

Р. И. ОСИПОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

Как известно, еще не решен вопрос о существовании для любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

универсального относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду.

Однако, А. А. Талаляном доказано [см. [1], стр. 135], что если заменить сходимость почти всюду сходимостью по мере, то вопрос о существовании рядов, универсальных относительно перестановок, будет иметь положительное решение для любых базисов пространства L_p , $p > 1$.

Ввиду трудности вышеуказанной задачи, можно рассматривать более простую, а именно задачу о существовании для любой полной ортонормированной системы (или частного класса таких систем) $\{\varphi_n(x)\}$ такого ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

что для произвольной измеримой почти всюду на отрезке $[0, 1]$ конечной функции $f(x)$ существует подряд этого ряда, который после некоторой перестановки сходится почти всюду к $f(x)$.

В настоящей статье решается частный случай этой задачи, а именно справедлива следующая

Теорема. Пусть система функций $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормирована, полна в $L^2(0, 1)$ и

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x \in \Delta_n \\ m \Delta_n &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где Δ_n — интервал, принадлежащий отрезку $[0, 1]$.

Тогда существует такая перестановка $\varphi_{k_n}(x)$, что для любой измеримой почти везде на отрезке $[0, 1]$ конечной функции $f(x)$ можно указать ряд

$$\sum a_n \varphi_{k_n}(x),$$

сходящийся почти всюду на $[0, 1]$ к ней.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. (А. А. Талалян). Пусть $\psi_0(x)$ — произвольная функция, определенная на отрезке $\Delta = [\alpha, \beta]$, принадлежащая классу $L_p(\Delta)$, $p > 1$ и равная нулю вне некоторого множества E_0 , $E_0 \subset \Delta$.

Пусть $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ — произвольные функции (n — конечно), определенные на $\Delta = [\alpha, \beta]$ и принадлежащие классу $L_q(\Delta)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых наперед заданных чисел $1 > \varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно определить ограниченную функцию $f(x)$ и множество e , обладающих следующими свойствами:

$$1) f(x) = 0 \text{ при } x \notin e, \text{ где } e \subset E_0, \text{ т.е. } \varepsilon_0 |\Delta|$$

$$2) \int_{\Delta} |f(x)|^p dx \leq \varepsilon_0^{\frac{1}{p-1}} \int_{\Delta} |\psi_0(x)|^p dx$$

$$3) \left| \int_{\Delta} [\psi_0(x) - f(x)] \psi_k(x) dx \right| < \varepsilon \quad 1 \leq k \leq n.$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ — конечная система функций, ортогональных в интервале $[0, 1]$, $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ — перестановка чисел $(1, 2, \dots, m)$

$$S_\nu(x, \sigma) = \sum_{i=1}^m \Phi_{k_i}(x) \text{ и } S_m^*(x, \sigma) = \max_{1 \leq \nu \leq m} |S_\nu(x, \sigma)|.$$

Лемма 2. (Garzia). Для каждой системы ортогональных функций $\Phi_1(x), \dots, \Phi_m(x)$ мы имеем

$$\frac{1}{m!} \sum_{\sigma} \int_0^1 S_m^*(x, \sigma) dx \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m \int_0^1 \Phi_i^2 dx \right]^{1/2},$$

где первая сумма берется по всем перестановкам.

Доказательство леммы 1 и леммы 2 можно найти соответственно в работах [1], [2].

Лемма 3. Каковы бы ни были функция $F(x) \in L^2(0, 1)$ ($F(x) = 0$, $x \in E \subset [0, 1]$), числа $\tau > 0$, $\delta > 0$, существуют множество $\tilde{E}$, ступенчатая функция $\psi(x)$, значения и концы интервалов постоянства которой — рациональные числа и

$$1) m(\Delta(\psi(x) \neq 0) - E) < \frac{\delta}{2}, \quad m(E - \Delta(\psi(x) \neq 0)) < \frac{\delta}{2}$$

$$2) |\psi(x) - F(x)| < \tau \quad x \in \tilde{E} \quad m\tilde{E} > 1 - \delta$$

$$3) |\psi(x)| \leq \sup |F(x)|.$$

Лемма 4. Пусть даны

а) произвольная полная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая условию (1),

в) функция $\varphi(x) \in L^2(0, 1)$, причем $\varphi(x) = 0$, $x \in E \subset [0, 1]$, $mE > 0$,

с) натуральное число n , числа $\gamma > 0$, $\eta > 0$.

Тогда существуют множества P, Q , натуральные числа $N \geq n$ и m , перестановка $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ чисел $(N+1, N+2, \dots, N+m)$, числа $a_1, \dots, a_m$ такие, что

$$1) P \subset CE \quad m(CE - P) < \eta$$

$$2) mQ > 1 - \eta$$

$$3) a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x) = 0 \quad x \in P \quad i = 1, \dots, m$$

$$4) |a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x)| \leq \frac{100}{1/\eta^3} \|\varphi\| \quad x \in Q \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$5) |a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_m \varphi_{k_m}(x) - \varphi(x)| < \gamma \quad x \in Q.$$

Здесь

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Лемма 3 очевидна.

Доказательство леммы 4. Нетрудно показать, что существует открытое множество $G \subset [0, 1]$, имеющее конечное число составляющих интервалов и такое, что

$$m(G - E) < \frac{\eta}{4} \quad (2)$$

$$m(E - G) < \frac{\eta}{4}. \quad (3)$$

В силу условия (1) можно указать настолько большое натуральное число N , что если $\{\Delta_{k_i}\}$ — совокупность всех тех интервалов из $\{\Delta_n\}$, для которых

$$k_i \geq N \\ m\Delta_{k_i}G > 0, \quad (4)$$

то

$$m(G_1 - G) < \frac{\eta}{2}, \quad (5)$$

где $G_1 = \sum_{i=N}^{\infty} \Delta_{k_i}$.

Обозначим множество $\sum_{i=N}^{\infty} \Delta_{k_i}$ через Δ и рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \in G \\ 0 & x \notin G. \end{cases} \quad (6)$$

Выберем число $\gamma_0 > 0$ настолько малым, что для каждого x из некоторого множества A , для которого

$$mA > 1 - \frac{\eta}{8}, \quad (7)$$

справедливо следующее неравенство

$$\gamma_0 \{ |\varphi_1(x)| + \dots + |\varphi_N(x)| \} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8)$$

Это возможно в силу того, что функции $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) почти везде конечные.

Далее положим в лемме 1 $[a, \beta] = [0, 1]$; $p = q = 2$, $E_0 = GE$, $\psi_0(x) \equiv F(x)$; $\psi_1(x) \equiv \varphi_1(x), \dots$, $\psi_n(x) \equiv \varphi_N(x)$, $\varepsilon = \gamma$, $\varepsilon_0 = \frac{\eta}{4}$.

Пусть ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x) \quad (9)$$

является рядом Фурье функции $\Phi(x) \equiv \psi_0(x) - f(x)$.

Из (7), (8) и п. 3) леммы 1 следует

$$|c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_N \varphi_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

на множестве A с $mA > 1 - \frac{\eta}{8}$.

Возьмем число $N + m$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^1 (S_{N+m}(x) - \Phi(x))^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\eta}{8} \quad (11)$$

(где $S_{N+m}(x)$ — частная сумма ряда (9)), откуда будет следовать, что во всех точках некоторого множества B , для которого

$$mB > 1 - \frac{\eta}{8}, \quad (12)$$

выполнено неравенство

$$|S_{N+m}(x) - \Phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Для множества $P \equiv [0, 1] - (G_1 + E)$ имеем, что $P \subset CE$ и далее

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \Delta_{k_i} + E \equiv (G_1 - G) + G + E. \quad (14)$$

Из (2), (5) и (14) следует, что

$$m(G_1 + E) < \frac{\eta}{2} + mE + \frac{\eta}{4} < mE + \eta, \quad (15)$$

откуда получаем

$$mP > 1 - mE - \eta = mCE - \eta \quad (16)$$

и, следовательно, $m(CE - P) < \eta$, т. е. п. 1) леммы 4 доказан.

Далее, при любом $i > N$ $c_i \varphi_i(x) = 0$ при $x \in P$.

В самом деле, или $\Delta_i G = 0$ и тогда из (6) следует, что $c_i = 0$, или если $\Delta_i G \neq 0$ (но $\Delta_i \subset G_1$ и, следовательно, $\Delta_i P = 0$), то из (!) следует, что $\varphi_i(x) = 0$ при $x \in P$, т. е.

$$\sum_{i=N+1}^{N+s} c_i \varphi_i(x) = 0 \quad x \in P \quad s = 1, 2, \dots, \quad (17)$$

откуда вытекает справедливость п. 3) леммы 4.

А из (10), (12), (13) следует

$$|c_{N+1} \varphi_{N+1}(x) + \dots + c_{N+m} \varphi_{N+m}(x) - \Phi(x)| < \varepsilon. \quad (18)$$

Но $\Phi(x) \equiv F(x)$ при $x \in e$ и далее из (6) следует, $\Phi(x) \equiv \varphi(x)$ при $x \in e + (E - G) \equiv P_0$ и, учитывая (18), получаем

$$|c_{N+1} \varphi_{N+1}(x) + \dots + c_{N+m} \varphi_{N+m}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad (19)$$

при $x \in (CP_0) \cdot A \cdot B$.

Далее, полагая в лемме 2 $\Phi_1(x) \equiv c_{N+1} \varphi_{N+1}(x), \dots, \Phi_m(x) \equiv c_{N+m} \varphi_{N+m}(x)$, получим некоторую перестановку $\sigma = (k_1, \dots, k_m)$ чисел $(N+1, \dots, N+m)$ такую, что

$$\int_0^1 S_m(x, \varepsilon) dx \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m c_{N+i}^2 \right]^{1/2} \leq 4 \left[\sum_{i=1}^m c_{N+i}^2 \right] = 4 \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (20)$$

Затем, учитывая п. 2 леммы 1, (6) и следующее неравенство

$$\int_0^1 |\phi_0(x) - f(x)|^2 dx \leq 2^2 \left(\int_0^1 \phi_0^2 dx + \int_0^1 f^2 dx \right).$$

получаем из (20)

$$\begin{aligned} \int_0^1 S_m(x, \varepsilon) dx &\leq 4 \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{1/2} = 4 \left\{ \int_0^1 |\phi_0(x) - f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq 8 \left[\frac{4 + \eta}{\eta} \int_0^1 \phi_0^2 dx \right]^{1/2} \leq \frac{25}{\sqrt{\eta}} \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует

$$S_m^*(x, \sigma) \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \left(\int_0^1 \varphi^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (22)$$

на некотором множестве R $mR > 1 - \frac{\eta_1}{4}$.

Учитывая (3), (7), (12), (19) и (22), получаем, что для всех точек множества $Q \equiv R(CP_0)A \cdot B$ справедливы неравенства

$$|a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_i \varphi_{k_i}(x)| \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \|\varphi\| \quad i = 1, \dots, m$$

$$|a_1 \varphi_{k_1}(x) + \dots + a_m \varphi_{k_m}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon = \eta_1,$$

где $a_i = c_{k_i}$, $i = 1, \dots, m$ и $mQ > 1 - \eta_1$.

Тем самым лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{\psi_i(x)\}$ — множество всех таких ступенчатых функций, концы интервалов постоянства значения которых являются рациональными числами, причем $m\Delta(\psi_i(x) = 0) > 0$ для каждого i . Очевидно, что множество этих функций счетно.

Фиксируем последовательности $\eta_j \rightarrow 0$, $\gamma_j \rightarrow 0$, $\eta_j > 0$, $\gamma_j > 0$. Рассмотрим множество $[\psi(x), \eta, \gamma]$, зависящее от трех параметров. Пусть η пробегает множество $\{\eta_j\}$, γ — множество $\{\gamma_j\}$.

Перенумеровав это множество, мы можем представить его в виде последовательности $[\psi_1(x), \eta_1, \gamma_1], [\psi_2(x), \eta_2, \gamma_2], \dots$. Далее положим в лемме 4 $\varphi(x) \equiv \psi_1(x)$, $\gamma = \gamma_1$, $\eta = \eta_1$ и $n = 0$ и получим множества P_1 , Q_1 , натуральные числа $N_1 \geq 0$ и m_1 , перестановки $\sigma_1 = (k_{1,1}, \dots, k_{m_1,1})$ чисел $(N_1 + 1, \dots, N_1 + m_1)$, числа $a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}$ такие, что

$$P_1 \subset CE_1 \quad m(CE_1 - P_1) < \eta_1 \quad E_1 \equiv \Delta(\psi_1(x) \neq 0) \quad (23)$$

$$mQ_1 > 1 - \eta_1 \quad (24)$$

$$a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_{m_1}^{(1)} \varphi_{k_{m_1,1}}(x) = 0 \quad x \in P_1, \quad j = 1, \dots, m_1 \quad (25)$$

$$|a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_j^{(1)} \varphi_{k_{j,1}}(x)| \leq \frac{100}{\eta_1^{3/2}} \|\psi_1\| \quad x \in Q_1, \quad j = 1, \dots, m_1 \quad (26)$$

$$|a_1^{(1)} \varphi_{k_{1,1}}(x) + \dots + a_{m_1}^{(1)} \varphi_{k_{m_1,1}}(x) - \psi_1(x)| < \gamma_1 \quad x \in Q_1 \quad (27)$$

Пусть уже определены числа $N_1, N_2, \dots, N_i; m_1, \dots, m_i; a_1^{(1)}, \dots, a_{m_1}^{(1)}, \dots, a_1^{(i)}, \dots, a_{m_i}^{(i)}$, множества $P_1, \dots, P_i; Q_1, \dots, Q_i$ и соответствующие перестановки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i$.

Далее поступаем следующим образом.

Полагаем в лемме 4 $\varphi(x) \equiv \psi_{i+1}(x)$, $\gamma = \gamma_{i+1}$, $\eta = \eta_{i+1}$ и $n = N_i + m_i$.

Тогда получим множества P_{i+1} , Q_{i+1} , натуральные числа N_{i+1} , m_{i+1} , перестановку $\sigma_{i+1} = (k_{1, i+1}, \dots, k_{m_{i+1}, i+1})$ чисел $(N_{i+1} + 1, \dots, N_{i+1} + m_{i+1})$, числа $a_1^{(i+1)}, \dots, a_{m_{i+1}}^{(i+1)}$ такие, что

$$P_{i+1} \subset CE_{i+1}, \quad m(CE_{i+1} - P_{i+1}) < \eta_{i+1}, \quad E_{i+1} \equiv \Delta(\psi_{i+1}(x) \neq 0), \quad (28)$$

$$mQ_{i+1} > 1 - \eta_{i+1}, \quad (29)$$

$$a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_j^{(i+1)} \varphi_{k_{j, i+1}}(x) \equiv 0 \quad x \in P_{i+1} \quad j = 1, \dots, m_{i+1}, \quad (30)$$

$$|a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_j^{(i+1)} \varphi_{k_{j, i+1}}(x)| < \frac{100}{\eta_{i+1}^{1/2}} \|\psi_{i+1}\|$$

$$x \in Q_{i+1} \quad j = 1, \dots, m_{i+1}, \quad (31)$$

$$|a_1^{(i+1)} \varphi_{k_{1, i+1}}(x) + \dots + a_{m_{i+1}}^{(i+1)} \varphi_{k_{m_{i+1}, i+1}}(x) - \psi_{i+1}(x)| < \gamma_{i+1} \quad x \in Q_{i+1}. \quad (32)$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, получим такие последовательности чисел $\{N_i\}$, $\{m_i\}$; $\{a_1^{(i)}, \dots, a_{m_i}^{(i)}\}$, множеств $\{P_i\}$, $\{Q_i\}$ и перестановок $\{\sigma_i\}$, что справедливы соотношения (28)–(32) для любого натурального i .

Мы получим искомую перестановку $\{\varphi_{k_n}(x)\}$, если положим

$$k_{N_i + m_i + j} = N_i + m_i + j \quad 1 \leq j \leq N_{i+1} - N_i - m_i \quad i = 0, 1, \dots$$

$$k_{N_i + j} = k_{j, i} \quad 1 \leq j \leq m_i \quad i = 1, 2, \dots$$

Докажем справедливость этого утверждения.

Введем обозначение

$$\Phi_{i, j}(x) \equiv a_1^{(i)} \varphi_{k_{1, i}}(x) + \dots + a_j^{(i)} \varphi_{k_{j, i}}(x) \quad x \in [0, 1]. \quad (A)$$

Пусть $f(x)$ — произвольная измеримая и почти везде на отрезке $[0, 1]$ конечная функция и числа $\varepsilon_i \downarrow 0$ таковы, что

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i < \infty. \quad (33)$$

Пусть $f_0(x) \in L^2(0, 1)$ и $B_0 \equiv \Delta(f_0(x) = f(x)) \quad mB_0 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (34)$

и m_0 настолько велико, что

$$\int_0^1 (S_{m_0}(x) - f_0(x))^2 dx < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^5,$$

откуда следует, что

$$|S_{m_0}(x) - f_0(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \quad (35)$$

на некотором множестве A_0 , для которого

$$mA_0 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8}, \quad (36)$$

где $S_{m_0}(x)$ — m_0 -ая частная сумма ряда Фурье функции $f_0(x)$.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f(x) - S_{m_0}(x) \quad x \in [0, 1] \\ \Gamma_1(x) &= \begin{cases} g_1(x) & x \in R_0 \equiv A_0 \cdot B_0 \\ 0 & x \notin R_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (37)$$

Из (35), (36) и (37) следует, что

$$|\Gamma_1(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \quad x \in [0, 1]. \quad (38)$$

Положим в лемме 3 $F(x) \equiv \Gamma_1(x)$, $E \equiv R_0$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$

и определим множество $A_1 \equiv \tilde{E}$ и ступенчатую функцию $\psi(x)$ так, что

$$|\psi(x) - \Gamma_1(x)| < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in A_1 \quad mA_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{8} \quad (39)$$

$$|\psi(x)| < \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \text{ и, следовательно, } \|\psi\| \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2. \quad (40)$$

Выберем n_1 таким, что $\psi_{n_1}(x) \equiv \psi(x)$,

$$\eta_{n_1} = \frac{\varepsilon_0}{8}, \quad \gamma_{n_1} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad (41)$$

и $N_{n_1} > m_0$; тогда, положив в (29), (31) и (32) $i+1 = n_1$, получим

$$|\Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) - \psi_{n_1}(x)| \leq \gamma_{n_1} \quad x \in Q_{n_1} \quad (42)$$

$$|\Phi_{n_1, j}(x)| \leq \frac{100}{\eta_{n_1}^{1/2}} \|\psi_{n_1}\| \quad (43)$$

$$x \in Q_{n_1} \quad j = 1, \dots, m_{n_1}$$

$$mQ_{n_1} > 1 - \eta_{n_1}. \quad (44)$$

Учитывая (39)–(44), (36), (34), (37), получим

$$|\Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) - g_1(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_1 \quad (45)$$

$$|\Phi_{n_1, j}(x)| \leq \frac{100}{\tau_{n_1}^{1/2}} \left(\frac{\varepsilon_0}{8}\right)^2 \leq 25 \sqrt{\varepsilon_0} \quad x \in R_1, \quad (46)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_1}$$

где

$$R_1 = Q_{n_1} \cdot A_1 \cdot R_0, \quad mR_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} > 1 - \varepsilon_0. \quad (47)$$

Рассмотрим функцию

$$g_2(x) = g_1(x) - \Phi_{n_1, m_{n_1}}(x) \quad x \in [0, 1]. \quad (48)$$

Из (45) и (47) следует, что

$$|g_2(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_1 \quad (49)$$

$$mR_1 > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2}. \quad (50)$$

Введем еще в рассмотрение функцию

$$\Gamma_2(x) = \begin{cases} g_2(x) & x \in R_1 \\ 0 & x \in R_1^c \end{cases} \quad (51)$$

Пусть $F_0(x) \in L^2(0, 1)$ и

$$m\Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x)) > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8}, \quad (52)$$

причем

$$R_1 \subset \Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x)).$$

Определим по лемме 3, положив в ней $F(x) = F_0(x)$, $E = \Delta - R_1$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$, ступенчатую функцию $\psi(x)$ и множество $A_2 = \widetilde{E}$, для которых

$$|\psi(x) - F_0(x)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in A_2 \quad mA_2 > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (53)$$

$$m[\Delta(\psi(x) \neq 0) - E] < \frac{\varepsilon_1}{8} \quad m[E - \Delta(\psi(x) \neq 0)] < \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (54)$$

Возьмем n_2 таким, что

$$\tau_{n_2} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad \tau_{n_2} = \frac{\varepsilon_1}{8} \quad \psi_{n_2}(x) = \psi(x), \quad N_{n_2} > N_{n_1} + m_{n_1}. \quad (55)$$

Тогда, положив в (28), (29), (30) и (32) $i+1 = n_2$ и учитывая (52), (53), (54), (50), (49), получим

$$\Phi_{n_2, j}(x) = 0 \quad x \in P_{n_2}, \quad j = 1, \dots, m_{n_2} \quad (56)$$

$$|\Phi_{n_2, m_{n_2}}(x) - g_2(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in R_2, \quad (57)$$

где $R_2 \equiv Q_{n_2} \cdot A_2 \cdot \Delta(F_0(x) = \Gamma_2(x))$, и поэтому

$$mR_2 > 1 - \frac{3}{8} \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon_1 \quad (58)$$

$$P_{n_2} \subset R_1, \quad mP_{n_2} > 1 - \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_1}{4} > 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1. \quad (59)$$

Теперь рассмотрим функции

$$g_2(x) \equiv g_2(x) - \Phi_{n_2, m_{n_2}}(x) \quad x \in [0, 1] \quad (60)$$

$$\Gamma_3(x) = \begin{cases} g_2(x) & x \in R_2 \\ 0 & x \in R_2^c \end{cases} \quad (61)$$

Из (57) и (61) следует

$$|\Gamma_3(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \quad x \in [0, 1]. \quad (62)$$

Положим в лемме 3 $F(x) = \Gamma_3(x)$, $E = R_2$, $\tau = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2$, $\delta = \frac{\varepsilon_1}{8}$

и определим множество $A_3 \equiv \tilde{E}$ и ступенчатую функцию $\psi(x)$ так, что

$$|\psi(x) - \Gamma_3(x)| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2 \quad x \in A_3, \quad mA_3 > 1 - \frac{\varepsilon_1}{8} \quad (63)$$

$$|\psi(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 \text{ и, следовательно, } \|\psi\| \leq \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2. \quad (64)$$

Возьмем n_3 таким, что

$$\psi_{n_3}(x) \equiv \psi(x), \quad \eta_{n_3} = \frac{\varepsilon_1}{8}, \quad \gamma_{n_3} < \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2, \quad N_{n_3} > N_{n_2 + m_{n_2}}. \quad (65)$$

Тогда, положив в (29), (31) и (32) $l+1 = n_3$ и учитывая (63), (64), (65), (58), (61), получим

$$|\Phi_{n_3, j}(x)| \leq \frac{100}{\eta_{n_3}^2} \left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)^2 < 25\sqrt{\varepsilon_1} \quad x \in R_2, \quad j = 1, \dots, m_{n_3} \quad (66)$$

$$|\Phi_{n_3, m_{n_3}}(x) - g_2(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_2}{8}\right)^2 \quad x \in R_2, \quad (67)$$

где

$$R_3 \equiv Q_{n_3} \cdot A_3 \cdot R_2, \quad mR_3 > 1 - \frac{5}{8} \varepsilon_1 > 1 - \varepsilon_1. \quad (68)$$

Продолжим этот процесс до бесконечности, тогда получим последовательности $\{n_s\}$, $\{g_s(x)\}$ множеств $\{R_s\}$ такие, что

$$g_{s+1}(x) \equiv g_s(x) - \Phi_{n_s, m_{n_s}}(x), \quad (69)$$

$$\Phi_{n_{2s}, j}(x) \equiv 0 \quad x \in P_{n_{2s}}, \quad (70)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_{2s}} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$|\Phi_{n_{2s}, m_{n_{2s}}}(x) - g_{2s}(x)| < \left(\frac{\varepsilon_s}{8}\right)^2, \quad (71)$$

$$x \in R_{2s} \quad s = 1, 2, \dots$$

$$mR_{2s} > 1 - \frac{3}{8}\varepsilon_s > 1 - \varepsilon_s \quad mP_{n_{2s}} > 1 - \frac{\varepsilon_s - 1}{2} - \frac{\varepsilon_s}{8} > 1 - \varepsilon_s - 1 - \varepsilon_s, \quad (72)$$

$$s = 1, 2, \dots$$

$$|\Phi_{2s+1, j}(x)| < 25\sqrt{\varepsilon_s} \quad x \in R_{2s+1}, \quad (73)$$

$$j = 1, \dots, m_{n_{2s+1}} \quad s = 0, 1, \dots$$

$$|\Phi_{2s+1, m_{n_{2s+1}}}(x) - g_{2s+1}(x)| < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{s+1}}{8}\right)^2 \quad x \in R_{2s+1} \quad (74)$$

$$s = 0, 1, \dots$$

$$mR_{2s+1} > 1 - \frac{5}{8}\varepsilon_s > 1 - \varepsilon_s \quad (75)$$

$$s = 0, 1, \dots$$

А теперь докажем, что ряд

$$s_m(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{l, m_{n_l}}(x), \quad (76)$$

который следует понимать в раскрытом виде по формуле (А), сходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и для него выберем настолько большое натуральное число i_0 , что

$$2 \sum_{j=i_0}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon, \quad (77)$$

и рассмотрим множество

$$R = \prod_{s=i_0+1}^{\infty} (P_{n_{2s}} R_{2s+1} R_{2s}), \quad (78)$$

Учитывая (72), (75), (77), находим, что

$$mR > 1 - \varepsilon, \quad (79)$$

Из (70), (71) и (78) следует, что

$$\Phi_{2i, j}(x) \equiv 0 \quad x \in R \quad i > i_0 + 1, \quad (80)$$

$$j = 1, 2, \dots, m_{n_{2i}}$$

$$|\Phi_{2i+1, m_{2i+1}}(x)| \leq \left(\frac{\varepsilon_i}{8}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{8}\right)^2 \quad x \in R \quad i \geq i_0 = 1, \quad (81)$$

т. е. ряд $\sum_{p=2(i_0+1)}^{\infty} |\Phi_p, m_{n_p}(x)|$ мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2 \left[\left(\frac{\varepsilon_i}{8}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{i+1}}{8}\right)^2 \right] \quad \text{для } x \in R.$$

Но из (73) следует

$$|\Phi_{2s+1, j}(x)| \leq 25\sqrt{\varepsilon_s} \quad x \in R, \quad (82)$$

$$j = 1, 2, \dots, m_{n_{2s+1}} \quad s = i_0 + 1, \dots$$

а из (80) и (82) следует

$$\left| S_{m_i}(x) + \sum_{l=1}^{v-1} \Phi_{l, m_{n_l}}(x) + \Phi_{v, j}(x) \right| \leq \begin{cases} \left| S_{m_i}(x) + \sum_{p=1}^{v-1} \Phi_{p, m_{n_p}}(x) \right| & v - \text{четное} \\ \left| S_{m_i}(x) + \sum_{p=1}^{v-1} \Phi_{p, m_{n_p}}(x) \right| + 25\sqrt{\frac{\varepsilon_{i+1}}{2}} & v - \text{нечетное} \end{cases}$$

Учитывая, что $\varepsilon_i \rightarrow 0$, получаем сходимость ряда (76) на множестве R , но из произвольности ε и (79) следует сходимость почти всюду на отрезке $[0, 1]$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и советы при ее решении.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13.11.1959

Ռ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՉԱՓԵԼԻ ՀԱՆՐԱՅԻՆՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՅՈՒՄԸ ՇԱՐՔԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում արաբուզված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ: Դիցուք $|\varphi_n(x)| \in L^2(0, 1)$ -ում լրիվ և օրթոնորմավորված ֆունկցիաների սիստեմ է, և

$$\varphi_n(x) = 0, \text{ երբ } x \notin \Delta_n$$

$$m\Delta_n \rightarrow 0,$$

որտեղ Δ_n -ը $[0, 1]$ -ին պատկանող ինտերվալ է:

Այդ դեպքում տեղի ունի անպիսի $\varphi_{k_n}(x)$ տեղափոխություն, որ կամ

թիւն չափելի և $[0, 1]$ -ում համարյա ամենուրեք վերջավոր $f(x)$ ֆունկցիայի համար կարելի է նշել

$$\sum a_n \tilde{\varphi}_{k_n}(x) \text{ շարքը}$$

որը համարյա ամենուրեք $[0, 1]$ -ում դուրսագրւում է $f(x)$ -ին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Таманян А. А. Представление измеримых функций рядами. Успехи мат. наук, 15, № 5, 1960, 77—141.
2. Adriano M. Garsia, Existence of almost everywhere convergent rearrangements for Fourier series of L_2 functions, Annals of mathematics, vol 79, № 3, 1964, p. 623.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ
 ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Рассматривается задача об упругом равновесии прямоугольного параллелепипеда, когда граничные условия на поверхности параллелепипеда заданы в перемещениях. Подобная задача была рассмотрена в работе Э. Н. Байды [1], где задача сведена к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Сначала общая задача приведена к шести аналогичным задачам, в которых перемещения равны нулю на пяти гранях и отличны от нуля только на шестой грани. Затем каждая из этих задач в свою очередь разбита на две: а) когда на шестой грани $u = v = 0$; $w \neq 0$, б) $u \neq 0$; $v \neq 0$; $w = 0$. Чтобы обеспечить разрешимость бесконечных систем, автор предполагает, что коэффициенты Фурье граничных функций являются величинами порядка не ниже $(lm\sqrt{n^2 + m^2})^{-1}$. Сходимость рядов исследуется только в открытой области.

В данной работе эта задача сводится к решению вполне регулярных бесконечных систем и доказывается, что, если граничные значения перемещений — непрерывные функции, то бесконечная система имеет решение, а ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, сходятся в замкнутой области $(-a \leq x \leq a; -b \leq y \leq b; -c \leq z \leq c)$.

§ 1. Находим компоненты вектора смещений $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$, которые внутри области $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям Ляме

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= 0; & \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= 0; \\ \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

и имеют вид:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y; \end{aligned}$$

$$v = v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y; \quad (12)$$

$$w = w_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(3)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

где

$$u_0 = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z; \quad v_0 = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z; \\ w_0 = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Учитывая, что при отсутствии объемных сил перемещения являются бигармоническими функциями, можно неизвестные функции $f_{mn}^{(1)}(x)$, $\dots$, $\Psi_{lm}^{(3)}(z)$, входящие в выражения (2), представить в следующем виде:

$$f_{mn}^{(1)}(x) = A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn} x + B_{mn}^{(1)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(1)} k_{mn} x \operatorname{ch} k_{mn} x, \\ \varphi_{ln}^{(i)}(y) = M_{ln}^{(i)} \operatorname{sh} k_{ln} y + N_{ln}^{(i)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y, \\ (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

$$\Psi_{lm}^{(i)}(z) = K_{lm}^{(i)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(i)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + G_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z,$$

где

$$k_{mn} = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{ln} = \sqrt{\alpha_l^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{lm} = \sqrt{\alpha_l^2 + \beta_m^2}, \quad (14)$$

$A_{mn}^{(1)} \dots G_{lm}^{(i)}$ — постоянные интегрирования, между которыми существуют следующие соотношения:

$$k_{mn} A_{mn}^{(1)} + (3 - 4\nu) K_{mn} D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} = 0, \quad k_{mn} D_{mn}^{(3)} + \gamma_n C_{mn}^{(1)} = 0, \\ k_{mn} B_{mn}^{(1)} + (3 - 4\nu) k_{mn} C_{mn}^{(1)} + \beta_m A_{mn}^{(2)} + \gamma_n A_{mn}^{(3)} = 0, \quad k_{mn} C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0, \\ \beta_m D_{mn}^{(3)} - \gamma_n D_{mn}^{(2)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(1)} - \alpha_l F_{ln}^{(3)} = 0, \quad \alpha_l H_{lm}^{(2)} - \beta_m H_{lm}^{(1)} = 0, \quad (15) \\ \beta_m C_{mn}^{(3)} - \gamma_n C_{mn}^{(2)} = 0, \quad \gamma_n E_{ln}^{(1)} - \alpha_l E_{ln}^{(3)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(2)} - \beta_m G_{lm}^{(1)} = 0, \\ k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3 - 4\nu) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n E_{ln}^{(2)} + k_{ln} F_{ln}^{(3)} = 0, \\ k_{ln} N_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3 - 4\nu) E_{ln}^{(2)} + \alpha_l M_{ln}^{(1)} + \gamma_n M_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(3)} = 0, \\ k_{lm} K_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3 - 4\nu) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0, \\ k_{lm} L_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3 - 4\nu) H_{lm}^{(3)} + \alpha_l K_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} = 0, \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} = 0.$$

§ 2. Займемся решением задачи упругого равновесия прямоугольного параллелепипеда — $a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-c \leq z \leq c$, когда граничные условия заданы в перемещениях. Для простоты примем, что деформируемый параллелепипед имеет три плоскости симметрии $x=0$, $y=0$, $z=0$.

В силу симметрии, задачу можно решать для восьмой части параллелепипеда ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), требуя при этом, чтобы на плоскостях симметрии $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворялись условия симметрии

$$\begin{aligned} x=0 \quad u &= \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0, \\ y=0 \quad v &= \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \\ z=0 \quad w &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u &= f_1(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ v &= f_2(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \quad \text{при } x=a, \\ w &= f_3(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \quad \begin{aligned} 0 \leq y \leq b, \\ 0 \leq z \leq c, \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u &= f_4(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \quad \text{при } y=b, \\ v &= f_5(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z, \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq z \leq c, \end{aligned} \\ w &= f_6(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} u &= f_7(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \quad \text{при } z=c, \\ v &= f_8(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \quad \begin{aligned} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b; \end{aligned} \\ w &= f_9(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2a}; \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}; \quad \gamma_n = \frac{(2n-1)\pi}{2c}. \quad (2.5)$$

Неизвестные функции $f_{mn}^{(1)}(x) \dots \Psi_{lm}^{(1)}(z)$ и соотношения (1.5) для рассматриваемого случая имеют вид

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(x) &= A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn}x + D_{mn}^{(1)} k_{mn}x \operatorname{ch} k_{mn}x, \\ f_{ma}^{(1)}(x) &= B_{ma}^{(1)} \operatorname{ch} k_{mn}x + C_{ma}^{(1)} k_{mn}x \operatorname{sh} k_{mn}x, \quad (i=2, 3); \\ \varphi_{ln}^{(2)}(y) &= M_{ln}^{(2)} \operatorname{sh} k_{ln}y + F_{ln}^{(2)} k_{ln}y \operatorname{ch} k_{ln}y, \\ \varphi_{la}^{(2)}(y) &= N_{ln}^{(2)} \operatorname{ch} k_{ln}y + E_{ln}^{(2)} k_{ln}y \operatorname{sh} k_{ln}y, \quad (i=1, 3); \\ \Psi_{lm}^{(3)}(z) &= k_{lm}^{(3)} \operatorname{sh} k_{lm}z + G_{lm}^{(3)} k_{lm}z \operatorname{ch} k_{lm}z, \\ \Psi_{la}^{(3)}(z) &= L_{lm}^{(3)} \operatorname{ch} k_{lm}z + H_{lm}^{(3)} k_{lm}z \operatorname{sh} k_{lm}z, \quad (i=1, 2); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$C_{ma}^{(2)} = -\frac{\beta_m}{k_{mn}} D_{mn}^{(1)}, \quad k_{ma} A_{mn}^{(1)} + (3-4\nu) D_{mn}^{(1)} k_{mn} + \beta_m B_{ma}^{(2)} + \gamma_n B_{ma}^{(3)} = 0,$$

$$C_{ma}^{(3)} = -\frac{\gamma_n}{k_{mn}} D_{mn}^{(1)}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{k_{ln}} F_{ln}^{(2)}, \quad E_{ln}^{(3)} = -\frac{\gamma_n}{k_{ln}} F_{ln}^{(2)},$$

$$k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (3-4\nu) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} = 0, \quad (2.7)$$

$$k_{lm} K_{lm}^{(3)} + k_{lm} (3-4\nu) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} = 0,$$

$$H_{lm}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{k_{lm}} G_{lm}^{(3)}, \quad H_{lm}^{(2)} = -\frac{\beta_m}{k_{lm}} G_{lm}^{(3)},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Удовлетворив граничным условиям (2.2, 2.3, 2.4), получим ряд соотношений между коэффициентами интегрирования $A_{mn}^{(1)} \dots G_{lm}^{(3)}$. Разрешим эти соотношения вместе с (1.5) относительно неизвестных постоянных. Для последних получим выражения

$$D_{ma}^{(1)} = \frac{X_{mn}}{\beta_m \gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}a}, \quad C_{ma}^{(2)} = -\frac{X_{mn}}{\gamma_n k_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn}a},$$

$$C_{ma}^{(3)} = -\frac{X_{mn}}{\beta_m k_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn}a},$$

$$B_{ma}^{(2)} = a \operatorname{th} k_{mn}a \frac{X_{mn}}{\gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}a} + \frac{b_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn}a}, \quad F_{ln}^{(2)} = \frac{Y_n}{\alpha_l \gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln}b},$$

$$B_{ma}^{(3)} = a \operatorname{th} k_{mn}a \frac{X_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}a} + \frac{c_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn}a}, \quad E_{ln}^{(3)} = -\frac{b}{a} \frac{Y_{ln}}{\alpha_l k_{ln}^2 \operatorname{ch} k_{ln}b},$$

$$A_{ma}^{(1)} = -[(3-4\nu) + k_{ma}a \operatorname{th} k_{mn}a] \frac{X_{mn}}{\beta_m \gamma_n k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}a} - \frac{\beta_m b_{mn} + \gamma_n c_{mn}}{k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn}a},$$

$$N_{ln}^{(1)} = \frac{b^2}{a} \operatorname{th} k_{ln}b \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln}b} + \frac{d_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln}b}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{b}{a} \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln}^2 \operatorname{ch} k_{ln}b},$$

$$N_{ln}^{(1)} = \frac{b}{a} \operatorname{th} k_{ln} b \frac{Y_{ln}}{\gamma_n k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} + \frac{f_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}, \quad (2.8)$$

$$H_{lm}^{(1)} = -\frac{c}{a} \frac{Z_{lm}}{\beta_m k_{lm}^2 \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$M_{ln}^{(2)} = -\frac{b}{a} (3 - 4\nu + k_{ln} b \operatorname{th} k_{ln} b) \frac{Y_{ln}}{\gamma_n \alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} - \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n f_{ln}}{k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b},$$

$$L_{lm}^{(1)} = \frac{c^2}{a} \frac{Z_{lm}}{\beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} \operatorname{th} k_{lm} c + \frac{g_{lm}}{\operatorname{ch} k_{lm} c}, \quad H_{lm}^{(2)} = -\frac{c}{a} \frac{Z_{lm}}{\alpha_l k_{lm}^2 \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$L_{lm}^{(2)} = \frac{c^2}{a} \operatorname{th} k_{lm} c \frac{Z_{lm}}{\alpha_l k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} + \frac{h_{lm}}{\operatorname{ch} k_{lm} c}, \quad G_{lm}^{(3)} = \frac{Z_{lm}}{\alpha_l \beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c},$$

$$K_{lm}^{(3)} = -\frac{c}{a} (3 - 4\nu + k_{lm} c \operatorname{th} k_{lm} c) \frac{Z_{lm}}{\alpha_l \beta_m k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c} - \frac{\alpha_l g_{lm} + \beta_m h_{lm}}{k_{lm} \operatorname{ch} k_{lm} c}.$$

Входящие в (2.8) неизвестные постоянные X_{mn} , Y_{ln} , Z_{lm} должны быть определены из следующих систем бесконечных уравнений:

$$X_{mn} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{lmn} Y_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} b_{lmn} Z_{lm} + P_{mn} = 0 \quad (m, n = 1, 2, \dots, \infty);$$

$$Y_{ln} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{lmn} X_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Z_{lm} + Q_{ln} = 0 \quad (l, n = 1, 2, \dots, \infty); \quad (2.9)$$

$$Z_{lm} + \sum_{n=1}^{\infty} e_{lmn} X_{mn} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{lmn} Y_{ln} + G_{lm} = 0 \quad (l, m = 1, 2, \dots, \infty),$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+m} \beta_m^2 k_{mn}}{a \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right|} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}, \\ b_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+n} \gamma_n^2 k_{mn}}{a \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right|} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}, \\ c_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{l+m} \alpha_l^2 k_{ln}}{b \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right|} \frac{1}{(\beta_m^2 + k_{ln}^2)^2}, \\ d_{lmn} &= -\frac{4(-1)^{m+n} \gamma_n^2 k_{ln}}{b \left| (3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right|} \frac{1}{(\beta_m^2 + k_{ln}^2)^2}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned}
e_{lmn} &= - \frac{4(-1)^{l+n} \alpha_l^2 k_{mn}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \frac{1}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2}, \\
f_{lmn} &= - \frac{4(-1)^{n+m} \beta_m^2 k_{lm}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \frac{1}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2}, \\
P_{mn} &= \frac{\beta_m \gamma_n k_{mn}}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \left[\frac{\beta_m b_{mn} + \gamma_n c_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{th} k_{mn} a - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{l+m} \frac{\beta_m \alpha_i}{\beta_m^2 + k_{in}^2} - \frac{2}{c} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{\gamma_n \alpha_i}{\alpha_i^2 + k_{mn}^2} - a_{mn} \right], \quad (2.11) \\
Q_{ln} &= \frac{a \alpha_l \gamma_n k_{ln}}{b \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \right]} \left[\frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n f_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{th} k_{ln} b - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{l+m} \frac{\alpha_l b_{mn}}{\beta_m^2 + k_{ln}^2} - \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\gamma_n k_{lm}}{\gamma_n^2 + k_{ln}^2} - e_{ln} \right], \\
G_{lm} &= \frac{a \alpha_l \beta_m k_{lm}}{c \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{lm} c - \frac{k_{lm} c}{\operatorname{ch}^2 k_{lm} c} \right]} \left[\frac{\alpha_l g_{lm} + \beta_m h_{lm}}{k_{lm}} \operatorname{th} k_{lm} c - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{l+n} \frac{\alpha_l c_{mn}}{\gamma_n^2 + k_{lm}^2} - \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\beta_m f_{ln}}{\gamma_n^2 + k_{lm}^2} - q_{lm} \right].
\end{aligned}$$

Докажем, что бесконечные системы (2.9) вполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены.

Пользуясь подобием бесконечных систем (2.9), докажем регулярность одной из бесконечных систем. Имея ввиду обозначения (2.10), получим

$$\begin{aligned}
S_{mn} &= \sum_{l=1}^{\infty} |a_{lmn}| + \sum_{l=1}^{\infty} |b_{lmn}| = \frac{4k_{mn}}{a \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right]} \times \\
&\times \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_m^2}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} \right\} = \frac{4k_{mn}^3}{a \left[(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right]} \\
&\times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} = \frac{\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}{(3-4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Из (2.12) видно, что числа $S_{mn} < 1$. Представив эти числа в виде

$$S_{mn} = 1 - p_{mn},$$

легко видеть, что p_{mn} быстро стремится к пределу $\frac{2-4\nu}{3-4\nu} > 0$ при

больших m и n . Отсюда видно, что системы (2.9) вполне регулярны при $0 < \nu < 0,5$.

Так как функции $f_1 \dots f_9$ являются значениями упругих перемещений на боковых плоскостях, то они должны быть непрерывными и иметь кусочно-непрерывные первые производные в соответствующих областях изменения. Кроме того, они должны удовлетворять условиям непрерывности на линиях пересечения двух соседних боковых плоскостей ($x=a, z=c$), ($x=a, y=b$), ($x=a, y=b$) и условиям симметрии на линиях ($y=b, z=0$), ($y=b, x=0$), ($x=a, y=0$), ($x=a, z=0$), ($z=c, x=0$), ($z=c, y=0$).

Представив коэффициенты разложения Фурье $a_{mn}, \dots, g_{lm}$ в виде

$$a_{mn} = \frac{bc}{4} \left\{ (-1)^{m+n} \frac{f_1(a, b, c)}{\beta_m \gamma_n} + (-1)^{n-1} \frac{f_{12}(a, b, 0)}{\beta_m \gamma_n^2} + \right. \\ \left. + (-1)^{n-1} \frac{f_{1,3}(a, 0, c)}{\gamma_n \beta_m^2} + O(n^{-2-\epsilon_1}, m^{-2-\epsilon_2}) \right. \\ \dots \dots \dots \left. \right\}$$

и подставляя эти выражения в (2.11), легко доказать, что свободные члены бесконечных систем P_{mn}, Q_{ln}, G_{lm} имеют порядок

$$P_{mn} = O(m^{-\epsilon_1}, n^{-\epsilon_2}),$$

$$Q_{ln} = O(e^{-\epsilon_3}, n^{-\epsilon_4}),$$

$$G_{lm} = O(e^{-\epsilon_5}, m^{-\epsilon_6}),$$

где

$$(\epsilon_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6).$$

Причем, если граничные значения перемещений u, v, w имеют непрерывные первые производные, то $\epsilon_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), т. е. в этом случае свободные члены бесконечных систем (2.9) ограничены сверху и при возрастании индексов стремятся к нулю. Когда же эти функции имеют кусочно-непрерывные первые производные (например, при вдавливании параллелепипеда острым жестким штампом), то некоторые из чисел $\epsilon_i = 0$, т. е. некоторые из свободных членов бесконечных систем, остаются только ограниченными (не стремятся к нулю). Но так как системы (2.9) оказались вполне регулярными, то это обстоятельство не затрудняет оценивать неизвестные коэффициенты X_{mn}, Y_{ln}, Z_{lm} с любой точностью [3]. Из уравнения обобщенного закона Гука и (1.2) найдем выражения для напряжений. Пользуясь оценками неизвестных коэффициентов бесконечных систем [2], легко доказать, что, если граничные значения перемещений имеют непрерывные первые производные, то двойные ряды, входящие в выражения напряжений,

будут сходиться в области ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$). Если же граничные функции имеют кусочно-непрерывные производные, то эти двойные ряды сходятся в открытой области ($0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$).

Ереванский политехнический
институт

Поступила 26 I 1965

Ս. Մ. ՍԱՅԱՅԱՆ

ՌԻԳԼԱՆԿՈՒՆ ԶՈՒԳԱԶԵՌՈՒՆԻՍՏԻ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ՀԱՎԱՍՏԱՐԱԿՇՈՒՄՅԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում դիտարկվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի առաձգական հավասարակշռության խնդիրը, երբ զուգահեռանիստի $x = a$, $y = b$, $z = c$ նիստերի վրա եզրային պայմանները տրված են տեղափոխումներով և սիմետրիկ են զուգահեռանիստի $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ հարթությունների նկատմամբ:

Խնդրի լուծումը բերվում է դժարին հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը, ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները լիովին ռեզոլյար են և ունեն վերինց սահմանափակ ու 0 -ի ձգող ազատ անդամներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Байда Э. Н. Общие решения теории упругости и задачи о параллелепипеде и цилиндре. Л., 1961, стр. 30.
2. Минасян Р. С. О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограмма. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, II, № 3, 1958.
3. Кантарович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гос-техиздат, М.—Л., 1950.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. АГАЛОВЯН

ОБ УТОЧНЕНИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА
АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН*

В работе делается попытка построить теорию изгиба анизотропной пластинки малой толщины без какого-либо предположения, обычно принимаемого в классической теории. Применяя метод асимптотического интегрирования [1, 2], доказываем, что, исходя из уравнений трехмерной задачи теории упругости, можно представить изогнутое состояние в пластинке в виде суммы трех напряженных состояний. Первое из напряженных состояний определяется построенным основным итерационным процессом и распространяется на всю пластинку, при этом исходным приближением этого итерационного процесса определяется напряженное состояние, эквивалентное классической теории [3, 4].

Дважды вспомогательными процессами определяются напряженные состояния, быстро затухающие при удалении от краев пластинки. Этими процессами учитываются краевые эффекты.

Интегралы, определяемые этими процессами, в сумме содержат столько произволов, сколько необходимо, чтобы удовлетворить различным граничным условиям.

§ 1. Основной итерационный процесс

Рассмотрим ортотропную пластинку толщиной $2h$, которая принимается малой величиной по сравнению с двумя другими размерами. Выберем оси x, y декартовой системы координат в срединной плоскости пластинки, ось z — перпендикулярной к ней и потребуем, чтобы положительные направления этих осей совпадали с главными направлениями упругости. Основные уравнения теории упругости для ортотропного тела имеют вид [3, 4]:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (x, y, z), \quad (1.1)$$

соотношения деформация — напряжение

* Работа была доложена автором на V Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин (Москва, 3–6 февраля 1965 года).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\tau_x + a_{12}\tau_y + a_{13}\tau_z \quad (x, y, z) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44}\tau_{yz}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a_{66}\tau_{xy}.$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что (x, y, z) означает, что существуют еще два соотношения вида (1.1), (1.2), получающиеся из этих циклической перестановкой (x, y, z) , (u, v, w) , индексов (1, 2, 3).

Граничные условия: пусть на наружной и внутренней плоскостях пластинки ($z = \pm h$) заданы

$$\tau_z = \pm \frac{1}{2} p(x, y), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0. \quad (1.3)$$

где $p(x, y)$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

Учитывая (1.3), из (1.1) можно написать

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (1.4)$$

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3) и условиями закрепления на боковых поверхностях пластинки применим метод, развитый Гольден-вейзером А. Л. [1].

Назовем основным итерационный процесс, позволяющий находить напряженные состояния, не обладающие свойством быстрого затухания при удалении от бокового края пластинки. При построении этого процесса принимается, что напряжения и перемещения не слишком быстро меняются по переменным (x, y) , тогда как в направлении z эти величины меняются быстро. Произведя замену переменных по формуле

$$z = h\zeta, \quad (1.5)$$

будем считать, что по переменным (x, y, ζ) быстрота изменения напряжений и перемещений будет не слишком велика. В силу (1.5) соотношения (1.1), (1.2) примут вид

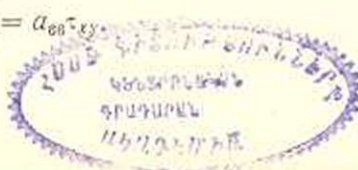
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} = 0 \quad (x, y), \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_z}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\tau_x + a_{12}\tau_y + a_{13}\tau_z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\tau_x + a_{22}\tau_y + a_{23}\tau_z,$$

$$h^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = a_{13}\tau_x + a_{23}\tau_y + a_{33}\tau_z, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + h^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = a_{55}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = a_{44}\tau_{yz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy}.$$



Решение системы (1.6) будем искать в виде

$$Q = h^{-r} \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} Q^{(s)}, \quad (1.7)$$

где Q — любое из напряжений или перемещений.

Принимается, что $Q^{(s)} = 0$ при $s < 1$.

r — целое число, различное для различных напряжений и перемещений, которое нужно подобрать так, чтобы после подстановки (1.7) в (1.6) и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициентов при всех степенях h , начиная с нижней, получалась непротиворечивая последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (1.7). Такие значения r называются непротиворечивыми. Величину r выберем следующим образом

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \rightarrow r = z + 2, \quad (\tau_{yz}, \tau_{xz}) \rightarrow r = z + 1, \quad \sigma_z \rightarrow r = z, \\ (u, v) \rightarrow r = z + 2, \quad w \rightarrow r = z + 3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Подставив (1.7) в (1.6) и учитывая (1.8), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial z} &= 0 \quad (x, y), \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x^{(s)} + a_{12}\sigma_y^{(s)} + a_{13}\sigma_z^{(s-2)}, \\ \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x^{(s)} + a_{22}\sigma_y^{(s)} + a_{23}\sigma_z^{(s-2)}, \\ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial z} &= a_{13}\sigma_x^{(s-2)} + a_{23}\sigma_y^{(s-2)} + a_{33}\sigma_z^{(s-4)}, \\ \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial z} &= a_{55}\tau_{xz}^{(s-2)}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial z} = a_{44}\tau_{yz}^{(s-2)}, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} &= a_{66}\tau_{xy}^{(s)}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Решение неоднородной системы (1.9) будем искать как сумму общего интеграла однородной системы, получающейся, если в (1.9) отбросить величины с индексом, меньшим s , и частного интеграла системы (1.9), в котором все величины с верхним индексом, меньшим s , рассматриваются как известные, т. е. представим

$$Q^{(s)} = Q_i^{(s)} + Q^*(s). \quad (1.10)$$

Основной итерационный процесс теперь заключается в последовательном определении величин $Q^{(s)}$ в порядке возрастания индекса s . Интегрируя получаемую из (1.9) однородную систему по ζ , получим

$$\begin{aligned}
 w_i^{(s)} &= w_0^{(s)}, \quad u^{(s)} = \zeta u_1^{(s)}, \quad (x, y), \\
 \sigma_{xi}^{(s)} &= \tau \sigma_{x1}^{(s)} \quad (x, y), \quad \tau_{xyi}^{(s)} = \zeta \tau_{xy1}^{(s)}, \\
 \tau_{xz1}^{(s)} &= \zeta^2 \tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} \quad (x, y), \quad \sigma_{zi}^{(s)} = \zeta^3 \sigma_{z3}^{(s)} + \zeta \sigma_{z1}^{(s)},
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}
 u_1^{(s)} &= -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x} \quad (x, y), \quad \sigma_{x1}^{(s)} = \frac{1}{a} \left[-a_{22} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial y^2} \right] \quad (x, y), \\
 \tau_{xy1}^{(s)} &= -\frac{2}{a_{66}} \frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{xz2}^{(s)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tau_{x1}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial y} \right) \quad (x, y), \\
 \sigma_{z1}^{(s)} &= - \left[\frac{\partial \tau_{xz0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^{(s)}}{\partial y} \right], \\
 \sigma_{z3}^{(s)} &= -\frac{1}{3} \left[\frac{\partial \tau_{xz2}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz2}^{(s)}}{\partial y} \right] = \frac{1}{6} \left[\frac{\partial^2 \tau_{x1}^{(s)}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{y1}^{(s)}}{\partial y^2} \right], \\
 a &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Отметим, что в (1.11) принято, что величины, имеющие внизу дополнительный числовой индекс, умножаются на ζ в степени, равной этому числу, и являются функциями двух переменных x и y .

Частный интеграл системы (1.9) можно найти следующим образом

$$\begin{aligned}
 w^{*(s)} &= \int_0^{\zeta} [a_{12} \tau_{xz}^{(s-2)} + a_{23} \tau_{yz}^{(s-2)} + a_{33} \sigma_z^{(s-4)}] d\zeta, \\
 u^{*(s)} &= a_{55} \int_0^{\zeta} \tau_{xz}^{(s-2)} d\zeta - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta} w^{*(s)} d\zeta, \\
 v^{*(s)} &= a_{44} \int_0^{\zeta} \tau_{yz}^{(s-2)} d\zeta - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta} w^{*(s)} d\zeta, \\
 \tau_{xy}^{*(s)} &= \frac{1}{a_{66}} \left[\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial x} \right], \\
 \sigma_x^{*(s)} &= \frac{1}{a} \left[a_{22} \frac{\partial u^{*(s)}}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial y} \right] + B_{12} \tau_{xz}^{(s-2)} \quad (x, y, 1, 2), \\
 \tau_{xz}^{*(s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \tau_{xz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{*(s)}}{\partial y} \right] d\zeta, \quad (x, y) \\
 \tau_{yz}^{*(s)} &= - \int_0^{\zeta} \left[\frac{\partial \tau_{xz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{*(s)}}{\partial y} \right] d\zeta,
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$B_{12} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a}.$$

Очевидно, что величины, отмеченные звездочкой, будут являться функциями от x, y, ζ , более того, по ζ они представляют собой полиномы. При $s=1$ и $s=2$, как видно из (1.13), эти величины равны нулю, так как $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$.

Теперь потребуем, чтобы напряжения, вычисляемые при помощи основного итерационного процесса, удовлетворяли граничным условиям (1.3) и (1.4), более того, потребуем, чтобы

$$\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} p, \quad \sigma_z^{(s)} = 0 \quad (s > 1),$$

$$\frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial z} = 0, \quad \tau_{xz}^{(s)} = 0, \quad \tau_{yz}^{(s)} = 0 \quad (s \geq 1) \quad \text{при } z = h \quad (\zeta = 1). \quad (1.14)$$

Так как задача об изгибе пластинки обратно симметрична, т. е. принимается, что искомое напряженное и деформированное состояние пластинки обратно симметрично относительно плоскости xoy , то аналогичные условия будут автоматически выполняться при $z = -h$.

Учитывая (1.7), (1.8) и (1.11), представим (1.14) в виде

$$h^{s-1} (\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}) = \frac{1}{2} p_s, \quad \text{где } p_1 = p, \quad p_s = 0 \quad \text{при } s > 1, \quad (1.15)$$

$$h^{s-2} \left(3\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad h^{s-2} (\tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} + \tau_{xz}^{*(s)}) = 0, \quad (x, y)$$

Решим эту систему относительно $\sigma_{z1}^{(s)}, \sigma_{z3}^{(s)}, \tau_{xz0}^{(s)}, \tau_{xz}^{*(s)}$, принимая, что внешняя нагрузка $p(x, y)$ не зависит от h , величины $Q^{(s)}$ и $Q^{*(s)}$ также не должны зависеть от h . Учитывая, что величины, отмеченные звездочкой, отличны от нуля лишь при $s > 2$ и положив $x = 0$, получим

$$\sigma_{z3}^{(1)} = -\frac{1}{4} p, \quad \sigma_{z1}^{(1)} = \frac{3}{4} p, \quad \sigma_{z3}^{(s)} = \frac{1}{2} \left(\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta} \right), \quad (s > 1),$$

$$\sigma_{z1}^{(s)} = -\frac{1}{2} \left(3\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta} \right) \quad (s > 1), \quad (1.16)$$

$$\tau_{xz0}^{(s)} = -\tau_{xz2}^{(s)} - \tau_{xz}^{*(s)} \quad (x, y).$$

Как видно из (1.16), $\sigma_{z3}^{(1)}$ — известная величина, так как $p(x, y)$ — заданная функция; $\sigma_{z3}^{(2)} = 0$. Подставив значения $\sigma_{z3}^{(1)}$ и $\sigma_{z3}^{(2)}$ в уравнения (1.12), можно из них найти остальные $Q_i^{(1)}$ и $Q_i^{(2)}$, а учитывая эти значения, из (1.13) определяются величины со звездочкой. При $s > 2$ $\sigma_{z3}^{(s)}$ выражается через величины со звездочкой, это значит, что при

любых s можно считать $\sigma_{23}^{(s)}$ известной величиной, если уже построены $(s-2)$ первых приближений и, следовательно, (1.12) образуют систему, из которой можно определить

$$u_1^{(s)}, v_1^{(s)}, w_0^{(s)}, \sigma_{x1}^{(s)}, \sigma_{y1}^{(s)}, \tau_{xy1}^{(s)}, \tau_{xz2}^{(s)}, \tau_{yz2}^{(s)}.$$

Решение этой системы приводится к следующему неоднородному уравнению четвертого порядка относительно $w_0^{(s)}$

$$D_1 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^4} + 2D_2 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_3 \frac{\partial^4 w_0^{(s)}}{\partial y^4} = -\frac{\sigma_{23}^{(s)}}{2}, \quad (1.17)$$

где

$$D_1 = \frac{a_{22}}{12a}, \quad D_2 = \frac{a_{11}}{12a}, \quad D_3 = \frac{1}{12} \left(\frac{2a}{a_{66}} - a_{11} \right) = D_1 \nu_{12} + \frac{G_{12}}{6}.$$

Нетрудно проверить, что это уравнение при $s=1$ совпадает с уравнением изгиба анизотропной пластинки по классической теории [4], для этого нужно учитывать, что $w_0^{(1)} = h^3 w^*$.

Таким образом, исходное приближение основного итерационного процесса совпадает с классической теорией изгиба анизотропной пластинки. Легко проверить, что уравнение (1.17) для изотропного тела превращается в неоднородное бигармоническое уравнение. Из этого уравнения, как частный случай, можно еще получить соответствующее уравнение для изгиба трансверсально изотропной пластинки.

В заключение этого раздела заметим, что если определить $\tau_{xz0}^{(s)}$, $\tau_{yz0}^{(s)}$ и $\sigma_{z1}^{(s)}$ из уравнений (1.16), то последнее соотношение (1.12) для $\sigma_{23}^{(s)}$ удовлетворится тождественно, так что это уравнение не является независимым уравнением и не будет влиять на ход получения (1.17).

§ 2. Вспомогательный итерационный процесс

Вследствие особенностей загрузки краев пластинки у этих краев возникают дополнительные краевые напряжения, которые, будучи локальными, могут быть соизмеримы с главными напряжениями основного напряженного состояния, поэтому их учет имеет особенно важное значение, однако учет этих напряженных состояний невозможно описывать уравнениями основного итерационного процесса так как этими уравнениями описываются вообще напряженные состояния, не затухающие по удалении от краев пластинки, между тем напряжения краевого эффекта быстро затухают по удалении от краев. Для учета этих напряжений, следуя А. Л. Гольденвейзеру [1], будем строить вспомогательный итерационный процесс для анизотропных пластинок, при помощи которого можно находить напряженные состояния, сколь угодно быстро затухающие при удалении от некоторой фиксированной линии плоскости xoy . Для простоты примем, что эта линия есть $x=0$, а затухание происходит в сторону $x < 0$.

* У Лехницкого толщина пластинки принята за h , у нас эта толщина $-2h$.

В уравнениях (1.1) и (1.2) перейдем к новым переменным по формулам

$$x = h\xi, \quad z = h\zeta. \quad (2.1)$$

Эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} h^{-1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} &= 0, & h^{-1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} &= 0, \\ h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial \zeta} &= 0, \\ h^{-1} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$h^{-1} \frac{\partial w}{\partial \xi} = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; \quad h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} = a_{44}\tau_{yz}.$$

$$h^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) = a_{55}\tau_{xz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = a_{66}\tau_{xy}.$$

Будем предполагать, что скорость изменения искомых величин по переменным ξ , y , ζ не слишком велика. Решение системы (2.2) представим в виде

$$R = h^q \sum_{s=1}^{s=S} h^{(s-1)} R^{(s)}, \quad (2.3)$$

где R — любое из напряжений и перемещений.

Считаем, что $R^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$, q — целое число, различное для различных напряжений и перемещений и выбирается так, как выбирается число r в основном итерационном процессе. Для вспомогательного итерационного процесса существуют два варианта непротиворечивых значений q .

Первый вариант

$$\begin{aligned} (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q &= -x, & (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}) \rightarrow q &= -x + 1, \\ (u, w) \rightarrow q &= -x + 2, & v \rightarrow q &= -x + 1, \end{aligned} \quad (2.4)$$

второй вариант

$$\begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}) \rightarrow q &= -\lambda + 1, & (\tau_{xy}, \tau_{yz}) \rightarrow q &= -\lambda + 2, \\ (u, w) \rightarrow q &= -\lambda + 2, & v \rightarrow q &= -\lambda + 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(x, λ — пока произвольные числа).

Этим двум вариантам непротиворечивых значений q соответствуют следующие два варианта вспомогательного итерационного процесса, получающиеся из уравнений (2.2).

Первый вариант

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial y} = a_{44} \tau_{yz}^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial y} = a_{66} \tau_{xy}^{(s)}, \quad (2.6) \\
& \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{13} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} = a_{12} \sigma_x^{(s)} + a_{22} \sigma_y^{(s)} + a_{23} \sigma_z^{(s)}, \quad (2.7) \\
& \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_x^{(s)} + a_{23} \sigma_y^{(s)} + a_{33} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{55} \tau_{xz}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Второй вариант

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = a_{11} \sigma_x^{(s)} + a_{12} \sigma_y^{(s)} + a_{13} \sigma_z^{(s)}, \\
& \frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial y} = a_{12} \sigma_x^{(s)} + a_{22} \sigma_y^{(s)} + a_{23} \sigma_z^{(s)}, \quad (2.8) \\
& \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{13} \sigma_x^{(s)} + a_{23} \sigma_y^{(s)} + a_{33} \sigma_z^{(s)}, \\
& \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{55} \tau_{xz}^{(s)}, \\
& \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad (2.9) \\
& \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial y} = a_{44} \tau_{yz}^{(s)}, \quad \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} = a_{66} \tau_{xy}^{(s)}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первый вариант вспомогательного итерационного процесса. Система (2.6) при пренебрежении членами с индексом $(s-2)$ составляет полную систему относительно неизвестных $\tau_{xy}^{(s)}$, $\tau_{yz}^{(s)}$, $v^{(s)}$. Поэтому общее решение (2.6) представим в виде

$$R^{(s)} = R_1^{(s)} + R_1^{*(s)}, \quad (2.10)$$

где $R_1^{(s)}$ — интеграл однородной системы, получающийся из (2.6), если принять величины с индексом $(s-2)$ равными нулю. $R_1^{*(s)}$ — частный интеграл системы (2.6), где величины с верхним индексом $(s-2)$ считаются известными.

Система (2.7) составит полную систему относительно неизвестных $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_y^{(s)}$, $\tau_{xz}^{(s)}$, $\sigma_z^{(s)}$, $u^{(s)}$, $w^{(s)}$, если считать $\tau_{xy}^{(s)}$, $\tau_{yz}^{(s)}$, $v^{(s)}$ известными величинами, определяемыми из системы (2.6). Поэтому решение этой системы представим опять в виде (2.10), где $R_i^{(s)}$ будет означать частное решение системы (2.7), где принимается

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)}, \quad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)}, \quad v^{(s)} = v_1^{(s)},$$

$R_i^{(s)}$ — частное решение системы (2.7), если положить

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)}, \quad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)}, \quad v^{(s)} = v_1^{(s)}$$

и считать эти величины известными.

Решение однородной системы, соответствующей системе (2.6), приводится к отысканию функции $\Psi^{(s)}(\xi, \zeta, y)$, удовлетворяющей следующему уравнению

$$a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi^2} + a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \zeta^2} = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, вводя функцию напряжений $\Psi^{(s)}$ по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy1}^{(s)} &= a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi^2}, & \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz1}^{(s)} &= a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \\ v^{(s)} = v_1^{(s)} &= a_{44} a_{66} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

мы удовлетворим однородной системе (2.6), если $\Psi^{(s)}$ будет удовлетворять уравнению (2.11).

Решая уравнение (2.11), найдем $\Psi^{(s)} = \Psi^{(s)}(\xi, \zeta)$, где в $\Psi^{(s)}$ переменная y будет входить в качестве параметра. Для нахождения частного решения (2.7) подставим туда значения $\tau_{xy1}^{(s)}$, $\tau_{yz1}^{(s)}$, $v_1^{(s)}$. Получается следующая система

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a_{44} \frac{\partial^3 \Psi^{(s)}}{\partial y \partial \xi^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} &= -a_{66} \frac{\partial^3 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta \partial y}, \\ \sigma_y^{(s)} &= -B_1 \sigma_x^{(s)} - B_2 \sigma_z^{(s)} + B_3 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} &= A_{11} \sigma_x^{(s)} + A_{12} \sigma_z^{(s)} + A_3 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = A_{12} \sigma_x^{(s)} + A_{22} \sigma_z^{(s)} + A_4 \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{35} \tau_{xz}^{(s)},$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{22}}, & A_{12} &= \frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{22}}, \\
 A_{22} &= \frac{a_{33}a_{22} - a_{23}^2}{a_{22}}, & A_3 &= \frac{a_{44}a_{66}a_{12}}{a_{22}}, & A_4 &= \frac{a_{44}a_{66}a_{23}}{a_{22}}, \\
 B_1 &= \frac{a_{12}}{a_{22}}, & B_2 &= \frac{a_{23}}{a_{22}}, & B_3 &= \frac{a_{44}a_{66}}{a_{22}}.
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая (2.11), нетрудно проверить, что мы удовлетворим системе (2.13), если примем

$$\begin{aligned}
 z_{,x}^{(s)} = z_{,x1}^{(s)} &= -2a_{44} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial y \partial \xi}, & z_{,xz}^{(s)} = z_{,xz1}^{(s)} &= -a_{66} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, \\
 z_{,y}^{(s)} = z_{,y1}^{(s)} &= (2B_1 a_{44} + B_3) \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial y}, & z_{,z}^{(s)} = z_{,z1}^{(s)} &= 0, \\
 u^{(s)} = u_1^{(s)} &= (A_3 - 2A_{11}a_{44}) \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial y},
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$w^{(s)} = w_1^{(s)} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int C_1 \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} d\xi + \int C_2 \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} d\xi \right],$$

где

$$C_1 = 2A_{11}a_{44} - A_3 - a_{55}a_{66}, \quad C_2 = A_4 - 2A_{12}a_{44}.$$

В этом варианте вспомогательного итерационного процесса, если определены $z_{,xy}^{(s)}$, $z_{,yz}^{(s)}$, $\psi^{(s)}$, то остальные неизвестные определяются по формулам (2.15), поэтому эти неизвестные назовем основными, а соответствующую ей разрешающую систему однозначных уравнений (2.6) — основной системой, которая представляет собой систему дифференциальных уравнений задачи о кручении анизотропных призматических стержней с осью, проходящей вдоль оси y . Решение этой системы приводится к нахождению функции $\Psi^{(s)}$, удовлетворяющей уравнению (2.11). Нетрудно проверить, что для изотропного тела уравнение (2.11) превращается в гармоническое уравнение. Отметим также, что для изотропного тела $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $w^{(s)} = 0$, что согласуется с приведенным в работе [1] результатом.

Теперь рассмотрим второй вариант вспомогательного итерационного процесса. Как и в первом варианте, решения систем (2.8) и (2.9) будем искать в виде

$$R^{(s)} = R_{II}^{(s)} + R_{II}^{*(s)}. \quad (2.16)$$

Для системы (2.8) $R_{II}^{(s)}$ означает общее решение однородной системы, которая получается из (2.8), если принять там величины с верхним индексом $(s-2)$ равными нулю. $R_{II}^{*(s)}$ — частное решение системы (2.8), в которой величины с верхним индексом $(s-2)$ рассматриваются как известные.

Для системы (2.9) $R_{11}^{(s)}$ — частное решение этой системы, если положить

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{(s)}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{(s)}, \quad \sigma_y^{(s)} = \sigma_{y11}^{(s)}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{(s)}, \quad u^{(s)} = u_{11}^{(s)}, \quad w^{(s)} = w_{11}^{(s)}$$

и считать эти величины известными.

$R_{11}^{*(s)}$ — частный интеграл неоднородной системы (2.9), если в ней принять

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{*(s)}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{*(s)}, \quad \sigma_y^{(s)} = \sigma_{y11}^{*(s)}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{*(s)}, \\ u^{(s)} = u_{11}^{*(s)}, \quad w^{(s)} = w_{11}^{*(s)}$$

и считать эти величины известными.

Очевидно, что $R_{11}^{*(1)}$ и $R_{11}^{*(2)}$ равны нулю.

Покажем, что построение решения $R_{11}^{(s)}$ сводится к отысканию некоторой функции $\Phi^{(s)}(\xi, \zeta)$, которая удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных четвертого порядка.

Отбросив в (2.8) все величины с индексом $(s-2)$ и исключив $\sigma_y^{(s)}$, получим систему

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = A_{11} \sigma_x^{(s)} + A_{12} \sigma_z^{(s)}, \quad \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = A_{12} \sigma_x^{(s)} + A_{22} \sigma_z^{(s)}, \\ -\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi} = a_{33} \tau_{xz}^{(s)}, \quad (2.17)$$

где коэффициенты A_{ik} определяются по формулам (2.14).

Эти уравнения составляют полную систему относительно $\sigma_x^{(s)}$, $\sigma_z^{(s)}$, $\tau_{xz}^{(s)}$, $u^{(s)}$, $w^{(s)}$ и по смыслу совпадают с уравнениями плоской деформации в плоскости (ξ, ζ) . Заметим, что эта плоская деформация отличается от обычной плоской деформации. Здесь учтены свойства материала по третьему направлению (коэффициенты a_{21} , a_{23} , a_{22}). Поэтому, следуя С. А. Амбарцумяну [3], назовем ее обобщенной плоской деформацией.

Вводя функцию напряжения $\Phi^{(s)}$ по формулам

$$\sigma_x^{(s)} = \sigma_{x11}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^2}, \quad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{z11}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xz11}^{(s)} = -\frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad (2.18)$$

решение системы (2.17) приведем к отысканию функции $\Phi^{(s)}$ из уравнения

$$A_{22} \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \zeta^4} + (2A_{12} + a_{33}) \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^2 \partial \zeta^2} + A_{11} \frac{\partial^4 \Phi^{(s)}}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2.19)$$

В частности, когда имеем изотропное тело

$$A_{11} = A_{22} = \frac{1 - \nu^2}{E}, \quad 2A_{12} + a_{33} = 2 \frac{1 - \nu^2}{E},$$

уравнение (2.19) превращается в бигармоническое уравнение.

Теперь найдем частное решение системы (2.9), принимая $\varphi_y^{(s)} = \tau_{yz}^{(s)}$, $w^{(s)} = w_{II}^{(s)}$, $u^{(s)} = u_{II}^{(s)}$ за известные величины. Принимая

$$\tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yzII}^{(s)} = B_1 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial x^2 \partial y}, \quad \tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xyII}^{(s)} = B_2 \frac{\partial^2 \Phi^{(s)}}{\partial x \partial y}, \quad (2.20)$$

мы удовлетворим первое уравнение системы (2.9). Из последних двух уравнений (2.9) можно получить

$$2 \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial x^2 \partial x} = a_{41} \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial x} + a_{66} \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial x} - a_{55} \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial y},$$

откуда, учитывая (2.18), определяем $v_{II}^{(s)}$

$$v^{(s)} = v_{II}^{(s)} = B_3 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial y}, \quad (2.21)$$

где

$$B_3 = \frac{1}{2} (B_1 a_{44} + B_2 a_{66} + a_{55}).$$

Таким образом, во втором варианте вспомогательного итерационного процесса основной является система уравнений (2.17), из которой определяются $\sigma_{xII}^{(s)}$, $\sigma_{yII}^{(s)}$, $\sigma_{zII}^{(s)}$, $\tau_{xzII}^{(s)}$, $u_{II}^{(s)}$, $w_{II}^{(s)}$, так как остальные неизвестные легко определяются по формулам (2.20), (2.21).

Построение решений $R_I^{(s)}$ и $R_{II}^{(s)}$ каждое в отдельности сводится к интегрированию системы уравнений, эквивалентной одному неоднородному уравнению второго порядка и одному неоднородному линейному уравнению четвертого порядка. В частности, для изотропного тела эти уравнения превращаются соответственно в уравнения Пуассона и в неоднородное бигармоническое уравнение.

Напряженное и деформированное состояние в анизотропной пластинке представим теперь как сумму трех напряженных и деформированных состояний, определяемых основным итерационным процессом и двумя вспомогательными итерационными процессами и потребуем, чтобы определяемые таким образом напряжения удовлетворяли граничным условиям (1.3). Так как мы уже потребовали, чтобы напряжения, определяемые основным итерационным процессом, удовлетворяли граничным условиям (1.3), то потребуем, чтобы в обоих вариантах вспомогательного итерационного процесса в каждом приближении выполнялись однородные граничные условия (1.3), тем самым будет обеспечено выполнение (1.3) для суммы интегралов, соответствующих всем трем итерационным процессам.

Потребуем также, чтобы интегралы, определяемые двумя вспомогательными процессами, обладали свойством затухания при удале-

нии от $\xi = 0$ в область $\xi < 0$, более того, потребуем, чтобы $R_1^{(s)}$, $R_1^{(s)}$, $R_{II}^{(s)}$, $R_{II}^{(s)}$ в отдельности обладали этим свойством. В общем эти интегралы содержат столько произволов, сколько необходимо, чтобы удовлетворить этим требованиям. Кроме того, в этих интегралах нужно сохранить некоторые произволы для удовлетворения граничных условий на боковых краях пластинки.

Как видно из формул (2.12) и (2.15), мы удовлетворим однородным граничным условиям (1.3), если потребуем, чтобы

$$\frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (2.22)$$

Таким образом, нужно искать решение уравнения (2.11) в полубесконечном прямоугольнике $\xi \leq 0$, $\xi = \pm 1$. Найденное решение должно удовлетворять условию (2.22) и должно быть таким, чтобы определяемые по формулам (2.12) и (2.15) напряжения и перемещения обладали свойством затухания при $\xi \rightarrow -\infty$.

Во втором варианте вспомогательного итерационного процесса, как видно из формул (2.18) и (2.20), однородные граничные условия (1.3) будут удовлетворены, если потребовать, чтобы

$$\Phi^{(s)} = \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \quad (2.23)$$

Таким образом, искомая функция $\Phi^{(s)}$ должна в полубесконечном прямоугольнике $\xi \leq 0$, $\xi = \pm 1$ удовлетворять уравнению (2.19), условию (2.23) и обладать свойством затухания при $\xi \rightarrow -\infty$. Отметим, что нахождение такой функции даже, когда $\Phi^{(s)}$ удовлетворяет бигармоническому уравнению (изотропное тело), связано с некоторыми математическими трудностями.

Рассмотрим первое однородное уравнение (2.6) и два первых однородных уравнения (т. е. в этих уравнениях величины с индексом $(s-2)$ принимаются равными нулю) системы (2.8). Будем интегрировать эти уравнения по ξ в пределах $(-\infty, 0)$, а по ξ в пределах $(-1, +1)$ и учитывать однородные граничные условия (1.3) и условие затухания напряжений при $\xi \rightarrow -\infty$. Получим

$$\int_{-1}^{+1} \sigma_{xII}^{(s)} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \tau_{xII}^{(s)} d\xi = 0, \quad \int_{-1}^{+1} \tau_{xy}^{(s)} d\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.24)$$

Теперь умножим первое однородное уравнение системы (2.8) на ξ , а второе на ξ и проинтегрируем в пределах $(-\infty, 0)$ по ξ и в $(+1, -1)$ по ξ . Сопоставляя результаты интегрирования, получим

$$\int_{-1}^{+1} \tau_{xII}^{(s)} d\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0. \quad (2.25)$$

Условия (2.24) и (2.25) показывают, какие требования нужно накладывать на граничные значения $\sigma_{x11}^{(s)}$, $\tau_{x21}^{(s)}$, $\tau_{x31}^{(s)}$ при определении $R_1^{(s)}$ и $R_2^{(s)}$, чтобы обеспечить невозникновение разрывов на ребрах пластинки, т. е. при $\xi = 0$, $\zeta = \pm 1$. Эти условия имеют простой физический смысл. Они означают обращение в нуль нормального усилия, перерезывающих усилий и изгибающего момента, создаваемого краевыми нормальными и сдвигающими напряжениями, что в совокупности дает фактически условия равновесия (в смысле Сен-Венана) края пластинки под действием краевых напряжений.

Таким образом, напряженное и деформированное состояние в анизотропной пластинке можно представить в виде суммы трех напряженных и деформированных состояний. Первое определяется основным итерационным процессом, при этом исходное приближение для этого процесса совпадает с классической теорией изгиба анизотропной пластинки. Два остальных состояния определяются уравнениями двух вспомогательных процессов. В сумме интегралы, определяемые этими тремя процессами, содержат необходимое число произвольных, обеспечивающих выполнение всех граничных условий на краях пластинки.

Вопрос о граничных условиях для изотропных пластинок был подробно рассмотрен в работе [1]. Полученные там основные результаты верны и для анизотропной пластинки, так что мы снова не останавливаемся на этом.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность С. А. Амбарцумяну за проявленный постоянный интерес к работе.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский Государственный
университет

Поступила 5 III 1965

Լ. ԱՂԱՇՆՅԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՈՒՄԱՆ ԿԱՍԻԿ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀՇԳՐՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ փորձ է արվում կառուցել անիզոտրոպ բարակ սալերի ծուխան տեսությունը, առանց կլասիկ տեսության մեջ կատարվող որևէ բնութագրության:

Կիրառելով դիֆերենցիալ հավասարումների ասիմպտոտիկ ինտեգրման մեթոդը, ցույց է տրվում, որ, ելնելով առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի հավասարումներից, անիզոտրոպ բարակ սալի լարվածային ու զեֆորմացիոն վիճակները կարելի է ներկայացնել երեք լարվածային ու զեֆորմացիոն վիճակների գումարի տեսքով: Առաջին լարվածային վիճակը իջվում է հիմնական և որոշվում է կառուցված հիմնական խտեբացիոն պրո-

ցետով: Այն ճիշտ է ամբողջ սալի համար: Այդ պրոցեսի տեսչին մոտափոխությունը համարժեք է սալի ծոման կլասիկ տեսությունը:

Մյուս երկու պրոցեսներով, որոնք կոչվում են լրացուցիչ, որոշվում են ախպրի լարվածակն վիճակներ, որոնք արագ կերպով մարում են սալ եզրերից հեռանալու դեպքում: Այդ պրոցեսների միջոցով հաշվի են առնվում եզրային էֆեկտները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 28 вып. 4, 1962.
2. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
БЕЗМОМЕНТНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ ОБОЛОЧЕК В РАМКАХ
ТЕОРИИ СТАРЕНИЯ*

Хорошо известно, что соотношения ползучести для большинства конструкционных материалов характеризуются сильной нелинейностью, что приводит при решении даже простейших задач к значительным математическим трудностям. Это обстоятельство заставляет искать эффективные методы приближенного решения задач ползучести. В настоящее время существует много вариантов приближенного решения, основанных на различных линеаризациях уравнений ползучести [1-7]. Ниже рассматривается неустановившаяся ползучесть в рамках теории старения [1].

Доказывается, что задачу ползучести можно свести к задаче неоднородного изотропного линейно упругого тела с переменными во времени параметрами упругости. Этот метод имеет некоторое преимущество по сравнению с методом „дополнительных деформаций“ [6], однако его применение не всегда возможно. В работе показывается, что предложенный метод „переменных параметров упругости“ с успехом можно применять к задачам ползучести стержневых систем и оболочек по безмоментной теории. В конце работы дается решение задачи безмоментной ползучести и релаксации трехслойных оболочек вращения.

1. Пусть компоненты полной деформации $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ определяются уравнениями теории старения [1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^c = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{6} f(\sigma_i, t) (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^e + \gamma_{xy}^c = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} + f(\sigma_i, t) \tau_{xy} \quad (xyz) \\ &\left(f(\sigma_i, t) = \frac{\varepsilon_i^c}{\sigma_i} \right),\end{aligned}\quad (1.1)$$

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек (Москва, 3-6 февраля 1965 г.).

где E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала, ε_i^c и σ_i — интенсивности деформаций сдвига ползучести и касательных напряжений.

Символ (xyz) означает, что недостающие уравнения получаются круговой перестановкой букв x, y, z . Запишем уравнения (1.1) в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E^*} [\sigma_x - \nu^* (\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu^*)}{E^*} \tau_{xy}, \quad (xyz), \quad (1.2)$$

где обозначено

$$E^* = \frac{3E}{3 + Ef(\sigma_i, t)}, \quad \nu^* = \frac{6\nu + Ef(\sigma_i, t)}{2[3 + Ef(\sigma_i, t)]}. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) характеризуют некоторое *неоднородное* изотропное упругое (приведенное) тело с переменными во времени параметрами E^* и ν^* .

Попутно заметим, что при несжимаемости материала $\nu^* = 0.5$.

Таким образом, задачу ползучести теории старения можно свести к задаче *неоднородного* изотропного линейно упругого тела с переменными во времени параметрами упругости (1.3).

Если известно решение задачи произвольно неоднородного упругого тела, то с использованием формул (1.3) можно получить решение той же задачи с учетом ползучести материала, определяя при этом значения параметров упругости E^* и ν^* методом последовательных приближений

$$\overset{(n)}{E^*} = \frac{3E}{3 + Ef(\overset{(n-1)}{\sigma_i}, t)}, \quad \overset{(n)}{\nu^*} = \frac{6\nu + Ef(\overset{(n-1)}{\sigma_i}, t)}{2[3 + Ef(\overset{(n-1)}{\sigma_i}, t)]}, \quad (n = 1, 2, \dots)^* \quad (1.4)$$

Принимая за исходное приближение решение задачи без учета ползучести материала, получим $\overset{(0)}{E^*} = E$, $\overset{(0)}{\nu^*} = \nu$. Как известно [6], по методу „дополнительных деформаций“ величины ε_x^c , γ_{xy}^c , (xyz) следует рассматривать как дополнительные, для отыскания которых применяется метод последовательных приближений (при этом за исходное приближение опять принимается решение упругой задачи). Преимущество этого метода по сравнению с методом „переменных параметров упругости“ заключается в том, что задачи ползучести по этому методу сводятся к задачам того же однородного линейно упругого тела с дополнительными деформациями. Однако, для получения n -ого приближения по методу „дополнительных деформаций“ следует приближенно вычислить деформации ползучести целиком

$$\varepsilon_x^c = \frac{1}{6} f(\overset{(n-1)}{\sigma_i}, t) (2 \overset{(n-1)}{\sigma_x} - \overset{(n-1)}{\sigma_y} - \overset{(n-1)}{\sigma_z}), \quad \gamma_{xy}^c = f(\overset{(n-1)}{\sigma_i}, t) \tau_{xy}, \quad (xyz) \quad (1.5)$$

* В скобках сверху обозначается номер приближения.

При этом возможны случаи, когда ошибки определения $f(\sigma_i, t)$ и компонент девиатора напряжений $(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz})$ в решении задачи вызывают ошибки одинакового знака. В таких случаях процесс последовательных приближений или не сходится, или сходится очень слабо.

Очевидно, что такое явление не будет иметь место при применении метода „переменных параметров упругости“, так как по этому методу приближенно вычисляется лишь величина $f(\sigma_i, t)$, а компоненты девиатора напряжений, путем исключения, в процессе последовательных приближений участвуют со своими точными значениями. Поэтому, в смысле точности приближений, предпочтение следует дать методу „переменных параметров упругости“ и при возможности применять именно этот метод как более рациональный.

В задачах ползучести стержневых систем, в силу равномерности напряженного состояния каждого стержня, параметры E^* и ν^* зависят только от времени и характеризуют *однородные* тела с переменными во времени упругими свойствами. Следовательно, в этих задачах применение метода „переменных параметров упругости“ не связано с особыми трудностями.

Нетрудно убедиться в том, что применение этого метода целесообразно и в статически неопределимых задачах безмоментной ползучести оболочек. На самом деле, в статически неопределимых задачах оболочек по безмоментной теории неоднородность упругих свойств материала не влечет за собой особых математических трудностей. При определении искомых функций интегрирования упругие параметры неоднородного материала входят в подынтегральные выражения. Это обстоятельство не мешает проведению последовательных вычислений значений искомых функций. Кстати, применение метода „дополнительных деформаций“ в данном случае не облегчает, а, наоборот, усложняет процесс последовательных приближений, так как в подынтегральные выражения, кроме величин $f(\sigma_i^{(n-1)}, t)$, в этом случае входят и комбинации напряжений $2\sigma_x^{(n-1)} - \sigma_y^{(n-1)} - \sigma_z^{(n-1)}, \tau_{xy}^{(n-1)}, \dots$ (τ_{yz}). Это обстоятельство ниже будет иллюстрировано на конкретном примере.

Таким образом, в задачах ползучести стержневых систем и оболочек по безмоментной теории целесообразно использовать метод „переменных параметров упругости“.

Ниже, в качестве приложения, приводится решение задачи безмоментной ползучести и релаксации трехслойных оболочек вращения.

2. Рассмотрим трехслойную оболочку вращения, слой которой симметрично собраны относительно срединной поверхности. Будем считать, что крайние слои изготовлены из одинакового материала, а средний слой — из другого материала.

Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности оболочки будем определять меридиональной дугой α , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $\alpha_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок, один конец ее ($\alpha = \alpha_0$) зашпелен, а другой конец ($\alpha = l$) растягивается (сжимается) по направлению меридиана на величину $u_0(t)$. В случае $u_0(t) = u_0 = \text{const}$ произойдет релаксация напряжений в слоях оболочки.

Граничные условия запишутся следующим образом

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_0(t). \quad (2.1)$$

Как известно [7], усилия оболочки по направлениям меридиан T_1 и параллельных кругов T_2 в данном случае имеют вид

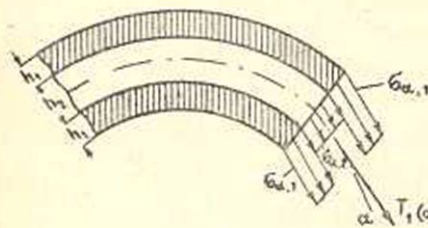
$$T_1(\alpha, t) = \frac{U(t)}{R_2 \cos^2 \vartheta}, \quad T_2(\alpha, t) = -\frac{U(t)}{R_1 \cos^2 \vartheta}, \quad (2.2)$$

где $U(t)$ — искомая функция интегрирования, R_1, R_2 — радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, ϑ — угол между касательной к меридиану и осью вращения.

Очевидно, что

$$T_1(\alpha, t) = 2h_1\sigma_{\alpha,1} + h_2\sigma_{\alpha,2}, \quad T_2(\alpha, t) = 2h_1\sigma_{\beta,1} + h_2\sigma_{\beta,2}. \quad (2.3)$$

Здесь h_1 и h_2 — толщины, а $\sigma_{\alpha,1}, \sigma_{\beta,2}$ и $\sigma_{\beta,1}, \sigma_{\alpha,2}$ — напряжения по направлениям меридиан и параллельных кругов крайних (с индексом 1) и среднего (с индексом 2) слоев оболочки (фиг. 1).



Фиг. 1.

Меридиональное перемещение с учетом первого из граничных условий (2.1) выражается через деформации по формуле [8]

$$u(\alpha, t) = \cos \vartheta \int_0^{\alpha} \frac{1}{\cos \vartheta} \left(\varepsilon_{\alpha} - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_{\beta} \right) d\alpha. \quad (2.4)$$

Определяя полные деформации по соотношениям [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha,j} &= \frac{1}{E_j} (\sigma_{\alpha,j} - \nu_j \sigma_{\beta,j}) + \frac{1}{6} f_j(\sigma_j, t) (2\sigma_{\alpha,j} - \sigma_{\beta,j}), \\ \varepsilon_{\beta,j} &= \frac{1}{E_j} (\sigma_{\beta,j} - \nu_j \sigma_{\alpha,j}) + \frac{1}{6} f_j(\sigma_j, t) (2\sigma_{\beta,j} - \sigma_{\alpha,j}), \\ \left(f_j(\sigma_j, t) &= \frac{\varepsilon_j^c}{\sigma_j}, j = 1, 2 \right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

для приведенных материалов слоев оболочки получим

$$\varepsilon_{\alpha,j} = \frac{1}{E_j} (\sigma_{\alpha,j} - \nu_j^* \sigma_{\beta,j}), \quad \varepsilon_{\beta,j} = \frac{1}{E_j} (\sigma_{\beta,j} - \nu_j^* \sigma_{\alpha,j}),$$

$$E_j = \frac{3E_l}{3 + E_j f_l(\sigma_l, t)}, \quad \nu_j = \frac{6\nu_l + E_l f_l(\sigma_l, t)}{2[3 + E_j f_l(\sigma_l, t)]} \quad (j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Решение задачи сводится к определению пяти неизвестных функций $\sigma_{\alpha, j}$, $\sigma_{\beta, j}$ и $U(t)$, относительно которых имеем следующую систему пяти уравнений

$$2h_1\sigma_{\alpha, 1} + h_2\sigma_{\alpha, 2} = \frac{U(t)}{R_2 \cos^2 \vartheta}, \quad 2h_1\sigma_{\beta, 1} + h_2\sigma_{\beta, 2} = -\frac{U(t)}{R_1 \cos^2 \vartheta},$$

$$\varepsilon_{\alpha, 1} = \varepsilon_{\alpha, 2}, \quad \varepsilon_{\beta, 1} = \varepsilon_{\beta, 2}, \quad u(l, t) = u_0(t), \quad (2.7)$$

(первое и второе—уравнения равновесия, третье и четвертое—условия совместного деформирования слоев, пятое—неоднородное граничное условие оболочки).

Для сравнения, ниже приводятся решения по двум методам:

а) по методу „дополнительных деформаций“

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha, 1}^{(n)} &= \frac{D_1(R_1 + \nu_2 R_2) - D_2(R_2 + \nu_2 R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_1}{D_1^2 - D_2^2} U(t) + \\ &+ \frac{E_1 E_2 h_2}{D_1^2 - D_2^2} \left[D_1(\varepsilon_{\alpha, 2}^{(n)} - \varepsilon_{\alpha, 1}^{(n)}) - D_2(\varepsilon_{\beta, 1}^{(n)} - \varepsilon_{\beta, 2}^{(n)}) \right], \\ \sigma_{\beta, 1}^{(n)} &= \frac{D_2(R_1 + \nu_2 R_2) - D_1(R_2 + \nu_2 R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_1}{D_1^2 - D_2^2} U(t) + \\ &+ \frac{E_1 E_2 h_2}{D_1^2 - D_2^2} \left[D_2(\varepsilon_{\alpha, 2}^{(n)} - \varepsilon_{\alpha, 1}^{(n)}) - D_1(\varepsilon_{\beta, 1}^{(n)} - \varepsilon_{\beta, 2}^{(n)}) \right], \\ \sigma_{\alpha, 2}^{(n)} &= \frac{U(t)}{R_2 h_2 \cos^2 \vartheta} - \frac{2h_1 \sigma_{\alpha, 1}^{(n)}}{h_2}, \quad \sigma_{\beta, 2}^{(n)} = -\frac{U(t)}{R_1 h_2 \cos^2 \vartheta} - \frac{2h_1 \sigma_{\beta, 1}^{(n)}}{h_2}, \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0(t) \left\{ 1 - \frac{\cos \vartheta_1}{u_0(t)} \int_0^t \frac{1}{\cos \vartheta} \left[A_1 \varepsilon_{\alpha, 1}^{(n)} + A_2 \varepsilon_{\beta, 1}^{(n)} + (1 - A_1) \varepsilon_{\alpha, 2}^{(n)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{R_2 + A_2 R_1}{R_1} \varepsilon_{\beta, 2}^{(n)} \right] d\alpha \right\}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} U_0(t) &= \frac{u_0(t)}{\cos \vartheta_1} (D_1^2 - D_2^2) \left\{ \int_0^t \frac{1}{R_1^2 R_2 \cos^3 \vartheta} \{ D_1 [(1 + \nu_1 \nu_2) (R_1^2 + R_2^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2(\nu_1 + \nu_2) R_1 R_2] - D_2 [(\nu_1 + \nu_2) (R_1^2 + R_2^2) + 2(1 + \nu_1 \nu_2) R_1 R_2] \} d\alpha \right\}^{-1}, \quad (2.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 1 - \frac{E_2 h_2}{R_1 (D_1^2 - D_2^2)} [D_1 (R_1 + \nu_1 R_2) - D_2 (R_2 + \nu_1 R_1)], \\
 A_2 &= -\frac{R_2}{R_1} - \frac{E_2 h_2}{R_1 (D_1^2 - D_2^2)} [D_2 (R_1 + \nu_1 R_2) - D_1 (R_2 + \nu_1 R_1)], \quad (2.11) \\
 D_1 &= E_2 h_2 + 2E_1 h_1, \quad D_2 = \nu_1 E_2 h_2 + 2\nu_2 E_1 h_1, \quad \vartheta_1 = \vartheta(t) \neq \frac{\pi}{2},
 \end{aligned}$$

б) по методу „переменных параметров упругости“

$$\begin{aligned}
 \varpi_{a,1}^{(n)} &= \frac{D_1^*(R_1 + \nu_2^* R_2) - D_2^*(R_2 + \nu_2^* R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_1^*}{(D_1^*)^2 - (D_2^*)^2} U(t), \\
 \varpi_{a,1}^{(n)} &= \frac{D_2^*(R_1 + \nu_2^* R_2) - D_1^*(R_2 + \nu_2^* R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_1^*}{(D_1^*)^2 - (D_2^*)^2} U(t), \\
 \varpi_{a,2}^{(n)} &= \frac{D_1^*(R_1 + \nu_1^* R_2) - D_2^*(R_2 + \nu_1^* R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_2^*}{(D_1^*)^2 - (D_2^*)^2} U(t), \quad (2.12) \\
 \varpi_{a,2}^{(n)} &= \frac{D_2^*(R_1 + \nu_1^* R_2) - D_1^*(R_2 + \nu_1^* R_1)}{R_1 R_2 \cos^2 \vartheta} \frac{E_2^*}{(D_1^*)^2 - (D_2^*)^2} U(t),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{u_0(t)}{\cos \vartheta_1} \left\{ \int_0^t \frac{1}{R_1^2 R_2 [(D_1^*)^2 - (D_2^*)^2]} \left\{ (1 + \nu_1^* \nu_2^*) \left[D_1^* (R_1^2 + R_2^2) - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 D_2^* R_1 R_2 \right] - (\nu_1^* + \nu_2^*) \left[D_2^* (R_1^2 + R_2^2) - 2 D_1^* R_1 R_2 \right] \right\} d\tau \right\}^{-1}, \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$D_1^* = 2E_1^* h_1 + E_2^* h_2, \quad D_2^* = 2\nu_2^* E_1^* h_1 + \nu_1^* E_2^* h_2. \quad (2.14)$$

Сравнивая эти решения, легко заметить, что в обоих случаях решение задачи фактически сводится к последовательному уточнению значений неизвестной функции интегрирования $U(t)$ по соответствующим схемам последовательных приближений (2.9) и (2.13). Если по методу „переменных параметров упругости“ в подынтегральное выражение входят только величины $f_1^{(n-1)}(\vartheta_1, t)$, то по методу „дополнительных деформаций“ — приближенные значения деформаций ползучести целиком (см. (2.6), (2.14), (2.13) и (1.7), (2.9)).

$t_{\text{сут}}$	$\langle n \rangle, \frac{\text{кг}}{E_1^* \text{см}^2}$				$\langle n \rangle, \frac{\text{кг}}{E_2^* \text{см}^2}$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
0	$1 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^8$	$0,5 \cdot 10^8$	$0,5 \cdot 10^8$	$0,5 \cdot 10^8$	$0,5 \cdot 10^8$
10	0,93	0,97	0,95	0,96	0,36	0,43	0,41	0,42
30	0,89	0,94	0,93	0,93	0,30	0,40	0,39	0,40
60	0,85	0,93	0,91	0,91	0,26	0,38	0,38	0,38
100	0,82	0,91	0,89	0,88	0,23	0,38	0,36	0,37
150	0,78	0,89	0,86	0,87	0,17	0,37	0,33	0,36

Таким образом, применение метода „дополнительных деформаций“ в данном случае не облегчает, а, наоборот, усложняет процесс последовательных вычислений значений функций $U(t)$. Следовательно, к рассмотренной задаче целесообразно применять метод „переменных параметров упругости“.

В заключение заметим, что при несжимаемости материалов в слоях конических и цилиндрических оболочек кольцевые напряжения отсутствуют, т. е. слои оболочки не давят друг на друга. В этом нетрудно убедиться, если значения $\nu_1 = \nu_2 = 0,5$, $D_1^* = 2D_2^*$, $R_1 = \infty$ подставить в соответствующие уравнения (2.12).

3. Рассмотрим задачу релаксации напряжений в трехслойных цилиндрических оболочках вращения.

Для конкретности положим

$$R_2 = R = 100 \text{ см}, \quad l = 400 \text{ см}, \quad n_0 = 1 \text{ см}, \quad h_1 = 1 \text{ см},$$

$$h_2 = 4 \text{ см}, \quad \nu_1 = 0,2, \quad \nu_2 = 0,4, \quad E_1 = 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad (3.1)$$

$$E_2 = 5 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad f_j(\sigma_j, t) = Q_j(t) \sigma_j^{m_j},$$

где

$$Q_1(t) = 10^{-14} t^{0,5} \left(\frac{\text{см}^2}{\text{кг}} \right)^3 \frac{1}{(\text{сут})^{0,5}}, \quad m_1 = 2, \quad (3.2)$$

$$Q_2(t) = 3 \cdot 10^{-19} t^{0,5} \left(\frac{\text{см}^2}{\text{кг}} \right)^5 \frac{1}{(\text{сут})^{0,5}}, \quad m_2 = 4.$$

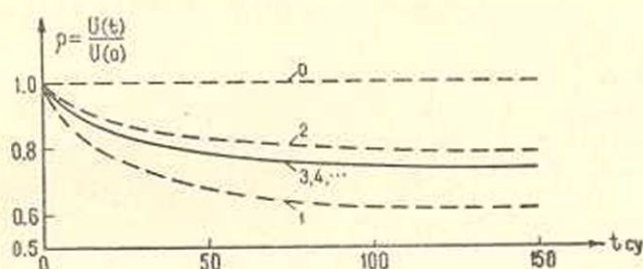
В нижеприведенной таблице представлены результаты вычисления значений искомой функции интегрирования $U(t)$ и параметров приведенных материалов оболочки E_j^* , ν_j .

Из таблицы видно, что разница между значениями искомой функции $U(t)$ при 3-ем и 4-ом приближениях не превышает одного процента.

Таблица

$(\pi) \nu_1^*$				$(\pi) \nu_2^*$				$(\pi) U(t) \text{ кг}$			
I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
0,2	0,2	0,2	0,2	0,4	0,4	0,4	0,4	$101,11 \cdot 10^4$	$101,11 \cdot 10^4$	$101,11 \cdot 10^4$	$101,11 \cdot 10^4$
0,22	0,21	0,22	0,21	0,43	0,41	0,42	0,41	83,79	92,31	90,62	91,35
0,23	0,21	0,23	0,22	0,44	0,42	0,42	0,42	75,39	88,19	87,11	87,84
0,24	0,22	0,24	0,23	0,45	0,42	0,43	0,42	69,32	85,27	83,74	84,12
0,25	0,22	0,25	0,23	0,45	0,42	0,43	0,43	64,44	82,69	81,61	81,93
0,26	0,23	0,25	0,24	0,46	0,43	0,44	0,43	79,69	78,32	78,32	78,45

На фиг. 2 приведены графики функции $\rho(t) = \frac{U(t)}{U(0)}$ для четырех приближений.



Фиг. 2.

Имея значения $U(t)$, E_j^* и ν_j^* , напряжения вычисляем по формулам (2.12).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 III 1965

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ՍՈՂԷԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒՄՄԱՆ ՄԻ
ՄԱՏԱՎՈՐ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Աշխատության մեջ ցույց է տրվում, որ սողքի խնդիրը կարելի է բերել ժամանակի ընթացքում փոփոխվող պարամետրեր ունեցող անհամասեռ, դժավին առաձգական իզոտրոպ մարմնի խնդրին: Առաջադրվող մեթոդը որոշ առավելություն ունի «լրացուցիչ զեֆորմացիաների» հաշվանի [6] մեթոդի նկատմամբ:

Ցույց է տրվում, որ այն հաջողությամբ կարելի է օգտագործել ձողային սխեմաների և անմոմենտ թաղանթների սողքի խնդիրների լուծման համար:

Աշխատության գերջում արվում է պատման երաշխի թողանքների անմիջապես ստորի և ակադեմիայի խնդրի լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Куратов П. С., Розенблюм В. И. Об интегрировании уравнений неустойчившейся ползучести твердых тел, ПММ, 24, в. 1, 1960.
3. Ключников Ы. Д. О неустойчившейся ползучести. ПМТФ, № 6, 1961.
4. Ильющин А. А., Поспелов И. И. О методе последовательных приближений в задаче о неустойчившейся ползучести. Инж. журнал, 4, в. 4, 1964.
5. Киракосян Р. М. О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 1, 1965.
6. Ильющин А. А. Пластичность, Гостехиздат, М., 1948.
7. Биргер И. А. Методы упругих решений в теории пластического течения. Известия АН СССР, механика и машиностроение, № 2, 1964.
8. Розенблюм В. И. О неустойчившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.

К. С. КАРАПЕТЯН

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА ПРОЧНОСТЬ И ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАСХОДА ЦЕМЕНТА

Как известно, бетон является анизотропным материалом, и влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона весьма существенно [1—4].

Настоящая работа посвящена результатам исследования влияния анизотропии на прочность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от расхода цемента.

§ 1. Общие сведения, объем и методика исследования

Влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона изучалось над четырьмя составами шлакобетона и над четырьмя составами тяжелого бетона.

Составы бетонов приведены в табл. 1.

Составы бетона

Таблица 1

№, № составов	Вид бетона	Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м ³ бетона в кг				γ_0 в кг/м ³	μ %
			цемент	песок	щебень	вода		
1	Шлакобетон	1:3,08:2,98	239	736	711	310	1996	1,3
2		1:2,29:2,23	312	716	694	305	2027	0,9
3		1:1,66:1,88	371	615	697	312	1995	0,8
4		1:1,37:1,55	433	592	669	322	2016	0,7
5	Тяжелый бетон	1:3,68:4,73	235	861	1112	194	2402	0,8
6		1:2,96:3,90	281	831	1095	195	2402	0,9
7		1:2,45:3,26	329	807	1071	197	2404	0,8
8		1:1,88:2,50	408	768	1022	202	2400	0,9

Эксперименты были выполнены на призматических образцах и восьмерках сечением 10×10 см, высотой 60 см, изготовленных в вертикальных и горизонтальных формах.

Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на пробной площадке при продолжительности вибрации 30 секунд. Образцы отводились от формы через 48 часов.

Шлакобетонные образцы до месячного возраста хранились во влажной камере, далее в обычных лабораторных условиях, где проводились длительные опыты. Образцы из тяжелого бетона сразу после распалубки хранились в обычных лабораторных условиях.

В помещении, где проводились опыты над шлакобетонами, в процессе длительных опытов температура $T=21\pm 5^{\circ}\text{C}$, а относительная влажность $P=66\pm 12\%$. В помещении, где проводились опыты над тяжелым бетоном, $T=21\pm 6^{\circ}\text{C}$, а $P=62\pm 12\%$.

Призмы и восьмерки из всех составов шлакобетонов были установлены под длительную нагрузку в возрасте 29 дней, а из тяжелого бетона составов № 5 и 6—28 дней. Призмы из тяжелого бетона составов № 7 и 8 были загружены в возрасте 31 день.

Из каждой разновидности образцов загружались по три образца.

Всего было загружено 48 призм и 36 восьмерок.

С момента длительного нагружения образцов на таком же количестве образцов-близнецов определялись усадочные деформации.

Величины напряжений в длительно нагруженных образцах указаны на соответствующих графиках.

Помимо длительных опытов, под кратковременной нагрузкой были испытаны кубики, призмы и восьмерки.

Испытание призматических образцов производилось ступенчатым нагружением и выдержкой под каждой ступенью нагрузки в течение одной минуты. Восьмерки испытывались без выдержки.

§ 2. Влияние анизотропии на прочность и деформативность бетона при сжатии в зависимости от расхода цемента

Прочностные показатели бетонов на сжатие приведены в табл. 2.

Таблица 2

Влияние анизотропии на прочность бетона при сжатии в зависимости от расхода цемента

Вид бетона	Возраст бетона к моменту испытания	№ состава бетона	Расход цемента на 1 м³ бетона в кг	Прочностные характеристики бетонов, когда направление сжимающей силы при испытании по отношению к слоям бетона						$\frac{R'}{R}$	$\frac{R'_{np}}{R_{np}}$
				перпендикулярно			параллельно				
				R в кг/см²	R_{np} в кг/см²	R_{np} в R	R' в кг/см²	R'_{np} в кг/см²	R'_{np} в R'		
Шлакобетон	28 дней	1	239	139	75	0,54	131	93	0,71	0,94	1,24
		2	312	206	137	0,66	211	163	0,77	1,02	1,19
		3	371	207	167	0,80	197	179	0,91	0,95	1,07
		4	433	272	221	0,81	276	214	0,77	1,01	0,97
Тяжелый бетон	1 год	5	235	—	67	—	—	60	—	—	0,90
		6	281	—	116	—	—	119	—	—	1,02
		7	329	—	140	—	—	159	—	—	1,13
		8	408	—	227	—	—	163	—	—	0,72

Как видно из табл. 2, относительная призмная прочность $\left(\frac{R_{np}}{R}\right)$ бетона по испытаниям призм параллельно слоям несколько больше, чем по испытаниям призм перпендикулярно слоям. С увеличением расхода цемента относительная призмная прочность бетона возрастает.

Данные табл. 2 показывают, что анизотропия бетона оказывает заметное влияние на призмную прочность бетона. При малых расходах цемента призмная прочность по испытаниям образцов параллельно слоям больше, чем призмная прочность по испытаниям образцов перпендикулярно слоям. Однако, с увеличением расхода цемента разница призмных прочностей уменьшается и после некоторого расхода цемента наблюдается обратное явление.

Таким образом, влияние анизотропии на призмную прочность бетона в большой мере зависит от расхода цемента.

Кубиковые прочности шлакобетонов составов № 2 и 3 практически получились одинаковые, несмотря на то, что расход цемента для состава № 3 был на 60 кг больше. Причиной этого, несомненно, является то, что песок, примененный для шлакобетона состава № 3, имел меньший объемный вес (1056 кг/м^3), чем песок, примененный для состава № 2 (1230 кг/м^3). По этой же причине увеличение расхода цемента не привело к существенному увеличению призмной прочности.

Экспериментальные кривые деформаций каждой серии призматических образцов были описаны зависимостью следующего вида

$$\varepsilon = \frac{a \frac{\sigma}{R_{np}}}{1 - b \frac{\sigma}{R_{np}}}, \quad (1)$$

где a и b — коэффициенты, определяемые из опыта.

На основании формулы (1) для модуля деформации получается следующая зависимость:

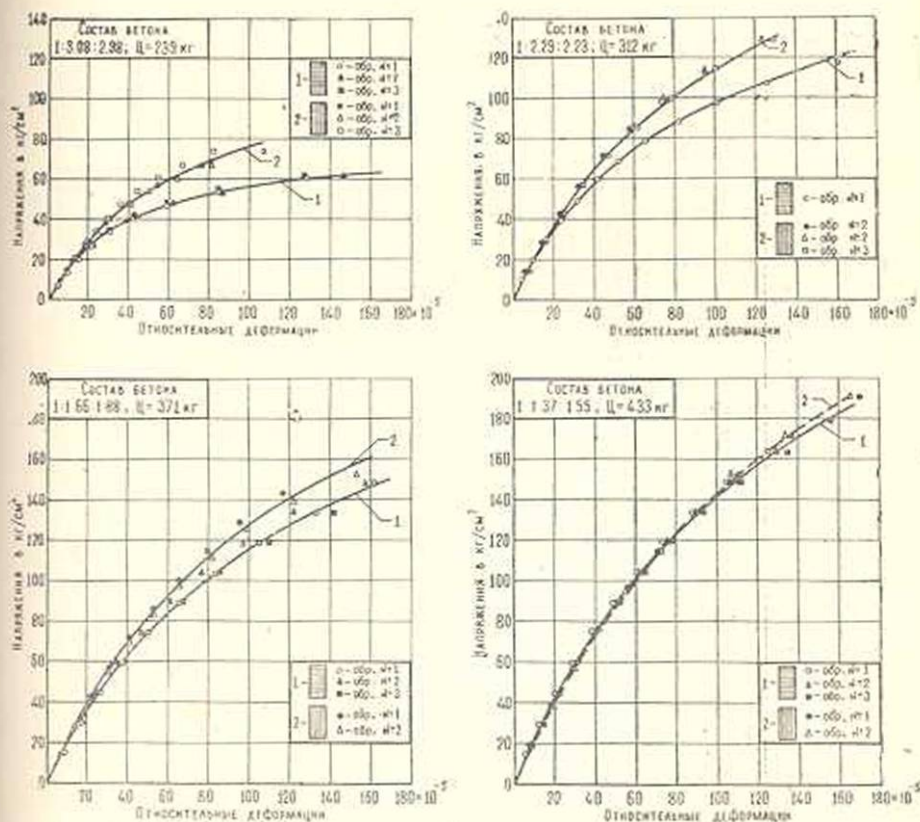
$$E = \frac{R_{np}}{a} \left(1 - b \frac{\sigma}{R_{np}}\right)^2, \quad (2)$$

где $\frac{R_{np}}{a}$ — начальный модуль деформации бетона (E_0).

На фиг. 1 приведены кривые деформаций призматических образцов из шлакобетонов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям.

Как видно из фиг. 1, кривые деформаций, построенные по формуле (1), с использованием соответствующих значений параметров a и b хорошо отвечают опытным данным. На фиг. 1 во всех случаях кривые деформаций призм, испытанных параллельно слоям, расположились выше кривых деформаций призм, испытанных перпендикулярно слоям. Обратное явление наблюдалось только при тяжелом бетоне с наибольшим расходом цемента (состав 8).

Таким образом, влияние анизотропии на деформации бетона при сжатии в большой мере зависит от расхода цемента. При малых расходах цемента деформации бетона по испытанию призм параллельно слоям заметно меньше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям. С увеличением расхода цемента разница деформаций уменьшается, и при некотором расходе цемента они приобретают одинаковые значения. Дальнейшее увеличение расхода цемента уже приводит к тому, что деформации образцов, испытанных параллельно слоям, становятся больше деформаций образцов, испытанных перпендикулярно слоям.



фиг. 1. Влияние анизотропии на деформации шлакобетона при сжатии в зависимости от расхода цемента.

В табл. 3 приведены значения касательных модулей деформаций бетонов при сжатии, подсчитанные по формуле (2). Здесь ясно видно, как с увеличением расхода цемента характер влияния анизотропии на модуль деформации бетона с увеличением расхода цемента изменяется. На основании данных табл. 3 можно сделать вывод, что влияние анизотропии на модуль деформации тяжелого бетона при сжатии гораздо больше, чем на модуль деформации шлакобетона. Одновременно еще раз подтверждается и тот вывод, что с увеличением напряжения влияние анизотропии на модуль деформации бетона увеличивается [3, 4].

Таблица 3

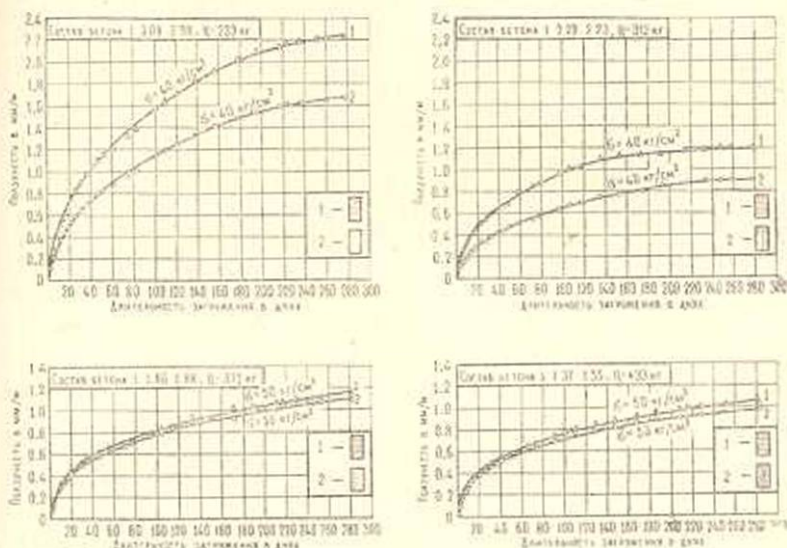
Влияние анизотропии на модуль деформации бетона при сжатии в зависимости от расхода цемента

Возраст бетона к моменту испытания	Вид бетона	Н-мер состава бет. нд	Расход цемента на 1 м ³ бетона в кг	Направление сжим. ющей силы при испытании п. отнош. к слоям бетона	Модуль деформации бетона по касательной в Т, см ² при напряжении					Отношение модуля деформации образцов, испытанных параллельно слоям, к модулю деформаций образцов, испытанных перпендикулярно слоям при напряжении				
					$\sigma = 0$	$\sigma = 30$ кг/см ²	$\sigma = 60$ кг/см ²	$\sigma = 100$ кг/см ²	$\sigma = 150$ кг/см ²	$\sigma = 0$	$\sigma = 30$ кг/см ²	$\sigma = 60$ кг/см ²	$\sigma = 100$ кг/см ²	$\sigma = 150$ кг/см ²
28 дней	шлакобетон	1	239	перпенд. парал.	192 181	75 109	12 55	— —	— —	0,94	1,45	4,58	—	—
		2	312	перпенд. парал.	211 216	147 166	95 123	20 74	— —	1,02	1,13	1,29	3,70	—
		3	371	перпенд. парал.	205 224	161 180	123 141	79 97	38 53	1,09	1,12	1,14	1,23	1,39
		4	433	перпенд. парал.	236 226	196 193	160 162	121 124	77 85	0,96	0,98	1,01	1,02	1,10
1 год	тяжелый бетон	5	235	перпенд. парал.	146 165	55 77	— —	— —	— —	1,13	1,40	—	—	—
		6	281	перпенд. парал.	199 229	136 168	86 116	36 62	— —	1,15	1,23	1,35	1,72	—
		7	329	перпенд. парал.	235 269	170 216	115 169	59 115	— —	1,14	1,27	1,47	1,95	—
		8	408	перпенд. парал.	240 252	214 211	190 174	159 130	125 84	1,05	0,99	0,91	0,81	0,67

§ 3. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии в зависимости от расхода цемента

На фиг. 2 приведены кривые ползучести 4-х составов шлакобетонов при сжатии по испытаниям призм перпендикулярно и параллельно слоям.

На фиг. 2 независимо от состава бетона во всех случаях кривые ползучести призм, испытанных перпендикулярно слоям, расположились выше кривых ползучести призм, испытанных параллельно слоям. Однако, как видим, с увеличением расхода цемента расхожимость кривых ползучести образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям укладки бетона, уменьшается. Аналогичное явление наблюдалось в опытах над четырьмя составами тяжелого бетона.



Фиг. 2. Влияние анизотропии на ползучесть шлакобетона при сжатии в зависимости от расхода цемента.

В момент длительного нагружения призматических образцов из составов бетонов №№ 1, 2, 5 и 6 сжимающее напряжение составляло 40 кг/см^2 , а призматических образцов из составов бетонов № 3, 4, 7, 8— 50 кг/см^2 . Поэтому, чтобы можно было более правильно качественно и количественно оценить влияние анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от расхода цемента, на фиг. 3, в качестве примера, приведены кривые мер ползучести всех составов шлакобетонов. Последние наглядно показывают, как с увеличением расхода цемента кривые меры ползучести по испытаниям призм перпендикулярно и параллельно слоям все больше приближаются друг к другу.

В табл. 4 приведены предельные значения мер ползучести всех составов бетонов при сжатии. Одновременно для каждого состава бетона приводится отношение меры ползучести призм, испытанных перпендикулярно к слоям, к мере ползучести призм, испытанных параллельно слоям.

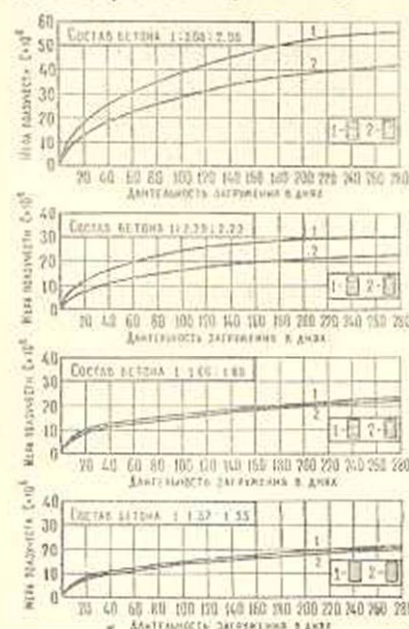
Как видно из табл. 4, независимо от вида бетона с увеличением расхода цемента мера ползучести бетона при сжатии уменьшается. С увеличением расхода цемента уменьшается

$$\text{и } \frac{C}{C'}$$

Таблица 4

Влияние анизотропии на меру ползучести бетона при сжатии в зависимости от расхода цемента

Вид бетона	Номер состава	Расход цемента на 1 м ³ бетона в кг	Мера ползучести бетона, когда направление сжимающей силы по отношению к слоям бетона		$\frac{C}{C'}$
			перпенд. ($C \times 10^6$)	парал. ($C' \times 10^6$)	
Шлакобетон	1	239	55,9	42,1	1,33
	2	312	30,0	22,5	1,33
	3	371	23,1	21,9	1,06
	4	433	21,1	19,2	1,10
Тяжелый бетон	5	235	40,4	32,0	1,26
	6	281	23,7	19,2	1,23
	7	329	18,4	14,4	1,28
	8	408	12,1	11,2	1,08



Фиг. 3. Влияние анизотропии на меру ползучести шлакобетона при сжатии в зависимости от расхода цемента.

Таким образом, с увеличением расхода цемента влияние анизотропии на меру ползучести бетона при сжатии уменьшается.

§ 4. Влияние анизотропии на прочность и деформативность бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента

Прочностные показатели 4-х составов шлакобетонов и 2-х составов тяжелых бетонов на растяжение приведены в табл. 5.

Как показывают данные табл. 5, прочностные показатели шлакобетонов составов № 2 и 3 на растяжение практически получились одинаковыми. Причиной этого, как уже указывалось, является то, что шлаковый песок, примененный для составов № 3 и 4, имел объемный вес меньший, чем шлаковый песок, примененный для составов № 1 и 2.

Как видно из табл. 5, во всех случаях, независимо от величины расхода цемента, прочность образцов, испытанных на растяжение параллельно слоям, получилась больше, чем прочность образцов, испытанных перпендикулярно слоям. По этой же причине и относительная прочность бетона на растяжение в первом случае больше.

На основании данных табл. 5 отношение $\frac{R_p}{R_p'}$ для всех составов бетона получилось практически одинаковым.

Таблица 5

Влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента

Вид бетона	Возраст бетона к моменту испытания	№ составов	Расход цемента на 1 м³ бетона в кг	Прочностные показатели бетонов, когда направление растягивающей силы при испытании по отношению к слоям бетона						$\frac{R'_p}{R_p}$
				перпендикулярно			параллельно			
				R в кг/см²	R_p в кг/см²	$\frac{R_p}{R}$	R' в кг/см²	R'_p в кг/см²	$\frac{R'_p}{R'}$	
Шлакобетон	28 дней	1	239	139	7,7	0,056	131	10,7	0,081	1,39
		2	312	206	12,1	0,059	211	16,9	0,080	1,40
		3	371	207	12,8	0,062	197	17,1	0,086	1,33
		4	433	272	13,8	0,050	276	19,1	0,069	1,38
Тяжелый бетон	1 год	5	235	—	4,4	—	—	5,7	—	1,29
		6	281	—	8,0	—	—	11,5	—	1,44

Таким образом, несмотря на то, что влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении весьма существенно, от расхода цемента как будто оно не зависит. Однако, мы полагаем, что и в данном случае влияние анизотропии имеет тот же характер, который мы наблюдали в случае сжатия. Разница заключается лишь в том, что при растяжении характер влияния анизотропии на прочность бетона стирается при более большом расходе цемента, чем это имеет место в случае сжатия.

По данным табл. 5 при одинаковом расходе цемента прочность тяжелого бетона при растяжении получилась меньше, чем прочность шлакобетона. На первый взгляд это может показаться неправдоподобным особенно если учесть, что данные испытаний тяжелых бетонов соответствуют возрасту 1 год, а данные шлакобетонов—28 дней. Однако, как будет показано, на это есть свои причины.

Мы не располагаем данными испытаний образцов из тяжелых бетонов в возрасте 28 дней, хранившихся в обычных условиях, где проводились наши длительные опыты. Поэтому мы воспользуемся результатами испытания восьмерок из бетонов составов № 5 и № 6, которые хранились во влажных условиях.

В качестве примера мы приведем данные, относящиеся только к бетону состава № 5.

По испытаниям восьмерок, хранившихся во влажных условиях перпендикулярно слоям, прочность бетона в 28-дневном и годичном возрастах соответственно составляла 9,8 и 18 кг/см², а по испытаниям восьмерок параллельно слоям — 10,0 и 26,7 кг/см². Сравнение этих данных с аналогичными данными, относящимися к обычному хранению (табл. 5), показывает, какое большое влияние оказывает влажность среды на прочность бетона при растяжении. Однако, надо полагать, что это влияние до месячного возраста было не существенным и поэтому без большой погрешности данные прочностных показателей бетона состава № 5 на рас-

тяжение, хранившегося во влажных условиях, можно отнести и к условиям обычного хранения.

Таким образом, нарастание прочности бетона на растяжение во времени при благоприятных влажностных условиях весьма существенно, а при малой влажности среды нарастание прочности не только может приостановиться, но даже может наблюдаться падение прочности бетона во времени.

Такое явление неоднократно наблюдалось и в ранее проведенных нами исследованиях [3, 4].

Падение прочности бетона во времени в данном случае обусловлено тем, что портландцемент, на котором были приготовлены все составы бетонов, был пуццолановый, а, как известно, при этом условия твердения приобретают еще большее значение.

Низкие показатели прочности тяжелых бетонов на растяжение по сравнению с показателями шлакобетонов частично объясняются и тем, что в момент приготовления шлакобетонов цемент имел марку «400», а тяжелых бетонов — «300».

Все, что было сказано в отношении влияния влажности среды на прочность бетона при растяжении, в полной мере относится и к прочности бетона на сжатие. Однако, при неблагоприятных влажностных условиях падение прочности бетона на сжатие во времени относительно меньше, чем падение прочности бетона на растяжение.

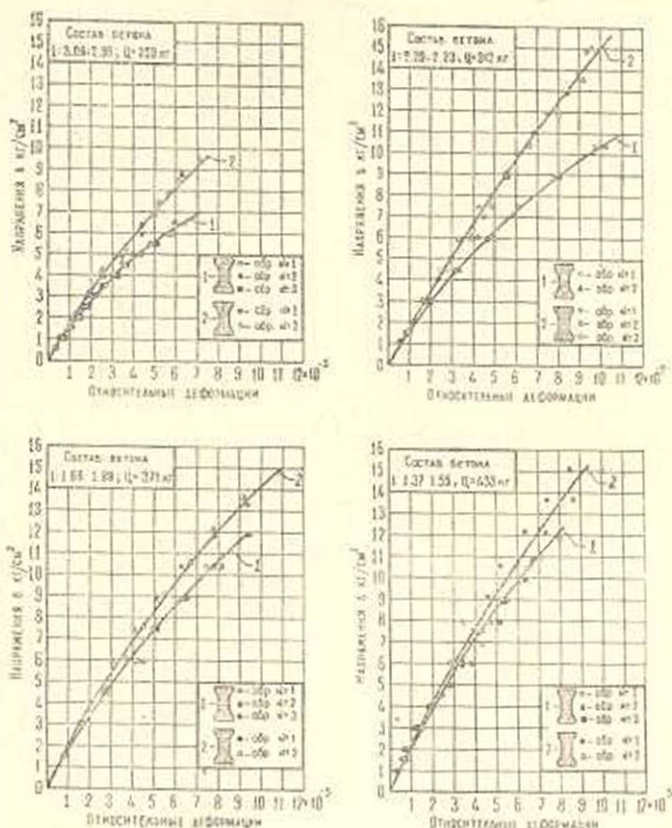
На фиг. 4 приведены кривые деформаций 4-х составов шлакобетонов на растяжение. В этом случае также все экспериментальные кривые деформаций каждой серии образцов были описаны зависимостью (2) и получены значения параметров a и b .

На фиг. 4 все кривые деформаций образцов, испытанных параллельно слоям, расположились выше кривых деформаций тех образцов, которые были испытаны перпендикулярно слоям, указывая тем самым на то, что в первом случае деформации меньше. Однако, нетрудно заметить, что с увеличением расхода цемента расхожимость кривых деформаций образцов, испытанных на растяжение перпендикулярно и параллельно слоям, уменьшается, и очевидно при некотором расходе цемента они совпадут. А дальнейшее увеличение расхода цемента уже приведет к тому, что будет наблюдаться обратное явление, т. е. кривая деформаций образцов, испытанных перпендикулярно слоям, займет положение выше кривой деформаций образцов, испытанных параллельно слоям.

Таким образом, характер влияния анизотропии на деформации бетона при растяжении, в зависимости от расхода цемента, такой же, как при сжатии. Разница заключается лишь в том, что в первом случае тот расход цемента, при котором деформации образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям, приобретают одинаковые значения гораздо больше.

В табл. 6 приведены значения модулей деформаций бетонов по касательной при растяжении, определенные по формуле (2), при различных напряжениях. Как и в случае сжатия, модуль деформации бетона по ис-

пытаниям образцов параллельно слоям больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям. Однако, с увеличением расхода цемента отношение модулей при этих двух видах испытаний уменьшается.



Фиг. 4. Влияние анизотропии на деформации шлакобетона при растяжении в зависимости от расхода цемента.

На основании данных табл. 6 можно сделать вывод, что и при растяжении влияние анизотропии на модуль деформации тяжелого бетона гораздо больше, чем на модуль деформации шлакобетона.

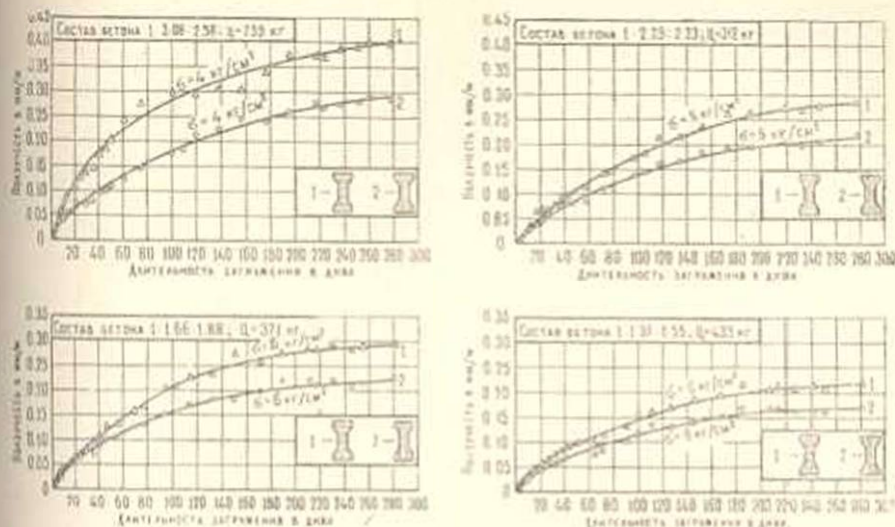
§ 5. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента

На фиг. 5 представлены кривые ползучести 4-х составов шлакобетонов при растяжении. Как видим, ползучесть образцов, испытанных перпендикулярно слоям при всех составах бетонов, больше ползучести образцов, испытанных параллельно слоям. Однако, разница деформаций ползучести и в этом случае, как при сжатии, с увеличением расхода цемента уменьшается. Более наглядно это видно из фиг. 6, где приведены кривые мер ползучести шлакобетонов при растяжении.

Таблица 6

Влияние анизотропии на модуль деформации бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента

Вид бетона	Возраст бетона к моменту испытания	Номер состава	Расход цемента на 1 м ³ бет. в кг	Направление растягивающей силы при испыт. по отнош. к слоям бетона	Модуль деформации бетона по касательной в $T/см^2$ при напряжении				Отношение модуля деформации образцов, испытанных параллельно слоям, к модулю деформаций образцов, испытанных перпендикулярно к слоям, при напряжении			
					$\tau=0$	$\tau=3$ кг/см ²	$\tau=5$ кг/см ²	$\tau=10$ кг/см ²	$\sigma=0$	$\sigma=3$ кг/см ²	$\sigma=6$ кг/см ²	$\sigma=10$ кг/см ²
Шлакобетон	28 дней	1	239	перпенд. парал.	167 172	112 145	67 121	— —	1,03	1,29	1,81	—
		2	312	перпенд. парал.	164 178	131 167	101 157	67 144	1,09	1,27	1,55	2,15
		3	371	перпенд. парал.	186 204	158 178	132 153	100 126	1,10	1,13	1,16	1,26
		4	433	перпенд. парал.	219 225	187 201	158 179	125 152	1,03	1,07	1,13	1,22
Тяжелый бетон	1 год	5	235	перпенд. парал.	112 195	45 108	— —	— —	1,74	2,40	—	—
		6	281	перпенд. парал.	138 207	108 159	82 115	— —	1,50	1,47	1,40	—



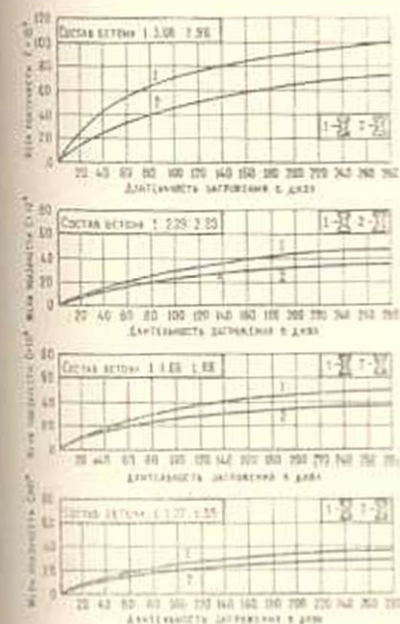
Фиг. 5. Влияние анизотропии на ползучесть шлакобетона при растяжении в зависимости от расхода цемента.

В табл. 7 сведены значения предельных значений мер ползучести всех составов бетонов по испытаниям образцов перпендикулярно и параллельно слоям при растяжении. Здесь же указаны значения отноше-

ний мер ползучести бетонов $\left(\frac{C_p}{C_n}\right)$.

На основании данных табл. 7 с увеличением расхода цемента мера ползучести как шлакобетона, так и тяжелого бетона при растяжении уменьшается. При одинаковом расходе цемента мера ползучести шлакобетона значительно больше, чем мера ползучести тяжелого бетона.

Меры ползучести шлакобетонов составов № 2 и 3 практически получились одинаковые (табл. 7). Такое же явление мы наблюдали в прочностных показателях этих составов бетонов, что было объяснено разными объемными весами тех песков, которые были применены для их приготовления. Именно по этой же причине, несмотря на большой расход цемента, мера ползучести шлакобетона состава № 3 получилась равной



Фиг. 6. Влияние анизотропии на меру ползучести шлакобетона при растяжении в зависимости от расхода цемента.

мере ползучести шлакобетона состава № 2.

Таблица 7

Влияние анизотропии на меру ползучести бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента

Вид бетона	Номер состава	Расход цемента на 1 м ³ бетона в кг	Мера ползучести бетона, когда направление растягивающей силы по отношению к слоям бетона		$\frac{C_p}{C_p'}$
			перпенд. ($C_p \cdot 10^6$)	парал. ($C_p' \cdot 10^6$)	
Шлакобетон	1	239	100,5	73,2	1,37
	2	312	48,0	35,3	1,36
	3	371	48,8	36,8	1,33
	4	433	36,2	28,0	1,28
Тяжелый	5	235	69,5	40,5	1,71
	6	281	40,6	23,4	1,73

Отношение $\frac{C_p}{C_p'}$ для разных составов шлакобетонов и тяжелых бетонов отличается незначительно (табл. 7). Однако, из опытов над четырьмя составами шлакобетонов вытекает вывод, что с увеличением расхода цемента влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении также уменьшается.

Таким образом, влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении в зависимости от расхода цемента имеет тот же характер, что и при сжатии. Однако, очевидно, в данном случае отношение $\frac{C_p}{C_p'}$ приобретает значение, равное единице при более значительном расходе цемента, чем это имеет место при сжатии.

§ 6. О причинах уменьшения влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона с увеличением расхода цемента

Проведенные исследования показали, что влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона в большой мере зависит от расхода цемента. При малых расходах цемента призмная прочность и прочность бетона на растяжение по испытаниям образцов параллельно слоям больше, а деформации меньше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям. С увеличением расхода цемента различия как прочностей, так и деформаций образцов, испытанных параллельно и перпендикулярно слоям, уменьшается и при некотором расходе цемента полностью стирается. Дальнейшее увеличение расхода цемента приводит к тому, что прочность бетона по испытаниям образцов параллельно слоям уже получается меньше, а деформации больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям.

Прочностные и деформативные показатели бетона по испытаниям образцов параллельно и перпендикулярно слоям на растяжение получаются одинаковые при более большом расходе цемента, чем на сжатие.

Для выяснения причин, которые приводят к изменению степени влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона с увеличением расхода цемента, мы будем исходить из той гипотезы, которая нами была выдвинута для объяснения природы анизотропии бетона [1, 2].

При укладке и уплотнении бетона в результате внутреннего расслаивания излишняя вода отжимается на поверхность бетона, а часть ее по пути задерживается под частицами крупного заполнителя, образуя множества водных прослоек. В дальнейшем по мере твердения бетона, особенно когда это происходит в условиях невысокой влажности среды, вода из указанных прослоек испаряется и на их местах образуются пустоты, которые ослабляют структуру бетона и тем самым оказывают отрицательное влияние на прочность бетона. Отрицательное влияние получается наибольшим в том случае, когда призмы и восьмерки испытываются перпендикулярно слоям укладки бетона, так как внешняя нагрузка направлена перпендикулярно площади пустот [1, 2].

При приготовлении бетона с увеличением расхода цемента количество воды, которое поглощается цементом при его затворении, увеличивается; поэтому уменьшается количество свободной излишней воды и той ее части, которая задерживается под частицами крупного заполнителя при укладке и уплотнении бетона. А последнее приводит к уменьшению как количества, так и размеров тех дефектов, которые образуются в бетоне в результате внутреннего расслаивания, и тем самым к уменьшению влияния анизотропии.

Таким образом, с увеличением расхода цемента влияние анизотропии на прочность и деформативность бетона, обусловленное внутренним расслаиванием, уменьшается и при некотором расходе цемента стирается. Такой вывод вытекает из наблюдавшегося того явления, что после некоторого расхода цемента при дальнейшем его увеличении призмная прочность бетона по испытаниям образцов параллельно слоям получается, наоборот, меньше, а деформации больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям.

Исходя из данного нами объяснения причины анизотропии бетона, внутреннее расслаивание не может привести к такому явлению. Здесь несомненно есть другая причина, влияние которой противоположно влиянию анизотропии и их наложение приводит к такому явлению.

На основании опытов О. Н. Штерна прочность призм, испытанных параллельно слоям, на 10—13% меньше, чем прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям [6]. Аналогичное явление наблюдалось и в опытах Г. Н. Писанко [5].

В работе О. Н. Штерна состав бетона, над которым были выполнены его опыты, не приводится. Что же касается опытов Г. Н. Писанко, то они относятся к высокопрочному бетону с большим расходом цемента. Однако, нет сомнения, что и в опытах О. Н. Штерна испытывался бетон с большим расходом цемента, так как на основании наших исследований только в этом случае призмная прочность по испытаниям образцов па-

параллельно слоям получается меньше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям.

При изготовлении бетонных образцов слои бетона по высоте из-за неодинаковой степени уплотнения приобретают разные прочностные и деформативные свойства. И, как указывает О. Н. Штерн, это обстоятельство отрицательно сказывается на прочности призм, бетонируемых в горизонтальном положении. А происходит это так потому, что при их испытании из-за неодинаковой прочности слоев нагрузка сечением воспринимается неравномерно. Вначале в работу включаются более плотные и прочные слои бетона, и с повышением нагрузки происходит перераспределение напряжений с прочных слоев на менее прочные. А поскольку еще до того, как все сечение бетонного образца в полной мере включается в работу, происходит разрушение прочных слоев, рабочее сечение уменьшается, и разрушающая нагрузка понижается. При вертикальном бетонировании образцов бетон по высоте также получается неоднородным, однако при испытании, поскольку нагрузка воспринимается равномерно всем сечением, прочность получается больше. Это и есть тот дополнительный фактор, влияние которого, накладываясь на влияние анизотропии, приводит к полученным соотношениям призмных прочностей, модулей деформаций и деформаций ползучести бетонных образцов, испытанных параллельно и перпендикулярно слоям в зависимости от расхода цемента.

Влияние анизотропии, обусловленное внутренним расслаиванием, на прочность, деформативность и ползучесть бетона до определенного расхода цемента более существенно, чем то влияние, которое оказывает неоднородность бетона, возникающая вследствие неодинаковой степени уплотнения его слоев. Это так потому, что в противном случае и при малых расходах цемента прочность призм по испытаниям образцов параллельно слоям была бы меньше, а деформации больше, чем по испытаниям образцов перпендикулярно слоям.

Все вышесказанное в полной мере относится и к случаю растяжения. Разница заключается лишь в том, что в этом случае влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона стирается при более больших расходах цемента.

В ы в о д ы

1. Анизотропия бетона обусловлена внутренним расслаиванием, которое имеет место при его укладке и уплотнении.
2. Анизотропия оказывает существенное влияние на прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии и растяжении и в большой мере зависит от расхода цемента.

При малых расходах цемента, благодаря анизотропии, призмная прочность и прочность бетона на растяжение по испытаниям образцов параллельно слоям гораздо больше, а деформации при кратковременном и длительном нагружении меньше, чем по испытаниям образцов перпен-

дикулярно слоям. С увеличением расхода цемента, влияние анизотропии на прочность и деформативность бетона при сжатии и растяжении уменьшается и при некотором расходе цемента стирается.

3. При укладке и уплотнении слоёв бетона по высоте из-за неодинаковой степени уплотнения приобретают разные прочностные и деформативные свойства, что более отрицательно сказывается на прочности образцов, бетонируемых в горизонтальном положении.

4. До определенного расхода цемента влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона, обусловленное внутренним расслаиванием, более существенно, чем влияние неоднородности бетона из-за различной прочности и деформативности его слоёв.

5. Прочностные и деформативные показатели бетона по испытаниям образцов параллельно и перпендикулярно слоям на сжатие приобретают одинаковые значения при относительно меньшем расходе цемента, чем на растяжение.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 III 1965

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ԱԶԳԵՅՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՎԷՐ ՎՐԱ՝ ԿԱՆՎԱՅ ՑԵՄԵՆՏԻ ՄԱՍԻՄՑ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում ուսումնասիրվում է բետոնի սողքի վրա անիզոտրոպիայի ազդեցությունը սեղմման և ձգման ժամանակ՝ կախված ցիմենտի ծախսից:

Հետազոտությունները ըստց են ավել, որ անիզոտրոպիան, որը բետոնի տեղադրման ու խտացման ժամանակ ներքին շերտայնություն առաջացման արդյունք է, մեծապես ազդում է բետոնի ամրության, դեֆորմատիվ հատկությունների և սողքի վրա սեղմման ու ձգման ժամանակ:

Շերտերին զուգահեռ փորձարկումների գեպքում բետոնի պրիզմայական ամրությունը և ամրությունը ձգման դեպքում մեծ են, իսկ կարճատև ու երկարատև դեֆորմացիաները փոքր են, քան շերտերին ուղղահայաց փորձարկումներում: Այս տարրերությունը ցեմենտի ծախսի մեծացումից կախված փոքրանալով՝ վերանում է:

Ցեմենտի ծախսի հետագա մեծացումը հանգեցնում է նրան, որ պրիզմայական և ձգման ամրությունները շերտերին զուգահեռ փորձարկումներում առաջվում են փոքր, իսկ դեֆորմացիաները՝ մեծ, քան շերտերին ուղղահայաց փորձարկումներում: Վերջինս առաջանում է բետոնի անհամասեղության հետևանքով, որը բետոնի տեղադրման և խտացման ժամանակ, ըստ բարձրության տարրեր ամրության և դեֆորմատիվ հատկություններով շերտերի առաջացման արդյունք է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Карапетян К. С. Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. ДАН АрмССР, 24, № 4, 1957.
2. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на деформации ползучести бетона. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 6, 1957.
3. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от величины напряжения. ДАН АрмССР, 34, № 1, 1964.
4. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 1964.
5. Писанко Г. Н. Исследования прочностных и деформативных свойств высокопрочных бетонов. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института транспортного строительства, выпуск 36. М., 1960.
6. Штерн О. Н. Влияние различных факторов на призмную и кубиковую прочность бетона и на их отношение. Сборник статей "Методика испытания бетонных образцов на сжатие". Госстройиздат, М., 1963.

С. М. ТЕР-МИНАСЯНЦ

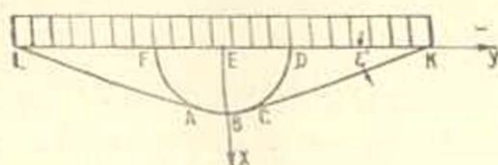
ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НИЖНЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается автомодельное движение возмущенной части нижнего полупространства, заполненного сжимаемой жидкостью, под действием постоянного давления, распространяющегося вдоль свободной поверхности с постоянной скоростью, значительно большей, чем скорость звука в жидкости, заполняющей нижнее полупространство. Рассматривается плоская задача. Уравнение состояния предполагается представленным произвольной дифференцируемой функцией $p = f(\rho, T)$, удовлетворяющей условию $\partial f / \partial T > 0$ и не нарушающей автомодельности движения. Решение получается путем сведения к краевой задаче Римана-Гильберта. Всестороннее исследование других случаев этой задачи содержится в монографии А. Г. Багдоева [1].

§ 1. Введение

В момент $t = 0$ в какой-либо точке свободной поверхности сжимаемой жидкости возникло давление p_2 и, оставаясь постоянным, стало распространяться вдоль свободной поверхности. Мы будем рассматривать тот случай образующегося движения, когда можно пренебречь влиянием деформации свободной поверхности на поле давлений в верхнем полупространстве. Предположим также, что скорость распространения фронта этого давления вдоль свободной поверхности тоже постоянна и равна $1/\varepsilon$, причем $\varepsilon \ll a_1$, если a_1 — скорость звука в исходной невозмущенной жидкости. Вследствие вышесказанного в глубь сжимаемой жидкости будет распространяться слабо-искривленная ударная волна. Мы рассмотрим плоскую задачу. Возмущенная область состоит из двух периферийных областей постоянного течения ALF и CKD (см. фиг. 1) и центральной области дифракции $ABCDEI$, где локализованы возмущения, порожденные искривленным участком ударной волны. Эти области разделены двумя дугами окружности Маха DC и FA . Систему декартовых координат свяжем с жидкостью, движущейся за ударной волной в нижнем полупространстве, направив ось x перпендикулярно, а ось y — параллельно невозмущенной свободной поверхности жидкости (см. фиг. 1). Изучаемое движение от-

ляется величинами порядка ε от одномерного движения, представляющего собой прохождение плоской ударной волны через границу раздела.



Фиг. 1.

§ 2. Постановка задачи для волнового уравнения

Обозначим через V скорость ударной волны, идущей в нижнем полупространстве, относительно заполняющей его невозмущенной жидкости, а через V редуцированную ею скорость жидкости. Уравнение нашего слабо-искривленного фронта можно записать тогда в виде

$$x = (U - V)t + \chi(t, y). \quad (1)$$

Закрепим индекс „1“ за параметрами исходной невозмущенной жидкости, а индекс „2“ за параметрами жидкости в области за ударной волной. Уравнения плоского нестационарного движения сжимаемой жидкости и соотношения на искривленной ударной волне (см., напр., [5]) после их линеаризации относительно вышеуказанного одномерного движения можно записать в виде уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \rho_2 \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & \rho_2 \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial y}, & \frac{\partial p}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2)$$

граничные условия на искривленном фронте

$$\begin{aligned} (U - V)\rho - \rho_2 u &= \rho_2 \frac{V}{U} \frac{\partial \chi}{\partial t}, & p + (U - V)^2 \rho - 2\rho_2 (U - V)u &= 0, \\ v &= -V \frac{\partial \chi}{\partial y}, & (x_0 + 1)p - x_0 a_2^2 \rho - \rho_2 (U - V)u - \rho_2 V \frac{\partial \chi}{\partial t} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} a_2^2 &= \frac{1C_2 \rho_2^2 f_2 + \rho_2 f_1}{1C_2 \rho_2^2} = \text{const}, \\ f_2 &= \frac{\partial f}{\partial \rho}, & f_1 &= \frac{\partial f}{\partial t}, & x_0 &= \frac{\rho_2 1C_2}{f_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

через p_2 , ρ_2 , a_2 мы обозначим давление, плотность и скорость звука области „2“, а p , ρ , u , v — возмущения давления, плотности верти-

кальной и горизонтальной составляющих скорости в области дифракции, T — температура, C_v — теплоемкость при постоянном объеме, I — механический эквивалент тепла. В уравнениях состояния p , ρ обозначают суммарные величины, однако нет оснований для смешения их с возмущениями p , ρ . В случае уравнения состояния Клапейрона, обозначая через κ показатель адиабаты, будем иметь $\kappa_0 = \frac{1}{\kappa - 1}$.

Систему (2) нетрудно свести к волновому уравнению для давления

$$\square p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Нетрудно получить величины углов наклона периферийных участков ударной волны к оси y

$$\epsilon' = \pm U, \quad (6)$$

для этих участков имеем очевидные равенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = 0, \quad \chi(t, y) = \mp \epsilon' y. \quad (7)$$

Подстановка (7) в третье уравнение системы (3) дает

$$v = \pm V \epsilon'. \quad (8)$$

Это третье уравнение и остальные уравнения системы (3) взаимно независимы. Поэтому с учетом (7) для областей постоянного течения из (3) получим

$$p = \rho = u = 0. \quad (9)$$

Условия (3) мы, в силу линейности задачи, считаем выполняющимися на прямой

$$x = (U - V)t. \quad (10)$$

Соотношения (3), (9), (10) вместе с замечанием в начале работы о постоянстве давления в верхнем полупространстве ($p = 0$) определяют условия на границе возмущенной дифракционной области.

§ 3. Сведение к задаче Римана-Гильберта

В силу автомодельности задачи мы можем, введя переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{a_2 t}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a_2 t} \quad (11)$$

и произведя последовательность преобразований

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad \theta = \arctg\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right); \quad (12)$$

$$r = \frac{2R}{1 + R^2}, \quad (13)$$

$$\mu = R \cos \theta, \quad \nu = R \sin \theta, \quad (14)$$

перейти от (5) к уравнению Лапласа

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} = 0 \quad (15)$$

внутри единичного круга.

Преобразование (11) фиксирует положение и размеры нашей области. Прямая (10) переходит при этом в прямую

$$\bar{x} = \frac{U - V}{a_2} = m, \quad (16)$$

которая в результате преобразования Чаплыгина (13) переходит в окружность

$$2R \cos \theta = m(1 + R^2), \quad (17)$$

ортогональную в единичной окружности — границе дифракционной области в переменных (11), (13) и (14). Центр окружности (17) будет в точке $\mu = 1/m$, $\nu = 0$. Указанное свойство преобразования Чаплыгина позволяет отобразить конформно возмущенную область на прямоугольник

$$-l < z < l, \quad 0 < \tau < \pi; \quad (18)$$

$$z = z + i\tau = \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - l + i \frac{\pi}{2}, \quad l = \frac{1}{4} \ln \frac{1+m}{1-m}, \quad \lambda = \mu + i\nu. \quad (19)$$

Верхняя полуплоскость плоскости $\omega = \varphi + i\psi$ функцией

$$z = C \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{V(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} \quad (20)$$

отображается на прямоугольник (18) с соответствием точек $\omega = 0$, $z = 0$; $\omega = 1$, $z = l$; $\omega = 1/k$, $z = l + i\pi$.

Константы k и C определяются указанным соответствием точек с помощью условий [7]:

$$CK(z) = l, \quad K'(z)/K(z) = \pi/l. \quad (21)$$

Здесь $\sin \alpha = k$, $K(z)$ и $K'(z)$ — полный и дополнительный полный эллиптические интегралы первого рода.

В координатах (11) функция $\chi(t, y)$, входящая в (1), преобразуется следующим образом:

$$\chi(t, y) = a_2 t \bar{\chi}(\bar{y});$$

заметим, еще, что $\partial \chi / \partial y = \partial \bar{\chi} / \partial \bar{y}$.

В работах [3] и [4], взятых вместе, проведено преобразование кривого условия на этом слабо-искривленном ударном фронте к пе-

ременным (19) для случая уравнения состояния Клайперона при $\kappa = 1,4$. Так как в случае рассматриваемого здесь произвольного уравнения состояния соответствующие выкладки аналогичны, мы не приводим их здесь, ограничиваясь выписыванием результатов преобразований и выражений для констант, входящих в получающиеся условия. Условия на ударном фронте приводят к двум соотношениям

$$u = Ap, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (22)$$

которые вместе с уравнениями движения (2) приводят в плоскости λ к условию

$$\frac{\partial p}{\partial n} / \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{A \lg \theta - B \operatorname{ctg} \theta}{V \sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta}}, \quad (23)$$

причем

$$A = \frac{a_2}{U - V} \frac{(x_0 + 1)(U - V)^2 + a_2^2 U (U - V)}{2x_0 a_2^2 - V(U - V)},$$

$$B = \frac{U}{U - V} \frac{a_2^2 (U - V) [(2 + x_0)V - x_0 U]}{2x_0 a_2^2 - V(U - V)}. \quad (24)$$

Из (19) и (17) для образов нашего слабо-искривленного ударного фронта в соответствующих плоскостях, с учетом того, что на дуге окружности (17) $\bar{y} = m \operatorname{tg} \theta$, можно получить

$$\bar{y} = -\sqrt{1 - m^2} \cos \tau = -m_1 \cos \tau. \quad (25)$$

Подстановка (25) в (23) даст условие в плоскости z на правой вертикальной стороне прямоугольника (18):

$$\frac{\partial p}{\partial n} / \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{D - A \cos 2\tau}{\sin 2\tau} = -\frac{1}{b(\tau)}, \quad (26)$$

$$D = 2B \frac{m}{m_1^2} - A. \quad (27)$$

Для получения граничного условия на образе прямой (16) в плоскости φ необходимо подставить в (26) зависимость

$$\tau = C \int_1^{\varphi} \frac{d\varphi}{V(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)}. \quad (28)$$

Однако, для выписывания решения этого не требуется: ниже мы будем просто писать, что на действительной оси φ плоскости φ

$$\left. \begin{aligned} a_1[\tau(\varphi)] \frac{\partial p}{\partial \varphi} + b_1[\tau(\varphi)] \frac{\partial p}{\partial \psi} &= 0 \\ a_1[\tau(\varphi)] &= D - A \cos 2\tau(\varphi) \text{ при } -\infty < \varphi < \infty \\ b_1[\tau(\varphi)] &= \begin{cases} -\sin 2\tau(\varphi) & \text{при } 1 < \varphi < 1/k \\ 0 & \text{при } \varphi < 1, \varphi > 1/k, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

причем при $1 < \varphi < 1/k$ $b[\tau(\varphi)] = b_1/a_1$ определяется по (27) и (26), а в остальных точках этой оси $b = 0$. Из (24), (26), (27) нетрудно установить, что a_1 и b_1 непрерывны при $-\infty < \varphi < \infty$. Соотношения (15), (29) дают постановку однородной краевой задачи Римана-Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции

$$\Gamma = \frac{dp}{d\varphi} + i \frac{\partial p}{\partial \psi}. \quad (30)$$

§ 4. Решение задачи Римана-Гильберта

Нетрудно установить, что индекс функции $a_1 + ib_1$ равен нулю, а решение задачи (15), (29) представляется в виде [2]:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= i\beta \exp\left(\frac{1}{\pi} \int_1^{1/k} \operatorname{Arctg} B[h(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta - \omega}\right) \\ \operatorname{Arctg} b[\tau] &= \operatorname{arctg} b[\tau] + i\pi \quad / = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < \tau_1 \\ 1 & \text{при } \tau_1 < \tau < \tau_2 \\ 2 & \text{при } \tau > \tau_2 \end{cases} \\ \tau_1 &= \frac{1}{2} \arccos \frac{D}{A}, \quad \tau_2 = \pi - \frac{1}{2} \arccos \frac{D}{A} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Здесь ζ — переменная интегрирования в направлении оси φ . Определим входящую сюда постоянную β и получим формулу, дающую распределение давления вдоль искривленной части ударного фронта. По формуле Сохотского имеем для внутренних предельных значений τ особого на разомкнутом контуре — отрезке $1 < \varphi < 1/k$, интеграла, входящего в (31), который мы обозначим через $F(\varphi)$:

$$\begin{aligned} F^+ &= \frac{1}{C} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{Arctg} b(h) - \operatorname{Arctg} b(\tau)}{\zeta - \varphi} \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)} d\zeta + \\ &+ \operatorname{Arctg} b(\tau) \ln \left| \frac{1 - k\varphi}{k(\varphi - 1)} \right| + i\pi \operatorname{Arctg} b(\tau). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь учтено, что $\arg[(1 - k\varphi)/k(\varphi - 1)] = 0$ и в интеграле произведена замена переменных по (28). Необходимые для подстановки сюда зависимости $\zeta(h)$ или, что одно и то же, $\varphi(\tau)$ образуются из (20) следующим образом [6]:

$$u = \operatorname{sn}\left(\frac{z}{C}, k\right); \quad \varphi = \operatorname{sn}\left(\frac{l}{C} + i \frac{\tau}{C}\right) = \operatorname{sn}\left(K + i \frac{\tau}{C}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{C}, k'\right)}; \quad (33)$$

Здесь дополнительный модуль эллиптического интеграла (20). Из (30) и (31) имеем

$$\frac{1}{\beta} \operatorname{Re} \Gamma^+(\varphi) = \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \frac{b[\tau(\varphi)]}{\sqrt{b^2[\tau(\varphi)] + 1}} \exp\left(\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} F^+\right). \quad (34)$$

Условия для определения β нам теперь доставит второе соотношение (22), интеграл от правой части которого по отрезку $(-m_1, m_1)$ прямой (18) (или его образу) равен в нашем случае $2v$. Запишем этот интеграл вдоль образа нашего отрезка в плоскости τ . Согласно (6), (8), (25), (28) имеем:

$$\frac{\beta B}{Cm} \int_0^{\pi} \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sqrt{(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)} \frac{d\tau}{\cos \tau} = 2UVz; \quad (35)$$

величина $\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ подставляется сюда из (34). Распределение давления вдоль искривленной части ударного фронта получим, интегрируя (34):

$$p = \int_0^{\pi - \arccos(\varphi/m_1)} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \sqrt{(\varphi^2 - 1)(1 - k^2 \varphi^2)} d\tau. \quad (36)$$

§ 5. Решение для давления

Из (31) с учетом (30) и уравнений Коши-Римана, интегрируя, находим:

$$p = \operatorname{Im} \left\{ \beta \int_{-1}^{\infty} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_1^{3/2} \operatorname{Arctg} b[\tau(\varphi)] \frac{d\tau}{z - \tau} \right] d\omega \right\}, \quad (37)$$

здесь нижний предел отвечает точке F (см. фиг. 1), в которой $p=0$. Вводя функции

$$\left. \begin{aligned} X &= -\exp \left[\frac{1}{\pi C} \int_0^{\tau} \operatorname{Arctg} b(h) \frac{(\zeta - \varphi) \sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \zeta^2)}}{(\zeta - \varphi)^2 + \psi^2} dh \right] \\ Y &= \frac{\psi}{\pi C} \int_0^{\tau} \operatorname{Arctg} b(h) \frac{\sqrt{(\zeta^2 - 1)(1 - k^2 \zeta^2)}}{(\zeta - \varphi)^2 + \psi^2} dh \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

разделим действительную и мнимую части (31)

$$\Gamma(\omega) = \beta X \sin Y - i\beta X \cos Y. \quad (39)$$

Величины φ и ψ , входящие в (33), определяются разделением действительной и мнимой частей первого соотношения (33) [6]:

$$\varphi = \frac{\eta \sqrt{1 - k'^2 \eta'^2}}{1 + (k^2 \eta^2 - 1) \eta'^2}, \quad \psi = \frac{\eta' \sqrt{(1 - \eta'^2)(1 - \eta^2)(1 - k^2 \eta^2)}}{1 + (k^2 \eta^2 - 1) \eta'^2}, \quad (40)$$

где

$$\eta(\sigma) = \operatorname{sn}\left(\frac{\sigma}{C}, k\right), \quad \tau'(\tau) = \operatorname{sn}\left(\frac{\tau}{C}, k'\right). \quad (41)$$

Из (13) и (19) имеем зависимость σ и τ от исходных полярных координат

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r \cos \theta}{1-r \cos \theta}, \quad \tau = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}. \quad (42)$$

В обозначениях (38) решение для давления из (39) и (37) представится в виде

$$p = \beta \int_0^{\bar{\tau}} X \cos Y d\varphi + \beta \int_{-1}^{\bar{\tau}} X \sin Y d\varphi. \quad (43)$$

Для расчета поля давления по заданным U , V и ε необходимо использовать следующие формулы (последовательно): (16), (19), (21), (24), (25), (26), (27), (42), (40), (38), (39), (35), (43).

§ 6. Форма волнового фронта

Из (3), (6), (8) и (22) имеем для функции $\bar{\chi}$ следующую задачу Коши

$$\frac{d^2 \bar{\chi}}{dy^2} = -\frac{B}{V} \frac{1}{y} \frac{\partial p}{\partial y}$$

при

$$\bar{y} = -m_1, \quad \bar{\chi} = -\varepsilon U m_1, \quad \frac{d\bar{\chi}}{dy} = \varepsilon U,$$

а ее решение

$$\bar{\chi} = \frac{B}{C^2 m_1} \int_0^{\pi - \arccos(\bar{y}/m_1)} \int_0^{\pi - \arccos(y/m_1)} \operatorname{Re} \Gamma(\varphi) \times \\ \times \frac{V(\bar{\tau}^2 - 1)(1 - k^2 \bar{\tau}^2) \sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}}{\cos \tau} d\bar{\tau} d\tau + \varepsilon U m_1.$$

В последнем соотношении символ Φ употреблен для выделения величин, переменных при интегрировании по τ , тогда как φ в этом соотношении зависит от $\bar{\tau}$, причем $\Phi(\tau) = \varphi(\bar{\tau})$ при $\tau = \bar{\tau}$. Такой же смысл имеет и величина $\bar{y}$: $\bar{y}(\bar{\tau}) = y(\tau)$ при $\tau = \bar{\tau}$.

Вычислительный центр
Московского государственного университета

Поступила 15.11.1965

Ս. Մ. ՏԵՐ-ՄԻՆԱՅԱՆՑ

ՍԵՂՄԵԼԻ ՀԵՂՈՒԿՈՎ ԼՅՎԱԾ ՍՏՐԻՆ ԿԻՍԱՍԱՐԱՆՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ
ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ստորին կիսատարածությունն զրադեցնող սեղմելի հեղուկի հորիզոնական ազատ մակերևույթի մի մասին հաստատուն ճնշում է կիրառված ափսոս, որ նրա ճակատը ալդ մակերևույթի երկայնությամբ շարժվում է հաստատուն մեծ արագությամբ (տես պատկեր 1), որի հակադարձ մեծությունը հանդիսանում է հարթ ալտոմոդելային խնդրի փոքր պարամետրը: Թույլատրվում է ուսումնասիրել շարժման ալտոմոդելայնությունը չխախտող վիճակի հալասարումների լայն դաս: Դիֆրակցիայի տիրույթի արտապատկերումը վերին կիսահարթության վրա, Չապլինի ձևափոխումը, հալասարումների ու եզրային պայմանների գծայնացումը հարվածային ճակատում թույլ են տալիս ստանալ Ռիման-Գիլբերտի համասեռ եզրային խնդրի անալիտիկ ֆունկցիայի համար, որի կեղծ ու իրական մասերը հանդիսանում են որոնելի ճնշման մասնավոր ածանցյալները ըստ ալտոմոդելային կոորդինատների: Լուծումը ճնշման համար տրվում է սեղուլյար քառակուսային հավասարումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. ГИФМЛ, М., 1958.
3. Lighthill M. J. The diffraction of blast I. Proceedings of the Royal society, A198, 1949.
4. Lighthill M. J. The diffraction of blast II. Proceedings of the Royal society, A200, 1950.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, ГИТТЛ, 1948.
6. Сикроский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ, М.—Л., 1936.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. ГИТТЛ, 1948.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. МАНУКЯН

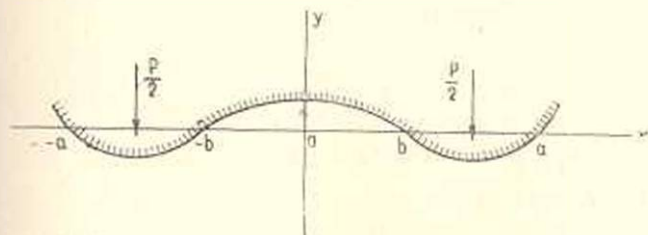
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ УЧАСТКОВ КОНТАКТА

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи теории ползучести с двумя участками контакта. В качестве исходной теории ползучести принята линейная теория наследственности с учетом старения материала, предложенная Н. Х. Арутюняном [1]. Как известно, эта теория применима для таких материалов, как бетон, дерево, фенольная пластмасса, связные грунты и др.

Плоская контактная задача теории ползучести при одном участке контакта решена И. Е. Прокоповичем [2], а плоская контактная задача теории упругости при двух участках контакта рассмотрена в работах И. Я. Штаермана [3], М. Г. Крейна и Г. Я. Попова [4].

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть два соприкасающихся между собой тела, обладающие свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых перпендикулярна к оси x (фиг. 1). При решении этой задачи силы трения не будем учитывать.



Фиг. 1.

Допустим, что контакт происходит на участках $(-a, -b)$ и (b, a) (фиг. 1). Рассмотрим симметричный случай двух участков контакта. Как известно [2], решение плоской контактной задачи теории ползучести в случае одного участка контакта $(-a, a)$ приводится к следующему интегральному уравнению

$$\frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - \mu_1^2(t)}{E_1(t)} + \frac{1 - \mu_2^2(t)}{E_2(t)} \right] \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds =$$

$$- \int_{\tau_1}^t \int_{-a(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) ds \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \mu_1^2(t, \tau)) \delta_1(t, \tau) + (1 - \mu_2^2(t, \tau)) \delta_2(t, \tau)] d\tau \Big\} = C^*(t) - f_0(x), \quad (1.1)$$

где $E(t)$ — модуль упруго-мгновенной деформации, $\mu(t)$ — коэффициент поперечного расширения для упругой части деформации $\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau)$ — полная относительная деформация при сжатии или растяжении, $\mu^*(t, \tau)$ — коэффициент поперечного расширения при деформации ползучести, $2a(t)$ — переменная ширина контакта, $C^*(t)$ — произвольная функция, $p^*(t, \tau)$ — контактное давление с учетом ползучести, τ_1 — время приложения нагрузки, t — время, $f_0(x) = f_1(x) + f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — уравнения поверхности первого и второго тел.

Если контакт происходит по двум участкам $(-a, -b)$ и (b, a) , то в этом случае основное интегральное уравнение контактной задачи теории ползучести будет иметь вид

$$\frac{2}{\pi} \left\{ \left[\frac{1 - \mu_1^2(t)}{E_1(t)} + \frac{1 - \mu_2^2(t)}{E_2(t)} \right] \left(\int_{-a(t)}^{-b(t)} + \int_{b(t)}^{a(t)} \right) \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds - \int_{\tau_1}^t \left(\int_{-a(t)}^{-b(t)} + \int_{b(t)}^{a(t)} \right) \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, \tau) ds \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 - \mu_1^2(t, \tau)) \delta_1(t, \tau) + (1 - \mu_2^2(t, \tau)) \delta_2(t, \tau)] d\tau \Big\} = C^*(t) - f_0(x), \quad b < |x| < a. \quad (1.2)$$

Рассмотрим симметричный случай задачи, т. е. когда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции четные и, стало быть, правая часть записанного уравнения тоже функция четная. Последнее обстоятельство позволяет нам считать справедливым

$$p^*(x, t) = p^*(-x, t). \quad (1.3)$$

В свою очередь (1.3) позволяет интервал интегрирования в уравнении (1.2), состоящем из двух участков, свести к одному.

Интегральное уравнение (1.2) можно переписать в следующей форме

$$\omega(x, t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) \omega(x, \tau) d\tau = \frac{C^*(t) - f_0(x)}{b(t)}, \quad (1.4)$$

где

$$\omega(x, t) = \left(\int_{a(t)}^{-b(t)} + \int_{b(t)}^{a(t)} \right) \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s, t) ds, \quad (1.5)$$

$$K(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{[1 - \mu_1^2(t, \tau)] \delta_1(t, \tau) + [1 - \mu_2^2(t, \tau)] \delta_2(t, \tau)}{b(t)}, \quad (1.6)$$

$$\theta(t) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - \mu_1^2(t)}{E_1(t)} + \frac{1 - \mu_2^2(t)}{E_2(t)} \right] \quad (1.7)$$

Таким образом, основное интегральное уравнение (1.2) плоской контактной задачи теории ползучести с двумя участками контакта распадается на интегральное уравнение Фредгольма первого рода (1.5), описывающее упруго-мгновенную задачу, и интегральное уравнение Вольтерра второго рода (1.4), учитывающее влияние ползучести.

Пользуясь условием (1.3), нетрудно показать, что интервал интегрирования в уравнении (1.5) можно свести к одному, для чего в интеграле на участке $(-a, -b)$ следует положить

$$s = -s_1. \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.5) примет следующий вид

$$\omega(x, t) = \int_{b(t)}^{a(t)} \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} p^*(s, t) ds. \quad (1.9)$$

Если в уравнении (1.9) сделать замену переменных

$$b^2 + \eta^2 = s^2, \quad b^2 + \zeta^2 = x^2, \quad (1.10)$$

то вместо (1.9) будем иметь

$$\omega(\sqrt{b^2 + \zeta^2}, t) = \int_0^{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{1}{|\zeta^2 - \eta^2|} q(\eta, t) d\eta, \quad (1.11)$$

где

$$q(\eta, t) = \frac{\eta p^*(\sqrt{b^2 + \eta^2}, t)}{\sqrt{b^2 + \eta^2}}. \quad (1.12)$$

Здесь $q(\eta, t)$ представляет собой новую неизвестную функцию, подлежащую определению в дальнейшем.

Нетрудно видеть, что из (1.4) и (1.11) при $b=0$ получим уравнение Прокоповича [2].

Таким образом, решение плоской контактной задачи теории ползучести с двумя участками контакта сводится к решению интегральных уравнений (1.4) и (1.11).

§ 2. Решение интегральных уравнений (1.4) и (1.11)

Решение уравнения (1.4) представим в виде [2]

$$\omega(x, t) = \gamma^*(t) - H^*(t) f_0(x), \quad (2.1)$$

где $\gamma^*(t)$ и $H^*(t)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Здесь $\gamma^*(t)$ — решение уравнения (1.4) при правой части, равной $\frac{C^*(t)}{b(t)}$, $H^*(t)$ — решение при правой части, равной $\frac{1}{b(t)}$.

Тогда (1.11) принимает вид

$$\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{1}{|\zeta^2 - \eta^2|} q(\eta, t) d\eta = \gamma^*(t) - H^*(t) f_0(\sqrt{b^2 + \zeta^2}). \quad (2.2)$$

Это обычное уравнение упруго-мгновенной задачи при наличии двух участков контакта для момента времени t с дополнительным множителем $H^*(t)$ при $f_0(x)$, который учитывает влияние полустрелки.

Интегральное уравнение (2.2) при одном участке контакта $(-a, a)$ будет

$$\int_0^a \ln \frac{1}{|x^2 - s^2|} p^*(s, t) ds = \gamma^*(t) - H^*(t) f_0(x). \quad (2.3)$$

Пользуясь решениями Н. А. Ростовцева [5] и М. Г. Крейна [6], И. Я. Прокопович для этого уравнения получил следующее решение

$$p^*(x, t) = \frac{\gamma^*(t)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + H^*(t) \frac{2}{\pi^2} \int_x^a \frac{udu}{\sqrt{u^2 - x^2}} \int_0^u \frac{f_0(s) ds}{\sqrt{u^2 - s^2}}. \quad (2.4)$$

Это решение непосредственно можно получить также из работы Н. Х. Арутюняна [7], полагая $\mu = 1$.

Из сравнения интегральных уравнений (2.2) и (2.3) нетрудно убедиться, что решение уравнения (2.2), аналогично (2.4), можно представить в виде

$$\begin{aligned} q(\zeta, t) = & \frac{\gamma^*(t)}{\pi \sqrt{a^2 - b^2 - \zeta^2}} + H^*(t) \frac{2}{\pi^2} \int_{\zeta(t)}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{udu}{\sqrt{u^2 - \zeta^2}} \times \\ & \times \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2 - \eta^2}} \frac{d^2}{d\eta^2} f_0(\sqrt{b^2 + \eta^2}) d\eta. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (1.10), (1.12) и (2.5) найдем

$$\begin{aligned} p^*(x, t) = & \frac{x}{\sqrt{x^2 - b^2}} \left[\frac{\gamma^*(t)}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} + \right. \\ & \left. + H^*(t) \frac{2}{\pi^2} \int_{\sqrt{x^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{udu}{\sqrt{u^2 - x^2 + b^2}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2 - \eta^2}} \frac{d^2}{d\eta^2} f_0(\sqrt{b^2 + \eta^2}) d\eta \right] \\ & b \leq x \leq a \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если в (2.6) принять $b=0$, то это решение будет совпадать с решением (2.4), полученным в работе [2] для плоской контактной задачи теории ползучести при одном участке контакта. Неизвестная функция $\gamma^*(t)$ определяется из уравнения равновесия

$$P(t) = 2 \int_b^a p^*(s, t) ds = 2 \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} q(\eta, t) d\eta. \quad (2.7)$$

Подставив (2.5) в (2.7) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$\gamma^*(t) = P(t) - \frac{2}{\pi} H^*(t) \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^2-b^2-\zeta^2} \frac{d^2}{d\zeta^2} f_0(\sqrt{b^2+\zeta^2}) d\zeta. \quad (2.8)$$

Тогда выражение контактного давления $p^*(x, t)$ примет вид

$$\begin{aligned} p^*(x, t) = & \frac{x}{\pi \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \left\{ P(t) - \right. \\ & - \frac{2}{\pi} H^*(t) \left[\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^2-b^2-\zeta^2} \frac{d^2}{d\zeta^2} f_0(\sqrt{b^2+\zeta^2}) d\zeta - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{a^2-x^2} \int_{\sqrt{x^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{udu}{\sqrt{u^2-x^2+b^2}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2-\eta^2}} \frac{d^2}{d\eta^2} f_0(\sqrt{b^2+\eta^2}) d\eta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

$b \leq x \leq a$

При этом решении предполагается, что величины a и b известны.

Если a и b неизвестны, то для определения неизвестных a и b следует пользоваться условием ограниченности контактного давления $p^*(x, t)$ во всей области контакта, включая и границы участков контакта $x=a$ и $x=b$.

Как известно [2], И. Я. Прокоповичем было показано, что при одном прямолинейном участке контакта ползучесть не оказывает влияния на распределение напряжений в месте контакта. Из формулы (2.9) видно, что при двух прямолинейных участках контакта ползучесть оказывает влияние на распределение усилий в месте контакта.

§ 3. Определение функции $H^*(t)$

Интегральное уравнение для определения $H^*(t)$, согласно (1.4) и (2.1), можно представить в виде

$$H^*(t) - \int_{\tau_1}^t K(t, \tau) H^*(\tau) d\tau = \frac{1}{\eta(t)}. \quad (3.1)$$

Решение уравнения (2.7) будет

$$H^*(t) = \frac{1}{\theta(t)} + \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) \frac{1}{\theta(\tau)} d\tau, \quad (3.2)$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента линейного интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(t, \tau)$.

Если для полных относительных деформаций принять выражения [1]

$$\varepsilon_1(t, \tau) = \frac{1}{E_1(\tau)} + \left(\frac{A_2}{\tau} + C_1 \right) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_2(t, \tau) = \frac{1}{E_2(\tau)} + \left(\frac{A_3}{\tau} + C_2 \right) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}],$$

где $A_2, A_3, C_1, C_2, \gamma$ — постоянные параметры, определяемые из опытов, а для упрощения дальнейших выкладок предполагать, что

$$\mu_1(t) = \mu_1^*(t, \tau) = \mu_1 = \text{const}, \quad \mu_2(t) = \mu_2^*(t, \tau) = \mu_2 = \text{const}, \quad (3.4)$$

то выражение неизвестной функции $H^*(t)$ можно будет представить в виде [2]

$$H^*(t) = \frac{1}{\theta(\tau_1)} \left[1 - \gamma \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) \int_{\tau_1}^t \frac{e^{-\gamma(\tau)}}{\theta(\tau)} d\tau \right], \quad (3.5)$$

где

$$C_0 = d_1 C_1 + d_2 C_2, \quad A_1 = d_1 A_2 + d_2 A_3,$$

$$d_1 = \frac{2(1 - \mu_1^2)}{\pi}, \quad d_2 = \frac{2(1 - \mu_2^2)}{\pi}, \quad (3.6)$$

$$\eta(\tau) = \gamma \int_{\tau_1}^{\tau} \left[1 + \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau} \right) \frac{1}{\theta(\tau)} \right] d\tau. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.5) следует, что функция $H^*(t)$ принимает максимальное значение при $t = \tau_1$ и минимальное при $t \rightarrow \infty$.

Если предполагать, что модули мгновенной деформации материалов постоянны, т. е.,

$$E_1(t) = E_1 = \text{const}, \quad E_2(t) = E_2 = \text{const}, \quad (3.8)$$

то выражение для $H^*(t)$ примет следующий вид [1]

$$H^*(t) = \frac{1}{\theta(\tau_1)} \left[1 - \gamma b E_1 \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1} \right) e^{r\tau_1 p_1} \frac{\Phi(r t, p_1) - \Phi(r \tau_1, p_1)}{r^{1-p_1}} \right], \quad (3.9)$$

где

$$\frac{E_2}{E_1} = m, \quad \frac{\varphi(\tau_2)}{\varphi(\tau_1)} = n, \quad \varphi_1(\tau) = C_1 + \frac{A_2}{\tau}, \quad \varphi_2(\tau) = C_2 + \frac{A_3}{\tau}, \quad (3.10)$$

$$r = \gamma(1 + b C_1 E_1), \quad p_1 = b \gamma A_2 E_1, \quad b = \frac{d_1 + d_2 n}{d_1 + d_2 m} m.$$

Здесь

$$\Phi(\zeta, \rho_1) = \int_0^{\zeta} \frac{e^{-\tau}}{\tau^{\rho_1}} d\tau \quad (3.11)$$

является неполной гамма-функцией.

В случае контакта тел, имеющих одинаковые характеристики деформативности, b будет равно единице.

Таким образом, значение неизвестной функции $H^*(t)$ найдено. Подставляя найденное выражение $H^*(t)$ в (2.9), получим значение контактного напряжения $p^*(x, t)$.

В заключение рассмотрим один пример решения контактной задачи теории ползучести с двумя участками контакта.

Пусть контакт происходит по параболической цилиндрической поверхности

$$f_0(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2R} \quad b \leq x \leq a, \quad (3.12)$$

Слева допустим, что величины a и b известны. Подставив выражение $f_0(x)$ из (3.12) в (2.9), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} p^*(x, t) = & \frac{x}{\pi \sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \left\{ P(t) + \frac{H^*(t)}{2R} (a^2 + b^2 - 2x^2) + \right. \\ & + \frac{H^*(t)}{\pi R} (a+b)b^2 \left[\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\sqrt{a^2-b^2-\zeta^2}}{(b^2+\zeta^2)^{3/2}} d\zeta - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{a^2-x^2} \int_{\sqrt{x^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{u du}{\sqrt{u^2-x^2+b^2}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2-\eta^2}} \frac{1}{(b^2+\eta^2)^{3/2}} d\eta \right] \right\}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Заменив $\eta = u \sin \varphi$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{d\eta}{\sqrt{u^2-\eta^2} (b^2+\eta^2)^{3/2}} &= \frac{1}{b^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{u^2}{b^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{b^2 \sqrt{b^2+u^2}} E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{u}{\sqrt{b^2+u^2}}\right). \quad (3.14) \end{aligned}$$

Здесь

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{u}{\sqrt{b^2+u^2}}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{u^2+b^2} \sin^2 \alpha} d\alpha \quad (3.15)$$

представляет собой полный эллиптический интеграл второго рода [3].

Далее, пользуясь (1.10), можем написать

$$\int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\sqrt{a^2-b^2-\zeta^2}}{(b^2+\zeta^2)^{3/2}} d\zeta = \int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2 \sqrt{x^2-b^2}} dx. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.14) и (3.16) в (3.13), окончательно для $p^*(x, t)$ получим

$$\begin{aligned} p^*(x, t) = & \frac{x}{\pi \sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \left\{ P(t) + \frac{H^*(t)}{2R} (a^2+b^2-2x^2) + \right. \\ & + \frac{H^*(t)}{\pi R} (a+b) \left[b^2 \int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2 \sqrt{x^2-b^2}} dx - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{a^2-x^2} \int_{\sqrt{x^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{u E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{u}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}{\sqrt{u^2+b^2} \sqrt{u^2-x^2+b^2}} du \right] \right\}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Сейчас рассмотрим тот случай, когда величины a и b неизвестны. Для их определения нужно воспользоваться условием, что $p^*(x, t)$ должно оставаться ограниченным при $x=a$ и $x=b$. Как видно из формулы (3.17), это возможно лишь в том случае, если числитель в этой формуле обращается в нуль при $x=a$ и $x=b$. Отсюда получаем два уравнения

$$\begin{aligned} P(t) - \frac{H^*(t)}{2R} (a^2-b^2) + \frac{H^*(t)}{\pi R} (a+b) b^2 \int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2 \sqrt{x^2-b^2}} dx &= 0, \\ P(t) + \frac{H^*(t)}{2R} (a^2-b^2) + \frac{H^*(t)}{\pi R} (a+b) \left[b^2 \int_b^a \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2 \sqrt{x^2-b^2}} dx - \right. \\ & \left. - \sqrt{a^2-b^2} \int_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{u}{\sqrt{b^2+u^2}}\right)}{\sqrt{b^2+u^2}} du \right] = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяем значения a и b . Подставляя их значения в (3.17), получим выражение контактного давления $p^*(x, t)$.

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ՍՈՎԵՏԻ ՏԵԾՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԷՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ
ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՏԵՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է սողքի տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը, երբ գոյություն ունի կոնտակտային երկու տիրույթ: Որպես սողքի հիմնական տեսություն ընդունվում է Ն. Ս. Հարությունյանի առաջադրած մասանշականության դժային տեսությունը նյութի ծերացման հաշվառումով: Ինչպես հայտնի է, այս տեսությունը կիրառելի է բետոնի, փայտի, պլաստմասսայի, կապակցված դրոշմների և այլ նյութերի համար:

Սողքի տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը, մեկ կոնտակտային տիրույթի դեպքում, լուծվում է Ի. Ե. Պրոկորովիչի կողմից, իսկ առաձգականության տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը, կոնտակտային երկու տիրույթների առկայության դեպքում, քննարկվում է Ի. Յա. Շտաերմանի, Մ. Դ. Կրեյնի և Դ. Յա. Պապովի աշխատություններում:

Դիտարկվող կոնտակտային խնդրի լուծումը բերվում է (1.4) և (1.11) ինտեգրալ հավասարումների համաակց լուծմանը, որոնցից առաջինը իրենից ներկայացնում է Վոլտերի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարում, իսկ երկրորդը՝ Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարում: (1.11) և (1.4) հավասարումների լուծումները ներկայացվում են համապատասխանաբար (2.9) և (3.9) տեսքերով: Այսպիսով, որոշվում է անհայտ $p^*(x, t)$ ֆունկցիան, որը բնորոշում է ճնշման ինտենսիվությունը սողքի հաշվառումով:

Աշխատության վերջում, որպես կիրառություն, դիտարկվում է մի օրինակ, երբ կոնտակտ տեղի է ունենում պարաբոլական ղառային մակերևույթով: Քննարկվում է երկու դեպք՝ 1. α, β մեծությունները հայտնի են և 2. α, β մեծությունները անհայտ են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
2. Проколович И. Я. О решении плоской контактной задачи теории ползучести. ПММ, № 6, 1956.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
4. Попов Г. Я. Решение контактных задач теории упругости методом интегральных уравнений. Докторская диссертация, Одесса, 1962.
5. Ростовцев Н. А. К решению плоской контактной задачи. ПММ, 17, вып. 1, 1953.
6. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. ДАН СССР, 100, № 3, 1955.
7. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 23, вып. 5, 1959.
8. Градштейн И. С. и Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

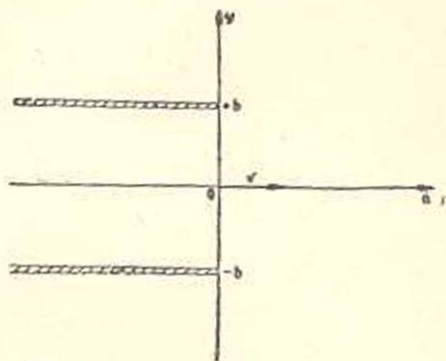
Ю. М. АЙВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

ИЗЛУЧЕНИЕ ТОЧЕЧНОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ПРОЛЕТАЮЩЕЙ ПО ОСИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО ВОЛНОВОДА

В последнее время появилось много работ, в которых рассматривается излучение заряженных источников, пролетающих мимо различных оптических неоднородностей [1-4]. Во всех этих задачах применяем разных модификаций метода Винера-Хопфа удается получить точное решение поставленной задачи [5]. К классу этих задач относится задача об излучении точечной заряженной частицы при пролете мимо открытого конца полубесконечного плоского идеально проводящего волновода, к решению которой мы перейдем ниже.

Плоский волновод состоит из двух полубесконечных тонких пластинок $x \leq 0$, $y = \pm b$. Ось z направлена по нормали к плоскости пластинки (фиг. 1). Пусть из волновода вылетает точечная заряженная частица, движущаяся по оси x со скоростью $v_x = v$.

Для нахождения полей распространяемой задачи мы должны решить уравнения Максвелла с граничными условиями, накладываемыми наличием двух полубесконечных идеально проводящих полуплоскостей. Следовательно, к решению неоднородного уравнения мы должны прибавить такие решения уравнения Даламбера, чтобы граничные условия удовлетворялись. Как решение неоднородного волнового уравнения мы выберем поле заряженной частицы, пролетающей по оси плоского бесконечного волновода



Фиг. 1.

$$E_{x,z}^{\eta}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{x,z}^0(\omega, q, y) e^{\frac{i\omega}{v}x - iqz - i\omega t} d\omega dq$$

$$E_{x,z}^{\eta}(\omega, q, y) = R_{x,z} \left[e^{-\eta|y|} - \frac{\operatorname{ch} ly}{\operatorname{ch} lb} e^{-lb} \right], \quad (1)$$

где

$$R_x = -\frac{i\omega e\gamma^2}{2\pi l c^2}, \quad R_z = \frac{ieq}{2\pi l v}, \quad l = \sqrt{k^2 \gamma^2 + q^2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Здесь $E_{x,z}^0$ — тангенциальные компоненты электрического поля. Остальные компоненты электромагнитного поля можно выразить через них. Решение уравнения Даламбера для этих же компонент полей будем искать в виде

$$E_{x,z} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y) e^{-i\alpha x - i q z - i \omega t} d\alpha dq d\omega. \quad (2)$$

Тогда для функции $\Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y)$ получим соответствующие решения

$$\begin{aligned} \Phi_{x,z}^{(n)}(\alpha, q, \omega, y) &= A_{x,z}(\alpha) e^{-\lambda y} \quad \text{при } y \geq b \\ \Phi_{x,z}(\alpha, q, \omega, y) &= B_{x,z}(\alpha) e^{-\lambda y} + C_{x,z}(\alpha) e^{\lambda y} \quad \text{при } |y| \leq b \\ \Phi_{x,z}^{(n)}(\alpha, q, \omega, y) &= D_{x,z}(\alpha) e^{\lambda y} \quad \text{при } y \leq -b, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\lambda = (\alpha^2 - p^2)^{1/2}, \quad p^2 = k^2 - q^2, \quad \text{Im } k = b > 0, \quad \text{Re } \lambda > 0 \quad \text{при } |\text{Im } \alpha| < b.$$

Неизвестные функции $A_{x,z}$, $B_{x,z}$, $C_{x,z}$, $D_{x,z}$ определяются из сшивки решения (2)–(3) с решением (1). Сшивка должна быть произведена так, чтобы на полубесконечных полуплоскостях удовлетворялись граничные условия

$$E_{x,z} = 0 \quad x < 0, \quad y = \pm b. \quad (4)$$

Из условий непрерывности $E_{x,z}$ мы получаем связь между $A_{x,z}$, $B_{x,z}$, $C_{x,z}$, $D_{x,z}$

$$\begin{aligned} A_{x,z}(\alpha) &= B_{x,z}(\alpha) + C_{x,z}(\alpha) e^{2\lambda b} \\ D_{x,z}(\alpha) &= B_{x,z}(\alpha) e^{2\lambda b} + C_{x,z}(\alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения функций $B_{x,z}$ и $C_{x,z}$, следуя методу, изложенному в книге [5, § 3.3], мы получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} P_{x,z}^{\prime-} &= \sigma_{x,z} - \tau_{x,z} - \frac{\lambda S_{x,z}^+}{K(\alpha)} \\ S_{x,z}^{\prime-} &= \sigma_{x,z} + \tau_{x,z} - \frac{P_{x,z}^+}{bL(\alpha)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$K(\alpha) = e^{-\lambda b} \text{ch } \lambda b, \quad L(\alpha) = \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda b} \text{sh } \lambda b.$$

Функции $P_{x,z}^{\prime-}$ и $S_{x,z}^{\prime-}$ — некоторые функции от комплексного переменного α , соответственно голоморфные в нижней полуплоскости α

($\text{Im } \alpha < k_2$, где $k_2 = \text{Im } k$), а $P_{x,z}^+$ и $S_{x,z}^+$ соответственно голоморфны в верхней полуплоскости α ($\text{Im } \alpha > -k_2$). Искомые функции $B_{x,z}$ и $C_{x,z}$ выражаются через $S_{x,z}^+$ и $P_{x,z}^+$ следующими соотношениями

$$B_{x,z}(\alpha) + C_{x,z}(\alpha) = \frac{S_{x,z}^+}{\text{ch } \lambda b} \quad (7)$$

$$B_{x,z}(\alpha) - C_{x,z}(\alpha) = -\frac{P_{x,z}^+}{\text{sh } \lambda b}.$$

Функции $\sigma_{x,z}$ и $\tau_{x,z}$ находим из условий непрерывности на продолжении двух пластин дифференциалов (по y) полных полей: так, например, $\sigma_{x,z}$ определяется из формулы

$$\sigma_{x,z} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial E_{x,z}^0(q, \omega, y)}{\partial y} \right]_{y=b} e^{i \frac{\omega}{v} x + i \alpha y} dy. \quad (8)$$

Используя формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} \tau_{x,z} &= -\sigma_{x,z} \\ \sigma_{x,z} &= -\frac{R_{x,z}}{4\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}}. \end{aligned} \quad (9)$$

При учете (9) уравнения (6) переходят в

$$S_{x,z}^- = -\frac{P_{x,z}^+}{bL(\alpha)}, \quad (10')$$

$$P_{x,z}^- = -\frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} - \frac{\lambda S_{x,z}^+}{K(\alpha)}. \quad (10'')$$

Решение функционального уравнения (10') дает $P_{x,z}^+ = 0$, следовательно, из (7) получаем

$$B_{x,z}(\alpha) = C_{x,z}(\alpha), \quad A_{x,z}(\alpha) = D_{x,z}(\alpha).$$

Последнее соотношение физически ясно, так как из симметрии задачи видно, что поле в пространстве $y > 0$ и $y < 0$ должно быть одинаково. Поэтому при дальнейшем рассмотрении мы ограничимся пространством $y > 0$. Для решения (10'') мы должны факторизовать функцию $K(\alpha)$. (Факторизация $K(\alpha) = K^+(\alpha)K^-(\alpha)$ приведена в книге [5]). Тогда уравнение (10'') примет вид

$$\frac{P_{x,z}^- K^-(\alpha)}{\sqrt{\alpha - p}} + \frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\text{ch } \lambda b} \frac{1}{\alpha + \frac{\omega}{v}} \left[\frac{K^-(\alpha)}{\sqrt{\alpha - p}} - \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{\sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}} \right] =$$

$$= -\frac{\sqrt{\alpha+p} S_{x,z}^+}{K^+(x)} - \frac{R_{x,z}}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{w}{v}\right)}{\alpha + \frac{w}{v}} \frac{1}{\sqrt{-\frac{w}{v} - p}}. \quad (11)$$

Решение этого уравнения при учете условий на ребре [4] запишется следующим образом

$$S_z^+ = -\frac{R_z}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{1}{\alpha + \frac{w}{v}} \frac{K^-\left(-\frac{w}{v}\right) K^+(x)}{\sqrt{\alpha+p} \sqrt{-\frac{w}{v} - p}},$$

$$S_x^+ = -\frac{R_x}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{1}{\alpha + \frac{w}{v}} \frac{K^-\left(-\frac{w}{v}\right) K^+(x)}{\sqrt{\alpha+p} \sqrt{-\frac{w}{v} - p}} + \frac{CK^+(x)}{\sqrt{\alpha+p}}, \quad (12)$$

где C — пока неизвестный постоянный коэффициент. Зная функции S_z^+ и S_x^+ , мы можем с учетом (2), (3), (5), (7) определить тангенциальные компоненты электрического поля следующими формулами

$$E_{x,z} = E_{x,z}^0 + \int_{-\infty}^{\infty} S_{x,z}^+ \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} e^{-i\alpha x - i q z - i\omega t} d\alpha dq d\omega \quad \text{при } |y| \leq b \quad (13)$$

$$E_{x,z} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x,z}^+ e^{\lambda b} e^{-i\alpha x - \lambda y - i q z - i\omega t} d\alpha dq d\omega \quad y \geq b. \quad (13')$$

Нормальная к стенкам волновода компонента электрического поля E_y определяется из уравнения $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, откуда получаем

$$E_y = E_y^0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [i\alpha S_x^+ + i q S_z^+] \frac{\operatorname{sh} \lambda y}{\operatorname{ch} \lambda b} e^{-i\alpha x - i q z - i\omega t} d\alpha dq d\omega \quad |y| \leq b \quad (14)$$

$$E_y = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} [i\alpha S_x^+ + i q S_z^+] e^{\lambda b} e^{-i\alpha x - \lambda y - i q z - i\omega t} d\alpha dq d\omega \quad y \geq b. \quad (14')$$

Компоненты магнитного вектора $\vec{H}$ находим из уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{E}_\omega = \frac{i\omega}{c} \vec{H}_\omega.$$

Неизвестный коэффициент C мы определим из требования, чтобы скачок нормальной компоненты электрического поля равнялся нулю на продолжении плоскостей волновода. Это требование дает следующее условие

$$pS_x^+(-p) = qS_z^+(-p). \quad (15')$$

Из условия (15) получаем

$$C = \frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{\sqrt{-\frac{\omega}{v} - p} \left(\frac{\omega}{v} - p\right)} \left[R_x - \frac{q}{p} R_z\right]. \quad (15'')$$

Таким образом, для S_x^+ и S_z^+ окончательно получим

$$S_z^+ = -\frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(z)}{\sqrt{z+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}} \frac{R_z}{z + \frac{\omega}{v}} \quad (16'')$$

$$S_x^+ = \frac{1}{2\pi i} \frac{l}{\operatorname{ch} lb} \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) K^+(z)}{\sqrt{z+p} \sqrt{-\frac{\omega}{v} - p}} \left[-\frac{R_x}{z + \frac{\omega}{v}} + \frac{R_x - \frac{q}{p} R_z}{-p + \frac{\omega}{v}} \right].$$

Для вычисления полей внутри волновода нужно знать поведение подынтегрального выражения формул (13) и (14) в верхней полуплоскости комплексного переменного z . Легко заметить, что единственными особенностями подынтегральных функций в верхней полуплоскости являются нули функции $\operatorname{ch} \lambda b$. Поэтому интегралы (13) и

$$(14) \text{ сводятся к сумме вычетов в полюсах } z_{2m+1} = \sqrt{p^2 - \frac{\pi^2 (2m+1)^2}{4b^2}}.$$

Физически это соответствует возбуждению собственных волноводных волн, как при влете, так и при вылете частицы.

Подынтегральные выражения имеют полюс также в точке $z = -\frac{\omega}{v}$, которая лежит в нижней полуплоскости z . Для нахождения

полей в пространстве продолжения волновода $x > 0$ контур интегрирования нужно замкнуть снизу, тогда вычет в этом полюсе вместе с $\vec{E}^i$ даст поле частицы в пустоте.

Рассмотрим теперь поле, возбужденное в пространстве вне волновода. Формулы (13'') и (14'') дают возможность вычислить поля излучения на больших расстояниях от открытого конца волновода. Введем сферические координаты $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = R \cos \psi$, $r = R \sin \psi$. Тогда для нахождения полей на больших расстояниях* можем пользоваться формулой

$$\int f(z, q, \lambda) e^{-i\lambda x - i q y - i q z} dz dq =$$

* Под большими расстояниями мы понимаем $R \gg \frac{\lambda}{\sin^2 \psi}$.

$$= -(2\pi ik) \frac{e^{ikR}}{R} \sin \varphi \sin \psi f(-k \sin \psi \cos \varphi, -k \cos \psi, -ik \sin \psi \sin \varphi) \quad (17)$$

Угловое распределение интенсивности излучения на частоте ω найдем из формулы [6]

$$I_{\omega}(\psi, \varphi) = c |\vec{E}_{\omega}|^2 R^2 d\omega = 4\pi^2 k^2 c \sin^2 \varphi \sin^2 \psi \left\{ |S_x^+|^2 + |S_z^+|^2 + \left| \frac{\alpha S_x^+ + \beta S_z^+}{\lambda} \right|^2 \right\}, \quad (18)$$

где в аргументы функций S_x^+ , S_z^+ и λ подставлены соответствующие выражения по формуле (17). После довольно долгих преобразований окончательно получаем

$$I_{\omega}(\psi, \varphi) = \frac{e^2 c}{2\pi^2} \frac{\cos^2(kb \sin \varphi \sin \psi)}{\text{ch}^2 lb} \left| \frac{K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right)}{K^-(k \cos \varphi \sin \psi)} \right| \times \\ \times \frac{\cos^2 \psi \cos^2 \frac{\varphi}{2} (1 - \beta \sin \psi) + \alpha_0^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} (1 + \beta \sin \psi)}{\alpha_0^2 (1 - \beta \sin \psi \cos \varphi)^2} d\psi d\varphi, \quad (19)$$

где

$$\alpha_0^2 = 1 - \beta^2 \sin^2 \psi, \quad l = \frac{k}{\beta} \alpha_0.$$

Учитывая, что при больших частотах функции $\left| K^-\left(-\frac{\omega}{v}\right) \right|^2$ и $|K^-(k \cos \varphi \sin \psi)|^2$ стремятся к единице и усредняя по быстрым колебаниям $\cos^2(kb \sin \varphi \sin \psi)$, получаем угловую зависимость, характерную для излучения заряженной частицы, пролетающей мимо идеально проводящей полуплоскости [2, 3]. Распределение излучения при $\psi = \frac{\pi}{2}$ переходит в формулу для излучения заряженной частицы, пролетающей по оси плоского волновода [1]. В заключение авторы приносят благодарность Б. М. Болотовскому за полезные обсуждения.

ЦИИ Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 9 I 1965

ՅՈՒ. Մ. ԱԻՎԱԶՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿԱՆ

ԿԵՏԱՅԻՆ ԼԻՑԲԱՎՈՐՎԱՅ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ, ԵՐԲ
ՆԱ ԱՆՑՆՈՒՄ Է ՀԱՐԹ ԿԻՍԱՆՎԵՐՋ ԱԼԻԲԱՏԱՐԻ ԱՌԱՆՑՔՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում ղիտարված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայթումը
երբ նա անցնում է հարթ կիսաանվերջ ալիքատարի առանցքով: Գտնված է

Հառադրված զաշտերը ինչպես ակիքատարի ներսում, այնպես էլ նրանից դուրս՝ մեծ հեռավորությունների վրա: Հաշվված է հառադրված ինտենսիվության անկյունային բաշխումը: Յույց է տրված, որ մեծ հաճախականությունների դեպքում հառադրված ինտենսիվության անկյունային բաշխումն ունի նույն տեսքը, ինչ որ մեկ կիսաանվիլը հարթության դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение нити с током и заряженной нити, пролетающих вблизи открытого конца плоского волновода. ЖТФ, 34, № 4, 1964, 704.
2. Казанцев А. П., Сурдатович Г. И. Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана. ДАН СССР, 147, 1962, 74.
3. Седракян Д. М. Дифракционное излучение точечной заряженной частицы. Известия АН АрмССР, 17, № 4, 1964, 103.
4. Айвазян Ю. М., Седракян Д. М. Возбуждение электромагнитных волн в плоском полубесконечном волноводе заряженной частицей. ДАН АрмССР, 39, № 2, 1964, 81.
5. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. ИЛ, М., 1962.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1960.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. БАРЕГАМЯН, О. А. ТРЕТЬЯКОВ, Э. И. ЧЕРНЯКОВ, В. П. ШЕСТОПАЛОВ

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА, ДВИЖУЩЕГОСЯ
ПАРАЛЛЕЛЬНО МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, ПОМЕЩЕННОЙ
НА ГРАНИЦЕ ОДНООСНОГО КРИСТАЛЛА КОНЕЧНОЙ
ТОЛЩИНЫ

Излучение заряженной частицы при движении в анизотропной среде подробно рассматривалось в ряде работ (см., например, библиографический указатель [1]). В работе [2] впервые высказана идея использования черенковского излучения для генерации радиоволн. Практическое использование этого способа генерации затруднено, в частности, из-за появления поверхностного заряда, возникающего при оседании электронов пучка на диэлектрик. Нанесение металлической решетки на поверхность кристалла позволяет избавиться от этого нежелательного явления. Решетка оказывает также существенное влияние на генерацию электромагнитных колебаний.

В настоящей работе приводится строгое решение задачи об излучении пучка, движущегося над поверхностью анизотропного диэлектрика конечной толщины с решеткой.

1. Решетка из металлических лент нанесена на одну из поверхностей плоскопараллельного слоя анизотропного диэлектрика (одноосного кристалла) с проницаемостью $\hat{\epsilon}$. Период решетки l , ширина лент d и толщина слоя h — произвольны. На расстоянии a от решетки перпендикулярно ее образующим со скоростью $\vec{v} = j\beta c$ движется электронный пучок, плотность заряда которого задается в следующем виде:

$$\rho = \rho_0 \delta(z) e^{i(ky - \omega t)}. \quad (1)$$

Здесь: ρ_0 — амплитуда модуляции, ω — частота модуляции; c — скорость света; $k = \frac{\omega}{v}$; $\delta(z)$ — дельта-функция; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты прямоугольной системы координат, выбранной таким образом, что ось oy проходит через середину ленты, а ось ox параллельна образующим лент. Будем рассматривать кристалл, ось которого параллельна оси oz , т. е. в нашей системе координат тензор диэлектрической проницаемости кристалла запишется в следующем виде

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_e \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Следует отметить, что полученное ниже решение можно использовать в случае, когда ось кристалла параллельна ou . Для этого в последующих выкладках следует ε_0 заменить на ε_c и ε_c — на ε_0 .

Собственное поле пучка можно получить из решения неоднородного волнового уравнения для векторного и скалярного потенциалов в виде поверхностной волны

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{i} \beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} \\ \vec{E} &= \left(-\vec{j} i b + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right) F e^{-q|z|} e^{iky},\end{aligned}\quad (3)$$

где $q = k_0 = k\sqrt{1-\beta^2}$ и $F = 2\pi\rho_0$.

(Зависимость от времени $\exp[-i\omega t]$ здесь и далее подразумевается). Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на плоскопараллельном слое с решеткой.

Будем считать пространство над решеткой ($z > -a$) областью 1, пространство, занимаемое кристаллом ($-a > z > -a-h$), областью 2, и пространство под кристаллом ($z < -a-h$) — областью 3. Искомое поле в первой области является суперпозицией падающего (3) и отраженного полей: во второй области поле представляет суперпозицию волн, распространяющихся или затухающих в направлении от одной стенки кристалла к другой; в третьей области будут возбуждаться уходящие от слоя волны. Так как падающая волна (3) является H -поляризованной волной, то при данном выборе ориентации оси кристалла она возбуждает в нем только необыкновенные волны [3]. Вследствие периодичности структуры слой-решетка дифрагированное поле будет периодичным и его удобно представить в виде ряда Фурье. Легко убедиться, что поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла, будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned}z &> -a \\ \vec{H}_1 &= \vec{i} \left(\beta F \frac{d|z|}{dz} e^{-q|z|} e^{iky} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y} \right) \\ \vec{E}_1 &= \left(-\vec{j} i b + \vec{k} \frac{d|z|}{dz} \right) F e^{-q|z|} e^{iky} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\vec{j} \frac{q_n}{k_0} + \vec{k} \frac{q_n + n}{z} \right) A_n e^{iq_n(z+a)} e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y} \\ -a &> z > -a-h \\ \vec{H}_2 &= \vec{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(B_n e^{-iq_{ne}(z+a)} + C_n e^{iq_{ne}(z+a+h)} \right) e^{i\left(k + \frac{2\pi n}{l}\right)y}\end{aligned}\quad (4)$$

$$\vec{E}_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(j \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 k_0} + k \frac{\eta + n}{\varepsilon_c z} \right) B_n e^{-iq_n(z+a)} + \left(-j \frac{q_{ne}}{\varepsilon_0 k_0} + k \frac{\eta + n}{\varepsilon_c z} \right) C_n e^{iq_n(z+a+h)} \right] e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} \quad (5)$$

$$z < -a - h$$

$$\vec{H}_2 = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-iq_n(z+a+h)} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y}$$

$$\vec{E}_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(j \frac{q_n}{k_0} + k \frac{\eta + n}{z} \right) D_n e^{-iq_n(z+a+h)} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y}, \quad (6)$$

где

$$q_n = k_0 n = k \sqrt{\beta^2 - \left(1 + n \frac{\beta}{z} \right)^2},$$

$$q_{ne} = k_0 n_e = k \sqrt{\varepsilon_0 \beta^2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c} \left(1 + n \frac{\beta}{z} \right)^2},$$

$$\eta = \frac{x}{\beta}, \quad x = \frac{l}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad k_0 = k_F = \frac{\omega}{c}. \quad (7)$$

2. Для отыскания неизвестных коэффициентов A_n , B_n , C_n , D_n воспользуемся точными граничными условиями

$$z = -a, \quad E_{1y} = E_{2y} = 0 \quad (\text{на лентах})$$

$$E_{1y} = E_{2y}, \quad H_{1x} = H_{2x} \quad (\text{на щелях}) \quad (8)$$

$$z = -(a+h), \quad E_{2y} = E_{3y}, \quad H_{2x} = H_{3x}.$$

Поскольку электромагнитное поле (4)–(6) представлено в виде ряда Фурье, то достаточно подчинить его условиям (8) только на одном из периодов структуры, например, $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$. Это приводит к системе функциональных уравнений относительно W_n

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} = 0 \quad (\text{щель}) \quad (9, a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n \frac{\eta_n}{r_n} e^{i \left(k + \frac{2\pi n}{l} \right) y} = -i \frac{\beta F}{r_0} e^{-qa} e^{iky} \quad (\text{металл}) \quad (9, b)$$

и обнаруживает связь между коэффициентами отражения и прохождения во всех трех областях

$$2W_n = -B_n \left[(1 + \alpha_n) \frac{\theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n} + (1 - \alpha_n) \right] - \delta_{0n} 2\beta F e^{-qa},$$

$$A_n = -B_n \frac{\theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n} (1 + \alpha_n) - \delta_{0n} \beta F e^{-qa},$$

$$C_n = -B_n \alpha_n e^{-iq_n e h}$$

$$D_n = B_n (e^{iq_n e h} - \alpha_n e^{-iq_n e h}),$$

где для простоты записи введены обозначения

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_0 \theta_n - \theta_{ne}}{\varepsilon_0 \theta_n + \theta_{ne}} e^{2iq_n e h}, \quad r_n = 1 + \frac{1 - \alpha_n}{1 + \alpha_n} \frac{\varepsilon_0 \theta_n}{\theta_{ne}},$$

$$\delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Обозначим

$$x_n = W_n \frac{\eta + n}{z}, \quad G = \frac{\theta F}{r_0} (1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) e^{-qa},$$

$$\xi_n = \frac{|\eta + n|}{\eta + n} \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e})}{\eta_1} \sqrt{\frac{z^2}{(\eta + n)^2} - 1}, \quad \zeta_n = 1 + i \frac{|n|}{n} g_n. \quad (11)$$

Существенно, что $\zeta_n = 0 \left(\frac{1}{n^2} \right)$ при $|n| \gg 1$ (α и β всегда ограничены).

С учетом (11) система уравнений (9) после некоторых преобразований принимает вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\varphi} = 0, \quad (\delta < |\varphi| < \pi) \quad (12, a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{|n|}{n} (1 - \zeta_n) e^{in\varphi} = -G_n, \quad (|\varphi| < \delta) \quad (12, b)$$

$$\left(\varphi = 2\pi \frac{y}{l}, \quad \delta = \pi \frac{d}{l} \right).$$

Так как при образовании (9, a) в (12, a) использовалась операция дифференцирования по переменной y , то систему (12) следует дополнить равенством

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{(-1)^n}{\eta + n} = 0, \quad (13)$$

которое получается в результате подстановки в (9, a) значения $y = \frac{l}{2}$.

Система уравнений (12) образует задачу Римана-Гильберта [4] для аналитической функции $x(z)$ от переменной $z = |z|e^{i\varphi}$

$$x(z) = \begin{cases} \sum_{n \geq 0} x_n z^n, & |z| < 1 \\ - \sum_{n < 0} x_n z^n, & |z| > 1, \end{cases}$$

которая непрерывна на дуге единичной окружности $|z| = 1$ $\delta < |\varphi| < \pi$ и терпит разрыв на дуге $|\varphi| < \delta$. Решение последней приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестной x_n и некоторой промежуточной константы b

$$\begin{aligned} 2bR_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m \frac{|n|}{u} \zeta_n V_m^n &= GV_n^0 \\ 2bR_m + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\frac{|n|}{n} \zeta_n V_m^n - \delta_{mn} \right) &= GV_m^0, \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{2} P_m(u), \quad R_n = \frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} P_{\eta-1}(u), \\ V_n^n &= \frac{\pi}{2 \sin \pi \eta} \frac{\eta-1}{\eta+n} [P_{\eta-1}(u) P_{n+1}(u) - P_{\eta-2}(u) P_n(u)] \\ V_m^n &= \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n+1} p_{n+1-p}(u) P_{p-m-1}(u) & n \geq 0 \\ \frac{1}{2} [P_m(u) - P_{m+1}(u)] & n = -1 \\ -\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{-n-1} p_{-n-1-p}(u) P_{p+m+1}(u) & n < -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

$$p_0(u) = 1, \quad p_1(u) = -u, \quad p_n = P_n - 2uP_{n-1} + P_{n-2} \quad (n \geq 2),$$

$P_m(u)$ и $P_\eta(u)$ — полиномы и функции Лежандра соответственно (см. формулы (23), (25) работы [4]).

Бесконечная система уравнений (14) квазирегулярна и, следовательно, допускает решение методом редукции. Для отыскания численных значений x_n целесообразно использовать ЭВМ. По полученным значениям x_n легко находятся с учетом (10) коэффициенты B_n , а также A_n , C_n , D_n .

3. Электромагнитное поле (4)–(6) представляет собой суперпозицию распространяющихся и затухающих волн; та часть поля, которая представлена распространяющимися гармониками, соответствует излученному пучком электромагнитному полю.

Определим условия, при которых излучение будет существовать в кристалле и свободном пространстве.

В свободном пространстве (первая и третья область) будут распространяться те гармоники, для которых величина q_n — вещественна, т. е., когда

$$\beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2. \quad (16)$$

Это может иметь место только при $n < 0$.

Внутри диэлектрического слоя условие излучения будет выполняться для тех пространственных гармоник, у которых вещественна величина q_{ne} , т. е.

$$\epsilon_e \beta^2 > \left(1 + n \frac{\beta}{x}\right)^2. \quad (17)$$

Следует отметить, что, в отличие от свободного пространства, излучение в диэлектрик может наблюдаться не только при $n < 0$, но и в случае $n \geq 0$.

Найдем среднее значение вектора Умова—Пойнтинга $\vec{S}$ на единичной площадке произвольной плоскости $z = \text{const}$. Для n -ой пространственной гармоники $\vec{S}$ в свободном пространстве (области 1 и 3) и диэлектрическом слое определяется следующими выражениями

$$\vec{S}_n^1 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{x} + \vec{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{x}\right)^2} \right| |A_n|^2, \quad (z > -a) \quad (18)$$

$$\vec{S}_n^3 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{x} - \vec{k} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{x}\right)^2} \right| |D_n|^2, \quad (z < -a - h) \quad (19)$$

$$\vec{S}_n^2 = \frac{c}{8\pi} \left| \vec{j} \frac{\eta + n}{\sqrt{\epsilon_e} x} \right| (|B_n|^2 + |C_n|^2) - \vec{k} \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}} \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + n}{\sqrt{\epsilon_e} x}\right)^2} (|B_n|^2 - |C_n|^2), \quad (-a > z > -a - h). \quad (20)$$

Таким образом, излучение монохроматического пучка образует дискретный спектр, и направление излучения для n -ой пространственной гармоники, как видно из (18)–(20), составляет с направлением движения пучка угол γ_n в свободном пространстве и угол γ_{ne} в кристалле

$$\gamma_n = \arctg \sqrt{\left(\frac{x}{\eta + n}\right)^2 - 1} \quad (21)$$

$$\gamma_{ne} = \arctg \sqrt{\frac{\epsilon_e}{\epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{\epsilon_e} x}{\eta + n}\right)^2 - 1}. \quad (22)$$

4. В заключение заметим, что при выполнении условия излучения (17) только для нулевой пространственной гармоники из (20) можно получить выражение для мощности, которое аналогично найденному в работе [5], формула (29).

Для этого необходимо положить $u = 1$ (решетка отсутствует), $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_e$ и толщину h устремить к бесконечности. Если $l - d \rightarrow 0$ (сплошной экран), то $B_0 = C_0 = D_0 = 0$ и в длинноволновом приближении $|A_0| = 1$.

В качестве примера приведем аналитическое выражение для нулевой амплитуды поля над решеткой

$$A_0 = \frac{\beta F e^{-q a}}{\eta r_0} \left\{ \gamma (2 - r_0) + \right. \\ \left. + \frac{\theta}{r_0^2} (1 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}) [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - P_\gamma(u)] \right. \\ \left. + \frac{(u-1) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u) + i g_0 [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u)]}{(u-1) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u) + i g_0 [(1 + u) P_{\gamma-1}(u) - 2 P_\gamma(u)]} \right\},$$

которое получается из (14) при $m = 0$ и $\zeta_n = 0$ при $n \neq 0$.

Ереванский государственный университет

Харьковский институт горного машиностроения,

автоматики и вычислительной техники

Поступила 15 II 1965

Վ. Ա. ԲԱՐԵԳԱՄՅԱՆ, Օ. Ա. ՏՐԵՏՅԱԿՈՎ, Է. Ի. ՉԵՐՆԱԿՈՎ, Վ. Պ. ՇԵՍՏՈՎԱԼՈՎ

ՎԵՐՉԱՎՈՐ ՀԱՍՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻԱՌԱՆՅՔԱՆԻ ԲՅՈՒՐԵՂԻ
ՍԱՀՄԱՆԻ ՎՐԱ ՏԵՂԱՎՈՐՎԱԾ ՄԵՏԱՂԱԿԱՆ ՑԱՆՑԻՆ ԶՈՒԳԱԶՆՈՒ
ՇԱՐՔՎՈՂ ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՅԻՆ ՀՈՍՔԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում լուծված է միաաղական ցանցով անիզոտրոպ դիէլեկտրիկի (միաանցքանի բյուրեղ) հարթ զուգահեռ շերտի վերևով շարժվող փնչի ճառագայթման խնդիրը: Սահմանափին էլեկտրոդինամիկ խնդիրը բերվում է Ռիման-Գիլերտի խնդրին, որի լուծումը բերվում է հանրահաշվական համարումների գծային անվերջ սխեմանի:

Քանի որ սխեմանը քվադր-կարգավորող է, ուստի այն թույլ է տալիս ցանկացած ճշտությամբ լուծում: Որոշված են ճառագայթման պայմանները, գտնված են բյուրեղի մեջ և աղյուս տարածությունում Ումով-Պոլյուինգի վեկտորի համար արտահայտություններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М. Теория эффекта Вавилова—Черенкова. УФН, 62, 3, 1957, 201. Теория эффекта Вавилова—Черенкова. УФН, 2, 1961, 295.
2. Гичзбург В. Л. Об использовании эффекта Черенкова для излучения радиоволн. ДАН СССР, 56, 1947, 253.
3. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Изд. АН БССР, Минск, 1958.
4. Агранович Э. С., Марченко В. А., Шестовалов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. ЖТФ, 32, 4, 1962, 381.
5. Danos M. Čerenkov Radiation from Extended Electron Beams, Journal of applied Physics, 26, 1, 1955, 2.

ЯН ШИ

АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ В МОДЕЛИ КОЛЛЕКТИВИЗИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

В последнее время возродился интерес к модели коллективизированных электронов в теории ферромагнетизма [1—6], которая свободна от некоторых недостатков традиционной гейзенберговской модели локализованных электронов. В настоящей работе мы попытаемся распространить эту модель на случай ферро- и антиферромагнетизма.

Следуя идее Нееля, вводим две подсистемы электронов, взаимодействующих между собой, как внутри каждой подсистемы, так и между подсистемами (см. также [9]). Будем считать, что обе подсистемы обладают одинаковой трансляционной симметрией. Тогда гамильтониан всей системы в представлении вторичного квантования может быть записан в виде

$$H = \sum_{\alpha, f} E_{\alpha}(f) a_{\alpha f}^{\dagger} a_{\alpha f} + \sum_{\substack{\alpha \beta \gamma \delta \\ f_1 f_2 f_3 f_4}} U_{\alpha \beta \gamma \delta} (f_1 f_2; f_3 f_4) a_{\alpha f_1}^{\dagger} a_{\beta f_2}^{\dagger} a_{\gamma f_3} a_{\delta f_4} \quad (1)$$

Здесь, как и в работе [6], a и $a^{\dagger}$ — ферми-операторы одноэлектронных состояний, $E_{\alpha}(f)$ — аддитивная часть энергии, $U_{\alpha \beta \gamma \delta} (f_1 f_2; f_3 f_4)$ — матричные элементы энергии взаимодействия. Индексы α, β обозначают номер подсистемы ($\alpha, \beta = 1$ или 2). Если пренебречь переходами электронов между подсистемами, то среди матричных элементов $U_{\alpha \beta \gamma \delta}$ можно оставлять только $U_{\alpha \alpha \alpha \alpha} = U_{\alpha}$, $U_{\alpha \alpha \beta \beta} = U_{12}$, и $U_{\alpha \beta \alpha \beta} = U'_{12}$ ($\alpha \neq \beta$). В общем случае гамильтониан (1) описывает ферромагнетик. В частном случае, когда две подсистемы полностью эквивалентны, мы имеем антиферромагнетик.

Вместо одной коллективной функции Грина с противоположными спинами $G_{\uparrow}(k, q)$, рассматриваемой в теории ферромагнетизма [6], теперь мы должны рассматривать четыре коллективных функции Грина $G_{\uparrow}^{\alpha \beta}(k, q) = \langle \langle a_{\alpha k}^{\dagger} a_{\beta k+q} | a_{\alpha' k+q}^{\dagger} a_{\alpha' k} \rangle \rangle$, описывающие флуктуации спиновой намагниченности в подсистемах и корреляции между намагниченностями подсистем. Составляя цепочку уравнений для этих функций Грина и расцепляя ее на первом звене (см. [6]), в случае сильной связи получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
& [E - \tilde{E}_{1\downarrow}(k+q) + \tilde{E}_{1\uparrow}(k)] G^{11}(k, q) + [n_{1\uparrow}(k) - n_{1\uparrow}(k+q)] \times \\
& \times \sum_{k'} [U_1(q) G^{11}(k', q) + U_{12}(q) G^{21}(k', q)] = \frac{i}{2\pi} [n_{1\uparrow}(k) - n_{1\downarrow}(k+q)], \\
& [E - \tilde{E}_{2\downarrow}(k+q) + \tilde{E}_{2\uparrow}(k)] G^{21}(k, q) + [n_{2\downarrow}(k) - n_{2\downarrow}(k+q)] \times \\
& \times \sum_{k'} [U_2(q) G^{21}(k', q) + U_{12}(q) G^{11}(k', q)] = 0,
\end{aligned} \quad (2)$$

а также аналогичные уравнения, которые получаются из уравнения (2) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. В уравнениях (2) были введены обозначения

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_{\alpha\downarrow}(k+q) - \tilde{E}_{\alpha\downarrow}(k) &= E_{\alpha}(k+q) - E_{\alpha}(k) \pm \\
&\pm U_{\alpha}(0) \sigma_{\alpha} \mp U_{12}(0) \sigma_{\beta} + g_{\alpha} \mu_0 H,
\end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{\alpha} = \pm \sum_k [n_{\alpha\uparrow}(k) - n_{\alpha\downarrow}(k)], \quad (4)$$

где верхний знак (+ или -) относится к случаю $\alpha=1, \beta=2$, а нижний знак относится к случаю $\alpha=2, \beta=1$, g_{α} — фактор Ландау для подсистемы α ; μ_0 — магнетон Бора; H — напряженность внешнего магнитного поля.

Спектр элементарных возбуждений определяется корнями секулярного уравнения. Поскольку система уравнений для функций Грина распадается на две независимые системы (содержащие в отдельности функции G^{11}, G^{21} и G^{22}, G^{12}), то мы имеем два секулярных уравнения, определяющих два спектра. Физический смысл имеют только неотрицательные корни.

Для уравнений (2) секулярное уравнение имеет вид

$$1 - P_1(q, E) - P_2(q, E) + \left[1 - \frac{U_{12}^2(q)}{U_1(q) U_2(q)} \right] P_1(q, E) P_2(q, E) = 0, \quad (5)$$

где

$$P_{\alpha}(q, E) = U_{\alpha}(q) \sum_k \frac{n_{\alpha\uparrow}(k) - n_{\alpha\downarrow}(k+q)}{\tilde{E}_{\alpha\downarrow}(k+q) - \tilde{E}_{\alpha\uparrow}(k) - E} \quad (6)$$

— „поляризационный оператор“ для подсистемы α .

При $q=0$ уравнение (5) сильно упрощается и приобретает вид

$$\begin{aligned}
E^2 - [U_{12}(0)(\sigma_1 - \sigma_2) + (g_1 + g_2)\mu_0 H] E + \\
+ [g_1 g_2 \mu_0 H + (g_1 \sigma_1 - g_2 \sigma_2) U_{12}(0)] \mu_0 H = 0.
\end{aligned} \quad (7)$$

Другое секулярное уравнение получается из уравнения (7) заменой $E \rightarrow -E$.

Уравнение (7), полученное в модели коллективизированных электронов, точно совпадает с соответствующим секулярным уравнением для ферромагнетика в гейзенберговской модели (см. [7]). Значит,

обеих моделях энергия элементарных возбуждений одна и та же для нулевого квазимпульса ($q = 0$).

Рассмотрим теперь спектр элементарных возбуждений при малых квазимпульсах q . Сначала изучим случай антиферромагнетика, когда обе подсистемы полностью эквивалентны. Кроме того будем считать, что внешнее магнитное поле пренебрежительно мало.

Разлагая уравнение (5) по степеням q и учитывая полную симметрию двух подсистем, получаем решение

$$E_q^2 = [U_1(0) - U_1(q) - U_{12}(0) - U_{12}(q)] [U_1(0) - U_1(q) - U_{12}(0) + U_{12}(q)] \sigma^2 + \frac{2U_{12}(0)}{[U_1(0) - U_{12}(0)]^2} \times \\ \times \sum_k [n_+(k) - n_-(k)] \frac{\partial E}{\partial q_\alpha} \frac{\partial E}{\partial q_\beta} q_\alpha q_\beta + Q(q^4). \quad (8)$$

Мы видим, что в выражении (8) для спектра спиновых волн наряду с членом, обусловленным обменным взаимодействием между электронами, имеется также член, обусловленный подвижностью электронов в кристаллической решетке. Спектр линейно зависит от квазимпульса q (при малых q), но благодаря наличию второго члена, является, вообще говоря, анизотропным. В предельном случае бесконечно узкой энергетической полосы, когда электроны могут считаться жестко закрепленными на атомах кристалла, второй член обращается в нуль, и спектр E_q (8) переходит в спектр спиновых волн в гейзенберговской модели [8]. Напомним, что подобный предельный переход имеет место также и в случае ферромагнетика [5, 6].

Наряду со спектром (8) коллективных возбуждений, система имеет также квазинепрерывный спектр индивидуальных (одночастичных) возбуждений фермиевского типа, определяющийся другими особенностями функций Грина $G^{aa'}$. С точностью до членов, асимптотически исчезающих при обычном предельном переходе: $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$, $N/V = v^{-1} = \text{const}$, спектр индивидуальных возбуждений определяется одночастичной энергией (как видно из уравнений (2) или из уравнений (5) и (6)):

$$E = \tilde{E}_{\sigma+}(k+q) - \tilde{E}_{\sigma+}(k). \quad (9)$$

При $q=0$ этот спектр отделен от нуля щелью.

Из уравнений (5) и (6) можно также получить спектр спиновых волн в случае ферромагнетизма, то есть когда две подсистемы неэквивалентны и поэтому имеется ненулевая результирующая намагниченность всего кристалла. В этом случае, как видно из уравнения (7), (точно так же, как и в случае гейзенберговской модели, см. [7]), имеются две ветви спиновых волн, одна из которых, как обычно, исходит из нуля, а другая — отделена от нуля энергетической щелью в порядке обменной энергии между подсистемами (подобно оптическим

колебаниям в молекулярном кристалле). Предельные значения энергии в этих двух ветвях при нулевом квазимпульсе $q = 0$ нетрудно получить из уравнения (7). Разлагая уравнение (5) по степеням q относительно этих предельных значений, получаем (при малой напряженности внешнего магнитного поля)

$$E_q = \left| \frac{g_1 \sigma_1 - g_2 \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \right| \mu_0 H + \sum_{i,j} A_{ij} q_i q_j, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} = & - \frac{1}{|\sigma_1 - \sigma_2|} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_1^2 + \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_2^2 - 2 \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_1 \sigma_2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{|\sigma_1 - \sigma_2|} \sum_{k,l} (n_{k,l}(k) - n_{k,l}(l)) \frac{\partial^2 E_k}{\partial q_i \partial q_j} - \\ & - \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(U_1 \sigma_1 - U_{12} \sigma_2)} \sum_k (n_{1,k} - n_{1,l}) \frac{\partial E_1}{\partial q_i} \frac{\partial E_1}{\partial q_j} - \\ & - \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(U_{12} \sigma_1 - U_2 \sigma_2)} \sum_k (n_{2,k} - n_{2,l}) \frac{\partial E_2}{\partial q_i} \frac{\partial E_2}{\partial q_j}, \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$E_q = U_{12}(\sigma_1 - \sigma_2) - \left| \frac{g_1 \sigma_2 - g_2 \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \right| \mu_0 H + \sum_{i,j} B_{ij} q_i q_j, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} B_{ij} = & - \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \left[\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_1^2 + \frac{\partial^2 U_2}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_2^2 - 2 \frac{\partial^2 U_{12}}{\partial q_i \partial q_j} \sigma_1 \sigma_2 \right] + \\ & + \frac{1}{2(\sigma_2 - \sigma_1)} \sum_k \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1} (n_{1,k} - n_{1,l}) \frac{\partial^2 E_1}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (n_{2,k} - n_{2,l}) \frac{\partial^2 E_2}{\partial q_i \partial q_j} \right] - \\ & - \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(U_1 - U_{12})} \sum_k (n_{1,k} - n_{1,l}) \frac{\partial E_1}{\partial q_i} \frac{\partial E_1}{\partial q_j} - \\ & - \frac{\sigma_1}{\sigma_2^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(U_{12} - U_2)} \sum_k (n_{2,k} - n_{2,l}) \frac{\partial E_2}{\partial q_i} \frac{\partial E_2}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как видно, обе ветви оказались квадратично зависящими от квазимпульса q (при малых q). Так же, как и в случаях ферро- и антиферромагнетиков, в спектре наряду с обменными членами, имеются также члены, обусловленные подвижностью электронов.

Нетрудно проверить, что в предельном случае неподвижных электронов спектры (10)–(13) переходят в соответствующие спектры в гейзенберговской модели [7].

Для вычисления намагниченностей подрешеток можно поступать аналогично тому, как в случае ферромагнетизма [6]. Считая число электронов в каждой подсистеме постоянным, в случае антиферромагнетика получим следующее трансцендентное уравнение

$$z = 1 - \frac{2v}{\pi (2\pi)^3} \int \frac{dq}{U_1(q)} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(\omega/T) - 1]^{-1} \operatorname{Im} \frac{(1 - P_1) P_2}{D} d\omega, \quad (14)$$

$$D = 1 - P_1 - P_2 + \left[1 - \frac{U_{12}^2(q)}{U_1(q) U_2(q)} \right] P_1 P_2. \quad (15)$$

Если рассматривать только вклад от коллективных возбуждений, то уравнение (14) будет иметь точно такой же вид, что и соответствующее уравнение для антиферромагнетика в гейзенберговской модели [8]:

$$\frac{1}{z} = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{[U(0) - U(q) - U_{12}(0)]}{E_q} z \operatorname{cth} \frac{E_q}{2T} dq. \quad (16)$$

Разница лишь в том, что в уравнении (16) спектр спиновых волн дается формулой (8), содержащей член, обусловленный подвижностью электронов.

Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 26 IV 1965

ՀԱՆՆԵՐ

ԱՆՏԻՖԵՐՐՈՄԱԳՆԵՏԻՍԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՆԵԿՏԻՎԱՅՎԱԾ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐԻ ՄՈԴԵԼԻՄ

Ա. Մ. Փ. Ն. Փ. Ն. Մ.

Կոնկրետիզացիայի էլեկտրոնների մոդելը տարածված է ֆերրո- և անտի-ֆերրոմագնիսականության դեպքերի վրա: Ստացված է սպինային ալիքների օգնությամբ արտահայտություններ ալիքների համար, որակի հաշվի է առնված էլեկտրոնների շարժականությունը և արտածված է բերված մագնիսականացման բանաձևը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Thompson E. D. a. o. The Low Temperature variation of the Saturation Magnetization of Ferromagnetic Metals and Alloys. Proceedings of the Phys. Soc., 83, 1964, 59.
2. Inafama T., Kubo R. Some Considerations on the Magnetic Carriers in Ferromagnetic Transition Metals. Journ. of Appl. Physics, 35, 1964, 1074.
3. Комнатенко П. С. Теория ферромагнитной Ферми-жидкости. Журн. exper. и теор. физ., 46, № 4, 1964, 1438.
4. Suetsugu M. On the Conditions of Ferromagnetism by the Band Model. Proceedings Phys. Soc., 84, 1964, 397.
5. Ян Ши. Коллективные возбуждения некоторых магнитных состояний. ДАН Арм.ССР, 39, № 2, 1964, 73.
6. Ян Ши. О намагниченности ферромагнетика в модели коллективизированных электронов. ДАН Арм.ССР, 40, № 2, 1965.

7. Ян Ши. Квантовая теория ферромагнитного резонанса—условия резонанса в изотропном феррите. Acta Physica Sinica, 19, № 3, 1963, 139.
8. Пу Фу-чо. Приближенный расчет основного состояния изотропного антиферромагнетика. ДАН СССР, 130, № 6, 1960, 1244.
Пу Фу-чо. Приближенный метод расчета намагниченности изотропного антиферромагнетика. ДАН СССР, 131, № 3, 1960, 546.
9. Lidiard A. B. Antiferromagnetism in Metals. Proceedings of the Phys. Soc., A66, 1953, 1188.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

М. Е. МОВСЕСЯН, В. А. ГЕВОРКЯН, Д. Ж. Х. ГРИГОРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ БОРАТА СТРОНЦИЯ,
АКТИВИРОВАННОГО САМАРИЕМ

Интерес к люминесценции веществ, активированных редкоземельными элементами, за последние годы резко усилился. Особый интерес представляют вещества, имеющие линейчатую люминесценцию при комнатной температуре. Линейчатая структура люминесценции редких земель объясняется тем, что у этих элементов переходы на электронном уровне защищены от внешних возмущений заполненной оболочкой $5s^2 5p^6$. Но все-таки внешние факторы сильно влияют на характер люминесценции, на интенсивность, спектральную ширину и т. д. [1—6].

В изстоящей работе сообщается о синтезировании и исследованиях бората стронция, активированного самарием.

1. Экспериментальная часть

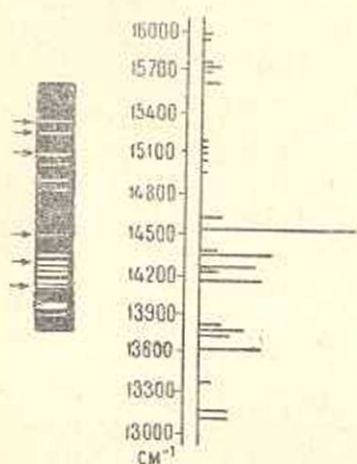
Кристаллофосфор получался спеканием смеси окиси стронция и борной кислоты с добавкой 1% *Sm*. Полученный поликристаллический фосфор имел желтовато-красную окраску. Кристалличность фосфора подтвердилась рентгеноструктурными исследованиями. Люминесценция возбуждалась кварцеворотутной лампой ПРК—2 в обычном эллиптическом осветителе. Спектры исследовались на спектрографе ИСП—73. Интенсивности спектральных линий определялись методом фотографической фотометрии.

Для измерения температуры была изготовлена печь (на кварцевой трубке), которая помещалась в эллиптический осветитель. Температура образца, помещенного в эту печь, измерялась термопарой медь—константан. Длины волн люминесценции определялись на компараторе ИЗА—2 сравнением со спектром железа.

Для измерения затухания была собрана установка на базе спектрографа ИСП—51 с фотоэлектрической приставкой ФЭП—1. Исследуемый образец помещался в эллиптический осветитель, где освещался импульсной ксеноновой лампой. Кратковременные световые импульсы получались разрядкой конденсаторов емкостью в $4 \mu F$ на импульсные лампы. Выход фотоумножителя подавался на осциллограф ИО—4, с экрана которого фотографировались импульсы. Установка давала возможность измерять длительности 10^{-5} сек и больше.

2. Полученные результаты и их обсуждение

Спектр люминесценции кристаллофосфора приведен на фиг. 1. В табл. 1 приведены длины волн, частоты и относительные интенсивности наблюдаемых линий люминесценции в области от 6200 Å до 7700 Å. Интенсивности измерены в относительных единицах. Для наиболее интенсивной линии, для линий 6855 Å, принята интенсивность 250. Условно, спектральные линии мы разбили на две группы по длинам волн (см. табл. 1).



Фиг. 1. Спектр люминесценции бората стронция, активированного самарием.

На фотографии участка спектра (позитив) стрелками отмечены линии ртути. Крайние стрелки соответствуют линиям ртути $\lambda_1 = 6123 \text{ Å}$ и $\lambda_2 = 7681 \text{ Å}$.

Таблица 1

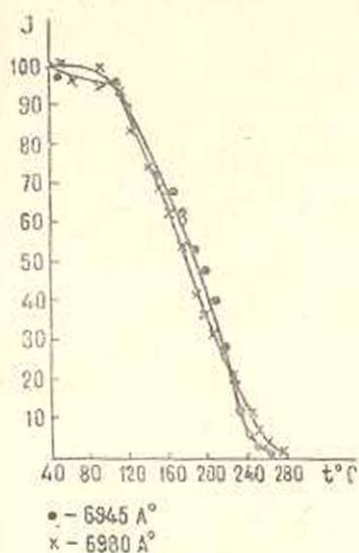
I группа			II группа		
$\lambda (\text{Å})$	$\nu (\text{см}^{-1})$	I	$\lambda (\text{Å})$	$\nu (\text{см}^{-1})$	I
			6813	14678	3
			6855	14587	250
6270	15948	1	6935	14421	1
6282	15918	1	6945	14399	2
6359	15726	1	6980	14326	2
6369	15701	2	6992	14302	2
6388	15654	1	7046	14193	2
6431	15550	2	7219	13851	6
6578	15202	0,5	7246	13801	10
6598	15156	0,5	7288	13721	7
6633	15076	0,5	7349	13607	22
6678	14976	0,5	7460	13405	1
			7620	13123	7
			7662	13051	7

Самая сильная наблюдаемая линия (6855 Å) появляется уже при концентрациях 10^{-6} г/г . Ширина этой линии при комнатной температуре составляет примерно 10 см^{-1} . Интенсивности этой и других линий II группы с повышением температуры остаются постоянными до температуры 80 °C, а потом быстро падают. При температурах 280—300 °C они практически отсутствуют. Для некоторых линий II группы результаты приведены на фиг. 2.

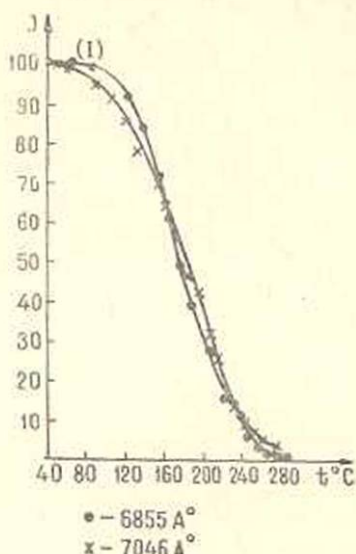
Интенсивности линий I группы при комнатной температуре очень малы. С повышением температуры до 150 °C интенсивности этих линий возрастают, а при дальнейшем повышении температуры падают. На фиг. 3 приведены зависимости интенсивности люминесценции от температуры для четырех линий I группы.

Нами исследовано поведение затухания линии люминесценции от температуры. Измерения показали, что при комнатной температуре длительность свечения линий 6855 Å составляет $3,6 \cdot 10^{-9} \text{ сек}$. На фиг. 4 приведены результаты измерений относительной длительности люминесценции линий 6855 Å при разных температурах.

Интересно отметить, что ход кривой зависимости относительной длительности от температуры совпадает с кривой зависимости интенсивности люминесценции от температуры (фиг. 2).

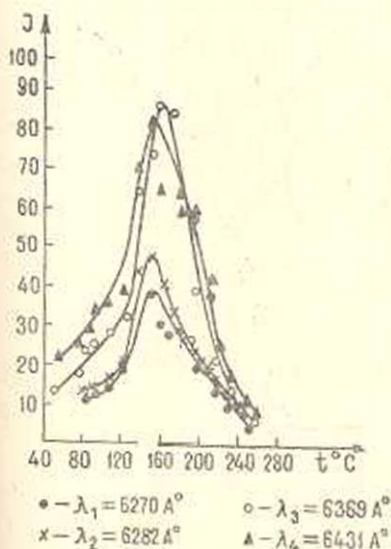


Фиг. 2а.

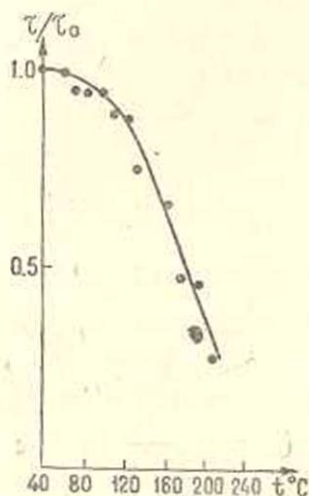


Фиг. 2б.

Зависимость относительной интенсивности люминесценции некоторых линий II группы от температуры.



Фиг. 3. Зависимость относительной интенсивности люминесценции некоторых линий I группы от температуры.



Фиг. 4. Зависимость относительной длительности люминесценции от температуры для линии $\lambda = 6855 \text{ Å}^\circ$.

Поглощение синтезированного кристаллофосфора в видимой области измерялось следующим образом: пластинка кристаллофосфора толщиной в 1 мм освещалась отдельными участками видимого спек-

тра. Прошедший рассеянный свет изучался спектрографом. Спектры показали, что поглощение кристаллофосфора линейчатое и самые сильные линии поглощения расположены на длинах волн $\lambda = 4735 \text{ \AA}$ и $4765 \text{ \AA}$. В табл. 2 приведены линии поглощения.

При возбуждении в этих линиях наблюдались все линии люминесценции II группы. Линии люминесценции I группы не наблюдались, возможно из-за малой интенсивности. Согласно литературным данным [1, 3] зависимость интенсивности люминесценции кристаллофосфоров от температуры в большинстве случаев подчиняется следующему закону

$$J_t = \frac{J_0}{1 + Ae^{-\frac{E_1 - E_2}{KT}}}, \quad (1)$$

где E_1 и E_2 — величины энергий, вызывающих соответственно безизлучательный и излучательный переходы в нормальное состояние.

Полученная нами кривая на фиг. 2 хорошо аппроксимируется функцией такого типа. Если принять $E_2 = 0$, то из экспериментальных данных возможно определить A и E_1 . Наши вычисления дают для $A = 10^{10}$ и для $E_1 = 1 \text{ эВ}$. Сплошная кривая (1) на фиг. 2б представляет функцию (1) с этими параметрами. Для линий I группы механизм люминесценции другой. Такую зависимость (фиг. 3) тоже можно представить функцией типа (1), когда $E_2 \neq 0$. Сравнение полученных линий поглощения и люминесценции с известными уровнями трехкратно ионизированного самария дает возможность предположить, что линии люминесценции обусловлены переходами с верхнего возбужденного электронного уровня на разные уровни основного состояния. Переходы, по-видимому, заканчиваются на достаточно высоких уровнях нижнего состояния, так как в спектрах поглощения длины волн, совпадающих с линиями люминесценции, отсутствуют.

Одинаковая зависимость $\frac{\tau}{\tau_0}$ и $\frac{J_t}{J_0}$ от температуры для линии $6855 \text{ \AA}$ показывает, что τ тоже можно представить функцией (1) с теми же параметрами. Это подтверждает, что тушение люминесценции кристаллофосфора подчиняется закону Вавилова [7].

Մ. Ե. ՄՈՎՍԻՅԱՆ, Վ. Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Զ. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՍԱՄԱՐԻՈՒՄՈՎ ԱԿՏԻՎԱՅԱՆ ՍՏՐՈՆՅԻՈՒՄ ԲՈՐԱՏԻ
ՅՈՏՈՂՅՈՒՄԻՆԵՍԵՆՏԻԱՅԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Սինթեզված և ռառամասերված է Տո-ով տեղիացված ստրոնցիում բորատի ֆոտոլյումինենցիան: Չափվել է լյումինենցիայի դեկրի ալիքի երկարությունը և հարաբերական ինտենսիվությունը: Ուսումնասիրվել է լյումինենցիայի ինտենսիվության և տեղություն կախումը ջերմաստիճանից՝ 30°C—280°C տիրույթում:

Պարզվել է, որ՝

1. 6813—7662 Å° դեկրի լյումինենցիայի ինտենսիվությունը մինչև 80°C հաստատուն է մնում, իսկ ջերմաստիճանի հետագա բարձրացմամբ՝ նվազում է:

2. 6270—6678 Å° դեկրի լյումինենցիայի ինտենսիվությունը մինչև 150°C աճում է, ապա նվազում:

Նկատվել է, որ 6813 Å°—7662 Å° լյումինենցիայի դեկրի ինտենսիվությունը և տեղությունը, ջերմաստիճանից կախված, փոխվում են միմյանից օրենքով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лешин В. Л. Фотолюминесценция жидких и твердых веществ. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
2. Ельяшевич М. А. Спектры редких земель. Гостехиздат, М., 1953.
3. Принсгейм П. Флуоресценция и фосфоресценция. ИЛ, М., 1951.
4. Карапетян Г. О. Люминесценция стекол с редкоземельными активаторами. Известия АН СССР, серия, физ., 25, № 6, 1963.
5. Ларинов Я. И. О спектрах люминесценции редкоземельных ионов. Известия АН СССР, сер. физ., 5, 1941, 107.
6. Tomaschek R., Dautschwein O. Поведение самария в оксидах второй группы. Ann. D. Phys., 16, 1933, 930. Nature, 131, 1933, 473.
7. Василос С. И., Севченко А. Н. Загущание люминесценции растворов редких земель. ДАН СССР, 27, 1940, 541.