ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

И. В. КОВАЛИШИНА, В. П. ПОТАПОВ

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ СТРУКТУРА АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ J-РАСТЯГИВАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

1°. В статье изучается аналитическая матрица-функция $W(\lambda)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. $W(\lambda) J W^*(\lambda) - J \geqslant 0 \qquad (\operatorname{Re}\lambda > 0)$,

2. $\overline{W(\lambda)} = W(\bar{\lambda})$,

то-есть вещественная, J-растягивающая в правой полуплоскости матрица-функция.

Очевидно, что вещественная матрица-функция $W(\lambda)$, имеющая полюс кратности k в мнимой точке λ_0, имеет полюс той же кратности и в сопряженной точке $\bar{\lambda}_0$, причем коэффициенты в разложениях в ряды Лорана в окрестности этих точек комплексно сопряженные.

Простейшую вещественную, J-растягивающую в правой полуплоскости, J-унитарную на мнимой оси матрицу-функцию $Z(\lambda)$, имеющую полюсы первого порядка в точках λ_0 и $\bar{\lambda}_0$ и нормированную условием $Z(\infty) = I$, будем называть элементарным вещественным множителем и записывать так:

$$Z(\lambda) = I + \frac{2\sigma_0 A}{\lambda - \lambda_0} + \frac{2\sigma_0 \bar{A}}{\lambda - \bar{\lambda}_0} \qquad (\sigma_0 = \operatorname{Re}\lambda_0).$$

Элементарные множители будем рассматривать для точек λ_0 и $\bar{\lambda}_0$, лежащих в правой полуплоскости. Если точки λ_0, $\bar{\lambda}_0$ $(\operatorname{Re}\lambda_0 > 0)$ являются полюсами $Z^{-1}(\lambda)$, то рассуждения доказательства проводятся аналогично.

$Z(\lambda)$ можно разложить на произведение двух элементарных множителей с полюсами в точках λ_0 и $\bar{\lambda}_0$:

$$Z(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) = b_{\lambda_0}(\lambda)\cdot b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda).$$

Здесь
$$P_1^2 = P_1, \quad P_1 J \geqslant 0, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_2 J \geqslant 0.$$

Разложение $Z(\lambda)$ на произведение элементарных множителей можно осуществлять в любом порядке, и так как $Z(\lambda) = \overline{Z(\bar{\lambda})}$, то

$$Z(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) = \left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{P}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 \bar{P}_2}{\lambda - \lambda_0}\right).$$

Однако, в силу некоммутативности умножения, P_2, вообще говоря, не равно $\bar{P}_1$.

2°. Рассмотрим разложение матрицы-функции $W(\lambda)$ в ряд Лорана в окрестности точки λ_0:

$$W(\lambda) = \frac{2\sigma_0 c}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \cdots$$

Выберем любое решение x уравнения $c^* J c x = c^*$ и составим матрицу $P_1 = cxJ$.

Нетрудно проверить, что P_1 не зависит от выбора x и является J—неотрицательной проективной матрицей, то есть $P_1^2 = P_1$, $P_1 J \geqslant 0$.

При этом элементарный множитель $b_{\lambda_0}(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)$ отщепляется от $W(\lambda)$, а матрица-функция $W_1(\lambda) = b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\, W(\lambda)$ обладает следующими свойствами: $W_1(\lambda)$—J-растягивающая в правой полуплоскости и порядок полюса в точке λ_0 у $W_1(\lambda)$ понижается на единицу.

От матрицы-функции $W_1(\lambda)$ отщепляем аналогичным способом элементарный множитель $b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)$.

Можно доказать, что произведение

$$Z(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) = b_{\lambda_0}(\lambda) \cdot b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda)$$

является элементарным вещественным множителем, а $b_{\lambda_0}^{-1}(\lambda)\, b_{\bar{\lambda}_0}^{-1}(\lambda) \times$ $\times\, W(\lambda) = W_2(\lambda)$ остается вещественной матрицей-функцией.

Этот процесс отщепления приводит к основной

Теореме I. *Вещественная, рациональная, J-растягивающая в правой полуплоскости, J-унитарная на мнимой оси матрица-функция $W(\lambda)$ разлагается на произведение вещественных элементарных множителей:*

$$W(\lambda) = Z_1(\lambda) \cdot Z_2(\lambda) \cdots Z_k(\lambda)\, V,$$

где V—постоянная вещественная J-унитарная матрица.

Из теоремы I вытекает, что изучение вещественной матрицы-функции сводится к изучению структуры элементарного вещественного множителя.

3°. Условие вещественности $Z(\lambda)$ накладывает следующее ограничение на P_1 и P_2:

$$\bar{P}_1\left(I + \frac{i\sigma_0}{\tau_0}\bar{P}_2\right) = \left(I + \frac{i\sigma_0}{\tau_0}P_1\right)P_2, \tag{3.1}$$

являющееся необходимым и достаточным условием.

Возникает вопрос: можно ли для любого J-положительного проектора P_1 отыскать J-положительный проектор P_2, удовлетворяющий равенству (3.1). Доказана

Теорема 2. *Для того чтобы множитель*

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda-\overline{\lambda_0}}\right)$$

был элементарным вещественным множителем: $Z(\lambda)=\overline{Z(\overline{\lambda})}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$P_1\left(J-\frac{\sigma_0^2}{|\lambda_0|^2}\overline{P_1}J\right)P_1^*\geqslant 0. \qquad (3.2)$$

Однако, построение P_2 по P_1 приводит к довольно сложной структуре P_2. Поэтому целесообразнее решать сначала эту задачу для проекторов первого ранга, доказав затем, что любой элементарный вещественный множитель разлагается на произведение конечного числа множителей первого ранга.

Вещественный множитель $Z(\lambda)=I+\dfrac{2\sigma_0 A}{\lambda-\lambda_0}+\dfrac{2\sigma_0\overline{A}}{\lambda-\overline{\lambda_0}}$, в котором A — матрица первого ранга, будем называть вещественным множителем первого ранга или примарным вещественным множителем.

Если примарный вещественный множитель записан в виде произведения двух комплексных множителей, то, очевидно, что p_1 и p_2 являются проекторами первого ранга, то есть $p_1=Jg_1^*g_1$, $g_1Jg_1^*=1$, $p_2=Jg_2^*g_2$, $g_2Jg_2^*=1$, и $z(\lambda)=\left(I+\dfrac{2\sigma_0}{\lambda-\lambda_0}p_1\right)\left(I+\dfrac{2\sigma_0}{\lambda-\overline{\lambda_0}}p_2\right)$.

Заметим, что вектор g определяется проектором p с точностью до скалярного множителя e^{it}.

Из равенства (3.1), записанного для проекторов первого ранга, вытекает

Теорема 3. *Пусть* $\left(I+\dfrac{2\sigma_0}{\lambda-\lambda_0}p_1\right)$, $p_1=Jg_1^*g_1$, $g_1Jg_1^*=1$ — *элементарный множитель первого ранга.*

Для того чтобы существовал множитель первого ранга $\left(I+\dfrac{2\sigma_0 p_2}{\lambda-\overline{\lambda_0}}\right)$, *дополняющий первый до вещественного*

$$z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 p_2}{\lambda-\overline{\lambda_0}}\right),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$|\overline{g_1}Jg_1^*|<\sec\theta \qquad (\theta=\arg\lambda_0).$$

При этом орты g_1 и g_2 могут быть так пронормированы, что

$$\overline{g_1} J g_1^* = \operatorname{th} a \sec \theta e^{i\theta}, \qquad (3.3$$

а

$$g_2 = \operatorname{ch} a \overline{g_1} - \operatorname{sh} a g_1.$$

Так как вектор g_2 определяется по вектору g_1 однозначно точностью до скалярного множителя $e^{i\alpha}$, то множитель $\left(I + \frac{2\sigma_0 p_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)$, а, следовательно, и вещественный множитель первого ранга

$$z(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 p_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) = I +$$

$$+ \frac{2\sigma_0 \operatorname{ch} a}{\lambda - \lambda_0} J g_1^* \overline{g_2} + \frac{2\sigma_0 \operatorname{ch} a}{\lambda - \bar{\lambda}_0} \overline{J g_1^* g_2}$$

определяется вектором g_1 однозначно. Поэтому для векторов g_1 и принимаем стандартные обозначения:

$$g_1 = g, \quad g_2 = \tilde{g} = \operatorname{ch} a \bar{g} - \operatorname{sh} a g.$$

В дальнейшем изложении вектор $g_1 = g$, нормированный р венством (3.3), будем называть правильно нормированным вектоpo

4°. В заключение докажем, что элементарный вещественный мн житель разлагается на произведение примарных вещественных мн жителей.

Легко видеть, что если $Z(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)$ элементарный вещественный множитель и если g_1—любой орт из пр странства

$$M_1 = HP_1, \quad \text{то} \quad |g_1 J g_1^*| < \sec \theta.$$

Это обстоятельство позволяет правильно нормировать любой о $g_1 \in HP_1$ и построить вектор $\tilde{g}_1 = \operatorname{ch} a \overline{g_1} - \operatorname{sh} a g_1$, причем произве ние множителей $b_{\lambda_0}(\lambda) b_{\bar{\lambda}_0}(\lambda) = \left(I + \frac{2\sigma_0 J g_1^* g_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 J \tilde{g}_1^* \tilde{g}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)$ бу примарным вещественным множителем. Однако, неясно будет ли кой примарный множитель отщепляться от $Z(\lambda)$.

Отщепим от первого комплексного элементарного множителя $Z(\lambda)$ комплексный примарный множитель, порожденный правиль нормированным ортом $g_1 \in HP_1$, а от второго—комплексный прима ный множитель, порожденный ортом $g_2 \in HP_2$.

Тогда $$\left(I + \frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda - \lambda_0}\right) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p_1}{\lambda - \lambda_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 Q_1}{\lambda - \lambda_0}\right),$$

где $$Q_1 = P_1 - p_1, \quad p_1 = J g_1^* g_1, \quad \text{а}$$

$$\left(I + \frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right) = \left(I + \frac{2\sigma_0 p_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right)\left(I + \frac{2\sigma_0 Q_2}{\lambda - \bar{\lambda}_0}\right),$$

где $Q_2 = P_2 - p_2$, $p_2 = J g_2^* \cdot g_2$, и, следовательно,

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0Q_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right).$$

Переставим местами второй и третий множители. Эта перестановка возможна, так как отщепление элементарных множителей от матрицы-функции $\left(I+\frac{2\sigma_0Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)$ можно осуществлять, начиная с любого полюса, то есть справедливо равенство

$$\left(I+\frac{2\sigma_0Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)=\left(I+\frac{2\sigma_0\hat P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\hat Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)$$

и

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\hat P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\hat Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0Q_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right).$$

Для того, чтобы множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\hat P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)$ был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы $\hat g_2=\operatorname{ch}a\bar g_1-\operatorname{sh}a g_1$. Вопрос сводится к тому, существует ли такой вектор $g_2\in HP_2$, что $\hat g_2=\bar g_1$ и как выбирать его в $M_2=HP_2$.

Однако, здесь целесообразнее воспользоваться другим критерием вещественности примарного множителя. Из условия вещественности примарного множителя $z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\bar P}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)$

$$\left(I+\frac{2\sigma_0P}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\bar P}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)=\left(I+\frac{2\sigma_0\bar P}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0\bar{\bar P}}{\lambda-\lambda_0}\right)$$

видно, что второй множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0\bar{\bar P}}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)$ при перестановке его на первое место имеет вид $\left(I+\frac{2\sigma_0\bar P}{\lambda-\bar\lambda_0}\right)$. Нетрудно убедиться в том, что в случае множителей первого ранга это условие является не только необходимым, но и достаточным для вещественности $z(\lambda)$.

Имея в виду этот критерий вещественности $z(\lambda)$, поступим следующим образом:

1. Отщепим в $\left(I+\frac{2\sigma_0P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)$ примарный множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0p_1}{\lambda-\lambda_0}\right)$, порожденный вектором g_1. Тогда

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0p_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0P_2}{\lambda-\bar\lambda_0}\right).$$

2. Переставим последний множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$ на первое место

$$Z(\lambda)=\left\{\left(I+\frac{2\sigma_0 p_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 Q_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\right\}\left(I+\frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)=$$

$$=\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{P}_2}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left\{\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{p}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{Q}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\right\}.$$

В силу вещественности $Z(\lambda)$

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{P}_2}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)=\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{P}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right).$$

3. Выделим из этого множителя примарный множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$, порожденный вектором $\bar{g}_1$. Тогда

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{Q}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left\{\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{p}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{Q}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\right\}.$$

4. Переставим множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{Q}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$ на последнее место

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{p}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{Q}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\bar{Q}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right).$$

Для того чтобы убедиться в том, что примарный множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{p}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)$ является вещественным, поменяем местами

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right) \text{ и } \left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{p}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right):$$

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 \bar{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{p}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)=\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{\hat{p}}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\bar{p}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right).$$

Легко видеть, что $p_1=\hat{\hat{\hat{p}}}_1$[1].

---

[1] Это вытекает из следующих двух свойств перестановок:

1. Если $b_{\lambda_0}(\lambda)\, b_{\mu_0}(\lambda)=\hat{b}_{\mu_0}(\lambda)\, \hat{b}_{\lambda_0}(\lambda)=\hat{\hat{b}}_{\lambda_0}(\lambda)\, \hat{\hat{b}}_{\mu_0}(\lambda)$, где $\lambda_0 \neq \mu_0$,

то $\quad b_{\lambda_0}(\lambda)=\hat{\hat{b}}_{\lambda_0}(\lambda)$.

Таким образом, справедливо равенство:

$$\left(I+\frac{2\sigma_0 \overline{P}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{P}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\bar{P}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right),$$

а это и означает, согласно упомянутому критерию, что отщепленный

множитель $\left(I+\frac{2\sigma_0 \overline{P}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{P}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$ является примарным вещественным множителем. Тем самым доказана

Теорема 4. *Пусть дан элементарный вещественный множитель*

$$Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 P_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 P_2}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right), \quad Z(\lambda)=\overline{Z(\bar{\lambda})}.$$

Для любого правильно нормированного орта g_1 из подпространства HP_1 порожденный этим ортом примарный вещественный множитель $Z(\lambda)=\left(I+\frac{2\sigma_0 p_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \overline{p}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$, *где* $p_1=Jg_1^*g_1$, $\overline{p}_1=J\overline{g}_1^*\overline{g}$ *и* $\overline{g}_1=\operatorname{ch} a\,\overline{g}_1-\operatorname{sh} a g_1$, *отщепляется от* $Z(\lambda)$.

Так как остаток $\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{Q}}_1}{\lambda-\lambda_0}\right)\left(I+\frac{2\sigma_0 \hat{\hat{\bar{Q}}}_1}{\lambda-\bar{\lambda}_0}\right)$, где $r(\hat{\hat{Q}}_1)=r(P_1)-1$ является элементарным вещественным множителем, то процесс отщепления примарных множителей можно продолжить.

Повторяя $m-1$ раз $\{r(P_1)=m\}$ процесс отщепления, приходим к разложению элементарного вещественного множителя на произведение m примарных множителей.

Таким образом, вещественная, рациональная, J-растягивающая в правой полуплоскости, J-унитарная на мнимой оси матрица-функция $W(\lambda)$ может быть разложена на произведение примарных вещественных множителей.

Одесский технологический институт
пищевой и холодильной промышленности

Поступила 12 VI 1965

---

2. Если $b_{\lambda_0}(\lambda)\{b_{\mu_0}(\lambda)\,b_{\nu_0}(\lambda)\}=\{\widehat{b_{\mu_0}(\lambda)b_{\nu_0}}(\lambda)\}\,\hat{b}_{\lambda_0}(\lambda)$ и

$$b_{\lambda_0}(\lambda)\{b_{\mu_0}(\lambda)\,b_{\nu_0}(\lambda)\}=\{b_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\mu_0}(\lambda)\}\,b_{\nu_0}(\lambda)=\{\hat{b}_{\mu_0}(\lambda)\,\hat{b}_{\lambda_0}(\lambda)\}\,b_{\nu_0}(\lambda)=$$

$$=\hat{b}_{\mu_0}(\lambda)\,\{\hat{b}_{\lambda_0}(\lambda)\,b_{\nu_0}(\lambda)\}=\hat{b}_{\mu_0}(\lambda)\{\hat{b}_{\nu_0}(\lambda)\,\hat{\hat{b}}_{\lambda_0}(\lambda)\}=\{\hat{b}_{\mu_0}(\lambda)\,\hat{b}_{\nu_0}(\lambda)\}\hat{\hat{b}}_{\lambda_0}(\lambda),$$

где $\lambda_0\neq\mu_0,\ \nu_0$, то $\widehat{b_{\lambda_0}}(\lambda)=\hat{\hat{b}}_{\lambda_0}(\lambda)$.

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ, Վ. Պ. ՊՈՏԱՊՈՎ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ԻՐԱԿԱՆ-ՋԳՈՂ ՄԱՏՐԻՑԱՆԵՐ-ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՈՒԼՏԻՊԼԻԿԱՏԻՎ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՆ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է ռեակտիվ մատրից-ֆունկցիայի վերլուծությանը առաջին կարգի պարզագույն արտադրիչների։

Մտցվում է պարզագույն ռեակտիվ արտադրիչի գաղափարը և ապացուցվում է ռեակտիվ ռացիոնալ մատրից-ֆունկցիայի $w(\lambda)$ *ռեակտիվ արտադրիչների վերլուծության մասին թեորեմա։*

Նկարագրվում է ռեակտիվ առաջին կարգի արտադրիչի $r(\lambda)$ *ստրուկտուրան և տրվում են նրա ռեակտիվ լինելու անհրաժեշտ ու բավարար պայմանները։*

Եվ վերջապես, ապացուցվում է թեորեմա կամայական պարզագույն ռեակտիվ արտադրիչի՝ առաջին կարգի պարզագույն արտադրիչների վերլուծության մասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Патапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. Труды Московского математического общества, т. 4, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

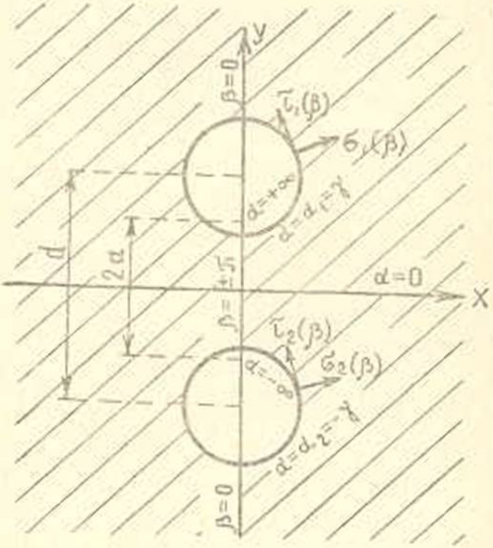
В. В. ЕГАНЯН

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ КРУГЛЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ВДОЛЬ КОТОРЫХ ДЕЙСТВУЮТ ЗАДАННЫЕ УСИЛИЯ

В данной статье рассматривается напряженное состояние бесконечной плоскости, ослабленной двумя круглыми отверстиями (фиг. 1), когда на контурах отверстий нагрузки произвольны, а на бесконечности нагрузка отсутствует:

$$\sigma_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \sigma_i(\beta), \quad \tau_{\alpha\beta}\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \tau_i(\beta) \tag{1}$$

$$(i = 1,\ 2; \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \gamma).$$



Фиг. 1.

Для решения задачи воспользуемся системой биполярных координат (α, β).

В этих же координатах Я. С. Уфляндом рассмотрена общая задача о растяжении бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями, когда контуры отверстий свободны от усилий, т. е. выполняются условия [1]:

$$\sigma_\alpha\Big|_{\alpha=\alpha_i} = \tau_{\alpha\beta}\Big|_{\alpha=\alpha_i} = 0$$

$$(i = 1,\ 2; \quad \alpha_1 = -\alpha_2 = \gamma).$$

Предположим, что внешние нагрузки статически уравновешиваются на каждом из контуров $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$.

Кроме этого полагаем, что $\sigma_i(\beta)$, $\tau_i'(\beta)$ и производные функции $\sigma_i(\beta)$ интегрируемы в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Общие формулы напряжений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\sigma_\alpha = \left[g\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\operatorname{ch}\alpha}{a} \right](g\Phi),$$

$$\sigma_\beta = \left[g\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\beta}{a} \right](g\Phi). \tag{2}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -g\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi),$$

где

$$g = \frac{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}{a}. \tag{3}$$

Функция $g\Phi$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\Phi) = 0.$$

Общее решение последнего уравнения, т. е. $g\Phi$, при условиях (1) разыскиваем аналогично Я. С. Уфлянду

$$g\Phi = a(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\,l + C_0(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\ln(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) +$$

$$+ aB_0\cos\beta + \sum_{n=1}^{\infty}[f_1(n,\alpha)\cos n\beta + f_2(n,\alpha)\sin n\beta], \tag{4}$$

где

$$f_j(n,\alpha) = A_j(n)\operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_j(n)\operatorname{ch}(n-1)\alpha +$$

$$+ C_j(n)\operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_j(n)\operatorname{sh}(n-1)\alpha \quad (j = 1,\ 2;\quad n \geqslant 2), \tag{5}$$

$$f_j(1,\alpha) = A_j(1)\operatorname{ch}2\alpha + C_j(1)\operatorname{sh}2\alpha \quad (j = 1,\ 2). \tag{6}$$

Однако, при этом функция $g\Phi$ не должна изменять напряженное состояние на бесконечности, т. е. должно выполняться условие

$$(g\Phi)_\infty = (g\Phi)_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} = 0. \tag{7}$$

Обратимся к граничным условиям (1), которые с учетом (2), (3) и (4) можно записать в виде

$$\left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\alpha\right](g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} =$$

$$= a\sigma_i(\beta) + \operatorname{sh}\alpha_i(\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta)\,l - aB_0 + C_0(\operatorname{sh}^2\alpha_i + \cos^2\beta - \operatorname{ch}\alpha_i\cos\beta), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = \frac{a\tau_i(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta} - \frac{C_0\sin\beta\operatorname{sh}\alpha_i}{\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta} - l\cdot\sin\beta,$$

$$(i = 1,\ 2),$$

где

$$g\Phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty}[f_1(n,\alpha)\cos n\beta + f_2(n,\alpha)\sin n\beta]. \tag{9}$$

Так как функция $g\Phi_0$ представлена в виде ряда Фурье, то левая часть второго условия (8) будет представлять собой некоторые ряды Фурье. Однако, первое условие (8) непосредственно не представляет собой ряда Фурье, так как перед знаками рядов имеются функции от переменной β. С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду, дифференцируем первое условие (8) по β.

С учетом второго условия (8) получим

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)(\partial\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i}=\frac{a\tau_i'(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}-\frac{a\tau_i(\beta)\operatorname{sh}\alpha_i}{(\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta)^2}+$$
$$+C_0\left[\sin\beta-\frac{\sin\beta\cos\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}-\frac{\sin\beta\operatorname{sh}^2\alpha_i}{(\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta)^2}\right]. \tag{10}$$

Из второго условия (8) и из (10) с учетом (9) находим

$$f_1(n,\alpha_i)=K_{1,i}(n),\qquad f_1'(n,\alpha_i)=K_{3,i}(n),$$
$$f_2(n,\alpha_i)=K_{2,i}(n),\qquad f_2'(n,\alpha_i)=K_{4,i}(n), \tag{11}$$
$$(i=1,\ 2;\quad n\geqslant 2)$$

$$f_1(1,\alpha_i)=l+K_{3,i}(1)\qquad f_2(1,\alpha_i)=K_{4,i}(1)\qquad (i=1,\ 2), \tag{12}$$

где

$$K_{1,i}(n)=$$
$$=\frac{a}{\pi n(n^2-1)}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sigma_i'(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}-\frac{\tau_i\operatorname{sh}\alpha_i}{(\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta)^2}\right]\sin n\beta\,d\beta-C_0(H_1+H_2\operatorname{sh}^2\alpha_i)\right\},$$

$$K_{2,i}(n)=-\frac{a}{\pi n(n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sigma_i'(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}-\frac{\tau_i\operatorname{sh}\alpha_i}{(\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta)^2}\right]\cos n\beta\,d\beta,$$
$$(n\geqslant 2)$$

$$K_{3,i}(n)=\frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau_i(\beta)\sin n\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta+\frac{aC_0}{\pi n}\operatorname{sh}\alpha_i H_3,$$
$$\tag{13}$$
$$K_{4,i}(n)=-\frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau_i(\beta)\cos n\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta\qquad (n\geqslant 1),$$

$$H_1=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\beta\cos\beta\sin n\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(n-2)\beta-\cos(n+2)\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta,$$

$$H_2=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\beta\sin n\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta)^2}\,d\beta=\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_i}\,\frac{\partial H_3}{\partial\alpha_i},$$

$$H_3=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\beta\sin n\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta=\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(n-1)\beta-\cos(n+1)\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta.$$

Из таблиц интегралов [6] находим

$$\int_{0}^{\pi}\frac{\cos m\beta\,d\beta}{\operatorname{ch}\alpha_i-\cos\beta}=\frac{\pi}{\operatorname{sh}\alpha_i}(\operatorname{ch}\alpha_i-\operatorname{sh}\alpha_i)^m,$$

откуда, при $m=n-2;\ n-1;\ n+1;\ n+2$ вычисляются значения интегралов H_1, H_2 и H_3.

Из (15) находим коэффициенты $A_i(n)$, $B_i(n)$, $C_i(n)$ и $D_i(n)$ (при $n \geqslant 2$), выраженные через C_0, а из (16) находим $A_1(1)$, $C_1(1)$, $A_2(1)$ и $C_2(1)$, выраженные через l и C_0. Остается определить коэффициенты C_0, B_0 и l.

Для их определения требуем, чтобы удовлетворялось условие (7), а также первое условие (8).

Из условия (7) с помощью (4) получим следующее равенство:

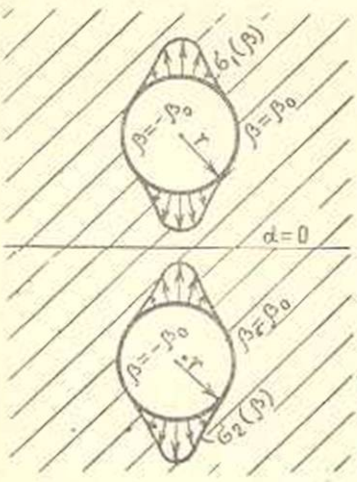
$$aB_0 + A_1(1) + \sum_{n=2}^{\infty} [A_1(n) + B_1(n)] = 0. \tag{14}$$

Так как первое условие (8) имеет место для всех $\beta\ (-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi)$, то умножая обе части на $d\beta$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, с учетом (9), (11) и (12) получим

$$2aB_0 - l\,\mathrm{sh}\,2\alpha_i - (1 + 2\,\mathrm{sh}^2\alpha_i)\,C_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_i(\beta)\,d\beta \qquad (i = 1,\ 2). \tag{15}$$

Из (18) и (19) находим C_0, B_0 и l.

Таким образом, при данной внешней нагрузке находятся все коэффициенты $g\Phi$, т. е. поставленная задача полностью решена.



Фиг. 2.

Рассмотрим частный случай внешней нагрузки, когда на контурах отверстий приложены экспоненциально изменяющиеся нормальные нагрузки, симметричные относительно координат α и β (фиг. 2):

$$\begin{gathered}\sigma_1(\beta) = \sigma_2(\beta) = \\ = -Q_1(\mathrm{ch}\,\gamma - \cos\beta)^2(\cos\beta_0 - \cos\beta)\,e^{-k\beta} \\ \text{при}\quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0, \\ \sigma_1(\beta) = \sigma_2(\beta) = \\ = Q_2(\mathrm{ch}\,\gamma - \cos\beta)^2(\cos\beta_0 - \cos\beta)\,e^{-k(\pi-\beta)} \\ \text{при}\quad \beta_0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \\ \tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = 0 \text{ при } -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,\end{gathered} \tag{16}$$

где k—положительное число, Q_1 и Q_2—параметры, связь между которыми получается с помощью уравнений статики, а

$$\beta_0 = \mathrm{arc\,tg\,sh}\,\gamma < \frac{\pi}{2}, \qquad r = \frac{a}{\mathrm{sh}\,\gamma}. \tag{17}$$

Из (16) видно, что такой выбор нагрузки не только облегчает вычисление интегралов (13), но дает возможность совершить предельный переход к сосредоточенной силе (когда $k \to \infty$).

При таком выборе нагрузки следует брать

$$f_2(n, \alpha) = C_1(n) = D_1(n) = 0 \qquad (n \geq 1), \tag{18}$$

$$l = 0.$$

Тогда в этом случае с помощью (5), (6), (11), (12) и (18) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &A_1(n)\operatorname{ch}(n+1)\gamma + B_1(n)\operatorname{ch}(n-1)\gamma = K_{1,1}(n), \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n \geq 2) \\ &(n+1)A_1(n)\operatorname{sh}(n+1)\gamma + (n-1)B_1(n)\operatorname{sh}(n-1)\gamma = K_{3,1}(n) \end{aligned} \tag{19}$$

$$2A_1(1)\operatorname{sh}2\gamma = K_{3,1}(1) \tag{20}$$

где

$$K_{1,1}(n) = \frac{2a}{\pi n(n^2-1)}\int_0^\pi \frac{\sigma_1'(\beta)\sin n\beta}{\operatorname{ch}\gamma - \cos\beta}\,d\beta - \frac{aC_0(H_1 + H_2\operatorname{sh}^2\gamma)}{\pi n(n^2-1)}$$

$$(n \geq 2). \tag{21}$$

$$K_{3,1}(n) = \frac{aC_0H_3\operatorname{sh}\gamma}{\pi n} \qquad (n \geq 1).$$

Решая систему (19) и (20), находим $A_1(n)$, $B_1(n)$ (при $n \geq 2$) и $A_1(1)$, выраженные через C_0.

Вид уравнений (14) в этом случае не изменяется, а уравнение (15) принимает вид:

$$2aB_0 - (1 + 2\operatorname{sh}2\gamma)C_0 + 2A_1(1)\operatorname{ch}2\gamma = \frac{2a}{\pi}\int_0^\pi \sigma_1(\beta)\,d\beta. \tag{22}$$

Тогда коэффициенты B_0 и C_0 находим из равенств (14) и (22).

Для вычисления σ_β вблизи контуров предварительно определим разность $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$.

Из (2) находим

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 1\right](g\Phi). \tag{23}$$

С помощью граничных условий (16) из (23) легко вычисляется напряжение σ_β вблизи контуров

$$a\sigma_\beta|_{\alpha=\gamma} = a\sigma_1(\beta) + 2C_0(\operatorname{ch}\gamma\cos\beta - \operatorname{ch}2\gamma - \cos 2\beta) +$$

$$+ (\operatorname{ch}\gamma - \cos\beta)\left[4A_1(1)\cos\beta\operatorname{ch}2\gamma + 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1)K_{1,1}(n)\cos n\beta\right]. \tag{24}$$

Теперь перейдем к сосредоточенной силе.

Если по фиг. 2 подсчитать суммарную нагрузку, приложенную по линиям $\alpha = \gamma$ и $\alpha = -\gamma$ и приравнять каждую из них (при $k \to \infty$) заданной величине P, т. е.

$$-2\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^{\beta_0}\sigma_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\gamma}d\beta=2\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\beta_0}^{\pi}\sigma_1\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\gamma}d\beta=P, \tag{25}$$

то получим случай действия осевых сосредоточенных сил (фиг. 3).

С помощью (16) из (25) получим

$$\begin{aligned}(\operatorname{ch}\gamma-1)(\cos\beta_0-1)\lim_{k\to\infty}\frac{Q_1}{k}&=-\frac{P}{2a},\\ (\operatorname{ch}\gamma+1)(\cos\beta_0+1)\lim_{k\to\infty}\frac{Q_2}{k}&=\frac{P}{2a}.\end{aligned}\tag{26}$$

Из (16) и (21) при $k\to\infty$ с помощью (26) находим

$$\begin{aligned}K_{1.1}(n)&=\frac{P}{\pi(n^2-1)}\left[(-1)^n-1\right]-\frac{aC_0(H_1+H_2\operatorname{sh}^2\gamma)}{\pi n(n^2-1)}\quad(n\geqslant 2),\\ K_{3.1}(n)&=\frac{aC_0}{\pi n}\operatorname{sh}\gamma\cdot H_2\qquad(n\geqslant 1).\end{aligned}\tag{27}$$

В качестве числового примера в случае сосредоточенной силы с помощью формул (4), (6), (9), (10) и (18)—(31), с точностью 10^{-4}, находим значения напряжений в начале координат, т. е. в точке с координатами $\alpha=0$, $\beta=\pm\pi$:

$$\tau_{\alpha\beta}=0$$

$$\sigma_\alpha=-\frac{17}{2\pi}\,\frac{P}{a}\,\frac{2\operatorname{sh}4\gamma-\operatorname{sh}2\gamma}{3\operatorname{sh}2\gamma+\operatorname{sh}6\gamma},$$

$$\sigma_\beta=\frac{1}{2\pi}\,\frac{P}{a}\,\frac{14\operatorname{sh}4\gamma-31\operatorname{sh}2\gamma}{3\operatorname{sh}2\gamma+\operatorname{sh}6\gamma},$$

где $\operatorname{sh}\gamma=\frac{a}{r}$.

Для разных соотношений $\frac{a}{r}$ значения σ_α и σ_β приведены в таблице.

Таблица

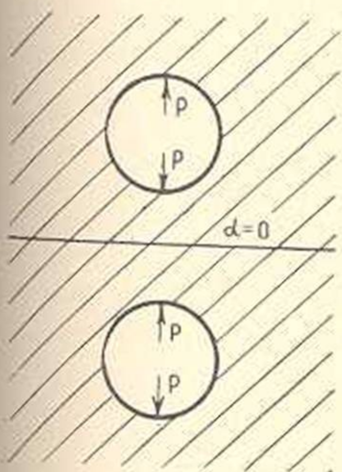
$\frac{a}{r}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\frac{a}{P}\sigma_\alpha$	0,897	0,318	0,142	0,0823	0,053	0,0337	0,0274	0,0212	0,0165	0,0135
$\frac{a}{P}\sigma_\beta$	0,371	0,131	0,0590	0,0340	0,022	0,0139	0,0113	0,0087	0,0068	0,0056

Из таблицы видно, что σ_α и σ_β уменьшаются при увеличении отношения $\frac{a}{r}$.

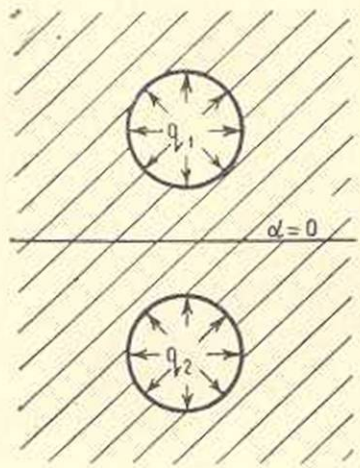
В частности, если принять

$$\sigma_i(\beta) = -q_i, \quad \tau_i(\beta) = 0, \qquad (i = 1,\ 2), \tag{28}$$

т. е. рассмотреть случай, когда по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное давление, равное q_1, а по контуру $\alpha = \alpha_2$ давление, равное q_2 (фиг. 4), то с помощью (28) из (5), (6), (11), (12), (13) и (15) получим



Фиг. 3.



Фиг. 4.

$$A_2(n) = B_2(n) = C_2(n) = D_2(n) = 0 \qquad (n \geqslant 2),$$

$$A_2(1) = C_2(1) = 0,$$

$$f_1(n, \alpha_i) = K_{1,i}(n) = -\frac{aC_0}{\pi n(n^2-1)}(H_1 + H_2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i),$$

$$f_1(n, \alpha_i) = K_{3,i}(n) = \frac{aC_0}{\pi n} \operatorname{sh} \alpha_i \cdot H_3 \qquad (n \geqslant 2), \tag{29}$$

$$f_1(1, \alpha_i) = I + K_{3,i}(1) = I + \frac{aC_0}{\pi} \operatorname{sh} \alpha_i \cdot H_3,$$

$$2aB_0 - I \cdot \operatorname{sh} 2\alpha_i - (1 + 2 \operatorname{sh}^2 \alpha_i)\, C_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = -2aq_i.$$

С помощью (5), (6) и (14) из (29) находим $A_1(n)$, $B_1(n)$, $C_1(n)$ и $D_1(n)$ (при $n \geqslant 2$), а также $A_1(1)$, $C_1(1)$, I, C_0 и B_0.

Если в предельном случае $\alpha_1 = \infty$ принять $\sigma_1(\beta) = \tau_1(\beta) \equiv 0$, то будем иметь плоскость с одним круглым отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия.

Армянский сельскохозяйственный институт

Поступила 20 IV 1965

Վ. Վ. ԵԳԱՆՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ԿԼՈՐ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ, ԵՐԲ ԱՆՑՔԵՐԻ ԵԶՐԱԳԾԵՐՈՎ ԱԶԴՈՒՄ ԵՆ ՏՎԱԾ ԲԵՌԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկվում է երկու կլոր անցքերով անվերջ հարթության առաձգականության տեսության ընդհանուր խնդիրը, երբ անցքերի եզրագծերով ազդում են տված բեռները։

Խնդիրը դիտարկված է երկբևեռային կոորդինատներով, որի լուծումը լարումների ցΦ ֆունկցիան որոնվում է (4) տեսքով, որտեղ մտնող գործակիցները որոշվում են (11), (12), (14) և (15) պարզ հավասարումներից։

Դիտարկված է բեռի առանձին մասնավոր դեպք, որը ոչ միայն հեշտացնում է Ֆուրյեի ինտեգրալի գործակիցները որոշող (13) ինտեգրալների հաշվումը, այլև հնարավորություն է տալիս սահմանային անցումով դիտարկել կենտրոնացած ուժի դեպքը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Госиздат, М.—Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* К плоской задаче теории упругости для полукруга. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 6, 1958.
3. *Еганян В. В.* К плоской задаче теории упругости для круговой „луночки". Сборник научных трудов, Ереванский политехнический институт, № 20, 1959.
4. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 1, 1964.
5. *Еганян В. В.* Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с луночным отверстием, вдоль которого действуют заданные усилия. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 1964.
6. *Рыжик И. М.* и *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехтеориздат., М.—Л., 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. МОВСИСЯН

О КОЛЕБАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ БАЛОК ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

Вопросу колебания упругой струны (шахтный подъемный канат) посвящены работы [1—4] и др., где исследуется движение струны при различных законах изменения ее длины. В нашей работе [5] рассматривались колебания балки с периодически изменяющейся длиной отличным от [1—4] методом.

В настоящей работе даются решения задач колебания балки, когда первоначальная длина балки с постоянной скоростью укорачивается, и устойчивости балки, когда длина ее периодически изменяется.

§ 1. Колебания балки с линейно укорачивающейся длиной

Пусть имеется балка с первоначальной длиной l и с постоянной жесткостью на изгиб, которая приводится в движение вследствие начального отклонения и начальной скорости, сообщаемых ей в момент $t=0$. Принимается, что одна из опор балки неподвижна ($x=l$), а вторая с постоянной скоростью c движется в сторону первой, не создавая при этом сжимающих напряжений.

Исследуется поведение части балки, находящейся между опорами, в предположении, что скорость движения опоры мала по сравнению со скоростью распространения продольных упругих волн напряжений.

Нетрудно видеть, что уравнение движения элемента балки, а также начальные условия будут обычными

$$a^2r^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$
$$w(x,\ 0)=f(x),\quad \frac{\partial w(x,\ 0)}{\partial t}=\varphi(x), \tag{1.1}$$

где $a=\sqrt{\dfrac{Eg}{\gamma}}$ — скорость распространения продольных волн,

$r=\sqrt{\dfrac{I}{F}}$ — радиус инерции поперечного сечения балки.

Краевые условия будут*

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = ct \quad \text{и} \quad x = l. \tag{1.2}$$

Введя безразмерные координаты

$$y = \frac{x}{l} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{a}{l} t, \tag{1.3}$$

уравнение движения (1.1) мы приводим к виду

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \tag{1.4}$$

где $\lambda = \frac{r}{l}$ — величина, обратная гибкости балки.

Переход к новому переменному

$$z = \frac{y - 1}{\mu\tau - 1}, \tag{1.5}$$

где $\mu = \frac{c}{a}$, приводит к уравнению движения

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (\mu\tau - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2\mu z (\mu\tau - 1)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \tau} +$$

$$+ \mu^2 z^2 (\mu\tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2\mu^2 z (\mu\tau - 1)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.6}$$

Краевые и начальные условия при этом будут

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1, \tag{1.7}$$

$$w(z, 0) = f(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(z) - \mu z \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z}. \tag{1.8}$$

По предположению, коэффициент μ из (1.5) меньше единицы, поэтому решение (1.6) с условиями (1.7) и (1.8) представляется в виде ряда по степеням μ

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k (z, \tau). \tag{1.9}$$

Подставляя (1.9) в (1.6)—(1.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, будем иметь

* Для конкретности рассматривается случай шарнирно-опертой балки. Опора двигается, прогиб при этом остается равным нулю, однако на этой опоре возникает изгибающий момент-влияние части балки, находящейся между $x=0$ и $x=ct$. Введением новой функции можно на $x=ct$ получить однородные условия (1.2), при этом уравнение движения будет иметь правую часть. Найти частное решение такого уравнения нетрудно, поэтому для краткости приняты однородные условия (1.2).

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = 4\tau \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \tau},$$

. . . .

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_k}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial \tau^2} = 4\tau \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial \tau^2} - 6\tau^2 \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial \tau^2} + \tag{1.10}$$

$$+ 4\tau^3 \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial \tau^2} - \tau^4 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial \tau^2} - 2z \frac{\partial^2 w_{k-1}}{\partial z \partial \tau} + 6z\tau \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial z \partial \tau} -$$

$$- 6z\tau^2 \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial z \partial \tau} + 2z\tau^3 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial z \partial \tau} - z^2 \frac{\partial^2 w_{k-2}}{\partial z^2} + 2z^2\tau \frac{\partial^2 w_{k-3}}{\partial z^2} -$$

$$- z^2\tau^2 \frac{\partial^2 w_{k-4}}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial w_{k-2}}{\partial z} + 4z\tau \frac{\partial w_{k-3}}{\partial z} - 2z\tau^2 \frac{\partial w_{k-4}}{\partial z};$$

$$w_k = \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1, \tag{1.11}$$

$$w_0(z, 0) = f(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(z),$$

$$w_k(z, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_k(z, 0)}{\partial \tau} = -z \frac{\partial w_{k-1}(z, 0)}{\partial z}. \tag{1.12}$$

При этом, как и следовало ожидать, нулевое приближение соответствует колебанию свободно опертой балки с первоначальной длиной l и с начальными условиями (1.1). Оно будет иметь вид

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \omega_n \tau + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \tau \right) \sin n\pi z, \tag{1.13}$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 f(z) \sin n\pi z dz,$$

$$b_n = \frac{2l}{a} \int_0^1 \varphi(z) \sin n\pi z dz. \tag{1.14}$$

Подстановка (1.13) в правую часть второго уравнения (1.10) дает

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = -4\tau \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n (b_n \sin \omega_n \tau + a_n \omega_n \cos \omega_n \tau) \sin n\pi z -$$

$$- 2z \sum_{n=1}^{\infty} n\pi (b_n \cos \omega_n \tau - a_n \omega_n \sin \omega_n \tau) \cos n\pi z. \tag{1.15}$$

Решение (1.15) ищем в виде

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau) \sin m\pi z, \tag{1.16}$$

которое заранее удовлетворяет краевым условиям. При этом для неизвестных $f_m(\tau)$ получается

$$f''_m(\tau) + \omega_m^2 f_m(\tau) = \left(\frac{b_m}{m\pi} - 4a_m\omega_m^2\tau\right)\cos\omega_m\tau - \left(\frac{a_m\omega_m}{m\pi} + \right.$$

$$\left. + 4b_m\omega_m\tau\right)\sin\omega_m\tau + 4\sum_{\substack{n=1\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}mn}{m^2-n^2}(b_n\cos\omega_n\tau - a_n\omega_n\sin\omega_n\tau). \tag{1.17}$$

Решение (1.17) будет

$$f_m(\tau) = C_{1m}\cos\omega_m\tau + C_{2m}\sin\omega_m\tau - a_m\omega_m\tau^2\sin\omega_m\tau +$$

$$+ b_m\tau^2\cos\omega_m\tau + \frac{b_m}{\omega_m}\left(\frac{1}{2m\pi} - 1\right)\tau\sin\omega_m\tau + a_m\left(\frac{1}{2m\pi} - 1\right)\tau\cos\omega_m\tau +$$

$$+ 4\sum_{\substack{n=1\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}mn}{(m^2-n^2)(\omega_m^2-\omega_n^2)}(b_n\cos\omega_n\tau - a_n\omega_n\sin\omega_n\tau). \tag{1.18}$$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{2m} определяются из еще неиспользованных начальных условий, которые приводят к следующим уравнениям

$$C_{2m} + 4\sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}mnb_n}{(m^2-n^2)(\omega_m^2-\omega_n^2)} = 0, \tag{1.19}$$

$$C_{1m} + a_m\left(\frac{1}{2m\pi} - 1\right) - 4\sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}mna_n\omega_n^2}{(m^2-n^2)(\omega_m^2-\omega_n^2)} =$$

$$= -\frac{a_m}{4} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}mna_n}{m^2-n^2}.$$

Аналогичным образом строится второе приближение и т. д.

Для очень малых λ первые два найденных члена достаточно точно будут описывать процесс колебания.

В заключение следует отметить, что подобным же образом можно было рассмотреть случай, когда опоры балки отодвигаются друг от друга с постоянной скоростью.

§ 2. Динамическая устойчивость балки с периодически изменяющейся длиной

Здесь предполагается, что в продольном направлении балки действует постоянная по длине балки сила P, одна из опор неподвижна, а вторая совершает гармонические колебания в продольном направлении, т. е. имеются следующие краевые условия:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = A \sin \alpha t \quad \text{и} \quad x = l, \tag{2.1}$$

где A — амплитуда, а α — частота колебаний продольно движущейся опоры. Предполагается, что A во много раз меньше, чем первоначальная длина балки l.

Уравнение движения и начальные условия при этом в переменных y, τ (1.3) будут

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\sigma}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0^*, \tag{2.2}$$

$$w(y, 0) = f(y), \quad \frac{\partial w(y, 0)}{\partial \tau} = \frac{l}{a} \varphi(y), \tag{2.3}$$

где $\sigma = \frac{P}{F}$.

Нашей задачей является определение значений P и α, при которых балка теряет устойчивость, т. е. возникнут бесконечные прогибы.

Введя вместо y новое переменное z

$$z = \frac{y - 1}{\mu \sin \beta\tau - 1}, \tag{2.4}$$

где

$$\mu = \frac{A}{l} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\alpha l}{a}, \tag{2.5}$$

преобразуем уравнения (2.1)—(2.3) к виду

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \quad \text{и} \quad z = 1; \tag{2.6}$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E} (\mu \sin \beta\tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (\mu \sin \beta\tau - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2\mu\beta z \cos \beta\tau (\mu \sin \beta\tau -$$
$$- 1)^3 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \tau} + \mu^2\beta^2 z^2 \cos^2 \beta\tau (\mu \sin \beta\tau - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu\beta^2 z (\mu - \sin \beta\tau +$$
$$+ \mu \cos^2 \beta\tau) (\mu \sin \beta\tau - 1)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2.7}$$

* В работе [5] исследуется (2.2) без второго члена

$$w(z,\ 0) = f(z), \quad \frac{\partial w(z,\ 0)}{\partial \tau} = \frac{l}{a}\varphi(z) - \mu\beta z\frac{\partial w(z,\ 0)}{\partial z}. \tag{2.8}$$

По предположению параметр μ из (2.5) меньше единицы, поэтому решение уравнения (2.7) с условиями (2.6) и (2.8) представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k w_k(z,\ \tau). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) в (2.7) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$\lambda^2\frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\lambda^2\frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} = \frac{2\sigma}{E}\sin\beta\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} +$$

$$+ 4\sin\beta\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} - 2\beta z\cos\beta\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial\tau} + \beta^2 z\sin\beta\tau\frac{\partial w_0}{\partial z}. \tag{2.10}$$

. . . .

Краевые условия для системы (2.10) ничем не отличаются по виду от (1.11). Остаются без изменения и начальные условия нулевого приближения. Единственное изменение претерпевает последнее условие (1.12), вместо z в правой части как множитель должно стоять βz.

Система (2.10) решается последовательно, как в § 1.

Для нулевого приближения имеется следующее решение

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega_n\tau + \frac{b_n}{\omega_n}\sin\omega_n\tau\right)\sin n\pi z, \tag{2.11}$$

где a_n и b_n выражаются формулами вида (1.14), а

$$\omega_n^2 = \lambda^2 n^4\pi^4 - \frac{\sigma}{E}n^2\pi^2. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) в правую часть второго уравнения (2.10), будем искать его решение в виде

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau)\sin m\pi z. \tag{2.13}$$

Для определения неизвестных $f_m(\tau)$ приходим к следующему уравнению

$$f_m^{\cdot\cdot}(\tau) + \omega_m^2 f_m(\tau) = -\left(\frac{2\sigma}{E}m^2\pi^2 + 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)a_m\sin\beta\tau\cos\omega_m\tau -$$

$$-\left(\frac{2\sigma}{E}\frac{m^2\pi^2}{\omega_m} + 4\omega_m + \frac{\beta^2}{2\omega_m}\right)b_m\sin\beta\tau\sin\omega_m\tau + \beta b_m\cos\beta\tau\cos\omega_m\tau -$$

$$
-\beta a_m\omega_m \cos\beta\tau \sin\omega_m\tau + 2\beta \sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2-m^2} \Big[\beta a_n \sin\beta\tau \cos\omega_n\tau +
$$

$$
+ \frac{b_n\beta}{\omega_n} \sin\beta\tau \sin\omega_n\tau + 2a_n\omega_n \cos\beta\tau \sin\omega_n\tau - 2b_n \cos\beta\tau \cos\omega_n\tau \Big]. \qquad (2.14)
$$

Решение уравнения (2.14) будет

$$
f_m(\tau) = C_{1m}\cos\omega_m\tau + C_{2m}\sin\omega_m\tau - M_m\cos(\beta+\omega_m)\tau +
$$

$$
+ P_m \sin(\beta+\omega_m)\tau + N_m\cos(\beta-\omega_m)\tau + Q_m\sin(\beta-\omega_n)\tau +
$$

$$
+ \beta \sum_{\substack{n=1\\(n\neq m)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2-m^2} [-M_n\cos(\beta+\omega_n)\tau + P_n\sin(\beta+\omega_n)\tau +
$$

$$
+ N_n\cos(\beta-\omega_n)\tau + Q_n\sin(\beta-\omega_n)\tau], \qquad (2.15)
$$

где

$$
M_m = \frac{b_m\left(\Omega_m^{(1)} + \frac{2\sigma}{E} m^2\pi^2\omega_m\right)}{2\beta\omega_m(\beta+2\omega_m)}, \qquad P_m = \frac{a_m\left(\Omega_m^{(1)} + \frac{2\sigma}{E} m^2\pi^2\right)}{2\beta(\beta+2\omega_m)},
$$

$$
N_m = \frac{b_m\left(\Omega_m^{(2)} + \frac{2\sigma}{E} m^2\pi^2\right)}{2\beta\omega_m(\beta-2\omega_m)}, \qquad Q_m = \frac{a_m\left(\Omega_m^{(2)} + \frac{2\sigma}{E} m^2\pi^2\right)}{2\beta(\beta-2\omega_m)},
$$

$$
M_n = \frac{b_n(\beta+2\omega_n)}{\omega_n[\omega_m^2-(\beta+\omega_n)^2]}, \qquad P_n = \frac{a_n(\beta+2\omega_n)}{\omega_n^2-(\beta+\omega_n)^2}, \qquad (2.16)
$$

$$
N_n = \frac{b_n(\beta-2\omega_n)}{\omega_n[\omega_m^2-(\beta-\omega_n)^2]}, \qquad Q_n = \frac{a_n(\beta-2\omega_n)}{\omega_m^2-(\beta-\omega_n)^2},
$$

$$
\Omega_m^{(1)} = 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} + \beta\omega_m, \qquad \Omega_m^{(2)} = 4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2} - \beta\omega_m.
$$

Постоянные интегрирования C_{1m} и C_{2m} находятся из начальных условий

$$
w_1(z, 0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial\tau} = -\beta z \frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial z}, \qquad (2.17)
$$

которые дают

$$
C_{1m} - M_m + N_m + \beta \sum_{\substack{n=1\\(m\neq 1)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2-m^2} [-M_n + N_n] = 0,
$$

$$
\omega_m C_{2m} + (\beta+\omega_m)P_m + (\beta-\omega_m)Q_m - \beta \sum_{\substack{n=1\\(m\neq n)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{n^2-m^2} [(\beta+\omega_n)P_n +
$$

$$+ (\beta - \omega_n) Q_n] = \frac{\beta a_m}{2} + 2\beta \sum_{\substack{n=1 \\ (m \neq n)}}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} mn}{m^2 - n^2} a_n. \qquad (2.18)$$

Довольствуясь первыми двумя членами ряда (2.9), можно судить об устойчивости рассматриваемой балки. Заметим, во-первых, что при нулевом приближении, как видно из (2.11) и (2.12), влияние продольно движущейся опоры не входит в выражение прогиба и балка теряет устойчивость при силе, равной эйлеровой критической.

Как видно из (2.13), (2.15) и (2.16), при определенных значениях β, ω_m и ω_n прогибы балки неограниченно возрастают. Рассматриваемая задача по характеру похожа на задачу о параметрических колебаниях балки [6] и, по-видимому, здесь также должны существовать сплошные зоны собственных значений, при которых балка теряет устойчивость. При полученном приближении возможные значения β и ω, при которых балка теряет устойчивость, следующие

$$\beta = \omega_m \pm \omega_n \quad (m,\ n = 1,\ 2, \cdots). \qquad (2.19)$$

Условие (2.19) в раскрытом виде будет

$$\alpha = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EgI}{\gamma F}} \left[m^2 \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{EIm^2\pi^2}} \pm n^2 \sqrt{1 - \frac{Pl^2}{EIn^2\pi^2}} \right]. \qquad (2.20)$$

Из (2.20), в частности, при $m = n = 1$ для положительного знака скобки получается такая зависимость между α и P, которая соответствует главному параметрическому резонансу.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 III 1965

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում դիտարկված են երկու խնդիր՝ ա) հեծանի տատանումները, երբ նրա երկարությունը կարճանում է ժամանակի գծային օրենքով, և բ) հեծանի կայունությունը, երբ նրա մի հենարանը կատարում է հարմոնիկ տատանումներ երկայնական ուղղությամբ։ Առաջին դեպքում ենթադրվում է, որ շարժվող եզրի արագությունը փոքր է առաձգական ալիքի տարածման արագությունից, իսկ երկրորդ դեպքում՝ որ եզրի տատանման ամպլիտուդը փոքր է հեծանի նախնական երկարությունից։ Երկու դեպքում էլ խնդիրների լուծումը ներկայացված է շարքերի տեսքով ըստ փոքր պարամետրերի աստիճանների։ Ստացված է հեծանի կայունության կորցնելու (2. 20) պայմանը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Савин Г. Н.* Динамическая теория расчета шахтных подъемных канатов. Изд. АН УССР, 1949.
2. *Савін Г. М., Постольнік Ю. С., Шевело В. М.* Про рівняння динаміки пружної або пружно-в'язкої нитки змінної довжини. Прикладна механіка, т. 1, в. 1, 1955.
3. *Савин Г. Н.* и *Горошко О. А.* Динамика нити переменной длины. Изд. АН УССР, 1962.
4. *Горошко О. О.* і *Красильников К. В.* Поперечні коливання струни (каната) змінної довжини. ДАН УРСР, № 3, 1964.
5. *Мовсисян Л. А.* Колебания балки с периодически изменяющейся длиной. ДАН АрмССР, 41, № 1, 1965.
6. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

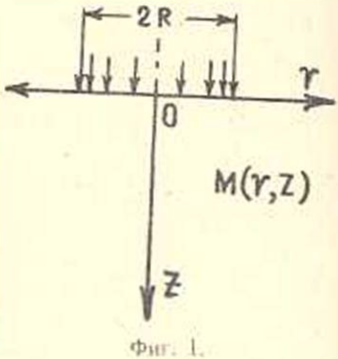
Б. С. РАДОВСКИЙ

О НАПРЯЖЕНИЯХ В ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАГРУЗКЕ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО ПЛОЩАДИ КРУГА

В работах И. И. Кандаурова, Р. А. Муллера и других исследователей [1—5] успешно развивается статистическая теория напряженного и деформативного состояния зернистых сред, представляющих агрегат из бесконечного количества соприкасающихся твердых частиц произвольных размеров и формы. В статье [1] опубликован ряд решений для различных случаев загружения массива.

В настоящей работе исследуется распределение напряжений в полупространстве, состоящем из зернистого материала, при нагрузке, равномерно распределенной по площади круга на поверхности (фиг. 1).

Поставленная задача представляет практический интерес при расчете оснований сооружений с круглой подошвой.



Фиг. 1.

§ 1. Вертикальные нормальные напряжения в произвольной точке $M(r, z)$ полупространства могут быть определены путем интегрирования по площади круга решения И. И. Кандаурова [1] для сосредоточенной силы

$$\sigma_z(r, z) = \frac{4p\Omega}{\pi z^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-\frac{4\Omega}{z^2}(\rho^2+r^2-2r\rho\cos\varphi)}\rho d\rho d\varphi, \tag{1.1}$$

где r; z — координаты рассматриваемой точки.

R — радиус круга, по площади которого равномерно распределена нагрузка интенсивности p.

Ω — коэффициент распределительной способности среды.

Для точек, расположенных под центром штампа ($r=0$), интеграл (1.1) значительно упрощается и может быть вычислен в элементарном виде [1]

$$\sigma_z(0, z) = p\left(1 - e^{-\frac{4\Omega R^2}{z^2}}\right). \tag{1.2}$$

Однако, вследствие трудностей интегрирования (1.1), для произвольной точки массива отсутствует выражение для определения напряжений.

Р. А. Муллер, исходя из математической аналогии между процессом распределения вертикальных нормальных напряжений в зернистой среде и процессом блуждания броуновской частицы [3], показал, что распределение вертикальных нормальных напряжений описывается дифференциальным уравнением параболического типа. Это уравнение для осесимметричной задачи в цилиндрических координатах имеет вид [5]

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \xi z \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \right), \tag{1.3}$$

где ξ — коэффициент бокового давления, определяемый при лабораторных испытаниях материала и связанный с коэффициентом распределительной способности

$$\xi = \frac{1}{8\Omega}. \tag{1.4}$$

Чтобы получить выражение $\sigma_z(r, z)$ для произвольной точки массива, проинтегрируем уравнение (1.3). Для приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений параболического типа заменим переменную по формуле $u = \frac{z^2}{2}$. Тогда получим

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial u} = \xi \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \right). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) подлежит решению при следующих условиях, определяемых внешней нагрузкой

$$\sigma_z|_{u=0} = f(r) = \begin{cases} p & \text{при} \quad 0 \le r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R, \end{cases} \tag{1.6}$$

а также при условии

$$\sigma_z|_{r \to 0} \neq \infty. \tag{1.7}$$

Роль краевого играет также условие

$$\sigma_z \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{1.8}$$

Для решения уравнения (1.5) применяем преобразование Лапласа

$$F(r, s) = \int_0^\infty \sigma_z(r, u) e^{-su} du.$$

Преобразованное уравнение (1.5) имеет вид

$$\frac{d^2F(r, s)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF(r, s)}{dr} - \frac{s}{\xi}\left[F(r, s) - \frac{f(r)}{s}\right] = 0$$

и представляет модифицированное уравнение Бесселя. Его общее решение

$$F(r, s) - \frac{f(r)}{s} = AI_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right) + BK_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right), \quad (1.9)$$

где $I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right)$ и $K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка от чисто мнимого аргумента,

A и B — постоянные.

Определяя постоянные из условия (1.6) и преобразованных условий (1.7) и (1.8) с учетом некоторых соотношений, известных из теории бесселевых функций [6], получим лапласово изображение искомой функции $\sigma_z(r, z)$:

при $0 \leqslant r < R$

$$F(r, s) = \frac{p}{s}\left[1 - R\sqrt{\frac{s}{\xi}}I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right)\cdot K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}R\right)\right], \quad (1.10)$$

при $r > R$

$$F(r, s) = \frac{p}{s}R\sqrt{\frac{s}{\xi}}I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}R\right)\cdot K_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right), \quad (1.11)$$

где $I_1\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}R\right)$ и $K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}R\right)$ — соответственно функции Бесселя первого и второго рода первого порядка от чисто мнимого аргумента.

Оригинал полученного изображения отсутствует в каталогах; поэтому для обратного преобразования используем общую формулу обращения Меллина

$$\sigma_z(r, u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{su}F(r, s)\, ds.$$

Имеем

$$\sigma_z(r, u) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\frac{p}{s}\left[1 - R\sqrt{\frac{s}{\xi}}\, I_0\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}r\right)\cdot K_1\left(\sqrt{\frac{s}{\xi}}R\right)\right]e^{su}\, du. \quad (1.12)$$

В соответствии с правилами операционного исчисления [7, 8] заменяем путь интегрирования в комплексной плоскости вдоль прямой, параллельной мнимой оси, замкнутым контуром, имеющим разрез вдоль всей отрицательной части вещественной оси; тогда получим

$$\sigma_z(r, u) = \frac{pR}{2\xi}\int_0^\infty J_0\left(r\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}\right)J_1\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}\right)\frac{e^{-\rho u}}{\sqrt{\frac{\rho}{\xi}}}d\rho$$

или

$$\sigma_z(r, u) = pR\int_0^\infty J_0(rx)\,J_1(Rx)\,e^{-\xi u x^2}dx, \qquad (1.13)$$

где $J_0(rx)$ и $J_1(Rx)$ — функции Бесселя первого рода соответственно нулевого и первого порядка.

При $r = 0$ имеем

$$\sigma_z(0, u) = pR\int_0^\infty J_1(Rx)e^{-\xi u x^2}dx.$$

Так как непосредственно вычислить последний интеграл затруднительно, дифференцируя, получим

$$\frac{d\sigma_z(0, u)}{du} = -pR\xi\int_0^\infty J_1(Rx)\,e^{-\xi u x^2}\,x^2dx. \qquad (1.14)$$

Правая часть (1.14) содержит первый экспоненциальный интеграл Вебера, выражающийся через соответствующую экспоненциальную функцию [6]. Подставив эту функцию в (1.14), получим после интегрирования

$$\sigma_z(0, u) = p\left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\xi u}}\right). \qquad (1.15)$$

Возвращаясь в выражениях (1.13) и (1.15) к переменной z по формуле $u = \frac{z^2}{2}$, получим искомую формулу для определения вертикальных нормальных напряжений в произвольной точке массива

$$\sigma_z(r, z) = pR\int_0^\infty J_0(rx)\,J_1(Rx)\,e^{-\frac{\xi z^2 x^2}{2}}dx, \qquad (1.16)$$

а для точек, принадлежащих оси симметрии,

$$\sigma_z(0, z) = p\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2\xi z^2}}\right). \qquad (1.17)$$

Последняя формула совпадает с выражением (1.2), полученным И. И. Кандауровым, если учесть (1.4).

По формуле (1.16) построены изолинии вертикальных нормальных напряжений (фиг. 2). При вычислениях принималось $\xi = \frac{1}{3}$.

Можно показать, что выражение для вертикальных нормальных напряжений, предложенное К. С. Теренецким [9] и имеющее хорошую сходимость с экспериментальными данными различных исследователей при $z > R$ [10], с достаточно высокой точностью аппроксимирует решение (1.16) при том же условии. Это обстоятельство указывает, что решение (1.16) хорошо согласуется с экспериментальными данными.

§ 2. Используя полученное выражение (1.16), можно найти формулы для остальных компонентов напряжений путем дифференцирования и элементарных операций.

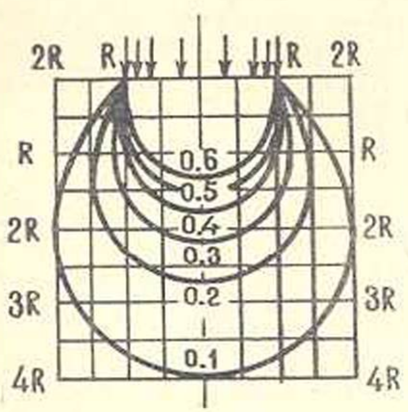
Так, согласно [5], для касательного напряжения имеем

$$\tau_{rz} = -\xi z \frac{\partial \sigma_z}{\partial r}. \tag{2.1}$$

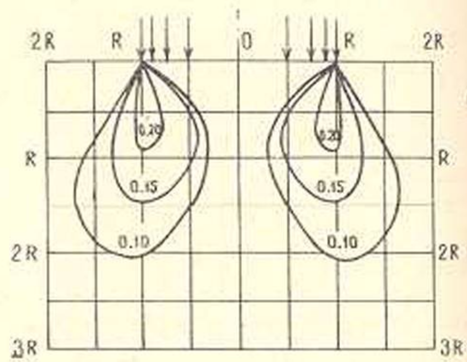
Дифференцируя (1.16) и подставляя результат в (2.1), получим

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{pR}{z} e^{-\frac{R^2+r^2}{2\xi z^2}} I_1\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right), \tag{2.2}$$

причем для точек, лежащих на оси давления, $\tau_{rz}(0, z) = 0$. По формуле (2.2) построены изолинии касательных напряжений (фиг. 3).



Фиг. 2. Линии равных напряжений σ_z.



Фиг. 3. Линии равных напряжений τ_{rz}.

Приводим выражения для определения остальных компонентов напряжений, полученные аналогично (2.2). Для произвольной точки массива

$$\sigma_\theta(r, z) = \xi\sigma_z - \frac{\xi z}{r}\tau_{rz}, \tag{2.3}$$

$$\sigma_r(r, z) = \xi\sigma_z - \frac{pR}{z^2} e^{-\frac{R^2+r^2}{2\xi z^2}} \left[R I_0\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right) - \left(r + \frac{\xi z^2}{r}\right) \cdot I_1\left(\frac{Rr}{\xi z^2}\right)\right]. \tag{2.4}$$

Для точек, лежащих под центром штампа,

$$\sigma_\theta(0,\ z) = \sigma_r(0,\ z) = \xi\sigma_z(0,\ z) - \frac{pR^2}{2z^2}e^{-\frac{R^2}{2\xi z^2}}. \qquad (2.5)$$

Следует отметить, что выражение (2.4) позволяет вычислить величину σ_θ при нагрузке, распределенной по площади круга, в то время, как непосредственное интегрирование по площади круга решения И. И. Кандаурова для сосредоточенной силы не приводит к искомому результату, поскольку при действии сосредоточенной силы $\sigma_\theta = 0$.

Осуществление расчетов по формуле (1.16), в отличие от (1.1), не требует большого вычислительного труда, т. к. в выражении (1.16) подинтегральная функция быстро затухает. Таким образом, σ_z можно вычислить при помощи однократного численного интегрирования, а остальные компоненты напряженного состояния могут быть рассчитаны по формулам (2.2—2.5) без вычисления квадратур.

Ленинградский филиал
Всесоюзного государственного дорожного
научно-исследовательского института
(Союздорнии)

Поступила 10 XII 1964

Ռ. Ա. ՄՈՒԼԼԵՐ

ՀԱՏԻԿԱՎՈՐ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ, ԵՐԲ ԲԵՌՆՎԱԾՔԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԲԱՇԽՎԱԾ Է ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԵՐԵՍՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է հատիկավոր նյութից կազմված կիսատարածության լարվածային վիճակը՝ մակերևույթի վրա շրջանի մակերեսով հավասարաչափ բաշխված բեռնվածքի դեպքում: Օգտվելով լարումների բաշխման ստատիստիկական տեսությունից, ստացված են կիսատարածության կամայական կետի լարվածային վիճակի բոլոր կոմպոնենտները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кандауров И. И.* О распределении напряжений в зернистых (грунтовых) средах. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, 6, 1960.
2. *Кандауров И. И.* К теории распределения напряжений в зернистом грунтовом основании. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1960.
3. *Муллер Р. А.* К статистической теории распределения напряжений в зернистом грунтовом основании. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 4, 1962.
4. *Муллер Р. А.* О деформативном состоянии зернистой грунтовой среды. Труды ВНИМИ, сб. L, Л., 1963.
5. *Муллер Р. А.* Некоторые задачи статистической механики грунтов и горных пород. Труды конференции „Математические методы в горном деле". Сиб. отд. АН СССР. Новосибирск, 1963.

6. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., 1949.
7. *Карлслоу Х.* и *Егер Д.* Операционные методы в прикладной математике. М., 1948.
8. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М., Л., 1950.
9. *Теренецкий К. С., Гусев В. Н., Радовский Б. С.* Полевые методы оценки прочности дорожных одежд. Труды КАДИ, вып. 8. 1962.
10. *Радовский Б. С.* Математическое описание закона распределения напряжений под дорожной одеждой. Сборник научных работ студентов КАДИ, вып. 3, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

М. С. ГАБРИЕЛЯН

О СТАБИЛИЗАЦИИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ОДНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ КООРДИНАТЕ

В статье рассматривается задача об управляющих воздействиях, стабилизирующих движение голономной механической системы, при одной циклической координате, когда управляющее воздействие — скалярная величина.

§ 1. Рассмотрим голономную механическую систему, движение которой описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q_1,\cdots,q_n,u,t)\quad (i=1,\cdots,n). \tag{1.1}$$

Здесь q_i — обобщенные координаты, T — кинетическая энергия, Q_i — обобщенная сила, соответствующая координате q_i, u — внешнее управляющее воздействие.

Пусть система (1.1) обладает решением $q_i=0$ при $u\equiv 0$.

Предположим, что линейное приближение стационарное и имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ddot{q}_j=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}q_j+b_i u\quad (i=1,\cdots,n), \tag{1.2}$$

где a_{ij}, b_{ij}, b_i — постоянные, причем $\sum a_{ij}q_i q_j$ — определенно-положительная форма, $b_{ij}=b_{ji}$ и, при $u\equiv 0$, $Q_i=\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\cdot$ Пусть координата q_1 циклическая [1], т. е.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}=0\quad \text{при}\quad u\equiv 0. \tag{1.3}$$

Тогда система (1.2) примет вид

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\ddot{q}_j=b_1 u,\qquad \sum_{j=1}^{n}{}' a_{ij}\ddot{q}_j=\sum_{j=2}^{n}b_{ij}q_j+b_i u\qquad (i=2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

Если в уравнениях (1.4) отлична от нуля лишь координата b_k вектора $\{b_i\}$, то будем говорить, что система (1.4) управляется по координате q_k.

Задача 1.1. Найти функцию

$$u = \sum_{i=1}^{n} p_{2i-1} q_i + \sum_{i=1}^{n} p_{2i} q_i' \tag{1.5}$$

такую, чтобы движение $q_i = 0$ было асимптотически устойчивым в силу уравнений движения (1.4), (1.5) и чтобы при этом на движениях $q_i(t)$, $u(t)$ системы минимизировался функционал

$$I = \int_0^{T} \omega\,[q(t),\ q'(t),\ u(t)]\,dt, \tag{1.6}$$

где $\omega(q,\ q',\ u)$ — определенно-положительная квадратичная форма.

Приведем систему (1.2) к нормальным координатам [2]

$$x_i' = \lambda_i x_i + \alpha_i u \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{1.7}$$

Уравнения, определяющие числа λ_i и α_i, при (1.3) принимают вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda & a_{21}\lambda & \cdots & a_{n1}\lambda \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{1n}\lambda & a_{2n}\lambda - b_{2n} & \cdots & a_{nn}\lambda - b_{nn} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.8}$$

$$a_{1k}\lambda_i \alpha_{1i} + \sum_{j=2}^{n} (a_{jk}\lambda_i - b_{jk})\,\alpha_{ji} = 0, \tag{1.9}$$

$$\alpha_i = \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ji} b_j \quad (i,\ k = 1, \cdots, n).$$

$\lambda = 0$ удовлетворяет уравнению (1.8), и мы можем принять $\lambda_1 = 0$, тогда α_{k1} $(k = 2, \cdots, n)$ определяются из уравнений

$$\sum_{j=2}^{n} b_{ij}\alpha_{j1} = 0 \quad (i = 2, \cdots, n). \tag{1.10}$$

Предположим, что ранг матрицы $B = \| b_{ij} \|$, $r(B) = n - 1$, т. е. имеется только одна циклическая координата. Это предположение необходимое, так как при $r(B) < n - 1$ уравнение (1.8) будет иметь $n - r(B)$ нулевых корней. Но такие системы мы не рассматриваем [3], потому что они не могут быть вполне управляемыми одним управляющим воздействием.

Следовательно, из (1.9), (1.10) $\alpha_{k1} = 0$ $(k = 2, \cdots, n)$ $\alpha_{11} \neq 0$, так как в противном случае собственный вектор матрицы A^{*} был бы нулевым.

Таким образом, при $\alpha_{11} = 1$, $x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} q_i$ — нормальная координата и $\alpha_1 = b_1$.

Следовательно, задача 1.1 разрешима только тогда, когда $b_1 \neq 0$ [3].

Для разрешимости задачи 1.1 необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$b_1 \neq 0, \quad \alpha_i \neq 0, \quad \lambda_i \neq 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (i, j = 2, \cdots, n, \ i \neq j). \tag{1.11}$$

При $r(B) = n - 1$ числа $\alpha_i (i = 2, \cdots, n)$ не зависят от b_1, следовательно, условия (1.11) выполняются только тогда, когда $b_k \neq 0$ хотя бы для одного $k (k = 2, \cdots, n)$. Т. е. система (1.4) не вполне управляема только по одной координате. Для управляемости системы необходимо, чтобы управляющее воздействие было приложено к первой и к какой-то другой координате системы (1.4). При выполнении условий (1.11) [4] решение задачи 1.1 приводится к решению системы алгебраических уравнений с определителем, отличным от нуля.

Если уравнения (1.1) отличаются от (1.4) лишь членами высшего порядка малости в окрестности $q_i = 0$, $u = 0$ равномерно по t и $\omega[q, q', u]$ в (1.6) определенно положительная, аналитическая функция, то подобная задача для системы (1.1) также разрешима [5–6] при условиях (1.11).

Система (1.4) [3, 7] не управляема также импульсным управлением.

§ 2. Обсудим вопрос о наблюдении системы (1.4).

Задача 2.1. Найти $2n \times 2$ матрицу $V(\nu)$ такую, что

$$\int_{t-\tau}^{t} V(\nu) \begin{Vmatrix} \xi(\nu) \\ u(\nu) \end{Vmatrix} d\nu = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ x_n'(t) \end{Vmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\xi(\nu) = \sum_{i=1}^{n} c_i' x_i' + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad (\tau \leqslant \nu \leqslant 0).$$

Здесь $x_i(t)$, $u(t)$ являются решением системы (1.4), (1.5).

Пусть $c_i = 0$, $c_i' \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, что соответствует наблюдению системы по некоторой обобщенной скорости. Так как для системы (1.4) $\lambda_1 = 0$, то [3] система не наблюдаема по одной скорости.

Пусть $c_i' = 0$, $c_i \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, что соответствует наблюдению по некоторой обобщенной координате. При выполнении условий (1.11) система (1.4), (1.5) наблюдаема по величине $\xi = \sum d_i q_i$, если только

$d_1 \neq 0$ $c_1 \neq 0$ и хотя бы одно из чисел $d_k \neq 0$ $(k = 2, \cdots, n)$. Очевидно, что система (1.4), (1.5) не наблюдаема, если наблюдение ведется по одной координате. При выполнении указанных условий определение матрицы $V(\nu)$ приводится к решению алгебраических уравнений [8] с определителем, отличным от нуля. Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Линейная система (1.4), (1.5) при наличии одной циклической координаты не наблюдаема по любой обобщенной скорости. Она при* (1.11) *наблюдаема по величине* $\sum d_i q_i$, *если* $d_1 \neq 0$ *и* $d_k \neq 0$ *хотя бы для одного* k $(k = 2, \cdots, n)$.

§ 3. Обсудим вопрос о стабилизации системы (1.1), когда управляющее воздействие u явно не входит в первое уравнение. Тогда система (1.1) не вполне управляема и не стабилизируема, так как она при этом допускает хотя бы один первый независимый от u интеграл вида

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = c. \tag{3.1}$$

Пусть линейное приближение данной системы имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \ddot{q}_j = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ddot{q}_j = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} q_j + b_i u. \qquad (i = 2, \cdots, n). \tag{3.2}$$

Напишем уравнения движения в канонических координатах [9]

$$\begin{gathered} \frac{dp_1}{dt} = 0, \quad \frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} q_j + b_i u \quad (i = 2, \cdots, n), \\ \frac{dq_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_j \quad (i = 1, \cdots, n), \end{gathered} \tag{3.3}$$

где матрица $C = \|c_{ij}\| = A^{-1} = \|a_{ij}\|^{-1}$.

Допустим, что система (3.3) при $u = 0$ допускает решение

$$\begin{gathered} p_1 = c = \text{const}, \quad p_i = f_i(t) \quad (i = 2, \cdots, n), \\ q_i = \varphi_i(t) \quad (i = 1, \cdots, n). \end{gathered}$$

Составим уравнения возмущенного движения при возмущении $p_i = f_i(t) + x_i$ $(i = 2, \cdots, n)$ $q_i(t) = \varphi_i(t) + y_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ (p_1 не возмущается)

$$\begin{gathered} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} b_{ij} y_j + b_i u \quad (i = 2, \cdots, n), \\ \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=2}^{n} c_{ij} x_j \qquad (i = 1, \cdots, n). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Предположим, что система

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=2}^{n} b_{ij}y_j+b_i u, \qquad \frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=2}^{n} c_{ij}x_j \qquad (i=2,\cdots,n). \tag{3.5}$$

вполне управляема управляющим воздействием u. Если при этом минимизировать J (1.4), зависящий только от x_i, y_i $(i=2,\cdots,n)$, то при стабилизации движения $x_2=\cdots=x_n=y_2=\cdots=y_n=0$ u определится единственным образом [4]. y_1 определяется из $\frac{dy_1}{dt}=$ $=\sum_{j=2}^{n} c_{1j}x_j$, где $x(t)$ — известные функции.

Так как система (3.5) вполне управляема и линейная, то при стабилизации [10] имеет место экспоненциальная устойчивость, следовательно, $y_1(t)$ при $t\to\infty$ будет стремиться к конечному пределу.

Если вполне управляемая система нелинейная, то при увеличении t $y_1(t)$ может неограниченно возрастать.

§ 4. Пример. Рассмотрим материальную точку массы 1, притягиваемую неподвижным центром 0 пропорционально n-ой степени расстояния

$$F=-\mu r^n, \quad \mu>0. \tag{4.1}$$

Пусть на точку, кроме силы F, действует управляющее воздействие u, находящееся в плоскости движения точки. (Известно, что траектория точки—плоская кривая).

Уравнения движения в полярных координатах r, φ будут

$$r''-r\varphi'^2=-\mu r^n+\alpha u \quad \frac{d}{dt}(r^2\varphi')=\beta u, \tag{4.2}$$

допускающие при $u=0$ частное решение

$$r=r_0, \quad r'=0, \quad \varphi'=\sqrt{\mu r_0^{n-1}}, \quad \varphi=\sqrt{\mu r_0^{n-1}}\,t. \tag{4.3}$$

Выясним, можно ли подобрать управляющее воздействие u так, чтобы движение (4.3) стало асимптотически устойчивым. Для этого запишем линейное приближение уравнений возмущенного движения при возмущении движения (4.3)

$$x_1'=x_2, \quad x_2'=-\frac{2\omega}{r_0}x_4+b_1 u,$$

$$x_3'=x_4, \quad x_4'=2\omega r_0 x_2+(1-n)\omega^2 x_3+b_2 u. \tag{4.4}$$

Здесь

$$b_1 = \frac{\beta}{r_0}, \quad b_2 = \alpha, \quad \omega^2 = \mu r_0^{n-1}.$$

Система (4.4) вполне управляема, если

$$\Delta = b_1^2 (n-1) \omega^4 [4r_0^2 b_1 + (n+3) b_2^2] \neq 0. \tag{4.5}$$

Полярный угол φ при $u \equiv 0$ циклический, следовательно, во второе уравнение системы (4.4) x_1 явно не входит, т. е. $\lambda_1 = 0$ [3], поэтому при $b_1 = 0$ система (4.4) не вполне управляема.

Пусть $b_1 = 0$. Напишем (4.2) в канонических координатах

$$\frac{dp_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{p_1^2}{r^3} - \mu r^n + b_2 u, \tag{4.6}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_1}{r^2},$$

$$\frac{dr}{dt} = p_2,$$

где $p_1 = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, $p_2 = \frac{dr}{dt}$.

Система (4.6) при $u \equiv 0$ допускает решение

$$p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}, \quad p_2 = 0, \quad \varphi = \sqrt{\mu r_0^{n-1}}\, t, \quad r = r_0. \tag{4.7}$$

Составим линейное приближение уравнений возмущенного движения при возмущении

$$p_2 = x_1, \quad \varphi = \sqrt{\mu r_0^{n-1}}\, t + x_2, \quad r = r_0 + x_3,$$

(циклический импульс $p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}$ не возмущается)

$$\frac{dx_1}{dt} = -(n+3)\omega^2 x_3 + b_2 u,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{2\omega}{r_0} x_3, \tag{4.8}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1.$$

Система (4.8) вполне управляема при $\Delta = \frac{2\omega}{r_0} b_2^3 \neq 0$.

Это объясняется тем, что имеется гироскопическая сила [11].

Из (4.5) следует, что при $b_2 = 0$, $b_1 \neq 0$, $n \neq 1$ система (4.4) вполне управляема, а при $b_1 = 0$ всегда не вполне управляема. Это значит, что если управляющее воздействие u действует по радиальному направлению, то движение (4.7) можно стабилизировать, если всегда $p_1 = \sqrt{\mu r_0^{n+3}}$.

Если же управляющее воздействие действует по направлению φ, то при известных условиях можно стабилизировать движение (4.3) системы (4.2), когда p_1 тоже возмущается.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР Поступила 23 III 1965

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

ՄԵԿ ՑԻԿԼԻԿ ԿՈՈՐԴԻՆԱՏ ՈՒՆԵՑՈՂ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա աշխատության մեջ դիտարկվում է ցիկլիկ մեկ կոորդինատ ունեցող հոլոնոմ մեխանիկական սիստեմ: Քննարկվում են սիստեմի շարժման կայունացման և դիտելիության հարցերը, երբ կայունացնող և դիտվող մեծությունները սկալյար են:

Որպես ցուցադրական օրինակ դիտարկվում է կենտրոնական ազդեցության ենթարկվող նյութական կետի շարժման կայունացման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. Физматгиз, М., 1960.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Гостехиздат, М., 1955.
3. *Габриелян М. С.* О стабилизации неустойчивых движений механических систем. ПММ, **28**, вып. 3, 1964.
4. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов. Автоматика и телемеханика, **22**, вып. 4, 1961.
5. *Альбрехт Э. Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем. ПММ, **25**, вып. 5, 1961.
6. *Альбрехт Э. Г.* К теории аналитического конструирования регуляторов. Тезисы докладов межвуз. конф. по устойчивости движения и аналитической механике, Изд. Казанск. авиац. ин-та, Казань, 1962.
7. *Красовский Н. Н.* К теории оптимального регулирования. ПММ, **22**, вып. 4, 1959.
8. *Красовский Н. Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, **27**, вып. 4, 1963.
9. *Аппель П.* Теоретическая механика, том II. Физматгиз, М., 1960.
10. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, М., 1959.
11. *Габриелян М. С., Красовский Н. Н.* К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, **28**, вып. 5, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

З. А. ЗОРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА АДАПТАЦИИ НА СРЕДНЕМ УРОВНЕ С ЦЕЛЬЮ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ

Геострофическое соотношение имеет большое практическое значение, так как оно очень просто описывает основные свойства движения большого масштаба. Кроме того, это соотношение позволяет отфильтровывать паразитарные волны с точки зрения погодообразования, в силу чего дает возможность упростить уравнения гидротермодинамики с учетом квазигеострофического соотношения и получить прогностические уравнения, предложенные впервые И. А. Кибелем (1940 г.) [4].

Несмотря на это, геострофическое равновесие не может постоянно сохраняться, в противном случае погода осталась бы неизменной. Следовательно, нарушение геострофического равновесия имеет не менее важное значение, чем геострофическое соотношение, и процессы его установления (адаптация) и нарушения являются наиболее важными динамическими процессами, влияющими на изменение погоды.

В литературе известен ряд работ по линейной теории адаптации метеорологических полей [2, 5—12].

В этих работах показано, что при любых начальных значениях горизонтальных скоростей и давления движение в атмосфере быстро переходит в геострофическое. Аномалия в распределении ветра вызывает образование волны, распространяющейся со скоростью, близкой к скорости звука. С течением времени энергия этого волнового компонента рассеивается, и характеристики поля приближаются к геострофическому соотношению.

Что касается вопроса адаптации в нелинейном случае, то здесь мы пока полного представления не имеем. В работе [1] исследован вопрос адаптации с помощью полных уравнений гидродинамики для одномерного случая двойного слоя жидкости. Расчеты показали, что начальная агестрофичность быстро адаптируется в соответствии с линейной теорией многих авторов, но с увеличением времени в прежних невозмущенных районах развиваются новые агестрофические ветры, которые быстро усиливаются. Новая область разрушения геострофического равновесия со скоростью инерционно-гравитационной волны перемещается с запада на восток.

Нашей целью является исследование вопроса адаптации на среднем уровне с помощью полных уравнений гидродинамики с неявными производными.

Исходными уравнениями являются [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv. \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$\Phi = gH$ — геопотенциал; u, v — горизонтальные составляющие вектора скорости по x и y, соответственно, причем x направлена по касательной круга широты на восток; y — по меридиану на север; $l = 2\omega\cos\varphi$ — параметр Кориолиса; $\omega = 7{,}29.10^{-5}$ *сек*$^{-1}$ — величина угловой скорости Земли; $c = \sqrt{gH_0}$, H_0 — высота однородной атмосферы, скорость звука $c = 280$ *м/сек*; $H_0 = 8.10^3$ *м*.

Для решения системы (1)—(3) введем новые переменные, как в [4]

$$X = x - \int_0^t u(x, y, t)\,dt; \qquad Y = y - \int_0^t v(x, y, t)\,dt; \quad T = t;$$

$$A(x, y, t) = \overline{A}(X, Y, T); \quad f(x, y, t) = \overline{f}(X, Y, T),$$

где

$$A(x, y, t) = \begin{cases} u(x, y, t) \\ v(x, y, t); \\ \Phi(x, y, t) \end{cases} \qquad f(x, y, t) = \begin{cases} -\Phi_x + lv \\ -\Phi_y - lu \\ -c^2(u_x + v_y). \end{cases}$$

Тогда вместо уравнений типа (1)—(3) будем иметь:

$$\frac{\partial \overline{A}}{\partial T} - \overline{f} = \overline{u}\left(\frac{\partial \overline{A}}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x}\right) + \overline{v}\left(\frac{\partial \overline{A}}{\partial Y} - \frac{\partial A}{\partial x}\right). \qquad (4)$$

Шаг по времени выбираем таким, чтобы члены, стоящие в правой части уравнения (2), были бы, по крайней мере, на порядок меньше, чем в левой части, т. е.

$$\delta t < \frac{2\delta s}{5U_{\max}}.$$

Тогда вместо уравнения (4) получим

$$\overline{A}(X, Y, \delta t) - \delta t\overline{f} = \overline{A}(X, Y, 0).$$

Переходя к старым переменным, будем иметь

$$A(x, y, \delta t) - \delta tf = A^0(X, Y). \qquad (5)$$

где

$$A^0(X, Y) = \overline{A}|_{t=0}.$$

Правую часть уравнения (5) разлагаем в ряд Тейлора в окрестности точки (x, y). При выбранном нами шаге δt можно брать лишь первые члены разложения, так как нелинейные члены, по крайней мере, на порядок меньше линейных. Тогда получим

$$u + \delta t u^0_x \cdot u + \delta t\, u^0_y \cdot v = -\delta t \Phi_x + l \delta t \cdot v + u^0. \tag{6}$$

$$v + \delta t v^0_x \cdot u + \delta t v^0_y \cdot v = -\delta t \Phi_y - l \delta t \cdot u + v^0. \tag{7}$$

$$\Phi + \delta t \Phi^0_x \cdot u + \delta t \Phi^0_y \cdot v = -\delta t c^2 (u_x + v_y) + \Phi^0. \tag{8}$$

Из уравнений (6) и (7) можно найти u и v. Тогда исключая u, v и их производные, из уравнения (8) получим одно уравнение для геопотенциала:

$$a_{11} \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial y^2} - a_{12} \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}}{\partial x \partial y} - A \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial x} - B \frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial y} - \frac{\Delta}{c^2 \delta t^2} \widetilde{\Phi} = F, \tag{9}$$

$$u = \frac{1}{\Delta} \left[(1 + \delta t v^0_y)(u^0 - \delta t \Phi_x) + \delta t (l - u^0_y)(v^0 - \delta t \Phi_y) \right], \tag{10}$$

$$v = \frac{1}{\Delta} \left[(1 + \delta t u^0_x)(v^0 - \delta t \Phi_y) - \delta t (l + v^0_x)(u^0 - \delta t \Phi_x) \right], \tag{11}$$

здесь

$$a_{11} = 1 + \delta t v^0_y > 0, \quad a_{22} = 1 + \delta t u^0_x > 0, \quad a_{12} = \delta t (v^0_x + u^0_y).$$

$$\Delta = 1 + \delta t (u^0_x + v^0_y) - l (\delta t)^2 (u^0_y - v^0_x - l) > 0.$$

$$A = 3\delta t + (1 + \delta t v^0_y) \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} - \frac{1}{c^2} \Phi^0_x \right) - \delta t (l + v^0_x) \left(\frac{\Delta_y}{\Delta} - \frac{1}{c^2} \Phi^0_y \right),$$

$$B = \delta t (l - u^0_y) \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} - \frac{1}{c^2} \Phi^0_x \right) + (1 + \delta t u^0_x) \left(\frac{\Delta_y}{\Delta} - \frac{1}{c^2} \Phi^0_y \right),$$

$$F = \left| \left(\Phi^0_x - \frac{u_0}{\delta t} \right) A + \left(\Phi^0_y - \frac{v^0}{\delta t} \right) B + 2 (u^0, v^0) + l (v^0_x - u^0_y) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\delta t} (u^0_x + v^0_y) - a_{11} \Phi^0_{xx} + a_{12} \Phi^0_{xy} - a_{22} \Phi^0_{yy} \right|,$$

$$\widetilde{\Phi} = \Phi - \Phi^0.$$

Здесь отброшены члены порядка $(\delta t v_x)^2$ по отношению к 1. Коэффициент a_{12} мал по отношению к a_{11} и a_{22}, так что третий член в уравнении (9) опускается.

Положительность выражений a_{11}, a_{22} и Δ обеспечивается выбором шага δt.

Производные, входящие в коэффициенты уравнения (9), в конечноразностном виде апроксимируются выражениями

$$(u_x)_0 = \frac{1}{8\delta s}(u_{10} + u_{16} - u_{12} - u_{14}),$$

$$(u_y)_0 = \frac{1}{8\delta s}(u_{10} + u_{12} - u_{14} - u_{16}),$$

$$(u_{xx})_0 = \frac{1}{12(\delta s)^2}(u_{10} + u_{12} + u_{13} + u_{14} + u_{16} + u_9 - 2u_{11} - 2u_0 - 2u_{15}),$$

$$(u_{xy})_0 = \frac{1}{8(\delta s)^2}(u_{10} + u_{14} + 2u_0 - u_9 - u_{11} - u_{13} - u_{15}),$$

$$(u_{yy})_0 = \frac{1}{12(\delta s)^2}(u_{10} + u_{11} + u_{12} + u_{14} + u_{15} + u_{16} - 2u_9 - 2u_0 - 2u_{13}).$$

Нумерация здесь поставлена согласно нижеприведенной диаграмме.

Диаграмма

Производные геопотенциала апроксимируем по формулам

$$(\Phi_{xx})_0 = \frac{1}{(\delta s)^2}(\Phi_1 + \Phi_3 - 2\Phi_0),$$

$$(\Phi_{yy})_0 = \frac{1}{(\delta s)^2}(\Phi_2 + \Phi_4 - 2\Phi_0),$$

$$(\Phi_x)_0 = \frac{1}{2\delta s}(\Phi_1 - \Phi_3), \qquad \Phi_y = \frac{1}{2\delta s}(\Phi_2 - \Phi_4).$$

Конечно-разностное уравнение, соответствующее (9), решается итерационным методом Либмана по начальным данным.

После каждого шага по найденным значениям геопотенциала находим u и v по формулам (10) и (11). Полученные значения u, v принимаются как начальные для следующего шага и т. д.

Рассмотрим несколько примеров для исследования вопроса адаптации.

Пусть

$$H = \overline{H} + A\exp\left(-k^2\frac{r^2}{L^2}\right)\cos 2\pi\frac{r}{L}. \qquad (12)$$

Здесь

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \overline{H} = 500\ \text{дкм}, \quad k^2 = 9.$$

Для численного расчета примеров приняты следующие значения:

$$L = 4{,}8\cdot 10^6\ \text{м}, \quad A = 20\ \text{дкм}\ (\text{или}\ 10\ \text{дкм}), \quad \delta s = 3\cdot 10^5\ \text{м},$$

$$c^2 = 7{,}5\cdot 10^4\ \text{м}^2\,\text{сек}^{-2}, \quad l = 1{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{сек}^{-1}, \quad \beta = 1{,}3\cdot 10^{-11}\ \text{м}^{-1}\,\text{сек}^{-2}.$$

Область интегрирования была покрыта сеткой 20×14, причем в центре этой области, согласно формуле (12), в начальный момент имелся антициклон.

Рассматривались следующие варианты.

При $t = 0$:

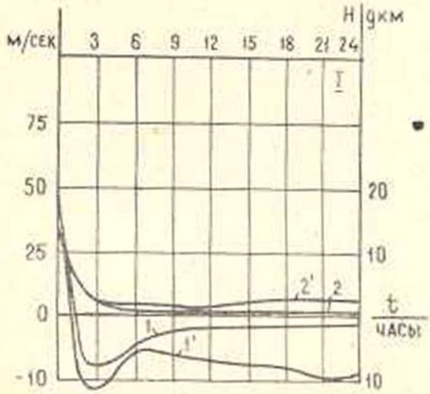
I. H — по формуле (12), $A = 20$ *дкм*, $u = 0$, $v = -v_g = -\frac{g}{l}\frac{\partial H}{\partial x}$.

II. H — по формуле (12), $A = 20$ *дкм*, $u = u_g$, $v = v_g$.

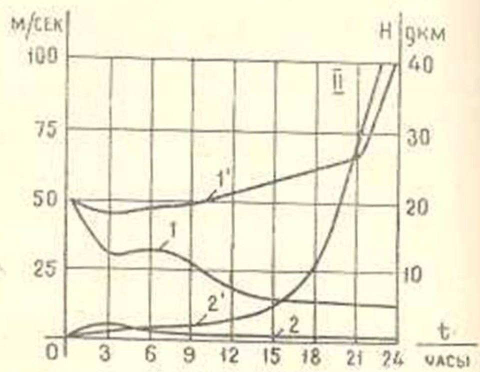
III. H — по формуле (12), $A = 10$ *дкм*, $u = v = 0$.

IV. $H = 0$, $u = u_g$, $v = v_g$, u_g и v_g вычислялись по формуле (12) при $A = 10$ *дкм*.

Расчеты проводились при $\delta t = 30$ *мин*. и $\delta t = 1$ *ч*., причем при $\delta t = 30$ *мин* вычислялись только варианты I и II. Результаты обработки представлены на фиг. 1 и 2. При $\delta t = 1$ *ч* вычислялись также

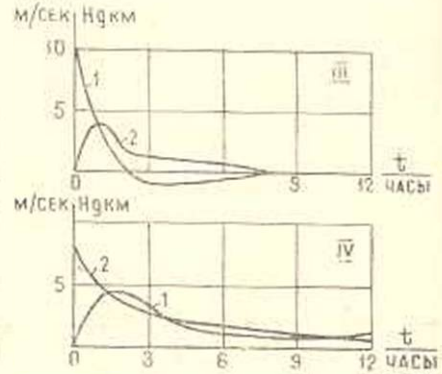


Фиг. 1. Вариант I: 1 — H, 2 — максимальное из значений $|u - u_g|$ и $|v - v_g|$ при $\delta t = 1$ *час*; 1' — H, 2' — максимальное из значений $|u - u_g|$ и $|v - v_g|$ при $\delta t = 30$ *мин*.



Фиг. 2. Вариант II: 1 — H, 2 — максимальное из значений $|u - u_g|$ и $|v - v_g|$ при $\delta t = 1$ *час*; 1' — H, 2' — максимальное из значений $|u - u_g|$ и $|v - v_g|$ при $\delta t = 30$ *мин*.

варианты III и IV, результаты обработки полученных данных представлены на фиг. 3.



Фиг. 3. Варианты III и IV: при $\delta t = 1$ *ч*. 1 — H, 2 — максимальное из значений $|u - u_g|$ и $|v - v_g|$.

На этих графиках приведены максимальные значения H и отклонения скорости от скорости геострофического ветра в зависимости от времени.

Обработка велась следующим образом. Через каждые три часа ЭВЦМ печатала значение величин H, $|u - u_g|$, $|v - v_g|$. По этим данным на плоскости размерами 16×10 строились поля давления и скоростей, после чего по максимальным значениям H, $|u - u_g|$, $|v - v_g|$ в зависимости от времени строились графики, приведенные на фиг. 1—3. Следует отметить, что при $\delta t = 1$ *ч*. максимальные (или минимальные) значения H в зависимости от времени не перемещались от точки к точке, а это изменение происходило в своем первоначальном месте. Это относится ко всем четырем вариантам. Как видно из этих графиков, процесс адаптации происходит очень быстро, за несколько часов, например, в I варианте (фиг. 1) при $t=0$ в центре плоскости максимальное значение $H=20$ *дкм*, $|u-u_g|=16{,}5$ *м/сек* и $|v-v_g|=33$ *м/сек*, через 3 часа в этой же точке $H=-8$ *дкм*, а максимальные значения $|u-u_g|$ и $|v-v_g|$ соответственно равны 6 и 3 *м/сек*; при $t=6$ *ч*. $H=-5$ *дкм*, а $|u-u_g|$ и $|v-v_g|$ не превышают и 2 *м/сек*.

Таким образом, в I варианте за 6 часов происходит адаптация. С возрастанием времени разности $u-u_g$ и $v-v_g$ еще больше уменьшаются и H тоже уменьшается.

В III и IV вариантах приспособление и затухание со временем происходят еще быстрее. Это обьясняется тем, что начальное возмущение ограничено в области радиусом 1200 *км* и с ростом времени это возмущение передается в прежние невозмущенные области плоскости и, кроме того, происходит приспособление поля давления к полю скорости. Поле скорости тоже изменяется значительно от своего первоначального значения. Здесь также влияют нулевые граничные условия.

Что касается III варианта (фиг. 3), то быстрое затухание процесса связано с процессом адаптации поля давления к нулевому полю ветра.

На фиг. 1 показан пример процесса изменения первоначально адаптированной ограниченной области. Через 3 часа возникают агеострофические ветры порядка 5 *м/сек* и понижение H от 20 *дкм* до 12 *дкм*. Это вызвано тем, что энергия антициклона из ограниченной области передается в прежние невозмущенные места. Через несколько часов процесс снова приспосабливается.

В этом варианте, как видим, поле давления уже в конце 24 часа имеет значение 4 *дкм* и так быстро не затухает, как в прежних примерах потому, что поле давления поддерживается полем скоростей.

Здесь речь шла о расчетах, при которых $\delta t=1$ *ч*.

При расчетах $\delta t=30$ *мин*. наблюдается качественно другая картина. Процесс адаптации в начале происходит так же, как при $\delta t=1$ *ч*. (см. фиг. 1 и 2). Это квазигеострофическое движение продолжается до $t=12$ *ч*. В прежних невозмущенных местах возникают агеострофические ветры, которые с ростом времени растут, это ясно видно из фиг. 2 (соответствующей II варианту). Это связано с возникновением инерционно-гравитационных волн, которые в свою очередь приводят к резкому изменению поля давления и резкому возрастанию барического градиента. Здесь следует упомянуть, что максимальные (или минимальные) значения поля давления не остаются в своих прежних местах.

Как видно из этих графиков, во всех этих вариантах происходит адаптация между полями ветра и давления, каковыми бы ни были начальные возмущения. Время, необходимое для адаптации, не превышает 6 часов, а то и меньше, при этом поле давления приспосабливается к полю ветра, которое в свою очередь значительно изменяется.

В расчетах при $\delta t = 1$ *ч* после адаптации процесс либо начинает затухать, либо остается таковым некоторое время в то время, как при $\delta t = 30$ *мин* после приспособления через некоторое время, порядка нескольких часов, в прежних невозмущенных местах начинают возникать агеострофические ветры, которые с возрастанием времени растут. Это приводит к резкому изменению поля давления, что вызвано возникновением инерционно-гравитационных волн.

Произведенные расчеты с $\delta t = 3$ *ч*, показали, что процесс протекает так, как при $\delta t = 1$ *ч*.

Институт водных проблем и гидромеханики
МВХ Армянской ССР
Поступила 21 V 1965

Զ. Հ. ԶՈՐՅԱՆ

ՄԵՏԵՈԷԼԵՄԵՆՏՆԵՐԻ ԿԱՐՃԱԺԱՄԿԵՏ ԿԱՆԽԱԳՈՒՇԱԿՄԱՆ ՆՊԱՏԱԿՈՎ ԱԴԱՊՏԱՑԻԱՅԻ ՀԱՐՑԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻՋԻՆ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված է ճնշման և արագության դաշտերի ադապտացիայի հարցի ուսումնասիրությունը հիդրոդինամիկայի լրիվ հավասարումների միջոցով:

Ճնշումը որոշվում է (9) երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումից, որը վերջավոր ձևերին անցնելուց հետո լուծվում է Լիբմանի իտերացիոն մեթոդով էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ: Արագության հորիզոնական բաղադրիչները որոշվում են (10) և (11) հավասարումներից, նույնպես վերջավոր ձևերին անցնելուց հետո:

Թվային արդյունքների հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ ինչպիսին էլ լինեն ճնշման ու արագության սկզբնական արժեքները, մի քանի ժամից հետո ճնշման ու արագության դաշտերի միջև առաջանում է գեոստրոֆիկ կապ, այսինքն՝ այդ դաշտերը ադապտացիայի են ենթարկվում, ճիշտ այնպես, ինչպես խնդրի գծային դրվածքի դեպքում: Բայց որոշ ժամանակից հետո այդ կապը խախտվում է, երբ $\delta t = 30$ րոպե, որը հետևանք է գրավիտացիոն ալիքների առաջացման, որը, վերջին հաշվով, բերում է ճնշման դաշտի խիստ փոփոխման:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Е Ду-чжэн, Ли Мэ-цун*. Механизм формирования негеострофического ветра. Труди симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеоиздат, Л., 1964.
2. *Добрышман Е. М.* Учет переменности параметра Кориолиса при исследовании ат-

мосферных процессов. Труды Всесоюзного научного метеорологического совещания, т. II, Гидрометеоиздат, Л., 1963.

3. *Зорян З. А.* Краткосрочный прогноз поля атмосферного давления по двухуровенной схеме с неявными производными. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964.

4. *Кибель И. А.* Приложения к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 5, 1940.

5. *Кибель И. А.* О приспособлении движения воздуха к геострофическому. ДАН СССР, 104, № 1, 1955.

6. *Монин С. И.* Изменение давления в бароклинной атмосфере. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1958.

7. *Обухов А. М.* К вопросу о геострофическом ветре. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., 13, № 4, 1949.

8. *Садоков А. П., Добрышман Е. М.* О решении уравнения, описывающего возмущения в поле градиентного ветра. Труды ЦИП, вып. 43 (70), 1956.

9. *Bolin B.* The adjustment of a non-balanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid. Tellus, № 5, 1953.

10. *Cann A.* An investigation of free oscillations of simple current system. I. Met., 2, 1945.

11. *Raethjen P.* Über gegenseitige Adaptation der Druck und Stromfelder. Arch. Met. Geoph. u. Biok. A, Bd. 2, 1950.

12. *Rossby C. G.* On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, I. II. Journ. Marine Res. 1, 1937—38.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. МХИТАРЯН, Г. Г. ПАХЧАНЯН, А. Г. ЛАЗАРЯН

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ МОНОСЛОЕВ—ДЕПРЕССОРОВ ИСПАРЕНИЯ

Введение

Проблема сокращения потерь воды на испарение с поверхности водоемов и озер является актуальной и имеет важное народнохозяйственное значение, особенно для южных засушливых районов нашей страны.

Сэкономленные воды, наряду с естественными водными ресурсами, могут найти комплексное применение в сельскохозяйственном производстве, энергетике, в водоснабжении промышленных объектов, городов, населенных пунктов и др.

Исследования показывают, что изменение испарения в сторону его уменьшения связано с уменьшением ветра, турбулентного обмена и температуры поверхности воды или с увеличением влажности воздуха.

Возможны три наиболее реальных способа воздействия на испарение. Первый способ основан на периодическом изменении глубины водоема. Для этого необходимо добиваться резкого увеличения глубины летом и резкого ее сокращения зимой [7]. Такое регулирование глубины приведет к сокращению испарения летом и почти к его прекращению зимой. Но практически добиться такого большого изменения глубины почти невозможно. Некоторое такое регулирование возможно лишь для искусственных больших водохранилищ на реках. Но режим этих последних часто диктуется другими энергоэкономическими соображениями, а испарение с их поверхности далеко не всегда имеет решающее значение.

Второй способ, связанный с понижением температуры воды, может быть реализован покрытием поверхности специальными веществами, не мешающими биологической жизни в водоеме, но обладающими способностью увеличивать отражающие свойства водной поверхности, так называемое альбедо. Расчеты показывают [8], что увеличение альбедо от 5 до 20% сокращает испарение лишь на 5—8% при одинаковых условиях. Но все дело заключается в том, что при искусственном увеличении альбедо прочие условия не останутся одинаковыми. В частности, это приведет к уменьшению температуры воды, и сокращение испарения будет более существенным. Следует отметить, что в этом направлении почти никаких работ не ведется, лишь в работе М. И. Будыко [1] этот способ рассматривается для возможности изменения режима ледников путем уменьшения альбедо, то есть увеличения поглощенной радиации.

Существует, наконец, еще один способ уменьшения испарения. Заключается он в покрытии водной поверхности так называемыми мономолекулярными слоями из поверхностно-активных веществ или жирных спиртов, которые способны сокращать испарение в значительной степени [2, 4—8].

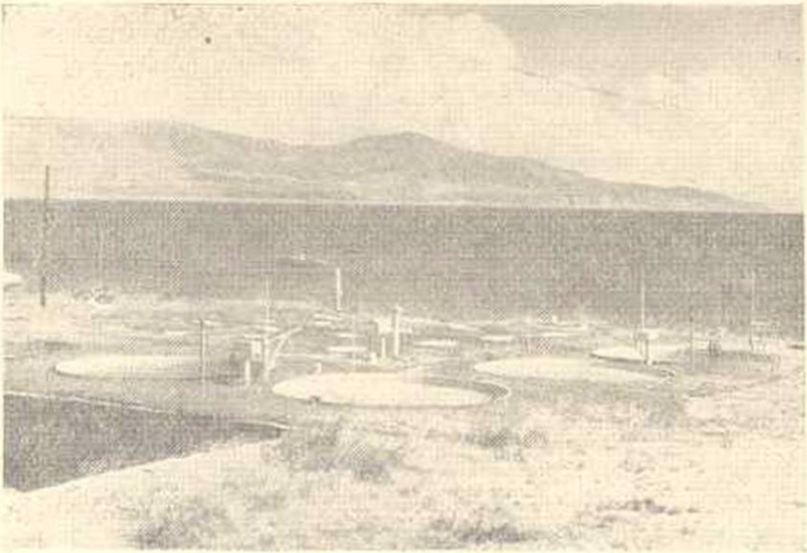
Научно-исследовательские работы по борьбе с испарением с помощью мономолекулярных слоев в СССР были начаты в 1960 г. В том же году осенью были начаты исследования в Армении, в ИВП АН Армянской ССР.

В это же время И. В. Егиазаров начал издавать ряд сообщений [2] о работах, проводимых за рубежом. В этих сообщениях приведен большой список опубликованных статей по данному вопросу.

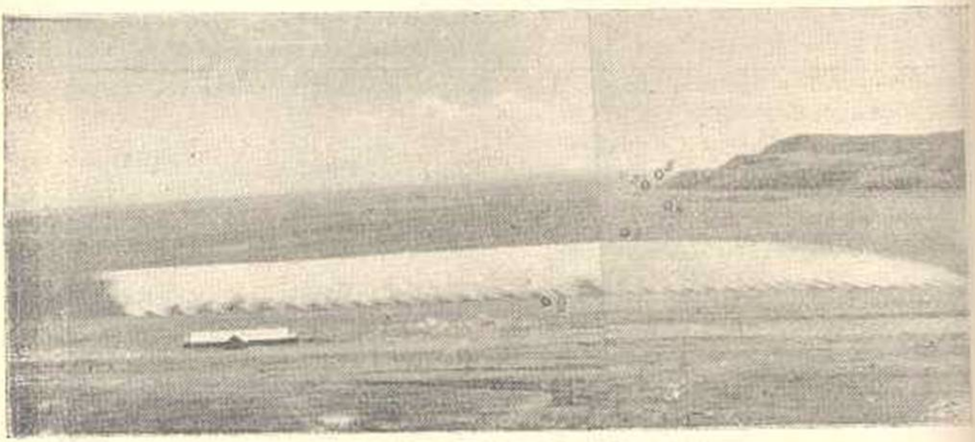
Первые работы в Армении проводились совместно с Всесоюзным научно-исследовательским институтом гидротехники и мелиорации. Результаты работ опубликованы [3—7]. Целью этих исследований было выяснение эффективности монослоев из различных спиртов по сокращению испарения с поверхности испарителя в условиях берега оз. Севан. Научно-исследовательские работы 1961—1964 гг. проводились более широким фронтом.

Во-первых, на водно-испарительной площадке проводились испытания новых, главным образом, отечественного производства монослоев. Изучался тепловой баланс воды в испарителях при наличии пленки и без нее. Проводились и другие работы. Во-вторых, в натурных условиях на Артанишском реликтовом озере, площадью 0,45 $км^2$, проводились работы непосредственно по сокращению испарения. В открытой лаборатории института был создан забетонированный бассейн площадью 650 $м^2$ (50 $\times$ 13) и глубиной 1,4 *м*. Бассейн снабжен с одного конца специальным волнопродуктором, на другом конце установлен специальный аэродинамический стенд, дающий возможность создавать волны высотой до 10—15 *см* и воздушный поток со скоростью до 3—5 *м/сек* на высоте нескольких десятков сантиметров над водной поверхностью. На этом бассейне проводились испытания пленок на сопротивляемость ветру и волнениям [3].

И, наконец, в 1964 г. проводились работы по созданию пленочных ковров площадью до 4—8 $км^2$ на оз. Севан с помощью специальных автоматов, установленных на берегу Артанишской бухты. Результаты этих работ можно найти в отчетах института за 1963—1964 гг. (В. Н. Жамагорцян, Б. И. Бек-Мармарчев, А. Г. Лазарян и др.), а также в [3—7]. Краткое описание водно-испарительной площадки можно найти в [3—6]. На фиг. 1 показан общий вид водно-испарительной площадки, на фиг. 2—ковер монослоя из вторых неомыляемых спиртов на оз. Севан.



Фиг. 1. Общий вид Артанишской водно-испарительной площадки.



Фиг. 2. Ковер пленки на Артанишской бухте.

Ниже излагаются результаты работ, выполненных под руководством А. М. Мхитаряна. А. Г. Лазаряном проведены экспериментальные работы, он участвовал также в обработке данных экспериментов (§ 2). Г. Г. Пахчанян принимал участие в разработках §§ 3 и 5 и в некоторых расчетах.

§ 1. Некоторые результаты опытов

Опыты показывают, что жирные спирты, типа гексадеканоль, октадеканоль и другие, практически не растворимы в воде и образуют на ее поверхности бесцветные пленки толщиной в одну молекулу. Молекулы с водолюбивой частью притягиваются к воде, устанавливаются в ряд в вертикальном положении дискрето. Такое расположение молекул и создает мономолекулярную пленку.

Эффективность защиты водной поверхности от испарения монослоем зависит от физических свойств вещества и, прежде всего, плотности пленки, характеризуемой двухмерным давлением [9].

Пленка не препятствует проникновению в воду света и кислорода, не нарушает нормальной жизни водоема и, вместе с тем, сокращает испарение. По физическим свойствам пленка эластична, упруга, повторяет формы свободной поверхности воды и быстро восстанавливается после разрывов.

Как указывалось выше, эффективность монослоев зависит от двухмерного давления в слое. Для измерения этого давления применяется модернизированный для работы в полевых условиях вариант прибора А. А. Трапезникова [9]. Кроме того, в опытах 1961—1964 гг. применялся набор индикаторов, рассчитанных на определение двухмерного давления в пределах 0,1—29,2 *дин/см* [3].

Опыты показали, что сокращение испарения составляет от 10 до 62%. Достаточно эффективными оказались пленки из цетилового спирта и спиртов из кашалотового жира и вторых неомыляемых.

Температура воды под плёнкой оказалась выше на 1—3°С. Сокращение испарения за отдельные дни при малых скоростях ветра доходило до 90% и более. Некоторые пленки образуются за несколько минут.

Опыты показали, что при разовой подаче химиката наиболее эффективное сокращение происходит в течение некоторого времени, названного нами продолжительностью эффективности пленки. Далее процент сокращения испарения резко уменьшается. Увеличение расхода вещества при малых его значениях приводит к довольно заметному росту процента сокращения и продолжительности эффективности пленки. Дальнейшее увеличение расхода химиката приводит к незначительному их увеличению [4, 5].

Проводились и другие опыты, например, для выбора способа подачи химиката одно и то же количество химиката подавалось сразу на определенный промежуток времени и в различных дозах ежедневно, через 3 дня, 5 дней и т. д. [4].

На основании полученных результатов сделан ряд выводов и, прежде всего, о том, что монослой из отечественного химиката-вторых неомыляемых спиртов довольно эффективный.

Монослой этот применялся в натурных условиях в целях сокращения испарения с поверхности Арганишского озера, уровень которого поддерживается на определенной отметке с помощью насосной установки, которая перекачивает воду из оз. Севан [3].

Сокращение испарения с поверхности озера составляло около 15%, что следует признать вполне эффективным, тем более, что озеро находится в трудных условиях, при которых сильные скорости ветра направлены по его малой оси и почти за 30—40 минут сгоняют пленку к противоположному берегу. Наблюдения показали, что скорость дрейфа пленки примерно в 25—30 раз меньше скорости ветра на высоте 2 *м*. Заметное перемещение пленочного ковра начинается при скорости ветра порядка 3,5—5 *м/сек* [3].

Наиболее важный результат заключается в том, что если с увеличением скорости ветра испарение с поверхности чистой воды увеличивается прямо пропорционально первой степени скорости, то при наличии пленки этот рост происходит быстрее. Это означает, что если испарение при малых скоростях сокращается в значительной степени, то с ростом скорости ветра, следовательно, и испарения, процент сокращения уменьшается, а при некотором значении скорости ветра вовсе прекращается. При дальнейшем увеличении скорости ветра испарение с поверхности воды под разрушенной пленкой даже становится больше, чем с поверхности чистой воды из-за разности температур [6, 7].

§ 2. Об определении испарения при наличии монослоя

Прежде чем перейти к изложению метода определения испарения при наличии пленки, отметим, что в [1] приведены соображения об эффективности монослоев при их применении в большом масштабе. Поэтому наряду с другими методами в этой работе применение монослоев на арктических морях рассматривается как средство повышения температуры воды, а следовательно, и воздуха. Воздействие этих факторов на льды Арктики способствовало бы таянию льдов и задерживало бы их разрастание.

В работе [8] М. П. Тимофеев решил задачу в зависимости от свойства пленки и гидрометеорологических характеристик водоема. Формула испарения при наличии пленки по М. П. Тимофееву имеет следующий вид

$$E_n = \frac{bu\,(e_n - e)}{1 + bu/\beta}. \tag{2.1}$$

Здесь β — величина, пропорциональная коэффициенту аккомодации [8]. В естественных условиях, при отсутствии пленки $bu/\beta \ll 1$, поэтому формула принимает обычный вид, при этом $e_n \to e_0$, где e_0 — упругость насыщения, определяемая по температуре поверхности воды в отсутствии пленки.

Для роста температуры воды под пленкой и сокращения испарения автором получены соответствующие формулы [8].

На основании этих исследований автор [8] пришел к выводу о том, что с ростом скорости ветра эффективность монослоя увеличивается. Результат этот был бы точным, если бы пленка сохраняла свою сплошность и двухмерное давление при больших скоростях ветра, тем более, что эффективность пленки повышается с увеличением испарения в естественных условиях, а это последнее прямо пропорционально скорости ветра.

Все дело в том, что с увеличением скорости ветра способность пленки сопротивляться испарению ухудшается, а при некотором ее значении пленка вообще разрушается и становится неэффективной.

Скорость ветра, при которой происходит разрушение пленки, и последняя перестает сопротивляться испарению, назовем критической. Опыты показали, что эта скорость зависит в основном от вида пленки.

Обозначим через E_0 скорость испарения с поверхности чистой воды при температуре T_0 и упругости насыщения e_0, через E_0' испарение с поверхности чистой воды при температуре воды под пленкой T_n и влажности насыщения e_n, определяемой по T_n, и, наконец, через E_n испарение с поверхности воды при наличии пленки при температуре T_n и влажности e_n', отличной от e_n.

$$E_0 = a(b+v)(e_0 - e_2), \tag{2.2}$$

$$E_0' = a(b+v)(e_n - e_2), \tag{2.3}$$

$$E_n = a(b+v)(e_n' - e_2), \tag{2.4}$$

причем все эти формулы написаны, например, для одного и того же испарителя. Собственно, две первые формулы совпадают, такая запись лишь подчеркивает разницу в температурах чистой воды.

Возможность такой записи, когда ветровой фактор для всех случаев совпадает, была обоснована в работе [7]. Физически это понятно, ведь величина $a(b+v)$ учитывает конструктивные особенности испарителя и внешние факторы, такие как турбулентное перемешивание в приземном слое воздуха, которые, конечно, не зависят от условий опыта на испарителях.

Введем следующие понятия

$$Э = 1 - \frac{E_n}{E_0}; \qquad Э' = 1 - \frac{E_n}{E_0'}. \tag{2.5}$$

Так как $T_n > T_0$, по (2.3) и (2.4) будем иметь $E_0' > E_0$, то есть $Э' > Э$. Здесь $Э'$ — некоторая фиктивная экономия испарения за счет пленки, если испарение пленки отнести к испарению с поверхности чистой воды не при естественной температуре ее поверхности, а при температуре, равной температуре воды под пленкой.

Синхронные наблюдения на одинаковых испарителях с монослоями и без них [3—7] дают возможность измерять величины: E_0, E_n (следовательно, и Э, Э'), T_0, T_n, e_0, e_n, а также e и T воздуха. Одновременно для каждой пленки определяется критическая скорость ветра $v_{кр}$.

Группируя затем полученные данные по интервалам скорости ветра, отнесенной к $v_{кр}$, полученные данные осреднялись и наносились на график в логарифмической шкале. Для одного и того же вещества точки ложатся на прямую. В обычной шкале уравнение имеет вид

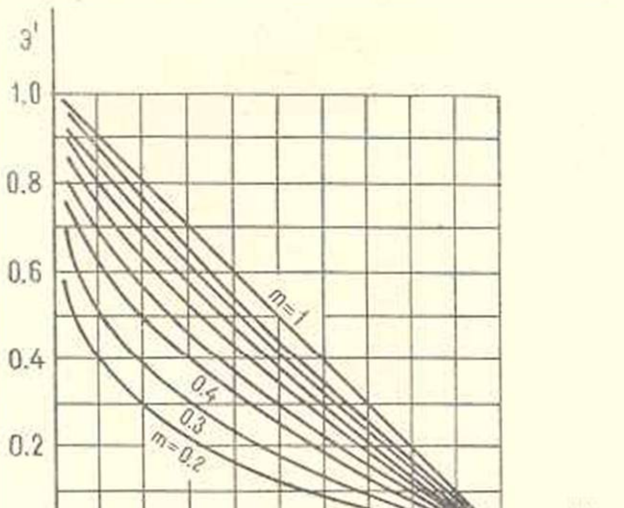
$$Э' = 1 - \frac{E_n}{E_0'} = 1 - B\left(\frac{v}{v_{кр}}\right)^m. \tag{2.6}$$

Уравнения этих прямых выводились по способу наименьших квадратов, в самом худшем случае разброс точек все же не очень большой, коэффициент корреляции изменяется от 0,65 до 0,9.

Величина B изменяется от 1 до 1,05, в среднем $B = 1,02$ и учитывает то обстоятельство, что при $v > v_{кр}$ некоторое время имеет место $E_n > E_0'$.

Если такую же зависимость построить для величины E_n/E_0, оказывается $B = (1,06-1,12)$. Это и понятно, так как при $v > v_{кр}$ имеем $E_n > E_0$.

Зависимость (2.6) представлена на фиг. 3.



Фиг. 3. Зависимость эффективности монослоев от скорости ветра.

Для лучших спиртов $m = 0,8-0,9$, для малоэффективных $m = 0,2-0,3$. Например, для гексадеканоля и спиртов из кашалотового жира $m = 0,85$. Для чистой воды $m = 0$. Соотношение (2.6) показывает, что чем больше m, тем меньше E_n/E_0', следовательно, больше $Э'$, так как $v/v_{кр} < 1$. Опыты на испарителях (20 $м^2$ площади) дали возможность определять эти параметры для некоторых видов пленок.

Для лучших из них $v_{кр} = 8-10$ *м/сек*. Для спиртов из вторых неомыляемых получено $v_{кр} = 7,5-8$ *м/сек*.

Имея экспериментальные данные о величинах m и $v_{кр}$, определяемых физическими свойствами самой пленки и гидрометеорологическими условиями, легко теперь проводить расчеты испарения в естественных условиях при наличии пленки, то есть определить по сути дела $e_{п}'$.

Разделяя (2.4) на (2.3) и пользуясь (2.5), получим

$$e_{п}' = e_2 + (e_{п} - e_2)\frac{E_{п}}{E_0}. \tag{2.7}$$

Отметим, что e_2 — влажность воздуха; $E_{п}/E_0$ — определяется по фиг. 3; $e_{п}$ — по температуре поверхности воды под пленкой. Имея $e_{п}'$, легко по (2.4) рассчитать испарение при наличии пленки.

Можно было бы весь расчет отнести к $E_{п}/E_0$, построив зависимость, подобно фиг. 3. Тогда в расчет вошла бы величина e_0, соответствующая температуре поверхности чистой воды, которая в натурных условиях при покрытии водоема пленкой не будет известна. При желании ее можно рассчитать, исходя из уравнения теплового баланса.

Отметим, что проводились опыты по изучению теплового баланса воды в испарителе при наличии пленки. Они, во-первых, показали, что монослои, как правило, не меняют альбедо водной поверхности [4—6], во-вторых, при эффективном сокращении пленки температура воды повышается на несколько градусов в зависимости от величины сокращения испарения. В дальнейшем рост температуры прекращается, хотя сокращение и продолжается. Это означает, что устанавливается новое равновесное состояние, при котором сэкономленное за счет уменьшения испарения тепло тратится на дополнительный теплообмен с атмосферой и грунтом и на некоторое увеличение собственного излучения, особенно ночью.

Объединяя теоретическую формулу М. П. Тимофеева (2.1) и формулу, предложенную А. М. Мхитаряном [7] на основании экспериментальных работ в виде

$$E_{п} = bv\,(e_{п} - e)\,A', \tag{2.8}$$

получим следующее выражение

$$A' = \left(\frac{v}{v_{кр}}\right)^m = \frac{1}{1 + bv/\beta}, \tag{2.9}$$

откуда легко определяется величина

$$\beta = \frac{bv}{(v_{кр}/v)^m - 1}. \tag{2.10}$$

Эта формула показывает, что, действительно, β зависит от скорости ветра. При $v = 0$ имеем $\beta = 0$, т. е. $A' = 0$ и испарение под пленкой прекращается. При $v = v_{кр}$ $\beta \to \infty$ и $A' = 1$ и, согласно формулам

(2.1) и (2.8) испарение происходит, как с поверхности чистой воды, так как пленка исчезает.

Согласно формулам (2.5) и (2.6), для определения экономии испарения получаем следующую формулу

$$Э = 1 - B\left(\frac{v}{v_{кр}}\right)^m, \tag{2.11}$$

для расчетов по которой необходимо знать m и $v_{кр}$.

§ 3. Другой метод определения испарения с водной поверхности и его экономии при наличии на ней монослоя

Подойдем теперь к решению вопроса с несколько другой точки зрения.

Предположим, что испарение сквозь пленку происходит с коэффициентом обмена при наличии монослоя $D_л$, причем влажность изменяется от $e_л$, определяемой $T_л$ под пленкой, до некоторой неизвестной влажности $e_л'$ над поверхностью пленки. Это испарение будет определяться формулой

$$LE_л = D_л(e_л - e_л'). \tag{3.1}$$

Далее, испарение в припленочном слое воздуха будет происходить согласно формуле

$$LE_л = \overline{D}(e_л' - e_2), \tag{3.2}$$

где $\overline{D} = D0{,}622L\rho/p$ — коэффициент обмена в обычном смысле, поскольку поток влаги сквозь пленку и далее в атмосферу будет один и тот же. Исключая неизвестную величину упругости пара $e_л'$, получим

$$LE_л = \left(\frac{D_л + \overline{D}}{D_л}\right) \cdot \overline{D}(e_л - e_2). \tag{3.3}$$

Легко заметить, что справа стоит величина испарения с поверхности чистой воды при температуре $T_л$, т. е.

$$LE_0' = \overline{D}(e_л - e_2). \tag{3.4}$$

Объединяя (3.3) и (3.4), получим

$$A' = \frac{E_л}{E_0'} = \frac{D_л + D}{D_л}. \tag{3.5}$$

Для определения экономии испарения будем иметь

$$Э' = 1 - A' = \frac{E_0' - E_л}{E_0'} = \frac{\overline{D}}{D_л + D}. \tag{3.6}$$

Из этого выражения легко может быть определена величина коэффициента обмена сквозь пленку — $D_л$, если известна экономия испарения, и наоборот. Ниже будет показано, как можно определить D_n, тогда легко по (3.6) определить некоторую фиктивную экономию испарения, которая несколько больше, чем фактическая экономия, так как отнесена к испарению E_0' с поверхности чистой воды при температуре воды под пленкой.

Истинная экономия испарения должна быть определена по формуле (2.5), где E_n определяется по формуле (3.3), т. е.

$$LE_n = \frac{\bar{D} D_n}{\bar{D} + D_n} (e_n - e_2), \tag{3.7}$$

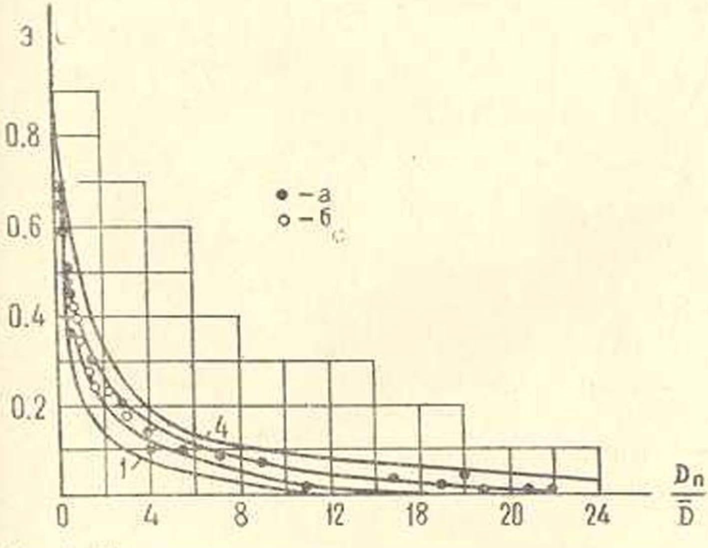
а E_0 — по формуле

$$LE_0 = \bar{D} (e_0 - e_2), \tag{3.8}$$

причем e_0 — упругость насыщения при температуре поверхности воды T_0, которая имела бы место, если бы не было монослоя. Подставляя (3.7) и (3.8) в (2.5), получим

$$Э = 1 - A = 1 - \frac{D_n}{D_n + \bar{D}} \frac{e_n - e_2}{e_0 - e_2}. \tag{3.9}$$

Эта зависимость представлена на фиг. 4.



Фиг. 4. Зависимость экономии испарения от относительного интегрального коэффициента обмена монослоя при $\mu_0 = 0$ (1), $\mu_0 = 0{,}3$; 1 и $\mu_0 = 7$ (4). На графики нанесены опытные точки: *а*—Артанниш; *б*—Норк.

Остается определить еще e_0, т. е. T_0. К определению этих величин мы вернемся ниже. Имея T_0, т. е. e_0, можно по (3.9) найти фактическую экономию испарения.

Если при такой интерпретации испарение при наличии пленки определяется по формуле (3.7), то теплообмен с атмосферой будет определяться по формуле

$$P_n = \frac{c_p p}{0.622L} \bar{D} (T_n - T_2). \tag{3.10}$$

Тогда для отношения Боуэна получим

$$\frac{P_n}{LE_n} = \frac{P_0'}{LE_0'} \frac{\bar{D}+D_n}{D_n}; \qquad \frac{P_0'}{LE_0'} = \frac{c_p p}{0.622\,L} \frac{T_n - T_2}{e_n - e_2}. \tag{3.11}$$

Здесь штрихи обозначают значение элемента в отсутствии монослоя, но при температуре воды под пленкой. В случае, когда $D_n = 0$, это отношение неограниченно возрастает, в случае, когда $D_n \to \infty$, наоборот, стремится к своему значению при отсутствии пленки.

§ 4. Зависимость повышения температуры воды от величины сокращения испарения

Рассмотрим уравнение теплового баланса водной поверхности при наличии пленки, которое для чистой воды (без пленки) напишем в виде

$$R_0 = LE_0 + P_0 + B_0 + B_Г^0. \tag{4.1}$$

При наличии пленки это уравнение примет вид

$$R_n = LE_n + P_n + B_n + B_Г^n. \tag{4.2}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$R_0 - R_n = L(E_0 - E_n) - (P_n - P_0) - (B_n - B_0) - (B_Г^n - B_Г^0). \tag{4.3}$$

Согласно определению, имеем

$$\begin{aligned} R_0 &= S_0(1-\alpha) - I_0(1 - cn_0^2) - 4f\sigma\bar{T}^3(T_0 - T), \\ R_n &= S_0'(1-\alpha') - I_0'(1 - c'n_0'^2) - 4f'\sigma'\bar{T}^3(T_n - T'). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Здесь R — радиационный баланс; LE, P — затраты тепла на испарение и турбулентный теплообмен; B и $B_Г$ — изменение теплосодержания воды и поток тепла в грунт; S_0 — суммарная солнечная радиация; α — альбедо; I_0 — эффективное излучение при безоблачном небе; n_0 — облачность в долях единицы; σ, f — коэффициенты Стефана — Больцмана и излучения; $\bar{T}$ — некоторая средняя температура по абсолютной шкале. Индекс „ноль“ относится к поверхности чистой воды; индекс „n“ — к поверхности воды при наличии на ней пленки, к ней относятся и „штрихи“.

Очевидно, суммарная солнечная радиация и облачность при наличии пленки и без нее изменяться не будут, т. е. $S_0 = S_0'$ и $n_0 = n_0'$. Далее, как показали опыты, альбедо тоже не меняется, т. е. $\alpha \approx \alpha'$. Предполагая еще, что эффективное излучение при безоблачном небе также не меняется, т. е. $I_0 \approx I_0'$ и $c \approx c'$ и, кроме того, мало изменение температуры воздуха, что имеет место для малых водоемов, из (4.4) получим

$$R_0 - R_n = 4f\sigma\widetilde{T}^3 (T_n - T_0). \tag{4.5}$$

Отсюда получаем первый результат. Радиационный баланс водной поверхности при наличии пленки уменьшается, если только имеет место сокращение испарения, т. е. $T_n - T_0 > 0$.

Поскольку опыты показали, что при наличии пленки формула (3.10) сохраняет вид

$$P_n = c_p\rho D (T_n - T), \tag{4.6}$$

т. е. коэффициент обмена почти не меняется, то можно предположить, что формула (3.7) тоже сохраняет свой вид, только вместо e_n, определяемой T_n, следует писать e_n', определяемое по (2.7)

$$LE_n = 0{,}622 \frac{L\rho}{p} D (e_n' - e). \tag{4.7}$$

Тогда легко получить

$$P_n - P_0 = c_p\rho D (T_n - T_0). \tag{4.8}$$

Считая теперь, что глубина воды в водоеме мала, можно приближенно положить $B_n - B_0 \approx 0$; $B_\Gamma^n - B_\Gamma^0 \approx 0$. Кроме того, обозначим еще $E_0 - E_n = \Delta E$. Тогда подставляя все полученные результаты в (4.3), в первом приближении получим

$$L\Delta E = (4f\sigma\widetilde{T}^3 + c_p\rho D)(T_n - T_0). \tag{4.9}$$

Принимая $f = 0{,}95$; $\widetilde{T} = 283$; $c_p = 0{,}24$; $\rho = 1{,}03 \cdot 10^3$ *г/м³*, $D = 1$ *см/сек*, для условий оз. Севан будем иметь $4\sigma f\widetilde{T}^3 = 0{,}71 \cdot 10^{-2}$, $c_p\rho D = 1{,}44 \cdot 10^{-2}$ при одной и той же размерности *кал/см² мин* °С.

Отсюда получаем второй результат. Сэкономленное за счет сокращения испарения тепло тратится на увеличение теплообмена с атмосферой и собственного излучения водной поверхности, причем две трети идет на первый процесс, одна треть — на последний. При этом глубина воды мала и теплообмен с грунтом не учитывается.

Подставляя значения указанных величин в (4.9) и переходя для ΔE к размерности *мм/сутки*, получим

$$T_n - T_0 = 1{,}92\ \Delta E. \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь влияние глубины (H) и теплообмена с грунтом. Согласно определению, имеем

$$B_0 = c'\rho' \frac{\partial}{\partial t}\int_0^H T' dz; \qquad B_\Gamma^0 = -c'\rho' k' \frac{\partial T'}{\partial z}\bigg|_H.$$

Написав такие же выражения при наличии пленки, введя среднюю на вертикали температуру и ее связь с температурой на поверхности,

$$T_{ср} = \frac{1}{H}\int_0^H T' dz; \qquad \mu(H, t) = T_{ср}/T_0, \tag{4.11}$$

получим соответственно

$$B_n = c'\rho'\mu H \frac{T_n^{''} - T_n^{'}}{\Delta\tau}; \qquad B_0 = c'\rho'\mu H \frac{T_0^{''} - T_0^{'}}{\Delta\tau}. \tag{4.12}$$

Здесь $\Delta\tau = t'' - t'$ — интервал времени, соответствующий разности $T'' - T'$. За этот промежуток принято $\mu \approx \mathrm{const}$. Обозначив

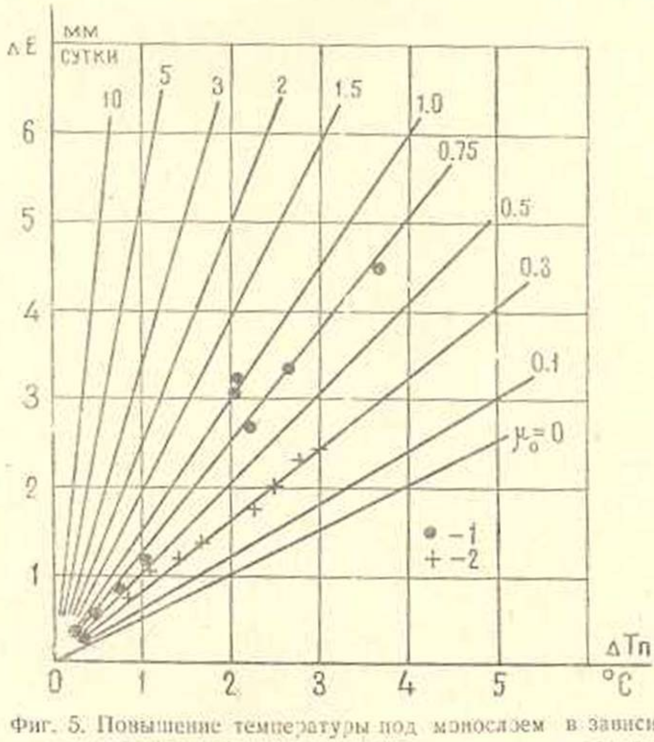
$$\mu_0 = \left(\mu_r + \frac{c'\rho'\mu H_м}{\Delta\tau_{мин}}\right)\cdot 0{,}24\cdot 10^6, \tag{4.13}$$

согласно основному уравнению окончательно получим

$$\Delta E = (0{,}52 + \mu_0)\,\Delta T_n. \tag{4.14}$$

Здесь ΔE берется в *мм/сутки*, тогда ΔT_n — будет в °С.

При $\mu_0 = 0$ получаем (4.10). Зависимость (4.14) для различных значений μ_0 представлена на фиг. 5.



Фиг. 5. Повышение температуры под монослоем в зависимости от уменьшения испарения ΔE и величины μ_0. 1—Артаниш; 2—Норк.

Таким образом, получаем третий результат. При наличии глубины часть сэкономленного тепла расходуется на увеличение собственного излучения, определяемого величиной $0{,}17\ \Delta T_n$; часть — на увеличение теплообмена с атмосферой, равного $0{,}25\ \Delta T_n$ и на увеличение теплосодержания воды и теплотока в грунт, равного $\mu_0 \Delta T_n$, причем μ_0 определяется по (4.13) при $c' = 1$ *кал/см³ град*; $\rho' = 1$ *г/см³*; H — в метрах; $\Delta\tau$ — в минутах, тогда μ_0 будет иметь размерность *мм/сутки град*.

Рассмотрим следующие случаи.

1. $H = 0$ или малая величина. В этом случае $\mu_0 = 0{,}24 \cdot 10^4\ \mu_г$. Подсчеты показывают, что в этом случае на теплообмен с грунтом может расходываться до 10% сэкономленного тепла. Поэтому при малых глубинах после установления разности температур при продолжающемся сокращении испарения лишь 10% сэкономленного тепла идет в грунт, 90% передается в атмосферу и является как бы чистой экономией. В дальнейшем, при исчезновении пленки, теплоток с грунта в воду приводит к некоторому увеличению испарения, а также двух других потоков (излучение и турбулентный теплообмен). Таким образом, чистая экономия составит $Э = 0{,}90\Delta E + 0{,}5 \cdot 0{,}10 \cdot \Delta E = 0{,}95\Delta E$. Это означает, что в случае малой глубины почти 95% полученного сокращения передается в атмосферу в виде тепла и теряется навсегда, т. е. является чистой экономией и лишь 5% этого тепла снова тратится на дополнительное испарение вследствие притока со стороны грунта к воде.

2. Глубина очень большая $H \to \infty$. В этом случае надо рассмотреть три следующих этапа:

а) происходит эффективное сокращение и по формуле (4.14) лишь $0{,}52\ \Delta T_n$ энергии теряется в атмосферу и является чистым выигрышем, часть, равная $\mu_0 \Delta T_n$ идет на пополнение запасов тепла в водной толще и в будущем частично расходуется на испарение.

б) Эффективное сокращение продолжается, профиль температуры воды установился, т. е. прогрев водных масс практически прекратился. Тогда мы переходим как бы к водоему без глубины, 90% сокращения является чистым выигрышем, 10% или даже меньше идет на пополнение теплозапасов грунта. Чем продолжительнее этот период, тем эффективность применения монослоев выше.

в) После некоторого времени пленка исчезает. Тогда часть накопленного в толще воды и грунта тепла идет на теплообмен с атмосферой и увеличивает чистую экономию этапа а), остальная часть идет на дополнительное испарение и уменьшает первоначальную экономию испарения. Для определения доли этого дополнительного испарения заметим, что после исчезновения пленки теплообмен с атмосферой и затраты тепла на испарение определяются по формулам (4.6) и (4.7) при $e'_n(T_n)$.

Предположим, что их отношение мало отличается от существующего отношения без пленки. Тогда, согласно результатам работы [7], будем иметь следующие данные для оз. Севан.

Таблица 1

Годовой ход отношения турбулентного теплообмена к затратам тепла на испарение для оз. Севан

Месяцы вел.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
P	4,9	3,4	1,2	−0,2	−0,3	0,2	0,4	0,9	1,3	1,9	4,1	5,3	23,1
LE	5,4	4,0	2,3	0,9	0,7	2,2	3,6	5,0	6,8	7,0	6,7	6,3	50,9
P/LE	0,91	0,85	0,52	—	—	0,09	0,11	0,18	0,19	0,27	0,61	0,84	0,45

Ясно, что $T_п - T_2 > T_0 - T_2$, тогда для отношения Боуэна без пленки но при температуре под пленкой, в отличие от (3.11), будем иметь

$$\frac{P_п}{LE_п} = 0{,}52\,\frac{T_п - T_2}{e_п - e_2} = 0{,}52\,\frac{T_0 - T_2}{e_0 - e_2}\,\frac{T_п - T_2}{T_0 - T_2}\,\frac{e_0 - e_2}{e_п - e_2}. \qquad (4.15)$$

Подставляя сюда значение P_0/LE_0, а также пользуясь разложением формулы Магнуса

$$e_0 - e_2 \approx d + \psi(T_0 - T_2); \qquad e_п - e_2 \approx d + \psi(T_п - T_2), \qquad (4.16)$$

легко получим следующую оценку

$$\frac{P_п}{LE_п} = \frac{P_0}{LE_0}\left[\frac{\psi + d/(T_0 - T_2)}{\psi + d/(T_п - T_2)}\right]. \qquad (4.17)$$

Поскольку при сокращении испарения имеем $T_п - T_2 > T_0 - T_2$, выражение в квадратных скобках формулы (4.17) будет больше единицы, поэтому $P_п/LE_п > P_0/LE_0$. Это означает, что экономия испарения по данным табл. 1 будет определена с небольшим запасом. При желании можно воспользоваться формулой (4.17).

Таким образом, получаем следующий окончательный результат. Наиболее выгодно применить пленку летом на малых водоемах, когда испарение большое и в последующий бесплeночный период заметного дополнительного испарения не будет, так как в период работы пленки тепло почти не будет накапливаться. На глубоких водоемах целесообразно работать в период охлаждения водных масс, когда отношение P/LE—большая величина, и чем больше продолжительность покрытия пленкой, тем выгоднее.

По данным для оз. Севан, например, получается следующая картина. За теплый период года (месяцы III—VIII) имеем: $LE_1 = 20{,}3\,кал/см^2$, $P_1 = 5{,}3$; $B_1 = 36{,}4$; $P_1/LE_1 = 0{,}261$. Соответствующие величины за IX—II месяцы равны: $LE_2 = 29{,}0$; $P_2 = 19{,}4$; $B_2 = -36{,}4$ и $P_2/LE_2 = 0{,}662$. Если теперь пленкой покрывать в период прогрева водных масс, когда $B_1 > 0$, то в это время небольшая часть сэкономленного тепла теряется в атмосферу, значительная часть накапливается и в последующем снова тратится на испарение. В то же время, если покрывать пленкой в период, когда $B_2 < 0$, то в это время отношение P_2/LE_2 значительно и уже в период работы пленки значительное количество тепла теряется в атмосферу и увеличивает чистую экономию.

На зависимости (3.9) и (4.14), полученные теоретически и представленные на фиг. 4 и 5, нанесены точки по экспериментальным данным, проведенным А. Г. Лазаряном в Артанише (черные кружки) и Б. И. Бек-Мармарчевым и М. И. Тер-Аствацатурян в Норкской лаборатории института (крестики). Результаты хорошо ложатся на график, соответствующей испарителю глубиной 1,5—2,0 *м* и водоему глубиной 15—18 *м*. Это и понятно, так как коэффициент обмена в хорошо перемешиваемом водоеме примерно в 10^2 раз больше такого для испарителя, а скорость распространения тепловой волны от поверхности воды в глубокие слои прямо пропорциональна корню квадратному от коэффициента обмена. Поэтому в водоеме глубиной 20 *м* и испарителе глубиной 2 *м* тепловая волна доходит до дна за одинаковое время [7].

§ 5. Определение эффективности монослоя

Поскольку эффективность монослоя определяется экономией испарения, выраженной формулой (2.5), постольку для ее вычисления необходимо рассчитать испарение при наличии монослоя за период его эффективной работы (E_n) и испарение с поверхности чистой воды, которое имело бы место за тот же период, если бы не было монослоя.

Испарение при наличии пленки может быть вычислено из (4.2), если подставить сюда (4.6) и (4.12) и считать, что $B_\Gamma \approx 0$. Тогда получим

$$LE_n = R_n - c_p\rho D\,(T_n - T_2) - c'\rho'\mu H\,\frac{T_n'' - T_n'}{\widetilde{\Delta\tau}}. \tag{5.1}$$

При этом радиационный баланс или измеряется непосредственно или определяется по (4.4). Все остальные величины известны.

Испарение с поверхности чистой воды, которое имело бы место, если бы не было пленки для периода работы пленки, когда фактическое испарение происходило по формуле (5.1), можно определить по формуле (3.8), если бы было известно e_0, т. е. T_0. Для определения этих последних воспользуемся (4.14). Получим

$$0{,}622\,\frac{L\rho}{p}\,D(e_0 - e_2) - LE_n = (D_\sigma + D_p + D_B)\,(T_n - T_0). \tag{5.2}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$D_\sigma = 4f\sigma\widetilde{T}^3;\quad D_p = \rho c_p D;\quad D_B = \mu_\Gamma + c'\rho'\mu H/\widetilde{\Delta\tau}. \tag{5.3}$$

В уравнении (5.2) LE_n определяется по (5.1), все остальные величины известны, кроме T_0 и e_0. Привлекая еще разложение (4.16), можно определить T_0 и e_0, а по сути дела определить LE_0. Получим

$$Э = 1 - \frac{E_n}{E_0} = \frac{p}{0{,}622\,L\rho}\,\frac{D_э + D_p + D_B}{D}\,\frac{T_n - T_2}{e_0 - e_2}. \tag{5.4}$$

Подчеркнем еще раз, что p, ρ, e_2—атмосферное давление (5.4), плотность и упругость водных паров; L—скрытая теплота парообразования; величины коэффициентов „обмена“ D, $D_э$, D_p, D_B известны; T_n—температура воды под пленкой — измеряется; T_0 и e_0 определены из двух соотношений: (5.2) и (4.17), причем

$$T_0 = \frac{(D_э + D_p + D_B)\,T_n + LE_n - \bar{D}\,(d - \psi T_2)}{D_э + D_p + D_B + \psi\bar{D}}. \tag{5.5}$$

Здесь $\bar{D} = 0{,}622\,L\rho D/p$, LE_n определяется по (5.1); e_0 — по психометрической таблице при T_0 по (5.5). LE_n может быть определено и по (3.7).

Если LE_n определяется из (5.1), то из (3.7) можно определить коэффициент обмена сквозь пленку

$$\frac{D_n}{\bar{D}} = \frac{LE_n}{\bar{D}\,(e_n - e_2) - LE_n}. \tag{5.6}$$

Поскольку $\bar{D}\,(e_n - e_2) = LE_0'$ испарение с поверхности чистой воды при температуре воды под пленкой, то легко видеть, что обратная величина (5.6) является некоторой фиктивной экономией испарения, отнесенной к LE_n, т. е.

$$\frac{D_n}{\bar{D}} = \frac{A'}{1 - A'} = \frac{1}{Э'} - 1. \tag{5.7}$$

Таким образом, D_n может быть вычислено по формуле

$$\frac{D_n}{\bar{D}} = \frac{R_n - c_p\rho D\,(T_n - T_2) - c'\rho'\,(\mu H/\overline{\Delta\tau})\,(T_n^{*} - T_n')}{0{,}622\,L\rho\bar{D}\,(e_n - e_2)/D - R_n + c_p\rho D\,(T_n - T_2) + c'\rho'\,(\mu H/\overline{\Delta\tau})(T_n^{*} - T_n')}, \tag{5.8}$$

причем R_n можно вычислить по формуле (4.5) или (4.4).

§ 6. Рекомендации по определению эффективности мономолекулярных пленок

На основании анализа полученных результатов экспериментальных и теоретических исследований можно предложить следующие практические рекомендации для определения эффективности монослоев.

1. Метод водного баланса. Для применения этого метода водный баланс водоема, который предполагается покрывать пленкой, должен

быть предварительно хорошо изучен. Это тем более необходимо, что для периода покрытия пленкой испарение должно быть определено не только при наличии пленки, но его следует вычислить за прошедший период в предположении, если бы пленки не было. Отсюда можно сделать первый практический вывод. Если точность определения испарения по методу водного баланса известна, то при ожидаемом сокращении испарения следует так выбирать продолжительность эффективного покрытия монослоем, чтобы сэкономленное количество воды в несколько раз превышало указанную точность, тогда фактическое сокращение испарения почти с такой же точностью может быть определено по водному балансу.

Для более мелких и недостаточно изученных водоемов потребуется покрывать пленкой в течение нескольких сезонов, чтобы по водному балансу уверенно определить эффективность монослоев.

2. Изучение температурного режима. Для каждого водоема в зависимости от комплекса гидрометеорологических и климатических факторов средняя температура его водных масс из года в год изменяется мало и имеет сравнительно небольшой годовой ход. Отсюда следует, что путем определения этой температуры за сравнительно большие промежутки работы пленки, можно оценить ее эффективность. Этот метод может дать неплохие результаты, особенно если применить его параллельно с изучением водного баланса. Путем сравнения полученных по двум методам результатов можно сделать количественные выводы, так как увеличение теплосодержания водных масс определенным образом связано с сокращением испарения. Отметим, что можно произвести сравнение температур для нескольких характерных для данного водоема вертикалей.

3. Метод теплового баланса. Этот метод подробно рассмотрен в предыдущем параграфе, где показано, что его можно с успехом применить не только для понимания физического механизма процесса сокращения испарения, но и с неменьшим успехом применить для определения эффективности монослоев.

4. Установление зависимостей различных свойств пленок от гидрометеорологических факторов. Этот метод может быть назван полуэкспериментальным. Один такой пример был продемонстрирован в § 2, когда путем экспериментальных исследований удается величину сокращения испарения связать с величинами m и $v_{кр}$, характеризующимися природой пленки. Имея данный вид химиката со стандартными свойствами, соответствующими тем, которые он имел при экспериментах, можно по полученным связям легко определить сокращение испарения при данной гидрометеорологической обстановке. При экспериментальных исследованиях целесообразно устанавливать зависимости наиболее консервативных характеристик монослоев от метеорологических и иных факторов, чтобы эти связи в натурных условиях не нарушались.

5. Трансформация температуры, влажности и скорости воздушного потока. Опыты показали, что трансформация температуры и влажности воздуха при наличии на водной поверхности монослоя, эффективно сокращающего испарение, количественно происходит иначе, чем в отсутствие пленки.

Проведенные на Артанишской бухте эксперименты показали, что по трансформации влажности воздуха над водоемом при пленке и без нее можно оценить эффективность монослоя по формуле

$$Э = \frac{\sigma - 1}{\sigma_{пр} - 1}, \tag{6.1}$$

где $\sigma = e_2/e_2'$ — рост влажности воздуха на подветренном берегу (e_2) по отношению к влажности на наветренном берегу (e_2'), если бы не было монослоя; $\sigma_{пр} = e_0/e_2$.

В условиях одного опыта, например, оказалось $\sigma = 1{,}11$; $\sigma_{пр} = 1{,}52$, т. е. $Э = 0{,}21$. В это же время по данным береговых испарительных бассейнов тот же химикат сокращал испарение на 23%, т. е. $Э = 0{,}23$.

6. Можно предложить ряд других методов, например, радиометрических, береговых испарителей и др. Остановимся на последнем. На разных берегах малых водоемов можно устанавливать испарители, из которых испаритель на подветренном берегу примерно показывает то же испарение, что такой же испаритель, установленный на плоту, на акватории озера, если нет монослоя. При наличии монослоя на водоеме эта связь будет нарушена, так как испаритель на плоту будет испарять больше за счет того дополнительного тепла, которое он получает от водоема вследствие повышения температуры воды под пленкой. Путем сравнения данных этих испарителей можно приближенно оценить эффективность монослоя.

Здесь мы не рассматривали вопросы образования монослоев, способов нанесения химиката, определения его нормы и др., имеющие важное практическое значение. Эти вопросы являются предметом специальных исследований.

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Գ. Գ. ՓԱԽՉԱՆՅԱՆ, Ա. Գ. ԼԱԶԱՐՅԱՆ

ԳՈԼՈՐՇԻԱՑՈՒՄԸ ԿՐՃԱՏՈՂ ՄՈՆՈԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՐԴՅՈՒՆԱՎԵՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ինչպես հայտնի է, գոլորշիացումն ունեն հատուկ սպիրտներ, որոնք ջրի մակերևույթի վրա ստեղծում են միամոլեկուլյար թաղանթներ: Վերջիններս

որոշ պայմանների առկայության դեպքում արդյունավետ կերպով փոքրացնում են գոլորշիացումը ջրի մակերևույթից: Հոդվածում բերված են այդ ուղղությամբ արված որոշ փորձերի արդյունքները: Մոնոթաղանթի առկայության դեպքում գոլորշիացումը որոշվում է (2.4) բանաձևով, որն իր տեսքով չի տարբերվում (2.2)-ից: Վերջինս որոշում է գոլորշիացումը ջրի ազատ մակերևույթից, թաղանթի բացակայության դեպքում:

Խնայված ջրի քանակությունը կամ թաղանթի արդյունավետությունը կարելի է որոշել (2.5) բանաձևով, օգտվելով գծ. 3-ից: Այս գծագրի վրա ներկայացված է գոլորշիացման կրճատման աստիճանի փոփոխությունը, կախված քամու արագությունից և թաղանթի ֆիզիկական հատկություններից:

Փորձերը ցույց են տալիս, որ առանձին թաղանթներ պահպանվում են նույնիսկ ուժեղ քամիների ազդեցության տակ և արդյունավետ կերպով փոքրացնում են գոլորշիացումը: Այդ դեպքում եթե թաղանթի տակ խոնավությունը հագեցած է, ապա անմիջապես թաղանթի վրա, օդում, խոնավությունը հեռու է հագեցածից և, ըստ (2.7)-ի, այնքան շատ, որքան արդյունավետ է թաղանթը:

Մոնոթաղանթների արդյունավետությունը ամենից առաջ կարելի է որոշել ջերմային հաշվեկշռի մեթոդով: Այդ նպատակով օգտագործվում են ջերմային հաշվեկշռի հավասարումները (4.1) տեսքով թաղանթի բացակայության դեպքում և (4.2) տեսքով՝ նրա առկայության դեպքում:

Ջերմային հաշվեկշիռները համապատասխանաբար որոշվում են (4.4)-ից, գոլորշիացումը և ջերմափոխանակությունը՝ (3.7) և (3.11)-ից: Այդ դեպքում արդյունավետության համար ստացվում է (3.9) արտահայտությունը: Գոլորշիացման կրճատման հետևանքով ջրի ջերմաստիճանի աճը որոշվում է (4.14)-ից: Այդ արդյունքները ներկայացված են գծ. 4-ի և 5-ի վրա, որ տեղադրված են նաև փորձնական արդյունքներ:

Ջրի մակերևույթի ջերմաստիճանը թաղանթի առկայության դեպքում չափվում է, իսկ այն ջերմաստիճանը, որը կունենար՝ մակերևույթը նույն ժամանակի համար, եթե նրա մակերեսին թաղանթ չլիներ, որոշվում է (5.5) բանաձևով:

Հոդվածում համառոտ կերպով դիտարկվում են մոնոթաղանթների արդյունավետության որոշման մի շարք այլ մեթոդներ, ինչպես, օրինակ, ջրային հաշվեկշռի, ջերմաստիճանային ռեժիմի, օդային հոսանքի խոնավության փոփոխությունների և այլն:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Будыко М. И.* Некоторые пути воздействия на климат. Метеорология и гидрология, № 2, 1962.
2. *Егиазаров И. В.* Возможность значительной экономии водных ресурсов для народного хозяйства и одномолекулярная пленка для борьбы с испарением с водной поверхности. Известия АН АрмССР, сер. техн. наук, № 3 и 6, 1960; № 2, 1961.
3. Юбилейный сборник, статьи по монослоям. Известия АН АрмССР, сер. техн. наук, № 2—3, 1963.
4. *Лазарян А. Г.* Опыты применения мономолекулярных пленок для сокращения испарения с водной поверхности. Труды НИИВПиГ МВХ АрмССР, вып. 1, 1965.

5. *Макарова В. С., Мхитарян А. М.* Опыты по применению мономолекулярных пленок в целях сокращения испарения. Известия АН АрмССР, сер. техн. наук, № 3, 1961.
6. *Макарова В. С., Мхитарян А. М., Трапезников А., Федорова Т. Г.* Применение мономолекулярных пленок в целях сокращения испарения с водной поверхности. Труды Всесоюзн. метеоролог. совещания, 4. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
7. *Мхитарян А. М.* Водный и тепловой балансы водоемов и некоторые вопросы гидродинамики пограничного слоя атмосферы. Автореферат диссертации, Л., 1963.
8. *Тимофеев М. П.* Метеорологический режим водоемов. Гидрометеоиздат, Л., 1963.
9. *Трапезников А. А., Огаров В. А.* Монослой спиртов для снижения испарения с водной поверхности и прибор для измерения двухмерного давления монослоев. Труды ГГИ, вып. 91, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. М. АРУТЮНЯН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ ПЛЕНКИ С ТОКОМ

Рассматривается вопрос устойчивости сверхпроводящего состояния идеальной пленки без краев толщиной $2d \ll \delta_0(T)$, где $\delta_0(T)$ — Лондоновская глубина проникновения, с током и с током при наличии магнитного поля.

Найдем термодинамический потенциал Φ_s тонкой пленки в сверхпроводящем состоянии и, исследуя его, покажем, что пленка в присутствии тока вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Как известно, плотность свободной энергии вещества в сверхпроводящем состоянии выражается следующим образом [1]:

$$F_s = F_{s_0} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m}\left| -\frac{ih}{2\pi}\bar{\nabla}\Psi - \frac{e}{c}\bar{A}\Psi\right|^2, \tag{1}$$

где

$$F_{s_0} = F_{n_0} - a(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\Psi|^4.$$

Здесь Ψ — эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов n_s, а F_{n_0} — плотность свободной энергии вещества в нормальном состоянии.

Из (1) получаются уравнения Гинзбурга-Ландау [1], с помощью которых можно определить равновесные значения Ψ и $\bar{A}$:

$$\frac{1}{2m}\left(-\frac{ih}{2\pi}\bar{\nabla} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2\Psi + \frac{\partial F_{s_0}(\Psi\Psi^*)}{\partial\Psi^*} = 0, \tag{2}$$

$$\bar{j} = -\frac{ieh}{4m\pi}(\Psi^*\bar{\nabla}\Psi - \Psi\bar{\nabla}\Psi^*) - \frac{e^2}{mc}\bar{A}\Psi\Psi^*. \tag{3}$$

Из совместного решения этих уравнений вытекает, что для пленки с толщиной $2d \ll \delta_0(T)$, Ψ можно принять постоянной по всей пленке [1]. Уравнение (3) есть выражение для плотности тока. В рассмотренном случае, как нетрудно убедиться, оно эквивалентно уравнению Лондона:

$$\mathrm{rot}\,\Lambda\bar{j}_s = -\frac{1}{c}\bar{H}, \tag{4}$$

где $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \frac{m}{e^2 \Psi^2}$; отличие заключается лишь в том, что в (4) Λ зависит от температуры, внешнего магнитного поля и тока.

Из уравнения (4) следует [2];

$$\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} = \bar{E}. \tag{5}$$

С помощью соотношений (1), (4), (5) определим выражение термодинамического потенциала Φ_s для пленки при условиях $T = \text{const}$ и $\bar{j}_0 = \text{const}$ (где $\bar{j}_0$ — плотность тока через пленку).

Для этого рассмотрим начальный процесс перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное.

Первое начало термодинамики для процессов в электромагнитном поле имеет вид [6]

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{\sigma}, \tag{6}$$

где последний член $W = \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{\sigma}$ — количество электромагнитной энергии, втекающей в пленку за время Δt.

Предполагаем, что пленка является частью замкнутой цепи с внешней ЭДС, причем ЭДС меняется таким образом, что общий ток I_0 в цепи остается постоянным в течение всего процесса перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное [5]. При этом, плотность сверхпроводящего тока $\bar{j}_s$ меняется от значения $\bar{j}_0$ в сверхпроводящем состоянии до 0 в нормальном. Постоянство I_0 еще не означает, что распределение тока по толщине пленки во время перехода не меняется, так что под $\bar{j}_0$ в дальнейшем везде мы понимаем среднюю по толщине плотность тока.

При этом учтем, что в течение всего процесса перехода соблюдается соотношение $\bar{j}_n + \bar{j}_s = \bar{j}_0 = \text{const}$, где $\bar{j}_n$ — плотность нормального тока.

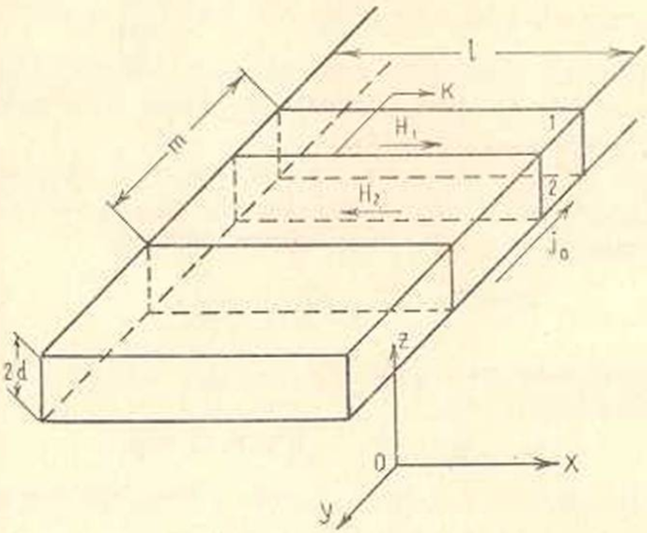
Рассмотрим теперь член W в уравнении (6). Для этого возьмем на пленке (фиг. 1) участок длиной l и шириной m. Допустим, что l направлен по оси x, а ток по оси y. На каждой из поверхностей этого участка (обозначенных на рисунке цифрами 1 и 2 и параллельных плоскости xoy) вектор Пойтинга постоянен по величине и направлению, перпендикулярен к поверхности и направлен внутрь объема.

Произведем вычисление W методом, аналогичным приведенному в [2]. Используя соотношение (5), получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_2 \right\}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t}$ перпендикулярен $\bar{H}$, а векторные произведения скобках направлены внутрь выделенного объема пленки, для W получаем следующее выражение:

$$W = \frac{c}{4\pi}\int (\overline{E}\times\overline{H})\, d\overline{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \Delta \overline{j}_s}{\partial t} 2\, lm\, \overline{H}. \tag{7}$$



Фиг. 1. Схема условий задачи.

В нашем участке возьмем контур k, находящийся в плоскости перпендикулярного сечения пленки. Циркуляция вектора магнитного поля по этому контуру равна

$$\oint \overline{H} d\overline{l} = 2lH.$$

Используя это соотношение, из (7) получаем

$$W = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t} \oint \overline{H} d\overline{l} = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t} \int \operatorname{rot} \overline{H} d\overline{s}. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{rot}\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overline{j}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$, из (8) получаем

$$W = j_0 \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t} (2\, ldm) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}\frac{\partial D}{\partial t} (m\cdot 2ld). \tag{9}$$

Произведение $2mld$ есть объем выделенного участка. Для плотности электромагнитной энергии, втекающей в единицу времени в пленку, из (9) получаем

$$w = j_0 \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{\partial D^2}{\partial t}, \tag{10}$$

где ε — диэлектрическая постоянная ($\overline{D} = \varepsilon\overline{E}$). При помощи (10) уравнение (6) выразится в виде

$$\Delta E = \Delta Q + j_0 \Delta \Lambda j_s + \frac{1}{\varepsilon} \Delta \frac{D^2}{8\pi}. \tag{11}$$

В выражениях (10) и (11) потерями на джоулево тепло можно пренебречь.

Действительно, джоулево тепло $\bar{j}_n \bar{E} = j_n \frac{\partial \Lambda j_s}{\partial t}$ в начале перехода намного меньше по сравнению с w, так как вблизи сверхпроводящего состояния $j_n \ll j_0$. Итак, процесс перехода в начальной стадии можно считать квазиравновесным.

Учитывая это обстоятельство, из (11) получим, что при $T = \text{const}$ и $j_0 = \text{const}$ (ввиду того, что теперь можно принять $\Delta Q = T\Delta S$), должна быть минимальна термодинамическая функция

$$\Phi = E - ST - \Lambda j_0 j_s - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \tag{12}$$

В сверхпроводящем состоянии $j_s = j_0$ и $D = 0$, так что (12) принимает следующий вид:

$$\Phi_s = E - ST - \Lambda j_0^2 = F_s - \Lambda j_0^2. \tag{13}$$

В (13) F_s — плотность свободной энергии в сверхпроводящем состоянии, определяемая выражением (1).

Перейдем теперь к исследованию Φ_s.

Рассмотрим сначала пленку с током. В этом случае, как нетрудно убедиться из (1), F_s имеет вид

$$F_{sI} = F_{n_0} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{2} \Lambda j_0^2, \tag{14}$$

где второй член — плотность энергии магнитного поля тока, последний член — $\frac{1}{2}\Lambda j_0^2$ — кинетическая энергия сверхпроводящего тока. В дальнейшем будем придерживаться обозначений, приведенных в статье [3]. Так,

$$\Psi^2 = \frac{n_s}{n_{s*}} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda}, \tag{15}$$

где n_{s*} — плотность сверхпроводящих электронов при $T = 0$ в отсутствии тока и магнитного поля, а n_s — плотность при температуре T при наличии тока и магнитного поля. Коэффициенты a и b при данной нормировке имеют значения

$$a = \frac{H_{cn}^2}{4\pi} \left[\frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \qquad b = a(T) \left[\frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \tag{15a}$$

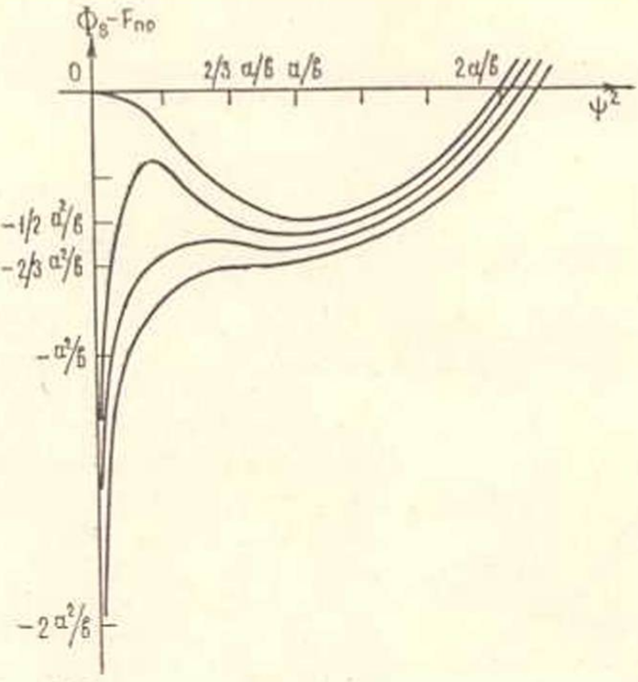
где $\Lambda_e(T)$ — глубина проникновения слабого магнитного поля при температуре T (т. е. то же самое, что и $\delta_0(T)$), а $\Lambda_e(0)$ — при $T = 0$, а H_{cn} — термодинамическое критическое магнитное поле. Учитывая (13), (14), (15), для Φ_s получаем следующее выражение

$$\Phi_{sI} = F_{n^*} - a(T)\Psi^2 + \frac{1}{2} b(T)\Psi^4 + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - \frac{1}{2}\frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2. \tag{16}$$

Условие равновесия пленки в сверхпроводящем состоянии:

$$\frac{\partial \Phi_{sI}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \tag{17}$$

На фиг. 2 представлен ход кривых Φ_{sI}, где j_0 рассматривается как параметр.



Фиг. 2. Зависимость термодинамического потенциала Φ_s от квадрата волновой функции Ψ.

При $j_0 = 0$ $\Phi_s = F_s$ и система находится в равновесии при $\Psi^2 = \frac{a}{b}$. При $j_0 \neq 0$ ход кривых уже отличается от F_s. Кроме точки минимума на кривых появляется еще точка максимума. Устойчивое равновесие соответствует Ψ_{min}. С увеличением j_0 высота пика максимумов уменьшается, а Ψ_{min} передвигается в сторону меньших значений.

При определенном значении $j_{окр}$ на кривой появляется точка перегиба, где $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = 0$, $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} = 0$, которая и соответствует переходу пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное. Таким образом, значения $j_{окр}$ и $\Psi^2_{кр}$ получаются из совместного решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_{sI}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_{sI}}{\partial \Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} j_0^2 = 0. \tag{18}$$

В точке перехода волновая функция и плотность критического тока удовлетворяют следующему соотношению:

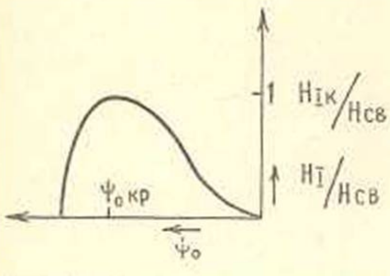
$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{\Lambda_0^{1/3}}{b^{1/3}} j^{2/3}_{0\text{кр}}.$$

Из решения (18) для $j_{0\text{кр}}$ получается выражение, выведенное в [1] другим путем,

$$j_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{\text{св}} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\delta_0(T)},$$

$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{2a}{3b} = \frac{2}{3} \frac{\Lambda_e^2(0)}{\Lambda_e^2(T)} = \frac{2}{3} \frac{c^2\Lambda_0}{4\pi} \frac{1}{\delta_0^2(T)}.$$

Интересно сравнить ход кривой зависимости H_I от Ψ (где H_I—магнитное поле тока на поверхности пленки) (фиг. 3) [4] с фиг. 2.



Фиг. 3. Зависимость магнитного поля тока на поверхности пленки от волновой функции Ψ_0.

На фиг. 3 в точке максимума происходит переход. Часть кривой, лежащей с левой стороны максимума, соответствует устойчивому равновесию системы, а лежащая справа — неустойчивому. Это означает, что свободная энергия системы F_s с левой стороны меньше, чем с правой при одном и том же значении j_0. Нетрудно заметить, что левая часть кривой на фиг. 3 соответствует точкам минимума на фиг. 2, а правая — максимумам. Максимум на фиг. 3 соответствует точке перегиба на фиг. 2, где равны нулю одновременно первая и вторая производные Φ_{sI}.

Теперь рассмотрим пленку с током j_0, помещенную во внешнее магнитное поле $\overline{H}$, параллельное ее поверхности. Принимаем, что направление $\overline{H}$ перпендикулярно току. Так как $2d \ll \delta_0(T)$, то магнитное поле можно считать полностью пронизывающим пленку. В этом случае, в выражении свободной энергии пленки в сверхпроводящем состоянии добавляются члены, связанные с магнитным полем. Это плотность энергии магнитного поля $\frac{H^2}{8\pi}$ и плотность кинетической энергии мейснеровского тока

$$T = \frac{1}{2} \Lambda j_s^2, \tag{19}$$

Выражение (19) можно преобразовать следующим образом. Условие квантования магнитного потока есть [3]

$$\Phi = \iint\limits_S \bar{H} d\bar{S} + c \oint \Lambda \bar{j}_s \, d\bar{l} = n\varphi_0, \tag{20}$$

где $\varphi_0 = \frac{hc}{2l} = 2{,}07 \cdot 10^{-7} \, гс/см^2$; контуры интегрирования берем в плоскости сечения пленки перпендикулярно и симметрично относительно средней плоскости пленки.

Так как пленка односвязная, то $n = 0$. Таким образом, в нашем случае

$$\Phi = \iint\limits_S \bar{H} d\bar{S} + c \oint \Lambda \bar{j}_s \, d\bar{l} = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим контур длиной l и шириной $2x$ и применим к нему уравнение (21). Получаем

$$H \cdot 2lx + c\Lambda j_x \cdot 2l = 0,$$

отсюда

$$j_x = -\frac{H}{c\Lambda} x. \tag{22}$$

С помощью (22) и (15) для плотности кинетической энергии тока Мейсенера получаем

$$T = \frac{1}{d} \int\limits_0^d \frac{\Lambda j_x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2. \tag{23}$$

В этом случае, учитывая (23), для свободной энергии имеем

$$F_s = F_{n_s} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2.$$

Отсюда

$$\Phi_s^* = F_{n_s} - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2. \tag{24}$$

Используя (24), представим условие равновесия сверхпроводящей пленки при постоянном H и j_0 в виде

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \tag{25}$$

Зависимость функции (24) от Ψ такая же, как на фиг. 2, с тем отличием, что точки минимума, максимума и перегиба смещены в сторону меньших Ψ.

При $j_0 = 0$ из (24) получаем, что система находится в равновесии при

$$\Psi^2_{\min} = \frac{a}{b}\left\{1 - \left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\},$$

где $H_{11} = \sqrt{6}\, H_{\text{св}} \delta_0 / d$ есть критическое магнитное поле тонкой пленки в случае, когда ток отсутствует и поле направлено параллельно поверхности пленки.

В точке перегиба, где система переходит в нормальное состояние, значения $\Psi^2_{\text{кр}}$ и $j_{0\text{кр}}$ определяются из совместного решения системы уравнений:

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3}\frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0}\Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 + \frac{1}{3}\frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} j_0^2 = 0.$$

Для плотности критического тока $j_{0\text{кр}}$ получается известное выражение [1]

$$j_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{\text{св}} \frac{1}{\delta_0} \frac{c}{4\pi} \left\{1 - \left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

При этом значение $\Psi^2_{\text{кр}}$ равно

$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{2}{3}\frac{a}{b}\left\{1 - \left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\}.$$

Итак, мы показали, что тонкая пленка с током вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Действительно, из исследования хода кривых зависимости термодинамического потенциала Φ_s от Ψ вытекает, что в точке перехода обращаются в нуль одновременно $\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi}$ и $\frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \Psi^2}$, что соответствует точке перегиба на фиг. 2.

Институт металлургии им. А. А. Байкова, Москва.
ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1965

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Թերմոդինամիկական մեթոդով ուսումնասիրված է թաղանթի գերհաղորդականության վիճակի կայունության հարցը, երբ թաղանթի միջով հոսանք

է անցնում, այն դեպքում, երբ թաղանթի հաստությունն ավելի փոքր է, քան լոնդոնյան թափանցելիության խորությունը։

Ցույց է տրված, որ վիճակները որոշող տիրույթի այն մասում, որը գտնվում է գերհաղորդականությունից նորմալ վիճակին անցնելու սահմանի մոտ, թաղանթն ունի մետաստաբիլ վիճակ։

Նույնպիսի արդյունք ստացվում է նաև այն դեպքում, երբ հոսանքով թաղանթը գտնվում է արտաքին մագնիսական դաշտում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* К теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, **20**, 1950, 1064.
2. *Гинзбург В. Л.* Сверхпроводимость. Изд. АН СССР, 1946.
3. *Tinkham M.* Effect of fluxoid quantization on transition of superconducting films. Phys. Rev., **129**, 1963, 2413.
4. *Гинзбург В. Л.* Критический ток для сверхпроводящих пленок. ДАН СССР, **118** 1958, 464.
5. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. ИЛ, М., 1955, стр. 127.
6. *Силин В. П.* Сверхпроводящий цилиндр и шар в магнитном поле. ЖЭТФ, **21**, 1951, 1330.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Р. М. АРУТЮНЯН

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ ПЛЕНКИ С ТОКОМ

Рассматривается вопрос устойчивости сверхпроводящего состояния идеальной пленки без краев толщиной $2d \ll \delta_0(T)$, где $\delta_0(T)$ — Лондоновская глубина проникновения, с током и с током при наличии магнитного поля.

Найдем термодинамический потенциал Φ_s тонкой пленки в сверхпроводящем состоянии и, исследуя его, покажем, что пленка в присутствии тока вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Как известно, плотность свободной энергии вещества в сверхпроводящем состоянии выражается следующим образом [1]:

$$F_s = F_{s_0} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2m}\left| - \frac{ih}{2\pi}\bar{\nabla}\Psi - \frac{e}{c}\bar{A}\Psi \right|^2, \tag{1}$$

где

$$F_{s_0} = F_{n_0} - a(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\Psi|^4.$$

Здесь Ψ — эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов n_s, а F_{n_0} — плотность свободной энергии вещества в нормальном состоянии.

Из (1) получаются уравнения Гинзбурга-Ландау [1], с помощью которых можно определить равновесные значения Ψ и $\bar{A}$:

$$\frac{1}{2m}\left(-\frac{ih}{2\pi}\bar{\nabla} - \frac{e}{c}\bar{A}\right)^2\Psi + \frac{\partial F_{s_0}(\Psi\Psi^*)}{\partial\Psi^*} = 0, \tag{2}$$

$$\bar{j} = -\frac{ieh}{4m\pi}(\Psi^*\bar{\nabla}\Psi - \Psi\bar{\nabla}\Psi^*) - \frac{e^2}{mc}\bar{A}\Psi\Psi^*. \tag{3}$$

Из совместного решения этих уравнений вытекает, что для пленки с толщиной $2d \ll \delta_0(T)$, Ψ можно принять постоянной по всей пленке [1]. Уравнение (3) есть выражение для плотности тока. В рассмотренном случае, как нетрудно убедиться, оно эквивалентно уравнению Лондона;

$$\text{rot}\, \Lambda\bar{j}_s = -\frac{1}{c}\bar{H}, \tag{4}$$

где $\Lambda = \frac{m}{e^2 n_s} = \frac{m}{e^2 \Psi^2}$; отличие заключается лишь в том, что в (4) Λ зависит от температуры, внешнего магнитного поля и тока.

Из уравнения (4) следует [2]:

$$\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} = \bar{E}. \tag{5}$$

С помощью соотношений (1), (4), (5) определим выражение термодинамического потенциала Φ_s для пленки при условиях $T = \mathrm{const}$ и $\bar{j}_0 = \mathrm{const}$ (где $\bar{j}_0$ — плотность тока через пленку).

Для этого рассмотрим начальный процесс перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное.

Первое начало термодинамики для процессов в электромагнитном поле имеет вид [6]

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) \, d\bar{\sigma}, \tag{6}$$

где последний член $W = \Delta t \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) \, d\bar{\sigma}$ — количество электромагнитной энергии, втекающей в пленку за время Δt.

Предполагаем, что пленка является частью замкнутой цепи с внешней ЭДС, причем ЭДС меняется таким образом, что общий ток I_0 в цепи остается постоянным в течение всего процесса перехода пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное [5]. При этом, плотность сверхпроводящего тока $\bar{j}_s$ меняется от значения $\bar{j}_0$ в сверхпроводящем состоянии до 0 в нормальном. Постоянство I_0 еще не означает, что распределение тока по толщине пленки во время перехода не меняется, так что под $\bar{j}_0$ в дальнейшем везде мы понимаем среднюю по толщине плотность тока.

При этом учтем, что в течение всего процесса перехода соблюдается соотношение $\bar{j}_n + \bar{j}_s = \bar{j}_0 = \mathrm{const}$, где $\bar{j}_n$ — плотность нормального тока.

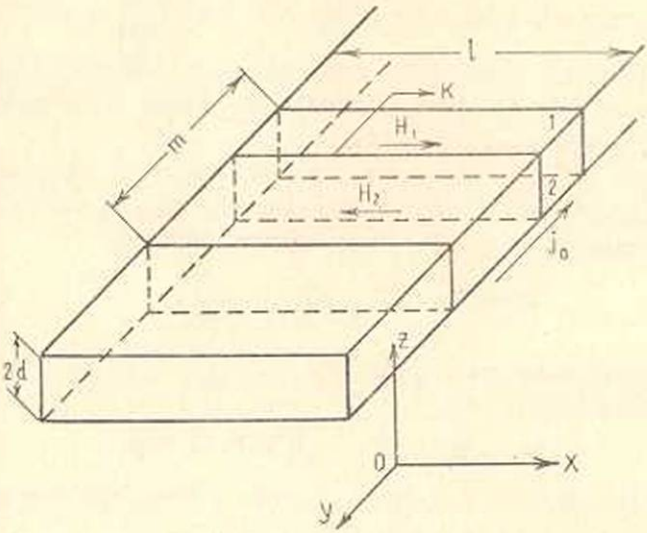
Рассмотрим теперь член W в уравнении (6). Для этого возьмем на пленке (фиг. 1) участок длиной l и шириной m. Допустим, что l направлен по оси x, а ток по оси y. На каждой из поверхностей этого участка (обозначенных на рисунке цифрами 1 и 2 и параллельных плоскости xoy) вектор Пойтинга постоянен по величине и направлению, перпендикулярен к поверхности и направлен внутрь объема.

Произведем вычисление W методом, аналогичным приведенному в [2]. Используя соотношение (5), получим

$$W = \frac{c}{4\pi} \int (\bar{E} \times \bar{H}) \, d\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_1 - \left(\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t} \times \bar{H} \right)_2 \right\}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial \Lambda \bar{j}_s}{\partial t}$ перпендикулярен $\bar{H}$, а векторные произведения в скобках направлены внутрь выделенного объема пленки, для W получаем следующее выражение:

$$W = \frac{c}{4\pi}\int (\bar{E}\times\bar{H})\, d\bar{\sigma} = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial \Delta \bar{j}_s}{\partial t} 2lm\bar{H}. \tag{7}$$



Фиг. 1. Схема условий задачи.

В нашем участке возьмем контур k, находящийся в плоскости перпендикулярного сечения пленки. Циркуляция вектора магнитного поля по этому контуру равна

$$\oint \bar{H} d\bar{l} = 2lH.$$

Используя это соотношение, из (7) получаем

$$W = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}\oint \bar{H} d\bar{l} = \frac{c}{4\pi} m \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}\int \mathrm{rot}\, \bar{H} d\bar{s}. \tag{8}$$

Принимая во внимание, что $\mathrm{rot}\, \bar{H} = \frac{4\pi}{c}\bar{j}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, из (8) получаем

$$W = j_0 \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}(2ldm) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}\frac{\partial D}{\partial t}(m\cdot 2ld). \tag{9}$$

Произведение $2mld$ есть объем выделенного участка. Для плотности электромагнитной энергии, втекающей в единицу времени в пленку, из (9) получаем

$$w = j_0 \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t} + \frac{1}{8\pi\varepsilon}\frac{\partial D^2}{\partial t}, \tag{10}$$

где ε — диэлектрическая постоянная ($\bar{D}=\varepsilon\bar{E}$). При помощи (10) уравнение (6) выразится в виде

$$\Delta E = \Delta Q + j_0 \Delta \Lambda j_s + \frac{1}{\varepsilon} \Delta \frac{D^2}{8\pi}. \tag{11}$$

В выражениях (10) и (11) потерями на джоулево тепло можно пренебречь.

Действительно, джоулево тепло $\bar{j}_n \bar{E} = j_n \frac{\partial \Delta j_s}{\partial t}$ в начале перехода намного меньше по сравнению с w, так как вблизи сверхпроводящего состояния $j_n \ll j_0$. Итак, процесс перехода в начальной стадии можно считать квазиравновесным.

Учитывая это обстоятельство, из (11) получим, что при $T = \mathrm{const}$ и $j_0 = \mathrm{const}$ (ввиду того, что теперь можно принять $\Delta Q = T\Delta S$), должна быть минимальна термодинамическая функция

$$\Phi = E - ST - \Lambda j_0 j_s - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}. \tag{12}$$

В сверхпроводящем состоянии $j_s = j_0$ и $D = 0$, так что (12) принимает следующий вид:

$$\Phi_s = E - ST - \Lambda j_0^2 = F_s - \Lambda j_0^2. \tag{13}$$

В (13) F_s — плотность свободной энергии в сверхпроводящем состоянии, определяемая выражением (1).

Перейдем теперь к исследованию Φ_s.

Рассмотрим сначала пленку с током. В этом случае, как нетрудно убедиться из (1), F_s имеет вид

$$F_{sI} = F_{n_0} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{2} \Lambda j_0^2, \tag{14}$$

где второй член — плотность энергии магнитного поля тока, последний член — $\frac{1}{2}\Lambda j_0^2$ — кинетическая энергия сверхпроводящего тока. В дальнейшем будем придерживаться обозначений, приведенных в статье [3]. Так,

$$\Psi^2 = \frac{n_s}{n_{s*}} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda}, \tag{15}$$

где n_{s*} — плотность сверхпроводящих электронов при $T = 0$ в отсутствии тока и магнитного поля, а n_s — плотность при температуре T при наличии тока и магнитного поля. Коэффициенты a и b при данной нормировке имеют значения

$$a = \frac{H_{cn}^2}{4\pi} \left[\frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \qquad b = a(T) \left[\frac{\Lambda_e(T)}{\Lambda_e(0)} \right]^2, \tag{15a}$$

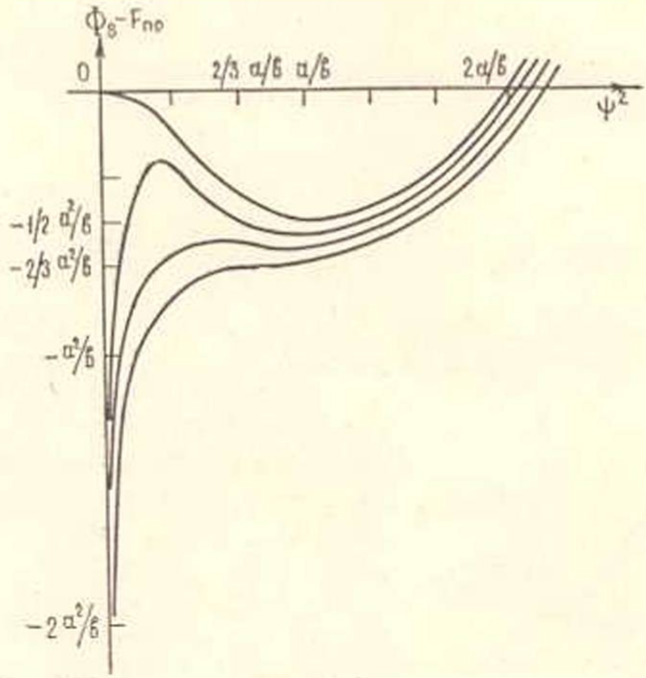
где $\Lambda_e(T)$ — глубина проникновения слабого магнитного поля при температуре T (т. е. то же самое, что и $\delta_0(T)$), а $\Lambda_e(0)$ — при $T = 0$, а H_{cn} — термодинамическое критическое магнитное поле. Учитывая (13), (14), (15), для Φ_s получаем следующее выражение

$$\Phi_{sI} = F_{n^s} - a(T)\Psi^2 + \frac{1}{2}b(T)\Psi^4 + \frac{2\pi}{3c^2}j_0^2d^2 - \frac{1}{2}\frac{\Lambda_0}{\Psi^2}j_0^2. \qquad (16)$$

Условие равновесия пленки в сверхпроводящем состоянии:

$$\frac{\partial\Phi_{sI}}{\partial\Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3}j_0^2 = 0. \qquad (17)$$

На фиг. 2 представлен ход кривых Φ_{sI}, где j_0 рассматривается как параметр.



Фиг. 2. Зависимость термодинамического потенциала Φ_s от квадрата волновой функции Ψ.

При $j_0 = 0$ $\Phi_s = F_s$ и система находится в равновесии при $\Psi^2 = \frac{a}{b}$. При $j_0 \neq 0$ ход кривых уже отличается от F_s. Кроме точки минимума на кривых появляется еще точка максимума. Устойчивое равновесие соответствует Ψ_{min}. С увеличением j_0 высота пика максимумов уменьшается, а Ψ_{min} передвигается в сторону меньших значений.

При определенном значении $j_{окр}$ на кривой появляется точка перегиба, где $\frac{\partial\Phi_s}{\partial\Psi} = 0$, $\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial\Psi^2} = 0$, которая и соответствует переходу пленки из сверхпроводящего состояния в нормальное. Таким образом, значения $j_{окр}$ и $\Psi^2_{кр}$ получаются из совместного решения системы уравнений

$$\frac{\partial \Phi_{sI}}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \Phi_{sI}}{\partial \Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4} j_0^2 = 0. \quad (18)$$

В точке перехода волновая функция и плотность критического тока удовлетворяют следующему соотношению:

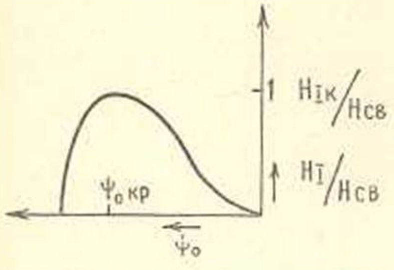
$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{\Lambda_0^{1/3}}{b^{1/3}} j^{2/3}_{0\text{кр}}.$$

Из решения (18) для $j_{0\text{кр}}$ получается выражение, выведенное в [1] другим путем,

$$j_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_{\text{св}} \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\delta_0(T)},$$

$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{2a}{3b} = \frac{2}{3} \frac{\Lambda_e^2(0)}{\Lambda_e^2(T)} = \frac{2}{3} \frac{c^2\Lambda_0}{4\pi} \frac{1}{\delta_0^2(T)}.$$

Интересно сравнить ход кривой зависимости H_I от Ψ (где H_I—магнитное поле тока на поверхности пленки) (фиг. 3) [4] с фиг. 2.



Фиг. 3. Зависимость магнитного поля тока на поверхности пленки от волновой функции Ψ_0.

На фиг. 3 в точке максимума происходит переход. Часть кривой, лежащей с левой стороны максимума, соответствует устойчивому равновесию системы, а лежащая справа — неустойчивому. Это означает, что свободная энергия системы F_s с левой стороны меньше, чем с правой при одном и том же значении j_0. Нетрудно заметить, что левая часть кривой на фиг. 3 соответствует точкам минимума на фиг. 2, а правая — максимумам. Максимум на фиг. 3 соответствует точке перегиба на фиг. 2, где равны нулю одновременно первая и вторая производные Φ_{sI}.

Теперь рассмотрим пленку с током j_0, помещенную во внешнее магнитное поле $\bar{H}$, параллельное ее поверхности. Принимаем, что направление $\bar{H}$ перпендикулярно току. Так как $2d \ll \delta_0(T)$, то магнитное поле можно считать полностью пронизывающим пленку. В этом случае, в выражении свободной энергии пленки в сверхпроводящем состоянии добавляются члены, связанные с магнитным полем. Это плотность энергии магнитного поля $\frac{H^2}{8\pi}$ и плотность кинетической энергии мейснеровского тока

$$T = \frac{1}{2} \Lambda j_s^2, \quad (19)$$

Выражение (19) можно преобразовать следующим образом. Условие квантования магнитного потока есть [3]

$$\Phi = \iint\limits_S \bar{H} d\bar{S} + c \oint \Lambda \bar{j}_s \, d\bar{l} = n\varphi_0, \tag{20}$$

где $\varphi_0 = \frac{hc}{2l} = 2{,}07 \cdot 10^{-7} гс/см^2$; контуры интегрирования берем в плоскости сечения пленки перпендикулярно и симметрично относительно средней плоскости пленки.

Так как пленка односвязная, то $n = 0$. Таким образом, в нашем случае

$$\Phi = \iint\limits_S \bar{H} d\bar{S} + c \oint \Lambda \bar{j}_s \, d\bar{l} = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим контур длиной l и шириной $2x$ и применим к нему уравнение (21). Получаем

$$H \cdot 2lx + c\Lambda j_x \cdot 2l = 0,$$

отсюда

$$j_x = -\frac{H}{c\Lambda} x. \tag{22}$$

С помощью (22) и (15) для плотности кинетической энергии тока Мейсенера получаем

$$T = \frac{1}{d} \int\limits_0^d \frac{\Lambda j_x^2}{2} dx = \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2. \tag{23}$$

В этом случае, учитывая (23), для свободной энергии имеем

$$F_s = F_{n_s} + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2.$$

Отсюда

$$\Phi_s^* = F_{n_s} - a\Psi^2 + \frac{1}{2} b\Psi^4 + \frac{H^2}{8\pi} + \frac{2\pi}{3c^2} j_0^2 d^2 + \frac{1}{6} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi^2 - \frac{1}{2} \frac{\Lambda_0}{\Psi^2} j_0^2. \tag{24}$$

Используя (24), представим условие равновесия сверхпроводящей пленки при постоянном H и j_0 в виде

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial \Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3} \frac{H^2 d^2}{c^2 \Lambda_0} \Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3} j_0^2 = 0. \tag{25}$$

Зависимость функции (24) от Ψ такая же, как на фиг. 2, с тем отличием, что точки минимума, максимума и перегиба смещены в сторону меньших Ψ.

При $j_0 = 0$ из (24) получаем, что система находится в равновесии при

$$\Psi^2_{\min} = \frac{a}{b}\left\{1-\left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\},$$

где $H_{11} = \sqrt{6}\,H_{\text{св}}\,\delta_0/d$ есть критическое магнитное поле тонкой пленки в случае, когда ток отсутствует и поле направлено параллельно поверхности пленки.

В точке перегиба, где система переходит в нормальное состояние, значения $\Psi^2_{\text{кр}}$ и $j_{0\text{кр}}$ определяются из совместного решения системы уравнений:

$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial\Psi} = -2a\Psi + 2b\Psi^3 + \frac{1}{3}\frac{H^2d^2}{c^2\Lambda_0}\Psi + \frac{\Lambda_0}{\Psi^3}j_0^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial\Psi^2} = -2a + 6b\Psi^2 + \frac{1}{3}\frac{H^2d^2}{c^2\Lambda_0} - \frac{3\Lambda_0}{\Psi^4}j_0^2 = 0.$$

Для плотности критического тока $j_{0\text{кр}}$ получается известное выражение [1]

$$j_{0\text{кр}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}H_{\text{св}}\frac{1}{\delta_0}\frac{c}{4\pi}\left\{1-\left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\}^{3/2}.$$

При этом значение $\Psi^2_{\text{кр}}$ равно

$$\Psi^2_{\text{кр}} = \frac{2}{3}\frac{a}{b}\left\{1-\left(\frac{H}{H_{11\text{кр}}}\right)^2\right\}.$$

Итак, мы показали, что тонкая пленка с током вблизи точки перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное находится в метастабильном состоянии.

Действительно, из исследования хода кривых зависимости термодинамического потенциала Φ_s от Ψ вытекает, что в точке перехода обращаются в нуль одновременно $\frac{\partial\Phi_s}{\partial\Psi}$ и $\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial\Psi^2}$, что соответствует точке перегиба на фиг. 2.

Институт металлургии им. А. А. Байкова, Москва.
ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1965

Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ՀՈՍԱՆՔՈՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԳԵՐՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Թերմոդինամիկական մեթոդով ուսումնասիրված է թաղանթի գերհաղորդականության վիճակի կայունության հարցը, երբ թաղանթի միջով հոսանք

է անցնում, այն դեպքում, երբ թաղանթի հաստությունն ավելի փոքր է, քան լոնդոնյան թափանցելիության խորությունը։

Ցույց է տրված, որ վիճակները որոշող տիրույթի այն մասում, որը գտնվում է գերհաղորդականությունից նորմալ վիճակին անցնելու սահմանի մոտ, թաղանթն ունի մետաստաբիլ վիճակ։

Նույնպիսի արդյունք ստացվում է նաև այն դեպքում, երբ հոսանքով թաղանթը գտնվում է արտաքին մագնիսական դաշտում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург В. Л., Ландау Л. Д.* К теории сверхпроводимости. ЖЭТФ, **20**, 1950, 1064.
2. *Гинзбург В. Л.* Сверхпроводимость. Изд. АН СССР, 1946.
3. *Tinkham M.* Effect of fluxoid quantization on transition of superconducting films. Phys. Rev., **129**, 1963, 2413.
4. *Гинзбург В. Л.* Критический ток для сверхпроводящих пленок. ДАН СССР, **118** 1958, 464.
5. *Шенберг Д.* Сверхпроводимость. ИЛ, М., 1955, стр. 127.
6. *Силин В. П.* Сверхпроводящий цилиндр и шар в магнитном поле. ЖЭТФ, **21**, 1951, 1330.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

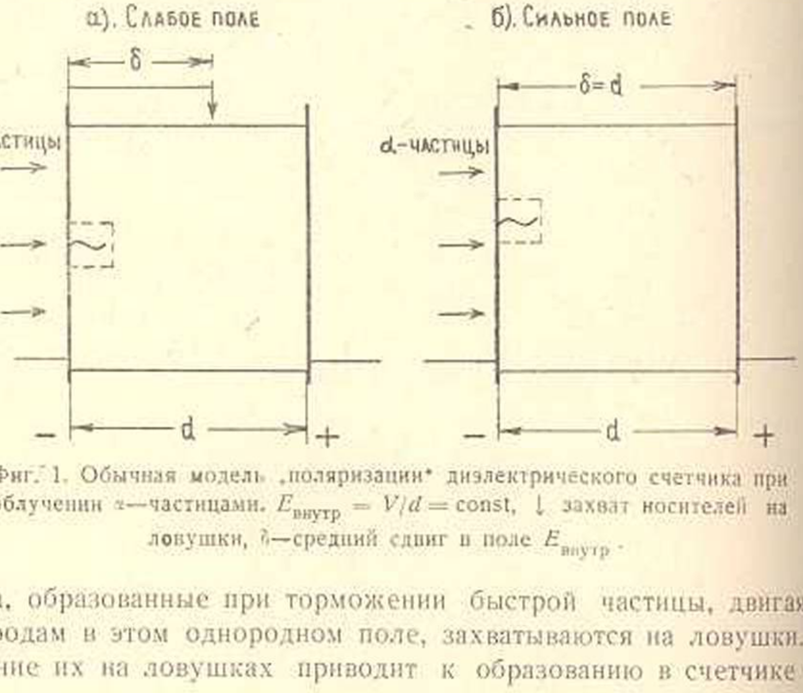
Е. А. АФАНАСЬЕВА, Э. В. АГАБАБЯН

О „ПОЛЯРИЗАЦИИ“ АЛМАЗНЫХ СЧЕТЧИКОВ

§ 1. Введение

По сравнению с другими кристаллическими счетчиками, гомогенные счетчики на полупроводниках с широкой запрещенной зоной, к которым относятся алмаз, сера и т. д. [1] имеют то преимущество, что они могут работать без охлаждения, поскольку темновые токи в них малы уже при комнатной температуре. Однако, существенным недостатком счетчиков этого типа (иногда их называют также диэлектрическими счетчиками) является падение амплитуды импульсов от частиц, регистрируемых во внешней цепи, с ростом дозы облучения или так называемая „поляризация“.

Обычные представления о механизме этого явления изложены в [2, 3, 4] и сводятся в основном к следующему. *До начала облучения счетчика поле в нем однородно и равно V/d, где V—приложенное напряжение, а d—толщина кристалла.* (фиг. 1). Носители



Фиг. 1. Обычная модель „поляризации“ диэлектрического счетчика при облучении α—частицами. $E_{внутр} = V/d = \text{const}$, ↓ захват носителей на ловушки, δ—средний сдвиг в поле $E_{внутр}$.

заряда, образованные при торможении быстрой частицы, двигаясь к электродам в этом однородном поле, захватываются на ловушки. Накопление их на ловушках приводит к образованию в счетчике объемного заряда, поле которого („поле поляризации") искажает внутреннее поле, ослабляя его в части кристалла. Поэтому по мере облучения счетчика уменьшается путь, проходимый носителями в кристалле, и амплитуда импульсов во внешней цепи падает. Таким образом, причиной искажения внутреннего поля считается захват на ловушки в объеме кристалла тех самых носителей, которые образованы при ионизации вещества счетчика частицей, во время их движения к электродам. Следствием такой точки зрения являются: 1) применение для интерпретации явлений счета простой теории фотопроводимости и стремление сопоставить свои результаты с формулой Гехта, выведенной в этой теории [5, 6] и 2) убеждение, что „поляризация" счетчика определяется концентрацией примесей и несовершенств *в объеме* кристалла.

Нам кажется, однако, что для уточнения механизма „поляризации" диэлектрических счетчиков следует:

1. Выяснить, можно ли считать поле в счетчике *до* начала облучения однородным и равным V/d.

2. Проверить, как зависит „поляризация" счетчика при облучении частицами от приложенного к нему постоянного напряжения.

В качестве материала для исследований нами был выбран алмаз, так как в мировой литературе имеются некоторые сведения об алмазных счетчиках и поэтому в какой-то степени ясна общая картина явления.

§ 2. Методика измерений

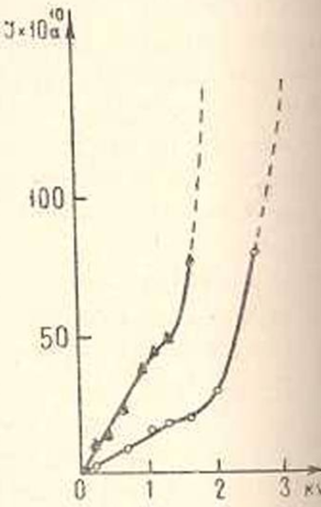
Нами исследовано 5 кристаллов алмазов II типа [7]. Первоначально образцы представляли собой слегка уплощенные октаэдры, затем им была придана форма плоскопараллельных пластинок толщиной 1—2*мм*. Все измерения проводились в вакууме $\sim 10^{-4}$ *мм* рт. ст. Облучение производилось сквозь электрод α-частицами $Pu^{238+242}$, интенсивность облучения составляла около 10^3 частиц/сек. Электроды наносились вакуумным распылением, толщина слоя золота составляла примерно 500 $A°$. Измерялась амплитуда максимального импульса, интегральная скорость счета, а также снималось распределение импульсов по амплитудам. Методика этих измерений подробно изложена в работе [8].

§ 3. Результаты измерений

3. 1. Вольтамперные характеристики кристаллов

Для снятия вольтамперных характеристик нами применялась электрометрическая схема Барта [9] чувствительностью около 10^{-13} *a*. Первый отсчет величины тока производился примерно через 5 *сек* после подачи постоянного напряжения (до 3 *кв*). Ток через образцы сильно падал со временем (приблизительно на порядок за 15—20 *сек*).

Обнаружена зависимость вида вольтамперной характеристики образца от полярности приложенного напряжения (фиг. 2). При этом изменяется не только наклон начальной линейной части характеристики, по которому рассчитывается удельное сопротивление (у нас оно $\sim 10^{13}$ *ом. см.*), но и величина предельного напряжения, т. е. напряжения, при котором ток через образец резко возрастает.



Фиг. 2. Вольтамперные характеристики образца алмаза II типа для разных полярностей приложенного напряжения.

3.2. „Поляризация" счетчика и зависимость ее от приложенного к нему постоянного напряжения

За меру собираемого счетчиком заряда можно выбрать амплитуду максимального импульса напряжения, отмечаемого во внешней цепи. Если она со временем уменьшается, говорят, что счетчик „поляризуется". Часто пользуются, однако, другим, более простым способом наблюдения „поляризации" счетчика—измеряют скорость счета, т. е. число импульсов в единицу времени, превышающих некоторый фиксированный порог дискриминации. Считалось, что скорость счета падает со временем из-за уменьшения амплитуды импульсов (в том числе и максимального), а поэтому второй способ описания „поляризации" счетчика вполне эквивалентен первому [10]. Поэтому обычно измерялась либо скорость счета, либо амплитуда максимального импульса. Мы определяли одновременно обе величины, и было обнаружено следующее:

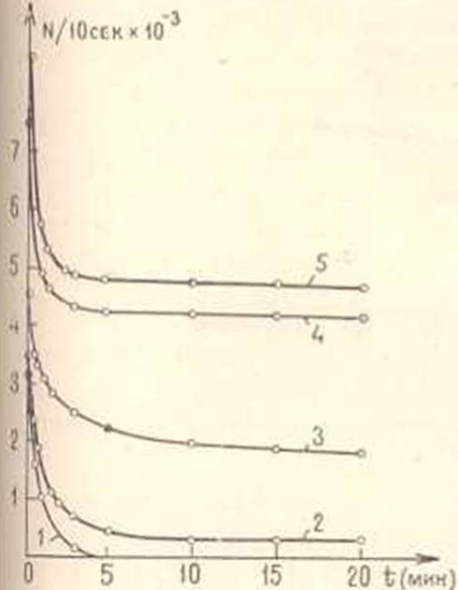
1. При заданном напряжении амплитуда максимального импульса и скорость счета по-разному зависят от времени. При достаточно высоких напряжениях первая от времени совсем не зависит, а вторая после включения источника α-частиц (начало отсчета времени) сильно падает (ср. кривые 3 и 4 на фиг. 3 и 4).

2. С ростом напряжения на счетчике амплитуда максимального импульса и скорость счета стремятся к насыщению. Однако, насыщения они достигают при напряжениях, отличающихся в полтора-два раза.

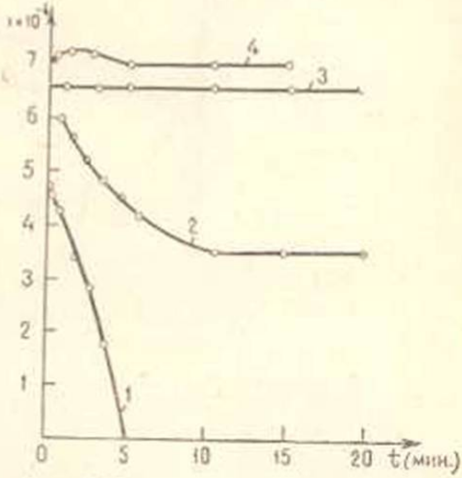
Таким образом, два способа описания „поляризации" счетчика оказываются не вполне идентичными.

Для того, чтобы выяснить, какого знака носители ответственны за „поляризацию" счетчика, мы изменяли полярность электрода сквозь который производится облучение.

При облучении счетчика сквозь катод импульс напряжения во внешней цепи обусловлен движением электронов через кристалл, так как пробег α-частиц в алмазе равен ~ 10 *мк*, а толщина кристалла составляет около *мм*. Зависимость амплитуды максимального импульса от времени для разных значений приложенного к образцу постоянного напряжения приведена на фиг. 4. Мы видим, что до некоторого напряжения счетчик „поляризируется“ за одну-две минуты. С ростом напряжения на счетчике начальное значение амплитуды максимального импульса, однако, увеличивается. Затем при сравнительно небольшом изменении напряжения наблюдается следующее: сначала максимальный импульс уменьшается со временем, затем уменьшение прекращается, и максимальный импульс достигает стационарной величины, обычно несколько меньшей начальной. При дальнейшем повышении напряжения на счетчике амплитуда максимального импульса перестает зависеть от времени, однако еще растет с ростом напряжения (фиг. 4). Таким образом, счетчик перестает „поляризоваться“ *до* того, как достигается насыщение величины максимального импульса по напряжению.



Фиг. 3. Зависимость скорости счета от времени при облучении α—частицами сквозь катод 1—400 *в*; 2—450 *в*; 3—600 *в*; 4—800 *в*; 5—1200 *в*.



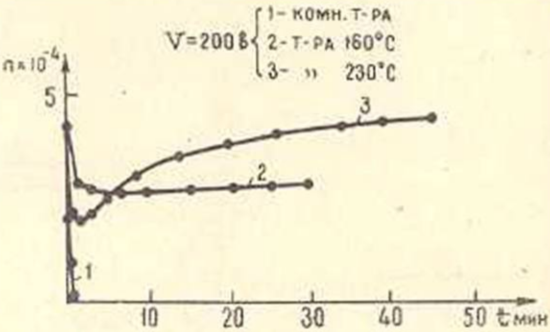
Фиг. 4. Зависимость амплитуды максимального импульса от времени при облучении α—частицами сквозь катод 1—400 *в*; 2—450 *в*; 3—800 *в*; 4—1200 *в*.

Одновременные измерения скорости счета показали, что при малых напряжениях характер ее зависимости от времени такой же, как и максимального импульса. Но стационарное значение оказалось при всех напряжениях много меньшим начального.

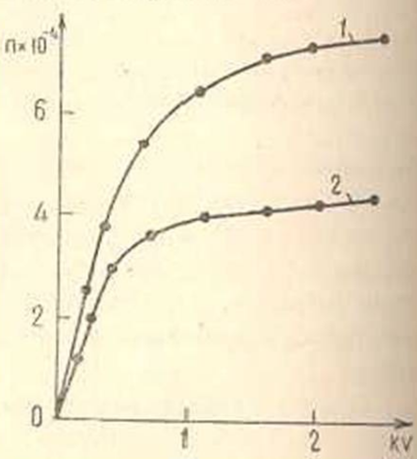
Такое поведение типично, однако величина напряжения, при которой счетчик уже не „поляризуется“, зависит от образца. Она понижается с ростом температуры (фиг. 5).

При облучении сквозь анод во внешней цепи также наблюдались импульсы, но импульсов стационарной амплитуды не было получено ни на одном образце при температурах от комнатной до 230°С. Тем не менее начальная амплитуда максимального импульса (измеренная сразу же после включения источника) была немногим меньше, чем при облучении сквозь катод, и наблюдалось насыщение ее по напряжению (фиг. 6).

Далее, мы наблюдали счет в „поле поляризации". Для этого сначала отводили от образца источник α-частиц, снимали высокое напряжение и закорачивали образец. Затем источник частиц подводили снова, и на экране осциллографа можно было наблюдать импульсы, амплитуда которых быстро падала со временем. Импульсы наблюдались всегда как после облучения со стороны анода, так и со стороны катода. При повышенных температурах они также наблюдались во всех случаях. Таким образом, даже когда счетчик не „поляризуется", т. е. амплитуда импульсов во внешней цепи со временем не падает, сам кристалл поляризован, так как поле поляризации в нем есть.



Фиг. 5. Зависимость амплитуды максимального импульса от времени при заданном напряжении на счетчике. 1—комнатная температура, 2—160°C, 3—230°C.



Фиг. 6. Зависимость амплитуды максимального импульса от напряжения: 1—облучение сквозь катод, 2—облучение сквозь анод.

§ 4. Обсуждение результатов

Совершенно очевидно, что полученные результаты не могут быть объяснены с помощью общепринятых представлений о „поляризации" счетчиков, изложенных в § 1. Однако, их объясняет модель, в основу которой положено четыре экспериментальных факта:

1. Сильная зависимость тока через образец от времени на постоянном напряжении.

2. Слабая зависимость потерь заряда в счетчике от температуры. Величина эффективной энергии образования пары электрон-дырка для

наших образцов составляла от 75 до 175 *эв* (вместо теоретической ~20 *эв* [11, 12]) и очень мало зависела от температуры до ~230°С).

3. Сильная зависимость „поляризации“ счетчика при облучении сквозь катод от температуры (фиг. 5).

4. „Поляризация“ счетчика при облучении сквозь анод при всех напряжениях вплоть до предельно допустимого в исследованном диапазоне температур (до 230°С).

Сильная зависимость от времени тока через образец на постоянном напряжении показывает, что имеет место объемная поляризация кристалла [13]. Значит, поле внутри образца не однородно и не равно среднему (V/d). Так как ток падает за 15—20 *сек.* примерно на порядок, поле во внутренней части образца может быть много меньше среднего. Таким образом, еще до начала облучения поле в кристалле искажено объемными зарядами.

Рассмотрим случай облучения сквозь катод, когда в объеме кристалла захватываются электроны.

Пробег α-частицы с энергией 5 *Мэв* в алмазе, как уже говорилось, равен примерно 10 *мк*. Наибольшая энергия δ-электронов составляет ~2 *кэв*, а глубина проникновения ~1 *мк*. Таким образом, трек α-частицы представляет собой узкий канал диаметром ~2 *мк* и длиной ~10 *мк*. Плотность носителей в этом канале довольно высока (~$10^{16}/см^3$) и очень сильно отличается от плотности носителей в неионизованной части кристалла. Во внешнем поле канал поляризуется, и облака положительных и отрицательных носителей смещаются друг относительно друга настолько, чтобы скомпенсировать внешнее поле. Так как плотность ионизации в треке большая, это смещение должно быть невелико, и в большей своей части облака разноименных зарядов перекрываются. Дальнейшее разделение зарядов происходит путем диффузии [14]. Скорость растекания области ионизации будет определяться, стало быть, скоростью диффузии, т. е. разностью концентраций в треке и вне его, а следовательно, и скоростью отвода вылетевших из трека носителей. Очевидно, эта последняя зависит, прежде всего от величины внешнего поля вне трека. Сильное поле быстро подхватывает вылетевшие носители и уносит их, в слабом поле они будут дольше находиться вблизи трека и могут захватиться на ловушки. В таком случае диффузия из трека затрудняется. В самом треке носители также могут захватиться на ловушки, что в свою очередь, замедлит диффузию, а потому вызовет возрастание времени растекания и тем самым увеличит вероятность рекомбинации носителей в самом треке. Потери заряда при растекании трека будут вызваны, таким образом, рекомбинацией и захватом носителей на ловушки внутри трека и в некоторой его окрестности.

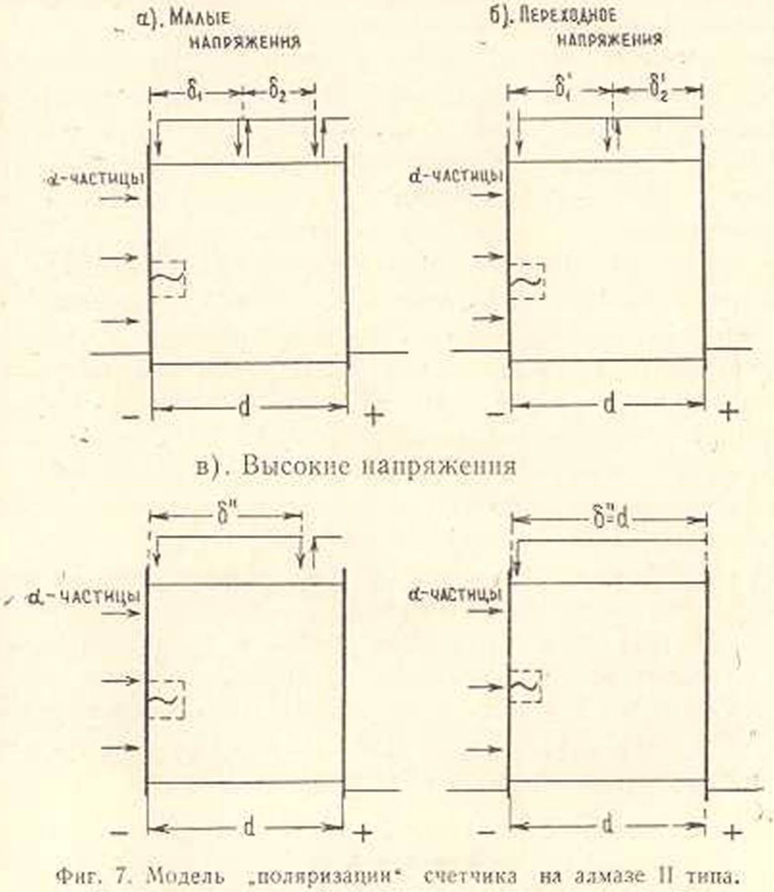
Однако, в результате захвата носителей на ловушки в треке и около него в приповерхностном слое, толщина которого порядка глубины проникновения α-частиц, может произойти накопление зарядов (мы будем называть это „поверхностной поляризацией счетчика“).

Из наших опытов при повышенных температурах следует, что ловушки для дырок довольно глубоки и глубже ловушек для электронов. Значит, если происходит захват дырок в треке или около него, они могут не успеть освободиться из ловушек к моменту прихода следующей частицы. В ее треке (или в его окрестности) тогда окажется избыточное количество дырок, и растекание трека затруднится. В тех участках приповерхностной области, где ловушек много, со временем может накопиться столько дырок, что из трека попавшей сюда частицы в кристалл будет выходить мало электронов, и импульс от частицы не будет превышать уровня шумов. Следовательно, эти участки поверхности как бы выключаются, чем можно объяснить временную зависимость скорости счета при больших напряжениях на счетчике (т. е. не стопроцентную эффективность счета в стационарном состоянии, фиг. 3). Видимо, аналогично объясняется и улучшение амплитудного распределения со временем [8].

Вернемся к кривым фиг. 4 и 5. В слабых полях, помимо „поверхностной поляризации счетчика", должна иметь место и „поляризация", обусловленная захватом движущихся к электродам носителей на ловушки в объеме кристалла. Температурные измерения показывают, что ловушки для электронов неглубоки, так как „поляризация" счетчика при облучении сквозь катод заметно ослабляется уже при 160°C (фиг. 5). Значит, захваченные электроны могут довольно быстро выбрасываться термически из ловушек даже при комнатной температуре. Но так как поле внутри кристалла слабое, пройдя небольшой путь, они снова захватываются, потом снова освобождаются и т. д. Таким образом, электроны „ползут" по кристаллу. Поскольку они находятся в кристалле, поле в нем дополнительно искажается и ослабляется, и постепенно счетчик „поляризуется" подобно тому, как это описано в § 1. Импульс напряжения во внешней цепи, вызванный попаданием частицы в кристалл, в нашем случае будет обусловлен движением электронов, вышедших из трека, на расстояние δ_1 (фиг. 7а). Перемещение по кристаллу электронов, освобожденных термически из ловушек, должно быть только дополнительным источником шума.

Обычно полагают $\delta = \mu\tau E_{\text{внутр}}$ (здесь τ — среднее время жизни до захвата, μ — дрейфовая подвижность, а $E_{\text{внутр}}$ — поле внутри образца). Строго говоря, сдвиг δ_1 (фиг. 7а) должен определяться более сложным выражением, поскольку поле в образце неоднородно: средний путь электрона будет зависеть от того, в какой части кристалла он движется. Однако, с ростом напряжения на счетчике внутреннее поле в кристалле все же растет. Сдвиг δ_1 поэтому также увеличивается, а стало быть, возрастает и заряд, отмечаемый во внешней цепи. Наконец, при некотором достаточно большом напряжении происходит следующее.

После включения источника частиц электроны сначала движутся, проходя в кристалле путь $\delta_1 < d$ и захватываясь где-то в области ослабленного поля. Накапливается объемный заряд. Однако, имеется существенное отличие от предыдущего рассмотрения: сдвиг δ_2' в этой части кристалла равен $d - \delta_1'$. Электроны, выброшенные из ловушек термически, попадают поэтому в область прианодного поля и доходят до анода, не захватываясь более (фиг. 7б). Устанавливается некое равновесие между вырвавшимися из трека электронами, которые за-



Фиг. 7. Модель „поляризации“ счетчика на алмазе II типа. а) Малое напряжение; б) Переходное напряжение; в) Высокое напряжение. Поле внутри кристалла искажено, $E_{внутр} \neq V/d$. Величина сдвига δ зависит от того, в какой части кристалла движется носитель. ↓ захват носителей на ловушки, ↑ термическое освобождение захваченных носителей.

хватываются на ловушки, пройдя расстояние, равное сдвигу δ_1', и освобожденными из ловушек термически электронами, ушедшими в анод. Счетчик не „поляризуется“ более, и амплитуда импульсов во внешней цепи со временем не падает (фиг. 4, кривая 2). Стационарное значение амплитуды максимального импульса при заданном напряжении на счетчике определяется, следовательно, сдвигом носителей δ_1' в искаженном поле внутри кристалла и потерями при растекании трека в том участке приповерхностного слоя, где концентрация ловушек минимальна.

Время установления стационарного состояния будет определяться скоростью роста объемного заряда, скоростью термического освобождения носителей из ловушек и скоростью накопления заряда в приповерхностном слое (т. е. скоростью установления „поверхностной поляризации счетчика“). В зависимости от их соотношения мы можем получить для изменения максимального импульса со временем кривую с минимумом или без него (фиг. 4 и фиг. 5).

Максимальный импульс растет с ростом напряжения на счетчике по двум причинам. Во-первых, растет поле в объеме и увеличивается сдвиг носителей δ'' (фиг. 7в), а во-вторых, растет поле в прикатодной области и облегчается диффузия носителей из трека. Этим же объясняется и рост эффективности (интегральной скорости счета) с напряжением (фиг. 3), поскольку с ростом прикатодного поля все большее число участков приповерхностного слоя включается в работу.

Так как с ростом приложенного к счетчику постоянного напряжения амплитуда максимального импульса стремится к насыщению, сдвиг электронов внутри кристалла δ'' становится равным расстоянию между электродами d (фиг. 7в). Поскольку с ростом температуры „поляризация“ счетчика сильно меняется (фиг. 5), а потери меняются мало, величина максимального импульса при насыщении, а стало быть, и потери заряда должны в основном определяться количеством электронов, вышедших из трека в кристалл.

При облучении сквозь анод, как уже указывалось, мы не получили импульсов стационарной амплитуды. Поэтому разделить „поляризацию“ счетчика из-за накопления дырок в приповерхностной области и в объеме не представляется возможным. Однако, поскольку величина импульсов при облучении сквозь анод немногим меньше, чем при облучении сквозь катод (фиг. 6), нам кажется, что и в этом случае потери заряда происходят в основном в треке.

Выводы

Мы видим, таким образом, что в счетчиках на алмазах II типа еще до начала облучения объемная поляризация должна искажать внутреннее поле, которое нельзя поэтому a priori считать ни однородным, ни равным V/d. Таким образом, применение простой теории фотопроводимости, и в частности, разновидностей формулы Гехта, не оправдано. Кроме того, при облучении частицами с высокой ионизующей способностью (например, α—частицами) с ростом приложенного постоянного напряжения может изменяться число носителей, выходящих из трека в кристалл. При выводе формулы Гехта, однако, это число считается постоянным. Не вызывает удивления поэтому обнаруженное еще ранее в ряде работ несоответствие полученных результатов этой формуле (см., например, [15]). Можно с уверенностью сказать, что изучение не только алмазных, но и любых других счетчиков на полупроводниках с широкой запрещенной зоной должно сопровождаться изучением темновой электропроводности на постоянном напряжении и распределения полей в кристалле. Между тем при исследовании, например, алмазных счетчиков, основное внимание всегда уделялось фотопроводимости, темновая электропроводность оставалась в стороне, а объемная поляризация вообще не исследовалась.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность доценту МИЭМ А. Н. Губкину и сотрудникам ЛФТИ Н. Б. Строкану, О. А. Матвееву и Д. В. Тархину за большую помощь при обсуждении результатов работы.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева АН СССР Поступила 18 I 1965

Ե. Ա. ԱՖԱՆԱՍԵՎԱ, Է. Վ. ԱՂԱԲԱԲՅԱՆ

ԱԼՄԱՍՏԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻՉՆԵՐԻ ԲԵՎԵՌԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ հետազոտվում է միջուկային մասնիկների ալմաստային հաշվիչների էական թերությունը՝ բևեռացումը, այսինքն՝ իմպուլսների ամպլիտուդի անկումը, որը գրանցվում է արտաքին շղթայում, ճառագայթված մասնիկների աճին զուգընթաց։

Ցույց է տրվում, որ հաշվիչի բևեռացման երևույթի նկարագրությունը պետք է տարբերվի նախկինում այլ հեղինակների առաջարկած նկարագրություններից։

Ստացված արդյունքները բացատրելու համար առաջարկված է որակական մոդել, որի հիմքում դրված է չորս փորձարարական փաստ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прайс В.* Регистрация ядерного излучения. ИЛ, М., 1960.
2. *Hofstadter R.* Crystal Counters. Proc. IRE, **38**, № 7, 726, 1950.
3. *Головин Б. М., Осипенко Б. П., Сидоров А. И.* Гомогенные кристаллические счетчики ядерных излучений. ПТЭ, № 6, 5, 1961.
4. *Mayer J. W.* Electronique nucléaire. Compte Rendu du Colloque International, Paris, 25—27, nov. 1963.
5. *Мотт Н., Герни Р.* Электронные процессы в ионных кристаллах. ИЛ, М., 1950.
6. *Ess H., Rossel J.* Quelques propriétés du diamant comme compteur à cristal Helv. Phys. Acta, **23**, 484, 1950.
7. *Robertson R., Fox J. J., Martin A. E.* Two Types of Diamond. Tranc. Roy. Soc. London, A **232**, 463, 1934.
8. *Афанасьева Е. А.* О работе алмазных счетчиков ядерных излучений в сильных электрических полях. ЖТФ, № 5, 980, 1965.

9. *Бонч-Бруевич А. М.* Применение электронных ламп в экспериментальной физике. ГИТТЛ, 1956.
10. *Urlau R. R.*, the late *Logie H. J.*, *Nabarro F. R. N.* Energy Levels in the Forbidden gap of Insulating Diamonds. Proc. Phys. Soc., **78**, 256, 1961.
11. *Shockley W.* Problems Related to P—N Junctions in Silicon. Czech. J. Phys; B 11, 81, 1961.
12. *Лёвшин В. Л.* и др. Исследования катодолюминесценции цинксульфидных и некоторых других катодолюминофоров. Труды ФИАН, **23**, 64, 1963.
13. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков. ГИТТЛ, 1949.
14. *Northrop D. C.*, *Simpson O.* Semiconductor Counters. Proc. Phys. Soc., **80**, 262, 1962.
15. *Champion F. C.*, *Wright S. B.* Diamond Conduction Counters with small Electrode Separations. Proc. Phys. Soc., **73**, 385, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

М. Ф. ГЕЙДАРОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЗВЕЗДНЫХ СКОПЛЕНИЙ

§ 1. Общие соображения

Процесс динамической эволюции звездных скоплений может зависеть от ряда физических факторов. Фактор прохождения посторонних звезд через скопление был рассмотрен С. Росселандом [1], фактор сближений между звездами в скоплении впервые был проанализирован В. А. Амбарцумяном [2]. Л. Спицер и М. Шварцшильд [3] рассмотрели случай влияния массивных межзвездных облаков на скорости звезд в звездных системах.

Известно, что для звездных систем строго равновесное состояние (т. е. наиболее вероятное состояние) не существует, и в звездной динамике его роль в известной мере играют стационарные состояния. Однако, в отличие от равновесного состояния, стационарных состояний много. В процессе движения звезд внутри скопления происходят сближения между звездами. Следовательно, между членами скопления непрерывно происходит обмен кинетической энергией. При этом звезды, получающие достаточную энергию, уходят из скопления, если затем не происходит других тесных сближений со звездами скопления. Также известно, что воздействие сближений со звездами скопления в несколько раз больше, чем воздействие, производимое проходящими через скопление посторонними звездами. Поэтому можно сказать, что из основных факторов в динамике звездных систем самый результативный—это сближения между членами скопления. На этой основе становится необходимым исследование динамической эволюции звездных скоплений, учитывая сближения между его членами.

Эволюционный фактор сближений между звездами отклоняет систему от первоначального состояния необратимым образом. Это видно хотя бы из того, что полное число членов уменьшается. Но можно предположить, что с течением времени первоначальное стационарное состояние системы заменяется другим стационарным состоянием и т. д. Эволюцию звездной системы можно рассматривать как последовательную смену вышеуказанных состояний. Итак, возникает вопрос: сколько времени потребуется для того, чтобы одно стационарное состояние заменилось другим стационарным состоянием? Величина времени релаксации грубо определяется формулой, выведенной В. А. Амбарцумяном [2] для скопления, состоящего из звезд одинаковой массы,

$$\tau = \frac{1}{16 \lg N/4} \sqrt{\frac{NR^3}{Gm}}.$$

Здесь N — число звезд скопления, R — его радиус, m — масса звезды; G — гравитационная постоянная. Грубо говоря, за промежуток времени τ восстанавливается максвелловское распределение скоростей и координат, в связи с чем часть звезд скопления приобретает скорости, превосходящие критическую, и получает возможность покинуть скопление. Отсюда не следует, что все эти звезды обязательно покинут скопление. Небольшая часть уходящих звезд может отдать некоторую долю своей энергии другим звездам и остаться в скоплении. Пренебрегая этим эффектом, мы можем сказать, что скопление, теряя звезды, уменьшается в своей массе, меняет свои размеры и плотность. Эти процессы могут сопровождаться сжатием или расширением системы. По [2, 4] после ухода части звезд из скопления полная энергия системы уменьшается, и это приводит к сжатию оставшейся системы. Само скопление все более быстрыми темпами рассеивается в пространстве и, в конце концов, должно превратиться в кратную звезду с устойчивым движением, например, в двойную. В 1957—1958 годах И. Кинг в своих работах [5, 6] подтвердил выводы В. А. Амбарцумяна. По И. Кингу [5, 6] после ухода звезд скопление сжимается и его радиус изменяется приблизительно пропорционально квадрату числа звезд, остающихся в скоплении и, наконец, такое сжатие ускоряет темп ухода, т. е. время релаксации уменьшается. Однако, было высказано и обратное представление об эволюции звездных скоплений. По мнению С. Чандрасекара [7] скопление, теряя звезды, стремится стать более рассеяным с течением времени, т. е. время релаксации увеличивается; а по результатам Р. Мише [8] выходит, что во взятом им конкретном примере область скопления, заключенная внутри $R = 1{,}6$ *пс*, в ходе эволюции сжимается, а область скопления вне $R = 20$ *пс* расширяется.

Чтобы найти, как меняется состояние системы с течением времени, надо в частности знать изменение ее полной энергии. Процесс сближения между звездами скопления завершается уходом одной из звезд только тогда, когда звезда получает положительную кинетическую энергию. Следовательно, при этом скопление уменьшает свою энергию, что по теореме вириала должно сопровождаться увеличением абсолютного значения потенциальной энергии, т. е. сжатием системы, или, по крайней мере, ее основной части. Таким образом, можно сказать, что сближения между звездами в скоплении — это такой фактор для эволюции звездных скоплений, при котором основная часть скопления, теряя звезды, сжимается, в результате чего ускоряется темп разрушения.

Возникает вопрос: сколько времени потребуется для полного разрушения скопления, принадлежащего к категории открытых скоплений? С. Росселанд [1], учитывая только прохождения посторонних звезд через скопление, пришел к выводу, что время, необходимое для полного разрушения открытого скопления, порядка 10^{10} лет, а В. А. Амбарцумян [2, 4], рассматривая в качестве основного фактора сближения между звездами скопления показал, что время, необходимое для полного разрушения открытого скопления, оказывается порядка нескольких сот миллионов или миллиарда лет. В 1940 году Л. Спицер [9] своими расчетами подтвердил, что время релаксации в механизме распада скопления, рассмотренном В. А. Амбарцумяном, на порядок меньше, чем в случае, рассмотренном С. Росселандом.

В последние годы некоторые авторы начали заниматься вопросом эволюции звездных систем, исходя из уравнения кинетической теории газов [7, 8, 10–22]. В частности, И. Н. Скабицкий [11] изучал звездные системы с помощью уравнений, описывающих изменение состояния скопления с течением времени. В работе [11] сначала выводится кинетическое уравнение для звездной системы, обладающей сферической симметрией в пространстве импульсов и координат, затем дается приближенное решение этого же уравнения для промежутка времени Δt, считающегося достаточно малым и, наконец, для первого приближения получается

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

где ρ — пространственная плотность шарового скопления. Этот вывод справедлив для случая, когда в качестве начального состояния берется стационарное. Делается вывод, что скопление в значительной степени устойчиво. Кстати, следует отметить, что исследование И. Н. Скабицкого подвергалось не совсем обоснованной критике. В работе Г. Г. Кузмина [12] рассматриваются уравнения, позволяющие проследить изменение функции распределения скоростей и координат и гравитационного потенциала, а также выводятся формулы, необходимые для вычисления функции сближений. Как известно, эволюция звездных систем, в основном, связана с изменением функции распределения скоростей и координат, поэтому подход [12], в котором дается метод вычисления этого изменения, является наиболее эффективным. К сожалению, следует отметить, что в цитируемой работе Г. Г. Кузмин воздержался от продолжения анализа вероятного хода эволюции звездных скоплений. Для описания структуры сферической звездной системы Р. Мише [8, 14] использовал в качестве начального распределения усеченную функцию распределения по энергиям и угловым моментам

$$f(E, I) = Ae^{-\alpha E - \beta I^2} Q(E),$$

где E — энергия, I — угловой момент, $Q(E)$ — функция, обращающаяся в нуль при $E = E_{ух}$, энергии ухода, и учитывающая усеченность распределения для энергий, превышающих энергию ухода. В работе [8] делается предположение, что приведенная форма функции распределения по энергиям и угловым моментам с течением времени сохраняется, и поэтому задача сводится лишь к вычислению изменений значений ее параметров, т. е. A, α, β, через промежуток времени Δt, что делается численными методами.

Итак, следует отметить, что в работах [7, 8, 10—17, 23, 24] не дается полная картина описания эволюции звездных скоплений с помощью уравнений Больцмана или Фоккера-Планка обобщенного типа. Поэтому, имея в виду необходимость дальнейших еще более детальных исследований динамической эволюции звездных скоплений, поставим задачу применить уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа (см. § 2, 3):

$$\frac{Df}{Dt} = \eta \operatorname{div}_c (fc) + q\nabla_c^2 f,$$

где $\frac{D}{Dt}$ — стоксовая производная для движения в регулярном поле, ∇_c^2 — лапласиан, div_c — дивергенция по c, c — скорость; величины q и η соответственно носят характер коэффициентов диффузии и динамического трения. При решении уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа (см. § 3) примем в качестве начального состояния системы стационарное состояние, т. е. такое, которое оставалось бы неизменным при отсутствии столкновений, и одновременно будем искать решение этого же уравнения в первых приближениях так, чтобы найденное решение описывало бы происходящее из-за взаимных случайных сближений изменение функции распределения скоростей и координат, пространственной плотности и т. д. Мы надеемся, что это решение адэкватным образом будет отображать эволюцию звездных систем.

§ 2. Учет далеких звездных сближений

Известно, что состояние звездных систем полностью определяется заданием функции распределения скоростей и координат. Такая функция в пространстве скоростей и координат символически записывается в виде $f(x, y, z, u, v, w, t)$, где x, y, z — координаты, а u, v, w — компоненты скоростей рассматриваемых частиц. За промежуток времени Δt функция распределения скоростей и координат подвергнется изменению. Это произойдет вследствие действия силы от сглаженного распределения гравитирующих частиц в системе и от эффекта их случайных сближений. Обе силы носят гравитационный характер. Из них сглаженную силу притяжения какой-нибудь частицы остальными частицами системы В. А. Амбарцумян предложил называть регулярной силой, а силу, возникающую от эффекта случайных сближений между частицами системы—иррегулярной силой.

Если рассматриваемя система стационарна в регулярном поле собственного тяготения, то функция распределения скоростей и координат — f_0 удовлетворяет уравнению

$$u\frac{\partial f_0}{\partial x}+v\frac{\partial f_0}{\partial y}+w\frac{\partial f_0}{\partial z}+K_x^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial u}+K_y^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial v}+K_z^{(0)}\frac{\partial f_0}{\partial w}=0, \tag{2.1}$$

где

$$K_x^{(0)}=-\iiiint\!\!\iint\frac{Gf_0(x_1,\ y_1,\ z_1,\ u,\ v,\ w)(x-x_1)}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{3/2}}dx_1dy_1dz_1dudvdw. \tag{2.2}$$

Для $K_y^{(0)}$ и $K_z^{(0)}$ выражения аналогичны. Вообще же, поскольку значения функции распределения скоростей и координат не меняются с течением времени в точке, движущейся вместе с частицей (теорема Лиувилля), то в любой нестационарной системе

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}+K_x\frac{\partial f}{\partial u}+K_y\frac{\partial f}{\partial v}+K_z\frac{\partial f}{\partial w}=0. \tag{2.3}$$

Если строить теорию с учетом иррегулярных сил, то в уравнении (2.3) правую часть следует полагать равной не нулю, а некоторой малой величине. Известно, что регулярная сила прямо пропорциональна произведению общей массы системы на массу рассматриваемых частиц, а иррегулярная сила прямо пропорциональна произведению массы тех частиц, между которыми имеется сближение. Следовательно, порядок величины регулярной силы F_1 и иррегулярной F_2 определяется выражениями

$$F_1\simeq G\frac{Mm}{R^2},\qquad F_2\simeq G\frac{m^2}{r_{1,2}^2},$$

где M — общая масса скопления, m — масса одной частицы (для простоты рассматривается скопление с одинаковыми массами), R — радиус скопления, $r_{1,2}$ — расстояние между двумя частицами, а G—гравитационная постоянная. Но $r_{1,2}$ связано с N и R соотношением

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r_{1,2}}{2}\right)^3N=\frac{4}{3}\pi R^3$$

или

$$r_{1,2}=2R/N^{1/3},$$

где N—общее число частиц в системе, так что для F_2 имеем

$$F_2=G\frac{Mm}{rR^2N^{1/3}}.$$

Таким образом, если мы пожелаем дополнить уравнение (2.3) членами, описывающими действие F_2, то последние должны содержать множитель $1/N^{1/3}$. Если их пишем рядом с другими членами, которые описывают действие регулярных сил, то

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}, \tag{2.4}$$

где в выражении для $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}}$ можно выделить некоторый малый множитель $\mu = 1/N^{1/3}$ (см. (2.8)). Уравнение (2.4) является уравнением Больцмана для нашего случая и представляет собой обобщение теоремы Лиувилля классической динамики.

В более поздних работах С. Чандрасекара [10, 15, 16] развита теория динамического трения, которая описывает поведение частицы, у которой должна быть систематическая тенденция к замедлению скорости в направлении движения. Уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа, учитывающее влияние далеких звездных сближений, может быть написано в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}} \Delta t + R(\Delta t^2) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial c_i}(f < \delta c_i >_{\text{ср.}}) + \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial^2}{\partial c_i^2}(f < \delta c_i^2 >_{\text{ср.}}) +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2}{\partial c_i \partial c_j}(f < \delta c_i \delta c_j >_{\text{ср.}}) + R(< \delta c_i \delta c_j \delta c_k >_{\text{ср.}}), \tag{2.5}$$

где $< \delta c_i >_{\text{ср.}}$, $< \delta c_i^2 >_{\text{ср.}}$, $< \delta c_i \delta c_j >_{\text{ср.}}$ и т. д. означают различные моменты вероятности перехода за время Δt. Математические ожидания заключенных в скобки приращений и соответственно их произведений суть

$$< \delta c_i >_{\text{ср.}} = -\eta c_i \Delta t + R(\Delta t^2),$$

$$< \delta c_i^2 >_{\text{ср.}} = 2q\Delta t + R(\Delta t^2),$$

$$< \delta c_i \delta c_j >_{\text{ср.}} = R(\Delta t^2)$$

(С. Чандрасекар [10]). Величины $R(< \delta c_i \delta c_j \delta c_k >_{\text{ср.}})$ более высокого порядка малости, чем Δt, поэтому можно отбросить эти малые величины в уравнении (2.5) и перейти к пределу при $\Delta t \to 0$. Тогда имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}} = \eta \sum_i \frac{\partial}{\partial c_i}(fc_i) + q \sum_i \frac{\partial^2}{\partial c_i^2} f \tag{2.6}$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}} = \eta \operatorname{div}_c (fc) + q\nabla_c^2 f. \tag{2.7}$$

Поскольку коэффициенты η и q являются малыми величинами, содержащими коэффициент μ, мы можем положить

$$\eta = \mu\eta_0 \quad \text{и} \quad q = \mu q_0, \tag{2.8}$$

после чего уравнение (2.7) примет вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{сбл.}} = \mu\left[\tau_0 \operatorname{div}_c (fc) + q_0 \nabla_c^2 f\right]. \tag{2.9}$$

Комбинируя уравнения (2.4) и (2.9), мы получаем

$$\frac{Df}{Dt} = \mu\left[\tau_0 \operatorname{div}_c (fc) + q_0 \nabla_c^2 f\right]. \tag{2.10}$$

Это уравнение называется уравнением Фоккера-Планка обобщенного типа. Оно учитывает далекие звездные сближения и в свою очередь является обобщением теоремы Лиувилля классической динамики, так же являясь приближенной заменой уравнения Больцмана.

Чтобы полностью охарактеризовать эволюцию звездных систем необходимо проследить изменение функции распределения скоростей, и координат с течением времени. Уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа (2.10) как раз позволяет найти ход изменения функции распределения скоростей и координат во времени. Попытка приближенного решения уравнения (2.10), основанная на использовании малости коэффициента μ, должна явиться шагом вперед по сравнению с применявшимися до сих пор более грубыми схемами [7, 8, 10—17, 23, 24]. Мы будем решать уравнение (2.10) (см. § 3) методом последовательных приближений, который коренным образом отличается от метода Р. Мише [8, 14].

При решении уравнения (2.10) будем для простоты рассматривать случай сферической симметрии, потому что, если системы не обладают сферической симметрией, то исследование взаимодействий в них потребовало бы решения весьма трудных динамических проблем. По этой причине распределение массы и регулярное силовое поле скопления принимаются сферически симметричными. Далее учитывая, что для получения качественной картины эволюции скопления тот или иной выбор начального состояния не должен иметь большого значения, допустим, что в начальный момент времени состояние системы является стационарным.

§ 3. Метод решения уравнения Фоккера-Планка. Первое приближение

Для решения уравнения Фоккера-Планка (2.10) допустим, что рассматриваются звезды в элементарном объеме $dxdydz = dR$, достаточно малом в смысле количества заключенных в нем звезд. Известно, что влияние ближайших непосредственных соседей на рассматриваемую звезду будет изменяться во времени, так как изменяется состав локального звездного распределения. В дальнейшем мы будем учитывать, что за промежуток времени Δt, большой по сравнению с периодом флюктуации ускорения, но малый, по сравнению с теми интервалами времени, за которые скорость и положение рассматриваемых звезд изменяется заметным образом, стационарность нарушается незначительно.

Принимая во внимание, что μ — малый коэффициент пропорциональности, попытаемся решение уравнения (2.10) представить в виде

$$f = f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 + \cdots, \tag{3.1}$$

где f_0 — функция распределения в стационарном состоянии, мы ее назовем нулевым приближением, $f_0 + \mu f_1$, $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2 \cdots$ — последующие приближения к функции f. Точно также для K_x, K_y и K_z мы можем написать

$$K_x = K_x^{(0)} + \mu K_x^{(1)} + \mu^2 K_x^{(2)} + \cdots$$

$$K_y = K_y^{(0)} + \mu K_y^{(1)} + \mu^2 K_y^{(2)} + \cdots$$

$$K_z = K_z^{(0)} + \mu K_z^{(1)} + \mu^2 K_z^{(2)} + \cdots \tag{3.2}$$

Потребуем теперь, чтобы (3.1) и (3.2) тождественно удовлетворяли уравнению (2.10). Подставляя в уравнение (2.10) для f его выражение согласно (3.1) и для K_x, K_y и K_z их значения согласно (3.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, мы соответственно получаем

$$\frac{D_0 f_0}{D_0 t} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{D_0 f_1}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_0 c) + q_0 \nabla_c^2 f_0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{D_0 f_2}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial w} +$$

$$+ K_x^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_1 c) + q_0 \nabla_c^2 f_1, \tag{3.5}$$

. . . .

. . . . ,

где

$$\frac{D_0}{D_0 t} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} + K_x^{(0)} \frac{\partial}{\partial u} + K_y^{(0)} \frac{\partial}{\partial v} + K_z^{(0)} \frac{\partial}{\partial w}. \tag{3.6}$$

Функция f_0 определяется из уравнения (3.3), функции f_1, f_2, $f_3, \cdots$ находятся затем последовательно из уравнений (3.4), (3.5), $\cdots$. Если уравнение (3.3) решено, то уравнение (3.4) содержит только одну неизвестную функцию f_1 и т. д. Уравнение (3.3) определяет изменение функции распределения скоростей и координат вследствие регулярных сил и является основным уравнением звездной динамики без учета сближений. Общее решение уравнения (3.3) в случае сферической симметрии зависит от двух интегралов движения звезды: интеграла энергии и величины интеграла угловых моментов

$$f_0 = f_0 (E, I^2),$$

где E и I — соответственно вышеуказанные интегралы. В случае сферической симметрии системы E и I имеют вид

$$E = u^2 + v^2 + w^2 - 2\Phi_0(r). \tag{3.7}$$

$$I^2 = I_2^2 + I_3^2 + I_4^2, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= xv - yu, \\ I_3 &= yw - zv, \\ I_4 &= zu - xw, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\Phi_0(r)$ — потенциальная энергия, а I_2, I_3 и I_4 — проекции интеграла угловых моментов на координатные плоскости.

Для конкретности рассмотрим частный случай, когда решение уравнения (3.3) имеет вид

$$f_0 = f_0^{(0)}(E)\, Q_0(E) = Ae^{-\alpha E}\, Q_0(E), \tag{3.10}$$

где A, α — постоянные величины, а $Q_0(E)$ — функция, обращающаяся в нуль при $E = E_{+\infty}$, энергии ухода, и учитывающая усеченность распределения для энергии, превышающей энергию ухода. Подставляя в уравнение (3.3) $f_0 = f_0^{(0)} Q_0$ и учитывая, что Q_0 тоже является интегралом движения, получим

$$\frac{D_0 Q_0}{D_0 t} = 0. \tag{3.11}$$

При решении уравнения (3.11) используем граничные условия

$$Q_0(E) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad E = 0, \\ 0 & \text{при} \quad E = E_{+\infty}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Итак, решение уравнения (3.11) при (3.12) возьмем в виде

$$\left.\begin{aligned} Q_0(E) &= \sigma_1 - \sigma_2 e^{\alpha E} & E &< E_{+\infty} \\ Q_0(E) &= 0 & E &\geqslant E_{+\infty} \end{aligned}\right\}, \tag{3.13}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}}, \qquad \sigma_2 = \frac{e^{-\alpha E_{+\infty}}}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}}.$$

Следовательно, для f_0 мы имеем

$$f_0(E) = Ae^{-\alpha E}(\sigma_1 - \sigma_2 e^{\alpha E}). \tag{3.14}$$

В предыдущем параграфе мы условились, что при решении уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа будем рассматривать случай сферической симметрии системы, а состояние системы как последовательность стационарных состояний. Так как за промежуток времени Δt первоначальное стационарное состояние системы заменяется другим стационарным состоянием и т. д., то функции f_1, f_2, $f_3, \cdots$, для системы, обладающей сферической симметрией, должны удовлетворять уравнениям:

$$\frac{D_0 f_1}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{D_0 f_2}{D_0 t} + K_x^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial u} + K_y^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial v} + K_z^{(1)} \frac{\partial f_1}{\partial w} +$$

$$+ K_x^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial u} + K_y^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial v} + K_z^{(2)} \frac{\partial f_0}{\partial w} = 0. \tag{3.16}$$

. . . .

. . . .

Таким образом, принимая во внимание (3.15), (3.16), $\cdots$, из (3.4), (3.5), $\cdots$ получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_0 c) + q_0 \nabla_c^2 f_0, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \eta_0 \operatorname{div}_c (f_1 c) + q_0 \nabla_c^2 f_1, \tag{3.18}$$

. . . .

. . . .

Если рассматриваются скопления сферически симметричные, приблизительно стационарные и состоящие из очень большого числа гравитирующих частиц, то члены (3.1) быстро убывают при малом промежутке времени Δt и поэтому для таких скоплений $f_0 + \mu f_1$ являются достаточно хорошим приближением. При меньшем числе частиц следует использовать приближение $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$ и т. д.

В наше исследование входят скопления сферически симметричные, приблизительно стационарные и состоящие из очень большого числа гравитирующих частиц, поэтому мы можем ограничиться приближениями $f_0 + \mu f_1$ и $f_0 + \mu f_1 + \mu^2 f_2$.

Итак, имея ввиду распределение (3.10), мы можем написать уравнение (3.17) в более удобном виде

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [\eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) + q_0 \nabla_c^2 Q_0] f_0^{(0)} + [\eta_0 \operatorname{div}_c (f_0^{(0)} c) + q_0 \nabla_c^2 f_0^{(0)}] Q_0. \tag{3.19}$$

Известно, что случайные сближения не могут изменить максвелловского распределения скоростей и координат. Математически это означает, что правая часть кинетического уравнения Больцмана обращается в нуль при подстановке в него максвелловского распределения. С другой стороны, хотя правая часть уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа является достаточно точным приближением к правой части уравнения Больцмана, она уже не обращается тождественно в нуль при подстановке в нее распределения Максвелла. Это происходит только из-за того, что уравнение Фоккера-Планка обобщенного типа является лишь приближением и содержит некоторые неточности. Поэтому, приняв

$$\eta_0 \operatorname{div}_c (f^{(0)} c) + q_0 \nabla_c^2 f_0^{(0)} = 0 \tag{3.20}$$

(хотя формально это равенство строго не выполняется), мы частично уменьшим ошибку, уже имеющуюся в правой части уравнения (3.19). Таким образом, приняв (3.20), можно вместо (3.19) написать

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [\eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) + q_0 \nabla_c^2 Q_0] f_0^{(0)}. \tag{3.21}$$

Итак, имея ввиду (3.13) и учитывая (3.7), мы можем вычислить левую часть уравнения (3.21)

$$\begin{aligned} \eta_0 \operatorname{div}_c (Q_0 c) &= \eta_0 (3Q_0 - 2\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}), \\ q_0 \nabla_c^2 Q_0 &= -2q_0 \alpha\sigma_2 (3 + 2\alpha c^2) e^{\alpha E}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Следовательно, имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = [3\eta_0 Q_0 - 2\alpha\eta_0\sigma_2 c^2 e^{\alpha E} - 2q_0\alpha\sigma_2 (3 + 2\alpha c^2) e^{\alpha E}] f_0^{(0)}. \tag{3.23}$$

Введем в это выражение вместо q_0 его значение $2\alpha q_0 = \eta_0$ (С. Чандрасекар [10]), тогда получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = 3\eta_0 (2Q_0 - \sigma_1) f_0^{(0)} - 4\alpha\eta_0\sigma_2 c^2 e^{\alpha E} f_0^{(0)}. \tag{3.24}$$

Таким образом, учитывая (3.24), мы можем в первом приближении определить функции распределения скоростей и координат f из решения уравнения Фоккера-Планка (3.1) в форме

$$f = [Q_0 + 3\eta t (2Q_0 - \sigma_1) - 4\alpha\eta\sigma_2 c^2 e^{\alpha E} t] f_0^{(0)}. \tag{3.25}$$

Из этого выражения видно, что для эволюции нашей звездной системы величины Q_0, η и σ_1 играют весьма важную роль. Это обстоятельство будет показано в параграфе 6.

Чтобы полностью охарактеризовать эволюцию звездных скоплений, необходимо было определить изменение функции распределения скоростей и координат с течением времени. Выполняя эту задачу, в первом приближении мы получили (3.25). Физически этот результат может быть интерпретирован следующим образом: в процессе сближения между членами скопления непрерывно происходит обмен кинетическими энергиями и изменение угловых моментов, что сказывается в (3.25). Из (3.25) видно, как влияет фактор сближения между звездами скопления на функции распределения скоростей и координат, и важность сближений между членами скопления становится очевидной.

Зная функцию распределения скоростей и координат (3.25), мы можем определить изменения пространственной плотности в скоплении и время релаксации.

§ 4. Изменение пространственной плотности звездного скопления с течением времени

Найденное нами приращение функции распределения скоростей и координат позволяет определить изменение пространственной плотности в первом приближении.

Интегрируя функцию распределения скоростей и координат $f_1(r, c, t)$ при фиксированных x, y, z, t по всем скоростям от нуля до критической скорости, найдем приращение пространственной плотности $\rho_1(r, t)$

$$\rho_1(r, t) = \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} f_1(r, c, t)\, dc. \tag{4.1}$$

Дифференцируя выражение (4.1) по времени и принимая во внимание (3.24), получаем

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = 3\tau_0 \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} \left[(2Q_0 - \sigma_1) - \frac{4}{3}\alpha\sigma_2 c^2 e^{\alpha E}\right] f_0^{(0)} dc. \tag{4.2}$$

Далее, принимая во внимание (3.13), (3.14) и учитывая (3.7), из (4.2) получим

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} = \tau_0 A \left(3\sigma_2 e^{2\alpha\Phi_0} \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} e^{-\alpha c^2} dc - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\right). \tag{4.3}$$

Итак, для приращения $\Delta\rho$ имеем

$$\Delta\rho = \tau_i A \left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}} \sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0}\, G\left(\sqrt{\alpha \overline{c^2_{+\infty}}}\right) - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\right] \Delta t, \tag{4.4}$$

где

$$G\left(\sqrt{\alpha\overline{c^2_{+\infty}}}\right) = \int\limits_0^{\sqrt{\alpha \overline{c^2_{+\infty}}}} e^{-t^2} dt. \tag{4.5}$$

Рассмотрение уравнения (4.4) показывает, что в центральной части скопления первый член в этом уравнении в несколько раз больше, чем второй член. Иными словами в центральных частях скопления плотность возрастает. Вместе с тем в периферических частях скопления выражение (4.4) отрицательно, т. е. плотность с течением времени убывает.

Итак, можно сделать следующий вывод: в результате сближений между частицами, скопление в первом приближении сжимается.

§ 5. Изменение пространственной плотности и потенциальной энергии звездного скопления во втором приближении

Для вычисления потенциала гравитационного поля используем уравнение Пуассона, которое в случае сферической симметрии системы, может быть написано в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi(r,\ t)}{dr}\right] = -4\pi G\rho(r,\ t), \tag{5.1}$$

где G — гравитационная постоянная. Функции $\Phi(r,\ t)$ и $\rho(r,\ t)$ представим в виде рядов:

$$\begin{aligned}\Phi(r,\ t) &= \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \cdots\\ \rho(r,\ t) &= \rho_0 + \mu\rho_1 + \mu^2\rho_2 + \cdots\end{aligned} \tag{5.2}$$

Из уравнений (3.1), (4.1), (5.1) и (5.2) получим

$$\rho_2(r,\ t) = \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} f_2(r,\ c,\ t)\,dc, \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{d\Phi_2(r,\ t)}{dr}\right] = -4\pi G\rho_2(r,\ t). \tag{5.4}$$

Дифференцируя (5.3) по времени и учитывая (3.18), получим

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = \int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} [\eta_0\,\mathrm{div}_c\,(f_1c) + q_0\nabla^2_c f_1]\,dc. \tag{5.5}$$

Теперь, принимая во внимание (3.25), из (5.5) находим

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = \eta_0 t\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} [3\eta_0(3\sigma_1 - 6\sigma_2e^{\alpha E} - 4\alpha\sigma_2c^2e^{\alpha E}) - 2\eta_0\alpha c^2(3\sigma_1 + 4\sigma_2e^{\alpha E}) - $$
$$- 6q_0\alpha(3\sigma_1 + 4\sigma_2e^{\alpha E} - 2\alpha\sigma_1c^2)]\,f_0^{(0)}dc. \tag{5.6}$$

Учитывая, что $2q_0\alpha = \eta_0$, из (5.6) имеем

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = -10\eta_0^2t\sigma_2\int\limits_0^{\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}} (3 + 2\alpha c^2)\,e^{\alpha E}f_0^{(0)}dc \tag{5.7}$$

или

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = -10\eta_0^2t\sigma_2A\sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}}\left(3 + \frac{2}{3}\alpha\overline{c^2_{+\infty}}\right). \tag{5.8}$$

Известно, что $\alpha\overline{c^2_{+\infty}} = 6$. Следовательно, для приращения $\Delta\rho$ будем иметь

$$\Delta\rho = \eta A \left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}} \sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0} G(\sqrt{6}) - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}} - 70\,\eta t \sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}} \right] \Delta t. \quad (5.9)$$

Далее, из (5.1), учитывая (5.9), получим

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{d}{dr}(\Delta\Phi) \right] =$$

$$= -4\pi G \eta A \left[\frac{3}{\sqrt{\alpha}} \sigma_1 e^{2\alpha\Phi_0} G(\sqrt{6}) - 14\sigma_2 \sqrt{\overline{c^2_{+\infty}}} (1 + \eta t) \right] \Delta t. \quad (5.10)$$

Из (5.9) легко видеть, что в центральных частях $\Delta\rho > 0$. Следовательно, звездные скопления и во втором приближении с течением времени сжимаются. Необходимо отметить, что изменение пространственной плотности, вычисленное нами аналитическим методом, совпадает качественно с результатами работы Р. Миши [8], которые получены им при помощи счетной машины IBM650.

§ 6. Время релаксации звездных скоплений

Под временем релаксации понимается тот промежуток времени, в течение которого изменение начальной функции распределения скоростей и координат становится сравнимым с величиной самой функции распределения. Для того чтобы оценить время релаксации количественно, мы можем обратиться к решению уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа—(3.1), точнее к приращению функции распределения скоростей и координат, которое может быть написано в виде

$$\Delta f = 3\eta \left[\left(2 - \frac{\sigma_1}{Q_0} \right) - \frac{4}{3Q_0} \alpha \sigma_2 c^2 e^{\alpha E} \right] f_0 \Delta t. \quad (6.1)$$

Выражение в квадратной скобке есть безразмерная величина, поэтому мы ее обозначим

$$|B| = \left| 2 - \frac{\sigma_1}{Q_0} - \frac{4}{3Q_0} \alpha \sigma_2 c^2 e^{\alpha E} \right|.$$

Отметим, что $|B|$ должно быть отлично от нуля там, где функция распределения меняется со временем вследствие сближений.

Итак, приращение (6.1) принимает вид

$$|\Delta f| = f_0 \frac{\Delta t}{\tau},$$

где

$$\tau = \frac{1}{3\eta |B|}, \qquad \tau_{|E=0} = \frac{1}{3\eta(2 - 1{,}1\sigma_1)}. \quad (6.2)$$

Если безразмерная величина $\frac{\Delta t}{\tau}$ близка к единице, то изменение начальной функции распределения скоростей и координат становится сравнимым с величиной самой функции распределения. Поэтому величину τ, определяемую выражением (6.2), можно принять за время релаксации звездной системы. Следует подчеркнуть, что важность дисперсий интеграла энергии, значения энергии ухода и коэффициента динамического трения для эволюции звездных скоплений была отмечена нами выше. Теперь эти величины в явном виде фигурируют в формуле времени релаксации (6.2), и эта важность становится очевидной.

В выражении (6.2) от величин η и σ_1 удобно перейти к величинам m, N и R. Известно, что коэффициент динамического трения η определяется формулой (Линдблад, [22])

$$\eta = 8\pi n\,(Gm)^2\left(\ln \frac{D_0|\bar{c}|^2}{2mG}\right)^2 \frac{1}{|\bar{c}|^3}\,[\Phi(x_0) - x_0\Phi'(x_0)], \tag{6.3}$$

где $\Phi(x_0)$ — функция распределения случайных ошибок, $\Phi'(x_0)$ — ее производная, D_0 — параметр сближения, G — гравитационная постоянная, n — число звезд в единице объема, а x_0 — определяется формулой

$$x_0 = \alpha|\bar{c}|^2.$$

Выражение (6.3) после некоторого очевидного преобразования примет вид

$$\eta = 26\,\frac{\alpha\sqrt{NG^3m^3}\;G(x_0)}{R^{3/2}}\,\lg(N/2^{3/2}), \tag{6.4}$$

где N — число звезд скопления, R — его радиус, а $G(x_0)$ — определяется формулой

$$G(x_0) = \frac{1}{2x_0^2}\,[\Phi(x_0) - x_0\Phi'(x_0)].$$

Функция $G(x_0)$ дана в работе [7], согласно которой мы можем взять ее среднее значение

$$\overline{G(x_0)} \simeq 0{,}2 \qquad (0{,}6 \leqslant x_0 < 1{,}6). \tag{6.5}$$

Для σ_1 имеем

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 - e^{-\alpha E_{+\infty}}} \tag{6.6}$$

или

$$\sigma_1 \approx 1. \tag{6.7}$$

Следует отметить, что $|B| \neq 0$, так как в случае $|B| = 0$ отсутствует сближение. Таким образом, для времени релаксации мы получаем окончательно следующую формулу:

$$\tau = \frac{1}{46{,}8}\sqrt{\frac{NR^3}{Gm}}\,\frac{1}{\lg N - 0{,}45}. \tag{6.8}$$

Если мы выразим массу, расстояние и время соответственно в единицах солнечной массы, парсеках и годах, то в этих единицах $G = 4{,}5 \cdot 10^{-15}$. Тогда из (6.8) получим

$$\tau = 6{,}3 \cdot 10^5 \sqrt{NR^3}\ \frac{1}{\lg N - 0{,}45}. \tag{6.9}$$

По Б. Е. Маркаряну [25] скопления Гиад, M11, и т. д. находятся в стационарном состоянии и относятся к типу A. Применяя формулу (6.9) для типичного скопления $N = 400$, $R = 2$ *пс*, найдем

$$\tau = 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ лет.} \tag{6.10}$$

Для τ мы можем составить нижеследующую таблицу при различных значениях N и R.

Таблица

Время релаксации скоплений*

N \ R	1	2	4	6	10	50	100
50	$2{,}6 \cdot 10^6$	$7{,}3 \cdot 10^6$	$2{,}1 \cdot 10^7$	$3{,}8 \cdot 10^7$	$8{,}3 \cdot 10^7$	$9{,}2 \cdot 10^8$	$2{,}6 \cdot 10^9$
100	$2{,}9 \cdot 10^6$	$8{,}1 \cdot 10^6$	$2{,}3 \cdot 10^7$	$4{,}3 \cdot 10^7$	$9{,}3 \cdot 10^7$	$1{,}0 \cdot 10^9$	$2{,}9 \cdot 10^9$
150	$3{,}2 \cdot 10^6$	$9{,}0 \cdot 10^6$	$2{,}6 \cdot 10^7$	$4{,}7 \cdot 10^7$	$1{,}0 \cdot 10^8$	$1{,}2 \cdot 10^9$	$3{,}2 \cdot 10^9$
200	$3{,}4 \cdot 10^6$	$9{,}5 \cdot 10^6$	$2{,}7 \cdot 10^7$	$5{,}0 \cdot 10^7$	$1{,}1 \cdot 10^8$	$1{,}3 \cdot 10^9$	$3{,}4 \cdot 10^9$
250	$3{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}0 \cdot 10^6$	$3{,}0 \cdot 10^7$	$5{,}4 \cdot 10^7$	$1{,}2 \cdot 10^8$	$1{,}3 \cdot 10^9$	$3{,}7 \cdot 10^9$
300	$3{,}9 \cdot 10^6$	$1{,}1 \cdot 10^6$	$3{,}1 \cdot 10^7$	$5{,}7 \cdot 10^7$	$1{,}3 \cdot 10^8$	$1{,}4 \cdot 10^9$	$3{,}9 \cdot 10^9$
350	$4{,}0 \cdot 10^6$	$1{,}1 \cdot 10^6$	$3{,}2 \cdot 10^7$	$5{,}9 \cdot 10^7$	$1{,}3 \cdot 10^8$	$1{,}4 \cdot 10^9$	$4{,}0 \cdot 10^9$
400	$4{,}2 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$3{,}3 \cdot 10^7$	$6{,}2 \cdot 10^7$	$1{,}4 \cdot 10^8$	$1{,}5 \cdot 10^9$	$4{,}2 \cdot 10^9$
450	$4{,}3 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$3{,}4 \cdot 10^7$	$6{,}3 \cdot 10^7$	$1{,}4 \cdot 10^8$	$1{,}6 \cdot 10^9$	$4{,}3 \cdot 10^9$
500	$4{,}4 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$3{,}5 \cdot 10^7$	$6{,}5 \cdot 10^7$	$1{,}5 \cdot 10^8$	$1{,}6 \cdot 10^9$	$4{,}4 \cdot 10^9$
10^3	$5{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}6 \cdot 10^7$	$4{,}6 \cdot 10^7$	$8{,}4 \cdot 10^7$	$1{,}7 \cdot 10^8$	$2{,}0 \cdot 10^9$	$5{,}7 \cdot 10^9$
10^4	$1{,}3 \cdot 10^7$	$3{,}6 \cdot 10^7$	$1{,}0 \cdot 10^8$	$1{,}9 \cdot 10^8$	$4{,}1 \cdot 10^8$	$2{,}7 \cdot 10^9$	$1{,}3 \cdot 10^{10}$
10^5	$3{,}2 \cdot 10^7$	$8{,}9 \cdot 10^7$	$2{,}5 \cdot 10^8$	$4{,}7 \cdot 10^8$	$1{,}0 \cdot 10^9$	$1{,}2 \cdot 10^{10}$	$3{,}2 \cdot 10^{10}$
10^6	$8{,}2 \cdot 10^7$	$2{,}3 \cdot 10^8$	$6{,}5 \cdot 10^8$	$1{,}9 \cdot 10^9$	$2{,}6 \cdot 10^9$	$2{,}9 \cdot 10^{10}$	$8{,}2 \cdot 10^{10}$

Необходимо отметить, что время релаксации, вычисленное нами, значительно отличается от времени релаксации в работах [1, 2, 7 и т. д.]. Так, например, для типичного скопления В. А. Амбарцумян [2] получил время релаксации порядка $\tau = 4 \cdot 10^7$ лет.

Заключение

Изложенный выше метод решения уравнения Фоккера-Планка обобщенного типа, позволил нам вычислить изменение функции распределения скоростей и координат для малых t, что необходимо было для описания структуры и эволюции звездных скоплений. Для

* R—в парсеках, τ—в годах.

вычисления изменения функции распределения скоростей и координат нами рассмотрена последовательность стационарных состояний в самом простом случае звездных скоплений, т. е. звездных скоплений, обладающих сферической симметрией.

Применяя результаты решения уравнения (2.10) к звездным скоплениям, мы пришли к слеующим выводам:

1. Пространственная плотность в сферически симметричных скоплениях в первом приближении с течением времени увеличивается. При этом звездные скопления должны разрушаться в сравнительно быстрые сроки.

2. Во втором приближении пространственная плотность и потенциальная энергия изменяются по закону (5.9) и (5.10).

3. Время релаксации для скопления Ясли порядка $1{,}2 \cdot 10^7$ лет.

4. Первый из сделанных выводов совпадает качественно с результатами работы Р. Миши [8], которая выполнена посредством машинных вычислений.

В заключение выражаю глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство и весьма ценные указания при выполнении данной работы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР
Поступила 26 II 1965

Մ. Զ. ՀԵՅԴԱՐՈՎ

ԱՍՏՂԱԿՈՒՅՏԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԷՎՈԼՅՈՒՑԻԱՆ

Ամփոփում

Սֆերիկ աստղակույտերի կառուցվածքի և էվոլյուցիայի նկարագրության համար տրված է Ֆոկկեր-Պլանկի ընդհանրացված հավասարման լուծումը, որը թույլ է տալիս հաշվելու արագությունների կոորդինատների բաշխման ֆունկցիայի Δf փոփոխությունը փոքր t-երի համար։ Այդ ֆունկցիայի փոփոխությունը հաշվելու համար արված է այն ենթադրությունը, որ էվոլյուցիան զարգացման ընթացքը կարելի է դիտել որպես ստացիոնար վիճակների հաջորդականություն։

Քննարկված է աստղակույտերի սֆերիկ սիմետրիայի դեպքը։

Խնդիրը լուծված է 1-ին և 2-րդ մոտավորությամբ։

Առաջին մոտավորությունը տալիս է

$$\Delta f = 3\eta \left(2Q_0 - \sigma_1 - \frac{4}{3} \alpha \sigma_2 c^2 e^{2E} \right) f_0^{(0)} \Delta t$$

որտեղ η-ն դինամիկական շփման գործակիցն է, σ_1-ն, σ_2-ն և α-ն հաստատուն են, $Q_0(E)$-ն խզվող ֆունկցիա է, որը 0 է դառնում, երբ էներգիան հավասար է կրիտիկական էներգիային ($E = E_{+\infty}$), իսկ $f_0^{(0)}(E)$-ն մաքսվելյան բաշխման ֆունկցիան է։

Որոշված է նաև տարածական խտության փոփոխությունը։

Ստացված արդյունքները հաստատում են Վ. Հ. Համբարձումյանի [2] *տեսությունը աստղակույտերի քայքայման մասին։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Росселанд С.* Астрофизика на основе теории атома. Гостехиздат, М.—Л., 1936.
2. *Амбарцумян В. А.* Научные Труды, тт. 1 и 2. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1960.
3. *Spitzer L.* and *Schwarzschild M.* The possible influence of interstellar clouds on stellar velocities. Ap. J., **118**, № 1, 1953, 106.
4. *Амбарцумян В. А.* Об эволюции звездных систем. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961, 163.
5. *King I.* 1. Calculation for a centrally concentrated model. 2. A simple theory of the evolution of an isolated cluster. A. J., **63**, № 4, 1958, 109, 114.
6. *King I.* Expansion versus contraction in the evolution of an star cluster. A. J., **63**, № 11, 1958, 465.
7. *Чандрасекар С.* Принципы звездной динамики. ИЛ., М., 1948.
8. *Michie R. W.* Structure and evolution of globular clusters. Ap. J. **133**, № 3, 1960, 781.
9. *Spitzer L.* The stability of isolated clusters. M. N., **100**, № 5, 1940, 396.
10. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ., М., 1947.
11. *Скабицкий И. Н.* Применение кинетического уравнения к звездным системам. Ученые записки ЛГУ, серия мат. наук, астрономия, **15**, вып. 22, 1950, 10.
12. *Кузмин Г. Г.* Эффект сближений звезд и эволюция звездных скоплений. Публикации Тартуской астрон. обсерв., **33**, № 2, 1957, 75.
13. *Kurth R.* Introduction to the mechanics of stellar systems. London—New York—Parus, 1957.
14. *Michie R. W.* 1. On the distribution of high energy stars in spherical stellar systems. M. N., **125**, № 2, 1963, 127. 2. The relative loss of stars with different mass. M. N., **126**, № 4, 1963, 331.
15. *Chandrasekhar S.* 1. General considerations: The coefficient of dinamical friction. 2. The rote of escape of stars from clusters and the evidence for the operation of dinamical fraction. Ap. J., **97**, № 2, 1943, 255, 263.
16. *Chandrasekhar S.* A more exact theory of the rate of escape of stars from clusters. A. J., **98**, № 1, 1943, 54.
17. *Spitzer L.* and *Härm R.* Evaporation of stars form isolated clusters. Ap. J., **127**, 1958, 544.
18. *Агекян Т. А.* Звездные системы, в сб. „Курс астрофизики и звездной астрономии", том. 2. Физматгиз, М., 1962.
19. *Огородников К. Ф.* Динамика звездных систем. Физматгиз, М., 1958.
20. *Идлис Г. М.* Структура и динамика звездных систем. Изд. АН Казахской ССР, Алма-Ата, 1961.
21. *Паренаго П. П.* Курс звездной астрономии. Гостехтеориздат, М., 1954.
22. *Линдблад Б.* Динамика Галактики, в сб. „Строение звездных систем". ИЛ., М. 1962.
23. *Rosenbluth M. N.* and... Fokker-Planck equation for an inverse-square force. Phys. Rev., **107**, № 1, 1957, 1.
24. *Де Гроот С.* и *Мазур П.* Неравновесная термодинамика. Изд. „Мир", М., 1964.
25. *Маркарян Б. Е.* Об эволюции открытых звездных скоплений. Сообщения Бюраканской обсерватории, **12**, 1954, 3.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 6, 1965 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

М. П. ЛОРИКЯН

К ВОПРОСУ ИОНИЗАЦИОННЫХ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Согласно работам [1, 2, 3], при входе релятивистской частицы из вакуума в вещество в граничном тонком слое поляризация среды на ионизационные потери энергии не влияет. Для практического применения этого эффекта важно знать оптимальную толщину вещества, в которой еще влияние эффекта плотности не существенно. Для точного определения величины этой толщины необходимо производить измерения роста ионизационных потерь энергии при разных толщинах пленок с целью нахождения порога, когда начинает проявляться эффект плотности. Величину этой толщины можно оценить не производя такие измерения, а зная экспериментальный рост ионизационных потерь энергии при некоторой толщине пленки, когда влияние эффекта плотности заметно уменьшает эти потери.

Для этого разделим ионизационные потери энергии частицы на две части. Одна часть — в граничном слое толщиной d, где влияние поляризации не ощутимо, и другая часть — в остальной толщине поглотителя. Обозначая общую толщину поглотителя через a, величину потерь энергии в пластинке через $W(p)$, можно написать

$$W(p) = d\,\frac{dE(p)}{dx} + (a-d)\,\frac{dE}{dx}. \tag{1}$$

Переписав последнее уравнение один раз для импульса P_1 и другой раз для P_2, вычтем из первого уравнения второе. Тогда учитывая, что на части пути частицы $a-d$ ионизационные потери энергии не зависят от импульса, для прироста ионизационных потерь энергии в интервале импульса p_1, p_2 получим

$$\Delta = d\delta, \tag{2}$$

где $\Delta = W(p_1) - W(p_2)$ — рост ионизационных потерь энергии в толщине a (экспериментально измеренный), $\delta = \frac{dE(p_1)}{dx} - \frac{dE(p_2)}{dx}$ - рост ионизационных потерь энергии, когда эффект поляризации равен нулю.

Из соотношения (2) для d получим

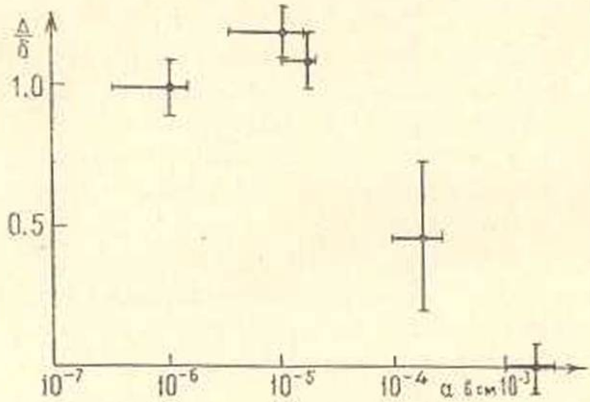
$$d = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{3}$$

Очевидно, что соотношение (1) приближенное, так как такое резкое разделение поглотителя на две части, какое было сделано, не справедливо и полученное значение d следует принимать как ориентировочное.

Следует отметить, что формула (3) применима только тогда, когда $\Delta < \delta$, так как случай $\Delta = \delta$ удовлетворяется для всех толщин пленок, меньших оптимальной величины.

Результаты измерения

Измерения производились на линейном электронном ускорителе физического института АН УССР, в интервале импульсов 20—90 *Мэв/с*. Подробное описание методики измерений приведено в работах [2, 3].



Фиг. 1. Зависимость относительного роста ионизационных потерь энергии электронов в полистироле от толщины пленки. По оси абсцисс отложена толщина пленки в *см*, а по оси ординат— отношение экспериментального роста к теоретическому.

В табл. 1 приведены отношения экспериментальных и теоретических значений ростов ионизационных потерь энергии электронов при разных толщинах полистирола. За теоретическую величину взяты значения роста по формуле Бете-Блоха без учета поляризации („чистый рост"), а экспериментальные значения ростов вычислены по методу наименьших квадратов.

Таблица 1

a в *см*	10^{-6}	10^{-5}	2.10^{-5}	2.10^{-4}	2.10^{-3}
$\frac{\Delta}{\delta}$	$1,0 \pm 0,05$	$1,2 \pm 0,05$	$1,1 \pm 0,04$	$0,47 \pm 0,24$	$0,0 \pm 0,05$

Подставляя в (3) значение роста, для толщины пленки 2.10^{-4} *см* и учитывая, что толщины пленок определялись с точностью $\pm 50\%$, получим $d = 0,94 \cdot 10^{-4} \pm 0,66 \cdot 10^{-4}$ *см*.

Автор выражает благодарность Г. М. Гарибяну за обсуждение езультатов.

Физический институт ГКАЭ Поступила 23 VII 1964

Մ. Գ. ԼՈՐԻԿՅԱՆ

ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ԷՆԵՐԳԻԱՅԻ ԻՈՆԻԶԱՑԻՈՆ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում են ռելյատիվիստիկ էլեկտրոնների էներգիայի իոնիզացիոն կորուստները նյութի եզրային շերտում՝ ենելով տարբեր հաստության շերտերում էլեկտրոնների իմպուլսից, կախված այդ կորուստների աճի էքսպերիմենտալ արժեքներից, պոլիստիրոլի համար գնահատվում է եզրային օպտիմալ հաստությունը, որում քննացման ազդեցությունը դեռ չի նկատվում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарибян Г. М.* К теории переходного излучения и ионизационных потерь энергии частиц. ЖЭТФ, **37**, 527, 1959.
2. *Алиханян А. И.* и другие. Ионизационные потери энергии быстрых электронов в тонких пленках. ЖЭТФ, **44**, 1123, 1963.
3. *Алиханян А. И.* и другие. Ионизационные потери быстрых электронов в тонких слоях полистирола. ЖЭТФ, **46**, 1212, 1964.