

МАТЕМАТИКА

В. А. ДЖРБАШЯН

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

При решении ряда физических задач оказываются необходимыми интегралы вида

$$\int_a^b t^\lambda E_\nu(\rho t) dt, \quad (A)$$

$$\int_a^b t^\lambda E_\nu(\rho t) \bar{E}_\nu(\sigma t) dt \quad (B)$$

и т. д.

Здесь  $\lambda, \nu$  — комплексные,  $\rho, \sigma$  — действительные или мнимые числа,  $-\infty \leq a, b \leq \infty$ ;  $E_\nu(\rho t)$ ,  $\bar{E}_\nu(\sigma t)$  — решения уравнения Бесселя. Произвольность перечисленных величин ограничивается лишь требованием существования интегралов (A), (B).

В некоторых частных случаях значения интегралов даются:

для (A), (B) при  $a = 0$ ,  $b = \infty$  формулами Вебера—Шафхейтлина: для (A) при  $\lambda = \pm \nu + 2m + 1$ , где  $m$  — натуральное целое число, или нуль-рекуррентными формулами; для (B) при  $\lambda = \pm 1$ ,  $\lambda = -\nu - \nu + 1$ ,  $\lambda = \nu + \nu + 1$  — формулами Ломмеля. Если  $\lambda$  отличается от приведенных четным числом, то при  $E_\nu = \bar{E}_\nu$  значения интегралов вида (B) могут быть найдены с помощью формулы приведения Шафхейтлина [1].

В настоящей работе излагается метод вычисления интегралов (A), (B) в их области существования. Значения интегралов, как и в известных частных случаях, даются рядами, причем, если предел  $b$  (или  $a$ ) — большое число, то соответствующий ряд является асимптотическим.

В приложении приводятся простейшие интегралы вида (A), (B) для всех возможных значений параметров.

Применяемый подход может быть полезен и при вычислении интегралов других типов.

§ 1. Вычисление интегралов вида (A), (B) при  $b = \infty$ 

Рассмотрим сначала интегралы (A), (B) в случае, когда  $b = \infty$ . Изложим метод вычисления таких интегралов на конкретном примере интеграла

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}^2(t) dt,$$

где  $K_{\nu}(t)$  — функция Макдональда (см. приложение).

Если  $a=0$ , то рассматриваемый интеграл сходится при

$$\operatorname{Re}(\lambda + 1) > 2|\operatorname{Re}(\nu)|. \quad (1.1)$$

Если  $a > 0$ , то он существует для произвольных комплексных  $\nu, \lambda$ .

Допустим сначала, что имеет место условие (1.1). Тогда можем написать

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}^2(t) dt = \Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(\infty) - \Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(a), \quad (1.2)$$

где для сходящихся интегралов введено обозначение

$$\int_0^t t^{\lambda} K_{\nu}^2(t) dt = \Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(t).$$

$\Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(\infty)$  мы можем вычислить непосредственно, воспользовавшись представлением Барнса [1]. При предположении (1.1) получается известное [2] выражение

$$\Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(\infty) = \frac{\pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)}. \quad (1.3)$$

Найдем теперь  $\Phi_{\lambda, K_{\nu}^2}(a)$ . Исходя из определения [1] функции  $K_{\nu}(t)$ , нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} K_{\nu}^2(t) = & 2^{2\nu-2} \Gamma^2(\nu) t^{-2\nu} {}_1F_2\left(-\nu + \frac{1}{2}; -\nu + 1, -2\nu + 1; t^2\right) + \\ & + 2^{-1} \Gamma(\nu) \Gamma(-\nu) {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; -\nu + 1, \nu + 1; t^2\right) + \\ & + 2^{-2\nu-2} \Gamma^2(-\nu) t^{2\nu} {}_1F_2\left(\nu + \frac{1}{2}; \nu + 1, 2\nu + 1; t^2\right), \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  ${}_pF_q$  — обобщенный, гипергеометрический ряд.



Учитывая, что получающийся ряд сходится [3], помножим (1.4) на  $t^s$  и почленно проинтегрируем. Таким образом будем иметь

$$\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a) = \Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(1)}(a) + \Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(2)}(a) + \Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(3)}(a), \quad (1.5)$$

где

$$\Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(1)}(a) = \frac{2^{2\nu-2} \Gamma^2(\nu) a^{-2\nu+\lambda+1}}{-2\nu+\lambda+1} {}_2F_2\left(-\nu+\frac{1}{2}, -\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}; -\nu+\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}, -\nu+1, -2\nu+1; a^2\right),$$

$$\Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(2)}(a) = \Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(1)}(a),$$

$$\Phi_{\lambda, K_\nu^2}^{(3)}(a) = \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(-\nu) a^{\lambda+1}}{2(\lambda+1)} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}; \frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2}, -\nu+1, \nu+1; a^2\right).$$

Равенства (1.2), (1.3) и (1.5) дают решение поставленной задачи. Действительно, результат (1.2) мы получили при предположении (1.1), когда  $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty)$  и  $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$  сходятся и даются формулами (1.3) и (1.5). Однако, правая и левая части равенства (1.2), где под  $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty)$  и  $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$  подразумеваются правые части (1.3) и (1.5), являются аналитическими функциями от  $\nu, \lambda, a$  при любых комплексных  $\nu, \lambda$  и положительном  $a$ . Поэтому согласно принципу аналитического продолжения (1.2) справедливо для указанной широкой области  $\nu, \lambda, a$ .

Особо следует остановиться на случаях, когда среди  $-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}, \nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}, -\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}$  есть нуль или натуральное число, а  $-\frac{\lambda}{2}-1$  отлично от таких чисел. В этих случаях первый и второй члены правой части (1.2) в отдельности обращаются в бесконечность. Однако, после устранения неопределенности получаем конечное выражение. Приведем значения (1.2) для наиболее простых таких случаев, когда только одно из упомянутых трех выражений есть нуль или натуральное число.

Пусть

$$n, n', n'', n''' = 0, 1, 2, \dots$$

Когда

$$-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} = n, \quad \nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} \neq n'', \quad -\nu-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2} \neq n'''$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}^2(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} \pi^{1/2} \Gamma(-\nu-n) \Gamma(\nu-n)}{4n! \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \left[ 2 \ln a - \psi(n+1) - \psi(-\nu-n) - \psi(\nu-n) + \psi\left(-n + \frac{1}{2}\right) \right] - \\ - \Phi_{\nu}^{\lambda} K_{\nu}^2(a); \quad (1.2a)$$

Когда

$$\pm \nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = n, \quad -\frac{\lambda}{2} - 1 \neq n', \quad \mp \nu - \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n'', \\ -\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} \neq n''',$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}^2(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} \pi^{1/2} \Gamma(\pm \nu - n) \Gamma(\pm 2\nu - n)}{4n! \Gamma\left(\pm \nu - n + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \left[ 2 \ln a - \psi(n+1) - \psi(\pm \nu - n) - \psi(\pm 2\nu - n) + \psi\left(\pm \nu - n + \frac{1}{2}\right) \right] - \\ - \Phi_{\nu}^{\lambda} K_{\nu}^2(a). \quad (1.26)$$

Здесь  $\Phi_{\nu}^{\lambda} K_{\nu}^2(a)$  есть  $\Phi_{\nu}^{\lambda} K_{\nu}^2(a)$  за вычетом обращаемого в бесконечность члена в (1.5),  $\psi$  — логарифмическая производная от гамма-функций:  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ . Если  $a < 0$ , то рассматриваемый интеграл

сходится при условии (1.1) и дается формулой (1.2). При нарушении (1.1) несобственный интеграл не существует. Однако, если при этом существует его главное значение (при  $\operatorname{Re}(\lambda+1) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\pm 2\nu) > 0$ , если  $\mp 2\nu + \lambda + 1$  — действит. четн., при  $\operatorname{Re}(\lambda+1) < 0$ , если  $\lambda+1$  — действит. четн.,  $2\nu$  — действ. четн.), то нетрудно убедиться, что оно дается правой частью (1.2) и следующих из нее формул (1.2a), (1.26) и т. д., в предположении, что  $a$  под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Выражение (1.2) и вытекающие из него формулы, хотя и являются общими\*, но практически удобны при небольших  $a$ .

При больших  $|a|$  рассматриваемый интеграл представляется асимптотическим разложением

\* Нетрудно убедиться в частности, что при  $\lambda=1$  (1.2) есть хорошо известная формула

$$\int_a^{\infty} t K_{\nu}^2(t) dt = \frac{a^2}{2} \left[ K_{\nu}^2(a) - \left(1 + \frac{\nu^2}{a^2}\right) K_{\nu}^2(a) \right]$$



$$\begin{aligned}
\int_a^\infty t^\lambda K_\nu^2(t) dt &\sim \frac{\pi}{4} a^{\lambda-1} e^{-2a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(-\lambda + m + 1)}{(2a)^m} \times \\
&\times \sum_{m'=0}^m \frac{1}{\Gamma(-\lambda + m' + 1)} \times \\
&\times \sum_{m''=0}^{m'} \frac{\Gamma\left(\nu + m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m'' + \frac{1}{2}\right)}{m''! (m' - m'')! \Gamma^2\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \times \\
&\times \frac{\Gamma\left(\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)}, \quad (1.6)
\end{aligned}$$

получаемым почленным интегрированием асимптотического разложения  $t^\lambda K_\nu^2(t)$ , с последующей подстановкой выражения [2] для неполной гамма-функции  $\Gamma(\lambda - m, 2a)$ , при больших  $|a|$ .

## § 2. Вычисление интегралов вида (A), (B)

Теперь исследуем интегралы (A), (B) для произвольного  $b$ . Представив  $\int_a^b$  как разность интегралов  $\int_a^\infty$  и  $\int_b^\infty$ , мы можем воспользоваться выражениями для них, выведенными способами, описанными в § 2. Особый интерес представляет случай, когда  $a$ —небольшое,  $b$ —большое. Например, для интеграла  $\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t) dt$  получается

$$\int_a^b t^\lambda K_\nu^2(t) dt \sim \Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty) - \Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a) - F_{\lambda, K_\nu^2}(b), \quad (2.1)$$

где  $\Phi_{\lambda, K_\nu^2}(\infty) - \Phi_{\lambda, K_\nu^2}(a)$  дается формулами (1.3), (1.5), (1.2a), (1.2б), а через  $F_{\lambda, K_\nu^2}(b)$  обозначена правая часть (1.6), представляющая собой асимптотическое разложение.

Формула (2.1) пригодна как для положительных, так и отрицательных  $a$ ,  $b$ . Однако, в некоторых случаях, такие формулы непосредственно дают значения интегралов для  $a$  любого знака, но при  $b > 0$ . Значения интегралов и их главных значений при  $b < 0$  даются аналитическим продолжением приводимых формул.

В приведенном примере интегралы  $\int_a^\infty \int_b^\infty$  сходились во всей области существования искомого интеграла  $\int_a^b$ . Однако, возможны более сложные примеры.

Рассмотрим интеграл  $\int_a^b t^\lambda J_\nu(t) dt$ . Для него нетрудно получить интегралы  $\int_a^\infty$  и  $\int_b^\infty$  (см. (П. 1)–(П. 16)).

Равенства (П. 1) и (П. 16) имеют место лишь при  $\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}$ . При  $\operatorname{Re}(\lambda) > \frac{1}{2}$  интегралы в левых частях (П. 1), (П. 16) расходятся. Однако, разность выражений (П. 1), (П. 16), являющаяся аналитической функцией, согласно принципу аналитического продолжения представляет собой интересующий нас интеграл во всей области его существования.

Для вычисления интеграла  $\int_a^b t^\lambda J_\nu(t) J_\nu(t) dt$  находим сначала  $\int_a^\infty$  (см. (П. 5)), а почленное интегрирование асимптотическое разложения подынтегрального выражения дает

$$\begin{aligned} \int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t) J_\nu(t) dt &= \frac{b^{\lambda-1}}{2\pi} \sum_{m=0}^{p-1} \cos\left(2b - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \times \\ &\times \frac{\Gamma(-\lambda + m + 1)}{(2b)^m} \sum_{m'=0}^m \frac{1}{\Gamma(-\lambda + m' + 1)} \times \\ &\times \sum_{m''=0}^{m'} \frac{\Gamma\left(\mu + m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\mu + m'' + \frac{1}{2}\right)}{m''!(m' - m'')! \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \times \\ &\times \frac{\Gamma\left(\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)} - \\ &- \frac{b^\lambda}{\pi} \sum_{m=0}^p \frac{\cos(\mu - \nu - m) \frac{\pi}{2}}{(\lambda - m)(2b)^m} \times \end{aligned}$$



$$\times \sum_{m'=0}^m \frac{(-1)^{m'} \Gamma\left(\mu + m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\mu + m' + \frac{1}{2}\right) \times}{m'! (m - m')! \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \times} \\ \times \frac{\Gamma\left(\nu + m - m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m - m' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)} + O(b^{\lambda-p-1}). \quad (2.2)$$

Причем при целом неотрицательном  $\lambda$  в (2.2) положено  $p+1 > \lambda$ . (П. 5) и (2.2) имеют место при  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , а если  $\lambda$  — целое неотрицательное число, то расходятся обе части равенств (П.5) и (2.2).

Теперь учтем, что последний конечный ряд в (2.2) может быть просуммирован.

Действительно,

$$\sum_{m'=0}^m \frac{(-1)^{m'} \Gamma\left(\mu + m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\mu + m' + \frac{1}{2}\right) \times}{m'! (m - m')! \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) \times} \\ \times \frac{\Gamma\left(\nu + m - m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m - m' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)} = \\ = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(\nu - m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu - m + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \mu + \frac{1}{2}, & -\mu + \frac{1}{2}, & -m; \\ \nu - m + \frac{1}{2}, & -\nu - m + \frac{1}{2} \end{matrix} \right], \quad (2.3)$$

где через  ${}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \mu + \frac{1}{2}, & -\mu + \frac{1}{2}, & -m; \\ \nu - m + \frac{1}{2}, & -\nu - m + \frac{1}{2} \end{matrix} \right]$  обозначен обобщенный

гипергеометрический ряд с аргументом, равным единице. Воспользовавшись (2.3) и формулой (2) работы [4], второй член в (2.2) со своим знаком можем представить в виде

$$-b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m b^{-m}}{(\lambda - m) m! \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Таким образом, возникающие при  $\lambda$  целом неотрицательном расходящиеся члены в разности интегралов  $\int_a^{\infty}$  и  $\int_b^{\infty}$  сократятся. Эта разность и в данном случае является аналитической функцией и представляет интеграл  $\int_a^b$  (см. (П. 5)–(П.5г)).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### ИНТЕГРАЛЫ ОТ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Ниже приведены значения простейших интегралов вида (A), (B), во всей области существования, вычисленных методом, изложенным в § 1, 2. Сначала даны интегралы  $\int_a^{\infty}$ , удобные для малых  $a$ , и  $\int_b^{\infty}$ , удобные для больших  $b$ . По этим значениям определяется  $\int_a^b$  (без ограничения на  $\text{Re } \lambda$ , необходимого в некоторых случаях для существования  $\int_a^b$ )

$$\int_a^b = \int_a^{\infty} - \int_b^{\infty}.$$

Затем приведены значения  $\int_a^b$  для тех случаев, когда интегралы  $\int_a^{\infty}$ ,  $\int_b^{\infty}$  не существуют.



Выражения для  $\int_a^\infty$  справедливы для действительных  $a$ . Однако, при  $a < 0$  интеграл  $\int_a^\infty$  существует при дополнительном условии сходимости интеграла  $\int_0^\infty$ . При его нарушении, но при соблюдении других условий, которые также приводятся, существует главное значение интеграла  $P\{$ . Оно дается выражением для  $\int_a^\infty$  (или  $\int_b^\infty$ ) в предположении, что  $a$  под логарифмом (если он входит в ответ) понимается в смысле абсолютного значения.

Основное выражение для  $\int_a^\infty$ , при некоторых значениях параметров  $\lambda, \mu, \gamma$ , обращается в неопределенность. Для этих случаев  $\int_a^\infty$  приводится отдельно, причем через  $\Phi'$  ( $F'$  для  $\int_b^\infty$ ) тогда обозначается  $\Phi(F)$  за вычетом обращающихся в бесконечность членов.

Интегралы  $\int_b^\infty$  представлены асимптотическими рядами. В случаях, когда в подынтегральную функцию не входят  $J_\nu(t)$  или  $N_\nu(t)$ , эти формулы справедливы при действительных  $b$ . В противном случае они непосредственно справедливы только при  $b > 0$ , а при  $b < 0$  интегралы  $\int_b^\infty$  даются аналитическим продолжением, которое просто получить с помощью приведенных формул и аналитического продолжения [2] бесселевых функций.

Отметим, что формулы (П. 1а), (П. 2в), (П. 3в) получены независимо Люком [5].

Ниже введены следующие обозначения

$$n, n', \dots = 0, 1, 2, \dots$$

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$C$  — постоянная Эйлера:  $C = 0,577\,215\,6649$

$\zeta$  — дзета — функция Римана:  $\zeta = 1,202\,056\,9032\dots$

Если

$$n < n' - 1, \quad \lim_{\nu \rightarrow n'} \frac{\psi(\nu + n + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1)} = (-1)^{n'-n} (n' - n - 1)!$$

$$\Phi_{\lambda, J}(a) = \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu + \lambda + 2m + 1) m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t) dt = \frac{2^\lambda \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)} - \Phi_{\lambda, J_\nu}(a). \quad (\text{П. 1})$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}.$$

При  $a < 0$   $\int_a^\infty$  существует, если дополнительно  $\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) > 0$ ;

при  $\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) \leq 0$  существует  $\rho \int_a^\infty$ , если  $\nu + \lambda + 1$  действ. четн.

При  $-\nu - \lambda - 1 = 2n$ ,  $n + \lambda \neq n'$

$$\int_a^\infty t^\lambda J_\nu(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left[ 2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n + 1) - \psi(\nu + n + 1) \right] - \Phi_{\lambda, J_\nu}(a), \quad (\text{П. 1a})$$

$$\begin{aligned} \int_b^\infty t^\lambda J_\nu(t) dt &\sim - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} b^{\lambda-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \sin\left(b - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right) \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(-\lambda + m + \frac{1}{2}\right)}{b^m} \times \\ &\quad \times \sum_{m'=0}^m \frac{\Gamma\left(\nu + m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda + m' + \frac{1}{2}\right) 2^{m'} m'! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{П. 1б})$$

$$\Phi_{\lambda, N_\nu}(a) = \frac{1}{\sin \nu\pi} \left[ \cos \nu\pi \Phi_{\lambda, J_\nu}(a) - \Phi_{\lambda, J_{-\nu}}(a) \right]$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda, N_\nu}(a) &= \frac{1}{\pi} \left[ 2\Phi_{\lambda, J_\nu}(a) \left( \ln \frac{a}{2} + C \right) - \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^{n-1}} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n + \lambda + 2m + 1)^2 m! (n + m)!} - \frac{a^{-\nu+\lambda+1}}{2^{-n}} \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)! \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n+\lambda+2m+1)m!} - \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n} \times \\
& \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)m!(n+m)!} \left[ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right], \\
& \int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t) dt = \frac{2^{\lambda}}{\pi} \sin(-\nu+\lambda) \frac{\pi}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \\
& \times \Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) - \Phi_{\lambda, N_{\nu}}(a), \quad (\text{П. 2}) \\
& \text{Re}(\lambda) < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

При  $a < 0$   $\int_a^{\infty}$  существует  $\left(\nu \neq p + \frac{1}{2}\right)$ , если дополнительно  $\text{Re}(\lambda+1) >$

$> |\text{Re}(\nu)|$ ; при  $\text{Re}(\lambda+1) \leq |\text{Re}(\nu)|$  существует  $P \int_a^{\infty}$ , если  $-\nu + \lambda + 1$

действ. четн. при  $\text{Re}(\pm \nu) \geq 0$ ,  $|\text{Re}(\lambda+1)| \leq |\text{Re}(\nu)|$  или, если  $\nu$  и  $\lambda+1$

действ. целые числа одинаковой четности при  $|\text{Re}(\lambda+1)| > |\text{Re}(\nu)|$ .

При  $\nu \neq p$ ,  $-\nu - \lambda - 1 = 2n$

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t) dt &= \frac{(-1)^{n+1} 2^{\lambda} \text{ctg } \nu\pi}{n! \Gamma(\nu+n+1)} \left[ 2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu+n+1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\pi}{\sin 2\nu\pi} \right] - \Phi_{\lambda, N_{\nu}}(a), \quad (\text{П. 2a})
\end{aligned}$$

При  $\nu - \lambda - 1 = 2n$ ,  $-\nu + n \neq n'$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t) dt = \frac{2^{\lambda} \Gamma(\nu-n)}{n! \pi} \left[ 2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu-n) \right] - \Phi_{\lambda, N_{\nu}}(a), \quad (\text{П. 2б})$$

При  $\nu = n$ ,  $-n - \lambda - 1 = 2n'$

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t) dt &= \frac{(-1)^{n'+1} 2^{\lambda-1}}{n'! (n+n')! \pi} \times \left[ \left| 2 \left( \ln \frac{a}{2} + C \right) - \sum_{k=1}^{n+n'} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k} \right|^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{n+n'} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n'} \frac{1}{k^2} - \frac{2\pi^2}{3} \right] - \Phi_{\lambda, N_n}(a), \quad (\text{П. 2в})
\end{aligned}$$

$$\int_b^{\infty} t^{\lambda} N_{\nu}(t) dt \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{\lambda-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(b - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{4}\right) \times \\ \times \frac{\Gamma\left(-\lambda + m + \frac{1}{2}\right)}{b^m} \times \\ \times \sum_{m'=0}^m \frac{\Gamma\left(\nu + m' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda + m' + \frac{1}{2}\right) 2^{m'} m'! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)}. \quad (\Pi, 2r)$$

$$\Phi_{\lambda, K_{\nu}}(a) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left[ e^{-\frac{i(-\nu+\lambda+1)\pi}{2}} \Phi_{\lambda, J_{-\nu}}(ia) - e^{-\frac{i(\nu+\lambda+1)\pi}{2}} \Phi_{\lambda, J_{\nu}}(ia) \right]$$

$$\Phi_{\lambda, K_n}(a) = (-1)^{n+1} e^{-\frac{i(n+\lambda+1)\pi}{2}} \Phi_{\lambda, J_n}(ia) \left( \ln \frac{a}{2} + C \right) + (-1)^n \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^n} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1)^2 m! (n+m)!} - \\ - \frac{a^{-n+\lambda+1} n^{-1}}{2^{-n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-m-1)! \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(-n+\lambda+2m+1) m!} + \\ + (-1)^n \frac{a^{n+\lambda+1}}{2^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(n+\lambda+2m+1) m! (n+m)!} \left[ \sum_{k=1}^{n+m} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \right].$$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}(t) dt = 2^{\lambda-1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) - \Phi_{\lambda, K_{\nu}}(a).$$

(П. 3)

При  $a < 0$   $\int_a^{\infty}$  существует, если  $\operatorname{Re}(\lambda+1) > |\operatorname{Re}(\nu)|$ ; при  $\operatorname{Re}(\lambda+1) \leq$

$\leq |\operatorname{Re}(\nu)|$  существует  $\int_a^{\infty}$ , если  $\mp \nu + \lambda + 1$  действ. четн. при  $\operatorname{Re}(\pm \nu) \geq 0$ .

$|\operatorname{Re}(\lambda+1)| \leq |\operatorname{Re}(\nu)|$  или, если  $\nu$  и  $\lambda+1$  действ. целые одинаковой четности при  $|\operatorname{Re}(\lambda+1)| > |\operatorname{Re}(\nu)|$ .

При  $-\nu - \lambda - 1 = 2n$ ,  $\nu + n \neq n'$

$$\int_a^{\infty} t^{\lambda} K_{\nu}(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^{\lambda-1} \Gamma(-\nu-n)}{n!} \times$$

$$(11.3a) \quad \times \left[ 2 \ln \frac{z}{a} - \psi(n+1) - \psi(-\nu-n) \right] - \Phi_{\lambda, K}(a).$$

При  $\nu - \lambda - 1 = 2n, -\nu + n \neq n'$

$$\times \frac{n!}{(-1)^{n+1} 2^{\lambda-1} \Gamma(\nu-n)} \int_0^n t^{\lambda} K_{\lambda}(t) dt =$$

$$(11.36) \quad \times \left[ 2 \ln \frac{z}{a} - \psi(n+1) - \psi(\nu-n) \right] - \Phi_{\lambda, K}(a).$$

При  $\nu = n, -n - \lambda - 1 = 2n'$

$$+ \int_0^n t^{\lambda} K_{\lambda}(t) dt = \frac{(-1)^n 2^{\lambda-2}}{(n+1)!} \left[ 2 \left( \ln \frac{z}{a} + C \right) - \sum_{n'=1}^{k-1} \frac{1}{n'} - \sum_{n'=1}^{k-1} \frac{1}{n'} \right] +$$

$$(11.38) \quad + \sum_{n'=1}^{k-1} \frac{1}{n'} + \sum_{n'=1}^{k-1} \frac{1}{n'} + \frac{3}{2} \left\{ -\Phi_{\lambda, K}(a) \right\}.$$

$$\times \frac{b^w}{(-1)^w \Gamma(-\lambda+m+\frac{1}{2})} \sum_{w=0}^{m-1} e^{-\frac{z}{b}} b^{\frac{1}{2} - \frac{z}{b}} \left( \frac{z}{b} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{z}{b}} \int_0^z t^{\lambda} K_{\lambda}(t) dt \sim$$

$$(11.39) \quad \times \sum_m \frac{\Gamma(\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)}{\Gamma(\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\nu+m'+\lambda-1)} \times$$

$$\times \frac{b^w}{\Gamma(-\lambda+m+1)} \sum_{w=0}^{m-1} e^{-\frac{z}{b}} b^{\frac{1}{2} - \frac{z}{b}} \frac{\Gamma(\frac{z}{2})}{b^{\frac{1}{2} - \frac{z}{b}}} = (b)^{\lambda, \lambda} F$$

$$+ \sum_m \frac{\Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)} \times$$

$$\times \frac{b^w}{\Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)} \sum_{w=0}^{m-1} e^{-\frac{z}{b}} \frac{\Gamma(\frac{z}{2})}{b^{\frac{1}{2} - \frac{z}{b}}} +$$

$$\times \sum_m \frac{\Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)}{\Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu+m'+\lambda-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1) \Gamma(\frac{z}{2}+\nu-1)} \times$$



$$\int_a^b t^{\lambda} I_{\nu}(t) dt \sim e^{-R(\nu+\lambda+1)\frac{\pi}{2}} \frac{2^{\lambda} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)} -$$

$$- \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^{\nu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1) m! \Gamma(\nu+m+1)} - F_{\lambda, I_{\nu}}(b). \quad (\Pi. 4)$$

Интеграл  $\int_a^b$  не существует.

При  $a < 0$ ,  $0 < b < \infty$ ,  $\int_a^b$  существует, если  $\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) > 0$ ; при

$\operatorname{Re}(\nu + \lambda + 1) \leq 0$  существует  $P \int_a^b$ , если  $\nu + \lambda + 1$  действ. четн.

При  $-\nu - \lambda - 1 = 2n$

$$\int_a^b t^{\lambda} I_{\nu}(t) dt \sim - \frac{2^{\lambda}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)} \left[ 2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n+1) - \psi(\nu + n + 1) \right] -$$

$$- \frac{a^{\nu+\lambda+1}}{2^{\nu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\nu+\lambda+2m+1) m! \Gamma(\nu+m+1)} - F_{\lambda, I_{\nu}}(b). \quad (\Pi. 4a)$$

$$\Phi_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(a) = \frac{a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{2^{\mu+\nu}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\mu + \nu + 2m + 1) \left(\frac{a}{2}\right)^{2m}}{(\mu + \nu + \lambda + 2m + 1) m! \Gamma(\mu + \nu + m + 1) \Gamma(\mu + m + 1) \Gamma(\nu + m + 1)}.$$

$$F_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(b) = \frac{b^{\lambda-1}}{2^{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(2b - \frac{\mu\pi}{2} - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{m\pi}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-\lambda + m + 1)}{(2b)^m} \sum_{m'=0}^m \frac{1}{\Gamma(-\lambda + m' + 1)} \times$$

$$\times \frac{\sum_{m''=0}^{m'} \Gamma\left(\mu + m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\mu + m'' + \frac{1}{2}\right)}{m''! (m' - m'')! \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + m' - m'' + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu + \frac{1}{2}\right)} -$$

$$\begin{aligned}
 & -b^{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m b^{-m}}{(\lambda-m)m! \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)} \times \\
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{m}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \\
 & \int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t) J_{\nu}(t) dt = \\
 & = \frac{2^{\lambda} \Gamma(-\lambda) \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right)} - \\
 & - \Phi_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(a), \quad (\text{П. 5}) \\
 & \operatorname{Re}(\lambda) < 0
 \end{aligned}$$

При  $a \leq 0$  существует, если дополнительно  $\operatorname{Re}(\mu + \nu + \lambda + 1) > 0$ ;

при  $\operatorname{Re}(\mu + \nu + \lambda + 1) \leq 0$  существует  $\rho \int_a^{\infty}$ , если  $\mu + \nu + \lambda + 1$  действ., четн.

При  $-\mu - \nu - \lambda - 1 = 2n$ ,  $-\mu - \nu + \lambda - 1 \neq 2n'$ ,  $-\mu + \nu + \lambda - 1 \neq 2n''$ ,  $\mu - \nu + \lambda - 1 \neq 2n'''$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t) J_{\nu}(t) dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^{\lambda} \Gamma(-\lambda)}{n! \Gamma(\mu + \nu + n + 1) \Gamma(\mu + n + 1) \Gamma(\nu + n + 1)} \times \\
 & \times \left[ 2 \ln \frac{a}{2} - \psi(n+1) + 2\psi(-\lambda) - \psi(\mu + \nu + n + 1) - \psi(\mu + n + 1) - \right. \\
 & \left. - \psi(\nu + n + 1) \right] - \Phi_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(a). \quad (\text{П. 5a})
 \end{aligned}$$

$$\int_b^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(t) J_{\nu}(t) dt \sim F_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(b). \quad (\text{П. 5б})$$

При  $\lambda = n$

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b t^n J_{\mu}(t) J_{\nu}(t) dt \sim \\
 & \sim \frac{(-1)^n 2^{n-1} \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)} \times \\
 & \times \left[ 2 \ln \frac{b}{2} - \psi(n+1) + 2\psi\left(-\frac{\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) - \right. \\
 & \left. - \psi\left(-\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) \right] - \Phi_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(b).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ 2 \ln \frac{b}{2} - \psi \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \psi \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) - \psi \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right) + 2\psi(n+1) \right] - \\ & - \Phi_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(a) - F_{\lambda, J_{\mu}, J_{\nu}}(b). \end{aligned} \quad (\text{П. 5в})$$

При  $\lambda = n$ ,  $-\mu - \nu - n - 1 = 2n'$ ,  $-\mu + \nu + n - 1 \neq 2n''$ ,  $\mu - \nu + n - 1 \neq 2n''$

$$\begin{aligned} & \int_a^b t^n J_{\mu}(t) J_{\nu}(t) dt \sim \frac{2^{n-1} (n+n')!}{n! n'! \Gamma(\mu + n' + 1) \Gamma(\nu + n' + 1)} \times \\ & \times \left[ 2 \ln \frac{2b}{a^2} - 2\psi(n+1) + \psi(n'+1) + \psi(n+n'+1) + \psi(\mu + n' + 1) + \right. \\ & \left. + \psi(\nu + n' + 1) \right] - \Phi_{n, J_{\mu}, J_{\nu}}(a) - F_{n, J_{\mu}, J_{\nu}}(b). \end{aligned} \quad (\text{П. 5г})$$

$$\begin{aligned} & \int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(ct) J_{\nu}(dt) dt = \frac{2^{\lambda} d^{\nu} \Gamma \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \right)}{c^{\nu+\lambda+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \right)} \times \\ & \times {}_2F_1 \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}; \nu+1; \frac{d^2}{c^2} \right) - \\ & - \frac{\left( \frac{c}{2} \right)^{\mu} \left( \frac{d}{2} \right)^{\nu} a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left( \frac{ca}{2} \right)^{2m} {}_2F_1 \left( -m, -\mu-m; \nu+1; \frac{d^2}{c^2} \right)}{(\mu+\nu+\lambda+2m+1) m! \Gamma(\mu+m+1)}, \end{aligned} \quad (\text{П. 6})$$

если  $c \neq d$   $\text{Re}(\lambda) < 1$ .

При  $a < 0$   $\int_a^{\infty}$  существует; если дополнительно  $\text{Re}(\mu + \nu + \lambda + 1) > 0$ ;

при  $\text{Re}(\mu + \nu + \lambda + 1) \leq 0$  существует  $\int_a^{\infty}$ , если  $\mu + \nu + \lambda + 1$  действ. четн.

При  $-\mu - \nu - \lambda - 1 = 2n$ ,  $-\mu - n - 1 \neq n'$ ,  $-\nu - 1 \neq n''$

$$\begin{aligned} & \int_a^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(ct) J_{\nu}(dt) dt = \frac{(-1)^{n+1} 2^{\lambda} d^{\nu}}{c^{\nu+\lambda+1} n! \Gamma(\nu+1) \Gamma(\mu+n+1)} \times \\ & \times \sum_{m=0}^n \frac{n! \Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\nu+1) \left( \frac{d}{c} \right)^{2m}}{m! (n-m)! \Gamma(\mu+n-m+1) \Gamma(\nu+m+1)} \times \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \left[ 2 \ln \frac{ca}{2} - \psi(n-m+1) - \psi(\mu+n-m+1) \right] - \\ & - \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{\mu} \left(\frac{d}{2}\right)^{\nu} a^{\mu+\nu+\lambda+1}}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{ca}{2}\right)^{2m}}{\mu+\nu+\lambda+2m+1} \times \\ & \times \frac{{}_2F_1\left(-m, -\mu-m; \nu+1; \frac{d^2}{c^2}\right)}{m! \Gamma(\mu+m+1)}. \quad (\Pi. 6a) \end{aligned}$$

Если  $c \neq d$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} t^{\lambda} J_{\mu}(ct) J_{\nu}(dt) dt \sim \frac{2^{-\lambda} b^{\lambda-1}}{\pi \sqrt{cd}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\lambda+m+1)}{b^m} \times \\ & \times \sum_{m'=0}^m \frac{1}{\Gamma(-\lambda+m'+1)} \sum_{m''=0}^{m'} \left\{ (c+d)^{\lambda-m-1} \cos \left[ (c+d)b - (\mu+\nu+m) \frac{\pi}{2} \right] - \right. \\ & \left. - (-1)^{m''} (c-d)^{\lambda-m-1} \sin \left[ (c-d)b - (\mu-\nu+m) \frac{\pi}{2} \right] \right\} \times \\ & \times \frac{\Gamma\left(\mu+m''+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\mu+m''+\frac{1}{2}\right)}{m''!(m'-m'')! d^{m''} c^{m'-m''} \Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \times \\ & \times \frac{\Gamma\left(\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+m'-m''+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\nu+\frac{1}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Физический институт ГКАЭ СССР  
г. Ереван

Поступила 15 VI 1964

Վ. Հ. ԶՐԱՆՅԱՆ

ԲԵՍՍԵԼԻ ՖՈՐՄԱՅԻՆՆԵՐԻՑ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Նախադրված է իրենց գոյություն տիրույթներում Բեսսելի ֆունկցիաներից ինտեգրալների հաշվման մեթոդ: Բերված են առհասարակ ինտեգրալները պարամետրերի բոլոր հնարավոր արժեքների համար:

Դրականության մեջ հալանի բանաձևերը համընկնում են դիտարկվածների մասնավոր դեպքերի հետ:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, т. I. ИЛ, М., 1949.
2. Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi. Higher transcendental functions, v. II. New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.
3. Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. J. London, Math. Soc., 10, 1935, 286.
4. Джрбашян В. А. К теореме Виппла. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 4, 1964, 348.
5. Luke Y. I. Integrals of Bessel functions. Mc Graw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1962.

А. А. КИТБАЛЯН

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ РАЦИОНАЛЬНЫХ  
ФУНКЦИЙ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ  
ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В в е д е н и е

В работах Г. Сеге была построена алгебраическая и предельная теория полиномов, ортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения (см., напр., [1]). В случае, когда данное обложение является четной функцией, им же была обнаружена явная связь между такими полиномами и полиномами, ортогональными на отрезке  $[-1, +1]$  относительно соответствующего обложения. Эта связь, установленная другим методом Я. Л. Геронимусом [2], выражается простым соотношением, что позволило вывести различные оценки и асимптотические формулы для полиномов, ортогональных на отрезке, при помощи результатов, известных для полиномов, ортогональных на окружности (см., напр., [1], [3]).

В недавно опубликованной работе Г. Сеге [4] приводится построение системы тригонометрических полиномов, биортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения. В этой работе выведена связь между функциями этой системы и функциями системы полиномов, ортогональных на единичной окружности в случае уже произвольного обложения.

В работе М. М. Джрбашяна [5] была развита алгебраическая и частично предельная теория систем рациональных функций с полюсами, лежащими на заданной последовательности точек вне единичного круга, ортогональных на единичной окружности относительно произвольного обложения. Эти результаты явились дальнейшим естественным обобщением теории Г. Сеге. Кроме того, в них содержатся качественно новые данные для тех случаев, когда порождающая последовательность полюсов системы достаточно редкая.

В работе [6] было получено естественное обобщение классических полиномов Чебышева. А именно, там была установлена явная алгебраическая формула для представления системы рациональных функций, ортогональных на отрезке  $[-1, +1]$  с весом  $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$ , произвольные полюсы которых лежат вне этого отрезка. При помощи



этой формулы была обнаружена алгебраическая связь между функциями упомянутой системы рациональных функций и системы рациональных функций Мальмквиста, ортогональных на единичной окружности с весом  $\frac{d\theta}{2\pi}$ .

В работе [7] была введена в рассмотрение система обобщенных тригонометрических функций и доказана теорема о сходимости разложений по этим функциям в метрике  $L_p$ .

Настоящая статья посвящена применениям обобщенной системы функций Чебышева и обобщенных тригонометрических систем.

В § 1 устанавливается справедливость формулы, аналогичной формуле Г. Сеге, между системами рациональных функций, ортогональных на единичной окружности относительно четного обложения и на отрезке относительно соответствующего обложения.

В § 2 излагается дальнейшее развитие результатов работы Г. Сеге [4]. А именно, приводится построение биортогональной относительно произвольного обложения системы обобщенных тригонометрических полиномов и устанавливается явная связь между функциями этой системы и системы рациональных функций, ортонормальных на единичной окружности относительно того же обложения. При этом существенно используются алгебраические свойства системы рациональных функций М. М. Джрбашяна [5] и результаты § 1.

Автор выражает глубокую благодарность академику АН АрмССР, профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении настоящей работы.

## § 1. Система рациональных функций, ортонормальных на отрезке $[-1, +1]$ относительно произвольного обложения

1.1. В первую очередь отметим ряд фактов и введем некоторые понятия и обозначения, необходимые в дальнейшем.

В статье [6] для произвольной последовательности комплексных чисел  $\{\omega_k\}_0^\infty$ , лежащих вне отрезка  $K \equiv [-1, +1]$ , приводилось построение системы рациональных функций  $\{M_k(x)\}_0^\infty$  с полюсами в точках последовательности  $\{\omega_k\}_0^\infty$ , ортонормальных на отрезке  $K$  с весом  $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$ .

Если с последовательностью чисел  $\{\omega_k\}_0^\infty$ , лежащих вне отрезка  $K$ , ассоциировать три последовательности чисел:  $\{\nu_k\}_0^\infty$ ,  $\{p_k\}_0^\infty$  и  $\{q_k\}_0^\infty$ , где при данном  $k \geq 0$   $\nu_k$  означает кратность появления числа  $\omega_k$  в группе чисел  $\{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k\}$ , а  $p_k$  и  $q_k$  определяются из условий

$$p_k = q_k = 0 \quad \text{при} \quad \omega_k \neq \infty,$$

$$p_k = \nu_k, \quad q_k = \nu_k - 1 \quad \text{при} \quad \omega_k = \infty,$$

то легко видеть, что система рациональных функций  $\{M_k(x)\}_0^\infty$  представляет собой результат ортогонализации на отрезке  $K$  с весом  $\frac{1}{2\pi\sqrt{1+x^2}}$  последовательности функций

$$\left\{ \frac{x^{q_k} \omega_k^{p_k}}{(\omega_k - x)^{q_k}} \right\}_0^\infty, \quad (1.1)$$

переходящей в систему степеней  $\{x^k\}_0^\infty$  при  $\omega_k = \infty$  ( $k > 0$ ).

Поставим, далее, в соответствие последовательности чисел  $\{\omega_k\}_0^\infty$  последовательность комплексных чисел  $\{a_k^{(n)}\}_0^\infty$ , лежащих внутри единичного круга и определяемых из соотношения

$$a_k^{(n)} = a_k = \begin{cases} [\omega_k + \sqrt{\omega_k^2 - 1}]^{-1} & \text{при } \omega_k \neq \infty \\ 0 & \text{при } \omega_k = \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

Системой рациональных функций Мальмквиста, ассоциированных с последовательностью  $\{a_k^{(n)}\}_0^\infty$ , принято называть следующую систему

$$\varphi_0^{(n)}(z) = \frac{(1 - |a_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_0 z}, \quad \varphi_k^{(n)}(z) = \frac{(1 - |a_k|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_k z} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{a_l - z}{1 - \bar{a}_l z} \frac{|a_l|}{a_l} \quad (1.3)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ),

ортонормальную на единичной окружности с весом  $\frac{1}{2\pi} |dz|$  в смысле\*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \varphi_n^{(n)}(z) \overline{\varphi_m^{(n)}(z)} |dz| = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (1.4)$$

( $n, m = 0, 1, 2, \dots$ ).

Как показано в [6], при  $\omega_0 = \infty$ , т. е. при  $a_0 = 0$ , система функций  $\{M_k(x)\}_0^\infty$  явно выражается посредством функций  $\{\varphi_k^{(n)}(z)\}_0^\infty$  по следующим формулам

$$M_0(x) \equiv 1, \quad M_k(x) = \varphi_k^{(n)}(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \varphi_k^{(n)}(x - \sqrt{x^2 - 1}) \quad (1.5)$$

( $k = 1, 2, \dots$ ).

Заметим, что в частном случае, когда все полюсы системы  $\{M_k(x)\}_0^\infty$  отождествляются с бесконечно удаленной точкой, то есть все  $a_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), система рациональных функций Мальмквиста переходит в систему степеней  $\{z^k\}_0^\infty$ , а система  $\left\{ \frac{1}{2} M_k(x) \right\}_0^\infty$  — в систему полиномов Чебышева первого рода  $\{T_k(x)\}_0^\infty$ .

\* Условимся, что при  $a_j = 0$   $\frac{|a_j|}{a_j} = 1$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ).



Пусть, далее,  $\psi(x)$  есть произвольная неубывающая ограниченная функция с бесконечным множеством точек роста на  $K$ .

Результат процесса ортогонализации последовательности рациональных функций  $\{R_k(x)\}_0^\infty$  относительно обложения  $d\psi(x)$  на отрезке  $K \equiv [-1, +1]$  обозначим через  $\{R_k(x)\}_0^\infty$ . Иначе говоря, система рациональных функций  $\{R_k(x)\}_0^\infty$  с полюсами в точках последовательности  $\{\omega_k\}_0^\infty$  будет удовлетворять следующим условиям ортонормальности

$$\int_{-1}^1 R_n(x) \overline{R_m(x)} d\psi(x) = \delta_{n,m} \quad (1.6)$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Введем, наконец, неубывающую и ограниченную на отрезке  $[0, 2\pi]$  функцию  $\tau(\theta)$ , связанную с функцией  $\psi(x)$  следующим образом

$$\tau(\theta) = \begin{cases} -\psi(\cos \theta) & \text{при } 0 \leq \theta < \pi \\ \psi(\cos \theta) & \text{при } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (1.7)$$

Ортогонализация последовательности рациональных функций  $\left\{ \frac{z^{p_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{q_k}} \right\}_0^\infty$ , где  $q_k$  — кратность появления числа  $\alpha_k$  в группе чисел  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ , а  $p_k = 1$  при  $\alpha_k \neq 0$  и  $p_k = q_k$  при  $\alpha_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) или, что то же самое, последовательности функций Мальмквиста  $\{\varphi_k(z)\}_0^\infty$  относительно обложения  $d\tau(\theta)$  на единичной окружности  $|z| = 1$  приводит к рассмотренной впервые М. М. Джрбашьяном [5] системе рациональных функций  $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$  с полюсами в точках  $\left\{ \frac{1}{\alpha_k} \right\}_0^\infty$  ортонормальной в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_m(e^{i\theta}) \overline{\Phi_n(e^{i\theta})} d\tau(\theta) = \delta_{m,n} \quad (1.8)$$

$$(m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Предполагая в дальнейшем, что последовательность чисел  $\{\omega_k\}_0^\infty$  начинается с бесконечности ( $\omega_0 = \infty$ ), то есть, что последовательность  $\{\alpha_k\}_0^\infty$ , определенная по формуле (1.2), начинается с нуля ( $\alpha_0 = 0$ ), для любого целого  $n$  с  $\{\alpha_k\}_0^\infty$  ассоциируем следующую последовательность чисел

$$P_n^{(m)} = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots,$$

члены которой удовлетворяют условию периодичности

$$\alpha_k = \alpha_{k+n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.9)$$



Систему рациональных функций Мальмквиста, порожденную последовательностью чисел  $P_n^{(m)}$ , обозначим через  $\{\varphi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$ .

В силу формулы (1.9) и условия  $\alpha_0 = 0$  функции этой системы запишутся в следующем виде

при  $0 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) = \varphi_k^{(m)}(z); \quad (1.10)$$

при  $n < k \leq 2n$

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) = \varphi_{k-n}(z, P_n^{(m)}) \pi_n^{-1}(z), \quad (1.10')$$

где через  $\pi_n(z)$  обозначено произведение, которое определяется так

$$\pi_0(z) = 1,$$

при  $1 \leq k \leq n$

$$\pi_k(z) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{1 - \bar{\alpha}_i z}{\alpha_i - z} \frac{|\alpha_i|}{\alpha_i}; \quad (1.11)$$

при  $n < k \leq 2n$

$$\pi_k(z) = \pi_n(z) \pi_{k-n}(z). \quad (1.12)$$

Введем, далее, в рассмотрение последовательность функций  $\{M_k(x, P_n^{(m)})\}_0^\infty$ , определенную следующими соотношениями

$$M_0(x, P_n^{(m)}) = 1,$$

$$M_k(x, P_n^{(m)}) = \varphi_k(x + \sqrt{x^2 - 1}, P_n^{(m)}) + \varphi_k(x - \sqrt{x^2 - 1}, P_n^{(m)}). \quad (1.13)$$

Согласно теореме, доказанной в работе [6], система функций  $\{M_k(x, P_n^{(m)})\}_0^\infty$  будет ортонормальна на отрезке  $K$  с весом  $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$  в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 M_m(x, P_n^{(m)}) \overline{M_k(x, P_n^{(m)})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{m,k} \quad (1.14)$$

$$(m, k = 1, 2, \dots).$$

Обозначим, наконец, через  $\{\Phi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$  ассоциированную с последовательностью чисел  $P_n^{(m)}$  систему рациональных функций, ортонормальных на единичной окружности относительно обложения  $\frac{1}{2\pi} d\phi(\theta)$  и введем в рассмотрение следующую систему функций

$$\{\Phi_k^*(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$$

$$\Phi_k^*(z, P_n^{(m)}) = \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \quad (1.15)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots).$$

Заметим также, что из самого определения линейно-независимых систем  $\{\varphi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$  и  $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$ , ввиду того, что их полюсы со своими кратностями совпадают, легко следует, что справедливо разложение вида

$$\Phi_k(z, P_n^{(w)}) = \sum_{i=0}^k \lambda_i^{(k)} \varphi_i(z, P_n^{(w)}) \quad (1.16)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $\{\lambda_i^{(k)}\}_0^k$  — некоторые, вообще говоря комплексные коэффициенты.

1.2. В настоящем пункте будет установлено, что в случае, когда  $\{\omega_k\}_0^\infty$  — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка  $K$  ( $\omega_0 = \infty$ ), систему рациональных функций  $\{R_k(x)\}_0^\infty$ , ортонормальных на отрезке  $K$  относительно обложения  $d\psi(x)$ , можно представить через функции  $\Phi_{2n}(z, P_n^{(w)})$  и  $\Phi_{2n}^*(z, P_n^{(w)})$ . Эта связь, аналогично случаю полиномов Г. Сеге или случаю системы  $\{M_k(x)\}_0^\infty$ , выражается следующей теоремой.

**Теорема 1.1.** Пусть  $\{\omega_k\}_0^\infty$  — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка  $K$ , причем  $\omega_0 = \infty$ . Тогда функции системы  $\{R_k(x)\}_0^\infty$ , ортонормальной на отрезке  $K$  относительно произвольного обложения  $d\psi(x)$ , выражаются согласно следующей формуле

$$R_n(x) = C_n [\Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + \Phi_{2n}^*(z, P_n^{(w)})] \pi_n(z), \quad (1.17)$$

$$x = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где постоянный множитель  $C_n$  определяется так

$$C_n = \left[ 2\pi \left( 1 + \frac{\lambda_0^{(2n)}}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.18)$$

**Доказательство.** В первую очередь заметим, что в силу условия вещественности чисел  $\{\omega_k\}_0^\infty$ , последовательность  $\{x_k\}_0^\infty$ , ассоциированная с  $\{\omega_k\}_0^\infty$  по формуле (1.2), а также последовательность  $P_n^{(w)}$ , будут лежать на интервале  $(-1, +1)$ , причем  $x_0 = 0$ .

Введем в рассмотрение следующую последовательность вещественных чисел

$$Q_n^{(w)} = x_0, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0, x_{n-1}, \dots,$$

также удовлетворяющую условию периодичности (1.9).

Обозначим через  $\{\varphi_k(z, Q_n^{(w)})\}_0^\infty$  систему рациональных функций Мальмквиста, порожденную последовательностью чисел  $Q_n^{(w)}$ .

Ввиду равенства (1.9) и условия  $x_0 = 0$ , функции этой системы запишутся по следующим формулам



$$\varphi_0(z, Q_n^{(m)}) = 1,$$

при  $1 \leq k \leq n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) = -\frac{(1 - |a_{n-k}|^2)^{\frac{1}{2}}}{1 - \bar{a}_{n-k}z} z \prod_{l=n-k+1}^{n-1} \frac{a_l - z}{1 - \bar{a}_l z} \frac{|a_l|^*}{a_l}; \quad (1.19)$$

при  $n < k \leq 2n$

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) = \varphi_{k-n}(z, Q_n^{(m)}) \pi_n^{-1}(z). \quad (1.19')$$

Как и выше, введем в рассмотрение последовательность функций  $\{M_k(x, Q_n^{(m)})\}_0^\infty$ , определенную по формулам

$$M_0(x, Q_n^{(m)}) = 1,$$

$$M_k(x, Q_n^{(m)}) = \varphi_k(x + \sqrt{x^2 - 1}, Q_n^{(m)}) + \varphi_k(x - \sqrt{x^2 - 1}, Q_n^{(m)}) \quad (1.13')$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$

и ортонормальную на отрезке  $K$  с весом  $\frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2}}$  в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 M_m(x, Q_n^{(m)}) \overline{M_k(x, Q_n^{(m)})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \delta_{m,k} \quad (1.14')$$

$$(m, k = 1, 2, \dots).$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным при установлении формулы (1.16), получим, что имеет место также разложение

$$\Phi_k(z, P_n^{(m)}) = \sum_{l=0}^k \lambda_l^{*(k)} \varphi_l(z, Q_n^{(m)}) \quad (1.16')$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots),$$

где коэффициенты  $\{\lambda_l^{*(k)}\}_0^k$ , как и определенные по формуле (1.16) коэффициенты  $\{\lambda_l^{(k)}\}_0^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), вещественны в силу вещественности последовательности  $\{\omega_k\}_0^\infty$  и четности функции  $\sigma(\theta)$ .

Заметим, что из определения последовательностей  $P_n^{(m)}$  и  $Q_n^{(m)}$  следует равенство функций  $\varphi_{2n}(z, P_n^{(m)})$  и  $\varphi_{2n}(z, Q_n^{(m)})$ . Поэтому, если сравнить разложения (1.16) и (1.16'), то получим, что

$$\lambda_{2n}^{(2n)} = \lambda_{2n}^{*(2n)}.$$

Теперь уже, используя определения (1.10), (1.10'), (1.19), (1.19') и (1.11) функций  $\{\varphi_k(z, P_n^{(m)})\}_0^\infty$ ,  $\{\varphi_k(z, Q_n^{(m)})\}_0^\infty$  и  $\pi_n(z)$ , а также существенное условие вещественности последовательности  $\{\omega_k\}_0^\infty$ , можем написать следующие соотношения, необходимые нам в дальнейшем:

\* Условимся, что при  $k > p$  символ  $\prod_{l=k}^p \dots$  равен единице.



а) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right), \quad (1.20)$$

б) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n-k}(z, Q_n^{(m)}); \quad (1.20')$$

в) при  $n < k \leq 2n$ 

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{k-n}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.20'')$$

г) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}; P_n^{(m)}\right) \pi_n(z) = \varphi_{k+n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right); \quad (1.21)$$

д) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{k+n}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.21')$$

е) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) \pi_n(z) = \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right); \quad (1.22)$$

ж) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n-k}(z, P_n^{(m)}); \quad (1.22')$$

з) при  $0 < k \leq n$ 

$$\varphi_k(z, Q_n^{(m)}) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{k+n}(z, Q_n^{(m)}); \quad (1.23)$$

и) при  $0 \leq k \leq n$ 

$$\varphi_k\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right) \pi_n(z) = \varphi_{k+n}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(m)}\right). \quad (1.23')$$

Преобразуем, далее, выражение, стоящее в правой части формулы (1.17). Имея в виду разложение (1.16), а также определения (1.15) и (1.12), получим

$$\begin{aligned} R_n(x) &= C_n \left[ \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_k(z, P_n^{(m)}) + \pi_{2n}^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \right] \pi_n(z) = \\ &= C_n \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \left[ \varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) + \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \left[ \varphi_k(z, P_n^{(m)}) \pi_n(z) + \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \pi_n\left(\frac{1}{z}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

откуда, воспользовавшись формулами (1.20) и (1.20'), с учетом соотношений (1.13) и (1.13'), будем иметь

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= C_n \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \left[ \varphi_{n-k} \left( \frac{1}{z}, Q_n^{(\omega)} \right) + \varphi_{n-k}(z, Q_n^{(\omega)}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \left[ \varphi_{k-n}(z, P_n^{(\omega)}) + \varphi_{k-n} \left( \frac{1}{z}, P_n^{(\omega)} \right) \right] \right\} = \\
 &= C_n \left\{ 2\lambda_n^{(2n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \lambda_k^{(2n)} M_{n-k}(x, Q_n^{(\omega)}) + \lambda_{2n-k}^{(2n)} M_{n-k}(x, P_n^{(\omega)}) \right] \right\}, \quad (1.24) \\
 x &= \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).
 \end{aligned}$$

Из представления (1.24), если учесть, что системы функций  $\{M_k(x, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^n$  и  $\{M_k(x, Q_n^{(\omega)})\}_{k=0}^n$  линейно-независимы, следует, что для доказательства ортогональности системы  $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$  на отрезке  $K$  относительно обложения  $d\psi(x)$  достаточно установить справедливость равенств

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^{(1)} &= \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, P_n^{(\omega)})} d\psi(x) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1)
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

и

$$\begin{aligned}
 I_{n,m}^{(2)} &= \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, Q_n^{(\omega)})} d\psi(x) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1).
 \end{aligned} \quad (1.25')$$

С этой целью используем следующие соотношения, вытекающие из ортонормальности системы функций  $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^\infty$  на единичной окружности относительно обложения  $\frac{1}{2\pi} dz(\theta)$  и формул (1.16) и (1.16')

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} d\tau(\theta) = \\
 &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n-m}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) = 0 \\
 (m &= 0, 1, 2, \dots, n-1);
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\tau(\theta) =$$



$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.26')$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \overline{\varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.27)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1);$$

$$\int_0^{2\pi} \overline{\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) = 0 \quad (1.27')$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Составим теперь интеграл  $I_{n,m}^{(1)}$ , заменив в нем функции  $R_n(x)$  и  $M_m(x, P_n^{(\omega)})$  соответственно по формулам (1.17) и (1.13) и положив  $x = \cos \theta$ ,  $z = e^{i\theta}$ ,

$$I_{n,m}^{(1)} = \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{M_m(x, P_n^{(\omega)})} d\psi(x) =$$

$$= \int_0^\pi R_n(\cos \theta) \overline{M_m(\cos \theta, P_n^{(\omega)})} d\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{i\theta}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{-i\theta})] \times$$

$$\times [\overline{\varphi_m(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})} + \overline{\varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)})}] d\sigma(\theta). \quad (1.28)$$

Далее, с учетом формул (1.20), (1.20'), (1.21) и (1.21') получим

$$I_{n,m}^{(1)} = \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) +$$

$$+ \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) +$$

$$+ \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta). \quad (1.29)$$

Наконец, из формулы (1.29), ввиду соотношений (1.27), (1.26), (1.26') и (1.27'), следует, что

$$I_{n,m}^{(1)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Перейдем к интегралу  $I_{n,m}^{(2)}$ . Аналогичными рассуждениями, с учетом формул (1.22), (1.22'), (1.23) и (1.23'), получим

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{(2)} &= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{i\theta}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \pi_n(e^{-i\theta})] \times \\ &\quad \times [\varphi_m(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \varphi_m(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta) = \\ &= \frac{1}{2} C_n \int_0^{2\pi} [\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{-i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \\ &\quad + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n+m}(e^{i\theta}, Q_n^{(\omega)}) + \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) \varphi_{n-m}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})] d\sigma(\theta), \end{aligned}$$

откуда в силу соотношений (1.26), (1.27), (1.27') и (1.26') будем иметь, что

$$I_{n,m}^{(2)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Ортогональность системы  $\{R_n(x)\}_0^\infty$  на отрезке  $K$  относительно обложения  $d\psi(x)$  доказана.

Составим, далее, интеграл

$$I_{n,n} = \int_{-1}^1 R_n(x) \overline{R_n(x)} d\psi(x) = \int_{-1}^1 |R_n(x)|^2 d\psi(x)$$

и подставим в него значения функции  $R_n(x)$  из соотношения (1.17).

Тогда получим

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \frac{1}{2} C_n^2 \left[ \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}^*(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) + 2 \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)}) \Phi_{2n}^*(e^{-i\theta}, P_n^{(\omega)}) d\sigma(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Легко заметить, что справедливы формулы

$$\int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(\omega)})|^2 d\sigma(\theta) = 2\pi \quad (1.31)$$



$$\int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}^*(e^{i\theta}, P_n^{(w)})|^2 d\tau(\theta) = \int_0^{2\pi} |\Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(w)})|^2 d\tau(\theta) = 2\pi. \quad (1.31')$$

Остается вычислить интеграл

$$\begin{aligned} I_{2n, 2n} &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \Phi_{2n}^*(e^{-i\theta}, P_n^{(w)}) d\tau(\theta) = \\ &= \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}^2(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_{2n}^{-1}(e^{-i\theta}) d\tau(\theta). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Заметим, что из формул (1.20), (1.20'') и (1.23') вытекает следующее соотношение

$$\begin{aligned} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_{2n}^{-1}(e^{-i\theta}) &= \pi_n(e^{i\theta}) \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \pi_n(e^{-i\theta}) = \\ &= \pi_n(e^{i\theta}) \left[ \sum_{k=0}^n \lambda_k^{(2n)} \varphi_{n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) + \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_{k-n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \lambda_k^{(2n)} \varphi_{2n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подставляя полученное выражение (1.33) в формулу (1.32), будем иметь

$$I_{2n, 2n} = \lambda_0^{(2n)} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \varphi_{2n}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) d\tau(\theta).$$

Но так как, ввиду разложения (1.16') и формулы (1.27), справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(w)}) d\tau(\theta) = \\ &= \lambda_{2n}^{(2n)} \int_0^{2\pi} \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) \varphi_{\pi}(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)}) d\tau(\theta) = 2\pi, \end{aligned}$$

то, следовательно,

$$I_{2n, 2n} = \frac{2\lambda_0^{(2n)}\pi}{\lambda_{2n}^{(2n)}}, \quad (1.34)$$

если вспомнить, что  $\lambda_{2n}^{(2n)} = \lambda_{2n}^{(2n)}$ .

Наконец, учитывая формулы (1.31), (1.31') и (1.34), из (1.30) получим

$$I_{n,n} = 2\pi C_n^2 \left( 1 + \frac{k_0^{(2n)}}{k_{2n}^{(2n)}} \right) = 1,$$

если иметь в виду соотношение (1.18) для  $C_n$ .

Теорема полностью доказана.

1.3. В заключение параграфа отметим два частных случаях теоремы, которые сводятся к ранее известным системам.

а) Допустим, что все полюсы  $\{\omega_k\}_0^\infty$  системы функций  $\{M_k(x)\}_0^\infty$  стягиваются в бесконечно удаленную точку. Тогда последовательность функций  $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$  перейдет в систему полиномов Г. Сеге  $\{\Phi_k(z)\}_0^\infty$ , ортонормальных на единичной окружности относительно обложения  $d\tau(\eta)$ , функция  $\Phi_{2n}(z, P_n^{(w)})$  перейдет в функцию  $z^{2n}\Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}\right)$  и, наконец, произведение  $\pi_n(z)$  — в функцию  $z^{-n}$ . В итоге формула (1.17) теоремы переходит в хорошо известную формулу Г. Сеге для полиномов, ортонормальных на отрезке  $[-1, +1]$  относительно обложения  $d\psi(x)$

$$R_n(x) = \frac{\Phi_{2n}(z) + \Phi_{2n}^*(z)}{\int \frac{2\pi \left(1 + \frac{\Phi_{2n}(0)}{k_{2n}}\right)}{k_{2n}}} z^{-n}, \quad x = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right). \quad (1.35)$$

б) Рассмотрим другой частный случай, когда обложение  $d\tau(\eta)$  тождественно равно  $d\eta$ , иначе говоря, когда  $d\psi(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . В этом случае система функций  $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$  переходит в систему рациональных функций Мальмквиста  $\{p_k(z, P_n^{(w)})\}_0^\infty$ , а это означает, что все коэффициенты  $\lambda_k^{(k)}$ , входящие в разложение (1.16), равны нулю, кроме  $\lambda_k^{(k)}$ , равного единице. Поэтому из представления (1.24) следует, что в этом случае приходим к формуле

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M_n(x, P_n^{(w)}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [z_n^{(w)}(x + \sqrt{x^2 - 1}) + z_n^{(w)}(x - \sqrt{x^2 - 1})], \end{aligned}$$

установленной в работе [6].

## § 2. Биортогональная система обобщенных тригонометрических полиномов

2.1. Пусть, вновь,  $\{\omega_k\}_0^\infty$  ( $\omega_0 = \infty$ ) есть произвольная последовательность комплексных чисел, лежащих вне отрезка  $[-1, +1]$ , а  $\{z_k\}_0^\infty$  ( $z_0 = \infty$ ) — ассоциированная с ней по формуле (1.2) последовательность чисел, лежащих в единичном круге.



Поставим, далее, в соответствие последовательности чисел  $\{x_k\}_0^\infty$  следующую систему так называемых обобщенных тригонометрических функций, рассмотренных в работе [7]

$$1, C_1(\theta), S_1(\theta), \dots, C_n(\theta), S_n(\theta), \dots, \quad (2.1)$$

где

$$C_k(\theta) = \operatorname{Re} \varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta}), \quad S_k(\theta) = \operatorname{Im} \varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta}) \\ (k = 1, 2, \dots),$$

а  $\{\varphi_k^{(\infty)}(e^{i\theta})\}_0^\infty$  — система рациональных функций Малмквиста, определенная по формуле (1.3).

Назовем обобщенным тригонометрическим полиномом порядка  $n$  выражение вида

$$a_n C_n(\theta) + a'_n S_n(\theta) + \dots + a_2 C_2(\theta) + b_2 S_2(\theta) + a_0 \quad (2.2)$$

где коэффициенты  $a_n$  и  $a'_n$  одновременно не равны нулю.

Два обобщенных тригонометрических полинома порядка  $n$

$$F_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [a_k C_k(\theta) + a'_k S_k(\theta)]$$

и

$$G_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [b_k C_k(\theta) + b'_k S_k(\theta)],$$

назовем линейно-независимыми, если

$$\begin{vmatrix} a_n & a'_n \\ b_n & b'_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Отметим, что в частном случае, когда  $x_k = 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), функции системы (2.1) переходят в тригонометрическую систему  $1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots$ , а обобщенный тригонометрический полином вида (2.2) — в обычный тригонометрический полином.

Пусть, наконец,  $\tau(\theta)$  является произвольной неубывающей, ограниченной на отрезке  $[0, 2\pi]$  функцией с бесконечным числом точек роста, причем не обязательно четной, в отличие от функции, определенной в § 1 по формуле (1.7).

Определим теперь биортогональную систему обобщенных тригонометрических полиномов  $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_0^\infty$ , ассоциированную с данным обложением  $d\tau(\theta)$  согласно следующим условиям:

а) функции  $F_n(\theta)$  и  $G_n(\theta)$  ортонормальны в смысле

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta) \overline{F_n(\theta)} d\tau(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_m(\theta) \overline{G_n(\theta)} d\tau(\theta) = \delta_{m,n},$$



$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(\theta) \overline{G_n(\theta)} d\theta = 0 \quad (2.3)$$

$$(m, n = 1, 2, \dots);$$

б) они являются линейно-независимыми обобщенными тригонометрическими полиномами порядка  $n$ .

Введем, далее, для данного обложения  $d\theta$  линейное функциональное пространство посредством следующего скалярного произведения и нормы

$$\left\{ \begin{aligned} (f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta = 0, \\ \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta, \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

$$(2.4')$$

здесь функции  $f$  и  $g$  таковы, что интегралы в формулах (2.4) и (2.4') существуют в смысле Лебега-Стилтьеса.

Нетрудно убедиться в том, что биортогональная система обобщенных тригонометрических полиномов  $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ , определенная выше, является результатом процесса ортогонализации системы обобщенных тригонометрических функций (2.1) в метрике (2.4)–(2.4').

С другой стороны, вновь существует явная связь между функциями биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов и рациональными функциями системы  $\{\Phi_k(z, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^{\infty}$ , ортонормальной на единичной окружности относительно обложения  $d\theta$ . Для установления этой связи опять будем предполагать, что  $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  и  $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$  — вещественные числа, и для любого целого  $n$  обозначим через  $\{C_k(\theta, P_n^{(\omega)}), S_k(\theta, P_n^{(\omega)})\}_{k=0}^{\infty}$  систему обобщенных тригонометрических функций, ассоциированных с введенной в § 1 последовательностью  $P_n^{(\omega)}$ . Обобщенный тригонометрический полином порядка  $k$  при этом будет иметь вид

$$a_k C_k(\theta, P_n^{(\omega)}) + a'_k S_k(\theta, P_n^{(\omega)}) + \dots + a_0.$$

2.2. Установим связь между функциями биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов и функциями  $\Phi_{2n}(z, P_n^{(\omega)})$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $\{\omega_k\}_{k=0}^{\infty}$  ( $\omega_0 = \infty$ ) — произвольная последовательность вещественных чисел, лежащих вне отрезка  $[-1, +1]$ , а  $P_n^{(\omega)}$  — ассоциированная с ней последовательность чисел, лежащих на этом отрезке. Выберем постоянное число  $\gamma_{2n}$  так, чтобы произведение  $e^{-2i\gamma_{2n}} I_{2n}$ , где

$$I_{2n} = \Phi_{2n}(0, P_n^{(\omega)}),$$

было бы вещественным числом.

Тогда

а) функции системы  $\{r_n(\theta), q_n(\theta)\}_0^\infty$ , определенные по формуле

$$r_n(\theta) + i q_n(\theta) = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}), \quad (2.5)$$

$$z = e^{i\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют следующим соотношениям

$$(r_n, q_m) = 0 \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

$$(r_n, r_m) = 0 \quad (n \neq m), \quad (q_n, q_m) = 0 \quad (n \neq m), \quad (2.6')$$

$$\|r_n\| \neq 0, \quad \|q_n\| \neq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (2.6'')$$

б) функции биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов  $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_0^\infty$ , удовлетворяющие условиям биортогональности (2.3), выражаются по следующим формулам

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} F_n(\theta) + i \left[ \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} G_n(\theta) = \\ = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}), \quad z = e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F_n(\theta) = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} r_n(\theta), \quad (2.7')$$

$$G_n(\theta) = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} q_n(\theta), \quad (2.7'')$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

в) при  $z = e^{i\theta}$  имеют место следующие соотношения

$$r_n(\theta) = \frac{1}{2} \left[ e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \quad (2.8)$$

$$q_n(\theta) = \frac{1}{2i} \left[ e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) - e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \quad (2.8')$$

$$\begin{aligned} F_n(\theta) = \left[ 2 \left( 1 \pm \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) + \right. \\ \left. + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$G_n(\theta) = \frac{1}{i} \left[ 2 \left( 1 \mp \frac{|I_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(w)}) - \right.$$



$$-e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right)\Bigg|^2. \quad (2.9')$$

Показательство. В первую очередь отметим, что соотношения (2.8) и (2.8') непосредственно следуют из формулы (2.5) и равенства

$$r_n(\theta) - iq_n(\theta) = e^{i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \Phi_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right), \quad (2.5')$$

а соотношения (2.9) и (2.9') — из формул (2.7), (2.8) и (2.7'), (2.8') соответственно.

Для доказательства соотношений (2.6') преобразуем выражение (2.8). С учетом разложения (1.16) из (2.8) следует, что функцию  $r_n(\theta)$  можно представить в виде

$$r_n(\theta) = \sum_{k=0}^{2n} \left[ \mu_k \pi_n(z) \varphi_k(z, P_n^{(w)}) + \nu_k \pi_n^{-1}(z) \varphi_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \\ z = e^{i\theta}, \quad (2.10)$$

где  $\mu_k$  и  $\nu_k$  ( $k=0, 1, \dots, 2n$ ) — некоторые комплексные коэффициенты.

Преобразуем формулу (2.10), имея в виду соотношения (1.20), (1.20') и (1.20''):

$$r_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \left[ \mu_k \varphi_{n-k}\left(\frac{1}{z}, Q_n^{(w)}\right) + \nu_k \varphi_{n+k}(z, Q_n^{(w)}) \right] + \\ + \sum_{k=n+1}^{2n} \left[ \mu_k \varphi_{k-n}(z, P_n^{(w)}) + \nu_k \varphi_{k-n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right) \right], \\ z = e^{i\theta}, \quad (2.11)$$

где  $Q_n^{(w)}$  — последовательность вещественных чисел, введенная при доказательстве теоремы 1.1.

Из формулы (2.11) окончательно следует, что функцию  $r_n(\theta)$  можно представить в следующем виде

$$r_n(\theta) = \sum_{k=1}^n [c_k \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(w)}) + d_k \varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(w)})] + \\ + \sum_{k=0}^n [l_k \varphi_k(e^{i\theta}, Q_n^{(w)}) + t_k \varphi_k(e^{-i\theta}, Q_n^{(w)})], \quad (2.12)$$

где  $c_k, d_k, l_k$  и  $t_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) — некоторые комплексные числа.

Нетрудно доказать, используя формулу (2.8') и соотношения (1.16), (1.20), (1.20') и (1.20''), что аналогичное представление имеет также функция  $q_n(\theta)$

\* Отметим, что в формулах (2.7), (2.7'), (2.7''), (2.9) и (2.9') следует брать либо одновременно верхние знаки, либо одновременно — нижние.

$$q_n(\theta) = \sum_{k=1}^n [c'_k \varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) + d'_k \varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})] + \\ + \sum_{k=0}^n [l'_k \varphi_k(e^{i\theta}, Q_n^{(m)}) + t'_k \varphi_k(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)})] \quad (2.12')$$

( $c'_k, d'_k, l'_k$  и  $t'_k, k=0, 1, \dots, n$  — некоторые комплексные числа).

Из представления (2.12) следует, что для доказательства справедливости соотношения

$$(r_n, r_m) = 0 \text{ при } m < n$$

достаточно проверить, что выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{i\theta}, Q_n^{(m)}) d\theta = 0 \quad (2.13)$$

при  $m < n$ .

Составим, например, первый из интегралов соотношения (2.13) и подставим в него значение  $r_n(\theta)$  из формулы (2.8)

$$I_{n,m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_n(\theta) \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{i\theta}) \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(m)}) + e^{i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{-i\theta}) \Phi_{2n}(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})] \times \\ \times \varphi_m(e^{-i\theta}, P_n^{(m)}) d\theta. \quad (2.14)$$

Если учесть теперь соотношения (1.21), (1.22'), (1.27) и (1.26), то из (2.14) немедленно получим, что

$$I_{n,m} = 0 \text{ при } m < n.$$

Таким же образом, с учетом формул (1.20)—(1.23) и (1.26)—(1.27), легко убедиться в справедливости всех остальных соотношений (2.13).

Аналогичными рассуждениями, используя представление (2.12'), можно доказать также соотношение

$$(q_n, q_m) = 0 \text{ при } m < n.$$

Если же иметь в виду представление (2.12') и формулу (2.8), то нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$(r_n, q_m) = 0 \text{ при } m < n.$$



Рассмотрим, далее, интеграл

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n(e^{i\theta}) \Phi_{2n}(e^{i\theta}, P_n^{(n)})]^2 d\sigma(\theta).$$

Из формулы (2.5) следует, что

$$I_n = \|r_n\|^2 - \|q_n\|^2 + 2i(r_n, q_n). \quad (2.15)$$

С другой стороны, интеграл  $I_n$  можно вычислить, если воспользоваться значением интеграла  $I_{2n, 2n}$ , входящего в формулу (1.32). В самом деле, из формул (1.32) и (1.34) следует

$$I_n = \frac{e^{-2i\gamma_{2n}}}{2\pi} I_{2n, 2n} = \frac{e^{-2i\gamma_{2n}} l_{2n}}{\lambda_{2n}^{(2n)}}. \quad (2.16)$$

Из равенства (2.16), с учетом определения постоянной  $\gamma_{2n}$ , имеем, что

$$I_n = \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}}, \quad (2.17)$$

причем знак формулы (2.17) зависит от соответствующего выбора  $\gamma_{2n}$ .

Сравнивая формулы (2.15) и (2.17), приходим к заключению, что

$$(r_n, q_n) = 0 \quad \text{и} \quad \|r_n\|^2 - \|q_n\|^2 = \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}}.$$

Если к тому же учесть, что

$$\|r_n\|^2 + \|q_n\|^2 = 1,$$

то будем иметь

$$\|r_n\|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right), \quad (2.18)$$

$$\|q_n\|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{|l_{2n}|}{\lambda_{2n}^{(2n)}} \right). \quad (2.18')$$

Из соотношений (2.18) и (2.18') непосредственно следуют заключения теоремы (2.6'), (2.7), (2.7') и (2.7''). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что последовательность вещественных чисел  $\{\omega_k\}_{k=0}^\infty$  ( $\omega_0 = \infty$ ) и данное обложение  $d\sigma(\theta)$  определяют биортогональную систему обобщенных тригонометрических полиномов не единственным образом, а с точностью до выбора постоянной  $\gamma_{2n}$ .

Интересно разобрать частный случай доказанной теоремы, когда функция  $\sigma(\theta)$  является четной, т. е.  $\sigma(-\theta) = \sigma(\theta)$ . В этом случае все коэффициенты  $r_k^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) разложения (1.16)

$$\Phi_k(z, P_n^{(n)}) = \sum_{l=0}^k r_l^{(k)} \varphi_l(z, P_n^{(n)}),$$

в том числе и  $\lambda_{2n}^{(2n)}$  — вещественны.

Однако, ввиду условия  $\omega_0 = \infty$  ( $z_0 = 0$ ), имеем

$$\varphi_0(0, P_n^{(\infty)}) = 1, \quad \varphi_k(0, P_n^{(\infty)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

и, следовательно, число

$$l_{2n} = \Phi_{2n}(0, P_n^{(\infty)}) = l_0^{(2n)}$$

вещественно.

Поэтому в этом случае следует положить  $\gamma_{2n} = k \frac{\pi}{2}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) для всех  $n$ , если  $l_{2n} \neq 0$ ; если же  $l_{2n} = 0$ , то  $\gamma_{2n}$  берем произвольно. Если выбрать, в частности,  $k = 0$ , т. е.  $\gamma_{2n} = 0$ , то формула (2.9) теоремы переходит при  $x = \cos \theta$  в соотношение (1.17) теоремы 1.1, функции  $F_n(\theta)$  переходят в этом случае в функции  $R_n(x)$  и представляют из себя линейную комбинацию функций  $\{M_k(x, P_n^{(\infty)})\}_{k=0}^n$  и  $\{M_k(x, Q_n^{(\infty)})\}_{k=0}^n$ .

Нетрудно также показать, что в этом случае функции  $G_n(\theta)$  при  $x = \cos \theta$  переходят в систему рациональных функций, ортогональных на отрезке  $[-1, +1]$  относительно обложения  $(1-x^2)d\psi(x)$ , где  $\psi(x)$  — функция, связанная с  $\tau(\theta)$  по формуле (1.7), и представляют собой линейную комбинацию обобщенных полиномов Чебышева второго рода  $M_k^{(1)}(x)$ , введенных в работе [6]. Однако, в настоящей статье мы не будем останавливаться на этом.

2.3. Выведем теперь два соотношения, которым удовлетворяют функции систем  $\{r_n(\theta), q_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$  и  $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$ .

Теорема 2.2. Для любого целого числа  $n$  при  $z = e^{i\theta}$  справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right) r_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right) q_n(\theta) = \\ & = \frac{e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z)}{l_{2n}^{(2n)}} \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(\infty)}\right); \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right)^{\frac{1}{2}} F_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{l_{2n}^{(2n)}}\right)^{\frac{1}{2}} G_n(\theta) = \\ & = \frac{\sqrt{2} e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z)}{l_{2n}^{(2n)}} \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(\infty)}\right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Доказательство. В работе [5] М. М. Джрбашяном установлено следующее рекуррентное соотношение для функций системы  $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ , ассоциированных с произвольной последовательностью  $\{z_k\}_{k=0}^\infty$

$$-\frac{|z_{n+1}|}{z_{n+1}} \frac{l_{n+1}^{(n+1)}}{(1 - |z_{n+1}|^2)^{\frac{1}{2}}} \Phi_{n+1}(z) =$$



$$= \frac{B_{n+2}(z)}{z} \left\{ \Phi_{n+1}(z_{n+1}) \bar{\Phi}_{n+1}\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{k=0}^n \Phi_k(z_{n+1}) \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad (2.21)$$

где  $B_{n+2}(z) = \prod_{k=0}^{n+1} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{|z_k|}{z_k}$ , а под отношением  $\frac{|z_l|}{z_l}$  при  $z_l = 0$  подразумевается минус единица.

Запишем формулу (2.21) для последовательности  $P_n^{(m)}$  при  $z = e^{i\theta}$ , заменив в ней  $n$  на  $2n-1$  и учитывая, что при  $z = e^{i\theta}$

$$\begin{aligned} B_k(z) &= \pi_k^{-1}(z) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \\ &= \frac{|z_{2n}|}{z_{2n}} \frac{l_{2n}^{(2n)}}{(1 - |z_{2n}|^2)^{\frac{1}{2}}} \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) = \\ &= \pi_{2n}^{-1}(z) \left\{ \Phi_{2n}(z_{2n}, P_n^{(m)}) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{2n-1} \Phi_k(z_{2n}, P_n^{(m)}) \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Если иметь в виду, что в последовательности  $P_n^{(m)}$   $z_{2n} = 0$ , то из (2.22) получим

$$\begin{aligned} l_{2n}^{(2n)} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) &= l_{2n} \pi_n^{-1}(z) \bar{\Phi}_{2n}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) + \\ &+ \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right) \end{aligned}$$

или

$$l_{2n}^{(2n)} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) - l_{2n} \pi_n(z) \Phi_{2n}(z, P_n^{(m)}) = \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right),$$

$$z = e^{i\theta}.$$

Отсюда, с учетом формулы (2.5), имеем

$$\begin{aligned} l_{2n}^{(2n)} e^{i\gamma_{2n}} [r_n(\theta) + i q_n(\theta)] - l_{2n} e^{-i\gamma_{2n}} [r_n(\theta) - i q_n(\theta)] = \\ = \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из соотношения (2.23) получаем

$$\begin{aligned} r_n(\theta) (\bar{l}_{2n}^{(2n)} - |l_{2n}|) + i q_n(\theta) (l_{2n}^{(2n)} + |l_{2n}|) = \\ = e^{-i\gamma_{2n}} \pi_n^{-1}(z) \sum_{k=0}^{2n-1} l_k \bar{\Phi}_k\left(\frac{1}{z}, P_n^{(m)}\right), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Наконец, если обе части формулы (2.24) разделить на  $\lambda_{2n}^{(2n)}$ , а также учесть соотношения (2.7') и (2.7''), то доказательство теоремы на этом завершится.

2.4. Введем в рассмотрение ядро биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов

$$K_n(\theta, \nu) = \sum_{k=0}^n [F_k(\theta) F_k(\nu) + G_k(\theta) G_k(\nu)], \quad (2.25)$$

где  $\theta$  и  $\nu$  — вещественные переменные.

Нетрудно проверить, что ядро  $K_n(\theta, \nu)$ , как и введенное М. М. Джрбашьяном [5] ядро обложения  $d\sigma(\theta)$  системы рациональных функций  $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^\infty$ ,  $z = e^{i\theta}$ ,

$$S_n(z, \zeta) = \sum_{k=0}^n \overline{\Phi_k(\zeta)} \Phi_k(z) \quad (2.26)$$

обладает следующим свойством:

для того, чтобы для любого обобщенного тригонометрического полинома  $\mu_n(\theta)$  выполнялось тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\theta, \nu) \overline{\mu_n(\theta)} d\sigma(\theta) = \overline{\mu_n(\nu)}, \quad (2.27)$$

необходимо и достаточно, чтобы  $\rho(\theta, \nu) = K_n(\theta, \nu)$ .

На основе этого свойства устанавливается следующая теорема.

**Теорема 2.3.** Пусть  $S_n(z, \zeta)$  является ядром обложения  $d\sigma(\theta)$  системы рациональных функций  $\{\Phi_k(z, P_n^{(w)})\}_{k=0}^\infty$ . Тогда ядро биортогональной системы обобщенных тригонометрических полиномов  $K_n(\theta, \nu)$  выражается по следующим формулам

$$K_n(\theta, \nu) = \pi_n^{-1}(\zeta) \pi_n(z) S_{2n}(z, \zeta) \quad (2.28)$$

при  $z = e^{i\theta}$ ,  $\zeta = e^{i\nu}$ ;

$$K_n(\theta, \nu) = \frac{(1 - z_1 z)(1 - z_1 \zeta)}{1 - |z_1|^2} \pi_n^{-1}(\zeta) \pi_n(z) \times \\ \times \frac{\Phi_{n+1}^*(z, P_n^{(w)}) \overline{\Phi_{n+1}(\zeta, P_n^{(w)})} - \Phi_{n+1}(z, P_n^{(w)}) \overline{\Phi_{n+1}(\zeta, P_n^{(w)})}}{1 - z \bar{\zeta}}, \quad (2.29)$$

где

$$\Phi_{n+1}^*(z, P_n^{(w)}) = \pi_{n+1}^{-1}(z) \Phi_{n+1}\left(\frac{1}{z}, P_n^{(w)}\right).$$

**Доказательство.** Для доказательства формулы (2.28) покажем, что выражение, стоящее в правой части (2.28), обладает свойством (2.27) относительно произвольного обобщенного тригонометрического полинома  $\mu_n(\theta)$ .



Однако, ввиду определений (2.1) и (2.2), любой обобщенный тригонометрический полином можно представить в виде

$$\pi_n(\theta) = \sum_{k=0}^n [c_k \varphi_k(e^{i\theta}) + d_k \varphi_k(e^{-i\theta})].$$

Это означает, что достаточно проверить справедливость соотношений

$$I_k^{(1)}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_n^{-1}(e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta})} d\theta = \overline{\varphi_k(e^{i\nu})} \quad (2.30)$$

и

$$I_k^{(2)}(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_n^{-1}(e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_k(e^{-i\theta})} d\theta = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu})} \quad (2.30')$$

при  $k \leq n$ .

Учитывая то обстоятельство, что ядро  $S_{2n}(z, \zeta)$  обладает свойством (2.27), ввиду соотношений (1.10), (1.21) и (1.20'), имеем

$$\begin{aligned} I_k^{(1)}(\nu) &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_{k-n}(e^{-i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \pi_n(e^{-i\nu}) \overline{\varphi_{k-n}(e^{-i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{-i\nu})} \\ &\text{при } k \leq n. \end{aligned}$$

Наконец, из соотношений (1.10), (1.20) и (1.22') следует, что

$$\begin{aligned} I_k^{(2)}(\nu) &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \pi_n(e^{i\theta}) \overline{\varphi_k(e^{i\theta}, P_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \frac{\pi_n(e^{-i\nu})}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{2n}(e^{i\theta}, e^{i\nu}) \overline{\varphi_{n-k}(e^{-i\theta}, Q_n^{(m)})} d\theta = \\ &= \pi_n(e^{-i\nu}) \overline{\varphi_{n-k}(e^{-i\nu}, Q_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{i\nu}, P_n^{(m)})} = \overline{\varphi_k(e^{i\nu})}, \quad k \leq n. \end{aligned}$$

Формула (2.28) доказана.

Для доказательства соотношения (2.29) используем формулу Кристофеля для ядра обложения  $d\theta$  системы рациональных функций  $\{\Phi_k(z)\}_0^n$ , установленную М. М. Джрбашяном [5]

$$S_n(z, \zeta) = \frac{(1 - \bar{z}_{n+1}\zeta)(1 - \bar{z}_{n+1}z)}{1 - |\alpha_{n+1}|^2} \times$$

$$\times \frac{\overline{\Phi_{n+1}^*(z)} \Phi_{n+1}^*(z) - \overline{\Phi_{n+1}^*(z)} \Phi_{n+1}(z)}{1 - \bar{z}z} \quad (2.31)$$

Если записать эту формулу для ядра системы  $\{\Phi_k(z, P_n^{(m)})\}_{k=0}^\infty$ , заменив в ней  $n$  на  $2n$ , с учетом соотношения (2.28) и свойства периодичности последовательности  $P_n^{(m)}$ , то это приведет к соотношению (2.29). Теорема доказана.

Отметим в заключение, что теоремы 1.1, 2.1, 2.2 и 2.3 могут быть использованы в дальнейшем при установлении алгебраических и предельных свойств рассмотренных систем функций  $\{R_n(x)\}_{n=0}^\infty$  и  $\{F_n(\theta), G_n(\theta)\}_{n=0}^\infty$  в зависимости от свойств систем рациональных функций  $\{\Phi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ .

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 22 I 1965

Ա. Ա. ԿՆԲԱԶՅԱՆ

ԴԱՅԻՌՆԱԼ ՀԱՌԵՎՅԱՆՆԵՐԻ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԵՎ ԸՆԴՀԱՆՐԱՅՎԱԾ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱՉԱՓԱԿԱՆ ՀԱՌԵՎՅԱՆՆԵՐԻ ԲԻՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ փ ո փ ո ի մ

Վ. Սեդլույի աշխատություններում կառուցված է կամայական կշռով միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամների հանրահաշվական տասնամասնական տեսությունը [1]: Նրա կողմից նաև հայտնաբերված է արդարի բազմանդամների և  $[-1, +1]$  հատվածում համապատասխան կշռով օրթոգոնալ բազմանդամների միջև գոյություն ունեցող բացառաշատ կապը: Վ. Սեդլույի կողմից վերջերս հրատարակված աշխատության մեջ [4] բերվում է կամայական կշռով միավոր շրջանագծի վրա բիօրթոգոնալ եռանկյունաչափական բազմանդամների սխեմների կառուցումը:

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատության մեջ [5] դարգացված է միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով օրթոգոնալ և միավոր շրջանից դուրս ֆիքսված բևեռների ունեցող ուղիղի վրա ֆունկցիաների սխեմների հանրահաշվական և մասամբ սահմանափակ տեսությունը: [6] աշխատության մեջ ստացված է Չերիշևի կլասիկ բազմանդամների բնական ընդհանրացումը:

Ներկա աշխատությունը նվիրված է Չերիշևի ընդհանրացված բազմանդամների և ընդհանրացված եռանկյունաչափական սխեմների կիրառություններին:

§ 1-ում ապացուցվում է Սեդլույի բանաձևին անալոգ մի բանաձև, որը կապ է հաստատում միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով օրթոգոնալ և  $[-1, +1]$  հատվածում համապատասխան կշռով օրթոգոնալ ուղիղի վրա ֆունկցիաների սխեմների միջև:

§ 2-ում ընդհանրացվում են Վ. Սեդլույի [4] աշխատության արդյունքները:



կառուցվում է միավոր շրջանագծի վրա կամայական կշռով բիրթոգրական ընդհանրացված հասկերնաչափական բազմանդամների սխեմով և կապ է հաստատվում այդ սխեմի և միավոր շրջանագծի վրա նախ կշռով օրթոգոնալ ապրոնալ ֆունկցիաների միջև:

# Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Szegő G. Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
2. Геронимус Я. Л. Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения. Записки научно-исследовательского института математики и ХМО, 19 (1948), § 30.
3. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.
4. Szegő G. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials. Труды математического института Академии наук Венгрии, 8, серия А, вып. 3, 1963.
5. Джрбашян М. М. Ортогональные системы рациональных функций на окружности с заданным множеством полюсов. Доклады АН СССР, 147, № 6, 1962.
6. Джрбашян М. М. и Китбалян А. А. Об одном обобщении полиномов Чебышева. Доклады АН АрмССР, 38, № 5, 1964.
7. Китбалян А. А. Разложения по обобщенным тригонометрическим системам. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 6, 1964.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. А. КОРБУТ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
 С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В работе излагаются результаты исследования устойчивости цилиндрической оболочки средней длины с упругим заполнителем. Рассматриваются три вида нагружения: внешнее радиальное давление, осевое сжатие, кручение. Задача решается в линейной постановке с помощью уравнений пологих оболочек.

Оболочка считается тонкой и работающей в пределах упругости. Граничные условия на торцах соответствуют шарнирному опиранию и заземлению, допускающих некоторое равномерное радиальное смещение [1]. Последнее обеспечивает безмоментное докритическое состояние.

Упругий заполнитель моделируется винклеровским основанием с постоянным коэффициентом „постели“, величина которого считается известной.

§ 1. Внешнее радиальное давление

Исходная система линейных уравнений пологих оболочек имеет вид [1]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha}{h} w, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Здесь:  $w$  — радиальный прогиб,  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  — докритические нормальные сжимающие напряжения соответственно в осевом и окружном направлениях,  $\tau$  — докритическое касательное напряжение,  $\Phi$  — функция напряжения,  $\nabla^2$  — оператор Лапласа,  $D$  — цилиндрическая жесткость,  $E$  — модуль упругости материала оболочки,  $R$  и  $h$  — соответственно радиус и толщина оболочки,  $\alpha$  — коэффициент „постели“ заполнителя,  $x$  и  $y$  — координаты вдоль образующей и по окружности.

В рассматриваемой задаче следует положить  $\sigma_x = \tau = 0$ .

Напряжение  $\sigma_y$  найдем из условия равновесия и деформации элемента оболочки [2]



$$\tau_y = \frac{qR}{h\delta}, \quad (3)$$

где

$$\delta = 1 + \frac{\alpha_0 R^2}{Eh}. \quad (4)$$

В (3) и (4)  $q$  — внешнее давление,  $\alpha_0$  — коэффициент „постели“ заполнителя в докритическом состоянии,  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Определим критическое давление при различных условиях опирания торцов оболочки.

а) Шарнирное опирание.

Граничные условия имеют вид при  $x = 0$  и  $x = L$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Удовлетворяя условию (5), частное решение системы (1)–(2) ищем в виде

$$w = f \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}, \quad (6)$$

где  $L$  — длина оболочки,  $f$  — стрела прогиба,  $n$  — число волн в окружном направлении.

Подставляя прогиб (6) в уравнение неразрывности (2) и решая его с учетом граничных условий и условия периодичности окружного перемещения  $v$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{x=0,L} = 0, \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi R} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right|_{x=0,L} dy = 0, \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi R} \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{w}{R} \right] dy = 0, \quad (9)$$

найдем функцию напряжений

$$\Phi = \frac{EfR^3 \pi^2}{L^2 n^4 \left( 1 + \frac{\pi^2 R^2}{L^2 n^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{R}. \quad (10)$$

В отношении найденной функции напряжений заметим, что, если граничные условия по осевому напряжению удовлетворяются в каждой точке, то по касательным напряжениям удовлетворяются лишь „в среднем“.

Внося (6) и (10) в уравнение равновесия (1) с учетом  $\varepsilon_x = \tau = 0$ , получим выражение для давления

$$q^* = \varepsilon \left[ \frac{1}{12(1-\mu^2)} (1+\theta^2)^2 \tau_1 + \frac{\theta^4}{(1+\theta^2)^2} \frac{1}{\tau_1} + \frac{\omega}{\tau_1} \right]. \quad (11)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры

$$q^0 = \frac{qR^2}{Ek^2}, \quad \omega_0 = \frac{\omega_0 R^2}{Ek}, \quad \omega = \frac{\omega R^2}{Ek},$$

$$\theta = \frac{\pi R}{nL}, \quad \tau_1 = \frac{n^2 h}{R}. \quad (12)$$

Выражение (11) можно упростить, если принять  $\theta^2 \ll 1$  [1]

$$q^* = \varepsilon \left[ \frac{\tau_1}{12(1-\mu^2)} + \frac{\theta^4}{\tau_1} + \frac{\omega}{\tau_1} \right]. \quad (13)$$

Из условия

$$\frac{\partial q^*}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

с учетом (12) определим критические значения давления и числа волн

$$q_{кр}^* = \varepsilon \left[ \frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{n_{кр}^2 h}{R} + \pi^4 \frac{R^4}{L^4} \frac{R}{h} \frac{1}{n_{кр}^6} + \omega \frac{R}{h} \frac{1}{n_{кр}^2} \right], \quad (15)$$

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{h^2}{R^2} n_{кр}^6 - \omega n_{кр}^4 - 3\pi^4 \frac{R^4}{L^4} = 0. \quad (16)$$

б) Защемление.

Граничные условия имеют вид при  $x=0$  и  $x=L$

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

С учетом (17) частное решение (1)–(2) ищем в виде

$$w = f \sin^2 \frac{\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}. \quad (18)$$

Решая уравнение неразрывности (2), получим

$$\Phi = - \frac{2EfR^3 \pi^2}{L^2 n^4 \left(1 + \frac{4\pi^2 R^2}{L^2 n^2}\right)^2} \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R}. \quad (19)$$

Выражение (19) удовлетворяет условию периодичности (9) и следующим граничным условиям

$$\int_0^{2\pi R} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right|_{x=0,L} dy = 0, \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right|_{x=0,L} = 0. \quad (21)$$



Здесь имеет место обратная картина: граничные условия по осевым напряжениям удовлетворяются „в среднем“, по касательным — в каждой точке.

Внося найденную функцию напряжений и выражение для прогибов (18) в уравнение равновесия (1) с учетом  $\sigma_x = \tau = 0$ , найдем, используя метод Бубнова-Галеркина

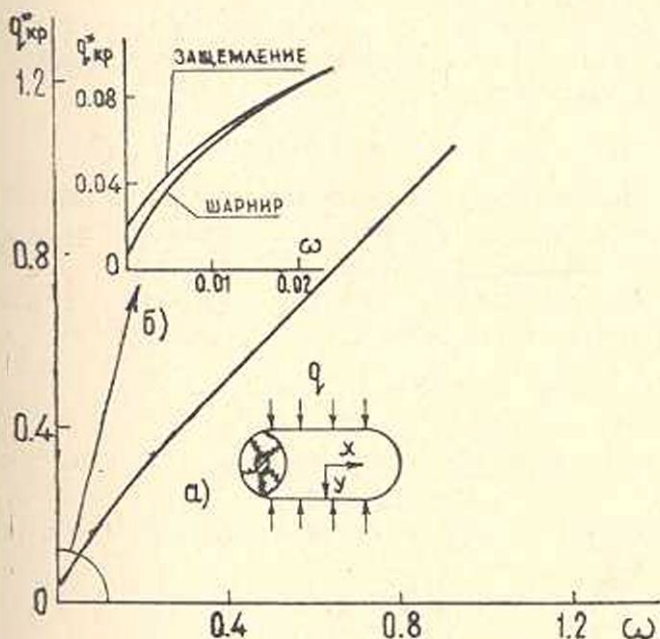
$$q^0 = \lambda \left[ \frac{2}{9(1-\mu^2)} \left( 20^4 + n^2 + \frac{3}{8} \right) \eta + \frac{16}{3} \frac{n^4}{(4n^2+1)^2} \frac{1}{\eta} + \frac{\omega}{\eta} \right]. \quad (22)$$

Считая попрежнему  $\eta^2 \ll 1$ , окончательно получим

$$q^0 = \lambda \left[ \frac{2}{9(1-\mu^2)} \left( \pi^2 \frac{R^2}{L^2} \frac{h}{R} + \frac{3}{8} \frac{h}{R} n^2 \right) + \frac{16}{3} \pi^4 \frac{R^4}{L^4} \frac{R}{h} \frac{1}{\left( 8\pi^2 \frac{R^2}{L^2} n^4 + n^6 \right)} + \frac{\omega}{n^2} \frac{R}{h} \right]. \quad (23)$$

Критическое давление определяется из условия (14).

В качестве примера рассчитана оболочка с параметрами  $\alpha_0 = \alpha$ ;  $\mu = 0,3$ ;  $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ ;  $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$ . Результаты расчетов представлены на

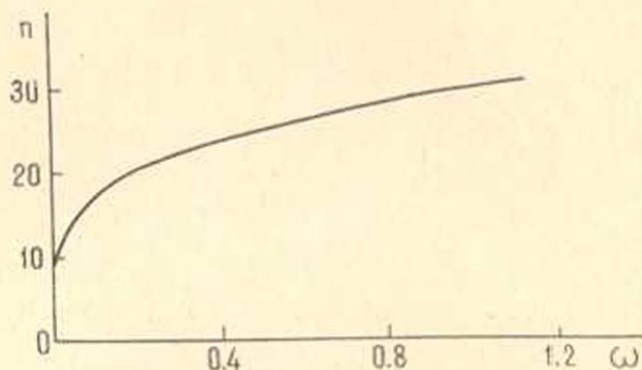


Фиг. 1. Зависимость критического давления от жесткости заполнителя при внешнем давлении.

фиг. 1—а. Как и следовало ожидать, заполнитель существенно повышает критическое давление при обоих типах граничных условий.

Влияние условий закрепления оболочки на величину критического давления сказывается лишь при незначительной жесткости за-

полнителя ( $\omega \approx 0,02$ ). При больших значениях  $\omega$  критическое давление практически не зависит от граничных условий (см. фиг. 4—6). В связи со сделанным выводом заметим, что сравнение случаев а) и б) следует понимать в несколько условном смысле, в силу различия граничных условий по функции напряжений, отмеченного выше.



Фиг. 2. Зависимость числа волн по окружности от жесткости заполнителя при внешнем давлении (шарнир).

Фиг. 2 иллюстрирует характер волнообразования, из которой видно, что число волн в окружном направлении растет с увеличением жесткости заполнителя. Попутно заметим, что непрерывное изменение  $n$  надо понимать условно.

## § 2. Осевое сжатие

Здесь можно ограничиться рассмотрением лишь шарнирных граничных условий, поскольку критическое напряжение мало зависит от вида крепления оболочки на торцах.

Используем уравнения (1) и (2), приняв  $\tau = 0$ . Удовлетворяя условиям (5), функцию прогибов зададим в виде

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}, \quad (24)$$

где  $m$  — число полуволов в осевом направлении, остальные обозначения прежние.

Подставляя (24) в уравнение неразрывности (2) и решая его, будем иметь

$$\Phi = \frac{EfR^3\pi^2}{L^2n^4 \left(1 + \frac{m^2\pi^2R^2}{L^2n^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R}. \quad (25)$$

Найденная функция  $\Phi$  удовлетворяет условию периодичности (9) и следующим граничным условиям

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0, L} = 0, \quad (26)$$



$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, L} dy = 0. \quad (27)$$

Внося (24) и (25) в уравнение равновесия (1) с учетом  $\tau=0$ , получим

$$\sigma_x^* = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\eta^2} \frac{\omega_0}{1 + \omega_0}} \left[ \frac{1}{12(1 - \mu^2)} \frac{(1 + \eta)^2}{\eta^2} \tau_1 + \frac{\eta^2}{(1 + \eta^2)^2} \frac{1}{\eta} + \frac{\omega}{\eta^2 \eta} \right]. \quad (28)$$

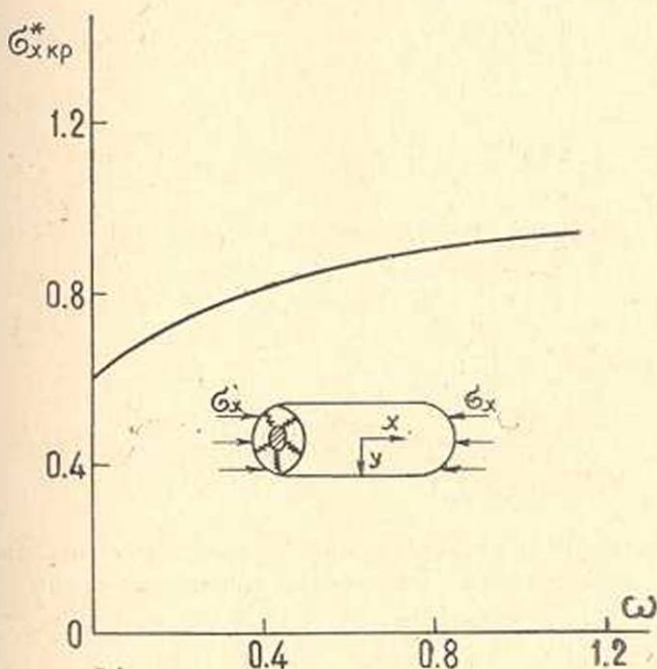
Здесь введены безразмерные параметры

$$\sigma_x^* = \frac{\sigma_x R}{Eh}, \quad \eta = \frac{m\pi R}{nL}, \quad \tau_1 = \frac{n^2 h}{R}, \quad \omega_0 = \frac{a_0 R^2}{Eh}, \quad \omega = \frac{a R^2}{Eh}. \quad (29)$$

Критическое напряжение определяется из условий

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \eta} = \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \omega} = 0. \quad (30)$$

Результаты расчетов, выполненных с помощью (28) и (30), представлены на фиг. 3. Из приведенного графика следует, что несущая способность оболочки с увеличением жесткости заполнителя растет.



Фиг. 3. Зависимость критического напряжения от жесткости заполнителя при осевом сжатии.

Характер волнообразования таков, что с ростом жесткости заполнителя вмятины стремятся стать кольцевыми при уменьшении их длины вдоль образующей. Соответственно параметр  $\eta \rightarrow 0$ , а параметр  $\eta \rightarrow \infty$ .

## § 3. Кручение

Ограничимся рассмотрением оболочки, для которой условия шарнирного опирания удовлетворяются „в среднем“. Следуя работе [3] и принимая начало координат по середине оболочки, задаем прогиб в виде

$$w = f \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n}{R} (y + \gamma x), \quad (31)$$

где  $\gamma$  — параметр, характеризующий наклон волн, остальные обозначения прежние. Функция (31) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\text{при } x = \pm \frac{1}{2}, \quad w = 0, \quad \int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy = 0. \quad (32)$$

Представим выражение (31) в виде

$$w = w_1 + w_2, \quad (33)$$

где

$$w_1 = \frac{1}{2} f \left( \cos \frac{ny}{R} \cos kx - \sin \frac{ny}{R} \sin kx \right), \quad (34)$$

$$w_2 = \frac{1}{2} f \left( \cos \frac{ny}{R} \cos lx - \sin \frac{ny}{R} \sin lx \right), \quad (35)$$

причем

$$k = \frac{n\gamma}{R} + \frac{m\pi}{L}; \quad l = \frac{n\gamma}{R} - \frac{m\pi}{L}. \quad (36)$$

Решая уравнение неразрывности (2) с учетом (33), (34) и (35), получим

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{Ef k^2}{2R \left( k^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \left( \cos \frac{ny}{R} \cos kx - \sin \frac{ny}{R} \sin kx \right) + \\ & + \frac{Efl^2}{2R \left( l^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \left( \cos \frac{ny}{R} \cos lx - \sin \frac{ny}{R} \sin lx \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Найденная функция напряжений удовлетворяет условию периодичности (9) и „в среднем“ следующим граничным условиям

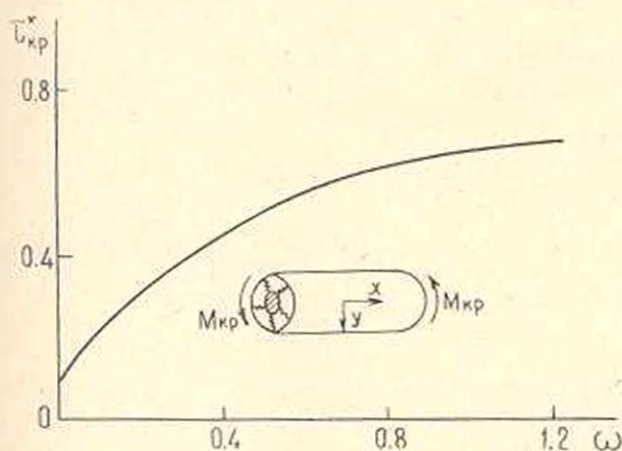
$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=\pm \frac{L}{2}} dy = 0, \quad (38)$$

$$\int_0^{2\pi R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=\pm \frac{L}{2}} dy = 0. \quad (39)$$

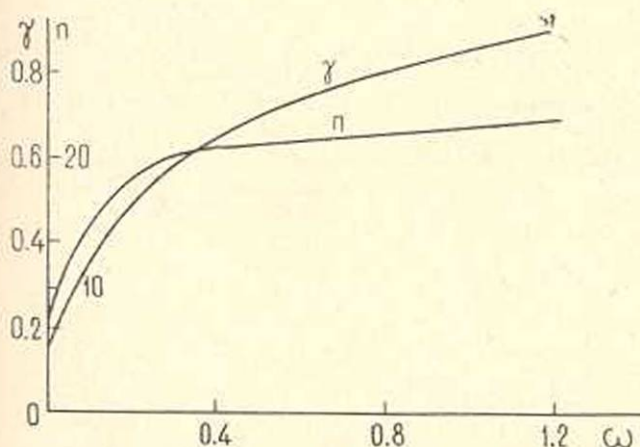


Внося (33) и (37) в уравнение равновесия (1) с учетом  $\sigma_x = \sigma_y = 0$  и решая его методом Бубнова-Галеркина, получим

$$\begin{aligned} \tau^* = & \frac{1}{24(1-\mu^2)} \frac{1}{n(n\gamma)} \frac{h}{R} \left\{ \left[ n^2 + \left( n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 + \right. \\ & + \left[ n^2 + \left( n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2 \left. \right\} + \frac{1}{2n(n\gamma)} \frac{R}{h} \left\{ \frac{\left( n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[ n^2 + \left( n\gamma + \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} + \right. \\ & + \left. \frac{\left( n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^4}{\left[ n^2 + \left( n\gamma - \frac{m\pi R}{L} \right)^2 \right]^2} \right\} + \frac{\omega}{n(n\gamma)} \frac{R}{h}, \end{aligned} \quad (40)$$



Фиг. 4. Зависимость критического напряжения от жесткости заполнителя при кручении.



Фиг. 5. Характер волнообразования при кручении (непрерывное изменение  $n$  — условно).

где введен безразмерный параметр

$$\tau^* = \frac{\tau R}{Eh} \quad (41)$$

Критическое напряжение находится из условий.

$$\frac{\partial \tau^*}{\partial m} = \frac{\partial \tau^*}{\partial n} = \frac{\partial \tau^*}{\partial (n\gamma)} = 0. \quad (42)$$

С помощью (40) и (42) проведены расчеты для оболочки с параметрами  $\frac{R}{L} = \frac{1}{5}$ ;  $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$ ;  $\mu = 0,3$ . Результаты вычислений приведены на фиг. 4 и 5. Как видно из графиков, критическое напряжение увеличивается с ростом жесткости заполнителя. Одновременно с этим растет число волн и наклон их к оси  $x$ , характеризуемый параметром  $\gamma$ . В пределах принятого изменения жесткости заполнителя число волн в осевом направлении оставалось неизменным и равным 1.

Машиностроительный институт  
им. В. Я. Чубаря г. Запорожье

Поступила 16 XI 1964

В. А. КОРБУТ

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԼՅՈՒՈՎ ԳԼԱՆԱԶԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ս. Վ. Փ. Ն. Փ. Ն. Վ.

Դրամարկում է առաջադրան լցիչով միջին երկարությունը դրամաձև բա-  
րակ թաղանթ: Ուսումնասիրում է աղբյուրի թաղանթի կախումները  
աղբյուրի բնակարանների դեպքում: Խնդիրը լուծվում է դժարին գրվածքով:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
2. Корбут Б. А. Об устойчивости в „малом“ тонкостенной сферы, опирающейся внутренней поверхностью на упругое основание. ИЗУЗ „Машиностроение“ № 2, 1962.
3. Маркин В. А. Устойчивость цилиндрической оболочки при кручении и внутреннем давлении. Сб. „Расчет пространственных конструкций“, № 5, 1959.



# ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

А. М. СИМОНЯН

## ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАДАЧА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТРУБ В УСЛОВИЯХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ НАСЛЕДСТВЕННОСТИ

В настоящей работе рассматривается равновесие цилиндрической трубы, находящейся под действием теплового потока, а также внутреннего и наружного равномерных давлений, в условиях пластической наследственности при плоской деформации.

Решение этой задачи в предположении упругой работы материала дано в работе [2], а для случая линейной наследственности — в работе [3].

Работы [4] и [5] посвящены ползучести цилиндрических труб в упругой среде на основе уравнений нелинейной наследственности, приведенных в работе [6].

### § 1. Связь между деформациями и напряжениями

Зависимости между деформациями и напряжениями в случае отсутствия воздействия температуры при пластической наследственности в условиях объемной несжимаемости материала будут следующими [1]:

$$\varepsilon_r(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_r(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_r(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\varphi(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_\varphi(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_\varphi(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

$$\varepsilon_z(t) \mp [\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_z(t) - \sigma(t) - \int_{\tau_1}^t [\sigma_z(\tau) - \sigma(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (3)$$

где

$$\sigma(t) = \frac{1}{3} [\sigma_r(t) + \sigma_\varphi(t) + \sigma_z(t)]$$

$$\varepsilon_i(t) = \sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\varphi z}^2 + \gamma_{rz}^2)}.$$

Уравнения (1), (2) и (3) вырождаются в уравнения линейной наследственности при условии несжимаемости материала, если положить

$$\varphi[\varepsilon_i(t)] = 2G; \quad C_1(t, \tau) = E \cdot C(t, \tau),$$

где  $C(t, \tau)$  — мера ползучести.

Рассмотрим теперь, какие коррективы следует внести в формулы (1)–(3) в случае переменной температуры.

Мы принимаем  $C_1(t, \tau)$  не зависящим от координат, то есть будем брать его значения, соответствующие средней температуре материала трубы. В таком случае воздействие температуры выразится лишь в прибавлении к тензору деформаций шарового тензора, помноженного на  $\alpha \Delta T(r, t)$ , а интенсивность  $\varepsilon_i(t)$ , определяемая девиатором деформаций, останется без изменения.

Таким образом, в случае температурных воздействий форма зависимости между деформациями и напряжениями при пластической наследственности будет следующей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_r(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_\varphi(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_\varphi(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(t) \varphi[\varepsilon_i(t)] = \varepsilon_z(t) - \varepsilon(t) - \int_0^t [\varepsilon_z(\tau) - \varepsilon(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau + \\ + \alpha \Delta T(r, t) \varphi[\varepsilon_i(t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Функция  $\Delta T(r, t)$  определяется по формуле

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0, \quad (7)$$

где  $T(r, t)$  — температура в точке  $r$  в момент времени  $t$ , а  $T_0$  — температура в трубе до загрузки ( $q_1, q_2$ ), соответствующая отсутствию напряжений и деформаций.

## § 2. Постановка задачи и получение общих зависимостей

Рассматривается цилиндрическая труба (фиг. 1), находящаяся под воздействием внутреннего  $q_1(t)$  и наружного  $q_2(t)$  давлений и теплового потока, определяемого функцией  $T(r, t)$ . Задаемся также температурой  $T_0$ , при которой фиксируются торцы трубы без приложения нагрузки.

Поставленная здесь задача с учетом гипотезы Дюамеля сводится к определению системы функций напряжений и деформаций, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (8)$$



$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_z}{r} = 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_z = 0, \quad (10)$$

и также удовлетворяющих уравнениям (4), (5) и (6) и краевым условиям

$$\sigma_r|_{R_1} = q_1(t); \quad \sigma_r|_{R_2} = q_2(t), \quad (11)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — соответственно внутренний и наружный радиусы трубы.

Складывая (4), (5) и (6), получим условие несжимаемости материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta = 3\alpha \Delta T(r, t). \quad (12)$$

Решая совместно уравнения (9), (10) и (12) относительно  $\varepsilon_r$  получим

$$r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + 2\varepsilon_r = 3\alpha \Delta T(r, t).$$

Решением этого уравнения будет

$$\varepsilon_r = \frac{A(t)}{r^2} + \frac{3\alpha}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr, \quad (13)$$

где  $A(t)$  — пока произвольная функция от  $t$ .

Вычитывая (5) из (4), получим

$$[\varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t)] \varphi[\varepsilon_\theta(t)] = \sigma_r(t) - \sigma_z(t) - \int_{\varepsilon_1}^t [\sigma_r(\tau) - \sigma_z(\tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (14)$$

решением которого относительно  $\sigma_r(t) - \sigma_z(t)$  будет

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) - \sigma_z(t) = & [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t)] \varphi[\varepsilon_\theta(t)] + \int_{\varepsilon_1}^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_z(\tau)] \times \\ & \times \varphi[\varepsilon_\theta(\tau)] R(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (15)$$

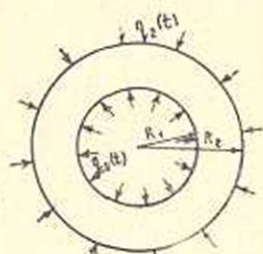
где  $R(t, \tau)$  — резольвента интегрального ядра  $\frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau}$ .

Используя уравнения (8) и (9), можно записать уравнение (15) в следующем виде.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = - \frac{\partial \varepsilon_r(t)}{\partial r} \varphi[\varepsilon_\theta(t)] - \int_{\varepsilon_1}^t \frac{\partial \varepsilon_r(\tau)}{\partial r} \varphi[\varepsilon_\theta(\tau)] R(t, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Определим интенсивность  $\varepsilon_i(r, t)$ , учитывая осесимметричность задачи и условие плоской деформации. При использовании (9), (10), (12) и (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(r, t) = & \sqrt{\frac{1}{6} \cdot V(\varepsilon_r - \varepsilon_z)^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{\varepsilon_r^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2 - 3\alpha \Delta T \varepsilon_z} = \\ = & \left[ \frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r \Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[ \int r \Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \end{aligned}$$



Фиг. 1.

$$-3\alpha\Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2\Delta T(r, t)}{r^2} \int r\Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2\Delta T^2(r, t) \Big\}^{1/2}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и беря интеграл от обеих частей, получим

$$z_r(r, t) = M(r, t) + \int_{z_1}^t M(r, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} M(r, t) = & - \int \left[ \frac{3\alpha}{r} \Delta T(r, t) - \frac{2A(t)}{r^3} - \frac{6\alpha}{r^3} \int r\Delta T(r, t) dr \right] \times \\ & \times \varphi \left\{ \frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r\Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[ \int r\Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \\ & \left. - 3\alpha\Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2\Delta T(r, t)}{r^2} \int r\Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2\Delta T^2(r, t) \right\}^{1/2} dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции  $A(t)$  и  $B(t)$  определяются из краевых условий (11)

$$M(R_1, t) + \int_{z_1}^t M(R_1, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t) = q_1(t), \quad (20)$$

$$M(R_2, t) + \int_{z_1}^t M(R_2, \tau) R(t, \tau) d\tau + B(t) = q_2(t). \quad (21)$$

Вычитывая (20) из (21), получим

$$N(t) + \int_{z_1}^t N(\tau) R(t, \tau) d\tau = q_2(t) - q_1(t), \quad (22)$$

где

$$N(t) = M(r, t) \Big|_{R_1}^{R_2}. \quad (23)$$

Решая уравнение (22) относительно  $N(t)$ , получим

$$N(t) = \int_{z_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau + q_2(t) - q_1(t), \quad (24)$$

где  $\Gamma(t, \tau)$  — резольвента ядра  $-R(t, \tau)$ .

Используя (19), (23) и (24), получим уравнение для определения функции  $A(t)$

$$\int_{R_1}^{R_2} \left[ \frac{2A(t)}{r^3} + \frac{6\alpha}{r^3} \int r\Delta T(r, t) dr - \frac{3\alpha}{r} \Delta T(r, t) \right] \times$$



$$\begin{aligned}
& \times \varphi \left\{ \frac{A^2(t)}{r^4} + \frac{6\alpha A(t)}{r^4} \int r \Delta T(r, t) dr + \frac{9\alpha^2}{r^4} \left[ \int r \Delta T(r, t) dr \right]^2 - \right. \\
& \left. - 3\alpha \Delta T(r, t) \frac{A(t)}{r^2} - \frac{9\alpha^2 \Delta T(r, t)}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr + 3\alpha^2 \Delta T^2(r, t) \right\}^{1/2} dr = \\
& = q_2(t) - q_1(t) + \int_{t_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (25)
\end{aligned}$$

После определения  $A(t)$  функция  $B(t)$  определяется из (20) или (21), после чего  $\tau_r(r, t)$  находим из (18), а  $\sigma_z(r, t)$  — из (8).

Из уравнений (6) и (10) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_z(r, t) - \sigma(r, t) &= \int_{t_1}^t [\sigma_z(r, \tau) - \sigma(r, \tau)] \frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\
&= -\alpha \Delta T(r, t) \varphi[z_1(t)]. \quad (26)
\end{aligned}$$

Решая (26) относительно  $\sigma_z(r, t)$ , будем иметь

$$\begin{aligned}
\sigma_z(r, t) &= \frac{1}{2} [\sigma_r(r, t) + \sigma_z(r, t)] - \\
&- \frac{3}{2} \left\{ \alpha \Delta T(r, t) \varphi[z_1(t)] - \int_{t_1}^t \alpha \Delta T(r, \tau) \varphi[z_1(\tau)] R(t, \tau) d\tau \right\}. \quad (27)
\end{aligned}$$

Таким образом, поставленная задача сводится к решению уравнения (25)

### § 3. Метод последовательного уточнения $A(t)$

Рассматриваем уравнение

$$\int_{R_1}^{R_2} F(A(t), r) dr = f_0(t), \quad (28)$$

где  $F$  и  $f_0$  — заданные функции, причем  $f_0$  — непрерывна, а  $F$  — непрерывна и дифференцируема по  $A$ , а  $A(t)$  — искомая функция.

Положим

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} F(\eta(f), r) dr, \quad (29)$$

К функции  $\eta(f)$ , выбираемой нами, предъявляем требование непрерывности и дифференцируемости по  $f$ , а также удовлетворения

$$1 - \theta < B'(f) < 1 + \theta; \quad 0 < \theta < 1. \quad (30)$$

Наша задача будет заключаться в определении  $f_n(t)$ , удовлетворяющего уравнению

$$B(f_n) = f_0 \text{ или } \eta(f_n) = A(t). \quad (31)$$

Рассмотрим последовательность, определяемую рекуррентной формулой

$$f_{n_{k+1}} = f_0 + f_{n_k} - B(f_{n_k}). \quad (32)$$

Здесь  $f_{n_0} = f_0$ .

**Теорема.** *Последовательность  $B(f_{n_k})$  равномерно сходится к  $f_0$ .*

**Доказательство.** Проинтегрировав неравенство (30) в пределах от  $f_{n_{k-1}}$  до  $f_{n_k}$ , будем иметь

$$1 - \theta < \frac{B(f_{n_k}) - B(f_{n_{k-1}})}{f_{n_k} - f_{n_{k-1}}} < 1 + \theta. \quad (33)$$

Вычитывая из каждого члена неравенства (33) единицу и помножив полученное неравенство на  $f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$ , получим

$$|B(f_{n_k}) - B(f_{n_{k-1}}) - f_{n_k} + f_{n_{k-1}}| < \theta |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|. \quad (34)$$

Записывая формулу (32) для  $(n+1)$ -го и  $n$ -го членов и вычитывая из второй полученной формулы первую, будем иметь

$$f_{n_{k+1}} - f_{n_k} = f_{n_{k-1}} + B(f_{n_k}) - f_{n_k} - B(f_{n_{k-1}}). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34), получим

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \theta |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|. \quad (36)$$

Применяя формулу (36)  $n$  раз, получим

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \theta^n |f_{n_1} - f_0|. \quad (37)$$

Вследствие непрерывности  $F$ ,  $\eta$  и  $f_0$ , имеем

$$|f_{n_1} - f_0| < C, \quad (38)$$

где  $C$  — конечная положительная постоянная.

С учетом (32) и (38) неравенство (37) запишется

$$|f_0 - B(f_{n_k})| < \theta^n C. \quad (39)$$

Из последнего вытекает равномерная сходимость  $B(f_{n_k})$  к  $f_0$ .

Рассмотрим теперь геометрическую интерпретацию изложенного метода. Ясно, что если  $\eta(f_0)$  является решением уравнения (28), то на фиг. 2 мы получим наклонную пунктирную прямую. Сплошной линией показана кривая, удовлетворяющая (30).

Принимая

$$\Delta f_0 = f_0 - B(f_0),$$

для  $f_{n_1}$  с использованием (32) получим

$$f_{n_1} = f_0 + \Delta f_0.$$



При втором приближении будем иметь

$$\Delta f_1 = f_0 - B(f_{u_1})$$

и

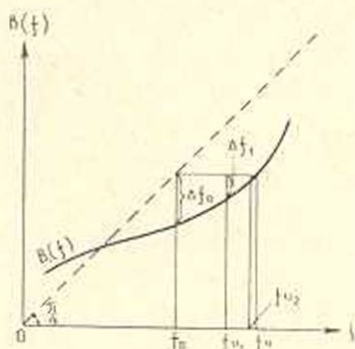
$$f_{u_2} = f_{u_1} + \Delta f_1.$$

Из фиг. 2 легко усмотреть что при  $t=0$

$$f_{u_1} = f_0.$$

В заключение отметим, что если неравенство (30) удовлетворяется везде, кроме некоторой точки, где  $B'(f) = 0$ , то метод последовательных уточнений опять же применим.

Действительно, для применения этого метода достаточно удовлетворение неравенства (33), которое в данном случае будет иметь место при любом конечном, не равном нулю  $f_{u_n} - f_{u_{n-1}}$ . В случае же, когда  $f_{u_n} - f_{u_{n-1}}$  бесконечно мало или равно нулю, мы из (32) получим бесконечно малое  $B(f_{u_n}) - f_0$  или равенство  $B(f_{u_n}) = f_0$ , что уже является конечной целью при применении этого метода.



Фиг. 2.

#### § 4. Случай линейного изменения температуры по толщине трубы

Как известно, в случае установившегося теплового потока у цилиндрических труб распределение температуры, соответствующее решению уравнения теплопроводности, должно быть по логарифмическому закону

$$\Delta T(r, t) = A \ln r + B.$$

Если пренебречь скоростью изменения температуры, то  $A$  и  $B$  могут здесь рассматриваться как функции от времени.

С определенным приближением мы здесь принимаем линейное распределение температуры по толщине трубы

$$\Delta T(r, t) = ar + b \quad (40)$$

В этом случае уравнение (25) существенно упростится и примет вид

$$\int_{k_1}^{k_2} \left( \frac{2A(t)}{r^2} - ar \right) \frac{1}{r} \varphi \left( \frac{1}{2} \right) \sqrt{\left( \frac{2A(t)}{r^2} - ar \right)^2 + 3\pi^2 \Delta T^2} dr =$$

$$= q_2(t) - q_1(t) + \int_{\tau_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau. \quad (41)$$

Как известно [7], для функции  $\varphi$  принимается степенная зависимость

$$\varphi(\xi) = K_0 \xi^{\mu-1}; \quad \mu = \frac{1}{m}; \quad 0 < \mu < 1, \quad (42)$$

где  $m$  — показатель ползучести.

Нетрудно видеть, что (41), как и (25), является частным случаем уравнения (28), так что здесь применим метод последовательных уточнений  $A(t)$ . В обозначениях § 3 здесь будем иметь

$$f_0(t) = q_2(t) - q_1(t) + \int_{\tau_1}^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \Gamma(t, \tau) d\tau, \quad (43)$$

$$B(f) = \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right) \frac{k_0}{r} 2^{1-\mu} \left[ \left( \frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} dr. \quad (44)$$

Условие (30) для функции  $\eta(f)$  здесь запишется

$$0 < \frac{\partial \eta}{\partial f} 2^{2-\mu} K_0 \int_{R_1}^{R_2} \left[ \left( \frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} \times \\ \times \left[ 1 + \frac{\left( \frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 (\mu-1)}{\left( \frac{2\eta(f)}{r^2} - azr \right)^2 + 3a^2 \Delta T^2} \right] \frac{dr}{r^3} < 2. \quad (45)$$

Чем выражение в (45) ближе к единице, тем скорее будет сходиться последовательность (32).

Для функции  $\eta(f)$  примем следующее выражение:

$$\eta(f) = \frac{a\alpha}{2} R_{cp}^2 + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{f R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m, \quad (46)$$

где

$$R_{cp} = \frac{R_1 + R_2}{2}.$$

Так как  $m$ , вообще говоря, не предполагается целым, то для отрицательных  $f$  функция  $\eta(f)$  из (46) не определена. Мы же в формуле (46) будем считать второе слагаемое  $\eta(f)$  для  $f < 0$  продолженным нечетно и это распространим на случай любого  $m$ , в том числе и целого.

Вышеуказанное условие применения формулы (46) запишется в виде

$$\frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{(-|f|) R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} - \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{|f| R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m. \quad (48)$$



При использовании (48)  $\frac{\partial \eta(f)}{\partial f}$  будет определена и для отрицательных  $f$  и из (46) получим

$$\frac{\partial \eta(f)}{\partial f} = \frac{m \beta R_{cp}^2}{2} \frac{R_{cp}^m}{[2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)]^m} |f|^{m-1}. \quad (49)$$

Постоянной  $\beta$  из (46) мы будем задавать лишь положительные значения.

Используя это, а также (42) и (49), находим, что левое неравенство (45) удовлетворяется тождественно везде, кроме одной точки  $f=0$ , где выражение в (45) обращается в нуль. По сказанному в § 3 это обстоятельство, однако, оказывается приемлемым для применения метода.

Теперь запишем правое неравенство (45) с использованием (46):

$$\beta \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\Omega^{\frac{m-1}{2m}}} \left\{ m + \frac{1-m}{\Omega} \left[ \left( \frac{az R_{cp}^3}{r^2} - azr \right) \left( \frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{R_{cp}^2}{r^2} \beta \right]^2 \right\} \left( \frac{R_{cp}}{r} \right)^3 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2, \quad (50)$$

где

$$\Omega = \left[ \left( \frac{az R_{cp}^3}{r^2} - azr \right) \left( \frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m - \beta \frac{R_{cp}^2}{r^2} \right]^2 + \\ + 3az \Delta T^2 \left( \frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^{2m}.$$

Учитывая, что выражение в фигурных скобках в числителе левой части (50) может вообще получать значения в пределах от 1 до  $m$ , заменяем неравенство (50) более жестким

$$\beta \int_{R_1}^{R_2} \frac{m}{\Omega^{\frac{m-1}{2m}}} \left( \frac{R_{cp}}{r} \right)^3 \frac{dr}{R_2 - R_1} < 2.$$

В случае, когда  $\Delta T(r, t) \neq 0$ , выражение внутри фигурных скобок в (51) не обращается в нуль и тогда соответствующим подбором малого  $\beta$  можно удовлетворить (51). Если же  $\Delta T(r, t) = 0$  в некоторой точке  $r_1$ , то выражение это обратится в нуль лишь при

$$\beta = \frac{az r_1^3}{R_{cp}^2} \left( \frac{R_{cp}^3}{r^3} - 1 \right) \left( \frac{2^{1-m} K_0(R_2 - R_1)}{R_{cp} f} \right)^m. \quad (52)$$

Если  $r_1 \neq R_{cp}$ , то при уменьшении  $\beta$  условием для неограниченности подынтегрального выражения в (51) будет увеличение  $f$ . Таким образом, при достаточно малом  $\beta$  неравенство (51) будет удовлетворяться всюду, кроме, регулируемой малостью  $\beta$ , области боль-

ших  $f$ . Если же  $r_1 = R_{cp}$ , то во всяком случае при конечном, не равном нулю  $f$ , подынтегральное выражение конечно при любом не равном нулю  $\beta$  и, следовательно, подбор  $\beta$  для удовлетворения (51) возможен. Отметим, что в нашем численном примере (§ 8) использование (46) при  $\beta = 1$  оказалось приемлемым и для области, включающей точку  $f = 0$ .

Принять для  $\beta$  заведомо малое значение не выгодно, так как при этом  $B(f)$  будет малым, а это снижает скорость сходимости последовательности (32). Нам представляется, что в практических случаях удобно брать  $\beta = 1$ , как мы и сделали в нашем численном примере (§ 8).

Функция  $A(t)$  здесь определяется (§ 3) по формуле

$$A(t) = \frac{\alpha R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{f_{us} R_{cp}}{2^{1-\beta} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m, \quad (53)$$

зная, что

$$A(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{\alpha R_{cp}^3}{2} + \beta \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{f_{uk} R_{cp}}{2^{1-\beta} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m \right], \quad (54)$$

причем приближенность (53) контролируется асимптотическим равенством

$$B(f_{un}) \approx f_0. \quad (55)$$

Перейдем теперь к рассмотрению  $C_1(t, \tau)$ .

Принимая экспоненциальную зависимость и учитывая отсутствие старения, будем иметь

$$C_1(t, \tau) = C_0' [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]. \quad (56)$$

Ядром интегрального уравнения (14) будет

$$\frac{\partial C_1(t, \tau)}{\partial \tau} = -\gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (57)$$

Используя метод определения резольвенты Работнова [9], получим

$$R(t, \tau) = -\gamma C_0' e^{-\gamma(C_0' + 1)(t-\tau)}, \quad (58)$$

$$\Gamma(t, \tau) = \gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)}. \quad (59)$$

Вместо (43) здесь будем иметь

$$f_0(t) = q_2(t) - q_1(t) + \int_0^t [q_2(\tau) - q_1(\tau)] \gamma C_0' e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau. \quad (60)$$



## § 5. Случай отсутствия воздействия температуры

При  $\Delta T = 0$  определение напряженного и деформационного состояния трубы значительно облегчается. Формула (41) запишется в виде

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{2A(t)}{r^2} \frac{K_0 2^{1-\mu}}{r} \left( \frac{2A(t)}{r^2} \right)^{\mu-1} dr = f_0(t). \quad (61)$$

Решением уравнения (61) относительно  $A(t)$  будет

$$A(t) = R_1^2 R_2^2 \left( \frac{f_0(t)^\mu}{K_0 (R_2^{2\mu} - R_1^{2\mu})} \right)^{1/\mu}, \quad (62)$$

где  $f_0(t)$  определяется уравнением (60).

Формула (19) после соответствующих упрощений даст

$$M(r, t) = -\frac{K_0}{\mu} \left( \frac{A(t)}{r^2} \right)^\mu. \quad (63)$$

Функцию  $B(t)$  можно, например, определить из (20) и (58)

$$B(t) = q_1(t) + \frac{K_0}{2R_1^{2\mu}} \left[ A(t)^\mu - \gamma C_0' \int_{\tau_1}^t A(\tau) e^{-\gamma(C_0'+1)(t-\tau)} d\tau \right]. \quad (64)$$

После этого напряжения  $\varepsilon_r(r, t)$ ,  $\varepsilon_\varphi(r, t)$  и  $\varepsilon_z(r, t)$  соответственно определяются из уравнений (18), (8) и (27). Деформации же легко определяются из системы (12), (13) и (10).

## § 6. Насадка трубы на жесткий вал

В тех случаях, когда на  $R_1$  и  $R_2$  задаются перемещения, задача определения напряженного состояния существенно упрощается.

Определим радиальное перемещение, используя (13),

$$u_r = r\varepsilon_r = \frac{A(t)}{r} + \frac{3\alpha}{r} \int r \Delta T(r, t) dr. \quad (65)$$

Из уравнения (65) следует, что можно задать лишь одно краевое условие в перемещениях, и это ограничение связано с объемной нежимаемостью материала (12).

Пусть заданы краевые условия:  $u_r|_{R_1} = w(t)$ ,  $\varepsilon_r|_{R_2} = q(t)$ . Краевое условие в перемещениях при использовании (65) позволяет сразу определить  $A(t)$

$$A(t) = R_1 w(t) - 3\alpha \left[ \int_{r=R_1}^{\cdot} r \Delta T(r, t) dr \right]. \quad (66)$$

Так как вообще неопределенный интеграл в (19) не берется, то удобнее  $B(t)$  исключить из уравнений (18) и (21), тогда получим

$$\sigma_r(r, t) = q(t) + [M(r, t) - M(R_2, t)] + \int_0^t [M(r, \tau) - M(R_2, \tau)] R(t, \tau) d\tau \quad (67)$$

где  $M(r, t) - M(R_2, t)$  равно определенному интегралу в (19), который может решаться простыми приближенными методами, а  $R(t, \tau)$  определяется формулой (58).

Так как  $\frac{\partial M(r, t)}{\partial r}$  определяется подынтегральным выражением в (19) точно, то при определении  $r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ , являющимся зачастую превадирующей частью  $\sigma_r$ , мы не будем связаны с вышеуказанными приближениями интегрирования.

### § 7. Исследование полученных результатов

Задача о равновесии цилиндрической трубы, находящейся под действием теплового потока, а также внутреннего и внешнего давлений, при нелинейной ползучести свелась к уравнениям (13), (18) и (25). Из этих уравнений легко видеть, что в случае  $q_1(t) = q_2(t)$  величина  $A$  перестает быть функцией от времени, а это значит, что, несмотря на изменение напряжений во времени, деформации остаются постоянными. Другими словами, этот случай тождественен релаксационной задаче.

Теперь покажем, что приведенное выше решение обобщает общеизвестные формулы Ламе, которые соответствуют упругому случаю без воздействия температуры.

Действительно, в этом случае (следим за формулами (18) и (19))  $\varphi(\xi) = 2G$ ,  $\Delta T(r, t) = 0$ ,  $C_i(t, \tau) = R(t, \tau) = \Gamma(t, \tau) = 0$ . При этом имеем

$$M(r, t) = -\frac{2G}{r^2} A(t)$$

и

$$\sigma_r(r, t) = -\frac{2GA(t)}{r^2} + B(t).$$

Определяя  $A(t)$  по формуле (25), находим

$$-2GA(t) = \frac{q_1(t) - q_2(t)}{R_2^2 - R_1^2} R_1^2 R_2^2,$$

что совпадает с формулой (4.80) [8].



Рассмотрим теперь состояние линейной ползучести, как частный случай приведенного выше решения. Решение данной задачи по линейной теории ползучести может быть дано в виде

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} A(t) + \frac{1}{r^2} \int r \left[ \Phi(r, t) dr \right] dr, \\ \Phi(r, t) = \frac{1 + \nu(t)}{1 - \nu^2(t)} \varphi(r, t), \quad (68)$$

$$\varphi(r, t) = -E(t) r \frac{\partial \Delta T(r, t)}{\partial r} - \int_{\tau_0}^t E(\tau) r \frac{\partial \Delta T(r, \tau)}{\partial r} R_1(t, \tau) d\tau,$$

где  $R_1(t, \tau)$  — резольвента ядра  $E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right]$ .

Подстановкой можно убедиться, что (68) удовлетворяет формулам (8), (9) и (10) в случае линейной наследственности с учетом старения [6].

Принимая для (68) несжимаемость материала  $\nu(t) \equiv \frac{1}{2}$  и отсутствие старения, получим по формулам линейной ползучести

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} A(t) - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr - \\ - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \left[ \int_{\tau_0}^t \Delta T(r, \tau) R(t, \tau) d\tau \right] dr. \quad (69)$$

Теперь получим решение линейной ползучести, как частный случай нелинейной ползучести. Принимая в формуле (19)  $\varphi[\varepsilon_1(t)] \equiv 2G$  и  $C_0 = C_0 E$ , мы из формулы (18) получим

$$\sigma_r(r, t) = B(t) + \frac{1}{r^2} \left[ -2GA(t) - 2G \int_{\tau_0}^t A(\tau) R(t, \tau) d\tau \right] - \\ - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \Delta T(r, t) dr - \frac{6\alpha G}{r^2} \int r \left[ \int_{\tau_0}^t \Delta T(r, \tau) R(t, \tau) d\tau \right] dr. \quad (70)$$

Так как  $\left[ -2GA(t) - 2G \int_{\tau_0}^t A(\tau) R(t, \tau) d\tau \right]$  не является функцией от  $r$ , то решения (69) и (70) необходимо совпадут после удовлетворения краевым условиям.

## § 8. Численный пример

Пусть имеется цилиндрическая труба из горячекатанной стали марки 35ГС.

Торцы трубы закреплены при осевой деформации, соответствующей нагреву трубы до 400°C.

Труба подвержена действию стационарного теплового потока.

Основные данные:  $R_1 = 9,75$  см;  $R_2 = 10,25$  см;  $T_{R_1} = 370^\circ\text{C}$ ;

$$T_{R_2} = 430^\circ\text{C}; \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}.$$

В экспериментальной работе автора [10] производились подробные исследования кратковременной высокотемпературной ползучести указанной стали. При учете упругих деформаций для испытания при 400°C подобие деформационных кривых по времени можно было считать удовлетворительным. Это позволило применить исходные формулы (1), (2) и (3) при обработке опытных данных, в результате чего были получены следующие константы:

$$\gamma = 0,16 \frac{1}{\text{час}}; \quad \mu = \frac{1}{2}; \quad K_0 = 22000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}; \quad C'_0 = 2,2064.$$

Принимая линейное распределение температуры по толщине, легко определяем параметры формулы (40):  $a = 120 \frac{\text{град}}{\text{см}}$ ;  $b = -1200 \text{ град}$ .

Так как давление на трубу отсутствует, то  $f_0(t)$  из (60) тождественно равно нулю.

Выражение для функции  $\eta(f)$  возьмем по формуле (46). Согласно § 3, мы в (46) принимаем сначала  $f = f_0 \equiv 0$

$$\eta(f_0) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} = 0,72 \text{ см}^2.$$

Для определения первого уточнения  $A(t)$  следует определить  $B(f_0)$ , которая при учете (44) имеет вид

$$B(f_0) = \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{2\eta(f_0)}{r^2} - a\alpha r \right) K_0 \frac{2^{1-\mu}}{r} \left[ \left( \frac{2\eta(f_0)}{r^2} - a\alpha r \right)^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2 \right]^{\frac{\mu-1}{2}} dr. \quad (71)$$

Решая интеграл в (71) приближенно, аналогично

$$\int_{9,75}^{10,25} \Phi(r) dr = \Phi(9,8) \cdot 0,1 + \Phi(9,9) \cdot 0,1 + \Phi(10,0) \cdot 0,1 + \Phi(10,1) \cdot 0,1 + \Phi(10,2) \cdot 0,1 \quad (72)$$



получим

$$B(f_0) = +0,73975 \text{ кг/см}^2.$$

По формуле (32) имеем

$$f_{u_1} = 2f_0 - B(f_0) = -0,73975 \text{ кг/см}^2.$$

Осуществим первое уточнение  $A(t)$

$$A(t) \approx \gamma(f_{u_1}) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{f_{u_1} R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = 0,7199887 \text{ см}^2.$$

Определяя  $B(f_{u_1})$  аналогично (71) и (72)

$$B(f_{u_1}) = +0,4951 \text{ кг/см}^2,$$

видим, что  $B(f_{u_1})$  меньше отличается от  $f_0$ , чем  $B(f_0)$ .

Осуществим теперь второе уточнение  $A(t)$ , соответствующее уже определенному  $B(f_{u_1})$

$$f_{u_2} = 3f_0 - B(f_0) - B(f_{u_1}) = -1,23485 \text{ кг/см}^2$$

и

$$A(t) \approx \gamma(f_{u_2}) = \frac{a\alpha R_{cp}^3}{2} + \frac{R_{cp}^2}{2} \left( \frac{f_{u_2} R_{cp}}{2^{1-\mu} K_0 (R_2 - R_1)} \right)^m = 0,7199844 \text{ см}^2.$$

Дальнейших приближений  $A(t)$  мы здесь делать не будем, тем более, что приближения в (72), по-видимому, более грубые.

В настоящей задаче  $A(t)$  и  $\Delta T(r, t)$  оказались не зависящими от времени, а потому и  $M(r, t)$  из (19) от  $t$  не зависит. Учитывая это, а также используя (18), получим формулу для  $\frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r}$ , удобную при вычислениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r} &= \left( \frac{2A}{r^2} - r\alpha\alpha \right) \frac{1/2 K_0}{r \sqrt{\left( \frac{2A}{r^2} - r\alpha\alpha \right)^2 + 3\alpha^2 \Delta T^2}} \times \\ &\times \left[ 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (73)$$

Для определения напряжения  $\varepsilon_r(r, t)$ , при учете (18) и (20) будем иметь следующую формулу

$$\varepsilon_r(r, t) = q_1(t) + [M(r) - M(R_1)] \left[ 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau \right]. \quad (74)$$

Из (8) получим формулу для определения  $\varepsilon_\varphi(r, t)$

$$\varepsilon_\varphi(r, t) = \varepsilon_r(r, t) + r \frac{\partial \varepsilon_r(r, t)}{\partial r}. \quad (75)$$

Составляющая  $\varepsilon_z(r, t)$  определяется через  $\varepsilon_r(r, t)$  и  $\varepsilon_\varphi(r, t)$  по формуле (27).

Из формул (74), (73), (75) и (27) нетрудно усмотреть, что составляющие напряжений могут быть даны в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, t) &= \sigma_r(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1) \\ \sigma_\varphi(r, t) &= \sigma_\varphi(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1) \\ \sigma_z(r, t) &= \sigma_z(r, \tau_1) \beta(t - \tau_1),\end{aligned}\quad (76)$$

где  $\sigma(r, \tau_1)$  соответствуют мгновенному решению с учетом пластичности и даны в табл. 1, а

$$\begin{aligned}\beta(t - \tau_1) &= 1 + \int_{\tau_1}^t R(t, \tau) d\tau = 1 - \frac{C_0}{1 + C_0} \left( 1 + e^{-\gamma(C_0 + 1)(t - \tau_1)} \right) = \\ &= 0,829 + 0,171 \cdot e^{-0,193(t - \tau_1)}.\end{aligned}$$

Из последнего выражения следует, что при  $t = \tau_1$   $\beta = 1$ . Значения  $\beta(t - \tau_1)$  для некоторых значений  $t - \tau_1$  даны в табл. 2.

Таблица 1

| $r$ (см)                                                                            | 9,75     | 9,85    | 9,95    | 10,05   | 10,15   | 10,25    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $\sigma_r \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$                             | 0        | +8,688  | +14,636 | +14,368 | +8,370  | 0        |
| $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} \right)$ | +117,095 | +86,672 | +36,183 | -36,693 | -86,010 | -109,886 |
| $\sigma_\varphi \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$                       | +1141,68 | +845,03 | +345,38 | -381,17 | -881,37 | -1126,33 |
| $\sigma_z \left( \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \right)$                             | +1141,08 | +851,88 | +398,76 | -385,64 | -806,63 | -1043,09 |

Таблица 2

| $t - \tau_1$ | 1 ч    | 2 ч    | 3 ч    | 5 ч    | 10 ч   | 20 ч   | $\infty$ |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|
| $\beta$      | 0,9695 | 0,9450 | 0,9230 | 0,8940 | 0,8540 | 0,8320 | 0,8290   |

Напряжения  $\sigma_\varphi(r, \tau_1)$  и  $\sigma_z(r, \tau_1)$  графически изображены на фиг. 3, а функция  $\beta(t - \tau_1)$  — на фиг. 4.

Используя (13), (12), (10) и (65), получим формулы для вычисления  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_r$  и  $u_r$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{0,7199844}{r^2} + 1,44 \cdot 10^{-3} r - 2,16 \cdot 10^{-2},$$

$$\varepsilon_r = 0,00432 (r - 10) - \varepsilon_\varphi,$$

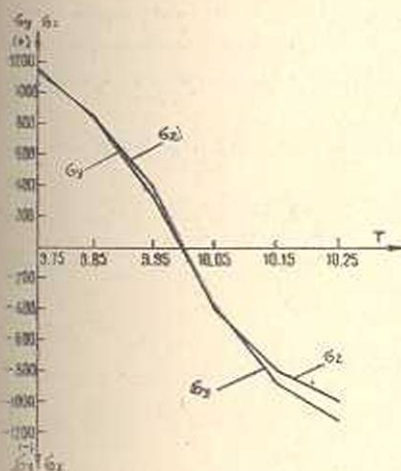
$$u_r = r \varepsilon_\varphi.$$

Значения  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  и  $u_r$  даны в табл. 3.

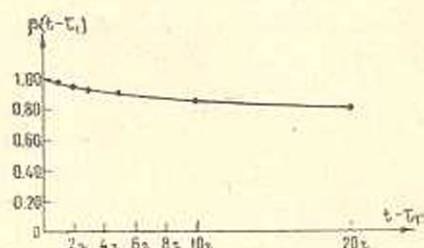


Таблица 3

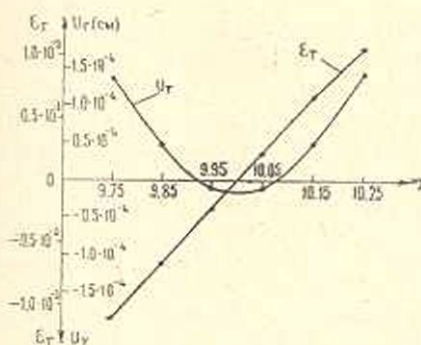
| $r$ (см)                      | 9,75    | 9,85    | 9,95    | 10,05   | 10,15   | 10,25   |
|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\varepsilon_r \cdot 10^{-3}$ | -1,094  | -0,655  | -0,219  | +0,221  | +0,645  | +1,066  |
| $\varepsilon_z \cdot 10^{-3}$ | +0,014  | +0,005  | -0,001  | -0,001  | +0,005  | +0,014  |
| $u_r \cdot 10^{-4}$ см        | +1,3650 | +0,4920 | -0,0995 | -0,1005 | +0,5075 | +1,4350 |



Фиг. 3.



Фиг. 4



Фиг. 5.

Величины  $\varepsilon_r$  и  $u_r$  графически изображены на фиг. 5.

Из рассмотренного примера приходим к следующим выводам.

1) В случае отсутствия давлений на стенки трубы деформации и перемещения не будут зависеть от времени, а напряжения будут убывать со временем пропорционально друг другу.

2) Радиальные напряжения значительно меньше тангенциальных, а радиальные деформации, наоборот, больше.

Ա. Մ. ՍԻՄՈՅԱՆ

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐԻ ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԵՆԴԻՐԸ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ  
ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

## Ա մ ֆ ո լ ի յ ռ

Հողածուժ տրվում է ջերմային հոսքի և ներքին ու արտաքին համա-  
նարաչափ ճնշման տակ զանազակ դրանային խողովակի համասարտեղծումը  
հարթ դեֆորմացիայի ժամանակ պլաստիկական հոսունության պայմաննե-  
րում:

Լուծումը տրված է, ելնելով նյութի ծախսային չսեղմվելիության պայ-  
մաններից:

Գտնված է, որ պատերի վրա ճնշման բացակայության և հաստատուն  
ջերմային հոսքի ժամանակ տեղափոխումները կախված չեն ժամանակից,  
արևինքն ստացվում է սեղանաձևի խնդիրը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 23, вып. 5, 1959.
2. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений, том I. Изд. АН СССР, 1957.
3. Задоян М. А. Напряженное состояние цилиндрической трубы в упругой среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 9, № 9, 1956.
4. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Ползучесть составных цилиндрических труб. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 6, 1957.
5. У Жуй-фын. Неустановившаяся ползучесть составной цилиндрической трубы в упругой среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 3, 1959.
6. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
8. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1947.
9. Работнов Ю. И. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 12, вып. 1, 1948.
10. Симонян А. М. Экспериментальное исследование высокотемпературной ползучести и влияния ее на механические свойства горячекатанной стали. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.



АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. БАБАДЖАНИ

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ  
 С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

1. Рассматривается осесимметричное, стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости в круглой трубе радиуса  $a$  с пористыми стенками. Проницаемость вдоль трубы принимается постоянной, силами тяжести пренебрегаем. Направим ось  $Ox$  по оси трубы (фиг. 1). Скорость движения мала, так что за уравнения движения можно взять уравнения Навье-Стокса в цилиндрических координатах



Фиг. 1.

$$v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right),$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r} = 0.$$

Здесь  $v_x$ ,  $v_r$  — компоненты скорости по оси трубы и по перпендикулярному к ней направлению,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. Исходя из постановки задачи, на неизвестные функции ставим следующие граничные условия

при  $r = a$   $v_x = 0$ ,  $v_r = k(p - p_0)$ ,

при  $r = 0$   $\frac{\partial v_x}{\partial r} = 0$ ,  $v_r = 0$ , (1.2)

при  $x = 0$   $p_0 = p_n$ ,  $p_l = 0$

$$U_{en} = \frac{2}{a^2} \int_0^a r v_{0x} dr, \quad \int_0^a r v_{ix} dr = 0 \quad i \geq 1,$$

где  $p_0$  есть внешнее давление,  $p_n$  — давление в начальном сечении,

$k$  — коэффициент пористости стенки. Если  $p - p_b > 0$ , имеет место отсос, в случае  $p - p_b < 0$  — вдувание жидкости.

2. Задачу решаем методом малого параметра [1].

В качестве малого параметра принимаем отношение радиуса к характерной длине трубы.

Приведем систему уравнений (1.1) и граничные условия (1.2) к безразмерному виду, пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} x &= l\bar{x}, \quad r = a\bar{r}, \quad v_x = c\bar{v}_x, \quad v_r = c\bar{v}_r, \quad U_{cp} = c\bar{U}_{cp}, \\ p &= \frac{\mu c}{\sigma a} \bar{p}, \quad \nu = a c \bar{\nu}, \quad k = \frac{\sigma^2 a}{\mu} \bar{k}, \quad \sigma = \frac{a}{l}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\sigma$  — малый параметр.

Уравнение движения и граничные условия через безразмерные величины будут

$$\begin{aligned} \sigma \left( v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) &= -\nu \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} \right), \\ \sigma^3 \left( v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) &= -\nu \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \sigma^2 \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \sigma^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0;$$

при  $r=1 \quad v_x=0, \quad v_r=k(p-p_b),$

при  $r=0 \quad \frac{\partial v_x}{\partial r}=0, \quad v_r=0, \quad (2.3)$

при  $x=0 \quad p_0=p_w, \quad p_l=0, \quad U_{cp}=2 \int_0^1 r v_{0x} dr, \quad \int_0^1 r v_{lx} dr=0 \quad i \geq 1.$

Для удобства письма черточки сверху опущены.

Неизвестные функции ищем в виде степенного ряда по степеням малого параметра  $\sigma$ , т. е.

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \sigma v_{1x} + \sigma^2 v_{2x} + \dots, \\ v_r &= v_{0r} + \sigma v_{1r} + \sigma^2 v_{2r} + \dots, \\ p &= p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \dots. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя значения  $v_x$ ,  $v_r$  и  $p$  из (2.4) в систему уравнений (2.2) и в граничные условия (2.3), получим новую систему уравнений, из которой путем приравнивания коэффициентов с одинаковыми степенями  $\sigma$  можем решить задачу с желаемой точностью. Так, например, приравняв коэффициенты при нулевой степени  $\sigma$ , получим



$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{0r}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial v_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0r}}{\partial r} + \frac{v_{0r}}{r} = 0.$$

Соответствующие граничные условия будут

при  $r = 1$   $v_{0x} = 0$ ,  $v_{0r} = k(p_0 - p_b)$ ,

при  $r = 0$   $\frac{\partial v_{0x}}{\partial r} = 0$ ,  $v_{0r} = 0$ , (2.6)

при  $x = 0$   $p_0 = p_n$ ,  $U_{cp} = 2 \int_0^1 r v_{0x} dr$ .

Решая систему уравнений (2.5) и пользуясь граничными условиями (2.6), получим для  $v_{0x}$  и  $v_{0r}$  следующие значения:

$$v_{0x} = \frac{1}{4} \frac{\partial p_0}{\partial x} (r^2 - 1), \quad (2.7)$$

$$v_{0r} = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2} \left( r - \frac{r^3}{2} \right). \quad (2.8)$$

Из второго граничного условия системы (2.6) для  $p_0$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$k(p_0 - p_b) = \frac{1}{16} \frac{d^2 p_0}{dx^2}.$$

Решение этого уравнения будет

$$p_0 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} + p_b, \quad (2.9)$$

где  $\lambda^2 = 16k$ .

Из граничных условий (2.3) по переменной  $x$  можем определить постоянные интегрирования  $c_1$  и  $c_2$

$$c_1 = \frac{1}{2} (p_n - p_b) - \frac{4U_{cp}}{\lambda},$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (p_n - p_b) + \frac{4U_{cp}}{\lambda}.$$

тогда для  $p_0$  получим

$$p_0 = (p_n - p_b) \cosh \lambda x - \frac{8U_{cp}}{\lambda} \sinh \lambda x + p_b. \quad (2.10)$$

Подставляя значения  $p_0$  в выражения  $v_{0x}$  и  $v_{0r}$ , получим окончательно

$$v_{0x} = \frac{1}{4} [\lambda (p_n - p_b) \operatorname{sh} \lambda x - 8 U_{cp} \operatorname{ch} \lambda x] (r^2 - 1), \quad (2.11)$$

$$v_{0r} = \frac{\lambda}{8} [\lambda (p_n - p_b) \operatorname{ch} \lambda x - 8 U_{cp} \operatorname{sh} \lambda x] \left( r - \frac{r^2}{2} \right). \quad (2.12)$$

Для нахождения второго приближения искомых функций приравняем коэффициенты при первой степени  $\varepsilon$  в системе уравнений (2.2), при этом получим

$$v_{0r} \frac{\partial v_{0x}}{\partial r} + v_{0x} \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} = -v \frac{\partial p_1}{\partial x} + v \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial v_{1x}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{v_{1r}}{r} = 0.$$

Подставляя значение  $v_{0x}$  и  $v_{0r}$  в первое уравнение системы (2.13) и производя некоторые математические операции, относительно  $v_{1x}$  получим следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_{1x}}{\partial r} \right) = r \frac{\partial p_1}{\partial x} + [A_1 \operatorname{sh} 2\lambda x - A_2 \operatorname{ch} 2\lambda x] \left( \frac{r^2}{2} - r^2 + r \right), \quad (2.14)$$

где

$$A_1 = \frac{\lambda^2 (p_n - p_b)^2 + 64 U_{cp}^2}{32 v}, \quad A_2 = \frac{\lambda^2 (p_n - p_b) U_{cp}}{2 v}.$$

Интегрируя два раза уравнение (2.14) и определяя постоянные интегрирования, получим

$$v_{1x} = \frac{1}{4} \frac{\partial p_1}{\partial x} (r^2 - 1) + (A_1 \operatorname{sh} 2\lambda x - A_2 \operatorname{ch} 2\lambda x) \left( \frac{r^6}{288} - \frac{r^4}{4} - \frac{29}{144} \right). \quad (2.15)$$

Из третьего уравнения системы (2.13) получим значение

$$v_{1r} = \frac{1}{8} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} \left( r - \frac{r^2}{2} \right) - \lambda (A_1 \operatorname{ch} 2\lambda x - A_2 \operatorname{sh} 2\lambda x) \times$$

$$\times \left( \frac{r^7}{288} - \frac{r^5}{48} + \frac{r^3}{8} - \frac{29}{144} r \right). \quad (2.16)$$

Воспользовавшись условием  $v_{1r} = k p_1$  при  $r = 1$ , для  $p_1$  из (2.16) получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} - 16 k p_1 = -\frac{3\lambda}{2} (A_1 \operatorname{ch} 2\lambda x - A_2 \operatorname{sh} 2\lambda x),$$

решением которого будет



$$p_1 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} - \frac{A_1}{2\lambda} \operatorname{ch} 2\lambda x + \frac{A_2}{2\lambda} \operatorname{sh} 2\lambda x.$$

Определяя постоянные интегрирования и пользуясь граничными условиями (2.3), для  $p_1$  получим следующее значение

$$p_1 = \frac{U_{cp}^2}{\nu} \operatorname{ch} \lambda x - \frac{A_1}{2\lambda} \operatorname{ch} 2\lambda x + \frac{A_2}{2\lambda} \operatorname{sh} 2\lambda x. \quad (2.17)$$

Подставляя значение  $p_1$  в выражения  $v_{1x}$  и  $v_{1r}$ , получим соответственно

$$v_{1x} = \left( \frac{\lambda U_{cp}^2}{4\nu} \operatorname{sh} \lambda x - \frac{A_1}{4} \operatorname{sh} 2\lambda x + \frac{A_2}{4} \operatorname{ch} 2\lambda x \right) (r^2 - 1) + \\ + (A_1 \operatorname{sh} 2\lambda x - A_2 \operatorname{ch} 2\lambda x) \left( \frac{r^6}{72} - \frac{r^4}{16} + \frac{r^2}{4} - \frac{29}{144} \right). \quad (2.18)$$

$$v_{1r} = \left( \frac{\lambda^2 U_{cp}^2}{8\nu} \operatorname{ch} \lambda x - \frac{\lambda A_1}{4} \operatorname{ch} 2\lambda x + \frac{\lambda A_2}{4} \operatorname{sh} 2\lambda x \right) \left( r - \frac{r^3}{2} \right) - \\ - \lambda (A_1 \operatorname{ch} 2\lambda x - A_2 \operatorname{sh} 2\lambda x) \left( \frac{r^7}{288} - \frac{r^5}{48} + \frac{r^3}{8} - \frac{29}{144} r \right). \quad (2.19)$$

Третье приближение задачи найдем из следующей системы уравнений

$$v_{0r} \frac{\partial v_{1x}}{\partial r} + v_{1r} \frac{\partial v_{0x}}{\partial r} + v_{0x} \frac{\partial v_{1r}}{\partial x} + v_{1x} \frac{\partial v_{0r}}{\partial x} = \\ = -\nu \frac{\partial p_2}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_{2x}}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial^2 v_{0x}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial v_{2r}}{\partial r}, \\ \frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_{0r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{0x}}{\partial r} - \frac{v_{0r}}{r}, \\ \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + \frac{v_{2r}}{r} = 0. \quad (2.20)$$

Решения этой системы дифференциальных уравнений имеют довольно громоздкий вид, и поэтому в работе не приведены. Ограничиваясь вторым приближением задачи и переходя к размерным величинам, для неизвестных функций получим следующие значения

$$v_x(x, r) = (C_1 \operatorname{sh} \lambda_1 x - C_2 \operatorname{ch} \lambda_1 x - C_3 \operatorname{sh} 2\lambda_1 x + C_4 \operatorname{ch} 2\lambda_1 x) (\bar{r}^2 - 1) + \\ + \frac{1}{36} (C_2 \operatorname{sh} 2\lambda_1 x - C_4 \operatorname{ch} 2\lambda_1 x) (2\bar{r}^6 - 9\bar{r}^4 + 36\bar{r}^2 - 29), \quad (2.21)$$

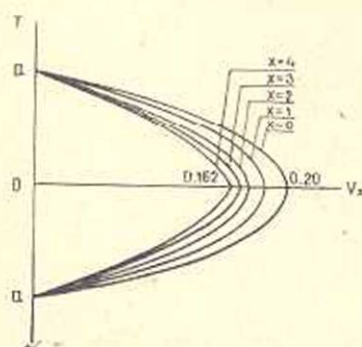
$$v_r(x, r) = (D_1 \operatorname{ch} \lambda_1 x - D_2 \operatorname{sh} \lambda_1 x - D_3 \operatorname{ch} 2\lambda_1 x + D_4 \operatorname{sh} 2\lambda_1 x) (2\bar{r} - \bar{r}^3) - \\ - \frac{1}{36} (D_3 \operatorname{ch} 2\lambda_1 x - D_4 \operatorname{sh} 2\lambda_1 x) (\bar{r}^7 - 6\bar{r}^5 + 36\bar{r}^3 - 58\bar{r}), \quad (2.22)$$

$$p(x) = E_1 \operatorname{ch} \lambda_1 x - E_2 \operatorname{sh} \lambda_1 x - E_3 \operatorname{ch} 2\lambda_1 x + E_4 \operatorname{sh} 2\lambda_1 x + p_b, \quad (2.23)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \sqrt{\frac{ka}{\mu}} (p_n - p_b) + \frac{U_{cp}^2}{\nu} \sqrt{ka\mu}, & C_2 &= 2U_{cp}, \\ C_3 &= \frac{ak \sqrt{\frac{ak}{\mu}} (p_n - p_b)^2 + 4aU_{cp}^2 \sqrt{\frac{\mu k}{a}}}{2\nu}, & C_4 &= \frac{2ka(p_n - p_b)U_{cp}}{\nu}, \\ D_1 &= k(p_n - p_b) + \frac{\mu k U_{cp}^2}{\nu}, & D_2 &= 2U_{cp} \sqrt{\frac{\mu k}{a}}, \\ D_3 &= \frac{k^2 a (p_n - p_b)^2 + 4\mu k U_{cp}}{\nu}, & D_4 &= 4 \sqrt{\frac{\mu k}{a}} \frac{ka(p_n - p_b)U_{cp}}{\nu}, \\ E_1 &= p_n - p_b + \frac{\mu U_{cp}^2}{\nu}, & E_2 &= \frac{2U_{cp}}{\sqrt{\frac{ak}{\mu}}}, \\ E_3 &= \frac{ak(p_n - p_b)^2 + 4U_{cp}^2 \mu}{4\nu}, & E_4 &= \sqrt{\frac{\mu k}{a}} \frac{a(p_n - p_b)U_{cp}}{\nu}, \\ \lambda_1 &= 4 \sqrt{\frac{\mu k}{a^3}}, & \bar{r} &= \frac{r}{a}. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим численный пример по следующим данным:



Фиг. 2.

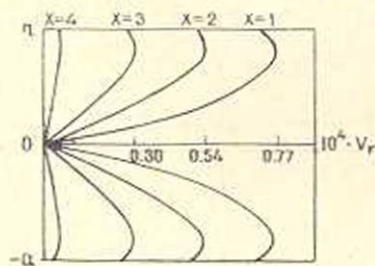
$$p_b = 0, \quad p_n = 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2},$$

$$k = 10^{-6} \frac{\text{М}}{\text{кг} \cdot \text{сек}}, \quad U_{cp} = 10^{-1} \frac{\text{М}}{\text{сек}},$$

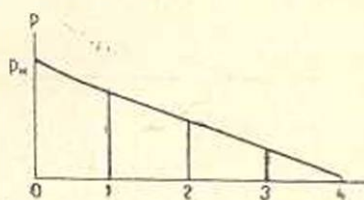
$$a = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad \nu = 3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2},$$

$$\gamma = 10^{-4} \frac{\text{М}^2}{\text{сек}}.$$

Функции  $v_x(x, r)$ ,  $v_r(x, r)$  и  $p(x)$ , вычисленные по формулам (2.21) (2.22) и (2.23), представлены на фиг. 2, 3 и 4.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Исходя из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Вдоль трубы (начиная с начального сечения) осевая ( $v_z$ ) и поперечная ( $v_r$ ) скорости уменьшаются.

2. В отличие от движения реальной жидкости в плоской трубе [2], в этом случае максимальная поперечная скорость ( $v_{r, \max}$ ) в каждом сечении трубы получается не на стенке, а на расстоянии

$\alpha \sqrt{\frac{2}{3}}$  от оси трубы.

3. Зависимость давления от независимой переменной  $r$  начинается с третьего приближения.

4. Нулевые приближения совпадают с результатами Лейбенсона Л. С. [3].

Ереванский государственный  
университет

Поступила 2 VI 1964

#### Գ. Հ. ԲԱԲԱՋՅԱՆԱՆ

ՄԱՅՈՒՅԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐՓՈՒՄԸ ԾԱՌՈՏԿԵՆ ՊԱՏԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ԽՈՂՈՎԱԿՈՒՄ

#### Ա մ փ ք օ փ ք մ

Հոդվածում քննարկվում է մածուցիկ անսեղմելի հեղուկի լամինար, ստացիոնար շարժումը դիսկային խողովակում, որի պատերը ծակոտիկն են: Խնդրի լուծումը բերվում է Նավյե—Ստոքսի հավասարումների ինտեգրմանը համապատասխան եզրային պայմանների առկայությամբ: Հավասարումների սխեմներ լուծվում է փոքր պարամետրի մեթոդով: Գտնված են որոշելի ֆունկցիաների արժեքները երկրորդ մոտավորությամբ:

Հաշված է թվային օրինակ:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Բաբաձյան Գ. Ա. и Назарян А. Г. Об одной задаче плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 1, 1959.
2. Բաբաձյան Գ. Ա. Течение вязкой жидкости в прямоугольном канале с пористыми стенками. Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 18, № 2, 1965.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, том II. Изд. АН СССР, М., 1953.

А. М. МХИТАРЯН, М. Г. ДАГЕСТАНИЯН, З. А. ЗОРЯН, Н. А. ПЕТРОСЯН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРАНСФОРМАЦИИ  
ВОЗДУШНОГО ПОТОКА НАД ГОРНЫМ ВОДОЕМОМ

Под трансформацией воздушного потока, обычно, понимают изменение его характеристик под влиянием подстилающей поверхности, как, например, изменение скорости движения, температуры и влажности воздушного потока при переходе от одной подстилающей поверхности к другой. Трансформация происходит из-за изменения гидродинамических характеристик подстилающей поверхности, например, шероховатости, а также ее теплофизических характеристик, в частности, когда имеет место температурная неоднородность в горизонтальном направлении. Указанные причины приводят к некоторому изменению коэффициента турбулентного перемешивания.

Таким образом, при переходе воздушного потока, например, с суши на водоем изменяется скорость его движения, температура и влажность, а также их вертикальное распределение в придном слое воздуха. Следует отметить, что эти изменения происходят одновременно и взаимно обусловлены. Поэтому при рассмотрении вопроса следует привлекать всю систему уравнений гидротермодинамики.

Вместе с тем совершенно ясно, что при решении ряда прикладных задач, например, расчета испарения с поверхности водоема, необходимо знать значения температуры и влажности воздуха, скорости ветра и других характеристик именно на водной поверхности в то время, как соответствующие измерения проводятся, как правило, на береговых гидрометеорологических станциях.

В работе [2] приведены наиболее часто употребляемые эмпирические формулы для расчета скорости ветра, влажности и температуры воздуха над водной поверхностью водоемов по береговым данным. В [14] в наиболее систематическом виде рассмотрены вопросы трансформации указанных элементов теоретически на основе решений упрощенных уравнений. Следует подчеркнуть, что результаты теоретических исследований с достаточной для практических целей точностью совпадают с результатами экспериментальных данных.

При переходе от поверхности суши к поверхности воды скорость ветра, как правило, увеличивается вследствие уменьшения трения о поверхность воды или уменьшения шероховатости. Наиболее резкие изменения происходят в довольно узкой прибрежной полосе. Температура и



влажность изменяются до определенного предельного значения, причем даже при очень длительном пребывании воздушного потока над водной поверхностью влажность воздуха не достигает насыщения. Все эти выводы хорошо известны и относятся к равнинным водоемам.

В работе [11], при расчетах испарения с поверхности оз. Севан, было показано, что для водоемов, находящихся в горных условиях, решение задачи значительно усложняется вследствие появления довольно развитой местной циркуляции. В теоретических работах по трансформации рассмотрены различные стороны вопроса [3—9, 14, 16], в [2, 8, 11, 15] приведены экспериментальные данные, которых вообще очень мало. Определенный интерес представляют работы [1, 7, 12, 13], особенно [3, 14]. Но во всех этих работах задача решается для равнинных водоемов. Ниже приводятся некоторые экспериментальные данные о трансформации воздушного потока над горным водоемом. Этот вопрос представляет не только некоторый теоретический интерес, но и имеет конкретное практическое значение.

### § 1. Некоторые данные о трансформации воздушного потока над озером Севан

В работе [11] для расчетов температуры и влажности воздуха над озером Севан был применен интегральный метод в то время, как для расчета скорости ветра пришлось районировать акваторию озера и применить различные связи для различных районов.

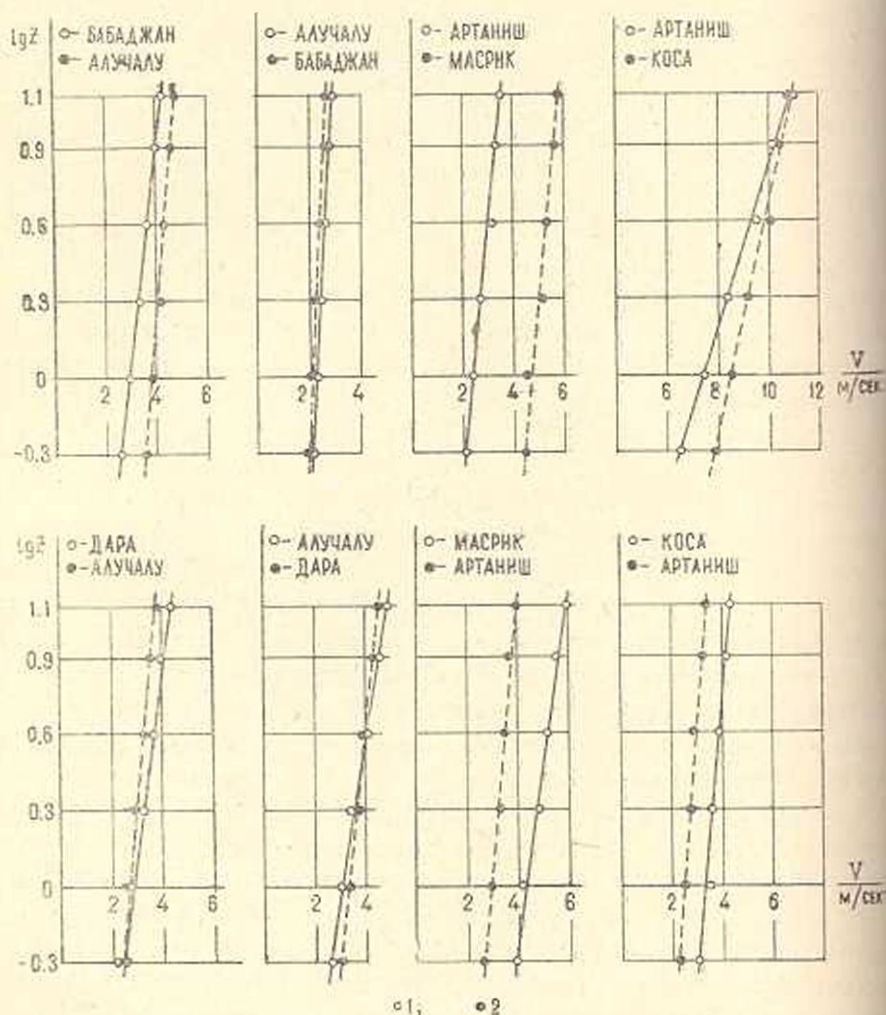
На основании большого количества непосредственных наблюдений было показано, что влажность воздуха над озером в среднем за год на 8% больше, чем на берегу. В отдельные месяцы эта разность достигает значительно больших величин. В зимних условиях происходит значительное повышение температуры воздуха под влиянием озера.

Что касается скорости ветра, то было показано, что непосредственные измерения на прибрежной открытой части озера в нескольких пунктах позволяют надежно определить эту величину для всего озера. Это утверждение основано на том, что, с одной стороны, сказывается влияние гор, приводящее к уменьшению скорости ветра по сравнению с измеряемой ее величиной на берегу вследствие растекания. С другой стороны, скорость ветра увеличивается вследствие уменьшения шероховатости. Очень часто эти два фактора в значительной степени компенсируют друг друга.

При исследованиях гидрометеорологического режима оз. Севан и его бассейна проводилось большое количество одновременных наблюдений за профилем ветра, влажностью и температурой воздуха. Часть материалов этих наблюдений позволяет осветить и трансформацию полей температуры, влажности и ветра.



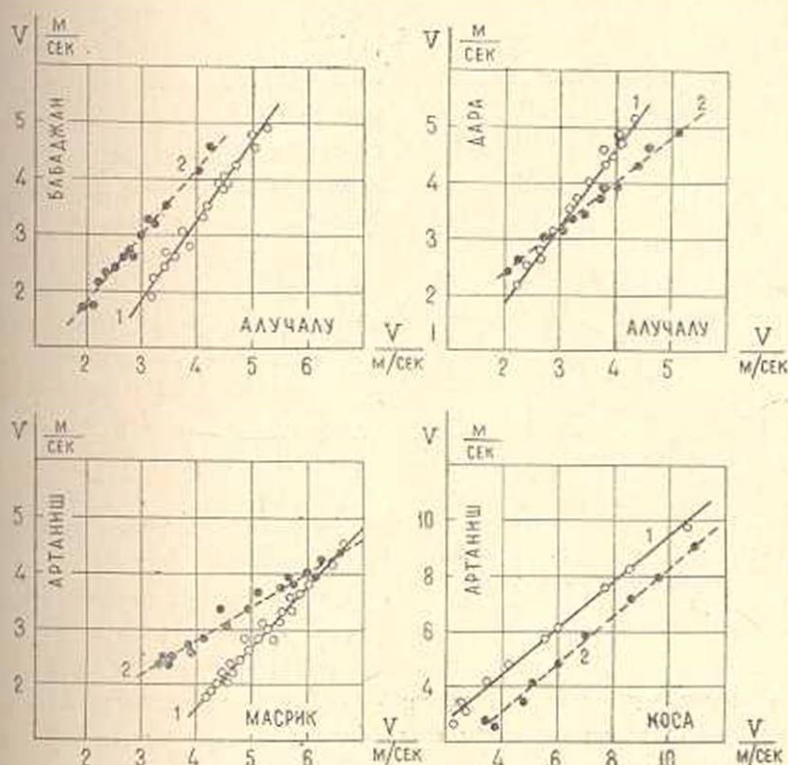
С этой целью из наблюдений 1957—1962 гг. выбирались те, при которых ветер имел одинаковое направление. Эти результаты представлены на фиг. 1 и 2.



Фиг. 1. Трансформация профиля скорости ветра. 1—профили до начала; 2—после трансформации.

Как видно из фиг. 2, ветер приходит с Алуцалу [10] в Бабаджан и с Алуцалу в Дара почти без изменений, при этом температура воздуха изменилась соответственно с 1,6 до 1,7° в зимнее время, и с 14,9 до 15,6° летом, то есть всего на 0,1 и 0,7°, а влажность воздуха с 4,5 до 5 мб и с 10,5 до 11,3 мб, соответственно. Относительная влажность при этом соответственно изменилась с 64 до 73% и с 63 до 66%. Ветер между этими же пунктами приходит с Бабаджана в Алуцалу значительно усиливаясь, когда с Дары в Алуцалу приходит, наоборот, несколько ослабляясь. При этом температура воздуха изменяется от -0,3 до 1° и от 13,5 до 13,9°, а влажность в первом случае остается почти без изменений.

(вследствие низких температур отсутствует испарение), удельная же влажность уменьшается, во втором случае происходит довольно большой рост влажности с 9,6 до 11,3 мб, а удельная влажность увеличивается с 62 до 73%.



Фиг. 2. Трансформация величины скорости ветра на высоте 2 м.  
1—исходный пункт на оси ординат; 2—исходный пункт на оси абсцисс.

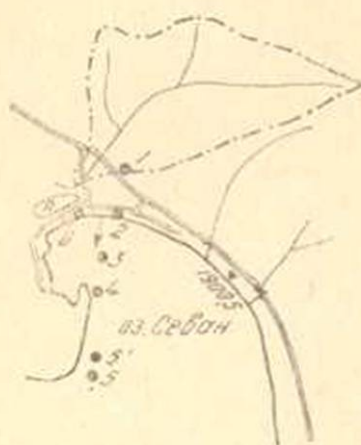
## § 2. О трансформации воздушного потока над Артанишской бухтой

Для исследования вопроса трансформации ветра при переходе от одной подстилающей поверхности (суша) к другой (вода), Артанишская бухта является наиболее благоприятным местом (см. фиг. 3). Во-первых, это объясняется тем, что в летнее время с гор к озеру дует ветер в устойчивом направлении, что дает возможность длительное время непрерывно вести наблюдения в нескольких пунктах по направлению ветра. Во-вторых, как видно из фиг. 3, очертание контура Артанишской бухты такое, что коса (точка 4) используется как озерный пункт, что дает возможность увеличить число створов. Поэтому в 1962—1964 гг. на Артанишской бухте были проведены экспериментальные работы по изучению трансформации ветра, температуры и влажности воздуха.

Одновременные наблюдения проводились либо в 5 пунктах, либо только в трех 2, 3, 4 или 2, 4, 5, причем на горе и на катере скорость



ветра, влажность и температура воздуха измерялись на высоте 2 м, в пунктах берег, плот и коса были установлены мачты, где измерялись скорости на 6 высотах 0,5; 1,0; 2,0; 4,0; 8,0 и 12,0 м (или 16 и 24 м на косе) и специальные мачты для психрометров, установленных на высотах 0,25; 0,50; 1,0 и 2,0 м.



Фиг. 3. Схема Арташешской бухты.  
1—гора; 2—берег; 3 и 5—плот; 4—коса;  
51—катер.

Таким образом, изучалось изменение профиля ветра в 12-метровом слое (на косе 24 м) на расстоянии 2 км, когда плот устанавливался в точке 3, в центре залива, и—4 км, когда плот был установлен в точке 5, на открытой акватории озера. Там же изучались профили температуры и влажности воздуха в двухметровом слое.

Наблюдения в 1962 г. проводились с 15 по 25 августа, в 1963 г.—с 25 по 31 августа, в 1964 г.—с 2 августа по 3 сентября. При наблюдениях 1962 и 1963 гг. с 2 по 8 августа и с 27 августа по 1 сентября 1964 г. плот был установлен в центре залива, с 9 по 26 августа плот был установлен в точке 5.

Полученные данные наблюдений отдельно для каждого часа обрабатывались и сводились в специальные таблицы. Затем эти данные были сгруппированы по интервалам скоростей для одного и того же направления ветра. Группировались данные по скорости ветра на высоте 2 м на плоту. Затем осредненные таким образом данные сводились в специальные таблицы и наносились на графики в полулогарифмической шкале. Эти результаты представлены на фиг. 4—7, и частично в табл. 1.

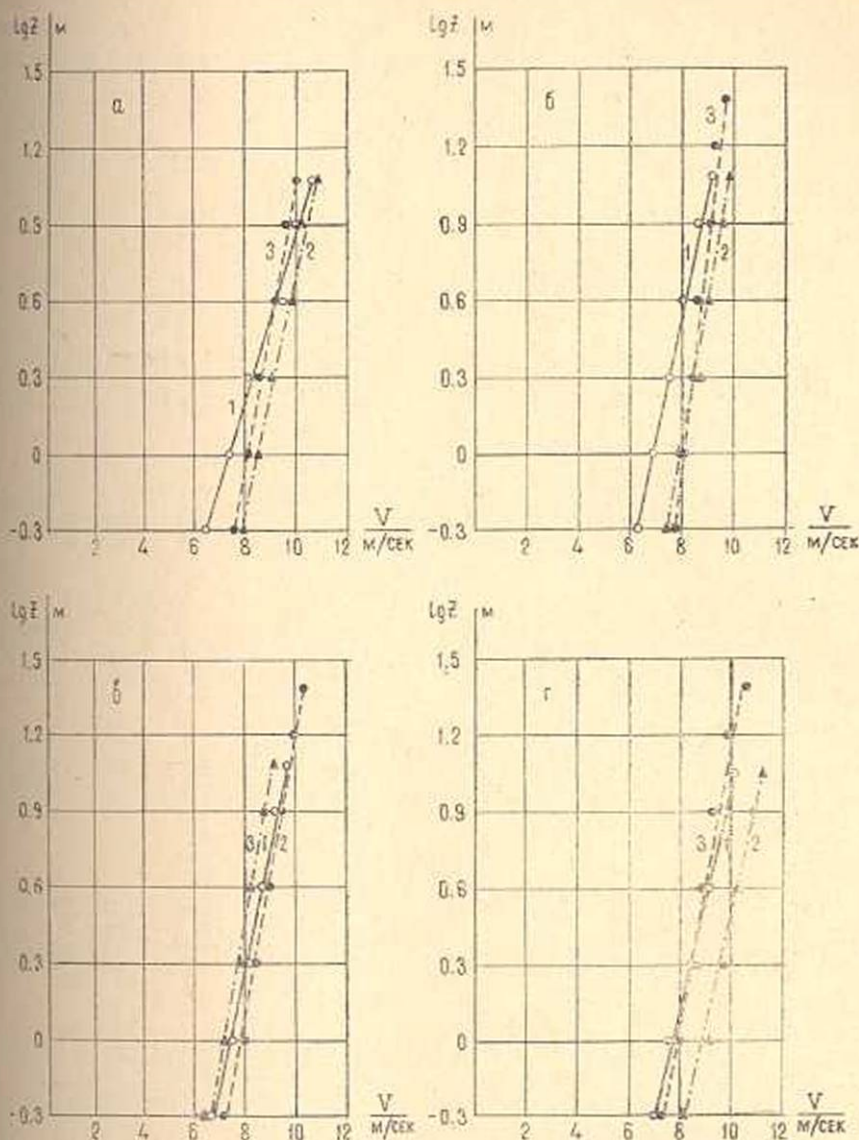
Точки хорошо ложатся на логарифмическую кривую

$$v = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0}. \quad (2.1)$$

Здесь  $v_*$ —динамическая скорость;  $\chi$ —постоянная,  $z_0$ —параметр шероховатости. В табл. 1 приведены  $-\lg z_0$  и величины  $\chi/2,3 v_*$ , являющиеся обратной величиной углового коэффициента прямых (2.1).

Далее, данные 1964 г. были сгруппированы и по интервалам разности температур вода—воздух ( $\Delta T$ ), а также по интервалам параметра устойчивости  $\Delta T/v_*^2$ , причем  $\Delta T = T_0 - T_*$ . Эти результаты здесь не приведены.

При соответствующей обработке, по интервалам ли скорости ветра, разности температур вода—воздух или по интервалам параметра устойчивости, одновременно группировались и данные о температуре и влажности воздуха и температуре поверхности воды.



Фиг. 4. Профили скорости ветра, а—1962 г.; б—1963 г.; в—1964 г.; плот в точке 5; г—1964 г.; 1—берег; 2—плот; 3—коса.

Следует отметить, что, во-первых, за указанные эти 41 час наблюдений в среднем  $\Delta T = 3^\circ \text{C}$ , а скорость ветра на плоту на высоте 2 м  $v_2 = 7,9 \text{ м/сек}$ , и, во-вторых, данные за те 13 часов, когда плот был в центре залива, приведены в среднем за этот срок.

### § 3. Краткий анализ полученных результатов

Как показывает фиг. 4, трансформация скорости ветра происходит непрерывно вдоль потока, когда ветер направлен с суши на водоем. При этом происходит некоторое увеличение скорости ветра и поворот профиля в сторону увеличения углового коэффициента пря-



Таблица 1

Трансформация профиля скорости ветра (1964 г., август).  
 Направление ветра с суши (ССВ).  
 (Плот на расстоянии 4 км)

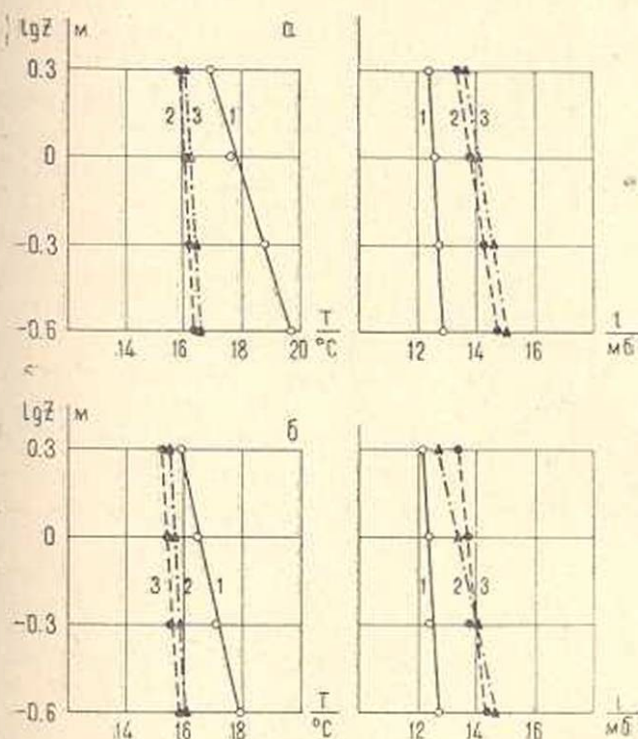
| Пункты                         | Число ча-<br>совых на-<br>блюдений | Скорость ветра в м/сек на высотах в м |      |      |      |      |      |      |     |      |       | $\frac{\chi}{2,3v_2}$ | —lg |
|--------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|------|------|------|------|------|------|-----|------|-------|-----------------------|-----|
|                                |                                    | 24                                    | 16   | 12   | 8    | 4    | 2    | 1    | 0,5 | r    |       |                       |     |
| v <sub>2</sub> < 5,9 м/сек     |                                    |                                       |      |      |      |      |      |      |     |      |       |                       |     |
| б                              | 8                                  | —                                     | —    | 6,0  | 5,8  | 5,5  | 5,2  | 4,7  | 4,1 | 0,98 | 0,715 | 3,0                   |     |
| к                              | 8                                  | 5,7                                   | 5,5  | —    | 5,2  | 5,0  | 4,8  | 4,8  | 4,3 | 0,98 | 1,28  | 5,8                   |     |
| п                              | 8                                  | —                                     | —    | 4,2  | 4,1  | 3,7  | 3,6  | 3,5  | 3,2 | 0,99 | 1,40  | 4,7                   |     |
| 6 - v <sub>2</sub> < 7,9 м/сек |                                    |                                       |      |      |      |      |      |      |     |      |       |                       |     |
| б                              | 8                                  | —                                     | —    | 9,5  | 9,1  | 8,4  | 8,0  | 7,4  | 6,6 | 1,00 | 0,493 | 3,0                   |     |
| к                              | 8                                  | 9,3                                   | 9,0  | —    | 8,5  | 8,2  | 7,7  | 7,2  | 6,4 | 0,99 | 0,60  | 4,2                   |     |
| п                              | 8                                  | —                                     | —    | 7,8  | 7,5  | 7,2  | 6,9  | 6,4  | 5,8 | 0,99 | 0,72  | 4,3                   |     |
| 8 - v <sub>2</sub> < 9,9 м/сек |                                    |                                       |      |      |      |      |      |      |     |      |       |                       |     |
| б                              | 16                                 | —                                     | —    | 10,4 | 9,9  | 9,2  | 8,7  | 8,0  | 7,0 | 0,99 | 0,418 | 3,2                   |     |
| к                              | 16                                 | 11,4                                  | 10,9 | —    | 10,3 | 9,7  | 9,2  | 8,6  | 7,6 | 0,99 | 0,470 | 3,9                   |     |
| п                              | 16                                 | —                                     | —    | 10,1 | 9,7  | 9,2  | 8,8  | 8,1  | 7,3 | 1,00 | 0,51  | 4,0                   |     |
| v <sub>2</sub> > 10 м/сек      |                                    |                                       |      |      |      |      |      |      |     |      |       |                       |     |
| б                              | 9                                  | —                                     | —    | 12,1 | 11,5 | 10,7 | 10,0 | 9,3  | 8,3 | 1,00 | 0,375 | 3,4                   |     |
| к                              | 9                                  | 13,1                                  | 13,2 | —    | 12,3 | 11,7 | 11,2 | 10,1 | 9,2 | 1,00 | 0,88  | 3,8                   |     |
| п                              | 9                                  | —                                     | —    | 12,8 | 12,1 | 11,3 | 10,8 | 9,9  | 8,8 | 1,00 | 0,36  | 3,5                   |     |
| средняя                        |                                    |                                       |      |      |      |      |      |      |     |      |       |                       |     |
| б                              | 41                                 | —                                     | —    | 9,7  | 9,3  | 8,7  | 8,2  | 7,5  | 6,6 | 1,00 | 0,46  | 3,1                   |     |
| к                              | 41                                 | 10,7                                  | 10,0 | —    | 9,3  | 8,9  | 8,5  | 8,0  | 7,1 | 1,00 | 0,54  | 4,2                   |     |
| п                              | 41                                 | —                                     | —    | 9,1  | 8,8  | 8,2  | 7,9  | 7,3  | 6,5 | 1,00 | 0,55  | 3,1                   |     |

\*б\*—берег; \*к\*—коса; \*п\*—плот.

мых. Это видно из фиг. 4, где  $a$  соответствует данным за 1962 г.,  $b$ —1963,  $в$ —1964—в среднем за 41 час, когда плот установлен на открытой акватории озера и  $г$ —1964 г. в среднем за 13 часов, когда плот в центре залива. Здесь хорошо видны и рост скорости вдоль потока, и уменьшение параметра шероховатости и рост величины  $\chi/r$ .

Таблица 1 показывает, что только для двух из трех створов (плот, коса, 1962—63 гг., или коса и плот, 1964 г.) параметр шероховатости увеличивается с ростом скорости. В среднем за все время наблюдений на косе  $\lg z_0 = -5,8$  при скорости ветра  $v_2 = 5$  м/сек закономерно изменяется до  $\lg z_0 = -3,84$  при  $v_2 = 10$  м/сек. Эти результаты представлены на фиг. 6— $a$  для всех пунктов. На плот  $\lg z_0 = -4,8$  при  $v_2 = 5$  м/сек и  $\lg z_0 = -4,0$  при  $v_2 = 10$  м/сек. При этом на берегу по данным 1962—1964 гг. параметр шероховатости не проявляет заметных изменений и составляет  $\lg z_0 = -2,3$  по данным 1962 г. и  $-3,1$  по данным 1964 г. В среднем при изменении скорости ветра на высоте 2 м от 4 до 12 м/сек имеем  $\lg z_0 = -3$ . Следует по-

черкнуть, что логарифмический профиль ветра оправдывается и по данным береговых наблюдений, хотя имела место сильная неустойчивость. Разность температур почва—воздух достигла десятков градусов.



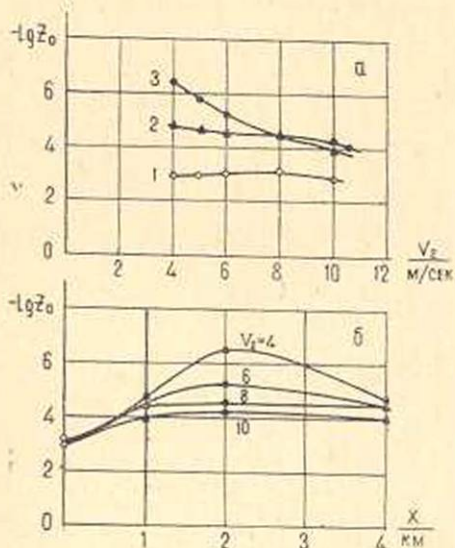
Фиг. 5. Профили температуры и влажности. а—плот в точке 5; б—плот в точка 3 (фиг. 3). 1—берег; 2—плот (б), коса (а); 3—плот (а), коса (б).

На фиг. 6—б показана трансформация величины  $-\lg z_0$  при движении потока от берега к косе, от берега до плота по данным для различных интервалов скорости ветра на высоте 2 м, т. е. при  $v_2=4$ ; 6; 8 и 10 м/сек. Как показывает этот график, при движении потока от берега к косе происходит уменьшение параметра шероховатости, причем это особенно заметно для малых и средних скоростей. При сильных ветрах  $z_0$  особенно не трансформируется, даже на расстоянии 4 км, так как, очевидно, мало время пребывания потока над волной поверхностью указанной ширины. Некоторые нарушения закономерности вносит коса, которая по разному реагирует на различные скорости ветра.

Анализ полученных результатов показывает, что во всех случаях, когда воздушный поток при сильной неустойчивости (большие разности температур почва—воздух,  $\Delta T_n = T_n - T_0$ ) переходит на волную поверхность при слабой неустойчивости, вследствие больших разностей  $T_n - T_0$ , происходит значительное увеличение скорости



ветра, более значительный рост влажности и значительное уменьшение температуры воздуха, причем, если воздух был много холоднее



Фиг. 6. Зависимость параметра шероховатости от скорости ветра (а) и расстояния от берега (б). 1—берег; 2—плот; 3—коса.

в центре залива, представлены на фиг. 7. В среднем получается следующая картина. Скорость ветра на расстоянии 1 км увеличивается на 13%, 2 км—8% и 4 км—уменьшается на несколько процентов. Следует отметить, что точка на кривой 2 фиг. 7 с абсциссой 3,5 км соответствующая данным на катере, вызывает сомнение, так как катер дрейфовал и оказывался на защищенном участке, что приводило к занижению скорости.

Таблица

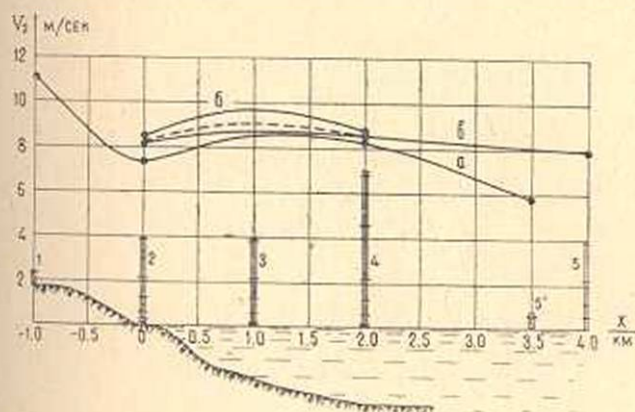
Трансформация скорости ветра, температуры и влажности воздуха на высоте 2 м  
Направление ветра с суши

| x, км | 1962 г. 33 часа |       | 1963 г. 20 часов |       | 1964 г., 41 час |       |       |       |       |       |
|-------|-----------------|-------|------------------|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $v_z$           | $K_v$ | $v_z$            | $K_v$ | $v_z$           | $T_z$ | $e_z$ | $K_v$ | $K_T$ | $K_e$ |
| 0     | 8,2             | 1,0   | 7,6              | 1,0   | 8,2             | 16,9  | 12,4  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 1     | 9,0             | 1,10  | 8,7              | 1,15  | —               | —     | —     | —     | —     | —     |
| 2     | 8,6             | 1,05  | 8,5              | 1,12  | 8,9             | 15,8  | 13,4  | 1,09  | 0,94  | 1,0   |
| 4     | —               | —     | —                | —     | 7,9             | 15,8  | 13,5  | 0,96  | 0,94  | 1,0   |

| x, км | 1964 г., 13 часов |       |       |       |       |       | 1964 г., 2 часа |       |       |       |       |       |
|-------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|       | $v_z$             | $T_z$ | $e_z$ | $K_v$ | $K_T$ | $K_e$ | $v_z$           | $T_z$ | $e_z$ | $K_v$ | $K_T$ | $K_e$ |
| 0     | 8,4               | 16,3  | 12,2  | 1,0   | 1,0   | 1,0   | 7,8             | 13,1  | 12,1  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 1     | 9,6               | 15,5  | 12,7  | 1,14  | 0,95  | 1,04  | 8,0             | 13,6  | 12,9  | 1,03  | 1,04  | 1,0   |
| 2     | 8,6               | 14,7  | 13,4  | 1,02  | 0,90  | 1,10  | 7,1             | 13,6  | 13,4  | 0,91  | 1,04  | 1,1   |

Фиг. 7 показывает, что если скорость ветра по данным 1963 г. на горе была равна 11,1 м/сек, то далее было: 7,4—на берегу, 8,5—на плоту (3), 8,3—на косе (4) и 6,8—на открытой части озера Севан (5), на катере. Такая же картина между берегом и косой получена в 1964 г. за те 13 часов, когда плот был установлен в точке 3 (фиг. 7—б). В случае, когда плот был установлен в точке 5 (фиг. 7—в), в точке 3 наблюдения не велись, поэтому часть кривой между точками 2 и 3 изображена пунктиром.



Фиг. 7. Трансформация величины скорости ветра на высоте 2 м вдоль воздушного потока по данным за 1963 (а), 1964 (б), когда плот в центре залива (точка 3) и 1964 гг. (в), когда плот в точке 5.

Подробные данные по интервалам скорости ветра и разности температур вода—воздух приведены в табл. 3.

С целью исключения влияния берега проводились специальные наблюдения в вечерние часы, когда разность температур почва ( $T_n$ )—вода ( $T_0$ ) была мала. В среднем за эти сроки было  $T_n - T_0 = 2,5^\circ$  на берегу и  $1,6^\circ$ —на косе. На водной поверхности было  $T_0 - T_2 = 3,6$ , в то же время  $T_n - T_0 = -1,0$  на берегу и  $-2^\circ$  на косе.

В этом случае ветер почти не трансформировался, температура воздуха увеличивалась незначительно и лишь рост влажности находился в обычных пределах. Этот анализ дает возможность до некоторой степени объяснить результат, полученный выше, согласно которому температура воздуха к косе сильно уменьшается.

Как известно, в случае, когда  $\Delta T/v^2$ —малая величина, профили скорости ветра, температуры и влажности воздуха хорошо описываются логарифмическим законом

$$v = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (3.1)$$

$$T_0 - T = \frac{P}{c_p \rho \chi v_*} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (3.2)$$



Трансформация ветра, температуры и влажности вдоль потока по интервалам скорости ветра и разности температур вода-воздух (август, 1964 г.), направление ветра с суши

| км                   | $v_2 < 5,9$ |       |       |       |       |                    | $6 < v_2 < 7,9$ |       |       |       |       |       |
|----------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                      | $v_2$       | $T_2$ | $e_2$ | $K_v$ | $K_T$ | $K_e$              | $v_2$           | $T_2$ | $e_2$ | $K_v$ | $K_T$ | $K_e$ |
| 0                    | 5,2         | 15,6  | 10,1  | 1,0   | 1,0   | 1,0                | 8,0             | 18,7  | 13,1  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 2                    | 4,8         | 14,5  | 10,4  | 0,92  | 0,93  | 1,03               | 7,7             | 17,3  | 14,4  | 0,96  | 0,92  | 1,0   |
| 4                    | 3,6         | 14,7  | 10,6  | 0,69  | 0,94  | 1,05               | 6,9             | 17,5  | 14,6  | 0,86  | 0,94  | 1,0   |
| $8 < v_2 < 9,9$      |             |       |       |       |       | $v_2 \geq 10$      |                 |       |       |       |       |       |
| 0                    | 8,7         | 16,7  | 12,3  | 1,0   | 1,0   | 1,0                | 10,0            | 17,0  | 13,8  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 2                    | 9,2         | 15,7  | 13,5  | 1,07  | 0,94  | 1,10               | 11,2            | 15,8  | 15,0  | 1,12  | 0,93  | 1,0   |
| 4                    | 8,8         | 16,0  | 13,5  | 1,01  | 0,96  | 1,10               | 10,8            | 15,8  | 15,1  | 1,08  | 0,93  | 1,0   |
| $\Delta T < 0$       |             |       |       |       |       | $0 < \Delta T < 2$ |                 |       |       |       |       |       |
| 0                    | 8,4         | 21,2  | 14,7  | 1,0   | 1,0   | 1,0                | 8,5             | 19,4  | 13,9  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 2                    | 8,7         | 19,4  | 15,7  | 1,04  | 0,92  | 1,07               | 8,3             | 18,0  | 15,1  | 0,98  | 0,93  | 1,0   |
| 4                    | 8,5         | 19,4  | 16,1  | 1,01  | 0,92  | 1,07               | 7,7             | 18,1  | 15,5  | 0,91  | 0,93  | 1,0   |
| $2,1 < \Delta T < 4$ |             |       |       |       |       | $\Delta T > 4,1$   |                 |       |       |       |       |       |
| 0                    | 9,1         | 16,6  | 12,8  | 1,0   | 1,0   | 1,0                | 7,1             | 15,2  | 10,6  | 1,0   | 1,0   | 1,0   |
| 2                    | 9,9         | 15,7  | 13,9  | 1,08  | 0,95  | 1,09               | 7,2             | 14,0  | 11,4  | 1,01  | 0,92  | 1,0   |
| 4                    | 9,1         | 15,9  | 13,9  | 1,0   | 0,96  | 1,09               | 6,5             | 14,3  | 11,4  | 0,92  | 0,94  | 1,0   |

$$q_0 - q = \frac{E}{\rho \chi v_*} \ln \frac{z}{z_0} \quad (3.3)$$

Отметим, что здесь  $v = 0$  при  $z = z_0$ ;  $T = T_0$  при  $z = z_0$  и  $q = q_0$  при  $z = z_0$ . Если считать, что измеренные значения  $T_0$  и определенные по этой температуре  $q_0$  совпадают с их значениями на высоте соответственно  $z'_0$  и  $z''_0$ , то по данным на плоту за 41 час, 1964 г. получаем  $\lg z_0 = -3,95$  в поле ветра;  $\lg z'_0 = -4,34$  — в поле температуры;  $\lg z''_0 = -4,55$  в поле влажности, при этом плот установлен в точке 5. Соответственно для косы получено  $\lg z_0 = -4,22$ ;  $\lg z'_0 = -5,29$ ;  $\lg z''_0 = -6,0$ .

Для указанных выше вечерних сроков, когда разность  $T_2 - T_1$  мала и плот — в центре залива, получено  $\lg z_0 = -4,6$ ;  $\lg z'_0 = -3,6$ ;  $\lg z''_0 = -3,6$  для плота и соответственно  $-4,2$ ;  $-5,0$  и  $-3,7$  для косы. Эти данные показывают, что величины  $\lg z_0$ ,  $\lg z'_0$  и  $\lg z''_0$  не очень сильно отличаются между собой, а если отбросить еще данные на косе, где берег все же оказывает некоторое влияние, то для плота получается примерно  $\lg z_0 \approx \lg z'_0 \approx \lg z''_0 = -4,0$ .

В некоторых случаях, в зависимости от разностей  $\Delta T_n = T_n - T_2$  или  $\Delta T_0 = T_0 - T_2$  или  $T_n - T_0$ , параметры шероховатости в полях ветра, температуры и влажности сильно отличаются и тогда соотношения (3.1)–(3.3) дают возможность оценить  $v_*$  и  $\chi$ . Действительно, если вспомнить формулы для определения влаготеплообмена

$$E = \epsilon D (q_0 - q_2), \quad (3.4)$$

$$P = c_p D (T_0 - T_2), \quad (3.5)$$

и подставляя  $E$  и  $P$  в (3.2) и (3.3), легко можно получить

$$\left( \frac{D}{\chi v_*} \right)_r \lg \frac{z_2}{z_0} = \left( \frac{D}{\chi v_*} \right)_q \lg \frac{z_2}{z_0}. \quad (3.6)$$

Вспомня теперь, что по определению  $D = \left( \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{k} \right)^{-1}$  и подставляя

сюда  $k = v_* \chi z$ , легко можно из (3.1) и (3.6) при  $z = z_2$  (поскольку мы убедились, что профили ветра, температуры и влажности почти во всех случаях описываются логарифмическим законом, но с различными параметрами  $\lg z_0$  и  $\frac{v_*}{\chi}$ ) получить

$$\frac{v_*}{\chi} = a_1; \quad v_* \chi = a_2, \quad (3.7)$$

откуда можно определить  $v_*$  и  $\chi$ .

В частности, сравнивая профиль ветра при  $\Delta T/v^2 = 0$ , при котором  $\lg z_0 = -3.77$  и  $(v_*/\chi)_0 = 2.04$ , с профилем при  $\Delta T/v^2 = 0.06$ , при котором  $\lg z_0 = -4.1$ ,  $v_*/\chi = 1.85$  можно по формуле

$$(v_*/\chi)_0 = (v_*/\chi) (1 - \varepsilon) \quad (3.8)$$

получить для этого случая  $\varepsilon = -0.10$ . Отметим, что при этом скорость ветра на высоте 2 м в первом случае равна 8.5 во втором — 8.4 м/сек.

Если же сравнивать первый случай со случаями  $\Delta T = 1.2^\circ$  и  $\Delta T = 4.5^\circ$ , получим соответственно  $\varepsilon = -0.18$  и  $\varepsilon = -0.29$ .

Таблицы и графики показывают, что на первом километре эффект трансформации (увеличение скорости вследствие уменьшения трения) преобладает, а дальше уже начинает сказываться влияние расширения струи, и рост скорости ветра замедляется или даже скорость ветра начинает убывать по мере удаления от берега. Интересно отметить, что трансформация ветра почти целиком заканчивается на первом километре, а изменения температуры и влажности воздуха в придном слое в основном завершаются уже у косы, т. е. на расстоянии 2 км от берега.



Таким образом, для объяснения особенностей процесса трансформации над горным водоемом, по крайней мере, необходимо учитывать, кроме обычных факторов, характерных и для равнинного водоема, а именно, горизонтального температурного градиента, шероховатости и степени устойчивости, еще и дополнительные факторы, а именно: эффекты обтекания горы, растекания струи вдоль и поперек потока и влияние вертикальных токов, которые при наличии гор могут быть значительно больше по своей величине, чем при их отсутствии. Тогда результирующий процесс будет зависеть от того, при каких условиях и какой из указанных факторов будет превалировать.

Из всего изложенного выше наглядно видно каким образом трансформируются профили скорости ветра, температуры и влажности воздуха и как происходит уменьшение параметра шероховатости при переходе воздушного потока с суши на водоем.

Приведенные выше графики дают, конечно, суммарную картину, являющуюся результатом одновременных действия и трения (шероховатости) и растекания и расширения струи (эффект диффузора) и горно-долинной циркуляции, и бризов и других факторов, в том числе устойчивости стратификации, которая сильно сказывается на турбулентном обмене.

Институт водных проблем и гидротехники  
МВХ Армянской ССР

Поступила 9-III 1966

Ա. Մ. ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ, Մ. Գ. ԴԱԳԵՍՏԱՆՅԱՆ, Զ. Ա. ՋՈՐՅԱՆ, Ն. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ԼՅՈՆԱՅԻՆ ԶՐԱՄՐԱՐԻ ՎՐԱ ՕԳԱՅԻՆ ՀԱՍԱՆՔԻ ՏՐԱՆՏՈՐՄԱՏԻԱՅԻ  
ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ա Փ Ա Վ

Հոգիածում բերված են օդային հոսանքի տրանսֆորմացիայի փորձնական հետազոտությունների արդյունքները լեռնային լճի վրա, որտեղից հետազոտությունները կատարվել են Սևանա լճի Արտանիշի ծոցում: Դժ. 3-ում ներկայացված է նշված ծոցի հատակագիծը, որի վրա ցույց են տրված դիտակետերը: Միաժամանակ հետազոտվել են քամու արագության և օդային հոսանքի չեղմաստիճանի ու խոնավության փոփոխությունները 2-ից մինչև 24 բարձրություն ունեցող ջրամերձ շերտում, երբ օդային հոսանքը ցամաքի ուղղությամբ է ջրի մակերևույթը և փոփոխվում է վերջինիս ազդեցության տակ: Հետազոտությունների արդյունքները համապատասխան մշակումից հետո ներկայացված են դժադրեր 4—7-ի վրա: Օդային հոսանքի տրանսֆորմացիայի կատարվում է անընդհատ՝ հոսանքի ուղղությամբ: Ստացված են ջրային մակերևույթի անրողինամիկական խորզուրորդությունների պարամետրի բնորոշ արժեքները, ինչպես քամու, այնպես էլ չեղմաստիճանի ու խոնավության դրսևորում:

Հետազոտությունների արդյունքները ցույց են տալիս, որ լեռնային լճի պայմաններում լրացուցիչ պեղար է հաշվի առնել տեղանքի շրջհոսման, ուղղակի արագությունների և այլ, լեռնային պայմաններին հատուկ, հանգամանքների ազդեցությունը ուսումնասիրվող պրոցեսի վրա, հաշվի առնելով նաև լեռնաշղթաներ հարիզոնական փոփոխությունների, աուրբուլենտ փոխանակման և խորզուրդրությունների ազդեցությունը, որոնք հատուկ են նաև հարթավայրային ջրամբարների համար:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бачурина А. А. Трансформация воздуха в приземном слое атмосферы. Труды ЦИП, вып. 10, 1961.
2. Браславский А. П., Викулина Э. А. Нормы испарения с поверхности водохранилищ. Гидрометеониздат, Л., 1954.
3. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33, 1952.
4. Дмитриев А. А., Соколова И. Н. Схема оценки изменений скорости и профиля ветра при переходе с суши на море. Труды Морск. Гидрофиз. института, 4, 1954.
5. Добрышман Е. М. Трансформация воздушных масс. Метеорология и гидрология, № 2, 1949.
6. Дороницын А. А. Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения. Труды ЦИП, вып. 21, 1950.
7. Зайцев А. С. Трансформация поля ветра при изменении турбулентного обмена. Труды ГГО, вып. 95, 1963.
8. Константинов А. Р. Испарение в природе. Гимиз, Л., 1963.
9. Лайхтман Д. Л. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.
10. Мхитарян А. М. Испарение с поверхности оз. Севан. „Результаты комплексных исследований по севанской проблеме“, т. 1, Ереван, 1961.
11. Мхитарян А. М. Водный и тепловой балансы водоемов и некоторые вопросы гидродинамики пограничного слоя атмосферы. Автореферат диссертации, Л., 1963.
12. Петросян Н. А. К вопросу о трансформации поля ветра над водной поверхностью при наличии вертикальных токов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, № 2, 1965.
13. Тараканов Г. Г. К вопросу об изменении скорости ветра при переходе с суши на водную поверхность. Труды ЛГМИ, вып. 8, 1958.
14. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеониздат, Л., 1963.
15. Шпах И. С. Изменение метеорологических элементов при натекании воздушного потока на водоем. Сб. работ Цимлянск. ГМО, вып. 1, 1958.
16. Яковлева Н. И. Трансформация воздуха над водоемами. Труды ГГО, вып. 41, 1953.



Г. А. ВАРТАПЕТЯН, А. Г. ХУДАВЕРДЯН

## ГАММА-ГАММА УГЛОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ В ЯДРЕ $Cs^{131}$

### Введение

В последнее время были сделаны попытки в рамках модели Давыдова описать энергетические уровни и их свойства в нечетных слабодетормированных ядрах [1].

В частности, такие расчеты были сделаны для  $_{55}Cs^{131}$  [2]. При описании природы возбужденных уровней ядра  $Cs^{131}$  возникают сомнения относительно спина возбужденного состояния  $124\text{ Кэв}$  ( $1/2^+$  или  $7/2^+$ ) [2], [3], [4].

Установление факта существования угловой корреляции каскада  $495-124\text{ Кэв}$  однозначно дает ответ на вопрос, спин уровня  $124\text{ Кэв}$   $1/2$  или нет, это вытекает из (2) (см. ниже).

В настоящей работе было произведено измерение угловой корреляции каскада  $495-124\text{ Кэв}$  в  $Cs^{131}$ .

### Аппаратура

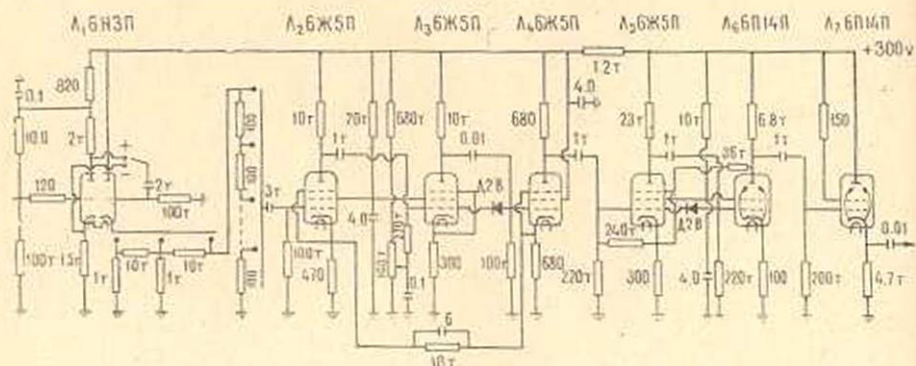
Аппаратура состоит из двух сцинтилляционных  $\gamma$ -спектрометров, включенных в схему быстро-медленных совпадений (фиг. 1) с разрешающим временем  $2\tau =$  от  $5 \cdot 10^{-9}$  до  $5 \cdot 10^{-8}$  сек (см. ниже).

$\gamma$ -кванты детектируются цилиндрическими кристаллами NaJ(Т) размерами  $30 \times 30$  мм. Кристаллы монтировались на фотоэлектронных умножителях ФЭУ-36. С анодов ФЭУ импульсы, возникшие от световых вспышек в кристаллах, после задержки и формирования подаются на схему быстрых совпадений. На фиг. 2 представлена схема быстрых совпадений  $L_4$  вместе с формирующим устройством ( $L_1, L_2, L_3$ ). На лампах  $L_1$  и  $L_2$  происходит усиление, а на лампе  $L_3$  при помощи коротко-замкнутого кабеля РК-50 длиной 2,5 м—формирование импульса. На схему совпадений ( $L_4$ ) подаются импульсы величиной около 1,5 в. Со схемы быстрых совпадений импульсы, после усиления на усилительной ячейке ( $L_5, L_6, L_7$ ) и интегральной дискриминации при помощи  $L_8$ , подаются на схему пропускания (разрешающая способность схемы быстрых совпадений зависит также и от уровня дискриминации [5]).



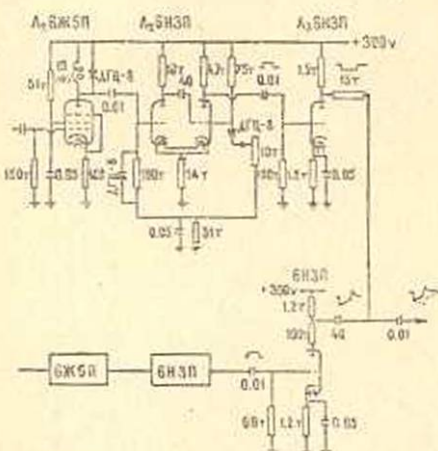


одновибратора  $L_2$ , собранного на лампе 6НЗП и фазоинвертора  $L_1$  (одна половина 6НЗП).



Фиг. 3. Схема усилителя.

Благодаря тому, что при помощи описываемой аппаратуры можно снимать задержанные  $\gamma\gamma$ -совпадения (фиг. 1), представляется возможным установить, как со временем меняется корреляция каскадов, у которых период полураспада промежуточного состояния  $T_{1/2} > 3 \times 10^{-9}$  сек.



Фиг. 4. Часть схемы амплитудного анализатора.

### Методика измерений

Функция углового распределения 2-х последовательных  $\gamma$ -квантов  $W(\theta)$  записывается в виде

$$W(\theta) = \sum_{\nu} A_{\nu} P_{\nu}(\cos \theta) \quad (1)$$

$$(\nu = 0, 2, 4, \dots),$$

где  $P_{\nu}(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра [8], [9], [10].

Если обозначим исследуемый каскад через  $J_1(L_1 L_1 + 1) J(L_2 L_2 + 1) J_2$  (практически примеси мультиполей порядка  $L + 2$  и выше не наблюдаются), а через  $\tilde{\delta}^2$  — отношение интенсивности  $L + 1$  — полного излучения к интенсивности  $L$  — полного излучения, то величина  $A_{\nu}$  в (1) будет зависеть от  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $L_1$ ,  $L_1 + 1$ ,  $L_2$ ,  $L_2 + 1$ ,  $\tilde{\delta}_1$ ,  $\tilde{\delta}_2$ , а число коэффициентов  $\nu_{\max}$  будет

$$\nu_{\max} \leq \min [2J_1, 2(L_1 + 1), 2(L_2 + 1)]. \quad (2)$$

Связь между функцией корреляции и экспериментально измеренным числом совпадений  $N_{\text{сов}}(\theta)$  в зависимости от угла  $\theta$ , образованного осями 2-х счетчиков, включенных в совпадение, имеет вид

$$N_{\text{сов}}(\theta) = N_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 W'(\theta) + N_{\text{са}}, \quad (3)$$

где  $N_0$  — активность источника,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — эффективности счетчиков,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — их телесные углы,  $W''(\theta)$  — экспериментальная функция корреляции, а  $N_{\text{св}}$  — число случайных совпадений. Тогда число истинных совпадений  $N_{\text{ист}}(\theta) = N_{\text{св}}$  пропорционально экспериментально измеренной функции корреляции  $W''(\theta)$ . Для исключения малой децентровки и изменений одиночных загрузок в каналах, число истинных совпадений делится на счета в каналах  $N_1$  и  $N_2$ :

$$N'(\theta) = \frac{N_{\text{св}}(\theta) - N_{\text{св}}}{N_1 N_2} = \frac{N_0 \varepsilon_1 \omega_1 \varepsilon_2 \omega_2}{N_1 N_2} W''(\theta). \quad (4)$$

Далее по методу Роуза [11] находим коэффициенты  $A_i$ . На эти коэффициенты должны быть введены поправки для получения теоретических коэффициентов  $A_i$  в функции корреляции.

### Поправки

а) *Поправки на конечное угловое разрешение детекторов.* Поправочный фактор на конечное угловое разрешение для  $A_i$  будет равен произведению  $Q_i$  для каждого детектора. Связь между  $A_i$  и  $A_i$  следующая:

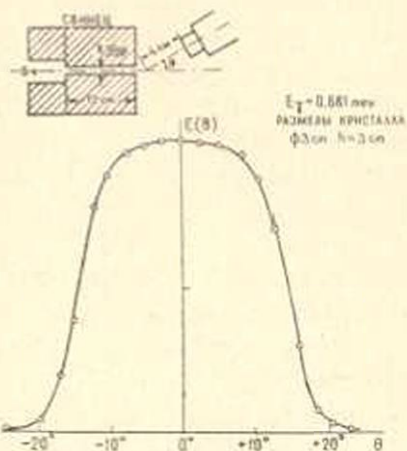
$$A_i = \frac{A_i^*}{Q_i^{(1)} Q_i^{(2)}}. \quad (5)$$

Поправки  $Q_i$  находились по методу Лаусона и Фрауенфельдера [12]. Измерялись кривые углового разрешения  $\varepsilon(\theta)$  для обоих кристаллов при различных энергиях  $\gamma$ -квантов (1,33, 1,17, 0,661, 0,280, 0,134 MeV). Пучок  $\gamma$ -квантов диаметром 1,5 мм коллимировался свинцовым коллиматором толщиной 120 мм (фиг. 5). После численного интегрирования выражения

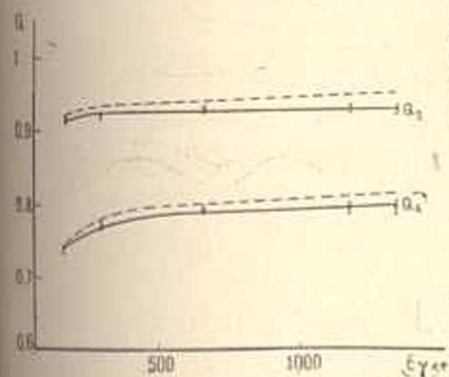
$$J_i = \int_0^{\theta_{\text{max}}} P_i(\cos \theta) \varepsilon(\theta) \cdot |\sin \theta| d\theta \quad (6)$$

находим поправочные коэффициенты  $Q_i = \frac{J_i}{J_0}$ , как функция от энергии  $\gamma$ -квантов приведена на фиг. 6.

б) *Поправки на размеры источника.* В настоящей работе



Фиг. 5. Кривая углового разрешения детектора и геометрия установки.



Фиг. 6. Поправочные коэффициенты на конечное угловое разрешение счетчиков  $Q_1$  и  $Q_2$  в зависимости от энергии  $\gamma$ -квантов. Пунктирная кривая вычислена теоретически [11].



использовались источники диаметром 1,5 мм и длиной 5 мм, которые помещались на оси вращения детекторов на расстоянии 40 мм от них. Расчеты показывают, что этой поправкой можно пренебречь.

в) *Рассеяние  $\gamma$ -квантов.* При нахождении функции корреляции надо также учесть и комптоновское рассеяние  $\gamma$ -квантов как внутри источника, так и между кристаллами. В нашем случае рассеянные фотоны не регистрировались аппаратурой, так как в обоих каналах брались фотопики от  $\gamma$ -квантов.

### Испытание установки

Для проверки установки было произведено измерение угловой корреляции каскада 1,71—1,33 MeV в  $Ni^{60}$ , которая известна [13], [14], [15]. Измерения проводились через каждые  $10^\circ$  от  $90^\circ$  до  $180^\circ$ . Вычисляя коэффициенты  $A_2$  и  $A_4$  по вышеупомянутой методике, получили:  $A_2 = 0,110 \pm 0,009$  и  $A_4 = 0,018 \pm 0,015$ . Теоретические расчеты дают для  $A_2$  и  $A_4$  значения  $A_2 = 0,1020$ ,  $A_4 = 0,0091$ .

### Измерение

Измерялась  $\gamma\gamma$ -угловая корреляция каскада 495—124 KeV в  $Cs^{131}$ , образованного после распада изотопа  $Ba^{131}$ . При этом схема быстрого медленных совпадений бралась с разрешающим временем  $2\tau = 1,8 \times 10^{-8}$  сек.

Для осуществления совпадений одноканальными дифференциальными анализаторами выделялись фотопики от  $\gamma$ -квантов 495 и 124 KeV. Получились следующие коэффициенты для функции угловой корреляции  $W(\theta)$ :

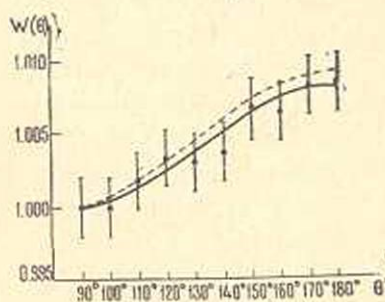
$$A_2 = 0,0054 \pm 0,0014;$$

$$A_4 = -0,0003 \pm 0,002.$$

После поправок находим

$$A_2 = 0,0063 \pm 0,0015,$$

$$A_4 = -0,0005 \pm 0,003.$$



Фиг. 7. Корреляция направлений каскада 495—124 KeV в ядре  $Cs^{131}$ . Точки экспериментальные. Сплошная кривая—экспериментальная функция  $W(\theta)$ . Пунктирная кривая—функция  $W(\theta)$  после поправки на конечное угловое разрешение счетчиков.

Результаты измерений приведены на фиг. 7. При этом получалась анизотропия

$$A = \frac{W(180^\circ) - W(90^\circ)}{W(90^\circ)} = 0,009 \pm 0,003.$$

Из схемы уровней  $Cs^{131}$ , приведенной в [4], [16], видно, что функция угловой корреляции может быть измерена неверно [3] из-за наличия других каскадов 480—133 KeV и 918—124 KeV и 907—133 KeV. Но после того, как известны все  $\gamma$ -линии

переходы в этих каскадах и их интенсивности, а также времена жизни уровней 124 и 133  $KeV$  [4], [6], и благодаря тому, что установка дает возможность измерить корреляцию с введением задержки, можно установить, каково влияние вышеупомянутых каскадов на измеренный результат. Измерялась анизотропия с введением задержки  $1,4 \times 10^{-8}$  сек в канал регистрирующей  $\gamma$ -кванты 495  $KeV$ .

Получили  $A = 0,01 \pm 0,0045$ .

Как видно, анизотропия с введением задержки в пределах ошибок не нарушается. Расчеты на основе различных времен жизни уровней 124 и 133  $KeV$  и интенсивностей переходов [4] показывают, что анизотропия происходит из-за корреляции  $\gamma$ -квантов 495 и 124  $KeV$ .

Сам факт существования угловой корреляции каскада 495—124  $KeV$  исключает спин  $1/2$  для уровня 124  $KeV$ . Принимая, что каскад 495—124  $KeV$  имеет следующую последовательность  $3/2_1(E2) 1/2_1(M1 + E2) 3/2_1$ , находим отношение примеси  $E2$  к  $M1$  в  $\gamma$ -переходе 124  $KeV$ ,  $\delta = 0,178 \pm 0,003$ . Отсюда следует, что переход 124  $KeV$  имеет вид  $M1 (96,9 \pm 0,5)\% + E2 (3,1 \pm 0,5)\%$ , что дает ускорение  $E2$  порядка 20.

Обсуждение результатов дается в работе [16].

В заключение авторы выражают благодарность А. И. Алиханяну за интерес к работе.

Физический институт

ГКАЭ г. Ереван

Поступила 10 IV 1964

Բ. Ա. ՎԱՐԿԱՓԵՏՅԱՆ, Ա. Գ. ԽՈՒՐԱԴԵՐԳՅԱՆ

ԳԱՄՄԱ-ԳԱՄՄԱ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿՈՌԵԼՅԱՅԻՆ ՄԻՋՈՒԿՈՒՄ  $Cs^{131}$

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Աշխատության մեջ նկարագրված են  $\gamma\gamma$ -անկյունային կոռելյացիայի չափման արարատորան և մեթոդիկան: Ստացված է  $Cs^{131}$  միջուկի 495—124  $KeV$  կապի շրջանում շրջանային անկյունային բաշխումը:  $W(\theta) = 1 + (0,0063 \pm 0,0015) P_2(\cos \theta) - 0,0005 \pm 0,003) P_4(\cos \theta)$ :

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Давидов А. С. Энергетические уровни несферических нечетных атомных ядер. Известия АН СССР, серия физ., 27, 1963, 851. Коллективные возбуждения и деформируемость атомных ядер. Известия АН СССР, серия физ., 28, № 10, 1964, 1578.
2. Person L. W., Rasmussen J. O. Rotational energies for the asymmetric rotor model for odd-mass nuclei. Nucl. Phys., 36, 1962, 666.
3. Kelly W. H. and Horen D. J. Conversion electron measurements in the decay of 115 d.  $Ba^{131}$ . Nucl. Phys., 47, 1963, 464.



4. Вартапетян Г. А., Худавердян А. Г., Гарибян Т. А. Коллективные эффекты в ядре  $Cs^{131}$ . ЖЭТФ, 45, 1963, 1720.
5. Вартапетян Г. А. Докторская диссертация.
6. Савин А. А. Электронные приборы в ядерной физике. Физматгиз, М., 1961.
7. Jonstone C. W. A new puls-analyzer design. Nucleonics, 1, 1953, 36.
8. Фгаузинфельдер Г. Бетта и гамма-спектроскопия, под ред. К. Зигбана. Физгиз, М., 1959.
9. Дейч М. и Кофед-хенсен О. Экспериментальная ядерная физика, под ред. Сегра, т. III. ИЛ, М., 1961.
10. Доминов А. Э. Гамма-лучи, под ред. А. А. Савва. АН СССР, М.—Л., 1961.
11. Rose M. E. The analysis of angular correlation and angular distribution data. Phys. Rev., 91 1953, 610.
12. Lawson I. S. Jr. and Fraunfelder. The correction for finite angular resolution in directional correlation measurements. Phys. Rev., 91, 1953, 649.
13. Klem D. E. and McGowan F. K. Gamma-gamma angular correlation in  $Ni^{60}$ . Phys. Rev., 91, 1953, 616.
14. Colombo S., Rossi A., Scotti A. A re-measurement of the  $Ni^{60}$  gamma-gamma directional correlation function. Nuovo Cim., 2, 1955, 471.
15. Garg I. B. and Gale N. H.  $Ni^{60}$  ( $\gamma$ - $\gamma$ ) angular correlation. Nuovo Cim., 16, 1959, 1014.
16. Вартапетян Г. А., Гарибян Т. А., Демехина Н. А., Мурадян Э. Г., Худавердян А. Г. О свойствах уровней и излучений нечетных ядер  $Cs^{131}$  и  $Cs^{137}$ . Известия АН СССР, серия физ., 28, № 10, 1964, 1657.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

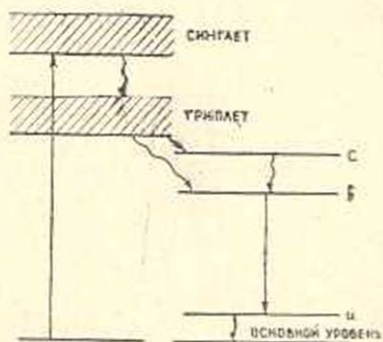
М. Е. МОВСЕСЯН, В. А. ГЕВОРКЯН, Ф. П. САФАРЯН, П. Г. МЕЖЛУМЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ  
 АЦЕТИЛАЦЕТОНАТОВ САМАРИЯ, ЕВРОПИЯ И ТЕРБИЯ

Исследование люминесценции органических комплексов редкоземельных элементов представляет собой большой интерес.

Поглощение и люминесценция ионов редкоземельных элементов обусловлены переходами между уровнями электронной оболочки  $4f$ , и так как эта оболочка хорошо защищена от внешнего взаимодействия заполненной оболочкой  $5s^2 5p^6$ , то люминесценция имеет линейчатую структуру. Такая же люминесценция наблюдается и у органических комплексов редкоземельных элементов [1—10].

В отличие от активированных кристаллов и растворов неорганических солей редких земель, у которых поглощение и люминесценция обусловлены ионами редкоземельных элементов, в органических комплексах поглощение и люминесценция обусловлены разными частями молекул. Люминесценция органических комплексов редкоземельных элементов связана с миграцией поглощенной энергии. Электроны органических комплексов поглощают энергию и совершают переходы с основного уровня на верхний синглетный уровень, затем безизлучения спускаются на триплетный уровень, откуда и совершается миграция энергии к ионам редкоземельных элементов (фиг. 1).

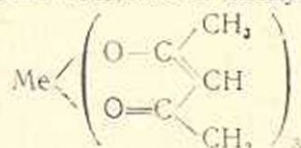


Этим и обуславливается большой квантовый выход люминесценции. Наше исследование посвящено люминесценции ацетилацетонатов.

Фиг. 1. Схема энергетических уровней комплексов. а, в, с—энергетические уровни редкоземельного иона.

Экспериментальная часть

Ацетилацетон с некоторыми металлами и редкоземельными элементами дает комплексные соединения следующего строения





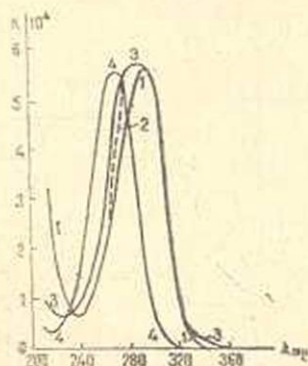
Такие комплексы синтезированы некоторыми авторами [8–10]. В нашей лаборатории синтезированы комплексы с Sm, Eu, Tb по методике, описанной в работе [8]. Для полученных соединений точки плавления после первой перекристаллизации на 1,5–2 градуса были ниже, чем данные, приведенные в литературе. После вторичной перекристаллизации точки плавления комплексов совпадали с литературными данными.

Поглощение растворов комплексов редкоземельных элементов исследовалось с помощью кварцевого спектрофотометра СФ–4. Люминесценция и в некоторых случаях (в видимой области спектра) поглощение исследовались на спектрографе ИСП–73 методом фотографической фотометрии. Охлаждение образцов производилось парами азота. Температура измерялась термопарой.

### Полученные результаты и их обсуждение

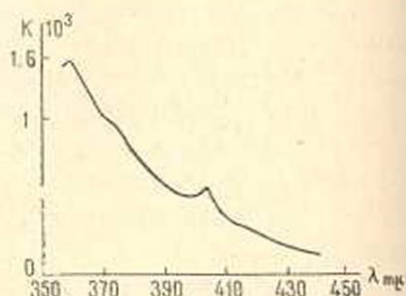
#### а) Спектры поглощения.

Полученные спектры поглощения растворов Sm, Eu, Tb ацетилацетонатов в этиловом спирте приведены на фиг. 2. Как видно из этих спектров, существуют две области поглощения. Максимумы поглощения исследованных ацетилацетонатов совпадают друг с другом и немного смещены в сторону длинных длин волн по сравнению с поглощением раствора чистого ацетилацетона. Совпадение максимумов поглощения ацетилацетонатов разных редкоземельных элементов еще раз показывает, что это поглощение связано с органической частью комплекса.



Фиг. 2. Зависимость коэффициента поглощения растворов ацетилацетонатов в этиловом спирте от длины волны.

1. Sm—ацетилацетонат 0,1 %.
2. Eu—ацетилацетонат 0,19 %.
3. Tb—ацетилацетонат 0,1 %.
4. ацетилацетон 0,1 %.



Фиг. 3. Зависимость коэффициента поглощения четырехпроцентного раствора Sm—ацетилацетоната в этиловом спирте от длины волны.

Поглощение самих редкоземельных ионов слабое и обычно не наблюдается на фоне интенсивного поглощения органической части комплекса. При больших концентрациях растворов оно наблюдается. Например, на фиг. 3 приведен спектр четырехпроцентного раствора.

Sm-ацетилацетоната в этиловом спирте. На этом спектре хорошо виден максимум при  $4030\text{Å}$ . Такой же максимум поглощения дают растворы неорганических солей Sm [7] и стекла активированные Sm [5-6].

Линейчатое поглощение, относящееся к редкоземельному иону, наблюдалось также для Eu-ацетилацетоната. Максимумы поглощения в этом случае были на длинах волн  $4660\text{Å}$ ,  $4651\text{Å}$  и  $4638\text{Å}$ . Эти максимумы не смещаются при температуре жидкого азота.

#### б) Спектры люминесценции.

Люминесценция Sm-ацетилацетоната достаточно сильная, особенно интенсивна линия  $6453\text{Å}$ . При низкой температуре линии спектра люминесценции Sm-ацетилацетоната усиливаются и несколько сужаются.

В табл. 1 приведены длины волн линий и относительные интенсивности спектра люминесценции Sm-ацетилацетоната при температуре  $-185^\circ\text{C}$ .

Для Eu-ацетилацетоната при комнатной температуре наблюдается только несколько линий люминесценции. Но при температуре  $-185^\circ\text{C}$  появляются новые линии, кроме того усиливаются и сужаются прежние линии. В табл. 2 приведены данные спектра люминесценции Eu-ацетилацетоната при температуре  $-185^\circ\text{C}$ .

Таблица 1

 $-185^\circ\text{C}$ 

| $\lambda(\text{Å})$ | $\nu(\text{см}^{-1})$ | I  | $\lambda(\text{Å})$ | $\nu(\text{см}^{-1})$ | I   |
|---------------------|-----------------------|----|---------------------|-----------------------|-----|
| 6120                | 16339                 | 20 | 6534                | 15305                 | 2,5 |
| 6182                | 16176                 | 20 | 6649                | 15203                 | 8   |
| 6196                | 16139                 | 15 | 7003                | 14279                 | 5   |
| 6453                | 15497                 | 25 | 7033                | 14219                 | 5   |
| 6506                | 15370                 | 25 |                     |                       |     |

Таблица 2

 $-185^\circ\text{C}$ 

| $\lambda(\text{Å})$ | $\nu(\text{см}^{-1})$ | I  | $\lambda(\text{Å})$ | $\nu(\text{см}^{-1})$ | I |
|---------------------|-----------------------|----|---------------------|-----------------------|---|
|                     |                       |    | 6301                | 15868                 | 1 |
| 5924                | 16880                 | 1  | 6326                | 15808                 | 1 |
| 5959                | 16779                 | 1  | 6495                | 15396                 | 1 |
| 6115                | 16433                 | 25 |                     |                       |   |
| 6137                | 16294                 | 20 | 6546                | 15277                 | 1 |
| 6164                | 16223                 | 15 | 6880                | 14534                 | 3 |
| 6196                | 16137                 | 10 | 6962                | 14364                 | 3 |
| 6253                | 15992                 | 5  | 7023                | 14239                 | 3 |

Особый интерес представляет спектр люминесценции Tb-ацетилацетоната. Люминесценция Tb-ацетилацетоната интенсивная при комнатной температуре, особенно интенсивны линии  $5420\text{Å}$ ,  $5446\text{Å}$  и  $5472\text{Å}$ . В этой области заключена почти вся энергия люминесценции. Люминесценция для этого комплекса особенно усиливается при повышении температуры, наблюдаются смещения линий и перераспределение интенсивностей люминесценции. В табл. 3 и 4 приведены данные Tb-ацетилацетоната как при комнатной температуре, так и при температуре  $-185^\circ\text{C}$ .

Для всех исследованных комплексов, кроме люминесценции редкоземельных элементов, наблюдается люминесценция органической части в синей области спектра.



Таблица 3

20 °C

| $\lambda$ (Å°) | $\nu$ (см <sup>-1</sup> ) | 1  | $\lambda$ (Å°) | $\nu$ (см <sup>-1</sup> ) | 1   |
|----------------|---------------------------|----|----------------|---------------------------|-----|
| 4867           | 20275                     | 1  | 6170           | 16204                     | 0,5 |
| 4880           | 20492                     | 1  | 6191           | 16152                     | 0,5 |
| 5420           | 18450                     | 18 | 6227           | 16059                     | 0,5 |
| 5446           | 18362                     | 25 | 6243           | 16018                     | 0,5 |
| 5472           | 18275                     | 17 | 6250           | 16000                     | 0,5 |
| 5817           | 17196                     | 3  | 6449           | 15506                     | 0,5 |
| 5845           | 17126                     | 2  | 6523           | 15330                     | 0,5 |
| 5884           | 16995                     | 1  | 6551           | 15265                     | 0,5 |
| 5914           | 16909                     | 1  | 6593           | 15167                     | 0,5 |
| 5934           | 16852                     | 1  |                |                           |     |

Таблица 4

-185 °C

| $\lambda$ (Å°) | $\nu$ (см <sup>-1</sup> ) | 1   | $\lambda$ (Å°) | $\nu$ (см <sup>-1</sup> ) | 1   |
|----------------|---------------------------|-----|----------------|---------------------------|-----|
| 4867           | 20752                     | 3   | 6131           | 16310                     | 0,5 |
| 4880           | 20492                     | 3   | 6145           | 16273                     | 0,5 |
| 4899           | 20412                     | 3   | 6175           | 16194                     | 1   |
| 4907           | 20379                     | 3   | 6191           | 16152                     | 1   |
| 4916           | 20342                     | 3   | 6226           | 16060                     | 1   |
| 5420           | 18450                     | 19  | 6243           | 16018                     | 1   |
| 5447           | 18361                     | 17  | 6249           | 15999                     | 0,5 |
| 5473           | 18274                     | 25  | 6449           | 15506                     | 0,5 |
| 5817           | 17191                     | 3   | 6492           | 15436                     | 0,5 |
| 5845           | 17126                     | 3   | 6525           | 15326                     | 0,5 |
| 5884           | 16995                     | 1   | 6552           | 15264                     | 0,5 |
| 5914           | 16909                     | 1   | 6588           | 15179                     | 0,5 |
| 5934           | 16852                     | 0,5 | 6588           | 15179                     | 0,5 |

Авторы выражают глубокую благодарность кандидату химических наук С. А. Варданяну за консультации по синтезу комплексов.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 21 XII 1964

Մ. Ե. ՄՈՎՍԵՅԱՆ, Վ. Ա. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ, Ֆ. Պ. ՍԱՖԱՐՅԱՆ,  
Պ. Գ. ՄԵԺԴՄՅԱՆ

ՍԱՄԱՐԻՈՒՄԻ, ԵԼԻՈՊԻՈՒՄԻ ԵՎ ՏԵՐԲԻՈՒՄԻ ԱՅԵՏԻՎ-ԱՅԵՏՈՆԱՏՆԵՐԻ  
ԼՅՈՒՄԻՆԵՍԵՆՑԻԱՅԻ ՌԻՍՈՒՄԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Սինթեզված և ուսումնասիրված է Sm—, Eu—, Tb—ացետիլ-ացետո-  
նատների կոմպլեքսների սենյակի և —185 °C ջերմաստիճաններում:  
Չափվել են կոմպլեքսների գծերի ալիքի երկարությունը, հարաբերական  
ինտենսիտետները և կլանումը: Որոշ մեծադրական կոմպլեքսների մոտ,  
բացի կոմպլեքսի օրգանական մասի կլանումից, նկատվել է նաև հալվողությամբ  
հոդերին բնորոշ գծային կլանում:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Севченко А. Н., Морочевский А. Г. Исследование люминесценции внутренних комплексных соединений самария и европия. Известия АН СССР, серия физ., 15, № 5, 628, 1951.
2. Кузнецова В. В. Влияние температуры на спектральнолюминесцентные свойства комплексных соединений редких земель. ДАН БССР, 5, № 5, 1961.
3. Севченко А. Н., Трофимов А. К. Исследование фотолюминесценции бензоилдетионатов европия и самария. ЖЭТФ, 21, вып. 2, 1961, 220.
4. Кузнецова В. В., Севченко А. Н. Труды XIII Всесоюзного совещания по спектроскопии, июль 1960 г.
5. Карапетян Г. О. Люминесценция стекол с редкоземельными активаторами. Известия АН СССР, серия физ., 25, № 6, 1963.

6. Вейнберг Т. И. Люминесценция стекол, содержащих медь, свинец и самарий. Известия АН СССР, серия физ., 13, № 1, 1949, 203.
7. Зайдель А. Н., Ларинов Я. И. Спектроскопия растворов солей редких земель. УФН, 21, вып. 2, 1939, 211.
8. Ануфриев Б. Б., Зайдель А. Н. О характере спектров поглощения бензоилацетоната самария ЖЭТФ, 24, вып. 1, 1953, 114.
9. Серебрянников В. В. Химия редкоземельных элементов, т. I. Изд. Томского университета. Томск, 1959.
10. Whan R. E. and Crosby G. A. Luminescence Studies of Rare Earth Complexes Benzoilacetate and Dibenzoylmethide Chelates. Journ. of Molecular Spectroscopy, vol. 8, п. 4, April 1962.



Л. Л. ДЕКАБРУН, А. Р. МКРТЧЯН

## УСИЛЕНИЕ СИГНАЛОВ ОШИБКИ В ПРЕЦЕЗИОННЫХ СТАБИЛИЗАТОРАХ ТОКА

Рассмотрены параметры усилителя сигналов ошибки, определяющие точность системы стабилизации электрического тока. Установлены ориентировочные величины этих параметров и наиболее точных применяемых на практике системах—системе стабилизации тока электромагнитов радиоспектрометров. Подвергнута анализу система преобразования сигнала со входным трансформатором. Рассмотрен принцип построения безтрансформаторной системы преобразования сигнала и методы защиты от возможных помех. Описан контактный преобразователь с магнитно-изолированной контактной системой. Приведены основная и вспомогательная схемы  $RC$ —усилителя, а также схемы фазовой подстройки и синхронного детектора.

Точная стабилизация сила тока необходима во многих экспериментальных методиках, в частности—в радиоспектроскопической аппаратуре. Если относительные изменения стабилизируемого тока не должны превышать  $10^{-5} \div 10^{-6}$  (что является обычным требованием к системам стабилизации тока электромагнитов спектрометров ядерного магнитного резонанса), то при разработке системы стабилизации должен учитываться ряд факторов, влияние которых на работу более грубых систем мало существенно. Системы точной стабилизации тока являются в настоящее время предметом интенсивных, теоретических и экспериментальных исследований.

Одним из узлов системы стабилизации тока, в значительной степени определяющим ее точность, является усилитель сигнала ошибки. При разработке спектрометра ядерного магнитного резонанса для исследования кристаллов [1, 2] авторы пришли к определенным выводам относительно принципов построения таких усилителей. В настоящей работе излагаются эти выводы и приводятся варианты решения наиболее важных схемных и конструктивных вопросов.

*а. Основные характеристики усилителя.* Основными характеристиками усилителя сигнала ошибки, являются.

1. Полоса пропускания.
2. Коэффициент усиления.
3. Чувствительность (или приведенный уровень шумов).
1. Полоса пропускания должна, очевидно, начинаться с

$$(f_{\text{нпжн}})_{\text{гр.}} = 0,$$

поскольку система стабилизации должна подавлять действие сколь угодно медленного возмущения. Верхняя граничная частота полосы пропускания определяется обычно динамической характеристикой рабочей нагрузки стабилизатора. Если нагрузкой стабилизатора является электромагнит, то  $(f_n)_{гр.}$  может составлять несколько десятых и даже сотых долей периода в секунду.

2. Коэффициент усиления определяется из необходимой жесткости стабилизации тока. Стабилизатор тока, независимо от того, что является его нагрузкой, представляет собой усилитель с токовым выходом, охваченный отрицательной обратной связью по току [3, 4].

Его структурная схема представлена на фиг. 1. Стабилизируемый ток  $I_n$  протекает через контрольное сопротивление  $R_0$ . Падение напряжения на контрольном сопротивлении  $I_n R_0$  сравнивается с опорным напряжением  $U_{оп}$ . Получающаяся в результате сравнения разность напряжений



Фиг. 1. Принципиальная схема стабилизаторов тока.

$$U_{вх} = U_{оп} - I_n R_0 \quad (2)$$

является сигналом ошибки системы стабилизации.

Эта разность усиливается. Это усиление приводит к изменению величины  $I_n$  и соответственно к уменьшению  $U_{вх}$ .

Усилитель напряжения и усилитель тока, показаны на структурной схеме (фиг. 1) отдельно для отражения функционального деления электронной (или полупроводниковой) схемы стабилизатора. Оба эти узла по их совместному действию являются усилителем с результирующей крутизной

$$S = \frac{dI_n}{dU_{вх}} = kS_1. \quad (3)$$

Стационарное состояние системы стабилизации описывается следующим уравнением

$$(I_n)_{ст} = \frac{SU_{оп}}{1 + SR_0}. \quad (4)$$

Устойчивость системы определяется с помощью диаграммы Найквиста [3, 5] для комплексной величины  $SR_0$ .

Точность системы стабилизации, если усилитель обладает достаточной полосой пропускания, определяется весьма просто, поскольку при расчете ее реакции на внешнее возмущение комплексным характером  $S$  можно пренебречь.

Пусть  $\Delta I_n$  — изменение стабилизируемого тока, вызванное внешним возмущением;  $\Delta I_n^*$  — противодействующая реакция системы стабилизации. Обращаясь к структурной схеме стабилизатора (фиг. 1), найдем, что эти величины должны быть связаны следующим соотношением:



$$(\Delta I_n' - \Delta I_n'') R_0 S = \Delta I_n' \quad (5)$$

Отсюда „остаточная“ флуктуация тока:

$$\delta I_n = \Delta I_n' - \Delta I_n'' = \frac{\Delta I_n'}{1 + SR_0} \quad (6)$$

Или, в относительных единицах:

$$\frac{\delta I_n}{I_n} = \frac{\Delta I_n'}{I_n} \frac{1}{1 + SR_0} \quad (7)$$

Для обеспечения заданной точности стабилизации  $\frac{\delta I_n}{I_n}$  при известной интенсивности возможных возмущений необходимо:

$$SR_0 \geq \frac{\Delta I_n'}{\delta I_n} - 1 \quad (8)$$

или, учитывая уравнение 3:

$$KS_1 R_0 \geq \frac{\left( \frac{\Delta I_n'}{I_n} \right)}{\left( \frac{\delta I_n}{I_n} \right)} - 1 \quad (9)$$

В прецизионных стабилизаторах рассчитываемые на жесткое подавление действия внешних возмущений

$$\frac{\frac{\Delta I_n'}{I_n}}{\frac{\delta I_n}{I_n}} \gg 1 \quad (10)$$

и уравнение (9) может быть упрощено

$$KS_1 R_0 \geq \frac{\frac{\Delta I_n'}{I_n}}{\frac{\delta I_n}{I_n}} \quad (11)$$

Уравнение (11) является основным расчетным уравнением системы стабилизации. Оно определяет результирующий коэффициент передачи разомкнутой петли стабилизатора, произведение  $KS_1 R_0$ . Так если  $\frac{\Delta I_n'}{I_n}$  может достигать 0,1 (это обычная величина в системах с сетевым питанием, где основное возмущение — нестабильность напряжения источника, от которого получается  $I_n$ ), а величина  $\frac{\delta I_n}{I_n}$  не должна превышать  $10^{-6}$  (обычное требование к стабилизаторам тока электромагнитов радиоспектрометров), то произведение  $KS_1 R_0$  должно быть не меньше, чем  $10^5$ . Конкретные величины  $k$ ,  $S_1$  и  $R_0$  в этом произведении определяются по известным характеристикам нагрузки ста-

близатора и источника, от которого получается стабилизируемый ток  $I_n$ . Поскольку контрольное сопротивление  $R_0$  очень редко может иметь величину, превышающую несколько омов (из-за трудности надежного отвода тепла защиты от внешних помех) и крутизна усилителя тока  $S_1$  (как в ламповых, так и в транзисторных вариантах) составляет обычно доли ампера на вольт, необходимая величина  $kS_1R_0$  получается практически полностью за счет  $k$ . Таким образом, в стабилизаторах высокой точности, где  $\frac{\partial I_n}{I_n}$  не должно превышать  $10^{-5} \div$

$\div 10^{-6}$ , усилитель сигнала ошибки должен иметь коэффициент усиления  $k = 10^5 \div 10^6$ . Это некоторая типовая величина, от которой в отдельных конкретных случаях могут быть отступления в ту и другую сторону.

3. Чувствительность. Минимальный сигнал, четко «различаемый» усилителем на фоне тепловых и ламповых шумов, равен:

$$(U_{\text{ш}})_{\text{мин}} = (\partial I_n)_{\text{мин}} R_0. \quad (12)$$

Поскольку  $R_0$  по порядку величины составляет единицы омов и  $I_n$  в большинстве случаев составляет единицы ампер,  $(U_{\text{ш}})_{\text{мин}}$  в системах точной стабилизации составляет несколько единиц или даже десятых долей милливольт.

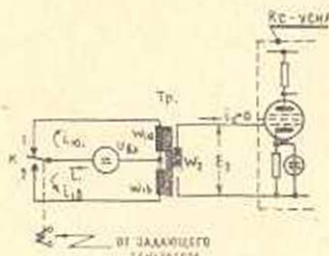
6. Блок-схема усилителя сигнала ошибки определяется его полосой пропускания и чувствительностью. Это усилитель постоянного тока с преобразованием входного напряжения. При заданной чувствительности возможно только контактное преобразование. По видимому в будущем контактные преобразователи будут вытеснены бесконтактными системами на базе сложных полупроводниковых структур. При этом максимальная частота преобразования не может превышать  $100 \div 120$  пер/сек и, следовательно, максимальная полоса пропускания усилителя в целом не может быть более  $10 \div 12$  пер/сек [6]. Однако, такая полоса пропускания вполне достаточна в подавляющем большинстве случаев и необходимости в применении более сложных схем усиления, например, рефлексных, или схем с непрерывной коррекцией нуля [3] нет.

в. Защита от внешних помех. В усилителях, предназначенных для усиления очень слабых сигналов, электромагнитная и электростатическая экранировка недостаточна. Мощные (по сравнению с полезным сигналом) помехи могут быть вызваны блуждающими токами, если последние могут замыкаться по какому-либо (хотя бы и очень короткому) участку входной цепи усилителя. Поэтому вся контрольная часть системы стабилизации тока должна иметь одноточечное заземление [7].

г. Система преобразования с согласующим трансформатором. Чувствительность усилителя определяется главным образом структурой и параметрами системы преобразования входного сигнала в напряжение переменного тока. Одна из наиболее распространенных



систем — система с согласующим трансформатором, принципиальная схема которого представлена на фиг. 2. Качественный анализ работы таких схем приведен в [3]. Для выявления их рабочих характеристик необходим более детальный анализ.



Фиг. 2. Схема контактного преобразователя усиленного сигнала со входным трансформатором.

Ток в секциях первичной обмотки трансформатора  $W_{1a}$  и  $W_{1b}$  (фиг. 2) замыкается и размыкается контактом  $K$ , поэтому переходной процесс в каждой секции протекает автономно независимо от электрической и магнитной предистории трансформатора. Ток в секции  $W_{1b}$  после замыкания контакта в положении  $I$  нарастает по закону (если не учитывать индуктивность рассеяния первичной обмотки и сеточный ток лампы, нагружающий вторичную обмотку)

$$i_1 = \frac{U_{ex}}{R_1} (1 - e^{-t/\tau_1}), \quad (13)$$

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{0,4\pi W_{1a}^2}{R_\mu R_1} \cdot 10^{-9}. \quad (14)$$

Здесь  $R_1$  — активное сопротивление секции,

$R_\mu$  — магнитное сопротивление для потока в сердечнике трансформатора

$$R_\mu = \frac{l_m}{\mu_m S_m}, \quad (15)$$

$l_m$  — средняя длина магнитной линии (см)

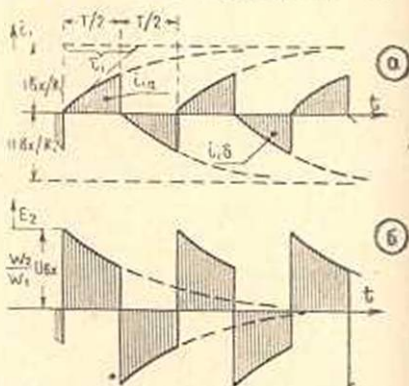
$S_m$  — сечение магнитопровода см<sup>2</sup>

$\mu_m$  — магнитная проницаемость материала магнитопровода.

Процесс, описываемый уравнением (13), будет длиться половину периода напряжения задающего генератора, управляющего работой преобразователя. По истечении  $T/2$  цепь секции  $W_{1a}$  будет разорвана и практически в тот же момент включена секция  $W_{1b}$  магнитопровода трансформатора в противоположном направлении (фиг. 3а). Магнитный поток связан с намагничивающим током соотношением

$$\Phi = \frac{l L_1}{W_1} i_1. \quad (16)$$

а ЭДС, полученная на входе  $RC$  — усилителя равна



Фиг. 3. Диаграммы токов и напряжений в схеме со входным трансформатором.

$$E_2 = W_2 \frac{d\Phi}{dt} = L_1 \frac{W_2}{W_1} \frac{di_1}{dt} \quad (17)$$

Таким образом, на входе усилителя получается напряжение в форме периодически повторяющихся импульсов (фиг. 3б), каждый из которых описывается уравнением (см. ур-я 13 и 17)

$$E_2 = U_{\text{нх}} \frac{W_2}{W_1} e^{-t/\tau_1} \quad (18)$$

Форма этих импульсов, или их „наполнение“ при заданном  $T$  определяется величиной  $\tau_1$ , т. е. конструктивными данными трансформатора. Напряжение, полученное в результате синхронного детектирования преобразованного и усиленного напряжения сигнала в первом приближении пропорционально постоянной составляющей в серии импульсов одного знака [3] относительная величина которой,

$$\left[ \frac{E_{20}}{U_{\text{нх}} \frac{W_2}{W_1}} \right] = f \left( \frac{E_1}{T} \right) \quad (19-a)$$

легко рассчитывается. В этом уравнении

$$E_{20} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E_2 dt \quad (19-b)$$

Аналогичная по характеру зависимость связывает с постоянной времени первичной цепи,  $\tau_1$ , амплитуду основной гармоники напряжения  $E_2$ .

Из характеристики, описываемой уравнением (19-a) следует, что параметры входной цепи преобразователя должны удовлетворять условию

$$\tau_1 \geq (1,5 \div 2) T \quad (20)$$

Если не учитывать активное сопротивление источника сигнала (трансформаторные преобразователи принципиально могут работать только с низкоомными источниками  $U_{\text{нх}}$ ), то выражение для  $\tau_1$  находится просто. Положим для простоты, что магнитопровод трансформатора имеет круглое сечение и средний диаметр секции обмотки равен  $D_{\text{ср}}$ . Предполагая обязательную в данном случае рядовую намотку с коэффициентом заполнения 0,9, найдем

$$\tau_1 = 1,2 \frac{\mu_m S_m}{l_m} \frac{ab}{D_{\text{ср}}} \cdot 10^{-4} \quad (21)$$

( $\mu_m$  — магнитная проницаемость материала магнитопровода,  $S_m$  — сечение магнитопровода,  $l_m$  — средняя длина магнитной линии,  $a$  и  $b$  соответственно аксиальный и радиальный размеры секции). У большинства трансформаторов



$$\frac{S_m}{I_m D_{cp}} = (0,08 \div 0,2).$$

Принимая эти величину равной 0,1, находим

$$\tau_1 = 1,2 \cdot 10^{-5} (ab) \mu_m \quad (22)$$

Это соотношение показывает, что при обычных частотах преобразователя ( $f \leq 100$  гц) для магнитопровода необходим материал с  $\mu_m > 10^4$  в самой начальной части кривой намагничивания. Таким материалом является молибденовый пермаллой, подвергнутый специальной термомагнитной обработке. Изготовление трансформаторов на пермалловых магнитопроводах доступно только хорошо и всесторонне оснащенным лабораториям и может быть рентабельным только при массовом производстве (например, в усилителях серийно выпускаемых автоматических потенциометров ЭПП используются хорошо конструктивно и технологически отработанные трансформаторы).

Серьезное затруднение в применении трансформаторов вызывает необходимость их астатизации по отношению к внешним магнитным полям. Авторами испытаны несколько возможных методов астатизации. (В том числе входной трансформатор от усилителя ЭПП-09). Ни один из них не дал удовлетворительной защиты от магнитных полей приводной обмотки преобразователя или трансформаторов схемы синхронного детектирования. Известно [8], что при самой тщательной астатизации необходимо многослойное экранирование трансформатора пермалловыми экранами. При этом трансформатор становится чрезвычайно сложным конструктивно и громоздким [9].

Приведенные выводы по нашему мнению сильно обесценивают несомненное серьезное преимущество трансформаторной системы, заключающееся в том, что выбором соответствующей величины  $W_2/W_1$  можно сколь угодно уменьшать величину шумового сопротивления усилительной лампы, приведенной к контуру  $U_1$  (фиг. 2). Поэтому была предпринята попытка решить задачу преобразования без применения трансформаторов.

*д. Бестрансформаторная система преобразования.* Основные трудности в осуществлении такой системы следующие:

1. Выбор материала контактов, обеспечивающего надежную коммутацию микровольтных напряжений.
2. Исключение ложных сигналов, обусловленных коммутацией сеточного тока усилительной лампы.
3. Защита подвижного контакта системы преобразования от внешних магнитных полей, так как в противном случае в подвижном контакте неизбежно будет наводиться паразитная ЭДС.

Для коммутации микровольтовых напряжений рекомендуется [10] контакты из сплавов с преимущественным (95% и выше) содержанием золота. Удовлетворительные результаты получены с помощью контактов из сплава золото—серебро—платина (золота 96%) и сплава золото—никель—марганец (золота 94%).



Принцип исключения эффекта коммутации сеточного тока усилительной лампы представлен на фиг. 4. Цепь источника и „мертвая“ цепь имеют равные сопротивления  $R$ . На время пролета контакта сетка блокирована небольшим ( $\approx 60 \mu F$ ) конденсатором  $C$ .

Несколько сложнее обстоит дело с защитой подвижного контакта от внешних магнитных полей. Если такое поле  $B$  направлено перпендикулярно плоскости движения контакта  $K$  (фиг. 4), то во входном контуре неизбежно будет наводиться ЭДС. Это

наблюдается, например, у поляризованных реле типа РП, у которых подвижный контакт находится в поле поляризующего постоянного магнита. Проблема защиты контакта от магнитных полей обсуждается давно, в числе возможных решений предлагалась замена электромагнитного провода пневматическим [11]. Опыт показывает, что удовлетворительное решение дает магнитная изоляция приводного механизма и контактной системы, кратко описанная в [2]. Сущность ее состоит в том, что поляризованный приводной механизм (например, электро-



Фиг. 4. Бестрансформаторная схема преобразования, устраняющая эффект коммутации сеточного тока усилительной лампы.

механическая система поляризованного реле РП-4), связана с подвижными контактами системы преобразования тонкой тягой, проходящей через небольшое отверстие в магнитном экране.

Контакты системы преобразования (иногда вместе с первой лампой усилителя) заключены в магнитный экран, в качестве которого может быть использовано простое железо, так как требования к экранировке здесь неизмеримо ниже, чем у трансформаторных преобразователей.

Бестрансформаторный преобразователь имеет следующие серьезные преимущества:

1. Он прост конструктивно, его изготовление не требует применения специальной технологии термообработки.
2. Он практически не ограничивает величину внутреннего сопротивления источника сигнала.

Бестрансформаторный преобразователь не позволяет осуществлять редукцию шумового сопротивления усилительной лампы при приведении его ко входной цепи. Снижение шумов здесь должно проводиться путем ограничения полосы пропускания усилительного тракта в целом.

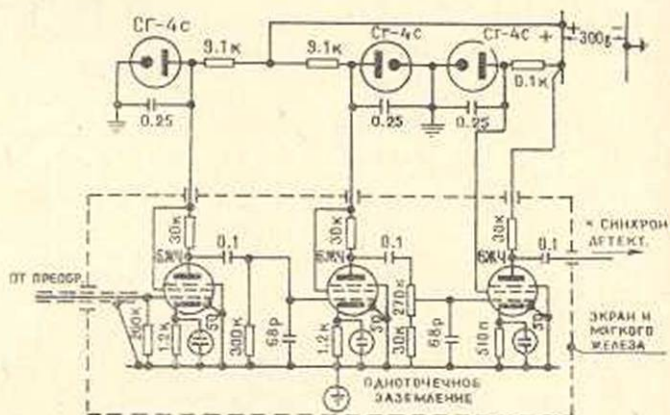
Интересно отметить, что в настоящее время наметилась явная тенденция к использованию в усилителях слабых электрических сигналов контактных преобразователей [12].

е. *RC-усилитель*. Возможны многие схемные варианты усилителей, обеспечивающие необходимое усиление при заданном уровне шумов. Трудно сформулировать условия, позволяющие однозначно выбрать необходимый вариант. Одним из существенных факторов, характеризующих схему при прочих равных условиях является ее



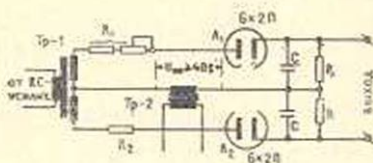
простота и стабильность. Именно этим продиктована схема, представленная на фиг. 5, которая не требует пояснения.

Одной из трудных задач, которые приходится решать в таких усилителях, является задача устранения фона источников питания. Радикальным решением этой задачи является жесткая стабилизация анодного питания ламп, а также питания накальных цепей постоянным током от хорошо стабилизированного источника. Последнее логично (поскольку речь идет о небольшом напряжении и относительно сильном токе) осуществлять с помощью полупроводниковых схем.

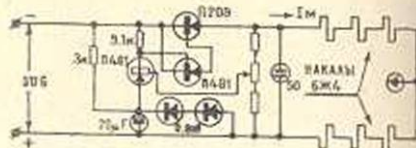


Фиг. 5. Принципиальная схема  $RC$ -усилителя с максимальным коэффициентом усиления  $\sim 2 \cdot 10^3$ .

Схема представленная на фиг. 6, предназначенная для питания накалов пяти ламп, включенных последовательно ( $U_n = 5 \times 6,3$  в;  $I_n = 350$  мА), прекрасно зарекомендовала себя на практике.



Фиг. 6. Принципиальная схема высокостабильного синхронного детектора.



Фиг. 7. Стабилизатор напряжения питания накальных цепей лампы усилителя.

**ж. Синхронный детектор. Фазовая подстройка.** Наиболее стабильной схемой синхронного детектирования, является двухтактная схема, представленная на фиг. 7. При правильной ее регулировке с помощью сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$  входное напряжение будет полностью независимым от величины опорного напряжения в весьма широком диапазоне его значений. (Отметим здесь, что при использовании вместо вакуумных диодов  $6 \times 2P$  кристаллических диодов любого типа получить высокую стабильность схемы по отношению  $U_{оп}$  не удастся). Известно, что в схемах синхронного детектирования опорное напряжение должно совпадать по фазе с напряжением сиг-

нала. Поскольку инерция приводных механизмов системы преобразования начинает сказываться уже на частоте несколько периодов в секунду и при частоте несколько десятков периодов в секунду, выбираемой для преобразования, вносит фазовый сдвиг, близкий к  $90^\circ$ , в схеме усилителя необходимо предусматривать фазовую коррекцию. Наиболее простое решение — использование  $RC$ -цепей. Поскольку с помощью таких цепей трудно получить фазовый сдвиг больше, чем  $60^\circ$ , задача решается двумя звеньями подстройки: „опережение“ в передаче напряжения на синхронный детектор и „отставание“ в передаче напряжения на проводной механизм. С помощью этих звеньев сдвиг между напряжением питания привода преобразователя и опорным напряжением синхронного детектора может быть доведен до  $110^\circ$  и более.

3. *Заключение.* Усилитель, элементы схемы которого описаны выше, полностью решает поставленную задачу: его чувствительность (при постоянной времени синхронного детектора  $\sim 0,1$  сек) составляет десятые доли микровольта, максимальный коэффициент усиления более, чем  $10^6$ . Он длительное время успешно эксплуатируется в системе питания электромагнита [2]. Следовательно, можно считать правильными использованные нами при построении этого усилителя принципы (бестрансформаторная система преобразования, магнитная изоляция подвижных контактов системы преобразования, тщательное устранение фона источника питания, использование простейшего  $R$ - $C$ -усилителя с надлежащим образом выбранными лампами и надлежащей конструкцией). Это дает право заключить, что во многих известных нам работах [см., напр. 12], задача построения таких усилителей излишне усложнена.

Следует отметить, что в дальнейших работах авторы предполагают строить такие схемы только с одной вакуумной лампой на входе  $R$ - $C$ -усилителя. Все остальные элементы схемы предлагается строить на полупроводниковых приборах, это дает серьезное сокращение габаритов и потребляемой мощности. При этом принципиально возможно „вписать“ единственную вакуумную лампу на входе  $R$ - $C$ -усилителя (из-за относительно высокого уровня шумов транзистор здесь не может быть использован) в систему питания транзисторных схем. Для этого экономично применять лампы прямого накала, например, 2Ж28Л.

В заключение авторы выражают благодарность сотрудникам группы ядерного магнитного резонанса Института химической физики Академии наук СССР, гг. Ветрову О. Д., Кильянову Ю. Н., Зимину К. С. за помощь в настоящей работе.



Լ. Լ. ԴԵԿԱԲՐՈՒՆ, Ա. Բ. ՄԿՐՏՅԱՆ

ՍԽԱԼԻ ԱԶԳԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ՈՒՃԵՂԱՅՈՒՄԸ ՊՐԵՑԵԶԻՈՆԱՅԻՆ  
ՀԱՍՏԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆԱՐԱՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոսանքի ճշտորոշ կալունացման սխառմաների հարցերն ալժմ համարվում են տեսական ու փորձնական ինտենսիվ ուսումնասիրությունների առարկա:

Հոսանքի կալունացման սխառմի կարևոր հանդուլներից մեկը համարվում է սխալի ազդանշանների կալունարարը:

Հոլվածում քննարկված է սխալի ազդանշանների ուժեղարարի պարամետրները, որոնք ընտրողում են և որոնցից կախված է էլեկտրական հոսանքի ճշտորոշ կալունացման սխառմի աշխատանքի սաուլցությունը: Սահմանված են ալ պարամետրների կողմնորոշ մեծությունները դործնականում բալականին մեծ ճշգրտություն պահանջող սխառմաների՝ աադիոսպեկտրոմետրների էլեկտրամագնիսների հոսանքի կալունացման սխառմաների համար Բննադատության ու անալիզի է ենթարկված մուտքալին տրանսֆորմատորի օգտագործմամբ ազդանշանի կերպափոխման սխառմը: Բննարկված է ազդանշանի կերպափոխման անարանսֆորմատորալին սխառմի կալունացման սխառմի և հնարավոր խանգարումներից պաշտպանելու մեթոդները: Նկարագրված է կոնսակաալին կերպափոխիչի մոդերն-մեկուսիչալին կոնսակաալին սխառմի հետ: Տրված են հիմնական ու օժանդակ RC ուժեղարարի սխառմաներ ինչպես և ֆադալին կարպալորման ու սինխրոնալին զեանկտորի սխառմաներ:

Աաաշարկված սկզբունքը հաշուլլվածք ու երկարատե սաուլման է ենթարկվել էլեկտրամագնիսի պրեցիզիոնալին հոսանքի կալունացման սխառմում և աղաարալի է իրեն, որը և հիմք է աալիա կերպաալելու՝ բազմաթիվ մասնագեաներ, սխալի ազդանշանների ուժեղարարների մշակման ու շահագործման մասանակ անտեղի կերպով և չափից ալելի բարդալնում են ղոված ինզիրը:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мкртчян А. Р. О новой возможности использования метода ЯМР для изучения разупорядоченности кристаллов. ДАН АрмССР, 37, № 5, 1963.
2. Декабрун Л. Л., Мкртчян А. Р. Система управления током электромагнитных спектрометров ядерного магнитного резонанса. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 1, 1964.
3. Декабрун Л. Л. Усилители и источники питания. Росвуиздат, М., 1961.
4. Додик С. Д. Полупроводниковые стабилизаторы постоянного напряжения и тока. "Советское радио", М., 1962.
5. Хэммонд П. Теория обратной связи и ее применения. Физматгиз, М., 1961.
6. Декабрун Л. Л. Усилители сигналов ошибки устройств автоматического регулирования и стабилизации. Автоматика и телемеханика, 21, № 1, 1960.
7. Волин М. Л. Паразитные связи и наводки. "Советское радио", М., 1960.
8. Larsen N. T. Low-Level, Low-frequency Detection System. The Rev. of. scin. Instr., 33, № 11, 1962, 1200—1208.

9. Wadey W. S. Magnetic Shielding with multiple cylindrical shells. The Rev. of Soc. Instr., 27, 1956. 910.
10. Хольм Р. Электрические контакты. ИЛ, М., 1961.
11. Schafer C. D—C Amplifier, и sing air coupled chopper. „Electronics“, 1960, март.
12. Ernst R. R., Primas H. Gegenwärtiger stand und Entwicklungstendenzen in der Instrumentierung hochauflösender kernresonanzspectrometer. Berichte der Bunsengesellschaft für Physicalische chemie, № 3, 1963, p. 261.