

МАТЕМАТИКА

М. Б. БАЛК

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ
 ФУНКЦИЙ

1. Пусть D — некоторая область плоскости комплексного переменного z (для простоты будем в дальнейшем считать D односвязной). Через $\bar{z}$ будем обозначать число, сопряженное числу z , так что если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$.

Функция $w = f(z)$ называется *полианалитической функцией порядка n (или n -аналитической функцией)* в области D , если она в D представима в виде:

$$f(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z) + \dots + \bar{z}^{n-1} \varphi_{n-1}(z), \quad (1)$$

где все функции $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) аналитичны в D . Полианалитические функции порядка 1 — это аналитические функции. По-видимому, что полианалитическая функция порядка n может рассматриваться также, как полианалитическая функция порядка m при любом $m > n$ (здесь полная аналогия с определением степени полинома). Например, функция $w = (z - \bar{z}) / (2i)$ является полианалитической порядка 2; и в то же время ее можно рассматривать как полианалитическую функцию порядка 3, 4, 5, ...

Характеристическим свойством функции $w = f(z)$, n -аналитической в D , является то, что она удовлетворяет в D следующему равенству (обобщенному условию Коши — Римана):

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0. \quad (2)$$

Нетрудно понять, что всякую функцию $w = f(z)$, n -аналитическую в области D , возможно в некоторой окрестности $\delta(a)$ каждой точки a из D представить в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{z} - \bar{a})^k \varphi_k(a; z), \quad (3)$$

где $\varphi_k(a; z)$ — аналитическая функция переменного z ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Изучением полианалитических функций впервые занимались П. Бургатти [1] и Н. Теодореску [2]. Заметим, что в работах последнего эти функции обычно называются ареоларными полиномами.

2. Пусть теперь в области D заданы две n -аналитические функции $f(z)$ и $g(z)$. Эти функции могут совпадать на каком-то множестве E , имеющем точку сгущения внутри D , но все же не совпадать во всей области D . Например, функции $f(z) = (z - \bar{z})/(2i)$ и $g(z) = (z + \bar{z})^2/4$ обе полианалитичны (порядка 3) на всей z -плоскости, совпадают на параболе $y = x^2$, но тем не менее не тождественны. Спрашивается: что достаточно потребовать от множества E (имеющего точку сгущения внутри D), чтобы из совпадения $f(z)$ и $g(z)$ на E вытекало тождество функций $f(z)$ и $g(z)$ всюду в D ?

Ответ на этот вопрос был нами сформулирован в [3] в виде теоремы единственности для полианалитических функций. Здесь мы эту теорему докажем и выведем из нее некоторые следствия.

С. Ц. Саркисян [4] впервые обнаружил, что установленные в данной статье результаты могут быть использованы для изучения свойств решений некоторых уравнений Коши-Римана с нелинейными правыми частями, то есть некоторых уравнений вида

$$\partial w / \partial \bar{z} = f(z, w).$$

3. Пусть E — произвольное множество точек плоскости комплексного переменного z ; a — какая-либо точка (не обязательно из E); l — луч, исходящий из точки a . Пусть уравнение этого луча таково: $\arg(z - a) = \alpha$. Множество E назовем *сгущающимся к точке a вдоль луча l* , если в E содержится такая последовательность точек $\{z_n\}$, что при

$$n \rightarrow \infty \quad \lim z_n = a \quad \text{и} \quad \lim \arg(z_n - a) = \alpha. \quad (4)$$

Иначе можно так сказать: E сгущается к точке a вдоль луча l , если всякий угол с вершиной в точке a , содержащий внутри себя луч l , содержит также такую часть множества E , для которой a является предельной точкой.

Пусть теперь l — произвольная прямая, проходящая через точку a . Множество E назовем *сгущающимся к точке a вдоль прямой l* , если оно сгущается к a хотя бы вдоль одного из лучей, на которые разбивается прямая l точкою a . Последнее определение можно так перефразировать: множество E называется сгущающимся к точке a вдоль прямой l : $z = a + t \exp(i\alpha)$ (t и α вещественны, $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \alpha < \pi$), если E содержит такую последовательность точек $z_n = a + t_n \exp(i\alpha_n)$ (t_n и α_n вещественны), что при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 0$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

Точку a назовем *точкой сгущения порядка k для множества E* , если E сгущается к точке a не менее, чем вдоль k различных прямых. Если при этом не существует $k+1$ прямых, вдоль которых множество E сгущалось бы к a , то говорим, что *точка сгущения a имеет точный порядок k* .

Так, например, начало координат является точкой сгущения точного порядка 1 для синусоиды $y = \sin x$, точкой сгущения точного

порядка 2 для лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$, точкой сгущения бесконечного порядка для кривой $y = x \sin \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

4. *Лемма 1.* Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая порядка n в некотором круге $\delta(|z - a| < \rho)$, обращается в нуль на множестве E , для которого центр a круга δ служит точкой сгущения порядка n , то в δ $\Phi(z) \equiv 0$.

Доказательство. Без потери общности можно ограничиться случаем, когда $a = 0$ (если $a \neq 0$, то следует предварительно совершить перенос $t = z - a$). Функцию $\Phi(z)$, n -аналитическую в круге δ , возможно в этом круге представить в виде:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \quad (5)$$

где $\varphi_k(z)$ — функции, аналитические в δ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Разлагая эти функции в ряд Тейлора и полагая $z = re^{i\varphi}$, получим

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(k)} z^{\nu} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}^{(k)} r^{\nu+k} e^{i(\nu-k)\varphi},$$

откуда

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m \sum_{k=0}^m a_{m-k}^{(k)} e^{(m-2k)i\varphi}. \quad (6)$$

В этой формуле считаем, что

$$a_s^{(k)} = 0, \text{ если } s < 0 \text{ или } k \geq n. \quad (7)$$

Введем обозначения: $v = e^{2i\varphi}$,

$$B_m(v) = \sum_{k=0}^m a_{m-k}^{(k)} v^{m-k}. \quad (8)$$

Тогда

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{-mi\varphi} B_m(v). \quad (9)$$

Теперь легко убедиться, что $\Phi(z) \equiv 0$.

Допустим противное; тогда среди полиномов $B_m(v)$ должны иметься различные от тождественного нуля. Иначе говоря, существует такое p , что $B_m(v) \equiv 0$ при $m < p$, а

$$B_p(v) \neq 0. \quad (10)$$

Из формулы (9) следует, что

$$\frac{1}{r^p} \Phi(z) = e^{-pi\varphi} B_p(v) + r \sum_{m=p+1}^{\infty} r^{m-p-1} e^{-mi\varphi} B_m(v). \quad (11)$$

В силу условия леммы 1 существуют n различных и попарно несим-

метричных (относительно точки $z=0$) лучей $\arg z = \theta_1, \arg z = \theta_2, \dots, \arg z = \theta_n$, вдоль каждого из которых множество E сгущается к точке $z=0$. Сгущение множества E к точке $z=0$ вдоль луча $\arg z = \theta_1$ означает, что в E содержится такая последовательность точек $\{z_k\}$, что $z_k \neq 0$ и при $k \rightarrow \infty$ $z_k \rightarrow 0$ и $\text{Arg } z_k \rightarrow \theta_1$ (под $\text{Arg } z_k$ понимаем один из аргументов числа z_k). Ясно, что $\Phi(z_k) = 0$. Полагая в (11) $z = z_k$ и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$B_p(e^{2i\theta_1}) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, многочлен $B_p(v)$ имеет корень $\exp(2i\theta_1)$. Аналогично можно показать, что корнями многочлена $B_p(v)$ служат еще числа $\exp(2i\theta_k)$ ($k=2, 3, \dots, n$). Итак, полином $B_p(v)$ имеет n различных между собой и неравных нулю корней. Используя (7), можно $B_p(v)$ переписать и в таком виде

$$B_p(v) = v^{p-n+1} \cdot A_p(v), \quad (13)$$

где

$$A_p(v) = \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k}^{(n)} v^{n-1-k}. \quad (14)$$

Следовательно, полином $A_p(v)$ должен быть отличен от тождественного нуля и иметь n различных корней $\exp(2i\theta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$). Но это невозможно, ибо степень полинома $A_p(v)$ не выше, чем $p-1$. Полученное противоречие доказывает ложность исходного допущения. Итак, мы доказали, что $\Phi(z) \equiv 0$.

Следствие 1. Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая порядка n в некотором круге δ , обращается в нуль на некотором (сколь угодно малом) кружке E , содержащем внутри себя или на своей границе центр a круга δ , то $\Phi(z) \equiv 0$ в δ . Действительно, в этом случае множество E сгущается к центру a круга δ вдоль бесконечного множества лучей, исходящих из a , и в силу леммы 1 $\Phi(z) \equiv 0$ в δ .

Простым следствием из леммы является следующая теорема.

Теорема 1. (Первая теорема единственности для полианалитических функций). Если функции $f(z)$ и $g(z)$, полианалитические порядка n в некоторой области D , равны на некотором множестве E , причем это множество имеет в области D точку сгущения (a) порядка n , то $f(z) \equiv g(z)$ в D .

Доказательство. Достаточно рассмотреть цепочку из конечного числа кружков $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, таких, что: а) все они принадлежат (вместе со своими окружностями) области D ; б) первый кружок (δ_1) имеет своим центром точку a , а последний (δ_m) содержит точку b , где b — произвольная, наперед выбранная точка области D ; в) центр каждого кружка δ_k лежит на границе или внутри кружка δ_{k-1} . Пусть $\Phi(z) = f(z) - g(z)$. В силу леммы 1 $\Phi(z) \equiv 0$ в δ_1 . Применяя следствие 1 из леммы 1 достаточное число раз, мы последовательно пока-

жем, что $\Phi(z) \equiv 0$ в $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_m$, а, значит, и $\Phi(b) = 0$. Итак, $\Phi(z) \equiv 0$ в D , так что $f(z) = g(z)$ в D .

5. Полученные выше результаты могут быть перенесены на более широкий класс функций, которые назовем *полианалитическими функциями счетного порядка*. Пусть в некоторой окрестности точки a определена функция $w = f(z)$. Эту функцию назовем *полианалитической четного (или бесконечного) порядка в точке a* , если существует такая окрестность $\delta(a)$ точки a , в которой $f(z)$ представима в виде следующего равномерно сходящегося ряда:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{a})^k \varphi_k(a; z), \quad (15)$$

где $\varphi_k(a; z)$ — какие-либо аналитические функции относительно z в $\delta(a)$.

Так как допустимо в случае необходимости заменить окрестность $\delta(a)$ окрестностью меньшего радиуса, то возможно всегда считать, что в $\delta(a)$ ряд (15) сходится еще и абсолютно.

Функция $f(z)$ называется *полианалитической функцией счетного порядка* на множестве (в частности, в области) D , если она является полианалитической функцией счетного порядка в каждой точке из D . Вместо термина *полианалитическая функция счетного порядка* будем употреблять термин *полианалитическая функция порядка A* (здесь символ A обозначает счетную мощность) или термин *полианалитическая функция*.

Понятно, что всякую полианалитическую функцию конечного порядка n можно рассматривать как полианалитическую функцию счетного порядка (сравните формулы (3) и (15)). Обратное неверно. Заметим, что полианалитические функции счетного порядка впервые, видимо, встречаются в [2].

Введенное в п. 2 понятие точки сгущения порядка n возможно перенести на тот случай, когда под n подразумевается какое-либо трансфинитное число, например, счетная мощность A или мощность континуума C . В частности, точка a называется *точкой сгущения порядка A (или счетного порядка)* для множества E , если множество E сгущается к точке a не менее, чем вдоль счетного множества различных прямых.

Лемма 1 и теорема 1 остаются в силе, если в них букву n (обозначающую натуральное число) заменить буквой A (обозначающей счетную мощность). Что касается доказательств этих предложений при такой замене, то они претерпевают лишь несущественные или тривиальные изменения. Сформулируем предложения, которые могут быть таким образом получены.

Лемма 1А. Если функция $\Phi(z)$, полианалитическая счетного порядка в некотором круге $\delta\{|z - a| < \rho\}$, обращается в нуль на множестве E , для которого центр a круга δ служит точкой сгущения счетного порядка, то в δ $\Phi(z) \equiv 0$.

Теорема 1 А. Если две функции $f(z)$ и $g(z)$, полианалитические счетного порядка в некоторой области D , равны на некотором множестве E , причем это множество имеет в D точку сгущения счетного порядка, то $f(z) = g(z)$ в D .

6. Приведем еще несколько простых следствий из теоремы 1.

Следствие 2. Если две функции $f(z)$ и $g(z)$ полианалитичны (безразлично, какого порядка) в некоторой области D и совпадают в каком-либо (малом) кружке δ из области D , то они тождественны всюду в D .

Действительно, каждая точка a из δ является для δ точкой сгущения бесконечного порядка.

Следствие 3. Пусть функция $f(z)$ полианалитична в некоторой (односвязной) области D и пусть область Δ такова, что ее пересечение с областью D не пусто. Существует не более, чем одна функция, полианалитическая в Δ и совпадающая с $f(z)$ в δ .

Опираясь на это следствие, возможно осуществлять аналитическое продолжение полианалитических функций.

Следствие 4. Если в каждой точке a области D функция $f(z)$ является полианалитической порядка $n(a)$ (порядок полианалитичности зависит от выбора точки), то $f(z)$ будет во всей области D полианалитической порядка n , где $n = \min n(a)$.

Для доказательства следует построить такую же цепочку покрывающихся кружков, как и при доказательстве теоремы 1.

В частности, если функция $f(z)$, полианалитическая в некоторой области D , является аналитической хотя бы в одной точке из D , то она аналитична всюду в D .

В качестве следствия из теоремы 1 выведем следующий известный факт, обычно устанавливаемый иными средствами.

Следствие 5 (теорема единственности для полигармонических функций). Если две функции $v_1(x, y)$ и $v_2(x, y)$, полигармонические в некоторой области D , равны в сколь угодно малом кружке δ из этой области, то они тождественны во всей области D .

Доказательство. Функция $v(x, y) = v_1(x, y) - v_2(x, y)$ полигармонична в D ; пусть n — ее порядок полигармоничности. В δ $v(x, y) = 0$. Для $v(x, y)$ существует такая функция $\Phi(z)$, n -аналитическая в D , что $\operatorname{Im} \Phi(z) = v(x, y)$. В кружке δ $\operatorname{Im} \Phi(z) = 0$. Отсюда следует (см. [6]), что $\Phi(z)$ совпадает в δ с некоторым вещественным полиномом $C(z, \bar{z})$ от z и $\bar{z}$ („вещественной n -константой“). Но $C(z, \bar{z})$, будучи полиномом, определена на всей плоскости и, в частности, во всей области D . В силу теоремы единственности, всюду в D $\Phi(z) = C(z, \bar{z})$. Но тогда $\operatorname{Im} \Phi(z) = 0$ всюду в D , так что $v(x, y) = 0$, $v_1(x, y) = v_2(x, y)$ в D .

7. В качестве примера применения первой теоремы единственности полианалитических функций к изучению свойств аналитических функций рассмотрим следующую задачу.

Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — две функции, аналитические в некоторой связной области D , а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два вещественных многочлена. Если на каком-то бесконечном множестве E имеет место равенство

$$P(x, y)f(z) = Q(x, y)g(z), \quad (16)$$

то откуда еще не следует справедливость равенства

$$f(z) = g(z) \quad (17)$$

всюду в D . Например, при $P = x + 1$, $Q = x^2 + 1$, $f = z^2 + 1$, $g = z + 1$ будем иметь, что $P \cdot f = Q \cdot g$ на всей вещественной оси, но равенство (17) верно только при $z = 0$ и $z = 1$, так что (17) не имеет места ни в какой области z -плоскости. Спрашивается: что достаточно потребовать от множества E для того, чтобы из (16) следовало (17)? Верен такой результат:

Теорема 2. Пусть 1) $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — два вещественных многочлена степени не выше n , причем хотя бы в одной точке плоскости они принимают равные ненулевые значения:

$$P(x_1, y_1) = Q(x_1, y_1) \neq 0; \quad (18)$$

2) $f(z)$ и $g(z)$ — аналитические функции в некоторой области D ;
3) множество E имеет в D точку сгущения порядка $n + 1$. В таком случае из справедливости равенства (16) на E следует справедливость равенства (17) всюду в D .

Доказательство. Каждый полином n -ой степени является полианалитической функцией порядка $n + 1$. Следовательно, $P(x, y) \cdot f(z)$ и $Q(x, y) \cdot g(z)$ — полианалитические функции порядка $n + 1$. Но тогда, в силу теоремы единственности, равенство (16) имеет место всюду в D .

Если обе функции $f(z)$ и $g(z)$ равны тождественно нулю в D , то справедливость теоремы тривиальна.

Допустим, что в D одна из функций, например, $g(z)$ не есть тождественный нуль. Тогда найдется такой кружок D_1 , внутри которого $g(z)$ вовсе не имеет нулей. Так как полианалитическая функция (полином) $P(x, y)$ отлична (по условию) от тождественного нуля, то внутри D_1 должна найтись точка, в которой $P(x, y) \neq 0$, а, значит, и кружок δ , в котором $P(x, y) \neq 0$. В δ

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (19)$$

Левая часть этого равенства — аналитическая функция в δ , правая часть — вещественна. Следовательно, $f(z)/g(z) = A$, где A — некоторая константа, и $Q(x, y)/P(x, y) = A$ в δ .

Так как полианалитические функции $Q(x, y)$ и $A \cdot P(x, y)$ совпадают в кружке δ , то они тождественно равны во всей области их полианалитичности (то есть на всей плоскости), в частности, в точке (x_1, y_1) .

Поэтому $A = Q(x_1, y_1)/P(x_1, y_1) = 1$, так что $f(z) \equiv g(z)$ в δ , а, значит, и во всей области D .

8. К первой теореме единственности примыкает следующее предложение, обобщающее известную теорему Витали на случай полианалитических функций произвольного конечного порядка n .

Теорема 3. (Теорема Витали для полианалитических функций). Пусть последовательность $\{f_k(z)\}$ функций, n -аналитических в некоторой области D , равномерно ограничена внутри D и сходится на некотором множестве E , имеющем в D точку сгущения порядка n . Тогда эта последовательность сходится равномерно внутри D , и притом к n -аналитической функции.

Доказательство. Так как по условию последовательность $\{f_k(z)\}$ равномерно ограничена во всякой ограниченной замкнутой области $\bar{G}$, принадлежащей D , то в $\bar{G}$ равномерно ограничены и последовательности $\{u_k \equiv \operatorname{Re} f_k(z)\}$ и $\{v_k \equiv \operatorname{Im} f_k(z)\}$. Но это два семейства n -гармонических функций в D . В силу одной теоремы Привалова-Пчелина ([7], теорема 3) семейство полигармонических функций порядка n , равномерно ограниченных внутри D , компактно в D . Следовательно, возможно выбрать такую последовательность номеров k_v , что внутри D будут сходиться, и притом равномерно, две последовательности $\{u_{k_v}\}$ и $\{v_{k_v}\}$. Обозначим через u и v предельные функции для этих последовательностей. В силу теоремы 1 из той же статьи [7] u и v будут n -гармоническими функциями. Последовательность n -аналитических функций $\{f_{k_v}(z) \equiv u_{k_v} + i v_{k_v}\}$ тоже, очевидно, будет сходиться равномерно внутри D к функции $f(z) \equiv u + i v$.

В статье [7] (см. теорему 2) было установлено, что равномерно сходящуюся последовательность полигармонических функций возможно почленно дифференцировать сколько угодно раз. В частности, при $v \rightarrow \infty$

$$\lim (\partial u_{k_v} / \partial x) = \partial u / \partial x, \quad \lim (\partial v_{k_v} / \partial x) = \partial v / \partial x,$$

$$\lim (\partial u_{k_v} / \partial y) = \partial u / \partial y, \quad \lim (\partial v_{k_v} / \partial y) = \partial v / \partial y$$

(сходимость равномерная внутри D).

Отсюда, очевидно, следует, что при $v \rightarrow \infty$

$$\lim \partial f_{k_v} / \partial \bar{z} = \partial f / \partial \bar{z}. \quad (20)$$

Повторяя аналогичные рассуждения достаточное число раз, можно убедиться, что $\partial^n f / \partial \bar{z}^n = \lim (\partial^n f_{k_v} / \partial \bar{z}^n)$.

Но $f_{k_v}(z)$ — n -аналитическая функция в D . Поэтому $\partial^n f_{k_v} / \partial \bar{z}^n \equiv 0$ в D ; следовательно, $\partial^n f / \partial \bar{z}^n \equiv 0$ в D , а это значит, что $f(z)$ — n -аналитическая функция в D .

Если $g(z)$ — предел какой-либо другой равномерно сходящейся внутри D подпоследовательности последовательности $\{f_k(z)\}$, то

$g(z) = f(z)$ на множестве E . В силу теоремы единственности $g(z) \equiv f(z)$ в D .

Рассуждая далее так же, как в случае аналитических функций (см., например, [5]) возможно затем показать, что вся последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится к $f(z)$, и притом равномерно внутри D . Теорема доказана.

Из приведенных рассуждений ясно, что верен и такой факт: если последовательность функций $\{f_k(z)\}$, n -аналитических в некоторой области D , а) компактна в D , б) сходится в каждой точке некоторого множества E , имеющего в D точку сгущения порядка n , то $\{f_k(z)\}$ сходится равномерно внутри D , и притом к n -аналитической функции.

Из теоремы единственности и теоремы Витали следует, что иногда возможно сделать заключение о свойствах n -гармонических функций (u), если известны некоторые свойства им сопряженных полигармонических функций (v) (то есть таких, что $u + iv$ — n -аналитические функции).

9. В [8] (стр. 9) мы условились называть *открытой простой правильной аналитической дугой* (ОППАД) всякий такой гомеоморф Γ какого-либо интервала (α, β) , который может быть задан с помощью аналитической функции

$$z = \lambda(t) = \lambda_1(t) + i\lambda_2(t) \quad (\alpha < t < \beta), \quad (21)$$

$$\text{причем} \quad \lambda'(t) \neq 0 \quad \text{на } (\alpha, \beta) \quad (22)$$

(случаи $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$ не исключаются).

Следующее предложение имеет место для полианалитических функций произвольного (не обязательно конечного) порядка (справедливость его для полианалитических функций порядка 2 была нами отмечена в [8]).

Теорема 4 (вторая теорема единственности для полианалитических функций). Пусть две функции $f(z)$ и $g(z)$, полианалитические на некоторой ОППАД Γ , принимают равные значения на некотором множестве E , принадлежащем дуге Γ и имеющему хотя бы одну предельную точку (ζ_0) на Γ . Тогда $f(z)$ и $g(z)$ совпадают на всей дуге Γ .

Доказательство. Дуга Γ может быть задана уравнением вида (21), где $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ — вещественные аналитические функции на интервале (α, β) . Пусть точка ζ_0 соответствует значению параметра $t = \tau_0$. Выберем какой-нибудь сегмент $[a, b]$ так, чтобы $\alpha < a < \tau_0 < b < \beta$. Функция $z = \lambda(t)$ отображает этот сегмент на некоторую (замкнутую) дугу γ , принадлежащую дуге Γ . Рассмотрим теперь плоскость комплексного переменного t . В ней существует такая область Δ , содержащая сегмент $[a, b]$, в которой функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и $\lambda(t)$ остаются аналитическими.

Обозначим через τ какую-либо точку из сегмента $[a, b]$. Ей соответствует некоторая точка ζ дуги γ (например, если $\tau = \tau_0$, то $\zeta = \zeta_0$). В некоторой окрестности $D_1(\zeta)$ точки ζ функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta})^k \varphi_k(\zeta; z), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta})^k \psi_k(\zeta; z) \quad (23)$$

(здесь $\varphi_k(\zeta; z)$ и $\psi_k(\zeta; z)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ — аналитические функции переменного z). Так как $\lambda'(\tau) \neq 0$, то возможно выбрать окрестность $\Delta(\tau)$ точки τ настолько малой, чтобы функция $z = \lambda(t)$ отображала $\Delta(\tau)$ взаимнооднозначно на некоторую подобласть $\delta(\zeta)$ круга $D_1(\zeta)$.

Из бесконечной системы кругов $\Delta(\tau)$, покрывающей сегмент $[a, b]$, возможно (в силу леммы Гейне-Бореля) выделить конечную систему кругов, обладающих тем же свойством; в эту систему можем всегда считать включенным круг $\Delta_0 = \Delta(\tau_0)$. Обозначим эти круги (в порядке возрастания абсцисс их центров) через Δ_k ; $\Delta_k = \Delta(\tau_k)$ ($k = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$). А соответствующие им области плоскости переменного z обозначим через δ_k ; $\delta_k = \delta(\zeta_k)$, где $\zeta_k = \lambda(\tau_k)$.

Часть интервала (α, β) , лежащую в круге Δ_k , обозначим через i_k ; интервалы $\{i_k\}$ в своей совокупности целиком покрывают сегмент $[a, b]$. Отображение $z = \lambda(t)$ сопоставляет интервалу i_k некоторую дугу γ_k — часть дуги Γ ; в своей совокупности дуги $\{\gamma_k\}$ покрывают всю дугу γ . Заметим еще, что при любом k ($-m \leq k \leq n-1$) интервалы i_k и i_{k+1} имеют общий интервал; аналогично, дуги γ_k и γ_{k+1} имеют общую дугу.

В области δ_0 функции $f(z)$ и $g(z)$ представимы в виде:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta}_0)^k \varphi_k(\zeta_0; z), \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{z} - \bar{\zeta}_0)^k \psi_k(\zeta_0; z). \quad (24)$$

Функции $f(z)$ и $g(z)$ представляют собой аналитические функции двух переменных x, y в δ_0 :

$$f(z) = \varphi(x, y), \quad g(z) = \psi(x, y). \quad (25)$$

Положим в (25) $x = \lambda_1(t)$, $y = \lambda_2(t)$ и рассмотрим в Δ_0 две аналитические функции:

$$\Phi(t) = \varphi[\lambda_1(t), \lambda_2(t)], \quad \Psi(t) = \psi[\lambda_1(t), \lambda_2(t)]. \quad (26)$$

Если t — вещественное число из сегмента $[a, b]$, то

$$\Phi(t) = f[\lambda(t)], \quad \Psi(t) = g[\lambda(t)]. \quad (27)$$

(Для невещественного t числа $\Phi(t)$ и $f[\lambda(t)]$ могут оказаться различными; то же относится к числам $\Psi(t)$ и $g[\lambda(t)]$).

По условию теоремы 4 в множестве E содержится такая последовательность точек $\{z_v\}$, что $z_v \rightarrow \zeta_0$ при $v \rightarrow \infty$. Начиная с некоторого номера v_0 , точка z_v будет лежать в области δ_0 . Так как отображе-

где $z = \lambda(t)$ взаимно однозначно в Δ_0 , то в Δ_0 обязательно найдется такая точка t_0 , что $\lambda(t_0) = z_0$. Ясно, что при $v \rightarrow \infty$ $t_v \rightarrow \tau_0$ (ибо $z_v \rightarrow z_0$). Кроме того $\Phi(t_v) = \Psi(t_v)$ ($v > v_0$).

В силу известной теоремы единственности для аналитических функций $\Phi(t) = \Psi(t)$ в Δ_0 , а, следовательно, и на интервале I_0 .

Учитывая (27), заключаем, что на интервале I_0

$$f[\lambda(t)] = g[\lambda(t)].$$

А это означает, что на дуге γ_0

$$f(z) = g(z).$$

Теперь можно повторить аналогичное рассуждение применительно к кругам Δ_1 и Δ_{-1} и показать, что $f(z) = g(z)$ и на дугах γ_1 и γ_{-1} .

Повторяя аналогичные рассуждения достаточное число раз, можно убедиться, что $f(z) = g(z)$ на всех дугах γ_k ($k = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$), а, следовательно, — на всей дуге γ .

Так как всегда можно выбрать сегмент $[a, b]$ таким, чтобы дуга γ содержала наперед заданную точку дуги Γ , то отсюда следует, что для любой точки z дуги Γ

$$f(z) = g(z),$$

что и требовалось доказать.

Смоленский педагогический
институт им. К. Маркса

Поступила 20 XI 1964

Մ. Բ. ԲԱԼԿ

ԳԻՄՆԱԶԻԱԿԱՆ ԹԵՄԱԴԵՄԱՆԵՐ ՊԱՆԴԵՄԱԿՆԵՐԻ ԶՈՒՆԿՅԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

$f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է n կարգի պոլիանալիտիկ D տիրույթում, եթե $f(z)$ -ը D -ում ներկայացվել է հետևյալ տեսքով՝

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k \varphi_k(z),$$

որտեղ $\varphi_k(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են D -ում ($k=0, 1, \dots, n-1$)՝ a կետը կոչվում է n կարգի խտացման կետ E բազմություն համար, եթե E -ում պարունակվում են n հաջորդականություններ՝

$$z_v^{(k)} = a + t_v^{(k)} \exp(i\alpha_v^{(k)}) \quad (k=1, 2, \dots, n; v=1, 2, \dots, n)$$

($t_v^{(k)}$ և $\alpha_v^{(k)}$ թվերը իրական են), ըստ որում $\alpha^{(k)}$ թվերը տարբեր են և պատկանում են $[0, \pi]$ կիսասեղանին:

Մի ա կ ու թ լ ա ն առաջին թ եր ե մ ա ն.— եթե $f(z)$ և $g(z)$ երկու ֆունկցիաները մի որևէ D տիրույթում n կարգի պոլիանալիտիկ են և համ-

ընկնում են D -ում n կարգի խտացման կետ ունեցող E բազմություն վրա, ապա $f(z) = g(z)$ ամենուրեք D -ում:

Այս թեորեմն ազատագործված զաղափարները և ինքը՝ թեորեմն տարածվում են այն դեպքի վրա, երբ $n = \infty$:

Միակույթյան առաջին թեորեմն ընդհանուր է միատարի հայտնի թեորեմի անալոգը պոլիանալիտիկ ֆունկցիաների համար:

Միակույթյան երկրորդ թեորեմն. — Դիցուք $f(z)$ և $g(z)$ երկու ֆունկցիաներ, որոնք պոլիանալիտիկ են մի բաց պարզ կոննալոք անալիտիկ Γ աղեղի վրա, համասար արժեքներ են ընդունում մի E բազմության վրա, որը պատկանում է Γ աղեղին և ունի թեկուզ մեկ անհատական կետ Γ -ի վրա. այն ժամանակ $f(z) = g(z)$ -ի ամբողջ Γ աղեղի վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Burgatti P.* Sulle funzioni analytiche d'ordini n. „Bolletino della Unione matematica Italiana“, v. I, 1922.
2. *Teodorescu N.* La dérivée aréolaire et ses applications physiques. Thèse. Paris. Gauthier—Villars, 1931.
3. *Балк М. Б.* К теории полианалитических функций. Сб. „V Всесоюзная конференция по теории функций“, Ереван, 1960.
4. *Саркисян С. Ц.* Свойства решений систем Коши-Римана с нелинейными правыми частями. Доклады АН АрмССР, 24, № 3, Ереван, 1963.
5. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М., 1950, стр. 290—295.
6. *Балк М. Б.* Об n -аналитических функциях. В сб. „Смоленский педагогический институт. Рефераты и тезисы докладов XI научной конференции“, Смоленск, 1960.
7. *Привалов И. и Пчелин Б.* К общей теории подгармонических функций. Математический сборник, новая серия, 2, № 4, 1937.
8. *Балк М. Б.* О биналитических функциях с изолированными α -точками. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.

МАТЕМАТИКА

В. А. ГУСЕВ

ОБ АНАЛОГЕ ИНТЕГРАЛА КОШИ ДЛЯ
 МОНОГЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Г. К. Мойсил в своей работе [1] построил аналог формулы Коши для некоторых частных видов гиперкомплексных моногенных функций. В настоящей работе выводится аналог формулы Коши для некоторых иных видов таких функций и, в частности, получено интегральное представление для бианалитических функций (о них см. Балк М. Б. [2, 3]).

§ 1. Пусть $z = x + iy$, $p(z) = \sum_{i=1}^n p_i(z) \varepsilon_i$, где $p_i(z)$ — комплексная функция действительных переменных x, y класса $C^1(D)$ для некоторой односвязной области D ; $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ ($\varepsilon_1 = 1$) — база некоторой ассоциативной коммутативной алгебры A с единицей над полем комплексных чисел. Предполагаем, что в D существует $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{-1}$ или $\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{-1}$.

Следуя В. С. Федорову [4–6] назовем функцию $f(x, y)$ моногенной по p в D , если в этой области найдется такая функция $\varphi(x, y)$, обозначаемая $\frac{df}{dp}$, что $\frac{df}{\partial x} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{df}{\partial y} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y}$.

Теорема 1. Пусть найдется такая точка $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, что

$$1^\circ \frac{1}{p - p_0} \text{ существует в области } D \text{ с исключенной точкой } z_0, \\
 (p = p(z), p_0 = p(z_0)),$$

2° в точке z_0 для всякого действительного φ имеем

$$F(\varphi, z_0) = \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}^1 L_j(\varphi) & \dots & \sum_{j=1}^m a_{mj}^1 L_j(\varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{1j}^m L_j(\varphi) & \dots & \sum_{j=1}^m a_{mj}^m L_j(\varphi) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$L_j(\varphi) = a_j \cos \varphi + b_j \sin \varphi, \quad a_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial x} \right)_{z_0}, \quad b_j = \left(\frac{\partial p_j}{\partial y} \right)_{z_0}, \quad j = 1, \dots, m$$

a_{ij}^t ($i, j, t = 1, \dots, m$) — комплексные постоянные в таблице умножения элементов базы $z_1, \dots, z_m$ данной алгебры:

$$z_i z_j = \sum_{t=1}^m a_{ij}^t z_t.$$

Тогда для всякой функции $f(x, y)$, моногенной по $p(x, y)$ в D получим

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \begin{cases} 0, & \text{точка } z_0 \text{ вне } C \\ K(x_0, y_0) f(x_0, y_0), & z_0 \text{ внутри } C, \end{cases} \quad (1)$$

где C — кусочногладкая простая замкнутая кривая внутри D , содержащая точку z_0 внутри или вне себя;

$$K(x_0, y_0) = \oint_C \frac{dp^0}{p - p_0}.$$

Доказательство. Полагаем $\Delta p = \sum_{j=1}^m \Delta p_j z_j = p(z) - p(z_0)$. Пусть

D_0 — круг с центром в точке z_0 радиуса R , $\bar{D}_0 \subset D$, D_1 — ограниченная замкнутая область, содержащая круг D_0 и расположенная строго внутри D ; $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$. Тогда $\Delta p_j = a_j \rho \cos \varphi + b_j \rho \sin \varphi + \omega_j \rho$, где $\omega_j \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Очевидно, что $|\Delta p_j| < c_j \rho$, $c_j = \text{const} > 0$ для $z \in D_1$. По условию $\frac{1}{p - p_0}$ в области D с исключенной точкой z_0

существует. Найдем такой элемент $\tau = \sum_{k=1}^m \tau_k z_k \in A$, чтобы $\Delta p \cdot \tau = 1$; отсюда придем к системе

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^m \tau_k \sum_{j=1}^m a_{kj}^1 \Delta p_j = 1 \\ \sum_{k=1}^m \tau_k \sum_{j=1}^m a_{kj}^t \Delta p_j = 0 \quad t = 2, \dots, m \end{cases}$$

с определителем $\Delta = \rho^m [F(\varphi, z_0) + \omega]$, где $\omega \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Так как по условию $F(\varphi, z_0) \neq 0$, то

$$2\mu = \min_{0 < \varphi < 2\pi} |F(\varphi, z_0)| > 0. \quad (2)$$

Пусть радиус R столь малый, чтобы иметь для $z \in D_0$:

$$|\omega| < \mu. \quad (3)$$

* Этот интеграл не зависит от выбора указанной кривой C , окружающей точку z_0 [5].

Из (2) и (3) следует, что в круге $\bar{D}_0$ имеем для $z \neq z_0$:

$$|\Delta| > \mu \rho^m, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

откуда, очевидно, $|\tau_h| < \frac{\tilde{c}_h}{\mu \rho}$, где $\tilde{c}_h = \text{const} > 0$, $h = 1, \dots, m$. Поэтому

$|\tau| < \frac{\Gamma}{\rho}$, где $\Gamma = \text{const} > 0$, то есть

$$\left| \frac{1}{p - p_0} \right| < \frac{\Gamma}{\rho}. \quad (4)$$

Кроме того, в области $\bar{D}_0$ (с исключенной точкой z_0) $\frac{1}{p - p_0}$ будет моногенной по p [5] и, следовательно,

$$\bar{J}_C \equiv \oint_C \frac{dp}{p - p_0} = \oint_\gamma \frac{dp}{p - p_0} \equiv \bar{J}_\gamma,$$

где γ — окружность радиуса ρ с центром в точке z_0 , причем γ внутри C и внутри круга D_0 . Интеграл $\bar{J}_C$ есть функция от z_0 . Обозначив

$J_C = K(x_0, y_0)$, получим $\oint_C \frac{dp}{p - p_0} = K(x_0, y_0)$. Пусть $f(x, y)$ моно-

генна по p , тогда $\frac{f}{p - p_0}$ будет моногенна по p в D с исключенной точкой z_0 . Поэтому для любого контура $C \subset D$ (контур C содержит точку z_0 внутри или вне себя) и для любой окружности γ с центром в точке z_0 и радиуса ρ , заключенной внутри C и в круге $\bar{D}_0$, имеем

$$1) J_C \equiv \oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \oint_\gamma \frac{f dp}{p - p_0} \equiv J_\gamma, \text{ если } z_0 \text{ внутри } C,$$

$J_C = 0$, если z_0 вне C .

$$2) \lim_{\rho \rightarrow 0} J_\gamma = f(x_0, y_0) \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{dp}{p - p_0} + \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{p - p_0} dp$$

Из (4) и очевидного неравенства $\oint_\gamma |dp| < \tilde{c}_0 \rho$, $\tilde{c}_0 = \text{const}$ следует

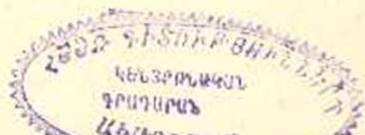
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_\gamma \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{p - p_0} dp = 0,$$

откуда и следует (1).

Теорема доказана.

Замечание 1. Рассмотрим в качестве примера алгебры A такую алгебру $\bar{A}$ второго ранга с базой $1, \varepsilon$, что $\varepsilon^2 = \nu$, где ν — некоторое комплексное число.

Получим $p = p_1 + \varepsilon p_2$. Тогда имеем



$$F(\varphi, z_0) = (a_1^2 - va_2^2) \cos^2 \varphi + 2(a_1 b_1 - va_2 b_2) \cos \varphi \sin \varphi + (b_1^2 - vb_2^2) \sin^2 \varphi,$$

откуда, очевидно, следует, что теорема 1 имеет место в случае

$$a_1^2 - va_2^2 \neq 0, \quad b_1^2 - vb_2^2 \neq 0, \quad \text{Im} \frac{b_1 \pm \sqrt{v} b_2}{a_1 \pm \sqrt{v} a_2} \neq 0,$$

если $\Delta p_1^2 - v \Delta p_2^2 \neq 0$ для $z \neq z_0$.

Следствие. Если алгебра A рассматривается над полем действительных чисел, то из замечания 1 следует, что теорема 1 может иметь место только в том случае, когда алгебра $\bar{A}$ изоморфна алгебре обыкновенных комплексных чисел и получим известную формулу Коши.

Замечание 2. Пусть $p = z + iz$, $f = u + iv$, где $z^2 = 0$, u, v — комплексные функции x, y , тогда p удовлетворяет условию теоремы 1, и если f моногенна по p в D , то

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = h(x_0, y_0) f(x_0, y_0), \quad h(x_0, y_0) = \oint_C \frac{dp}{p - p_0},$$

причем, легко показать,

$$\oint_C \frac{dp}{p - p_0} = 2\pi i,$$

откуда

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0}.$$

Но функция $f = u + iv$, моногенная по $p = z + iz$ имеет вид [6]: $f(x, y) = u(z) + i[\psi(z) + z u'(z)]$, где $u(z), \psi(z)$ — аналитические, тогда

$$\oint_C \frac{f dp}{p - p_0} = \begin{cases} 2\pi i [u(z_0) + i[\psi(z_0) + z_0 u'(z_0)]] & z_0 \text{ внутри } C \\ 0 & z_0 \text{ вне } C \end{cases}$$

§ 2. Пример интеграла типа Коши

Сохраняя все введенные обозначения (замечание 2), назовем интегралом типа Коши интеграл вида $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0}$, где $f = u + iv$ — какая-нибудь непрерывная функция на контуре C , $p = z + iz$, $z^2 = 0$. Полагам

$$f_1(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f dp}{p - p_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u dz}{z - z_0} + \left(\frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right) \right\}.$$

Тогда, как известно, можем положить

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{u dz}{z - z_0} = \varphi(z_0), \quad \frac{\bar{z}_0}{2\pi i} \oint_C \frac{u dz}{(z - z_0)^2} = \bar{z}_0 \varphi'(z_0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u \bar{z}}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right\} = \psi(z_0),$$

где $\varphi(z_0)$, $\psi(z_0)$ — аналитические функции внутри и вне C , и получим

$$f_1(z_0) = \varphi(z_0) + z_0 [\psi(z_0) + \bar{z}_0 \varphi'(z_0)], \quad (5)$$

то есть, как легко видеть, в этом примере функция $f_1(z_0)$ будет моногенной по $p = z_0 + z \bar{z}_0$ внутри и вне контура C . [Небезинтересно отметить, что из формулы (5) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} - \frac{u(z - \bar{z}_0)}{(z - z_0)^2} dz + \frac{v d\bar{z}}{z - z_0} \right\} = \psi(z_0) + \bar{z}_0 \varphi'(z_0),$$

где в правой части имеем так называемую бианалитическую функцию [2, 3].

§ 3. Пусть $f(x, y) \in C'(D)$ — моногенная по $p = z(z) + z\theta(\bar{z})^*$ ($z^2 = 0$) в односвязной области D с границей Γ и непрерывна на Γ .

Обозначим $r = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$$\varphi_1 = \frac{x - x_0}{r^2} = \frac{\partial \ln r}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{y - y_0}{r^2} = \frac{\partial \ln r}{\partial y}.$$

Тогда

$$\varphi_1 - i\varphi_2 = \frac{1}{z - z_0}, \quad \varphi_1 + i\varphi_2 = \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right). \quad (6)$$

Пусть

$$P = - \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) f, \quad Q = \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) f.$$

Рассмотрим область $D_0 = D - D_0$, где D_0 — замкнутый круг радиуса ρ с центром в точке z_0 и границей Γ_0 ($\bar{D}$ расположен строго внутри D).

По формуле Грина будем иметь (предполагая допустимость формулы Грина для D_0):

$$\int_{\partial D_0} P dx + Q dy = \int_{D_0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial x} - \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\varphi_1 \frac{\partial p}{\partial y} + \varphi_2 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right\} dx dy.$$

* $z(z) + \theta(\bar{z})$ — аналитическая функция от $z(\bar{z})$.

Откуда

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + \iint_{\tilde{D}} \left\{ \varphi_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \varphi_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

В силу моногенности f по p имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{dp} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

и, полагая $(\nabla p)^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2$, получим

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + \iint_{\tilde{D}} \varphi_1 \frac{df}{dp} (\nabla p)^2 dx dy. \quad (7)$$

Имеем $\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha' + i\theta'$, $\frac{\partial p}{\partial y} = i\alpha' - i\theta'$, откуда $(\nabla p)^2 = 4\alpha'\theta'$. Кроме того

$$Pdx = -[\varphi_1 (i\alpha' - i\theta') + \varphi_2 (\alpha' + i\theta')] f dx = \\ = -i(\varphi_1 (\alpha' - \theta') - i\varphi_2 (\alpha' + i\theta')) f dx.$$

$$Qdy = [\varphi_1 (\alpha' + i\theta') - \varphi_2 (i\alpha' - i\theta')] f dy = \\ = -i[i\varphi_1 (\alpha' + i\theta') + \varphi_2 (\alpha' - i\theta')] f dy.$$

$$Pdx + Qdy = -if[\varphi_1 \alpha' (dx + idy) - \varphi_1 \theta' (dx - idy) \varepsilon - \\ - i\varphi_2 \alpha' (dx + idy) - i\varphi_2 \theta' (dx - idy) \varepsilon] =$$

$$= -if[(\varphi_1 - i\varphi_2) d\alpha - \varepsilon(\varphi_1 + i\varphi_2) d\theta] = -i \left\{ \frac{f d\alpha}{z - z_0} - \varepsilon \frac{f d\theta}{z - z_0} \right\}.$$

На окружности $\Gamma_\rho: z - z_0 = \rho e^{i\theta}$, $\bar{z} - \bar{z}_0 = \rho e^{-i\theta}$, $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$,

$$d\theta = \theta' dz = -i\theta' e^{-i\theta} d\bar{z}, \quad \frac{d\alpha}{z - z_0} = i\alpha' d\bar{z}, \quad \frac{d\theta}{z - z_0} = -i\theta' d\bar{z}.$$

Откуда, в пределе при $\rho \rightarrow 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(x_0, y_0) (\alpha'(z_0) + i\theta'(z_0)) = f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Поэтому формула (7) в пределе примет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{f d\alpha}{z - z_0} - \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{f d\theta}{z - z_0} \right\} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{\pi} \iint_{\tilde{D}} \varphi_1 \frac{df}{dp} \alpha' \theta' dx dy + \\ + f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x}$$

и, в силу (6)

$$f(x_0, y_0) \frac{\partial p(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{f dz}{z - z_0} - z \frac{f d\bar{z}}{z - \bar{z}_0} \right\} - \\ - \frac{z}{\pi} \iint_D \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy,$$

где

$$\iint_D \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy = \\ = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{D_{r0}} \frac{df}{dp} \alpha' \theta' \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy.$$

Рассмотрим случай $p = z + z\theta(z)$. Тогда

$$\frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f$$

и будем иметь:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(x, y) dz^*}{z - z_0}, \\ v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{v dz}{z - z_0} - \frac{u d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - \theta'(\bar{z}) \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{du}{dz} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) \theta' dx dy$$

а, в частности, при $\theta(\bar{z}) \equiv \bar{z}$ получим

$$v(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma} \frac{v dz}{z - z_0} - \frac{u d\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - \frac{u d\bar{z}}{z - z_0} \right\} - \\ - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{du}{dz} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right) dx dy.$$

В этом случае $v(x, y) = \psi(z) + zu'(z)$ и мы получили другой вид интегрального представления для бианалитической функции.

* $f = u + iv$ (§ 1).

Վ. Ա. ԳՈՒՍԵՎ

ՄՈՆՈԳԵՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՍՄԱՐ ԿՈՇՈՒ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԱՎՈԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա աշխատության մեջ հետազոտվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում տեղի ունի Կոշու հայտնի բանաձևը երկու իրական փոփոխականների (§ 1) մոնոգոն հիպերկոմպլեքսային ֆունկցիաների համար:

Դիտարկվում է Կոշու տիպի ինտեգրալի մի օրինակ նշված ֆունկցիաների (§ 2) համար, ստացված են նաև ինտեգրալ ներկայացումներ բիանալիտիկ ֆունկցիաների համար (վերջիններին մասին տես Մ. Բ. Բալի [2, 3]):

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Moisil Gr. C. Metoda functiilor de variabilă ipercomplexă în idrodinamica plană a lichidelor vâscoase incompresibile. Studii și Cercetări Mat. Acad. RPR, I, 1, 1950, 9—35.
2. Балк М. Б. Теорема Пикара для целых бивалентных функций. ДАН СССР, 152, № 6, 1963, 1282—1285.
3. Балк М. Б. Вырожденные бивалентные отображения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964, 9—15.
4. Федоров В. С. Об одном виде гиперкомплексных моногенных функций. Математ. сборник, 50(92), 1960, 101—108.
5. Федоров В. С. Основные свойства обобщенных моногенных функций. Известия ВУЗ-ов, Математика, № 6 (7), 1958, 257—265.
6. Морев И. А. Об одном обобщении понятия моногенных функций. Математ. сб., 42(84), 1957, 197—206.

МАТЕМАТИКА

Р. Л. ШАХБАГЯН

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
 ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В цилиндрической области $\Omega = (0, T) \times G$, где G — ограниченная область евклидова пространства R_n , рассмотрим первую краевую задачу для параболического уравнения второго порядка вида

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(Du) = h(t, x), \quad (1)$$

где

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad D = (D_1, \dots, D_n), \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad A_i = \frac{\partial A}{\partial D_i}$$

$$|A(\xi_1, \dots, \xi_n)| \leq C(|\xi|^p + 1), \quad A(0) = 0.$$

Функции $A_i(\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеют [порядок роста по ξ , не превосходящий $p-1$, причем, для простоты, предполагается, что при $p-1 \geq 1$

$|A_i(\xi_1, \dots, \xi_n)| \leq C(|\xi|^{p-1} + 1)$, где $|\xi| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$. На боковой поверхности $B = (0, T) \times \Gamma$, где Γ — граница G , зададим, для простоты, нулевые граничные условия

$$u|_B = 0, \quad (2)$$

а при $t=0$ — начальное условие

$$u|_{t=0} = 0. \quad (2')$$

Используя то обстоятельство, что уравнение (1) имеет „потенциальную“ форму, удастся получить априорную оценку для возможных решений задачи (1), (2), (2'), из которой следует существование у решения суммируемой с квадратом производной по времени.

Это позволило рассмотреть уравнения более общего вида и доказать для них однозначную разрешимость первой краевой задачи.

Введем некоторые обозначения. Пусть $W_p^{(1)}$ — пространство С. Л. Соболева [3] функций $u(x)$ с нормой

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_G \left(|u|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3)$$

и $L_p(0, T; \dot{W}_p^{(1)})$ — пространство функций $w(t, x)$, $0 < t < T$, $x \in G$ с конечной нормой вида

$$\|w\|_{1,p} = \left(\int_0^T \|w(t, x)\|_{p,p}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^T \left(\int_G |w|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^p dx \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (4)$$

Обозначим через $\dot{W}_p^{(1)}(G)$ и $L_p(0, T; \dot{W}_p^{(1)})$ подпространства этих пространств, состоящие из функций, удовлетворяющих (в среднем) на Γ , соответственно на $(0, T) \times \Gamma$, нулевым граничным условиям. Функции $A_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеют степенной порядок роста на бесконечности по ξ :

$$|A_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)| \leq C(|\xi|^{p-1} + 1), \quad (5)$$

где $|\xi| = \sum_{i=1}^n |\xi_i|$, $p \geq 2$, C не зависит от ξ .

Решение задачи (1), (2), (2') ищется в пространстве $u(t, x) \in L_p(0, T; \dot{W}_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; L_2(G))$. Это решение $u(t, x)$, по определению, удовлетворяет соотношению

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du), \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] = [h, v], \quad (6)$$

где v — любая функция пространства $L_p(0, T; \dot{W}_p^{(1)})$, причем в последнем соотношении квадратными скобками обозначено следующее:

$[u, v] = \int_0^T \int_G u(t, x) v(t, x) dx dt$. В дальнейшем будет использовано

также обозначение: $(u, v) = \int_0^T \int_G u(x) v(x) dx$.

Условия, при выполнении которых существует и единственно решение задачи, для простоты, приведем в алгебраической форме.

Условие I. Для любых чисел ξ_i и η_k

$$E(\xi; \eta_k, \eta_l) = \sum_{k,l=1}^n A_{lk}(\xi_1, \dots, \xi_n) \eta_k \eta_l \geq \sum_{l=1}^n \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \eta_l^2, \quad (7)$$

где

$$A_{lk}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{\partial A_l}{\partial \xi_k},$$

$$\varphi(z) = c^2(1 + |z|^{p-2}). \quad (8)$$

Условие II. Функции $A_l(\xi_1, \dots, \xi_n)$ удовлетворяют условию (5), а частные производные по ξ_k имеют порядок роста на единицу меньший, то есть

$$\left| \frac{\partial A_i(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\partial \xi_k} \right| \leq C(|\xi|^{p-2} + 1). \quad (9)$$

Условие III. Билинейная форма $E(\xi; \eta_k, \eta_l)$ оценивается сверху через соответствующую ей квадратичную форму:

$$E(\xi; \eta_k, \eta_l) = \left| \sum_{i,k} A_{ik}(\xi_1, \dots, \xi_n) \eta_k \eta_l \right| \leq C_1^2 (E(\xi; \eta_k, \eta_k) + E(\xi; \eta_l, \eta_l)). \quad (10)$$

Предположим далее, что функция $h(t, x)$, входящая в правую часть уравнения (1), непрерывна и допускает непрерывные частные производные до второго порядка в Ω , кроме того, $h(t, x)$ удовлетворяет условию согласования

$$(h(t, x), v(x))|_{t=0} = 0, \quad v \in W_p^{(1)}(G). \quad (11)$$

Как доказано в работе [1], при выполнении вышесформулированных условий задача (1), (2), (2') имеет, и притом единственное, решение $u(t, x) \in L_p(0, T; W_p^{(1)})$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; L_2(G))$ при любых гладких правых частях $h(t, x)$, удовлетворяющих соотношению (11). Решение задачи строится с помощью некоторого аналога метода Галеркина. Выбирается некоторая система базисных функций $\{v_i(x)\}$, k -ое приближение искомой функции $u(t, x)$ ищется в виде: $u_k(t, x) = \sum_{i=1}^k c_{ik}(t) v_i(x)$; функции $c_{ik}(t)$ подлежат определению.

Из равномерной оценки

$$\left[\frac{\partial z_k}{\partial t}, \frac{\partial z_k}{\partial t} \right] + \int_0^T |z_k(\tau, x)|_{m,p}^p d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^T E(D(z_k + f); V \psi \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i^2}) d\tau + \\ + \int_0^T (T - \tau) \left\{ E(D(z_k + f); \frac{\partial^2 z_k}{\partial x_i \partial t}) + \lambda \left(\frac{\partial z_k}{\partial \tau}, \frac{\partial z_k}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau \leq K(h, f), \quad (12)$$

где $z_k = \sum_{i=1}^k c_{ik}(t) v_i(x)$, $\psi(x)$ — гладкая функция, обладающая следующими свойствами:

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \dots, D^3 \psi|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial^4 \psi}{\partial \nu^4} > 0, \quad \psi(x) > 0 \text{ при } x \in G,$$

$f(x', t)$ — граничная функция: $u|_B = f(x', t) ((x', t) \in B)$, легко выводится сходимость галеркинских приближений к точному решению $u(t, x)$ задачи (1), (2), (2') и принадлежность

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \in L_2(\Omega'), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T; L_2(G)),$$

$$\sum_k \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right|^2 dx dt < \infty, \quad u \in L_p(0, T; W_p^{(1)}), \quad (13)$$

где $\Omega' = G \times (0, T')$, $T' < T$.

Входящая в оценку (12) постоянная $K(h, f)$ зависит, вообще говоря, от h , $\frac{\partial h}{\partial t}$, f , $\frac{\partial f}{\partial t}$. Мы покажем, что в случае уравнения (1), можно получить оценку, аналогичную оценке (12), в которой, однако, постоянная K зависит только от h и не зависит от $\frac{\partial h}{\partial t}$. Таким образом, при замыкании нам удастся расширить класс правых частей.

Действительно, умножив обе части уравнения (1) на произвольную функцию $v(x, t) \in L_p(0, T; W_p^{(1)})$ и проинтегрировав по Ω , получим

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du), \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] = [h, v]. \quad (14)$$

Введем обозначение

$$[u, v]' = \int_0^{T'} \int_{\Omega} u(x, t) v(x, t) dx dt.$$

Подставим в (14) $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ и заменим интегрирование по Ω интегрированием по Ω' . Получаем

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right]' + \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right]' = \left[h, \frac{\partial u}{\partial t} \right]'. \quad (15)$$

Докажем сходимость интегралов, входящих в (15). Конечность $\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right]'$ следует из (13). Далее

$$\begin{aligned} \left| \left[A_i(Du), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right]' \right| &\leq C \int \int_{\Omega'} \left(1 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p-1} \right) \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right| dx dt = \\ &= C \int \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right| dx dt + C \int \int_{\Omega'} \sum_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p-2}{2}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{\frac{p}{2}} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right| dx dt < \\ &\leq C \int \int_{\Omega'} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right| dx dt + \\ &+ C_1 \left(\int \int_{\Omega'} \sum_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^p dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \int_{\Omega'} \sum_k \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^{p-2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t} \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались порядком роста A_i на бесконечности и (13). Таким образом, сходимость второго слагаемого левой части (15) доказана. Сходимость же $\left[h, \frac{\partial u}{\partial t} \right]'$ следует также из (13). Преобразуем теперь соотношение (15)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right]' + \int_0^T \int \frac{\partial}{\partial t} (A(Du)) dx dt = \left[h, \frac{\partial u}{\partial t} \right]', \quad (16)$$

откуда получаем важную для дальнейшего оценку

$$c_2 \left[\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t} \right]' + \int_0^T A(Du)|_{t=T'} dx \leq C^* [h, h]'. \quad (17)$$

Прежде чем перейти к процессу замыкания оператора $L(u)$ относительно $h(t, x)$, получим еще одну оценку. С этой целью положим в соотношении (14) $v = ue^{-\lambda t}$, имеем

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, ue^{-\lambda t} \right]' + \sum_i \left[A_i(Du), e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]' = [h, ue^{-\lambda t}]'. \quad (18)$$

Легко видеть, что

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}, ue^{-\lambda t} \right]' = \frac{e^{-\lambda T'}}{2} (u(x, T'), u(x, T')) + \frac{\lambda}{2} [u, ue^{-\lambda t}]'. \quad (19)$$

Пользуясь (7) и (8), оценим

$$\begin{aligned} & \sum_i \left[A_i(D(f+u)) - A_i(Df), e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]' = \\ &= \sum_i \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau} A_i(D(\tau u + f)) d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dt = \\ &= \sum_i \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \left(\int_0^1 A_{ii}(D(f + \tau u)) d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dt \geq \\ &\geq \sum_i \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \left(\int_0^1 \varphi(D(f + \tau u)) d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dt \geq \\ &\geq C_2 \sum_i \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right) dt = c_2 \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \|u\|_{l,p}^p dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где $f(t, x)$ — произвольная функция, принадлежащая пространству $L_2(0, T'; W_p^{(1)})$. Из (19), (20) и (16), получим требуемую оценку

$$\frac{e^{-\lambda T'}}{2} (u(x, T'), u(x, T')) + \frac{\lambda}{2} [u, ue^{-\lambda t}]' + C_2 \int_0^{T'} e^{-\lambda t} \|u\|_{l,p}^p dt \leq$$

$$\begin{aligned} & \leq \left[\frac{\partial u}{\partial t}, u e^{-\lambda t} \right]' + \sum_i \left[A_i(D(u+f)) - A_i(Df), e^{-\lambda t} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right]' \leq \\ & \leq \int_0^{T'} e^{-\lambda t} (K_1 |h|_{0,q}^q + K_2 |u|_{1,p}^p) dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Перейдем теперь к процессу замыкания оператора $L(u)$ относительно $h(t, x)$. Пусть $h_n(t, x)$ — последовательность функций, удовлетворяющая условиям теоремы существования и единственности, причем

$$\int_0^{T'} |h_n - h_k|_{0,2}^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{при } n, k \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Этой последовательности правых частей соответствует последовательность решений $u_n(t, x)$, удовлетворяющих соотношению

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial t}, v \right]' + \sum_i \left[A_i(Du_n), \frac{\partial v}{\partial x_i} \right]' = [h_n, v]'. \quad (23)$$

Вычитая почленно из (23) такое же соотношение с заменой n на k , v — на $(u_n - u_k) e^{-\lambda t}$ и, пользуясь (21), получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2} [u_n - u_k, (u_n - u_k) e^{-\lambda t}]' + \int_0^{T'} e^{-\lambda t} (C_2 |u_n - u_k|_{1,p}^p) dt \leq \left[\frac{\partial (u_n - u_k)}{\partial t}, (u_n - u_k) e^{-\lambda t} \right]' \\ & (u_n - u_k) e^{-\lambda t} \Big|' + \sum_i \left[A_i(Du_n) - A_i(Du_k), \frac{\partial (u_n - u_k)}{\partial x_i} e^{-\lambda t} \right]' \leq \\ & \leq \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t} |h_n - h_k|_{0,q}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t} |u_n - u_k|_{1,p}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{a_{n,k}^2 + b_{n,k}^p}{b_{n,k}} \leq \tilde{C} \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t} |h_n - h_k|_{0,q}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (23^*)$$

Из (22) и (23*) следует, что

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} a_{n,k} = \lim_{n,k \rightarrow \infty} b_{n,k} = 0,$$

где

$$a_{n,k} = [u_n - u_k, (u_n - u_k) e^{-\lambda t}]', \quad b_{n,k} = \left(\int_0^{T'} e^{-\lambda t} |u_n - u_k|_{1,p}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначим $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ в пространстве $L_p(0, T'; W_p^{(1)})$. Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{1,p}^p = 0. \quad (24)$$

Оценим теперь

$$|A_i(Du) - A_i(Du_n)| = \left| \sum_k \int_0^1 A_{ik}(Du_n + \tau D(u - u_n)) d\tau D_k(u - u_n) \right| \leq \\ \leq C \left(1 + \sum_i |D_i u_n|^{p-2} + \sum_i |D_i(u - u_n)|^{p-2} \right) \left(\sum_i |D_i(u - u_n)| \right),$$

откуда при $p \geq 2$

$$\int_0^{T'} |A_i(Du) - A_i(Du_n)|^q dz \leq c^q \int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(1 + \sum_i |D_i u_n|^{p-2} + \right. \\ \left. + \sum_i |D_i(u - u_n)|^{p-2} \right)^q \left(\sum_i |D_i(u - u_n)| \right)^q dx dt \leq \\ \leq C_4 \left\{ \int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(1 + \sum_i |D_i u_n|^{p-2} + \sum_i |D_i(u - u_n)|^{p-2} \right)^{q \frac{p-1}{p-2}} dx dt \right\}^{\frac{p-2}{p-1}} \times \\ \times \left\{ \int_0^{T'} \sum_i |D_i(u - u_n)|^p dx dt \right\}^{\frac{1}{p-1}} \leq \\ \leq C_5 \left\{ \int_0^{T'} \left(1 + |u_n|_{L_p}^p + |u - u_n|_{L_p}^p \right) dz \right\}^{\frac{p-2}{p-1}} \left\{ \int_0^{T'} |u - u_n|_{L_p}^p dz \right\}^{\frac{1}{p-1}}. \quad (25)$$

Согласно (24), откуда следует, что левая часть (25) стремится к нулю. Из (17) следует (с помощью (24)), что равномерно ограничены $\left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right|_{0,2} \leq C$. Переходя к пределу в (23), получаем, что функция $u(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t, x)$ является решением задачи (1), (2), (2'). Пользуясь априорной оценкой (17), получаем слабую в L_2 сходимость $\frac{\partial u_n}{\partial t}$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть оператор $L(u)$ удовлетворяет условиям I, II, III. Тогда для правых частей $h(t, x) \in L_2(\Omega')$ существует единственное решение $u(t, x) \in L_p(0, T'; W_p^{2,1}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0, T'; L_2(G))$ задачи (1), (2), (2'), удовлетворяющее соотношению (14), при том выполнена априорная оценка (17).

Перейдем к рассмотрению уравнений, содержащих подчиненные члены, а именно, рассмотрим уравнение вида

$$L(u) + V(u) = h, \quad (1')$$

где

где

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(Du), \quad (26)$$

$$V(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u) + V_0(t, x, u). \quad (27)$$

Пусть оператор $L(u)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Для уравнения (1') рассмотрим задачу (2), (2'). Для доказательства однозначной разрешимости поставленной задачи, следуя идеям работы М. И. Вишика [2], докажем сначала подчиненность оператора $V(u)$, точнее его полную непрерывность.

Обозначим через $H(\Omega)$ пространство функций $u(t, x) \in L_{p'}(0, T; W_p^{(1)}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_H = \left(\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T \|u\|_{1,p}^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (28)$$

Лемма 1. Пусть $p \geq 2$ и функции $V_i(t, x, \xi)$, $(i=1, 2, \dots, n)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, то есть они непрерывны по ξ при почти всех $(t, x) \in \Omega$ и измеримы по t, x при всех значениях ξ . Пусть, далее, существует функция $f(t, x) \in L_{p'}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$ такая, что

$$|V_i(t, x, u)| \leq f(t, x) \text{ для } (t, x) \in \Omega, (i=1, \dots, n). \quad (29)$$

Тогда операторы

$$B_i(u) = \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u)$$

с областью определения $H(\Omega)$ и областью значений $L_{p'}(0, T; W_p^{(1)}(\Omega))$ вполне непрерывны.

Доказательство. Операторы $B_i(u)$ непрерывны. Действительно, пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_H = 0$, тогда по теореме В. В. Немыцкого [4] $V_i(t, x, u_n) \rightarrow V_i(t, x, u)$ по мере в Ω .

Кроме того, в силу (29), для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\iint_{\Omega} |V_i(t, x, u_n)|^{p'} dx dt \leq \iint_{\Omega} |f(t, x)|^{p'} dx dt < \varepsilon \quad (30)$$

при $\text{mes } \Omega < \delta$. Из (29) и (30) следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_i(t, x, u_n) - V_i(t, x, u)\|_{0,p'} = 0. \quad (31)$$

Далее

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u) \right\|_{-1, \rho'} =$$

$$= \sup_{v \in L_p(0, T; W_p^{(1)})} \frac{(\frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(t, x, u), v)}{\|v\|_{-1, \rho'}} \leq$$

$$\leq \|V_i(t, x, u_n) - V_i(t, x, u)\|_{0, \rho'} \rightarrow 0,$$

откуда и вытекает непрерывность операторов $B_i(u)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), (l, v) означает значение линейного функционала l на элементе v).

Теперь докажем полную непрерывность операторов $B_i(u)$. Пусть M — ограниченное множество в пространстве $H(\Omega)$, тогда, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева [3], оно будет компактно в пространстве $L_2(\Omega)$ и, следовательно, из него можно выбрать подпоследовательность $\{u_n\}$, сходящуюся в $L_2(\Omega)$. Отсюда, точно так же, как и выше, убеждаемся, что $B_i(u_n) \rightarrow B_i(u)$ в $L_{p'}(0, T; W_p^{(1)})$, что и доказывает полную непрерывность операторов $B_i(u)$ ($i = 1, \dots, n$). Полная непрерывность оператора $B_0(u) = V_0(t, x, u)$ доказывается аналогично. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству разрешимости задачи (1'), (2), (2'). С этой целью получим априорную оценку для возможных ее решений. Рассмотрим квадратичную форму

$$F(u, u) = \left[\frac{\partial u}{\partial t}, u \right] + \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[V_i(t, x, u), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + [V_0(t, x, u) - h(t, x), u(t, x)].$$

Если $u(t, x)$ — решение задачи (1'), (2), (2'), удовлетворяющее неравенству

$$F(u, u) \geq c^2 \|u\|_{1, p}^2 - C, \quad (32)$$

где $c > 0$, $C > 0$ не зависят от u , то, учитывая, что $F(u, u) = 0$, из (32) получаем априорную оценку для ее возможных решений

$$\|u\|_{1, p}^2 \leq \frac{C}{c^2} = M. \quad (33)$$

Таким образом, достаточно доказать справедливость неравенства (32). Не нарушая общности, можно предположить, что $A_i(0) = 0$, ($i = 1, \dots, n$). Оценим

$$\sum_{i=1}^n \left(A_i(Du), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \left(A_i(Du) - A_i(0), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{d}{d\tau} A_i(D(\tau u)) d\tau, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \left(\sum_{i,k} \int_0^1 A_{ik}(D(\tau u)) d\tau \frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) >$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \varphi(zDu) dz \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \geq c_1 \|u\|_{1,p}^p. \quad (34)$$

При выводе оценки (34) мы воспользовались условием (7) и оценкой Л. Н. Слободянского [5]:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_0^1 D^\alpha u^p dx \leq C_0 \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m} \right|^p dx,$$

где $u \in W_p^{(m)}(G)$.

Пусть, далее, выполнено следующее условие:

$$\sum_{i=1}^n \left[V_i(t, x, u), \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + |V_0(t, x, u) - h(t, x), u| \geq -(c_1 - c^2) \|u\|_{1,p}^p - C, \quad (35)$$

где c, c_1, C — положительные постоянные, причем c_1 то же, что и в (34). Тогда из (34) и (35) получаем

$$0 = F(u, u) \geq \frac{1}{2} (u(x, T), u(x, T)) + c_1 \|u\|_{1,p}^p - (c_1 - c^2) \|u\|_{1,p}^p - C \geq c^2 \|u\|_{1,p}^p - C$$

и, следовательно, верна априорная оценка (33). Таким образом, доказана следующая лемма

Лемма 2. Если главная часть $L(u)$ уравнения (1') удовлетворяет условию (7) или (34), а для подчиненных членов справедлива оценка (35), причем в (34) и (35) c_1 одно и то же, то для решений $u(t, x)$ справедлива априорная оценка (33).

Теорема 2. Пусть оператор $L(u)$ удовлетворяет условиям I, II, III, а оператор $V(u)$ — условиям леммы 2. Пусть, кроме того, любое решение уравнения

$$L(u) + tV(u) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (36)$$

имеет норму, не превосходящую M :

$$\|u\|_{1,p} \leq M, \quad (37)$$

где M не зависит от t . Тогда уравнение (1') или задача (1'), (2), (2') имеет по крайней мере одно решение $u \in H(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим операторное уравнение

$$L(u) = h, \quad u \in H(\Omega), \quad h \in L_2(\Omega). \quad (38)$$

В силу теоремы 1 уравнение (38) однозначно разрешимо. Обозначим его решение

$$u = R(h), \quad (39)$$

где $R = L^{-1}$. Докажем непрерывность оператора R . Пусть $L(u_1) = h_1$, $L(u_2) = h_2$, тогда, аналогично неравенству (34), имеем

$$\langle L(u_2) - L(u_1), u_2 - u_1 \rangle = \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du_2) - A_i(Du_1), \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x_i} \right] \geq \\ \geq c \|u_2 - u_1\|_{1,p}^p. \quad (40)$$

С другой стороны,

$$|\langle L(u_2) - L(u_1), u_2 - u_1 \rangle| \leq \|h_2 - h_1\|_{0,2} \|u_2 - u_1\|_{1,p}. \quad (41)$$

Из (40) и (41) следует

$$\|u_2 - u_1\|_{1,p}^{p-1} \leq c_3 \|h_2 - h_1\|_{0,2},$$

откуда и вытекает непрерывность оператора $R(u)$. Вернемся к уравнению (36). Вместо него рассмотрим вспомогательное уравнение относительно u

$$L(u) = -tV(w), \quad u, w \in L_p(0, T; W_p^{(1)}).$$

Согласно (38) и (39) имеем

$$u = R(-tV(w)) \equiv R_t(w).$$

Таким образом, доказательство разрешимости задачи (1'), (2), (2') сводится к доказательству существования неподвижной точки у оператора $R_1(u) = R(-V(u))$. Операторы $R_t(u)$ вполне непрерывны. В самом деле, V — вполне непрерывен по условию, а оператор R , как мы только что показали, непрерывен. При $t=0$ $R_0(w) = 0$, так как при $h=0$ единственным решением уравнения (38) является $u=0$. Отсюда следует, что степень покрытия нуля при отображении $u \rightarrow u - R_0(u)$ равна 1. На сфере радиуса $2M$: $\|u\|_{1,p} = 2M$, $u - R_t(u) \neq 0$, так как согласно условию (37) все решения уравнения (36) имеют норму, не превосходящую M . Следовательно, степень покрытия нуля при отображении $u - R_t(u)$ шара $\|u\|_{1,p} \leq 2M$ не зависит от t , и поскольку при $t=0$ она равна 1, то при $t=1$ она тоже равна единице, откуда следует существование такого u , что $u - R_1(u) = 0$. Теорема доказана.

Резюмируя, получим следующий результат.

Теорема 3. Если оператор $L(u)$ удовлетворяет условиям I, II, III, а оператор $V(u)$ — условиям лемм 1, 2, то задача (1'), (2), (2') имеет по крайней мере одно решение $u \in H(\Omega)$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 2. Так как по условию теоремы 2 выполнено неравенство (35), то имеем

$$t \langle V(u), u \rangle \geq -(c_1 - c^2) \|u\|_{1,p}^p - C,$$

причем предполагается, что $c^2 < c_1$, $0 \leq t \leq 1$. Все остальные условия теоремы 2 выполняются автоматически. Теорема доказана.

Докажем единственность решения задачи (1'), (2), (2').

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и, кроме того, для любых $u_1(t, x)$, $u_2(t, x) \in L_p(0, T; W_p^{(1)})$

$$\sum_{i=1}^n \left[V_i(t, x, u_1) - V_i(t, x, u_2), \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] +$$

$$+ [V_0(t, x, u_1) - V_0(t, x, u_2), u_1 - u_2] \geq -c_7 \|u_1 - u_2\|_{1,p}^p,$$

где $0 < c_7 < c$, тогда задача (1'), (2), (2') имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ — два решения задачи, тогда их разность $u_1 - u_2$ удовлетворяет соотношению

$$0 = \left[\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t}, u_1 - u_2 \right] + \sum_{i=1}^n \left[A_i(Du_1) - A_i(Du_2), \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[V_i(t, x, u_1) - V_i(t, x, u_2), \frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial x_i} \right] +$$

$$+ [V_0(t, x, u_1) - V_0(t, x, u_2), u_1 - u_2] \geq \frac{1}{2} (u_1 - u_2, u_1 - u_2)_{L^2} +$$

$$+ c_8 \|u_1 - u_2\|_{1,p}^p, \quad c_8 > 0.$$

При выводе оценки (43) мы воспользовались неравенством (40) и условием (42) теоремы. Из неравенства (43) следует, что $u_1 = u_2$. Теорема доказана.

В заключение пользуюсь случаем принести глубокую благодарность профессору М. И. Вишику за внимание к моей работе.

Московский энергетический
институт

Поступила 25 IV 1964

В. Л. ШАХБАЛАН

ԱՌԱՋԻՆ, ԵԶՐԱՅԻՆ ԵՆԴԻՐԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՔՎԱԶԻ-ԳԵՄՅԻՆ
ՊԱՐԱՔՈՒԿ ԼԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է տառչին եկրային խնդիրը երկրորդ կարգի քվադրիկային պարաբոլիկ հավասարումների համար, որոնց զվտալիք մասն տնի պատենցիալ տեսք, իսկ գործակիցների աճման կարգը անվերջությունում չի գերազանցում $p-1$ ($p-1 \geq 1$)։

Գործակիցների և աճ մասի վրա գնելով որոշակի սահմանափակումներ, որոնցից էականը հանդիսանում է հավասարման տարածական մասի կիսա-սահմանափակվածությունը, ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում։

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И. О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков. Математический сборник, 59, (дополнительный), 1962.
2. Вишик М. И. Квазилинейные сильно эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющих дивергентную форму. Труды Моск. мат. общества, 12, 1963.
3. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд. ЛГУ, 1950.
4. Немыцкий В. В. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Математический сборник, 41, 1934.
5. Слободецкий Л. Н. Оценки решений эллиптических и параболических систем. ДАН СССР, 120, № 3. 1958.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ВАРДАНЯН, Р. Е. МКРТЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

В настоящей статье предлагается метод исследования нестационарных напряжений с применением поляризационно-оптических измерений.

Исследуется напряженное состояние в консольной балке, ослабленной тремя отверстиями, при свободном колебании с затуханием. Картины полос интерференции в зоне отверстий в процессе колебания регистрируются при помощи скоростной кинокамеры СКС-1М.

Подобие нестационарных систем

Поляризационно-оптические исследования на моделях приобретают практическое значение лишь тогда, когда напряжения, перемещения и др., замеренные на моделях из полимерных материалов, могут быть перенесены на деталь конструкции реальных размеров.

Введем масштабы для напряжений, деформаций, линейных размеров, времени, плотности и модуля упругости следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \alpha_\sigma \sigma_m, & l_n &= \alpha_l l_m, & \rho_n &= \alpha_\rho \rho_m, \\ \varepsilon_n &= \alpha_\varepsilon \varepsilon_m, & t_n &= \alpha_t t_m, & E_n &= \alpha_E E_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Необходимым условием подобия является требование равенства коэффициентов Пуассона для модели и оригинала, то есть

$$\mu_n = \mu_m.$$

Если материал для модели выбран, то коэффициенты подобия для плотности α_ρ и модуля упругости α_E определяются однозначно. Коэффициент геометрического подобия α_l выбирается, исходя из удобства проведения эксперимента. Коэффициенты подобия напряжений α_σ , деформаций α_ε и времени α_t , должны выражаться через остальные коэффициенты подобия.

Для установления связи между этими коэффициентами, следуя А. Г. Назарову [1], мы пользуемся не методом анализа размерностей, как это часто делают при моделировании, а общими зависимостями динамики. Если пользоваться методом анализа размерностей, то должны

принимать $\alpha_i = 1$, так как относительная деформация — величина безразмерная.

Если исходить из общих зависимостей динамики, то это ограничение снимается и коэффициент α_i может принимать любое значение. Это дает более широкие возможности для моделирования.

Применив закон Гука, для натуре и модели получим

$$\alpha_z = \alpha_z \alpha_E. \quad (2)$$

Предположим, что на тело действуют поверхностные и объемные силы. Найдем коэффициенты подобия для этих сил.

Если на натуре действует сосредоточенная сила P_n , то напряжение на бесконечно малом элементе поверхности ΔS_n будет $P_n/\Delta S_n$. Соответствующее напряжение на подобной модели будет $P_m/\Delta S_m$. Согласно (1) можем написать

$$\frac{P_n}{\Delta S_n} = \alpha_z \frac{P_m}{\Delta S_m} \quad \text{или} \quad P_n = \alpha_z \alpha_i^2 P_m = \alpha_z \alpha_E \alpha_i^2 P_m. \quad (3)$$

Коэффициент подобия для объемных сил получим из уравнения равновесия теории упругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + R_x &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Применив эти уравнения, для модели и натуре будем иметь

$$R_n = \frac{\alpha_z}{\alpha_i} R_m. \quad (4)$$

В случае нестационарной задачи на тело, кроме поверхностных сил, действуют также и силы инерции, которые являются объемными силами. На основании (4) для моделирования сил инерции имеем

$$\left(\rho \frac{d^2 w}{dt^2} \right)_n = \frac{\alpha_z}{\alpha_i} \left(\rho \frac{d^2 w}{dt^2} \right)_m$$

или, применив соотношения (1), получим

$$\alpha_z = \alpha_i^2 \alpha_p \alpha_i^{-2}. \quad (5)$$

Эта формула дает возможность, в случае нестационарной задачи перейти от напряжения, измеренного на модели, к напряжениям в натуре.

Из соотношения (2) и (5) получаем зависимость для масштаба времени

$$\alpha_t = \alpha_i \sqrt{\frac{\alpha_p}{\alpha_E}}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай свободного колебания стержня с учетом затухания.

Если не учитывать инерции поворота внешнего затухания, то дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня можно записать в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial \xi^3} = 0,$$

где

$$\zeta^2 = \frac{\gamma F l^3}{g E J}, \quad \xi = \frac{x}{l}.$$

Из этого уравнения, с учетом того, что $\alpha_0 = \alpha_l$, получаем масштаб подобия для коэффициента затухания $h = \mu \omega^2$ следующим образом

$$\alpha_h = \alpha_\mu \alpha_\omega^2 = \alpha_l \frac{1}{\alpha_l^2} = \frac{1}{\alpha_l}. \quad (7)$$

Для частоты собственных колебаний

$$f = \omega \sqrt{1 - \frac{\mu^2 \omega^2}{4}}$$

получаем

$$f_n = \frac{f_n}{\alpha_l} = \frac{1}{\alpha_l} \sqrt{\frac{\alpha_E}{\alpha_\mu}} f_n. \quad (8)$$

Экспериментальная установка

Для поляризационно-оптических исследований нестационарных напряжений при колебаниях использовали поляризационную установку ППУ-5 и скоростную кинокамеру СКС-1М.

В качестве источника монохроматического света служила мощная ртутная лампа ДРШ-250 с зеленым светофильтром ($\lambda = 546,1 \text{ мк}$). Во избежание пульсации тока, которая сильно чувствуется при скоростной съемке картин полос, лампу ДРШ-250 питали постоянным током от генератора. Далее, для упрощения фокусировки картин полос и для возможности получения различных увеличений снимаемого объекта, в оптическую схему установки были введены дополнительные линзы с различными фокусными расстояниями.

Кинокамера СКС-1М при транспортировании 16 мм киноплёнки длиной 30 м дает возможность снимать со скоростью 4800 кадр/сек. Съемка производится на протяжении всей длины пленки. Однако, первые 12 м пленки соответствуют разгону камеры; на этой длине пленки скорость съемки постепенно возрастает. Чтобы изучаемый процесс был снят на последних 18 метрах пленки, процесс нагружения модели соответственно синхронизируется с началом работы камеры.

При проведении эксперимента оказалось, что при данной оптической схеме установки объектив камеры концентрирует свет в центре поля, и в связи с этим в центральной части кадров получается передержка, а по краям — недодержка. Далее кадры получаются очень

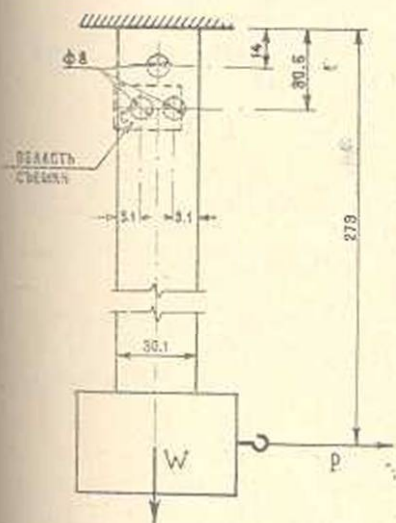
маленькими и занимают только половину полезной ширины пленки. В связи с этим съемки производились без объектива; при этом фокусировка картин полос достигалась с помощью дополнительных линз на поляризационной установке.

При съемке без объектива хорошо обеспечивается равномерность света на пленке, и кадры занимают всю полезную ширину пленки (величина кадров в два раза больше при том же относительном увеличении).

Были применены различные киноплёнки для фотографирования картин полос: негативные МЗ—2, А—2 и обратимая киноплёнка. Наиболее подходящим оказалась обратимая киноплёнка со светочувствительностью 65 ед. Приведенные ниже картины полос сфотографированы на обратимой киноплёнке.

Исследование концентрации напряжений около отверстий консольной балки при свободном колебании с затуханием

Размеры модели и схема ее нагружения приведены на фиг. 1.



Фиг. 1. Размеры модели и схема ее нагружения. Толщина $s_m = 6,2$ мм.

Оптическая постоянная материала модели $c_0^{(1,0)} = 12$ кг/см, модуль упругости $E_m = 33,10^3$ кг/см², удельный вес $\gamma_m = 1,4$ г/см³.

На свободном конце балки была закреплена сосредоточенная масса весом $W_m = 1,727$ кг, а в горизонтальном направлении через нитку приложена нагрузка $P_m = 3,133$ кг. Далее нагрузка P_m мгновенно снималась подрезанием нитки, и балка под действием инерционных сил совершала свободные колебания. Скоростная кинокамера включалась так, что первые три полупериода колебаний снимались на последних метрах пленки, где скорость достигает максимальной величины.

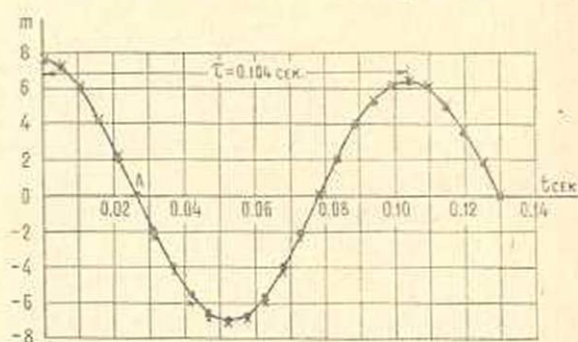
Непосредственным измерением на пленке определены частота съемки — 4800 кадр/сек, период колебаний для модели $\tau_m = 0,104$ сек. Частота колебаний $f_m = 1/\tau_m = 9,6$ герц.

Изменение порядка полосы m в точке C на контуре отверстия в зависимости от времени приведено на фиг. 2.

Коэффициент затухания h_m определяется на основании полученного графика

$$h_m = \frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{u_i}{u_{i+1}} \right| = \frac{1}{\tau} \ln \left| \frac{m_i}{m_{i+1}} \right| = \frac{1}{0,104} \ln \frac{7,6}{6,4} = 1,675.$$

Картины полос интерференции для участка OA графика, через равные интервалы времени приведены на фиг. 3.



Фиг. 2. Диаграмма изменения порядка полосы m в точке C модели. Порядки полос для статических нагрузок показаны крестиками.

Напряжение на контурных точках отверстия определяется по формуле

$$\sigma_m = \frac{\sigma_0^{(1,0)}}{s_m} m = 19,35 m. \quad (9)$$

Здесь $\sigma_0^{(1,0)} = 12 \text{ кг/см}$ — оптическая постоянная материала модели; $s_m = 0,62 \text{ см}$ — толщина модели: в точке C порядок полосы m берется из графика (фиг. 2).

Так как за принятый интервал между кадрами упругие волны пробегают несколько раз по длине балки, то естественно заснятые кадры в связи с интерференцией волн дают квазистатическое распределение напряжений.

Для сравнения были определены порядки полос в точке C модели при статическом приложении соответствующих нагрузок.

Нагрузки для различных моментов времени определяли² по формуле

$$P_m(t) = P_m e^{-h_m t} \cos \omega_m t,$$

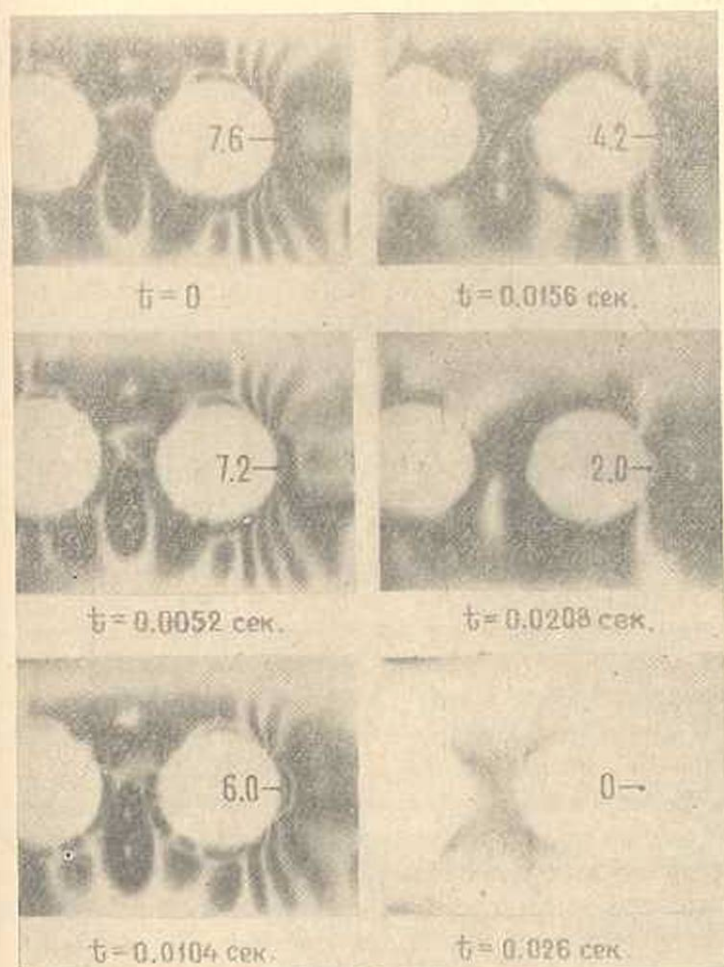
где по данным эксперимента $P_m = 3,133 \text{ кг}$, $h_m = 1,675$, $\omega_m = 2\pi f_m = 60,3$.

Как видно по фиг. 2, диаграммы для динамических и статических нагрузок практически совпадают: максимальное расхождение составляет 7%.

Для пересчета полученных величин с модели на натурную деталь воспользуемся формулами подобия, полученными выше.

Предположим, что стальная деталь ($E_n = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $\gamma_n = 7,8 \text{ г/см}^3$), геометрически подобная исследованной модели ($\lambda_l = 2$).

совершает свободные колебания при мгновенном удалении силы $P_0 = 20$ кг.



Фиг. 3. Картины полос интерференции для участка ОА диаграммы.

По формуле (3) определяем α_i

$$\alpha_i = \frac{1}{\alpha_E \alpha_i^2} \frac{P_0}{P_M} = \frac{1}{60,7 \cdot 4} \frac{20}{3,133} = 0,0263.$$

Вес сосредоточенной массы, закрепленной на свободном конце детали, определяется по этой же формуле

$$W_n = \alpha_i \alpha_E \alpha_i^2 W_M = 0,0253 \cdot 60,7 \cdot 4 \cdot 1,727 = 11 \text{ кг.}$$

Масштаб времени α_t определяется по формуле (6)

$$\alpha_t = 2 \sqrt{\frac{5,57}{60,7}} = 0,606.$$

Имея масштаб времени, по формулам (7) и (8) определяем коэффициент затухания и частоту колебаний для детали

$$h_n = \frac{1,675}{0,606} = 2,75; \quad f_n = \frac{9,6}{0,606} = 15,85 \text{ герц.}$$

Напряжения на натурной детали определяются по формуле (5)

$$\sigma_n = \frac{4 \cdot 5,57 \cdot 0,0263 \sigma_m}{0,606^2} = 1,585 \sigma_m,$$

где σ_m для контурных точек определяется по формуле (9).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1964

Գ. Ս. ՎԱՐԼԱՄՅԱՆ, Ր. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՉ-ՍՏԱՅԻՈՆԱՐ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ
ՖԻՅՈՏՈՒՄԱԶԳԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում առաջարկվում է ոչ-ստացիոնար լարումների հետազոտման էքսպերիմենտալ մեթոդ: Բերվում են դինամիկ խնդիրների համար նմանությամբ բանաձևերը: Ինտերֆերենցիոն շերտերի փոփոխությունը տատանման պրոցեսում նկարահանվում է կինոկամերայի միջոցով, 4800 կադր/վրկ. արագությամբ:

Որպես կոնկրետ խնդիր հետազոտված է կոնսոլային հեծանի անցքի շրջակայքում լարումների կոնցենտրացիայի փոփոխությունը հեծանի ազատ տատանումների դեպքում՝ մարման հաշվառմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Назаров А. Г. О механическом подобии твердых тел и его применение к исследованию строительных конструкций и сейсмостойкости сооружений. Известия АН АрмССР, серия техн. наук, II, № 4 и № 6, 1958.
2. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Изд. АН УССР, Киев, 1956.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. С. ГРИГОРЯН

К РАСЧЕТУ УСТОЙЧИВОСТИ В ОГРАНИЧЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ
 ВРЕМЕНИ ПОЛОГИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК В УСЛОВИЯХ
 ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ КОНЕЧНЫХ НАЧАЛЬНЫХ
 И КОНЕЧНЫХ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ
 ВОЗМУЩЕНИЯХ

Задача расчета на устойчивость в условиях ползучести материала заключается в определении наибольших значений грузовых параметров, при которых рассматриваемая конструкция устойчива на всем заданном промежутке времени (первая задача), а также в определении наибольшего промежутка времени, в течение которого конструкция устойчива при заданных значениях грузовых параметров (вторая задача). В последние годы эта задача привлекает особое внимание исследователей [1—17]. В [17] мы исходили из теории устойчивости движения А. М. Ляпунова [18]. Ниже задача рассматривается на основе теории устойчивости движения в ограниченном интервале времени при конечных начальных и конечных постоянно действующих возмущениях. Основы этой теории разработаны в [19—25].

§ 1. В [17] задача определения прогибов в условиях линейной ползучести материала в пологих гибких оболочках положительной гауссовой кривизны, при поперечной равномерно распределенной нагрузке, определяемой параметром q_0 , была сведена, в первом приближении в методе Бубнова-Галеркина, к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра вида

$$(a_1 + a_2 z_1) (1 - K^*) z_1 + (0.5 a_2 + a_3 z_1) (1 - K^*) z_1^2 + q_0 = 0, \quad (1.1)$$

где $z_1 = z_1(t)$ — характерный прогиб,

a_1, a_2, a_3 — постоянные, определяемые геометрической формой и граничными условиями рассматриваемой оболочки, а также коэффициентом Пуассона $\nu = \text{const}$;

$$K^* f = \int_{t_0}^t \tilde{K}(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Будем полагать, что исходя из той или иной теории ползучести материала, а также учитывая не только первое, но и некоторое конечное число последующих приближений в методе Бубнова-Галер-

кина, взамен (1.1) получена система из конечного числа дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dz_s}{dt} = F_s(t, z_1, \dots, z_n) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.2)$$

Для явлений ползучести характерен большой разброс опытных данных, поэтому, а также вследствие ряда других причин, которые не могут быть учтены заранее, рассматриваемый процесс нарастания прогибов в оболочке, взамен (1.2), в действительности, будет описан системой

$$\frac{dz_s}{dt} = F_s(t, z_1, \dots, z_n) + \psi_s(t, z_1, \dots, z_n) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.3)$$

содержащей постоянно действующие неизвестные возмущения, характеризуемые функциями $\psi_s(t, z_1, \dots, z_n)$ ($s = 1, \dots, n$).

В (1.2) и (1.3) F_s и ψ_s — вещественные функции, заданные в некоторой области H :

$$t \in \sigma = [t_0, t_0 + T], \|z - z_0\| = \sqrt{\sum_{s=1}^n (z_s - z_{s0})^2} \leq D + R, \quad (H)$$

где $t_0 \geq 0$; $D > 0$ и $R > 0$ — вещественные числа.

Ниже, в настоящем параграфе, мы будем пользоваться выкладками и критериями устойчивости С. К. Персидского [26], опуская доказательства и подробности его рассуждений.

Пусть

$$z_s(t) = f_s(t) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (1.4)$$

есть решение системы (1.2), проходящее при $t = t_0$ через точку $(t_0, z_{10}, \dots, z_{n0})$ области H .

Обозначим через $z_s = z_s(t)$ ($s = 1, \dots, n$) решение системы (1.3), проходящее при $t = t_0$ через точку $(t_0, z_{10} + \Delta z_{10}, \dots, z_{n0} + \Delta z_{n0})$ области H .

Допустим, что при всех $t \in \sigma$ выполняется неравенство

$$\|f\| \leq D. \quad (1.5)$$

Положим

$$z_s(t) = f_s(t) + x_s(t) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.6)$$

Очевидно, что тогда $x_s(t)$ будут решением системы

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.7)$$

где

$$X_s(t, x_1, \dots, x_n) = F_s(t, x_1 + f_1, \dots, x_n + f_n) - F_s(t, f_1, \dots, f_n),$$

$$\varphi_s(t, x_1, \dots, x_n) = \psi_s(t, x_1 + f_1, \dots, x_n + f_n) \quad (s = 1, \dots, n).$$

Очевидно также, что

$$X_s(t, 0, \dots, 0) \equiv 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

Если все $\psi_s(t, z_1, \dots, z_n) \equiv 0$, то (1.7) примет вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.8)$$

Пусть в H

$$\|\psi(t, z_1, \dots, z_n)\| < \rho, \quad (1.9)$$

где ρ — произвольно заданное число. Тогда

$$\|\varphi(t, x_1, \dots, x_n)\| < \rho \quad (1.10)$$

в области

$$t \in \sigma = [t_0, t_0 + T] \quad \|x\| \leq R. \quad (h)$$

Из (1.5) и (1.6) следует, что $X_s(t, x_1, \dots, x_n)$ и $\varphi_s(t, x_1, \dots, x_n)$ определены в области h .

В дальнейшем будем полагать, что функции $F_s(t, z_1, \dots, z_n)$ и $\psi_s(t, z_1, \dots, z_n)$ таковы, что через каждую точку области H проходит единственное решение системы (1.3). Очевидно, что тогда системы (1.7) и (1.8) будут обладать аналогичными свойствами в области h .

Выделив линейную часть функций X_s , перепишем систему (1.7) в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n + X_s^0(t, x_1, \dots, x_n) + \varphi_s(t, x_1, \dots, x_n) \quad (s = 1, \dots, n). \quad (1.11)$$

Здесь $p_{sk}(t)$ — непрерывные функции на σ .

В области h функции X_s^0 удовлетворяют условию

$$\|X^0\| \leq \beta(\|x\|) \cdot \|x\|, \quad (1.12)$$

где

$$\beta(\|x\|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Пусть

$$x_s = x_s(t, t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (1.14)$$

есть решение системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n \quad (s = 1, \dots, n), \quad (1.15)$$

проходящее при $t = t_0$ через некоторую точку $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$.

Обозначим через

$$y_s = y_s(t) \quad (s = 1, \dots, n) \quad (1.16)$$

решение системы (1.11), проходящее при $t = t_0$ через ту же самую точку $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное число ($\varepsilon < R$).

Обозначим

$$B = \max_{t \in \sigma} \sqrt{\frac{\bar{\lambda}(t_0)}{\bar{\lambda}(t)}}, \quad (1.17)$$

$$\alpha = -\max_{t \in \sigma} \bar{\mu}(t), \quad (1.18)$$

где $\underline{\lambda}(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$ — наименьший и наибольший корни уравнения

$$\det \|a_{sk} - \lambda \delta_{sk}\| = 0, \quad (1.19)$$

$\bar{\mu}(t)$ — наибольший корень уравнения

$$\det \|b_{sk} - \mu a_{sk}\| = 0. \quad (1.20)$$

В (1.19) и (1.20) $a_{sk} = a_{sk}(t)$ суть коэффициенты некоторой знакоопределенной положительной на σ квадратичной формы

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{s, k=1}^n a_{sk}(t) x_s x_k \quad (a_{sk} = a_{ks}) \quad (1.21)$$

с дифференцируемыми коэффициентами;

$b_{sk} = b_{sk}(t)$ — коэффициенты квадратичной формы

$$V'(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{s, k=1}^n b_{sk}(t) x_s x_k, \quad (1.22)$$

где V' — полная производная формы (1.21) в силу уравнений (1.15); δ_{sk} — символ Кронекера.

Пусть

$$\beta = \max \beta(\|y\|) \quad \text{при } \|y\| \leq \varepsilon. \quad (1.23)$$

Как показано С. К. Персидским [26], устойчивость нулевого решения системы (1.11) будет соблюдена в промежутке σ , если только

$$\|x_0\| + \rho T < \frac{\varepsilon}{B}, \quad \text{при } \alpha - B\beta \geq 0;$$

$$\|x_0\| + \rho T < \frac{\varepsilon}{B} \exp(\alpha - B\beta) T, \quad \text{при } \alpha - B\beta < 0. \quad (1.24)$$

§ 2. Принимая в (1.1) ядро в форме принятой в линейной теории ползучести бетона Маслова-Арутюняна [27, 28], заменим (1.1) системой из четырех дифференциальных уравнений и осуществим преобразования (1.3) — (1.7). Полученную систему уравнений назовем системой (*). Ее линейная часть, соответствующая системе (1.15), будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3; \quad \frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + p_{23}(t)x_3 + p_{24}(t)x_4; \quad (2.1)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4; \quad \frac{dx_4}{dt} = p_{41}(t)x_1 + p_{42}(t)x_2 + p_{43}(t)x_3 + p_{44}(t)x_4,$$

где

$$p_{31}(t) = \frac{f_3}{M} [(a_2^2 - 2a_1a_3) a_2 f_4 + \gamma' a_2 [(0.5a_2^2 - a_1a_3) f_2 + a_2 q_0] - \\ - 2(a_1 + a_2 f_1) [f_3 (a_2^2 + a_1a_3 + 4a_2a_3 f_1) + \gamma (2a_1a_2 + 3a_2^2 f_1 + 2a_1a_3 f_1 + \\ + 4a_2a_3 f_1^2)] - \frac{M_3}{M^2} [a_2 (a_1a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + 2a_2 (a_1 + a_2 f_1) (a_1 + 2a_2 f_1 + \\ + 2a_3 f_1^2) + 2(a_1 + a_2 f_1)^2 (a_2 + a_3 f_1) - a_2^2 q_0],$$

$$p_{32}(t) = \frac{f_3}{M} (0.5a_2^2 - a_1a_3) [\gamma' (a_1 + a_2 f_1) - 2a_2 f_3] + \\ + \frac{M_3}{M^2} (a_1 + a_2 f_1) (0.5a_2^2 - a_1a_3),$$

$$p_{33}(t) = \frac{1}{M} \{2f_3 [(2a_1a_3 - a_2^2) a_2 f_2 - (a_1 + a_2 f_1)^2 (a_2 + 2a_3 f_1) - 2a_2^2 q_0] - \\ - (2a_1a_3 - a_2^2) (a_1 + a_2 f_1) f_4 + \gamma' (a_1 + a_2 f_1) [(0.5a_2^2 - a_1a_3) f_2 + a_2 q_0] - \\ - \gamma (a_1 + a_2 f_1)^2 (a_1 + 2a_2 f_1 + 2a_3 f_1^2)\},$$

$$p_{34}(t) = \frac{f_3}{M} (a_1 + a_2 f_1) (a_2^2 - 2a_1a_3),$$

$$p_{41}(t) = \frac{1}{M} \{2(a_2^2 - 2a_1a_3) [f_3 f_4 (a_1 + 2a_2 f_1) - a_2 f_2 f_3^2] + \\ + a_2 \gamma' f_2 (a_1 + a_2 f_1) [(a_2 + 4a_3 f_1) f_2 + 2q_0] + a_2^2 \gamma' f_1 f_3 [(a_2 + 2a_3 f_1) f_2 + \\ + q_0] + 2a_2 a_3 \gamma' f_1 f_2 f_3 - 4a_2^2 f_3^2 q_0 - 6\gamma a_2 f_1 f_3 (a_1 + a_2 f_1)^2 - \\ - \gamma' (a_1 + a_2 f_1)^2 [2a_3 f_2 f_3 + (a_2 + 2a_3 f_1) f_4] - 2\gamma' a_2 f_1 f_4 (a_1 + a_2 f_1)^2 - \\ - 2a_2 \gamma' f_1 (a_1 + a_2 f_1) [2a_3 f_2 f_3 + (a_2 + 2a_3 f_1) f_4] + \gamma f_3 (a_1 + a_2 f_1) [(2a_1a_3 - \\ - a_2^2) f_2 - 2a_2 q_0] + a_2 (2\gamma f_1 f_3 - \gamma' f_4 + 2f_3^2) [(a_1a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + \\ + (a_1 + a_2 f_1)^2 - a_2 q_0] + 2a_2 (a_1 + a_2 f_1)^2 (2\gamma f_1 f_3 - \gamma' f_4 + 2f_3^2)\} - \\ - \frac{M_4}{M^2} [a_2 (a_1a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + 2a_2 (a_1 + a_2 f_1) (a_1 + 2a_2 f_1 + 2a_3 f_1^2) + \\ + 2(a_1 + a_2 f_1)^2 (a_2 + 2a_3 f_1) - a_2^2 q_0],$$

$$p_{42}(t) = \frac{1}{M} \{-2a_2 f_1 (a_2^2 - 2a_1a_3) f_3^2 - 2\gamma' f_1 (a_1 + a_2 f_1)^2 a_2 f_3 + \\ + (2\gamma f_1 f_3 - \gamma' f_4 + 2f_3^2) (a_1 + a_2 f_1) (a_1a_3 - 0.5a_2^2) + \\ + \gamma' (a_1 + a_2 f_1) (a_2 + 2a_3 f_1) a_2 f_1 f_3\} + \frac{M_4}{M^2} (a_1 + a_2 f_1) (0.5a_2^2 - a_1a_3),$$

$$p_{43}(t) = \frac{1}{M} \{2f_1 (a_2^2 - 2a_1a_3) [f_4 (a_1 + a_2 f_1) - 2a_2 f_2 f_3] + \\ + \gamma' a_2 f_1 (a_1 + a_2 f_1) [(a_2 + 2a_3 f_1) f_2 + 2q_0] - 8a_2^2 f_1 f_3 q_0 -$$

$$\begin{aligned}
& -2\gamma f_1 (a_1 + a_2 f_1)^3 - 2\gamma' f_1 (a_1 + a_2 f_1)^2 a_3 f_2 + \\
& + (2\gamma f_1 + 4f_3) (a_1 + a_2 f_1) [(a_1 a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + (a_1 + a_2 f_1)^2 - a_2 q_0], \\
p_{41}(t) = & \frac{1}{M} \{ 2f_1 f_3 (a_1 + a_2 f_1) (a_2^2 - 2a_1 a_3) - \gamma' f_1 (a_1 + a_2 f_1)^2 (a_2 + \\
& + 2a_3 f_1) - \gamma' (a_1 + a_2 f_1) [(a_1 a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + (a_1 + a_2 f_1)^2 - a_2 q_0] \}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$M = (a_1 + a_2 f_1) [(a_1 a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + (a_1 + a_2 f_1) (a_1 + 2a_2 f_1 + 2a_3 f_1^2) - a_2 q_0],$$

$$\begin{aligned}
M_3 = & (2a_1 a_3 - a_2^2) [a_2 f_2 f_3 - (a_1 + a_2 f_1) f_4] f_3 + \\
& + \gamma' f_2 (a_1 + a_2 f_1) [(0.5a_2^2 - a_1 a_3) f_2 + a_2 q_0] - f_3^2 (a_1 + a_2 f_1)^2 (a_2 + 2a_3 f_1) - \\
& - \gamma f_3 (a_1 + a_2 f_1)^2 (a_1 + 2a_2 f_1 + 2a_3 f_1^2) - 2a_2^2 f_3^2 q_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_4 = & 2f_1 (a_2^2 - 2a_1 a_3) [f_1 f_4 (a_1 + a_2 f_1) - a_2 f_2 f_3^2] + \\
& + a_2 \gamma' f_1 f_3 (a_1 + a_2 f_1) [(a_2 + 2a_3 f_1) f_2 + 2q_0] - \\
& - 2\gamma f_1 f_3 (a_1 + a_2 f_1)^3 - 4a_2^2 f_1 f_3^2 q_0 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \gamma' f_1 (a_1 + a_2 f_1)^2 [2a_3 f_2 f_3 + (a_2 + 2a_3 f_1) f_4] + \\
& + (2\gamma f_1 f_3 - \gamma' f_4 + 2f_3^2) (a_1 + a_2 f_1) [(a_1 a_3 - 0.5a_2^2) f_2 + \\
& + (a_1 + a_2 f_1)^2 - a_2 q_0],
\end{aligned}$$

$$\gamma' = \gamma \left(1 + C_0 + \frac{A_1}{t} \right),$$

γ, C_0, A_1 — постоянные, определяемые из опыта.

Нетрудно, далее, для коэффициентов квадратичных форм (1.21) и (1.22), получить следующие формулы:

$$a_{ik} = 0 \text{ при } s \neq k, \quad a_{11} = 1, \quad a_{22}(t) = \frac{p_{42}(t) p_{31}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)}, \quad a_{33}(t) = \frac{1}{p_{31}(t)},$$

$$a_{44}(t) = \frac{p_{34}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)}, \quad (2.2)$$

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{13} = b_{31} = 2; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
b_{22}(t) = & a'_{22}(t), \quad b_{33}(t) = a'_{33}(t) + \frac{2p_{33}(t)}{p_{31}(t)}, \quad b_{44}(t) = \left[\frac{p_{34}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)} \right]' + \\
& + \frac{p_{34}(t) p_{44}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)},
\end{aligned}$$

$$b_{14}(t) = b_{41}(t) = \frac{p_{34}(t) p_{41}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)}, \quad b_{23}(t) = b_{32}(t) = \frac{p_{32}(t)}{p_{31}(t)}; \quad (2.4)$$

$$b_{24}(t) = b_{42}(t) = \frac{2p_{42}(t) p_{34}(t)}{p_{31}(t) p_{43}(t)}, \quad b_{34}(t) = b_{43}(t) = \frac{2p_{34}(t)}{p_{31}(t)}.$$

При (2.2) корнями уравнения (1.19) будут

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{p_{12}(t)p_{34}(t)}{p_{31}(t)p_{42}(t)}, \lambda_3 = \frac{1}{p_{31}(t)}, \lambda_4 = \frac{p_{31}(t)}{p_{21}(t)p_{42}(t)}, \quad (2.5)$$

а уравнение (1.20) примет вид

$$\begin{vmatrix} -\mu & 0 & 2 & b_{14} \\ 0 & b_{22} - \mu a_{22} & b_{22} & b_{24} \\ 2 & b_{22} & b_{22} - \mu a_{22} & b_{24} \\ b_{14} & b_{24} & b_{24} & b_{44} - \mu a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, неравенства (1.24) могут быть проверены, если известны функции $p_{sk}(t)$ при $t \in \tau$. Соображения, на основе которых должны быть назначены величины ε , $\|x_0\|$ и ρ , опускаем.

Выбрав на τ достаточно близкие друг к другу фиксированные значения $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_0 + T$ и принимая в (1.1) $y_1(t) = f_1(t)$, мы можем, на основе метода Боголюбова—Крылова [29] и следуя Швецову [30], заменить (1.1) рекуррентными алгебраическими уравнениями

$$[a_1 + a_2 f_1(t_s)] \zeta(t_s) + [0.5 a_2 + a_3 f_1(t_s)] \chi(t_s) + q_0 = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n) \quad (2.7)$$

относительно $f_1(t_s)$,

где

$$\zeta(t_0) = f_1(t_0),$$

$$\zeta(t_k) = (1 + C_{kk})^{-1} [f_1(t_k) - (C_{k0} - C_{k1}) \zeta(t_0) - (C_{k1} - C_{k2}) \zeta(t_1) - \dots - (C_{k,k-2} - C_{k,k-1}) \zeta(t_{k-2}) - (C_{k,k-1} - C_{kk}) \zeta(t_{k-1})],$$

$$\chi(t_0) = f_1^2(t_0),$$

$$\chi(t_k) = (1 + C_{kk})^{-1} [f_1^2(t_k) - (C_{k0} - C_{k1}) \chi(t_0) - (C_{k1} - C_{k2}) \chi(t_1) - \dots - (C_{k,k-2} - C_{k,k-1}) \chi(t_{k-2}) - (C_{k,k-1} - C_{kk}) \chi(t_{k-1})].$$

Здесь

$$C_{i0} = C(t_i, t_0), C_{ik} = C\left(t_i, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right),$$

$$C(t, \tau) = \left(C_0 + \frac{A_1}{\tau}\right) [1 - e^{-\tau(t-\tau)}].$$

Решив уравнения (2.7) и получив дискретные значения $f_1(t_s)$ ($s = 0, 1, \dots, n$) функции $f_1(t)$, можем вычислить аналогичные дискретные значения функций $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ ^{*}, следовательно, и дискретные значения функций $p_{sk}(t)$ и, приближенно, проверить выполнение критериев (1.24).

* Они могут быть вычислены, очевидно, также на основе непосредственного численного интегрирования системы (2).

† Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 3

Если, при некотором $q_0 = q_1$, условия (1.24) выполняются, то следует принять $q_0 = q_2 > q_1$ и, повторив все выкладки, снова проверить выполнение условий (1.24). Мы можем повторить эти выкладки до тех пор пока не придем к некоторому значению $q_0 = q_*$, при котором критерии (1.24) уже не соблюдаются. Отметим, однако, что несоблюдение критериев (1.24) еще не означает неустойчивости, ибо они являются достаточными, но не необходимыми условиями устойчивости.

Таким образом, предлагаемая методика позволяет решить сформулированную выше первую задачу устойчивости с запасом. Вопрос о том, как велик этот запас — остается открытым.

Аналогичным путем, также с некоторым запасом, может быть решена и вторая задача устойчивости, при этом следует при заданном $q_0 = q_1$ проверять выполнение критериев (1.24) при различных последовательно увеличиваемых значениях T .

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 10 XII 1964

Գ. Ս. ԳՐԻԳՐՅԱՆ

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՀԱՏՎԱԾՈՒՄ ՏԱՅՐԱՆԻՍ ՃԿՈՒՆ
ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԻՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ, ՍՈՂԷՐ
ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ՝ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՍԿՋԲԵԱԿԱՆ ԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՄՇՏԱԿԱՆ
ԳՈՐԾՈՂ ԳՐԳՈՒՄՆԵՐԻ ԱԿՆԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ ֆ ի ն ի ռ ի մ

Հեղինակի նախորդ աշխատության մեջ [17] գտնադրված դրամական կայունության անհրաժեշտ ցածրահատիկ ակուն թաղանթների ներածքների որոշման խնդիրը՝ համառոտաչափ բաշխված լայնական բևեռ աղեղնային դեպքում, նյութի գծային սողքի պայմաններում, Բուրնոլի — Գալլորկինի մեթոդի հիման վրա, առաջին մոտավորությամբ, բերված էր Վոլտերրայի տիպի սլ-գծային (1.1) ինտեգրալ համառոտմանը:

Ենթադրելով, որ, ելնելով սողքի այս կամ այն տեսությունից և հաշվի առնելով Բուրնոլի — Գալլորկինի մեթոդի մեջ ոչ միայն առաջին մոտավորությունը, այլ նաև վերջավոր թվով հաջորդ մոտավորությունները, (1.1)-ի փոխարեն կատարյալ դիֆերենցիալ համառոտմանը (1.2) տեսքի սխառնմ, առաջարկվում է, վերջավոր սկզբնական և վերջավոր մշտական գործող զբոս գրությունների ակնառումով, ժամանակի սահմանափակ հատվածում կարծես թվում են ստացելիս հիմնվել [19—25] աշխատություններում մշակված տեսությունների վրա և, մոտավորապես, օգտվել Ս. Կ. Պրոխորովի ստացած (2.14) անհամառոտություններից: Յուրյ է տրված, որ եթե ելնենք Մասլովի — Հարսթյունյանի սողքի գծային տեսությունից և Բուրնոլի — Գալլորկինի մեթոդում սահմանափակվենք առաջին մոտավորությամբ, ապա (1.2) սխառնմը կլինի չորրորդ կարգի: Ընդհանուր դեպքում ցույց է տրված այդ դեպքում (1.24) անհամառոտություններն ստանալու և նրանց հիման վրա կրիտիկական բևեռ որոշելու ընթացքը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени. ГТТИ, М., 1949.
2. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок при ползучести. ПММ, 21, вып. 3, 1957.
3. *Rabotnov J. N.* The theory of creep and its applications. „Plasticity“, Pergamon Press, 1960.
4. Хофф Н. Обзор теории выпучивания при ползучести. Сборник переводов „Механика“, № 3, 1960.
5. Хуан Кэ-чжи. Об устойчивости сжатого стержня при условии ползучести. *Scientia Sinica*, 8, № 8, 1959.
6. Иванов Г. В. а) Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, № 5, 1961. б) Об устойчивости равновесия сжатонизогнутых тонких стержней при неупругих деформациях. ПМТФ, № 6, 1961. в) К вариационным методам решения задач о деформировании и устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести. ПМТФ, № 5, 1963.
7. Кузнецов А. П. Решение задачи устойчивости сжатой оболочки в условиях ползучести по гипотезе упрочнения. ПМТФ, № 2, 1964.
8. Кузнецов А. П., Куршин Л. М. а) Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения. ПМТФ, № 4, 1960. б) Устойчивость круглых цилиндрических оболочек в условиях ползучести. ПМТФ, № 3, 1962.
9. Куршин Л. М. а) Об устойчивости стержней и пластин в условиях ползучести. ДАН СССР, 140, 1961. б) Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, № 6, 1961. в) Устойчивость пластин в условиях ползучести. ПМТФ, № 1, 1962. г) К решению задач устойчивости по квазистатической теории. ПМТФ, № 5, 1962.
10. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести. Инженерный сборник, 18, 1954.
11. Шестериков С. А. а) О критерии устойчивости при ползучести. ПММ, 23, 6, 1959. б) Устойчивость прямоугольных пластинок при ползучести. ПМТФ, № 3, 1961. в) Выпучивание при ползучести, с учетом мгновенных пластических деформаций. ПМТФ, № 2, 1963. г) Приближенный метод расчета на выпучивание при ползучести. ПМТФ, № 5, 1963.
12. Этерин М. И. Расчет пологих осесимметричных оболочек из упруго-вязкого материала. Труды ЦНИИСК, вып. 4. Стройиздат, М., 1961.
13. Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике. Тезисы докладов. Стройиздат, М., 1963.
14. Второй всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. АН СССР, М., 1964.
15. Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях. Сборник статей (перевод с англ.). ИЛ, М., 1961.
16. *Bödner S. R.* Mechanisms of Creep Buckling. Proc. of the Fifth Israel Annual Conference on Aviation and Astronautics. Jerusalem, 1963.
17. Григорян Г. С. а) К расчету прочности, жесткости и устойчивости гибких оболочек в условиях ползучести. Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964. б) On Strength and Stability of Flexible Shells and Thin-Walled Bars in Creep. Non-Classical Shell Problems. Proc. of the J.A.S.S. Symposium. Warsz. 1964.
18. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собрание сочинений, II. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1956.
19. Четаев Н. Г. а) Об одной мысли Пуанкаре. Сборник научных трудов Казанского авиационного института, № 3, 1935. б) Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанского гос. ун-та, 91, кн. 4, вып. 1, 1931.

20. Каменков Г. В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 17, вып. 5, 1953.
21. Каменков Г. В., Лебедев А. А. Замечания к статье об устойчивости на конечном интервале времени. ПММ, 18, вып. 4, 1954.
22. Лебедев А. А. а) К задаче об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 18, вып. 1, 1954. б) Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 18, вып. 2, 1954. в) Об устойчивости неустановившегося движения. Труды МАИ, вып. 50, 1955. г) Об устойчивости неустановившегося движения на конечном интервале времени. Докторская диссертация, 1955, (машинопись). д) О применении метода „замороженных коэффициентов“ для исследования устойчивости неустановившегося движения. Известия Высшей школы. Авиационная техника, № 1, 1958.
23. Дубошин Г. Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений. Труды ГИАШ, 14, вып. 1, 1940.
24. Малкин И. Г. а) Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях. ПММ, 8, в. 3, 1944. б) Теория устойчивости движения. ГТТИ, М., 1952.
25. Моисеев Н. Д. О некоторых методах теории механической устойчивости. Труды ВВИА им. Н. Е. Жуковского, вып. 135, 1945.
26. Персидский С. К. а) Об устойчивости на конечном промежутке. Вестник АН Казахской ССР, вып. 9 (172), 1959. б) Некоторые вопросы теории устойчивости движения. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук (МГУ, 1960).
27. Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Известия НИИГ, 28, 1940.
28. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. ГТТИ, М., 1952.
29. Kriloff N. et Bogolubov N. La solution approchée du problème de Poincaré. Comptes Rendus de L' Académie des Sciences de L' USSR, A, N. 12, 1929.
30. Швецов А. В. Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. Гидротехническое строительство, № 8, 1952.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. САРКИСЯН, В. В. МИКАЕЛЯН

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА
 ИЗГИБА АНИЗОТРОПНОГО СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

Проблема об определении центра изгиба изотропного стержня при помощи решения только лишь задачи кручения исследована в работах [1—8]. В [9] доказана возможность решения задачи об определении центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным поперечным сечением.

В работе [10] получены формулы для определения координат центра изгиба изотропного составного призматического стержня при помощи функций, аналогичных функциям Сен-Венена и Прандтля в задаче кручения изотропных однородных стержней.

В настоящей статье рассматривается задача об определении положения центра изгиба анизотропного (неортогнотропного) составного призматического стержня с произвольным поперечным сечением при помощи решения задачи кручения.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим анизотропный стержень, составленный из различных анизотропных призматических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям, когда упругие постоянные этих тел различны. Предположим, что в каждой точке каждого тела имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к оси стержня (то есть каждое тело — неортогнотропное). Области поперечного сечения, соответствующие различным материалам стержня, обозначим через $D_1, D_2, \dots, D_n$, линию раздела смежных областей D_i и D_l — через L_{kl} , а контур всей области — через L_0 . Предположим, что линии раздела L_{kl} либо целиком находятся внутри области D_0 (область всего поперечного сечения), либо пересекаются с ее контуром L_0 под определенным углом, не равным нулю.

Пусть один конец стержня заделан, а к другому концу приложена поперечная изгибающая сила $\vec{P}(P_x, P_y)$ произвольного направления. Поместим начало координат x, y, z в некоторой точке сечения заделанного конца изгибаемого стержня. Ось z направим параллельно образующим поверхности призматического составного анизотропного стержня, а оси x и y — в плоскости поперечного сечения. Примем, что коэффициенты Пуассона ν_{xz}, ν_{yz} и коэффициенты взаимного влияния первого рода $\eta_{xy, z}$ материалов составляющих тел одинаковы.

Касательные напряжения τ_{xz}^i , τ_{yz}^i в области D_i при поперечном изгибе неортоотропного составного стержня, когда $P_x \neq 0$, $P_y = 0$, определяются формулами [11]:

$$\begin{aligned}\tau_{xz}^i &= P_x \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2a_{33}^i} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right], \\ \tau_{yz}^i &= P_x \left[-\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2a_{33}^i} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right].\end{aligned}\quad (1.1)$$

Здесь $\Psi_i(x, y)$ — функция напряжений изгиба в области D_i , удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}L_2[\Psi_i] &= (2\nu_{xz}B_0 + \tau_{xy,z}A_0)x - (2\nu_{yz}A_0 + \tau_{xy,z}B_0)y + \\ &+ \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} (A_0x - B_0y) + a_{44}^i \psi_i'(x) - a_{45}^i \varphi_i'(y) + C_0\end{aligned}\quad (1.2)$$

и условиям

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} = \left[\frac{1}{2a_{33}^i} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right] \frac{dx}{ds} - \left[\frac{1}{2a_{33}^i} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right] \frac{dy}{ds} \text{ на } L_0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} = f_i^* - f_j^* \text{ на } L_{ij}, \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_j = g_i^* - g_j^* \text{ на } L_{ij}, \quad (1.5)$$

где введены следующие обозначения

$$L_2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} a_{i+3,j+3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}; \quad a_{45} = a_{34}, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

$\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции,

$$f_i^* = \frac{1}{2a_{33}^i} \left[(B_0 y^2 + K_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + K_0 x) \frac{dy}{ds} \right] + \psi_i \frac{dx}{ds} - \varphi_i \frac{dy}{ds},$$

$$g_i^* = \frac{1}{2} (B_0 y^2 + K_0 y) \left[\frac{a_{44}^i}{a_{33}^i} \frac{dx}{dn} - \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \frac{dy}{dn} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} (A_0 x^2 + K_0 x) \left[\frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \frac{dx}{dn} - \frac{a_{44}^i}{a_{33}^i} \frac{dy}{dn} \right] +$$

$$+ [\psi_i(x) a_{45}^i + \varphi_i(y) a_{35}^i] \frac{dx}{dn} + [\varphi_i(x) a_{44}^i + \psi_i(y) a_{45}^i] \frac{dy}{dn},$$

$$\left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial n} \right)_k = a_{44}^k l_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{35}^k l_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_{45}^k \left(l_1 \frac{\partial}{\partial y} + l_2 \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad l_1 = \frac{dy}{ds}, \quad l_2 = -\frac{dx}{ds},$$

a_{ij}^k — упругие постоянные. Постоянные коэффициенты A_0 , B_0 и K_0 определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ix}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{iy}}{a_{33}^i} + B_0 \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + K_0 \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} &= -1,
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где S_i — площадь D_i , S_{ix} , S_{iy} , J_{ix} , J_{iy} , J_{ixy} — статические моменты и моменты инерции D_i относительно осей координат.

Отметим, что постоянная C_0 , входящая в правую часть уравнения (1.2), определяется из условия

$$C_0 = (2\gamma_{yz} A_0 + \gamma_{xy, z} B_0) y_c^* - (2\gamma_{xz} B_0 + \gamma_{xy, z} A_0) x_c^*, \quad (1.7)$$

которое необходимо и достаточно для того, чтобы поперечный изгиб анизотропного составного стержня не сопровождался кручением.

Здесь x_c^* и y_c^* — координаты геометрического центра тяжести области D_0 .

Расстояние $y = \bar{y}$ линии действия главного вектора касательных напряжений изгиба от начала координат определяется из уравнения

$$P_x \bar{y} + M_0(P_x) = 0, \quad (1.8)$$

где

$$M_0(P_x) = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} (x z_{iy}^i - y z_{ix}^i) dx dy. \quad (1.9)$$

Легко убедиться, что в окончательное выражение $M_0(P_x)$ не входят функции $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$. Поэтому не нарушая общности задачи, для простоты, в дальнейшем примем $\varphi_i = \psi_i = 0$.

Абсцисса $\bar{x}$ центра изгиба анизотропного составного стержня определяется из уравнения

$$P_y \bar{x} - M_0(P_y) = 0. \quad (1.10)$$

В случае $P_x = 0$, $P_y \neq 0$, постоянные, входящие в $M_0(P_y)$, соответствующие A_0 , B_0 и K_0 , обозначим через A_0^* , B_0^* и K_0^* . Эти постоянные определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{a_{33}^i} &= 0, \\
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ix}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{ix}}{a_{33}^i} &= -1, \\
 A_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{iy}}{a_{33}^i} + B_0^* \sum_{i=1}^n \frac{J_{ixy}}{a_{33}^i} + K_0^* \sum_{i=1}^n \frac{S_{iy}}{a_{33}^i} &= 0.
 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Поставим задачу: определить положение центра изгиба при помощи решения задачи кручения, не решая задачу об изгибе.

§ 2. Решение задачи. С этой целью функцию напряжений при изгибе $\Psi_i(x, y)$ представим в следующем виде

$$\Psi_i(x, y) = F_i(x, y) - \frac{C_0}{2} \Phi_i(x, y). \quad (2.1)$$

Здесь $\Phi_i(x, y)$ — функция кручения анизотропного составного стержня в области D_i , а $F_i(x, y)$ будем называть функцией изгиба того же стержня.

Функции $\Phi_i(x, y)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [12]

$$L_2[\Phi_i] = -2 \text{ в областях } D_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

и условиям

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = 0 \text{ или } \Phi_i = 0 \text{ на } L_0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial s} \text{ или } \Phi_i = \Phi_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.4)$$

$$\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i = \left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_j \text{ на } L_{ij}. \quad (2.5)$$

Легко видеть, что из (1.2)–(1.5) и (2.1) для $F_i(x, y)$ получим следующие дифференциальные уравнения

$$L_2[F_i] = (2\gamma_{xz}B_0 + \gamma_{xy,z}A_0)x - (2\gamma_{yz}A_0 + \gamma_{xy,z}B_0)y + \\ + \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i}(A_0x - B_0y) \text{ в областях } D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

и условия

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} = f_i \text{ на } L_0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial s} - \frac{\partial F_j}{\partial s} = f_i - f_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_j = g_i - g_j \text{ на } L_{ij}, \quad (2.9)$$

где

$$f_i = f_i^* \Big|_{\varphi_i=0}^{\psi_i=0}, \quad g_i = g_i^* \Big|_{\varphi_i=0}^{\psi_i=0} \quad (2.10)$$

Подставляя значения τ_{xz}^i и τ_{yz}^i из (1.1) в выражение (1.9), переходя от функции Ψ_i к функциям F_i и Φ_i по формуле (2.1), затем интегрируя по частям, для $M_0(P_x)$ получим следующее выражение

$$M_0(P_x) = -P_x \sum_{i=1}^n R_i + \frac{P_x}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (B_0 y - A_0 x) d\Omega. \quad (2.11)$$

Здесь

$$R_i = \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (xF_i)}{\partial x} + \frac{\partial (yF_i)}{\partial y} \right] d\Omega - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega - \\ - \frac{C_0}{2} \iint_{D_i} \left[\frac{\partial (x\Phi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (y\Phi_i)}{\partial y} \right] d\Omega + C_0 \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega,$$

или на основании формулы Грина

$$R_i = 2 \oint_{\partial D_i} F_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega - C_0 \oint_{\partial D_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds + C_0 \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega \quad (2.12) \\ \left(\Omega_s = \frac{1}{2} \int_0^s (x dy - y dx) \right).$$

Составим следующее скалярное произведение

$$(\Phi, L_2[F]) = \int_{\Omega} \Phi L_2[F] d\Omega. \quad (2.13)$$

Тогда, можно показать, что имеет место следующее соотношение

$$(\Phi, L_2[F]) = (F, L_2[\Phi]) = \oint_{\Omega} \Phi \frac{\partial^* F}{\partial n} ds - \oint_{\Omega} F \frac{\partial^* \Phi}{\partial n} ds. \quad (2.14)$$

Теперь составим связь между $\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i$ и производными функции Сен-Венана $\varphi_i(x, y)$.

При кручении анизотропного составного стержня касательные напряжения выражаются так [12, 13]

$$\tau_{xz}^i = \vartheta \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^i = -\vartheta \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}, \quad (2.15)$$

и через функции кручения $\varphi_i(x, y)$ —

$$\tau_{xz}^i = \vartheta \left[A_{45}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right) + A_{55}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right) \right], \\ \tau_{yz}^i = \vartheta \left[A_{44}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + x \right) + A_{45}^i \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - y \right) \right], \quad (2.16)$$

где ϑ — угол закручивания на единицу длины стержня, а A_{kl}^i — модули упругости, которые связаны с коэффициентами деформации a_{kl}^i следующим образом

$$A_{44}^i = \frac{a_{55}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}, \quad A_{45}^i = -\frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}, \quad A_{55}^i = \frac{a_{44}^i}{a_{44}^i a_{55}^i - (a_{45}^i)^2}. \quad (2.17)$$

На основании (2.15)–(2.17), можно доказать, что

$$\left(\frac{\partial^* \Phi}{\partial n} \right)_i = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial s} - 2 \frac{d\Omega_s}{ds}. \quad (2.18)$$

Принимая во внимание (2.2), (2.14) и (2.18), находим

$$\begin{aligned} 2 \oint_{L_i} F_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds - 2 \iint_{D_i} F_i d\Omega = (\Phi_i, L_2[F_i]) - \\ - \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds - \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Затем учитывая (1.8), (2.11), (2.12) и (2.19), получим

$$\begin{aligned} \bar{y} = \sum_{i=1}^n (\Phi_i, L_2[F_i]) - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds - \\ - \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds + C_0 \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i d\Omega - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (B_0 y - A_0 x) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.20)$$

На основании (2.3) и (2.4) $\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \frac{d\Omega_s}{ds} ds = 0$, так как интегралы по L_0 равны нулю, а по линиям раздела L_{ij} сокращаются.

Нетрудно убедиться в следующем факте

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_0} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds + \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i \left[\left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_j \right] ds$$

или, учитывая (2.3) и (2.9),

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i (g_i - g_j) ds. \quad (2.21)$$

Так как $\sum_{i=1}^n \oint_{L_0} \Phi_i g_i ds = 0$ на основании (2.3), то выражение (2.21)

можно преобразовать так

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i \left(\frac{\partial^* F}{\partial n} \right)_i ds = \sum_{i,j=1}^n \int_{L_{ij}} \Phi_i (g_i - g_j) ds + \sum_{i=1}^n \oint_{L_2} \Phi_i g_i ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i g_i ds; \quad (2.22)$$

Интегрируем по частям третий член выражения (2.20)

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} F_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^n [F_i \varphi_i]_{L_i} - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial F_i}{\partial s} ds \quad (2.23)$$

$\sum_{i=1}^n [F_i \varphi_i] = 0$ в силу однозначности функций φ_i и Ψ_i на замкнутых контурах L_i [10].

Преобразуем второй член выражения (2.23). При помощи (2.7) и (2.8) можно написать

$$\sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i \frac{\partial F_i}{\partial s} ds = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i f_i ds. \quad (2.24)$$

Составим следующее выражение

$$I = \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \varphi_i f_i ds - \sum_{i=1}^n \oint_{L_i} \Phi_i g_i ds. \quad (2.25)$$

Подставляя значения f_i и g_i из (2.10) в (2.25), затем принимая формулу Грина, выражение (2.25) можно представить в таком виде

$$\begin{aligned} I = & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \Phi_i (A_0 x - B_0 y) d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_{33}^i} \iint_{D_i} \left\{ (A_0 x^2 + K_0 x) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \right] + \right. \\ & \left. + (B_0 y^2 + K_0 y) \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + a_{44}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right] \right\} d\Omega. \quad (2.26) \end{aligned}$$

На основании (2.15)–(2.17) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= a_{35}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} + y \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} &= a_{45}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - a_{44}^i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - x. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Тогда в силу (2.27) выражение (2.26) примет вид

$$I = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} xy (A_0 x - B_0 y) d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{a_{45}^i}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \Phi_i (A_0 x - B_0 y) d\Omega. \quad (2.28)$$

Учитывая выражения (1.7), (2.6), (2.20)–(2.24) и (2.28), для определения ординаты центра изгиба у анизотропного (неортоотропного) составного стержня находим следующую окончательную формулу

$$\begin{aligned} \bar{y} = & \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\nu_{xz} B_0 + \tau_{xy, z} A_0) (x - x_c^*) - \\ & - (2\nu_{yz} A_0 + \tau_{xy, z} B_0) (y - y_c^*)] d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Аналогично, из (1.10) получим формулу для абсциссы $\bar{x}$ центра изгиба

$$\begin{aligned} \bar{x} = & - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\nu_{xz} B_0^* + \tau_{xy, z} A_0^*) (x - x_c^*) - \\ & - (2\nu_{yz} A_0^* + \tau_{xy, z} B_0^*) (y - y_c^*)] d\Omega + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из формул (2.29) и (2.30) нетрудно получить выражения для определения координаты центра изгиба анизотропного (неортоотропного) однородного стержня

$$\begin{aligned} \bar{y} = & - \iint_D [(2a_{13} \bar{B}_0 - a_{30} \bar{A}_0) (x - x_c) - (2a_{23} \bar{A}_0 - a_{30} \bar{B}_0) (y - y_c)] \Phi d\Omega + \\ & + \iint_D (\bar{A}_0 x + \bar{B}_0 y + \bar{K}_0) \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \iint_D [(2a_{13} \bar{B}_0 - a_{30} \bar{A}_0) (x - x_c) - (2a_{23} \bar{A}_0 - a_{30} \bar{B}_0) (y - y_c)] \Phi d\Omega + \\ & + \iint_D (\bar{A}_0 x + \bar{B}_0 y + \bar{K}_0) \varphi d\Omega, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где $\bar{A}_0, \dots, \bar{K}_0$ определяются из следующей системы уравнений

$$\bar{A}_0 J_{yy} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_y = -1$$

$$\bar{A}_0 J_{xy} + \bar{B}_0 J_{xx} + \bar{K}_0 S_x = 0$$

$$\bar{A}_0 S_y + \bar{B}_0 S_x + \bar{K}_0 \Omega_0 = 0$$

$$\bar{A}_0 J_{yy} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_y = 0$$

$$\bar{A}_0 J_{xx} + \bar{B}_0 J_{xy} + \bar{K}_0 S_x = -1$$

$$\bar{A}_0 S_y + \bar{B}_0 S_x + \bar{K}_0 \Omega_0 = 0.$$

Отметим, что для определения положения центра изгиба ортотропного составного стержня, когда физические оси совпадают с геометрическими осями ($a_{45}^i = a_{36}^i = 0$, $a_{23}^i = -\frac{\nu_{zy}}{E_y}$, $a_{13}^i = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}$, $a_{33}^i = \frac{1}{E_z}$) из (2.29) и (2.30) получим

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -2 \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \Phi_i [\nu_{xz} B_0^* (x - x_c^*) + \nu_{yz} A_0^* (y - y_c^*)] d\Omega - \\ & + \sum_{i=1}^n E_z^i \int_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 2 \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \Phi_i [\nu_{xz} B_0 (x - x_c^*) - \nu_{yz} A_0 (y - y_c^*)] d\Omega - \\ & - \sum_{i=1}^n E_z^i \int_{D_i} \varphi_i (A_0 x + B_0 y + K_0) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В частном случае, если предполагать материалы составного стержня изотропными, то есть $E_x^i = E_y^i = E_z^i = E^i$, $\nu_{xz} = \nu_{yz} = \nu$, $G_{yz}^i = G_{xz}^i = G^i$, то из (2.33) и (2.34) получаются формулы для определения положения центра изгиба составного призматического стержня [10].

Теперь перейдем к определению положения центра изгиба анизотропного составного стержня с продольными полостями.

Можно доказать, что решения задачи кручения анизотропного составного стержня с продольными полостями (то есть область D_0 является многосвязной) могут получиться из решения задачи кручения анизотропного составного стержня при помощи предельного перехода, когда упругие постоянные $a_{44}^i \rightarrow \infty$, $a_{33}^i \rightarrow \infty$, $a_{45}^i \rightarrow \infty$ ($i = n+1, n+2, \dots, n+m$). Здесь $D_{n+1}, D_{n+2}, \dots, D_{n+m}$ — области соответствующих полостей.

Учитывая эти соображения, из (2.29) и (2.30) находим формулы для определения положения центра изгиба анизотропного составного стержня с продольными полостями

$$\begin{aligned}
\bar{x} = & - \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\vartheta_{xz} B_0^* + \gamma_{xy, z} A_0^*) (x - x_c) - \\
& - (2\vartheta_{yz} A_0^* + \gamma_{xy, z} B_0^*) (y - y_c)] d\Omega + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega - \\
& - \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [(2\vartheta_{xz} B_0^* + \gamma_{xy, z} A_0^*) (x_i - x_c) - (2\vartheta_{yz} A_0^* + \gamma_{xy, z} B_0^*) (y_i - y_c)] \Omega_i; \\
\bar{y} = & \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} \Phi_i [(2\vartheta_{xz} B_0^* + \gamma_{xy, z} A_0^*) (x - x_c) - \\
& - (2\vartheta_{yz} A_0^* + \gamma_{xy, z} B_0^*) (y - y_c)] d\Omega - \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_{33}^i} \iint_{D_i} \varphi_i (A_0^* x + B_0^* y + K_0^*) d\Omega + \\
& + \sum_{i=1}^m \Phi_i^0 [(2\vartheta_{xz} B_0^* + \gamma_{xy, z} A_0^*) (x_i - x_c) - (2\vartheta_{yz} A_0^* + \gamma_{xy, z} B_0^*) (y_i - y_c)] \Omega_i.
\end{aligned}$$

Здесь Ω_i , x_i , y_i — площадь и координаты центра тяжести области D_{n+1} ($i=1, 2, \dots, m$), а постоянные Φ_i^0 ($i=1, 2, \dots, m$), являющиеся значениями функции напряжения на контурах L_i ($i=n+1, n+2, \dots, n+m$), определяются при помощи обобщенной теоремы Бредта [12].

Ереванский государственный
университет
Ереванский политехнический
институт

Поступила 18 XII 1964

Վ. Ս. ՍԱՐԿԻՅԱՆ, Վ. Վ. ՄԻԿՅԵԼՅԱՆ

ԲԱՆԱԶԵՎԻՐ ԱՆԻՉԱՏՐՈՊ ԲԱՂԱԳՐՅԱԼ ՉՈՂԻ ՄՈՄԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԳԻՐԲԸ
ՈՐՈՇՆԵԼՈՒ ՀԱՄԱՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում ստացված են բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել ծավալն կենտրոնի կոորդինատները առանց լուծելու ալգպիսի ձողերի ծավալն խնդիրը:

Այդ բանաձևերը արտահայտված են անիզոտրոպ բաղադրված ձողի ուղիղ ման խնդրի Սեն-Վենանի և Պրանգլի ֆունկցիաների միջոցով:

Ծավալն խնդրի լարումների $\Psi_i(x, y)$ ֆունկցիան ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$\Psi_1(x, y) = F_1(x, y) - \frac{C_0}{2} \Phi_1(x, y),$$

հաշվում է խնդիրը պարզեցնել և արտահան ստանալ դրված հիմնական խնդրի լուծումը: Այսպես $F_1(x, y)$ -ը ծածկան ֆունկցիան է, $\Phi_1(x, y)$ -ը՝ սյուր-ման ֆունկցիան, իսկ C_0 -ն հաստատուն է:

Մասնավոր դեպքում ստացված են օրթոտրոպ, բաղադրյալ, ինչպես նաև բաղմակալ լայնական կտրվածք ունեցող անիզոտրոպ բաղադրյալ ձողի ծածկան կենտրոնները հաշվելու համար բանաձևեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. О приближенном определении положения центра жесткости для симметрического профиля. ДАН СССР, 3, № 3, 1934.
2. Берман М. Э. К вопросу о центре изгиба. ДАН СССР, 72, № 1, 1950.
3. Голошкевич С. С. Труды Ленинградского политехнического института, раздел Гидротехники и Стронтельного дела, № 2, 1950.
4. Capildeo R. Flexure with shear centres a general treatment with complex variable. Proc. Cambridge Phil. society, 49, part 2, 1953, pp. 308--318.
5. Новожилов В. В. О центре изгиба. ПММ, 21, № 2, 1957.
6. Прокопов В. К. О центре жесткости многосвязного профиля. Научно-технический информационный бюллетень, № 7, раздел физ.-мат. наук, ЛПИ, Л., 1960.
7. Рыбакина О. Г. О центре изгиба тонкостенных многосвязных стержней. Исследования по упругости и пластичности. Сборник № 1, Изд. ЛГУ, Л., 1961.
8. Джанелидзе Г. Ю. Определение координат центра жесткости по различным функциям напряжений при кручении. Труды Ленинградского политех. ин-та, раздел Динамика и прочность машин, № 226, Л., 1962.
9. Саркисян В. С. О формуле центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным сечением. ДАН АрмССР, 32, № 4, 1961.
10. Чобанян К. С., Микаелян В. В. Об определении центра изгиба составного стержня при помощи решения задачи кручения. Известия АН АрмССР, 16, № 4, 1963.
11. Саркисян В. С. Изгиб неортогронных составных призматических стержней. ДАН АрмССР, 39, № 4, 1964.
12. Саркисян В. С. Кручение неортогронных составных призматических стержней. ДАН АрмССР, 40, № 2, 1965.
13. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехтеориздат, М.—Л., 1950.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. КАРАПЕТЯН

ВЛИЯНИЕ ВЛАЖНОСТИ СРЕДЫ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА

В работе приводятся результаты исследования влияния влажности среды на ползучесть бетона при сжатии и растяжении.

Опыты были поставлены над бетоном, приготовленным на песке и щебне из вулканического шлака Аванского месторождения (г. Ереван). В качестве вяжущего был применен пуццолановый портландцемент Араратского завода активностью 471 кг/см^2 . Состав бетона по весу $1:2, 51:2,65, B/C = 1,18$.

Испытывались призматические образцы и восьмерки сечением $10 \times 10 \text{ см}$. Высота призм составляла 40 и 60 см, а восьмерок — 60 см. Образцы бетонировались в металлических формах, в горизонтальном положении.

Образцы освобождались от форм через 48 часов, после чего 50% хранились в обычных, а 50% во влажных условиях. Образцы, хранившиеся в обычных условиях, были как изолированные, так и без изоляции. Изоляция наружной поверхности образцов с целью исключения испарения воды из бетона осуществлялась непосредственно после освобождения их от форм путем нанесения нескольких слоев расплавленного парафина.

Призматические образцы и восьмерки высотой 60 см были нагружены длительной нагрузкой в возрасте 28 дней. Напряжение во всех призмах составляло 30 кг/см^2 , а в восьмерках — 4 кг/см^2 . Под длительную нагрузку были установлены 9 призм и 9 восьмерок. Параллельно на 6 призмах и 9 восьмерках определялись объемные деформации бетона.

В процессе длительных опытов в помещении обычного хранения температура $T = 18 \pm 5^\circ \text{C}$, а относительная влажность $P = 66 \pm 11\%$. В помещении влажного хранения $T = 20 \pm 4^\circ \text{C}$, а $P = 90 \pm 8\%$.

Для изучения влияния влажности среды на прочность и деформативность бетона при сжатии и растяжении были испытаны также кубики, призмы и восьмерки. Испытание призм высотой 40 см производилось ступенчатым нагружением образцов и выдержкой под каждой ступенью нагрузки в течение одной минуты. Каждая ступень нагрузки составляла примерно $0,1 R_{пр}$. Восьмерки испытывались без выдержки.

Для изучения влияния испарения воды из бетона на ползучесть через 107 и 105 дней длительного нагружения изоляции одной призмы

и одной восьмерки были сняты. Соответственно были сняты изоляции и ненагруженных образцов.

В табл. 1 приведены прочностные показатели бетона при сжатии.

Таблица 1

Влияние влажности среды на прочность бетона при сжатии

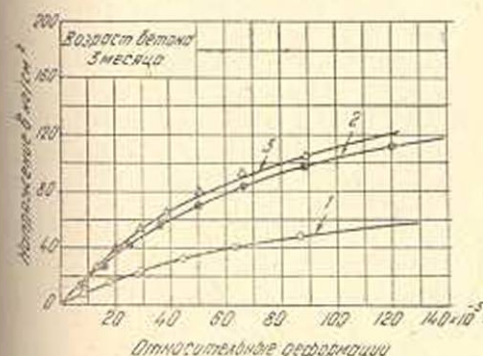
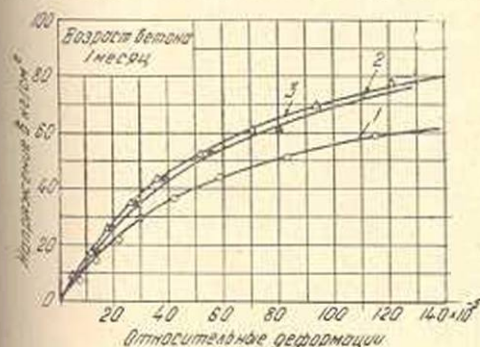
Условия хранения	R в кг/см^2 в возрасте		$R_{пр.}$ в кг/см^2 в возрасте		$\frac{R_{пр.}}{R}$ в возрасте	
	1 мес.	3 мес.	1 мес.	3 мес.	1 мес.	3 мес.
Обычное без изоляции . . .	109	—	74	82	0,68	—
Влажное без изоляции . . .	126	178	88	140	0,59	0,79
Обычное с изоляцией . . .	132	198	87	132	0,66	0,67

На основании таблицы замечаем, что влажность среды оказывает существенное влияние на начальную прочность и на интенсивность нарастания прочности бетона во времени. Чем меньше влажность среды, тем меньше как начальная прочность бетона, так и дальнейшее ее нарастание.

На фиг. 1 приведены кривые деформаций бетона, а в табл. 2 значения модулей деформаций для различных условий хранения, которые дают ясное представление о влиянии влажности среды на деформативность бетона.

Из фиг. 1 нетрудно заметить, что деформации неизолированных образцов, которые хранились в обычных условиях, во времени возрасли.

На фиг. 2 представлены кривые ползучести бетона при сжатии для трех режимов хранения. Наибольшие деформации соответствуют неизолированным образцам, хранившимся в обычных условиях, а наименьшие — изолированным, хранившимся в тех же условиях.



Фиг. 1. Влияние влажности среды на деформации бетона при сжатии: 1 — образцы неизолированные обычного хранения, 2 — образцы неизолированные влажного хранения, 3 — образцы изолированные обычного хранения.

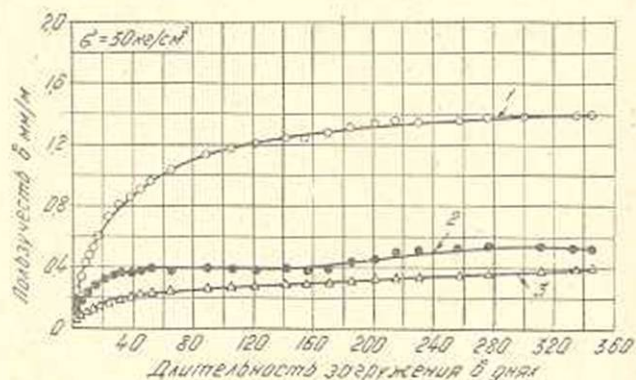
Ползучесть неизолированных образцов влажного хранения несколько больше ползучести изолированных образцов обычного хранения.

Таблица 2

Влияние влажности среды на модуль деформации бетона при сжатии

Условия хранения	Модуль деформации бетона при сжатии по касательной в $T/см^2$ в возрасте						
	1 месяца			3 месяцев			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 30$ $кг/см^2$	$\sigma = 60$ $кг/см^2$	$\sigma = 0$	$\sigma = 30$ $кг/см^2$	$\sigma = 60$ $кг/см^2$	$\sigma = 90$ $кг/см^2$
Обычное без изоляции	145	65	17	106	54	14	—
Влажное без изоляции	168	94	42	211	153	104	53
Обычное с изоляцией	192	104	43	246	179	122	63

Таким образом, с увеличением влажности среды ползучесть уменьшается.



Фиг. 2. Влияние влажности среды на ползучесть бетона при сжатии: 1 — образцы неизолированные обычного хранения, 2 — образцы неизолированные влажного хранения, 3 — образцы изолированные обычного хранения.

Согласно фиг. 2 при обычном хранении отношение деформаций ползучести неизолированных и изолированных образцов в конце опытов составляет 3,5.

Эти исследования еще раз показывают какую важную роль играют капиллярные натяжения в порах бетона в ползучести бетона при сжатии [1, 2]. Для ясности более детально рассмотрим наши опытные данные.

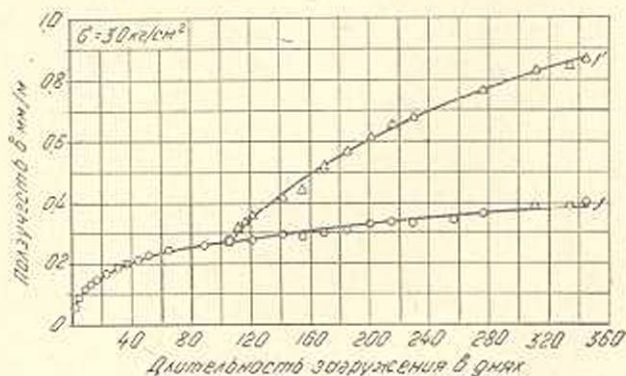
В табл. 1 призмные прочности соответствуют призмам высотой 40 см, а ползучесть определялась на призмах высотой 60 см. Несмотря на это, мы воспользуемся ими для некоторого качественного анализа наших опытов ползучести бетона.

Как уже указывалось, напряжение в длительно нагруженных призмах составляло 30 кг/см^2 . Исходя из данных табл. 1, относительные напряжения в неизолированных и изолированных образцах, хранившихся в обычных условиях, и в неизолированных образцах, хранившихся во влажных условиях, в момент длительного нагружения

соответственно составляли 0,41; 0,34 и 0,34, а спустя 2 месяца (при возрасте бетона 3 месяца) — 0,37; 0,21 и 0,23.

Таким образом, в момент нагружения относительное напряжение в неизолированных образцах, хранившихся в обычных условиях, на 21% было больше, чем в изолированных образцах, а спустя 2 месяца — на 62%. Между тем при длительности нагружения 2 месяца ползучесть неизолированных призм в 4 раза больше ползучести изолированных призм (фиг. 2).

Поскольку разница относительных напряжений была незначительной, это не могло привести к столь большой разнице деформаций. Поэтому, несомненно, большие деформации неизолированных образцов обусловлены действием капиллярных натяжений в порах бетона благодаря испарению воды [2]. То, что роль капиллярных явлений в ползучести бетона при сжатии весьма существенна, подтверждают опыты и над теми изолированными образцами, изоляция которых была снята на 107 день после загрузки. Результаты этих опытов приведены на фиг. 3, откуда нетрудно заметить, что дальнейшая ползучесть бетона с момента снятия изоляции составляет 0,61 мм/мм, что в 1,5 раза больше ползучести изолированных образцов за 345 дней. Разница деформаций несомненно была бы еще больше, если бы призмочные прочности в момент длительного нагружения и снятия изоляции были бы равными.



Фиг. 3. Влияние испарения воды из бетона на ползучесть при сжатии: 1 — образцы, изолированные обычным хранением, 1' — образец, изоляция которого была удалена через 107 дней.

Ползучесть призмы после снятия изоляции составляет 0,61 мм/мм, а изолированной призмы — 0,12 мм/мм. Столь большая разница деформаций ползучести обусловлена действием капиллярных натяжений в порах бетона благодаря испарению воды после снятия изоляции.

С момента снятия изоляции в ненагруженной призме наблюдалась интенсивная усадка, что в свою очередь указывает на ту важную роль, которую играют капиллярные явления в усадке бетона.

Эти опытные данные мы не приводим, так как этот вопрос подробно рассмотрен в работе [3].

В таблице 3 приведены прочностные показатели бетона на растяжение.

Таблица 3

Влияние влажности среды на прочность бетона при растяжении

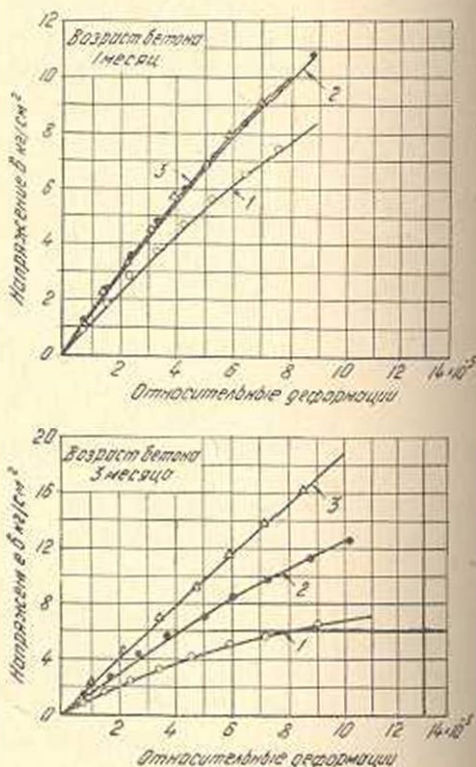
Условия хранения	R в кг/см^2 в возрасте		R_p в кг/см^2 в возрасте		$\frac{R_p}{R}$ в возрасте	
	1 мес.	3 мес.	1 мес.	3 мес.	1 мес.	3 мес.
Обычное без изоляции	109	—	9,3	8,1	0,085	—
Влажное без изоляции	126	178	12,0	14,1	0,095	0,079
Обычное с изоляцией	132	198	11,3	22,0	0,085	0,111

Как видно из табл. 3, с увеличением влажности среды прочность бетона на растяжение увеличивается. Наибольшее нарастание прочности бетона во времени имеет место в изолированных образцах. В случае же неизолированных образцов при обычном хранении, наоборот, наблюдается даже некоторый спад прочностей.

На фиг. 4 приведены кривые деформаций бетона при растяжении для различных условий хранения. Кривые деформаций по отношению друг к другу расположились точно так, как это имело место при сжатии (фиг. 1).

В табл. 4 приведены значения модулей деформаций бетона при растяжении.

На фиг. 5 представлены кривые ползучести при растяжении. И в этом случае наибольшая ползучесть соответствует тем неизолированным образцам, которые хранились в обычных условиях. Что касается ползучести неизолированных образцов, хранившихся во влажных условиях, и ползучести изолированных образцов, то они до длительности нагружения 210 дней практически одинаковы и только в конце опытов деформации в первом случае на 25% больше.



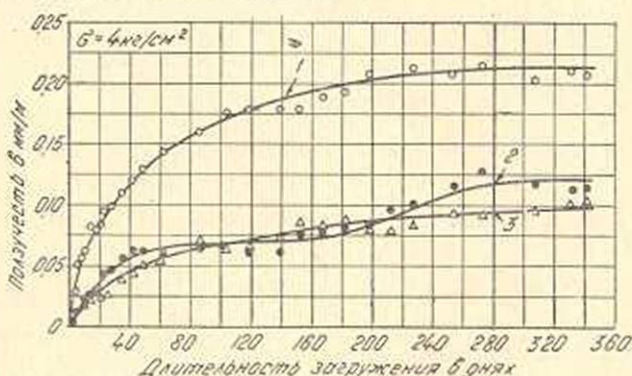
Фиг. 4. Влияние влажности среды на деформации бетона при растяжении: 1 — образцы неизолированные обычного хранения, 2 — образцы неизолированные влажного хранения, 3 — образцы изолированные обычного хранения.

Таблица 4

Влияние влажности среды на модуль деформации бетона при растяжении

Условия хранения	Модуль деформации бетона по касательной в $T/см^2$ в возрасте							
	1 месяц				3 месяцев			
	$\sigma = 0$	$\sigma = 3$ $кг/см^2$	$\sigma = 6$ $кг/см^2$	$\sigma = 9$ $кг/см^2$	$\sigma = 0$	$\sigma = 3$ $кг/см^2$	$\sigma = 6$ $кг/см^2$	$\sigma = 9$ $кг/см^2$
Обычное без изоляции	121	103	86	71	114	78	48	—
Влажное без изоляции	156	138	121	105	170	149	129	111
Обычное с изоляцией	155	138	121	105	202	197	193	188

Рассмотрение фиг. 5 показывает, что и при растяжении влияние влажности среды на ползучесть бетона весьма существенно. Однако, как будет показано, это влияние уже не связано с действием капиллярных сил, а имеет совсем другую причину.



Фиг. 5. Влияние влажности среды на ползучесть бетона при растяжении: 1 — образцы неизолированные обычного хранения, 2 — образцы неизолированные влажного хранения, 3 — образцы изолированные обычного хранения.

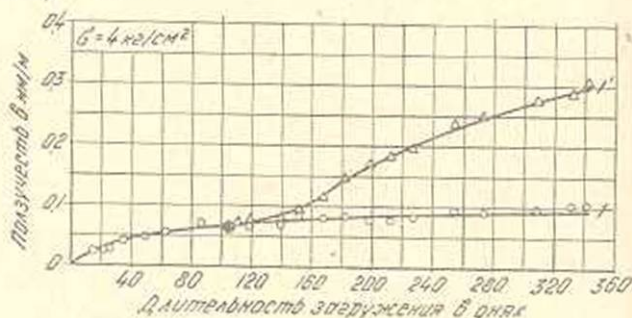
В длительно нагруженных восьмерках напряжение составляло $4 кг/см^2$. Тогда, исходя из данных табл. 3, относительные напряжения в неизолированных и изолированных образцах, хранившихся в обычных условиях, и в неизолированных образцах влажного хранения в момент нагружения соответственно составляли 0,43; 0,35 и 0,33, а спустя 2 месяца 0,49; 0,18 и 0,28. Эти цифры показывают, что в момент нагружения относительное напряжение в неизолированных образцах обычного хранения в 1,23 раза, а при длительности нагружения 2 месяца в 2,7 раза было больше, чем в изолированных образцах. Отношение же деформаций ползучести этих образцов при длительности нагружения 2 месяца составляет 2,54.

Таким образом, деформации ползучести развивались почти пропорционально относительным напряжениям. Последнее говорит о том,

что при разной влажности среды одной из основных причин, приводящей к разным деформациям ползучести бетона при растяжении, является неодинаковое изменение прочности бетона во времени и в связи с этим неодинаковые относительные напряжения.

На основании этих опытов еще раз можно утверждать, что линейная ползучесть бетона при сжатии в основном является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, так и капиллярных явлений.

При растяжении ползучесть бетона в основном является следствием вязкости цементного геля.



Фиг. 6. Влияние испарения воды из бетона на ползучесть при растяжении: 1 — образцы изолированные обычного хранения, 1' — образцы, изоляция которых была удалена через 105 дней.

На фиг. 6 приведена кривая ползучести изолированных восьмерок и кривая ползучести той изолированной восьмерки, изоляция которой была снята спустя 105 дней после нагружения. Как видно, и при растяжении после снятия изоляции ползучесть значительна. Однако, в этом случае деформации начинают интенсивно развиваться не сразу, а только спустя 45 дней после снятия изоляции.

Незначительная деформация сразу после снятия изоляции еще раз указывает на то, что капиллярные явления не играют роли в ползучести бетона при растяжении. Это так, потому что в противном случае ползучесть развивалась бы интенсивно сразу же после снятия изоляции. Интенсивное развитие деформаций ползучести спустя 45 дней после снятия изоляции несомненно имеет другую причину и очевидно связано с изменением прочности и модуля деформации бетона в связи с потерей воды. В наших многолетних исследованиях часто наблюдалось такое явление, когда прочность и модуль деформации бетона после некоторого нарастания во времени в дальнейшем падают. Это имеет место в тех случаях, когда бетон твердеет в среде с низкой влажностью. Нарастание прочности и модуля деформации бетона во времени тем меньше, а дальнейший их спад тем больше, чем меньше влажность среды. Причем спад прочности и модуля деформации бетона более существенен при растяжении, чем при сжатии.

Как видно из табл. 3, прочность бетона на растяжение, при обычном хранении, в трехмесячном возрасте уже получилась меньше, чем в месячном возрасте. С падением прочности падает и модуль деформации бетона (табл. 4).

На основании фиг. 6 ползучесть изолированного образца после снятия изоляции в 6,5 раза больше, чем ползучесть изолированных образцов за тот же период времени. Такая большая разница деформаций является следствием падения прочности и модуля деформации бетона благодаря испарению воды с момента снятия изоляции. Падение прочности бетона приводит к увеличению относительного напряжения и тем самым к увеличению деформаций ползучести. Падение же модуля деформаций приводит к увеличению упругих деформаций бетона под действием неизменной длительной нагрузки.

Следовательно, деформации изолированного образца после снятия изоляции частично включают в себе и упругие деформации, которые претерпевает бетон во времени по мере падения модуля деформации.

Все то, к чему приводит падение прочности и модуля деформации бетона при длительном растяжении, имеет место и при сжатии. Однако, как уже указывалось, падение прочности и модуля деформации бетона на сжатие относительно меньше, а поэтому после снятия изоляции развивающиеся деформации ползучести в основном обусловлены капиллярными явлениями вследствие испарения воды.

На основании проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Влажность среды оказывает существенное влияние на прочность и модуль деформации бетона при сжатии и растяжении. С уменьшением влажности прочность и модуль деформации бетона уменьшаются.

2. Влажность среды оказывает существенное влияние на ползучесть бетона при сжатии и растяжении. С уменьшением влажности ползучесть возрастает.

3. Характер влияния влажности среды на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в корне отличается.

При сжатии под действием внешней нагрузки диаметр капилляров бетона уменьшается, а капиллярное натяжение увеличивается. Увеличение капиллярного натяжения приводит к интенсификации деформаций ползучести, причем тем больше, чем меньше влажность среды.

При растяжении имеет место обратное явление, то есть увеличение диаметра капилляров и как следствие этого уменьшение капиллярного натяжения. Поэтому в этом случае роль капиллярных явлений в ползучести бетона стирается, и ползучесть в основном протекает за счет вязкости цементного геля.

Влияние влажности среды на ползучесть бетона при растяжении в основном обусловлено тем, что нарастание прочности бетона во времени в условиях разной влажности различна. Это обстоятельство обуславливает разные относительные напряжения в длительно нагру-

женном бетоне и тем самым разные деформации ползучести. Причем чем меньше влажность среды, тем меньше нарастание прочности бетона во времени, больше относительное напряжение и больше ползучесть. Сказанное имеет место и при сжатии, однако при этом влияние влажности среды на прочность бетона относительно меньше, а поэтому и меньше ползучесть, обусловленная изменением относительного напряжения.

4. Линейная ползучесть бетона при сжатии в основном является следствием вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня и капиллярных явлений, а нелинейная ползучесть еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне. Чем меньше влажность среды, тем большую долю общих деформаций ползучести составляет та часть ползучести, которая обусловлена капиллярными явлениями.

5. Ползучесть бетона при растяжении в основном обусловлена вязкостью гелевой структурной составляющей цементного камня.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 I 1965

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԽՈՆԱՎՈՐԹՅԱՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ սեղմման և ձգման դեպքում միջավայրի խոնավությունը էապես ազդում է բետոնի ամրության, դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի վրա: Խոնավության փոքրացման հետ փոքրանում են բետոնի ամրությունն ու դեֆորմացիաների մոդուլը և մեծանում է սողքը:

Սեղմման դեպքում, արտաքին բնոի ազդեցության տակ մազանոթների արամագիծը փոքրանում է, հետևաբար մազանոթային ուժերը մեծանում են, որը բերում է սողքի դեֆորմացիաների մեծացման, ընդ որում որքան փոքր է միջավայրի խոնավությունը, այնքան ինտենսիվ է սողքի դեֆորմացիաների աճը:

Ձգման դեպքում տեղի է ունենում հսկայական երևույթներ, մազանոթների արամագիծի մեծացում և, հետևաբար, մազանոթային ուժերի փոքրացում: Այդ պատճառով մազանոթային երևույթների ազդեցությունը փոքր է, և սողքը տեղի է ունենում հիմնականում ցածր մասնակցությամբ հաշվին:

Միջավայրի խոնավության ազդեցությունը բետոնի սողքի վրա ձգման դեպքում հիմնականում պայմանավորված է նրանով, որ ապրիբը խոնավության պայմաններում բետոնի ամրության աճը ժամանակի ընթացքում տարբեր է: Ընդ որում որքան փոքր է միջավայրի խոնավությունը, այնքան փոքր է բետոնի ամրության աճը և մեծ է սողքը: Այս երևույթը տեղի ունի

Նաև սերման գեպում, սակայն այդ աղիցությունը փոքր է, քանի որ սերման գեպում, երբ միջավայրի խոնավությունը փոքր է, սողքը հիմնականում պայմանավորված է մաղանոթային երևույթներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Карапетян К. С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 5, № 4, 1953.
2. Карапетян К. С. Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 9, № 1, 1956.
3. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние масштабного фактора на усадку бетона в зависимости от влажности среды. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. МАРТИРОСЯН

ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ОРИЕНТАЦИИ ОБРАЗЦА НА
ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ
ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКА СВАН

Как было отмечено в работах [1, 2, 3], деформации ползучести ориентированных стеклопластиков, помимо величины напряжения, длительности действия нагрузки, температуры, влажности, зависят также от ориентации образца, то есть от направления армирующих волокон. Было показано, что для данного соотношения волокон существует определенная плоскость наименьшей жесткости стеклопластика. При прочих равных условиях деформация ползучести тем больше, чем меньше угол, образованный между направлением деформирования и нормалью к плоскости наименьшей жесткости. Поэтому при построении теории ползучести стеклопластиков следует осуществить экспериментальные и теоретические исследования, учитывающие влияние ориентации волокон материала.

В работе [3] на основании экспериментальных исследований нами уже было отмечено, что имеется линейная зависимость между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении образцов СВАН 1:1 в направлении волокон. Однако, сравнительно большие ступени напряжений (недостаточное количество опытов) не позволили определить эту зависимость при других ориентациях.

В настоящей работе, на основе результатов сравнительно многочисленных опытов, вопрос о зависимости между напряжениями и деформациями ползучести стеклопластика СВАН 1:1 количественно решается при разных ориентациях стекловолокон.

Материалом исследования служил СВАН на связующем БФ-4 с соотношением волокон 1:1. Образцы имели форму и размеры согласно ГОСТ 4649—55* и были изготовлены из пятимиллиметровых листов путем механической обработки с применением охлаждающей жидкости (эмульсии). Образцы вырезались в 5-и направлениях и составляли с основным направлением (то есть с направлением волокон) углы 0; 22,5; 45; 67,5 и 90°. Испытания проводились на двухрычажных

* Форма образцов удовлетворительна для испытания в направлении волокон. При других ориентациях форма и размеры образца требуют дополнительных исследований.

установках со 100-кратным увеличением нагрузки. Удлинения измерялись на базе 40 мм механическими тензомерами с точностью 0,01 мм.

Для установления зависимости между напряжениями и деформациями ползучести были выбраны 5 значений относительных напряжений. Так как при относительном напряжении 0,1 σ_b * деформации весьма незначительны, а при 0,7 σ_b со временем наступает разрушение, были выбраны следующие относительные напряжения—0,2; 0,3; 0,4; 0,5 и 0,6 σ_b .

Многочисленными опытами, как и следовало ожидать, установлено, что механические свойства стеклопластика СВМ с соотношением волокон 1:1 имеют полную симметрию по отношению к оси, составляющую 45° с направлением волокон [4]. Следовательно, углы 22,5°—67,5° и 0°—90° в этом смысле эквивалентны. Исходя из этого, при выборе углов мы ограничились углами 0°; 22,5° и 45°, распространяя, однако, полученные результаты на углы 67,5 и 90°. Таким образом, образцы испытывались в 3-х направлениях и в каждом направлении под 5-ью относительными напряжениями.

В табл. 1 указаны количество нагруженных образцов, направления и величины относительных напряжений.

Количество образцов меньше 3-х, нагруженных при относительных напряжениях 0,2 σ_b и 0,3 σ_b , оправдывается тем, что при низких напряжениях разбросы отсчетов отличаются менее, чем на 20%, что, по нашему мнению, вполне приемлемо в опытах на ползучесть.

Таблица 1

Ориентация образцов φ	$\sigma_{\text{ср}}$ в кг/мм ²	σ_i в кг/мм ²	$\frac{\sigma_i}{\sigma_{\text{ср}}}$	Количество образцов в шт.
0	32,0	6,4	0,2	2
		9,6	0,3	2
		12,8	0,4	3
		16,0	0,5	3
		19,2	0,6	3
22,5	15,3	3,05	0,2	2
		4,6	0,3	2
		6,1	0,4	3
		7,6	0,5	3
		9,2	0,6	3
45	9,2	1,8	0,2	2
		2,75	0,3	2
		3,67	0,4	3
		4,6	0,5	3
		5,5	0,6	3

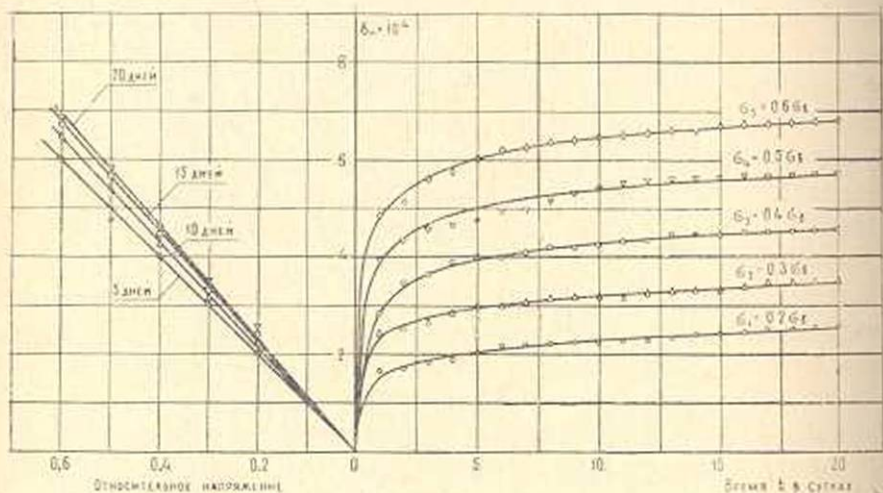
Загружение образцов производилось вручную с помощью маховика червячной передачи, при этом нагрузка на образцы передавалась постепенно в течение 20—30 сек. Момент полного нагружения фиксировался и деформации, соответствующие этому моменту, относились к мгновенным деформациям [3]. В дальнейшем отсчеты по деформации ползучести снимались через каждые 24 часа в течение 20 суток. По средним значениям отсчетов строились графики ползучести.

На фиг. 1, 2, 3 приведены кривые ползучести при разных ориентациях образцов. Каждая кривая на графике соответствует одному относительному напряжению.

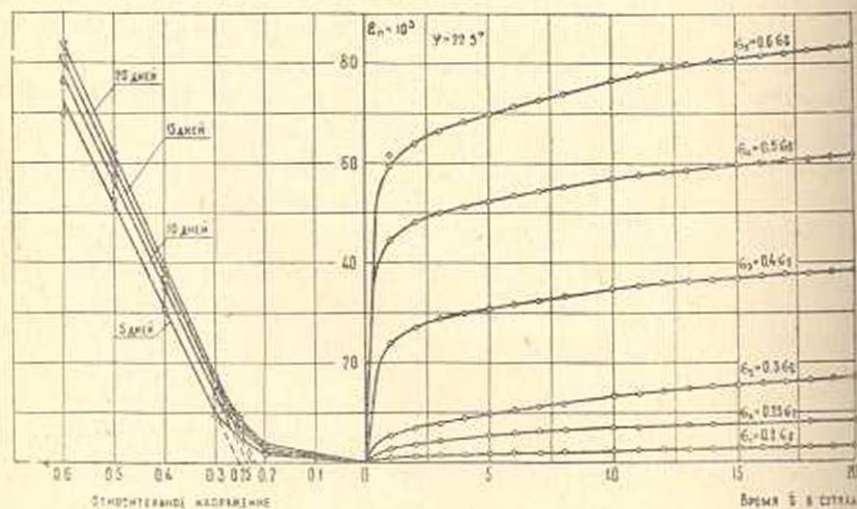
* σ_b — временное сопротивление разрыву при растяжении (кратковременные испытания).

Помимо кривых ползучести, на левой стороне фиг. 1, 2, 3 построены зависимости относительных напряжений от деформаций ползучести для разных длительностей действия нагрузок (в данном случае для 5; 10; 15 и 20-дневных длительностей).

$$\varphi = 0^\circ$$



Фиг. 1.

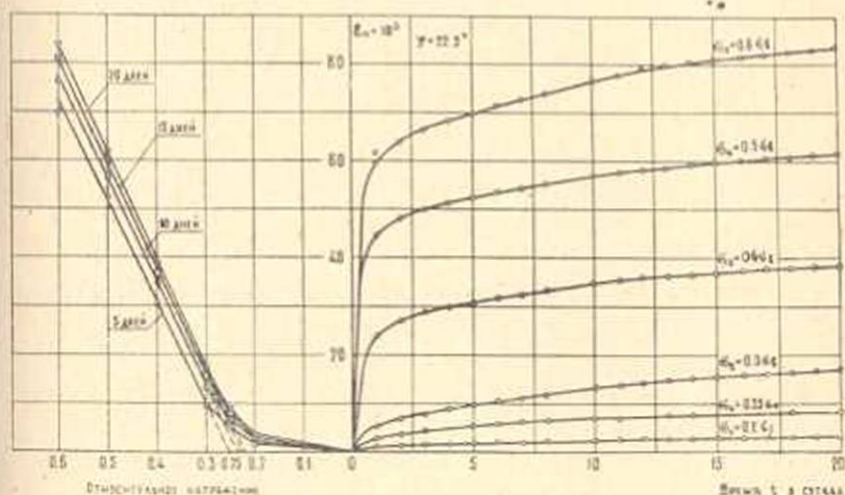


Фиг. 2.

Легко заметить из графиков, что эта зависимость имеет различный характер для образцов с разными ориентациями.

При ориентации образцов 0° и 90° зависимость между относительными напряжениями и деформациями ползучести линейная в пределах принятой базы времени загрузки (20 дней), то есть имеем случай линейной ползучести. Это говорит о том, что физическая

сущность механизма ползучести [3] образцов в направлении волокон от величины относительного напряжения и длительности действия нагрузки не меняется. Совершенно другая картина наблюдается при ползучести образцов с ориентациями $22,5^\circ$ и 45° . В этом случае между относительными напряжениями и деформациями ползучести наблюдается иная закономерность, чем в случае нулевой ориентации. Эта закономерность выражается тем, что до напряжения $0,2 \sigma_b$ и выше $0,3 \sigma_b$ связь между относительными напряжениями и деформациями ползучести подчиняется разным линейным законам.



Фиг. 3.

Такая закономерность строго соответствует механизму ползучести образцов, вырезанных под разными углами к направлению волокон.

Действительно, при ползучести под относительным напряжением $0,2 \sigma_b$ механизм явления в корне отличается от того, который имеет место при высоком уровне относительного напряжения.

Многочисленные опыты показывают, что при разгрузении образцов, ползучесть которых проходила под относительным напряжением до $0,2 \sigma_b$, происходит обратная ползучесть, и вся деформация восстанавливается практически за то время, за которое она была вызвана.

Это говорит о том, что деформации ползучести в этом случае имеют упругий характер (упругие мгновенные и высокоэластические) и что эти напряжения нарушения монолитности системы не вызывают.

Разгрузка образцов ненулевой ориентации, ползучесть которых проходила при высоких уровнях относительных напряжений, показывает, что, кроме упругих деформаций, в этих образцах со временем развиваются остаточные деформации. Эти деформации после

разгрузки не восстанавливаются даже за очень большое время. Мы склонны предполагать, что остаточные деформации являются результатом возникновения трещин в материале и нарушения монолитности системы стекловолокно—связующее. Так как прямые, характеризующие линейную ползучесть в первой и второй областях, пересекаются в зоне относительных напряжений $0,2 \sigma_b$ и $0,3 \sigma_b$, было интересно иметь картину этого перехода. С этой целью были поставлены опыты на ползучесть под напряжением $0,25 \sigma_b$ (см. фиг. 2). Опыты показали, что в этой зоне зависимость между относительными напряжениями и деформациями ползучести выражается кривой.

Для описания кривых ползучести, следуя гипотезе упругоползучего тела [5], воспользуемся выражением

$$\varepsilon_n = C(t) f(\sigma), \quad (1)$$

где ε_n — деформация ползучести,

$C(t)$ — мера ползучести, то есть деформация ползучести в момент t от воздействия единичного напряжения,

σ — напряжение.

При линейной ползучести, то есть когда связь между относительными напряжениями и деформациями ползучести линейная, в выражении (1) $f(\sigma)$ заменяется σ . Таким образом, значение $C(t)$ для случая нулевой ориентации легко можно найти из экспериментальных кривых ползучести.

Для этого достаточно значения деформации ползучести при данном напряжении и времени разделить на величину напряжения, то есть

$$C(t) = \frac{\varepsilon_n}{\sigma}. \quad (2)$$

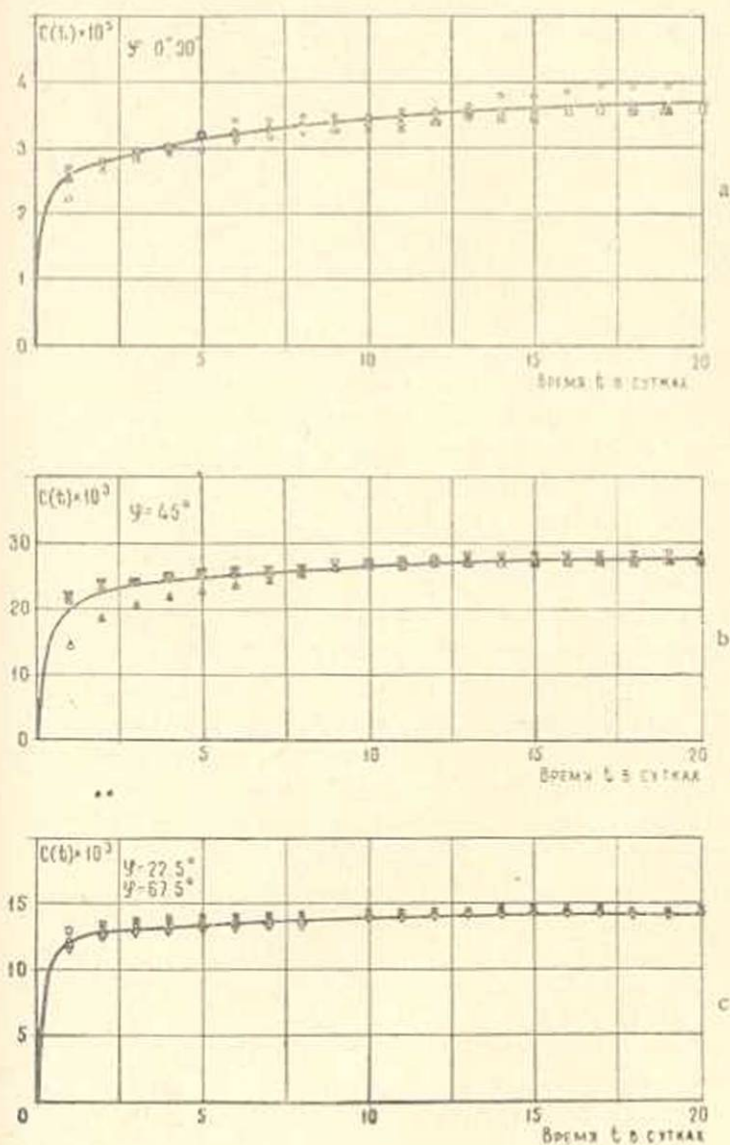
Если кривые ползучести подобны, то для всего семейства этих кривых выражение (2) должно дать единый график функции $C(t)$.

На фиг. 4а приведен график функции $C(t)$ для образцов с ориентацией 0 и 90° . Как видно из графика, кривая функции $C(t)$ дает основание считать кривые ползучести образцов СВМ 1:1 нулевой ориентации, в пределах принятой базы времени, подобными.

Рассмотрим теперь метод определения $C(t)$ для образцов с ориентациями $22,5^\circ$ и 45° .

Как было показано выше, зависимость между относительными напряжениями и деформациями ползучести для образцов ненулевой ориентации выражается двумя прямыми, которые в промежутке $0,2 < \frac{\sigma_1}{\sigma_b} < 0,3$ соединяются кривой линией. Естественно, такая зависимость значительно осложняет аппроксимацию и может привести к большим отклонениям при описании кривых ползучести. Поэтому для составления аналитического выражения зависимости между относительными напряжениями и деформациями ползучести примем следу-

ющую схему. Рассмотрим всю кривую как состоящую из двух прямых, пересекающихся в зоне напряжений $0,2 \sigma_b - 0,3 \sigma_s$ (см. фиг. 2 и 3). Таким образом, мы получим две области линейной ползучести с двумя мерами ползучести,



Фиг. 4.

Мера ползучести для первой линейной области определится так же, как для случая ползучести образцов нулевой ориентации,

$$\text{то есть } C(t) = \frac{\epsilon_n}{\sigma}.$$

Для второй области понятие меры ползучести в той формули-

ровке, которая была дана выше, несколько условное. Поэтому для определения меры ползучести необходимо значение деформации ползучести разделить на значение напряжения, определенное из уравнения прямой второй области.

Таким образом, для меры ползучести второй области будем иметь

$$C(t) = \frac{\varepsilon_n}{\sigma - b}, \quad (3)$$

где b — расстояние от начала координат до точки пересечения прямой с осью относительных напряжений.

Нетрудно заметить, что b меняется во времени (см. фиг. 2 и 3).

На фиг. 4 (б) и (с) представлены экспериментальные кривые мер ползучести для вторых областей образцов с ориентациями $22,5^\circ$ и 45° . Кривые построены по формуле (3).

Имея форму кривых функции $C(t)$, мы задались целью подобрать для нее аналитическое выражение.

Эксперименты показали, что наиболее удачно эти кривые описываются экспоненциальной функцией.

Следуя Н. Х. Арутюняну [5], для меры ползучести стеклопластика СВМ 1:1 положим

$$C(t) = C_0(\varphi) [1 - [a_1(\varphi) e^{-\gamma_1(\varphi)t} + a_2(\varphi) e^{-\gamma_2(\varphi)t}]], \quad (4)$$

что при подходящем выборе функций $C_0(\varphi)$, $a_1(\varphi)$, $a_2(\varphi)$, $\gamma_1(\varphi)$ и $\gamma_2(\varphi)$ дает достаточно близкое совпадение с экспериментальными кривыми.

Так как $C(0) = 0$, то из (4) следует, что $a_1 + a_2 = 1$.

Насколько удачно выбрано выражение для $C(t)$, можно заключить из фиг. 5 а, б и с. На этих фигурах сплошными линиями показаны теоретические кривые изменения меры ползучести в зависимости от времени для образцов с разной ориентацией. Кружочки обозначают экспериментальные точки.

Для сравнения в табл. 2 приведены значения мер ползучести стеклопластика СВМ 1:1 в зависимости от ориентации образцов по опытным данным и по формуле (4) (в 10^{-3} мм для $\varphi = 22,5^\circ$, 45° и $67,5^\circ$ и в 10^{-6} мм для $\varphi = 0^\circ$ и 90°).

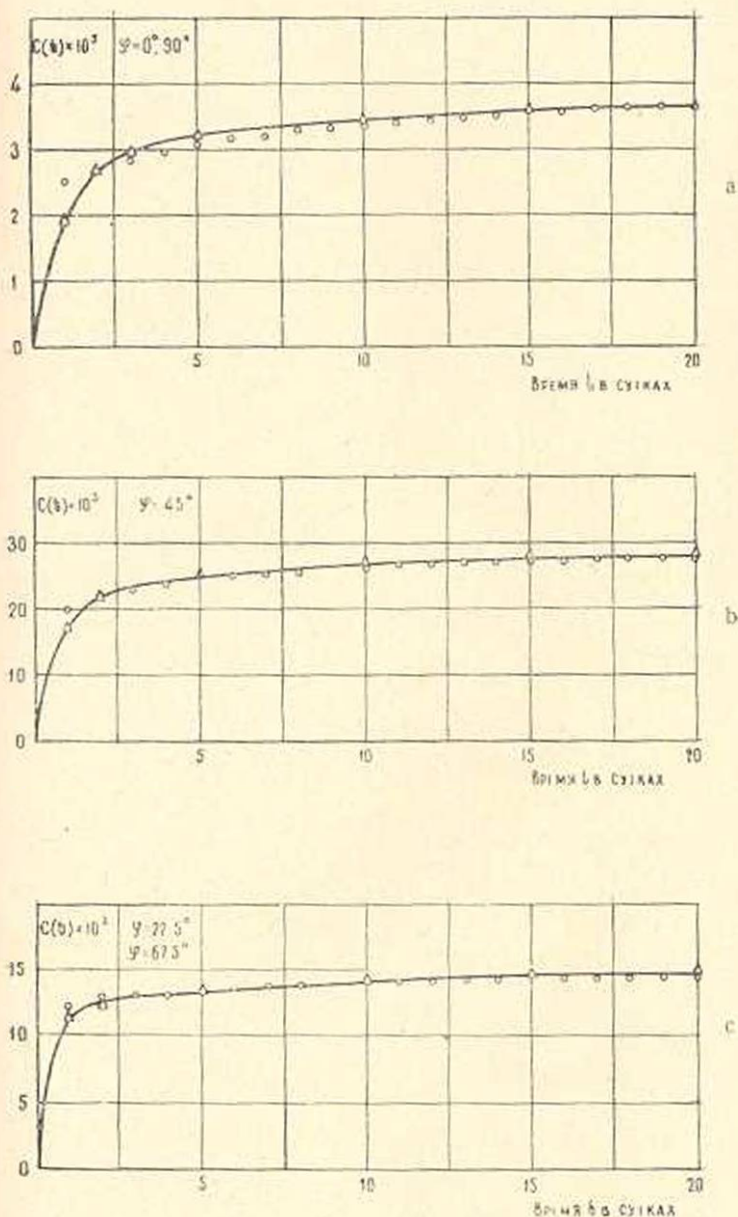
Таблица 2

Ориентация образца	Эксперимент						По формуле						Значения постоянных, входящих в формулу (4)
	1	2	5	10	15	20	1	2	5	10	15	20	
$0^\circ; 90^\circ$	25,2	26,9	31,0	33,7	35,4	36,8	19,6	26,9	32,3	34,7	36,0	36,7	$C_0 = 37,6 \cdot 10^{-6}$ $a_1 = 0,2, a_2 = 0,8$ $\gamma_1 = 0,119, \gamma_2 = 1,07$
$22,5^\circ$ $67,5^\circ$	12,3	13,0	13,5	14,0	14,3	14,5	11,4	12,7	13,5	14,3	14,7	14,9	$C_0 = 15,2 \cdot 10^{-3}$ $a_1 = 0,2, a_2 = 0,8$ $\gamma_1 = 0,12, \gamma_2 = 2,4$
45°	20,0	22,2	24,7	26,4	27,4	27,9	17,6	22,2	25,1	26,9	27,8	28,1	$C_0 = 28,5 \cdot 10^{-3}$ $a_1 = 0,25, a_2 = 0,75$ $\gamma_1 = 0,15, \gamma_2 = 1,5$

Согласно гипотезе упруго-ползучего тела, из (2) и (3) для деформации ползучести имеем

$$\varepsilon_n = C(t) \sigma \quad (5)$$

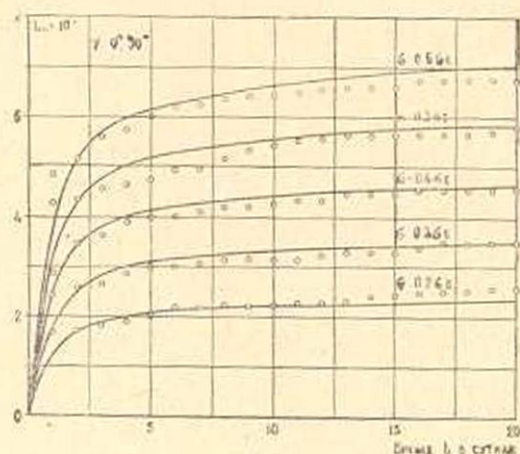
$$\varepsilon_n = C(t) (\sigma - b). \quad (6)$$



Фиг. 5.

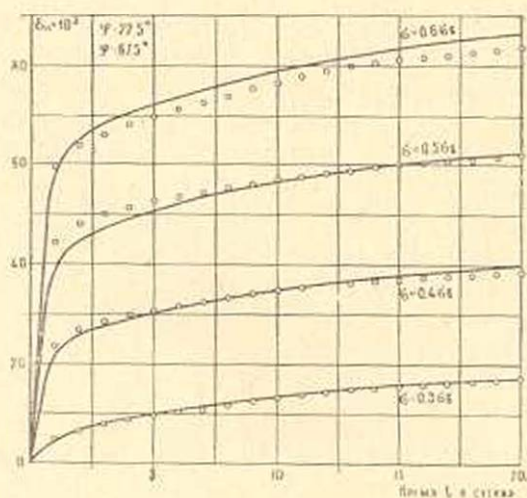
Формула (5) применяется в случае нулевой ориентации образцов ($\gamma = 0^\circ; 90^\circ$) и для первой линейной области при других ориентациях.

Формулой (6) можно пользоваться для второй области ползучести образцов ненулевой ориентации.



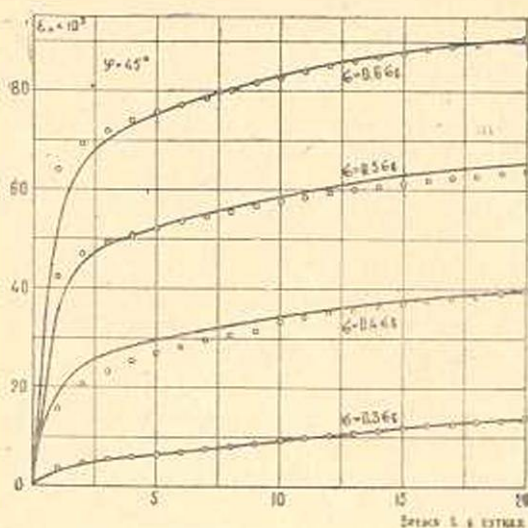
Фиг. 6.

На фиг. 6, 7, 8 сплошными линиями проведены теоретические кривые ползучести СВМ 1:1 при разных ориентациях образцов по



Фиг. 7.

данным табл. 2. Каждая кривая соответствует одному относительному напряжению. Экспериментальные данные обозначены кружочками. Из сравнения приведенных результатов можно заключить, что предло-



Фиг. 8.

женные выражения для определения как меры ползучести, так и деформации ползучести дают удовлетворительные результаты и могут быть применены для практических расчетов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 XII 1964

Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՏՎԱՄ ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻԿԻ ՍՈՂՔԻ ԴԵՖՈՐՄԱՅԻԱՆՆԵՐԻ ԵՎ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ
ԵՂԱՄ ԿԱՆՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՆՄՈՒՇԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՄԱՆ
ԱԶԴԵՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հորվածում քերված են ՏՎԱՄ ապակեպլաստիկի սողքի դեֆորմացիաների և լարումների միջև եղած կախվածությունը և քաղված են տաղանթային լարումների արդյունքները:

Պարզված է, որ տարակցող մանրաթելի նկատմամբ 0° կամ 90° անկյուն ունեցող նմուշների համար սողքի դեֆորմացիաների և լարումների կապը զմային է՝ անկախ լարումների մեծությունից (մինչև $0,6 \sigma_b$ ներառյալ):

Օ-ից տարբեր անկյունների դեպքում այդ կապը արտահայտվում է մի կերպով, որն ունի երկու դասի, որոնք, կախված լարվածությունից, ենթարկվում են տարբեր զմային օրենքների: Նկարագրելով ՏՎԱՄ ապակեպլաստիկի սողքը առաձգա-սողքային տեսություն միջոցով, տրված է բանաձև՝ սողքի դեֆորմացիաները հաշվելու համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Огибалов П. М., Ломакин В. А. Механические свойства стеклопластиков. Инженерный сборник, 30, 1960.
2. Огибалов П. М., Тюнчева И. М. О ползучести СВМ-а при нормальной температуре. Вестник Моск. университета, серия мат. и мех., № 2, 1964.
3. Мартиросян М. М. О ползучести стеклопластика СВМ в ранний период после изготовления материала. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 1964.
4. Ашкенази Е. К. Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. ЛДНТП, 1961.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.-Л., 1952.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Огибалов П. М., Ломакин В. А. Механические свойства стеклопластиков. Инженерный сборник, 30, 1960.
2. Огибалов П. М., Тюнчева И. М. О ползучести СВМ-а при нормальной температуре. Вестник Моск. университета, серия мат. и мех., № 2, 1964.
3. Мартиросян М. М. О ползучести стеклопластика СВМ в ранний период после изготовления материала. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 1964.
4. Ашкенази Е. К. Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. ЛДНТП, 1961.
5. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М.-Л., 1952.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Р. МЕСЧЯН

О ДЛИТЕЛЬНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СДВИГУ ГЛИНИСТЫХ
ГРУНТОВ

Строительной практике известно много случаев внезапного разрушения земляных сооружений и естественных склонов после долгих лет их безупречной службы. Это весьма распространенное явление объясняется [1, 2] понижением прочности глинистых грунтов вследствие влияния *ползучести*, то есть их длительного деформирования под действием внешних постоянных нагрузок.

В целях выяснения причин указанного явления как у нас в СССР, так и за рубежом за последние годы проведены большие работы по исследованию *длительной прочности* (длительного сопротивления сдвигу) глинистых грунтов—изменяемости показателей прочности (сопротивления сдвигу) в зависимости от продолжительности действия постоянной внешней нагрузки. Было установлено, что увеличение длительности действия постоянной внешней нагрузки может привести как к понижению [1, 2], так и к повышению [3, 4] прочности грунтов. То есть были получены явно противоречивые результаты, частично опровергающие возможность понижения прочности (сопротивления сдвигу) глинистых грунтов вследствие влияния ползучести.

Поскольку существующие данные о длительной прочности (сопротивлении сдвигу) глинистых грунтов были противоречивыми, а изменяемость прочности (сопротивления сдвигу) связывалась с увеличением длительности действия внешней нагрузки, в целях уточнения вопроса, автором настоящих строк, начиная с 1958 г., проводятся исследования по длительному сопротивлению их сдвигу. Результаты полученных данных частично были опубликованы ранее [5, 6]. Новые данные, подтверждающие полученные ранее результаты, приводятся в этой заметке.

Длительная прочность (сопротивление сдвигу) материалов (грунтов), как известно [7], определяется испытанием нескольких образцов-близнецов при различных постоянных нагрузках (сжимающих при одноосном и трехосном сжатии, касательных при простом сдвиге, срезе), не превышающих их «стандартную» (начальную, кратковременную) прочность (сопротивление сдвигу). Для установления характера изменяемости прочности материала, в зависимости от длительности действия постоянного напряжения t , полученные из длительных

опытов данные сравниваются со „стандартной“ прочностью (сопротивлением сдвигу) грунта.

„Стандартная“ прочность (сопротивление сдвигу $q_{ст}$) грунтов в разных лабораториях определяется по разным методам, отличающимся друг от друга длительностью разрушения (среза) образцов.

Чтобы выяснить влияние метода определения $q_{ст}$ на изменяемость сопротивления глинистых грунтов сдвигу в зависимости от длительности действия постоянных нагрузок, нами было исследовано влияние длительности среза на $q_{пр}$. Результаты испытаний, проведенных на приборах одноплоскостного среза, приведены в [5], а данные, полученные на приборах кольцевого сдвига [8], излагаются ниже.

Испытания на приборах кольцевого сдвига проводились на нормально уплотненных образцах-близнецах трех грунтов (табл. 1) нарушенной структуры, предварительно уплотненных нагрузками $\sigma = 2 \text{ кг/см}^2$ в течение 20–30 дней. Высота образцов до уплотнения 24 мм, после — 21–22 мм. Повторность опытов — двухкратная.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Наименование	Удельный вес $\gamma/\text{см}^3$	Пределы пластичности		
			граница текучести	граница пла- стичности	число пла- стичности
2–57	Суглинок	2.66	31.3	18.6	12.7
4–57	Глина	2.70	41.2	23.3	18.0
6–57	Часоваярская глина	2.65	59.07	21.2	37.87

Как и ранее [5], образцы-близнецы испытывались на срез приложением постоянных ступеней нагрузок через различные интервалы времени — 5 сек, 1 мин, 1 час, 12 часов. Кроме того, образцы-близнецы испытывались по стандартной методике, зафиксированной в „Руководстве по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений“ [9], имеющей широкое применение в лабораторной практике в СССР.

Отметим, что под стандартным сопротивлением сдвигу, согласно [9], подразумевается сопротивление, определенное по методике, при которой каждая последующая ступень нагрузки прикладывается к образцу после достижения им условной стабилизации деформации сдвига. За условную стабилизацию деформации сдвига мы принимали скорость сдвига 0.005 мм/мин.

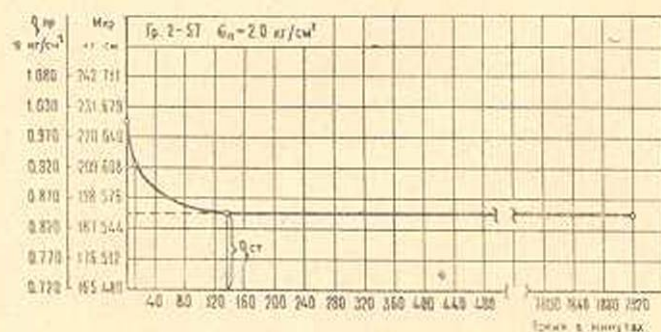
В течение всего опыта фиксировались как сдвиговые деформации, так и деформации сжатия (уплотнения). Деформация объема образцов не превышала 1.5%, поэтому считали, что сдвиг практически протекает в условиях постоянного объема. Результаты испытания образцов-близнецов двух грунтов приведены в табл. 2, а суглинка

(таб. № 2—57) на фиг. 1 в виде графика кривой $q_{пр}$ — длительность среза t .

Таблица 2

Режим загрузки	Интервал приложения нагрузок				Стандартное испытание
	5 сек	1 мин	1 час	12 часов	
Грунт 4—57					
$h = 24$ мм, №№ опытов 4/657—4/666, $M_{пр} = 18$ кг. см					
Продолжительность среза в мин	1.2	11.5	600	7920	180
Число ступеней нагрузки	14/14	12/11	11	12/10	11/11
Сопротивление сдвигу, кг/см ²	1.03	0.82	0.77	0.78	0.77
Грунт 6—57					
$h = 24$ мм, №№ опытов 6/635—6/643, $M_{пр} = 9$ кг. см					
Продолжительность среза в мин	1	10.5	630	7920	178
Число ступеней нагрузки	11/12	10/11	11/10	11/11	12/11
Сопротивление сдвигу, кг/см ²	0.37	0.34	0.34	0.35	0.37

Результаты опытов показывают, что увеличение длительности (уменьшение скорости) среза t приводит к уменьшению сопротивления сдвигу $q_{пр}$ суглинка и глины на 20—30%. Вместе с тем, увеличение t практически не влияет на $q_{пр}$ часоварской глины. Причем, как



Фиг. 1.

и в случае испытания грунтов на приборах одноплоскостного среза, уменьшение $q_{пр}$ наблюдается на начальном участке кривой $q_{пр} = f(t)$, то есть при сравнительно кратковременных испытаниях (фиг. 1). При дальнейшем увеличении t $q_{пр}$ практически остается постоянным.

Наиболее интересным является то, что изменяемость $q_{пр}$ в зависимости от t , практически заканчивается в пределах времени, необходимых для испытания образцов по стандартной методике [9]. Именно поэтому автор выдвинул гипотезу о равенстве стандартного сопротивления сдвигу $q_{ст}$ пластичных грунтов длительному сопротивлению сдвигу $q_{дл}$ [5, 8]. Некоторые данные, подтверждающие правильность указанной гипотезы, приведены в [6], новые — приводятся ниже.

Отметим, что результаты, аналогичные приведенным выше, ранее получены Бьеррумом, Симонсом, Тарблебом [10] и Я. Л. Коганом и А. Н. Чухровой [11]. По их опытам понижение сопротивления грунтов сдвигу нарушенной и ненарушенной структуры также практически прекращается при продолжительности разрушения (одноосное сжатие) и среза — 100—180 минут, то есть в обычных пределах длительности стандартных испытаний. Понижение прочности при увеличении длительности разрушения цилиндрических образцов установлено также М. Н. Гольдштейном и С. С. Бабицкой [2]. Но, к сожалению, по приведенным их данным в [2] невозможно судить о характере изменяемости прочности в зависимости от режима загрузки.

Чем же можно объяснить понижение прочности (сопротивления сдвигу) глинистых грунтов до $q_{ст}$ ($q_{ст}$) при увеличении длительности разрушения (среза) образцов?

М. Н. Гольдштейном [12] (1957), С. С. Вяловым [13] (1959), С. Е. Могилевской [14] (1961) и др. установлено, что разрушение образцов грунта наступает при какой-то, постоянной для него, относительной деформации. Если это так, то очевидно, что чем меньше длительность разрушения, тем меньше возможность проявления деформации ползучести, и поэтому для достижения предельной деформации сдвига потребуется приложить больше ступеней нагрузок. При увеличении длительности опыта наблюдается обратная картина. А это значит, что понижение прочности (сопротивления сдвигу) обусловлено накоплением деформации ползучести и достижением предельной деформации $\gamma_{пр}$ при напряжениях, меньших кратковременной прочности грунта.

Деформация сдвига сопровождается разрушением структуры грунта. Поэтому и скорость накопления деформации и понижение прочности (сопротивления сдвигу) зависят от прочности структурных связей и скорости их разрушения. Чем больше структурная прочность грунта и меньше скорость разрушения структурных связей, тем больше понижение его прочности при увеличении длительности среза, и наоборот. Увеличение длительности разрушения (среза) способствует увеличению количества разрушенных связей и разупрочнению грунта.

Дальнейшее увеличение длительности испытания (среза) и резкое уменьшение скоростей деформации грунта, обладающего в основ-

ном *водноколлоидальными* связями, приводит к его упрочнению вследствие тиксотропии, лучшей упаковки и ориентации частиц [6] и образования более прочных структурных связей. Этому способствует также уплотнение грунта, правда, небольшое, в процессе сдвига в условиях сложного напряженного состояния. Грунты, преимущественно обладающие жесткими цементационными связями, при увеличении длительности опыта не упрочняются, поскольку разрушение указанных связей имеет необратимый характер.

Теперь познакомимся с результатами исследования *длительного сопротивления сдвигу*, проведенного (в соответствии с методикой, изложенной в [6]) для проверки гипотезы автора о равенстве $q_{ст} \approx q_{дл}$ [5, 8] и определения влияния длительности действия постоянной внешней нагрузки на сопротивление слегка переуплотненных грунтов сдвигу.

С указанной выше целью испытаны диатомитовый грунт (нарушенная структура), глина из Ереванской ГЭС (нарушенная структура) и глина неокома из Саратовской ГЭС (нарушенная и ненарушенная структура). Опыты проводились на приборах одноплоскостного среза и кольцевого сдвига. Повторность опытов двухкратная.

1. На приборах одноплоскостного среза испытаны диатомитовый грунт (лаб. № 5—57) и глина неокома (лаб. № 8—63). Как и ранее [6], для определения влияния длительности действия постоянной внешней нагрузки на $q_{пр}$ плотных и достаточно прочных грунтов, перед испытанием образцы-близнецы *нарушенной структуры* подвергались *четырем* (гр. № 5—57) и *восемимесячному* (гр. № 8—63) предварительному уплотнению под $\sigma = 8 \text{ кг/см}^2$. Испытания на сдвиг проводились при $\sigma = 4 \text{ кг/см}^2$.

Методика приготовления образцов-близнецов *нарушенной структуры* и условия проведения опытов прежние [6].

Стандартное сопротивление сдвигу ($q_{ст}$) определялось по изложенной выше *стандартной* методике [7], а испытание на ползучесть при двух значениях касательных напряжений—0,8 и 0,9 от $q_{ст}$. Скорости нарастания касательных напряжений при испытании образцов на ползучесть равнялись скоростям загрузки при определении $q_{ст}$.

Сведения об основных физических свойствах образцов до и после испытания приведены в табл. 3.

Выдерживание образцов-близнецов под нагрузками $q = 0,8$ и $0,9$ от $q_{ст}$ в течение 120 и 35 дней не привело к их срезу, поэтому, чтобы определить их сопротивление сдвигу (после испытания на ползучесть), они были доведены до среза по той же методике стандартного испытания. Результаты испытания образцов сведены в табл. 4.

Данные, приведенные в табл. 4, показывают, что после опыта на ползучесть сопротивление сдвигу переуплотненных грунтов *нарушен-*

ной структуры $q_{пр}$ по сравнению с $q_{ст}$ или остается без изменения, или же несколько увеличивается ($q_{пр}/q_{ст} = 1.08 - 1.15$).

Таблица 3

Лаб. № грунта	Наименование	Влажность в %			Объемный вес $\gamma_{см}^3$		Предел пластичности	
		пасты до уплот.	после стандартного испытания	после опыта на ползучесть	после стандартного испытания	после опыта на ползучесть	предел текучести	предел пластичности
5-57	диатомитовый грунт	56.3	41.5	39.5	1.72	1.71	58.1	32.23
8-61	глина неокома	67.1	33.8	34.6	1.82	1.83	69.9	34.8

Таблица 4

$q_{ст}$ $кг/см^2$	Сопротивление сдвигу после испытания на ползучесть при		$q_{ст}$ длительно уплот- ненных образцов $кг/см^2$	Количество испытанных образцов	Продолжитель- ность опыта на ползучесть, дней
	$q = 0,8 q_{ст}$	$q = 0,9 q_{ст}$			
гр. 5-57 (структура нарушенная)					
$\sigma_{нач} = 8 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_{кон} = 4 \text{ кг/см}^2$, №№ опытов 5/965-5/971					
3.0	3.14	3.14	—	7	120
$q_{пр}/q_{ст}$	1.05	1.05	—	—	—
гр. 8-63 (структура нарушенная)					
$\sigma_{нач} = 8 \text{ кг/см}^2$, $\sigma_{кон} = 4 \text{ кг/см}^2$, №№ опытов 8/972-8/979					
1.62	1.75	1.87	1.62	7	35
$q_{пр}/q_{ст}$	1.08	1.15	1.0	—	—

Испытание на длительное сопротивление сдвигу глины неокома *ненарушенной* структуры выполнялось по изложенной выше методике. Образцы имели высоту 15 мм. До испытания на сдвиг они в течение 36 дней выдерживались под предварительно уплотняющей нагрузкой $\sigma = 2 кг/см^2$. Под этой же нагрузкой выполнялось испытание на сдвиг. Повторность опытов двухкратная. Всего было испытано семь образцов. Из них два — по стандартной методике, два под напряжением $q = 0.8 q_{ст}$, два — $q = 0.9 q_{ст}$ и один образец был оставлен под уплотняющей нагрузкой $\sigma = 2 кг/см^2$ для испытания на срез после окончания опытов на ползучесть.

В отличие от предыдущего случая, здесь по одному из образцов, загруженных $q = 0.8$ и 0.9 от $q_{ст}$, разрушились (срезались) через 2 — 3 часа после их загрузки и показали сопротивление сдвигу $q_{пр} = 1.25$ и $1.37 кг/см^2$ соответственно. Остальные образцы под ука-

занными нагрузками не разрушились, поэтому после опыта на ползучесть были доведены до среза.

Результаты указанных опытов приведены в табл. 5.

Таблица 5

$q_{ст}$ кг/см ²	Сопротивление сдвигу после испытания на ползучесть при		$q_{пр}$ длительно уплотненного об- разца кг/см ²	Количество испытанных образцов, штук	Продолжитель- ность опыта на ползучесть, дней
	$q = 0,8 q_{ст}$	$q = 0,9 q_{ст}$			
гр. 8—63 (структура ненарушенная)					
$h = 15$ мм, $\sigma_{нач} = 2$ кг/см ² , $\sigma_{кон} = 2$ кг/см ² , №№ опытов 8,627—8,633					
1,5	1,5	1,87	1,75	5	140—149
$q_{пр}/q_{ст}$	1,0	1,22	1,16	—	—

Данные, приведенные в табл. 5, показывают, что те образцы, которые не разрушились при $q = 0,8$ и $0,9 q_{ст}$, показали повышение сопротивления сдвигу после опыта на ползучесть.

Поскольку вырезка образцов грунта ненарушенной структуры жесткой консистенции была связана с определенными трудностями, автор склонен думать, что как „повышение“ сопротивления сдвигу после опыта на ползучесть, так и „разрушение“ образцов при $q = 0,8$ и $0,9$ от $q_{ст}$ в значительной степени обусловлены образованием микро и макротрещин в них во время их вырезки. А это значит, что к результатам испытания грунтов жесткой консистенции (в частности глины неомома) ненарушенной структуры надо относиться очень осторожно, ибо процесс вырезки образцов сопровождается образованием трещин в них и их разупрочнением.

2. На приборах кольцевого сдвига „Гидропроекта“, подвергнутых небольшой переделке [8], были испытаны образцы-близнецы из глины (таб. № 9—63) нарушенной структуры в двух различных его начальных состояниях плотности—влажности.

Изготовление серий образцов-близнецов двух различных состояний выполнялось предварительным уплотнением грунтовой пасты нагрузками $\sigma = 2$ и 4 кг/см², с последующей разгрузкой до $\sigma = 1$ и 2 кг/см² соответственно. Испытания на ползучесть выполнялись при тех же нормальных нагрузках.

В каждой серии испытывались по 14—15 образцов-близнецов при постоянных касательных напряжениях $q = 0,1, 0,3, 0,5, 0,7$ и $0,9$ от $q_{ст}$. Стандартное сопротивление сдвигу ($q_{ст}$) определялось испытанием 2х—3х образцов-близнецов. Как и в описанных выше случаях, скорость приложения касательных напряжений полностью соответствовала загрузке образцов при определении $q_{ст}$.

Данные о физических свойствах серий образцов-близнецов до и после опыта на ползучесть приведены в табл. 6.

Таблица 6

$\sigma_{\text{кон}}, \text{кг/см}^2$	Удельный вес $\gamma, \text{г/см}^3$	Влажность в %			Объемный вес $\gamma, \text{г/см}^3$		Пределы пластичности	
		пасты до уплотнения	после станд. испытания	после опыта на ползучесть	после станд. испытания	после опыта на ползучесть	предел текучести	предел пластичности
1	2.68	42.6	35.8	—	1.80	1.76	42.4	24.4
2	2.68	44.1	32.6	33.0	1.81	1.82	—	—

Как и при испытании образцов на приборах одноплоскостного среза, так и в рассматриваемом случае опыты на ползучесть при напряжениях $q < q_{\text{ст}}$ не привели к разрушению (срезу) образцов. Поэтому, как и ранее, после опыта на ползучесть образцы были доведены до среза по методике стандартного испытания. Полученные данные приведены в табл. 7.

Таблица 7

$q_{\text{ст}}$ кг/см ²	Сопротивление сдвигу после длительного опыта на ползучесть при		$q_{\text{пр}}$ длительно уплотненных, но не испытанных на ползучесть об- разцов кг/см ²	Продолжитель- ность предвари- тельного уплот- нения, дней	Продолжи- тельность ползучести, дней
	$q = 0,7 q_{\text{ст}}$	$q = 0,9 q_{\text{ст}}$			
$\sigma_{\text{нач}} = 2 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_{\text{кон}} = 1 \text{ кг/см}^2$					
0,38	0,48	0,55	—	87	30
$q_{\text{пр}}/q_{\text{ст}}$	1,26	1,45	—	—	—
$\sigma_{\text{нач}} = 4 \text{ кг/см}^2, \quad \sigma_{\text{кон}} = 2 \text{ кг/см}^2$					
0,77	0,89	0,98	0,77	67	72
$q_{\text{пр}}/q_{\text{ст}}$	1,15	1,27	1,0	—	—

В табл. 4, 5 и 7 приведены также данные (четвертая колонка) о сопротивлении сдвигу образцов, выдержанных под уплотняющими нагрузками в течение всего опыта на сдвиг, но не испытанных на ползучесть. Как и ранее [6], эти испытания выполнены для установления влияния уплотнения и тиксотропного упрочнения в процессе ползучести на сопротивление грунта сдвигу.

Анализ полученных результатов и данных, приведенных в таблицах 4 и 7, показывает:

1) независимо от вида пластичного грунта, его состояния к началу опыта и приборов испытания, испытание на ползучесть при напряжениях $q < q_{\text{ст}}$ не приводит к их разрушению (срезу). Наоборот,

испытание на ползучесть в большинстве случаев приводит к существенному упрочнению грунта;

2) чем больше плотность и меньше влажность грунта, тем меньше его упрочнение после ползучести;

3) испытание на ползучесть практически не приводит к изменениям начального объемного веса и влажности грунта. Поэтому повышение сопротивления сдвигу, по сравнению с $q_{ст}$, нельзя объяснить уплотнением грунта во время опыта на ползучесть;

4) упрочнение грунта нельзя объяснить также его тиксотропным упрочнением, поскольку сопротивление сдвигу образцов, не подвергнутых испытанию на ползучесть, но выдержанных под уплотняющими нагрузками в течение всего опыта, практически не изменяется по сравнению с $q_{ст}$;

5) поскольку отсутствуют уплотнение и тиксотропное упрочнение, упрочнение грунта можно объяснить явлениями, связанными с деформациями ползучести при сдвиге, — переориентацией частиц и образованием более прочных связей между ними в процессе сдвига [6]. Завершается ли эта переориентация соединением частиц с частицами, имеющими пленки связанной воды наименьшей толщины (места наименьшей блокировки межмолекулярных сил) [15], или же с более устойчивым треугольным расположением [16] и т. д. трудно сказать, ибо этот вопрос окончательно не решен и требует дальнейшего изучения. Однако, очевидно, что упрочнение грунта в рассматриваемом случае обусловлено переустройством частиц в процессе сдвига.

Разумеется, сказанное не относится к грунтам преимущественно обладающим жесткими (цементационными) связями. В этом случае, ввиду необратимого разрушения указанных связей, упрочнение грунта за счет образования новых связей практически невозможно.

Полученные данные позволяют заключить, что 1) гипотеза автора [6, 8] о равенстве *стандартного сопротивления сдвигу* пластичных глинистых грунтов их *длительному сопротивлению сдвигу* ($q_{ст} \approx q_{дл}$) является правильной; 2) увеличение длительности испытания на ползучесть при напряжениях $q < q_{ст}$ в большинстве случаев приводит к *повышению* сопротивления сдвигу — к повышению прочности грунта.

Эти выводы автора [6, 8] подтверждаются опытами В. В. Жихович [17].

Используя аналогичную с нашей методику определения $q_{ст}$ и изучая влияние длительности действия постоянных касательных напряжений (при $q = 0.7 - 0.86 q_{ст}$, $t = 25 - 45$ дней) на прочностные свойства мезотической глины нецарушенной структуры одесского побережья (твердой и полутвердой консистенции), В. В. Жихович обнаружил их упрочнение до 40%. Такие же результаты были получены А. Казагранде и С. Уилсоном [1], Р. Хефели [3], Сидом и др. [4], Тролопом и Чэном [16] при испытании искусственно приготовлен-

ных образцов (с полным и неполным водонасыщением) на одноосное раздавливание при постоянном их объеме.

Возникает вполне законный вопрос: чем же можно объяснить понижение прочности грунтов при увеличении длительности испытания на ползучесть, зафиксированное в ряде других лабораторий другими авторами [1, 2, 12, 16].

Еще в 1962 г. автор настоящих строк пришел к выводу [6], что указанные результаты, в основном, обусловлены методикой определения начальной, *стандартной* прочности (сопротивления сдвигу) грунтов. Чтобы убедиться в правильности высказанного положения этот вопрос осветим несколько более подробно.

В отличие от принятой в большинстве лабораторий механики грунтов научно-исследовательских учреждений и проектных организаций СССР методики, М. Н. Гольдштейн и С. С. Бабицкая [2] *„стандартную“* прочность определяют испытанием цилиндрических образцов на одноосное и трехосное сжатие методом *ускоренного раздавливания*. По указанной методике нагрузки прикладывают к образцу равными ступенями через каждые 5 сек, а величина ступени принимается равной 8–10% от ожидаемой прочности грунта. Продолжительность испытания образцов по этой методике *менее одной минуты*, тогда как по стандартной методике [7] она колеблется в пределах 1,5–3-х часов.

За рубежом, независимо от системы испытания (закрытая или открытая), начальная („стандартная“) прочность глинистых грунтов, в основном, определяется одноосным или трехосным раздавливанием цилиндрических образцов при длительности опыта 10–15 мин. [1, 16].

Принимая во внимание результаты приведенных выше опытов по исследованию влияния длительности среза на сопротивление грунтов сдвигу, нетрудно понять, что полученные указанным методом прочностные характеристики будут всегда выше, чем $\sigma_{ст}$ ($q_{ст}$). Поэтому, если за величину начальной („стандартной“) прочности принять $\sigma_{ст}$ ($q_{ст}$), то очевидно, что разрушение (срез) образцов произойдет при напряжениях $\sigma < \sigma_{уск}$ ($q < q_{уск}$), так как $\sigma_{ст} \approx \sigma_{ал} < \sigma_{уск}$.

По данным А. Казагранде и С. Уилсона [1], понижение прочности грунтов *ненарушенной структуры*, вследствие ползучести (при различной степени их водонасыщенности и консистенции от мягко пластической до полутвердой), колеблется в пределах 20–60%. Аналогичные опыты Д. Тролопа и К. Чэна [16] показали понижение прочности грунта *ненарушенной структуры* до 20%. Примерно такие же результаты получены А. М. Скибицким [18], А. Н. Гольдштейном и С. С. Бабицкой [2].

Судя по приведенным данным, понижение прочности грунтов нарушенной и ненарушенной структуры, вследствие ползучести, колеблется в пределах изменяемости их прочности при переходе от $\sigma_{уск}$ ($q_{уск}$) к $\sigma_{ст}$ ($q_{ст}$). Следовательно, $\sigma_{ст}$ ($q_{ст}$) действительно является наи-

меньшей прочностью (сопротивлением сдвигу) грунта и $\tau_{ст} (q_{ст}) \approx \tau_{дл} (q_{дл})$.

Поскольку стандартная прочность (стандартное сопротивление сдвигу) является довольно стабильным показателем прочности, то нецелесообразно пользоваться другими методами испытания образцов и определения длительной прочности грунтов. Тем более, что при ускоренном сдвиге затушевываются влияния пластических явлений (Н. Н. Маслов [19]), и наибольший интерес представляет изучение изменяемости прочности грунта „по сравнению со стандартной, находя последнюю в условиях стабилизации деформации от каждой ступени вертикальной и горизонтальной нагрузок“ (В. А. Флорин [20]).

Таким образом, противоречие в результатах разных авторов, о котором мы говорили выше, является результатом использования различных методик определения „стандартной“ (начальной) прочности (сопротивления сдвигу). Следовательно, чтобы впредь не было путаницы в этом деле, при определении изменяемости прочности (сопротивления сдвигу) грунтов за начальную (исходную) прочность надо брать $\sigma_{ст} (q_{ст})$, определяемую по общепринятой в СССР стандартной методике.

Вместе с тем надо отметить, что вывод автора о равенстве $q_{ст} \approx q_{дл}$ не относится к грунтам очень плотным и обладающим цементационными связями [5] (конденсационные структуры по П. А. Ребиндеру [21]). В этом случае ползучесть может привести к дальнейшему понижению прочности грунта, вследствие медленного, необратимого, разрушения цементационных связей и разрыхления [22] (увеличения объема) грунта в этом процессе. Однако, очевидно, что понижение прочности грунта ниже стандартной не может превышать 10–20%, ибо наибольшее фиксированное значение его по сравнению с $q_{уск}$ равно 60% [12], а наибольшая разница $q_{уск} - q_{ст}$ определяется величиной порядка 40% [17].

В заключение считаем необходимым заметить, что изложенное выше положение о разрушении (срезе) образцов при какой-то постоянной для него предельной деформации сдвига ($\gamma_{пр}$) справедливо только для сравнительно кратковременных испытаний. При длительных опытах на ползучесть разрушение образцов не наступает и тогда, когда деформация сдвига γ значительно больше $\gamma_{пр}$ ($\gamma > \gamma_{пр}$). Дело в том, что при малых скоростях ползучести, как бы не были велики деформации, формоизменение (сдвиг) пластичного грунта происходит в виде вязкого течения без разрыва его сплошности. Поэтому и ни в одном из опытов, как бы они ни были продолжительными (до одного года), деформация ползучести протекает без каких-либо признаков разрушения грунта.

Ս. Ռ. ՄԵՍԿՅԱՆ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ՍԱՀՔԻ ՀԱՐԱՏԵՎ ԴԻՄԱԳՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում բնությունը ևն առնված կառավարին բնահողերի սահքի գիմադրության վրա նմուշների փորձարկման տեղությունը ազդեցության և սահքի հարառակ գիմադրության որոշման հարցերը:

Փորձերը կատարվել են խախտված կազմվածք ունեցող կառավարին բնահողերի նմուշների վրա, Մասլով-Լուրյի և օղակալին կարման սարքերում:

Պարզված է, որ նմուշների փորձարկման տեղությունը աճը սկզբում (սկսած մեկ բույսից մինչև 120—180 բույս) բերում է սահքի գիմադրության նվազմանը մինչև 30% չափով, իսկ հետո, նրա մեծությունը մնում է կամ անփոփոխ, կամ աճում է 5—30%-ով:

Քանի որ կառավարին բնահողերի սահքի ստանդարտ գիմադրության ($q_{\text{ստ}}$) որոշման գնաքում, նմուշների փորձարկման տեղությունը փոփոխվում է 120 ÷ 180 բույսի սահմաններում, հեղինակը առաջ է քաշել այն հիպոթեզը, որ նրանց սահքի հարառակ գիմադրությունը ($q_{\text{հա}}$) հավասար է $q_{\text{ստ}}$:

Տարբեր բնահողերի երկփորձի նմուշները հարառակ հաստատուն $q = 0.8 - 0.9 q_{\text{ստ}}$ շոշափող լարումների տակ փորձարկելու հետևանքով պարզված է, որ սողքը չի բերում նմուշների խզմանը (քայքայմանը): Ընդհակառակը, սողքն օժանդակում է նրանց սահքի գիմադրության աճին, $q_{\text{ստ}}$ -ի համեմատությամբ:

Վերը նշվածի հիման վրա հեղինակը եկել է այն եզրակացության, որ կառավարին բնահողերի սահքի հարառակ գիմադրության հարցում մինչև օրս եղած հակասությունների պատճառ ևն հանդիսացել տարբեր լարորատորիաներում $q_{\text{ստ}}$ որոշման համար կիրառվող տարբեր եղանակները: Սողքի հարառակ գիմադրությունը որոշելու համար հեղինակը առաջարկում է օգտվել նմուշների փորձարկման ստանդարտ եղանակից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Casagrande A., Wilson S. Effect of rate of loading on the strength of clays and shales at constant water content. *Geotechnique*, No. 3, 1961.
2. Голодштейн М. Н. и Бабицкий С. С. Методика определения длительной прочности грунтов. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 3, 1961.
3. Haefeli R. Kriechproblem in Boden, Schnee und Eis. *Wasser und Energiewirtschaftl. Ann.*, 46, No. 3, Zürich, 1954.
4. Seed H. B., McNeil R. and Deguekin J. Increased resistance to deformation of clay caused by repeated loading. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Div.*, 84, N SM 2, 1958.
5. Месчян С. Р. О влиянии длительности испытания на сопротивление грунтов сдвигу. *ДАН АрмССР*, 32, № 1, 1961.
6. Месчян С. Р. К вопросу о длительном сопротивлении глинистых грунтов сдвигу. *Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук*, 15, № 2, 1962.
7. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. *Физматгиз*, М., 1962.

5. Мещян С. Р. Кольцевой прибор для изучения ползучести и длительного сопротивления сдвигу глинистых грунтов методом кручения. Известия АН Арм ССР, серия физ.-мат. наук, 15, 1962.
9. Руководство по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений. Госстройиздат, М., 1956.
10. Bjerrum J., Simons N. and Torblao S. The effect of time on the shear strength of a soil marine clay. Proc. Brussels Conf. on Earth Press Problems, Brussels, 1, 1958, p. 148.
11. Козан Я. Л. и Чухрова А. Н. Влияние условий изменения напряженного состояния глинистых грунтов при определении сопротивления сдвигу. ВНИИ транспортного строительства. Сообщение № 153, М., 1959.
12. Гольдштейн М. Н. Ползучесть и длительная прочность глинистых пород. Труды Совещания по инженерно-геологическим свойствам горных пород и методам их изучения, том II. Изд. АН СССР, М., 1957.
13. Вялов С. С. Реологические свойства и несущая способность мерзлых грунтов. Изд. АН СССР, М., 1959.
14. Могилевская С. Е. Вопросы ползучести и длительной прочности глинистых грунтов в связи с давлением на подпорные стенки. В кн. «Исследование физико-мех. свойств горных пород применительно к задачам управления горным давлением». Изд. АН СССР, М., 1951.
15. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота, М., 1951.
16. Trollope D. and Chan C. Soil structure and step-strain phenomenon. Proc. of the Amer. Soc. Civ. Engs., 86, pt. 1, N SM 2, 1960.
17. Жихович В. В. О ползучести, стандартной и длительной прочности плотных геологических глин. «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 4, 1963.
18. Вялов С. С. и Скибицкий А. М. Реологические процессы в мерзлых и плотных грунтах. Материалы к IV международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. Изд. АН СССР, М., 1947.
19. Маслов Н. Н. Прикладная механика грунтов. Машстройиздат, М.-Л., 1949.
20. Флорин В. А. Основы механики грунтов, том II. Госстройиздат, Л.-М., 1961.
21. Ребиндер П. А. Структурно-механические свойства глинистых пород и современные представления физико-химии коллоидов. Труды Совещания по инженерно-геологическим свойствам горных пород и методам их изучения, т. I. Изд. АН СССР, М., 1956.
22. Денисов Н. Я. О длительной прочности глинистых грунтов. Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотация докладов, М., 1964.

А. Г. БАГДОЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДАВЛЕНИИ, ПРИЛОЖЕННОМ К ГРАНИЦЕ ЖИДКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

§ 1. Задача о детонации

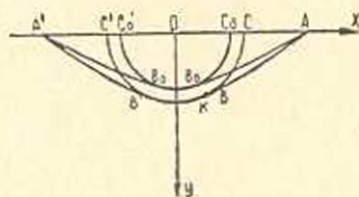
Пусть в некоторой точке 0 границы жидкого полупространства возникает некоторое давление, которое далее движется по границе ударной волны.

Допустим, что скорость фронта давления по границе V и значение давления во фронте на границе (точка А, фиг. 1) $P_0 = P_1$ постоянные.

Предположим, что давление возникает вдоль прямой по поверхности полупространства. Тогда задача будет плоской. Выберем ось Ox по границе невозмущенной жидкости, ось Oy вглубь жидкости. 0—точка возникновения давления на границе. Граничное условие на границе жидкости имеет вид

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1 P_a \left(\left| \frac{x}{Vt} \right| \right) & |x| < Vt \\ 0 & |x| > Vt, \end{cases} \quad (1.1)$$

где t — время, $P_a \left(\left| \frac{x}{Vt} \right| \right)$ —распределение давления за фронтом по границе.



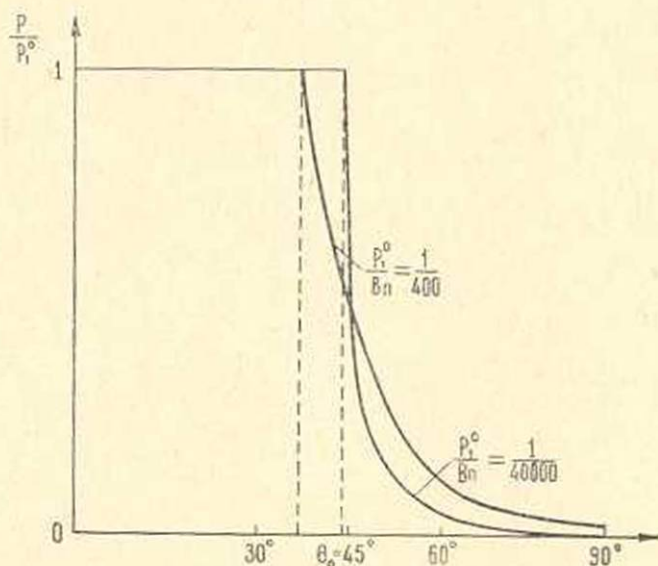
Фиг. 1.

Рассмотрим случай $V > a_0$; a_0 — начальная скорость звука. Область возмущенного движения будет ограничена линией $ABB'A'$, фиг. 1, где BB' — участок ударной волны, соответствующий области влияния начальных условий, AB — огибающая граничных возмуще-

ний. В линейном случае граница возмущенной области дается линией $AB_0B_0'A'$ фиг. 1.

Решение на ударной волне $ABB'A'$ находится с помощью уточнения линейного решения [4]; затем показывается, что это решение совпадает с точным решением уравнений газовой динамики [1];

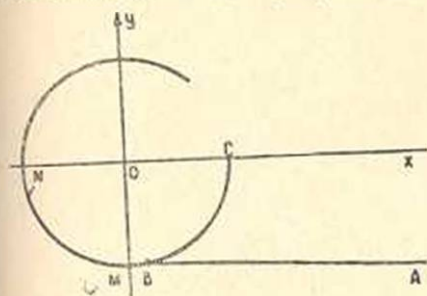
$$M = \sqrt{2}$$



Фиг. 2.

в точке B смыкания этого решения с постоянным используется теория коротких волн [3]; результаты приведены на фиг. 2, где показано изменение давления на $ABB'A'$. Для

определения давления во втором приближении решение находится с помощью представления искомых функций и независимых переменных в виде ряда по малому параметру. Решение работы [8] содержит, как нам кажется, ошибочные выводы в окрестности B фиг. 3.



Фиг. 3.

§ 2. Определение решения на ударной волне AB

В случае, если давление на поверхности задано в виде

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

имеем для потенциала $\varphi(x, y, t)$ уравнение для плоского случая

$$\tau_2 = \frac{1}{\pi a_0^2} \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} r dr \int_0^{\frac{\sqrt{2a_0^2 \gamma_1}}{r}} d\varphi' \frac{f}{\sqrt{\gamma_1^2 + 2\gamma_1 \frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{a_0^2} \varphi'^2}},$$

где $\cos \varphi_0 = \frac{a_0}{R'(t_0)}$, где в f удержаны члены, содержащие выражение $\delta(u - \tau_1)$, $\gamma_1(x) = H'(x)$. Если потребовать теперь, чтобы при $u = \tau_1$ потенциал φ_2 равнялся нулю, получим

$$a_0^2 \frac{\partial \tau_1}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x} + a_0^2 \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{n+1}{4} \frac{P}{\rho_0 a_0^2} = 0.$$

Откуда следует, что в качестве γ_1 нужно взять нелинейный добавок к уравнению ударной волны AB .

Для определения давления на ударной волне во втором порядке продифференцируем (2.7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = & \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_V \frac{\frac{\partial f}{\partial t'} dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y-y')^2}{a_0^2}}} - \\ & - \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_{V'} \frac{\frac{\partial f}{\partial t'} dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y+y')^2}{a_0^2}}} - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{x'} \frac{\frac{\partial g}{\partial t'} dt' dx'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{a_0^2}}}, \quad (2.7') \end{aligned}$$

где заменено дифференцирование по u на t' и интеграл взят по частям. Всюду берутся конечные части интегралов. Для потенциала в линейном случае имеем вблизи AB [5]:

$$\gamma \tau_1 = -\frac{1}{\rho_0} \int_0^{u-\tau_1} P dt', \quad \varphi_1 = \int_0^{u-\tau_1} f_1 H(t') dt' - \frac{1}{2} f_2 (u - \tau_1)^2, \quad (2.8)$$

где учтены уже значения производной давления на фронте. Теперь правая часть (2.6) f запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u, x, y)}{\partial u} = & 2 \frac{n+1}{2} f_1 f_2 \frac{1}{a_0^2} \gamma(u - \tau_1) H(u - \tau_1) + \\ & + f_1 \gamma(u - \tau_1) \left(-\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right) a_0^2 - 2\gamma(u - \tau_1) \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\ - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

где a — скорость звука в жидкости. Для решения задачи в области $ABB'A'$ во втором приближении ищем φ в виде

$$\varphi = \gamma \varphi_1(u, x, y) + \gamma^2 \varphi_2(u, x, y) \quad (2.3)$$

$$t = u + \gamma t_1(u, x, y), \quad (2.4)$$

где $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$. Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} \left(\frac{\partial t_1}{\partial u} - \frac{u-1}{2} \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) - \\ - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial u} \left(a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial u} \left(a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 t_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right). \quad (2.6)$$

В дальнейшем, следуя работе [6], введем функцию $D(z, x)$, которая при $z \rightarrow 0$ совпадает с $H(x)x$, где $H(x)$ — единичная функция, для определения решения (2.6) при заданной граничной функции $\varphi_2(u, x, 0) = g(u, x)$ применим к области в пространстве t, x, y , ограниченной коноидами, выходящими из точек t, x, y и $t, x, -y$, а также плоскостями $t=0$ и $y=0$, формулу Грина; тогда [5]

$$\varphi_2(u, x, y) = \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_V \frac{f(t', x', y') dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y-y')^2}{a_0^2}}} - \\ - \frac{1}{2\pi a_0^2} \iiint_V \frac{f(t', x', y') dt' dx' dy'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{(y+y')^2}{a_0^2}}} - \\ - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{y=0} \frac{g(t', x') dt' dx'}{\sqrt{(u-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{a_0^2} - \frac{y^2}{a_0^2}}}, \quad (2.7)$$

где $f(u, x, y)$ — правая часть (2.6). Пусть уравнение ударной волны в линейном случае $t = \tau_1(x, y)$. Когда точка u, x, y находится на линии $u = \tau_1(x, y)$, область V вырождается в прямую; если $u - \tau_1(x, y) = \gamma_1$ мало, интеграл по V редуцируется к интегралу

Ограничимся для простоты записи случаем $f_1 = \text{const}$, $t_1 = \text{const}$. Нетрудно видеть, что существенен лишь член в выражении $\frac{\partial f}{\partial t'}$

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 2 \frac{n+1}{2} \frac{f_1}{a_0^2} f_2 \delta(t' - \tau_1) H(t' - \tau_1).$$

Интеграл от $\frac{\partial g}{\partial t'} = -\frac{1}{\tau_1^2} \frac{P_2}{\rho_0}$ на фронте имеет в предельном значении множитель $-(P_2)_A$ [5], стр. 89 и равен нулю. Объем v' , когда точка x, y, u переходит на фронт $u = \tau_1(x, y)$, стягивается в точку и интеграл равен нулю.

Интеграл по v после действия дельта-функции запишется в виде

$$\frac{1}{2\pi a_0^2} \iint \frac{\Phi(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(\tau_1(x', y') - u)^2 - \frac{(x' - x)^2}{a_0^2} - \frac{(y' - y)^2}{a_0^2}}},$$

$$\Phi = 2 \frac{n+1}{4} \frac{f_1}{a_0^2} \frac{f_2}{a_0},$$

где область интегрирования ограничена контуром в координатах

$$x' - x = -r \cos \varphi, \quad y' - y = -r \sin \varphi,$$

$$r = \frac{a_0 \tau_1}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}},$$

а также условием $y' \geq 0$. Если $\varphi - \varphi_0$ не мало, r имеет порядок малости τ_1 . Тогда, взяв интеграл в пределах по r от 0 до $\frac{a_0 \tau_1}{2 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}$ и

по φ' от некоторого φ_1 до π , можно показать, что интеграл будет иметь порядок τ_1 . Тогда остается интеграл, взятый по малым значениям $\varphi - \varphi_0 = \varphi'$. Интегрируя сначала по φ' , найдем

$$\frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2 \sin \varphi_0}} r dr \int_0^{\frac{2a_0 \tau_1}{r}} d\varphi' \frac{\Phi(x', y')}{\sqrt{\tau_1^2 + 2\tau_1 \frac{r}{a_0} - \frac{r^2}{a_0^2} \varphi'^2}}$$

или

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2 \sin \varphi_0}} a_0 \Phi(x - r \cos \varphi_0, y - r \sin \varphi_0) dr.$$

Давление во втором приближении найдется в виде $P_2 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \tau_1^2$.

Рассмотрим случай $R'(t) = V$, $P_\Phi(t) = P_1^0$. Тогда имеем для уравнения линейной ударной линии

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} = \frac{\cos \varphi_0}{a_0}, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial y} = \frac{\sin \varphi_0}{a_0}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{a_0}{V_0},$$

для добавки к уравнению ударной волны

$$t_1 = -\frac{y}{\operatorname{tg} \alpha_1} \frac{n+1}{4} \frac{1}{a_0} \sin \alpha_1 \frac{1}{\cos^2 \alpha_1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{a_0}{V},$$

для потенциала в линейной задаче вблизи AB по (2.8)

$$\gamma \varphi_1 = -\frac{P_1^0}{\rho_0} (u - \tau_1) + \frac{P_1^0}{\rho_0} \frac{P_a'(1) a_0 \sin^2 \varphi_0}{x \sin^2 \varphi_0 - y \sin \varphi_0 \cos \varphi_0} \frac{1}{2} (u - \tau_1)^2.$$

В данном случае часть функции $\frac{\partial f}{\partial t'}$, дающая отличное от нуля значение интеграла, будет

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = 2 \frac{n+1}{4} \frac{P_1^0}{\rho_0} \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{P_a'(1) a_0 \sin^2 \varphi_0}{(x \sin \varphi_0 - y \cos \varphi_0) \sin \varphi_0} \delta(u - \tau_1).$$

Вычисляя интеграл, найдем для давления $P_2 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \tau^2$

$$P_2 = -\frac{n+1}{4} \frac{P_1^0}{\rho_0 a_0^2} P_1^0 P_a'(1) \frac{V - \xi}{\xi - a_0 \sin \alpha_1 \sin \alpha_1} \frac{1}{\xi},$$

что совпадает с решением простых волн. Результат согласуется также с решением [5].

В осесимметричной задаче для давления вблизи фронта в (2.7') следует под знаком интеграла добавить множитель $\sqrt{\frac{x'}{x}}$ и в функцию Φ добавить слагаемое $\frac{n-1}{\rho_0 a_0^2} \frac{P_1}{\gamma} \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - a_0 \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial t_1}{\partial x}$. В случае $P_2 = P_1^0$ линейное решение дается в виде

$$\gamma \varphi_1 = -\frac{1}{\rho_0} A_0 (u - \tau_1) - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0} A_1 (u - \tau_1)^2,$$

где $A_0(x, y)$ и $A_1(x, y)$ даны в [5], стр. 119. Решение на фронте во втором приближении можно найти в виде

$$A_0 = \sqrt{\frac{V t_0}{x}} P_1^0, \quad P_1 = A_0(x, y), \quad \lambda = 2 \frac{n-1}{n+1} \frac{a_0}{x - r \cos \varphi_0} A_0^2 \sin \alpha_1 - \\ - \frac{2}{n+1} \frac{a_0^2}{x - r \cos \varphi_0} \frac{\partial t_1}{\partial x} A_0 P_1^0 \sin \alpha_1;$$

$$P_2 = -\frac{n+1}{2} \rho_0 \int_0^{\frac{y}{\sin \varphi_0}} \frac{\lambda - A_0 A_1(x - r \cos \varphi_0, y - r \sin \varphi_0)}{2 \rho_0^2 a_0^3} \sqrt{\frac{x - r \cos \varphi_0}{x}} dr.$$

§ 3. Решение задачи для произвольного давления, заданного на границе полупространства

Пусть на некоторой высоте h над поверхностью жидкости, занимающей нижнее полупространство, произведен взрыв. Ударная волна, образующаяся при взрыве, в момент t_0 доходит до границы жидкости и затем начинается отражение и прохождение ее в жидкость.

Поскольку импеданс жидкости $\rho_2 a_2$ намного больше импеданса воздуха $\rho_1 a_1$, можно предполагать, что отражение как бы происходит от твердой стенки, и давление на поверхности считать известным.

Запишем граничное условие

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t) \\ 0 & x > R(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Условие это ставится на поверхности жидкости, однако в линейной постановке его можно сносить на невозмущенную границу $y = 0$ [5].

В выражении (3.1) $R(t)$ представляет радиус фронта ударной волны по границе от точки 0 касания ударной волны с границей $y = 0$,

$$P_1(x, t) = P_\Phi(t) f\left(\frac{x}{R(t)}\right),$$

где $P_\Phi(t)$ — давление во фронте на поверхности.

Нетрудно видеть, что при $h > 0$, $R'(0) = \infty$. Но по линейной теории получается [5], что точка B_0 , фиг. 1, касания огибающей поверхностных возмущений AB_0 с линией начальных возмущений B_0B_1 имеет координату $x_{B_0} = \frac{a_0 t}{R'(0)}$, и, следовательно, в задаче с $h > 0$ имеем

$$x_{B_0} = 0. \quad (3.2)$$

Отсюда следует, что участок B_0B_1 , соответствующий области начальных условий и требующий особого рассмотрения — § 1, отсутствует.

Можно найти, что давление в точке B_0 , взятое по линейной теории и вычисленное вдоль ударной волны AB_0 , совпадает с давлением в точке B_0 , если двигаться по оси Oy . Следовательно, давление в линейной постановке непрерывно в точке B_0 .

Другой характерной особенностью рассматриваемой общей задачи является отсутствие ветвления вблизи линии BC , $r = a_0 t$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Известно, что в случае $R'(t) = \text{const}$, $h = 0$ вблизи линии BC имеет место ветвление, хотя ударная волна в данной задаче не образуется [4]. Нами показано, что в общей задаче $h > 0$ эта особенность также отсутствует.

Будем рассматривать плоскую задачу, поскольку в осесимметричной задаче даже в случае $R'(t) = \text{const}$ ветвление отсутствует.

Линейная задача (3.1) имеет решение [5], в случае $R'(t) > a_0$

$$p = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_1}^0 d\bar{z} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_1(-\bar{z}, t')}{\bar{R}_0} d\tau_1 - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\bar{z}} d\bar{z} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_1(\bar{z}, t')}{\bar{R}_0} d\tau_1, \quad (3.3)$$

где $t' = t - \frac{1}{a_0} \bar{R}_0$, $\bar{R}_0 = \sqrt{(\bar{z} - x)^2 + \tau_1^2 + y^2}$, причем имеем для τ_1 и τ_1

$$\begin{aligned} f(-\bar{z}) &= t - \frac{1}{a_0} \sqrt{(\bar{z} - x)^2 + \tau_1^2 + y^2} \\ f(\bar{z}) &= t - \frac{1}{a_0} \sqrt{(\bar{z} - x)^2 + \tau_1^2 + y^2} \\ r_1^* &= -R \left(t - \frac{1}{a_0} \sqrt{r_1^{*2} - 2r_1^*x + x^2 + y^2} \right) \\ \bar{z}_1 &= R \left(t - \frac{1}{a_0} \sqrt{\bar{z}_1^2 - 2\bar{z}_1x + x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функция $t = f(\bar{z})$ обратная к $\bar{z} = R(t)$. Выражение (3.3) имеет место в области $r < a_0 t$.

В области $r > a_0 t$ имеем

$$p = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} d\bar{z} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_1(\bar{z}, t')}{\bar{R}_0}, \quad (3.5)$$

где $\bar{z}_{1,2}$ — два корня последнего уравнения (3.4).

Будем изучать поведение решения вблизи линии $r = a_0 t$, причем для простоты в подынтегральной функции положим сначала

$$\frac{P_1}{\sqrt{(\bar{z} - x)^2 + y^2 + \tau_1^2}} = 1,$$

то есть рассмотрим изменение площади. Очевидно тогда, что согласно (3.3)

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\bar{z}_1} d\bar{z} \int_0^{\tau_1} d\tau_1 - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} d\bar{z} \int_0^{\tau_1} d\tau_1 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\bar{z}_1} d\bar{z} \int_0^{\tau_1} d\tau_1 + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\bar{z}_1} d\bar{z} \int_0^{\tau_1} d\tau_1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где первый интеграл в правой части дает давление на звуковой ли-

нии, ξ_0, η_1^0 есть ξ_1, η_1 при $x^2 + y^2 = a_0^2 t^2$, причем запись (3.6) выбрана для удобства.

Рассмотрим второй интеграл в (3.6). Из (3.4) имеем

$$r_1^* = - \frac{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{2f'(0) a_0^2 t + 2x}.$$

$$\frac{\partial \eta_1^0}{\partial y} = - \frac{y}{\sqrt{2f'(0) \xi^2 a_0^2 + 2f'(0) \xi t a_0^2 - (\xi - x)^2 + a_0^2 t^2 - y^2}}$$

или

$$- \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} d\eta = 2y \frac{\sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{f'(0) t a_0^2 + x}. \quad (3.7)$$

Вычислим теперь третий и четвертый интегралы в (3.6).

Очевидно,

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_1} d\xi \int_0^{\eta_1} d\eta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_2} d\xi \int_0^{\eta_1^0} d\eta = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{y d\xi}{\sqrt{(f(\xi) a_0 - a_0 t)^2 - (\xi - x)^2 - y^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_2} \frac{y d\xi}{\sqrt{f^2(\xi) a_0^2 - 2f(\xi) t a_0^2 - \xi^2 + 2\xi x}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подкоренное выражение в первом интеграле можно представить в виде

$$(f - t)^2 a_0^2 - (\xi - x)^2 - y^2 = a_0^2 (\xi - \xi_0) + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2,$$

$$a_1 = 2(f(\xi_0) - t) a_0^2 f'(\xi_0) - 2\xi_0 + 2x.$$

В силу (3.4) можно написать

$$a_0^2 (f - t)^2 - \xi^2 + 2\xi x - a_0^2 t^2 = -\xi (\xi - \xi_0) \varphi(\xi_0)$$

$$\varphi(\xi_0) \neq 0, \quad \varphi(0) \neq 0. \quad (3.9)$$

В самом деле, $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$ являются в силу (2.8) однократными корнями левой части (3.9). Учитывая это, получим значение первого интеграла в (3.8) в виде

$$- \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{f(\xi_0) a_0^2 f'(\xi_0) - a_0^2 t f'(\xi_0) - \xi_0 + x}. \quad (3.10)$$

Разность второго и третьего интегралов дает малые основного по-

рядка вблизи точек $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$, в которых подынтегральная функция содержит особенность.

Учитывая это, можно записать, разбивая интеграл на интервалы от 0 до $\frac{\xi_0}{2}$ и от $\frac{\xi_0}{2}$ до ξ_0

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_0} \frac{y d\xi}{V - \xi(\xi - \xi_0) \varphi(\xi) + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi_0} \frac{y d\xi}{V - \xi(\xi - \xi_0) \varphi(\xi)} = \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{\varphi(\xi_0) \frac{\xi_0}{2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Будем рассматривать давление на поверхности в виде $P_1 = P_\Phi(t)$. Окончательно получим, учитывая еще значения функции

$$\frac{P_\Phi(t')}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2}$$

в точках 0 и ξ_0 ,

$$\begin{aligned} P = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\xi_0} d\xi \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_\Phi(t')}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2} d\tau_1 + \\ & + \frac{1}{\pi} \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{f'(0) t a_0^2 + x} \frac{P_\Phi(0)}{a_0 t} - \frac{1}{\pi} \frac{P_\Phi(0)}{\varphi(0) \frac{\xi_0}{2}} \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{a_0 t} - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{\varphi(\xi_0) \frac{\xi_0}{2}} \frac{P_\Phi(f(\xi_0))}{a_0 t - a_0 f(\xi_0)} + \\ & + \frac{1}{\pi} P_\Phi(f(\xi_0)) \frac{y \sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}}{\xi_0 - x - (f - t) a_0^2 f'(\xi_0)} \frac{1}{a_0 t - a_0 f(\xi_0)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

при $x^2 + y^2 \leq a_0^2 t^2$, где, как легко найти,

$$\varphi(0) = \frac{2x - 2a_0^2 f'(0) t}{\xi_0}, \quad \varphi(\xi_0) = \frac{2\xi_0 - 2x - 2a_0^2 f'(\xi_0) (f(\xi_0) - t)}{\xi_0}.$$

Для точек $x^2 + y^2 > a_0^2 t^2$ имеем по (3.5)

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\xi_2}^{\xi_1} d\xi \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \frac{P_\Phi(t')}{V(\xi - x)^2 + y^2 + \tau_1^2} d\tau_1, \quad (3.13)$$

где $\xi_{1,2}$ — два корня уравнения (3.4). На линии $x^2 + y^2 = a_0^2 t^2$ значения

корней $\xi_0 = \xi_1^0$, $\xi_2^0 = 0$. Если использовать (3.4) и разбить интеграл по ξ на части в пределах от ξ_2 до $\frac{\xi_1}{2}$, от $\frac{\xi_1}{2}$ до ξ_1 , получим, полагая

$$\frac{P_1}{V(\xi-x)^2+y^2+\eta^2} = 1,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} y \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{V-\xi(\xi-\xi_0)\varphi(\xi)+a_0^2 t^2-x^2-y^2} - \frac{1}{\pi} y \int_0^{\xi_2} \frac{d\xi}{V-\xi(\xi-\xi_0)\varphi(\xi)} = \\ = \frac{1}{\pi} y \int_{\xi_2}^{\frac{\xi_1}{2}} + \frac{1}{\pi} y \int_{\frac{\xi_1}{2}}^{\xi_1} - \frac{1}{\pi} y \int_0^{\frac{\xi_1}{2}} - \frac{1}{\pi} y \int_{\frac{\xi_1}{2}}^{\xi_1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Обозначим

$$-\xi(\xi-\xi_0)\varphi + a_0^2 t^2 - x^2 - y^2 = -(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)\varphi_1(\xi).$$

Вычислим производную от интеграла λ по ξ_2

$$\lambda = \int_{\xi_2}^{\frac{\xi_1}{2}} \frac{d\xi}{V(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_1)\varphi_1(\xi)}.$$

Сделав замену $\xi - \xi_2 = \zeta$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\xi_2} = \frac{d}{d\xi_2} \int_0^{\frac{\xi_1}{2}-\xi_2} \frac{d\zeta}{V\zeta(\zeta_1-\zeta_2-\zeta)\varphi_1(\zeta-\zeta_2)} = \\ = -\frac{\frac{1}{2} \frac{d\xi_1}{d\xi_2} - 1}{V\left(\frac{\xi_1}{2}-\xi_2\right)\frac{\xi_1}{2}\varphi_1\left(\frac{\xi_1}{2}\right)} + \int_0^{\frac{\xi_1}{2}-\xi_2} \frac{d\zeta}{-2V\zeta\varphi_1(\xi_1-\zeta-\xi_2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (3.4) вблизи $r = a_0 t$

$$\xi_2 = \frac{x^2 + y^2 - a_0^2 t^2}{2x}, \quad \xi_1 - \xi_0 = \frac{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}{2\xi_0 - 2x - 2f(f-t)a_0^2}$$

имеем, что при $r = a_0 t$ $\frac{d\lambda}{d\xi_2}$ конечна.

Подобным же образом можно показать конечность производных всех оставшихся интегралов по $r = a_0 t$. Тогда в выражении для давления впереди звуковой линии, то есть при $r > a_0 t$, будут члены с первой степенью $r - a_0 t$.

В силу отсутствия особенности типа квадратного корня можно, применяя метод замены линейных характеристик точными, показать,

что давление впереди звуковой волны отличается от значения давления при $r = a_0 t$ в порядке выше второго.

Из (3.12) в случае $R'(0) = \infty$ получим, что давление позади звуковой линии также совпадает с давлением на самой звуковой линии, выражаемым интегралом в (3.12), поскольку слагаемые, содержащие $\sqrt{a_0^2 t^2 - x^2 - y^2}$, в правой части (3.12) сократятся.

Таким образом, при $P_1(x, t) = P_\Phi(t)$ в случае $R'(0) = \infty$ распределение давления как впереди, так и позади звуковой линии BC , фиг. 1, не содержит членов с ветвлением. Ударная волна впереди линии BC тогда, во втором порядке, не образуется.

Этот факт хорошо согласуется с отсутствием особенности в точке B пересечения линии AB , BC и оси Oy .

В случае задания $P_1(x, t) = P_\Phi(t) f\left(\frac{x}{R}\right)$ распределение давления, как можно заключить из предыдущего, будет иметь ту же особенность, что и для случая $P_\Phi = \text{const}$, поскольку переменность P_Φ не дает дополнительных членов в ветвлении. Поэтому можно заключить, что во втором порядке ударная волна не образуется, хотя этот факт следовало бы проверить вычислением.

Отсутствие ударной волны во втором приближении впереди BC не означает отсутствия ее в более высоких приближениях, вероятно, при $P_\Phi(t) \ll P_\Phi(0)$ ударная волна впереди BC образуется.

Таким образом, при решении нестационарных задач, подобных нашей, как, например, задачи о нестационарной дифракции, при определении второго приближения внутри области необходимо показать на отсутствие ударной волны перед звуковой линией. То же относится к задаче установившегося обтекания крыла с округленной передней кромкой.

Рассмотрим теперь вопрос о законе движения ударной волны для больших t . В случае, когда $R'(0) < \infty$ для больших моментов времени, решение вблизи BB' , фиг. 1, не будет определяться лишь начальными значениями $P_\Phi(t)$ и $R'(t)$. Поэтому решения § 1 несправедливы. Для больших моментов времени возмущения, идущие по уплотненной жидкости, нагоняют ударную волну и, хотя они и малы, но за большой промежуток времени получается качественно новый эффект затухания. Этот факт, известный для одномерного случая, а также для коротких волн [10], мы используем при решении задачи об определении формы ударной волны BB' , фиг. 1, для больших t . Полученное решение будет справедливо и для $R'(0) = \infty$, поскольку единственное требование: конечность $t - \frac{r}{a_0}$.

Таким образом, можно получить давление на ударной волне для больших моментов времени и для конечных удалений от оси симметрии. В основе метода находится замена линейных характеристик уточненными [7], что позволяет найти давление на ударной волне.

Далее показано, использованием работы [2], что полученное решение удовлетворяет уравнениям газовой динамики. Кроме того определяется и задний скачок.

Рассмотрим осесимметричный случай. Предположим, что давление на поверхности со временем падает и в момент t_0 обращается в нуль. Если t_0 мало, все движение сосредотачивается в окрестности фронта [10], в случае конечного t_0 имеется Λ -волна [5]. Вместо этого можно предположить, что при $t \rightarrow \infty$, $P_0(t) \rightarrow 0$. Кроме того, предполагаем конечность $R(\infty)$.

Рассмотрим область BB' на ударной волне. Линейное решение для задачи с осевой симметрией имеет вид [5]

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\tilde{R}_0} \frac{P_1(r', t') r' dr'}{\tilde{R}_0}, \quad (3.15)$$

где

$$\tilde{R}_0 = \sqrt{x^2 + r'^2 - 2xr' \cos \psi + y^2}, \quad t' = t - \frac{\tilde{R}_0}{a_0},$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Для больших $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r' dr' P_1 \left(r', t - \frac{r}{a_0} + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right), \quad (3.16)$$

где

$$r_0^* = R \left(t - \frac{r}{a_0} + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right).$$

Решение (3.16) можно переписать при $y \rightarrow \infty$ в виде

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r' dr' P_1 \left(r', t' + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right), \quad (3.17)$$

где учтено, что в принятом приближении

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\sin \theta}{a_0}; \quad t' = t - \frac{r}{a_0}.$$

Заменим характеристики линейной задачи уточненными $t - \frac{r}{a_0} \rightarrow y_1$. Тогда получим

$$P = \frac{F(y_1)}{r}, \quad (3.18)$$

где

$$F(y_1) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a_0} \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(r', y_1 + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right) r' dr',$$

$$r_0^* = R \left(y_1 + \frac{1}{a_0} r_0^* \cos \theta \cos \psi \right) \quad (3.19)$$

и уравнения характеристик

$$t = \frac{r}{a_0} - \frac{1}{a_0 Bn} \frac{n+1}{2} F(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + y_1. \quad (3.20)$$

Заметим, что уравнения характеристик даются соотношением (1.16) § 1.

Из (3.18) следует, что $v_r = 0 \left(\frac{1}{r} \right)$, $v_\theta = 0 \left(\frac{1}{r^2} \right)$. Тогда, учитывая, что $t = \frac{r}{a_0} + 0(\ln r)$, и оставляя малые порядка $\frac{1}{r}$, найдем, что производные по θ в (1.16) § 1 не понадобятся, и уравнение характеристик дается (3.20). Соотношение на ударном фронте дает

$$\frac{1}{a_0 Bn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r}{a_0 y_1} = \frac{2 \int_0^{y_1} F(y_1) dy_1}{F^2(y_1)} \quad (3.21)$$

или

$$F(y_1) = \sqrt{\frac{\frac{\sin \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(r', y_0 + \frac{1}{a_0} r' \cos \theta \cos \psi \right) r' dr'}{\frac{1}{Bn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r}{a_0 y_0}}}. \quad (3.22)$$

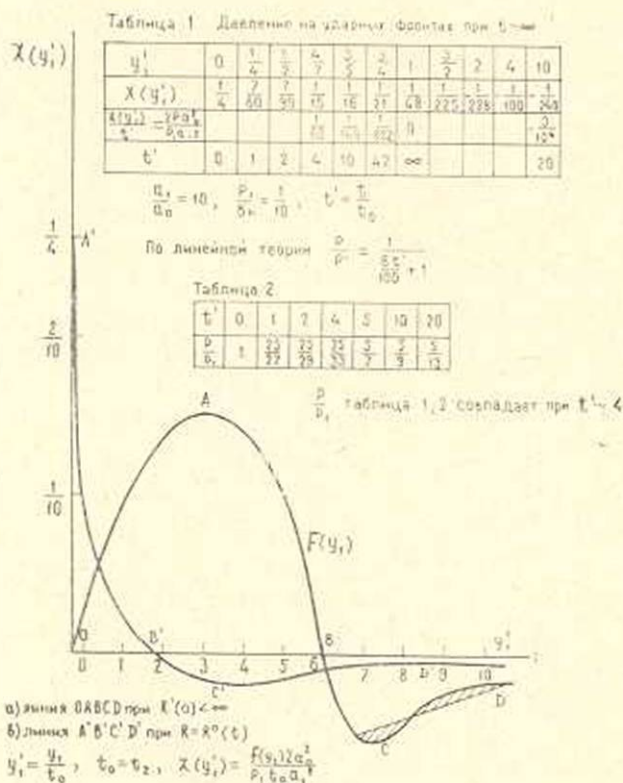
где y_0 — корень $F(y_1)$, причем для больших r можно считать в числителе (3.22) $y_1 = y_0$. Такой корень существует для заданных граничных условий фиг. 4, которая составлена для случая оси симметрии $x = 0$, $F(y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{P_\Phi(y_1) R^2(y_1)}{2a_0}$.

Уравнение ударной волны имеет вид

$$t = \frac{r}{a_0} - \sqrt{\frac{n+1}{2} \frac{1}{a_0 Bn} \int_0^{y_0} F(y_1) dy_1 \ln \frac{r}{a_0 y_0}} + y_0. \quad (3.23)$$

Подобным образом можно найти решение плоской задачи. Полученное решение имеет место для всех r при $\frac{y_1}{r} \ll 1$. В случае реальных

граничных условий имеем $R = R^0(t)$, $R^{-2}(t) = D_1^2 \frac{(t+t_0)^2}{\left(1 + \frac{t}{t_2} + \frac{t_0}{t_2}\right)^2} - D_1^2 \frac{t_0^2}{\left(1 + \frac{t_0}{t_2}\right)^2}$; $P_\Phi = P_1 \frac{t_0}{t_0+t}$; t_0, t_2, D_1 постоянны; для $F(y_1)$ и $P_{BB'}$ имеем фиг. 4.



Фиг. 4.

Из (3.22) следует, что $F(y_1) \sim \frac{1}{\sqrt{\ln r}}$ и для давления $P \sim \frac{1}{r \sqrt{\ln r}}$. Но вблизи BB' можно получить [11] для конечных $R'(0)$, что $P \sim P_1 e^{-\frac{1}{Bn}}$, откуда $r \sim e^{\frac{1}{Bn}}$, следовательно, решение имеет место для весьма больших r при малых $\frac{P_1}{Bn}$. Решение будет справедливо также для $R'(0) = \infty$, так как единственное условие — это конечность выражения y_1 .

Покажем теперь, что полученное решение удовлетворяет уравнениям движения.

Решения эти (3.18), (3.20) соответствуют коротким волнам, поэтому будем пользоваться нестационарными уравнениями коротких волн [2].

В переменных $r = a_0 t \left(1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta\right)$, $\frac{P}{Bn} = M_0 \mu$, $\tau = \ln t$ имеем уравнение

$$\frac{\partial \mu}{\partial \tau} + (\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \mu = 0. \quad (3.24)$$

Характеристики этого уравнения

$$C_1 = \ln t \mu, \quad C_2 = \frac{\delta}{\mu} + \ln \mu,$$

откуда общее решение

$$\delta = -\mu \ln \mu + \frac{t_0}{t} \Phi(t \mu), \quad (3.25)$$

t_0 — постоянная. Запишем решение (3.18), (3.20) в переменных δ , μ

$$M_0 \delta = \frac{1}{a_0 t} \frac{F(y_1)}{Bn} \ln \frac{r}{a_0 y_1} - \frac{2}{n+1} \frac{y_1}{t},$$

$$\delta = \frac{P}{Bn} \frac{1}{M_0} \ln \left(\frac{r}{a_0 F} \frac{F}{y_1} \right) - \frac{2}{n+1} \frac{y_1}{M_0 t}.$$

Поскольку $P = \frac{F(y_1)}{a_0 t}$, имеем $y_1 = \Phi_1(Pt)$ и

$$\delta = -\mu \ln \mu + \mu \ln \frac{F(y_1)}{a_0 y_1 M_0 Bn} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{M_0} \frac{\Phi_1(Pt)}{t}.$$

Поскольку $y_1 = \Phi_1(Pt)$, $t \mu = \frac{F(y_1)}{Bn} M_0^{-1}$; обозначая

$$t \mu \ln \frac{F(y_1)}{a_0 y_1 M_0 Bn} - \frac{2}{n+1} \frac{1}{M_0} \Phi_1(Pt) = t_0 \Phi(t \mu),$$

получим (3.25).

Мы показали, что решение по методу замены линейных характеристик уточненными удовлетворяет уравнениям движения.

Найдем теперь условие образования заднего скачка, в котором давление повышается до невозмущенного. Найдем огибающую характеристик (3.20) по y_1

$$-\frac{1}{a_0 Bn} \frac{n+1}{2} F'(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} + 1 = 0, \quad (3.26)$$

откуда $F'(y_1) > 0$, что соответствует правой ветви CD табл. 1. Для

$\frac{\partial P}{\partial t}$ имеем по (3.20) $\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{a_0 Bn}{r_1(n+1)} = \text{const}$ при $r_1 = \text{const}$.

Найдем теперь задний скачок. Пусть характеристики (3.20) впереди и позади заднего скачка отвечают параметрам y_1 , y_2 . Тогда из формулы Пфрима имеем вдоль заднего скачка

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(y_1 - kF(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} \right) = \frac{1}{2} \left(-F(y_1) \frac{k}{r} - F(y_2) \frac{k}{r} \right), \quad (3.27)$$

причем вдоль ударной волны

$$y_1 - kF(y_1) \ln \frac{r}{a_0 y_1} = y_2 - kF(y_2) \ln \frac{r}{a_0 y_2}$$

$$k = \frac{1}{a_0 \beta n} \frac{n+1}{2}.$$

Отсюда

$$k \ln \frac{r}{a_0 y_1} \sim \frac{y_2 - y_1}{F(y_2) - F(y_1)}, \quad \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right| \ll \left| \ln \frac{y_1}{r} \right|.$$

Дифференцируя это соотношение вдоль ударной волны по r и исключая из него и из (3.27) r и dr будем иметь

$$\int_{y_1}^{y_2} F(y) dy = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) (F(y_1) + F(y_2)). \quad (3.28)$$

Условие (3.28) означает равенство площадей между $F(y)$ и секущей [9].

На фиг. 4 участок BC соответствует $-y_1$, области впереди скачка, участок CD — y_2 , области за скачком. Задний скачок образуется в точке перегиба на CD фиг. 4. Для $t \rightarrow \infty$ имеем $y_1 \rightarrow y_0$, $y_2 \rightarrow \infty$ и уравнение скачка (3.28)

$$k \ln \frac{r}{a_0 y_0} = \frac{y_2 - y_1}{-F(y_1)}, \quad (3.29)$$

$$\int_{y_1}^{\infty} F(y) dy = \frac{1}{2} (y_2 - y_1) F(y_1)$$

или

$$-F(y_1) = \left(\frac{-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy'}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Уравнение заднего скачка имеет вид

$$t - \frac{r}{a_0} = y_0 + \sqrt{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \sqrt{-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy'}, \quad (3.31)$$

В силу очевидного равенства

$$\int_0^{\infty} F(y') dy' = 0 \quad (3.32)$$

имеем совпадение коэффициентов в уравнении (3.31) и (3.23) при $\pm \sqrt{\ln \frac{r}{a_0 y_0}}$.

Для давления позади заднего скачка из (3.18) имеем

$$P = \frac{F(y_2)}{r},$$

где, например, для оси симметрии

$$F(y_2) = \frac{R^2(\infty)}{2a_0} \frac{\partial P_\Phi(y_2)}{\partial y_2}.$$

Пусть характер убывания $P_\Phi(t) = P_1 \frac{t_0}{t_0 + t}$. Тогда для больших y_2

$$F(y_2) = -\frac{R^2(\infty)}{2a_0} P_1 \frac{1}{\left(1 + \frac{y_2}{t_0}\right)^2} \frac{1}{t_0}.$$

Согласно (3.30) имеем теперь

$$-F(y_1) = \left(\frac{-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy'}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

и по (3.29)

$$y_2 = \left(k \ln \frac{r}{a_0 y_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-2 \int_{y_1}^{\infty} F(y') dy' \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$P = -\frac{R^2(\infty)}{2a_0} \frac{P_1}{r} t_0 \frac{1}{k \ln \frac{r}{a_0 y_0} 2 \int_0^{y_2} F(y) dy}.$$

Для случая неоднородной жидкости с начальным распределением $\rho_0(y)$, $a_0(y)$ решение вблизи линии BB' найдено нами в [11]; изменение, которое мы собираемся внести туда, заключается в том, что связь P и ρ уже не может быть взята адиабатической; пусть $P(\rho, S)$ — уравнение состояния, S — энтропия. Нетрудно найти из $a^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S$

$$a = \frac{U}{\sqrt{-\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_s}}, \quad U = \frac{1}{\rho},$$

отсюда

$$\left(\frac{\partial a}{\partial P}\right)_{P=0} = -\frac{1}{\rho_0 a_0} + \frac{1}{2} a_0^3 \rho_0^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\right)_s.$$

Из уравнений на ударном фронте для скорости частиц жидкости $v = \frac{P}{\rho_0 a_0}$. Отсюда имеем для скорости возмущений

$$a + v = a_0 + \alpha \frac{P}{\rho_0 a_0}, \quad \alpha = \frac{1}{2} a_0^3 \rho_0^3 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial P^2}\right)_s.$$

Поэтому в указанном решении [11] следует заменить $\frac{n+1}{2}$ на α .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9-X-1964

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԻՍՍԱՐԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՃՆՇՄԱՆ ԽՆԴԻՐԻ ԼՈՒՅՈՒՄԸ

Ա. մ փ ո փ ո ի մ

Հեղուկի կիսատարածության շարժման խնդրում ճնշման աղղեցության տակ ուսումնասիրվում է դժալին տեսության ուղղումը հարվածի ալիքի ճակատի BB' (գծ. 1) շրջակայքում: Գծալին տեսության տված լուծման մեջ դժալին խարակտերիստիկաները ճշգրտավածներով փոխարինելու գեպքում ճնշումը հարվածալին ճակատի մոտ որոշվում է վերջավոր տեսքով: Հարվածալին ալիքների AB և BB' (գծ. 1) հատման կետի մոտ բերված մեթոդը ճիշտ լուծում էի տալիս, և լուծումը տրվում է կարճ ալիքների մեթոդով: Նույն մեթոդներով ուսումնասիրված են եռանկյունաձև ու քառանկյունաձև թևերի շրջնոսման խնդիրները, որոնք մինչ այդ ուսումնասիրված էին ոչ ճիշտ [5]:

Ներկա հոդվածում գտնված է ճնշումը հարվածալին ճակատի վրա և տրված է լուծումը գտնելու մեթոդը ամբողջ տիրույթում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 9, 8, 4, 1945.
2. Христианович С. А. Ударная волна на больших расстояниях от места взрыва. ПММ, № 5, 1956.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, № 1, 1960.

4. *Lighthill M. I.* The shock's strength in supersonic, „Conical Fields“. Philosophical magazine, vol. 40, 1919.
5. *Баздоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
6. *Clarkson M. H.* A second order theory for three-dimensional wings. Quarterly Journal of mechanics, vol. 7, 1954.
7. *Whitham G. B.* The propagation of spherical blast. Proceedings of Royal Society, vol. 203, 1950.
8. *Légras J.* Nouvelles applications de la méthode de Lighthill à l'études des ondes de choc. Paris, ONERA, 1953.
9. Общая теория аэродинамики больших скоростей. Редактор Сирс. Изд. Оборонгиза СССР, М., 1962. Статья Лайтхилла. Высшие приближения.
10. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, 22, вып. 4, 1958.
11. *Баздоев А. Г.* Определение давления на ударной волне в жидкости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 5, 1964.

З. А. ЗОРЯН

МЕСТНАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ НАД ГОРНЫМ ВОДОЕМОМ

Под местными ветрами понимают те ветры, которые возникают за счет местных причин — термической неоднородности и искривленности подстилающей поверхности с суточным периодом.

Озеро Севан принадлежит к числу таких водоемов, которые окружены горными массивами. Метеорологический режим таких водоемов является результатом суперпозиции многих явлений как большого, так и малого масштаба. В частности, на ветровой режим таких водоемов, наряду с общециркуляционными процессами большого масштаба, накладываются местные ветры — бризы, горнодолинные ветры, фёны.

В литературе вопросам местной циркуляции посвящено много работ [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13] и т. д. как по линейной теории, так и по нелинейной.

Вообще при решении задач местной циркуляции рассматривают отдельно бризовую циркуляцию, горно-долинную и т. д. В работе А. М. Мхитаряна [10] рассматривалась чисто бризовая циркуляция, в частности, для озера Севан.

В работах Л. Н. Гутмана [3—5], М. Е. Добрышмана [7, 8], А. С. Моина [9] и др. [2, 11, 12, 13], рассмотрен ряд вопросов по этой проблеме.

§ 1. Постановка и решение задачи

Нашей целью является получение решения задачи о бризовой циркуляции на берегу горного водоема, в частности, для озера Севан.

Решается плоская нестационарная линейная задача в криволинейных координатах. За координатные линии $x = \text{const}$ приняты нормали к линии рельефа, линии $z = \text{const}$ будут их ортогональными траекториями. Таким образом, x — длина дуги линии рельефа, z — расстояние от поверхности рельефа по нормали. Тогда применяя к уравнениям гидротермодинамики упрощение теории конвекции, будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений [9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda \chi - RT \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \Gamma \chi u, \quad (1.2)$$

$$RT \frac{\partial p}{\partial z} = \lambda \theta \cos \alpha, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (1.4)$$

Граничные условия имеют вид:

при $z = 0, \quad u = w = 0, \quad \theta = \theta_0(x, t),$
где

$$\theta_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n(x) \cos n\omega t + T'_n(x) \sin n\omega t], \quad (1.5)$$

при $z \rightarrow \infty, \quad u = \theta = p = 0.$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\chi = \sin \alpha(x); \quad \lambda = g\beta; \quad \beta = 1/\alpha_{113}, \quad \Gamma = \gamma_a - \gamma,$$

где γ_a — адиабатический вертикальный температурный градиент; γ — вертикальный температурный градиент при равновесном состоянии атмосферы; u, w — компоненты скорости ветра в системе криволинейных координат; θ, p — отклонения температуры и давления от их значений в положении равновесия; k — коэффициент вертикального перемешивания, берется постоянным; $\alpha(x)$ — угол наклона линии рельефа к горизонтальной плоскости.

Решение задачи ищется периодическим, с суточным периодом ω .

Система (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.5) решается приближенно. В первом приближении в уравнении (1.2) опускается член $\Gamma \chi u$, и уравнение теплопроводности решается при граничных условиях (1.5). Полученное решение для $\theta(x, z, t)$ подставляется в уравнение статики (1.3) и находится функция $p(x, z, t)$, которая вставляется в уравнение (1.1).

Таким образом, исключаем функцию $p(x, z, t)$ из (1.1) и после этого уравнения (1.1) и (1.2) решаем совместно при граничных условиях (1.5). Находим решение для $u(x, z, t)$ и $\theta(x, z, t)$, а из уравнения неразрывности (1.4) находим вертикальную скорость — $w(x, z, t)$.

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (1.2')$$

при граничных условиях (1.5), имеет вид:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma_n z} \left[A_n(x) e^{i(n\omega t - \sigma_n z)} + B_n(x) e^{-i(n\omega t - \sigma_n z)} \right], \quad (1.6)$$

где

$$z_n^2 = \frac{n\omega}{2k}, \quad (1.7)$$

$$A_n(x) = \frac{1}{2} (T_n - iT_n'), \quad B_n(x) = \frac{1}{2} (T_n + iT_n'). \quad (1.8)$$

Из уравнения статики находим

$$p = -\frac{\lambda \cos \alpha}{2RT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-z_n^2}}{\sigma_n} \left[(1-i) A_n e^{i(n\omega t - z_n^2)} + (1+i) B_n e^{-i(n\omega t - z_n^2)} \right]. \quad (1.9)$$

Исключим $\frac{\partial p}{\partial x}$ из уравнения (1.1) с помощью (1.9). Умножая (1.1) на $c = \left(\frac{\Gamma}{\lambda}\right)^{1/2}$, а уравнение (1.2) — на i и складывая их, для функции $\Phi = cu + i\theta$ получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{iM}{k} \Phi = -F, \quad (1.10)$$

где

$$F = \frac{\lambda c}{4k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-z_n^2}}{\sigma_n} \left[(K_{nx} - iK'_{nx}) e^{i(n\omega t - z_n^2)} + (K_{nx} + iK'_{nx}) e^{-i(n\omega t - z_n^2)} \right],$$

$$K_{nx} = \frac{\partial}{\partial x} [(T_n - T_n') \cos \alpha], \quad K'_{nx} = \frac{\partial}{\partial x} [(T_n + T_n') \cos \alpha], \quad M = \chi \sqrt{g\beta\Gamma}. \quad (1.11)$$

Граничные условия (1.5) для функции $\Phi(x, z, t)$ примут вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \quad & \Phi = i\theta_0(x, t) \\ \text{при } z \rightarrow \infty \quad & \Phi = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Решая уравнение (1.10) при граничных условиях (1.12) и отделяя действительную и мнимую части, получим окончательно

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\beta}{\Gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-a_n z} [T_n'(x) \cos(n\omega t - a_n z) - T_n(x) \sin(n\omega t - a_n z)] + \right. \\ \left. + e^{-b_n z} [T_n(x) \sin(n\omega t + b_n z) - T_n'(x) \cos(n\omega t + b_n z)] \right\} + \\ + \frac{\lambda}{4M} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} [K'_{nx} \cos(n\omega t - a_n z) - K_{nx} \sin(n\omega t - a_n z)] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} [K_{nx} \sin(n\omega t + b_n z) - K'_{nx} \cos(n\omega t + b_n z)] \right\}, \quad (1.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-a_n z} [T'_n(x) \sin(n\omega t - a_n z) + T_n(x) \cos(n\omega t - a_n z)] + \right. \\ & \left. + e^{-b_n z} [T'_n(x) \sin(n\omega t \mp b_n z) + T_n(x) \cos(n\omega t \mp b_n z)] \right\} + \\ & + \frac{1}{4\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} [K_{nx} \cos(n\omega t - a_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t - a_n z)] + \right. \\ & \left. + \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} [K_{nx} \cos(n\omega t \mp b_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t \mp b_n z)] - \right. \\ & \left. - 2 \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [K_{nx} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t - \sigma_n z)] \right\}. \quad (1.14) \end{aligned}$$

Здесь в скобках при b_n верхний знак (—) берется при $n\omega > M$, и нижний (+) — при $n\omega < M$. $a_n^2 = \sigma_n^2 + M/2k$, $b_n^2 = |\sigma_n^2 - M/2k|$.

Вертикальную составляющую скорости определяем из уравнения неразрывности

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^z u(x, z, t) dz. \quad (1.15)$$

Полученные нами формулы при $\alpha(x) = 0$ превращаются, после раскрытия неопределенности, в формулы чисто бризовой циркуляции (2.8) и (2.18), полученные А. М. Мхитаряном [10].

§ 2. Примеры расчетов при синусоидальном ходе температуры подстилающей поверхности

Рассмотрим случай, когда суточный ход распределения температуры подстилающей поверхности представляется в виде простой синусоиды, то есть $T_n = T'_n = 0$, кроме $T'_1 \neq 0$. Тогда

$$\theta_0(x, t) = T'_1(x) \sin \omega t. \quad (2.1)$$

Для того, чтобы определить вид функции $T'_1(x)$, необходимо обратиться к наблюдениям.

Суша вокруг озера Севан в очень многих местах имеет следующий вид: она горизонтально простирается на несколько километров и после этого начинается гора. Такую схематическую форму суши мы и принимаем для расчета примера. Длина горизонтальной части суши принята равной 5 км, а форма горы аппроксимируется формулой

$$\chi = \sin \alpha(x) = \frac{2,5\epsilon x}{1 + 125(\epsilon x)^3}. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\epsilon = 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Используя наиболее характерные значения температуры поверхности воды озера Севан и суши в его бассейне [10], принимаем два случая для функции $T_1'(x)$:

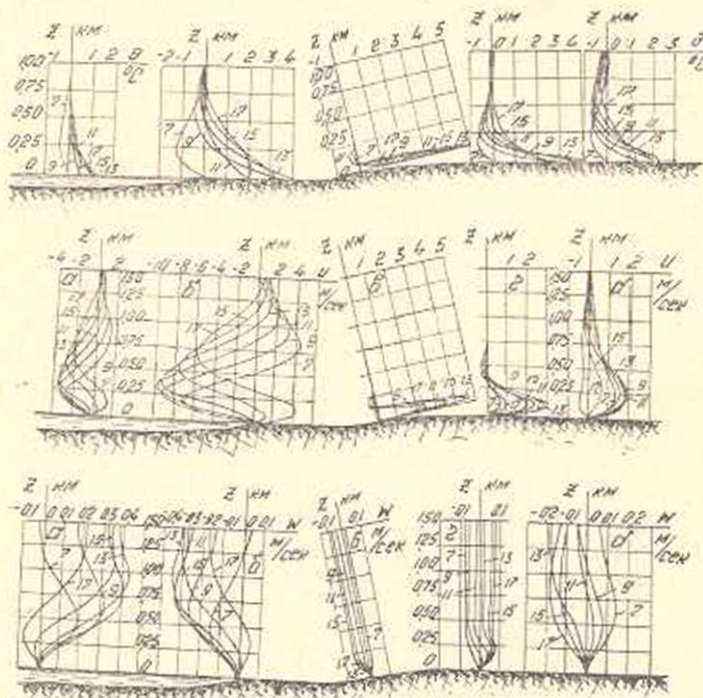
$$1) \quad T_1'(x) = 1,3 + 0,7 \operatorname{th} \varepsilon x + 3,7 e^{-(\varepsilon x)^2}, \quad (2.3)$$

$$2) \quad T_2'(x) = 2,8 + 2,2 \operatorname{th} (\varepsilon x + 0,5). \quad (2.4)$$

На больших расстояниях от берега (x — направлена от озера в сторону суши) получается для суши $\theta = \pm 5^\circ$, в то время, как на центральных частях озера — $\pm 0,6^\circ\text{C}$, то есть суточная амплитуда температуры суши принята равной 10° , а поверхности воды — $1,2^\circ$.

Что касается распределения температуры по склону горы, то при больших расстояниях ($x \geq 10$ км) для первого случая принято $\theta_{\max} = \pm 2^\circ$. Формула (2.3) получена из этих же предположений.

По формулам (1.13), (1.14) и (1.15) при $n=1$ проведены расчеты при численных значениях параметров: $\lambda = 3,6 \cdot 10^{-2} \text{ м/сек}^2 \text{ град}^{-1}$; $k = 3,64 \text{ м}^2 \text{ сек}^{-1}$; $\Gamma = 0,004 \text{ град м}^{-1}$; $\tau_1 = 0,316 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$.



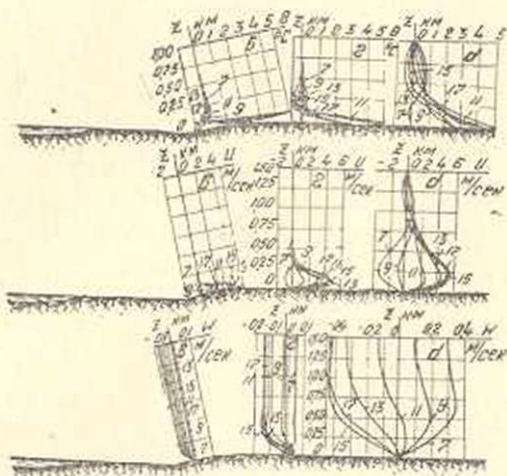
Фиг. 1. Профили температуры θ и скоростей u, w в различные часы суток, соответствующие случаю $T_1'(x)$.

α —озеро; б—берег; в— $x=2$ км; г— $x=7$ км; д— $x=15$ км.

Приведенные на фиг. 1 и 2 графики, представляющие профили θ, u и w , соответствуют случаю $T_1'(x)$ — фиг. 1, а на фиг. 2 — случаю $T_2'(x)$, причем кривые на фиг. 1 для горизонтального участка суши, то есть для чисто бризовой циркуляции, подсчитаны для случая $\Gamma=0$,

а на горе при $\Gamma > 0$. Графики показывают следующую характерную особенность.

Влияние горы на бризовую циркуляцию заключается в том, что масса воздуха, охваченного местной циркуляцией, по вертикали уменьшается с увеличением угла наклона горы, и наоборот. В частности, при $x = 2$ км, $\alpha = 14^\circ 30'$, толщина слоя воздушной массы, охваченной местной циркуляцией, составляет 300 м, при $x = 7$ км $\alpha = 2^\circ 30'$ — соответственно 600 м, а при $x = 15$ км $\alpha = 30'$ — 1500 м.



Фиг. 2. Профили температуры θ и скоростей u , w в различные часы суток, соответствующие случаю $T_2(x)$.

а — $x = 2$ км; б — $x = 7$ км; в — $x = 15$ км.

Определим момент возникновения ветра из условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Для $\varepsilon_1^2 > \frac{M}{2k}$ получим

$$\omega t_0 = \arctg \frac{A + 2B}{A}, \quad (2.5)$$

для $\varepsilon_1^2 < \frac{M}{2k}$ имеем

$$\omega t_0 = \arctg \frac{2a_1 B + (a_1 - b_1) A}{2b_1 B + (a_1 + b_1) A}, \quad (2.6)$$

где

$$A(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\Gamma}} T_1'(x), \quad B(x) = \frac{\varepsilon}{4\lambda \varepsilon_1} \sqrt{\frac{\lambda}{\Gamma}} \frac{\partial}{\partial x} [T_1'(x) \cos \alpha(x)].$$

Так как $B \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 0$, то из (2.5) получим, что в этом случае

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2},$$

то есть запаздывание хода ветра по отношению к температурному при плоской земле составляет 6 часов [5, 10].

Выражение (2.6) показывает, что начиная с некоторого значения χ , $t_0 \rightarrow 0$, так как $a = b$ и $B(x) \ll A(x)$, что означает мгновенное возникновение склонового ветра. Этим объясняется тот результат, что на озере бриз дует от берега к озеру (утром), а на горе — от озера.

По формуле (2.6) можно определить время запаздывания хода ветра по отношению к температурному в точках наблюдения на горе $x = 2 \text{ км}$ ($\alpha = 14^\circ 30'$), $x = 7 \text{ км}$ ($\alpha = 2^\circ 30'$) и $x = 15 \text{ км}$ ($\alpha = 30'$). Оказывается, оно зависит от распределения наземной температуры.

Таблица

$x, \text{ км}$	t_1	t_2	$\alpha(x)$
2	3 мин	10 мин	$14^\circ 30'$
7	—1 час	36 мин	$2^\circ 30'$
15	—3 ч 36 мин	1 ч 36 мин	$0^\circ 30'$

Здесь t_1 и t_2 — время запаздывания для распределений наземных температур T_1 и T_2 , соответственно.

Как видно из этой таблицы, при $\alpha = 15^\circ$ ветер возникает почти мгновенно, то есть процесс квазистационарный. С уменьшением α процесс становится уже нестационарным, что в свою очередь зависит также от распределения наземной температуры, вернее от ее производной по горизонтали. Здесь горный бриз будет преобладать над склоновым ветром.

Рассмотрим случай, когда коэффициент b_n обращается в нуль

$$b_n = \sqrt{\sigma_n^2 - \frac{M}{2k}} = 0. \quad (2.7)$$

В этом случае получаем

$$\chi = \frac{n\omega}{\sqrt{\lambda\Gamma}}. \quad (2.8)$$

Выражение (2.7) показывает, что при любом n можно найти такую точку на горе, в которой скорости и температура перестают затухать с высотой, и горный бриз распространяется теоретически до бесконечности. Этот вывод аналогичен полученному в работах Л. Н. Гутмана [3] и А. М. Мхитаряна [10], только с той разницей, что здесь χ играет роль параметра Кориолиса $l = 2\omega \sin \varphi$.

При принятых выше численных значениях параметров λ и Γ выражение (2.8) примет вид

$$\chi_n = 0.6 \cdot 10^{-2} n. \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) показывает, что вся плоскость разбита на три части:

1. $\sigma_n^2 > \frac{M}{2k}$. Это имеет место при малых значениях χ , и расчет в этом случае, как было указано выше, ведется по формулам (1.13) и (1.14), где в скобках берется знак $(-)$;

2. $b_n = 0$. В определенных точках на горе, в зависимости от n , возникают незатухающие точки, подобно резонансу [3];

3. $\sigma_n^2 < \frac{M}{2k}$. В этом случае в формулах (1.13) и (1.14) в скобках берется знак $(+)$. Это имеет место при $\chi > \chi_n$.

§ 3. Влияние стратификации на развитие процесса

Параметр Γ , учитывающий стратификацию атмосферы при равновесном состоянии, существенно влияет на развитие процесса [9].

Выше нами был рассмотрен случай доадиабатической стратификации $\Gamma > 0$, который имеет наибольшее практическое значение.

В случае адиабатической стратификации $\Gamma = 0$, и решение системы (1.1)–(1.4) для горизонтальной составляющей скорости при граничных условиях (1.5) будет иметь вид

$$u = \frac{\lambda z}{4k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} \left\{ \left[\chi (T_n - T'_n) - \frac{1}{\sigma_n} \frac{\partial}{\partial x} (T_n \cos \alpha) \right] \cos (n\omega t - \sigma_n z) + \left[\chi (T_n + T'_n) + \frac{1}{\sigma_n} \frac{\partial}{\partial x} (T_n \cos \alpha) \right] \sin (n\omega t - \sigma_n z) \right\}. \quad (3.1)$$

Для θ решение имеет вид (1.6). Анализ формулы (3.1) показывает, что процесс в этом случае: 1) нестационарный, 2) пограничный слой охваченной склоновым ветром массы воздуха намного больше, чем в доадиабатическом случае на склоне горы, и охватывает такую же массу воздуха по вертикали, как и при бризовой циркуляции на горизонтальной земле, 3) существует обратное течение ветра заметной силы на высотах, как при бризовой циркуляции на горизонтальной земле, 4) отсутствует случай резонанса на всех точках горы при любом n , в отличие от случая доадиабатической стратификации.

В случае сверхадиабатической стратификации $\Gamma < 0$, решение системы (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.5) имеет вид

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{\Gamma}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\beta_n z} [N_n \cos (n\omega t - \alpha_n z) + E_n \sin (n\omega t - \alpha_n z)] - e^{-\gamma_n z} [N_n \cos (n\omega t - \beta_n z) + E_n \sin (n\omega t - \beta_n z)] \right\}, \quad (3.2)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\beta_n z} [N_n \cos (n\omega t - \alpha_n z) + E_n \sin (n\omega t - \alpha_n z) + e^{-\alpha_n z} [N_n \cos (n\omega t - \beta_n z) + E_n \sin (n\omega t - \beta_n z)] - \right.$$

$$-\frac{1}{2\sigma_n\chi} e^{-\sigma_n z} [K_{nx} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t - \sigma_n z)] \Bigg\}. \quad (3.3)$$

где

$$N_n = \frac{1}{2} \left(T_n + \frac{K_{nx}}{2\chi\sigma_n} \right), \quad E_n = \frac{1}{2} \left(T'_n + \frac{K'_{nx}}{2\chi\sigma_n} \right), \\ \beta_n = \left(\sqrt{\left(\frac{M}{k} \right)^2 + \sigma_n^4} - \frac{M}{2k} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_n = \frac{\sigma_n^2}{\beta_n}. \quad (3.4)$$

На склоне горы ($\chi > 0,10$) $\sigma_n^2 \ll \left(\frac{M}{2k} \right)^2$, тогда выражение β_n можно упростить и представить в виде

$$\beta_n = \sigma_n^2 \left(\frac{M}{k} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha = \left(\frac{M}{k} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Выражение β_n показывает, что и в этом случае задача нестационарна. В то же время, α не зависит от σ_n , эта часть решения стационарна и по высоте быстро затухает. Здесь можно повторить все четыре вывода, относящиеся к случаю $\Gamma = 0$, лишь с той разницей, что в этом последнем случае обратное течение ветра на высотах усиливается, что обусловлено неустойчивостью стратификации [9].

Время запаздывания в обоих случаях одинаково (близко к трем часам) и определяется выражением

$$\lg \omega t_0 = 1 + \frac{\varepsilon}{\chi_2 T_1} \frac{\partial}{\partial \chi} (T_1 \cos \alpha).$$

Таким образом, на основании проведенного анализа можно заключить, что характер стратификации атмосферы существенно влияет на развитие горного бриза.

1. При доадиабатической стратификации ($\Gamma > 0$) явление квазистационарно при $\chi > 0,1$, а вертикальном масштабе масса воздуха прижимается к земле в зависимости от увеличения угла наклона горы по отношению к горизонтальной плоскости. На высотах существует постоянное очень слабое противотечение, и, наконец, на горе существуют точки, в зависимости от угла наклона горы и числа n , где имеет место резонанс, то есть явление по вертикали не затухает. В зависимости от угла наклона горы запаздывание хода ветра по отношению к ходу температуры может меняться от нуля до 6 часов.

2. При адиабатической стратификации ($\Gamma = 0$) явление нестационарно, пограничный слой, охваченный склоновым ветром, больше, чем при доадиабатическом случае и не зависит от угла наклона горы. Этот слой равен пограничному слою бризовой циркуляции при горизонтальной земле. Существует обратное течение ветра на высотах, как в случае бризовой циркуляции при $\chi = 0$.

3. При сверхadiaбатической стратификации ($\Gamma < 0$) явление нестационарно, пограничный слой склонового ветра больше, чем таковой при плоском бризе и зависит от величины $M = \chi/\chi\Gamma$. Существует обратное течение на высотах заметной силы, обусловленное неустойчивостью стратификации.

Время запаздывания в случаях $\Gamma = 0$ и $\Gamma < 0$ имеет одинаковое значение и примерно равно 3 часам.

Случай резонанса не имеет места при $\Gamma = 0$ и $\Gamma < 0$.

Институт водных проблем и гидротехники
МВХ Армянской ССР

Поступила 2 I 1965

2. 2. ՁՈՐՅԱՆ

ՏԵՂԱԿԱՆ ՑԻՐԿՈՒԼԱԿԱՆ ԼՆՈՒՄՆԻ ՁՐԱՄԲԱՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում բերվում է տեղական ցիրկուլացիայի հարթ խնդրի պարբերական լուծումը կորագծի կոորդինատային սխեմում, ելնելով հիդրո-ջերմագինամիկայի գծայնացրած համաարտաբերի (1—1)—(1—4) սխեմից, (1—5) սահմանային պայմանների գեպրում: Դիտարկված են միջուկային ուղղաձիգ շերտաառիճանային դրագիկների երեք հնարավոր դեպքերը՝ մինչդարարատիկ ($\Gamma > 0$), ադիարատիկ ($\Gamma = 0$) և գերագիարատիկ ($\Gamma < 0$), որոնց լուծումները համապատասխանարար ներկայացված են (1.13), (1.14), (1.15); 3.1), (1.6) և (3.2), (3.3) արտահայտություններով:

Ստացված բանաճեքերի հիման վրա կատարված են կոնկրետ հաշվարկներ, որոնք բերված են 1 և 2 գծագրերում:

Ստացված արդյունքների հետազոտությունը ցույց է տալիս, որ՝

1. $\Gamma > 0$ դեպքում, երբ $\chi = \sin \alpha > 0,1$, որտեղ α սարի թեքություն անկյունն է հորիզոնի նկատմամբ, երեսվթը քվագիստացիոնար է, ընդ որում χ փոքրանալու հետ մեկտեղ երեսվթը դաճում է ոչ-ստացիոնար: χ մեծանալու հետ միատին օդի մասսան, որը մասնակցում է տեղական ցիրկուլացիային, ըստ բարձրության նվազում է, սարի վրա որոշակի կեանքում, կախված χ -ից և α -ից, երեսվթը, ըստ բարձրության կարող է չմարել (սեզոնանս):

2. $\Gamma = 0$ և $\Gamma < 0$ դեպքերում երեսվթը ոչ-ստացիոնար է, տեղական ցիրկուլացիան ըստ բարձրության օդի ալիկի մեծ շերտ է ընդգրկում, քան $\Gamma > 0$ դեպքում և համաչափելի է հարթ գետնի դեպքում բրիզային ցիրկուլացիայի սահմանային շերտին: Այստեղ սեզոնանս տեղի չի ունենում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Буз А. И. К вопросу о влиянии береговой линии на воздушные течения и распределение осадков. Сборник по региональной синоптикe, № 5, 1960.
2. Бурмак Э. А. К вопросу о распределении вертикальных токов при бризовых циркуляциях. Труды ОГМИ, вып. 5, 1953.

3. Гутман Л. Н. О вертикальной структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
4. Гутман Л. Н. О вертикальных токах при бризах. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
5. Гутман Л. Н. О распределении бризов по нормали к берегу. Метеорология и гидрология, № 2, 1949.
6. Добрышман Е. М. О ветре склонов над термически неоднородной подстилающей поверхностью. Труды ЦИП, вып. 43 (70), 1956.
7. Добрышман Е. М., Шакина Н. А. К нелинейной теории локальных ветров в турбулентной атмосфере. Известия АН СССР, сер. геофиз., 2, 1962.
8. Зейтунян Х. Н. К нелинейной теории нестационарного ветра склонов. ДАН СССР, 133, № 6, 1960.
9. Монин А. С. Модель ветра склонов. Труды ЦИП, вып. 8 (35), 1948.
10. Мхитарян А. М. О бризах в бассейне оз. Севан и некоторые результаты их расчета по фактическому распределению температуры подстилающей поверхности. Сообщение I: Известия АН АрмССР, серия техн. наук, № 5, 1962; сообщение 2: там же, № 6, 1962.
11. Мхитарян А. М. и Дагестанян М. Г. О влиянии формы береговой линии на бризовую циркуляцию. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, № 5, 1964.
12. Ситников Н. Г. Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
13. Трубников Б. Н. О вертикальных токах при бризе над плоским берегом. Известия АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1961.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

П. С. ПОГОСЯН, Л. О. ГРИГОРЯН

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ
 ИНТЕНСИВНОСТЯХ И В ПЕРЕНАСЕЛЕННОЙ СРЕДЕ*

1. В связи с целым рядом теоретических расчетов по прохождению света через перенасыщенную среду [1, 2, 3, 4], возникла необходимость детального изучения различных оптических параметров активных веществ. Среди них особый интерес представляет коэффициент поглощения.

Как известно, при малых интенсивностях поглощение света при прохождении через активное вещество длины l дается следующим простым соотношением:

$$J_l = J_0 e^{-\beta l}, \quad (1)$$

где J_0 , J_l — интенсивность входного и выходного пучков соответственно, а β — коэффициент поглощения вещества.

Однако, при больших интенсивностях излучения и при наличии накачки (возбуждение атомов, приводящее к перенасыщенности) выражение (1) не применимо.

Если исследовать короткие световые импульсы, то есть такие импульсы, длительность которых настолько мала, что действием накачки и спонтанного излучения на изменение населенности атомов за время прохождения импульса через активное вещество можно пренебречь, то, как показано в работе [1], в случае, когда частота излучения совпадает с резонансной частотой поглощения, изменение полного числа фотонов по длине образца выразится уравнением

$$\frac{dU^*}{dx} = \frac{1}{2} \Delta_n (1 - e^{-2\tau U^*}) - \beta_0 U^*, \quad (2)$$

где U^* — полное число фотонов, проходящих через 1 см² в сечении x за время импульса,

Δ_n — инверсная населенность в момент прохождения импульса,

τ — эффективное сечение столкновения для индуцированного перевода атома из возбужденного состояния на основной уровень (или обратно),

β_0 — нерезонансный коэффициент поглощения.

Решение уравнения (2) при условии $2\tau n^* \ll 1$ можно написать в следующем виде:

* Работа доложена на научной сессии ЕрГУ в апреле 1964 г.

$$U_i^* = \frac{U_0^* e^{(\sigma\Delta_n - \beta_0)l}}{1 + \frac{\sigma\Delta_n}{\sigma\Delta_n - \beta_0} \left[e^{(\sigma\Delta_n - \beta_0)l} - 1 \right] \sigma U_0^*}, \quad (3)$$

где U_0^* , U_i^* — значение U^* на входе и выходе образца соответственно, l — длина образца.

Из выражения (2) и (3) видно, что коэффициент поглощения зависит от интенсивности U , следовательно, меняется от точки к точке вдоль образца.

Из-за невозможности измерения коэффициента поглощения в каждой точке активного материала нами был введен некоторый эффективный коэффициент поглощения, определяемый как:

$$\beta_{эфф.} = \frac{1}{l} \ln \frac{U_0^*}{U_i^*}. \quad (4)$$

Тогда выражение (3) можно записать в виде

$$\beta_{эфф.} = -(\sigma\Delta_n - \beta_0) + \frac{1}{l} \ln \left\{ 1 + \frac{\sigma\Delta_n}{\sigma\Delta_n - \beta_0} \left[e^{(\sigma\Delta_n - \beta_0)l} - 1 \right] \sigma U_0^* \right\}. \quad (5)$$

Ясно, что $\beta_{эфф.}$ дает только качественное представление об истинном коэффициенте поглощения.

При отсутствии накачки очевидно, что

$$\Delta_n = -n_0, \quad (6)$$

где n_0 — число активных атомов в 1 см^3 .

Подставляя значение Δ_n из выражения (6) в (5), получим

$$\beta_{эфф.} = \sigma n_0 + \beta_0 + \frac{1}{l} \ln \left\{ 1 - \frac{\sigma n_0}{\sigma n_0 + \beta_0} \left[1 - e^{-(\sigma n_0 + \beta_0)l} \right] \sigma U_0^* \right\}. \quad (7)$$

Выражение (7) дает зависимость $\beta_{эфф.}$ от полного числа фотонов на входе образца при отсутствии накачки.

При $\sigma U_0^* \rightarrow 0$ получаем известное соотношение

$$\beta_{эфф.} = \sigma n_0 + \beta_0. \quad (8)$$

2. Экспериментальное изучение зависимости $\beta_{эфф.}$ от интенсивности проводилось по схеме, приведенной на фиг. 1. Источником монохроматического света служил рубиновый генератор, работающий на линии R_1 . Длительность импульсов составляла $3 \cdot 10^{-4} \text{ сек}$, что на порядок меньше времени спонтанного перехода [5].

В качестве образцов были использованы два рубиновых стержня длиной 120 мм и 77,5 мм с ориентациями 90° и 60° соответственно.

Определение $\beta_{эфф.}$ проводилось измерением энергии входного и выходного пучков. Энергия измерялась специальным колориметром типа „осиное гнездо“ [4]. Нормальное падение света на торец рубина осуществлялось с помощью точной юстировки коллиматором.

В значение $\beta_{\text{эфф.}}$ была введена поправка, учитывающая отражение от торцов рубина, которое принималось равным 8 %. На фиг. 2 приведена зависимость $\beta_{\text{эфф.}}$ от интенсивности входного пучка: кривая I — для образца длиной 120 мм, кривая II — для образца длиной 77,5 мм. Сплошная линия соответствует формуле (7), а точки — экспериментально полученным значениям $\beta_{\text{эфф.}}$.



Фиг. 1.

Как видно из фиг. 2, результаты измерения хорошо согласуются с расчетом.

Нетрудно заметить, что при $\sigma U^* \ll 1$ формула (7) дает прямую с наклоном

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma n_0}{(\sigma n_0 + \beta_0) l} \left[1 - e^{-(\sigma n_0 + \beta_0) l} \right], \quad (9)$$

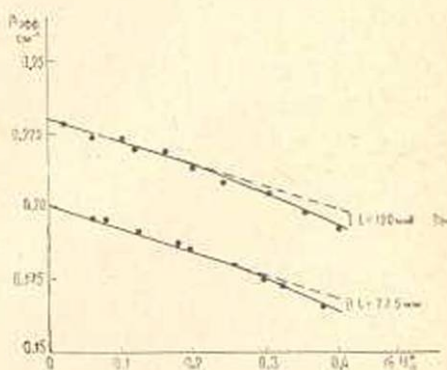
где α — угол наклона.

Из (9) следует, что, зная значение $\sigma n_0 + \beta_0$, соответствующее значению $\beta_{\text{эфф.}}$ в точке $\sigma U_0 = 0$, при малых интенсивностях по наклону прямой можно определить значение β_0 . По этому методу нами был определен коэффициент β_0 для различных кристаллов. В зависимости от качества обработки и выращивания кристаллов, β_0 изменялся в пределах $0,02 \div 0,06 \text{ см}^{-1}$. Эти значения хорошо согласуются со значениями, измеренными нами другим методом, изложенным в в пункте 4.

Во всех измерениях, приведенных в работе, при сравнении расчетных и экспериментальных данных учитывалось вырождение уровней рубина ($g_1 = 4$, $g_2 = 2$).

3. В работе [1] показано также, что изменение инверсной населенности во времени для трехуровневой системы дается уравнением

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + 2\sigma I \Delta + \left(W + \frac{1}{\tau} \right) \Delta = \left(W - \frac{1}{\tau} \right) n_0, \quad (10)$$



Фиг. 2.

где W — вероятность возбуждения атомов под действием излучения накачки, τ — время жизни возбужденного состояния, J — число фотонов, проходящих через 1 см^2 в единицу времени.

При $J \rightarrow 0$ уравнение (10) дает изменение инверсной населенности во времени под действием излучения накачки. В этом случае решение (10) можно записать в следующем виде:

$$\Delta n = n_0 \left[\frac{W\tau - 1}{W\tau + 1} - \frac{2W\tau}{W\tau + 1} e^{-(W\tau + 1) \frac{t_n}{\tau}} \right], \quad (11)$$

где t_n — начальный момент прохождения излучения.

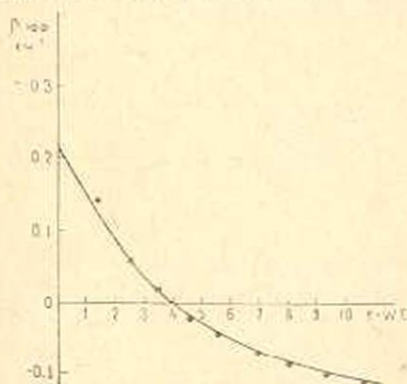
Формулы (5) и (11) совместно дают зависимость $\beta_{\text{эфф}}$ от накачки.

Измерение зависимости $\beta_{\text{эфф}}$ от накачки производилось на той же установке (фиг. 1). Для подкачки образца была применена обычная прямая импульсная лампа, которая питалась от отдельного источника питания. Изменение накачки осуществлялось изменением напряжения источника питания, причем зависимость энергии накачки от напряжения была предварительно градуирована.

На фиг. 3. приведена зависимость $\beta_{\text{эфф}}$ от накачки (для образца $l = 120 \text{ мм}$). Сплошная линия соответствует формулам (5) и (11).

4. Нами была также исследована зависимость коэффициента поглощения от поляризации света (фиг. 4).

Измерения производились следующим образом: плоскополяризованный свет от генератора падал



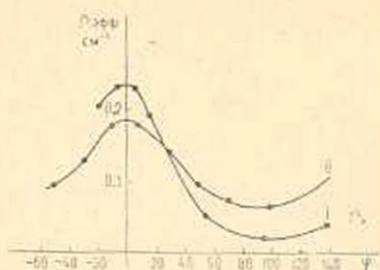
Фиг. 3.

на исследуемый образец, на выходе из образца измерялась интенсивность излучения в зависимости от угла φ между направлением поляризации и оптической осью образца, при постоянной входной интенсивности. Измерение угла производилось специальным приспособлением, с точностью $0,5^\circ$.

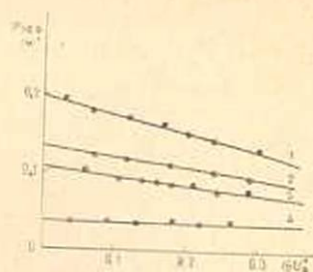
На фиг. 4 приведена зависимость коэффициента поглощения $\beta_{\text{эфф}}$ от угла φ между направлением поляризации и оптической осью образца. Измерения производились с двумя образцами с ориентацией 90° , $l = 120 \text{ мм}$, (кривая I) и 60° , $l = 77,5 \text{ мм}$ (кривая II).

На фиг. 5 приведена зависимость $\beta_{\text{эфф}}$ от интенсивности входа при различных углах φ для образца длиной $l = 77,5 \text{ мм}$ и ориентацией 60° . Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют углам $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

В настоящей работе мы не затрагивали зависимости $\beta_{\text{эфф}}$ от температуры, частоты и длины образца. Такие измерения проводятся нами в настоящее время.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Авторы признательны проф. М. Л. Тер-Микаеляну за постоянный интерес к работе и ценные обсуждения.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета и
АН Армянской ССР

Поступила 3 XI 1964

Պ. Ս. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Լ. Հ. ԳՐԻԳՐՅԱՆ

ԿԼԱՍԻԿԱՆ ԳՈՐԾԱԿՑԻ ՉԱՓՈՒՄԸ ՄԵՑ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԵՎ ԳԵՐԲԱԿԵՑՎԱՅ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրված է կլանման գործակցի կախումը լույսի ինտենսիվությունից և ինվերսիոն բնակեցվածությունից:

Փորձական արդյունքները համեմատված են [1] աշխատության մեջ հաշված րանսմիսի հետ:

Հոդվածում բերված են նաև, լույսի բեկառացումից կախված, կլանման գործակցի կորերը տարբեր նմուշների (90° և 60° օրինառացիաների) համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Микаэлян А. Л., Тер-Микаелян М. Л., Турков Ю. В. К расчету нестационарных процессов в лазерах. Вопросы радиоэлектроники, серия общетехническая, 10, 1964, 32.
2. Тер-Микаелян М. Л., Микаэлян А. Л. К теории лазерного излучения. ДАН СССР, 155, 1964, 1268.
3. Тер-Микаелян М. Л. Расчет интенсивности импульсного лазера. ДАН АрмССР, 38, № 2, 105.
4. Тер-Микаелян М. Л., Микаэлян А. Л., Турков Ю. Г. К теории оптического генератора, работающего в стационарном режиме. Радиотехника и Электроника, 9, № 8, 1964, 1357.
5. Maïman T. H. Stimulated optical emission in fluorescent solids I, II. Phys. Rev., Vol. 123, 4, 1961, 1145.
6. Казарян Р. А., Вартанян Э. С., Сафарян Ф. П. Измерение энергии импульсного светового излучения. Приборы и техника эксперимента, 3, 1964, 146.

Л. Л. ДЕКАБРУН, Ю. Н. КИЛЬЯНОВ, А. Р. МКРТЧЯН

АВТОДИННЫЕ ДАТЧИКИ СИГНАЛОВ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

Автодинные датчики при малых величинах напряжения на колебательном контуре работают неустойчиво. Поскольку такой режим необходим при исследованиях методом ЯМР твердых тел, где автодинные датчики имеют ряд преимуществ перед другими видами датчиков, амплитуда генерируемого напряжения должна быть стабилизирована. В статье дается анализ стабилизирующего действия активной отрицательной обратной связи, а также переходных процессов в автодинном датчике со стабилизацией амплитуды, на основании чего уточняются детали схемы датчика. Рассмотрен вопрос о чувствительности автодинных датчиков, в которых теоретический анализ, вследствие нелинейности основной схемы, не может дать конкретных результатов. Наиболее прямым путем решения вопроса является эмпирический выбор схемы автодина и ее деталей, осуществляемый в сопоставимых условиях. Приводится полная принципиальная схема автодинного датчика, хорошо зарекомендовавшего себя при исследовании методом ЯМР кристаллов ряда природных соединений.

Ламповым генераторам высокочастотных колебаний присуща способность изменять амплитуду генерируемого напряжения при введении в магнитное поле катушки колебательного контура веществ, обладающих конечной электрической проводимостью. Эта способность давно используется в измерительной технике, где ламповые генераторы впервые были применены в качестве высокочувствительных датчиков перемещения [1].

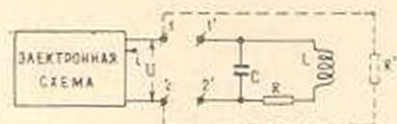
С помощью ламповых генераторов были предприняты первые попытки обнаружить сигналы ядерного магнитного резонанса (ЯМР) от веществ в их естественном состоянии [2]. Сразу же после фундаментальных открытий Ф. Блоха [3] и Перселла [4], положивших начало спектроскопии ядерного магнитного резонанса, ламповые генераторы стали интенсивно использоваться для получения сигналов ЯМР [5]. Датчики сигналов ЯМР, построенные на основе ламповых генераторов, получили название автодинных датчиков (иногда их называют регенеративными датчиками). Они применяются для решения многих задач ЯМР — спектроскопии.

В настоящее время известны десятки вариантов схем автодинных датчиков сигналов ЯМР. Помимо ламповых генераторов, широко применяемых в технике радиосвязи (схемы Гартлея, Колпитца, Хут-Кюна, Шембея-Доу, транзитронная и другие) для ЯМР — спектроскопии было разработано большое количество специальных схем, среди которых имеются достаточно сложные, например, двухтактная схема

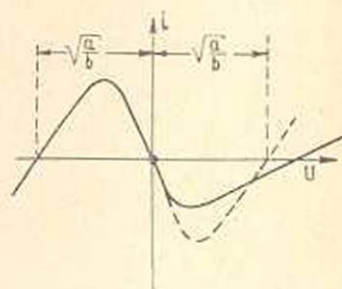
[6] или специальная схема, описанная в [7]. Разработка схем автодинных датчиков опирается на общую теорию ламповых генераторов с самовозбуждением [8]. „Механизм“ воздействия сигнала ЯМР или других факторов на режим автодинного датчика и амплитуду его напряжения хорошо изучен [9,10].

Для исследования методом ЯМР — спектроскопии кристаллов некоторых природных соединений [11] потребовалась разработка автодинного датчика существенно нового вида, позволяющего в очень широких пределах регулировать напряженность H_1 радиочастотного магнитного поля, зондирующего кристалл (или, что то же самое, регулировать напряжение на контуре автодина). Кроме того, при исследовании кристаллов необходима чувствительность датчика более высокая, чем у большинства опубликованных схем. Датчики такого вида, очевидно могут найти применение при решении ряда других задач ЯМР-спектроскопии.

Принципиальная схема автодинного датчика представлена на фиг. 1. Это резонансный контур $L; C; R$, в котором электронная схема поддерживает незатухающие колебания резонансной частоты. Исследуемый образец расположен в катушке контура. Электронная схема, компенсирующая потери в контуре, должна со стороны своих выходных



Фиг. 1. Принцип действия самовозбуждающихся ламповых генераторов.



Фиг. 2. Вольт-амперные характеристики отрицательных сопротивлений. (Сплошная линия — естественная характеристика, пунктирная линия — аппроксимированная характеристика).

клемм 1, 2 иметь падающую вольт-амперную характеристику, соответствующую отрицательному активному сопротивлению. Такие характеристики (они получаются за счет охвата положительной обратной связи активного четырехполюсника) сугубо нелинейны, общий вид их представлен на фиг. 2. Для упрощения анализа характеристика аппроксимируется [8] зависимостью вида:

$$I = -au + bu^3, \quad (1)$$

описывающей строго симметричную кривую (пунктир на фиг. 2).

Практика не подтверждает некоторые выводы, неизбежно вытекающие из такой аппроксимации. В частности, это относится к амплитуде синусоидального напряжения на контуре (отметим здесь, что на контуре высокой добротности практически может поддерживаться

только синусоидальное напряжение резонансной частоты, так как для напряжения другой частоты сопротивление контура ничтожно мало).

Определим величину напряжения, генерируемого схемой. Если на входных клеммах электронной схемы с вольт-амперной характеристикой вида (1) действует напряжение

$$u = U_m \sin \omega t, \quad (2)$$

то ток, потребляемый схемой, изменяется по закону:

$$i = -aU_m \sin \omega t + bU_m^3 \sin^3 \omega t. \quad (3)$$

Мгновенное значение мощности источника при этом

$$P = ui = -aU_m^2 \sin^2 \omega t + bU_m^4 \sin^4 \omega t, \quad (4)$$

а средняя мощность

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = -\frac{aU_m^2}{2} + \frac{3}{8} bU_m^4. \quad (5)$$

При некоторой амплитуде переменного напряжения

$$(U_m)_0 = 2 \sqrt{\frac{a}{3b}} \quad (6)$$

средняя мощность источника обращается в нуль.

Колебания такой амплитуды поддерживаются за счет энергии электронной схемы, без участия внешнего источника.

Если к клеммам электронной схемы подключено некоторое активное сопротивление R' (пунктир на фиг. 1) то ее вольт-амперная характеристика принимает вид

$$i = \left[-a + \frac{1}{R'} \right] u + bu^3, \quad (7)$$

и амплитуда генерируемого напряжения становится равной

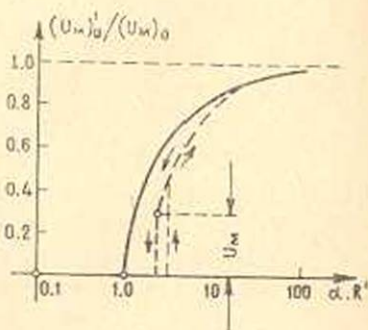
$$(U_m)'_0 = 2 \sqrt{\frac{a - 1/R'}{3b}}. \quad (8)$$

На фиг. 3 изображена зависимость

$$(U_m)'_0 / (U_m)_0 = f(aR'), \quad (9)$$

показывающая, что при аппроксимации (1) схема может генерировать колебания сколь угодно малой амплитуды.

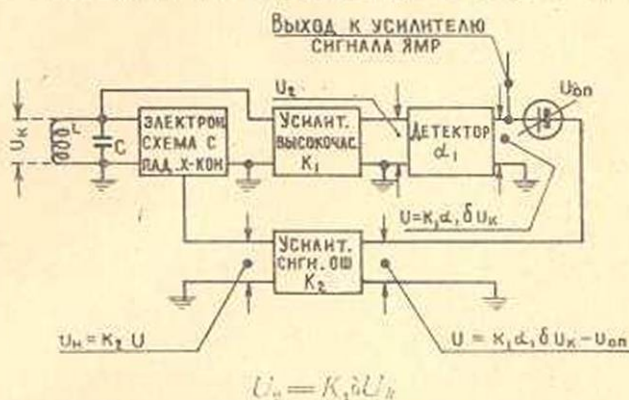
Опыт показывает, что если постепенно уменьшать R' , то при некотором его значении произойдет срыв колебаний, то есть скачкообразное изменение амплитуды от величины U_m до нуля (пунктирная кривая на фиг. 3). По-видимому, начальная часть вольт-амперной характери-



Фиг. 3. Зависимость амплитуды генерируемых колебаний от величины нагрузочного сопротивления.

стики отрицательного сопротивления более соответствует прямой линии [10]. Принципиально напряжение срыва U_n может быть сделано достаточно малым, однако обеспечить устойчивую работу схемы вблизи точки срыва очень трудно.

Для устойчивой генерации небольших (порядка десятков милливольт) напряжений необходима активная стабилизация рабочего режима схемы с помощью глубокой отрицательной обратной связи. Блок-схема автодинного датчика в этом случае примет вид, представленный на фиг. 4. Напряжение на контуре автодина U_k усиливается



Фиг. 4. Функциональная схема автодинного датчика с активной стабилизацией амплитуды генерируемых колебаний.

и детектируется. Получаемое при этом напряжение сравнивается с опорным напряжением U_{on} . Разность

$$U_{co} = K_1 \alpha_1 U_k - U_{on} \quad (10)$$

является в данной системе сигналом ошибки. Она усиливается и вносит необходимое корректирующее действие в электронную схему, возбуждающую контур. Корректирующее напряжение равно

$$U_n = K_2 (K_1 \alpha_1 U_k - U_{on}). \quad (11)$$

Корректирующее действие может быть осуществлено многими путями (изменение анодного напряжения генерирующей лампы; изменение потенциала ее третьей сетки и т. д.). Не рассматривая конкретно какой способ коррекции используется, введем коэффициент коррекции

$$A_k = \frac{dU_k}{dU_n}. \quad (12)$$

В соответствии с общим свойством отрицательной обратной связи [12]

$$\frac{\delta U_k}{\Delta U_k} = \frac{1}{1 + K_1 K_2 A_k}. \quad (13)$$

Здесь δU_k — изменение генерируемого напряжения под действием некоторого возмущения в системе с замкнутой петлей стабилизирующей обратной связи (фиг. 4).

ΔU_k — изменение генерируемого напряжения под действием того же возмущения в системе без стабилизации.

Уравнение (13) характеризует эффективность стабилизирующей обратной связи. Увеличивая K_1 , K_2 , A_k и α_1 можно достичь сколько угодно жесткой стабилизации амплитуды автодина, однако это затруднит измерение сигналов ЯМР, и, вследствие неизбежного запаздывания в детекторе, может привести к самовозбуждению схемы в целом. Для уточнения структуры и параметров схемы, необходим несколько более подробный ее анализ. Пусть в схеме, представленной на фиг. 4, действует возмущение (например, сигнал ЯМР), которое при разомкнутой петле вызвало бы изменение напряжения на контуре на величину ΔU_k . Мгновенное отклонение U_k от невозмущенного значения обозначим δU_k . Постоянную времени переходных процессов собственно в автодине обозначим τ_a ; постоянную времени переходных процессов в детекторе — τ_g . Усилители будем считать безинерционными. Переходные процессы в замкнутой системе, представленной на фиг. 4, будут описываться следующей системой уравнений:

$$\tau_a \frac{d}{dt} (\delta U_k) + \delta U_k = \Delta U_k - A_k U_n, \quad (14)$$

$$U_2 = K_1 \delta U_k, \quad (15)$$

$$\tau_g \frac{dU_{co}}{dt} + U_{co} = \alpha_1 U_2, \quad (16)$$

$$U_n = K_2 U_{co}. \quad (17)$$

Решение этой системы относительно δU_k дает дифференциальное уравнение переходного процесса

$$\tau_a \tau_g \frac{d^2}{dt^2} (\delta U_k) + (\tau_a + \tau_g) \frac{d}{dt} (\delta U_k) + (1 + A_k \alpha_1 K_1 K_2) \delta U_k = \Delta U_k. \quad (18)$$

В случае синусоидальной модуляции магнитного поля при медленном прохождении линии ЯМР

$$\Delta U_k = (\Delta U_k)_m \sin \omega t. \quad (19)$$

(Предполагается, что ω достаточно мало, и времена ядерной магнитной релаксации могут не учитываться [13]). Из (18) следует, что напряжение на контуре автодина будет изменяться при этом по закону

$$\delta U_k = (\delta U_k)_m \sin (\omega t - \varphi), \quad (20)$$

где

$$(\delta U_k)_m = \frac{(\Delta U_k)_m}{\sqrt{\tau_a^2 \tau_g^2 \omega^4 + (\tau_a^2 + \tau_g^2 - 2\tau_a \tau_g K_1 K_2 A_k \alpha) \omega^2 + (1 + A_k \alpha K_1 K_2)^2}}. \quad (21)$$

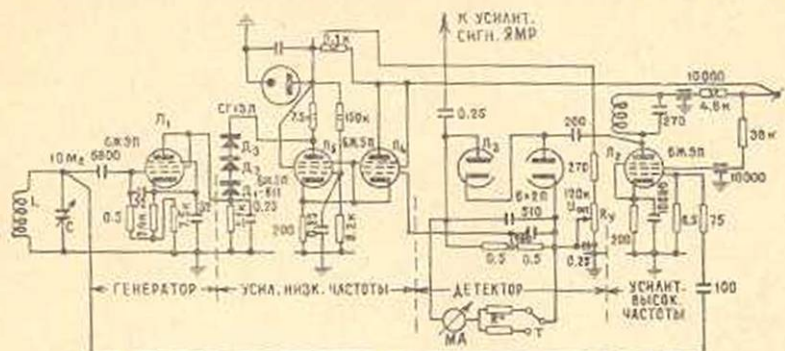
Анализ этого выражения показывает, что при возрастании частоты модуляции ω , величина $(\delta U_k)_m$ вначале растет, так как благодаря τ_g

падает эффективность обратной связи. Затем, несмотря на то, что обратная связь практически полностью нейтрализована, величина $(\delta U_k)_m$ будет падать в соответствии с естественными характеристиками автодина. Таким образом, для получения оптимального сигнала необходимо тщательное согласование величины ϕ и τ_k . С другой же стороны, для подавления шумов выгодно увеличивать τ_k . Одним из возможных путей удовлетворения этих противоречивых требований к τ_k может быть использование двух выходов у схемы детектирования: выход с малой величиной τ_k^* для петли стабилизации амплитуды и второй выход — с большой величиной τ_k^* — для сигнала ЯМР.

Очень важным качеством автодина как датчика сигналов ЯМР является его чувствительность. Известны многочисленные попытки дать теоретический анализ факторов, определяющих чувствительность автодина. В этих работах либо содержатся принципиальные ошибки [14], либо вводится очень много допущений [15], сводящих на нет практическую ценность конечных результатов. По-видимому, в отношении нелинейной системы, каковой является электронная схема с падающей вольт-амперной характеристикой, аналитически могут быть сформулированы только самые общие положения и наиболее прямое решение вопроса — эмпирическое. С этой целью в Институте химфизики АН СССР сопоставлялись сигналы ЯМР, полученные с помощью разных схем на разных лампах от данного образца в данном контуре при данной напряженности магнитного поля [16]. Полученные результаты дают основание утверждать, что для автодинных датчиков сигналов ЯМР целесообразно выбирать лампы типов 6ЖЧ, 6П9, 6Ж9П и применять либо схему Колпитца, либо схему на базе каскада с катодной нагрузкой [17]. Многолетний опыт авторов в использовании автодинных схем вполне подтверждает эти выводы.

Изложенные принципы могут быть реализованы весьма многочисленными способами. При выборе окончательного варианта схемы неизбежно приходится принимать во внимание ряд дополнительных факторов (мощность источников питания, габариты схемы, общее тепловыделение, удобство наладки и т. д.). В свете этих дополнительных факторов оптимальным, по нашему мнению, является вариант, представленный на фиг. 5. Автодин (лампа L_1) собран по схеме каскада с катодной нагрузкой; L_2 — усилитель высокой частоты, L_3 — детектор, L_4, L_5 — дифференциальный усилитель низкой частоты). Коррекция амплитуды генерируемого напряжения осуществляется изменением анодного напряжения L_1 . Анодное напряжение L_1 равно анодному напряжению усилительной лампы L_2 минус постоянное напряжение на кремниевых стабилизаторах D_1, D_2, D_3 . Такое „вычитание“ позволяет обеспечить нормальный режим генерации для L_1 при нормальном усилительном режиме L_2 . Величина опорного напряжения регулируется с помощью сопротивления R_y , амплитуда напряжения на контуре контролируется визуально по шкале микроампер-

метра в схеме детектора. Во избежание паразитных связей накальные цепи ламп имеют высокочастотные дроссельно-емкостные развязки.



Фиг. 5. Полная принципиальная схема автодинного датчика, предназначенного для исследования кристаллов.

Схема обеспечивает устойчивую работу автодина при напряжении на контуре меньше, чем $5 \cdot 10^{-3}$ вольт, что вполне достаточно для исследования кристаллов многих видов.

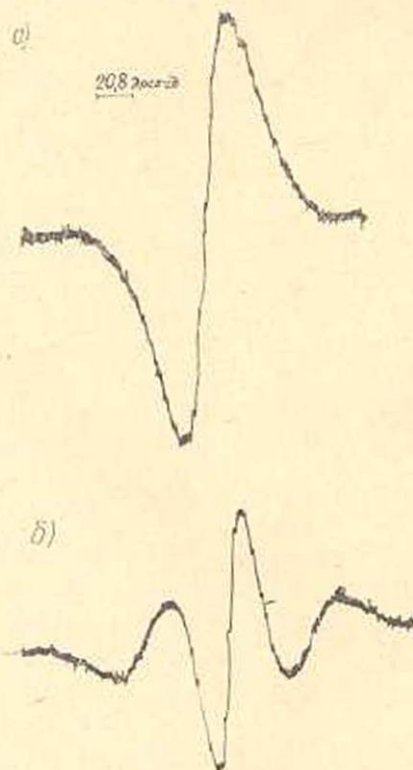


Рис 6

Фиг. 6. Линии ядерно-резонансного поглощения Li^+ в амбигоните: ось (001) кристалла направлена к магнитному полю параллельно H_0 . Спектрограмма „а“ снята, когда угол между (001) и H_0 — 45° , спектрограмма „б“—когда угол— 55° .

На фиг. 6 приведены образцы записи линии поглощения Li^{7} в $LiPFAlNa(OH)O_4$ при двух различных ориентациях последнего по отношению к магнитному полю. Измерения, проведенные с помощью автодинной схемы, представлены на фиг. 5. Эти данные убедительно свидетельствуют о хорошей чувствительности и стабильности измерительной схемы.

Институт химической физики
АН СССР

Поступила 4 XI 1964

Լ. Լ. ԴԵԿԱԲՐՈՆ, ՅՈՒ. Ն. ԿԻԼՅԱՆՈՎ, Ա. Ք. ՄՔՐՏՉԱՆ

ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԻ ԱԶԳԱՆՇԱՆՆԵՐԻ ԱՎՏՈԴԻՆԱՅԻՆ
ՏՎԻԶՆԵՐԻ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐԻ ՌԵՍՈՆԱՆՍԻՐՈՅՈՑՈՆՆԵՐԻ ԸՆՄԱՐ

Ա մ փ ո Վ ի ո լ մ

Տառանդական կոնտուրում փոքր մեծությունների տեսչող լարումների գոյության ժամանակ ավաղինային տվիչներն անկայուն են աշխատում, սակայն «Միջուկային մագնիսական ռեզոնանս» (ՄՄՌ) մեթոդի միջոցով պինդ մարմինների ուսումնասիրությունների համար այդ տվիչներն ունեն մի շարք առավելություններ, համեմատած մյուսների հետ, որի պատճառով էլ եւքը մնում է միակը՝ անհրաժեշտ է դառնում կալունացնել զենեւացվող լարման ամպլիտուդան, բարեփոխել ավաղինային տվիչի սխեման այնպես, որ նրա աշխատանքային ռեժիմը փոքր մեծության լարումների դեպքում լինի կայուն:

Հոդվածում տրված է ակտիվ բացասական հակադարձ կապի կալունացնող գործողության, ինչպես և ավաղինային տվիչում անցման երևույթների անալիզը՝ կապված ամպլիտուդների կալունացման հետ, որի հիման վրա էլ ճշգրտված ու բարեփոխված են դառնիլի սխեմայի մասերը:

Բնութարկված է ավաղինային տվիչների զգայունության հարցը, որի մասին տեսական անալիզը, հիմնական սխեմայի ոչ զծային լինելու հետևանքով, չի կարող տալ որոշակի արդյունքներ: Այդ հարցի լուծման ամենաուպիշ ճանապարհը հանդիսանում է ավաղինի սխեմայի և նրա մասերի բաղ-դատման մեթոդով համապատասխան առկա պայմանների էմպիրիկ ընտրու-թյունը:

ЛИТЕРАТУРА

1. Cohen T. A. Automatic Liquid Level Controls, Electronics, 1945, Apr.
2. Gorter C., Broer Z. T. Physica, 9, 1942, 591.
3. Blombergen N., Purcell E., Pound R. Relaxation Effects in NMR Absorption, Phys. Rev., 73, №7, Apr. 1948.
4. Bloch F. Nuclear Induction, Phys. Rev., 73, 1948.
5. Pound R., Knight W. A Radiofrequency Spectrometer, Rev. Sc. Instr., 21, 1950, 219.
6. Volkoff G., Petch H., Smellie D. Nuclear Quadrupole Interaction in Single Crystals, Canadian Journ. of Phys., 30, 1952, 270.

7. Pekarík L., Urbanek J. Nuclearary Paramagnetismus. Československy Časopis pro Fysiku, SVI, čís 3—4.
8. Balth Van der Pohl. A Nonlinear Theory of Electrical oscillations. Proc. IRE, 22, № 9, 1934, 1051.
9. Bruin F., Shimmel F. Theorie du detecteur autodyne pour la resonance paramagnetique. Physica, 21, 1955, 867.
10. Декабрун Л. Л. Регенеративные измерительные датчики. Автоматика и телемеханика, 17, № 12, 1956, 1114.
11. Мкртчян П. О новой возможности использования метода ЯМР для изучения разупорядочения в кристаллах. Доклады АН Арм. ССР, 37, № 5, 1963.
12. Хэммонд П. Теория обратной связи и ее применения. Физматгиз, М., 1962.
13. Конферман Р. Ядерные моменты. ИЛ, М., 1961.
14. Garstens M. A. Noise in Non-linear oscillator. Journ. of Appl. Physics, 28, № 3, 352.
15. Weinholdt H. Über die Empfindlichkeit des Autodynverfahrens zur Beobachtung magnetisch Kernresonanz. Exper. Techn. der Phys. Heft 6, 1957, 271.
16. Вьюнникова В. Дипломная работа, 1957. Физический факультет МГУ им. Ломоносова, Институт химической физики АН СССР.
17. Декабрун Л. Л. О самовозбуждении каскадов с катодной нагрузкой. Сборник: "Некоторые вопросы инженерной физики". Машгиз, М., 1957.