ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

К. А. АБГАРЯН

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К КВАЗИДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ И РАЗЛОЖЕНИЕ ЕЕ НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

1. В статье излагается достаточно простой метод приведения квадратной матрицы к квазидиагональному виду. Идеи метода коротко изложены в заметке [1]. Здесь этот вопрос рассматривается более подробно и с несколько иных позиций, а именно, обоснование метода проводится без использования теоремы Сильвестра о разложении квадратной матрицы на составляющие.

2. Пусть собственные числа матрицы u порядка n разбиты на p групп вида $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$, $\left(\sigma = 1, 2, \cdots, p;\ \sum_{\sigma=1}^{p} k_\sigma = n\right)$ при условии, что

$$|\lambda_i^{(\sigma)} - \lambda_j^{(s)}| \geqslant c > 0. \tag{1}$$

$$(\sigma \neq s;\ i = 1, 2, \cdots, k_\sigma; \quad j = 1, 2, \cdots, k_s).$$

Каждой группе σ поставим в соответствие матрицу

$$\Delta_\sigma(u) = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma}}^{p} \prod_{j=1}^{k_s} (u - \lambda_j^{(s)} E_n), \ (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{2}$$

Ранг матрицы $\Delta_\sigma(u)$, а также ранг любой целой степени этой матрицы, на основании теоремы о дефекте функции от матрицы (см. [2], стр. 130, теорема 8) равен k_σ. Поэтому матрицу $\Delta_\sigma(u)$ можно представить как произведение матрицы K_σ типа $n \times k_\sigma$ с k_σ линейно независимыми столбцами на матрицу $M_{0\sigma}$ типа $k_\sigma \times n$ с k_σ линейно независимыми строками:

$$\Delta_\sigma(u) = K_\sigma M_{0\sigma}. \tag{3}$$

Из равенства

$$\Delta_\sigma^2(u) = K_\sigma M_{0\sigma} K_\sigma M_{0\sigma}$$

видно, что квадратная матрица $M_{0\sigma} K_\sigma$ порядка k_σ является невырожденной матрицей.

Введем в рассмотрение матрицу

$$M_\sigma = (M_{0\sigma} K_\sigma)^{-1} M_{0\sigma}. \tag{4}$$

Легко показать, что

$$\left.\begin{aligned} M_\sigma K_\sigma &= E_{k_\sigma}, \\ M_\sigma K_s &= 0, \ (\sigma \neq s) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(E_l — единичная матрица порядка l).

Первое из этих равенств сразу получается умножением (4) справа на K_σ. Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\Delta_\sigma(u)\,\Delta_s(u) = 0, \quad (\sigma \neq s), \tag{6}$$

так как из произведения $\Delta_\sigma \Delta_s$ при $\sigma \neq s$ можно выделить множитель $\prod\limits_{\nu=1}^{p} \prod\limits_{l=1}^{k_\nu} (u - \lambda_l^{(\nu)} E_n)$, который, согласно теореме Гамильтона—Кэли, равен нулю. Используя равенство (4), будем иметь

$$K_\sigma M_{0\sigma} K_s M_{0s} = K_\sigma M_{0\sigma} K_\sigma M_\sigma K_s M_{0s} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что K_σ состоит из k_σ линейно независимых столбцов, M_{0s} — из k_s линейно независимых строк, а $M_{0\sigma} K_\sigma$ является невырожденной матрицей, непосредственно следует второе из равенств (5). Введем коагулированные матрицы

$$K = (K_1, K_2, \cdots, K_p), \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}.$$

Ввиду равенств (5), имеем

$$MK = KM = E_n. \tag{7}$$

Представим тождество

$$u = KMuKM$$

следующим образом:

$$u = K \begin{pmatrix} M_1 u K_1 & M_1 u K_2 \cdots M_1 u K_p \\ M_2 u K_1 & M_2 u K_2 \cdots M_2 u K_p \\ \cdots & \cdots \\ M_p u K_1 & M_p u K_2 \cdots M_p u K_p \end{pmatrix} M.$$

При $\sigma \neq s$ субматрица

$$M_\sigma u K_s = M_\sigma u K_s M_{0s} K_s (M_{0s} K_s)^{-1} = M_\sigma K_s M_{0s} u K_s (M_{0s} K_s)^{-1} = 0;$$

(матрицы u и $K_s M_{0s} = \Delta_s(u)$ как многочлены от одной и той же матрицы перестановочны друг с другом).

Поэтому

$$u = K \begin{pmatrix} M_1 u K_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 u K_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_p u K_p \end{pmatrix} M. \tag{8}$$

Обозначим

$$\Lambda_\sigma = M_\sigma u K_\sigma. \tag{9}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_p \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тогда

$$u = K\Lambda M = K\Lambda K^{-1}. \tag{11}$$

Таким образом, посредством матрицы K матрица u приводится к квазидиагональному виду Λ.

3. Матрицы u и Λ, как подобные матрицы, имеют одни и те же собственные числа.

Покажем, что собственные числа матрицы Λ_σ суть собственные числа матрицы u, включенные в группу σ.

Пусть λ_j — собственное число матрицы Λ_σ. Тогда $\Lambda_\sigma - \lambda_j E_{k_\sigma}$ — вырожденная матрица.

Предположим, что λ_j не принадлежит группе σ. Тогда $u - \lambda_j E_n$ является множителем $\Delta_\sigma(u)$. Имея в виду, что, как нетрудно проверить,

$$M_\sigma(u - \lambda_j E_n) = (\Lambda_\sigma - \lambda_j E_{k_\sigma}) M_\sigma \tag{12}$$

и

$$(u - \lambda_j E_n) K_\sigma = K_\sigma (\Lambda_\sigma - \lambda_j E_{k_\sigma}), \tag{13}$$

представим матрицу $M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma$ в виде

$$M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma = \prod_{\lambda_l \neq \lambda_r^{(\sigma)}} (\Lambda_\sigma - \lambda_l E_{k_\sigma}).$$

$$(r = 1, 2, \cdots, k_\sigma)$$

Согласно сделанному предположению, среди множителей правой части этого равенства имеется вырожденная матрица $\Lambda_\sigma - \lambda_j E_{k_\sigma}$. Поэтому $M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma$ — вырожденная матрица. Но, с другой стороны,

$$M_\sigma \Delta_\sigma K_\sigma = M_\sigma K_\sigma M_{0\sigma} K_\sigma = M_{0\sigma} K_\sigma,$$

причем, как было показано выше, $M_{0\sigma} K_\sigma$ — невырожденная матрица. Полученное противоречие доказывает, что любое собственное число матрицы Λ_σ есть собственное число матрицы u, включенное в группу σ.

Пусть теперь λ_j — собственное число матрицы u, включенное в группу σ.

Предположим, что λ_j не является собственным числом матрицы Λ_σ. Тогда λ_j должно быть собственным числом хотя бы одной из остальных матриц Λ_i. Пусть это будет Λ_s $(s \neq \sigma)$. Но тогда, по доказанному выше, λ_j принадлежит группе s. Оказалось, что λ_j принадлежит одновременно двум различным группам σ и s, что противоречит условию (1). Таким образом, имеет место и обратное предложение, а именно, всякое собственное число матрицы u, включенное в группу σ, является собственным числом матрицы Λ_σ.

4. Равенство (11) можно представить и так:

$$u = \sum_{\sigma=1}^{p} R_\sigma, \tag{14}$$

где

$$R_\sigma = K_\sigma \Delta_\sigma M_\sigma. \tag{15}$$

Матрицы R_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, p)$ удовлетворяют равенствам

$$R_\sigma^m = K_\sigma \Lambda_\sigma^m M_\sigma \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{16}$$

$$R_\sigma \cdot R_s = 0, \quad (\sigma \neq s), \tag{17}$$

$$uR_\sigma = R_\sigma u = R_\sigma^2. \tag{18}$$

Рассмотрим матрицы

$$P_\sigma = K_\sigma M_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{19}$$

Имеют место следующие легко доказываемые соотношения:

$$P_\sigma^m = P_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p; \quad m = 1, 2, \cdots); \tag{20}$$

$$P_\sigma \cdot P_s = 0, \quad (\sigma \neq s); \tag{21}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{p} P_\sigma = E_n \tag{22}$$

и, наконец,

$$uP_\sigma = P_\sigma u = R_\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{23}$$

Отсюда следует, что матрицы P_σ $(\sigma = 1, 2, \cdots, p)$ можно рассматривать как операторы выбора, с помощью которых можно выделить любую из p составляющих R_σ матрицы u, соответствующих p непересекающимся группам собственных чисел матрицы u.

Отметим, что

$$\Delta_\sigma P_\sigma = P_\sigma \Delta_\sigma = \Delta_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, p). \tag{24}$$

5. *Примечание 1.* Пусть $f(\lambda)$ — функция скалярного аргумента λ, определенная на спектре матрицы u. Тогда, так как u и Λ подобны,

$$f(u) = K f(\Lambda) M \tag{25}$$

и

$$f(u) = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma f(\Delta_\sigma) M_\sigma. \tag{26}$$

Примечание 2. В качестве матрицы K_σ может быть взята любая матрица, составленная из k_σ линейно независимых столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$ или из k_σ линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы $\Delta_\sigma(u)$. Матрица K_σ может быть заменена матрицей вида $K_\sigma B_\sigma$, где B_σ — произвольная невырожденная матрица порядка k_σ. При этом, очевидно, вместо матрицы M_σ следует взять матрицу $B_\sigma^{-1} M_\sigma$. С другой стороны, как легко показать, если $\Delta_\sigma = K_\sigma M_\sigma$ и $\Delta_\sigma = \widetilde{K}_\sigma \widetilde{M}_\sigma$, то существует невырожденная матрица B_σ порядка k_σ такая, что $\widetilde{K}_\sigma = K_\sigma B_\sigma$. Поэтому матрицы $K_\sigma B_\sigma$, $B_\sigma^{-1} M_\sigma$ и $B_\sigma^{-1} \Lambda_\sigma B_\sigma$, где B_σ — произвольная невырожденная матрица порядка k_σ, можно рассматривать как общий вид матриц, осуществляющих разложение (26).

Интересно отметить, что R_σ и P_σ не зависят от B_σ. Действительно, в соответствии с формулами (15), (9) и (19), получим

$$R_\sigma = K_\sigma B_\sigma (B_\sigma^{-1} M_\sigma u K_\sigma B_\sigma) \cdot B_\sigma^{-1} M_\sigma = K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma;$$

$$P_\sigma = K_\sigma B_\sigma B_\sigma^{-1} M_\sigma = K_\sigma M_\sigma.$$

Примечание 3. Матрицы $\Delta_\sigma(u)$, а следовательно, и матрицы K_σ, Λ_σ, M_σ, вообще говоря, являются комплекснозначными. Но можно разбивку собственных чисел на группы произвести так, что перечисленные выше матрицы будут составлены только из действительных чисел. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы любые два комплексно сопряженные собственные числа матрицы u были включены в одну и ту же группу.

Примечание 4. При соответствующем разбиении собственных чисел на группы из формулы (26) могут быть получены формулы Сильвестра. В частности, если все собственные числа матрицы u простые, то, предполагая, что каждая группа состоит только из одного собственного числа, равенство (26) легко приводится к виду

$$f(u) = \sum_{\sigma=1}^{p} f(\lambda_\sigma) \frac{\Delta_\sigma(u)}{\Delta_\sigma(\lambda)},$$

что представляет собой формулу Сильвестра в случае простых собственных чисел.

Примечание 5. Как известно [3], матрица I_σ, ортогонально проектирующая n-мерное пространство R_n на k_σ-мерное инвариантное подпространство $R_{\sigma n}$, соответствующее собственным числам $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ матрицы u, может быть представлена в виде

$$I_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda,$$

где γ_σ — спрямляемая замкнутая дуга, проходящая в комплексной плоскости на положительном расстоянии от спектра матрицы u и отделяющая собственные числа $\lambda_1^{(\sigma)}, \cdots, \lambda_{k_\sigma}^{(\sigma)}$ от остальных собственных чисел матрицы u. Легко показать, что построенные выше матрицы P_σ $(\sigma = 1, \cdots, p)$ в точности совпадают с матрицами I_σ.

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & B_2 & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots B_p \end{pmatrix}$$

— квазидиагональная матрица, приводящая квазидиагональную матрицу Λ к форме Жордана $\overline{\Lambda}$.

Тогда

$$(\lambda E_n - u)^{-1} = \sum_{s=1}^{p} K_s B_s^{-1} (\lambda E_{k_s} - \overline{\Lambda}_s)^{-1} B_s M_s.$$

Используя теорему о составном контуре и учитывая, что $\overline{\Lambda}_s$ имеет форму Жордана, получим

$$\oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_{k_s} - \overline{\Lambda}_s)^{-1} d\lambda = \begin{cases} 2\pi i E_{k_s}, & (s = \sigma); \\ 0, & (s \neq \sigma). \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{p} K_s B_s^{-1} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_{k_s} - \overline{\Lambda}_s)^{-1} d\lambda B_s M_s = K_\sigma M_\sigma = P_\sigma.$$

Примечание 6. Пусть $u(\tau)$ — матрица, элементы которой в промежутке $[a, b]$ k раз дифференцируемы по параметру τ.

Тогда представление матрицы $\Delta_\sigma(u)$ в виде произведения двух матриц K_σ и $M_{0\sigma}$ (см. (3)) можно выполнить так, что матрицы K_σ, M_σ, Λ_σ будут также k раз дифференцируемы. Это вытекает из следующих соображений:

а) матрица P_σ k раз дифференцируема, что следует из равенства

$$P_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\sigma} (\lambda E_n - u)^{-1} d\lambda;$$

б) существуют k раз дифференцируемые матрицы K_σ и M_σ, такие что $P_\sigma = K_\sigma M_\sigma$ (K_σ — матрица типа $n \times k_\sigma$ ранга k_σ, а M_σ — матрица типа $k_\sigma \times n$ ранга k_σ).

Если, например, в рассматриваемом промежутке $[a, b]$ линейная независимость каких-нибудь (но одних и тех же) k_σ столбцов матрицы P_σ не нарушается, то достаточно взять в качестве матрицы K_σ матрицу, составленную из этих k_σ столбцов. В общем случае всегда можно набрать матрицу K_σ из таких k_σ линейно независимых линейных комбинаций столбцов матрицы P_σ с коэффициентами, вообще говоря, зависящими от τ, что будет обеспечена k раз дифференцируемость матриц K_σ, M_σ, а следовательно, и матрицы Λ_σ (см. (9));

в) любая матрица K_σ, которая является множителем P_σ, является множителем $\Delta_\sigma(u)$ и наоборот.

6. Рассмотрим один частный случай. Пусть собственные числа матрицы u разбиты на группы при условии (1) таким образом, что в каждую группу включены только равные собственные числа, и допу

сим, что все элементарные делители характеристической матрицы $u-\lambda E_n$ линейны.

В этом случае имеет место равенство

$$(u-\lambda^{(\sigma)}E_n)\,\Delta_\sigma(u)=0. \tag{27}$$

(Здесь через $\lambda^{(\sigma)}$ обозначено общее значение равных собственных чисел, включенных в группу σ).

Используя формулы (3), (4) и (13), отсюда получим

$$K_\sigma(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma M_\sigma=0.$$

Умножим последнее равенство слева на M, а справа на K. Тогда в левой части равенства получим коагулированную матрицу, у которой все клетки кроме одной, которую занимает субматрица $(\lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma$, являются нулевыми матрицами. Учитывая, что в правой части равенства стоит нулевая матрица, будем иметь

$$(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})\,M_{0\sigma}K_\sigma=0$$

или, так как $M_{0\sigma}K_\sigma$ — невырожденная матрица,

$$\Lambda_\sigma=\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma}. \tag{28}$$

Отсюда видно, что Λ_σ — диагональная матрица, диагональными элементами которой служат равные собственные числа, включенные в группу σ.

Матрица K_σ состоит из k_σ линейно независимых собственных векторов матрицы u. Действительно,

$$(u-\lambda^{(\sigma)}E_n)\,K_\sigma=K_\sigma(\Lambda_\sigma-\lambda^{(\sigma)}E_{k_\sigma})=0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае изложенный метод приводит к известному результату, а именно, если все элементарные делители характеристической матрицы $u-\lambda E_n$ линейны, то посредством матрицы, составленной из собственных векторов матрицы u, последняя приводится к диагональному виду.

7. В качестве примера приведем к квазидиагональному виду и разложим на составляющие матрицу

$$u=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 5 & -4\\ -15 & 5 & 6 & -3\\ -12 & 4 & 9 & -10\\ -6 & 2 & 5 & -6\end{pmatrix}.$$

а. Собственные числа этой матрицы $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$, $\lambda_4=-2$ разобьем, например, на следующие две группы:

группа 1: $\lambda_1^{(1)}=1,\quad \lambda_2^{(1)}=-1,$

группа 2: $\lambda_1^{(2)}=2,\quad \lambda_2^{(2)}=-2.$

$$\Delta_1(u) = (u - \lambda_1^{(2)} E_4)(u - \lambda_2^{(2)} E_4) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 0 \\ -9 & 9 & -6 & 3 \\ -12 & 12 & -9 & 6 \\ -6 & 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(u) = (u - \lambda_1^{(1)} E_4)(u - \lambda_2^{(1)} E_4) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & 0 \\ -9 & 12 & -6 & 3 \\ -12 & 12 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразующая матрица

$$K = (K_1 K_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и далее

$$\Lambda_1 = M_1 u K_1 = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = M_2 u K_2 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица K преобразует матрицу u к виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Составляющие матрицы u:

$$R_1 = K_1 \Lambda_1 M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & -12 \\ 3 & -3 & 10 & -17 \\ 4 & -4 & 13 & -22 \\ 2 & -2 & 7 & -12 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = K_2 \Lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} -10 & 4 & -2 & 8 \\ -18 & 8 & -4 & 14 \\ -16 & 8 & -4 & 12 \\ -8 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

в. Приведем теперь матрицу u к диагональному виду. Для этого разобьем собственные числа на четыре группы:

$$\lambda^{(1)} = 1; \quad \lambda^{(2)} = -1; \quad \lambda^{(3)} = 2; \quad \lambda^{(4)} = -2$$

$$\Delta_1(u) = (u - \lambda^{(2)} E_4)(u - \lambda^{(3)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} -12 & 12 & -24 & 36 \\ -18 & 18 & -36 & 54 \\ -24 & 24 & -48 & 72 \\ -12 & 12 & -24 & 36 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(u) = (u - \lambda^{(1)} E_4)(u - \lambda^{(3)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & -24 & 48 \\ 0 & 0 & -30 & 60 \\ 0 & 0 & -18 & 36 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3(u) = (u - \lambda^{(1)} E_4)(u - \lambda^{(2)} E_4)(u - \lambda^{(4)} E_4) = \begin{pmatrix} -36 & 24 & -12 & 24 \\ -72 & 48 & -24 & 48 \\ -72 & 48 & -24 & 48 \\ -36 & 24 & -12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_4(u) = (u - \lambda^{(1)}E_4)(u - \lambda^{(2)}E_4)(u - \lambda^{(3)}E_4) = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & 24 \\ -36 & 0 & 0 & 36 \\ -24 & 0 & 0 & 24 \\ -12 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Примем

$$K_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразующая матрица

$$K = (K_1 K_2 K_3 K_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M_1 = (1 \;\; -1 \;\; 2 \;\; -3), \qquad M_2 = (0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2),$$
$$M_3 = (-3 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 2), \qquad M_4 = (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1).$$

Без вычислений ясно, что $\Lambda_1 = \lambda^{(1)} = 1$; $\Lambda_2 = \lambda^{(2)} = -1$; $\Lambda_3 = \lambda^{(3)} = 2$; $\Lambda_4 = \lambda^{(4)} = -2$. Поэтому

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Составляющие матрицы

$$R_1 = K_1 \Lambda_1 M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 6 & -9 \\ 4 & -4 & 8 & -12 \\ 2 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = K_2\Lambda_2 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = K_3\Lambda_3 M_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -2 & 4 \\ -12 & 8 & -4 & 8 \\ -12 & 8 & -4 & 8 \\ -6 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = K_1\Lambda_1 M_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Московский ордена Ленина
авиационный институт им. С. Орджоникидзе

Поступила 16 IX 1964

Կ. Ա. ԱՐԶԱՐՅԱՆ

ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՄԱՏՐԻՑԱՅԻ ԲԵՐՈՒՄԸ ՔՎԱԶԻԱՆԿՅՈՒՆԱԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՔԻ ԵՎ ՆՐԱ ՎԵՐԱԾՈՒՄԸ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում դիտարկվում է n *կարգի* u *քառակուսային մատրիցան, որի սեփական թվերը կարող են բաժանվել* p *չփոխհատվող խմբերի:*

Շարադրվում է այդ մատրիցայի հետևյալ տեսքով պատկերման մեթոդը.

$$u = \sum_{\sigma=1}^{p} K_\sigma \Lambda_\sigma M_\sigma \tag{1}$$

կամ, որ համարժեք է.

$$u = K\Lambda M, \tag{2}$$

որտեղ՝

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} E_{k_\sigma}, & (\sigma = s) \\ 0, & (\sigma \neq s) \end{cases} \tag{3}$$

$$MK = KM = E_n, \tag{4}$$

k_σ*-ն* σ *խմբում ընդգրկված սեփական թվերի քանակն է,* E_l*-ն* l *կարգի միավոր մատրից է,* K_σ*-ն,* Λ_σ*-ն և* M_σ*-ն համապատասխանաբար* $n \times k_\sigma$, $k_\sigma \times k_\sigma$ *և* $k_\sigma \times n$ *տիպի մատրիցաներ են:*

K-ն, Λ-ն և M-ը n կարգի հետևյալ տեսքի մատրիցներ են՝

$$K(K_1 \cdots K_p), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_p \end{pmatrix}:$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Асимптотическое расщепление уравнений регулируемого процесса при медленном изменении параметров регулируемого объекта и системы регулирования. ДАН СССР, **158**, № 3, 1964.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. ГИТТЛ, М., 1953.
3. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. ИЛ, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

И. О. ХАЧАТРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

В настоящей статье приводится интегральное представление мероморфных в полуплоскости функций с произвольно быстро растущей характеристикой. Оно является обобщением одного результата Р. Неванлинна [1] о представлении мероморфных в полуплоскости функций, характеристика которых имеет степенной рост. В представлении Р. Неванлинна в качестве ядра фигурирует видоизмененное ядро Пуассона

$$k_p(t;\, z) = \operatorname{Im}\left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \frac{z}{t^2} - \cdots - \frac{z^p}{t^{p+1}}\right]. \qquad (N)$$

В приводимом представлении в качестве ядра берется ядро $k(t;\, z)$, которое определяется следующим образом (см. также [2]):

$$k(t;\, z) = k_{p_n}(t;\, z) \quad \text{при} \quad n-1 \leqslant |t| < n, \quad n = 1, 2, \cdots \qquad (1)$$

где числа p_n $(p_1 = 0)$ выбираются для всего класса мероморфных в замкнутой верхней полуплоскости функций, характеристики которых мажорируются данной функцией $q(r)$.

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ с нулями a_μ и полюсами b_ν. Введем следующие обозначения Р. Неванлинна:

$$A(r, f) = \frac{1}{\pi}\int_1^r \left(\ln^+|f(t)| + \ln^+|f(-t)|\right)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)dt,$$

$$B(r, f) = \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$C(r, f) = 2\sum_{1<|b_\nu|<r}\left(\frac{1}{|b_\nu|} - \frac{|b_\nu|}{r^2}\right)\sin\beta_\nu, \quad a_\mu = |a_\mu|\, e^{i\alpha_\mu}, \quad b_\nu = |b_\nu|\, e^{i\beta_\nu},$$

$$a(re^{i\vartheta};\, z) = \int_1^r \ln^+\left|\frac{1}{f(te^{i\vartheta}) - z}\right|\frac{dt}{t}.$$

$c(re^{i\vartheta}; z) = \sum\limits_{1<r_\nu<r} \sin\varphi_\nu(z)$, где $r_\nu e^{i\varphi_\nu(z)}$ — z-точки функции $f(z)$

$$A(r, z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^r \left(\ln^+\left|\frac{1}{f(t)-z}\right| + \ln^+\left|\frac{1}{f(-t)-z}\right|\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{r^2}\right)dt.$$

Аналогично определяются $B(r, z)$ и $C(r, z)$.

Функцию $S(r, f) \equiv S(r) = A(r, f) + B(r, f) + C(r, f)$ называют *фундаментальной величиной или неванлинновской характеристикой функции* $f(z)$.

Характеристика $S(r, f)$ — возрастающая функция от r и

$$S(r, f) = S\left(r, \frac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}\right) + O(1), \text{ если } \alpha\delta - \gamma\beta \neq 0.$$

Теорема (Р. Неванлинна). *Если характеристика $S(r)$ ограничена, то имеет место следующее представление*

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)| \frac{r\sin\varphi\, dt}{r^2+t^2-2rt\cos\varphi} + \frac{2\eta}{\pi} r\sin\varphi -$$

$$-\sum \ln\left|\frac{re^{i\varphi}-\bar{a}_\mu}{re^{i\varphi}-a_\mu}\right| + \sum \ln\left|\frac{re^{i\varphi}-\bar{b}_\nu}{re^{i\varphi}-b_\nu}\right|,$$

где

$$\eta = \lim \frac{1}{r}\int\limits_0^\pi \ln|f(re^{i\vartheta})|\sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Теорема (Р. Неванлинна). *Если интеграл* $\int\limits^{\infty} S(r) r^{-q-1} dr$ *сходится для некоторого целого положительного* q, *то*

$$\ln|f(z)| = \frac{y}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \ln|f(t)| \frac{dt}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|>1} \ln|f(t)|\, k_q(t; z)\, dt +$$

$$+\sum \ln|D_q(z; a_\mu)| - \sum \ln|D_q(z; b_\nu)| + \sum_{k=1}^{q} a_k r^k \sin k\varphi,$$

где

$$D_q(z; a) = E\left(\frac{z}{a}; q\right) E^{-1}\left(\frac{z}{\bar{a}}; q\right), \tag{2}$$

$E(u, q) = (1-u)\exp\left(u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^q}{q}\right)$ — первичный множитель Вейерштрасса, коэффициенты a_k — вещественны.

Пусть теперь $q(x)$ — произвольная монотонно возрастающая на $(0, \infty)$ функция. Рассмотрим класс A_q мероморфных в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ функций $f(z)$, характеристики которых удовлетворяют условиям

$$S(r, f) < d_f\, q(r), \quad \int S(r, f)\, q^{-1}(r)\, dr < \infty,$$

где d_f — константа, зависящая от функции $f(z)$.

Теорема. *Любая функция класса A_q представляется в виде*

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\, k(t; z)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1<|a_\mu|<n} \ln|D_{p_n}(z; a_\mu)| -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1<|b_\nu|<n} \ln|D_{p_n}(z; b_\nu)| + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi, \quad z = re^{i\varphi}, \tag{3}$$

где ядро $k(t; z)$ определяется соотношениями (1), *при этом*

$$p_1 = 0, \quad p_n = [\ln q(n+1)], \quad n \geq 2, \tag{4}$$

а коэффициенты a_n вещественны.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, мы приведем 3 леммы, доказательства которых не отличаются от доказательств аналогичных лемм, приведенных в работе Р. Неванлинна [1].

Лемма 1. Для произвольной функции $\psi(t) > 0$ интегралы

$$\int^{\infty} \frac{a(te^{i\theta}; z)}{\psi(t)}\, dt \ \text{ и } \int \ln^+ \left|\frac{1}{f(te^{i\theta}) - z}\right| \frac{\lambda(t)}{t}\, dt,$$

где $\lambda(x) = \int_x^{\infty} \psi^{-1}(t)\, dt$ сходятся или расходятся одновременно.

Лемма 2. Интеграл $\int^{\infty} \psi^{-1}(t)\, c(t; z)\, dt$ и ряд $\sum \lambda(r_\nu) \sin \varphi_\nu(z)$ сходятся или расходятся одновременно.

Лемма 3. Интегралы $\int^{\infty} \psi^{-1}(t)\, A(t; z)\, dt$ и $\int^{\infty} [a(t; z) + a(-t; z)] \times \times t^{-2} \lambda(t)\, dt$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогичное утверждение верно и для величин C и c.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Из сходимости интеграла $\int^{\infty} q^{-1}(r) S(r, f)\, dr$ следует, что

$$\int^{\infty} q^{-1}(r) A(r, z)\, dr < \infty, \quad \int^{\infty} B(r, z)\, q^{-1}(r)\, dr < \infty,$$

$$\int^{\infty} q^{-1}(r) C(r, z)\, dr < \infty.$$

Из леммы 3 имеем

$$\int^{\infty} [a(t;\ z) + a(-t;\ z)]\, t^{-2} H(t)\, dt < \infty,$$

$$\int^{\infty} [c(t;\ z) + c(-t;\ z)]\, t^{-2} H(t)\, dt < \infty,$$

где $H(x) = \int\limits_x^{\infty} q^{-1}(t)\, dt$ — монотонно убывающая функция.

Из леммы 1 следует, что интеграл

$$\int^{\infty} \ln^{+} \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| H_1(t) \frac{dt}{t} \quad \text{и ряд} \quad \sum H_1(r_\nu) \sin \varphi_\nu(z),$$

где $H_1(x) = \int\limits_x^{\infty} H(t)\, t^{-2} dt$, сходятся.

Имеем

$$H_1(x) \geqslant \int\limits_x^{x+1/2} t^{-2} H(t)\, dt \geqslant \frac{1}{4} x^{-2} H\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Далее

$$H\left(x + \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{x+1/2}^{\infty} q^{-1}(t)\, dt \geqslant \int\limits_{x+1/2}^{x+1} q^{-1}(t)\, dt \geqslant \frac{1}{2} q^{-1}(x+1).$$

Следовательно, $H_1(x) \geqslant \mathrm{const} \cdot x^{-2} q^{-1}(x+1)$, $x \geqslant 1$, откуда следует сходимость интеграла

$$\int^{\infty} \ln^{+} \left| \frac{1}{f(te^{i\theta}) - z} \right| t^{-3} q^{-1}(t+1)\, dt$$

и ряда

$$\sum \frac{\sin \varphi_\nu(z)}{r_\nu^2\, q(r_\nu + 1)}.$$

Так как функция $f^{-1}(z)$ также является мероморфной функцией из класса A_q, то, полагая $z = \infty$ и $z = 0$, будем иметь

$$\int^{\infty} \big| \ln |f(t)| \big|\, t^{-3} q^{-1}(t+1)\, dt < \infty, \qquad \sum \frac{\sin \alpha_\mu}{|a_\mu|^2\, q(|a_\mu| + 1)} < \infty,$$

$$\sum \frac{\sin \beta_\nu}{|b_\nu|^2\, q(|b_\nu| + 1)} < \infty. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\, k(t;\, z)\, dt,$$

где ядро $k(t;\, z)$ определяется соотношениями (1) и (4), и докажем, что он сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

В самом деле, пусть $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > \delta > 0$. Представим этот интеграл в виде суммы $\sum v_n^{(1)}(z) + v_n^{(2)}(z)$, где

$$v_n^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-n}^{-(n-1)} \ln|f(t)|\, k_{p_n}(t;\, z)\, dt,$$

$$v_n^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{n-1}^{n+1} \ln|f(t)|\, k_{p_n}(t;\, z)\, dt.$$

Имеем

$$|v_n^{(2)}(z)| < \operatorname{const}(\delta)\int_{n-1}^{n} \big|\ln|f(t)|\big|\, r^{p_n+1}\, \frac{dt}{t^{p_n+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^{n} \big|\ln|f(t)|\big| \left(\frac{er}{t}\right)^{p_n-1} e^{-p_n-1}\, \frac{dt}{t^3}. \tag{6}$$

Из (4) следует, что при $n-1 \leqslant |t| < n$ верно $e^{p_n+1} \geqslant q(n+1) \geqslant q(|t|+1)$, следовательно, из (6) имеем

$$|v_n^{(2)}(z)| \leqslant \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^{n} \big|\ln|f(t)|\big| \left(\frac{er}{n-1}\right)^{p_n-1} \frac{dt}{t^3 q(t+1)} \tag{7}$$

и для достаточно больших n будем иметь

$$|v_n^{(2)}(z)| \leqslant \operatorname{const} r^2 \int_{n-1}^{n} \big|\ln|f(t)|\big| \frac{dt}{t^3 q(t+1)}.$$

Аналогичное неравенство верно и для $v_n^{(1)}(z)$ при $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > \delta > 0$ и для достаточно больших n. Из этих оценок и из (5) следует наше утверждение.

Функция

$$v(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\, k(t;\, z)\, dt$$

гармонична в верхней полуплоскости и

$$\lim_{y \to +0} v(x+iy) = \ln|f(x)|. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n-1<|a_\mu|<n} \ln|D_{p_n}(z;\ a_\mu)| = h_1(z).$$

Докажем, что он сходится абсолютно и равномерно в любой конечной части верхней полуплоскости, не содержащей точек a_μ.

В самом деле, пусть $|z|<R$. Тогда для $|a_\mu|>2R$ имеем

$$\left|\ln|D_{p_n}(z;\ a_\mu)|\right| < 2r^{p_n} \sin \alpha_\mu |a_\mu|^{-p_n}.$$

Далее

$$\sum_{2R<n-1<|a_\mu|<n} \left|\ln|D_{p_n}(z;\ a_\mu)|\right| \leqslant 2\sum \sin\alpha_\mu \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^{p_n} =$$

$$= 2r^2 \sum \sin\alpha_\mu \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^{p_n-2} |a_\mu|^{-2} <$$

$$< 2e^3r^2 \sum \sin\alpha_\mu \left(\frac{er}{n-1}\right)^{p_n-2} e^{-p_n-1} |a_\mu|^{-2} <$$

$$\leqslant 2e^3r^2 \sum \sin\alpha_\mu \left(\frac{er}{n-1}\right)^{p_n-2} \frac{1}{|a_\mu|^2 q(|a_\mu|+1)}, \tag{9}$$

откуда, ввиду второго условия (5), следует наше утверждение.

Аналогично доказывается сходимость ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m-1<|b_\nu|<m} \ln|D_{p_m}(z;\ b_\nu)| = h_2(z).$$

Функция $h_1(z)$ ($h_2(z)$) — однозначная гармоническая функция в верхней полуплоскости, за исключением точек a_μ (b_ν), где она имеет логарифмические полюсы и на вещественной оси имеет нулевые предельные значения. Следовательно, функция

$$u(z) = \ln|f(z)| - h_1(z) + h_2(z)$$

— однозначная гармоническая функция в верхней полуплоскости, предельные значения которой на вещественной оси совпадают с $\ln|f(x)|$.

Разность $u(z) - v(z)$ представляет однозначную гармоническую функцию с нулевыми значениями на вещественной оси. Продолжим нечетно эту функцию в нижнюю полуплоскость и полученную гармоническую функцию обозначим через $w(z)$. Тогда $w(re^{i\varphi}) = \sum a_n r^n \sin n\varphi$, где коэффициенты a_n вещественны, откуда следует, что

$$u(z) = v(z) + \sum a_n r^n \sin n\varphi, \quad z = re^{i\varphi}.$$

или

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\,k(t;\,z)\,dt +$$

$$+\sum_{1}^{\infty}\sum_{n-1<|a_\mu|<n} \ln|D_{p_n}(z;\,a_\mu)| - \sum_{1}^{\infty}\sum_{m-1<|b_\nu|<m} \ln|D_{p_m}(z;\,b_\nu)| +$$

$$+\sum_{1}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi, \qquad z = re^{i\varphi}. \tag{10}$$

Умножая обе части этого равенства на $\sin m\varphi$ и интегрируя от 0 до π, получим соотношения для определения коэффициентов a_m $(m = 1, 2, \cdots)$:

$$a_m r^m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\sin m\varphi d\varphi - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\,k(t;\,re^{i\varphi})\sin m\varphi d\varphi -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n-1<|a_\mu|<n} \ln|D_{p_n}(re^{i\varphi};\,a_\mu)|\sin m\varphi\,d\varphi +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m-1<|b_\nu|<m} \ln|D_{p_m}(re^{i\varphi};\,b_\nu)|\sin m\varphi d\varphi = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \tag{11}$$

Оценим правую часть формулы (11). При этом *мы будем предполагать, что функция* $\dfrac{1}{t-1}\ln q(t+1)$ *возрастающая.*

Имеем

$$I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln|f(re^{i\varphi})|\sin m\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right|\sin\varphi\,\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi. \tag{12}$$

Так как $|\sin m\varphi| \leqslant m\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то из (12) следует

$$|I_1| \leqslant mrB(r,\,f) + mrB\left(r,\,\frac{1}{f}\right) \leqslant mrS(r,\,f) +$$

$$+ mrS\left(\frac{1}{f}\right) = 2mrS(r,\,f) + O(1)\,mr \leqslant 2mr\,d_f\,q(r) + O(1)\,mr. \tag{13}$$

Для оценки интеграла I_2 перепишем его в виде

$$I_2 = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|f(t)|\, k(t;\ re^{i\varphi}) \sin m\varphi\, d\varphi dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1<|t|<n} \ln|f(t)|\, k_{p_n}(t;\ re^{i\varphi})\,|dt|\right)\sin m\varphi d\varphi. \tag{14}$$

Заметим, что из (N) следует, что

$$|k_{p_n}(t;\ re^{i\varphi})| \leqslant \frac{2r^{p_n+1}}{|t|^{p_n+1}}, \quad \text{если } |t| \geqslant 2r.$$

Если $|t| \leqslant 2r$, то

$$|\sin m\varphi\, k_{p_n}(t; re^{i\varphi})| = \left| \frac{r^{p_n-1}}{t^{p_n+1}} \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{t^2 + r^2 - 2rt\cos\varphi} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{t\sin(p_n+1)\varphi - r\sin p_n\varphi}{\sin\varphi} \frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^{p_n-1}}{|t|^{p_n+1}}\,[2r(p_n+1) + rp_n]\, m \leqslant \frac{3m(p_n+1)r^{p_n}}{|t|^{p_n+1}}, \qquad |t| \geqslant 1.$$

Следовательно, вообще

$$|\sin m\varphi k_{p_n}(t;\ re^{i\varphi})| \leqslant \frac{3m(p_n+1)r^{p_n}}{|t|^{p_n+1}}, \quad |t| \geqslant 1. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$|I_2| \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1<|t|<n} |\ln|f(t)||\, \frac{3m(p_n+1)}{|t|^{p_n+1}}\,|dt| +$$

$$+ \frac{2y}{\pi}\int_{-1}^{1} |\ln|f(t)||\, \frac{dt}{(t-x)^2+y^2} =$$

$$= \frac{6e^3 mr^2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}(p_n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{p_n}\int_{n-1<|t|<n} |\ln|f(t)||\left(\frac{3er}{2t}\right)^{p_n-2} \times$$

$$\times e^{-p_n-1}\frac{|dt|}{|t|^3} + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6e^3 mr^2}{\pi}\max_n (p_n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{p_n}\left(\frac{3er}{2(n-1)}\right)^{p_n-2} \times$$

$$\times \sum \int_{n-1<|t|<n} \frac{|dt|}{q(|t|+1)|t|^3} + O(1).$$

Но

$$\max_{n>2}\left(\frac{3er}{2(n-1)}\right)^{p_n-2} \leqslant \max_{t>2}\left[\left(\frac{3er}{2(t-1)}\right)^{t-1}\right]^{\frac{1}{t-1}(\ln q(t+1)-2)} <$$

$$< \max_{2\leqslant t<3/2er+2}\left[\left(\frac{3er}{2(t-1)}\right)^{t-1}\right]^{\frac{\ln q(t+1)}{t-1}} \leqslant e^{3/2r\frac{\ln q(3/2er+2)}{3/2er}} = q^{1/e}({}^3/_2\, er+2).$$

Таким образом, для I_2 имеем оценку

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\pi}6e^3mr^2k_1q^{1/e}({}^3/_2\, er+2)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\ln|f(t)|\right|\frac{dt}{|t|^3q(|t|+1)}, \tag{16}$$

где $k_1 = \max(p_n+1)(2/3)^{p_n}$.

Оценим теперь I_3. Вводя обозначение

$$D_0(z) = \prod_{1}^{\infty}\prod_{n-1\leqslant|a_\mu|<n} D_{p_n}(z;\, a_\mu)$$

и переписав I_3 в виде

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln|D_0(re^{i\varphi})|\sin m\varphi d\varphi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^+|D_0(re^{i\varphi})|\sin\varphi\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}d\varphi +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\ln^+|D_0^{-1}(re^{i\varphi})|\sin\varphi\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}d\varphi,$$

будем иметь

$$|I_3| \leqslant mrB(r,\, D_0) + m\cdot rB(r,\, D_0^{-1}).$$

Так как $A(r,\, D_0) = C(r,\, D_0) = 0$, то $S(r,\, D_0) = B(r,\, D_0)$.

Далее

$$B(r,\, D_0^{-1}) \leqslant S(r,\, D_0^{-1}) = S(r,\, D_0) + O(1) = B(r,\, D_0) + O(1),$$

откуда следует, что

$$|I_3| \leqslant 2mrB(r,\, D_0) + O(1).$$

Для оценки $B(r,\, D_0)$ заметим, что [1]

$$\ln^+|D_{p_n}(re^{i\varphi};\, a_\mu)| \leqslant 2p_n\sin\alpha_\mu\left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^{p_n}. \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$B(r,\, D_0) \leqslant \frac{2}{\pi r}\int\limits_0^{\pi}\sum\sum\ln^+|D_{p_n}(re^{i\varphi};\, a_\mu)|\sin\varphi d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{r}\sum_{1}^{\infty} \sum_{n-1<|a_\mu|<n} 2p_n \sin\alpha_\mu \left(\frac{r}{|a_\mu|}\right)^{p_n} = 4re^3 \sum \sum p_n (2/3)^{p_n} \times$$

$$\times \left(\frac{3er}{2|a_\mu|}\right)^{p_n-2} e^{-p_n-1} |a_\mu|^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant 4e^3 r k_1 q^{1/e} (3/2\, er + 2) \sum \sin\alpha_\mu \frac{1}{|a_\mu|^2 q(|a_\mu| + 1)}.$$

Таким образом, для I_3 получаем оценку

$$|I_3| \leqslant \text{const}\, mr^2 q^{1/e} (3/2\, er + 2). \tag{18}$$

Аналогично оценивается I_4:

$$|I_4| < \text{const}\, mr^2 q^{1/e} (3/2\, er + 2). \tag{19}$$

Из (13), (16), (18) и (19) окончательно получаем оценки для коэффициентов a_m

$$|a_m| < \text{const}\, mr^2 q (3/2\, er + 2) r^{-m}.$$

Далее

$$|w(z)| = \left|\sum a_m r^m\right| < \sum |a_m| r^m <$$

$$\leqslant \text{const} \sum m \left(\frac{4}{3} r\right)^2 q (3/2 \cdot 4/3\, er + 2)(4/3\, r)^{-m} \cdot r^m =$$

$$= \text{const}\, r^2 q (2er + 2) \sum m \left(\frac{3}{4}\right)^m = \text{const}\, r^2 q (2er + 2),$$

то есть

$$|w(z)| \leqslant \text{const}\, r^2 q (2er + 2).$$

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. Я. Левину за постановку задачи и руководство.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 I 1965

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ԿԱՐԳԻ ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄԸ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է կիսահարթությունում մերոմորֆ և կամայապես արագ աճող խարակտերիստիկա ունեցող ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացումը: Այդ ներկայացումը հանդիսանում է աստիճանային արագությամբ աճող խարակտերիստիկա ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների ներկայացման մասին Ռ. Նևանլիննայի մի արդյունքի ընդհանրացումը [1]:

Նևանլիննայի թեորեմում որպես ներկայացման կորիզ մասնակցում է Պուասոնի ձևափոխված (N) կորիզը:

Հոդվածում բերված (3) ներկայացման մեջ կորիզը որոշվում է (1) առնչություններով, որտեղ p_n թվերն ընտրվում են կիսահարթության մերոմորֆ և տրված $q(r)$ ֆունկցիային չգերազանցող խարակտերիստիկա ունեցող ֆունկցիաների ամբողջ դասի համար:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. Acta Soc. Sci. Fenn. **50**, № 12, 1925.
2. *Nevanlinna R.* Über eine Erweiterung des Poissons chen Integrals. Ann. Acad. Sci. Fennicae, ser. A **24**, № 4, 1925, 3—15.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

А. А. ШМАТКОВ

ОБ ОДНОМ ИЗ КЛАССОВ КВАЗИГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В работе рассматриваются квазиголоморфные отображения, сохраняющие аналитический характер трех плоскостей. Устанавливается связь между отображениями рассматриваемого типа и отображениями с ограниченным дефектом. Эта связь установлена в теоремах 1 и 2.

Пусть функции

$$(T)\quad w_k = f_k(z_1, z_2),\ k = 1, 2 \tag{1}$$

комплексных переменных z_1 и z_2 дифференцируемы в точке $M_0\ (z_1^0, z_2^0)$ и $J_0 = J(z_1^0, z_2^0) \neq 0$, где

$$J(z_1, z_2) = \frac{\partial(w_1, w_2, \bar{w}_1, \bar{w}_2)}{\partial(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)}. \tag{2}$$

Рассмотрим отображение

$$w_p = \sum_{q=1}^{2} a_{pq} z_q + \bar{b}_{pq} \bar{z}_q, \quad p = 1, 2, \tag{3}$$

где

$$a_{pq} = \left[\frac{\partial f_p(z_1, z_2)}{\partial z_q}\right]_{M_0}, \qquad \bar{b}_{pq} = \left[\frac{\partial f_p(z_1, z_2)}{\partial \bar{z}_q}\right]_{M_0} \quad p, q = 1, 2,$$

являющееся дифференциалом отображения (1) в точке $M_0(z_1^0, z_2^0)$.

В [1] (стр. 409) установлено, что если отображение (3) сохраняет аналитический характер плоскостей $z_2 = c_k z_1$, $k = 1, 2, 3$, то оно сохраняет аналитический характер всех плоскостей $z_2 = cz_1$, для которых точки c лежат на сфере P^1 переменного c на окружности, проходящей через точки c_k, $k = 1, 2, 3$.

Мы рассмотрим подобное отображение. Оказывается, что для него после надлежащего поворота системы координат имеют место равенства

$$\bar{b}_{11} = \mu e^{it} a_{12},\ \bar{b}_{12} = \nu e^{it} a_{11},\ \bar{b}_{21} = \mu e^{it} a_{22},\ \bar{b}_{22} = \nu e^{it} a_{21}. \tag{4}$$

Здесь μ и ν—некоторые неотрицательные числа, ε—действительное число. При этом μ и ν могут обращаться в нуль только одновременно (в последнем случае отображение (3) при выполнении равенств (4) сохраняет аналитический характер всех плоскостей, то есть является голоморфным);

$$\mu \geqslant \nu, \quad \mu\nu \neq 0, \quad j = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0.$$

Последние два соотношения следуют из того, что в рассматриваемом случае

$$J_0 = (1 - \mu\nu)^2 |j|^2. \tag{5}$$

Здесь $j = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ — якобиан голоморфного отображения

$$w_p = \sum_{q=1}^{2} a_{pq} z_q, \quad p = 1, 2, \tag{6}$$

соответствующего данному квазиголоморфному.

Произвольно взятая аналитическая плоскость после применения к ней отображения (3), удовлетворяющего условиям (4), переходит в неаналитическую плоскость. Ее дефект равен величине

$$\operatorname{def}(c, T) = \frac{2\,|A_1\bar{B}_2 - A_2\bar{B}_1|}{|\,|A_1|^2 + |A_2|^2 - |B_1|^2 - |B_2|^2|}, \tag{7}$$

где

$$A_p = c a_{p1} + a_{p2}, \quad \bar{B}_p = \bar{c}\, b_{p1} + b_{p2}, \; p = 1, 2$$

(см. [1], стр. 411).

Вычисления показывают, что $\operatorname{def}(c, T)$ для отображения (3), удовлетворяющего условиям (4), определяется по формуле

$$\operatorname{def}(c, T) = \left| \frac{2\,|j|\,(\mu c\bar{c} - \nu)}{\alpha(c\bar{c} - \nu^2) + \beta(1 - \mu^2 c\bar{c}) + (1 - \mu\nu)(\gamma c + \bar{\gamma}\bar{c})} \right|, \tag{8}$$

где

$$\alpha = |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2, \quad \beta = |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2, \quad \gamma = a_{11}\bar{a}_{12} + a_{21}\bar{a}_{22}.$$

Из формулы (8), в частности, следует, что отображение (3), удовлетворяющее условиям (4), сохраняет аналитический характер плоскостей c, для которых числа c служат аффиксами точек окружности $c\bar{c} = \frac{\nu}{\mu}$ (на сфере P^1 комплексного переменного c).

Рассмотрим величину

$$D = \frac{c\bar{c}(\alpha - \beta\mu^2) + (1 - \mu\nu)(\gamma c + \bar{\gamma}\bar{c}) - (\alpha\nu^2 - \beta)}{2\,|j|\,(\mu c\bar{c} - \nu)}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает, что

$$\operatorname{def}(c, T) = \frac{1}{D}. \tag{10}$$

Рассмотрим, далее, плоскости c, для которых величина (9) принимает фиксированное значение D. Исходя из соотношения (9), можно показать, что соответствующие точки c сферы Римана лежат на окружности

$$|c - \xi_D|^2 = \left| c + \frac{(1-\mu\nu)\bar{\gamma}}{\alpha - \beta\mu^2 - 2|j|D\mu} \right|^2 = R_D^2 =$$

$$= \frac{4|j|^2\mu\nu(D - D_1)(D - D_2)}{(\alpha - \beta\mu^2 - 2D|j|\mu)^2}, \tag{11}$$

где

$$D_1, D_2 = \frac{(1+\mu\nu)(\nu\alpha - \mu\beta) \pm |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{12}$$

Из (11) следует, что возможные значения D удовлетворяют условию

$$\text{либо } D > \max(D_1, D_2), \text{ либо } D < \min(D_1, D_2). \tag{13}$$

Пусть $\nu\alpha - \mu\beta > 0$, тогда из (12), (13) и неравенства $D \leqslant |D|$ вытекает, что

$$|D| > \frac{(1+\mu\nu)(\mu\beta - \alpha\nu) + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{14}$$

Пусть теперь $\nu\alpha - \mu\beta < 0$, тогда

$$|D| \geqslant -D > \frac{(1+\mu\nu)(\mu\beta - \nu\alpha) + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4\mu\nu|j|^2}}{4|j|\mu\nu}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) и равенства (10) вытекает, что во всех случаях имеет место неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) < \frac{4|j|\mu\nu}{(1+\mu\nu)|\mu\beta - \nu\alpha| + |1-\mu\nu| \sqrt{(\nu\alpha - \mu\beta)^2 + 4|j|^2\mu\nu}}. \tag{16}$$

Мы будем рассматривать отображения, близкие к голоморфным, то есть такие, для которых $\mu\nu < 1$ (о геометрическом смысле этого условия см. [1], стр. 410).

Для таких отображений

$$1 - \frac{\sqrt{J}}{|j|} = \mu\nu. \tag{17}$$

Определение 1. Гомеоморфное отображение

$$(T)\; w_p = f_p(z_1, z_2), \quad p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_2(k)$, если оно:

1. Сохраняет аналитический характер трех плоскостей,

2. Имеет место неравенство

$$0 < \mu\nu \leqslant k < 1. \tag{18}$$

Определение 2. Гомеоморфное отображение

$$(T) \quad w_p = f_p(z_1, z_2), \; p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_1(k)$, если оно:

1. Сохраняет аналитический характер трех плоскостей;

2. Принадлежит к совокупности отображений области D с ограниченным дефектом

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant k, \tag{19}$$

подчиненных дополнительному условию

$$0 < \mu\nu < 1. \tag{20}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Если гомеоморфное отображение*

$$(T) \quad w_p = f_p(z_1 z_2), \quad p = 1, 2,$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_2(k)$, то оно принадлежит и к классу $L_1\left(\frac{2\sqrt{k}}{1-k}\right)$.

Доказательство. Из неравенства (16) следует справедливость неравенства

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{1-\mu\nu}. \tag{21}$$

Из неравенств (18) и (21) следует нужное нам неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2\sqrt{k}}{1-k}. \tag{22}$$

Теорема. 2. *Если гомеоморфное отображение*

$$(T) \; w_p = f_p(z_1, z_2), \; p = 1, 2$$

класса C^1 области $D \subset C_z^2$ на область $D^* \subset C_w^2$ принадлежит к классу $L_1(k)$, то оно принадлежит и к классу $L_2\left[\frac{k^2}{(1+\sqrt{1+k^2})^2}\right]$.

Доказательство. Пусть $t = \frac{2|l|}{|\mu\beta - \nu\alpha|}$,

тогда неравенство (16) примет вид

$$\operatorname{def}(c, T) \leqslant \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}}. \tag{23}$$

Из неравенств (19) и (23) вытекает неравенство

$$\operatorname{def}(c, T) < \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}} < k \tag{24}$$

для любого t.

Фиксируем произведение $\mu\nu < 1$ и рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \frac{2t\mu\nu}{1+\mu\nu+|1-\mu\nu|\sqrt{1+t^2\mu\nu}}. \tag{25}$$

Исследование этой функции показывает, что значение

$$\varphi(\infty) = \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{1-\mu\nu} \tag{26}$$

будет наибольшим для всех t.

Из неравенства (24) и равенства (26) вытекает нужное нам неравенство

$$\mu\nu < \frac{k^2}{(1+\sqrt{1+k^2})^2}. \tag{27}$$

Пример. Примером отображения рассмотренного типа, не сводящегося к линейному отображению, является отображение

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}(z_1+\lambda\bar{z}_1+3\lambda\bar{z}_2)+\frac{1}{2}\left[z_1+z_2+2\lambda(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\right]^2,$$

$$w_2 = \sqrt[4]{3}(z_2+\lambda\bar{z}_1-\lambda\bar{z}_2)+\frac{1}{2}\left[z_1+z_2+2\lambda(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\right]^2, \tag{28}$$

где λ — произвольное комплексное число.

Нетрудно проверить, что функции (28) во всем пространстве C_2^* удовлетворяют условиям

$$|at-qc| = |br-dp|,\ \arg\left(\begin{vmatrix} a & q \\ c & t \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b & r \\ d & p \end{vmatrix}\right) = 2\arg\begin{vmatrix} a & p \\ c & r \end{vmatrix},$$

$$\arg\begin{vmatrix} a & p \\ c & r \end{vmatrix} = \arg\begin{vmatrix} b & q \\ d & t \end{vmatrix} + \pi \tag{29}$$

(см. [1], стр. 203).

Здесь

$$a = \frac{\partial w_1}{\partial z_1},\ b = \frac{\partial w_1}{\partial z_2},\ p = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}_1}\ q = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}_2},$$

$$c = \frac{\partial w_2}{\partial z_1},\ d = \frac{\partial w_2}{\partial z_2},\ t = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}_1},\ r = \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}_2}.$$

При выполнении этих условий дифференциал отображения (28) сохраняет аналитический характер всех плоскостей $z_2 = cz_1$, для которых числа c служат аффиксами точек окружности (на сфере P комплексного переменного c)

$$|c-1|=4. \tag{30}$$

При самом отображении (28) все плоскости вида $z_2=cz_1$, где c—параметр, удовлетворяющий условию (30), переходят в неаналитические поверхности, однако их касательные плоскости в начале координат являются аналитическими.

Так как в начале координат $J_0=(1-4|\lambda|^2)^2$, то верхняя граница значений $\operatorname{def}(c, T)$ дается формулой

$$\max_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)=\frac{4|\lambda|}{|1-4|\lambda|^2|}. \tag{31}$$

Поэтому, если

$$|\lambda|<\frac{\varepsilon}{8}<\frac{1}{2},$$

для отображения (28) в начале координат $\max\limits_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда в силу непрерывности $\max\limits_{c\in P^1} \operatorname{def}(c, T)$ отображение (28) принадлежит к классу квазиголоморфных отображений $L_2(\varepsilon)$ в некоторой окрестности начала координат.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила 15 X 1964

Ս. Ա. ԾՄԱՏԿՈՎ

ՔՎԱԶԻՀՈԼՈՄՈՐՖ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐԻՑ ՄԵԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում են այնպիսի քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումներ, որոնք պահպանում են երեք հարթությունների անալիտիկ բնույթը: Հաստատվում է առնչություն դիտարկվող տիպի արտապատկերումների և սահմանափակ դեֆեկտով արտապատկերումների միջև: Այդ առնչությունը հաստատված է 1 և 2 թեորեմներում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фукс Б. А.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. ГИТТЛ, М.—Л., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. Е. БАГДАСАРЯН, В. Ц. ГНУНИ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим устойчивость анизотропной (неортотропной) круговой цилиндрической панели радиуса R, загруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой q и сжатой продольным усилием P.

1. Пусть x, y являются ортогональными координатами, совпадающими с линиями кривизны координатной (срединной) поверхности оболочки, z—расстояние по нормали от точки $(x, y, 0)$ до точки (x, y, z).

Предполагается, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности оболочки.

Оболочку считаем настолько пологой, что геометрия ее срединной поверхности не отличается от евклидовой геометрии на плоскости.

В отношении тонкой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей [1] и считается, что прогибы сравнимы с толщиной h [2].

Имеем следующие уравнения устойчивости и неразрывности [1,2]

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x}+\frac{\partial T_{12}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial T_{12}}{\partial x}+\frac{\partial T_{22}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{1}{R}T_{22}+\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2}+$$

$$+(T_{11}-T_{11}^0)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2(T_{12}-T_{12}^0)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+(T_{22}-T_{22}^0)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2}-\frac{1}{R}\varkappa_{22}+\varkappa_{11}\varkappa_{22}-\frac{1}{4}\varkappa_{12}^2=0.$$

Здесь

$$T_{11}=c_{11}\varepsilon_{11}+c_{12}\varepsilon_{22}+c_{16}\varepsilon_{12},$$

$$T_{22}=c_{12}\varepsilon_{11}+c_{22}\varepsilon_{22}+c_{26}\varepsilon_{12},$$

$$T_{12}=c_{16}\varepsilon_{11}+c_{26}\varepsilon_{22}+c_{66}\varepsilon_{12}, \tag{1.2}$$

$$M_{11} = D_{11}\varkappa_{11} + D_{12}\varkappa_{22} + D_{16}\varkappa_{12},$$
$$M_{22} = D_{12}\varkappa_{11} + D_{22}\varkappa_{22} + D_{26}\varkappa_{12}, \tag{1.3}$$
$$M_{12} = D_{16}\varkappa_{11} + D_{26}\varkappa_{22} + D_{66}\varkappa_{12},$$

—внутренние усилия и моменты [1],

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{R} w, \tag{1.4}$$
$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa_{22} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \varkappa_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{1.5}$$

—деформации срединной поверхности оболочки, u, v, w — соответственно тангенциальные и нормальное перемещения срединной поверхности

$$T_{11}^0 = p, \quad T_{22}^0 = Rq, \quad T_{12}^0 = 0 \tag{1.6}$$

—усилия, характеризующие начальное невозмущенное (безмоментное) состояние,

$$c_{ik} = B_{ik} h, \quad D_{ik} = B_{ik}\frac{h^3}{12} \tag{1.7}$$

—жесткости растяжения и изгиба, B_{ik} — коэффициенты упругости [1,3]. В случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала и главные физические и геометрические направления не совпадают, оболочка качественно работает как произвольно анизотропная. Тогда коэффициенты B_{ik} имеют вид [1,3]

$$B_{11} = B'_{11}\cos^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + B'_{22}\sin^4\varphi,$$
$$B_{22} = B'_{11}\sin^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + B'_{22}\cos^4\varphi,$$
$$B_{12} = B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi, \tag{1.8}$$
$$B_{66} = B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$
$$B_{16} = \frac{1}{2}[B'_{22}\sin^2\varphi - B'_{11}\cos^2\varphi + (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi,$$
$$B_{26} = \frac{1}{2}\left[B'_{22}\cos^2\varphi - B'_{11}\sin^2\varphi - (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi\right]\sin 2\varphi,$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями, B'_{ik} — коэффициенты упругости при $\varphi = 0$.

Представляя усилия T_{ik} посредством функции напряжения $F = F(x, y)$ следующим образом

$$T_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad T_{12} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{1.9}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям системы (1.1). На основании (1.4), (1.5) (1.9) из (1.1) получим следующую нелинейную систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} +$$
$$+ p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + Rq\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,$$
$$\tag{1.10}$$
$$a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} +$$
$$+ \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0,$$

где

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}\Omega},$$
$$a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}\Omega}. \tag{1.11}$$
$$\Omega = \frac{1}{c_{66}^2}\left[(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2\right].$$

2. Решение системы (1.10) ищем в виде [2—5]

$$W = f\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi(x - \alpha y)}{s},$$
$$\tag{2.1}$$
$$F = \Phi\sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi(x - \alpha y)}{s},$$

где s — длина полуволны, α — тангенс угла наклона волн к оси x.

Применяя к системе (1.10) вариационный метод Бубнова—Галеркина, в силу (2.1) получим

$$K\left[1 - \frac{T_{11}^0}{T_{11}^*} - \frac{T_{22}^0}{T_{22}^*}\right]f - ef^2 + df^3 = 0. \tag{2.2}$$

$$\Phi = \frac{b^2}{\pi^2 R\gamma L_1}f - \frac{J_2 - J_3}{\gamma L_1 J_1}f^2, \tag{2.3}$$

где

$$T_{11}^* = \frac{Kb^2}{\pi^2\gamma}, \quad T_{11}^* = \frac{Kb^2}{\pi^2(1 + \gamma\alpha^2)} \tag{2.4}$$

— верхние критические значения внешних усилий при их независимом действии

$$e = \frac{3\pi^2}{Rb^2L_1}\,\frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad d = \frac{2\pi^4}{b^4L_1}\,\frac{(J_2 - J_3)^2}{J_1^2}, \quad \gamma = \frac{b^2}{s^2},$$

$$J_1 = \int_0^s\int_0^b \sin^2\frac{\pi y}{b}\sin^2\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\,dxdy,$$

$$J_2 = \int_0^s\int_0^b \sin^3\frac{\pi y}{b}\sin^3\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\,dxdy,$$

$$J_3 = \int_0^s\int_0^b \sin\frac{\pi y}{b}\cos^2\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\cos^2\frac{\pi(x-\alpha y)}{s}\,dxdy,$$

$$K = \frac{\pi^4}{b^4}L_2 + \frac{1}{R^2L_1},$$

$$L_1 = \frac{1}{\gamma^2}\,[a_{11}\gamma^2 - 2a_{16}\alpha\gamma^2 + (a_{66} - 2a_{12})(\gamma + \alpha^2\gamma^2) -$$

$$- 2a_{26}(\alpha^3\gamma^2 + 3\alpha\gamma) + a_{22}(\alpha^4\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma + 1)],$$

$$L_2 = D_{11}\gamma^2 - 4D_{16}\alpha\gamma^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})(\gamma + \alpha^2\gamma^2) - 4D_{26}(\alpha^3\gamma^2 + 3\alpha\gamma) +$$

$$+ D_{22}(\alpha^4\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma + 1)].$$

3. Из уравнения (2.2) получим

$$T = T^* - \bar{e}f + \bar{d}f^2. \tag{3.1}$$

Здесь

$$T = T_{11}^0 - \frac{T_{22}^0}{\varkappa}, \quad T^* = \frac{Kb^2}{\pi^2\gamma + \varkappa\pi^2(1 + \gamma\alpha^2)},$$

$$\bar{e} = \frac{3(J_2 - J_3)}{R[\gamma + \varkappa(1 + \gamma\alpha^2)]L_1J_1}, \quad \bar{d} = \frac{2\pi^2(J_2 - J_3)^2}{b^2[\gamma + \varkappa(1 + \gamma\alpha^2)]\,L_1J_1^2}, \tag{3.2}$$

где T — параметр внешнего усилия, $\varkappa$ — некоторый коэффициент, T^* — верхнее критическое усилие.

Зависимости $f = f(T)$ приведены на фиг. 1, 2 соответственно для пластин и оболочек. Неустойчивые решения обозначены пунктирными линиями,

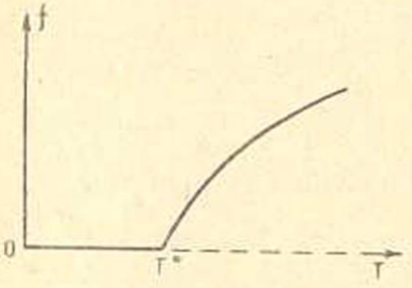
$$T_* = T^* - \frac{\bar{e}^2}{4\bar{d}} \tag{3.3}$$

— нижняя критическая нагрузка.

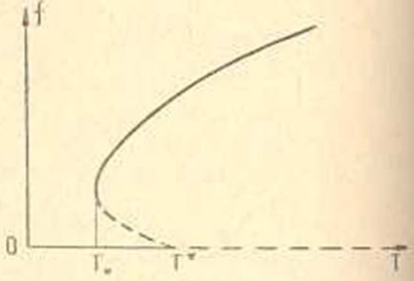
Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [2].

Больший интерес представляют те значения параметров α, γ, вблизи которых достигается минимальное значение верхнего или нижнего критического усилия. Однако, в общем случае нахождение минимальных критических параметров связано с почти непреодолимыми трудностями. В каждом конкретном случае минимальные параметры можно найти численными методами.

Отметим, что в случае ортотропной оболочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями нижнее и



Фиг. 1.



Фиг. 2.

верхнее критические усилия, а также послекритические прогибы существенно зависят от ориентации главных направлений упругости и являются периодическими функциями угла φ с периодом π. Таким образом, мы имеем реальную возможность регулировать критические параметры, а также послекритические прогибы в зависимости от условий работы конструкций.

В качестве примера рассмотрим ортотропную пластинку, когда главные геометрические и физические направления не совпадают.

Рассматриваются четыре случая комбинаций упругих постоянных

Случаи	E_1	E_2	G_{12}
I	$2E$	E	$0.5E$
II	$10E$	E	$0.5E$
III	E	$2E$	$0.5E$
IV	E	$10E$	$0.5E$

При этих данных значения α, γ и соответствующие им минимальные значения критического усилия $\overline{T}{}^{*}_{11} = \dfrac{b^2}{T \cdot Eh^3} T^{*}_{11}$ приведены ниже (табл. 1).

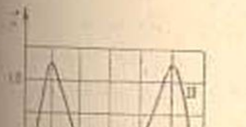
На фиг. 3—5 приведены графики зависимостей $\overline{T}{}^{*}_{11}(\varphi)$, $\gamma(\varphi)$, $\alpha(\varphi)$ для I и II случаев.

На основе приведенных выкладок можно сделать следующие выводы:

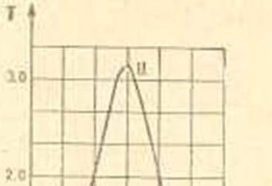
Таблица 1

Случаи	φ	0°,180°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°
I	$\overline{T}^*_{11}$	0,4024	0,4618	0,4692	0,4436	0,4024	0,4436	0,4692	0,4618
	α	0	−0,1339	−0,1847	−0,1720	0	0,1720	0,1847	0,1339
	γ	0,7072	0,8578	1,029	1,025	1,414	1,205	1,029	0,8578
II	$\overline{T}^*_{11}$	0,6937	1,054	0,9416	0,8006	0,6937	0,8006	0,9416	1,054
	α	0	−0,6140	−0,6017	−0,4264	0	0,4264	0,6017	0,6140
	γ	0,3162	0,7504	1,304	2,081	3,162	2,081	1,304	0,7504
III	$\overline{T}^*_{11}$	0,4024	0,4436	0,4692	0,4618	0,4024	0,4618	0,4692	0,4436
	α	0	0,1720	0,1847	0,1339	0	−0,1339	−0,1847	−0,1720
	γ	1,414	1,205	1,029	0,8578	0,7072	0,8578	1,029	1,205
IV	$\overline{T}^*_{11}$	0,6937	0,8006	0,9416	1,054	0,6937	1,054	0,9416	0,8006
	α	0	0,4264	0,6017	0,6140	0	−0,6140	−0,6017	−0,4264
	γ	3,162	2,081	1,304	0,7504	0,3162	0,7504	0,304	2,081

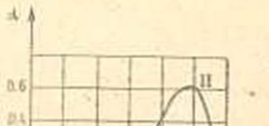
а) $\min\limits_{(\varphi)} \left[\min\limits_{(\alpha,\gamma)} T^*_{11}\right]$ достигаются при $\varphi = \dfrac{k\pi}{2} (k=0, 1, 2, \cdots)$, то есть когда главные геометрические и физические направления совпадают;



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

б) $\max\limits_{(\varphi)} \left[\min\limits_{(\alpha,\gamma)} T^*_{11}\right]$ при $B_{11} > B_{22}$ достигаются вблизи углов $k\pi \leqslant \varphi_1 \leqslant$

$< k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi \leqslant \varphi_2 \leqslant (k+1)\pi$, а при $B_{11} < B_{22}$ — вблизи

$k\pi + \dfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi_1 \leqslant k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ и $k\pi + \dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi_2 \leqslant k\pi + \dfrac{3\pi}{4} (k=0, 1, 2, \cdots)$;

в) если $B_{11} > B_{22}$, то при увеличении B_{11} угол φ_1 приближается к левому пределу, а φ_2—к правому. Если же $B_{11} < B_{22}$, то с уменьшением B_{11} угол φ_1 приближается к правому пределу, а φ_2—к левому;

г) характеристики типа $\bar{d}f^2(\varphi, T)$ представляют собой цилиндрические поверхности, образующие которых наклонены под углом 45° относительно плоскости (T, φ);

д) величина $\left\{\max\limits_{(\varphi)} \left|\min\limits_{(\alpha,\gamma)} T^*_{11}\right| - \min\limits_{(\varphi)} \left|\min\limits_{(\alpha,\gamma)} T^*_{11}\right|\right\}$ увеличивается с увеличением отношения B_{11}/B_{22}.

Таким образом, появляется реальная возможность существенного увеличения несущей способности ортотропной конструкции путем оптимального выбора расположения главных направлений упругости материала.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 X 196

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Վ. Ց. ԳՆՈՒՆԻ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է անիզոտրոպ գլանային թաղանթի ոչ-գծային կայունության խնդիրը։ Որպես մասնավոր դեպք դիտարկվում է օրթոտրոպ թաղանթ, որի գլխավոր երկրաչափական և ֆիզիկական առանցքները կազմում են φ անկյուն։

Հաշված են կրիտիկական պարամետրերը և հետկրիտիկական վիճակի ճկվածքները։ Ցույց է տրված, որ φ անկյան համապատասխան ընտրության դեպքում, կարելի է էապես մեծացնել կրիտիկական պարամետրերի արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М. — Л., 1947.
4. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М. — Л., 1946.
5. *Балабух Л. И.* Устойчивость фанерных пластинок. Техника воздушного ф
№ 9, 1937.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

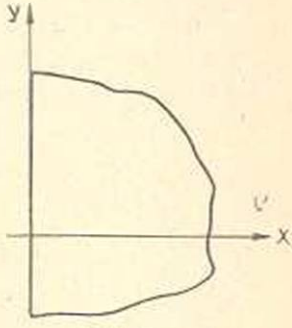
А. А. ХАЧАТРЯН

ОБ ИЗГИБЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ НАГРУЗКОЙ, РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КРАЮ

Рассмотрим полубесконечную пластинку толщины h ($x \geqslant 0$, фиг. 1).

Пусть пластинка изгибается под действием изгибающего и крутящего моментов и перерезывающей силы, приложенных по краю $x = 0$.

$$M_1 = M_0 \sin \frac{\pi y}{\lambda},$$
$$H = H_0 \cos \frac{\pi y}{\lambda}, \tag{1}$$
$$N_1 = P_0 \sin \frac{\pi y}{\lambda},$$



Фиг. 1.

где M_0, H_0 и P_0 — постоянные, λ — полупериод изменения приложенных по краю пластинки нагрузок, причем будем принимать, что λ достаточно больше толщины пластинки h.

Предположим, что пластинка изготовлена из трансверсально изотропного материала, плоскость изотропии которого параллельна срединной плоскости пластинки.

Будем исходить из уравнений изгиба пластинки, учитывающих влияние поперечных сдвигов [1].

В данном случае для трансверсально изотропного материала при отсутствии внешней поверхностной нагрузки систему дифференциальных уравнений задачи можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2 (1-\mu)}{20 G'} \Delta \varphi + \frac{1-\mu^2}{E} \varphi = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2 (1-\mu)}{20 G'} \Delta \psi + \frac{1-\mu^2}{E} \psi = 0.$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются тогда через искомые функции w, φ и ψ следующим образом:

$$M_1 = -D\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{h^2(1-\mu)}{10G'}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right],$$

$$M_2 = -D\left[\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{h^2(1-\mu)}{10G'}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right], \tag{3}$$

$$H = -D\left[(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right],$$

$$N_1 = \frac{h^3}{12}\varphi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12}\psi.$$

Здесь

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{4}$$

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, G' — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к срединной плоскости пластинки.

Решение системы (2) ищем в виде

$$w(x, y) = W(x)\sin\frac{\pi y}{\lambda},$$

$$\varphi(x, y) = \Phi(x)\sin\frac{\pi y}{\lambda}, \tag{5}$$

$$\psi(x, y) = \Psi(x)\cos\frac{\pi y}{\lambda}.$$

Подставляя (5) в (2), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $W(x)$, $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$:

$$\Phi' - \frac{\pi}{\lambda}\Psi = 0,$$

$$W''' - \frac{\pi^2}{\lambda^2}W' - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'}\Phi'' + \frac{1-\mu^2}{E}\left[1 + \frac{\pi^2 E h^2}{20(1+\mu)G'\lambda^2}\right]\Phi = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\pi}{\lambda}W'' - \frac{\pi^3}{\lambda^3}W - \frac{h^2(1-\mu)}{20G'}\Psi'' + \frac{1-\mu^2}{E}\left[1 + \frac{\pi^2 E h^2}{20(1+\mu)G'\lambda^2}\right]\Psi = 0.$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$W(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + (C_3 + C_4 x)e^{\frac{\pi x}{\lambda}},$$

$$\Phi(x) = -\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2}\left(C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + C_4 e^{\frac{\pi x}{\lambda}}\right) + C_5 e^{-\frac{\pi\omega}{\lambda}x} + C_6 e^{\frac{\pi\omega}{\lambda}x}, \tag{7}$$

$$\Psi(x) = \frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2}\left(C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} - C_4 e^{\frac{\pi x}{\lambda}}\right) - \omega\left(C_5 e^{-\frac{\pi\omega}{\lambda}x} - C_6 e^{\frac{\pi\omega}{\lambda}x}\right),$$

где

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{20(1+\mu)G'\lambda^2}{\pi^2 E h^2}}. \tag{8}$$

Здесь $C_1, C_2, \cdots, C_6$ — постоянные интегрирования, которые должны определяться из граничных условий задачи.

Как известно, все расчетные величины выражаются через w, φ и ψ, и они, а следовательно и w, φ, ψ, по мере удаления от края $x=0$ должны стремиться к нулю. Поэтому следует положить

$$C_3 = C_4 = C_6 = 0. \tag{9}$$

В силу (9), (7) и (5) окончательно будем иметь

$$w(x, y) = (C_1 + C_2 x)e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin\frac{\pi y}{\lambda},$$

$$\varphi(x, y) = \left[-\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} + C_5 e^{-\frac{\pi\omega}{\lambda}x}\right]\sin\frac{\pi y}{\lambda}, \tag{10}$$

$$\psi(x, y) = \left[\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2} C_2 e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} - \omega C_5 e^{-\frac{\pi\omega}{\lambda}x}\right]\cos\frac{\pi y}{\lambda}.$$

Подставляя (10) в (3), получим значения моментов и перерезывающих сил, выраженные через неизвестные пока постоянные C_1, C_2 и C_5. Эти постоянные определяются из условий (1), которые в силу (10) и (3) принимают вид

$$\frac{\pi}{\lambda}(1-\mu)C_1 - \left[2 + \frac{\pi^2 E h^2}{5(1+\mu)G'\lambda^2}\right]C_2 + \frac{h^2(1-\mu)\omega}{10G'}C_5 = -\frac{M_0\lambda}{\pi D},$$

$$\frac{\pi}{\lambda}C_1 - \left[1 + \frac{\pi^2 E h^2}{5(1-\mu^2)G'\lambda^2}\right]C_2 + \left[\frac{h^2}{10G'} + \frac{(1+\mu)\lambda^2}{\pi^2 E}\right]C_5 = \frac{H_0\lambda}{\pi D(1-\mu)}, \tag{11}$$

$$-\frac{2\pi^2 E}{(1-\mu^2)\lambda^2}C_2 + C_5 = \frac{12}{h^3}P_0.$$

Определитель этой системы отличен от нуля. Поэтому отсюда можно получить вполне определенные значения для постоянных C_1, C_2 и C_5, тем самым могут быть определены все необходимые расчетные величины задачи.

Для более детального изучения влияния поперечных сдвигов на деформированное состояние пластинки, рассмотрим случай, когда по краю $x=0$ действует только изгибающий момент, то есть когда

$$P_0 = H_0 = 0. \tag{12}$$

В силу (12) из системы (11) получим

$$C_1 = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{M_0\lambda^2}{\pi^2 D}\frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega-(1-\mu)},$$

$$C_2 = \frac{M_0\lambda}{\pi D}\frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega-(1-\mu)}, \tag{13}$$

$$C_5 = \frac{24\pi M_0}{h^3\lambda}\frac{1+\omega}{(3+\mu)\omega-(1-\mu)}.$$

Тогда для прогиба $w(x, y)$ будем иметь

$$w(x, y) = w^\circ(x, y)\left[1-\frac{4}{3+\mu}\,\frac{t}{t+\sqrt{1+t^2}}\right]^{-1}, \tag{14}$$

где $w^\circ(x, y)$ представляет собой прогиб пластинки при решении рассмотренной задачи по классической теории пластинок

$$w^\circ(x, y) = -\frac{M_0\lambda^2}{\pi^3(3+\mu)D}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\pi}{\lambda}x\right)e^{-\frac{\pi x}{\lambda}}\sin\frac{\pi y}{\lambda},$$

t — некоторая „приведенная толщина“, определяемая формулой

$$t = \frac{\pi h}{2\lambda}\sqrt{\frac{E}{5(1+\mu)G'}}. \tag{15}$$

Легко заметить, что $t = 0$ соответствует случаю классической теории пластинок.

Отметим, что при любом положительном значении t имеет место следующее неравенство

$$0 \leqslant \frac{t}{t+\sqrt{1+t^2}} < \frac{1}{2}. \tag{16}$$

На основании этого из (16) мы приходим к следующему неравенству для отношения $w(x, y)/w^\circ(x, y)$:

$$1 \leqslant \frac{w(x, y)}{w^\circ(x, y)} < \frac{3+\mu}{1+\mu}. \tag{17}$$

Отсюда видно, что отношение w/w° есть ограниченная функция аргумента t. Для каждого конкретного значения t можно определить это отношение и тем самым выяснить количественную сторону влияния поперечных сдвигов.

Рассматривая формулу (16), замечаем, что при

$$x = x_0 = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{\lambda}{\pi} \tag{18}$$

w и w° обращаются в нуль. Это значение x_0 характеризует границу изменения знака прогиба. Как видно из (18), в рассматриваемой здесь частной задаче действия только изгибающего момента поперечные сдвиги не влияют на значение x_0.

Разложим теперь в ряд Маклорена правую часть выражения (14). Предполагая, что t настолько мало, что в этом разложении по сравнению с единицей можно пренебречь членами, содержащими t^3 (и степени выше трех), будем иметь

$$w = w^\circ \left[1 + \frac{4}{3+\mu} t + \frac{4(1-\mu)}{(3+\mu)^2} t^2 \right]. \tag{19}$$

Интересно отметить, что в выражении (19) содержится t в первой степени. А как известно [1], в решенных до сих пор задачах об изгибе пластинок (с учетом поперечных сдвигов) поправка к классической теории выражалась членом, содержащим t^2.

Рассмотрим еще один частный случай, когда по краю $x=0$ действует только перерезывающая сила, то есть когда

$$M_0 = H_0 = 0. \tag{20}$$

В силу (20), из системы (11) получим

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2P_0\lambda^3}{\pi^3(1-\mu)D} \frac{(2t^2+1)^2 - \omega t^2(4t^2+1-\mu)}{(3+\mu) - 4t^2(\omega-1)}, \\ C_2 &= -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2 D} \frac{1-2t^2(\omega-1)}{(3+\mu)-4t^2(\omega-1)}, \\ C_3 &= \frac{12P_0}{h^3} \frac{1+\mu}{(3+\mu)-4t^2(\omega-1)}. \end{aligned} \tag{21}$$

На основании этого из (10) для прогиба $w(x, y)$ будем иметь

$$w = -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2 D} \left\{ \frac{2\lambda}{\pi(1-\mu)} \left[(2t^2+1)^2 - t(4t^2+1-\mu)\sqrt{t^2+1}\right] + \right.$$

$$\left. + (\sqrt{t^2+1} - t)^2 x \right\} \frac{e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda}}{(3+\mu) - 4t(\sqrt{t^2+1}-t)}. \tag{22}$$

Полагая здесь $t=0$, получим соответствующее выражение для прогиба w°, вычисленного по классической теории пластинок

$$w^\circ = -\frac{P_0\lambda^2}{\pi^2(3+\mu)D} \left[\frac{2\lambda}{\pi(1-\mu)} + x \right] e^{-\frac{\pi x}{\lambda}} \sin \frac{\pi y}{\lambda}. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что при любом действительном значении t

$$(2t^2+1)^2 - t(4t^2+1-\mu)\sqrt{t^2+1} > 0.$$

Следовательно, прогиб, определяемый формулой (22), как и соответствующий прогиб, найденный по классической теории (23), в отличие от предыдущей задачи, не меняет своего знака вдоль оси x.

Здесь существенное отличие от предыдущей задачи заключается в том, что выражение (22) уже не является ограниченной функцией аргумента t. Поэтому естественно считать, что полученные здесь формулы дадут хорошие результаты при ограниченных значениях t. В связи с этим отметим, что для реально существующих конструкций, как правило, $t<1$.

Из полученных выше результатов нетрудно заметить, что по прямым линиям $y=\pm m\lambda$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ обращаются в нуль прогиб w, изгибающий момент M_2 и функция φ. А как известно [1], точно такие граничные условия на краю $y=\text{const}$ налагаются при шарнирном опирании края. Отсюда следует, что если рассмотреть бесконечную полосу-пластинку, ограниченную прямыми, скажем, $x=0$, $y=0$ и $y=b=n\lambda$ (n — натуральное число), нагруженную по краю $x=0$ силами (1) и шарнирно опертую по длинным сторонам, то решение этой задачи получим из рассмотренной выше задачи при соответствующей замене $\lambda=b/n$ в полученных выше формулах.

Рассмотрим теперь изгиб бесконечной полосы-пластинки шириной b, находящейся под действием равномерно распределенных по краю $x=0$ изгибающего момента и перерезывающей силы интенсивностями M и P. Пусть пластинка шарнирно оперта по сторонам $y=0$ и $y=b$. Граничные условия на краю $x=0$ будут

$$\begin{aligned} &M_1=M=\frac{4M}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{b},\\ &H=0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (24)\\ &N_1=P=\frac{4P}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Решение системы (2) ищем в виде

$$\begin{aligned} &w(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}W_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b},\\ &\varphi(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad\qquad (25)\\ &\psi(x, y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\cos\frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

удовлетворяющем условиям шарнирного опирания по краям $y=0$ и $y=b$.

Подставляя (25) в (2), для каждого индекса n получим систему уравнений относительно $W_n(x)$, $\Phi_n(x)$ и $\Psi_n(x)$, аналогичную системе (6). Решая полученные системы и учитывая, что пластинка бесконечно длинная по направлению x, а также пользуясь (25), окончательно будем иметь

$$w(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_{n1}+C_{n2}x)\,e^{-\frac{n\pi}{b}x}\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$\varphi(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2\pi^2En^2}{(1-\mu^2)\,b^2}C_{n2}e^{-\frac{n\pi}{b}x}+C_{n5}e^{-\frac{n\pi\omega_n}{b}x}\right]\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{26}$$

$$\psi(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi^2En^2}{(1-\mu^2)\,b^2}C_{n2}e^{-\frac{n\pi}{b}x}-\omega_nC_{n5}e^{-\frac{n\pi\omega_n}{b}x}\right]\cos\frac{n\pi}{b}y,$$

где

$$\omega_n=\sqrt{1+\frac{20\,(1+\mu)\,G'b^2}{\pi^2Eh\,n^2}}\,. \tag{27}$$

Постоянные C_{n1}, C_{n2} и C_{n5} определяются из граничных условий (24). Нетрудно заметить, что эти постоянные при четных значениях n обращаются в нуль. А при нечетных значениях n для определения этих постоянных получаются следующие уравнения:

$$\frac{n\pi}{b}(1-\mu)\,C_{n1}-2\,(1+2n^2t_0^2)\,C_{n2}+\frac{h^2\,(1-\mu)\,\omega_n}{10\,G'}C_{n5}=-\frac{4Mb}{\pi^2n^2D},$$

$$\frac{n\pi}{b}(1-\mu)\,C_{n1}-(1-\mu+4n^2t_0^2)\,C_{n2}+\frac{(1-\mu^2)\,b^2}{\pi^2n^2E}(1+2n^2t_0^2)\,C_{n5}=0, \tag{28}$$

$$C_{n2}-\frac{(1-\mu^2)\,b^2}{2\pi^2n^2E}C_{n5}=-\frac{24\,(1-\mu^2)\,b^2P}{\pi^3n^3h^3E}.$$

где

$$t_0=\frac{1}{n\sqrt{\omega_n^2-1}}=\frac{\pi h}{2b}\sqrt{\frac{E}{5\,(1+\mu)G'}}. \tag{29}$$

Рассмотрим действие только изгибающего момента M. Для этого, принимая $P=0$ и решая систему (28), получим

$$C_{n1}=-\frac{4\,(1+\mu)\,Mb^2}{\pi^3\,(1-\mu)\,n^3D}\left[3+\mu-\frac{4nt_0}{nt_0+\sqrt{1+n^2t_0^2}}\right]^{-1},$$

$$C_{n2}=-\frac{4Mb}{\pi^2n^2D}\left[3+\mu-\frac{4nt_0}{nt_0+\sqrt{1+n^2t_0^2}}\right]^{-1}, \tag{30}$$

$$C_{n5}=\frac{96\,M}{h^3b}\left[3+\mu-\frac{4nt_0}{nt_0+\sqrt{1+n^2t_0^2}}\right]^{-1}.$$

Тогда для прогиба $w(x,\ y)$ будем иметь

$$w(x,\ y)=-\frac{4Mb^2}{\pi^3\,(3+\mu)D}\times$$

$$\times \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left[\frac{1+\mu}{(1-\mu)\,n^3} - \frac{\pi x}{bn^2} \right] \frac{e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin \frac{n\pi}{b} y}{1 - \frac{4}{3+\mu} \frac{nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}}}. \qquad (31)$$

Полагая здесь $t=0$, получим соответствующее выражение для прогиба $w^\circ(x, y)$, вычисленное по классической теории пластинок

$$w^\circ(x, y) = -\frac{4Mb^2}{\pi^3(3+\mu)D} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \left[\frac{1+\mu}{(1-\mu)\,n^3} - \frac{\pi x}{bn^2} \right] e^{-\frac{n\pi}{b}x} \sin \frac{n\pi}{b} y. \qquad (32)$$

Из физической сущности задачи очевидно, что с увеличением t_0 прогиб $w(x, y)$ монотонно будет возрастать. Учитывая это и, кроме того, принимая во внимание неравенство (16), можно установить, что в этом случае также имеет место неравенство (17).

Приведем выражение для величины максимального прогиба, имеющего место при $x=0$ и $y=b/2$

$$w_{\max} =$$

$$= \frac{4(1+\mu)Mb^2}{\pi^3(1-\mu)(3+\mu)D} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left| 1 - \frac{4}{3+\mu} \frac{nt_0}{nt_0 + \sqrt{1+n^2t_0^2}} \right|^{-1}. \qquad (33)$$

Для каждого конкретного значения t_0 (29) и μ можно с любой точностью вычислить сумму ряда, входящего в выражение (33).

Величина же максимального прогиба, соответствующая результатам классической теории ($t_0=0$), будет

$$w^\circ_{\max} = \frac{(1+\mu)Mb^2}{8(1-\mu)(3+\mu)D},$$

то есть в этом случае полученный ряд суммируется.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 19

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ ԵԶՐՈՒՄ ԿԻՐԱՌՎԱԾ ՈՒԺԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ամփոփում

*Հոդվածում դիտարկված է տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաս-
ված կիսաանվերջ սալի ծռման խնդիրը, երբ սալի եզրում կիրառված ար-
տաքին ուժերը տրված են (1) օրենքով: Խնդիրը լուծված է Ս. Ա. Համբ*

ձումյանի առաջադրած տեսության հիման վրա [1], որտեղ հաշվի է առնվում լայնական սահքերի ազդեցությունը։ Դիտարկված են որոշ մասնավոր դեպքեր, որտեղ ստացված են բանաձևեր սալի ճկվածքների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

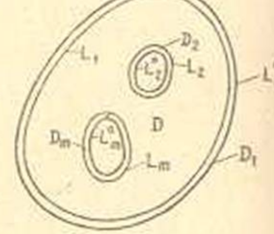
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. ЧОБАНЯН

КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ТОНКИМ УСИЛИВАЮЩИМ ПОКРЫТИЕМ

При помощи метода малого параметра [1] рассматривается задача о кручении призматического стержня с тонким усиливающим покрытием. Усиливающим слоем покрыта как внешняя боковая поверхность стержня, так и внутренние поверхности, соответствующие полостям стержня.

Внешний контур области поперечного сечения D, соответствующий основному материалу стержня, обозначим через L_1, а внутренние контуры — через L_i $(i = 2, 3, \cdots, m)$. Эти контуры являются линиями раздела между областями, соответствующими основному материалу и материалам покрытия. Контуры областей D_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$, соответствующих покрытиям, обозначим через L_i^0 $(i = 1, 2, \cdots, m)$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

В работах [2, 3] задача о кручении призматического стержня с тонким усиливающим покрытием исследована в предположении, что функции напряжений при кручении $F_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ в областях D_i по толщине покрытия меняются линейно. Это позволяет влияние тонкого покрытия выразить контурными условиями для функции напряжений при кручении $F(x, y)$ в области D, избегая определения функций F_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ в областях D_i.

В настоящей статье решение рассматриваемой задачи приводится к отысканию в D функции напряжений при кручении и последовательности гармонических функций, контурные условия для которых определяются из рекуррентных соотношений.

В качестве приложения рассмотрены стержни прямоугольного сечения и сечения в виде равностороннего треугольника.

§ 1. Будем исходить из точной постановки задачи определения функции напряжений $F(x, y)$ при кручении составного призматического стержня [4]. Функция F должна удовлетворять: уравнению Пуассона в каждой из областей D_i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ и D

$$\Delta F_i = \frac{\partial^2 F_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial y^2} = -2G_i \quad \text{в} \quad D_i \; (i = 1, 2, \cdots, m), \tag{1.1}$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2G \text{ в } D, \tag{1.2}$$

контурным условиям

$$F_i = c_i \quad \text{на } L_i^0 \; (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{1.3}$$

и условиям на линиях раздела

$$F = F_i, \quad \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial n} = \frac{1}{G_i}\frac{\partial F_i}{\partial n} \quad \text{на} \quad L_i \; (i = 1, 2, \cdots, m). \tag{1.4}$$

В (1.1)–(1.4) F и $F_i \; (i = 1, 2, \cdots, m)$ — функции напряжений в областях D и D_i; G и G_i — модули сдвига соответствующих материалов, а n — направление внешней нормали к L_i.

Постоянные $c_i \; (i = 1, 2, \cdots, m)$ определяются при помощи обобщенной теоремы Бредта [4].

Толщину h_i покрытия, соответствующего области D_i, будем принимать постоянной.

Введем местную систему координат s, n для областей D_i; s—длина дуги контура L_i, отсчитываемая от произвольно выбранной на ней точки, а n — расстояние точки до L_i по направлению нормали к L_i.

Уравнения линии L_i представим в параметрической форме

$$x = x_i(s), \quad y = y_i(s). \tag{1.5}$$

Тогда декартовые координаты точки области D_i будут определяться через s и n соотношениями

$$x = x_i - n\frac{\partial y_i}{\partial s}, \qquad y = y_i + n\frac{\partial x_i}{\partial s}. \tag{1.6}$$

Для элемента дуги кривой, лежащей в области D_i, в s, n-координатах имеем

$$dl^2 = \frac{1}{u_i^2} ds^2 + dn^2. \tag{1.7}$$

Здесь

$$\frac{1}{u_i} = 1 + \frac{n}{\rho_i}, \tag{1.8}$$

где ρ_i — радиус кривизны линии раздела L_i.

Введем безразмерные координаты ε

$$n_i = h_i \varepsilon. \tag{1.9}$$

Уравнения (1.1) в s, n-координатах будут иметь вид

$$h_i^2 \frac{\partial^2 F_i}{\partial s^2} + \frac{h_i^2}{u_i}\frac{\partial u_i}{\partial s}\frac{\partial F_i}{\partial s} + \frac{1}{u_i^2}\frac{\partial^2 F_i}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{u_i}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{u_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial \varepsilon} = -\frac{2G_i}{u_i^2} h_i^2 \tag{1.10}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

Согласно (1.3), (1.4) и (1.6) функции F_i должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$F_i(s,\ h_i) = c_i\ ,\ F_i(s,\ 0) = F[x_i(s),\ y_i(s)], \tag{1.11}$$

$$\frac{1}{G_i}\frac{\partial F_i}{\partial n}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial n}\bigg|_{\substack{x=x_i\\ y=y_i}}. \tag{1.12}$$

Функции F_i ищем в виде ряда по степеням малого параметра h_i

$$F_i(s,\ \varepsilon h_i) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(s,\ \varepsilon)\, h_i^k. \tag{1.13}$$

Толщины покрытий h_i $(i = 2,\ 3, \cdots,\ m)$ выразим через h_1

$$h_i = \alpha_i\, h_1 = \frac{1}{\beta_i}\, h_1. \tag{1.14}$$

Тогда функцию $F(x,\ y)$ можно будет представить в виде ряда по степеням h_1

$$F(x,\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x,\ y)\, h_1^k. \tag{1.15}$$

Принимая, что постоянные c_i не зависят от h_i, из (1.8)—(1.15) получаем следующие граничные условия:

$$f_0^i(s,\ 1) = c_i,\ f_k^i(s,\ 1) = 0 \quad (k = 1,\ 2, \cdots,\ \infty), \tag{1.16}$$

$$f_k^i(s,\ 0) = \beta_i^k \varphi_k^i \ (k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ \infty), \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial f_0^i}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{\partial f_k^i}{\partial \varepsilon} = \beta^{k-1}\frac{G_i}{G}\frac{\partial \varphi_{k-1}^i}{\partial n} \quad (k = 1,\ 2, \cdots,\ \infty), \tag{1.18}$$
$$(i = 1,\ 2, \cdots,\ m).$$

Здесь и в дальнейшем для краткости через φ_k^i и $\dfrac{\partial \varphi_k^i}{\partial n}$ обозначаем контурные значения функций $\varphi_k(x,\ y)$ и их нормальных производных на соответствующих контурах L_i.

Подставляя (1.15) в (1.2), находим

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_0(x,\ y) &= -2G, \\ \Delta\varphi_k(x,\ y) &= 0. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Внеся (1.13) в (1.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h_1 в левой и правой частях полученного соотношения, будем иметь следующую систему уравнений для определения функций $f_k^i(s,\ \varepsilon)$ $(i = 1,\ 2, \cdots,\ m;\ \ k = 0,\ 1,\ 2, \cdots,\ \infty)$:

$$\frac{\partial^2 f_0^i}{\partial \varepsilon^2} = 0, \quad \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_0^i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 f_1^i}{\partial \varepsilon^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f_0^i}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f_2^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_1^i}{\partial \varepsilon}-\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial f_0^i}{\partial \varepsilon}=-2G_i\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_1^i}{\partial s^2}-\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial \rho_i}{\partial s}\frac{\partial f_0^i}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_3^i}{\partial \varepsilon^2}+2\frac{\varepsilon}{\rho_i}\frac{\partial^2 f_2^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial^2 f_1^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_2^i}{\partial \varepsilon}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial f_1^i}{\partial \varepsilon}=-4\frac{\varepsilon}{\rho_i}G_i\,, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^2 f_2^i}{\partial s^2}-\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial \rho_i}{\partial s}\frac{\partial f_1^i}{\partial s}-\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^3}\frac{\partial \rho_i}{\partial s}\frac{\partial f_0^i}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_4^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{2\varepsilon}{\rho_i}\frac{\partial^2 f_3^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial^2 f_2^i}{\partial \varepsilon^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_3^i}{\partial \varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial f_2^i}{\partial \varepsilon}=-2\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}G_i\,,$$

$$\frac{\partial^2 f_{k-2}^i}{\partial s^2}-\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial \rho_i}{\partial s}\frac{\partial f_{k-3}}{\partial s}-\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial f_{k-1}^i}{\partial s}+\frac{\partial^2 f_k^i}{\partial \varepsilon^2}+2\frac{\varepsilon}{\rho_i}\frac{\partial^2 f_{k-1}^i}{\partial \varepsilon^2}+\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial^2 f_{k-2}^i}{\partial \varepsilon^2}+$$

$$+\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_k^i}{\partial \varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{\rho_i^2}\frac{\partial f_{k-1}^i}{\partial \varepsilon}=0\quad (k=5,\ 6,\dots,\ \infty)$$
$$(i=1,\ 2,\dots,\ m).$$

Решение бесконечной системы уравнений (1.20) относительно вторых производных функций $f_k^i(s,\ \varepsilon)$ по ε имеет вид

$$\frac{\partial^2 f_0^i}{\partial \varepsilon^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f_1^i}{\partial \varepsilon^2}=-\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_0^i}{\partial \varepsilon},\quad \frac{\partial^2 f_2^i}{\partial \varepsilon^2}=-\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial f_1^i}{\partial \varepsilon}+\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial f_0^i}{\partial \varepsilon}-\frac{\partial^2 f_0^i}{\partial s^2},$$

$$\frac{\partial f_k^i}{\partial \varepsilon^2}=\sum_{p=1}^{k}(-1)^p\frac{\varepsilon^{p-1}}{\rho_i^p}\frac{\partial f_{k-p}^i}{\partial \varepsilon}+\sum_{p=1}^{k-1}(-1)^p p\left(\frac{\varepsilon}{\rho_i}\right)^{p-1}\frac{\partial^2 f_{k-p-1}^i}{\partial s^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{\rho_i^2}\frac{\partial \rho_i}{\partial s}\sum_{p=1}^{k-2}(-1)^{p-1}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_i}\right)^{p-1}\frac{\partial f_{k-p-2}}{\partial s}\quad (k=3,\ 4,\dots,\ \infty) \tag{1.21}$$
$$(i=1,\ 2,\dots,\ m).$$

Интегрируя дифференциальные уравнения системы (1.21) и используя граничные условия (1.16), (1.17), при помощи контурных значений $\varphi_k(x,\ y)$ последовательно определяем функции $f_k^i(x,\ y)$

$$f_0^i=(1-\varepsilon)\varphi_0^i+c_i\varepsilon,\quad f_1^i=\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{2\rho_i}(\varphi_0^i-c_i)+\beta_i(1-\varepsilon)\varphi_1^i,$$

$$f_2^i=\frac{\varepsilon}{6}(\varepsilon^2-3\varepsilon+2)\frac{\partial^2\varphi_0^i}{\partial s^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{2}\left[\frac{1}{2\rho_i^2}(\varphi_0^i-c_0^i)-2G_i+\frac{\beta_i}{\rho_i}\varphi_1^i\right]+(1-\varepsilon)\beta_i^2\varphi_2^i,$$

$$f_3^i=\frac{\varepsilon}{12\rho_i}(3\varepsilon^3-2\varepsilon^2+2\varepsilon-3)(\varphi_0^i-c_i)+\frac{\varepsilon}{12\rho_i}(2\varepsilon^2-\varepsilon^3-1)\frac{\partial\rho_i}{\partial s}\frac{\partial\varphi_0^i}{\partial s}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{12\rho_i}(7\varepsilon^2-3\varepsilon^3-2\varepsilon-2)\frac{\partial^2\varphi_0^i}{\partial s^2}-\frac{\varepsilon\beta_i}{12\rho_i^2}(4\varepsilon^2-3\varepsilon-1)\varphi_1^i+$$

$$+\frac{\varepsilon\beta_i}{6}(3\varepsilon-\varepsilon^2-2)\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial s^2}+\beta_i^2\frac{\varepsilon^2-\varepsilon}{2\rho_i}\varphi_2^i+\beta_i^3(1-\varepsilon)\varphi_3^i+\frac{\varepsilon G_i}{6\rho_i}(2\varepsilon^2-3\varepsilon+1)\qquad(1.22)$$

. . . .

. . . .

. . . .

Как видно из (1.21) и (1.22), $f_k^i(s, \varepsilon)$ определяются элементарными выкладками, но при $k>2$ выражение f_k^i громоздко.

На основании (1.18) и (1.22) получаем контурные условия для функций $\varphi_k(x, y)$

$$\varphi_0^i=c_i,$$

$$\varphi_1^i+\alpha_i\frac{G_i}{G}\frac{\partial\varphi_0^i}{\partial n}=G_i\,,$$

$$\varphi_2^i+\alpha_i\frac{1}{2\rho_i}\varphi_2^i+\alpha_i\frac{G_i}{G}\frac{\partial\varphi_1^i}{\partial n}=G_i,$$

$$\varphi_3^i+\alpha_i\frac{1}{2\rho_i}\varphi_2^i+\alpha_i^2\frac{1}{12\rho_i^2}\varphi_1^i+\alpha_i\frac{G_i}{G}\frac{\partial\varphi_2^i}{\partial n}-\frac{\alpha_i^2}{3}\frac{\partial^2\varphi_1^i}{\partial s^2}=\alpha_i^2\frac{1}{6\rho_i}G_i\,,\qquad(1.23)$$

. . . .

. . . .

. . . .

Таким образом, уравнения (1.19) и контурные условия (1.23) позволяют последовательно определить любое число коэффициентов разложения (1.15), следовательно и $F(x, y)$.

Имея функцию $F(x, y)$, на основании (1.22) и теоремы Бредта находим явные выражения функций $f_k^i(s, \varepsilon)$, при помощи которых определяются функции напряжений $F_i(s, \varepsilon)$ в областях D_i $(i=1, 2, \ldots, m)$.

Заметим, что первый член ряда (1.15) $\varphi_0(x, y)$ представляет решение рассматриваемой задачи для однородного стержня.

Ограничимся двумя первыми членами ряда (1.15)

$$F(x, y)=\varphi_0(x, y)+h_1\varphi_1(x, y).\qquad(1.24)$$

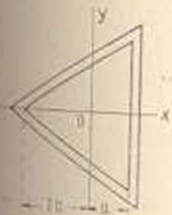
В силу первых двух условий (1.23) $F(x, y)$ с принятой в (1.24) точностью удовлетворяет приближенному контурному условию

$$F(x, y)+h_i\frac{G_i}{G}\frac{\partial F_i}{\partial n}=c_i\quad\text{на } L_i\ (i=1, 2,\ldots, m).\qquad(1.25)$$

Контурное условие (1.25) получается на основании предположения, что функция напряжений при кручении по толщине покрытия меняется линейно [3] или, что одно и то же, касательное напряжение по толщине постоянно [2].

Приближенное контурное условие (1.25) впервые было использовано П. С. Пожалостиным для решения одной специальной задачи о кручении призматического стержня с тонким усиливающим покрытием. Это условие в дальнейшем было использовано при решении ряда конкретных задач [5].

§ 2. Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня равностороннего треугольного сечения с тонким покрытием на боковой поверхности.



Фиг. 2.

В системе координат, показанной на фиг. 2, $\varphi_0(x, y)$ имеет вид

$$\varphi_0 = \frac{G}{6a}(a-x)\left[(x+2a)^2 - 3y^2\right]. \qquad (2.1)$$

Здесь принято $c_1 = 0$.

Согласно (1.23) для φ_1 имеем контурное условие

$$\varphi_1^{\text{I}} = -\frac{G_1}{G}\frac{\partial \varphi_0^{\text{I}}}{\partial n}. \qquad (2.2)$$

На стороне треугольника $x = a$ $\varphi_1(x, y)$ должна удовлетворять условию

$$\varphi_1^{\text{I}} = G_1 \frac{3a^2 - y^2}{2a}. \qquad (2.3)$$

В силу симметрии такое же условие для $\varphi_1(x, y)$ будем иметь на остальных двух сторонах $x \pm \sqrt{3}\,y + 2a = 0$ треугольника.

Искомое выражение $\varphi_1(x, y)$ можно представить как сумму трех решений уравнения Лапласа

$$\varphi_1 = \varphi_1^{\text{I}} + \varphi_1^{\text{II}} + \varphi_1^{\text{III}}, \qquad (2.4)$$

которые на одной стороне принимают значения (2.3), а на остальных двух сторонах равны нулю. Два из этих решений могут быть получены из первого решения соответствующими преобразованиями координатной системы.

Таким образом, для определения $\varphi_1(x, y)$ достаточно решить уравнение Лапласа для внутренней области треугольника при контурных условиях

$$\varphi_1^{\text{I}} = \begin{cases} G_1 \dfrac{3a^2 - y^2}{2a} & \text{при} \quad x = a \\ 0 & \text{при} \quad x = \pm\sqrt{3}\,y - 2a. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Решение этой задачи ищем в следующей форме

$$\varphi_1^{\text{I}} = \left[(x+2a)^2 - 3y^2\right]\eta(x). \qquad (2.6)$$

Решение (2.6) удовлетворяет контурным условиям (2.4) при $x = \pm\sqrt{3}\,y - 2a$, если только $\eta(x)$ в интервале $-2a < x < a$ особенностей не имеет.

Подставляя (2.6) в уравнение Лапласа, находим

$$\eta(x) = A(x + 2a), \tag{2.7}$$

где A — постоянная интегрирования.

Удовлетворяя условию (2.4) при $x = a$, находим

$$A = \frac{1}{18a^2} G_1. \tag{2.8}$$

На основании (2.6)—(2.8) получаем

$$\varphi_1^{\rm I} = \frac{G}{18a^2}(x + 2a)[(x + 2a)^2 - 3y^2]. \tag{2.9}$$

Два решения уравнения Лапласа, принимающие значения (2.3) соответственно на сторонах $x \pm \sqrt{3}\, y + 2a = 0$ и равные нулю на остальных двух сторонах треугольника, получаются из (2.9) при помощи преобразования поворота координатной системы около ее начала соответственно на углы $\mp \frac{2}{3}\pi$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1^{\rm II}\\ \varphi_1^{\rm III}\end{matrix}\right\} = \frac{G_1}{18a^2}(x - a)(x \mp \sqrt{3}\, y + 2a)(x \pm \sqrt{3}\, y - 4a). \tag{2.10}$$

Таким образом, на основании (2.4), (2.9) и (2.10) после некоторых преобразований получаем выражение

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1^{\rm I} + \varphi_1^{\rm II} + \varphi_1^{\rm III} = -\frac{1}{a}\frac{G_1}{G}\varphi_0 + \frac{G_1}{2a}(4a^2 - x^2 - y^2). \tag{2.11}$$

Ограничиваясь вторым приближением, на основании (1.15) и (2.11) получаем

$$F(x, y) = \varphi_0 + h\varphi_1 = \left(1 - \frac{h}{a}\frac{G_1}{G}\right)\varphi_0 + \frac{G_1}{2}\frac{h}{a}(4a^2 - x^2 - y^2). \tag{2.12}$$

Жесткость при кручении рассматриваемого стержня будет

$$C = 2\iint\limits_{D} F(x, y)\,dxdy = 1{,}8\sqrt{3}\,Ga^4 + 7{,}2\sqrt{3}\,G_1a^3h. \tag{2.13}$$

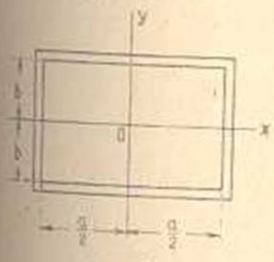
Для проверки степени точности принятого в (2.12) приближения примем, что материал покрытия подобран из материала стержня. Это будет соответствовать увеличению характерного размера поперечного сечения стержня на величину h. Для жесткости такого стержня имеем

$$C = 1{,}8\sqrt{3}\,G(a + h)^4. \tag{2.14}$$

Пренебрегая в (2.14) членами, имеющими порядок h^2 и выше, для жесткости C получаем точно такое выражение, какое получается из (2.13) при $G_1 = G$.

Заметим, что решение рассматриваемой здесь задачи при помощи контурного условия (1.25) связано с трудностями.

§ 3. В качестве второго приложения рассмотрим задачу о кручении прямоугольного стержня с тонким покрытием на боковой поверхности.



Фиг. 3.

Эта задача при помощи условия (1.25) решена в работе [6].

В принятой на фиг. 3 координатной системе для первого члена разложения (1.15), представляющего функцию напряжений при кручении однородного прямоугольного стержня, имеем

$$\varphi_0 = G\left[\frac{a^2}{4} - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\frac{\operatorname{ch}\lambda_p y}{\operatorname{ch}\lambda_p\frac{b}{2}}\cos\lambda_p x\right] =$$

$$= G\left[\frac{b^2}{4} - y^2 - \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}\frac{\operatorname{ch}\mu_p x}{\operatorname{ch}\mu_p\frac{a}{2}}\cos\mu_p y\right], \tag{3.1}$$

где

$$\lambda_p = (2p+1)\frac{\pi}{a}, \qquad \mu_p = (2p+1)\frac{\pi}{b}.$$

Согласно (1.23) φ_1 должна удовлетворять контурным условиям

$$\varphi_1 = -\frac{G_1}{G}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = \mp\frac{G_1}{G}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = \frac{8G_1 b}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\operatorname{th}\mu_p\frac{a}{2}\cos\mu_p y \tag{3.2}$$

$$\text{при } x = \pm a,$$

$$\varphi_1 = -\frac{G_1}{G}\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = \mp\frac{G_1}{G}\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = \frac{8G_1 a}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\operatorname{th}\lambda_p\frac{b}{2}\cos\lambda_p x \tag{3.3}$$

$$\text{при } y = \pm b.$$

Гармоническая внутри прямоугольника $|x| < a$, $|y| < b$ функция, удовлетворяющая контурным условиям (3.2) и (3.3), определяется соотношением

$$\varphi_1 = \frac{8G_1}{\pi^2}\left[a\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\operatorname{th}\mu_p\frac{a}{2}\frac{\operatorname{ch}\mu_p x}{\operatorname{ch}\mu_p\frac{a}{2}}\cos\mu_p y + \right.$$

$$\left. + b\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\frac{\operatorname{ch}\lambda_p y}{\operatorname{ch}\lambda_p\frac{b}{2}}\operatorname{th}\lambda_p\frac{b}{2}\cos\lambda_p x\right]. \tag{3.4}$$

Ограничиваясь двумя членами разложения (1.15), на основании (3.1) и (3.4) для жесткости при кручении получаем

$$C=2\iint\limits_{D} F(x,\ y)\,dxdy=2\iint\limits_{D}(\varphi_0+h\varphi_1)\,dxdy=$$

$$=\frac{Ga^3b}{3}\left[1-\frac{192}{\pi^5}\frac{a}{b}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda_p\frac{b}{2}}{(2p+1)^5}\right]+\frac{64G_1abh}{\pi^4}\times$$

$$\times\left[b\sum\frac{\operatorname{th}\mu_p\frac{a}{2}}{(2p+1)^4}\operatorname{th}(2p+1)\frac{\pi}{2}+a\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}\lambda_p\frac{b}{2}}{(2p+1)^4}\operatorname{th}(2p+1)\frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.5)$$

Принимая в (3.5) $a=b$, получаем жесткость рассматриваемого стержня квадратного сечения

$$C=\frac{\pi a^4}{3}\left[1-\frac{192}{\pi^5}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)^5}\right]+\frac{128\,G_1a^3h}{\pi^4}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}^2(2p+1)\frac{\pi}{2}}{(2p+1)^4}. \quad (3.6)$$

Случай, когда материал покрытия подобран из материала стержня, соответствует увеличению стороны квадрата на $2h$. Вычисления показывают, что разность приближенных значений жесткости однородного стержня квадратного сечения со стороной $a+2h$, вычисленных с принятой выше точностью непосредственно и на основании (3.6) при $G_1=G$, имеет порядок точности вычислений.

Заметим, что для определения $\varphi_2(x,\ y)$ в рассматриваемых конкретных задачах необходимо преодолеть определенные трудности.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 X 1964

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

ԲԱՐԱԿ ԾԱԾԿՈՒՅԹ ՈՒՆԵՑՈՂ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է բարակ ծածկույթ ունեցող պրիզմատիկ ձողերի ծայրերում կիրառված մոմենտներով ոլորման խնդիրը: Ծածկույթով պատված է ձողի ինչպես արտաքին կողմնային մակերևույթը, այնպես էլ ներքին մակերևույթները, որոնք համապատասխանում են ձողի երկայնական անցքերին:

Փոքր պարամետրի մեթոդի կիրառմամբ դիտարկվող խնդրի լուծումը բերվում է ձողի լայնական հատվածքի հիմնական նյութին համապատասխանող տիրույթում ոլորման լարումների ֆունկցիայի և հարմոնիկ ֆունկցիաների մի հաջորդականության որոնմանը, որոնց եզրային պայմանների համար ստացված են ռեկուրենտ առնչություններ:

Որպես ստացված արդյունքների կիրառություն լուծված են հավասարակողմ եռանկյան և ուղղանկյան տեսք ունեցող հատվածքներով ձողերի ոլորման խնդիրները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панов Д. Ю.* Об одном методе решения краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН АН СССР, 3, (VIII), § 2 (62), 1935.
2. *Абрамян Б. Л.* К задаче о кручении неоднородных призматических стержней. Доклады АН АрмССР, 14, № 1, 1951.
3. *Арутюнян Н. Х.* и *Чобанян К. С.* О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1956.
4. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 7, № 2, 1955.
5. *Арутюнян Н. Х.* и *Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
6. *Чобанян К. С.*, *Галфаян П. О.* Задача о кручении прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Известия АН СССР, ОТН, серия механика и машиностроение, № 1, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. КАРАПЕТЯН

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ БЕТОНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВЛАЖНОСТИ СРЕДЫ

Из работ автора [1—4] видно, что анизотропия оказывает существенное влияние на прочность, деформативность и ползучесть бетона и зависит от большого количества факторов.

В настоящей работе приводятся результаты исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от влажности среды.

§ 1. Общие сведения, объем и методика исследований

Как и в работах [1—4], изучение влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона велось на образцах, изготовленных при горизонтальном и вертикальном положениях форм.

Исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды были выполнены над бетоном, приготовленным из песка и щебня из вулканического шлака Аванского месторождения (г. Ереван). В качестве вяжущего был применен пуцолановый портландцемент Араратского завода активностью $R_ц = 471$ *кг/см*^{2}. Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 $м^3$ бетона в *кг*				В/Ц	$\gamma_б$ в $т/м^3$
	цемент	песок	щебень	вода		
1:2,51:2,65	275	692	730	323	1,18	2,02

Опыты были поставлены на призматических образцах и восьмерках сечением 10×10 *см*. Высота призм составляла 40 и 60 *см*, а восьмерок 60 *см*.

Образцы бетонировались в металлических горизонтальных и вертикальных формах. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение на виброплощадке при продолжительности вибрации 30 секунд.

Количество изготовленных образцов и их назначение приведены в табл. 2.

Таблица 2

Назначение и количество опытных образцов

Вид образцов	Высота образцов в *см*	Условия хранения	Назначение и количество образцов					
			для определения прочности и деформативности бетона		для определения усадки бетона		для определения суммарных деформаций усадки и ползучести бетона	
			перпенд. слоям	парал. слоям	перпенд. слоям.	парал. слоям	перпенд. слоям	парал. слоям.
Призмы	40	обычное без изоляции	6	6	—	—	—	—
		влажное без изоляции	6	6	—	—	—	—
		обычное с изоляцией	6	6	—	—	—	—
Призмы	60	обычное без изоляции	—	—	2	2	3	3
		влажное без изоляции	—	—	2	2	3	3
		обычное с изоляцией	—	—	2	2	3	3
Восьмерки	60	обычное без изоляции	6	6	3	3	3	3
		влажное без изоляции	6	6	3	3	3	3
		обычное с изоляцией	6	6	3	3	3	3

Помимо призм и восьмерок, было изготовлено также необходимое количество кубиков размером ребер 10 *см*. Освобождение образцов от форм производилось через 48 часов, после чего 50% образцов хранились в обычных условиях, а 50% во влажных условиях. Образцы, хранившиеся в обычных условиях, были как изолированные, так и без изоляции. Изоляция наружной поверхности образцов для исключения испарения воды из бетона осуществлялась сразу же после освобождения их от форм путем нанесения нескольких слоев расплавленного парафина. Образцы были нагружены длительной нагрузкой в возрасте 28 дней. Напряжение во всех призмах составляло 30 *кг/см*², а в восьмерках— 4 *кг/см*².

Деформации длительно загруженных, а также усадочных образцов измерялись переносным деформометром на базе 250 *мм*. Деформации каждого образца измерялись с двух сторон.

В процессе длительных опытов в помещении обычного хранения температура $T = 18 \pm 5^\circ$C, а относительная влажность $P = 60 \pm 11\%$. В помещении влажного хранения $T = 20 \pm 4^\circ$C, а $P = 90 \pm 8\%$.

Для изучения влияния анизотропии на прочность и деформати ность бетона при сжатии и растяжении в зависимости от влажност среды параллельно с длительными опытами испытывались также куби ки, призмы и восьмерки. Испытание призм высотой 40 *см* производилос ступенчатым нагружением образцов и выдержкой их под каждой сту пенью нагрузки в течение одной минуты. Каждая ступень нагрузки со ставляла примерно 0,1 $R_{пр}$. Методика испытания восьмерок отличалас лишь тем, что они испытывались без выдержки.

Для изучения влияния испарения воды на анизотропию бетона че рез 107 и 105 дней длительного нагружения изоляции двух призм и дв восьмерок были сняты и велись наблюдения за их дальнейшими дефор мациями. В каждом случае изоляция снималась с одного образца, на груженного перпендикулярно слоям укладки бетона, и одного—нагру женного параллельно. Аналогичным образом были сняты изоляции соответствующих ненагруженных образцов-близнецов, на которых опре делялись объемные деформации бетона.

§ 2. Влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучест бетона при сжатии в зависимости от влажности среды

В табл. 3 приведены прочностные показатели бетона для различ условий хранения.

Таблиц

Влияние анизотропии на прочность бетона при сжатии в зависимости от влажности среды

Возраст бетона к моменту испытания	Условия хранения	Прочностные характеристики бетона, когда направление сжимающей силы при испытании по отношению к слоям бетона						$\frac{R_{пр}}{R_{пр}}$ [illegible]
		перпендикулярно			параллельно			
		R в $кг/см^2$	$R_{пр}$ в $кг/см^2$	$\frac{R_{пр}}{R}$	R' в $кг/см^2$	$R'_{пр}$ в $кг/см^2$	$\frac{R'_{пр}}{R}$	
1 месяц	обычное без изоляции	116	81	0,71	109	74	0,68	0,8[illegible]
	влажное без изоляции	125	87	0,69	126	88	0,69	1,0[illegible]
	обычное с изоляцией	134	86	0,64	132	87	0,66	1,0[illegible]
3 месяца	обычное без изоляции	—	73	—	—	82	—	1,1[illegible]
	влажное без изоляции	—	150	—	178	140	0,79	0,9[illegible]
	обычное с изоляцией	197	156	0,79	198	132	0,67	0,8[illegible]

В данной работе мы не будем подробно останавливаться на анали наших опытных данных с точки зрения влияния влажности среды прочность, деформативность и ползучесть бетона. Этот вопрос нами будет рассмотрен отдельно. Основной целью данной работы, как уже указывалось, является выяснение, как влияет анизотропия на ползучесть бетона в зависимости от влажности среды.

В работах [1—4] было показано, что призменная прочность и модуль деформации бетона при испытании призм параллельно слоям больше, чем при испытании призм перпендикулярно слоям. Что касается ползучести бетона, то она меньше в призмах, испытанных параллельно слоям. Степень влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона зависит от различных факторов.

На основании данных табл. 3 замечаем, что характер влияния анизотропии на призменную прочность меняется в зависимости от влажности среды. Особенно четко это следует из данных трехмесячных испытаний. Здесь, как мы видим, при хранении неизолированных образцов в обычных условиях призменная прочность при испытании параллельно слоям, как обычно, больше, чем призменная прочность при испытании перпендикулярно слоям. Однако, в случае неизолированных образцов влажного хранения и изолированных образцов имеет место обратное явление.

Таким образом, анизотропия бетона в большей мере зависит от влажности среды. С увеличением влажности среды характер влияния анизотропии на призменную прочность изменяется.

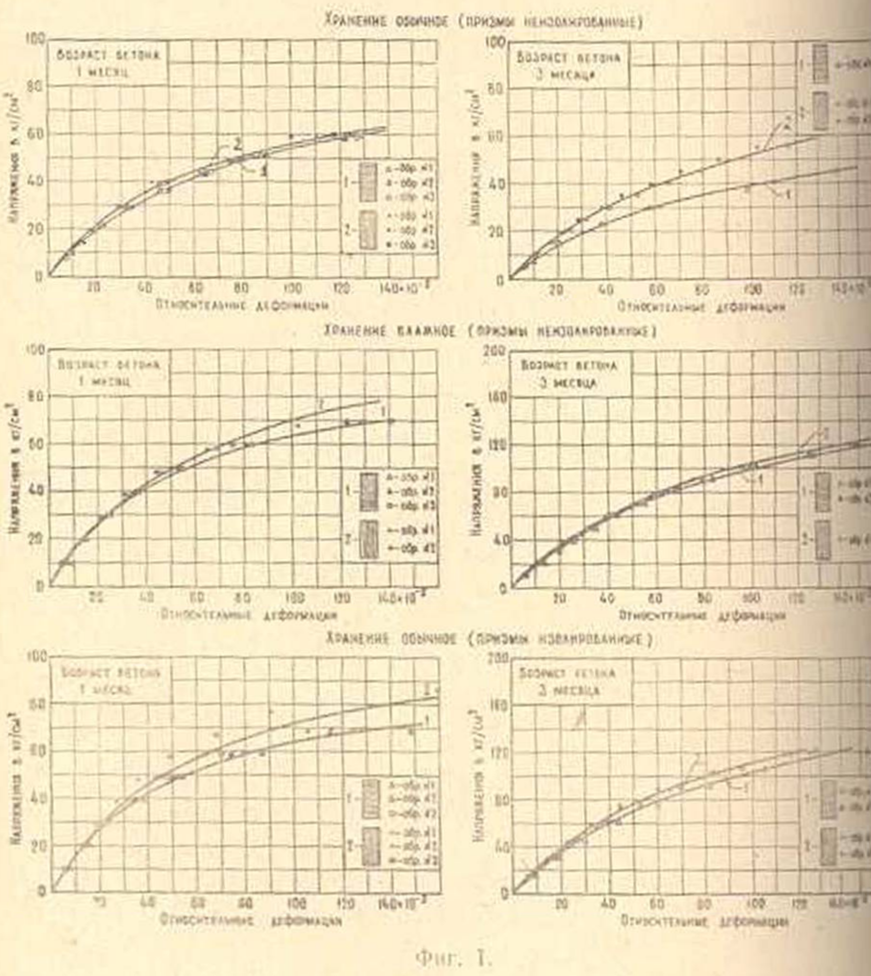
На фиг. 1 приведены кривые деформаций бетона для тех же условий хранения по испытаниям призм перпендикулярно и параллельно слоям в месячном и трехмесячном возрастах.

Рассматривая верхние два графика фиг. 1, как видим по данным испытаний в месячном возрасте, кривые деформаций призм, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям, практически совпадают. Однако, по данным испытаний в трехмесячном возрасте кривая деформаций призм, испытанных перпендикулярно слоям, уже занимает положение значительно ниже кривой деформаций призм, испытанных параллельно слоям. При напряжении 30 *кг/см*^{2} деформации в первом случае в 1,5 раза больше, чем во втором.

Таким образом, при обычном хранении с увеличением возраста бетона влияние анизотропии на призменную прочность увеличивается. Такое же явление наблюдалось в ранее проведенном нами исследовании [4].

Рассмотрение кривых деформаций неизолированных образцов влажного хранения и изолированных образцов обычного хранения показывает, что во всех случаях, независимо от возраста бетона, кривые деформаций призм, испытанных параллельно слоям, расположились выше кривых деформаций призм, испытанных перпендикулярно слоям, однако разность деформаций незначительна и уменьшается с увеличением возраста бетона.

На основании этих опытов можно сделать вывод, что с увеличени влажности среды влияние анизотропии на деформативность бето уменьшается. Это видно из данных табл. 4, где приведены значения сательных модулей деформаций бетона.



Фиг. 1.

На основании данных табл. 4 замечаем, что с увеличением напр ния влияние анизотропии на модуль деформации бетона увеличива

Рассмотрим результаты исследования влияния анизотропии на зучесть бетона при сжатии в зависимости от влажности среды (фиг.

На верхнем графике, который соответствует обычному хране кривая ползучести призм, испытанных перпендикулярно слоям, ра ложилась выше кривой ползучести призм, испытанных паралле слоям. При длительности нагружения 345 дней деформации ползу в первом случае в 1,5 раза больше, чем во втором.

Рассматривая средний график фиг. 2, который соответствует не лированным образцам, хранившимся во влажных условиях, видим, здесь уже кривая ползучести призм, испытанных перпендикул слоям до длительности нагружения 120 дней, расположилась заметно ниже кривой ползучести призм, испытанных параллельно слоям. Однако, в дальнейшем кривые приближаются и деформации приобретают одинаковые значения.

Таблица 4

Влияние анизотропии на модуль деформации бетона при сжатии в зависимости от влажности среды

Возраст бетона к моменту испытания	Условия хранения	Направление сжимающей силы при испытании по отношению к слоям бетона	Модуль деформации бетона по касательной в $т/см^2$ при напряжении				Отношение модуля деформации образцов, испытанных параллельно слоям, к модулю деформации образцов, испытанных перпендикулярно слоям, при напряжении			
			$\sigma=0$	$\sigma=30$ $кг/см^2$	$\sigma=60$ $кг/см^2$	$\sigma=100$ $кг/см^2$	$\sigma=0$	$\sigma=30$ $кг/см^2$	$\sigma=60$ $кг/см^2$	$\sigma=100$ $кг/см^2$
1 месяц	обычное без изоляции	перпенд.	125	60	19	—	1,16	1,08	0,89	—
		парал.	145	65	17	—				
	влажное без изоляции	перпенд.	178	86	27	—	0,94	1,09	1,55	—
		парал.	168	94	42	—				
	обычное с изоляцией	перпенд.	189	89	26	—	1,01	1,17	1,65	—
		парал.	192	104	43	—				
3 месяца	обычное без изоляции	перпенд.	87	30	—	—	1,22	1,8	—	—
		парал.	106	54	14	—				
	влажное без изоляции	перпенд.	209	148	98	47	1,01	1,03	1,06	1,13
		парал.	211	153	104	53				
	обычное с изоляцией	перпенд.	218	159	109	57	1,13	1,13	1,12	1,10
		парал.	246	179	122	63				

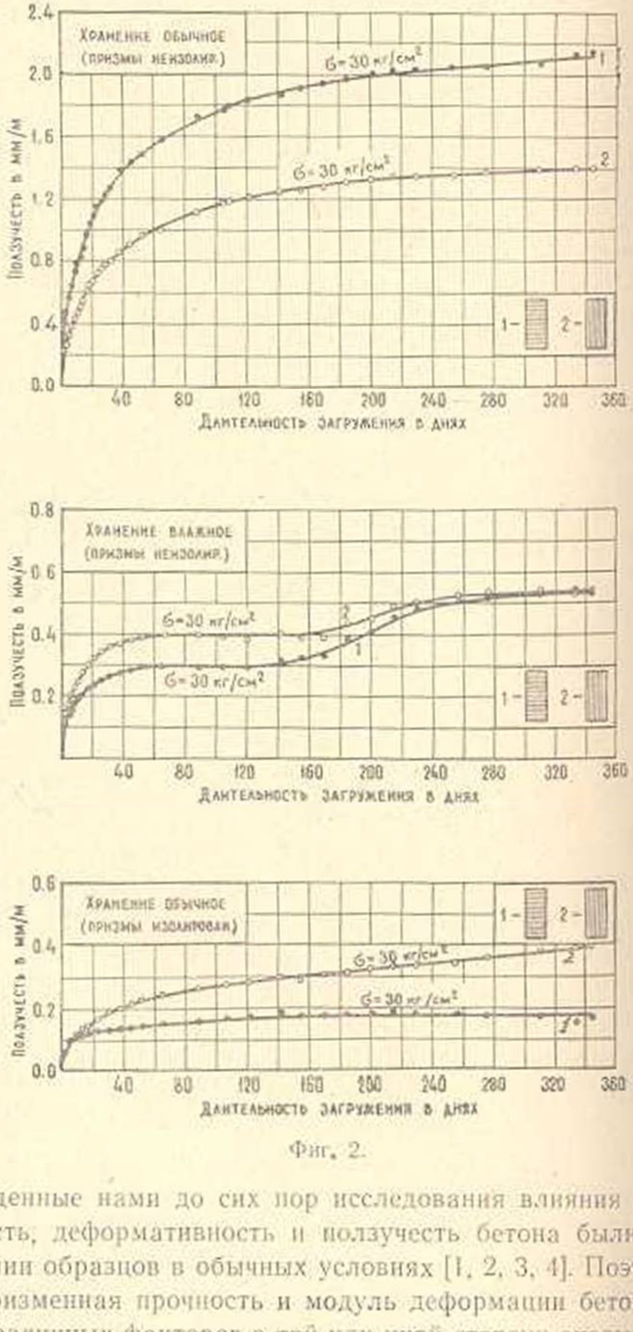
Наконец, на основании нижнего графика фиг. 2, который соответствует изолированным образцам, видим, что в течение всего опыта деформации ползучести больше в призмах, испытанных параллельно слоям. Отношение деформаций ползучести в этом случае при длительности нагружения 345 дней составляет 2,05.

Таким образом, эти опыты показывают, что анизотропия бетона меняется в зависимости от влажности среды. При малой влажности ползучесть больше в призмах, испытанных перпендикулярно слоям, а при высокой влажности и, особенно, при изолированных призмах—в призмах, испытанных параллельно слоям.

Аналогичная закономерность нами наблюдалась и при рассмотрении вопроса влияния анизотропии на призменную прочность бетона в зависимости от влажности среды (табл. 3). Однако, более ощутимо это наблюдается на опытах ползучести, потому что призменная прочность определялась на призмах высотой 40 *см*, а ползучести— 60 *см*.

Ранее нами было установлено, что чем больше высота образца, тем больше влияние анизотропии на призменную прочность, а следовательно, и на деформативность и ползучесть бетона [1].

Теперь попытаемся объяснить те явления, которые приводят к изменению характера влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона в зависимости от влажности среды.



Фиг. 2.

Проведенные нами до сих пор исследования влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона были выполнены при хранении образцов в обычных условиях [1, 2, 3, 4]. Поэтому во всех случаях призменная прочность и модуль деформации бетона в зависимости от различных факторов в той или иной степени оказывались больше в призмах, испытанных параллельно слоям, а ползучесть меньше.

На основании первых исследований уже в работах [1, 2] было дано объяснение тем причинам, которые обусловливают анизотропию бетона.

Анизотропия бетона является следствием внутреннего расслаивания бетона, которое имеет место при его укладке и уплотнении.

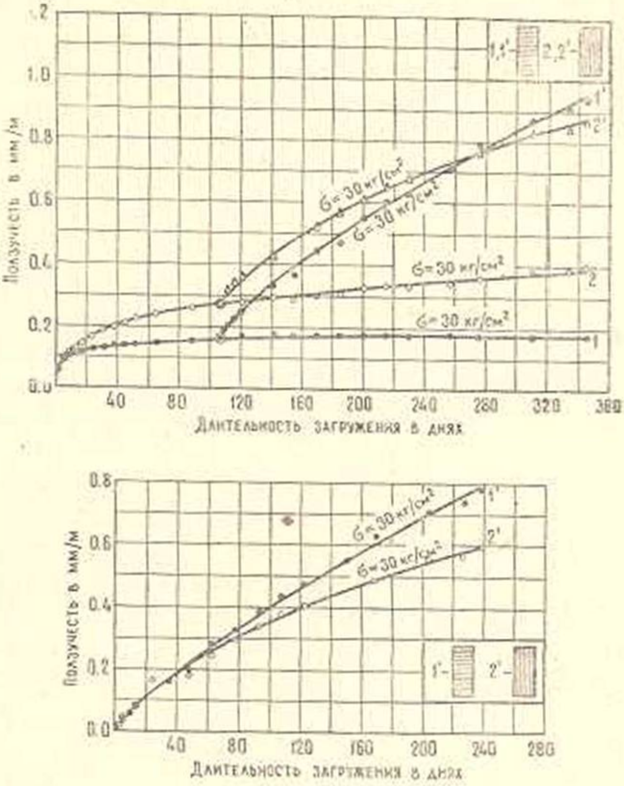
Как известно, при укладке и уплотнении бетона излишняя вода отжимается наверх, а часть ее по пути задерживается под частицами крупного заполнителя, образуя множество водных прослоек. В дальнейшем по мере твердения бетона, особенно если это происходит в условиях невысокой влажности, вода из указанных прослоек испаряется и на их местах остаются пустоты, которые естественно должны оказать отрицательное влияние на прочность и деформативность бетона. Степень отрицательного влияния этих пустот зависит от их расположения в отношении внешней нагрузки. Если внешняя нагрузка направлена перпендикулярно слоям укладки бетона, а следовательно, перпендикулярно площади пустот, отрицательное влияние получается наибольшее, так как в этом случае сечение бетонного элемента ослабляется больше. Именно по этой причине призменная прочность призм, испытанных перпендикулярно слоям, получается меньше, а деформации больше, чем при испытании призм параллельно слоям.

Сказанное относится к случаю, когда влажность среды такая, что вода прослоек испаряется. Однако, как уже было показано, при высокой влажности среды и в особенности при изолированных образцах, когда испарение воды из бетона отсутствует, имеет место обратное явление. В этом случае призменная прочность больше, а ползучесть меньше для тех призм, которые испытываются перпендикулярно слоям. Происходит это так потому, что водные прослойки всей своей площадью участвуют в восприятии внешней нагрузки и по мере деформации цементного камня и перераспределения напряжений все большее сечение бетона включается в работу. Это обстоятельство приводит к уменьшению относительного напряжения и тем самым к уменьшению деформаций ползучести.

Рассматривая тоже самое в отношении призм, испытываемых параллельно слоям, следует отметить, что в этом случае внешняя сжимающая нагрузка приводит к увеличению толщины водных прослоек и поэтому вода уже не может способствовать уменьшению деформаций ползучести. Скорее она способствует увеличению деформаций ползучести путем давления на окружающие стенки. Последнее приводит к увеличению как поперечных, так и продольных деформаций.

Положительная роль водных прослоек под частицами заполнителя в уменьшении деформаций ползучести призм, испытанных перпендикулярно слоям, вытекает и из нижнего графика фиг. 2. Здесь мы имеем в виду то обстоятельство, что затухание деформаций ползучести призм, испытанных перпендикулярно слоям, наступает гораздо раньше, чем это мы наблюдаем в случае призм, испытанных параллельно слоям.

Для подтверждения всех высказанных здесь положений, объясняющих причины изменения анизотропии бетона в зависимости от влажности среды, были поставлены специальные опыты. Как уже указывалось, через 107 дней после длительного нагружения образцов 2 изолированные призмы (одна, нагруженная перпендикулярно, а другая—параллельно слоям) были освобождены от наружных изоляций и велись наблюдения за их дальнейшими деформациями. Одновременно были сняты изоляции и 2-х ненагруженных призм.



Фиг. 3.

Целью этих опытов, помимо изучения влияния испарения воды на анизотропию бетона, было также исследование влияния испарения на ползучесть бетона. Результаты этих опытов для случая сжатия приведены на фиг. 3. Как видно из верхнего графика, после снятия изоляции ползучесть развивается интенсивно как в призме, нагруженной перпендикулярно, так и в призме, нагруженной параллельно слоям. Однако, в итоге все же ползучесть призмы, нагруженной перпендикулярно слоям, больше ползучести призмы, нагруженной параллельно слоям (нижний график фиг. 3). Причиной этого является то, что с момента снятия изоляции интенсивное испарение воды с одной стороны стирает ту положительную роль, которую играют водные прослойки в уменьшении ползучести призм, нагруженных перпендикулярно слоям, а, с другой стороны, и ту отрицательную роль, которую они играют в увеличении ползучести призм, нагруженных параллельно слоям. Именно поэтому дальнейшая ползучесть с момента снятия изоляции в первом случае получилась больше, чем во втором.

Эти опыты наглядно показывают также ту важную роль, которую играют капиллярные явления в ползучести бетона при сжатии благодаря испарению воды из бетона.

В работе [3] были приведены результаты исследования влияния анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. При этом было установлено, что влияние анизотропии на ползучесть бетона в большей мере зависит от масштабного фактора. Чем больше сечение образца, тем меньше влияние анизотропии на призменную прочность, деформативность и ползучесть бетона при сжатии.

Эти опыты также подтверждают то объяснение, которое выше было дано причинам зависимости анизотропии бетона от влажности среды. Дело в том, что, чем больше сечение образца, тем медленнее испаряется вода из бетона, а поэтому тем дольше длится положительная роль водных прослоек под частицами заполнителя в образцах, испытываемых перпендикулярно слоям, и отрицательная роль в образцах, испытываемых параллельно слоям. Это обстоятельство и приводит к тому, что с увеличением сечения образца уменьшается разница как призменных прочностей, так и деформаций ползучести при этих двух видах испытаний.

§ 3. Влияние анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона при растяжении в зависимости от влажности среды

В табл. 5 приведены прочностные показатели бетона при растяжении для различных условий хранения по испытаниям восьмерок перпендикулярно и параллельно слоям.

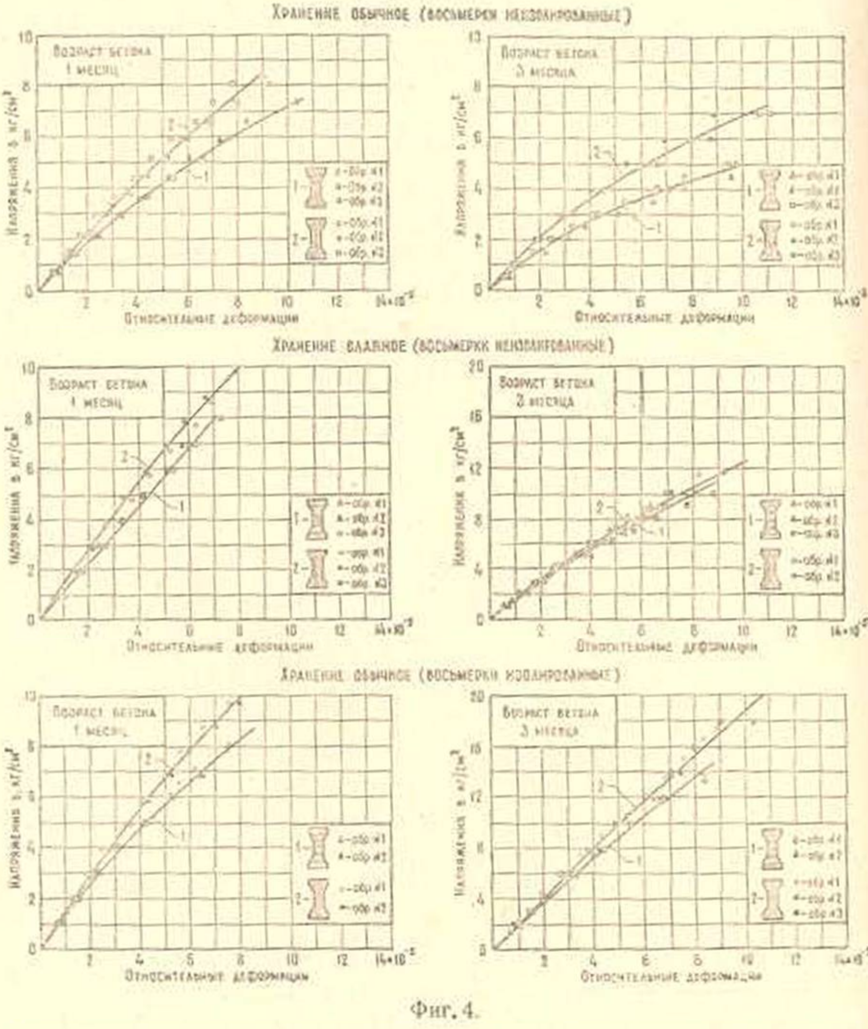
Таблица 5

Влияние анизотропии на прочность бетона при растяжении в зависимости от влажности среды

Возраст бетона к моменту испытания	Условия хранения	Прочностные характеристики бетона, когда направление растягивающей силы по отношению к слоям бетона						$\frac{R'_p}{R_p}$
		перпендикулярно			параллельно			
		R в $кг/см^2$	R_p в $кг/см^2$	$\frac{R_p}{R}$	R' в $кг/см^2$	R'_p в $кг/см^2$	$\frac{R'_p}{R'}$	
1 месяц	обычное без изоляции	116	7,5	0,065	109	9,3	0,085	1,24
	влажное без изоляции	125	9,0	0,072	126	12,0	0,095	1,33
	обычное с изоляцией	134	9,6	0,072	132	11,3	0,085	1,17
3 месяца	обычное без изоляции	—	5,9	—	—	8,1	—	1,37
	влажное без изоляции	—	11,6	—	178	14,1	0,079	1,21
	обычное с изоляцией	197	15,3	0,078	198	22,0	0,111	1,44

Как видно из табл. 5, независимо от влажности среды и возра
бетона к моменту испытания, прочность бетона на растяжение во в
случаях больше при испытании образцов параллельно слоям. Одна
здесь нет четкой закономерности влияния анизотропии на прочность
тона при растяжении в зависимости от влажности среды.

На фиг. 4 приведены кривые деформаций бетона при растяжен
где, независимо от влажности среды и возраста бетона к моменту ис
тания, во всех случаях кривые деформаций восьмерок, испытанных
раллельно слоям, занимают положение выше кривых деформаций во
мерок, испытанных перпендикулярно слоям.



Фиг. 4.

На основании фиг. 4 можно сделать вывод, что при обычном хр
нении неизолированных образцов с увеличением возраста бетона в
ние анизотропии на деформативность увеличивается, а при влажном
нении и изолированных образцах—уменьшается.

В табл. 6 приведены значения модулей деформаций бетона при растяжении, которые наглядно показывают, как влияет анизотропия на деформативность бетона при растяжении в зависимости от влажности среды.

Таблица 6

Влияние анизотропии на модуль деформации бетона при растяжении в зависимости от влажности среды

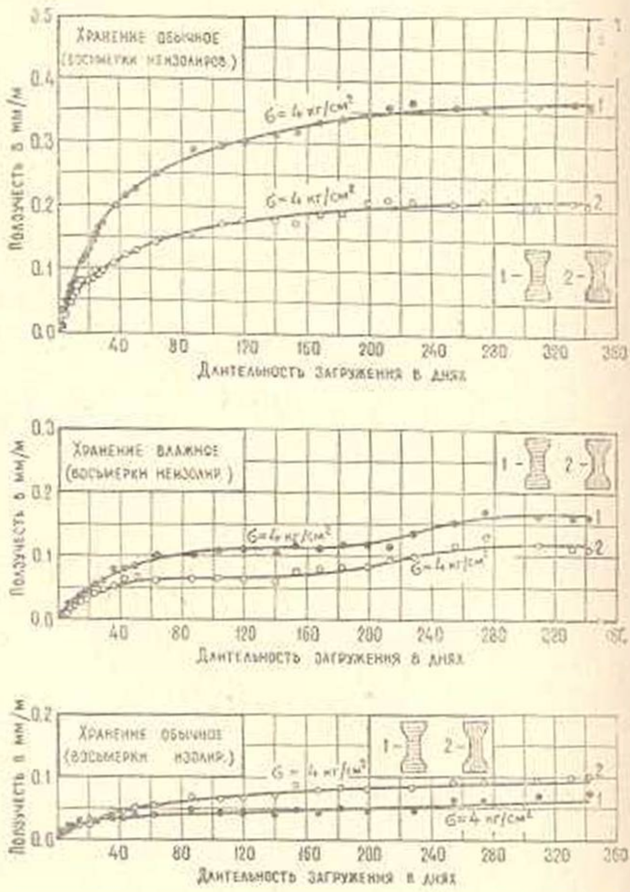
Возраст бетона к моменту испытания	Условия хранения	Направление растягивающей силы при испытании по отношению к слоям бетона	Модуль деформации бетона по касательной в $m/см^2$ при напряжении				Отношение модуля деформации образцов, испытанных параллельно слоям, к модулю деформации образцов, испытанных перпендикулярно к слоям, при напряжении			
			$\sigma=0$	$\sigma=3$ $кг/см^2$	$\sigma=6$ $кг/см^2$	$\sigma=9$ $кг/см^2$	$\sigma=0$	$\sigma=3$ $кг/см^2$	$\sigma=6$ $кг/см^2$	$\sigma=9$ $кг/см^2$
1 месяц	обычное без изоляции	перпенд.	103	79	58	—	1,17	1,30	1,45	—
		парал.	121	103	86	71				
	влажное без изоляции	перпенд.	118	115	112	—	1,32	1,20	1,08	—
		парал.	156	138	121	105				
	обычное с изоляцией	перпенд.	142	115	91	70	1,09	1,20	1,33	1,50
		парал.	155	138	121	105				
3 месяца	обычное без изоляции	перпенд.	91	48	—	—	1,25	1,62	—	—
		парал.	114	78	48	—				
	влажное без изоляции	перпенд.	161	141	122	105	1,06	1,06	1,06	1,06
		парал.	170	149	129	111				
	обычное с изоляцией	перпенд.	190	180	171	162	1,06	1,09	1,13	1,16
		парал.	202	197	193	188				

На фиг. 5 представлены кривые ползучести бетона при растяжении для различных условий хранения по испытаниям восьмерок перпендикулярно и параллельно слоям. Как видно, кривые ползучести неизолированных образцов, испытанных параллельно слоям, хранившимся как в обычных, так и во влажных условиях расположились ниже кривых ползучести образцов, испытанных перпендикулярно слоям. В случае же изолированных образцов имеет место обратное явление.

На основании фиг. 5 при длительности нагружения 342 дня отношение деформаций ползучести образцов, испытанных перпендикулярно слоям, к деформациям ползучести образцов, испытанных параллельно слоям, при неизолированных образцах обычного хранения составляет 1,72, при неизолированных образцах влажного хранения—1,42 и, наконец, при изолированных образцах обычного хранения—0,68.

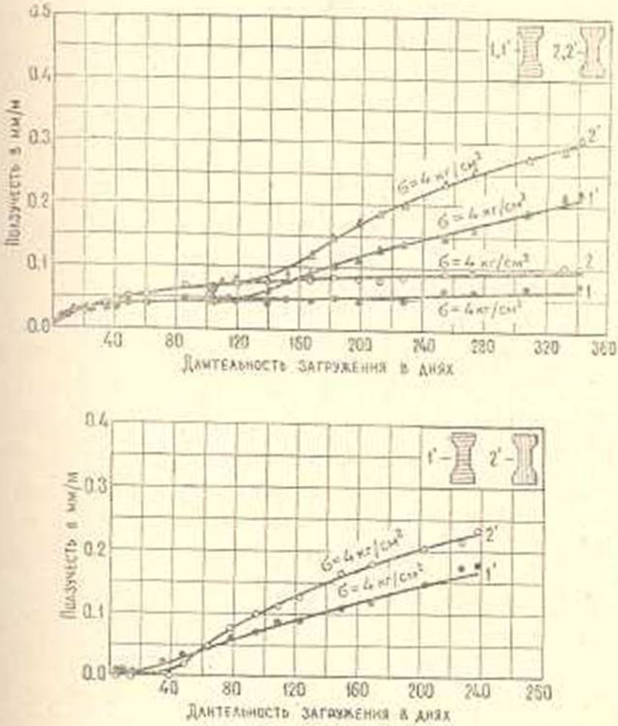
Таким образом, и при растяжении характер влияния анизотропии на ползучесть бетона с увеличением влажности среды точно так, как при сжатии, меняется. При обычном и влажном хранении неизолированных образцов ползучесть при растяжении больше в восьмерках, испытанных перпендикулярно слоям, а в случае изолированных образцов имеет место обратное явление.

Большая ползучесть изолированных образцов при растяжении параллельно слоям как будто противоречит тому объяснению, которое мы дали влиянию анизотропии на ползучесть бетона при сжатии в зависимости от влажности среды. При растяжении и наличии изоляции ползучесть образцов, испытанных перпендикулярно слоям, также должна была получиться больше ползучести образцов, испытанных параллельно слоям. Однако, как видно из фиг. 5, деформации ползучести изолированных образцов по своим абсолютным значениям настолько малы, что это противоречие могло быть вызвано какой-либо случайной причиной. Это несомненно так, потому что, как уже было показано, при растяжении прочность и модуль деформации бетона изолированных образцов по испытаниям параллельно слоям значительно больше, чем по испытаниям перпендикулярно слоям.



Фиг. 5.

На фиг. 6 представлены кривые ползучести изолированных образцов, испытанных перпендикулярно и параллельно слоям при растяжении (кривые 1 и 2), а также кривые ползучести тех изолированных образцов, изоляции которых были сняты через 105 дней после их длительного нагружения (кривые 1′ и 2′). Как видим, с момента снятия изоляций в восьмерках, нагруженных как перпендикулярно, так и параллельно слоям, деформации ползучести начинают развиваться более интенсивно, чем в изолированных образцах. Характерно, что, в отличие от случая сжатия, при растяжении деформации ползучести развиваются интенсивно не сразу после снятия изоляции, а спустя 40—50 дней. На основании нижнего графика фиг. 6 после снятия изоляции ползучесть восьмерки, нагруженной параллельно слоям, в 1,5 раза больше ползучести восьмерки, нагруженной перпендикулярно слоям.



Фиг. 6.

На основании проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Влажность среды оказывает существенное влияние на прочность, модуль деформации и ползучесть бетона при сжатии и растяжении. Чем больше влажность среды, тем больше прочность, модуль деформации бетона и меньше ползучесть.

2. Анизотропия оказывает влияние на призменную прочность бетона и в большой мере зависит от влажности среды.

При невысокой влажности призменная прочность бетона больше для призм, испытанных параллельно слоям, а при высокой влажности— перпендикулярно слоям.

В случае изолированных образцов, когда испарение воды из бетона отсутствует, призменная прочность по испытаниям призм параллельно слоям меньше, чем по испытаниям призм перпендикулярно слоям.

3. Анизотропия бетона оказывает влияние на модуль деформации

бетона при сжатии, благодаря чему модуль деформации в призмах, испытанных параллельно слоям, больше, чем в призмах, испытанных перпендикулярно слоям. Влияние анизотропии на модуль деформации бетона в большой мере зависит от влажности среды. С увеличением влажности среды влияние анизотропии на модуль деформации бетона уменьшается.

4. Анизотропия оказывает влияние на ползучесть бетона при сжатии, и это влияние в большой мере зависит от влажности среды. При невысокой влажности ползучесть бетона меньше для призм, испытанных параллельно слоям, а при высокой влажности—перпендикулярно слоям.

В случае изолированных образцов, когда испарение воды из бетона отсутствует, ползучесть призм, испытанных параллельно слоям, больше ползучести призм, испытанных перпендикулярно слоям.

5. Анизотропия оказывает влияние на прочность и модуль деформации бетона при растяжении, благодаря чему прочность и модуль деформации при восьмерках, испытанных параллельно слоям, больше, чем в восьмерках, испытанных перпендикулярно слоям.

Влияние анизотропии на прочность и модуль деформации бетона в большой мере зависит от влажности среды. С увеличением влажности влияние анизотропии уменьшается.

6. Анизотропия бетона оказывает влияние на ползучесть бетона при растяжении, благодаря чему ползучесть в восьмерках, испытанных параллельно слоям, меньше, чем в восьмерках, испытанных перпендикулярно слоям.

Влияние анизотропии на ползучесть бетона при растяжении в большой мере зависит от влажности среды. С увеличением влажности влияние анизотропии уменьшается.

7. Анизотропия бетона обусловлена внутренним расслаиванием при укладке и уплотнении бетона, в результате чего излишняя вода отжимается наверх, а часть ее по пути задерживается под частицами крупного заполнителя, образуя множество водных прослоек.

В процессе твердения бетона, если это происходит в условиях невысокой влажности, вода указанных прослоек испаряется, и на их местах образуются пустоты, которые отрицательно влияют на прочность бетона и способствуют увеличению его деформаций.

При испытании образцов (призм и восьмерок) перпендикулярно слоям укладки бетона отрицательное влияние получается наибольшим, так как в этом случае пустоты ослабляют сечение бетонного образца всей своей площадью.

Сказанное относилось к случаю, когда вода из водных прослоек испаряется. Если же влажность среды такова, что вода из бетона не испаряется, то при испытании образцов на сжатие перпендикулярно слоям водные прослойки уже играют положительную роль, так как они всей своей площадью принимают участие в восприятии внешней нагрузки.

При растяжении наличие воды в прослойках не играет роли в изменении характера влияния анизотропии на прочность, деформативность и ползучесть бетона, как это имеет место при сжатии. По этой причине здесь по-прежнему сохраняется то обычное явление, что прочность бетона на растяжение в образцах, испытанных параллельно слоям, больше, чем в образцах, испытанных перпендикулярно слоям, а деформации меньше.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 X 1964

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊԻԱՅԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԻ ՎՐԱ՝ ԿԱԽՎԱԾ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ԽՈՆԱՎՈՒԹՅՈՒՆԻՑ

Ամփոփում

Սեղմման ու ձգման ժամանակ միջավայրի խոնավությունը էապես ազդում է բետոնի ամրության, դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի վրա: Որքան մեծ է միջավայրի խոնավությունը, այնքան մեծ են ամրությունը, դեֆորմացիաների մոդուլը և փոքր է սողքը:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ անիզոտրոպիան ազդում է բետոնի ամրության՝ դեֆորմացիաների մոդուլի և սողքի վրա: Այդ ազդեցությունը կախված է միջավայրի խոնավությունից, որը սեղմման ժամանակ էապես փոխում է անիզոտրոպիայի բնույթը՝ փոքր խոնավության պայմաններում բետոնի պրիզմային ամրությունը, դեֆորմացիաների մոդուլը մեծ են, սողքը փոքր է շերտերին զուգահեռ փորձարկումների դեպքում, իսկ մեծ խոնավության պայմաններում՝ շերտերին ուղղահայաց փորձարկումների դեպքում: Այս բանը ավելի պարզ է երևում արտաքին պայմաններից մեկուսացված նմուշների փորձարկումների ժամանակ:

Ձգման դեպքում միջավայրի խոնավությունը չի փոխում անիզոտրոպիայի բնույթը, որի պատճառով պահպանվում է այն սովորական երևույթը, որ բետոնի ամրությունը շերտերին զուգահեռ փորձարկումների դեպքում մեծ է, քան շերտերին ուղղահայաց փորձարկումների դեպքում, իսկ դեֆորմացիաները փոքր են:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян К. С.* Об одном существенном факторе в прочностных и деформативных свойствах бетона. Доклады АН АрмССР, 24, № 4, 1957.
2. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на деформации ползучести бетона. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 6, 1957.
3. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 1964.
4. *Карапетян К. С.* Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжения в зависимости от величины напряжения. Доклады АН АрмССР, 34, № 1, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ С

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические на

С. Р. МЕСЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ МГНОВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ОДНОМЕРНОМ УПЛОТНЕНИИ

Механическое поведение глинистых грунтов при нагрузке и
следующей разгрузке в условиях одномерного сжатия уже было пр
метом нашего рассмотрения [1]. Однако, учитывая необходимо
уточнения природы мгновенных деформаций и ползучести, а та
выяснения ряда других вопросов, проведены экспериментальные
следования, результаты которых и являются предметом рассмотре
настоящей статьи.

Экспериментальными исследованиями мы пытались определ
1) механическое поведение глинистых грунтов при кратковремен
испытаниях и тем самым выяснить природу мгновенных деформа
2) характер изменяемости обратно-мгновенных деформаций при
степенном увеличении длительности действия уплотняющей нагру
3) зависимость между напряжениями и обратно-мгновенными деф
мациями и 4) характер изменяемости мгновенных деформаций д
тельно уплотненных и упрочненных во времени образцов грунта на
шенной структуры при переменной внешней нагрузке.

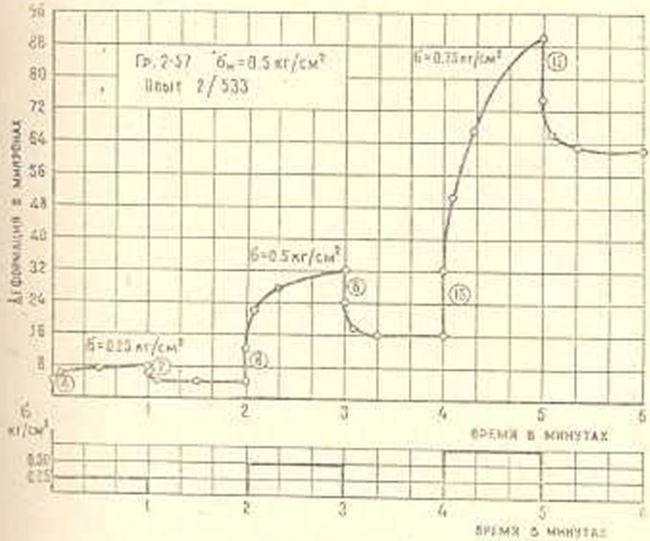
С указанной целью было выполнено больше двухсот опытов
различных грунтах нарушенной структуры с длительностью опы
от нескольких десятков секунд до нескольких сот дней.

Опыты проводились как при однократном загружении и пос
дующей разгрузке образцов через различные интервалы времени,
и при многократном повторении циклов нагрузок-разгрузок. В слу
многократного повторения указанных циклов при переходе от одн
к другому циклу увеличивалась величина сжимающей нагрузки.

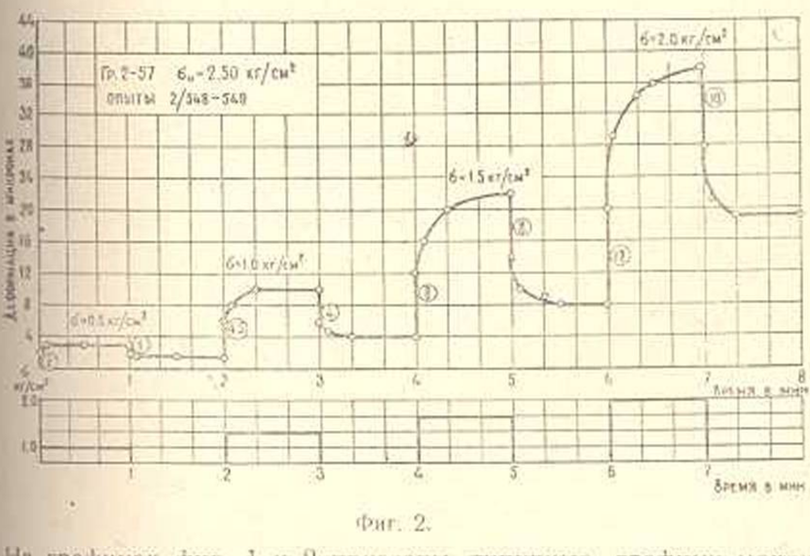
Для изучения влияния состояния грунта на изменяемость мг
венных деформаций испытывались водонасыщенные образцы различ
плотности, влажности и структурной прочности. Различие в ука
ных показателях физико-механических свойств образцов достигал
предварительным их уплотнением нагрузками различной велич
при различной продолжительности их действия. Продолжительно
предварительного уплотнения образцов колебалась от нескольких
сятков минут до года и более, а величина уплотняющей нагру
до 7 *кг/см*^{2}.

Нагрузки прикладывались и удалялись за предельно короткое время, практически мгновенно (без удара) на полную величину. Все опыты проводились в компрессионных приборах конструкции автора [2] над образцами высотою 20 *мм*, диаметром 70 *мм*. Повторность опытов двухкратная.

Рассмотрим некоторые характерные результаты экспериментального изучения указанных выше вопросов по порядку.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На графиках фиг. 1 и 2 показаны типичные графики механического поведения образцов при их кратковременных испытаниях (продолжительность цикла нагрузка-разгрузка равна 2 минутам) на примере грунта 2—57 (табл. 1). В рассматриваемом случае образцы до испытания подвергались очень длительному (больше года) уплотнению нагрузками 0,5 и 2,5 *кг/см*².

Результаты опытов показывают, что при кратковременных испытаниях *мгновенная деформация* грунта практически восстанавливается полностью, а деформация ползучести только частично. Полная обратимость мгновенных деформаций свидетельствует о ее *упругой* природе, а неполная обратимость деформаций ползучести—об участии в этом процессе как структурно-адсорбционных, так и структурных деформаций [3].

Таблица 1

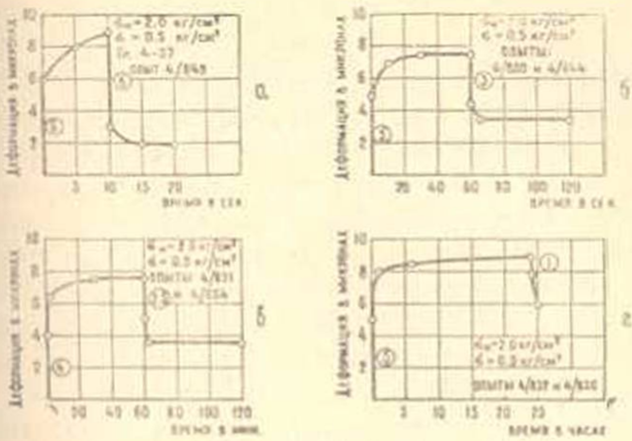
Лаб. № грунта	Наименование	Удельный вес $г/см^3$	Пределы пластичности, %		
			предел текучести	предел пластичности	число пластичности
2—57	суглинок	2.66	31.3	18.6	12.7
4—57	глина	2.7	41.2	23.3	18.0
5—57	диатомитовый грунт	2.59	58.1	32.2	33.9
7—57	новошвейцарская глина	2.63	64.4	30.5	33.9

Наибольшее расхождение, которое имеет место между мгновенной и обратно-мгновенной деформациями (порядка 1—2 микроны), является результатом точности их измерения. Так как измерение деформации производилось двухмикронными индикаторами часового типа с точностью отсчетов в один микрон, такая ошибка должна была быть неизбежной. Как будет показано ниже, и при сравнительно больших мгновенных деформациях указанное расхождение также находится в этих пределах.

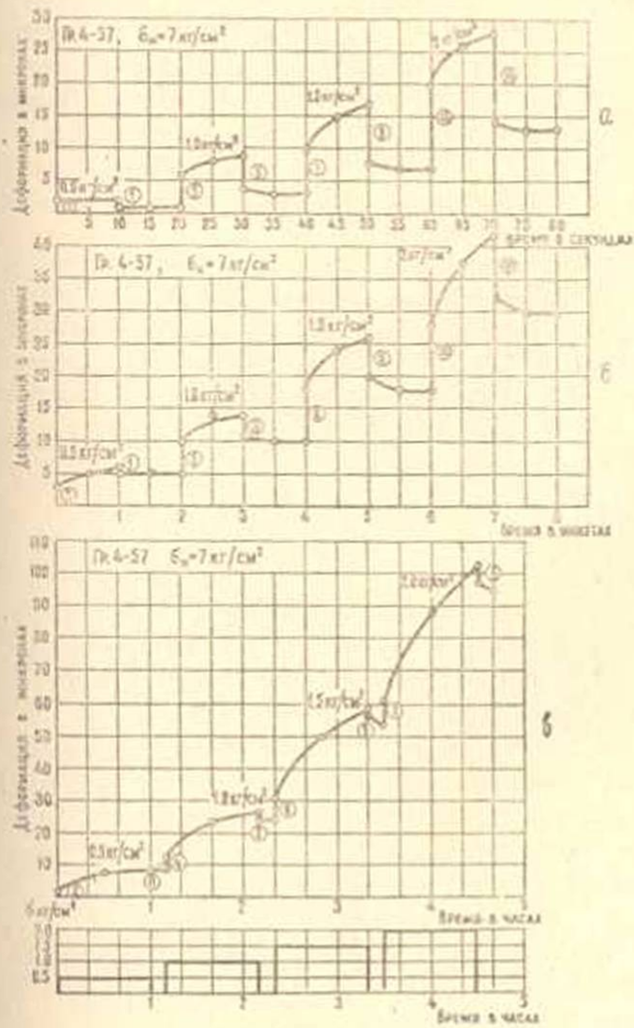
Таким образом, при кратковременных воздействиях сжимающих нагрузок, когда исключена возможность существенного изменения плотности грунта, а также влияния тиксотропного упрочнения, обусловленного проявлением новых связей между его частицами и агрегатами во времени, при разгрузке образца его мгновенная деформация полностью восстанавливается. А это значит, что в соответствии с терминологией теории упруго-ползучего тела [4] ее можно назвать *упруго-мгновенной*. Этим еще раз подтвердилось то справедливое замечание Т. Алфрея [5], что „упругая деформация является мгновенной, будь она даже и нелинейной".

Теперь проследим за изменением мгновенной деформации в зависимости от продолжительности действия приложенных к образцам-близнецам грунта нагрузок и тиксотропного упрочнения.

На фиг. 3 приведены четыре графика механического поведения образцов-близнецов грунта 4—57 при однократном их нагружении и разгрузке ($\sigma = 0{,}5$ $кг/см^2$), а на фиг. 4—при четырехкратном нагружении и разгрузке нагрузками 0,5, 1,0, 1,5 и 2,0 $кг/см^2$, через интервалы времени 10 *сек*, 1 *мин*, 1 *ч* и одни сутки. Перед испытанием образцы сперва были подвергнуты предварительному месячному уплот-



Фиг. 3.



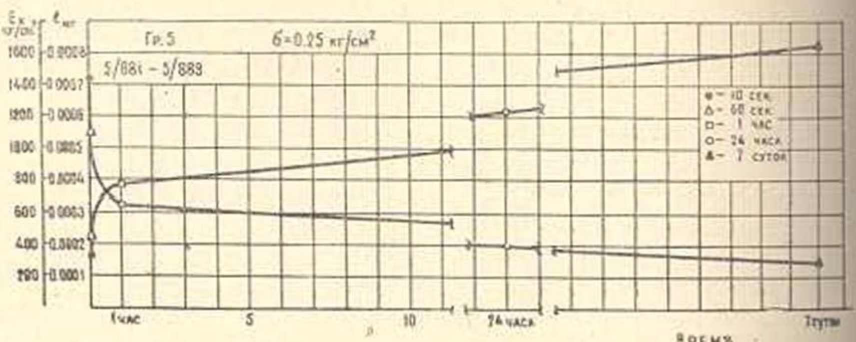
Фиг. 4.

Кривые напряжение—мгновенная деформация приведены в нижних левых углах указанных графиков, а в верхних правых углах этих же графиков приведены кривые напряжение—обратно-мгновенная деформация, определенные разгрузкой после 173 и 204—208-дневного уплотнения образцов грунтов. На этих же графиках указаны величины деформации ползучести образцов в момент разгрузки.

Как показывают результаты опытов, рассматриваемые зависимости с достаточной точностью выражаются *линейным законом* во всех состояниях грунтов. Следовательно, мгновенные деформации образцов, подвергнутых предварительному уплотнению различными нагрузками, при одинаковых продолжительностях уплотнения, изменяются на одну и ту же величину. Для гр. 4—57 указанное изменение колеблется в пределах четырех-шести раз, а для гр. 7—57—пяти-десяти раз. Причем наибольшее изменение мгновенной деформации соответствует сериям образцов-близнецов, подвергнутых наименьшему предварительному уплотнению.

Таким образом, на основании изложенного выше можно заключить, что степень изменяемости мгновенной деформации при уплотнении (сжатии) постоянными нагрузками зависит от его физико-механических свойств к началу загружения, а также от величины нагрузки и продолжительности уплотнения.

Изменяемость мгновенной деформации грунта и ее модуля при постоянной во времени нагрузке можно определить методом разгрузки образцов-близнецов через различные продолжительности действия уплотняющей нагрузки. Так как упрочнение грунта как вследствие проявления сцепления упрочнения, так и уплотнения протекает во времени, изменяемость его мгновенной деформации $l_{мгн}$ и ее модуля E_k при заданном напряженном состоянии можно выразить через фактор времени t.



Фиг. 10.

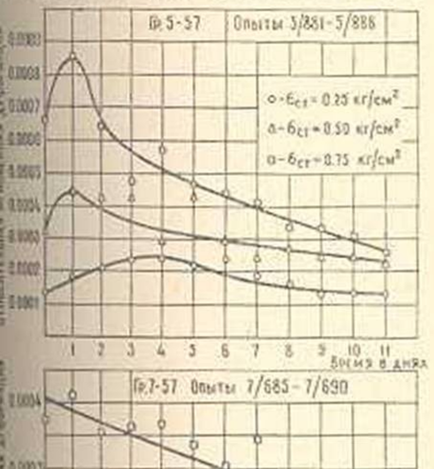
На фиг. 10 приведены кривые изменяемости $l_{мгн}$ и $E_к$, определенные методом разгрузки, при сжатии образцов-близнецов диатомитовой пасты нагрузками 0,25 *кг/см²* после их предварительного уплотнения нагрузками 0,25 *кг/см²* в течение трех суток.

Наконец, познакомимся с результатами исследования изменяемости мгновенных деформаций длительно уплотненных и упрочненных во времени образцов глинистых грунтов нарушенной структуры при их загружении нарастающими равными ступенями нагрузок через равные интервалы времени.

Отметим, что испытанием слабоуплотненных глинистых паст нами ранее было установлено [9], что изменяемость мгновенной деформации во времени при постоянной скорости загружения (независимо от величины ступени нагрузки) выражается затухающей кривой, то есть при переходе от одной ступени нагрузки к другой мгновенная деформация, постепенно уменьшаясь, стремится к некоторой постоянной величине, подчиняясь одному общему закону.

Как показали эксперименты, изменяемость мгновенной деформации грунтов, подвергнутых длительному предварительному уплотнению и упрочнению, протекает несколько иначе. В отличие от указанного выше случая, здесь на характер изменения $l_{мгн}$ заметно сказывается влияние величины ступени нагрузки (фиг. 11).

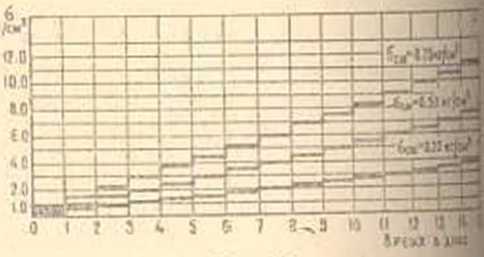
На фиг. 11 приведены кривые изменяемости $l_{мгн}$ двух различных грунтов—диатомитового грунта и новошвейцарской глины (табл. 1), определенные при трех различных скоростях роста внешней нагрузки.



Фиг. 11.

Внешние нагрузки наращивались ступенями по 0,25, 0,5 и 0,75 $кг/см^2$ через каждые сутки (графики загружения приведены на фиг. 12). Ступени нагрузок прикладывались на грунт на полную величину, без удара, с фиксацией величин мгновенных деформаций в моменты их приложения. Перед испытанием образцы-близнецы подвергались предварительному уплотнению нагрузками 2,25 $кг/см^2$ в течение полутора (гр. 5–57) и двух (гр. 7–57) месяцев.

Все три кривые, приведенные на графике фиг. 11а (гр. 5–57), по своей форме сильно отличаются друг от друга. Самым характерным у них является то, что максимальные значения мгновенных деформаций соответствуют не моменту приложения первых ступеней нагрузок (как это имеет место при испытании слабоуплотненных паст), а некоторой другой ступени нагрузки. Причем, чем меньше величина ступени нагрузки, тем больше надо приложить ступеней нагрузок, чтобы достичь максимума мгновенной деформации. Что же касается испытания гр. 7—57, то в этом случае кривые $l_{мгн} = f(\tau)$, соответствующие испытаниям образцов нагрузками $\sigma_{ст} = 0{,}25$ и $0{,}75$ *кг/см²*, практически не отличаются от кривых, полученных испытанием слабо-уплотненных паст и только при $\sigma_{ст} = 0{,}5$ *кг/см²* форма кривых $l_{мгн} = f(\tau)$ свидетельствует о влиянии величины ступени нагрузки на изменяемость $l_{мгн}$.



Фиг. 12.

Изложенное выше о влиянии величины ступеней нагрузок и состоянии грунта к началу испытания на изменяемость мгновенной деформации можно объяснить структурной прочностью скелета. А именно: в случае сжатия слабо-уплотненных паст, в силу слабых структурных их связей, разрушение структуры и упрочнение происходит почти беспрепятственно, вследствие чего грунт постепенно уплотняется и упрочняется, а его мгновенная деформация постепенно уменьшается. В случае сжатия образцов, обладающих более прочными структурными связями, характер изменяемости мгновенных деформаций зависит от отношения величины ступени нагрузки к структурной прочности грунта. Когда внешняя нагрузка преодолевает сопротивление сцепления упрочнения и устраняет его влияние, форма кривых $l_{мгн} = f(\tau)$ будет такой же, какая она была у слабо-уплотненных паст, то есть наибольшее значение мгновенной деформации будет соответствовать первой ступени нагрузки (фиг. 11б при $\sigma_{ст} = 0{,}75$ *кг/см²*). В противном случае она достигает своего максимума только тогда, когда сцепление упрочнения будет частично или полностью устранено внешними нагрузками. После устранения сцепления упрочнения, то есть достижения $l_{мгн\,max}$ дальнейшая изменяемость мгновенной деформации протекает так, как у слабо-уплотненных паст [9].

Необходимо отметить, что после достижения $l_{мгн} = l_{мгн\,max}$ изменяемость мгновенной деформации не протекает гладко. Хотя не всегда $l_{мгн}$ от последующей ступени нагрузки меньше, чем от предыдущей, все же ясно одно: по мере уплотнения $l_{мгн}$ имеет тенденцию постепенно уменьшаться.

Следует обратить внимание на то, что, при испытании образцов гр. 7—57 ступенями нагрузок по $\sigma_{ст} = 0{,}25$ *кг/см²*, величина мгновенной деформации практически не зависит от уплотнения грунта. Это значит, что уплотнение грунта протекает без структурных деформаций и поэтому его упругие свойства почти не подвергаются изменениям.

По максимумам кривых $l_{мгн} = f(\tau)$ можно судить о приближенном значении величин структурной прочности грунтов. Из графиков кривых $l_{мгн} = f(\tau)$, приведенных на фиг. 11, следует, что для гр. 4—57

l_{max} приблизительно соответствует $\sigma \approx 1$ *кг/см²*, а для гр. 7—57 $\sigma \approx 0{,}75$ *кг/см²*, следовательно, их структурные прочности примерно равны 1 *кг/см²* и 0,75 *кг/см²*.

Резюмируя изложенное выше, еще раз можно отметить, что характер изменяемости мгновенной деформации грунтов во времени обусловлен прочностью их структурных связей, величиной и темпом приложения внешних нагрузок.

В заключение приведем некоторые данные о наибольших значениях компрессионных модулей мгновенных деформаций $E_к$ ряда грунтов, определенных нами испытанием образцов грунта нарушенной структуры, предварительно уплотненных различными нагрузками $\sigma_н$ до девяти месяцев (табл. 2).

Таблица 2

$\sigma_н$, *кг/см²*	Лабораторные номера грунтов					
	2—57		4—57		5—57	
	№ опыта	E_k, *кг/см²*	№ опыта	E_k, *кг/см²*	№ опыта	E_k, *кг/см²*
0,5	2/533	1200	—	—	—	—
2,5	2/548	4540	—	—	—	—
3,0	—	—	4/850	3200	—	—
7,0	—	—	4/849	3840	—	—
8,0	2/546	10000			—	—
9,0	—	—			5/885	3000

Сопоставление данных, приведенных в табл. 2, с данными, приведенными в [9], показывает, что длительное уплотнение грунтов нагрузками до 9 *кг/см²* приводит к увеличению компрессионного модуля мгновенной деформации $E_к$ до 70 раз, с достижением наибольшей его величины 10 000 *кг/см²* (суглинок за № 2—57, $\sigma_н = 8$ *кг/см²*, продолжительность уплотнения девять месяцев). Что же касается величин нормальных модулей мгновенных деформаций E', то они будут отличаться от $E_к$ в среднем на 10%, так как коэффициент поперечного расширения (Пуассона) μ для таких грунтов колеблется в пределах от $\mu = 0{,}15$ до $\mu = 0{,}25$.

Данные о величинах $E_к$ позволяют придти к выводу, что если после девятимесячного уплотнения грунтовые пасты могут иметь $E_к = 10000$ *кг/см²*, то модули мгновенных деформаций грунтов ненарушенной структуры, подвергнутых в природных условиях весьма длительному уплотнению нагрузками, превышающими использованные нами величины, должны обладать $E_к$, существенно превышающими приведенные в табл. 2 величины.

Модули упругости, полученные Д. Д. Баркановым [10] (табл. 3) испытанием грунтов в полевых условиях, значительно меньше полученных нами величин.

Как правильно отмечает Н. Я. Денисов [11], эти данные получены по величине восстанавливающейся деформации, определенной при разгрузке опытных штампов, которые являются следствием не только упругого расширения частиц, но и влияния адсорбционных процессов. Поэтому они не могут рассматриваться как характеризующие только упругие деформации.

Таблица 3

Характеристика грунта	E, $кг/см^2$
Пластичный суглинок	310
Коричневый суглинок, насыщенный водой . . .	440
Лёсс	1000÷1300
Лёссовидный суглинок	1200
Тяжелый плотный суглинок	2950

Мы совершенно уверены в том, что причиной получения заниженных значений модулей упругости грунтов ненарушенной (естественной) структуры, помимо указанной выше, является влияние неровностей поверхности грунта [12, 13], на что, к сожалению, иногда исследователи не обращают серьезного внимания.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 X 1964

Ս. Ռ. ՄԵՍՉՅԱՆ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ԱԿՆԹԱՐԹԱՅԻՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԻԱՉԱՓ ԽՏԱՑՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկված են հետևյալ հարցերը. ա) կավային բնահողերի մեխանիկական վարքագիծը կարճատև փորձարկումների դեպքում, բ) հակադարձելի ակնթարթային դեֆորմացիաների փոփոխման բնույթը խտացնող բեռի ազդեցության տևողության մեծացման դեպքում, գ) լարումների և հակադարձելի ակնթարթային դեֆորմացիաների միջև գոյություն ունեցող կապը և դ) հարատև խտացած ու ամրացած բնահողերի ակնթարթային դեֆորմացիաների փոփոխման բնույթը արտաքին փոփոխվող բեռի ազդեցության տակ:

Փորձերի արդյունքները ցույց են տալիս, որ՝ 1) խտացնող բեռի կարճատև ազդման դեպքում ակնթարթային դեֆորմացիան լրիվ հակադարձելի է, այդ իսկ պատճառով այն կարող է համարվել ակնթարթային առաձգական դեֆորմացիա, 2) լարումների և հակադարձելի ակնթարթային դեֆորմացիաների միջև եղած կապը գծային է, 3) որքան մեծ է արտաքին խտացնող բեռի ազդման տևողությունը և, հետևաբար, բնահողի խտացումը և ժամանակի ընթացքում ամրապնդումը, այնքան փոքր է հակադարձելի ակնթար-

թային դեֆորմացիան, 4) հարատև խտացած և ամրապնդված բնահողերի ակնթարթային դեֆորմացիաների փոփոխումը արտաքին բեռի փոփոխման դեպքում խիստ տարբերվում է չխտացված բնահողերի փորձարկումներից ստացված արդյունքներից: Եթե վերջինս դեպքում բեռի աստիճանաբար աճը բերում է ակնթարթային դեֆորմացիայի աստիճանաբար նվազմանը մինչև մի ինչ-որ հաստատուն մեծության հասնելը, այս դեպքում դրությունը բոլորովին այլ է: Բեռի աճը, իր սկզբնական շրջանում հանգեցնում է ակըն-թարթային դեֆորմացիաների աճման (ակնթարթային մոդուլի նվազմանը), իսկ հետո՝ նրա նվազմանը: Նշված երևույթը հեղինակը բացատրում է նրանով, որ հիշյալ բնահողերի դեֆորմացիան սկզբում ընթանում է նրանց կաղմվածքի քայքայումով (ամրության անկումով), իսկ հետո, երբ այդ պրոցեսը ավարտված է և բնահողն սկսում է ամրապնդվել խտացման աճի ու նոր կազմվածքային կապերի առաջացման հետևանքով, նկատվում է ակնթարթային դեֆորմացիայի նվազում և ակնթարթային դեֆորմացիաների մոդուլի բարձրացում:

Հոդվածում բերված են տվյալներ հարատև խտացած և ամրապնդված կավային բնահողերի ակնթարթային դեֆորմացիաների մոդուլների մասին:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Месчян С. Р.* К вопросу экспериментального определения упругих характеристик связных грунтов при сжатии. ДАН АрмССР, **23**, № 3, 1956.
2. *Месчян С. Р.* О ползучести связного грунта при сжатии. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, № 4, 1958.
3. *Денисов Н. Ф.* О природе деформации глинистых пород. Изд. Минречфлота СССР, М., 1951.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1952.
5. *Алфрей Т.* Механические свойства высокополимеров. ИЛ, М., 1947.
6. *Цытович Н. А.* Механика грунтов. Госстройиздат, М.—Л., 1951.
7. *Флорин В. А.* Одномерная задача уплотнения земляной среды с учетом старения, нелинейной ползучести и разрушения структуры. Известия АН СССР, ОТН, № 9, 1953.
8. *Улицкий И. И.* Ползучесть бетона. Техиздат Украины. Киев—Львов, 1948.
9. *Месчян С. Р.* О влиянии скорости загружения на деформативные свойства связных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.
10. *Баркан Д. Д.* Динамика оснований и фундаментов. Стройвоенмориздат, М., 1948.
11. *Денисов Н. Я.* Строительные свойства глинистых пород и их использование в гидротехническом строительстве. Госэнергоиздат, М.—Л., 1956.
12. *Розоренов В. Ф.* Методика учета систематических погрешностей при компрессионных испытаниях глинистых пород. „Вопросы гидрогеологии и инженерной геологии". Сб. 15, Госгеолтехиздат, М., 1961.
13. *Черкасов И. И.* Влияние метода установки штампа на результаты испытания грунта пробной нагрузкой. ДАН СССР, **82**, № 3, 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

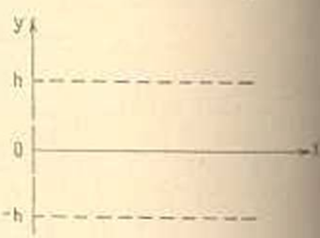
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. БАБАДЖАНЯН

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ПОРИСТЫМИ СТЕНКАМИ

Течение реальной жидкости вблизи проницаемых поверхностей представляет как теоретический, так и практический интерес. Так, например, в вопросах управления пограничного слоя, в задачах теплопередачи, в некоторых химических процессах и т. д. В данной работе рассматривается плоское установившееся, ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном канале с пористыми стенками (фиг. 1), ширина канала $2h$. Проницаемость вдоль стенки принимается постоянной, силами тяжести пренебрегаем.



Фиг. 1.

1. Выбираем систему координат с началом в центре канала. Ось ox находится в плоскости, параллельной стенкам канала, ось oy перпендикулярна стенкам. За исходные уравнения движения примем уравнения Навье—Стокса

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Здесь u, v — компоненты скорости по осям ox и oy, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Исходя из постановки задачи и из симметричности потока (относительно оси $0x$), имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } y=+h \quad x\geqslant 0$$

$$u=0 \quad v=k(p-p_b). \tag{1.2}$$

где p_b — внешнее давление, k — коэффициент пористости стенки. Если $p>p_b$ имеет место отсос жидкости, в случае $p<p_b$ — вдувание жидкости

при $y=0 \quad x \geqslant 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0. \tag{1.3}$$

В начальном сечении потока, то есть при $x=0$ принимаем

$$p_0=p_н, \; p_i=0 \quad \text{при } i \geqslant 1.$$

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_0 dy = U_{ср}, \quad \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} u_i dy = 0, \quad v_0=v_i=0, \quad \text{при } i \geqslant 1, \tag{1.4}$$

где $p_н$ есть давление в начальном сечении потока, $U_{ср}$ — средняя скорость по начальному сечению. При такой постановке задачи требуется найти поле скоростей и давления вдоль и поперек канала.

2. Задача решается методом малого параметра [1]. В качестве малого параметра принимается отношение ширины к характерной длине канала. Вводим малый параметр в систему уравнений и в граничные условия, заранее приводя их к безразмерному виду, пользуясь следующими соотношениями:

$$u=c\bar{u}, \; v=c\sigma\bar{v}, \; x=l\bar{x}, \; y=h\bar{y},$$

$$p=\rho c^2\frac{\nu}{\sigma}\bar{p}, \; \nu=hc\bar{\nu}, \qquad k=\frac{\sigma^2}{\rho c\nu}\bar{k}. \tag{2.1}$$

где c — характерная скорость,

l — характерная длина канала,

$$\sigma=\frac{h}{l} \ll 1 \text{ —малый параметр.}$$

Подставляя значения размерных величин через безразмерные в систему уравнений (1.1), а также в граничные условия, получим:

$$\sigma\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\nu\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma^3\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\nu\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\sigma^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0;$$

при $y=+1 \quad x \geqslant 0$

$$u=0, \quad v=k(p-p_b); \tag{2.3}$$

при $y=0, \quad x \geqslant 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad v=0; \tag{2.4}$$

при $x=0$

$$p_0=p_н, \quad p_i=0; \int_0^1 u_0 dy=U_{ср}, \int_0^1 u_i dy=0, \quad v_0=v_i=0 \text{ при } i>1. \tag{2.5}$$

Для удобства письма черточки сверху опущены. Так как поток симметричен относительно оси ox, то решение задачи представим для одной половины канала, то есть для значения $y=1$. Искомые функции ищем в виде степенного ряда по степеням малого параметра σ, то есть в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0+\sigma u_1+\sigma^2 u_2+\cdots \\ v &= v_0+\sigma v_1+\sigma^2 v_2+\cdots \\ p &= p_0+\sigma p_1+\sigma^2 p_2+\cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляем значения u, v и p из (2.6) в систему уравнений (2.2) и в граничные условия (2.3) и (2.4). Приравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями σ, получим систему уравнений, из которой определяются неизвестные с требуемой точностью. Составим систему уравнений. Приравнивая в (2.2) коэффициенты при нулевой степени σ, получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p_0}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}&=0, \\ \frac{\partial p_0}{\partial y}&=0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}&=0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Интегрируя первое уравнение два раза по y, получим

$$u_0=\frac{1}{2}\frac{\partial p_0}{\partial x}y^2+f_1(x)y+f_2(x).$$

Определим произвольные функции интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$, пользуясь граничными условиями (2.3) и (2.4), тогда для u_0 получим

$$u_0=\frac{1}{2}\frac{\partial p_0}{\partial x}(y^2-1). \tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в третье уравнение системы (2.7) и интегрируя, для v_0 получим следующее значение

$$v_0=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}y\left(1-\frac{y^2}{3}\right)+f_3(x).$$

Из второго условия системы (2.4) получим, что $f_3(x)=0$, тогда

$$v_0=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x^2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right). \tag{2.9}$$

Значение p_0 можно найти из второго условия системы (2.3). Действительно, из этого условия имеем

$$v_0(x, 1) = k(p_0 - p_b). \tag{2.10}$$

Подставляя значение $v_0(x, 1)$ из (2.9) в уравнение (2.10), получим относительно p_0 следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 p_0}{dx^2} - 3kp_0 = -3kp_b,$$

решение которого есть

$$p_0 = p_b + c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax},$$

где $a = \sqrt{3k}$.

Определяя постоянные интегрирования, пользуясь граничными условиями (2.5), и подставляя в выражение p_0, получим

$$p_0 = p_b + (p_n - p_b)\operatorname{ch} ax - \frac{3U_{cp}}{a}\operatorname{sh} ax. \tag{2.11}$$

Подставляя значение p_0 в выражения u_0 и v_0, получим соответственно

$$u_0 = \frac{1}{2}\left[a(p_n - p_b)\operatorname{sh} ax - 3U_{cp}\operatorname{ch} ax\right](y^2 - 1). \tag{2.12}$$

$$v_0 = \frac{a}{2}\left[a(p_n - p_b)\operatorname{ch} ax - 3U_{cp}\operatorname{sh} ax\right]\left(y - \frac{y^3}{3}\right). \tag{2.13}$$

Второе приближение искомых функций найдем из системы уравнений, полученной из (2.2) путем приравнивания коэффициентов при первой степени ε

$$\begin{gathered}
u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\nu\frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\
\frac{\partial p_1}{\partial y} = 0, \\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0.
\end{gathered} \tag{2.14}$$

Вычисляя левую часть первого уравнения системы (2.14) и решая его относительно $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}$, получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \left[A_1\operatorname{sh} 2ax - A_2\operatorname{ch} 2ax\right]\left(1 + \frac{y^4}{3}\right), \tag{2.15}$$

где $A_1 = \dfrac{(p_n - p_b)^2 a^3 + 9U_{cp}^2 a}{8\nu}$, $\qquad A_2 = \dfrac{3(p_n - p_b)U_{cp}\,a^2}{4\nu}$. $\qquad$ (2.16)

Интегрируя уравнение (2.15) два раза по y и пользуясь соответствующими граничными условиями, для функции u_1 получим

$$u_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial p_1}{\partial x}(y^2-1) + (A_1 \operatorname{sh} 2ax - A_2 \operatorname{ch} 2ax)\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^6}{90} - \frac{23}{45}\right). \quad (2.17)$$

Из третьего уравнения системы (2.14) получим

$$v_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) - 2a(A_1 \operatorname{ch} 2ax - A_2 \operatorname{sh} 2ax)\left(\frac{y^3}{6} + \frac{y^7}{630} - \frac{23}{45}y\right). \quad (2.18)$$

Найдем p_1, для этого имеем

$$v_1(x, 1) = kp_1(x).$$

Имея в виду уравнения (2.18), для p_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 p_1}{dx^2} - a^2 p_1 = -\frac{72}{35}a(A_1 \operatorname{ch} 2ax - A_2 \operatorname{sh} 2ax). \quad (2.19)$$

Решая дифференциальное уравнение (2.19) и пользуясь при определении постоянных интегрирования условиями (1.4), получим для p_1 следующее значение:

$$p_1 = \frac{27}{35\nu}U_{cp}^2 \operatorname{ch} ax - \frac{24}{35a}A_1 \operatorname{ch} 2ax + \frac{24}{35a}A_2 \operatorname{sh} 2ax. \quad (2.20)$$

Подставляя значения p_1 в выражения u_1 и v_1, найдем

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{27a}{35\nu}U_{cp}^2 \operatorname{sh} ax - \frac{48}{35}A_1 \operatorname{sh} 2ax + \frac{48}{35}A_2 \operatorname{ch} 2ax\right)\times$$

$$\times(y^2-1) + (A_1 \operatorname{sh} 2ax - A_2 \operatorname{ch} 2ax)\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^6}{90} - \frac{23}{45}\right). \quad (2.21)$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{35\nu}a^2 U_{cp}^2 \operatorname{ch} ax - \frac{96}{35}A_1 a \operatorname{ch} 2ax + \frac{96}{35}A_2 a \operatorname{sh} 2ax\right)\times$$

$$\times\left(y - \frac{y^3}{3}\right) - 2a(A_1 \operatorname{ch} 2ax - A_2 \operatorname{sh} 2ax)\left(\frac{y^3}{6} + \frac{y^7}{630} - \frac{23}{45}y\right) \quad (2.22)$$

Для нахождения третьего приближения имеем следующую систему уравнений:

$$u_0\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1\frac{\partial u_0}{\partial y} = -\nu\frac{\partial p_2}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \quad (2.23)$$

$$-\frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Решение системы уравнений (2.23) не представляет особого затруднения, только приходится иметь дело с громоздкими вычислениями. Отметим при этом, что граничными условиями (1.4) для v нужно пользоваться, начиная с третьего приближения. Ограничиваясь вторым приближением и переходя к размерным величинам, для неизвестных функций получим следующие окончательные значения:

$$u(c_1 \operatorname{sh} a_1x - c_2 \operatorname{ch} a_1x - c_3 \operatorname{sh} 2a_1x + c_4 \operatorname{ch} 2a_1x)(\bar{y}^2 - 1) +$$

$$+ \frac{7}{432}(c_3 \operatorname{sh} 2a_1x - c_4 \operatorname{ch} 2a_1x)(45\bar{y}^2 + \bar{y}^6 - 46), \tag{2.24}$$

$$v = (d_1 \operatorname{ch} a_1x - d_2 \operatorname{sh} a_1x - d_3 \operatorname{ch} 2a_1x + d_4 \operatorname{sh} 2a_1x)\left(\bar{y} - \frac{\bar{y}^3}{3}\right) -$$

$$- \frac{7}{432}(d_3 \operatorname{ch} 2a_1x - d_4 \operatorname{sh} 2a_1x)(105\bar{y}^3 + \bar{y}^7 - 322\bar{y}), \tag{2.25}$$

$$p = p_b + (p_n - p_b) \operatorname{ch} a_1x - E_1 \operatorname{sh} a_1x + E_2 \operatorname{ch} a_1x - E_3 \operatorname{ch} 2a_1x +$$

$$+ E_4 \operatorname{sh} 2a_1x, \tag{2.26}$$

$$\text{где } a_1 = \sqrt{\frac{3k\mu}{h^3}},$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(p_n - p_b)\sqrt{\frac{3kh}{\mu}} + \frac{27}{70\nu}\sqrt{3\mu kh}\, U_{cp}^2,$$

$$c_2 = \frac{3}{2} U_{cp},$$

$$c_3 = \frac{9}{35}\sqrt{\frac{3k\mu}{h}}\left[\frac{(p_n - p_b)^2 kh^2}{\mu\nu} + \frac{3U_{cp}^2 h}{\nu}\right],$$

$$c_4 = \frac{54}{35}\frac{U_{cp}k(p_n - p_b)h}{\nu},$$

$$d_1 = \frac{3}{2}k(p_n - p_b) + \frac{81}{70}\frac{\mu k U_{cp}^2}{\nu},$$

$$d_2 = \frac{U_{cp}}{2}\sqrt{\frac{3\mu k}{h}},$$

$$d_3 = \frac{54}{35}\left[\frac{(p_n - p_b)^2 k^2 h}{\nu} + \frac{3U_{cp}^2 \mu k}{\nu}\right],$$

$$d_4 = \frac{108}{35}\sqrt{\frac{3k\mu}{h}} \cdot \frac{U_{cp}k(p_n - p_b)h}{\nu},$$

$$E_1 = \frac{3U_{cp}}{\sqrt{\frac{3kh}{\mu}}}.$$

$$E_2=\frac{27}{35}\frac{\mu U_{cp}^2}{\nu},$$

$$E_3=\frac{9}{35}\frac{(p_н-p_b)^2kh+3U_{cp}^2\mu}{\nu},$$

$$E_4=\frac{54}{35}\frac{U_{cp}(p_н-p_b)}{\nu}\sqrt{\frac{k\mu h}{3}}.$$

3. Пример

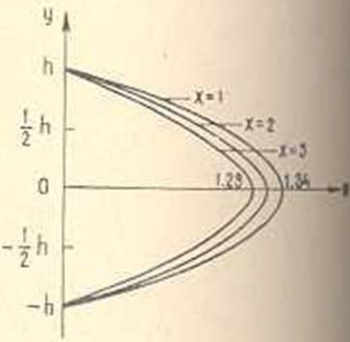
Для расчета примем следующие данные:

$$p_b=0,\ p_н=10^2\frac{кг}{м^2},\quad U_{cp}=1\frac{м}{сек},\quad k=10^{-5}\frac{м^3}{кг\,сек},$$

$$h=3\cdot 10^{-2}м,\quad \nu=10^{-4}\frac{м^2}{сек},\ \mu=10^{-2}\frac{кгсек}{м^2}.$$

Значения $u(x,y)$, $v(x,y)$ и $p(x)$ вычисляем по формулам (2.24), (2.25), (2.26).

Законы изменения неизвестных функций представлены на фиг. 2, 3, 4.



Фиг. 2

По результатам задачи и по приведенному численному примеру можно сделать следующие выводы.

1. Вдоль канала, начиная с начального участка, продольная и поперечная составляющие скорости уменьшаются.

2. Давление вдоль канала по течению уменьшается и обращается в нуль (приравнивается внешнему давлению) в некотором определенном сечении.

Фиг. 3.

Фиг. 4.

3. Зависимость давления от независимой переменной y начинается с третьего приближения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15 IV 1964

Գ. Հ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

ՄԱԾՈՒՑԻԿ ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԾԱԿՈՏԿԵՆ ՊԱՏԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՀՈՒՆՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում քննարկվում է մածուցիկ, անսեղմելի հեղուկի լամինար, հարթ ստացիոնար շարժումը ծակոտկեն պատեր ունեցող հունով: Խնդրի լուծումը բերվում է Նավե—Ստոքսի հավասարումների ինտեգրմանը տրված եզրային պայմաններով: Լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի մեթոդով: Գտնվում են անհայտ ֆունկցիաների համար առաջին երկու մոտավորությունները և ցույց է տրվում, որ մյուս մոտավորությունների գտնելը սկզբունքային դժվարություն չի ներկայացնում:

Ուսումնասիրված է կոնկրետ օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабаджанян Г. А.* и *Назарян А. Г.* Об одном решении задачи плоского ламинарного движения жидкости в открытом канале. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 1, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. МХИТАРЯН

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ УСТОЙЧИВОСТИ СТРАТИФИКАЦИИ НА ТУРБУЛЕНТНЫЙ ОБМЕН В ПРИВОДНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Турбулентному обмену в приземном слое воздуха (обмен количеством движения, влаго- и теплообмен, перенос примеси) посвящено большое количество работ советских и иностранных ученых. Вопрос этот разработан в [4, 9—12, 14, 16—18, 21, 28] и в ряде других работ. В некоторых работах [1, 3, 23, 29] показано, что профили метеорологических элементов (скорость ветра, влажность и температура воздуха) подобны и носят логарифмический характер при равновесной стратификации нижнего слоя атмосферы. Влияние неравновесных условий рассмотрено в [2, 5, 8, 9, 11, 16—18, 21, 27] и т. д. Основная турбулентная характеристика подстилающей поверхности — гидродинамическая шероховатость рассмотрена в [6, 13, 19, 20] и т. д. В работах [5—7, 15, 21, 24—26] и ряде других рассмотрены способы определения коэффициента обмена. Интересные результаты получены в работах А. М. Обухова и А. С. Монина [17, 18, 21].

Если обозначить: через u, P и E скорости ветра, турбулентного теплообмена и испарения; через k_i — коэффициенты обмена для количества движения (k_l), тепла (k_T) и влаги (k_e); c_p, ρ, T и q — удельную теплоемкость, плотность, температуру и удельную влажность воздуха; v_* — скорость трения или динамическую скорость и положить потоки количества движения, тепла и влаги в турбулентном пограничном подслое постоянными, то есть

$$k\frac{\partial u}{\partial z} = v_*^2 = \text{const}, \tag{1}$$

$$P = -c_p \rho k_T \frac{\partial T}{\partial z} = \text{const}, \tag{2}$$

$$E = -\rho k_e \frac{\partial q}{\partial z} = \text{const}, \tag{3}$$

то легко показать, что существует приводный подслой не только в поле количества движения или скорости, но и в полях температуры и влажности воздуха. Подобно тому, как определяется высота этого слоя в поле скорости из условия малости v_* на границе слоя, можно определить соответствующие высоты и слоев в полях температуры и влажности из условий малости на границе величин P и E.

Как известно, в равновесных или близких к ним условиях распределение метеорологических элементов в приземном слое носит логарифмический характер. Действительно, если исходить из известных представлений полуэмпирической теории турбулентности

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = l\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{4}$$

$$l = \varkappa z, \tag{5}$$

легко получить для скорости ветра

$$u = \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{z}{z_0}, \tag{6}$$

где z_0 — параметр шероховатости, который определенным образом связан с физической шероховатостью и представляет собой ту геометрическую высоту, на которой скорость ветра обращается в нуль при логарифмическом законе ее распределения. Здесь $\varkappa$ — постоянная Кармана.

Согласно определению, имеем

$$k = l^2\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{7}$$

Подставляя сюда (5) и (6), получим

$$k = \varkappa v_* z. \tag{8}$$

Исключая из (6) и (8) v_*, получим

$$\frac{k}{u} = \frac{\varkappa^2 z}{\ln z/z_0}. \tag{9}$$

Последние выражения показывают, что коэффициент обмена в приземном слое линейно растет с высотой.

Для определения z_0 и k данные соответствующих градиентных наблюдений группируются по интервалам скорости ветра, и точки наносятся на графики в полулогарифмической шкале. Тогда они хорошо ложатся на прямые, угловые коэффициенты которых дают величину $v_*/\varkappa$, а ординаты точек пересечения с вертикальной осью — $\ln z_0$.

Полагая в (9) $z = 1$ и подставляя характерные значения $z_0 = 10^{-4}$ для водной поверхности и $z = 10^{-2}$ для суши, получим ($\varkappa \approx 0{,}4$)

$$\begin{aligned} k_1/u_1 &= 0{,}0175 \text{ — для водной поверхности,} \\ k_1/u_1 &= 0{,}035 \text{ — для условий суши.} \end{aligned} \tag{10}$$

Если считать $v_* = \text{const}$ в равновесных условиях, независимо от вида переносимой субстанции, то по аналогии с (8) можно написать

$$k_T = \varkappa_T v_* z,\ k_e = \varkappa_e v_* z. \tag{11}$$

Это означает, что по (5) длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки, а коэффициент пропорциональности (или аэродинамическая постоянная Кармана) имеет различные значения для различных субстанций.

Тогда из (2) и (3) при (11), легко получить

$$T = -\frac{P}{c_p \rho \varkappa_T v_*} \ln z + C_1, \tag{12}$$

$$q = -\frac{E}{\rho \varkappa_e v_*} \ln z + C_2. \tag{13}$$

Здесь также можно ввести понятие параметра шероховатости, полагая $z = z_0'$ при $T = T_0$ и $z = z_0''$ при $q = q_0$.

Выражения (6), (12) и (13) показывают, что профили скорости, температуры и влажности в приземном слое подобны и имеют вид логарифмической кривой.

Многочисленные наблюдения подтверждают это.

Развитие турбулентности в температурно неоднородной среде характеризуется уже не числом Рейнольдса, а числом Ричардсона, имеющего вид

$$Ri = -\frac{g}{T} \frac{\dfrac{\partial T}{\partial z}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{14}$$

Вопрос о турбулентном обмене в этих условиях рассмотрен в работах А. М. Обухова, А. С. Монина, Д. Л. Лайхтмана, М. И. Будыко, М. П. Тимофеева и др.

Исходными и в этом случае являются соотношения (1)—(3). Если предположить, что все три коэффициента обмена k, k_T, и k_e одинаковы или их отношения постоянны в случае сверхадиабатической стратификации или инверсии, то согласно (1) — (3) профили скорости, температуры и влажности опять будут подобны, хотя и могут отличаться от логарифмической кривой.

Д. Л. Лайхтман обобщил (5), представляя длину пути перемещения в следующем виде:

$$l = \varkappa z \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\varepsilon}. \tag{15}$$

Здесь $\varepsilon < 0$ при сверхадиабатической стратификации, $\varepsilon > 0$—при инверсии. В равновесных условиях $\varepsilon = 0$. Подставляя (15) в (4) и выполняя квадратуры, получим степенной закон Д. Л. Лайхтмана

$$u = \frac{v_*}{\varkappa \varepsilon} \left[\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\varepsilon} - 1 \right]. \tag{16}$$

Или, если известно u_1 на высоте z_1,

$$u = u_1 \frac{z^{\varepsilon} - z_0^{\varepsilon}}{z_1^{\varepsilon} - z_0^{\varepsilon}}. \tag{17}$$

При этом, исходя из (7), для k получим

$$k = \varkappa v_* z_0^{1+\varepsilon} z^{1-\varepsilon}. \tag{18}$$

Или для отношения на двух высотах

$$\frac{k}{k_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon}. \tag{19}$$

Причем для k_1 на высоте z_1 легко получается

$$\frac{k_1}{u_1} = \frac{(\varkappa z_0^{\varepsilon})^2 \varepsilon z_1^{1-\varepsilon}}{z_1^{\varepsilon} - z_0^{\varepsilon}}. \tag{20}$$

М. И. Будыко вместо (15) пишет просто

$$l = \varkappa m z, \tag{21}$$

причем $m > 1$ при сверхадиабатической стратификации, $m < 1$ при инверсии и $m = 1$ равновесных условиях.

Для этой величины получено выражение

$$m = \sqrt{1 - \frac{h}{z} Ri}, \tag{22}$$

где Ri определяется формулой (22).

В этом случае для k получается простое выражение

$$k = \varkappa m v_* z. \tag{23}$$

Если через k_p обозначить значение коэффициента обмена в равновесных условиях, то по теории А. М. Обухова — А. С. Монина можно написать

$$\frac{k}{k_p} = \frac{1}{1 - \beta Ri}, \tag{24}$$

где $Ri = -z/L$, L — масштаб турбулентности. По данным авторов $\beta = 0{,}6$. М. П. Тимофеев считает значение β заниженным.

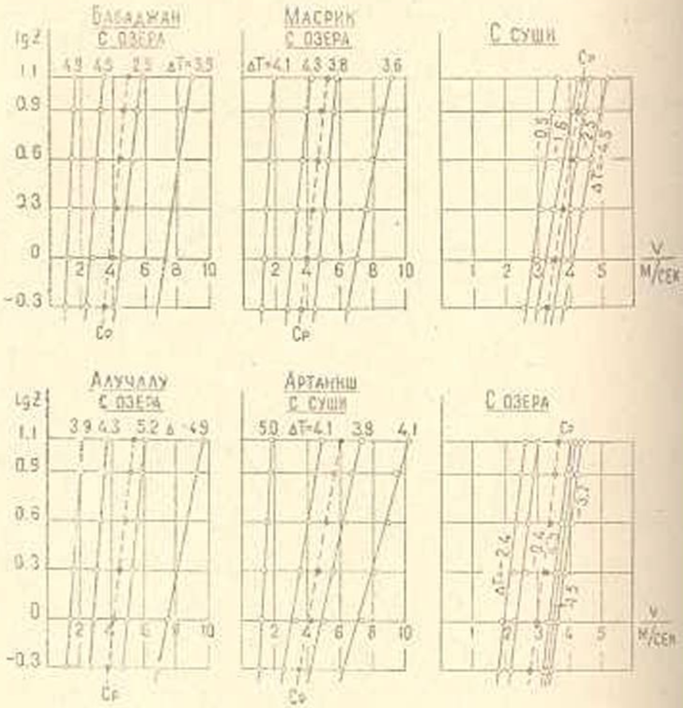
Если параметр устойчивости выразить через отношение $\Delta T/u^2$, где $\Delta T = T_0 - T_2$ — разность температур подстилающая поверхность — воздух, то отношение (24) можно представить в виде

$$\frac{k}{k_p} = 1 + A \frac{\Delta T}{u^2}. \tag{25}$$

М. П. Тимофеев получил $A = 1{,}25$.

По данным на оз. Севан имеется возможность проверить эти соотношения в различных условиях.

В течение 1957—1961 гг. проводились специальные градиентные наблюдения. Выбирая зимние наблюдения для тех воздушных потоков, которые приходят со стороны озера, и группируя их по интервалам скорости в пунктах: Бабаджан, Масрик и Алучалу, были построены профили скорости ветра в слое 12 *м* над водой. Эти профили в полулогарифмической шкале нанесены на графики на фиг. 1. На каждом



Фиг. 1. Профили скорости ветра при различных ΔT.
C_p — профиль средней скорости.

профиле указано среднее значение разности ΔT. Здесь же пунктиром даны профили средней скорости. Таким же образом построены профили скорости ветра по данным у Артанишского залива при ветрах со стороны суши. На этом же рисунке приведены профили скорости ветра при направлениях с суши и с озера, но при инверсиях.

На графики нанесены значения ΔT. Здесь также приведены профили средней скорости. В отличие от первых четырех случаев, когда $\Delta T > 0$, для этих двух случаев, когда $\Delta T < 0$, осреднение произведено по интервалам ΔT от 0 до 1, затем до 2, 3, 4 и более. Отметим, что использовано очень большое количество данных, обработано несколько тысяч лент с часовой записью на них скорости ветра на шести высотах.

Первое и самое главное, что сразу бросается в глаза при анализе этих графиков, это то обстоятельство, что точки не проявляют систематических отклонений от логарифмического закона при изменении разности температур вода — воздух в пределах $\pm 5°C$, в некоторых случаях даже больше. Параметр устойчивости при этом изменяется в достаточно широких пределах, достигая величин $\Delta T/u^2 = \pm$ (1,5–2) при малых скоростях ветра в $\pm(0,2-0,3)$ — при больших. Точки также тесно ложатся на прямые вв полулогарифмической шкале при $\Delta T \neq 0$, как и в равновесных условиях.

Тщательные измерения на суше при $\Delta T > 10°C$ показывают, что профили скорости в полулогарифмической шкале несколько искривляются с вогнутой стороны к оси ординат, то есть дополнительное развитие турбулентности по термическим причинам приводит к уменьшению вертикального градиента скорости.

В случае инверсии имеет место обратная картина. Таким образом, развитие турбулентности приводит к выравниванию профиля скорости ветра, приближая его к случаю распределения скорости движения идеальной жидкости у стенки, при этом пограничный слой с наиболее сильным изменением скорости ветра с высотой прижимается к стенке (к поверхности воды).

Анализ большого количества экспериментального материала по оз. Севан, в том числе и наблюдения на плоту, установленного с 12-метровой мачтой на открытой части озера, показал, что профили ветра во всех случаях носят логарифмический характер при изменении ΔT в указанных выше пределах $\pm 5°C$. При этом с ростом ΔT несколько уменьшается z_0, а при отрицательных ΔT несколько увеличивается, правда, в меньшей степени.

В значительной степени увеличивается угловой коэффициент прямой при росте ΔT и несколько уменьшается при отрицательном ΔT.

Таким образом, данные наблюдений подтверждают выполнимость логарифмического закона (6) в приводном слое. Только вместо $(v_*/\varkappa)$ в равновесных условиях следует использовать данные, полученные экспериментальным путем. В этом случае для k получается формула типа формулы М. И. Будыко (23).

На основании (8), (23) и (25) имеем

$$\frac{k}{k_p} = m = 1 + A\,\frac{\Delta T}{u^2}. \tag{26}$$

Обработка экспериментальных данных по оз. Севан показала, что, во-первых, $A < 1,25$ в несколько раз, почему нам представляется, что значение параметра β формулы (24) не занижено, и, во-вторых, коэффициент A несколько зависит от скорости ветра, увеличиваясь с ростом последней.

На фиг. 2 представлена зависимость (26) для различных значений скорости ветра, а в табл. 1 приведены значения коэффициента A формулы (26) в зависимости от скорости ветра.

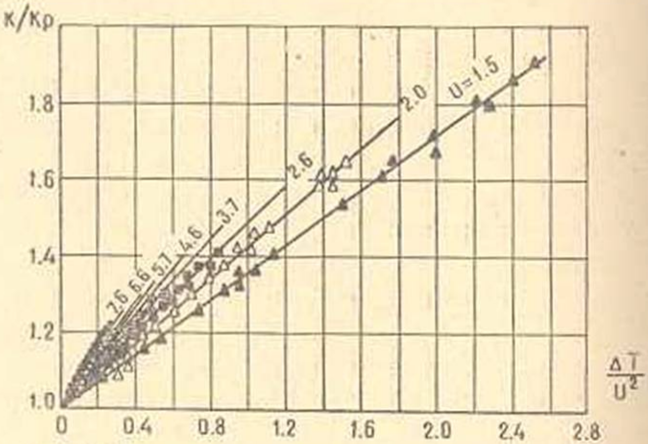
Таблица 1

Значения коэффициента A в зависимости от скорости ветра

u *м/сек*	1,5	2,0	2,6	3,7	4,6	5,7	6,6	7,6
A *м²/сек²* °C	0,36	0,43	0,49	0,56	0,62	0,66	0,69	0,71

Для средних значений скорости ветра 3—4 *м/сек* получается $A = 0{,}50 - 0{,}60$.

При отрицательных ΔT значения A получаются меньше, а зависимость от скорости ветра — слабее. Для условий суши этот коэффициент несколько больше.



Фиг. 2. Зависимость коэффициента обмена от параметра устойчивости.

Отметим одно обстоятельство. При опытах с подогревом воды в испарителе создавались $\Delta T = 8 - 10°C$, характерные для условий суши. При этом измерялось испарение, что давало возможность определить k. Хотя ясно, что испарение с поверхности одиночного испарителя при ветре с суши и большой разности ΔT будет заведомо больше, чем с обширной водной поверхности в тех же условиях, однако значения k/k_p, рассчитанные этим методом оказались не больше, чем это дается на фиг. 2, причем ночные наблюдения отбрасывались, так как поверхность суши ночью остывает довольно интенсивно, в то время, как вода в испарителе, несмотря на ее небольшую глубину, остывает медленно, хотя обогрев ночью прекращался. Таким образом, добиваясь почти полной идентичности дневного хода температур воды в испарителе и поверхности почвы, получена возможность использовать наблюдения за испарением по испарителю для определения коэффициента обмена в условиях сверхадиабатической стратификации, причем данные вполне согласуются с теми, которые получены по градиентным наблюдениям. На фиг. 2 эти точки соответствуют большим значениям $\Delta T/u^2$ ($\Delta T > 5°C$).

Сделаем еще одно замечание. Поскольку профиль ветра хорошо описывается законом (6) при различных значениях ΔT, то предполагая $v_* = \text{const}$, легко убедиться, что будет переменным $\varkappa$.

Это обстоятельство отражается формулой Д. Л. Лайхтмана

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0}{1 - \varepsilon}, \qquad (27)$$

где $\varkappa_0$ — значение $\varkappa$ при равновесных условиях ($\varepsilon = 0$).

Имея угловые коэффициенты прямых (6) при различных значениях ΔT и u, легко убедиться, что параметр ε зависит, в основном, от параметра устойчивости и несколько от шероховатости. Зависимость эта относительно слабее при отрицательных ΔT. Экспериментальные данные по оз. Севан показывают, например, что при $\Delta T = 5^\circ$ $\varkappa \approx 0{,}30$, а при $\Delta T = -5^\circ$ $\varkappa \approx 0{,}45$.

И, наконец, последнее замечание. Полученная впервые зависимость коэффициента A формулы (26) от скорости ветра, в отличие от результатов других исследований, по которым получено $A = \text{const}$, объясняется тем, что в качестве критерия устойчивости используется приближенное выражение $\Delta T/u^2$ вместо точного выражения числа Ричардсона (14). В самом деле, если в тонком приземном слое градиент температуры можно приближенно считать пропорциональным конечной разности (ΔT), то квадрат градиента скорости вряд ли можно считать пропорциональным квадрату самой скорости. Точнее было бы вместо (25) или (26) написать

$$\frac{k}{k_p} = 1 + A_0 Ri.$$

Тогда замена $A_0 Ri \approx A\Delta T/u^2$ действительно приводила бы к тому, что величина A оказывалась бы переменной, зависящей от скорости ветра.

Институт водных проблем и гидротехники МВХ Армянской ССР

Поступила 3 X 1964

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ՄԹՆՈԼՈՐՏԻ ԶՐԱՄԵՐՁ ՇԵՐՏՈՒՄ ՏՈՒՐԲՈՒԼԵՆՏ ՓՈԽԱՆԱԿՄԱՆ ՎՐԱ ՇԵՐՏԱՎՈՐՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ինչպես հայտնի է, երբ մթնոլորտի երկրամերձ շերտի հավասարակշռությունը կայուն է, կամ անտարբեր, օդերևութաբանական էլեմենտների (քամու արագության, օդի խոնավության և ջերմաստիճանի) պրոֆիլները իրար նման են լինում և ունենում են լոգարիթմական տեսք։ Իսկապես, եթե ելնենք սահմանային շերտի տեսության հիմնական (1)—(8) արտահայտություններից, ապա վերոհիշյալ էլեմենտների պրոֆիլների համար կստանանք (4), (12) (13) արտահայտությունները այն դեպքում, երբ տուրբուլենտականությունը զարգանում է համասեռ հեղուկում։

Ընդհանուր դեպքում, երբ մթնոլորտի երկրամերձ շերտը ջերմաշերտավորված է, տուրբուլենտականությունը զարգանում է նաև ջերմային պատճառներով և բնորոշվում է ոչ թե Ռեյնոլդսի, այլ Ռիչարդսոնի թվով, որն ունի (14) տեսքը։

Այս դեպքում տուրբուլենտականության գործակիցը կարելի է ներկայացնել (18), (23), (24) կամ (25) տեսքով, ըստ որում որպես կայունության հայտանիշ Ռիչարդսոնի թվի փոխարեն կարելի է օգտագործել $\Delta T/u^2$ մեծության արտահայտությունը: Այդ դեպքում (25) բանաձևի A գործակիցը ստացվում է փոփոխական, ի տարբերություն նախորդ հետազոտությունների, ըստ որոնց A—ն հաստատուն է:

Հոդվածում 1 և 2 գծագրերի վրա բերված են քամու արագության պրոֆիլները ΔT—ի տարբեր արժեքների համար, ինչպես նաև տուրբուլենտականության գործակցի փոփոխությունները, կախված կայունության հայտանիշից և քամու արագությունից: Վերջում համառոտակի շարադրված են աշխատանքի հիմնական եզրակացությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борушко И. С.* О подобии профилей метеорологических элементов в приземном слое воздуха. Труды ГГО, вып. 22, 1950.
2. *Бройдо А. Г.* Связь коэффициента внешней диффузии с параметром устойчивости приземного слоя атмосферы. Труды ЛГМИ, вып. 8, 1958.
3. *Будыко М. И.* Распределение метеоэлементов в приземном слое воздуха. Известия АН СССР, сер. Геофиз., № 4, 1946.
4. *Будыко М. И.* и *Юдин М. И.* Условия термического равновесия в атмосфере. ДАН СССР, 53, № 7, 1946.
5. *Будыко М. И., Лайхтман Д. Л., Тимофеев М. П.* Определение коэффициента турбулентного обмена в приземном слое воздуха. „Метеорология и гидрология", № 9, 1952.
6. *Виноградова О. П.* Интенсивность турбулентного обмена и параметр шероховатости морской поверхности. Труды Морск. гидрофизич. института, вып. 20, 1960.
7. *Волошинова Г. А.* Сравнение различных методов определения коэффициента температуропроводности. Труды ГГО, вып. 22, 1950.
8. *Гандин Л. С.* Сравнительный анализ некоторых методов определения коэффициента турбулентного перемешивания. Труды ГГО, вып. 16, 1949.
9. *Гурвич А. С.* О турбулентном потоке количества движения при неустойчивой стратификации приземного слоя атмосферы. Известия АН СССР, сер. Геофиз., № 11, 1961.
10. *Зубенок Л. И.* К вопросу о турбулентном теплообмене подстилающей поверхности с атмосферой. „Метеорология и гидрология", № 2, 1949.
11. *Казанский А. Б., Монин А. С.* О турбулентном режиме в приземном слое воздуха при неустойчивой стратификации. Известия АН СССР, сер. Геофиз., № 6, 1958.
12. *Кибель И. А.* К теории термической турбулентности в атмосфере. „Метеорология и гидрология", № 2, 1946.
13. *Кузьмин П. П.* О шероховатости водной поверхности как фактора испарения и конвективного теплообмена. Труды ГОИН, вып. 1, 1947.
14. *Лайхтман Д. Л., Тимофеев М. П.* Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. Труды ГГО, вып. 20, 1949.
15. *Лайхтман Д. Л.* Новый метод определения коэффициента турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 37, 1952.
16. *Лайхтман Д. Л.* Физика пограничного слоя атмосферы. Гимиз, Л., 1961.
17. *Монин А. С.* и *Обухов А. М.* Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Труды Геофиан, 24, 1954.
18. *Монин А. С.* Полуэмпирическая теория турбулентной диффузии. Труды Геофиан, 33, 1956.

19. *Мхитарян А. М.* и др. Характеристики турбулентного обмена приводного слоя, оз. Севан. Известия АН АрмССР, серия ТН, № 1, 1959.
20. *Мхитарян А. М.* К вопросу об определении испарения с поверхности оз. Севан. ДАН АрмССР, 30, № 3, 1960.
21. *Обухов А. М.* Турбулентнось в температурно-неоднородной атмосфере. Труды Института теорет. геофиз., 1, 1946.
22. *Огнева Т. А.* О распределении метеоэлементов над водоемами. Труды ГГО, вып. 59, 1956.
23. *Парфенова Л. В.* К вопросу о подобии профилей метеорологических элементов. Труды ГГО, вып. 39, 1955.
24. *Розеншток Ю. Л.* Автоматическое устройство для измерения и регистрации коэффициента обмена и турбулентных потоков тепла и влаги. Метеорология и гидрология, 8, 1961.
25. *Ткаченко А. В.* К вопросу об определении коэффициента турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 60, 1956.
26. *Bowden K. F.* Measurements of turbulent fluctuations and Reynolds stresses in a tidal current. Proc. Roy. soc., 273, 1956.
27. *Jnoue E.* The effects of termal stratification on turbulent diffusion in the atmospheric surface layer. Adv. Geoph., 6, 1959.
28. *Priestly G. H.* Free and forced convection on the ground. Quart. J. Roy. Soc., 238, 1957.
29. *Wagner N. K.* An analysis of some over-water wind profile measurements. Trans. Amer. Geophys. Union, 39, 1958.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

Н. А. ПЕТРОСЯН

К ВОПРОСУ О ТРАНСФОРМАЦИИ ПОЛЯ ВЕТРА НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ УЧЕТЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТОКОВ

Известно небольшое количество работ [1, 2, 3 и др.], посвященных вопросу о трасформации поля ветра под влиянием подстилающей поверхности, при этом некоторые физические стороны явления рассмотрены в работе [4].

Постановка и алгоритм численного решения задачи приведены в статье автора [5], где рассматривалась следующая физическая схема: воздушный поток переходит с одной подстилающей поверхности на другую. Под влиянием характеристик новой подстилающей поверхности происходит изменение горизонтальной составляющей скорости, возникают вертикальные токи. В рамках стационарной плоской задачи при наличии вертикального турбулентного обмена рассматривается влияние вертикальных скоростей на процесс трансформации поля ветра. В настоящей работе приводятся результаты детальных расчетов, проведенных на электронной вычислительной машине „БЭСМ—2“.

§ 1. Введение

В отличие от методов пограничного слоя, где обычно решается двухслойная задача и далее склеиваются на границе внутреннего пограничного слоя величины и их производные, здесь задача решается по всей толще атмосферы. При этом исходим из того, что характер коэффициента $k(z)$ турбулентного обмена на достаточно большой высоте не должен зависеть от подстилающей поверхности (должен быть единым для воды и для суши). И так как в дальнейнейшем нас интересует процесс над водной поверхностью, $k(z)$ взято на большой высоте по уравнению

$$k(z) = k_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-m_b}, \tag{1.1}$$

так, чтобы при $x \to \infty$ для скорости получился бы профиль

$$u_\infty(z) = u_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^{m_b}, \tag{1.2}$$

где u_1 и k_1 — значения скорости и коэффициента турбулентного обмена на высоте z_1. В принципе ход расчетов не изменится, если дан другой профиль для коэффициента турбулентного обмена. Для удобства задания „начального" профиля при проведении расчетов система уравнений и граничные условия записываются в безразмерном виде. С этой целью введем следующие масштабы: V — для скоростей, K — для коэффициента турбулентного обмена, $\frac{K}{V}$ — для координат x и z. Тогда, если принять обозначения

$$u = V\bar{u}(\bar{x}\,\bar{z}), \quad k = K\bar{k}(\bar{z}), \quad w = V\bar{w}(\bar{x}\,\bar{z}),$$

$$x = \frac{K}{V}\bar{x}, \qquad z = \frac{K}{V}\bar{z}, \tag{1.3}$$

где $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{k}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$ — безразмерные величины, уравнения задачи, приведенные в работе [5], примут следующий безразмерный вид:

$$\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z}, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Граничные условия соответственно будут

$$\begin{aligned} &u(x,z)\Big|_{x=0} = u_0(z), \qquad V^2k\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = v_*^2, \\ &u(x,z) - u_\infty(z) \to 0 \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad w(x,z)\Big|_{z=0} = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где ради простоты опущены штрихи.

Масштабы при безразмерных величинах V и K определяются из условия, что при $x \to \infty$ над водной поверхностью коэффициент турбулентного обмена и скорость ветра можно представить в виде степенных зависимостей, имеющих вид

$$V = \sqrt{u_1^b k_1^b}, \qquad K = k_1^b\left(\frac{k_1^b}{u_1^b}\right)^{\frac{1-m_b}{2m_b}}. \tag{1.6}$$

Можно получить некоторую физическую интерпретацию величины V, используя второе из граничных условий (15) при $x \to \infty$. Действительно, в силу обозначений (1.3) из соотношений (1.1)—(1.2) можем получить

$$u = z^{m_b}, \quad k = z^{1-m_b}, \tag{1.7}$$

тогда, подставляя (1.7) во второе граничное условие (1.5) для V получим

$$V = \frac{v_*}{\sqrt{m_b}}.$$

С учетом последнего соотношения вместо второго из граничных условий (1.5) будем иметь

$$k\frac{\partial u}{\partial z} = m_b. \tag{1.8}$$

Прежде чем записать уравнение в конечно-разностном виде, произведем замену переменных, обозначая

$$\frac{\partial z}{k} = d\zeta. \tag{1.9}$$

Теперь согласно (1.7) из (1.9) получим связь z и ζ в виде

$$z = (\zeta m_b)^{\frac{1}{m_b}} \quad \text{или} \quad \zeta = \frac{z^{m_b}}{m_b}. \tag{1.10}$$

Нетрудно убедиться, что умножая теперь уравнения задачи на k используя его выражение (1.7) и далее представляя полученные уравнения в конечно-разностном виде, получим систему неявных конечно-разностных уравнений, приведенных в работе [5]*

$$\begin{gathered} u_i^0 - u_i^1 = -d_0, \\ cu_i^{j+1} - b_i^j u_i^j + a_i^j u_i^{j-1} = d_i^j; \quad j = 1, 2 \cdots N-1, \\ u_i^N = u_{i-1}^N \end{gathered} \tag{1.11}$$

для горизонтальной скорости и

$$\begin{gathered} w_i^0 = 0 \quad (w \text{ на высоте } z = \varepsilon), \\ w_i^{j+1} = w_i^j - A^{j-1}(u_i^j - u_{i-1}^j) \end{gathered} \tag{1.12}$$

для вертикальной скорости.

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered} c = \frac{1}{\Delta\zeta}; \quad b_i^j = -\left(w_{i-1}^j - \frac{2}{\Delta\zeta} - Au_{i-1}^j\right), \\ a_i^j = \frac{1}{\Delta\zeta} - w_{i-1}^j, \quad d_i^j = A(u_{i-1}^j)^2, \end{gathered} \tag{1.13}$$

$$A = \frac{\Delta\zeta}{\Delta x}(\zeta m_b)^{\frac{1-m_b}{m_b}}, \quad d_0 = \Delta\zeta m_b.$$

Системы уравнений (1.11)—(1.12) при (1.13) решаются методом прогонки [6].

В силу замены переменных (1.9) расчетная сетка получается такой, что по переменной ζ (по вертикали) имеем равномерную сетку,

* В работе [5] уравнения (2.13)—(2.15) приведены в размерных координатах x и z.

а по z в приводном слое густота слоев больше, чем в верхних слоях. Этим обеспечивается более высокая точность расчетов в той части профиля скорости, где он претерпевает сильные изменения (в тонком приводном слое).

Как показывают уравнения (1.11)—(1.13), в „начальном“ сечении, то есть при $x=0$, нужно иметь распределения не только горизонтальной, но и вертикальной составляющей скорости. Однако, задавать вертикальную скорость в „начальном“ сечении как второе условие наряду с первым условием в (1.5), не позволяет порядок уравнений системы (1.4). При иной постановке задачи, когда в первое уравнение (1.4) входит слагаемое типа $k\partial^2 u/\partial x^2$ (горизонтальный турбулентный обмен), можно было бы задать и второе условие на одном конце. Но известно, что при этом задача значительно усложняется. Поэтому при $x=0$ вертикальную скорость определяем по уже заданному профилю горизонтальной скорости, по методу, приведенному в работе [7], тем самым согласуя их между собою, что более разумно при данной постановке задачи. Метод определения вертикальной скорости в вышеупомянутой работе заключается в следующем: если из второго уравнения системы (1.4) подставить значение $\partial u/\partial x$ в первое, то для определения w в „начальном“ сечении получим обыкновенное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$w' - \frac{1}{u_0}\frac{\partial u_0}{\partial z} w = -\frac{1}{u_0}\frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u_0}{\partial z}, \qquad (1.14)$$

решение которого в новых переменных, с учетом (1.7), запишется в виде

$$w = -u_0\left[\frac{1}{u_0^2}\frac{\partial u_0}{\partial \zeta}\Big|_1^{\zeta} + 2\int_1^{\zeta}\frac{1}{u_0^3}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \zeta}\right)^2 d\zeta\right], \qquad (1.15)$$

при этом постоянная интегрирования определена из четвертого условия в (1.5).

При проведении расчетов интеграл, входящий в (1.15), рассчитан приближенно по формуле трапеции.

§ 2. Экспериментальное исследование вычислительной устойчивости схемы

С целью исследования вопроса о близости решения конечно-разностной схемы к решению дифференциального уравнения были проведены следующие вычисления: дробление шага Δx; изменение высоты H, ограничивающей слой, в пределах которого происходит трансформация скорости ветра; дробление шага $\Delta\zeta$; изменение величины ζ_0 (та минимальная высота, начиная с которой проводятся расчеты).

1. Дробление шага Δx. Производились вычисления с шагом $\Delta x = 50$ *м* и $\Delta x = 25$ *м*. Сравнение результатов этих вычислений показало, что максимальные расхождения вблизи берега могут быть до 5% для вертикальной составляющей и доли процента для горизонтальной составляющей скорости. Было произведено дополнительное дробление до $\Delta x = 10$ *м*. Расхождение последнего случая с $\Delta x = 25$ *м* оказалось менее двух процентов для вертикальной скорости и доли процента для горизонтальной скорости. Принимая во внимание слабое влияние вертикальной составляющей скорости на горизонтальную составляющую, было решено считать $\Delta x = 25$ *м* за допускаемый шаг.

2. Изменение высоты H. Были произведены экспериментальные расчеты при $H = 170$ *м* и $H = 1810$ *м*. Никаких заметных расхождений не было замечено при сравнении результатов этих расчетов. Следовательно, неточный выбор высоты H никакого влияния не может оказать на точность решения.

3. Дробление шага $\Delta\zeta$. Прозводились вычисления при дроблении принятого интервала изменения $\zeta_H = 136{,}6$ на 21, 42, 84 частей. Разница вертикальной скорости в „начальном" сечении при дроблении на 21 и на 42 оказалось существенной. Это связано, вероятно, с тем, что схема является схемой первого порядка точности по ζ (это сделано для достижения абсолютной устойчивости схемы). Разница вертикальной скорости при дроблении шага на 42 и на 84 частей оказалась порядка 10%. Принимая во внимание слабую зависимость горизонтальной скорости от вертикальной (в последнем случае расхождение по горизонтальной скорости получается до двух процентов), сочли возможным остановиться на дроблении на 42 части.

4. Зависимость от ζ_0 или от ε, соответствующего ζ_0. Зависимость решения конечно-разностной схемы от ε оказалась наиболее существенной. Это связано со следующим обстоятельством: если брать $\varepsilon \to 0$ $(z \to 0)$, то при любом „начальном" профиле, не имеющем в окрестности $z = 0$ вида

$$u_0 = z^{m_b} c_1, \tag{2.1}$$

получим, что $w \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть

$$u_0(z) = cz^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha \neq m_b. \tag{2.2}$$

Докажем, что $w(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Действительно, запишем решение уравнения (1.11) в виде

$$w = -u_0 \int\limits_{\varepsilon}^{z} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{dz}{u_0^2}. \tag{2.3}$$

Положим $u_0 = cz^{\alpha}$, тогда числитель подынтегрального выражения (2.3) с учетом (1.1) примет вид

$$ck_1 \frac{\partial}{\partial z} z^{1-m_b} \frac{\partial u_0}{\partial z} = \alpha c k_1 (\alpha - m_b) z^{\alpha - m_b - 1}.$$

Следовательно, после несложных преобразований с учетом (2.2) и последнего выражения, вместо (2.3) получим

$$w = \frac{k_1 \alpha (\alpha - m_b)}{\alpha + m_b} z^{\alpha} \left[z^{-\alpha - m_b} - \frac{1}{z^{\alpha + m_b}} \right]. \tag{2.4}$$

Отсюда видно, что при $z \to 0$, $w \to \infty$. Хотя z к нулю не стремится, оно бывает малым и тогда естественно, что при малых z вертикальные скорости могут принимать большие значения, если „начальный" профиль не имеет соответствующего (2.1) вида. Так как при малых z, „начальная" скорость претерпевает сильные изменения и ее измерять трудно, это может привести к неточностям в задании „начального" профиля в приводном слое, тем самым будет нарушен закон (2.1), и вертикальные скорости могут быть очень большими, при этом сильно неустойчивыми.

Расчеты показали, что для „начальных" скоростей, взятых из графика, тем самым не очень точных, в результате малых изменений z могут происходить сильные изменения вертикальных скоростей. При этом несмотря на сильные изменения последних (в 2—3 раза), вычисление величины горизонтальной скорости оказывается устойчивым.

Вряд ли в природе имеет место такая неустойчивость вертикальных токов. Возможно, что эта неустойчивость связана с тем, что в работе принята неизменность коэффициента турбулентного обмена по горизонтали и ее независимость от составляющих скоростей u и w. В таком случае вертикальные токи как бы берут на себя функции коэффициента турбулентного обмена. Если задать „начальный" профиль около поверхности по закону (2.1), неустойчивости вертикальных скоростей в зависимости от z можно избегнуть. Очевидно, однако, что прием этот является искусственным и не может никак изменить объективного положения о неустойчивости вертикальных скоростей при малых изменениях горизонтальной скорости в начальном сечении.

В связи с изложенным, а также принимая во внимание слабую зависимость горизонтальной скорости от вертикальной, по-видимому, в практических расчетах, когда требуется точность порядка 10%, целесообразно пользоваться уравнением вида

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2.5}$$

решение которого определяется устойчиво по всем параметрам. В тех же случаях, когда вертикальные скорости могут быть большими (например, когда до „начального" сечения воздушный поток обтекает какое-нибудь препятствие), и является необходимым их точное вычисление, нужно изменить саму постановку задачи, то есть рассматривать коэффициент турбулентного обмена переменным по горизонтали и зависящим от составляющих скоростей, а также, вероятно, сохранить уравнение движения по вертикальной оси.

В настоящей работе для определенного класса „начальных" профилей расчеты проведены и по уравнению (2.5), и по уравнению с учетом вертикальных токов.

§ 3. Анализ полученных результатов

Предложенная схема решения задачи предусматривает произвольное „начальное" распределение $u_0(\zeta)$. При проведении расчета здесь взят класс распределений в следующем виде:

$$u_0 = \gamma \zeta^{m_c / m_b} \tag{3.1}$$

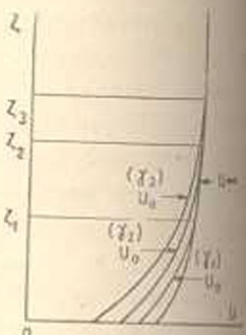
для таких высот, для которых $\gamma \zeta^{m_c/m_b} < m_b \zeta$, и

$$u_0 = m_b \zeta \tag{3.2}$$

для остальных высот.

„Начальные" распределения вида (3.1)—(3.2) имеют силу для водоемов, расположенных, в основном, в равнинных районах. Учитывая, что в постановке задачи, начиная с некоторой высоты „начальная" скорость совпадает с предельной по горизонтали (то есть влияние подстилающей поверхности распространяется до определенной высоты), можно получить выражение для γ. А именно, обозначим точку совпадения „начального" и предельного профилей через $\zeta_{\text{стыка}}$ и учтем, что предельный профиль имеет вид

$$u_\infty = m_b \zeta. \tag{3.3}$$



Фиг. 1. Схема задания „начального" профиля.

Тогда из равенства „начальной" и предельной скоростей в точке стыка можно получить

$$\gamma = m_b \zeta_{\text{ст}}^{\,1 - \frac{m_c}{m_b}}. \tag{3.4}$$

Последнее выражение показывает, что параметр γ в задаче характеризует различные высоты для стыка „начального" и предельного профилей (фиг. 1) и определяется по заданному значению параметра шероховатости водной поверхности.

Прежде чем перейти к основным расчетам, был рассчитан один вариант с целью выяснения на каком расстоянии от берега можно получить предельный профиль, рассчитанный теоретически по (3.3). Поэтому этот вариант рассчитывался до расстояния $x = 50$ *км*. Оказалось, что предельный профиль получается полностью на расстоянии

$x=36$ *км* от берега. В табл. 1 приводятся безразмерные скорости, рассчитанные теоретически и результаты расчетов численного решения, при этом последние приводятся с той точностью, с какой они получились при счете.

Таблица 1

Предельные безразмерные профили скоростей рассчитанные теоретически (u_∞) и на расстоянии $x=36$ *км* по счету (u_{36})

z, *м*	u_∞	u_{36}	z, *м*	u_∞	u_{36}
0,05	6,06	6,0598695	7,84	10,042	10,043199
0,09	6,422	6,4218695	11,14	10,404	10,405910
0,16	6,784	6,7838725	15,67	10,766	10,768942
0,26	7,146	7,1458803	21,78	11,128	11,132412
0,43	7,508	7,5078962	30,21	11,490	11,496464
0,69	7,870	7,8699253	41,13	11,852	11,861264
1,07	8,232	8,2319754	55,47	12,214	12,226986
1,66	8,594	8,5940581	73,56	12,576	12,593773
2,50	8,956	8,9561910	98,41	12,938	12,961680
3,78	9,318	9,3183992	130,35	13,300	13,330574
5,44	9,680	9,6807187	170,21	13,662	13,700000

Приведенные в таблице данные показывают, что предельный профиль получен с достаточно большой точностью.

Для этого варианта была рассчитана относительная трансформация по формуле*

$$\sigma=\left[1-\frac{\max|u_\infty-u|}{\max|u_\infty-u_0|}\right]100\% \tag{3.5}$$

на разных расстояниях от берега. Ниже, в табл. 2 приводятся эти результаты.

Таблица 2

x, *км*	1	6	16	26	36
σ, %	36,6	75,8	91,5	97,3	100

Как показывают данные табл. 2, основная часть трансформации получается уже на расстоянии $x=6$ *км* от берега.

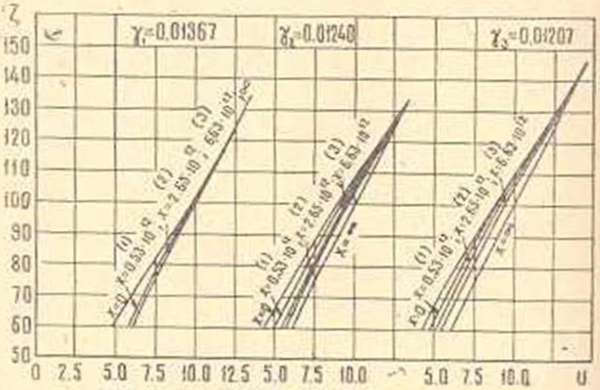
Далее были произведены расчеты для трех различных значений γ ($\gamma=0{,}0137$; $0{,}0124$; $0{,}0121$). Результаты этих расчетов показывают следующее.

Вертикальные нисходящие токи в данном случае по абсолютной величине получились небольшими (0,5 *см/сек*—максимально). Наибольшая ошибка из-за неучета таких нисходящих скоростей в величине горизонтальной скорости составляет 1—2%. Это значит, что при проведении для практических целей расчетов, относящихся к водоемам, для которых „начальный“ профиль может быть описан степенным законом (3.1), без ущерба для точности можно использовать решение уравнения (2.5).

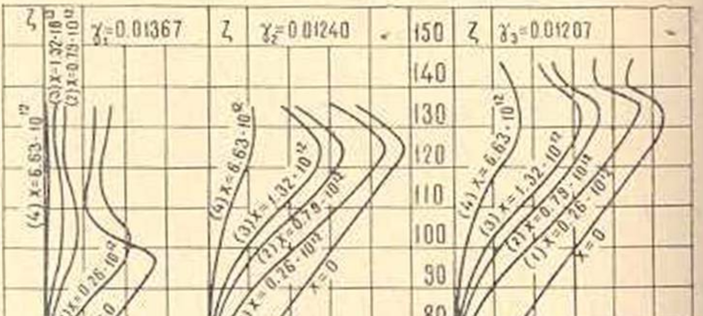
* Эта формула приведена в статье [8] с опечатками.

Качественно нисходящие токи ускоряют трансформацию гори-зонтальной скорости. Количественный вывод о сокращении длины трансформации на величину $(1-m_b)$, полученный ранее нами в ра-боте [9] из аналитического решения линеаризированной задачи только для больших x, здесь, по детальным расчетам, получается для всех расстояний от стыка двух подстилающих поверхностей.

С целью иллюстрации полученных результатов на фиг. 2 и 3 приводятся вертикальные профили безразмерных горизонтальных и вертикальных скоростей для различных значений параметра γ на раз-ных расстояниях от берега. Кривые распределения вертикальных скоростей построены по их усредненным значениям по трем точкам



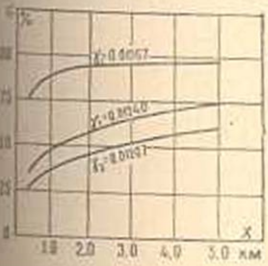
Фиг. 2. Вертикальные профили безразмерных гори-зонтальных скоростей на разных расстояниях от берега: (1) $x=0,4$ *км*; (2) $x=2$ *км*; (3) $x=5$ *км*.



Фиг. 3. Распределение по высоте безразмерных вертикальных скоростей на разных расстояниях от берега: (1) $x=0,2$ *км*; (2) $x=0,6$ *км*; (3) $x=1,0$ *км*; (4) $x=5$ *км*.

Кривые на фиг. 3 показывают, что уже на расстоянии 500—600 м от берега вертикальные токи уменьшаются в 4—5 раза, а излом в профилях вертикальных нисходящих скоростей связан со значением высоты стыка $\zeta_{стыка}$ „начального" и предельного профилей (фиг. 1

Кривые распределения по горизонтали относительной трансформации для рассчитанных вариантов, полученные по формуле (3.5), приведены на фиг. 4. Этот рисунок показывает, что с уменьшением γ (с увеличением высоты стыка „начального" и предельного профилей) уменьшается доля трансформации на данном расстоянии.



Фиг. 4. Распределение по горизонтали относительной трансформации.

Сравнивая значения σ, приведенные на фиг. 4 с данными табл. 2, можно утверждать, что во всех наших расчетах (для класса „начальных" профилей вида (3.1)) предельный профиль можно было бы получить на расстоянии около 36 *км* от берега. Об этом свидетельствует также значение γ для того варианта, когда рассчитывали предельный профиль, а именно $\gamma = 0{,}0126$. Исходя из этого, можно утверждать, что при трансформации профиля скорости ветра над водной поверхностью, для которых „начальный" профиль имеет вид (3.1)—(3.2), предельный профиль получается на расстоянии примерно 30 *км* от берега, при этом основная часть трансформации, 75 % в среднем, получается уже на расстоянии 5 *км* от берега.

Институт водных проблем и гидротехники
МВХ Армянской ССР

Поступила 24 VII 1964

Ն. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՋՐԱՅԻՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ՔԱՄՈՒ ԴԱՇՏԻ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ՝ ՈՒՂՂԱՁԻԳ ՀՈՍՔԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է ուղղաձիգ հոսքերի հաշվառման դեպքում քամու դաշտի ձևափոխության հարցը։

Խնդրի ոչ-գծային հավասարման թվային լուծումը որոշ դեպքերի համար կատարվել է էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի վրա։

Հաշվումների հիման վրա հետազոտվում է աշխատության մեջ առաջարկված լուծման սխեմայի հաշվային կայունությունը։

Դիտարկված «սկզբնական» պրոֆիլի համար կատարված հաշվումները ցույց են տալիս հետևյալը՝ քամու դաշտի ձևափոխությունը հիմնականում ավարտվում է երկու ծածկույթների բաժանման գծից մոտավորապես 5 կմ *հեռավորության վրա, որից հետո ձևափոխությունը շարունակվում է կատարվել շատ դանդաղ և լրիվին դադարում է 25—30* կմ *հեռավորության վրա։*

Քամու հորիզոնական արագությունը աճելու հետևանքով առաջացած վերընթաց արագությունները ավելի դեպքում ստացվում են ոչ մեծ՝ ամե-

նաշատը 0.5 սմ/վրկ և դրանց ազդեցությունը հորիզոնական արագության մեծության վրա նույնպես մեծ չէ (ամենաշատը 1—2 տոկոս)։

Նախորդ աշխատություններում տրված եզրակացությունն այն մասին, որ վարընթաց արագությունները արագացնում են հորիզոնական արագության ձևափոխությունը (1—m_b) մեծությամբ, բոլոր հնարավորությունների համար այստեղ ճշգրտվում է։

Աշխատության մեջ կատարված հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ բոլոր այն դեպքերում, երբ «սկզբնական» պրոֆիլը հնարավոր է ներկայացնել (3.1)—(3.2) տեսքով, գործնականում կատարվող հաշվումների ժամանակ նպատակահարմար է օգտագործել (2.5) հավասարման լուծումը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гандин Л. С.* К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33 (95), 1952.
2. *Дмитриев А. А.* и *Соколова И. Н.* Схема оценки изменений скорости и профиля ветра при переходе с суши на море. Труды морск. гидрофиз. ин-та, 4, 1954.
3. *Зайцев А. С.* Трансформация скорости ветра над ограниченными водоемами. Материалы первого научно-технического совещания по изучению Куйбышевского водохранилища. Куйбышев, 1963.
4. *Тимофеев М. П.* Основные вопросы физики нижнего слоя воздуха над водоемами. Автореферат докторской диссертации, Л., 1962.
5. *Петросян Н. А.* Влияние вертикальных нисходящих токов на процесс трансформации поля ветра. ДАН АрмССР, 37, № 4, 1963.
6. *Годунов С. К.* и *Рябенький В. С.* Введение в теорию разностных схем. М., 1962.
7. *Браиловская И. Ю., Чудов Л. А.* Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. В книге: Вычислительные методы и программирование. Изд. МГУ, 1962.
8. *Петросян Н. А.* Об одном численном решении нелинейного уравнения трансформации поля ветра. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, 4, 1963.
9. *Петросян Н. А.* К вопросу о трансформации профиля ветра под влиянием подстилающей поверхности. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 3, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Э. А. АКОПЯН

СИНТЕЗ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА С ОГРАНИЧЕНИЕМ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЕДОМОГО ЗВЕНА

В практике часто встречаются задачи синтеза механизмов, в которых заданными условиями являются:

а) закон движения ведущего звена $\varphi=\varphi(t)$, где φ — входная координата механизма, t — время;

б) пределы изменения выходной координаты механизма $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_m$;

в) время t_m перемещения ведомого звена от одного крайнего положения до другого;

г) модуль наибольшего значения скорости ведомого звена $\max\left|\frac{d\psi}{dt}\right| = V$ в интервале движения $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_m$;

д) модуль наибольшего значения ускорения ведомого звена $\max\left|\frac{d^2\psi}{dt^2}\right| = W$ в том же интервале.

В общем случае, когда задана функция положения механизма в явном виде

$$\psi = F(\varphi,\ a,\ b,\ c\cdots), \tag{1}$$

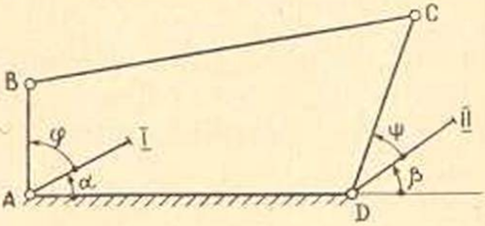
где $a,\ b,\ c\cdots$ — неизвестные параметры механизма, задача решается с помощью системы уравнений (2):

$$\left.\begin{array}{ll}
(\text{а}) & F[\varphi=\varphi(t=0),\ a,\ b,\ c\cdots]=0,\\
(\text{б}) & F[\varphi=\varphi(t=t_m),\ a,\ b,\ c\cdots]=\psi_m,\\
(\text{в}) & \left|\frac{d}{dt}F[\varphi=\varphi(t=t_1),\ a,\ b,\ c\cdots]\right|=V,\\
(\text{г}) & \left|\frac{d^2}{dt^2}F[\varphi=\varphi(t=t_2),\ a,\ b,\ c\cdots]\right|=W,\\
(\text{д}) & \frac{d^2}{dt^2}F[\varphi=\varphi(t=t_1),\ a,\ b,\ c\cdots]=0,\\
(\text{е}) & \frac{d^3}{dt^3}F[\varphi=\varphi(t=t_2),\ a,\ b,\ c\cdots]=0.
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Если в результате решения уравнений получится $t_1 > t_m$ или $t_2 > t_m$, то, согласно правилам определения наибольшего значения функций в заданном интервале, следует принимать $t_1 = t_m$, или $t_2 = t_m$. Аналогично, если получится $t_1 < 0$ или $t_2 < 0$, необходимо принимать $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$.

Таким образом, четыре параметра механизма можно определить по поставленным кинематическим условиям с помощью системы уравнений (2), а остальные параметры можно определить, исходя из дополнительных требований и конструктивных соображений.

Однако, данный способ решения нерационален, ибо функции положения механизмов в явном виде всегда сложны и неудобны для решения задач рассмотренным образом.



Фиг. 1.

Например, для одного из простейших механизмов—шарнирного четырехзвенника (фиг. 1), эта функция имеет следующий вид:

$$\psi + \beta = \operatorname{arctg} \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\cos(\varphi + \alpha) - \dfrac{1}{a}} \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos\vartheta}{\dfrac{c}{b} - \sin\vartheta}, \tag{3}$$

где

$$\sin\vartheta = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - 1}{2bc} + \frac{a}{bc}\cos(\varphi + \alpha),\ a = \frac{l_{AB}}{l_{AD}},\ b = \frac{l_{BC}}{l_{AD}},\ c = \frac{l_{CD}}{l_{AD}}. \tag{3a}$$

Применять функцию положения в неявном виде, что довольно упрощает выражение взвешенной разности при приближенном синтезе механизмов с заданным законом движения ведомого звена, в данном случае нельзя, ибо в каждом уравнении, полученном таким путем, кроме неизвестных параметров и входной координаты, будет участвовать также выходная координата, закон изменения которой по условиям синтеза не задается. Следовательно, каждое уравнение, помимо неизвестных параметров, включает одно дополнительное неизвестное, и задача становится неразрешимой.

Решение таких задач можно свести к выбору закона движения ведомого звена, удовлетворяющего заданным условиям движения, а параметры механизма определить известными методами приближенного синтеза.

Такой метод широко применяется в синтезе кулачковых механизмов, и для подбора закона движения ведомого звена можно пользоваться таблицей законов, приводимой в [2].

Например, для линейного закона изменения ускорений ведомого звена имеем

$$\psi = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3, \tag{4}$$

где коэффициенты A_0, A_1, A_2 и A_3 определяются из системы уравнений (5)

$$\left.\begin{aligned} & A_0 = 0, \\ & A_1 t_m + A_2 t_m^2 + A_3 t_m^3 = \psi_m, \\ & A_1 + 2A_2 t_1 + 3A_3 t_1^2 = V, \\ & 2A_2 + 6A_3 t_1 = 0, \\ & 2A_2 = W, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

из решения которой получаем

$$\left.\begin{aligned} & A_0 = 0, \\ & A_1 = \frac{\psi_m}{t_m} - \frac{W}{2} t_m - 2A_3 t_m^2, \\ & A_2 = \frac{W}{2}, \\ & A_3 = \frac{1}{2t_m^3}\left[\psi_m - V t_m - \frac{W}{2} t_m^2 \pm \sqrt{\left(\psi_m - V t_m - \frac{W}{2} t_m^2\right)^2 - \frac{W^2}{3} t_m^4}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Таким образом, решение задач синтеза механизмов с ограничением скоростей и ускорений ведомого звена сводится к выбору закона движения последнего, после чего можно определить параметры механизма известными методами приближенного синтеза.

Но в отдельных случаях такую задачу можно решить без подбора закона движения. Ниже приводится такое решение задачи синтеза шарнирного четырехзвенника, применяемого в приводе шлюзовых ворот. В данном случае решение облегчается тем, что угол размаха коромысла $\psi_m = 90^\circ$, а крайние положения механизма совпадают с мертвыми положениями. Обеспечение последнего условия необходимо для предотвращения ударов при разгоне и остановке механизма. Такой механизм в крайних положениях приведен на фиг. 2.

Из треугольников AC_1D и AC_2D имеем

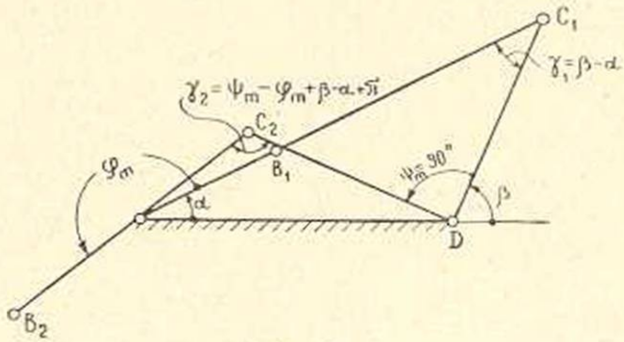
$$\cos\beta = \frac{(a+b)^2 - c^2 - 1}{2c}, \quad \sin\beta = -\cos(\psi_m + \beta) = \frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2c}. \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \frac{(a+b)^2 - c^2 + 1}{2(a+b)}, \quad \sin\alpha = \frac{c\sin\beta}{(a+b)} = \frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2(a+b)}, \tag{8}$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \frac{(a+b)^2 + c^2 - 1}{2c(a+b)},$$
$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sin\beta}{a+b} = \frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2c(a+b)}; \qquad (9)$$

$$\cos(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha) = -\cos\gamma_2 = \frac{1 - c^2 - (b-a)^2}{2c(b-a)},$$
$$\sin(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha) = -\sin\gamma_2 = \frac{1 + c^2 - (a+b)^2}{2c(b-a)}; \qquad (10)$$

$$\cos(\varphi_m + \alpha) = -\cos(\varphi_m + \alpha - \pi) = \frac{c^2 - 1 - (b-a)^2}{2(b-a)},$$
$$\sin(\varphi_m + \alpha) = -\sin(\varphi_m + \alpha - \pi) = \frac{1 + c^2 - (a+b)^2}{2(b-a)}. \qquad (11)$$



Фиг. 2.

Неявная функция положения механизма имеет следующий вид:

$$2ac\cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha) + 2a\cos(\varphi + \alpha) -$$
$$- 2c\cos(\psi + \beta) + b^2 - a^2 - c^2 - 1 = 0, \qquad (12)$$

откуда

$$c\left[\sin(\psi + \beta) - a\sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\right]\frac{d\psi}{d\varphi} - a\left[\sin(\varphi + \alpha) -\right.$$
$$\left. - c\sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\right] = 0, \qquad (13)$$

$$c\left[\sin(\psi + \beta) - a\sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\right]\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} +$$
$$+ c\left[\cos(\psi + \beta) - a\cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\right]\left(\frac{d\psi}{d\varphi}\right)^2 +$$
$$+ 2ac\cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\frac{d\psi}{d\varphi} - a\left[\cos(\varphi + \alpha) + c\cos(\psi - \varphi + \beta - \alpha)\right] = 0. \qquad (14)$$

Условие обеспечения угла размаха $\psi_m = 90°$ формулируется следующим образом:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = \left[\frac{(a+b)^2 - c^2 - 1}{2c}\right]^2 + \left[\frac{1 + c^2 - (b-a)^2}{2c}\right]^2 = 1. \tag{15}$$

Из практики проектирования механизмов известно, что максимальные ускорения ведомого звена, при колебательном движении последнего, возникают в положениях, близких к крайним. Исходя из этого, при первом приближении для рассматриваемого четырехзвенника можно принять

$$0 < \left.\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right|_{\substack{\varphi=0\\ \psi=0}} = \max\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{a}{c}\,\frac{\cos\alpha + c\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta - a\sin(\beta-\alpha)}; \tag{16}$$

$$0 > \left.\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right|_{\substack{\varphi=\varphi_m\\ \psi=\psi_m}} = \min\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{a}{c}\,\frac{\cos(\varphi_m+\alpha) + c\cos(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha)}{\sin(\psi_m+\beta) - a\sin(\psi_m - \varphi_m + \beta - \alpha)}, \tag{17}$$

что получается из (14) при $\frac{d\psi}{d\varphi} = 0$.

После подстановки значений соответствующих тригонометрических функций в (16) и (17) получим

$$\max\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{2a(a+b)^2}{b[1+c^2-(b-a)^2]} = \frac{a(a+b)}{bc\sin(\beta-\alpha)}, \tag{18}$$

$$\min\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = \frac{2a(b-a)^2}{b[1+c^2-(b+a)^2]} = \frac{-a(b-a)}{bc\sin\gamma_2}. \tag{19}$$

В качестве ограничивающей величины ускорений рассматривается выражение (18), так как явно удовлетворяется условие

$$\left|\max\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right| > \left|\min\frac{d^2\psi}{d\varphi^2}\right|, \tag{20}$$

то есть наибольшее по модулю ускорение возникает в дальнем от кривошипа мертвом положении.

На основании вышесказанного, второе уравнение для определения параметров механизма будет иметь следующий вид

$$\frac{2a(a+b)}{b[1+c^2-(b-a)^2]} = W_m = \frac{W}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}, \tag{21}$$

где W — предельно допустимое значение ускорений.

Чтобы составить третье уравнение, ограничивающее максимальную скорость коромысла при его перемещении с одного мертвого положения в другое, необходимо иметь точное или достаточно точное выражение для нее. Точное выражение максимальной скорости очень сложно и неудобно для включения в систему уравнений. Поэтому предпочитаем следующий путь решения задачи.

Рассмотрим мгновенный центр вращения P шатуна BC (см. фиг. 3).

Введем следующие обозначения

$$l_{BP} = r_1, \quad l_{CP} = r_2. \tag{22}$$

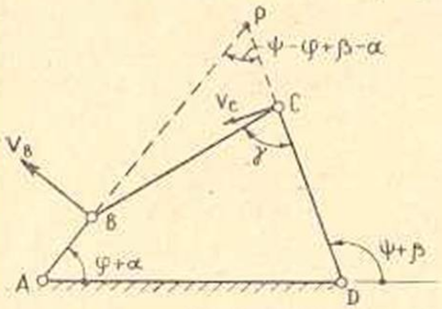
Величина угловой скорости коромысла CD определяется следующей формулой:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v_c}{c \cdot l_{AD}} = \frac{a}{c} \frac{d\varphi}{dt} \frac{r_2}{r_1}, \tag{23}$$

где t — время.

После исключения параметра t получим

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{a}{c} \frac{r_2}{r_1}. \tag{24}$$



Фиг. 3.

Из формулы (24) видно, что $\frac{d\psi}{d\varphi}$ возрастает прямопропорционально $\frac{r_2}{r_1}$. Это отношение равняется нулю в крайних положениях механизма, когда точка P совпадает с точкой C, а где-то в середине интервала движения достигает своего максимального значения. Разумеется, при этом же соотношении $\left(\max \frac{r_2}{r_1}\right)$ скорость $\frac{d\psi}{dt}\left(\text{или } \frac{d\psi}{d\varphi}\right)$ достигает своего максимума. Из (13) и (24) получаем

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin(\varphi + \alpha) - c \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)}{\sin(\psi + \beta) - a \sin(\psi - \varphi + \beta - \alpha)}. \tag{25}$$

Для приближенного определения величины $\max \frac{r_2}{r_1}$ можно пользоваться формулой Лагранжа, которая для функции $f(x)$ имеет следующий вид

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{26}$$

Принимая во внимание, что существует предел

$$\lim_{b \to a} \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2} \tag{27}$$

или же

$$\lim_{b \to a} \xi = \frac{a + b}{2}, \tag{28}$$

для небольших интервалов $b - a$ можно написать

$$f'\left(\frac{a + b}{2}\right) \approx \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{29}$$

Точность вычислений по формуле (29) повышается с уменьшением разности $b - a$.

В частности, когда значения функции на концах интервала совпадают, то есть когда существует равенство

$$f(b)=f(a), \tag{30}$$

получим следующее уравнение

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\approx 0. \tag{31}$$

Если в качестве функции $f(x)$ рассмотреть соотношение $\frac{r_2}{r_1}$, а в качестве аргумента x — независимую переменную φ, с учетом того, что угол ψ зависит от φ, при $f(\varphi_1)=f(\varphi_2)$ получим

$$f'\left(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\approx 0, \tag{32}$$

то есть величина угла φ, при которой функция $f(\varphi)=\frac{r_2}{r_1}$ достигает своего экстремального значения, определяется по формуле

$$\varphi_{\text{extr}}\approx\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}, \tag{33}$$

если обеспечивается дополнительное условие (30).

При самом грубом приближении можно принять

$$\varphi_{\text{extr}}=\frac{0+\varphi_m}{2}=\frac{\varphi_m}{2}, \tag{34}$$

так как в мертвых положениях имеем следующее равенство

$$f(\varphi_1=0)=f(\varphi_2=\varphi_m)=0. \tag{35}$$

Но обычно интервал $0\div\varphi_m$ бывает достаточно широкий. Для повышения точности синтеза необходимо подобрать возможно узкий интервал. Для этой цели рассмотрим положения механизма, при которых $\frac{r_2}{r_1}=1$.

Из фиг. 3 видно, что при перемещении с одного мертвого положения в другое такое равенство осуществляется дважды, а именно в следующих положениях:

1) $\psi_1+\beta=\varphi_1+\alpha,\quad r_2=r_1=\infty,\quad \frac{r_2}{r_1}=1,$

2) $\psi_2+\beta=\varphi_2+\alpha+2\gamma_0-\pi,\quad r_2=r_1=\frac{b}{2\,|\cos\gamma_0|},\quad \frac{r_2}{r_1}=1.$

О ширине интервала можно судить, исходя из следующих уравнений:

$$2ac+2a\cos(\varphi_1+\alpha)-2c\cos(\varphi_1+\alpha)+b^2-a^2-c^2-1=0, \tag{36}$$

$$-2ac\cos 2\gamma_0 + 2a\cos(\varphi_2+\alpha) + 2c\cos(\varphi_2+\alpha+2\gamma_0) +$$
$$+ b^2 - a^2 - c^2 - 1 = 0, \quad (3$$

которые получаются после подстановки значений углов ψ_1 и ψ_2 в (1
Из этих уравнений получается следующее:

$$a[\cos(\varphi_2+\alpha) - \cos(\varphi_1+\alpha)] + c[\cos(\varphi_2+\alpha+2\gamma_0) + \cos(\varphi_1+\alpha)] =$$
$$= 2ac\cos^2\gamma_0. \quad (3$$

С учетом дополнительных требований, предъявляемых к синте механизмов, согласно которым угол передачи γ в течение рабоче промежутка, а в частности в области высоких скоростей, не долж сильно отличаться от $\frac{\pi}{2}$, можно принять

$$\cos(\varphi_2+\alpha+2\gamma_0) \approx -\cos(\varphi_2+\alpha), \quad (3$$

после чего из (38) получим

$$\cos(\varphi_2+\alpha) - \cos(\varphi_1+\alpha) \approx \frac{2ac\cos^2\gamma_0}{a-c}. \quad (4$$

При обеспечении больших углов передач полученная разнос косинусов незначительна, следовательно, разность углов $\varphi_2-\varphi_1$ мал и ею можно пренебречь при первом приближении. С учетом вышеи ложенного из (33) получим

$$\varphi_{extr} \approx \varphi_1. \quad (4$$

Следовательно, после подстановки в формулу (25) значени $\psi=\varphi=\varphi_1$ находим

$$\max\frac{r_2}{r_1} = 1. \quad (4$$

С учетом только что полученного выражения можно написа

$$\frac{V}{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} = V_m = \frac{a}{c}, \quad (4$$

где V_m — заданная величина максимального передаточного отношен

$$\max\frac{d\psi}{d\varphi} = \max\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} = \omega\right)^{-1}.$$

Таким образом, на основе формул (15), (21) и (43) получае систему из трех уравнений (44) с неизвестными a, b и c:

$$\left.\begin{aligned} & b^4 - 2(1+c^2-3a^2)b^2 + (c^2-a^2)^2 - 2a^2 + 1 = 0, \\ & b^3 + 2\frac{1-W_m}{W_m}ab^2 + \left[\frac{4a^2}{W_m} + a^2 - c^2 - 1\right]b + \frac{2a^3}{W_m} = 0, \\ & a - V_m c = 0. \end{aligned}\right| \quad (4$$

Необходимо отметить, что для такого большого угла размаха, как $\psi_m = 90^\circ$, целесообразно иметь центральный механизм, где $\varphi_m = \pi$, так как только в таком случае обеспечивается условие (45)

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ, \tag{45}$$

а в остальных случаях один из этих углов получается меньше 45°, что крайне нежелательно, ибо максимальные нагрузки, связанные с силами инерции, возникают именно в крайних положениях. Но для центральных механизмов существует следующее соотношение:

$$\sin \frac{\psi_m}{2} = \frac{a}{c}, \tag{46}$$

с учетом которого можно сказать, что наивыгоднейшее значение для V_m при $\psi_m = 90^\circ$ должно быть

$$V_m = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{47}$$

После подстановки этого значения в систему (44) и исключения неизвестных a и b получаем следующее уравнение:

$$(W_m^2 - 2W_m + 2)c^4 - (3W_m^2 - 6W_m + 4)c^2 + 2(W_m^2 - 2W_m + 1) = 0, \tag{48}$$

решая которое находим

$$c = \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{(W_m - 1)^2}}}. \tag{49}$$

После определения параметра c остальные параметры определяются по формулам (50)

$$b = \sqrt{1 - 0{,}5c^2}, \qquad a = \frac{c}{\sqrt{2}}, \tag{50}$$

которые получаются из системы (44).

Итак, единственным свободным параметром остается величина W_m. Варьируя этой величиной в рекомендуемых пределах можно получить разные механизмы.

Следует отметить, что величина W_m должна находиться в пределах $1 < W_m < 2$, что следует из формулы (21). При подстановке в эту формулу $c = 1$, $a = b = c \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть когда шарнир A совпадает с точкой C_2, получаем $W_m = 2$, а при подстановке $b = 1$, $a = 0$, $c = 0$, то есть когда шарнир A находится на продолжении прямой C_1C_2 в бесконечности, получаем $W_m = 1$.

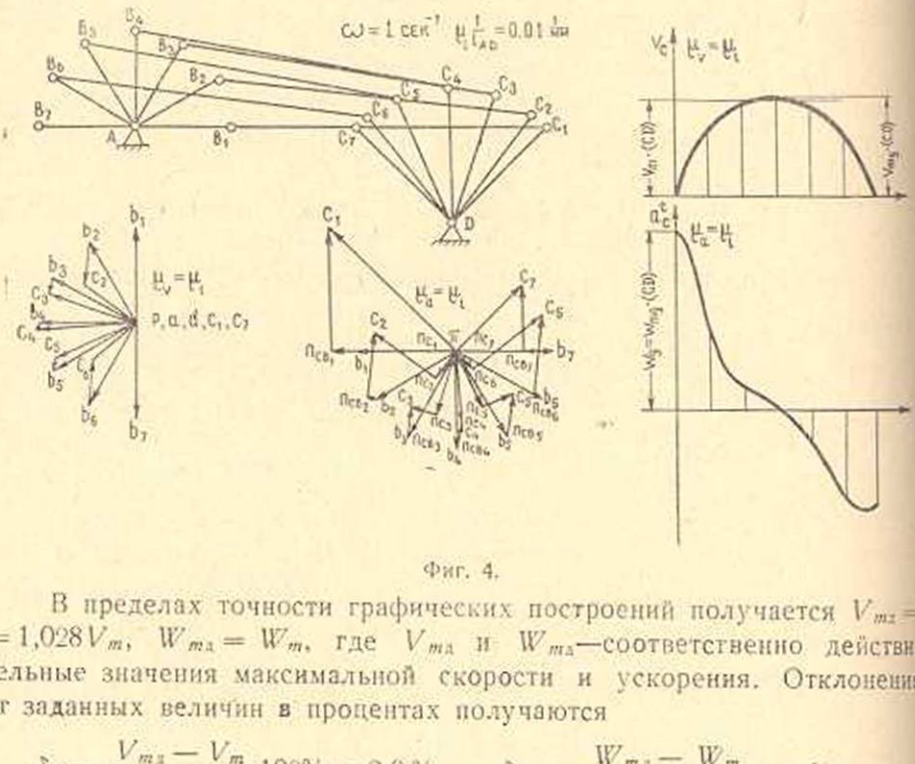
Из вышеизложенного следует, что в пределах возможностей нужно подобрать такие механизмы, в которых обеспечивается наибольшее расстояние между шарнирами A и D при одинаковой длине коромысла CD, чем гарантируется возможно малая величина максимального ускорения ведомого звена.

На примере проверим правильность наших предложений и полученных формул.

Пусть задано $W_m = 1,3$. Соответствующий этому значению механизм будет иметь следующие параметры:

$$a = 0{,}2882, \quad b = 0{,}9578, \quad c = 0{,}4064.$$

На фиг. 4 приведены такой механизм, планы и графики скоростей и ускорений.



Фиг. 4.

В пределах точности графических построений получается $V_{m\text{д}} = 1{,}028\,V_m$, $W_{m\text{д}} = W_m$, где $V_{m\text{д}}$ и $W_{m\text{д}}$—соответственно действительные значения максимальной скорости и ускорения. Отклонения от заданных величин в процентах получаются

$$\delta_V = \frac{V_{m\text{д}} - V_m}{V_m} \cdot 100\% = 2{,}8\,\%, \qquad \delta_W = \frac{W_{m\text{д}} - W_m}{W_m} \cdot 100\% = 0.$$

Московский научно-исследовательский
институт машиноведения

Поступила 15 X 1964

Է. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

ՀՈԴԱԿԱՊԱՅԻՆ ՔԱՌՕՂԱԿԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՏԱՐՎՈՂ ՕՂԱԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՈՎ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է հոդակապային քառօղակի սինթեզի խնդիրը. Նման խնդիրների լուծումը մեխանիզմի շարժման բացահայտ ֆունկցիայի միջոցով անհնար է, քանի որ վերոհիշյալ բացահայտ ֆունկցիան (ի-

համ է բարդ և ստացված հավասարումները լուծել հնարավոր չէ։ Խնդրի լուծումը մեխանիզմի շարժման անբացահայտ ֆունկցիայի միջոցով հանգում է համապատասխան շարժման օրենքի ընտրությանը։ Բայց որոշ դեպքերում խնդիրը հնարավոր է լուծել առանց շարժման օրենքի ընտրության։ Հոդվածում տրվում է նման խնդրի մոտավոր լուծում։ Դուրս են բերված բանաձևեր, որոնց միջոցով կարելի է հաշվել սահանադանների շարժարերի մեջ կիրառվող քառահոդակապ մեխանիզմի պարամետրերը, ելնելով մեծագույն արագության և արագացման բացարձակ արժեքներից։ Լուծված է թվային օրինակ։ Պահպանվող մեծագույն արագության և արագացման շեղումները տրված մեծությունների նկատմամբ համապատասխանաբար կլինեն

$$\delta_v = 2{,}8\,\%; \quad \delta_w = 0\,\%.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз. М., 1959.
2. *Левитский Н. И.* Кулачковые механизмы. Издательство „Машиностроение", М., 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Д. ГАЗАЗЯН

О НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ АНАЛОГИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БЛОХА — НОРДСИКА

Одним из методов устранения инфракрасной расходимости в квантовой электродинамике является приближение Блоха-Нордсика [1]. Сущность этого метода заключается в приближенном решении уравнения Дирака для электрона и системы фотонов, с предположением что длинноволновое фотонное поле мало влияет на движение электрона.

В данной работе мы будем развивать аналогичный метод для уравнения Шредингера. Окончательные результаты (при пренебрежении эффектами интенсивности фотонного поля) совпадают с результатами работы [1], если в последней положить скорость электрона $v \ll 1$.

Гамильтониан для электрона и системы фотонов, при кулоновской калибровке электромагнитного поля ($A_0 = 0$), имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^2 - \frac{e}{\mu}(\vec{A}\hat{\vec{p}}) + \frac{e^2}{2\mu}\vec{A}^2 + H_{\text{фот}}, \tag{1}$$

где

$$H_{\text{фот}} = \frac{1}{2}\int(\vec{E}^2 + \vec{H}^2)\,dV. \tag{2}$$

Рассмотрим квантованное электромагнитное поле, векторный потенциал которого определяется разложением

$$\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{s,\lambda}\omega_s^{-1/2}\vec{e}_{s\lambda}(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r}). \tag{3}$$

Здесь индекс s служит для обозначения волнового вектора $\vec{k}_s$ и частоты ω_s фотона, $\vec{e}_{s\lambda}$ — единичный вектор в направлении поляризации, состояние которой обозначается индексом λ, V — нормировочный объем. Динамические переменные $P_{s\lambda}$ и $Q_{s\lambda}$ удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям координаты и импульса:

$$[P_{s\lambda}, Q_{s'\lambda'}] = -i\delta_{ss'}\delta_{\lambda\lambda'}, \quad [P_{s\lambda}, P_{s'\lambda'}] = 0, \quad [Q_{s\lambda}, Q_{s'\lambda'}] = 0. \tag{4}$$

Подставляя разложение (3) в выражения (1) и (2), получим

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^2 - \sum_{s,\lambda}(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_k\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r})\left(\vec{a}_{s\lambda}\frac{\hat{\vec{p}}}{\mu}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left(\sum_{s,\lambda}\vec{a}_{s\lambda}(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r})\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\omega_s(P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2), \tag{5}$$

где

$$\vec{a}_{s\lambda} = e(V\omega_s)^{-1/2}\vec{e}_{s\lambda}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi, \tag{7}$$

решение которого представим в виде

$$\Psi(\vec{r}, Q_{s\lambda}) = \Psi_{\vec{p}}(\vec{r})\cdot\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}), \tag{8}$$

где функция $\Psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{\vec{p}}\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \vec{p}\Psi_{\vec{p}}(\vec{r}), \tag{9}$$

а $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$ — некоторая слабо зависящая от $\vec{r}$ функция.

Подставляя решение (8) в уравнение (7), приходим к следующему уравнению для функции $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$:

$$(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}) = E\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda}), \tag{10}$$

где

$$\hat{H}_0 = \vec{v}\hat{\vec{p}} + \frac{\mu v^2}{2} - \sum_{s,\lambda}(\vec{v}\vec{a}_{s\lambda})(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r}) + \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\omega_s(P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2), \tag{11}$$

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2\mu} - \sum_{s,\lambda}(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r})\left(\vec{a}_{s\lambda}\frac{\hat{\vec{p}}}{\mu}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\mu}\left(\sum_{s,\lambda}\vec{a}_{s\lambda}(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_x\vec{r})\right)^2, \tag{12}$$

здесь $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{\mu}$ — c-число, есть скорость электрона.

Мы в данной работе будем рассматривать не очень большие интенсивности фотонного поля. Кроме того, если иметь в виду, что функция $\varphi(\vec{r}, Q_{s\lambda})$ слабо зависит от $\vec{r}$, то оператор $\hat{H}_1$ можно учитывать как возмущение к основному гамильтониану $\hat{H}_0$. Таким образом, в нулевом приближении теории возмущений, мы будем иметь следующее, аналогичное методу Блоха-Нордсика, уравнение для функции $\varphi_0(\vec{r}, Q_{s\lambda})$:

$$\Big\{\vec{v}\hat{\vec{p}} + \frac{\mu v^2}{2} - \sum_{s,\lambda}(\vec{v}\vec{a}_{s\lambda})(P_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r}) + \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\omega_s(P_{s\lambda}^2 + Q_{s\lambda}^2)\Big\}\varphi_0 = E_0\varphi_0. \tag{13}$$

Чтобы решить уравнение (13), произведем каноническое преобразование

$$P_{s\lambda} = P'_{s\lambda} + \sigma_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r},$$

$$Q_{s\lambda} = Q'_{s\lambda} + \sigma_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}', \tag{14}$$

$$\vec{p} = \vec{p}' - \sum_{s,\lambda}\vec{k}_s\sigma_{s\lambda}\Big[P'_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r} + Q'_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r} + \frac{1}{2}\sigma_{s\lambda}\Big]$$

и подберем константы $\sigma_{s\lambda}$ таким образом, чтобы преобразованный гамильтониан $\hat{H}'_0$ не содержал линейных членов $P'_{s\lambda}$ и $Q'_{s\lambda}$. Легко видеть, что это условие приводит к следующим значениям $\sigma_{s\lambda}$:

$$\sigma_{s\lambda} = \frac{\vec{v}\vec{a}_{s\lambda}}{|\vec{k}_s| - \vec{v}\vec{k}_s}. \tag{15}$$

Такое преобразование оставляет неизменным коммутационные соотношения. Сделаем одновременно преобразование волновой функции

$$\varphi'_0 = S^{-1}\varphi_0 \tag{16}$$

и потребуем, чтобы действие новых (штрихованных) операторов на волновую функцию φ'_0 оставалось инвариантным. Такое требование приводит к следующему виду для оператора S:

$$S = \exp i\sum_{s,\lambda}\sigma_{s\lambda}\cos\vec{k}_s\vec{r}\Big[Q'_{s\lambda} + \frac{1}{2}\sigma_{s\lambda}\sin\vec{k}_s\vec{r}\Big]. \tag{17}$$

Уравнение для преобразованной волновой функции $\varphi'_0 = S^{-1}\varphi_0$

$$\Big\{\vec{v}\hat{\vec{p}}' + \frac{\mu v^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\omega_s(P'^2_{s\lambda} + Q'^2_{s\lambda}) - \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\frac{(\vec{v}\vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v}\vec{k}_s} - E_0\Big\}\varphi'_0 = 0 \tag{18}$$

имеет решение

$$\varphi'_0 = \prod_{s,\lambda} h_{n_{s\lambda}}(Q'_{s\lambda}) \tag{19}$$

с собственным значением

$$E_0 = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s,\lambda}\omega_s\Big(n_{s\lambda} + \frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda}\frac{(\vec{v}\vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v}\vec{k}_s}. \tag{20}$$

Здесь $h_n(x)$ — нормированное решение осцилляторного уравнения

$$h_n''(x) - x^2 h_n(x) + (2n+1) h_n(x) = 0.$$

Переходя к первоначальным переменным, запишем полную приближенную волновую функцию в виде

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left\{i\vec{p}\vec{r} + i\sum_{s,\lambda} \sigma_{s\lambda} \cos \vec{k}_s\vec{r} \left[Q_{s\lambda} - \frac{1}{2}\sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s\vec{r}\right]\right\} \times$$

$$\times \prod_{s,\lambda} h_{n_{s\lambda}}(Q_{s\lambda} - \sigma_{s\lambda} \sin \vec{k}_s\vec{r}). \tag{21}$$

Для выяснения условий применимости нашего приближения вычислим по теории возмущений поправку E_1 от оператора $\hat{H}_1$ к основному значению энергии E_0:

$$E = E_0 + E_1, \tag{22}$$

где

$$E_1 = \int \varphi^* \hat{H}_1 \varphi d\vec{r} \prod_{s,\lambda} dQ_{s\lambda}. \tag{23}$$

После вычисления интеграла (23) получим

$$E_1 = \frac{1}{2\mu}\left(\sum_{s,\lambda} \sigma_{s\lambda}\left(\vec{a}_{s\lambda} + \frac{1}{2}\vec{k}_s\sigma_{s\lambda}\right)\right)^2 + \frac{1}{2\mu}\sum_{s,\lambda}(\vec{a}_{s\lambda} + \vec{k}_s\sigma_{s\lambda})^2\left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2}\right). \tag{24}$$

Подставляя выражения (20) и (24) в формулу (22), получим

$$E = \frac{\mu v^2}{2} + \sum_{s,\lambda} \omega_s\left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{s,\lambda} \frac{(\vec{v}\vec{a}_{s\lambda})^2}{|\vec{k}_s| - \vec{v}\vec{k}_s} +$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\left(\sum_{s,\lambda} \sigma_{s\lambda}\left(\vec{a}_{s\lambda} + \frac{1}{2}\vec{k}_s\sigma_{s\lambda}\right)\right)^2 + \frac{1}{2\mu}\sum_{s,\lambda}(\vec{a}_{s\lambda} + \vec{k}_s\sigma_{s\lambda})^2\left(n_{s\lambda} + \frac{1}{2}\right). \tag{25}$$

Чтобы найти параметр разложения теории возмущений, произведем суммирование по s и λ в последних трех членах выражения (25). Суммирование по двум реальным поляризационным состояниям фотона ($\lambda = 1, 2$) можно произвести, используя известную формулу

$$\sum_{\lambda=1,2} (\vec{e}_{s\lambda}\vec{a})(\vec{e}_{s\lambda}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} - \frac{(\vec{k}_s\vec{a})(\vec{k}_s\vec{b})}{\vec{k}_s^2},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы, а суммирование по s можно заменить интегрированием по правилу:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_s \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{\omega_{max}} \omega^2 d\omega \int dO.$$

После полного интегрирования окончательно получим

$$E^{(\max)}=\frac{\mu v^2}{2}+\sum_{s,\lambda}\omega_s\left(n_{s\lambda}+\frac{1}{2}\right)-\frac{e^2\omega_{\max}}{2(2\pi)^2}\left(2+\frac{1-v^2}{v}\ln\frac{1-v}{1+v}\right)+$$
$$+\frac{e^4\omega_{\max}^2}{2\mu}\frac{1}{2(2\pi)^4}\frac{1}{v^2}\left(2+\frac{1+v^2}{v}\ln\frac{1-v}{1+v}\right)^2-$$
$$-\frac{e^2\omega_{\max}^2}{2\mu}\frac{1}{(2\pi)^2}\left(n_{s\lambda}^{(\max)}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{v}\ln\frac{1-v}{1+v}, \tag{26}$$

где

$$n_{s\lambda}^{(\max)}=\max\{n_{s\lambda}\}.$$

Так как у нас рассматривается нерелятивистский случай $v\ll 1$, то после разложения логарифмов, получим

$$E^{(\max)}=\frac{\mu v^2}{2}+\sum_{s,\lambda}\omega_s\left(n_{s\lambda}+\frac{1}{2}\right)-\frac{2}{3}\frac{e^2\omega_{\max}}{(2\pi)^2}v^2+$$
$$+\frac{16}{9}\frac{e^4\omega_{\max}^2}{(2\pi)^4\mu}v^2+\frac{e^2\omega_{\max}^2}{\mu}\frac{1}{(2\pi)^2}\left(n_{s\lambda}^{(\max)}+\frac{1}{2}\right).$$

Из сравнения последних трех членов легко видеть, что параметрами разложения теории возмущений являются $\frac{e^2\omega}{\mu}$ и $\frac{\omega}{\mu v^2}n_{s\lambda}^{(\max)}$.

В заключение автор выражает благодарность профессору М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждение результатов.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета и
Академии наук Армянской ССР

Поступила 21 X 1964

Ա. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ

ԲԼՈԽ-ՆՈՐԴՍԻԿԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՈՉ ՌԵԼՅԱՏԻՎԻՍՏԻԿ ԱՆԱԼՈԳԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկված է Շրեդինգերի հավասարումը էլեկտրոնի և երկարային ֆոտոնների սիստեմի համար։ Ստացված է այդ սիստեմի ալիքային ֆունկցիան և էներգետիկ սպեկտրը, պարզաբանված են մոտավորության կիրառման սահմանները՝ ըստ գրգռումների տեսության։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bloch F.*, *Nordsieck A.* Note on the Radiation Field of the Electron, Phys. Rev., 52, 1937, 54.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. ХАЧАТРЯН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ФОРМУЛ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В работе [1], основываясь на принципе Гюйгенса, была получена приближенная формула для полей излучения при равномерном движении точечной заряженной частицы через отверстие произвольной формы в плоском бесконечно тонком и бесконечно проводящем экране (см. формулу (1.5) работы [1]). Скорость частицы $v \sim c$ и направлена вдоль оси z, а углы излучения $\vartheta \ll 1$. Экран находится в плоскости $z=0$.

В настоящей работе, исходя из векторной формулы Грина (см., например, [2]) математически обосновывается и уточняется формула (1.5).

Запишем уравнения Максвелла для монохроматических компонент векторов поля

$$\operatorname{rot} \vec{H'} = -ik\vec{E'} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E'} = ik\vec{H'}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \vec{H'} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \vec{E'} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

где $k=\frac{\omega}{c}$, ρ и $\vec{j}$ — плотности заряда и тока частицы, удовлетворяющие уравнению непрерывности

$$\operatorname{div} \vec{j} - i\omega\rho = 0. \tag{5}$$

Отметим, что полученные ниже результаты легко распространяются на случай распределения заряда, имеющего осевую симметрию относительно оси z (сгустки и т. д.)

Представим решение системы (1)—(4) в виде

$$\vec{E'} = \vec{E^0} + \vec{E}, \tag{6}$$

$$\vec{H'} = \vec{H^0} + \vec{H}, \tag{7}$$

где $\vec{E}^0$ и $\vec{H}^0$ — собственные поля частицы, удовлетворяющие неоднородной системе уравнений (1) — (4), а $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — поля излучения, удовлетворяющие однородной системе

$$\operatorname{rot}\vec{H} = -ik\vec{E}, \tag{1'}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = ik\vec{H}, \tag{2'}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 0, \tag{3'}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0. \tag{4'}$$

Воспользуемся теперь векторной формулой Грина: если $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ две произвольные векторные функции точки, непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными в объеме V и на поверхности s, окружающей этот объем, то

$$\int\limits_V (\vec{Q}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{P} - \vec{P}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Q})\,dV = \int\limits_s ([\vec{P}\operatorname{rot}\vec{Q}] - [\vec{Q}\operatorname{rot}\vec{P}])\,\vec{ds}, \tag{8}$$

где $\vec{ds} = \vec{n}ds$, $\vec{n}$ — единичная нормаль к поверхности s. Ниже везде в качестве объема V мы будем брать бесконечное полупространство $z > 0$ $(z < 0)$, а в качестве поверхности s — плоскость $z = 0$, которую можно считать замыкающейся на бесконечности, поскольку в правой части соотношения (8) мы будем иметь функции, экспоненциально убывающие на бесконечности (см. формулы (13) и (14)).

В качестве векторов $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ возьмем

$$\vec{P} = \vec{E}, \qquad \vec{Q} = \frac{e^{ikr}}{r}\vec{\tau} = \varphi\vec{\tau}, \tag{9}$$

$\vec{\tau}$ — единичный вектор произвольного направления, r — расстояние от переменной точки (x, y, z) до точки наблюдения (x', y', z') внутри объема V.

Можно показать, что вектор $\vec{\tau}$ является общим множителем для всех членов в формуле (8). Поэтому, ввиду его произвольности, из формулы (8) для значения $\vec{E}$ в точке (x', y', z') будем иметь

$$\vec{E}(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_s (ik[\vec{n}\vec{H}]\varphi + [[\vec{n}\vec{E}]\operatorname{grad}\varphi] + (\vec{n}\vec{E})\operatorname{grad}\varphi)\,ds. \tag{10}$$

Аналогично для вектора $\vec{H}$ найдем

$$\vec{H}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\int\limits_s \left(ik[\vec{n}\vec{E}]\varphi - \left[[\vec{n}\vec{H}]\operatorname{grad}\varphi\right] - (\vec{n}\vec{H})\operatorname{grad}\varphi\right)ds. \tag{11}$$

При получении формул (10) и (11) мы воспользовались также и тем, что функция φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi + k^2\varphi = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

Поскольку мы рассматриваем излучение частиц, движущихся со скоростью, близкой к скорости света c, то векторы собственного поля частицы $\vec{E}^\circ$ и $\vec{H}^\circ$ являются приблизительно поперечными по отошению к направлению движения частицы $\vec{n}\vec{E}^\circ, \vec{n}\vec{H}^\circ \simeq 0$. Кроме того, так как мы рассматриваем также и малые углы излучения, то для полей излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеем

$$E_z \ll E_x, E_y, \qquad H_z \ll H_x, H_y. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь граничные условия на экране (s_2). Так как экран предполагается бесконечно проводящим, то для компонент электрического вектора поля излучения имеем

$$E'_{2x,y} = E'_{x,y}\big|_{s_2} = 0, \quad \text{то есть } E_{2x,y} = -E^0_{x,y}. \tag{13}$$

Далее из соотношений

$$\vec{H}^\circ = \frac{1}{c}[\vec{v}\vec{E}^\circ], \qquad \vec{H} = [\vec{\varepsilon}\vec{E}]$$

($\vec{\varepsilon}$ — единичный вектор в направлении излучения), с учетом малости углов излучения, находим

$$H_{2x,y} = -H^0_{x,y}. \tag{14}$$

(Отметим, в связи с формулой (8), что поля $\vec{E}^\circ$ и $\vec{H}^\circ$ на бесконечности убывают экспоненциально).

В точках же отверстия (s_1) мы будем предполагать, что

$$\vec{E}_1 = 0, \quad \vec{H}_1 = 0. \tag{15}$$

Это условие фактически сводится к известному приближению Кирхгофа в теории дифракции света. Действительно, в применении к формулам (6) и (7) соотношение (15) дает, что в точках отверстия полное поле равно полю падающей частицы, то есть оно такое, какое было бы при отсутствии вообще какого-либо экрана — приближение Кирхгофа.

С учетом (12) — (15) из формул (10) и (11) получаем следующие выражения для электрического и магнитного векторов поля излучения:

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_2}\Big(ik[\vec{n}\vec{H}^\circ]\varphi + \big[[\vec{n}\vec{E}^\circ]\operatorname{grad}\varphi\big]\Big)ds, \tag{16}$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_2}\Big(ik[\vec{n}\vec{E}^\circ]\varphi + \big[[\vec{n}\vec{H}^\circ]\operatorname{grad}\varphi\big]\Big)ds. \tag{17}$$

Однако, полученные нами выражения (16) и (17) для полей излучения нельзя применить непосредственно к задачам излучения при пролете через отверстия в экранах. Причина этого заключается в том, что результаты, полученные нами, справедливы лишь тогда, когда векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ непрерывны и имеют непрерывные производные во всех точках поверхности $s = s_1 + s_2$. В рассматриваемых же нами задачах эта непрерывность нарушается, поскольку при переходе из s_1 в s_2 тангенциальные компоненты $\vec{E}$ и $\vec{H}$ претерпевают разрыв непрерывности. Кроме того, легко видеть, что поля излучения (16) и (17) не удовлетворяют уравнениям Максвелла. (Аналогичная ситуация имеет место и в теории дифракции света, где решения однородной системы уравнений Максвелла — дифрагированные поля, полученные непосредственным интегрированием уравнений поля при помощи формулы (8), также не удовлетворяют исходной системе уравнений [2]). Следовательно, чтобы распространить формулы (16) и (17) и на подобные случаи, необходимо видоизменить их так, чтобы совместить наличие разрывов с уравнениями поля.

Для этого мы поступаем аналогично тому, как это делается в теории дифракции электромагнитных волн [2,3]. Наличие разрыва векторов поля при переходе через контур C, разделяющий экран и отверстие приводит к тому, что имеет место скачкообразное изменение поверхностной плотности тока. Обрыв же линий тока, согласно уравнению непрерывности, приводит к накоплению заряда на контуре C с некоторой линейной плотностью. Ясно, что наличие зарядов на контуре определенным образом изменит поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Только при учете этого изменения выражения, получающиеся для полей излучения будут удовлетворять уравнениям (1′) — (4′).

Пусть $d\vec{l}$ — элемент длины вдоль контура C. Тогда вклад в поля излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$, обусловленный наличием контурных зарядов, равен [2,3]

$$-\frac{i}{4\pi k}\oint_C \operatorname{grad}\varphi\,(\vec{H}_2-\vec{H}_1, d\vec{l}) = \frac{i}{4\pi k}\oint_C \operatorname{grad}\varphi\,(\vec{H}^\circ d\vec{l}) \tag{18}$$

(для электрического поля $\vec{E}$)

и

$$-\frac{i}{4\pi k}\oint_C \operatorname{grad}\varphi\,(\vec{E}^\circ d\vec{l}) \tag{19}$$

(для магнитного поля $\vec{H}$).

Таким образом, для полей излучения, с учетом наличия зарядов на контуре, окончательно имеем

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{i}{4\pi k}\oint_C \operatorname{grad}\varphi\,(\vec{H}^\circ d\vec{l}) + \frac{1}{4\pi}\int\Big(ik\,[\vec{n}\vec{H}^\circ]\,\varphi + \big[[\vec{n}\vec{E}^\circ]\operatorname{grad}\varphi\big]\Big)ds, \tag{20}$$

$$\vec{H}(\vec{r}') = -\frac{i}{4\pi k}\oint\limits_{C} \operatorname{grad}\varphi\,(\vec{E}^{\circ}\vec{dl}) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_2}\left(ik[\vec{n}\vec{E}^{\circ}]\varphi - \left[[\vec{n}\vec{H}^{\circ}]\operatorname{grad}\varphi\right]\right)ds. \tag{21}$$

Ясно, что при бесконечном увеличении размеров отверстия (свободное пространство) излучение должно исчезнуть. Легко видеть, что поля излучения в этом случае действительно обращаются в нуль. Отметим еще следующее обстоятельство. Формулы (20) и (21) дают правильный результат как для излучения вперед, так и для излучения назад, поскольку окончательный результат не меняется от того, замыкаем ли мы поверхность s на бесконечности справа (объем V есть полупространство $z > 0$) или слева (объем V есть полупространство $z < 0$).

Покажем теперь, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$, определяемые формулами (20) и (21), удовлетворяют уравнениям Максвелла (1′) — (4′). Докажем поперечность электрического вектора, то есть вычислим $\operatorname{div}_{r'}\vec{E}(\vec{r}')$ (знак r' у дивиргенции означает, что производные берутся по штрихованным координатам — точка наблюдения)

$$\operatorname{div}_{r'}\vec{E}(\vec{r}') = \frac{ik}{4\pi}\oint\limits_{C}\varphi\,(\vec{H}^{\circ}\vec{dl}) - \frac{ik}{4\pi}\int\limits_{s_2}[\vec{n}\vec{H}^{\circ}]\operatorname{grad}\varphi\,ds. \tag{22}$$

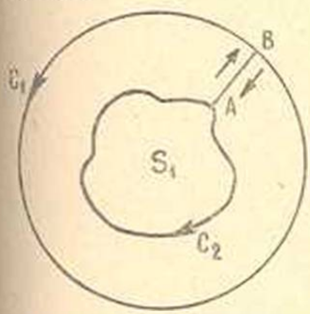
Далее

$$\int\limits_{s_2}[\vec{n}\vec{H}^{\circ}]\operatorname{grad}\varphi\,ds = \int\limits_{s_2}\left\{\varphi\operatorname{rot}\vec{H}^{\circ} - \operatorname{rot}(\varphi\vec{H}^{\circ})\right\}\vec{ds} =$$

$$= \int\limits_{s_2}\varphi\left(-ik\vec{E}^{\circ} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}\right)\vec{ds} + \oint\limits_{C}\varphi\,(\vec{H}^{\circ}\vec{dl}) = \oint\limits_{C_2}\varphi\,(\vec{H}^{\circ}\vec{dl}), \tag{23}$$

так как

$$\vec{n}\vec{E}^{\circ} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{j}/_{s_2} = 0.$$



Из (22) и (23) сразу следует, что

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0.$$

При преобразованиях в формуле (23) мы использовали теорему Стокса в виде

$$\int\limits_{s_2}\operatorname{rot}(\varphi\vec{H}^{\circ})\,\vec{ds} = -\oint\limits_{C}\varphi\vec{H}^{\circ}\,\vec{dl}. \tag{24}$$

В справедливости этой формулы легко убедиться, если применить теорему Стокса к „кольцу", изображенному на фиг. Интегралы по AB и BA взаимно сокращаются, а интеграл по окружности C_1 стремится к нулю, когда радиус последней устремляем к бесконечности. (Во всех контурных интегралах обход по контуру C происходит против часовой стрелки). Точно так же доказывается, что уравнения (1′) — (3′) удовлетворяются. Покажем теперь, что при определенных предположениях из формул (20) и (21) следует формула (1.5) работы[1]. Предположим, что контурными интегралами можно пренебречь. (Оценки, проведенные для некоторых частных случаев, как-то пролет через центр круглого отверстия радиуса, пролет на расстоянии $r_0 \ll a$ от центра отверстия и пролет через бесконечную щель показывают, что контурные интегралы действительно малы. Например, в первом случае он равен нулю, а во втором его вклад в интенсивность порядка $\frac{r_0}{a}\theta\Big)$.

Тогда, например, для вектора $\vec{H}$ с учетом (13) и (14) будем иметь

$$\vec{H}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{s_1}\left(ik\,[\vec{n}\vec{E}]\,\varphi-\Big[[\vec{n}\vec{H}]\operatorname{grad}\varphi\Big]\right)ds. \tag{25}$$

Так как при больших r

$$\operatorname{grad}\varphi=-ik\varphi\,\vec{\varepsilon}, \tag{26}$$

то если предположить, что пренебрежение контурным интегралом не нарушает поперечности поля излучения, можем написать

$$-\Big[[\vec{n}\vec{H}]\operatorname{grad}\varphi\Big]=ik\varphi\vec{H}(\vec{\varepsilon}\vec{n})\simeq ik\varphi\,[\vec{n}\vec{E}]. \tag{27}$$

Здесь мы к $\vec{H}(\vec{\varepsilon}\vec{n})$ прибавили выражение $\vec{\varepsilon}(\vec{n}\vec{H})$, учитывая, что

$$|\vec{\varepsilon}(\vec{n}\vec{H})|\ll|\vec{H}(\vec{\varepsilon}\vec{n})|.$$

Из (25), (27) и (13) находим

$$\vec{H}=-\frac{ik}{2\pi}\int\limits_{s_1}[\vec{n}\vec{H}^0]\,\varphi ds. \tag{28}$$

Учитывая, что $\varepsilon_x, \varepsilon_y\ll\varepsilon_z$, $\varepsilon_z\sim 1$ и $\vec{H}=[\vec{\varepsilon}\vec{E}]$, из (28) получаем

$$E_{x,y}=-\frac{ik}{2\pi}\int\limits_{s_1}E^0_{x,y}\varphi ds. \tag{29}$$

Формула (29) в точности соответствует формуле (1.5).

В заключение выражаю благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за многочисленные и ценные обсуждения.

Объединенная радиационная лаборатория
АН Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Поступила 21 XI 1964

Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐԻ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԻՄՆԱՎՈՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ելնելով Գրինի վեկտորական բանաձևից, մաթեմատիկորեն հիմնավորվում և ճշգրտվում է ճառագայթման դաշտերի համար [1] աշխատության մեջ ստացված բանաձևը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Микаелян М. Л., Хачатрян Б. В.* Дифракционное излучение быстрых частиц. ДАН Арм. ССР, 40, №1, 1965.
2. *Стреттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. Гостехиздат, М. — Л., 1948.
3. *Stratton J. A.* and *Chu L. J.* Diffraction theory of Electromagnetic Waves. Phys. Rev., 56, 99, 1939.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

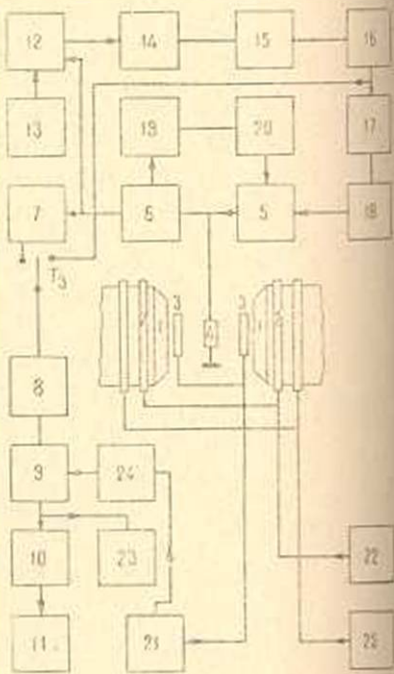
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. П. ПИКАЛОВ

СПЕКТРОМЕТР ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА (ЯМР)

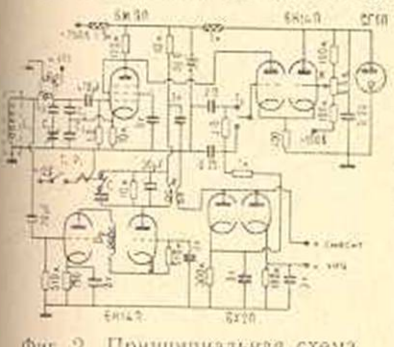
Преимущества и недостатки спектрометров ЯМР, использующих автодин, обсуждались в работах [1—3]. Для устранения недостатков (уход частоты) были предложены различные методы стабилизации [3—7]. В настоящей статье описывается схема спектрометра на две рабочие частоты f_H — для исследования спектров протонов и f_F — для исследования спектров фтора в постоянном магнитном поле H_0. Эти две частоты стабилизированы с помощью одного кварцевого резонатора. В статье также описывается предложенная нами схема полуавтоматической перестройки частоты спектрометра и схема канала регистрации сигналов ЯМР. Блок-схема спектрометра приведена на фиг. 1. Источником поляризующего поля является постоянный магнит (1) ПМ — 5000 [8], с напряженностью магнитного поля в зазоре ≈ 28 *мм* ≈ 5330 *эрстед*. В зазоре магнита расположен термостатированный датчик, позволяющий производить измерения в широком интервале температур ($-150^\circ C \div +200^\circ C$) [9]. На датчик укреплены катушки местной модуляции (3), включенные параллельно. Каждая катушка содержит 250 витков провода ПЛШО — 0,1 с диаметром намотки 100 *мм*. Модуляция осуществляется от генератора (21) синусоидальным напряжением $f_M \approx \approx 77$ *гц*.



Фиг. 1 Блок-схема спектрометра.

В нашем спектрометре применена схема задающего RC — генератора с петлевой обратной связью в виде двойного T — моста. В схеме используется та особенность цепи, что при отклонении моста от баланса, он становится неминимально фазовой цепью, и на частоте минимума коэффициента передачи происходит опрокидывание фазы, приводящее к тому, что обратная связь оказывается положительной. Опорное напряжение на фазовый детектор (9) подается через фазовращающий каскад (24). Регулировка фазы осуществляется с помощью RC-моста [10]. Выходной каскад нагружен на трансформатор T_{p_1} фиг. 4. Модуляция поля пилообразным током осуществляется посредством катушек (2), расположенных на полюсах магнита. Каждая катушка содержит 3800 витков провода ПЭЛ — 0,6. Катушки включены последовательно. Общее сопротивление постоянному току $\approx$880 *ом*. Линейная развертка осуществляется от генератора (22) [11]. Глубина развертки регулируется в пределах ($10^{-2} \div 10^{2}$) *эрстед*. Длительность развертки может быть выбрана в диапазоне ($1 \div 3.10^{3}$) *сек*. Аналогичная пара катушек служит для смещения спектра и питается от стабилизированного выпрямителя (25).

Высокочастотная катушка образца (4) является частью индуктивности контура автодина (5). Принципиальная схема автодина представлена на фиг. 2. Амплитуда высокочастотного напряжения (ВЧ) стабилизируется посредством автоматической регулировки анодного напряжения автодина. В петлю обратной связи амплитудной стабилизации входит: усилитель ВЧ (6), амплитудный детектор (19) и усилитель постоянного тока (УПТ) (20). С детектора (19) через интегрирующую цепь, имеющую постоянные времени 6 *сек* и 10 *мсек*, сигнал подается на однокаскадный УПТ. Постоянная времени выбирается в зависимости от наблюдаемого сигнала (поглощение либо дисперсия). УПТ (лампа 6Н14П) имеет коэффициент усиления $\approx$40. Система стабилизации дает возможность регулировать амплитуду ВЧ напряжения в пределах (10 *мв* $\div$ 0,5 *в*).

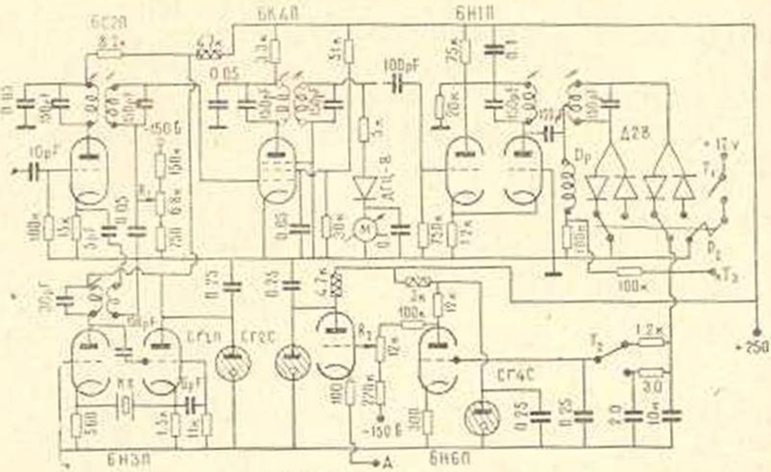


Фиг. 2. Принципиальная схема автодина.

Усилитель ВЧ (6) собран по каскадной схеме (лампа 6Н14П). Такая схема позволяет получить достаточно высокое усиление с низким уровнем собственных шумов. Анодный контур усилителя настроен на частоту f_H. Перестройка усилителя на частоту f_F осуществляется с помощью низкоемкостного реле, которое подключает к контуру дополнительную емкость. С выхода усилителя сигнал поступает также на амплитудный детектор (7) и смеситель (12) канала выделения дисперсионной компоненты сигнала ЯМР и перестройки частоты автодина. В этот канал входят: генератор (13), усилитель промежуточной частоты (14), ограничитель (15), частотный детектор (16), УПТ (18).

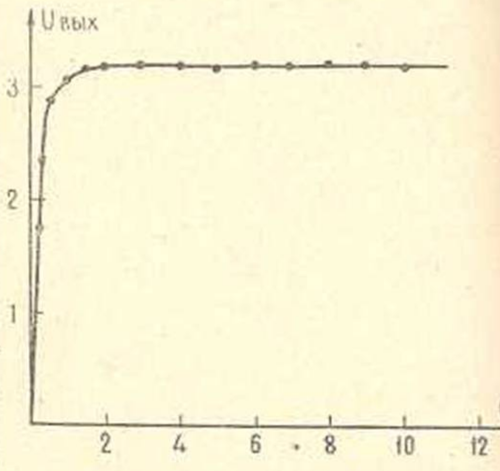
Принципиальная схема канала приведена на фиг. 3. На управляющую сетку смесителя (6С2П) поступает сигнал, а в цепь катода подается ВЧ напряжения с контура гетеродина 6Н3П. Контур гетеродина настроен на третью гармонику кварца [12]. Анодной нагрузк смесителя является полосовой фильтр, настроенный на частоту $f_{пр}$ ≈ 665 *кгц*

$$f_{пр} = f_{н} - f_{г} = f_{г} - f_{F}.$$



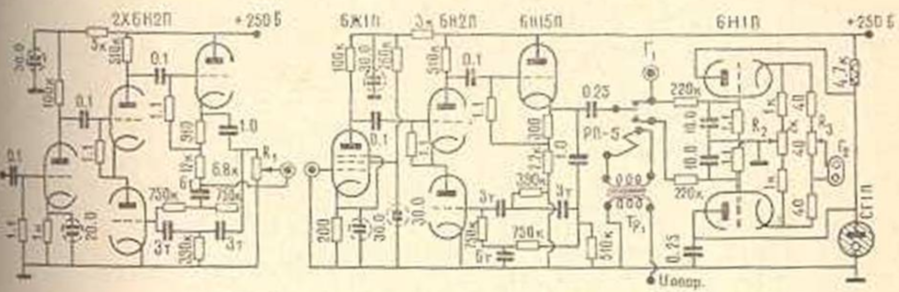
Фиг. 3. Принципиальная схема канала частотной стабилизации.

Такой выбор промежуточной частоты связан с возможностью приме ния одного кварцевого резонатора для стабилизации обеих часто и f_F, а также способствует осуществлению полуавтоматической пе стройки спектрометра. Усиление по промежуточной частоте регулируется путем изменения напряжения смещения на управляющей сетке 6К4П. Контроль амплитуды высокочастотного напряжения осуществляется микроамперметром 200 μa и диодом ДГЦ–8. Такое включение прибора позволяет также контролировать настройку автодина на нужную частоту. Ограничительный каскад собран на двойном триоде 6Н1П [13]. Его характеристика приведена на фиг. 4. Как видно из рисунка, такая схема ограничения хорошие результаты при минимальной амплитуде на сетке ≈ 1 *в.* тотный детектор имеет две пары диодов Д2В, включаемых в прот положной полярности. Такое включение вызвано тем, что, наприм при возрастании частоты автодина, если спектрометр настрое протоны $f_{пр}$, растет, а если на ядра фтора, то $f_{пр}$ падает, хотя этом на выходе частотного детектора должна получаться одна



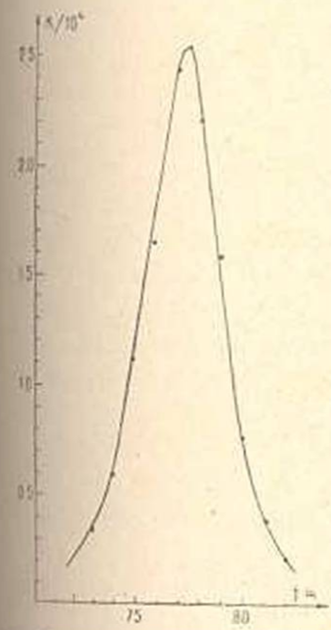
Фиг. 4. Характеристика ограничителя.

же полярность постоянного напряжения. Переключение диодов осуществляется с помощью реле P_2 посредством включения T_1. Этим же выключателем включается низкоемкостное реле в контуре усилителя ВЧ фиг. 2. С нагрузки частотного детектора сигнал может быть подан для регистрации через тумблер T_3, а также поступает на УПТ 6Н6П через T_2, служащий для выбора необходимой постоянной времени интегрирующей цепочки.



Фиг. 5. Принципиальная схема канала регистрации.

Первый каскад УПТ (правая половина 6Н6П) — усилитель напряжения, а второй каскад — усилитель мощности. Нагрузкой второго каскада служит подмагничивающая обмотка подстраивающего элемента, фиг. 2, включенная в цепь катода (точка А). Крутизна подстройки контура с учетом усиления по постоянному току ≈ 20 составляет ≈ 10 *кгц/мв*. Чувствительность частотного детектора ≈ 50 *мв/кгц*. Для стабилизации режима работы УПТ питание стабилизировано дополнительно (СГ2С, СГ4С).



Фиг. 6. Частотная характеристика ИУНЧ.

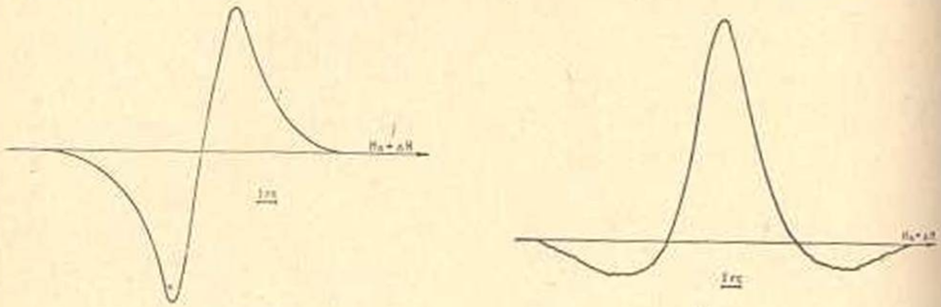
Канал регистрации спектра состоит: из избирательного усилителя низкой частоты (ИУНЧ) (8), фазового детектора (9), интегрирующих цепей и согласующих каскадов (10) и регистрирующего прибора (11). В качестве регистрирующего прибора используется электронный потенциометр ЭПП — 09М2. Принципиальная схема канала регистрации приведена на фиг. 5.

Предусилитель настроен на частоту местной модуляции ≈ 77 *гц*. Общий коэффициент усиления предусилителя на частоте 77 *гц* ≈ 140.

Выходное напряжение регулируется с помощью потенциометра $R_1 \approx 6{,}8$ *ком*.

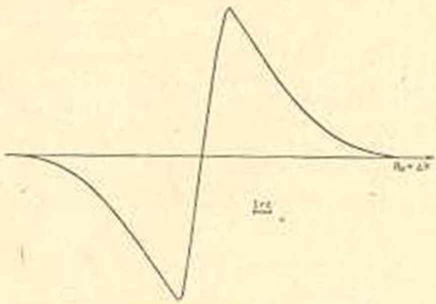
Оконечный усилитель имеет также два каскада усиления, первый каскад собран по обычной пентодной схеме, второй каскад аналогичен предусилительному. Общий коэффициент усиления ≈ 160.

Частотная характеристика ИУНЧ представлена на фиг. 6. Как видно из характеристики, полоса пропускания на уровне 0,707 не превышает 2 *гц*. На выходе усилителя включен фазовый детектор, собранный на



а б

Фиг. 7. Спектр ПММА при $t = 25°C$ а/поглощение, б/дисперсия.



Фиг. 8. Спектр поглощения фторопласт — 4 при $t = 25°C$.

поляризованном реле РП — 5. Опорное напряжение через Tp_1 подается на обмотку реле. Амплитуда опорного напряжения ≈ 10 *в*. С одного из плеч фазового детектора сигнал подается на осциллограф CI — 4 для контроля соответствия фазы опорного напряжения с фазой сигнала. Для регистрации сигнал через интегрирующую цепочку с постоянной времени 2,5 *сек* поступает на согласующий каскад 6Н1П, нагрузкой которого является электронный потенциометр ЭПП — 0,9М2. Для проверки работы спектрометра были сняты спектры полиметилметакрилата (фиг. 7) и спектр поглощения фторопласт —4 (фиг. 8). Ввиду достаточно высокой однородности магнитного поля H_0, как видно из рисунков, симметрия спектральных линий достаточно хорошая.

В заключение автор выражает свою искреннюю благодарность Н. М. Кочаряну за полезные советы.

ЦНИ физико-техническая
лаборатория АН Армянской ССР

Поступила 26 IX 1964

Ա. Պ. ՊԻԿԱԼՈՎ

ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍԻ ՍՊԵԿՏՐՈՄԵՏՐ

Ամփոփում

Հոդվածում նկարագրված է ПМ — 5000 *մշտական մագնիսի բազայի վրա միջուկային մագնիսական ռեզոնանսի ավտոդինային սպեկտրոմետրի սխեման: Սպեկտրոմետրը թույլ է տալիս ուսումնասիրել և* H^1F^{19} ЯМР — *սպեկտրները: Սպեկտրոմետրի հաճախականությունը կայունացված է կվարցային ռեզոնատորով: Հաճախականության վերակառուցումը կիսաավտոմատային է: Սպեկտրոմետրը թույլ է տալիս պոլիմերներում դիտել* ЯМР-*ի ազդանշանների կլանման ու դիսպերսիայի սպեկտրները: Բերված են ստուգիչ սպեկտրներ* ПММН-*ի և ֆտորոպլաստ* 4-*ի համար:*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эндрю.* Ядерный магнитный резонанс. ИЛ. 1957.
2. *Pake G. E.* Основы теории ядерного магнитного резонанса. Am. J. Phys., 18, 438, 1950.
3. *Пикалов А. П., Ян Ши.* Автодин для спектрометра ЯМР с кварцевой стабилизацией частоты, ДАН Арм. ССР, 35, 4, 1962.
4. *Mays J. M., Moore H. R., Shulman R. G.* Усовершенствование ЯМР спектрометра. Rev. Sci Instr., 29, 300. 1958.
5. *Blume R. J.* Кварцевая стабилизация генератора малых амплитуд спин-магнитометра, Rev. Sci. Instr., 29, 574, 1958
6. *Nolle A. W., Henneke H. L.* Автоматическая регулировка частоты для автодинного спектрометра магнитного поглощения. Rev. Sci. Instr., 28, 930, 1957.
7. *Teener T.* Схема частотной стабилизации для р. ч. спектрометра Паунда-Уаткинса. Rev. Sci. Instr., 32, 27, 1961.
8. *Декабрун Л. Л., Степанянц А.* и др. Труды совещания по парамагнитному резонансу. Казань, 1959.
9. *Кочарян Н. М., Пикалов А. П.* и др. Зависимость второго момента от степени вытяжки полиметилметакрилата. ДАН Арм. ССР, 40, №1, 1965, 25.
10. *Lippmann H.* Усилитель низкой частоты с очень узкой полосой пропускания. Exp. Techn. Phys., 1, 1, 1953.
11. *Пикалов А. П.* Генератор пилообразных напряжений длительностью (1 ÷ 3600) сек. ПТЭ, 5, 130, 1964.
12. *Быстров В. Ф., Декабрун Л. Л.* и др. Аппаратура высокого разрешения спектров ядерного магнитного резонанса. ПТЭ, №1, 1961, 122.
13. *Сифоров В. И.* — Радиоприемные устройства. Воениздат, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Э. С. ПАРСАМЯН

СПИСОК КОМЕТАРНЫХ ТУМАННОСТЕЙ, ОБНАРУЖЕННЫХ НА ПАЛОМАРСКИХ КАРТАХ

В целях проведения некоторой статистики параметров, характеризующих кометарные туманности, нами были произведены поиски кометарных туманностей на Паломарских картах. С особой тщательностью были просмотрены области Тельца, Ориона и Единорога, где сконцентрирована большая часть известных кометарных туманностей. Среди разнообразных объектов, имеющих кометарную форму, выбирались те, которые характеризовались следующими признаками:

1. Туманность имеет конусообразную форму.

2. В вершине конуса находится ядро, погруженное частично в туманность.

3. Размер туманности d (подразумевается высота конуса) порядка $0'.5 - 3'.0$.

В данный список включены наиболее ярко выраженные кометарные туманности. В список не включены туманности, имеющие форму дуги или выброса. Несколько туманностей, которые по своей форме могут быть кометарными, но известны как диффузные, также включены в список. Грубая оценка цвета кометарных туманностей по Паломарским картам показала, что около 80% туманностей имеют положительный показатель цвета. Угол наклона осей туманностей к плоскости Галактики находится в пределах от $0°$ до $60°$.

Координаты туманностей определялись с помощью звезд из каталога AGK_2. Координаты туманностей с отрицательным склонением определялись непосредственно по Паломарским картам, что значительно уменьшило их точность.

№	α_{1950}	δ_{1950}	d'	Примечание
1	2	3	4	5
1	$5^h28^m.2$	$34°09'$	1—1.5	Кометарная туманность находится в южной части NGC 1931. В отличие от туманности NGC 1931, которая ярче в красных лучах, кометарная туманность ярче в синих.
2	38.5	6 36	0.6	Яркая кометарная туманность, напоминающая NGC 6729, с углом раствора $\sim 100°$.

1	2	3	4	5
3	$5^h51^m.4$	1° 40′	1.6	Яркая туманность в периферийной области поглощающего облака.
4	55.3	16 31	1.1	Кометарная туманность, очень яркая в синих лучах, раствор конуса 160°.
5	3.7	−15 37	1.3	Кометарная туманность с яркой центральной частью.
6	4.8	18 42	2.0	Биполярная кометарная туманность, приведена в списках Хаббла под координатами $\alpha=6^h04^m$, $\delta=18°42'$ [1].
7	6.8	20 18	1.1	Очень красная туманность, включенная в туманность NGC 2174—5. Раствор конуса ~ 120°.
8	9.1	−6 09	1.0	Конусообразная туманность в передержке, звезда не видна.
9	9.5	+18 00	0.6	Кометарная туманность, ярче в красных лучах. Находится вблизи NGC 2162.
10	11.9	12 21	2.5	Очень красная биполярная туманность с неодинаковой яркостью обеих половин, рядом маленькая туманность размером 0′.8.
11	6 12.3	−6 19	0.7	Кометарная туманность, яркая в синих лучах.
12	12.4	−6 21	1.2	Яркая конусообразная туманность, окруженная слабой оболочкой.
13	29.9	10 12	3.5	Туманность NGC 2245. Яркая туманность биполярной формы, яркость одной половины намного уступает яркости другой.
14	34.9	−10 19	0.6	Слабая туманность, кометарная форма заметна в синих лучах.
15	41.3	3 22	1.0	Две соприкасающиеся туманности неодинаковой яркости вокруг двух звезд.
16	54.8	−8 06	0.6	Типичная кометарная туманность.
17	55.7	−7 52	1.1	Яркая кометарная туманность типа NGC 2261, с резко очерченными границами.
18	57.3	−7 42	1.6	Кометарная туманность с углом раствора ~ 80°—90°.
19	30.0	−16 53	0.6	Кометарная туманность, погруженная в туманность № 2 в списке Штромейера [2].
20	33.6	−18 36	3	Яркая туманность, в красных лучах имеет кометарную форму, приводится в списке Минковского—M_{13} [3].
21	19 27.2	9 37	1.1	Яркая кометарная туманность, аналог NGC 2261, угол раствора конуса ~ 60°. Обнаружена Г. А. Гурзадяном.
22	20 21.7	42 10	1.1	Напоминает биполярную туманность, особенно в красных лучах.
23	23 06.1	66 07	1.1	Типичная кометарная туманность, угол раствора ~ 120°.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория

Поступила 23 VII 1964

Է. Ս. ՊԱՐՍԱՄՅԱՆ

ՊԱԼՈՄԱՐԻ ՔԱՐՏԵԶՆԵՐԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎԱԾ ԳԻՍԱՎՈՐԱՁԵՎ ՄԻԳԱՄԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑՈՒՑԱԿ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է Պալոմարի ատլասի քարտեզների վրա գտնված 23 գիսավորաձև միգամածությունների ցուցակը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hubble E. P.* A general study of diffuse galactic Nebulae. Ap. J., **56**, 162, 1922.
2. *Strohmeier W.* Rote Nebel in der Wintermilchstraße. *Zs.* f. Ap., **27**, 49, 1950.
3. *Minkowski R.* New emission Nebulae, PASP, **58**, 305, 1946.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVIII, № 2, 1965 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. М. СИМОНЯН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ВЛИЯНИЯ ЕЕ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОРЯЧЕКАТАННОЙ СТАЛИ

Исследования были проведены на образцах стали 35ГС, имеющей следующие механические свойства: предельное сопротивление разрыву $\sigma_{вр} = 7800\ кг/см^2$, модуль упругости $E = 2{,}18\ 10\ кг/см^2$. Химический состав: $C = 0{,}37\%$, $Mn = 1{,}10\%$, $Si = 0{,}87\%$, $S = 0{,}043\%$, $P = 0{,}035\%$.

О методике исследований

Исследования на ползучесть производились на машине типа *Zst* 502.10 Рауэнштейн (ГДР).

Нагрузка на испытуемый образец передается посредством навинченных на него зажимов с помощью штучных грузов, подвешенных к нижнему зажиму через двухступенчатое рычажное устройство с передаточным числом 1:50. Образец и прилегающие к нему части зажимов находятся внутри подвешенной электрической печи, в которой можно получать температуру до 900°С с точностью $\pm$ 4°С (при низких температурах — ниже 300°С — точность падает). Взаимное положение двух измерительных шин, жестко закрепленных соответственно на двух выступах образца, указывается на экране и читается с помощью спирального микроскопа с ценой деления 1 *микрон*.

Факт выпиливания образцов из прутка ⌀ 16 *мм* горячекатанной стали отразится на их прочности не более 1,75%. [1].

Для определения исходного модуля упругости E_0 применялся обычный статический метод для разных напряжений, примененный ко всем испытанным образцам.

В случае испытаний при 100°С и 200°С колебания температуры от автоматических включений и выключений печи значительно отражаются на деформациях образца. Для учета этого явления при определении деформаций ползучести до нагружения образца устанавливалась диаграмма деформаций от температурных колебаний во времени в зависимости от момента периодического включения печи.

Нагружение образца при испытании на ползучесть осуществлялось в течение 1 минуты, и все остаточные деформации за это время относились к пластическим. Показания были сняты до нагружения, сразу после нагружения и затем через 1 *мин*, 3 *мин*, 5 *мин*, 10 *мин*, 15 *мин*, 20 *мин*, 25 *мин*, 30 *мин*, 40 *мин*, 50 *мин*, 1*ч*, 1*ч* 10 *мин*, 1*ч* 20 *мин*, 1*ч* 30 *мин*, 2*ч*, 2*ч* 30 *мин*, 3*ч*, 3*ч* 30 *мин*, 4*ч* после нагружения. Кроме того отмечались моменты включения печи в случае испытания при 100°C и 200°C, а деформации ползучести в этом случае были определены путем наложения показаний испытаний и показаний от колебаний температуры, снятых до нагружения.

После остывания в печи у каждого испытанного образца определялся модуль упругости при тех же условиях, что и до испытания на ползучесть. Кроме того для каждого испытанного на ползучесть образца была определена диаграмма растяжения на разрывной машине типа *ZDM* 10/91 Рауэнштейн со скоростью деформации 4%/*мин*.

Испытания проводились на 120 образцах. Для каждой комбинации температур и напряжений (табл. 1) испытывались минимум по 4 образца.

Таблица 1

Комбинации нагрузок и температур, принятые для испытаний

Температура в °C	Принятые нагрузки в долях от $\sigma_{вр}$				
20	0,5	0,6	0,7	0,8	
100	0,4	0,5	0,6	0,7	
200	0,3	0,4	0,5	0,6	
300	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
400	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
500	0,1	0,2	0,3		

Номера комбинаций нагрузок и температур в дальнейшем обозначены двумя числами, первое из которых соответствует температуре испытания, а второе — нагрузке в долях от сопротивления разрыву $\sigma_{вр}$.

Результаты испытания на ползучесть

Весьма широкий диапазон нагрузок, выбранный для испытания на ползучесть, позволяет получить принципиальные свойства у данной стали.

Общие результаты испытания на ползучесть приведены в табл. 2, где деформации ползучести даны в долях от четырехчасовой. (Ползучесть показана графически на фиг. 1).

В результате проведенных экспериментальных исследований мы приходим к следующим заключениям.

1. Величина деформаций ползучести тем больше, чем меньше разница между напряжением пластического течения при соответствующей температуре и напряжением ползучести (напряжением, при котором производится испытание на ползучесть). С повышением температуры зависимость эта угасает.

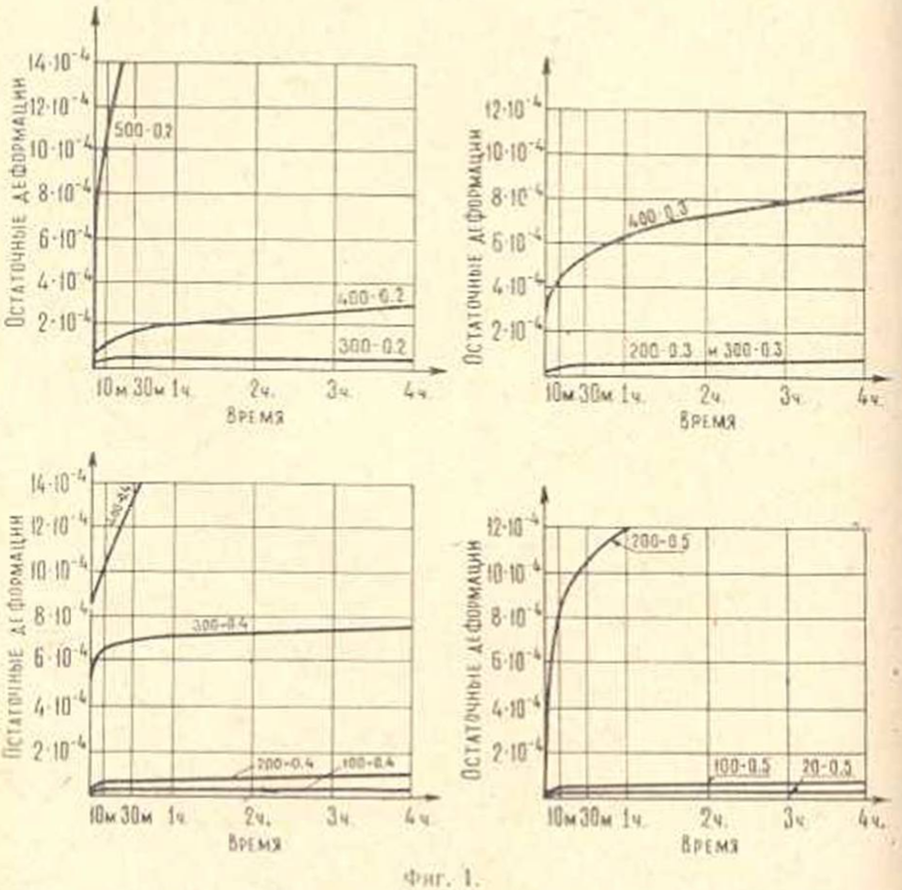
Таблица 2

Результаты испытания стали 35ГС на ползучесть

Номер комбинации	Пластичная деформация в 10^{-5}	Деформация ползучести за 4ч в 10^{-5}	Общая остаточная деформация в 10^{-5}	Ползучесть в долях от 4-часовой Скорость ползучести в 10^{-5}/*мин* 1 *мин*	5 *мин*	10 *мин*	30 *мин*	1 *ч*	2 *ч*	4 *ч*	Показатель точности %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20—0,5	0,0	1,5	1,5	0,333 0,5	1,000 0,01	1,000 0,00	1,000 0,00	1,000 0,00	1,000 0,00	1,000 0,00	19,2
20—0,6	153,0	465,0	618,0	0,039 18,0	0,146 12,0	0,275 12,3	0,905 5,3	0,955 0,3	0,980 0,12	1,000 0,07	—
20—0,7	1561,0	152,0	1713,0	0,25 38,0	0,467 4,1	0,557 2,3	0,730 0,75	0,828 0,32	0,927 0,15	1,000 0,07	5,8
20—0,8	2704,0	190,0	2894,0	0,163 31,0	0,395 5,34	0,500 3,35	0,695 1,04	0,789 0,48	0,894 0,25	1,000 0,12	29,4
100—0,4	0,5	3,0	3,5	0,333 1,0	0,667 0,1	0,800 0,05	0,867 0,01	0,933 0,005	1,000 0,005	1,000 0,00	24,7
100—0,5	2,0	4,0	6,0	0,250 1,0	0,500 0,1	0,625 0,065	0,725 0,03	0,825 0,01	0,900 0,005	1,000 0,005	7,75
100—0,6	933,0	11,0	944,0	0,182 2,0	0,364 0,5	0,445 0,3	0,635 0,05	0,800 0,02	0,910 0,01	1,000 0,008	9,8
100—0,7	1669,0	13,0	1682,0	0,154 2,0	0,461 0,5	0,615 0,3	0,770 0,05	0,846 0,025	0,925 0,011	1,000 0,008	6,4
200—0,3	1,0	6,0	7,0	0,067 0,4	0,334 0,25	0,400 0,06	0,567 0,04	0,717 0,017	0,885 0,005	1,000 0,004	14,9
200—0,4	2,0	7,0	9,0	0,286 2,0	0,400 0,22	0,515 0,1	0,685 0,035	0,785 0,017	0,900 0,007	1,000 0,005	14,1
200—0,5	14,0	123,0	137,0	0,138 17,0	0,464 4,55	0,560 1,8	0,748 0,75	0,860 0,42	0,925 0,23	1,000 0,12	17,5
200—0,6	760,0	42,0	802,0	0,119 5,0	0,381 1,65	0,438 0,62	0,552 0,375	0,739 0,143	0,880 0,054	1,000 0,025	16,6
300—0,2	0,0	5,0	5,0	0,200 1,0	0,440 0,23	0,600 0,1	0,800 0,01	0,840 0,005	0,900 0,005	1,000 0,003	20,4
300—0,3	0,5	6,5	7,0	0,154 1,0	0,369 0,23	0,477 0,13	0,646 0,054	0,785 0,021	0,908 0,006	1,000 0,004	5,12
300—0,4	47,0	28,0	75,0	0,214 6,0	0,500 1,3	0,643 0,51	0,740 0,143	0,843 0,05	0,921 0,025	1,000 0,012	14,6
300—0,5	304,0	42,0	346,0	0,214 9,0	0,428 1,82	0,548 0,64	0,695 0,25	0,802 0,081	0,905 0,039	1,000 0,028	9,5
300—0,6	613,0	42,0	655,0	0,262 11,0	0,452 1,78	0,538 0,54	0,690 0,28	0,797 0,099	0,880 0,054	1,000 0,031	23,4
400—0,1	0,0	8,5	8,5	0,014 0,12	0,066 0,10	0,113 0,061	0,229 0,038	0,353 0,033	0,577 0,031	1,000 0,029	9,7
400—0,2	2,0	28,0	30,0	0,054 1,5	0,196 0,58	0,288 0,35	0,464 0,21	0,607 0,098	0,750 0,065	1,000 0,056	14,8
400—0,3	25,0	58,0	83,0	0,072 4,2	0,245 1,19	0,322 0,68	0,482 0,38	0,656 0,25	0,810 0,14	1,000 0,07	5,2
400—0,4	86,0	100,0	186,0	0,065 6,5	0,225 1,91	0,295 1,38	0,485 0,64	0,630 0,38	0,810 0,25	1,000 0,13	12,6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
400—0,5	389,0	267,0	656,0	0,061 16,2	0,180 4,39	0,255 3,23	0,412 1,71	0,555 1,10	0,745 0,83	1,000 0,41	16,0
500—0,1	0,5	44,0	44,5	0,045 2,0	0,168 0,71	0,254 0,45	0,436 0,30	0,607 0,15	0,777 0,10	1,000 0,07	13,6
500—0,2	32,0	403,0	435,0	0,046 18,4	0,161 5,37	0,191 3,54	0,322 2,05	0,446 1,51	0,655 1,26	1,000 1,06	31,0
500—0,3	155,0	9800	9955	0,011 105,5	0,044 52,0	0,071 47,7	0,176 55,6	0,274 76,1	1,0 155,0	— —	—

2. Сопротивление стали остаточным деформациям при нагрузках, превосходящих напряжение пластического течения (площадка текучести), растет с повышением температуры, и это имеет место для температур в пределах 20°C — 300°C (ср. 20—0,7 и 100—0,7 или 100—0,6; 200—0,6 и 300—0,6).



Фиг. 1.

3. Затухание ползучести тем меньше, чем больше температура протекания ползучести (фиг. 2).

Определенный интерес представляет ползучесть при нагрузках, близких к пределу текучести ([2]—[7]), что имело место в комбизации 20—0,6. Данные о ползучести при 20—0,6, которые с уточненными значениями нагрузок приведены отдельно в табл. 3, приводят к заключению, что деформации, соответствующие площадке текучести, могут быть осуществлены по истечении времени и при нагрузках, меньших предела текучести и происходят тем скорее, чем больше нагрузка.

Об аналитическом представлении деформаций ползучести

В [8], [9], [10] предложено деформацию ползучести определять в виде

$$\varepsilon_c = f(t) \cdot \varphi(\sigma).$$

Поскольку отношение деформаций ползучести $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$, соответствующих моментам времени t_1 и t_2, не должно зависеть от напряжения ползучести σ, то в табл. 2 все числители по вертикали, соответствующие одной и той же температуре, должны мало отличаться друг от друга, что в настоящих исследованиях не имело места.

В случае учета упругих и пластических деформаций деформационные кривые в настоящих экспериментах приближались к подобным, и в связи с этим полученные экспериментальные данные аппроксимировались формулами пластической наследственности:

$$\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{3-\mu}{2}} K_0 \cdot \varepsilon^{\mu} = \sigma \left[1 + C_0^1 \left(1 - e^{-\gamma(t-\tau_1)}\right)\right].$$

Коэффициенты K_0, γ, C_0^1 и μ, вычисленные значения которых для температур 500°C, 400°C, 300°C, и 200°C даны в таблице 4, определяют зависимость между деформациями и напряжениями при сложном напряженном состоянии по формулам [12]

$$K_0 [\varepsilon_i (t)]^{\mu} = \sigma_i (t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma_i (\tau) \cdot C_0^1 \gamma e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau,$$

где

$$\varepsilon_i (t) = \sqrt{\frac{1}{6}} \times$$

$$\times \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)},$$

$$\sigma_i (t) = \sqrt{\frac{1}{6}} \times$$

$$\times \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Таблица 3

Ползучесть стали 35ГС при нагрузках, близких к напряжению течения

Нагрузки в долях от $\sigma_{вр}$	Общая остаточная деформация через 4ч в 10^{-5}	Остаточная деформация в долях от 4-часовой							
		Скорость ползучести в 10^{-5} *мин* через							
		0 *мин*	1 *мин*	5 *мин*	10 *мин*	30 *мин*	1 ч	2 ч	4 ч
0,597	595,0	0,005 —	0,042 22,0	0,098 6,0	0,310 24,0	0,920 12,4	0,950 0,3	0,970 0,13	1,000 0,13
0,600	618,0	0,240 —	0,277 18,0	0,354 12,0	0,470 12,3	0,930 5,3	0,970 0,3	0,980 0,12	1,000 0,07
0,602	750,0	0,418 —	0,858 330,0	0,910 4,0	0,925 2,0	0,953 0,7	0,970 0,3	0,980 0,15	1,080 0,07
0,610	739,0	0,846 —	0,886 29,0	0,920 4,5	0,940 2,1	0,970 0,65	0,980 0,2	0,990 0,09	1,000 0,07

Таблица 4

Значения коэффициентов K_0, C_0^1, μ, γ

Температура° C	$K_0\left(\frac{кг}{см^2}\right)$	C_0^1	μ	$\gamma\left(\frac{1}{час}\right)$
200	118000	0,0407	2/3	2,2
300	30000	0,044	1/2	2,2
400	22000	0,2064	1/2	0,16
500	39000	0,4530	3/5	0,9

Аппроксимация зависимости скорости ползучести от температуры по Бейли [13] $\dot{\varepsilon} = f(\sigma, t)e^{nT}$ или Кантеру [14] $\dot{\varepsilon} = f(\sigma, t)\cdot e^{-\frac{K}{T}}$ в на- стоящих исследованиях оказалась неприемлемой.

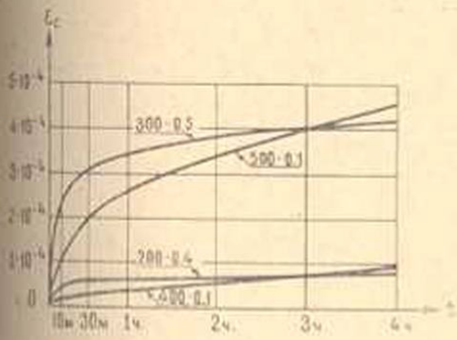
О модуле упругости при повышенных температурах

Модуль упругости в нагретом состоянии (E_T) определялся д испытания на ползучесть. Полученные данные E_T сравнивались с E_0 измеренным при тех же нагрузках, но при 20°С. Значения коэффи- циентов $k_E = \frac{E_T}{E_0}$, а также показатели точности по [19] даны на фиг. 3 откуда видно, что уже при 500°С k_E доходит до 0,7.

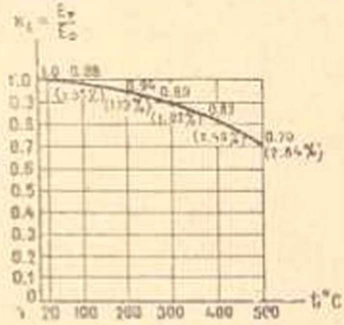
Значения модуля упругости в указанных пределах температу могут быть аналитически представлены при помощи формулы

$$E_T = E_0\ (1-0{,}0000012T^2).$$

Среднее квадратичное отклонение этой формулы от эксперимен- тальной кривой составляет 3,2%.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Сравнение свойств стали до и после испытания на кратковременную ползучесть

В настоящих экспериментах было найдено, что явление ползучести практически не изменяет модуля упругости, за исключением нагрузок $0{,}7\sigma_{пр}$ и $0{,}8\sigma_{пр}$ при 20°C, когда его значение уменьшается на 10–12%.

Напряжение пластического течения (площадка текучести), измеряемое при 20°C, у образцов, претерпевших незначительную оста-

Таблица 5

Изменение напряжений течения от ползучести

Номера комбинаций	Напряжение ползучести $кг/см^2$	Напряжение течения $кг/см^2$	Разность напряжения течения и напряжения ползучести	Увеличение напряжения течения	Общая остаточная деформация в %
20–0,6	4690	5065	375	215	0,675
20–0,7	5460	5440	—20	590	1,713
20–0,8	6250	6300	50	1450	2,894
100–0,6	4690	5830	1140	980	0,944
100–0,7	5460	6600	1140	1750	1,682
200–0,5	3900	5120	1220	270	0,137
200–0,6	4690	5850	1160	1000	0,802
300–0,5	3900	5350	1450	500	0,346
300–0,6	4690	6015	1425	1165	0,655
400–0,4	3120	5230	2110	380	0,186
400–0,5	3900	5760	1860	910	0,656
500–0,3	2340	5095	2755	245	9,...
500–0,4	3120	5470	2350	620	9,...

точную деформацию, не изменялось независимо от температуры протекания ползучести.

В табл. 5 приведены результаты исследований напряжений пластического течения у образцов, давших в результате ползучести заметное изменение этого показателя.

Из данных испытаний можно сделать следующие выводы:

1) изменение напряжения течения имеет место лишь, начиная с некоторого предела напряжений ползучести, и этот предел уменьшается с повышением температуры;

2) мнение, что изменение напряжения течения определяется одной лишь остаточной деформацией, в настоящих исследованиях не подтверждается;

3) из температур, принятых при испытании на ползучесть, при равных остаточных деформациях наибольшее повышение напряжения течения имеет место в случае испытания на ползучесть при 300°C (ср. 200—0,6; 300—0,6 и 400—0,5);

4) разность между измененным напряжением течения и напряжением ползучести увеличивается с повышением температуры. При температуре 100°C она достигает сразу 1140 *кг/см*^{2}, а при дальнейшем повышении температуры ползучести она растет незначительно.

При уменьшении длительности испытания на ползучесть повышение напряжения течения падает. Это определилось из испытания двух дополнительных образцов, которые были нагреты до 100°C, а затем нагружены до 5100 *кг/см*^{2} (0,65 $\sigma_{вр}$) и разгружены через 5 минут, давая остаточную деформацию (1,012% и 1,100%), превышающую общую остаточную деформацию стержней 100—0,6 (0,944). Однако, после того же режима остывания образцы дали напряжения течения 5500 *кг/см*^{2} и 5600 *кг/см*^{2}, в то время как для стержней 100—0,6 (4690 *кг/см*^{2}) после 4-часовой ползучести образцы дали 5830 *кг/см*^{2} с средним разбросом 14 *кг/см*^{2}.

Отсюда видно, что длительность протекания ползучести существенно отражается на повышении напряжения течения.

Выскажем предположение, что возврат модуля упругости протекает параллельно с повышением напряжения течения. В наших исследованиях эта точка зрения оправдывается. Из этой концепции вытекает, что у стали, имеющей „дефект модуля" (уменьшенное значение E, например, от пластических деформаций), можно поднять напряжение течения путем ограниченного (например, до 300°C) нагрева.

Этот факт получил экспериментальное подтверждение, например, при исследовании высокопрочной проволоки [16], а также упрочненных пластическим удлинением стали 35ГС [17], стали 5 [15] и стали 25Г2С [18].

Прочность и удлиняемость образцов не зависит от напряжения или деформации ползучести. Это позволило сравнивать усредненные для каждой температуры значения прочности и удлиняемости образцов, подвергнутых испытанию на ползучесть (табл. 6).

Таблица 6

Зависимость прочности и удлиняемости стали от температуры предварительной ползучести

Температура °C	20	100	200	300	400	500
Прочность $кг/см^2$	7864	7743	7668	7589	7584	7375
Удлиняемость %	15,6	16,5	17,1	17,5	18,0	18,2

Как видно из табл. 6, с повышением температуры испытания на ползучесть прочность несколько понижается, а деформативность растет.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 VII 1964

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԲԱՐՁՐԱՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ՏԱՔ ԳԼԱՆՎԱԾ ՊՈՂՊԱՏԻ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ ՆՐԱ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՓՈՐՁՆԱԿԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է պողպատի սողքը ջերմության 20°C, 100°C, 200°C, 300°C, 400°C ու 500°C-ի և բեռի փոփոխման բավականաչափ լայն դիապազոնի համար: Հետազոտված է նաև հոսքի լարումների, առաձգականության մոդուլի, ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների փոփոխությունը՝ կախված սողքից:

Բերված արդյունքներից երևում է, որ սողքի դեֆորմացիան մեծապես կախված է սողքի լարումների և հոսքի լարումների մոտիկությունից: Սողքի ջերմաստիճանի մեծացումից այդ կախումը փոքրանում է, որը հեշտացնում է սողքի տվյալների անալիտիկ գրանցումը: Ներկա աշխատությամբ չի հաստատվում գոյություն ունեցող այն կարծիքը, որ սողքից առաջացած հոսքի լարումների փոփոխությունը որոշվում է միայն ընդհանուր մնացորդային դեֆորմացիայից, անկախ ժամանակից և սողքի ջերմաստիճանից: Միևնույն մնացորդային դեֆորմացիայի ժամանակ հոսքի լարումների ամենամեծ աճը դիտվել է 300° ջերմության դեպքում առաջացած սողքի ժամանակ:

Ամրությունը, դեֆորմատիվ հատկությունները և առաձգականության մոդուլը սողքից փոփոխվում են աննշան: Առաջարկված է առաձգականության մոդուլի համար անալիտիկ արտահայտություն՝ կախված ջերմաստիճանից:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шабалин В. И., Власова Т. В.* Упрочнение поверхности металла при механической полировке. Заводская лаборатория, №11, 1962.
2. *Грант Н. Дж.* и *Чаудхури А. Р.* Ползучесть и разрушение. Сборник „Ползучесть и возврат". Металлургиздат, 1961.

3. *Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминов В. Н.* Теория ползучести и длительной прочности металлов. Металлургиздат, 1959.
4. *Шоек Г.* Теория ползучести. Сборник „Ползучесть и возврат". Металлургиздат, 1961.
5. *Taylor G. J.* Proceedings of the Royal Society. Series A, vol. 145, 1934, p. 362.
6. *Лин Т.* О связи между напряжениями и деформациями в теориях скольжения. Механика, № 4, 1960.
7. *Батдорф С. Б., Будянский Б.* Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения. Механика, № 1, 1962.
8. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеоретиздат, 1952.
9. *Vetty P. Mc.* Trans. Mech. Engineering, 1934, p. 149.
10. *Soderberg C.* Trans. ASME, 56, 1936, p. 733.
11. *Работнов Ю. Н.* Расчет деталей машин на ползучесть. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1948.
12. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 23, 1959.
13. *Bailey R. W.* Proceedings Inst. Mech. Engineering, 122, 1933, p. 209.
14. *Kanter J.* Trans. Amer. Inst. Mining. Metal Eng. Iron a Steel Division, v. 131, 1938, p. 385.
15. *Комендат Г. Я.* Напряженно-армированные железо-бетонные конструкции с арматурой, натягиваемой электрическим методом. Львов, 1958.
16. *Михайлов В. В., Фоломеев А. А.* Способ уменьшения потерь от релаксации проволоки и прядей. Бетон и железобетон, № 6, 1962.
17. *Мадатян С. А.* Влияние электронагрева на свойства горячекатанной арматурной стали. Бетон и железобетон, № 2, 1962.
18. *Рискинд Б. Я.* Натяжение арматуры электронагревом. ЦБТИ НИИ, 1958.
19. *Леонтьев Н. Л.* Статистическая обработка результатов наблюдений. Гослесбумиздат, 1952.