильно пульсируют и в основном имеют волнистую форму. Раздельная поверхность БВ распространяется в толще потока и имеет в поперечных вертикальных сечениях криволинейное очертание, переходящее в волнистую прямую ВГ, не доходящую до водосливной стенки и расположенную несколько ниже гребня водослива. Вниз по течению граница Г углубляется, достигая максимума погружения у конца водослива. У дна потока также возникает линия раздела, которая охватывает большую часть ширины потока, чем поверхностная линия раздела.

Донная зона возникает в начале бокового водослива, где она имеет нулевую толщину и достигает максимума в конце водослива. Эта донная зона имеет минимальную толщину у глухой стенки лотка и максимальную—у водосливной стенки.

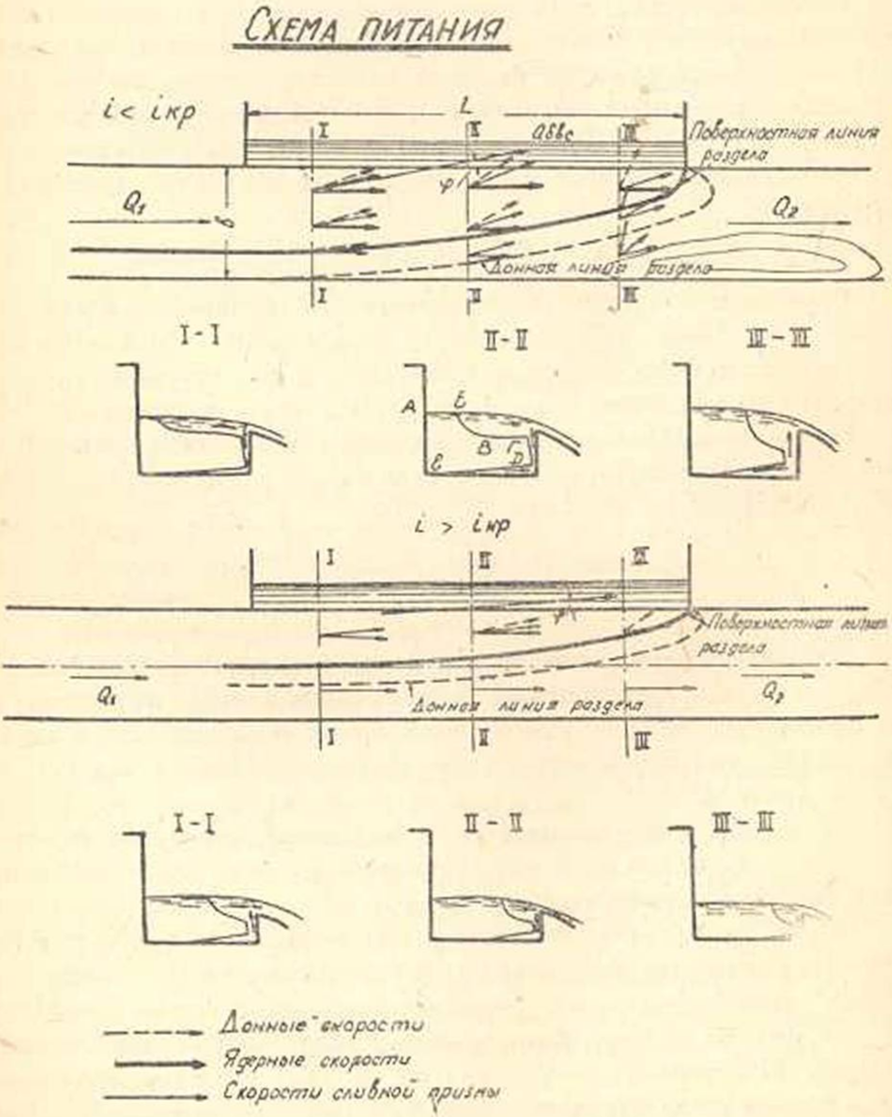


Рис. 2. Схема питания бокового водослива.

В придонном слое потока у начала бокового водослива направление скоростей составляет с осью потока угол в 5^0—6^0. По мере удаления от начала водослива этот угол возрастает и в конце водослива достигает 180^0.

Донный слой, дойдя до водосливной стенки, подымается по ней и сливается у точки Г со сливной призмой.

Указанный донный слой возникает по двум причинам; первое—в силу наличия большого поперечного уклона свободной поверхности, что вызывает разность давлений у глухой и водосливной стенок, и второе—в силу возможности возникновения явления эжекционного эффекта на месте встречи токов донного и сливной призмы.

Таким образом, поток на участке бокового водослива при уклонах меньше критического разделяется на три основные зоны:

А. Верхнюю (сливную) зону, т. е. ту часть потока, которая сильно меняет свое направление и сбрасывается через водослив.

Б. Ядро потока, которое имеет скорости, почти параллельные оси лотка с отклонениями (до 6°), и не участвует в питании бокового водослива.

В. Донную (периферийную) зону, которая образовавшись на дне лотка, почти по всей длине бокового водослива, составляя угол с осью лотка от 5° до 180° по длине водослива, подымается по водосливной стенке и, соединившись у гребня водослива со сливной призмой, сбрасывается через гребень водослива.

Все вышесказанное одинаково относится как к случаю для уклона лотка меньше критического, так и к случаю для уклона больше критического; только в последнем случае отдельные зоны не так резко выражены и в схеме по структуре потока появляется IV зона „транзитная", где скорости потока никаким изменениям не подвергаются в связи с боковым отводом воды и никакого участия не принимают в питании бокового водослива.

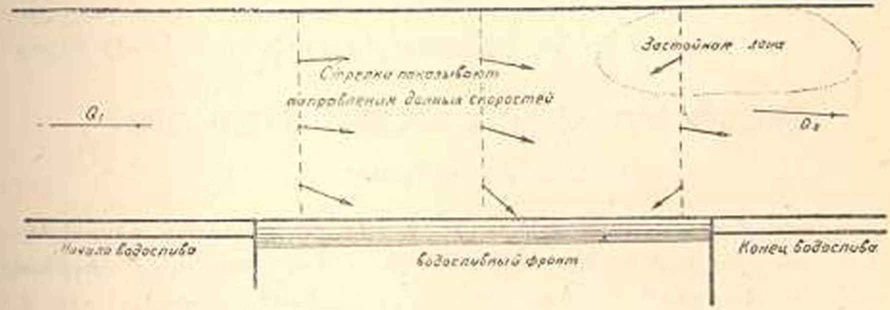


Рис. 3. Фото плана данных скоростей

Установленная схема питания бокового водослива указывает на наличие раздельных поверхностей внутри потока, которые являются дополнительными источниками потери энергии в связи с большими градиентами скорости на этих поверхностях. Помимо этого остаются в силе все прочие виды потерь энергии, как-то: потери на расширение потока, на трение и т. д.

Кроме описанной структуры потока экспериментально установлено, что:

1. При переливе воды через гребень водослива поверхностные скорости составляют почти постоянный угол с гребнем водослива, который изменяется в пределах от 20° до 24° при уклонах лотка меньше критического и от 6° до 9° при уклонах больше критического.

2. При переливе воды через гребень водослива сохраняется почти постоянным удельный расход водослива, но с некоторой тенденцией к увеличению в конце водослива при уклонах меньше критического и к уменьшению при уклонах больше критического.

3. Головной и конечный участки водослива не подчиняются установленным выше закономерностям:

При уклонах меньше критического в начале, на длине 10—20 *см*, получается нерабочий участок гребня водослива, а на конечном участке—участок с повышенным удельным расходом. Противоположные режимы на этих участках получаются в случае уклонов больше критического.

4. При уклонах лотка меньше критического, большие скорости находятся у гребня водослива, а меньшие у глухой стенки.

При уклонах больше критического получается обратное распределение скоростей, т. е. большие скорости у глухой стенки, меньшие— у водосливной.

Гидро-Электрическая Лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР.

Գ. Ա. Համբարձումյան

ՀՈՍԱՆՔԻ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆ ԿՈՂԱՅԻՆ ՋՐԹԱՓԻ ՎՐԱ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում շարադրված է Ջրաէներգետիկ Ինստիտուտի հիդրոէլեկտրիկ լաբորատորիայում Ի. Վ. Եղիազարովի ղեկավարությամբ հեղինակի կատարած փորձարկման և տեսական աշխատանքների մի մասը, որը վերաբերում է հոսանքի կազմության և կողային ջրթափի սնման սխեմայի ուսումնասիրությանը։

Ցույց է տրված, որ առվի մեջ հեղինակի առաջարկած ազատ մակերևույթի հավասարումը կողային ջրթափի մոտ ունի հետևյալ, ավելի ընդհանուր տեսքը։

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - i - \left(2 - \frac{V_x}{V}\right)\frac{\alpha_0 Q}{g\omega^2}\frac{dQ}{ds} + \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3}\frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{h^2}{\omega}\sin\alpha}{1 - \frac{\alpha_0 Q^2}{g\omega^3}}$$

Նշված է, որ հավասարումը դուրս բերելիս մոտեցման հիմնական թերությունն այն է, որ չի ելած կողային ջրթափի շրջանում եղած հոսանքի կազմությունից: Ցույց է տրված սնման սխեմայի մեջ փոփոխություններ մտցնելու անհրաժեշտությունը:

Բազմաթիվ և ուշի ուշով կատարված փորձերի հիման վրա տրված է ջրթափի սնման նոր և ավելի ճիշտ սխեմա: Այդ սխեմայով կողքային ջրթափի մասում հոսանքը բաժանվում է երեք զոնայի.

ա) մակերևույթային զոնա, այսինքն մակերևույթային հոսանքի այն մասը, որը կողքային պատի ավելի ցածր դիրքի դեպքում անջատվում է հիմնական հոսանքից և թափվում է ջրթափի վրայով:

Հոսանքի բաժանման AB գծի հավասարումը որոշվում է Միլովիչի մեթոդով:

Առուի լայնքով պատից դեպի ջրթափն ազատ մակերևույթը մեծ թեքում ունի:

բ) Հոսանքի կորիզի զոնա՝ հոսանքի այն մասը, որը գտնվելով մակերևույթային զոնայի տակ, չի մասնակցում ջրթափի սնմանը և նույնիսկ կողքային ջրթափի առկայության դեպքում չի փոխում իր շարժման ուղղությունը (արագության ուղղությունը ջրթափի պատի հետ կազմում է $6^{0}/_{0}$-ից ոչ մեծ անկյուն):

գ) հատակային զոնա, որն առաջանում է հատակի վրա եղած ճնշման տարբերության հետևանքով, առաջանալով ազատ մակերևույթի լայնական թեքության և պատի բարձրության տարբեր ճնշման առկայությամբ:

Հատակային հոսանքի առաջացումն ավելի է մեծանում էժեկցիայի ազդեցության շնորհիվ, որն առաջանում է վերընթաց հոսանքների հանդիպակաց շարժումով և ջրթափից թափվող հոսանքներով:

Հոդվածում նշվում է, որ այդ զոնաները սահմանազատող մակերևույթները ենթակա են պուլսացիայի և ունեն ալիքային ձև: Այդ մակերևույթների վրա եղած արագությունների մեծ գրադիենտների շնորհիվ առաջ է գալիս էներգիայի զգալի կորուստ:

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. II, № 6, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРАВЛИКА

А. Г. НАЗАРЯН

О свободной поверхности потока на переходных участках открытой деривации

В гидротехнической практике очень часто встречаются такие случаи, когда водовод на протяжении некоторого участка изменяет свою форму как в плановом, так и в высотном отношении. Движение жидкости на таких участках характеризуется резким изменением гидравлических элементов (скорости, уклона свободной поверхности, площади живого сечения и т. д.).

В отличие от плавно-изменяющегося движения, при котором изменение этих элементов становится заметным только на значительной длине, вышеуказанное движение называется движением с „местным изменением" [1]. Короткий участок водовода, на протяжении которого происходит движение с местным изменением, называется *переходным участком* (в гидравлическом смысле). В качестве примеров можно привести участки канала, содержащие те или иные водосливы, сужения или расширения, а также те участки, которые находятся за указанными сооружениями.

В настоящей статье рассматривается движение жидкости на этих последних участках, независимо от причин, вызвавших данное движение.

Переходные участки имеют свою гидравлическую особенность. Хотя на них режим течения неравномерный, но он не является медленно-изменяющимся, почему к нему нельзя применить формулы

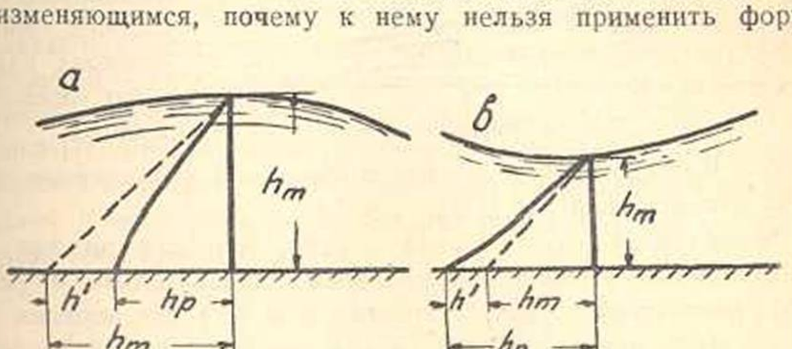


Рис. 1

неравномерного медленно-изменяющегося движения [2]. Нарушение условия медленно-изменяющегося движения выражается в появлении значительной кривизны струй, благодаря образованию волн.

Появление волны на свободной поверхности жидкости нарушает гидростатический закон распределения давления по глубине потока (рис. 1), вследствие чего применение обычных уравнений неравномерного движения становится весьма условным.

Практически весьма важно определить длину переходного участка для выявления того предела, за которым восстанавливается нормальный режим в канале.

В этом определении и заключается содержание настоящей работы.

Прежде чем перейти к выводу расчетных формул для установления закона, которому подчиняется затухание волн, необходимо остановиться на вопросе о причинах образования волн.

Касаясь вопроса сопряжения двух глубин при неравномерном режиме, проф. Г. И. Сухомел [3,4] представляет уравнение удельной энергии в следующем виде:

$$Э = \frac{\alpha v^2}{2g} + \beta h, \tag{1}$$

где:

β—коэфициент, учитывающий отклонение давления от гидростатического, вызываемое центробежной силой, которая появляется благодаря искривлению струй. Остальные обозначения—общепринятые.

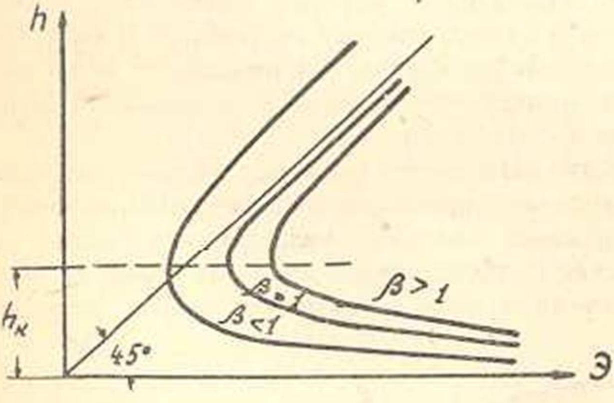


Рис. 2

При выпуклости струй, обращенных вверх (рис. 1—а), $\beta < 1$ и кривизна отрицательная, а при выпуклости, обращенной вниз (рис. 1—в), $\beta > 1$—кривизна положительная и, наконец, при $\beta = 1$ кривизна равняется нулю (равномерный режим).

Рис. 2 представляет из себя графическое изображение уравнения (1) для значений $\beta < 1$; $\beta > 1$ и $\beta = 1$.

Рассматривая этот рисунок, видим, что для нижних ветвей ($h < hk$) кривых уменьшению кривизны (следовательно и уменьшению β) соответствует уменьшение глубины h, а для верхних ветвей ($h > h_к$) уменьшению глубины соответствует увеличение кривизны, следовательно и увеличение β. Другими словами, можно сказать, что в бурных потоках кривизна и глубина изменяются в одном и том же направлении, а в спокойных водотоках—в противоположном направлении.

Рассматриваем переход от глубины $h_1 = h_{max}$, к глубине $h_2 = h_н$, причем $h_1 > h_2 > h_k$ (рис. 3).

Плавный переход от h_1 к h_2, как показано на рис. 3 пунктирной линией, невозможен, потому что если для участка AB глубина и кривизна изменяются в противоположном направлении, что соответствует спокойному течению, то на участке BC они изменяются в одинаковом направлении, что невозможно для спокойного течения. Поэтому остается принять, что переход происходит с попеременным возрастанием и убыванием глубины, т. е. в виде ряда волн с убывающей амплитудой.

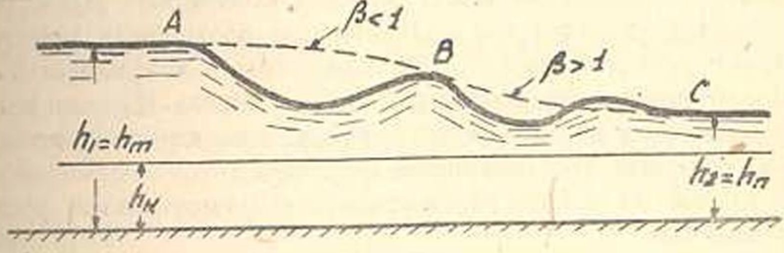


Рис. 3

Указанное явление при тех же соотношениях глубин будет иметь место не во всех случаях.

Из теории неравномерного движения [1,5] известно, что

$\frac{h_n}{h_m} = \frac{h_2}{h_1} < 2$ и число Фроуда $F_r < 3{,}0$.

При любых других соотношениях между глубинами имеет место кривая спада (или подпора) [6].

В выяснении вопроса о причинах образования волн ограничиваясь этим, переходим к выводу расчетных формул, согласно которым происходит затухание волн.

Как было указано выше, благодаря значительной кривизне свободной поверхности потока нарушается условие медленной изменяемости движения, вследствие чего возникают инерционные силы. Следовательно, при выводе диференциального уравнения свободной поверхности в этом случае необходимо учитывать эти силы.

Сухомел [7] вывел и проинтегрировал диференциальное уравнение свободной поверхности неравномерного движения для случая, когда нельзя пренебрегать инерционными членами. Это диференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{d^3y}{d\sigma^3} + \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{g}{C_n^2\, i} - \alpha\right]\frac{dy}{d\sigma} - \frac{3}{\varkappa}\frac{g}{C_n^2}\, y = 0, \qquad (2)$$

где y и σ координаты, выраженые в относительных величинах,

C_n — коэфициент Шези для равномерного течения

$$\varkappa = \lambda^1 \cdot \lambda^2$$

Здесь:

λ—соотношение между поверхностными и средними скоростями,

λ'—поправочный коэфициент (см. ниже).

Общий интеграл уравнения (2) имеет вид:

$$У = C_1e^{x_1\sigma} + C_2e^{x_2\sigma} + C_3e^{x_3\sigma}, \tag{3}$$

где C_1; C_2; C_3—постоянные интегрирования,
x_1; x_2; x_3—корни характеристического уравнения.

Однако уравнение (3), полученное проф. Сухомелом, нельзя непосредственно применять для решения конкретных задач, так как автор не дает указаний как определяются постоянные интегрирования. Кроме того, неизвестно, как определяется коэфициент $\varkappa = \lambda'.\lambda^2$.

Далее необходимо отметить, что уравнение (2) выведено для весьма широкого прямоугольного русла, для которого $h \cong R$, т. е. глубина и ширина несоизмеримые величины.

В данной же работе рассматривается прямоугольное русло конечной ширины.

Диференциальное уравнение свободной поверхности с учетом указанного выше напишется в виде:

$$\frac{d^3y}{d\sigma^3} + \frac{1}{\varkappa}\left[\frac{gh_n}{C^2_n\, iR_n} - \alpha\right]\frac{dy}{d\sigma} - \frac{1}{\varkappa}\,\frac{ghn}{C^2_n\, R_n}\left[3 - 2\,\frac{h_n}{\varkappa_n}\right]y = 0 \tag{4}$$

При выводе диференциального уравнения (2) проф. Сухомел принимал, что изменение инерционного члена по длине происходит согласно выражения (5):

$$dh' = d\left[\frac{a}{g}\lambda' h\right] = d\left[\frac{\lambda^2 v^2}{g}\,\frac{d^2h}{dl^2}\lambda' h\right] \tag{5}$$

Но о том—как определяется коэфициент λ'—автор ничего не говорит, а просто рекомендует принимать $\lambda' \cdot \lambda^2 = \varkappa = 1/3$.

Определение λ не представляет трудности, так как

$$\lambda = \frac{v_{пов}}{v_{ср}} \tag{6}$$

Прежде чем перейти к определению коэфициента, необходимо выяснить его существо: в точке А рис. 4, на глубине h от свободной поверхности воды увеличение давления, вызванного центробежным ускорением a, выражается следующей функцией:

$$h' = f\left(\frac{a}{g}; h\right) \tag{7}$$

Центробежное ускорение, как известно, можно выразить через скорости и радиусы кривизны отдельных струек следующим образом:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{8}$$

Как видно из уравнения (8) a—величина переменная по глубине, так как с глубиной меняются скорости и радиусы кривизны отдельных струек. Следовательно, h' в уравнении (7) тоже переменное. Среднее для данного сечения значение h' можно выразить следующим образом:

$$h'_{cp} = \frac{a}{g} \lambda' h_m \tag{9}$$

λ'—некоторый коэфициент.

Для определения значения $\frac{h'}{h}$ выделим на рассматриваемом участке элементарный объем жидкости в виде параллелепипеда (рис. 5) и рассмотрим его равновесие. Если площадь основания параллелепипеда обозначить через $d\omega$, а высоту через dh, то масса параллелепипеда будет $\frac{\gamma}{g} d\omega\, dh$.

Центробежное ускорение равно $\frac{v^2}{r}$; центробежная сила будет $\frac{\gamma}{g} d\omega\, dh . \frac{v^2}{r}$

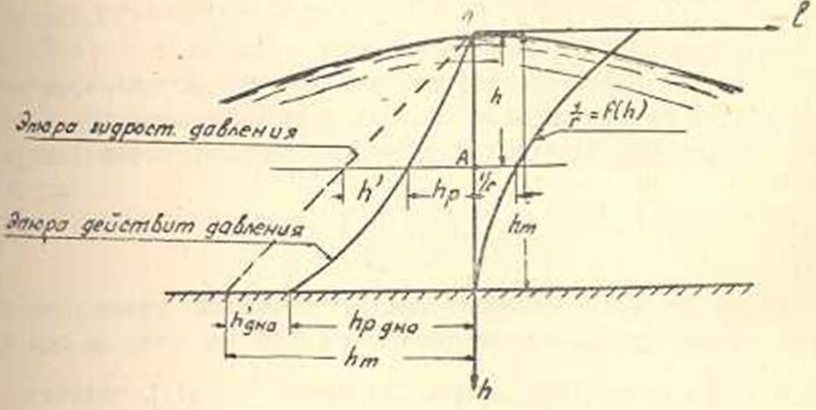


рис. 4

Силы давления, действующие на нижней и верхней площадках параллелепипеда, соответственно будут $(p+dp)\, d\omega$ и $p d\omega$.

Собственный вес параллелепипеда равен $\gamma d\omega dh$.

Проектируя все эти силы на ось oh, получим:

$$\frac{1}{\gamma} dp = -\frac{v^2}{g_r} dh + dh.$$

Интегрируя и принимая $\gamma = 1$, получим

$$p = h - \int \frac{v^2}{g_r} dh \tag{10}$$

Постоянная интегрирования $C=0$

Как видно из рис. 5, величина $\int \frac{v^2}{gr} dh$ представляет из себя то увеличение (или уменьшение) давления, которое мы хотели определить. Следовательно,

$$h' = \int \frac{v^2}{gr} dh \tag{11}$$

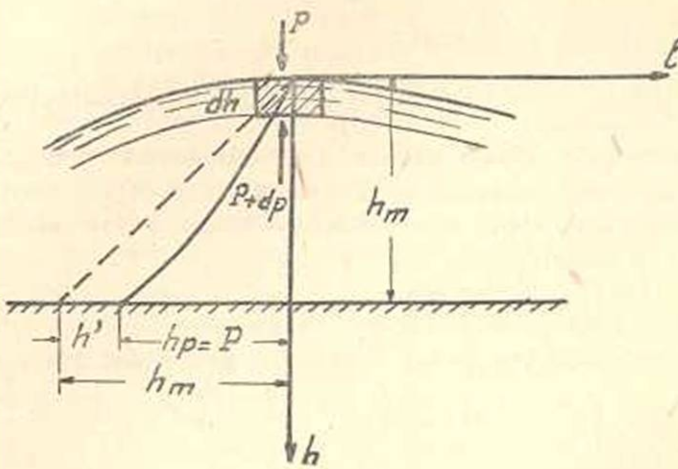


Рис. 5

Закон изменения величины радиуса кривизны r с глубиной не известен. Исходя из того соображения, что на поверхности потока радиус кривизны равняется некоторой конечной величине, а на дне канала—бесконечности, допустим, что этот закон имеет следующий вид [8]:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{h}{h_m}\right) \tag{12}$$

Выражение (12) удовлетворяет указанным выше условиям. Действительно, при $h=0$ (поверхность жидкости) $r=k$, а при $h=h_m$ (дно водотока) $r=\infty$. Подставляя значение $\frac{1}{r}$ в (11), получим:

$$h' = \int \frac{v^2}{dk}\left(1 - \frac{h}{h_m}\right) dh = \frac{v^2_{cp}}{dk}\left(h - \frac{h^2}{2h_m}\right) + C$$

Принимая во внимание, что при $h=0$, $h'=0$, а следовательно и $C=0$, получим:

$$h' = \frac{v^2_{cp}}{gk}\left(h - \frac{h^2}{2h_m}\right) \tag{13}$$

Замена скорости v скоростью v_{cp} существенно не влияет на результат. Таким образом, выражение (13) может служить для определения (в любой точке сечения) того добавочного давления, которое получается благодаря наличию центробежного ускорения a. Но для этого нужно знать численное значение коэфициента k.

Применим для потока в пределах переходного участка между сечением, соответствующим гребню первой волны, и сечением, где установился равномерный режим, теорему об изменении количества движения. Кроме того, введем небольшое допущение, что распределение давления в начальном сечении очень мало отличается от прямолинейного закона (рис. 6). Тогда

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = \Sigma\, p \cdot t$$

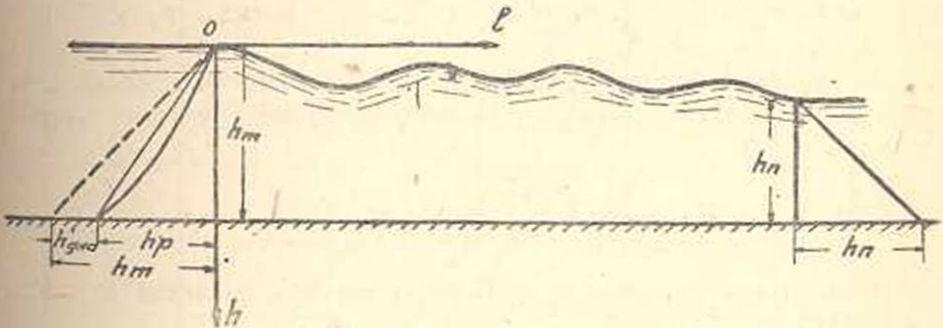


Рис. 6

Массу выражаем через $m = \frac{\gamma}{g}\, q$, а скорость через $v = \frac{q}{h}$. Из действующих сил принимаем только гидростатическое давление, а влиянием сил тяжести, ввиду малости уклона, пренебрегаем. Производя указанные замены в выражении (14), получаем (см. обозначения на рис. 6):

$$\frac{\gamma}{g} q \cdot \frac{q}{h_m} - \frac{\gamma}{g} q \cdot \frac{q}{h_n} = \frac{1}{2}\, \gamma\, h_p\, h_m - \frac{1}{2}\, \gamma\, h^2_n$$

Промежуток времени t принят равным единице. Значение h_p находится из предыдущего выражения и равно:

$$h_p = \frac{2}{h_m} \left[\frac{q^2}{g} \left(\frac{1}{h_n} - \frac{1}{h_m} \right) + \frac{h^2_n}{2} \right] \tag{14}$$

Величины h_n и h_m заранее известны из конкретного проекта того или иного сооружения.

Для решения уравнения (4) входящие в него определенные для данных условий величины (C_n; i: h_n; α и т. д.) подсчитаны на основании данных эксперимента, проведенного с этой целью в Гидроэлектрической Лаборатории Водно-Энергетического Института Академии Наук Армянской ССР. Эксперименты заключались в создании за водосливом с широким порогом (путем регулирования глубин в нижнем бьефе) волновой поверхности. Данные опыта и результаты следующие:

$q = 56{,}5$ *л*/сек $i = 0{,}00324$ $h_m = 0{,}1065$ *м* $в = 0{,}195$ *м.*

$V_{пов} = 0{,}729$ *м*/сек. $V_{серед} = 0{,}765$ *м*/сек. $V_{дна} = 0{,}495$ *м*/сек.

$$h_n = 0{,}085\,м \quad \omega_n = 0{,}0166\,м^2 \quad \varkappa_n = 0{,}365\,м \quad R_n = 0{,}0455\,м.$$
$$v_{ср} = 0{,}65\,м/сек, \quad v_{max} = 0{,}765\,м/сек, \quad v_{пов} = 0{,}729\,м/сек$$
$$C = 52{,}8$$

Коэфициент C определяется по формуле Павловского:

$$C = \frac{1}{n} R^y, \qquad где \quad y = 1{,}5\sqrt{n}.$$

Для коэфициента n принято значение n=0,0115 (среднее между значениями $n_1 = 0{,}011$ для стеклянных стенок лотка и $n_2 = 0{,}012$ для деревянного дна лотка).

Коэфициент α принят равным 1,1 на основании выражения (которое использовано для случая течения на прямом участке открытого водовода)

$$\alpha = 1 + \frac{3n_0 + 1}{n_0^2(n_0+3)}^{*}, \quad где \quad n_0 = \frac{v_{cp}}{v_{max} - V_{cp}}$$

Подсчитаем значение h_p из (14) (подставляя значения h_n и h_m) $h_p = 0{,}0819\,м$.

Как видно из рис. 6 $h_{max} = -h_p - h'_{дна} = 0{,}024\,м$.

Другое выражение для $h'_{дна}$ можно получить, подставляя в уравнение (13) h_m вместо h. Действительно:

$$h'_{дна} = \frac{v^2_{cp}}{gk}\left(h_m - \frac{h^2_m}{2h_m}\right) = \frac{v^2_{cp}}{gk}\frac{h_m}{2}$$

Но по предыдущему $h'_{дна} = 0{,}024\,м$, следовательно

$\frac{v^2_{cp}}{gk}\frac{h_m}{2} = 0{,}024$. Отсюда можно определить значение коэфициента к:

$$K = \frac{v^2_{cp}\, h_m}{0.024 \cdot 2g} \tag{15}$$

Подставляя это значение к в (13) получаем

$$h' = 0.458\left(1 - \frac{h}{2h_m}\right)h \qquad или \quad \frac{h'}{h} = 0{,}458\left(1 - \frac{h}{2h_m}\right) \tag{16}$$

Уравнение (16) можно представить графически рис. 7. Как видно из этого рисунка, закон распределения действительного давления мало отличается от прямолинейного, принятого предварительно.

Из (16) можно получить $\left(\frac{h'}{h}\right)_{cp} = \frac{\int_0^{hm} \frac{h'}{h}\,dp}{h_m} = 0{,}344$ или $h'_{cp} = 0{,}344\,h_{cp}$.

* См. Евреинов — Гидравлика, стр. 186, 1948 г.

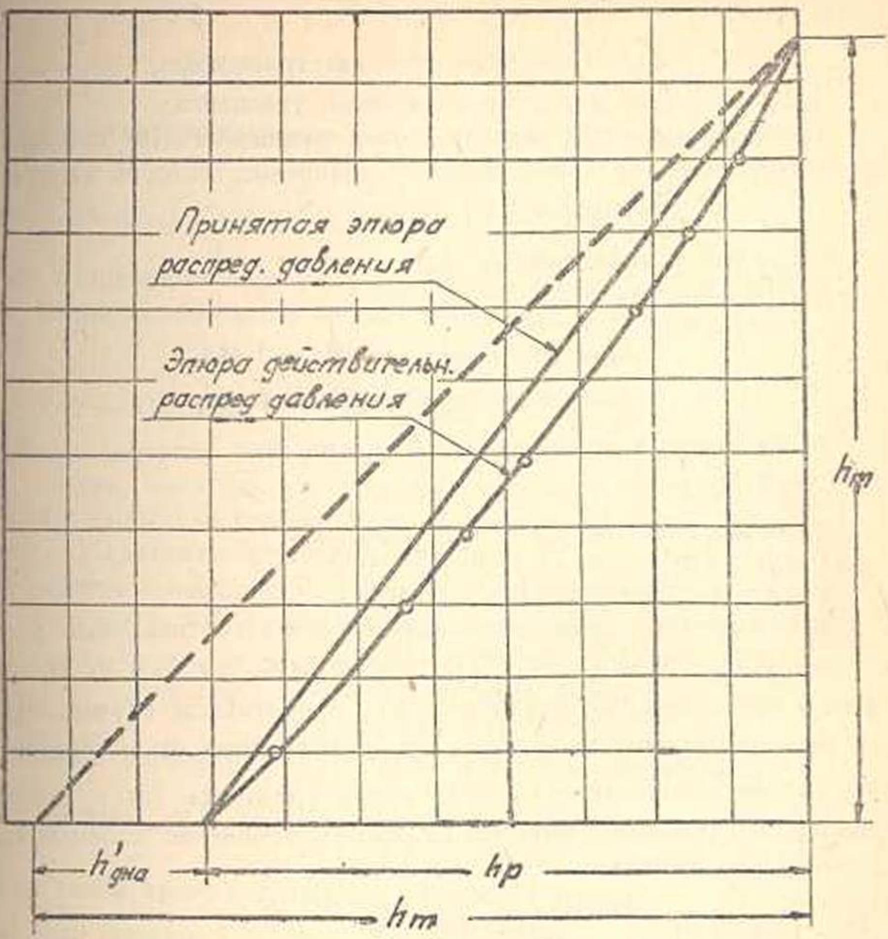


Рис. 7

Подставляя это значение $h'_{ср}$ в (9), можно получить величину

$$\lambda' = \frac{0{,}344\, h_{ср}\, g}{a\, h_m} \tag{17}$$

Отнесем значение λ' к поверхностным элементам. При этом $a = \frac{v_{пов}}{k}$, где к известно из (15). Тогда

$$\lambda' = \frac{0{,}344\, h_{ср}\, g v^2_{ср}\, h_m}{v^2_{пов} \cdot h_m \cdot 2g \cdot 0{,}024} = 0{,}305$$

Подставляя в уравнение (4) значения входящих в него величин, получаем уравнение

$$\frac{d^3 y}{d\sigma^3} + 2.06\,\frac{dy}{d\sigma} - 0.042\, y = 0 \tag{18}$$

общий интеграл которого имеет вид:

$$y = C_1' e^{z_1\sigma} + C_2' e^{z_2\sigma} + C_3' e^{z_3\sigma},$$

где

C_1'; C_2'; C_3' — постоянные интегрирования,

z_1; z_2: z_3—корни характеристического уравнения.

Для получения частного решения уравнения (18) составляем соответствующее характеристическое уравнение, которое имеет вид:

$$Z^3+2{,}06Z-0{,}042=0 \tag{19}$$

Корни этого уравнения равны:

$$Z_1=0{,}023,$$

$$Z_2=-a+bi=-0{,}012+1.44\,i,$$

$$Z_3=-a-bi=-0{,}012-1.44\,i,$$

Путем простых преобразований можно этот интеграл привести к следующему виду:

$$y=C_1' e^{z_1\sigma}+Ae^{-a\sigma}\cdot \mathrm{Sin}\,(b\sigma+\varphi) \tag{20}$$

A и φ — постоянные интегрирования.

Для нашего случая, когда рассматривается спокойный поток ($h>h_к$), при переходе от глубины $h_1=h_m$ к $h_2=h_n$ (см. рис. 1), нужно в уравнении (20) принять $C_1''=0$. В противном случае глубина y вниз по течению возрастала бы или убывала бы до бесконечности (в зависимости от знака C_1'), а не стремилась бы к глубине равномерного режима. Учитывая сказанное, уравнение свободной поверхности напишется в следующем виде:

$$y=Ae^{-0{,}012\,\sigma}\cdot \mathrm{Sin}\,(1.44\,\sigma+\varphi) \tag{21}$$

Переходим к определению произвольных постоянных интегрирования A и φ.

В уравнении (21) y и σ заменяем их значениями, полученными из выражений, данных Сухомелом, а именно:

$$\text{т. к. } h=h_n+yh_n\text{, то } y=\frac{h}{h_n}-1,$$

$$al=\sigma h_n \text{ или } \sigma=\frac{l}{h_n},$$

получаем;

$$h=h_n\left[Ae^{-0{,}0\cdot2\frac{l}{h_m}}\cdot \mathrm{Sin}\left(1.44\frac{l}{h_m}+\varphi\right)+1\right] \tag{22}$$

Граничные условия в данном случае будут следующие: при $l=0$ $h=h_1=h_{max}$, а $\frac{dh}{dl}=0$, т. е. тангенс угла касательной к свободной поверхности равняется нулю.

Учитывая это, получаем:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad A = \frac{h_{max} - h_n}{h_n} = \frac{h_1 - h_2}{h_2}$$

При этих значениях φ и A уравнение (22) принимает вид:

$$h = (h_{max} - h_n) . e^{-0.012 \frac{l^{\frac{3}{2}}}{h_m}} . \operatorname{Sin}\left(1{,}44 \frac{l}{h_m} + \frac{\pi}{2}\right) + h_n \tag{23}$$

и представляет из себя уравнение затухающих колебаний [9].

Вводя численные значения глубин h_m и h_n, окончательно получаем:

$$h = 0{,}0215\, e^{-0{\cdot}113\, l} . \operatorname{Sin}\left(13{,}5\, l + \frac{\pi}{2}\right) + h_n \tag{24}$$

Теперь, имея закон изменения глубины h по длине канала, т. е. закон изменения свободной поверхности, нетрудно определить ту длину, на протяжении которой глубина становится равной нормальной глубине в канале.

При $h = h_n$ из уравнения (23) получаем:

$$0.0215\, e^{-0{,}113\, l} . \operatorname{Sin}\left(13{,}5\, l + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{25}$$

Здесь должен равняться нулю один из сомножителей.

Если принять $\operatorname{Sin}\left(13{,}5\, l + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, то получим местоположение узловых точек кривой колебаний уровня.

Если принять $0{,}0215\, e^{-0{,}113\, l} = 0$, то получим кривую, которая проходит по вершинам волны (декремент колебаний) и асимптотически приближается к нормальному горизонту (рис. 8).

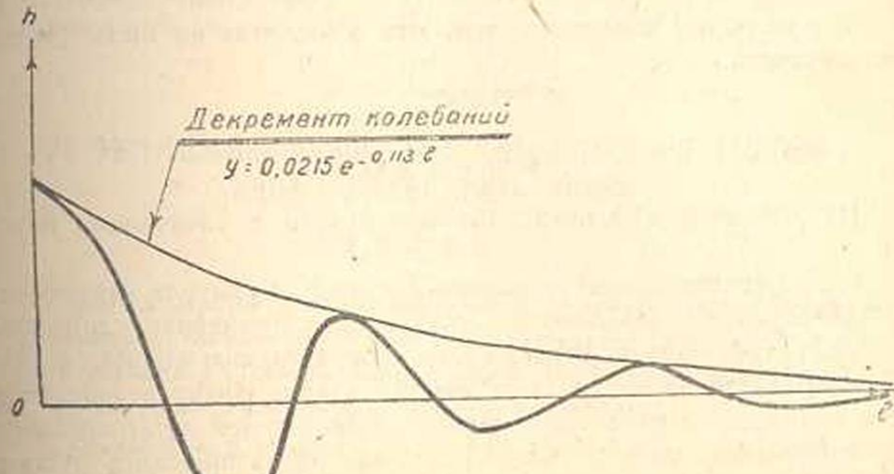


Рис. 8

Практически можно задаться значением $h-h_n$ и определить с любой степенью точности длину затухания l. В данном случае, принимая $h-h_n=0{,}01\ h_n$ (точность $1^0/_0$) длина, на которой происходит практически полное затухание волн, будет равна $l=6{,}75$ *м*.

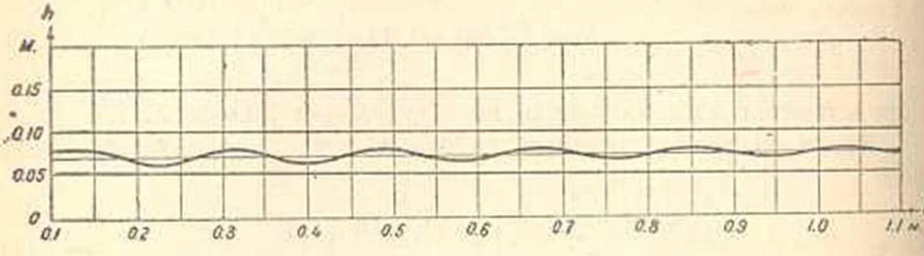


Рис. 9 а

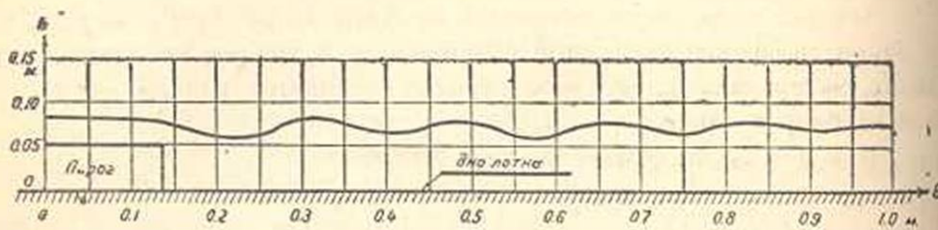


Рис. 9 б

На рис. 9 а представлена теоретическая кривая свободной волновой поверхности, выражаемая формулой (24).

На рис. 9б в том же масштабе представлена схема той же поверхности, полученная из опытов в лотке (рис. 9 б. является копией с фотографии).

Сопоставление теоретической и опытной кривых показывает, что затухание в действительности происходит на меньшей длине, чем это получается теоретически.

Это нетрудно объяснить тем, что в расчетах не были учтены силы вязкости.

Выводы

На основании изложенного можно притти к следующим выводам:

1. Диференциальное уравнение (2) проф. Сухомела для свободной поверхности безнапорного потока нельзя применить для решения конкретной задачи, относящейся к определению кривой свободной поверхности на переходном участке канала, ввиду неопределенности входящих в него коэфициентов и постоянной интегрирования.

2. Решение проф. Сухомела дано для очень широкого русла и потому не применимо к каналам.

3. Автором видоизменено уравнение Сухомела; предложен ме-

тод определения частного интеграла уравнением Сухомела, приведенного к виду, соответствующему каналам конечной ширины (ур. 4).

4. Внесена определенность в значения коэфициента $\varkappa$ и дано уравнение для определения коэфициента λ' (ур. 9), и для конкретной задачи дано численное значение этого коэфициента.

5. Дан способ определения постоянных интегрирования, исходя из граничных условий.

6. Дано уравнение свободной волновой поверхности, при помощи которого может быть определена длина участка, на котором происходит практически полное гашение волн.

7. Сопоставление теоретического решения с предварительными данными экспериментов в лотке дало хорошие результаты.

Гидро-электрическая Лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахметьев Б. А.*—Гидравлика открытых русел. 1934 г.
2. *Ананян А. К.*—Потери напора при плавном расширении водовода. Известия АН Арм. ССР (физ.-мат., естеств. и тех. науки), № 4, 1949.
3. *Сухомел Г. И.* и другие—Водослив с широким порогом. 1949 г.
4. *Сухомел Г. И.*—Формы свободной поверхности на участках потоков с резким изменением глубин и искривлением струй. ДАН Укр. ССР. 1, 1948.
5. *Агроскин И. И.*—Гидравлика. 1944 г.
6. *Ахутин А. Н.*—Специальный курс гидравлики. 1937 г.
7. *Сухомел Г. И.*—Неравномерное движение жидкости в открытых руслах и гидротехнических сооружениях. 1940 г.
8. *Муромов В. С.*—О критической глубине криволинейного потока. „Гидротехн. строит.", 1949 г.
9. *Лойцянский* и *Лурьев*—Курс теоретической механики. Ч. II. 1942 г.

Ս. Պ. Նազարյան

ԲԱՑ ԴԵՐԻՎԱՑԻԱՅԻ ԱՆՑՈՒՄԱՅԻՆ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔԻ ԱԶԱՏ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՄԱՍԻՆ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածում տրված է անհավասարաչափ շարժման ազատ մակերևույթի դիֆերենցիալ հավասարման մասնակի ինտեգրալի ստացման եղանակը (որի ընդհանուր լուծումը տվել է պրոֆ. Սուխոմելը) այն դեպքի համար, երբ հաշվի են առնված նաև իներցիոն ուժերը:

Պարզաբանված է անցումային հատվածներում ալիքային մակերևույթի առաջացման պատճառը և տրված է այն երկարության որոշման մեթոդը, որի վրա տեղի է ունենում ալիքների գործնականորեն լրիվ մարումը:

Ի տարբերություն Սուխոմելի լուծումից, որ վերաբերում է շատ լայն հուներին, հոդվածում տրված է լուծում՝ վերջավոր լայնություն ունեցող ուղղանկյան հուների համար։

Իներցիոն ուժերի ազդեցությունը հաշվի է առնված χ գործակցի միջոցով, որը կապ է հաստատում տվյալ կտրվածքում եղած հիդրոստատիկ և իրական ճնշումների միջև։ Սուխոմելի հավասարման մեջ χ-ն իրենից ներկայացնում էր մի անորոշ գործակից։

Հոդվածում առաջարկված է կոնկրետ խնդրի համար χ-ի որոշման մի մեթոդ, ընդ որում տրված է 2 ընդունելություն՝

1. տարբեր շիթերի կորությունների փոփոխման օրենքն ըստ խորության ընդունված է նախապես, որ սակայն լրիվ կերպով բավարարում է խնդրի սահմանային պայմաններին։

2. Ճնշումների բաշխման օրենքն ըստ խորության ընտրված է ոչ հիդրոստատիկ, բայց ուղիղ գծի օրենքով։ Հետագայում այն ստանում ենք կոր գծով բաշխված, որը սակայն շատ քիչ է տարբերվում նախապես ընդունված ուղիղ գծից (նկ. 7)։

Ստացված է երրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարում, որի մասնակի ինտեգրալի խարակտերիկ հավասարման արմատներից երկուսը (կոմպլեքսները) բավարարում են մեր խնդրի պայմաններին, տալով ազատ մակերևույթի փոփոխման օրենքն ըստ երկարության։ Այդ օրենքն իրենից ներկայացնում է մարող ամպլիտուդաներով տատանողական շարժում (մարող տատանում)։

Նախապես ունենալով հոսանքի խորությունները մինչև անցումային հատվածը (h_{max}) և նրանից հետո (h_0), ստացված հավասարումից կարող ենք որոշել այն հատվածի երկարությունը, որի վրա տեղի է ունենում ալիքների գործնականորեն վերջնական մարումը։ Մեր խնդրի համար այն եղել է 6,75 մ։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ-մաթ., բն. և տեխ. գիտ. II, № 6, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ЭНЕРГЕТИКА

В. А. Веников

Основные положения теории физического моделирования энергетических систем и их оборудования

1. Введение

Теория подобия и моделирования—это теория эксперимента, дающая правильный подход к постановке опытов в натуре и на моделях, обработке опытных данных и распространению результатов, полученных аналитически или экспериментально, на другие объекты. Отсюда ясно значение этой теории, являющейся связующим звеном между аналитическими и экспериментальными методами изучения явлений.

Широкое внедрение методов подобия и моделирования в гидродинамику, аэродинамику в теорию теплообмена, имевшее место за последние 10—15 лет в связи с работами советских ученых и особенно работами академика М. В. Кирпичева и его школы, дало блестящие результаты при решении практических задач теплотехники.

Увеличение мощности электрических систем и установок и усложнение их приводит к тому, что в последнее время применение теории подобия и моделирования в электротехнике также становится все более и более актуальным. Однако, эти методы все еще мало известны электротехникам.

Настоящая работа должна восполнить этот пробел, изложив теоретические обоснования и показав некоторые практические приложения.

2. Виды физического подобия и основные теоремы

Физические процессы могут считаться подобными, если в сходственные моменты времени в сходственных точках пространства значения переменных величин одной системы пропорциональны соответственным переменным величинам другой системы. Любое явление можно характеризовать критериями подобия—безразмерными комбинациями физических величин.

Установить функциональную зависимость между критериями подобия обычно легче, чем между физическими величинами. Установив же соотношения между критериями подобия (критериальные уравнения), легко перейти и к соотношениям между физическими величинами.

Критерии подобия являются инвариантами, характеризующими целую группу подобных явлений. Приемы, вытекающие из теории подобия, часто позволяют получить практически исчерпывающую характеристику явления без интегрирования уравнений. Существует два различных вида подобия и моделирования:

Физическое — при физически одинаковых процессах; сходственные величины в этом случае имеют одинаковую физическую природу.

Математическое (аналогиями) — при процессах, физически различных, но характеризуемых одинаковой системой уравнений; сходственные величины в этом случае имеют различную физическую природу.

Математическое моделирование имеет своей целью решение уравнений и возможно только при наличии уравнений, составленных на основе определенных допущений и преобразования к удобному для решения виду.

Физическое моделирование имеет своей целью нахождение или уточнение законов происходящих процессов, проверку теории критерием практики.

Теория подобия, вскрывая зависимость качественной стороны явления от его количественной стороны, позволяет вполне закономерно изменить размеры объекта исследования.

При физическом моделировании нахождение критериев подобия легко осуществляется как для линейных, так и для нелинейных процессов. Оно может быть произведено на основе общих уравнений, неприемлемых для решения на математической модели. Сочетая приемы анализа размерностей и эксперимента, можно определить критерии подобия и без составления уравнений.

Методы физического и математического моделирования не могут рассматриваться как противоречащие друг другу: экспериментальное изучение облегчается физическим моделированием, помогающим довести теоретические исследования до вывода диференциальных уравнений, описывающих явления. Трудности, возникающие при интегрировании этих уравнений, облегчаются математическим моделированием.*

Теория физического подобия базируется на трех основных теоремах:

* В построении расчетных математических моделей и интеграторов советскими учеными и инженерами сделаны большие успехи. За разработку расчетной модели удостоены Сталинской премии канд. техн. наук Д. И. Азарьев, проф. П. С. Жданов, проф. А. М. Федосеев. Проф. Л. И. Гутенмахер, канд. техн. наук Н. В. Корольков, канд. техн. наук Б. А. Волынский и В. П. Лебедев удостоены Сталинской премии за разработку электроинтегратора.

Значительный интерес представляет нелинейный нагрузочный элемент, разпервая теорема (Ньютона) утверждает, что подобные явления имеют одинаковые критерии подобия;

вторая теорема, называемая иногда Пи-теоремой* утверждает, что всякое явление можно характеризовать некоторыми безразмерными комбинациями физических величин, участвующих в этом явлении (критериями подобия).

Третья теорема (Кирпичева-Гухмана) устанавливает, что для подобия явлений необходимо и достаточно иметь подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии подобия. Общее доказательство этой теоремы дано Кирпичевым и Конаковым на основе теории непрерывных групп Ли. Существенное значение для моделирования электрических систем имеют следующие положения:

1. Сложные системы, составленные из систем, соответственно подобных в отдельности, подобны и в целом, если соответственно подобны их общие элементы (подобие граничных условий).

2. Условия подобия, справедливые для линейных систем, могут быть распространены и на нелинейные системы при дополнительном условии—совпадении относительных характеристик нелинейных параметров.

3. Условия подобия, справедливые для изотропных и в том или ином смысле однородных систем, могут быть распространены и на анизотропные и неоднородные системы, если только эта анизотропия и неоднородность в сравниваемых системах относительно одинакова.

4. Процессы, протекающие в геометрически неподобных системах, могут быть физически подобными, причем каждой точке пространства в одной системе соответствует вполне определенная точка пространства в другой, физически подобной, системе (аффинное подобие, условия которого в общем случае устанавливаются на основе теории групп Ли).

5. В инженерных задачах, связанных со сложными явлениями, обычно важно обеспечить подобие только процессов, наиболее существенных с практической точки зрения. Подобие явления в целом может быть *приближенным*, допускающим некоторые искажения второстепенных процессов. Так, соотношения подобия могут быть справедливы не для всех переменных или не во всех точках рассматриваемого пространства. Приближенное подобие будет иметь место, когда соотношения подобия будут справедливы не для мгновенных значений гармонических переменных, а только для их усред-

---

работанный канд. техн. наук С. С. Чугуновым для расчетной модели электрических систем, построенной в Энергетическом Институте Академии Наук СССР (чл.-корр. АН СССР И. С. Брук, С. С. Чугунов и М. С. Либкинд).

* Принято считать, что Пи-теорема была впервые сформулирована Букингемом в 1914 г. применительно к случаю, когда физическое уравнение не содержит диференциальных операторов. Однако, эту теорему следует рассматривать как частный случай теоремы Федермана, опубликованной еще в 1911 г. Обобщение Пи-теоремы на случай физических уравнений, содержащих диференциальные операто-

ненных значений. Так, два электрических процесса, имеющие неподобные мгновенные значения тока и напряжения, могут иметь подобные огибающие этих мгновенных значений.

Распределение электрического или магнитного поля может в некоторых случаях считаться приближенно подобным при наличии подобия только в каком-либо одном направлении.

6. При подобии электрических и электромеханических явлений можно различать *подобие цепей* и *подобие полей*.

При подобии цепей геометрическое подобие может не соблюдаться или принимать специфическую форму, ограничиваясь требованием подобия в обобщенных геометрических координатах. Так, например, подобными могут быть две электрические цепи, содержащие элементы с сосредоточенными параметрами, если схемы включения этих элементов одинаковы. Требование пространственного подобия вырождается здесь в требование одинаковой конфигурации электрических схем.

В электромеханической системе, например, в системе, содержащей синхронные машины, может иметь место полное геометрическое подобие всех элементов машин; тогда токи, магнитные и электрические поля всех этих элементов будут подобны, подобно изменяясь во времени.

Если ограничиться требованием подобия во времени электрических переменных величин, то требование геометрического подобия сводится к требованию соответственно одинакового изменения обобщенной геометрической координаты. При таком подходе совершенно отпадают вопросы геометрического подобия элементов машины и вопросы подобия электрических и магнитных полей внутри машины.

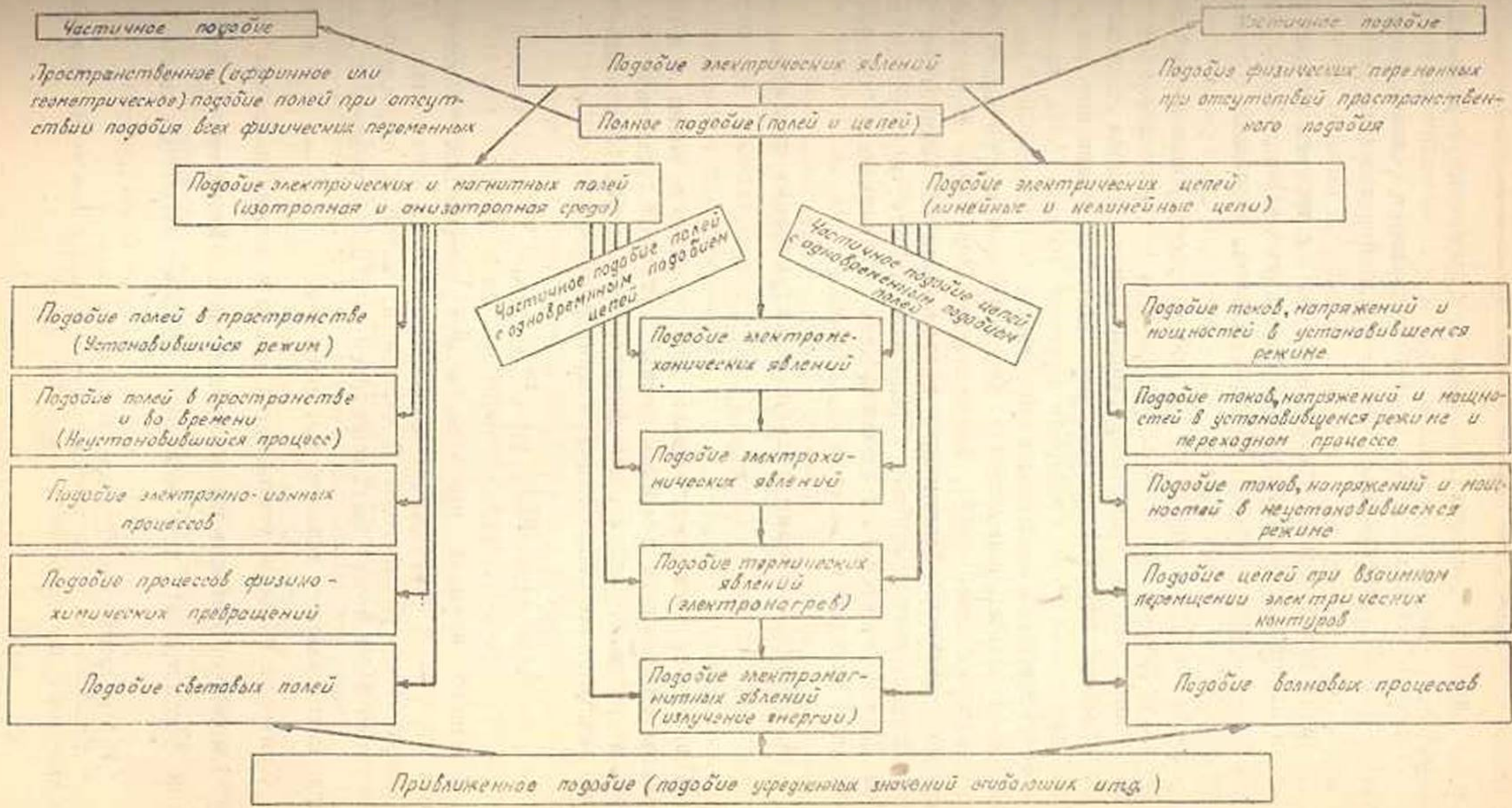
При аффинном подобии вдоль каждой координатной оси вводятся различные коэфициенты подобия. В этом случае в геометрически подобных физических системах, например, в двух геометрически неподобных синхронных машинах, можно найти такие геометрические точки, где физические величины изменяются во времени подобно. Характеристику различных видов электрического подобия дает фиг. 1.

3. Методы определения критериев подобия

Критерии подобия можно определить тремя методами, дающими одинаковые результаты, но отличающимися подходом к математическому описанию явлений. Метод анализа размерностей требует знания законов, на которых построена система единиц, измеряющих эти величины.

Путем анализа размерностей мы получаем достаточно полные

ры, и применение её к задачам подобия и моделирования были сделаны акад. М. В. Кирпичевым на базе работ Федермана и Афанасьевой-Эренфест.



Фиг. 1. Подобие в электротехнике

сведения только о явлениях, косвенно отраженных в уравнениях, лежащих в основе системы единиц.

Второй метод нахождения критериев подобия основан на сравнении уравнений, описывающих явления, подобие которых устанавливается.

Разница между этими приемами исчезает в третьем методе, основанном на применении системы относительных единиц. Здесь уравнения, положенные в основу системы единиц, совпадают с уравнениями исследуемого процесса.

При нахождении критериев подобия преобразования диференциальных уравнений сводятся к операциям с постоянными коэфициентами, вносимыми за знаки диференцирования. Отсюда выводится общее правило* нахождения критериев подобия: уравнение, используемое для нахождения критериев подобия, должно быть приведено к безразмерному виду делением всех n его членов на один из них. В n—1 безразмерных членах преобразованного уравнения следует опустить знаки диференцирования. Получение соотношения между переменными величинами и постоянными коэфициентами, характерные для всех подобных процессов, и будут критериями подобия. Для того, чтобы выделить из них определяющие критерии, необходимо установить условия однозначности.

4. Общие критерии подобия электрических явлений

а. Подобие полей.

Протекание электромагнитных процессов во времени и в пространстве описывается в общем случае системой уравнений Максвелла, из которых следует, что физическое подобие обеспечивается геометрическим подобием и двумя критериями:

$$\Pi_1 = \frac{\mu\gamma l_0^2}{t}; \quad \Pi_2 = \frac{\varepsilon\mu l_0^2}{t^2} \text{ или } \frac{\varepsilon}{\gamma t}.$$

Масштаб времени при этом может изменяться.** Масштабы плотности тока и напряженности поля в модели и в оригинале также могут быть различными. В частности, масштаб напряженности магнитного поля может быть определен из первого уравнения Максвелла, интегральные аналоги которого дают: $\frac{j\, l_0}{H} = \frac{I}{l_0 H} = \text{idem}$.

Критерии подобия упрощаются, если в рассматриваемых процессах можно пренебречь токами смещения. Соотношение $\frac{I}{l_0 H} = \text{idem}$ можно рассматривать как критерий подобия магнитных полей, со-

* Иногда называемое правилом интегральных аналогов.

** Периодически изменяющиеся величины должны в этом случае удовлетворять критерию гомохронности: ωt = idem (см. ниже).

зданных системой электрических контуров, при условии, что магнитная проницаемость μ и проводимость γ в модели и в оригинале соответственно одинаковы.

Частным случаем полученных выше общих критериев подобия является теорема Кельвина, утверждающая, что одинаково намагниченные, геометрически подобные магниты дают в соответственных точках пространства одинаковые напряженности поля.

Все наши выводы и полученные выше критерии подобия могут быть справедливы и в случае анизотропной среды, где величины ε, μ и γ имеют различные значения в различных точках пространства и в случае нелинейной системы, где те же величины являются функциями состояния системы, например:

$$\mu = f(H)$$

Диференциальные уравнения, описывающие процессы в таких случаях, сильно усложняются за счет появления в них дополнительных членов, которые составляются из тех же величин, но с другим расположением символов диференцирования.* Из правил определения критериев подобия следует, что это приводит только к дополнительному требованию: совпадения относительных характеристик физических параметров.

Полученные выше критерии подобия могут быть распространены на случаи, когда геометрическое подобие не соблюдается и на процессы в анизотропных телах, где физические свойства веществ характеризуются тензорами ε_{ik} или μ_{ik} вместо скалярных величин ε или μ, характеризующих изотропную среду.

Выбрав оси координат совпадающими с главными направлениями осей тензора, мы можем вдоль каждой оси установить свой масштаб для измерения геометрических размеров тел: ml_x, ml_y, ml_z и свой масштаб для измерения параметра ε или μ, например: $m_{\mu x}$. В ряде случаев подобие может быть обеспечено, если величина μ_{mx} вдоль любой оси изменяется обратно пропорционально квадрату геометрических размеров вдоль этой оси.

б. Подобие цепей

Для подобия электрических цепей требуется наличие соответственно одинаковых относительных постоянных времени:

$$T_{*L} = \frac{L_n}{R_n t}; \quad T_{*Ln} = \frac{L_{nm}}{R_n t} \cdot \cdot \cdot \quad T_{*cn} - C_n R_n t$$

В случае линейных пассивных цепей необходимо иметь одинаковое соотношение между приложениями э. д. с. (напряжениями).

---

* Например, $\operatorname{div} \overline{D} = \varepsilon \operatorname{div} \overline{E}$ при $\varepsilon = \mathrm{Const}$

$$\operatorname{div} \overline{D} = \varepsilon \operatorname{div} \overline{E} + \overline{E} \operatorname{grad} \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon = f(x, y, z)$$

$$\operatorname{div} \overline{D} = \varepsilon \nabla^2 U + \frac{\partial \varepsilon}{\partial U} [\operatorname{grad} U]^2 \quad \text{при } \varepsilon = f(U)$$

Одновременно пропорциональное изменение значений всех э. д. с. влияет на масштаб токов. Критерии подобия сохраняются и для случая, когда э. д. с. изменяются по любому, но соответственно одинаковому закону. При этом, для получения подобия должно быть удовлетворено дополнительное условие.

$$U^m = m_u f(t_2) = m_u f(t_1 m_t)$$

Отсюда следует, что частота периодических э. д. с., действующих в модели, должна изменяться соответственно с изменением масштаба времени. К выведенным выше критериям подобия добавляется еще один критерий, который мы будем называть критерием гомохронности или однородности во времени: $\omega t = \text{idem}$; $t = \frac{\text{idem}}{\omega}$. При отступлении от этого критерия так называемые свободные процессы протекали бы со скоростью, не согласованной со скоростью вынужденных процессов и здесь могло быть осуществлено только *приближенное подобие*.

Если некоторые параметры моделируемых цепей не являются постоянными, то скорость их изменения в модели должна соответствовать выбранному масштабу времени. Относительный характер изменения данного параметра должен быть одинаковым в модели и в оригинале.

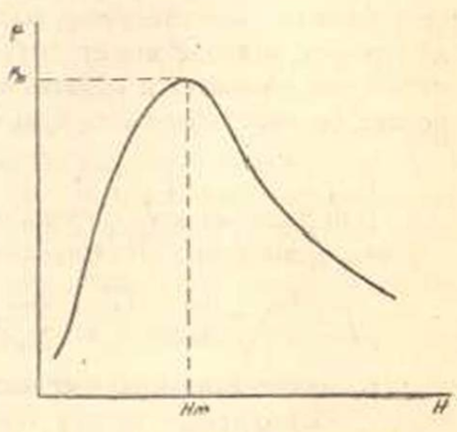
Для получения подобия с учетом нелинейности параметров необходимо удовлетворить тем же критериям, что и для линейной цепи, и иметь одинаковыми относительные характеристики нелинейного параметра: $\mu_* = \frac{\mu}{\mu_m} = \varphi\left(\frac{H}{H_m}\right) = \varphi(H_*) = \text{idem}$ (фиг. 2).

Подобие динамических систем* удобно установить, составляя диференциальные уравнения в обобщенных геометрических координатах. Например, для системы из трех контуров, два из которых жестко связаны друг с другом и могут перемещаться относительно третьего, имеем:

для определения электрического состояния:

$$e_1 = i_1 R_1 + \frac{d}{dt}[L_1 i_1 + M_{12} i_2 + M_{13} i_3]$$

и т. д. для e_2 и e_3;



Фиг. 2. Характеристика переменного параметра

* Под динамическими понимаются такие системы, электрическое и механическое состояния которых взаимно связаны.

для определения перемещения:

$$I_0 \frac{d^2\delta}{dt^2} = M_м - M_э ,$$

где I_0 — момент инерции, $M_э$, $M_м$ — электромагнитный и механический моменты.

Для определения энергии магнитного поля:

$$W = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M_{12} i_1 i_2 + M_{13} i_1 i_3 + M_{23} i_2 i_3 .$$

Обобщенная геометрическая координата

$$\delta = \int \omega t + \delta_0$$

и обобщенная скорость или скольжение $\frac{d\delta}{dt} = S$.

Электромагнитный момент при принятых обозначениях может быть записан в следующем виде:

$$M_э = \frac{d}{dt} \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{dw}{d\delta}$$

Из этих уравнений находим критерии подобия:

$$e_{*1} = \frac{e_1}{R_1 i_1} = idem; \quad T_{*1} = \frac{L_1}{R_1 t} = idem; \quad T_{*12} = \frac{M_{12}}{R_1 t} = idem$$

$$T_{*13} = idem; \quad \frac{M_э}{M_м} = idem; \quad \frac{J_0 \delta}{M_м t^2} = idem.$$

Анализ условий однозначности уравнений, из которых были получены эти критерии, и рассмотрение начальных условий протекания процесса позволяет установить необходимые и достаточные условия подобия процессов.

Условие $e_* = idem$ показывает, что подведенные к контурам модели и оригинала напряжения должны находиться между собой в таком же отношении, в каком находятся падения напряжения в активных сопротивлениях контуров.

В случае системы переменного тока это возможно только при равенстве отношений соответственных реактивных и активных сопротивлений $\frac{\omega L}{R} = \frac{X}{R} = \frac{L}{Rt}$ в модели и в оригинале*. Этот вывод сразу ограничивает возможности изменения масштабов времени.

При моделировании систем постоянного тока имеется полная возможность „подгонки" значений T изменением масштаба времени. При моделировании систем переменного тока, при изменении мас-

* Это легко показать, рассмотрев условия установившегося режима цепи переменного тока.

штаба времени должна изменяться частота. В противном случае будут нарушаться условия подобия установившихся режимов. Дальше следует условие $\frac{M_м}{M_э}$ =idem и требования $\frac{M_Δ}{M_м}$ = idem и $M_{*0}δ$=idem, где относительная механическая постоянная времени $M_{*0} = \frac{I_0}{M_м t^2}$. Если, как мы предположили выше, имеет место вращательное движение, то $\frac{δ}{ωt}$ =idem, или при учете требований критерия гомохронности имеем δ=idem. В частных случаях (для машин постоянного тока и т. д.) изменение δ при соблюдении условия M_{*0} δ=idem может быть допущено.

В условиях ферромагнитной (полностью или частично) среды для получения подобия необходимо, чтобы зависимость всех индуктивностей и взаимоиндуктивностей от протекающих по ним токов выражалась в модели и в оригинале функциями одного и того же вида: относительные характеристики M_*=f(i) и L_*=f(i) для соответственных элементов модели и оригинала должны быть одинаковы.

Критерии подобия цепей с распределенными по длине параметрами имеют вид:

$$T_{\underset{*}{L}} = \frac{L_0}{R_0 t} = \text{idem}; \quad T_{*c} = \frac{C_0}{G_0 t} = \text{idem}; \quad R_0 G_0 l^2 = \text{idem}$$

5. Определение критериев подобия в различных комплексных процессах

Явления, происходящие в сложных электрических системах или установках, могут быть связаны с тепловыми, механическими и другими процессами, подобие которых должно устанавливаться одновременно с электромагнитным подобием. Например, для какой-либо конструкции, нагреваемой проходящим по ней электрическим током и неоднородной в тепловом отношении, критерии подобия имеют вид:

$$\Pi_1 = \frac{qx^2}{\lambda_x \theta}; \quad \Pi_2 = \frac{c\gamma}{\lambda_x t} x^2; \quad \Pi'_3 = \frac{x^2 \lambda_y}{y^2 \lambda_x}; \quad \Pi''_3 = \frac{x^2 \lambda_z}{z^2 \lambda_x}$$

Отсутствие геометрического подобия корректируется подбором значений теплопроводности по главным осям: λ_x, λ_y, λ_z.

Кроме того, должно быть соблюдено подобие краевых условий, т. е. подобие условий теплоотдачи на граничной поверхности:

$$\frac{\alpha_i l_{0i}}{\lambda_i},$$

где α_i и λ_i — коэфициент теплоотдачи и теплопроводность окружающей среды, индекс i принимает значение x, y или z — в зависимости от того, какая поверхность рассматривается. При отсутствии геометрического подобия этот критерий видоизменяется: $\frac{\alpha_l \operatorname{grad} \theta}{\lambda_l \theta} = \text{idem}$.

Рассмотренные методы определения критериев подобия остаются справедливыми и в условиях нелинейности. При этом необходимо дополнительно учесть только непостоянство λ или С, используя зависимости $\frac{\lambda}{\lambda_m} = \varphi\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)$ или $\frac{C}{C_m} = \varphi\left(\frac{\theta}{\theta_m}\right)$, которые в модели и в оригинале должны быть соответственно одинаковыми.

Рассмотренные критерии подобия могут быть успешно применены при совместном исследовании электрических и тепловых процессов в кабелях, проводах, в электрических машинах и трансформаторах. Так, при установившемся режиме подобие в распределении температур в стальных частях машины может быть установлено на основании следующего уравнения:

$$\lambda_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \psi B^2 = O,$$

где ψ—коэфициент, зависящий от частоты f, а также от материала и толщины стальных листов; В— магнитная индукция.

Величина λ_x, характеризующая теплопроводность поперек листов, учитывает и теплопроводность изолирующего слоя. При этом величины теплопроводности стали и изолирующего слоя в модели и в оригинале должны находиться в одинаковом соотношении:

$$\left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda_{из}}\right)^M = \left(\frac{\lambda_{cm}}{\lambda_{из}}\right)^{Op} = \text{idem}$$

Распределение температур в обмотках может быть описано уравнением аналогичным, но с правой частью $j^2\rho$.

Критерии подобия распределения температур в модели и в оригинале имеют следующий вид:

$$\frac{\lambda_x \theta}{\psi B^2 x^2} = \text{idem} \quad \frac{\lambda_y \theta}{\psi B^2 y^2} = \text{idem}; \quad \frac{\lambda_z \theta}{\psi B^2 z^2} = \text{idem}.$$

Должны быть соблюдены также условия: $\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \cdot \frac{y^2}{X^2} = \text{idem}$ и $\frac{\lambda_x{}^2 z}{\lambda_z \, x^2} = \text{idem}$. Кроме этого, необходимо обеспечить подобие условий теплоотдачи на поверхности и установить связь масштаба температуры и мощности, теряемой на нагревание стали и обмоток машины.

Другим примером определения критериев подобия сложного явления может быть моделирование заземлителей. Условие геометрического подобия и выведенные выше общие критерии подобия электромагнитных процессов будут общими. Дополнительными критериями, характеризующими установившийся тепловой режим и скорость изменения теплового поля будут:

$$\Pi_1=\frac{\rho\lambda\theta}{U^2}=\text{idem};\qquad \Pi_2=\frac{\rho c\theta l^2}{U^2 t}=\Pi_1\frac{T_т}{t},$$

где $T_т$ —тепловая постоянная времени.

Механические процессы, входящие в комплексные явления, происходящие в электрических системах, также могут быть исследованы методами подобия и моделирования. Упругие свойства материала определяются двумя параметрами: модулем упругости E [*кг/см²*] и безразмерным коэфициентом Пуассона—σ.

Для геометрически подобных конструкций, например опор линии передач, все размеры можно выразить через некоторый характерный размер—l_0.

Если в исследуемых процессах существенен вес опоры, то в критерии должен войти удельный вес материала. Кроме веса частей опоры надо моделировать действие нагрузок, передаваемых на ее элементы от тяжения проводов и давления ветра.

Подобие определяется условиями геометрического подобия и тремя критериями:

$$\Pi_1=\frac{E}{\rho g l_0};\qquad \Pi_2=\frac{F}{E l_0^2};\qquad \Pi_3=\sigma$$

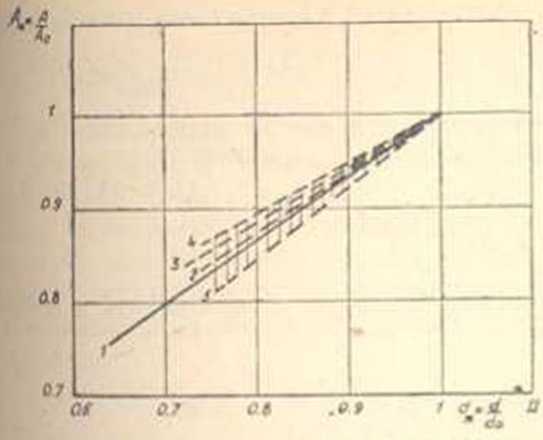
Если модель и оригинал выполнены из одного и того же материала, то механическое подобие требует равенства размеров (тождественности). В этом случае моделировать опору можно только используя другие материалы или имитируя увеличение силы тяжести.

Для этого можно вращать модель с постоянной угловой скоростью на так называемой центробежной машине, получая необходимые значения ускорения. Если величины внешних нагрузок значительно больше собственного веса конструкции, то можно отбросить первый критерий подобия. В этом случае критериальное соотношение будет иметь вид:

$$\frac{e}{E}=f\left(\frac{F}{E l_0^2};\ \sigma\right)$$

Пример применения методов подобия к определению изменения стоимости линии электропередачи в зависимости от диаметра провода показан на фиг. 3.

Нагрузка, действующая на опору и зависящая от гололева, ветра и веса провода, была определена здесь как функция диаметра провода. Предполагая далее, что тип опоры и напряжение в ее элементах не изменяются, можно, исходя из условий подобия, найти изменение размеров опоры, а отсюда—изменение ее веса и стоимости.



Фиг. 3. Относительная стоимость 1 *км* линии электропередачи, выполненной на стальных опорах, в зависимости от диаметра провода:

$$A_* = f(d_*)$$

Средние данные, полученные из проектных расчетов. 1—линии 110 кв; 2—линии 154 кв, 3—линии 220 кв, 4—5 диапазон результатов, получаемых методом подобия при различных допущениях.

В зависимости от сделанных допущений получаются различные результаты, средние значения которых довольно хорошо совпадают со средними данными проектных расчетов.

Методы подобия могут быть применены и при исследовании такого сложного и мало изученного явления, как „пляска проводов" или появление бегущих волн на проводах. Здесь также может сказаться рациональным применение центробежной машины. Наблюдение за происходящими явлениями производится при помощи стробоскопической установки.

6. Задачи и возможности физического моделирования электрических систем

Экспериментальная система-модель позволяет проверять новые схемы, аппараты, новые теории и расчетные методы с их предпосылками и допущениями.

Такие исследования не могут быть проведены на отдельном агрегате, так как сложная мощная система обычно имеет новые качества, обусловленные ее новым количественным составом. Эти исследования не всегда могут быть проведены и в реальной мощной системе, так как воспроизведение в ней аварийных режимов недопустимо.

Подобные системы-модели мощной системы, содержащие малые машины, обеспечиваются одинаковостью определяющих критериев и подобием граничных условий у всех элементов системы.

а) Критерии подобия электрических машин переменного тока

Эти критерии находятся аналогично тому, как это было сделано выше для магнитно-связанных взаимноперемещающихся цепей. Их можно формулировать в следующих трех положениях:

1. Для каждой из магнитносвязанных цепей машины (статора, возбуждения, демпферной) отношение полной индуктивности к ак-

тивному сопротивлению должно быть одинаковым в модели и в оригинале, если процессы рассматриваются в одном и том же масштабе времени: $\frac{L}{R}=\text{idem}$. Если масштаб времени для модели изменяется, то единица измерения времени (масштаб времени) должна быть прямо пропорциональна величине постоянной времени. В этом случае

$$T_*=\frac{L}{Rt}=\text{idem}$$

2. Аналогичному соотношению должны удовлетворять и взаимоиндуктивности:

$$M_{*ab}=\frac{M_{ab}}{R_a t}=\text{idem};\quad M_{*ba}=\frac{M_{ab}}{R_b t}=\text{idem},$$

где R_a и R_b —суммарные сопротивления магнитносвязанных цепей.

3. Определяющим критерием является также требование

$$\frac{J_0\delta}{M_M t}=\text{idem}$$

Если значение δ в модели и в оригинале одинаково, то это условие сводится к следующему:

$$M_{*0}=\frac{M_0}{t}=\text{idem}$$

Из того же уравнения вытекает, что различные механические потери в машине-модели должны составлять такую же долю от ее полной мощности, какую долю составляют те же потери в машине-оригинале.

Индуктивность и взаимоиндуктивность изменяются при изменении положения ротора:

$$M,L=f(\delta)$$

Если зависимость $M=M_{\text{макс}}\,f\left(\frac{\delta}{\delta_{\text{макс}}}\right)$ и $L=L_{\text{макс}}\,f\left(\frac{\delta}{\delta_{\text{макс}}}\right)$ будет в модели такая же, как и в оригинале, то подобие всех пространственных гармонических обеспечено.

Аналогично для получения подобия в отношении эффекта насыщения необходимо обеспечить в модели такую же характеристику

$$\mu=\mu_{\text{макс}}\,f\left(\frac{i}{i_{\text{макс}}}\right);\quad L=L_{\text{макс}}\,f\left(\frac{i}{i_{\text{макс}}}\right),$$

как и в оригинале.

Переходя к параметрам, принятым в теории двух реакций, и выражая все индуктивности и взаимоиндуктивности через L_d, L_q и L_0, мы приходим к весьма простому выражению закона подобия электрических машин.

Электромеханические процессы в машинах подобны, если эти машины имеют одинаковые величины T_*, M_{*ad}, M_{*0}, одинаковые относительные потери мощности и подобные начальные режимы. Учитывая только первую гармоническую наводимой ротором э. д. с., мы видим, что подобие влияния насыщения на сопротивление X_{ad} вполне обеспечивается одинаковой относительной характеристикой холостого хода.*

Преобразуя основные критерии подобия подстановкой вместо L и M значений L_d, L_q, M_d, M_q и имея в виду, что любая комбинация из критериев подобия (отношение, произведение и т. д.) так же является критерием подобия, приходим к выводу, что отношения

$$\frac{X_d'}{X_d};\quad \frac{X_d''}{X_d};\quad \frac{X_q}{X_d};\quad \frac{X_{ad}}{X_d} \text{ и т. д.}$$

должны быть одинаковы в модели и в оригинале.

Из условия гомохронности ($\omega t = \mathrm{idem}$) следует, что изменять масштаб времени при исследовании процессов, происходящих в машинах переменного тока, можно только одновременно с изменением частоты.

Получить в машинах-моделях малой мощности те же отношения $\frac{L}{Rt} = \frac{L\omega}{R}$, как и в мощных машинах, весьма затруднительно.

Возможно осуществлять *приближенное подобие процессов*, изменяя масштабы времени с нарушением критерия гомохронности.

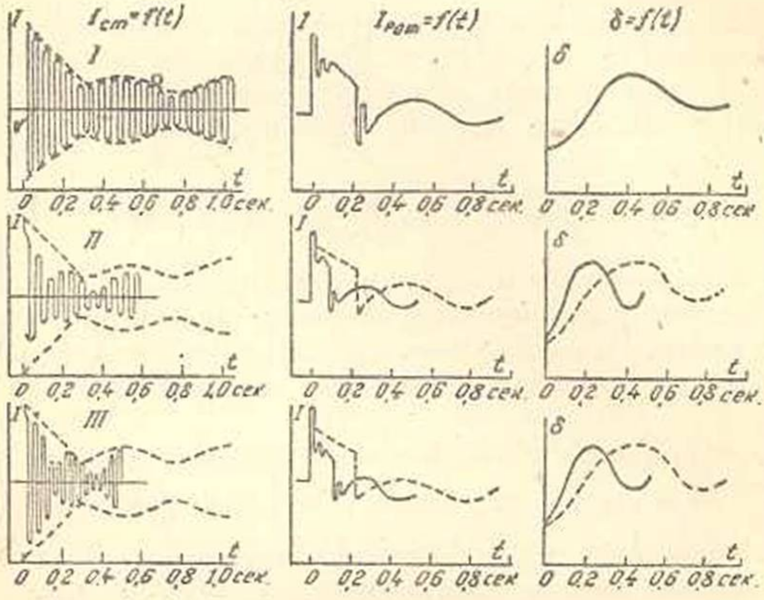
Отказываясь от подобия мгновенных значений и ограничиваясь только подобием огибающих (фиг. 4) и исключая из рассмотрения синусоидальную функцию, можем менять постоянные времени $T_* = \frac{L}{Rt}$ не только изменением физических параметров L и R, но и изменением масштаба времени.

Отыскивая критерии подобия, при $\omega t \neq \mathrm{idem}$ получаем $\frac{M_0}{t^2} = \omega_0 \mathrm{idem}$ или, поскольку ω_0 одинаково в модели и оригинале, то $\frac{M_0}{t^2} = \mathrm{idem}$. Критерии T_* и M_* можно объединить в один критерий. Из выражения для T_* имеем $t = \frac{L}{R\,\mathrm{idem}}$ и, следовательно, $\frac{M_0}{T_0^2} = \mathrm{idem}$. Это и есть критерий приближенного электромеханического подобия.

Возможности изменения постоянных времени путем изменения масштаба времени оказываются ограниченными необходимостью подобия начальных условий. Подобие начальных режимов требует ра-

* Сравнительно небольшое влияние насыщения на X_{aq} может не моделироваться. Влияние насыщения на X_l и на сопротивление взаимоиндукции фаз должно быть проверено дополнительными опытами, так как обычно завод таких данных не дает.

венства соответственных значений углов расхождения по фазе э. д. с. различных машин системы $\delta^{M} = \delta^{op}$ и углов сдвига токов по отношению к э. д. с. А это можно получить только при равенстве значений параметра $\frac{\Sigma R}{\Sigma X}$ соответственных цепей статора у модели и у оригинала. Следовательно, изменяя масштаб времени, можно допустить изме-



Фиг. 4. Характер процессов в модели и оригинале. I—оригинал; $M=4$ сек, $T_0=6$ сек; $f=50$ гц. II—приближенное моделирование; $M=1$ сек; $T_0=3$ сек; $f=50$ гц; III—моделирование с изменением частоты; $M=1$ сек; $T_0=3$ сек; $f=100$ гц (пунктиром показаны значения переменных при соответствующем изменении масштаба времени).

нение лишь тех постоянных времени, которые зависят только от параметров цепей ротора.

Изменяя в модели постоянную времени цепей ротора за счет изменения масштаба, но сохраняя абсолютные значения постоянных времени цепей статора, мы имеем возможность осуществить подобие начальных условий, но вынуждены допустить искажение скорости изменения тех составляющих, затухание которых зависит от постоянных времени статора. Так будут несколько искажены апериодические составляющие токов статорных цепей и периодические составляющие токов роторных цепей. Это приведет к некоторому искажению э. д. с., наводимых пульсирующими магнитными потоками. Кроме того, будет несколько искажено значение э. д. с., обусловленной дополнительной скоростью, получаемой ротором при качаниях.

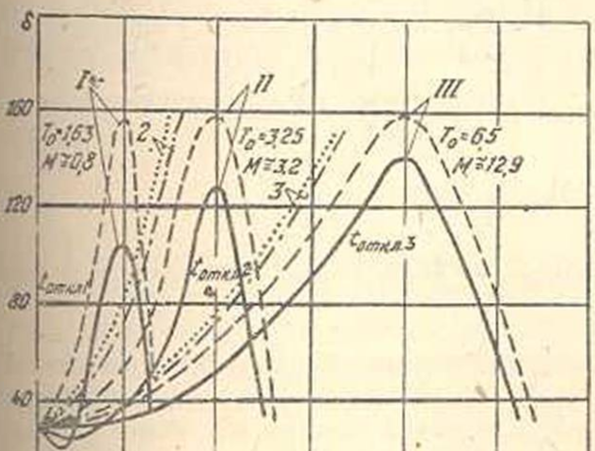
В самом деле, э. д. с. $e \equiv \omega = \omega_0 + \frac{d\delta}{dt}$. Изменяя масштабы времени и абсолютную скорость изменения угла δ, тем самым мы изменяем долю составляющей э. д. с., обусловленной дополнительной скоростью $\frac{d\delta}{dt}$. Для выяснения допускаемой неточности удобно воспользоваться известными уравнениями синхронной машины, предложенными Парком и Горевым

$$\frac{M_0}{M_M}\, p^2\delta - 1 = \frac{1}{M_M}\left[i_q\,\psi_d - i_d\,\psi_q\right],$$

$$e_d = p\psi_d - \frac{r}{X_d(p)}\left[G(p)E_0 - \psi_d\right] - \psi_q\, p(t+\delta),$$

$$e_q = p\psi_q + \frac{r}{X_q(p)}\,\psi_q + \psi_d\, p(t+\delta).$$

Из этих уравнений легко установить, что приближенное моделирование приводит к неточному воспроизведению влияния дополнительной скорости вращения ротора ($p\delta$) и влияния периодической составляющей тока ротора и апериодической составляющей тока статора ($p\psi_d$ и $p\psi_q$) на характер изменения угла во времени $\delta = f(t)$ и характер изменения токов статора и ротора.



Фиг. 5. Проверка точности приближенного моделирования. Кривые I, II, III — при $\frac{X}{R} = 16$ и $\frac{M}{T_0^2} = 0{,}3$. Кривые 2, 3 — при $\frac{X}{R} = 160$ и $\frac{M}{T_0^2} = 0{,}3$. Кривые I, II, III пунктиром и кривые 2, 3 точками приближенный расчет (без учета $p\delta$ и $p\psi$); кривые I, II, III сплошными линиями и кривые 2, 3 точка-тире — расчет (по формулам (4, 10) и (4, 11)).

Большое количество опытов и расчетов показывает (фиг. 5), что это влияние ничтожно мало, если значение $\frac{X}{R}$ для цепи статора достаточно велико (порядка 100).

Неточность эта заметна только при малых значениях $\frac{X}{R}$ и тем более, чем меньше абсолютные значения постоянной времени ротора T и постоянной инерции M_0.

Следовательно, приближенное моделирование почти всегда осуществимо. Его нельзя осуществлять только в редко встречающихся в практике случаях —

при введении в цепь статора большого активного сопротивления или при исследовании процессов в сравнительно маломощных генераторах, связанных протяженной кабельной сетью. Отметим попутно, что при этих условиях и обычно принимаемая при расчетах устойчивости методика, основанная на так называемых уравнениях Лонглея, соответствующих уравнениям Горева-Парка без членов $p\delta$, $p\psi$, дает ошибочные результаты. Очень удобно осуществлять требования критериев электромагнитной и электрической скорости, повышая скорость вращения (электрическую) машин-моделей.

Возможности моделирования машин с увеличением скорости вращения ограничиваются в связи с возрастанием постоянной инерции и затруднениями при моделировании побочных явлений (потери мощности на гистерезис, от вихревых токов, на трение и т. д.). Затрудняется также комплексное моделирование, охватывающее, например, наряду с электрическими процессами и процессы в первичном двигателе. Исключается применение нормальных измерительных приборов, аппаратов, реле.

б) Критерии подобия электрических машин постоянного тока

Критерии подобия переходных процессов в двигателях постоянного тока с независимым возбуждением* имеют следующие значения:

$$\Pi_1 = \frac{\omega\varphi(ib)}{V} = \text{idem}; \quad \Pi_2 = \frac{J_0\omega^2_н}{P_н t} = \frac{B}{t} = B_* = \text{idem};$$

$$\Pi_3 = \frac{L}{Rt} = T_* = \text{idem}.$$

Величина $B = \frac{J_0\omega^2_н}{P_н}$ характеризует инерционные свойства ротора электродвигателя и привода.

Первый критерий, приближенно характеризующий размагничивающее действие якоря, может быть записан в следующем виде:

$$\Pi_1 = \omega_н \frac{E}{V_н} \varphi\left(\frac{i_в}{i_{нв}}\right) = E_* = \text{idem},$$

где E—э. д. с., соответствующая нормальному току возбуждения.

Функция $\varphi\left(\frac{i_в}{i_{нв}}\right)$—представляет собой относительную характеристику холостого хода, отражая свойства магнитной цепи двигателя.

Выбор масштабов для величин i и ω производится на основании дополнительных критериев подобия:

$$\frac{iR]}{V} = \text{idem}; \quad \frac{\omega}{\omega_н} = \text{idem}.$$

* Этим же методом могут быть решены задачи для любых систем возбуждения.

Начальные условия отражаются требованием:

$$M_{*м} = \frac{M_м}{M_{нм}} f\left(\frac{\omega}{\omega_н}\right) = idem$$

Вид относительной характеристики механического момента $M_{*м}$, т. е. функции $f\left(\frac{\omega}{\omega_н}\right)$ в модели и в оригинале, должен быть одинаковым; кроме того, должно иметь место соотношение $\frac{U}{U_н} = idem$, где U — подведенное к двигателю напряжение.

Если учитывать переходные процессы в обмотке возбуждения, то необходимо дополнить критерии подобия условием:

$$\frac{L_в}{R_в\, t} = idem,$$

где $L_в$ и $R_в$ — индуктивность и сопротивление обмотки возбуждения. В этом случае было бы более рационально вернуться к общим*, более строгим критериям подобия магнитносвязанных, взаимно перемещающихся контуров.

Следует иметь в виду, что переходные электромагнитные процессы в двигателе имеют две стадии. В первой стадии на протекание процесса решающее влияние оказывают индуктивности рассеяния и появление вихревых токов. Во второй стадии более существенны взаимоиндуктивность между обмотками, реакция якоря и эффект насыщения.

в) Моделирование трансформаторов

Если предполагается рассмотрение электромагнитных процессов, протекающих во времени и в пространстве, то при моделировании необходимо обеспечить подобие в распределении магнитных и электрических полей в элементах конструкции трансформатора и в пространстве около трансформатора. В условия подобия в этом случае должны войти физические параметры, характеризующие материал, из которого изготовлены детали трансформатора, и геометрические размеры в трех измерениях. В начальных и граничных условиях должно быть отражено состояние присоединенных к обмоткам трансформатора внешних контуров.

Такое моделирование будет наиболее полным, обеспечивающим возможности исследования конструкции трансформаторов и влияния этой конструкции на электрические параметры и на поведение трансформаторов в любых условиях. Здесь могут быть исследованы также вопросы поведения трансформатора при волновых процессах.

Если существенны только временные переходные процессы, то можно оперировать с электрическими параметрами трансформаторов:

---

* Можно учесть параметры всех обмоток и положение щеток на коллекторе.

связь с геометрическими размерами отражается расчетными формулами, установленными практикой трансформаторостроения. Эти параметры можно рассматривать как сосредоточенные. Поведение трансформатора при волновых процессах определяется распределенными параметрами, требующими участия в критериях подобия хотя бы одной геометрической координаты обмотки. При этом условия подобия можно представить в виде:

$$T_{*1},\ T_{*2},\ T_{*12},\ T_{*21} = \text{idem}$$

или, если сформулировать иначе, в модели и в оригинале должны быть одинаковыми:

1. намагничивающий ток в %;

2. относительные потери активной мощности в меди при номинальной нагрузке;

3. отношение одноименных сопротивлений (активных или реактивных)—натуральных для одной из обмоток и приведенных для другой: $\frac{L_{1s}к^2}{L_{2s}} = \text{idem}$ или $\frac{R_1 к^2}{R_2} = \text{idem}$

4. относительные постоянные времени обмоток, соответствующие реактансам рассеяния:

$$T_{*1s} = \frac{X_{1s}}{R_1 t} = \text{idem}, \quad T_{2s} = \frac{X_{2s}}{R_2 t} = \text{idem}.$$

Величины L_{1s}, L_{2s} и M в действительности зависят от нагрузки трансформатора.

Пусть

$$M = f(i_1);\ M = f(i_2);\ L_{1s} = f(i_1);\ L_{2s} = f(i_2).$$

Требования

$$M = M_{01}\,.\,f\left(\frac{i_1}{i_{01}}\right) = \text{idem},\ M = M_{02}\,.\,f\left(\frac{i_2}{i_1}\right) = \text{idem}$$

и т. д. формулируют условия подобия трансформаторов с учетом насыщения.

Получить трансформатор-модель уменьшенных размеров, уменьшенной мощности, но удовлетворяющий критериям подобия, оказывается возможным только при увеличении частоты. При неизменной частоте уменьшить активное сопротивление трансформатора можно, увеличивая его геометрические размеры. Но это приводит к увеличению намагничивающего тока. Для выполнения условия подобия трансформаторов малой мощности при неизменной частоте приходится итти на компромиссные решения, искусственно увеличивая сопротивления рассеяния за счет внешних сопротивлений и допуская некоторое увеличение намагничивающих токов. Возможно также применение автотрансформаторов.

7. Практические вопросы моделирования

а) изменение базисных условий

Если определяющие критерии подобия у модели и у оригинала соответственно одинаковы, то всегда можно подобрать базисные условия так, чтобы получить равенство долевых параметров и тождественность уравнений при выражении величин в относительных единицах.

Пусть, например, один синхронный генератор имеет синхронное реактивное сопротивление в 200% и активное сопротивление в 3%, а другой генератор имеет реактивное сопротивление в 100% и активное сопротивление в 1,5%. Критерий $\frac{X}{R} = \text{idem}$ при этом удовлетворен. Если у первого генератора выбрать $P_б = \frac{1}{2} P_н$, то параметры первого и второго генератора в относительных единицах будут одинаковы. В этом случае режим полной нагрузки для второго генератора будет соответствовать режиму половинной нагрузки для первого генератора.

б) Дополнительные устройства

Поскольку геометрическое подобие не существенно при исследовании режимов систем, то безразлично, получены ли нужные соотношения параметров „внутри“ каждой машины-модели или с помощью дополнительных устройств. Такими устройствами могут быть:

1. трансформатор, позволяющий изменять подведенное к статору напряжение, и „приведенные“ значения активных и реактивных сопротивлений;

2. дроссельные катушки, позволяющие изменять реактивные сопротивления рассеяния обмоток статора и ротора;

3. реостаты, позволяющие изменять активные сопротивления обмоток ротора и статора и их постоянные времени;

4. сериесный коллекторный генератор или специальная электронная установка, создающая отрицательное активное сопротивление.

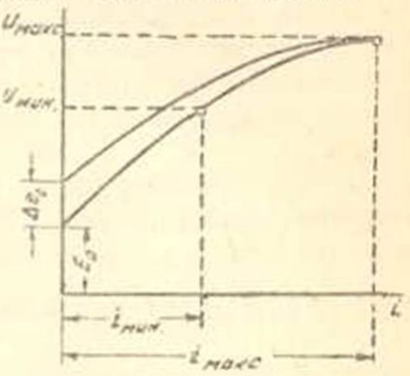
Дополнительные устройства могут быть не только электрическими. Возможно, например, применение и специальных механических установок, искусственно уменьшающих трение, улучшающих охлаждение и т. д. Разумеется, что применение любого дополнительного устройства возможно только при условиях, когда процессы, происходящие в нем, не искажают основных процессов, происходящих в модели.

Получение отрицательного сопротивления при помощи сериесного генератора возможно при условиях:

1. характеристика холостого хода прямолинейна в пределах возможного изменения тока;

2. величина дополнительной э. д. с. Δe_0, обусловленной наличием гистерезисной петли в характеристике (фиг. 6) не должна быть значительной в рабочих пределах изменения тока от $i_{мин}$ до $i_{макс}$;

3. изменения напряжения на выводах генератора должны точно следовать за соответствующими изменениями тока в цепи. Запаздывание напряжения, обусловленное вихревыми токами в магнитной цепи генератора, должно быть ничтожно малым по сравнению с временем протекания процесса. Автором была предложена конструкция сериесного генератора с дополнительной обмоткой, питаемой током высокой частоты и перемагничивающей сталь статора. Этим полностью устранялось влияние добавочной э. д.с.



Фиг. 6. Характеристика сериесного генератора

Дальнейшее развитие эта конструкция получила в сериесном компенсаторе-возбудителе, разработанном М. С. Михайловым-Микулинским для модели, сооруженной в Московском ордена Ленина Энергетическом Институте им. В. М. Молотова (см. ниже, § 9).

Специальная серия коллекторных генераторов-компенсаторов, создающих отрицательное сопротивление в цепи постоянного и переменного тока, разрабатывается чл.-корр. Академии Наук СССР М. П. Костенко.*

Отрицательное сопротивление в ряде случаев может создаваться и при помощи электронных установок.

На фиг. 7 показана схема установки, применяющаяся в опытах по искусственной устойчивости.

Фиг. 7. Устройство для увеличения постоянной времени генератора

* В основу разработки этих машин положены идеи, что и в оригинальном коллекторном генераторе того же автора (см. библиографию).

в) Цепочечные модели линий передач

Осуществить модель линии электропередачи малых размеров с распределенными параметрами практически затруднительно, так как для этого необходимо значительное увеличение погонного реактивного сопротивления при одновременном уменьшении погонного активного сопротивления.

Практически возможно построить модель длинной линии с использованием цепочечной схемы замещения.

Замена линии передачи цепочечной моделью ведет к некоторым искажениям, которые тем меньше, чем больше количество участвующих звеньев.

При моделировании процессов, связанных с наличием высших гармонических в токах и напряжениях, мы, выбирая параметры цепочки, должны удовлетворить критериям подобия для всех интересующих нас в данном исследовании частот или, что то же, получить частотную характеристику цепочечной схемы, возможно ближе совпадающую с частотной характеристикой реальной линии (где n—номер звена, отсчитанный от конца линии цепочки). Погрешность обусловлена тем, что коэфициент распространения в линии имеет значение $\gamma^{op} = \sqrt{\dot{Z}_0 \dot{Y}_0}$, а цепочечной П-образной линии

$$\gamma^{M} = 2\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{Z_\Delta \dot{Y}_\Delta}}{2}$$

Аналогично может быть установлена погрешность в волновом сопротивлении, которое в случае действительной линии имеет значение $Z_\gamma^{op} = \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}}$, а в случае П-образной цепочки

$$\dot{Z}_\gamma^{M} = \frac{\dot{Z}_\lambda^{op}}{\sqrt{1 + 0{,}25(\dot{\gamma}^{op})^2 l_\Delta^2}}$$

Различие в свойствах действительной линии с распределенными параметрами и цепочки с сосредоточенными параметрами, особенно заметное в неустановившихся процессах, иллюстрируется фиг. 8.

При моделировании линий, связанных с трансформаторами, устанавливаем, что кроме критериев подобия, обеспечивающих подобие трансформаторов, необходимо выполнить следующие требования:

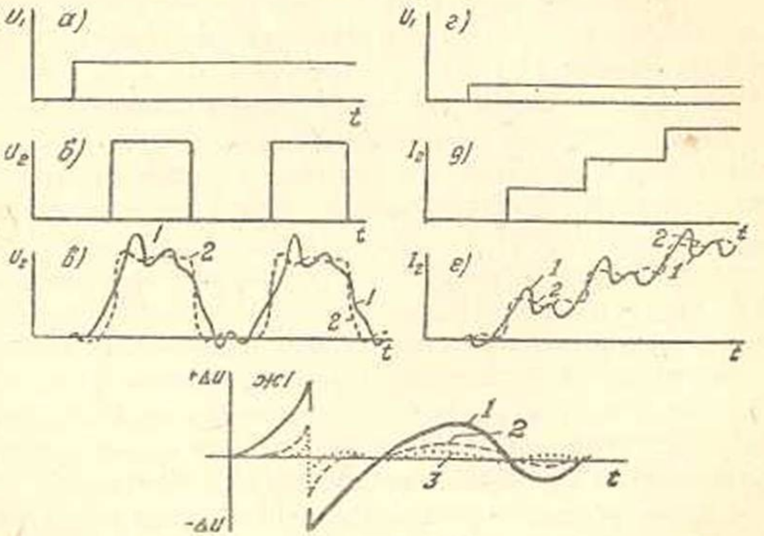
$$\frac{L_{\Delta 1}}{L_{s1}} = \mathrm{idem}; \quad \frac{L_{\Delta 1}}{L_{\Delta 2}} k^2 = \mathrm{idem}; \quad \frac{L_{\Delta 2}}{L_{s2}} = \mathrm{idem}$$

При этом автоматически выполняются и следующие требования:

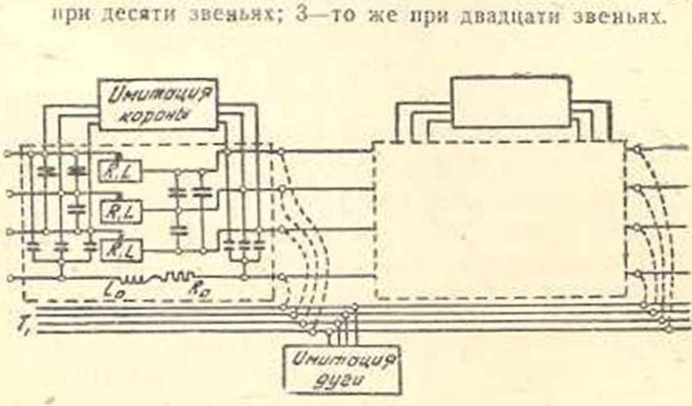
$$\frac{C_{\Delta 2}}{C_{\Delta 1} k^2} = \mathrm{idem}; \quad \frac{R_{\Delta 1}}{R_{\Delta 2}} k^2 = \mathrm{idem}$$

Этими соотношениями удобно пользоваться при подборе параметров подобных схем.

Практически цепочечная модель выполняется с дроссельными катушками: воздушными или со сталью.



Фиг. 8. Сравнение характера неустановившихся процессов в идеальной (R=G=0) натуральной линии и в ее цепочечной модели. а, г—напряжение в начале линии или цепочечной модели; б—изменение напряжения в конце разомкнутой линии, в—изменение напряжения в конце цепочечной модели при холостом ходе: 1 (сплошные линии)—при четырех звеньях цепочки; 2 (пунктирные линии)—при двенадцати звеньях цепочки; г—изменение тока в конце короткозамкнутой линии; д—изменение тока в конце цепочечной короткозамкнутой модели; е—влияние количества звеньев цепочки на величину погрешности в случае линии с потерями; 1—характер погрешности при пяти звеньях; 2—то же при десяти звеньях; 3—то же при двадцати звеньях.

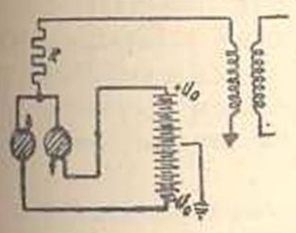


Фиг. 9. Схема цепочечной модели линий электропередачи

В модели предусматриваются установки, имитирующие дугу и корону и появление коммутационных перенапряжений (фиг. 9).

Установка для имитации дуги в месте короткого замыкания строится на основании следующих соображений: можно полагать, что подобие дугового процесса в системе будет достигнуто, если модель будет подобна исследуемой системе, а относительная характеристика дуги в месте короткого замыкания $I_* = f(V_*)$ будет такая же, как и в оригинале. Для создания установки, обеспечивающей такую характеристику, приходится проводить ряд специальных опытов.

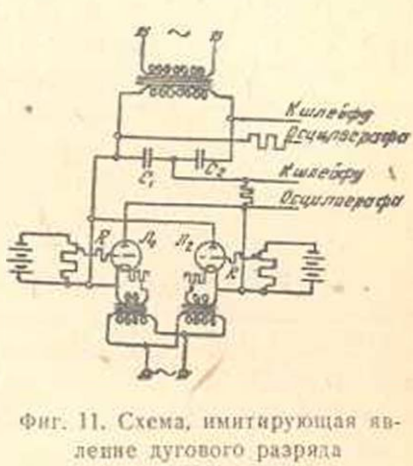
Установку, имитирующую потери мощности на корону, можно создать, исходя из эмпирических формул. Одна из принципиальных схем такого рода установок показана на фиг. 10.



Фиг. 10. Схема, имитирующая явление короны

Имитация дуговых процессов при повторных зажиганиях может быть осуществлена не только путем создания физически подобной дуги в месте короткого замыкания, но и путем разработки специальных схем, аналогичных описанным выше. Так, имитация повторных зажиганий в определенные моменты времени (вне зависимости от величины напряжения на дуге) может быть осуществлена с помощью фазопрерывателя, представляющего собой синхронный двигатель, сцепленный передачей со сменными и относительно медленно вращающимися барабанами, на которых имеются контакты. По контактам скользят щетки, устанавливаемые на траверзе с верньерной передачей.

Повторные зажигания дуги, в зависимости от приложенного к ней напряжения, могут быть имитированы ламповыми схемами (преимущественно с тиратронами). В частности, может быть использована схема, приведенная на фиг. 11.



Фиг. 11. Схема, имитирующая явление дугового разряда

На цепочечных схемах линий можно исследовать перенапряжения, получающиеся при грозовых разрядах. При наличии волн с крутым фронтом к схемам замещения должны быть предъявлены более жесткие требования, чем те, которые были сформулированы выше.

Для исследования волновых процессов, возникающих при грозовых разрядах, также возможно изменение масштаба времени с тем, чтобы получить более удобные для воспроизведения параметры и более удобные условия для наблюдения. Так, в лаборатории техники высоких напряжений ЛПИ им. М. И. Калинина разработана цепочечная модель, выполненная в увеличенном масштабе времени

$m_t \approx 1000$. При этом продолжительность процессов в модели измеряется в миллисекундах. Это позволяет применить для моделирования нелинейных элементов и искровых промежутков специальные схемы с ионными приборами

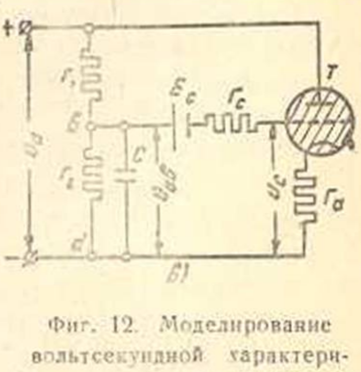
Моделирование оборудования подстанции должно производиться с помощью цепочечной схемы, которая соответствует основным критериям подобия:

$$\Pi_1 = \frac{L}{Rt} \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \frac{C}{Gt}$$

Сосредоточенные элементы схемы: емкости, индуктивности и активные сопротивления—моделируют подобными элементами, исходя из тех же критериев. Влияние трансформаторов и высоковольтной аппаратуры учитывается на модели включением сосредоточенных емкостей, величины которых соответствуют входным емкостям аппаратов.

Вольтсекундные характеристики разрядников и изоляции аппаратов имеют значительный разброс, обусловленный статистическим характером явления электрического разряда. При моделировании этих элементов можно было бы создать модель, повторяющую в соответствующем масштабе статистический разброс реальной характеристики. Однако, практически целесообразно построить модель, работающую по возможности стабильно и учитывать статистику явления соответствующей постановкой эксперимента.

Схема, изображенная на фиг. 12, дает возможность моделировать вольтсекундную характеристику, заданную двумя точками. Напряжение на плече *ав*, определяющее момент зажигания тиратрона, зависит в этой схеме не только от анодного напряжения, но также и от характера его изменения.



Фиг. 12. Моделирование вольтсекундной характеристики разрядных промежутков.

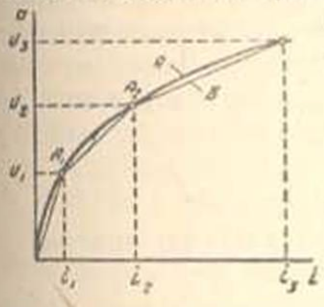
Вольтамперные характеристики вентильных разрядников моделируются с помощью специальных схем с ионными приборами, сопротивлениями и тиритовыми дисками.

Вольтамперные характеристики разрядников в модели и в оригинале должны быть одинаковыми. Здесь также целесооборазно применять специальные схемы, используя принцип кусочно-линейной апроксимации. На фиг. 13 приведена вольтамперная характеристика (кривая А) и имитирующая ее ломаная линия (В), а на фиг. 14—принципиальная схема модели, вольтамперная характеристика, представляющая подобную кусочно-линейную функцию.

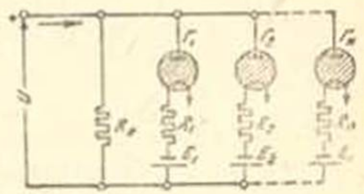
Приходящие по линии волны атмосферного перенапряжения моделируются разрядом емкости импульсного генератора. Импульсный генератор может быть отделен от модели подстанции подходом, выполненным в виде цепочечной схемы, моделирующей участок линии между подстанцией и местом удара молнии в линию.

Модель подстанции состоит из комплекса всех рассмотренных моделей отдельных элементов, взаимное соединение которых должно соответствовать исследуемой подстанции.

Подобие волновых процессов в обмотках электрических машин обеспечивается в общем случае геометрическим подобием и двумя общи-



Фиг. 13. Действительная и имитирующая характеристики вентильного разрядника.

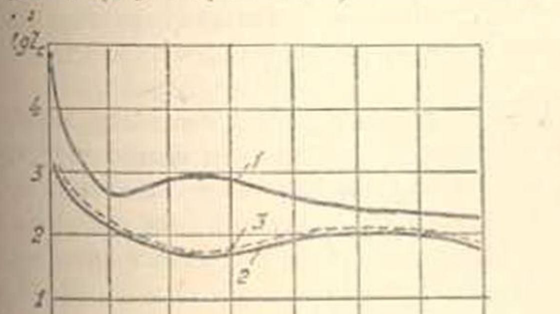


Фиг. 14. Принципиальная схема моделирования вольтамперной характеристики разрядника.

ми критериями электромагнитных процессов, но для волновых процессов наиболее характерен критерий $\Pi = \omega^2 \varepsilon \mu l^2$. Рассмотрим, в качестве примера, изменение волновых параметров асинхронных двигателей.

Предположим, что экспериментально определена зависимость входного сопротивления двигателя от частоты.

Такая зависимость $Z_{c1} = f(\omega)$, экспериментально полученная З. Г. Кагановым, для двигателя мощностью 14,5 квт, представлена на фиг. 15 (характеристика 1).



Фиг. 15. Зависимость входного сопротивления двигателя от частоты. 1, 2—характеристики, полученные экспериментально; 1—двигатель 14,5 квт; 2—двигатель 200 квт; 3—характеристика 1, перестроенная из условий подобия.

Нас интересует та же зависимость для двигателя мощностью 200 квт: $Z_{c_2} = m_z f(m_\omega \cdot \omega)$.

Предположим, что оба двигателя во всех своих деталях (воздушный зазор, форма паза, толщина изоляции) геометрически подобны и выполнены из одних и тех же материалов:

$$\mu_1 = \mu_2 \text{ и } \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Тогда получаем условие:

$$\omega_1 l^2_{01} = \omega_2 l^2_{02}$$

или

$$_2 = f_1 \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$$

Здесь S_1 и S_2—площади сечения сходственных элементов двигателей. Для конкретного случая имеем: $f_2 : f_1 = 1{,}95$.

Таким образом, изменив в 1,95 раза масштаб частоты у характеристики $Z=f(\omega)$ двигателя мощностью 14,5 квт, мы получим характеристику двигателя мощностью 200 квт, но построенную в измененном масштабе сопротивления.

Мы не будем здесь рассматривать вопрос об определении этого масштаба, равно как и уточнять нахождение коэфициента подобия m_ω. Это уточнение можно было бы сделать, учитывая, что геометрическое подобие фактически отсутствует. Под ε и μ в этом случае надо понимать некоторые результирующие параметры, характеризующие данную конструкцию.

8. Сооружение динамических (физических) моделей электрических систем

Применение теории подобия в значительной степени облегчает построение моделей и в ряде случаев позволяет применять типовые машины, подбирая определенным образом их параметры и изменяя их с помощью дополнительных устройств. Так, например, иногда можно проводить моделирование мощных систем, применяя типовые малые генераторы и используя то обстоятельство, что относительные реактивные сопротивления такого генератора примерно в три раза больше соответствующих сопротивлений мощного генератора. Благодаря этому оказывается возможным приблизиться к критерию $\frac{X}{R} = \text{idem}$, загружая генератор-модель на треть его номинальной мощности, одновременно соответственно увеличивая относительные реактивные сопротивления сети и уменьшая активное сопротивление цепи возбуждения при помощи сериесного генератора—компенсатора.

Такого рода разнообразные приемы осуществления машин-моделей, вытекающие из теории подобия, наряду с методами приближенного моделирования, весьма расширяют практические возможности лабораторного (модельного) изучения мощных электрических систем. Эти возможности еще больше расширяются при применении универсальных комплексных (моделирующих процессы в первичном двигателе, нагрузках и электрической системе) моделей. Такой комплексной моделью является описанная ниже динамическая модель гидроэнергосистемы МЭИ, сооруженная под руководством автора при кафедре гидроэнергетики МЭИ (зав. кафедрой проф. Т. Л. Золотарев).

Следует указать, что исследования электрических систем на динамических моделях более простых, чем упомянутая выше модель МЭИ, проводились в 1936—38 г. г. автором, построившим динамическую модель в руководимой чл.-корр. АН СССР И. С. Бруком Лаборатории электрических систем Энергетического Института Академии Наук СССР В. И. Ивановым и В. А. Голванским, построившим модель мощной 400 кв. системы передачи в руководимой проф. А. А. Горевым лаборатории Ленинградского Политехнического Института и, наконец, чл.-корр. АН СССР М. П. Костенко, построившим в 1943—1944 г. г. в Ташкенте модель одной из советских систем и проведшим на ней ряд практически важных исследований.

Динамическая модель МЭИ, учитывающая опыт ранее построенных моделей, отличается от них широким применением теории подобия, комплексного и универсального.

На фиг. 16 представлена схема агрегата модели, позволяющая моделировать мощный гидрогенератор с любыми характеристиками.

В таблице 1 приводятся способы изменения параметров этого агрегата.

Генератор-модель, являющийся основным элементом этой схемы, может быть переделан из малого серийного генератора или специально спроектирован.

На фиг. 17 показана конструкция такого генератора, разработанная сотрудниками кафедры электрических машин МЭИ: доц. Ф. А. Горяиновым, ассистентом А. В. Ивановым-Смоленским и инж. Л. З. Рубинштейном.

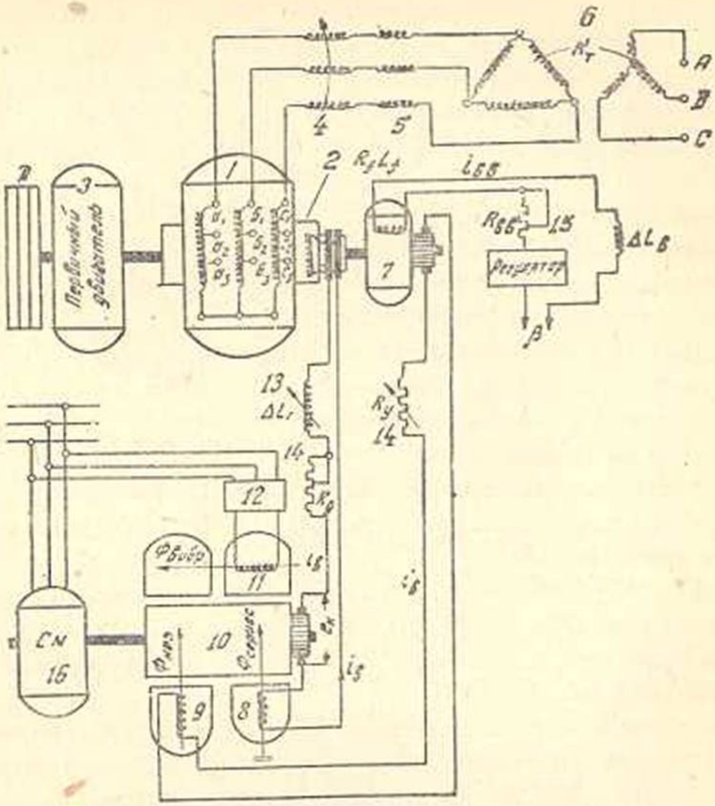
Генератор имеет уменьшенное (0,5%) активное сопротивление обмоток статора и относительно небольшую постоянную инерцию, увеличиваемую при помощи дополнительных дисков.

Активное сопротивление уменьшается при помощи специального сериесного компенсатора, создающего отрицательное сопротивление и одновременно преобразовывающего ток одного напряжения в ток другого напряжения. Последнее облегчает моделирование различных схем возбуждения.

При моделировании первичного двигателя может моделироваться только характеристика зависимости вращающего момента на валу генератора от скорости вращения ротора или весь первичный двигатель с протекающими в нем физическими процессами.

В первом случае мы отражаем первичный двигатель некоторыми граничными условиями. В установившихся режимах это сводится к моделированию действия регулятора первичного двигателя. В переходных процессах принимается условие неизменности положения впускных вентилей, т. е. постоянства давления поступающего пара или воды.

Для этой цели может быть использован сериесный двигатель постоянного тока с включенным последовательно с ним большим сопротивлением, может быть применен двухмашинный агрегат, состоящий из машины с шунтовым возбуждением и сериесного генератора, работающего как зависящее от скорости вращения отрицательное сопротивление. Такая схема позволяет по-



Фиг. 16. Схема агрегата, моделирующего по методу автора гидростанцию с любыми характеристиками. 1—генератор-модель с активным сопротивлением обмотки статора около 0,3% и с отпайками от фаз этой обмотки (a_1, a_2, a_3, $в_1$, $в_2$, $в_3$ и т. д.); 2—ротор генератора с увеличенной постоянной времени обмотки возбудителя; 3—первичный двигатель: гидротурбина-модель или электродвигатель, имеющий характеристики $M=f(n)$, идентичные мощной турбине; 4—катушка взаимоиндукции; 5—дроссель, имитирующий реактанс рассеяния генератора; 6—трансформатор или автотрансформатор, имеющий переменный коэфициент трансформации $k_т$; 7—возбудитель ΔL_e —дополнительная индуктивность возбудителя; β—провода для пересоединения схемы; 8—обмотки возбуждения сериесного компенсатора; 9—обмотка независимой части этой же машины; 10—ротор этой же машины, в которой наводится возбуждающая э. д. с. и компенсирующая э. д. с. k_i; 11—„вибраторная" обмотка для перемагничивания стали; 12—утроитель частоты для питания перемагничивающей обмотки; 13—ΔL_f дополнительная индуктивность; 14—R_y, $R_д$—дополнительные сопротивления; 15—$R_{вв}$—регулировка тока возбуждения возбудителя; 16—С. М. синхронный двигатель, вращающий сериесный компенсатор.

лучить не только линейные зависимости $M=f(n)$, но и параболические.

Возможны и другие варианты получения заданной характеристики. Так, например, может быть применена схема с электронным регулятором вращающего момента.

Физическое моделирование гидравлических турбин осуществляется при помощи турбин-моделей; например в модели МЭИ применена

Таблица 1

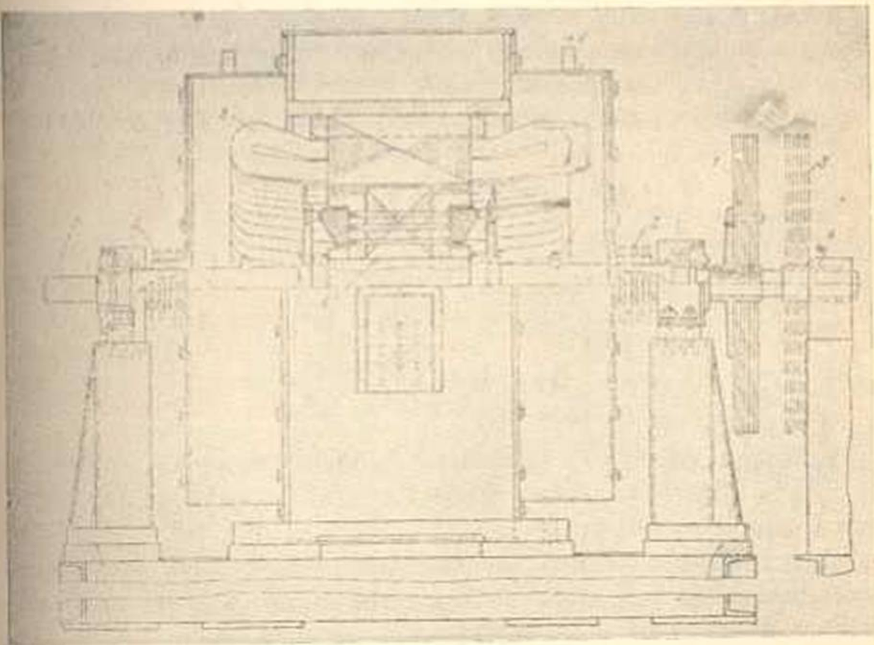
Способы изменения параметров агрегата генератор-трансформатор

Конструктивное мероприятие по изменению параметров	Обозначения на схеме (фиг. 16)	Как и какие физические факторы изменяются, регулируются	Какие параметры, кроме регулируемых, изменяются	Какими мероприятиями производится подстройка	Расчетная формула
1. Переключение выводов от фаз статорной обмотки.	1	Переключение числа витков—изменение взаимоиндукции X_{ad}	X'_d	Включением ΔX_l (5), ΔL_f (13)	$X_{afd} = K \frac{w_{cm}}{w_f}$; $X_d = X_{afd} + X_{l_0} + \Delta X_l$; $X_q = X_{afq} + X_{l_0} + \Delta X_l$;
1a. Сменный ротор, дающий возможность изменять воздушный зазор.		Тот же эффект дает: смена полюсов на роторе и изменение воздушного зазора	X''_d X_d, X_q		$X'_d = X_{afd} \frac{\delta_{fd}}{1+\delta_{fd}} + X_{l_0} + \Delta X_l$; $\delta_{fd} = \frac{\Delta L_f + X_{flod}}{X_{afd}}$
2. Введение дополнительного индуктивного сопротивления в цепь ротора.	ΔL_f	Изменяется рассеяние обмотки возбуждения X_{fld}, X_d	X''_d	Изменением числа стержней демпферной обмотки (изменяется X_{1ld}) и изменением ΔL_f	$X'_d = \frac{X_{afd}}{1 + \frac{X_{afd}}{X_{flod} + \Delta L_f}} + X_{l_0} + \Delta X_l$
2a. Изменение числа стержней демпферной обмотки.		Изменяется X_{1ld}, что приводит к изменению X''_d			$X''_d = X_{l_0} + \Delta X_l + \frac{1}{\frac{1}{X_{ad}} + \frac{1}{X_{fld} + \Delta L_f} + \frac{1}{X_{1ld}}}$
3 Введение дополнительного сопротивления	$R\partial$	Постоянная времени: $T_0 = \frac{L_x + \Delta L_x}{R_f - K + R\partial}$	i'_b	а) Изменением $R\partial$ б) Введением ΔL_f и переключением числа витков w_{cm}	$i'_b = \frac{k_1}{(k_2+R_y)(k_3+R\partial)}$, где $k_1, k_2, k_3 = const.$

Конструктивное мероприятие по изменению параметров	Обозначения на схеме (фиг. 16).	Как и какие физические факторы изменяются, регулируются
4. Включение дополнительного сопротивления в обмотки статора	5	Сопротивление рассеяния статорной обмотки X_l, X_d, X_q
5. Включение дополнительной взаимной индуктивности между фазами статора	4	Взаимная связь потоков рассеяния статорной обмотки
6. Изменение схемы включения возбудителя	β	Переключением концов β имитируется любая система возбуждения
7. Введение дополнительной индуктивности в возбуждение возбудителя	ΔL_e	Изменение постоянной времени возбуждения возбудителя T_e
8. Введение установочного дополнительного сопротивления в цепь возбуждения	R_y	Установление заданного тока возбуждения i'_b
9. Установка маховых (съемных) дисков на валу генератора	D	Изменение GD^2 (или M)
10. Изменение коэфицента трансформации трансформатора	k_m	Изменяются все приведенные сопротивления без изменения соотношения между ними

Какие параметры, кроме регулируемых, изменяются	Какими мероприятиями производится подстройка	Расчетная формула
X'_d X''_d		$X_l = X_{l_0} + \Delta X_l$ Формулы подстройки X'_d X''_d см. выше. Формулы подстройки см. выше.
		Существенно только при таких исследованиях, при которых появляются высшие гармонические
		$T_e = \frac{L_{fe} + \Delta L_e}{R_{fe}}$
		$i'_b = f[i_{bb}]\ \frac{1}{K' + R_y}$
		$M - 2.74\,\frac{GD^2 n^2}{P_n \cdot 1000}$
		$Z_2 = f(K_m) = \frac{Z_n U^2_n P_d}{P_n U_0^2 (k_m)^2}$, где $U_0 = U_{б}$, $U_{б}$, $P_{б}$ — базисные значения

горизонтальная гидротурбина* системы Френсиса. Турбина дает 1000 оборотов в минуту и при максимальном напоре в 20 *м* развивает мощность на вале 17 квт. Максимальный расход воды 105 *кг*/сек. Гидротурбина соединяется с генератором-моделью при помощи жестких муфт. Одна из этих муфт является крутильным динамометром. Регулирование турбины осуществляется от автоматического регулятора скорости.



Фиг. 17. Специальный гидрогенератор-модель. 1—маховые диски на валу генератора (изменение M_0); 2—кольца (выводы концов роторной обмотки); 3—запасные маховые диски (невращающиеся); 4 -конец вала, идущий к подвозбудителю; 5—обмотки статора; 6—ротор с обмоткой возбуждения и сменной демпферной обмоткой; 7—конец вала, идущего к турбине.

При приближенном моделировании, когда масштаб времени изменяется независимо от частоты, может быть важно соответственно с изменением масштаба времени изменять и скорость действия регулятора. Это изменение осуществляется путем изменения скорости действия элементов регулятора, передающих движение к реагирующему на скорость органу. Таким образом, изменение скорости электромеханических процессов получает свое отражение в скорости действия регулятора.

На модели гидроагрегата исследуется целый ряд практически важных, но еще мало изученных вопросов. К таким вопросам можно отнести, например, явления неустановившегося режима работы агре-

* Проект турбины выполнен под руководством проф. В. С. Квятковского коллективом кафедры гидравлических машин МЭИ.

гата, влияние характеристик элементов оборудования (турбины, регуляторы, трубопровода) на устойчивость работы агрегата, выбор величины маховых масс и критериев регулирования, влияние гидравлического удара на регулирование турбин, взаимное влияние регулирования турбин при параллельной работе и влияние сети на устойчивость регулирования при различных характеристиках сети и различной настройке регуляторов, а также при различной величине маховых масс агрегатов и т. д.

На динамической модели можно моделировать установившиеся режимы и неустановившиеся процессы для турбин, подобных модельной (той же быстроходности и того же типа), но любой мощности и размеров, согласно законам подобия для гидротурбины:

$$P^{op} = P^{M}\left(\frac{D^{op}}{D^{M}}\right)^{2}\sqrt{\left(\frac{H^{op}}{H^{M}}\right)^{3}},$$

$$n^{op} = n^{M}\frac{D^{M}}{D^{op}}\sqrt{\frac{H^{op}}{H^{M}}},$$

$$M^{op} = M^{M}\left(\frac{D^{op}}{D^{M}}\right)^{3}\frac{H^{op}}{H^{M}}.$$

Для моделирования турбины с рабочим колесом другого типа или другой быстроходности требуется замена модельного колеса и направляющего аппарата.

Действие регулятора во времени может быть моделировано применительно к условиям работы оригинала. Кроме того, можно изменять остаточную неравномерность регулирования; временная неравномерность будет изменяться в зависимости от GD^2 так, как число оборотов турбины модели.

Изменяя длину трубопровода при постоянных условиях работы турбины-модели, можно моделировать характеристику трубопровода.

Моделирование регулятора гидротурбины облегчается установлением критериев подобия, определяемых из уравнения:

$$\frac{d^2\Delta}{dt^2} + \frac{1}{T_2}\frac{d\Delta}{dt} + \frac{\varepsilon\Delta}{T_2\tilde{\delta}_{*\text{макс}}T} = -\frac{\omega}{\tilde{\delta}_{*\text{макс}}T \cdot T_2},$$

где T_2 — постоянная времени сервопривода;

ε — коэфициент статизма регулятора;

$\tilde{\delta}_{*\text{макс}}$ — максимальное относительное отклонение частоты, при котором достигается полное смещение золотника от положения полного закрытия;

$\tilde{\delta}$ — то же, абсолютное;

T — время полного открытия или закрытия регулирующего аппарата турбины при полном открытии золотника;

Δ — открытие регулирующего аппарата турбины.

Критериев подобия здесь будет три:

$$\frac{T}{t} = \text{idem}; \quad \frac{T_2}{t} = \text{idem}; \quad \delta_{\text{макс}} \Delta t = \text{idem}.$$

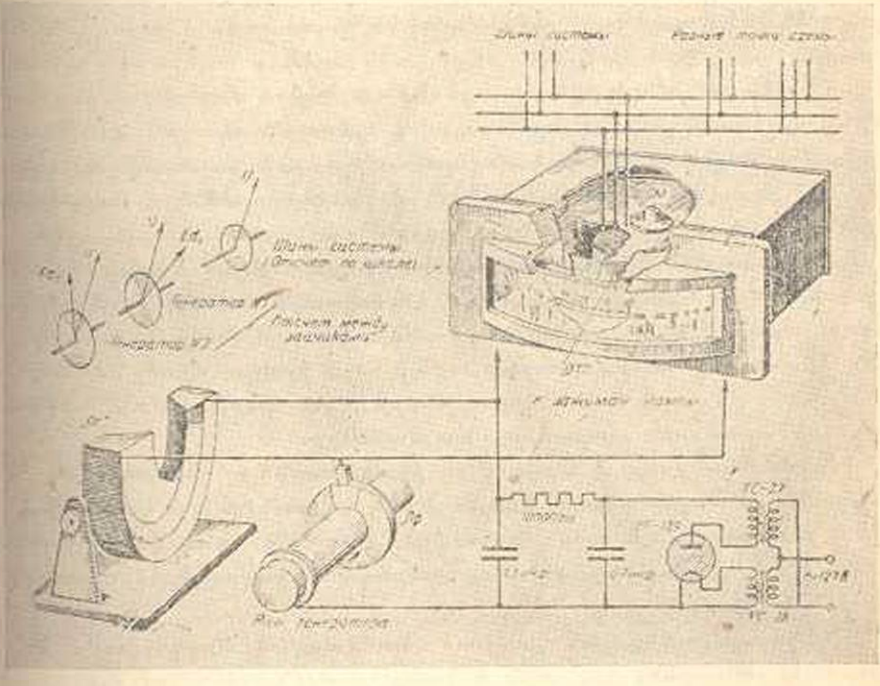
Кроме того, должен соблюдаться критерий гомохронности:

$$\omega t = \text{idem}$$

и условие

$$\frac{\varepsilon}{\delta_{\text{макс}}} = \text{idem}.$$

При приближенном моделировании электрической части, когда масштаб времени электромеханических процессов будет изменяться независимо от частоты, необходимо, чтобы одновременно с изменением масштаба времени изменялись величины T, T_2, $\delta\Delta$.



Фиг. 18. Стробоскоп для измерения и регистрации угла расхождения э. д. с. синхронных генераторов и наблюдения периодических процессов.

При конструктивном выполнении модели особенное внимание обращено на обеспечение измерений. Отметим оригинальный прибор, позволяющий наблюдать и фиксировать на фотопленку угол расхождения э. д. с. синхронных машин и различные периодические процессы (фиг. 18).

Гидро-Электрическая Лаборатория
Водно-Энергетического Института
Академии Наук Армянской ССР.

Վ. Ա. Վենիկով

ԷՆԵՐԳՈՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՍԱՐՔԱՎՈՐՈՒՄՆԵՐԻ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՄՈԴԵԼԱՑՄԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԴՐՈՒՅԹՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածն ընթերցողին ծանոթացնում է նմանության և մոդելացման տեսության ընդհանուր դրույթների հետ, նաև ցույց է տալիս դրանց կիրառման հնարավորությունն էլեկտրատեխնիկական խնդիրների նկատմամբ ընդհանրապես և էլեկտրասիստեմների ուսումնասիրման և պրոեկտման դեպքում մասնավորապես։ Ջրաէներգետիկ Ինստիտուտի հիդրոէլեկտրական լաբորատորիայում կառուցվում է Հայաստանի էլեկտրասիստեմի մոդելը։ Մոդելացման ու նմանության տեսության հարցերը հատուկ հետաքրքրություն են ներկայացնում ինժեներական և գիտական լայն շրջանների համար։

Ֆիզիկական մոդելացումը, այսինքն այնպիսի մոդելացումը, որի ժամանակ պահպանվում է ուսումնասիրվող երևույթի բնույթը, էապես տարբերվում է մաթեմատիկական մոդելացումից, որի նպատակն է հավասարումների լուծումը (ինտեգրատորներ, էլեկտրասիստեմների հաշվարկային մոդելներ և այլն)։

Սահմանելով էլեկտրական երևույթների նմանության ընդհանուր հայտանիշները, որոնք ապահովում են դաշտերի նմանությունը և մասնավոր հայտանիշները, որոնք ապահովում են շղթաների նմանությունը, մենք կարող ենք համեմատաբար ավելի հեշտ իրականացնել նմանությունը և գտնել մի շարք նման երևույթների վրա փորձարկման արդյունքներն օրինաչափորեն տարածելու պայմանները։

Հոդվածում ցույց է տրված, որ իրականացնելով սիստեմների նմանությունն ու մոդելացումը, նմանության հայտանիշների հիման վրա կարելի է ստանալ ավելի լայն հնարավորություններ, քան կան օրիգինալի նմանության պարամետրերով (հարաբերական միավորներով) կառուցված մոդելի դեպքում։

Էլեկտրատեխնիկական հարցերի հետ կապված մոդելացումը կարելի է կիրառել չափազանց լայնորեն և կոմպլեքսային եղանակով։ Էլեկտրասիստեմների մոդելացման դեպքում այն կարող է ընդգրկել սկզբնական շարժիչներ (հիդրոտուրբիններ), մեխանիկական կարգավորիչներ, աղեղի, պսակի, ալիքային պրոցեսների հետ կապված երևույթներ, որոնք տեղի ունեն բարձր լարվածության հաղորդալարերի վրա։

Չափազանց կարևոր է նշել, որ միանգամայն հնարավոր է ջերմային, մեխանիկական և էլեկտրական երևույթներ պարունակող բարդ երևույթների նմանության միաժամանակյա ստացումը։ Որպես այդ տիպի օրինակ դիտված են հողակցման և հաղորդալարերի հենարանների նմանության պայմանները։

Էլեկտրասիստեմներ մոդելացնելիս մի շարք դեպքերում շատ հարմար է մոտավոր մոդելացումը, որի դեպքում մոդելացվում են հոսանքի և լարվածության ոչ թե ակնթարթային արժեքները, այլ նրանց պարուրիչները։

Մոտավոր մոդելացումը հանգեցնում է որոշ սխալների, որոնք ցույց են տրված հոդվածում։

Հոդվածը հիմնված է սովետական հետազոտողների մի շարք աշխատանքների վրա, գլխավորապես հեղինակի աշխատանքների վրա։

Ընդգծելով տեսության նշանակությունը և նրա մեթոդները, անհրաժեշտ է հիշել, որ նա մաքսիմալ արդյունք է տալիս, երբ այն զուգակցված է անալիտիկ հետազոտման հետ, երբ կարելի է միաժամանակ և փոխադարձ ստուգման ենթարկել տեսական և փորձնական հետազոտության արդյունքները։

Մոդելի վրա կատարված փորձերը չի կարելի հակադրել բնականում կատարված փորձերին. նրանք պետք է օրգանապես լրացնեն վերջիններիս, դարձյալ պահպանելով փոխադարձ ստուգում և թույլ տալով բացառել պատահական երևույթները։

Ֆիզիկական նմանության և մոդելացման դեպքում, պահպանելով երևույթի բնույթը և նմանության հայտանիշ գտնելու համար, միայն որպես հիմք օգտվելով դիֆերենցիալ հավասարումով, որը բացահայտում է երևույթի որակական և քանակական կողմերի միջև եղած կապը, մենք ստանում ենք հետազոտման ավելի լայն հնարավորություններ, քան այն հնարավորությունները, որոնք արտահայտված են մաթեմատիկական գրանցման դեպքում որոշ դիֆերենցիալ հավասարման տեսքով։

Ֆիզիկական նմանության, մոդելացման և մաթեմատիկական մոդելացման (որոշիչ մոդել-անալոգների կառուցում) մեթոդների ներդաշնակ զարգացումը կապահովի մեծագույն արդյունք և կարագացնի արդյունաբերության մեջ գիտական հետազոտությունների առաջխաղացումը։

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթ., բն. և տեխ. գիտութ. II, № 6, 1949 Физ-мат., естеств. и тех. науки

ГИДРОЭНЕРГЕТИКА

Е. Дж. Сафаров

Статистические основы регулирования речного стока

1. Введение

Существующие статистические способы расчета регулирования стока приближенны, мало обоснованы в теоретическом отношении и трудоемки, так как требуют много времени для вычислений. Достоверность же их результатов сомнительна.

Причиной этого обстоятельства является то, что указанные способы полностью базируются на распределении величин, зависящих лишь от одной случайной переменной.

На самом деле, при регулировании стока мы сталкиваемся со многими переменными факторами. Главными из них являются:

1. приток воды в водохранилище,
2. отток воды из него,
3. объем водохранилища,
4. наполнение водохранилища,
5. потери воды из водохраналища,
6. недостаток воды и излишек (сброс),
7. период регулирования и перебоя и т. д.

Само собой разумеется, что сведением всех этих факторов к одной переменной мы допустим грубые ошибки и затратим много труда, ввиду кропотливости подсчетов по этому способу.

Однако, при некоторых практически приемлемых допущениях число указанных факторов можно уменьшить. Например, можно допустить, что потери из водохранилища зависят от наличия воды в нем, что недостаток или излишек воды—зависят от полного полезного объема водохранилища, что отток воды из водохранилища задан в соответствии с графиком потребления воды и т. д. Однако, никак нельзя все вышеуказанные факторы свести к одному, как это делали до сих пор.

За последнее десятилетие в отечественной литературе появилось значительное число работ, посвященных статистическому методу расчета регулирования речного стока. Этим вопросом занимались многие видные ученые Советского Союза. Однако, как было сказано выше, все работы опирались на функцию распределения, зависящую от одной переменной. Для разрешения сложных вопросов, поставленных перед ними, они дали различные графические методы для сведения одной переменной к другим.

Разработанные аналитические методы для разрешения узких задач настолько сложны, что почти недоступны рядовым проектировщикам. Это обстоятельство и является причиной ограниченного применения статистического метода при разрешении конкретных водохозяйственных задач.

Вопросы, связанные с прогнозами того или иного гидрологического или метеорологического явления, не могут получить своего разрешения без применения статистических методов. Несмотря на то, что существующие статистические методы опираются на рассмотрение одной переменной величины, они дают возможность разрешать большое число задач.

Само собой разумеется, что при наличии функции распределения многих переменных и соответствующих расчетных таблиц число разрешаемых вопросов увеличивается во много раз. При этом устраняются те недочеты, которые возникают при применении распределения одной переменной.

Распределение многих независимых переменных может быть широко применено в области прогнозирования гидрологических, метеорологических и иных явлений. Так же, как и при расчетах регулирования стока, при прогнозировании нельзя основываться на применении статистического метода, опирающегося на распределении одной переменной, так как генетический анализ этих явлений показывает, что они являются функциями многих факторов. Так, например, речной сток зависит: 1) от количества осадков, 2) от распределения и вида осадков, 3) от интенсивности осадков, 4) от характера изменения теплового режима в бассейне, 5) от физико-географических, геологических и почвенных условий, 6) от растительного покрова, 7) от озерности и заболоченности речного бассейна и т. д.

При наличии таблиц вероятностей, зависящих от многих переменных, можно было бы учесть основные особенности речного стока.

Можно было бы привести очень много примеров не только из области гидрологии и гидроэнергетики, но и из любых других областей науки и техники, где могли бы иметь широкое применение таблицы вероятностей факторов, зависящих от двух и более переменных величин. Однако и вышеприведенные примеры достаточны для того, чтобы убедиться в необходимости составления таких таблиц.

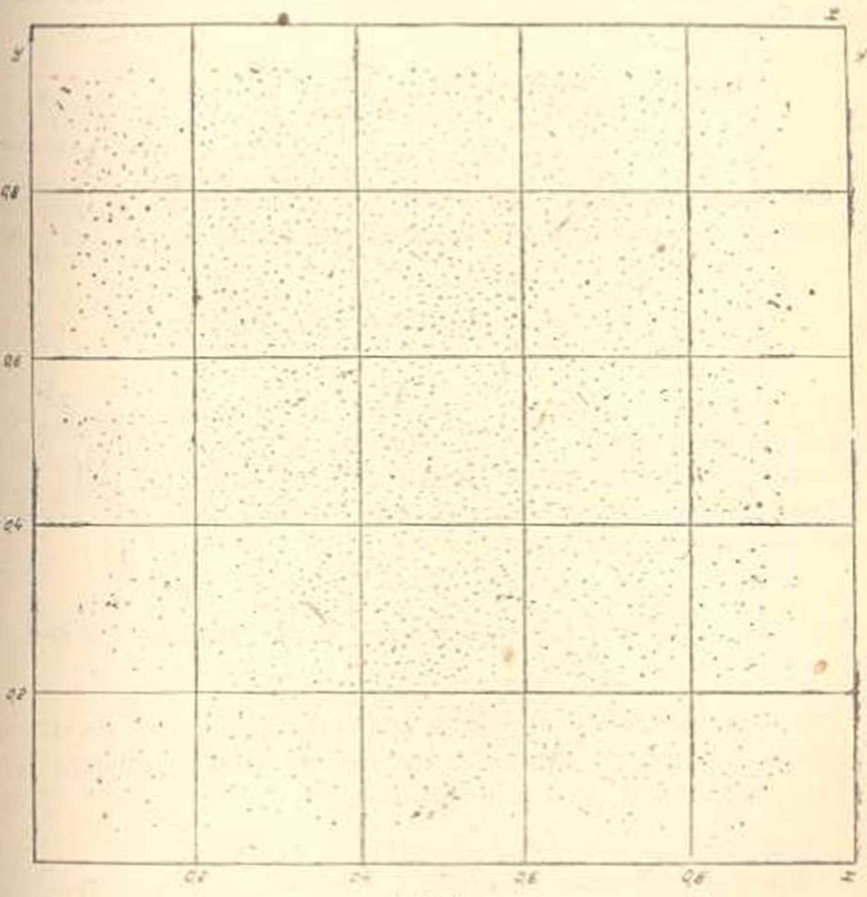
Попутно отметим, что распределение двух переменных, основанное на нормальном законе распределения, давно применяется в артиллерийской технике в виде сетки вероятностей.

Цель данной работы заключается в создании методологии для составления таких таблиц, которые могут быть использованы для практических целей.

II. Теоретические основы кривой распределения системы многих переменных

Простейшим случаем распределения в системе со многими случайными переменными является распределение в системе с двумя величинами Х и У. Приводимый ниже анализ начинается с этого простейшего случая.

Представим себе, что было выполнено некоторое экспериментальное исследование (или произведены некоторые наблюдения), при котором каждая из величин Х и У получила некоторое, определенное положительное значение. Тогда, фиксируя результаты отдельных измерений в виде точек координатной плоскости ХОУ, получим для каждого измерения некоторую случайную точку (Х, У). (см. фиг. 1).



Фиг. 1.

Допустим, что случайные величины Х и У являются непрерывными случайными величинами, т. е. что функция F(x, y), определяющая интегральный закон распределения системы величин Х и У, имеет непрерывную производную второго порядка, взятую один раз по Х и другой раз по У. Тогда вероятность совместного выполнения неравенства $x_0 < X < x$, $y_0 < У < y$ будет интегральным законом распределения пары случайных величин (X, У). Это свойство аналитически может быть выражено следующим образом:

$$F(x, y) = \text{Вер}\left\{\begin{matrix} x_0 < X < x \\ y_0 < У < y \end{matrix}\right\} \qquad (1)$$

Вследствие того, что функция F(x, y) имеет непрерывную производную по x и y, то можно написать:

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}, \qquad (2)$$

где $\varphi(x,y)$ выражает диференциальный закон распределения системы двух случайных величин. Очевидно, что в этом случае интегральный закон распределения можно выразить через диференциальный закон следующим образом:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}(x, y)\, dxdy \qquad (3)$$

Нетрудно доказать, что когда X и У являются независимыми случайными переменными, то выражение (3) можно переписать в виде:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x}\varphi_1(x)\, dx \int_{y_0}^{y}\varphi_2(y)\, dy = F_1(x) \cdot F_2(y), \qquad (4)$$

где $\varphi_1(x)$ и $F_1(x)$ представляют из себя диференциальный и интегральный законы распределения величины X_1, а $\varphi_2(y)$ и $F_2(y)$ — диференциальный и интегральный законы распределения величины У.

Аналогично этому выражению для системы многих случайных переменных можно написать:

$$F(x, y, z, \ldots t) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\int_{z_0}^{z} \ldots \int_{t_0}^{t} \varphi(x, y, z, \ldots t)\, dxdy \ldots dt \qquad (5)$$

Наконец, когда эти величины являются независимыми случайными переменными, то последнее выражение можно написать в аналогичном выражению (4) виде, а именно:

$$F(x, y, z, \ldots t) = \int_{x_0}^{x} \varphi_1(x)\, dx \int_{y_0}^{y} \varphi_2(y)\, dy \ldots \int_{t_0}^{t} \varphi_n(t)\, dt =$$

$$= F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z) \ldots F_n(t). \qquad (6)$$

Подробное изложение данного вопроса можно найти в любом курсе теории вероятностей.

III. Исследование общей теории при известных законах распределения и методика составления расчетных таблиц для многих случайных переменных

В качестве исходного распределения вероятностей системы двух случайных переменных берем уравнение типа (2), а в качестве кривой распределения—кривую, полученную автором разложением произвольной функции по полиномам.*

Указанная кривая распределения выражается следующим уравнением:

$$F(y) = \frac{\alpha^{\alpha}\, x^{\alpha-1} \cdot e^{-\alpha x}}{\Gamma(\alpha)} \left[1 - \frac{\alpha^{3/2}(C_s - 2C_v)}{6} \left(1 - 3x + \frac{3x^2}{M_2} - \frac{x^3}{M_3} \right) \right], \quad (7)$$

где $M_2 = 1 + C_v{}^2$; $M_3 = (1 + C_v{}^2)(1 + 2C_v{}^2)$; $\alpha = \frac{1}{C_v{}^2}$

$C_v = \frac{1}{x_0} \sqrt{\frac{\Sigma (x - x_0)^2}{n-1}}$ коэфициент изменчивости ряда;

n — число членов в ряду и

x_0 — средняя величина ряда,

$C_s = \frac{\Sigma (x - x_0)^3}{(n-1) C_v{}^3}$ — коэфициент асимметрии,

$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ — гамма функция от α.

Уравнение (7) исследуем для случая, когда $C_s = 2C_v$. Тогда оно превращается в уравнение кривой Пирсона III типа.

Примем, что:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \frac{\alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\alpha x}\, dx = 1 - F_1(x) \\ \Phi_2(y) &= \frac{\beta^{\beta}}{\Gamma(\beta)} \int\limits_y^{\infty} y^{\beta-1} e^{-\beta y}\, dy = 1 - F_2(y) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Тогда

$$Z = \Phi(x, y) = \Phi_1(x)\,\Phi_2(y) = p \begin{pmatrix} x < X < \infty \\ y < У < \infty \end{pmatrix}$$

есть функция распределения пары независимых переменных X и У. Эта функция изобразится в пространстве некоторой поверхностью распределения при всех $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

---

* *Е. Д. Сафаров* — Кривые распределения и обеспеченности и их применение к гидрологическим расчетам. Ереван, 1947.

Если взять плоскость $Z = \mathrm{const}$, параллельную плоскости $X0Y$ и пересечь ею поверхность

$$Z = \Phi(x, y), \tag{9}$$

то на этой поверхности получится линия, проекция которой на плоскость $X0Y$ будет иметь уравнение

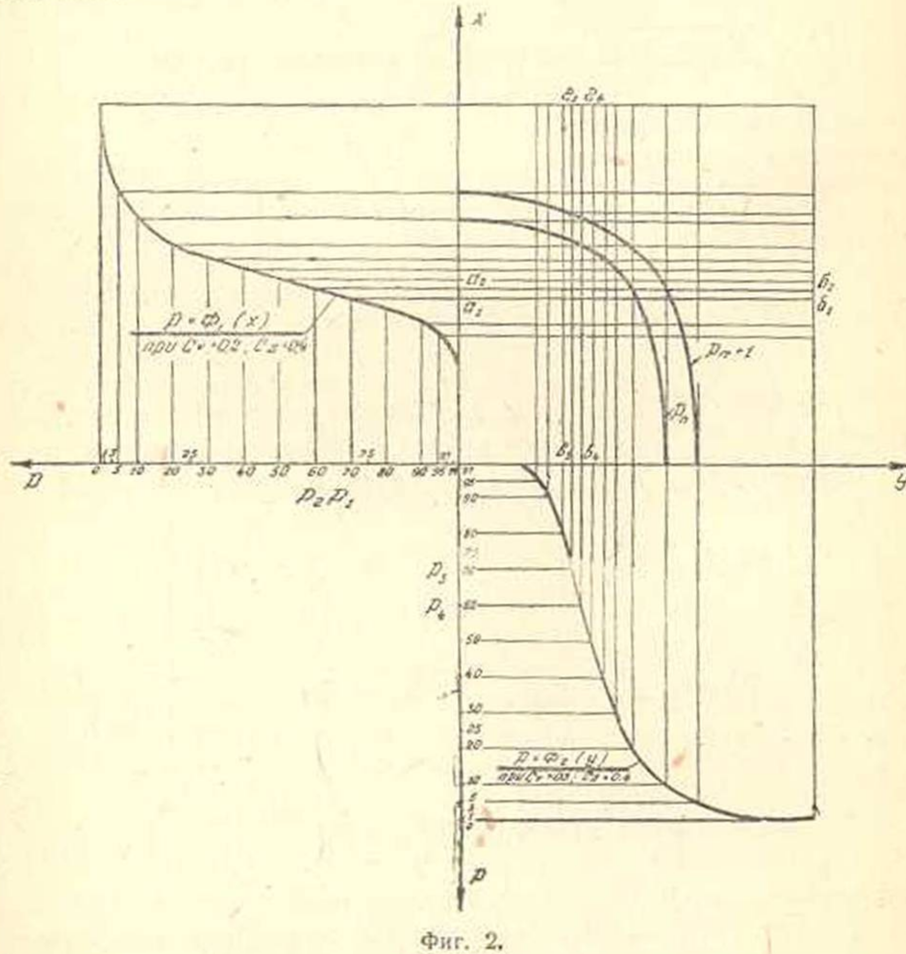
$$\Phi(x, y) = p$$

или

$$\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y) = p \tag{10}$$

Придавая p различные значения $p_1, p_2, \ldots$, получим в плоскоскости $X0Y$ ряд изолиний $\Phi_1(x)\Phi_2(y) = p_n$.

Число p_n будет равно вероятности того, что точка $M(x, y)$ попадет за пределы области, ограниченной кривой $\Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y) = p_n$ и осями координат.



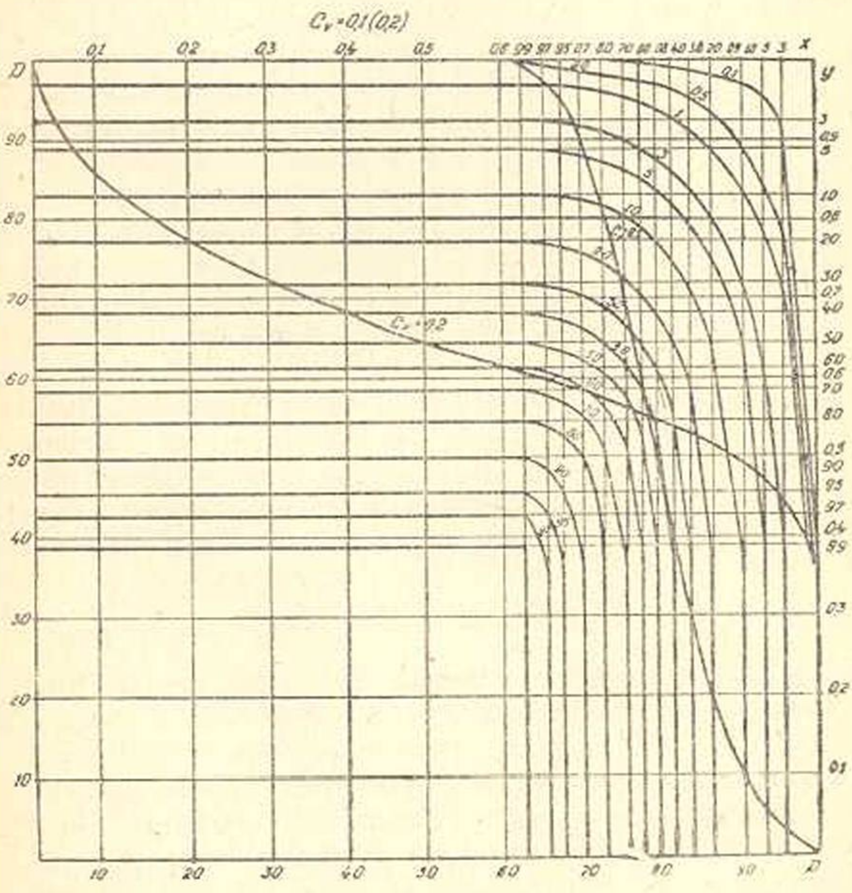
Фиг. 2.

Изолиний будет столько, сколько было взято значений для величины Z. Учитывая также, что функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(y)$ зависят еще от коэфициентов вариации (C_v) и асимметрии (C_s), число изолиний увеличится в соответствии с числом принятых значений этих коэфициентов.

Для построения изолиний поступаем следующим образом. Изображаем на поле вероятностей характеристику заданных величин в виде сетки равных вероятностей.

Эта последняя для системы с двумя случайными переменными $x = const$ и $y = const$ изобразится в виде системы прямых линий.

На фиг. 2 эта сетка показана тонкими линиями. Способ построения этой сетки ясен из той же фигуры. Действительно, при обеспеченностях P_1 и P_2 функции $\Phi_1(x)$ линии равных вероятностей будут a_1 $б_1$ и a_2 $б_2$, а при обеспеченностях P_1 и P_2 и функции $\Phi_2(y)$ они будут $в_1$ $г_1$ и $в_2$ $г_2$.



Фиг. 3

На сетке равных вероятностей нанесены изолинии

$$P_n = \Phi_1(x)\,\Phi_2(y) = const \text{ и}$$

$$P_{n+1} = \Phi_1(x)\,\Phi_2(y) = const,$$

причем $P_{n+1} = P_n + \Delta P$.

Таблица 1

	$C_v = 0{,}1$		$C_v = 0{,}2$		$C_v = 0{,}3$		$C_v = 0{,}4$		$C_v = 0{,}5$	
P	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1
99	0,782	0,627	0,594	0,3902	0,436	0,239	0,307	0,142	0,206	0,082
97	0,821	0,6584	0,653	0,4290	,516	0,283	0,393	0,182	0,288	0.114
95	0,841	0,6745	0.693	0,4553	0,562	0,308	0,445	0,206	0,342	0,136
90	0,874	0,7009	0,754	0,4954	0,640	0,351	0,538	0,250	0,436	0,173
80	0,915	0,7338	0.829	0,5446	0,743	0,407	0,656	0,304	0,574	0,228
75	0,931	0,7466	0,859	0,5643	0,785	0,430	0,710	0,329	0.634	0,252
70	0,945	0,7579	0,886	0,582	0,822	0,450	0,758	0,352	0,691	0,275
60	0,972	0,7795	0,937	0,616	0,897	0,491	0,852	0,395	0,803	0,319
50	0,997	0,7996	0,987	0,648	0,970	0,531	0,947	0,439	0,918	0,365
40	1,022	0,8196	1,038	0,682	1,047	0,574	1,049	0,487	1,044	0,415
30	1,050	0,8421	1.094	0,719	1,133	0,621	1,165	0,540	1,190	0,473
25	1,066	0,8549	1,137	0,747	1,183	0,648	1,233	0,572	1,277	0,508
20	1,083	0,8685	1,163	0,766	1,240	0,679	1,312	0,609	1,378	0,548
10	1,130	0,9062	1,263	0,830	1,398	0,766	1,534	0,712	1,670	0,665
5	1,170	0,9383	1,350	0,887	1,539	0,843	1,733	0,804	1,938	0,771
3	1,196	0,9592	1,408	0,925	1,635	0,896	1,875	0,870	2,126	0,846
1	1,247	1,000	1,523	1,000	1,826	1,000	2,156	1,000	2,512	1,000

Для вычерчивания изолиний на основании уравнения (10) предварительно составлена таблица 2. На основании этой таблицы без труда, при данной $P_n = \text{const}$, можно вычертить изолинии. Очевидно, что область ΔZ_n, ограниченная двумя соседними изолиниями P_n и P_{n+1} и осями координат, есть зона изменения величин X и У при изменении обеспеченности от P_n до $P_n + \Delta P$. Следовательно, она будет соответствовать ординате кривой распределения при обеспеченности $P_n + \frac{\Delta P}{2}$.

Для облегчения расчетов фигура (2) составлена так, что площадь квадрата, охватывающего всю систему изолиний, была равна единице.

С этой целью, на основании расчетных таблиц вероятностей (см. приведенную выше сноску), составляется таблица 1. В первой графе таблицы приведены проценты обеспеченности, во второй — соответствующие ординаты, взятые из таблиц для одной переменной, в третьей же графе — те же величины, приведенные к базису 1%-ой обеспеченности.

Приведение к базису производится путем деления значений графы 2-й на k_1, где k_1 — ордината при 1%-ой обеспеченности, взятая из той же графы. Это значит, что ординаты кривой обеспеченности взяты в единицах k/k_1.

Продолжение таблицы 1

	$C_v = 0{,}6$		$C_v = 0{,}7$		$C_v = 0{,}8$		$C_v = 0{,}9$		$C_v = 1{,}0$	
P	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1	k	k/k_1
99	0,130	0,045	0,077	0,0227	0,042	0,0113	0,021	0,0050	0,010	0,0022
97	0,204	0,071	0,138	0,0407	0,088	0,0238	0,053	0,0127	0,030	0,0065
95	0,253	0,088	0,182	0,0537	0,125	0,0337	0,082	0,0198	0,051	0,0110
90	0,348	0,120	0,270	0,0796	0,205	0,0553	0,150	0,0361	0,105	0,0228
80	0,494	0,171	0,408	0,1203	0,340	0,0918	0,281	0,0677	0,223	0,0484
75	0,559	0,192	0,485	0,1431	0,415	0,1120	0,349	0,0841	0,288	0,0625
70	0,622	0,215	0,553	0,1631	0,486	0,1312	0,419	0,1009	0,356	0,0772
60	0,749	0,259	0,693	0,2044	0,633	0,1709	0,572	0,1378	0,511	0,1108
50	0,883	0,305	0,843	0,2487	0,797	0,215	0,746	0,1798	0,692	0,1501
40	1,032	0,357	1,013	0,2988	0,987	0,2665	0,955	0,2301	0,916	0,1987
30	1,209	0,418	1,219	0,3596	1,222	0,3299	1,217	0,293	1,204	0,2613
25	1,314	0,455	1,344	0,3965	1,366	0,3688	1,381	0,3328	1,386	0,3007
20	1,440	0,498	1,494	0,4407	1,540	0,4158	1,579	0,3805	1,609	0,3491
10	1,805	0,624	1,936	0,571	2,063	0,5570	2,186	0,5268	2,303	0,4997
5	2,146	0,742	2,357	0,6953	2,570	0,6939	2,807	0,6765	2,995	0,6501
3	2,388	0,826	2,658	0,7841	2,936	0,7927	3,219	0,7757	3,502	0,7599
1	2,890	1,000	3,390	1,000	3,710	1,000	4,149	1,000	4,605	1,000

Для иллюстрации сказанного приводится фиг. 3, на которой изображены две кривые обеспеченности $P_1 = \Phi_1(x)$ и $P_2 = \Phi_2(y)$ и нанесены изолинии вероятностей по уравнению (10).

Кривые обеспеченности, изображенные на фигуре 3, имеют параметры: $C_{v1} = 0{,}2$; $C_s = 2C_{v1} = 0{,}4$ для функции $\Phi_1(x)$, и

$$C_v = 0{,}1 \quad C_s = 2C_v = 0{,}2 \text{ для функции } \Phi_2(y).$$

Координаты точек этих кривых даны в таблице 1.

Результаты подсчетов, для данного примера, приведены в таблице 3, где в первой графе даны проценты обеспеченности P_n для системы с двумя переменными, во второй графе—площади ΔZ_n, ограниченные соседними изолиниями и осями координат. В третьей графе приведены суммы этих частных площадей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta Z_i = Z_n$$

Величина Z_n, соответствующая обеспеченности P_n, представляет площадь, ограниченную кривой

$$P_n = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(y)$$

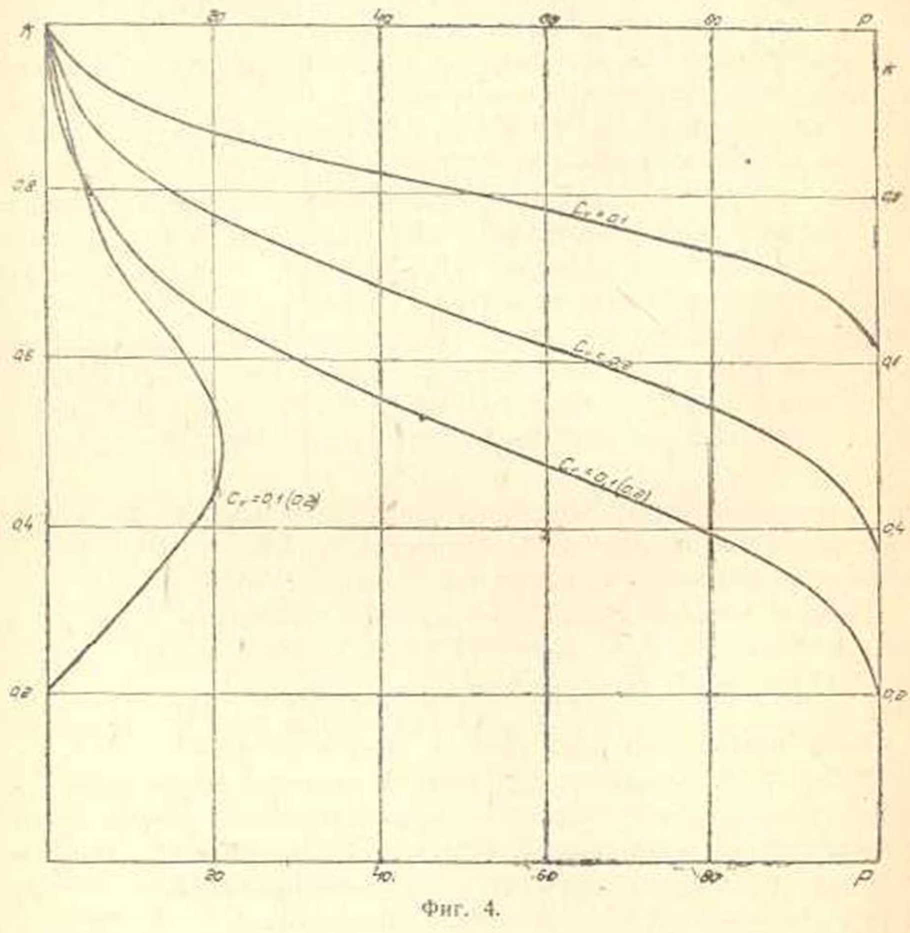
и осями координат.

Наконец, в последней графе даны окончательные значения для аргумента Z_n в абсолютных единицах. Для получения Z_n в абсолютных единицах, нужно цифры графы третьей умножить на 1.899. Соответствующие величины $K_n = 1{,}899\, Z_n$ приведены в графе четвертой.

Эти значения K_n и рассматриваются нами, как ординаты кривой обеспеченности, абсцисы которых равны P_n.

Для иллюстрации приводится также фиг. 4, дающая кривые обеспеченности и распределения с параметрами:

$$C_v = 0{,}1\,(0{,}2) = 0{,}2\,(0{,}1) \text{ и } C_s = 2C_v\,.$$



Фиг. 4.

На той же фигуре изображены для сравнения кривые обеспеченности для системы с одной переменной и параметрами:

$$C_{v_1} = 0{,}1 \quad C_{s_1} = 2C_{v_1} = 0{,}2$$

$$\text{и } C_{v_2} = 0{,}2, \quad C_{s_2} = 2C_{v_2} = 0{,}4$$

Метод составления расчетных таблиц в случае, когда $C_s \neq 2C_v$ ничем не отличается от случая, когда $C_s = 2C_v$.

$\Phi_1(x)$ / p	99	95	90	80	70	60	50
0,1	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15	0,17	0,20
0,5	0,5	0,53	0,56	0,62	0,71	0,83	1,00
1,0	1,01	1,05	1,11	1,25	1,43	0,67	2,00
3	3.03	3,16	3,33	3,75	4,25	5,00	6,00
5	5,05	5,26	5,56	6,25	7,15	8,33	10,00
10	10,10	10,50	11,10	12,50	14,30	16,70	20,00
20	20,20	21,60	22,20	25,0	28,60	33,38	40,00
30	30,30	31,60	33,30	37,50	42,20	50,00	60,00
40	40,40	42,00	44,40	50,00	57,10	66,60	80,00
50	50,50	52,60	55,60	62,50	71,50	83,40	100
60	60,60	63,10	66,60	75,00	85,90	100	
70	70,70	73,80	77,70	87,50	100		
80	80.80	84,20	89,00	100			
90	90,90	94,60	100				
95	96,00	100					
100	100						

Таблица 2.

40	30	20	10	5	3	1	0,5	0,4
0,25	0,33	0,50	1,00	2,00	3,33	10,00	20,00	100,0
1,24	1,67	2,50	5,00	10,00	16,67	50,00	100,0	
2,50	3,33	5,00	10,00	20,00	33,20	100		
7,50	10,00	15,00	30,00	60,00	100			
12,50	16,67	25,00	50,00	100				
25,00	33,33	50,00	100					
50,00	66,67	100						
76,00	100							
100								

Таблица 3

$C_v = 0{,}2\ (0{,}1)$

P_n %	ΔZ	Z	$K_n = 1{,}899\,Z_n$
100	0,244	0,2437	0,463
99	0,059	0,303	0,575
95	0,041	0,343	0,652
90	0,050	0.393	0,746
80	0,045	0,438	0,832
70	0,038	0,476	0,903
60	0,036	0,512	0,973
50	0,040	0,552	1,047
40	0,045	0,597	1,132
30	0,053	0,651	1,237
20	0,080	0,731	1,389
10	0,073	0,804	1,526
5	0,051	0,855	1,623
3	0,076	0,931	1,769
1,0	0,027	0,958	1,819
0,5	0,032	0,990	1,879
0,1	0,010	1,000	1,899

только при этом в основу расчета необходимо брать соответствующие кривые обеспеченности. Однако, ввиду громоздкости подсчетов, в данной работе пришлось ограничиться только расчетными таблицами для случая $C_s = 2C_v$.

Расчетные таблицы даны в приложении к статье.

Теперь рассмотрим способ составления расчетной таблицы вероятностей системы трех и более случайных переменных.

Начнем с системы трех переменных.

В качестве исходного уравнения берем соответствующее уравнение функции распределения в диференциальном виде, а именно:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,\varphi_3(z) \tag{11}$$

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$\varphi(x, y, z) = [\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)]\,\varphi_3(z) = \varphi_{1-2}(x, y,)\,\varphi_3(z), \tag{12}$$

где $\varphi(x, y) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(y)$.

После интегрирования уравнения (11) получим:

$$\int \varphi(x, y, z)\,dxdydz = \int_x^\infty \varphi(x)\,dx \cdot \int_y^\infty \varphi(y)\,dy \cdot \int_z^\infty \varphi(z)\,dz =$$

$$\left[\int_x^\infty \int_y^\infty \varphi(x)\,\varphi(y)\,dxdy\right] \int_z^\infty \varphi(z)\,dz = F(x, y)\,F(z), \tag{13}$$

где $F(x, y) = F(x)\,F(y) = \int\limits_x^\infty \varphi(x)\,dx \int\limits_y^\infty \varphi(y)\,dy$

Уравнение (13), аналогично уравнению (4), можно написать в виде:

$$F_z = \frac{P}{F(x, y)}, \tag{14}$$

который сходен с видом уравнения (10). Следовательно, на основании уравнения (14), можно аналогично тому, как это было сделано по уравнению (10), составить расчетные таблицы, при наличии кривых обеспеченности.

$$F(x, y, z) = [F(x) \cdot F(y)] \cdot F(z)$$

Для этой цели задаемся следующими выражениями для указанных функций:

$$F(x) = \int\limits_x^\infty A \cdot x^{\alpha-1} e^{-\alpha x} dx;$$

$$F(y) = \int\limits_y^\infty B \cdot y^{\beta-1} e^{-\beta y} dy;$$

$$F(z) = \int\limits_z^\infty C z^{\gamma-1} e^{-\gamma z} dz;$$

В этом случае можно пользоваться таблицами вероятностей для двух случайных переменных и свести систему трех случайных переменных к двум. Очевидно, что тогда составление таблиц вероятностей для системы трех переменных ничем не будет отличаться от таковых в случае 2-х переменных.

В качестве примера берем три кривые обеспеченности с параметрами:

$$C_{v_1} = 0{,}1; \quad C_{s_1} = 2C_{v_1} = 0{,}2$$
$$C_{v_2} = 0{,}2; \quad C_{s_2} = 2C_{v_2} = 0{,}4$$
$$C_{v_3} = 0{,}3; \quad C_{s_3} = 3C_{v_3} = 0{,}6$$

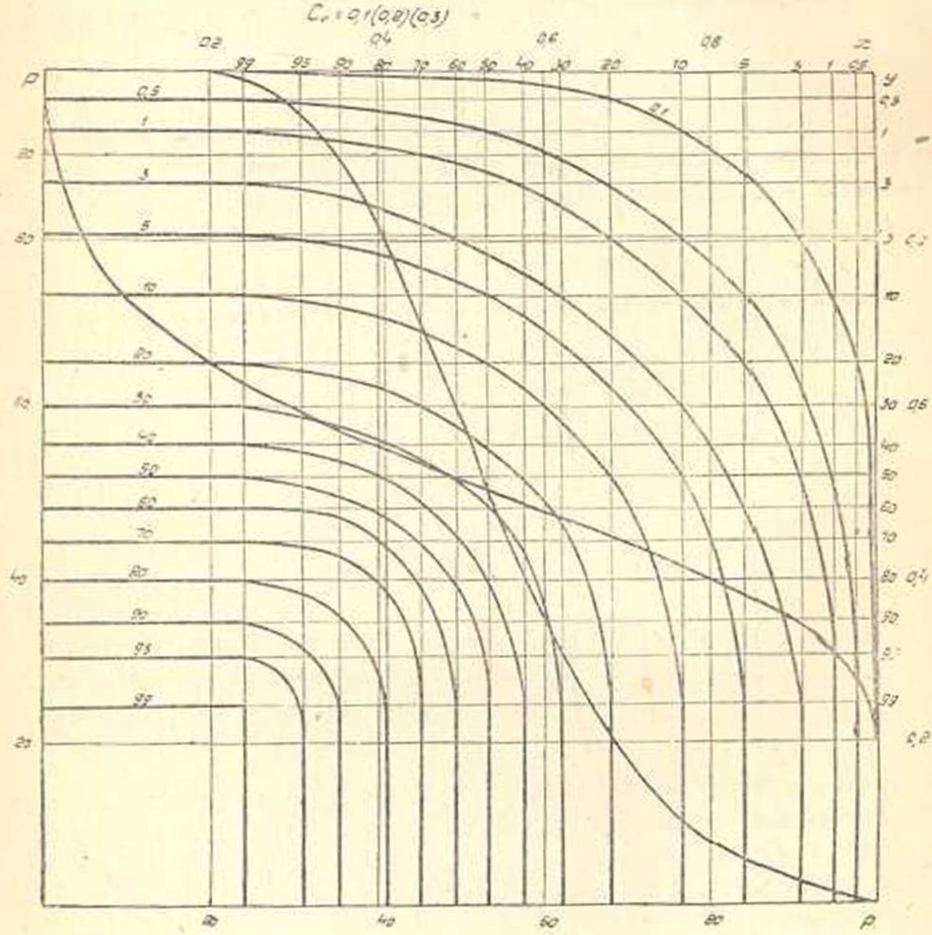
Координаты точек приведены в таблице 1.

На основании этих параметров строим фиг. 5, на которой изображены изолинии по уравнению (14).

Планиметрированием площадей, ограниченных изолиниями и осями координат, составлена таблица 4, где приводятся данные, аналогичные данным таблицы 3.

На основании данных таблицы построена фигура 6, на которой, кроме кривой обеспеченности $P = \Phi(x, y, z)$, приведены также кривые $P = \Phi(x, y)$, $P = \Phi_1(x)$ и $P = \Phi_2(y)$.

При желании составить таблицы вероятностей системы четырех случайных независимых переменных кривые распределения необхо-



Фиг. 5.

димо написать в виде:

$$\varphi(x, y, z, t) = [\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)]\,[\varphi_3(z)\,\varphi_4(t)] = \varphi(x, y)\cdot\varphi(z, t) \tag{15}$$

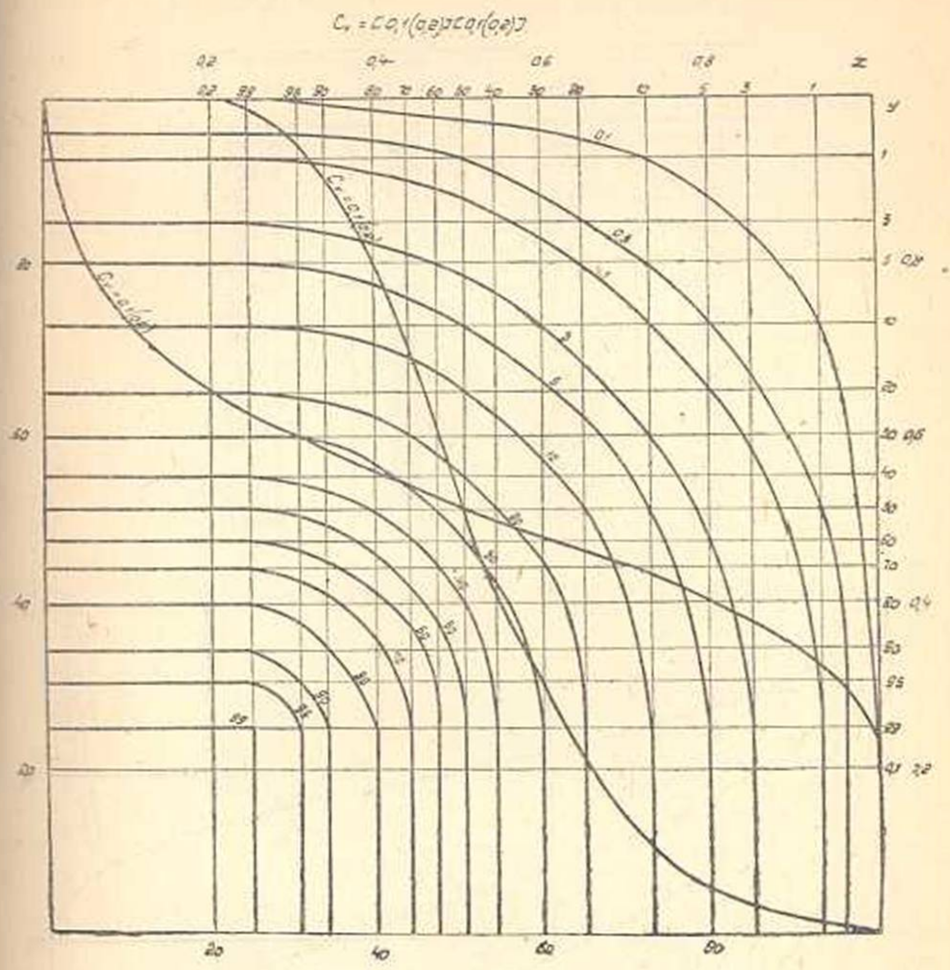
или в интегральном виде:

$$P = \int\limits_x^\infty \int\limits_y^\infty \int\limits_z^\infty \int\limits_t^\infty \varphi(x, y, z, t)\; dxdydzdt = \Phi_1(x, y)\cdot\Phi_2(z, t),$$

где $\Phi_1(x, y) = \Phi_1(x)\,\Phi_2(y)$ и $\Phi_2(z, t) = \Phi_3(z)\,\Phi_4(t)$. (16)

На основании уравнения (16) можно написать уравнение

$$\Phi_1(x, y) = \frac{P}{\Phi_2(z, t)}, \tag{17}$$



Фиг. 6.

на основании которого строятся изолинии для случая 4-х переменных. В качестве примера возьмем функции

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_1(x)\,\Phi_2(y) \text{ с параметрами}$$

$$C_{v_1} = 0{,}1\ (0{,}2) \quad \text{и} \quad C_{s_1} = 2C_{v_1} = 0{,}2\ (0{,}4)$$

$$\text{и } \Phi_2(z, t) = \Phi_3(z)\,\Phi_4(t) \text{ с параметрами}$$

$$C_{v_1} = 0{,}1\ (0{,}2) \quad \text{и} \quad C_{s_2} = 2C_{v_2} = 0{,}2\ (0{,}4).$$

На основании этих кривых обеспеченности и уравнения (17) построена фигура 7, а на основании последней, путем планиметрирования, составлена таблица 5.

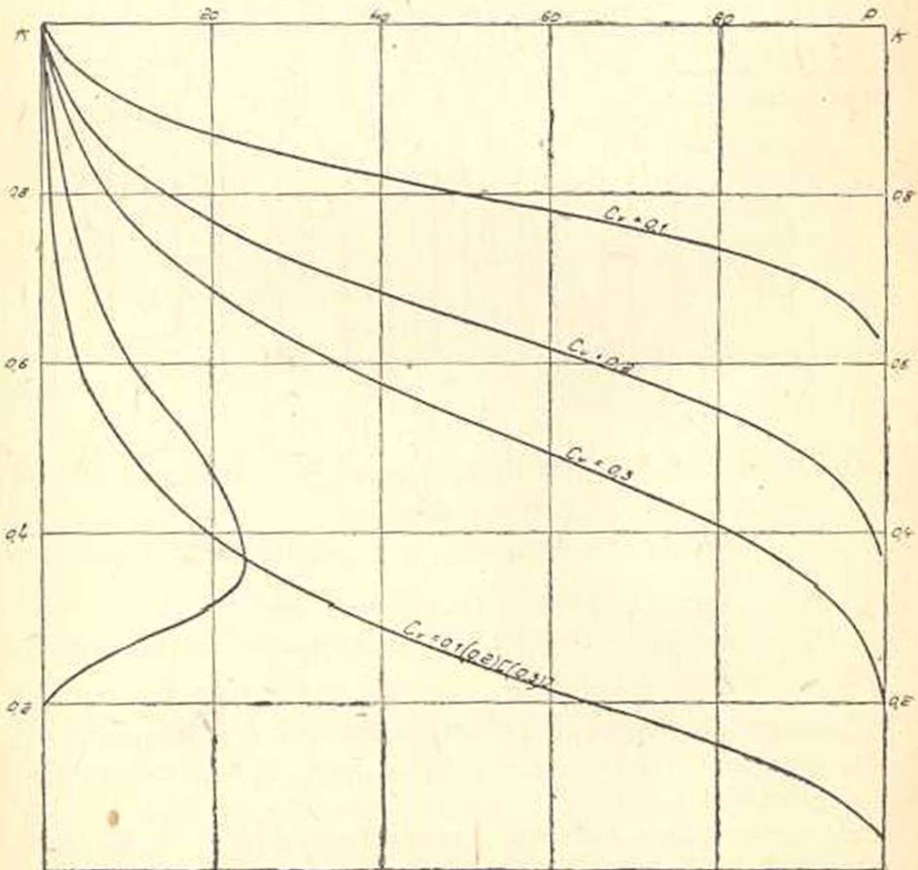
Для иллюстрации таблицы 5 приведена фигура 8, в которой представлены кривые распределения

$$\Phi(x, y, z, t),\ \Phi(x, y),\ \Phi(x) \text{ и } \Phi(y).$$

Таблица 4

$C_v = 0{,}1$ [0,2 (0,3)]

P	Δk	к	3,541 k
100	0,054	0,054	0,191
99	0,031	0,085	0,301
95	0,029	0,114	0,404
90	0,037	0,151	0,535
80	0,031	0,182	0,644
70	0,032	0,214	0,758
60	0,032	0,246	0,871
50	0,037	0,283	1,002
40	0,047	0,330	1,168
30	0,064	0,394	1,395
20	0,090	0,484	1,714
10	0,095	0,579	2,502
5	0,069	0,648	2,294
3	0,120	0,768	2,719
1	0,050	0,818	2,896
0,5	0,088	0,906	3,208
0,1	0,094	1,0	3,541

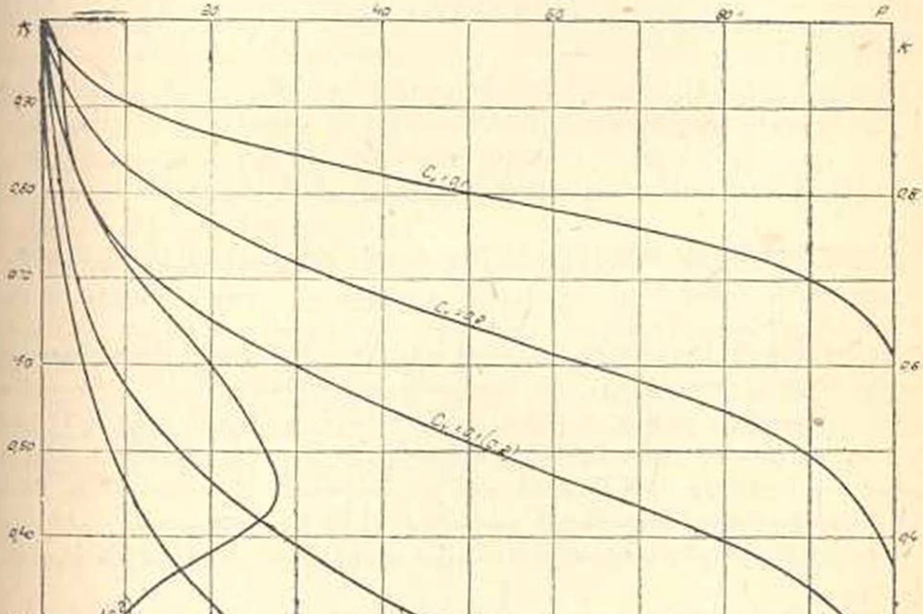


Фиг. 7.

Таблица 5

$C_v = 0{,}1\ (0{,}2)\ [0{,}1\ (0{,}2)]$

P	Δk	k	3,606 k
100	0,060	0,060	0,215
99	0,028	0,088	0,317
95	0,023	0,111	0,402
90	0,034	0,145	0,525
80	0,033	0,178	0,642
70	0,032	0,210	0,756
60	0,033	0,243	0,877
50	0,039	0,282	1,018
40	0,046	0,328	1,184
30	0,062	0,390	1,408
20	0,099	0,489	1,762
10	0,089	0,578	2,086
5	0,075	0,653	2,355
3	0,122	2,755	2,793
1	0,068	0,843	3,039
0,5	0,099	0,942	3,397
0,1	0,058	1,000	3,606



Фиг. 8.

В следующей статье будет дана методика применения таблицы для двух случайных независимых переменных при разрешении основных задач, связанных с регулированием речного стока.

IV. Таблица для интегральной кривой распределения системы с двумя случайными переменными

В приложении к данной работе приводятся расчетные таблицы для интегральной кривой системы из двух случайных переменных. Они составлены на основании уравнения (10) по способу, изложенному в данной работе.

Таблицы составлены для таких двух случайных переменных, каждая из которых подчиняется одному и тому же интегральному закону вероятностей. Для каждой кривой взято 10 значений для $C_v = 0{,}1, 0{,}2, 0{,}3, 0{,}4, 0{,}5, 0{,}6, 0{,}7, 0{,}8, 0{,}9$ и $1{,}0$.

В первом столбце таблицы даны проценты обеспеченности.

Имея в виду, что кривые распределения с параметрами C_{v_1} (C_{v_2}) совпадают с кривыми распределения с параметрами C_{v_2} (C_{v_1}), число таблиц получается небольшим.

Водно-Энергетический Институт
Академии Наук Армянской ССР.

Ե. Ջ. Սաֆարով

ԳԵՏԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՄԱՆ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոսքի կանոնավորումը հաշվելու գոյություն ունեցող վիճակագրական եղանակները մոտավոր են, տեսականորեն քիչ հիմնավորված և մեծ աշխատանք պահանջող․ դրանց հաշվելու համար շատ ժամանակ է պահանջվում, իսկ արդյունքների ճշտությունը կասկածելի է։ Դրա պատճառն այն է, որ նշված եղանակները հիմնվում են մեկ պատահական փոփոխականից (հոսքից) կախված մեծությունների բաշխման վրա։ Չնայած դրան, այժմ հիդրոէներգետիկայի բնագավառից տասնյակ խնդիրներ լուծվում են այդ մեթոդով։

Պարզ է, որ մի քանի պատահական փոփոխականների ապահովության կորերի սիստեմի համար վիճակագրական մեթոդով լուծվող խնդիրների թիվը կավելանա մի քանի անգամ։ Այդ դեպքում շատ թերություններ կվերանան։

Սույն աշխատանքի նպատակն է՝ շատ փոփոխականներով սիստեմի ապահովության կորերի կառուցմանը տեսական հիմնավորում տալ և առաջարկել հաշվման համապատասխան աղյուսակներ։

Երկու պատահական փոփոխականներով սիստեմի համար հավանականության սկզբնական հավասարում վերցված է (2) տիպի հավասարումը, իսկ բաշխման կորի համար՝ (8) տիպի հավասարումով արտահայտված կորը։ Այդ դեպքում վերցված փոփոխական մեծությունների անկախության դեպքում (2) հավասարումը բերված է (10) տիպի հավասարման։ Այդ

հավասարումը հնարավորություն է տալիս տվյալ պատահական մեծությունները հավանականության դաշտում արտահայտել իզոգծերով։ Դրա համար երեք մեծություններից մեկը վերցնում ենք որպես կամավոր պարամետր, իսկ մյուս երկուսով կառուցում իզոգծեր։ Ակնհայտ է, որ իզոգծերի քանակը մի կողմից կախված է կամավոր պարամետրների քանակից, մյուս կողմից վերցված ֆունկցիաների վարիացիայի և անսիմետրիկության գործակիցներից։

Իզոգծերը կառուցում ենք հետևյալ կերպ. հավանականության դաշտում փոփոխական մեծությունների բնույթն արտահայտում ենք իզոգծերի սիստեմով, տրված ֆունկցիաների կորերի բաշխման միջոցով։ Նույն հավանականության դաշտում անց ենք կացնում (10) հավասարումից ստացված իզոգծերը։ Այնուհետև որոշում ենք հավանականության մակերեսները, որոնք ընդգրկված են իզոգծերով և կոորդինատային առանցքներով։ Այդ մակերեսների արժեքներն իրենցից ներկայացնում են երկու փոփոխականների կորերի բաշխման օրդինատներ, եթե տվյալ հաստատուն իզոգիծն ընդունենք որպես արգցխ։

Երկու պատահական փոփոխականների սիստեմի հավանականության աղյուսակներ պետք է կազմել այն հաշվով, որ հավանականության մակերեսը հավասար լինի մեկ միավորի։ Այդ նպատակի համար մեկ փոփոխականով գոյություն ունեցող աղյուսակների հիման վրա կազմված է (1) աղյուսակը (տես գծանկար 3)։ 4 գծանկարի վրա բերված են բաշխման կորեր, որոնք կախված են երկու փոփոխականից։ Այդ կորերի վրա տրված են նաև հաճախականության կորերը, և համեմատության համար՝ մեկ փոփոխականի ապահովության կորերը։

Երեք պատահական փոփոխականներից կախված հաշվային աղյուսակներ կազմելու համար վարվել ենք այնպես, ինչպես երկու փոփոխականի սիստեմի դեպքում, միայն որպես ապահովության սկզբնական կորեր վերցնում ենք երկու և մեկ պատահական փոփոխականի ապահովության կորերը։

Աշխատանքում բերված են երկու պատահական փոփոխականներից կախված ապահովության հաշվային աղյուսակներ, որոնք հնարավորություն են տալիս լուծել զանազան խնդիրներ։

Приложение. *Расчетные таблицы*

	$C_{v_1} = 0{,}1$									$C_{v_1} = 1{,}0$	
p \ C_{v_2}	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0
99,9	0,591	0,450	0,355	0,215	0,157	0,097	0,084	0,046	0,020	0,006	0
99,7	0,681	0,503	0,387	0,309	0,216	0,144	0,106	0,060	0,031	0,008	0
99,5	0,689	0,522	0,410	0,323	0,235	0,166	0,118	0,069	0,036	0,011	0
99	0,700	0,551	0,455	0,349	0,266	0,195	0,139	0,092	0,046	0,023	0,001
97	0,746	0,611	0,533	0,430	0,335	0,263	0,207	0,139	0,098	0,069	0,003
95	0,777	0,655	0,576	0,487	0,388	0,310	0,258	0,180	0,129	0,109	0,004
90	0,830	0,712	0,656	0,602	0,504	0,400	0,[illegible]68	0,263	0,217	0,189	0,025
80	0,894	0,801	0,767	0,712	0,639	0,541	0,520	0,416	0,372	0,316	0,063
75	0,920	0,843	0,813	0,761	0,695	0,609	0,583	0,499	0,445	0,390	0,089
70	0,948	0,883	0,861	0,804	0,758	0,674	0,643	0,573	0,517	0,459	0,132
60	0,997	0,965	0,949	0,903	0,890	0,814	0,803	0,754	0,688	0,643	0,242
50	1,042	1,046	1,052	1,043	1,037	0,969	0,989	0,948	0,895	0,867	0,428
40	1,101	1,136	1,170	1,191	1,203	1,150	1,226	1,174	1,200	1,166	0,738
30	1,163	1,248	1,327	1,366	1,429	1,474	1,564	1,567	1,645	1,677	1,310
25	1,[illegible]03	1,306	1,407	1,492	1,566	1,665	1,822	1,850	1,397	2,009	1,908
20	1,247	1,373	1,503	1,624	1,732	1,863	2,105	2,164	2,287	2,360	2,608
10	1,342	1,519	1,671	1,896	2,033	2,252	2,579	2,774	2,944	3,078	4,496
5	1,407	1,625	1,858	2,124	2,412	2,721	3,065	3,315	3,518	3,732	6,298
3	1,482	1,794	2,133	2,500	2,885	3,308	3,830	4,152	4,605	5,053	10,179
1	1,532	1,862	2,225	2,630	3,059	3,510	4,113	4,487	5,008	5,512	17,577
0,5	1,529	1,876	2,242	2,653	3,094	3,555	4,165	4,555	5,092	5,592	20,269
0,3	1,539	1,884	2,255	2,668	3,112	3,576	4,191	4,585	5,127	5,634	21,078
0,1	1,543	1,888	2,260	2,674	3-120	3,586	4,202	4,599	5,143	5,652	22,793

	$C_{v_1} = 0{,}2$									$C_{v_1} = 0{,}9$	
p \ C_{v_2}	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	1,0
99,9	0,348	0,197	0,171	0,145	0,110	0,077	0,034	0,006	0,005	0,003	0,002
99,7	0,429	0,228	0,184	0,164	0,141	0,088	0,051	0.009	0,007	0,003	0,002
99,5	0,441	0,242	0,[illegible]94	0,176	0,154	0,098	0,062	0,013	0,010	0,003	0,002
99	0,464	0,278	0,213	0,199	0,176	0,119	0,073	0,025	0,014	0,009	0,004
97	0,522	0,400	0,302	0,275	0,242	0,170	0,141	0,069	0,049	0,014	0,008
95	0,575	0,464	0,387	0,310	0,286	0,217	0,181	0,107	0,077	0,021	0,015
90	0,661	0,578	0,525	0,436	0,374	0,305	0,271	0,189	0,154	0,045	0,034
80	0,754	0,706	0,657	0,597	0,520	0,465	0,401	0,341	0,301	0,107	0,084
75	0,803	0,754	0,713	0,666	0,581	0,537	0,469	0,411	0,365	0,148	0,126
70	0,844	0,806	0,765	0,727	0,652	0,609	0,564	0,474	0,435	0,193	0,168
60	0,930	0,920	0,896	0,857	0,802	0,774	0,717	0,651	0,589	0,317	0,290
50	0,998	1,046	1,047	1,010	0,973	0,940	0,915	0,872	0,827	0,523	0,352
40	1,102	1,179	1,199	1,224	1,194	1,187	1,169	1,125	1,122	0,830	0,791
30	1,246	1,360	1,425	1,496	1,502	1,533	1,582	1,542	1,578	1,446	1,353
25	1,348	1,507	1,593	1,752	1,718	1,817	1,904	1,883	1,964	1,980	1,949
20	1,459	1,660	1,790	1,890	2,013	2,137	2,260	2,275	2,419	2,685	2,713
10	1,647	1,927	2,135	2,318	2,511	2,736	2,959	2,730	3,226	4,2[illegible]7	4,433
5	1,907	2,241	2,575	2,915	3,242	3,722	3,949	4,221	4,586	5,612	5,923
3	2,016	2,378	2,768	3,187	3,634	4,197	4,531	4,960	5,365	7,092	9,668
1	2,262	2,706	3,192	3,711	4,268	4,987	5,447	6,078	6,894	12,772	15,992
0,5	2,287	2,739	3,233	3,757	4,334	5.056	5,571	6,244	7,170	15,089	18,516
0,3	2,304	2,749	3,261	3,790	4,379	5,088	5,615	6,478	7,204	15,462	19,056
0,1	2,316	2,768	3,284	3,818	4,419	5,120	5,669	6,341	7,248	16,570	20,356

p \ C_{v_2}	$C_{v_1} = 0,3$								$C_{v_1} = 0,8$		
	0,3	0,4	0,5	9,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,8	0,9	1,0
99,0	0,160	0,122	0,095	0,042	0,025	0,020	0,015	0,008	0,001	0,001	0,001
99,7	0,257	0,193	0,124	0,090	0,043	0,041	0,020	0,010	0,002	0,001	0,001
99,5	0,277	0,212	0,133	0,105	0,068	0,047	0,023	0,012	0,003	0,002	0,002
99	0,307	0,240	0,156	0,132	0,093	0,061	0,038	0,017	,005	0,005	0,003
97	0,373	0,315	9,220	0,195	0,161	0,095	0,076	0,050	0,016	0,014	0,010
95	0,427	0,370	0,275	0,237	0,204	0,129	0,114	0,084	0,027	0,023	0,017
90	0,520	0,454	0,381	0,322	0,285	0,196	0,174	0,134	0,055	0,046	0,034
80	0,643	0,587	0,514	0,443	0,402	0,325	0,295	0,235	0,138	0,108	0,102
75	0,700	0,642	0,578	0,512	0,464	0,393	0,356	0,294	0,193	0,169	0,137
70	0,757	0,709	0,647	0,586	0,526	0,467	0,424	0,361	0,248	0,215	0,171
60	0,883	0,846	0,803	0,744	0,668	0,630	0,583	0,546	0,399	0,339	0,307
50	1,027	:,008	0,972	0,918	0,873	0,826	0,780	0,782	0,593	0,554	0,495
40	1,193	1,185	1,170	1,145	1,126	1,104	1,098	1,034	0,908	0,877	0,803
30	1,400	1,453	1,486	1,477	1,541	1,504	1,553	1,488	1,431	1,385	1,401
25	1,557	1,630	1,899	1,725	1,826	1,843	1,864	1,77-	1,927	1,909	1,913
20	1,734	1,850	2,972	2,005	2,154	2,209	2,273	2,144	2,560	2,555	2,631
10	2,094	2,307	2,491	2,617	2,940	3,116	2,621	3,448	3,923	4,048	4,237
5	2,354	2,638	4,890	3,108	3,491	3,699	4,053	4,314	5,148	5,295	5,672
3	2,817	3,248	3,692	4,116	4,717	5,081	5,591	6,080	7,818	8,435	9,157
1	3,167	3,712	4,389	4,892	5,701	6,213	6,918	7,635	11,644	13,124	14,673
0,5	3,254	3,834	4,600	5,107	5,857	6,569	7,362	8,140	13,039	15,008	16,252
0,3	3,311	3,908	4,712	5,259	6,041	6,725	7,590	8,433	13,743	15,822	16,890
0,1	3,349	3,961	4,776	5,344	6,151	6,930	7,785	8,627	14,481	16,108	18,045

p \ C_{v_2}	$C_{v_1} = 0,4$							$C_{v_1} = 0,7$			
	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	9,9	1,0	0,7	0,8	0,9	1,0
99,9	0,102	0,065	0,056	0,051	0,040	0,009	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002
99,7	0,135	0,076	0,062	0,058	0,056	0,018	0,008	0,006	0,004	0,003	0,002
99,5	0,144	0,087	0,068	0,066	0,064	0,027	0,010	0,008	0,005	0,004	0,002
99	0,172	0,103	0,087	0,080	0,072	0,036	0,015	0,024	0,015	0,010	0,006
97	0,232	0,162	0,137	0,131	0,120	0,071	0,030	0,039	0,023	0,014	0,009
95	0,283	0,217	0,187	0,183	0,168	0,116	0,050	0,051	0,030	0,023	0,016
90	0,381	0,330	0,280	0,285	0,256	0,224	0,109	0,115	0,101	0,084	0,062
80	0,516	0,455	0,405	0,438	0,408	0,376	0,228	0,206	0,171	0,172	0,140
75	0,576	0,520	0,480	0,504	0,480	0,474	0,288	0,276	0,239	0,239	0,187
70	0,637	0,590	0,554	0,577	0,552	0,554	0,347	0,448	0,289	0,267	0,234
60	0,781	0,742	0,704	0,753	0,736	0,751	0,496	0,494	0,453	0,478	0,390
50	0,953	0,877	0,910	0,965	0,976	1,020	0,735	0,713	0,667	0,689	0,593
40	1,162	1,164	1,171	1,264	1,272	1,342	1,062	1,023	0,981	0,999	0,937
30	1,459	1,495	1,545	1,696	1,720	1,834	1,598	1,517	1,484	1,533	1,467
25	1,692	1,782	1,857	2,017	2,096	2,281	2,055	1,954	1,987	2,011	1,967
20	1,966	2,090	2,206	3,463	2,560	2,755	2,581	2,494	2,553	2,672	2,701
10	2,463	2,702	2,941	3,362	3,559	3,327	3,703	3,620	3,811	4,079	4,199
5	2,872	3,206	3,520	3,983	4,143	4,429	4,686	4,528	4,830	5,204	5,464
3	3,607	4,127	4,673	5,350	5,193	6,217	6,771	6,757	7,257	7,947	8,617
1	4,299	4,983	5,701	6,651	7,240	8,051	8,786	9,930	10,631	11,905	13,050
0,5	4,504	5,250	6,013	7,118	7,688	8,583	9,513	10,252	11,493	13,256	14,649
0,3	4,575	5,342	6,131	7,174	7,866	8,798	9,754	10,701	11,998	13,700	15,178
0,1	4,669	5,455	6,298	7,320	8,048	9,026	10,014	11,203	12,665	14,505	16,187

	$C_{v_1} = 0,5$						$C_{v_1} = 0,6$				
p \ C_{v_2}	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
99,9	0,050	0,0029	0,021	0,019	0,017	0,011	0,063	0,028	0,006	0,004	0,002
99,7	0,069	0,036	0,025	0,023	0,021	0,015	0,069	0,034	0,015	0,008	0,004
99,5	0,082	0,043	0,034	0,028	0,026	0,017	0,075	0,038	0,021	0,014	0,006
99	0,101	0,073	0,045	0,036	0,030	0,019	0,083	0,048	0,032	0,020	0,011
97	0,158	0,094	0,068	0,065	0,042	0,021	0,114	0,075	0,059	0,044	0,020
95	0,196	0,123	0,102	0,093	0,062	0,023	0,141	0,101	0,080	0,064	0,035
90	0,271	0,218	0,179	0,158	0,104	0,069	0,204	0,162	0,129	0,108	0,072
80	0,410	0,341	0,306	0,280	0,208	0,173	0,250	0,281	0,300	0,192	0,149
75	0,479	0,406	0,366	0,335	0,271	0,220	0,386	0,340	0,379	0,240	0,206
70	0,549	0,472	0,426	0,382	0,344	0,278	0,459	0,402	0,344	0,295	0,266
60	0,707	0,632	0,613	0,568	0,500	0,451	0,626	0,578	0,517	0,456	0,413
50	0,858	0,820	0,826	0,783	0,719	0,555	0,827	0,784	0,729	0,684	0,626
40	1,155	1,082	1,107	1,016	1,042	0,995	1,111	1,097	1,062	0,983	0,958
30	1,546	1,510	1,575	1,566	1,563	1,515	1,553	1,636	1,587	1,499	1,517
25	1,855	1,800	1,933	1,985	2,011	2,013	1,929	2,057	2,037	1,954	2,063
20	2,208	2,178	2,367	2,460	2,553	2,614	2,380	2,547	2,541	2,518	2,595
10	2,776	3,013	3,364	3,569	3,804	3,875	3,341	3,674	3,699	3,825	4,019
5	3,603	3,848	4,215	4,371	4,638	4,928	4,051	4,448	4,653	4,868	5,004
3	4,619	5,176	5,927	6,300	6,795	7,346	5,245	6,721	6,755	7,315	7,852
1	5,742	6,534	7,300	7,456	7,712	7,866	6,959	8,708	9,285	10,191	11,233
0,5	6,088	6,981	8,239	9,130	10,029	10,845	7,129	9,162	10,009	11,212	12,401
0,3	6,140	7,160	8,469	9,404	10,978	11,944	7,444	9,545	10,491	11,794	12,916
0,1	6,432	7,302	8,797	9,762	11,293	12,709	7,868	10,042	11,060	12,456	13,668