

Г. В. ГЕНДЖОЯН

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1°. В настоящей работе дается метод построения приближенных решений типа С. А. Чаплыгина для следующей задачи:

$$\left. \begin{aligned} P(u) = -\Delta u + f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) &= 0 \quad x \in D \\ u|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Здесь D — ограниченная область евклидова пространства E_m с достаточно гладкой границей Γ . Для таких задач, благодаря линейности главной части уравнения, изучение вопросов существования решений и их единственности существенно облегчается. Относящиеся сюда результаты [1, 2] более полны, получены сравнительно раньше, чем для более общих квазилинейных уравнений.

Решению задачи (1.1) приближенными методами, близкими к рассматриваемому нами, посвящены работы Кошелева А. И. [3, 4], в которых исследуется применение метода последовательных приближений, и работа Мысовских И. П. [5]. В последней работе задача (1.1) решается методом Чаплыгина, но функция f предполагается не зависящей от производных $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Когда f зависит нелинейно от $\frac{\partial u}{\partial x_i}$,

само построение чаплыгинских приближений принципиально осложняется. В настоящей работе рассматривается именно этот случай: функция f нелинейно зависит от u и ее производных. При этом доказывается сходимость чаплыгинских приближений к решению, тем самым устанавливается существование последнего.

Укажем обозначения, которыми будем пользоваться. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ — точки в области D . Расстояние между ними обозначим через r : $r = |x - \xi|$. ρ_ξ означает расстояние точки ξ до границы Γ области D . Открытый шар с центром в точке ξ и радиусом ρ_ξ обозначим через k_ξ . Буквой k обозначим постоянные при оценке тех или иных величин. Индекс у линейной дифференциальной операции над функцией, зависящей от двух переменных, указывает по какому переменному идет дифференцирова-

ние: например, $\Delta_x u(x, \xi)$ — оператор Лапласа от $u(x, \xi)$ по переменному x . Часто для краткости записи будем употреблять обозначения:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = u_{x_i x_j}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = f_u,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_{x_i}} = f_{u_{x_i}}, \quad \sum_k a_k b_k = a_k b_k, \quad f(x, u, u_{x_i}) = f(u).$$

Смысл обозначений $\hat{C}_{(D)}^{(v)}$, $C_{(D)}^{(b)}$, $C_{(D)}^{(k, \alpha)}$, $\hat{W}_p^l(D)$ — общепринятый [6, 7]. Ниже мы рассмотрим случай $m > 2$. Определим класс Z_m как множество линейных дифференциальных операций L над функциями от $C^2(D)$, имеющих вид $Lu = -\Delta u + a_i(x)u_{x_i} + b(x)u$, где $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $b(x)$ — измеримые в D функции, удовлетворяющие оценкам: $|a_i(x)| \leq M$, $0 \leq b(x) \leq M$.

2°. Предварительно докажем следующие леммы.

Пусть ядро $R(x, \xi)$, определенное в $\bar{D} \times \bar{D}$, удовлетворяет требованиям:

а) $R(x, \xi) \geq 0$ при $x, \xi \in \bar{D}$,

б) $R(x, \xi) = 0$ при $x \in \Gamma$, $\xi \in \bar{D}$,

в) $R(x, \xi)$ является функцией Леви для уравнения $\Delta u = 0$. При

этом разность $g(x, \xi) = R(x, \xi) - \frac{1}{(m-2)v_m} \cdot \frac{1}{r^{m-2}}$, где v_m — площадь поверхности m -мерной сферы единичного радиуса, удовлетворяет оценкам вида $g(x, \xi) = O(r^{2+\alpha-m})$ ($0 < \alpha < 1$),

г) $\Delta_x g(x, \xi) \geq M \sum_i |R_{x_i}(x, \xi)| + MR(x, \xi)$.

Здесь M — некоторая положительная постоянная.

Определим функцию $w(x)$ формулой

$$w(x) = \int_D R(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (2.1)$$

где предполагается, что $\varphi(\xi)$ принадлежит классу $C_{(D)}^{(0, \alpha')}$ ($0 < \alpha' < 1$).

Лемма 1. Функция $w(x)$, определенная формулой (2.1), удовлетворяет условиям:

1. $w(x) \geq 0$ (≤ 0), если $\varphi(x) \geq 0$ (≤ 0),

2. $w(x)|_\Gamma = 0$,

3. $w(x) \in C_{(D)}^{(2, \mu)}$, ($\mu < \alpha$, $\mu \leq \alpha'$),

4. Для любой операции L из класса Z_m верны соотношения:

$$Lw(x) - \varphi(x) \leq 0 \quad (\geq 0), \quad \text{если } \varphi(x) \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Доказательство. Справедливость утверждений 1 и 2 очевидна. Для проверки условия 3 перепишем формулу (2.1) в виде

$$w(x) = \int_D g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{(m-2)v_m} \int_D \frac{\varphi(\xi)}{r^{m-2}} d\xi = w_1(x) + w_2(x).$$

По определению функция $g(x, \xi)$ дважды непрерывно дифференцируема в области D , кроме точки $x = \xi$, причем для ее производных имеют место оценки вида

$$\frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x_i} = O(r^{1+\alpha-\alpha_i}), \quad \frac{\partial^2 g(x, \xi)}{\partial x_i \partial x_j} = O(r^{\alpha-\alpha_i-\alpha_j}). \quad (2.2)$$

Следовательно, функцию $w_1(x)$ можно дважды дифференцировать под знаком интеграла. Более того, обычными методами теории потенциала устанавливается, что $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i \partial x_j}$ принадлежит классу $C_{(D)}^{(0, \mu)}$ ($\mu < \alpha$). Таким же путем легко убедиться, что $w_2(x)$ дважды дифференцируема под знаком интеграла и $\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i \partial x_j}$ принадлежит $C_{(D)}^{(0, \alpha')}$ [6].

При этом имеет место соотношение

$$\Delta w(x) = \int_D \Delta_x g(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi - \varphi(x). \quad (2.3)$$

Таким образом, условие 3 выполнено.

Утверждение 4 вытекает из формулы

$$\begin{aligned} Lw - \varphi &= -\Delta w + a_i(x) w_{x_i} + b(x) w - \varphi(x) = \\ &= \int_D [-\Delta_x g(x, \xi) + a_i(x) R_{x_i}(x, \xi) + b(x) R(x, \xi)] \varphi(\xi) d\xi \end{aligned}$$

с учетом того, что $R(x, \xi)$ удовлетворяет требованию г).

Лемма II. При подходящем выборе положительных чисел N, α, β ($0 < \alpha < 1$), ($0 < \beta < d^{-\alpha}$; d — диаметр области D), ядро, определенное в D формулой

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{\frac{Nr}{r-\rho_\xi}} \frac{1}{(m-2)\gamma_m} \left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) & \text{при } x \in K_\xi \\ 0 & \text{при } x \notin K_\xi \end{cases}$$

удовлетворяет требованиям а), б), в), г).

Доказательство. Выполнение требований а) и б) очевидно. Функция $G(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x в D при фиксированном ξ . Разность

$$g(x, \xi) = G(x, \xi) - \frac{1}{(m-2)\gamma_m} \frac{1}{r^{m-2}}$$

и ее производные удовлетворяют оценкам, предъявляемым к функции Леви, так что требование в) выполнено. Заметим, что выполнение требования г) надо проверить лишь в шаре K_ξ . В этом шаре $g(x, \xi)$ и $G(x, \xi)$ являются функциями только от r . Производя соответствующие вычисления, будем иметь (индекс ξ при ρ опускаем):

$$\begin{aligned}
G_r(x, \xi) &= \left[-\frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\beta(m-2-\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} - \frac{m-2}{r^{m-1}} \right) \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}, \\
\Delta_x g(x, \xi) &= G_{r,r} + \frac{m-1}{r} G_r = \\
&= \left[\left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) \left(N^2 \frac{\rho^2}{(\rho-r)^4} - \frac{2N\rho}{(\rho-r)^3} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{m-3}{r^{m-1}} - \frac{\beta(m-3-2\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} \right) + \frac{\beta\alpha(m-2-\alpha)}{r^{m-\alpha}} \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}, \\
I_1 &= \Delta_x g(x, \xi) - M \sum |G_{x_i}(x, \xi)| - MG(x, \xi) > \Delta_x g(x, \xi) - \\
&\quad - Mm |G_r(x, \xi)| - MG(x, \xi) = \left[\left(\frac{1}{r^{m-2}} - \frac{\beta}{r^{m-2-\alpha}} \right) \times \right. \\
&\quad \times \left(\frac{N^2\rho^2}{(\rho-r)^4} - \frac{2N\rho}{(\rho-r)^3} - \frac{NMm\rho}{(\rho-r)^2} - M \right) + \frac{\beta\alpha(m-2-\alpha)}{r^{m-\alpha}} + \\
&\quad \left. + \frac{N\rho}{(\rho-r)^2} \left(\frac{m-3}{r^{m-1}} - \frac{\beta}{r^{m-1-\alpha}} \right) - \right. \\
&\quad \left. - Mm \left(\frac{m-2}{r^{m-1}} - \frac{\beta(m-2-\alpha)}{r^{m-1-\alpha}} \right) \right] \frac{e^{\frac{Nr}{r-\rho}}}{(m-2)\gamma_m}.
\end{aligned}$$

Элементарный анализ последней формулы показывает, что для $m \geq 3$ по фиксированным α и β ($0 < \alpha < 1$), ($0 < \beta < d^{-\alpha}$) можно определить такое $N_0(\alpha, \beta, M)$, что для $N \geq N_0$ имеет место условие $I_1 \geq 0$. Лемма доказана.

3°. Накладываем на функцию $f(x, u, u_{x_i})$ ограничения: f гильбертово-непрерывна по x с показателем α' ($0 < \alpha' < 1$) в области $x \in D$, $u^2 + \text{grad}^2 u < \infty$, имеет непрерывные производные $f_u, f_{u_{x_i}}$, удовлетворяющие в той же области условиям:

$$0 \leq f_u \leq M, \quad |f_{u_{x_i}}| \leq M \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (3.1)$$

где M — некоторая постоянная.

Заметим, что при таких ограничениях легко доказать единственность классического решения задачи (1.1), то есть решения из пространства $C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$. Действительно, если u и v — такие решения, то для $\eta = u - v$ имеем

$$-\Delta \eta + f_{u_{x_i}} \eta_{x_i} + f_u \eta = 0, \quad \eta|_{\Gamma} = 0.$$

В силу условия $f_u > 0$ по теореме Хопфа получим $\eta \equiv 0$.

Следуя С. А. Чаплыгину, функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям: $P(u(x)) \geq 0$ (≤ 0), $u(x)|_{\Gamma} = 0$, назовем верхней (нижней) функцией задачи (1.1) [часто их называют суперрешением (субрешением) задачи]. Рассуждениями, аналогичными только что приведенным при доказательстве единственности решения, легко убедиться, что для любой пары u, v нижних и верхних функций выполняется неравенство $u \leq v$. В частности, если задача имеет решение u^* , то оно, являясь одновременно и нижней и верхней функцией, удовлетворяет соотношениям $u \leq u^* \leq v$. Покажем, что классы нижних и верхних функций непусты. Применяя формулу Тейлора, для выражения $P(u)$ получим

$$P(u) = -\Delta u + f(x, u, u_{x_i}) = -\Delta u + f_{u_{x_i}} u_{x_i} + f_u u + f(x, 0, 0).$$

Пусть $|f(x, 0, 0)| \leq k_1$. Тогда легко видеть, что если неотрицательная функция $v_0(x) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ удовлетворяет дифференциальному неравенству $L_1 u = -\Delta u - M \sum |u_{x_i}| - k_1 \geq 0$, то она является верхней. Тогда функция $u_0(x) \equiv -v_0(x)$ будет нижней функцией задачи. Построим функцию $v_0(x)$. Ищем ее в виде $v_0(x) = e^{N_1} - e^{N_1 \omega(x)}$, где положительное число N_1 и функцию $\omega(x)$ выберем ниже.

Имеем

$$\begin{aligned} L_1 v_0 &\geq \{(N_1 \Delta \omega + N_1^2 \text{grad}^2 \omega) - M N_1 m |\text{grad} \omega| \} e^{N_1 \omega(x)} - k_1 = \\ &= \left\{ N_1 \Delta \omega + \left(N_1 |\text{grad} \omega| - \frac{M m}{2} \right)^2 - \frac{M^2 m^2}{4} \right\} e^{N_1 \omega(x)} - \\ &- k_1 \geq \left(N_1 \Delta \omega - \frac{M^2 m^2}{4} \right) e^{N_1 \omega(x)} - k_1. \end{aligned}$$

Определим $\omega(x)$ как решение задачи $\Delta \omega = C_1$, $\omega|_{\Gamma} = 1$, где C_1 ($C_1 > 0$) выберем так, чтобы $\omega(x)$ удовлетворяла условиям $0 \leq \omega(x) \leq 1$. Тогда, очевидно, по C_1 и M можно выбрать N_1 так, чтобы выполнялось соотношение $L_1 v_0 \geq 0$. Остается построить функцию $\omega(x)$. Введем новую функцию $z(x)$: $z(x) = \omega(x) - 1$, тогда $\Delta z = C_1$, $z|_{\Gamma} = 0$. Следовательно, $z(x) = -C_1 \int_D G_0(x, \xi) d\xi$, где $G_0(x, \xi)$ — функция Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа. Выбирая

$$C_1 = \frac{1}{\max_x \int_D G_0(x, \xi) d\xi},$$

будем иметь $0 \leq \omega(x) \leq 1$. Теперь легко видеть, что $v_0(x)$ — верх-

ная функция. Заметим, что функции $v_0(x)$ и $u_0(x)$ удовлетворяют условию 3 ($0 < \mu < 1$) леммы 1.

Перейдем к построению алгоритма для чаплыгинских приближений. Обозначим поправки $u_{n+1} - u_n = \delta u_n$, $v_{n+1} - v_n = \delta v_n$. Обычно δu_n , δv_n ищутся как решения некоторых линейных задач, связанных специальным образом с линеаризацией задачи (1.1) (см. [8]). Здесь мы определим их непосредственно через ядро $G(x, \xi)$ формулами

$$\begin{aligned} \delta u_n(x) &= - \int_D G(x, \xi) P(u_n(\xi)) d\xi \\ \delta v_n(x) &= - \int_D G(x, \xi) P(v_n(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.2)$$

Параметр α , входящий в определение ядра $G(x, \xi)$, выберем из условия: $\alpha > \alpha'$, где α' — показатель гельдеровской непрерывности функции $f(x, u, u_{x_i})$ по x .

В качестве начальных приближений могут быть взяты любые нижние и верхние функции, например, построенные выше. Проверим, что действительно формулы (3.2) определяют монотонные, двусторонние приближения. Достаточно убедиться, что выполнены условия: а') из $P(u_n) \leq 0$ следует $P(u_{n+1}) \leq 0$, из $P(v_n) \geq 0$ — неравенство $P(v_{n+1}) \geq 0$, б') $\delta u_n|_\Gamma = \delta v_n|_\Gamma = 0$, в') $\delta u_n \geq 0 \geq \delta v_n$.

Пусть $u_n(x)$ и $v_n(x)$ удовлетворяют условию 3 ($\mu = \alpha'$) леммы 1. Благодаря ограничениям, наложенным на $f(u)$, функции $P(u_n(\xi))$ и $P(v_n(\xi))$ будут принадлежать классу $C_{(D)}^{(\alpha, \alpha')}$. Тогда из лемм I и II будет следовать, что функции $\delta u_n(x)$, $\delta v_n(x)$ и, следовательно, $u_{n+1}(x)$, $v_{n+1}(x)$ удовлетворяют условию 3 леммы I и $\delta u_n(x) \geq 0 \geq \delta v_n(x)$, $\delta u_n|_\Gamma = \delta v_n|_\Gamma = 0$.

Для проверки условия а') напомним, например, $P(u_{n+1})$ в виде

$$P(u_{n+1}) = -\Delta \delta u_n + f_{u_{x_i}}(\delta u_n)_{x_i} + f_u \delta u_n + P(u_n) = L_2 \delta u_n + P(u_n).$$

Операция L_2 , очевидно, принадлежит классу Z_M . Так как $\delta u_n(x)$ определяется формулой (3.2), то из утверждения 4 леммы I следует, что $P(u_{n+1}) \leq 0$.

Точно также проверяется условие $P(v_{n+1}) \geq 0$. Таким образом, установлено, что формулами (3.2) определяются последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$u_n \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0.$$

Докажем, что последовательности $\{u_n(x)$, $v_n(x)$ сходятся к решению.

Рассуждения мы проведем только для последовательности $u_n(x)$, так как для $v_n(x)$ они совершенно аналогичны.

Пусть $k_2 = \max [|u_0(x)|, |v_0(x)|]$. Тогда выполнено условие $|u_n| \leq k_2$. Отсюда и из условий (3.1) следует неравенство

$$|f(u_n)| \leq k_3 \operatorname{grad}^2 u_n + k_4. \quad (3.3)$$

В свою очередь, отсюда вытекает справедливость дифференциального неравенства для $u_n(x)$

$$-\Delta u_n(x) - k_3 \operatorname{grad}^2 u_n - k_4 \leq 0. \quad (3.4)$$

Введем новую функцию $w_n(x)$: $u_n(x) = \frac{1}{k_2} \ln w_n(x)$. Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} e^{-k_2 k_4} &\leq w_n \leq e^{k_2 k_4}, & w_n|_{\Gamma} &= 1, & w_n &\leq w_{n+1}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_i} &= \frac{1}{k_2 w_n} \frac{\partial w_n}{\partial x_i}, & \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i^2} &= -\frac{1}{k_2 w_n^2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{k_2 w_n} \frac{\partial^2 w_n}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Неравенство (3.4) для $w_n(x)$ принимает вид

$$\Delta w_n + k_3 k_4 w_n - \Delta w_n + k_2 w_n \geq 0. \quad (3.6)$$

Покажем равномерную ограниченность норм $\|\operatorname{grad} u_n\|_{L_\infty}^2 = \int_B \operatorname{grad}^2 u_n(\xi) d\xi$.

В силу условий (3.5) достаточно показать равномерную ограниченность норм $\|\operatorname{grad} w_n\|_{L_\infty}$. Из неравенства (3.6) для произвольных n и $p > n$, вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \int_B (\Delta w_n + k_3 w_n) w_n d\xi &\leq \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_p d\xi, \\ \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_n d\xi &\leq \int_B (\Delta w_p + k_3 w_p) w_p d\xi. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям с учетом условий $w_n|_{\Gamma} = w_p|_{\Gamma} = 0$, получим

$$\begin{aligned} k_2 \int_B w_n^2 d\xi - \int_B \operatorname{grad}^2 w_n d\xi &\leq k_3 \int_B w_n w_p d\xi - \int_B \operatorname{grad} w_n \operatorname{grad} w_p d\xi, \\ k_3 \int_B w_n w_p d\xi - \int_B \operatorname{grad} w_p \operatorname{grad} w_n d\xi &\leq k_3 \int_B w_p^2 d\xi - \int_B \operatorname{grad}^2 w_p d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_B (\operatorname{grad}^2 w_p - \operatorname{grad}^2 w_n) d\xi \leq k_3 \int_B (w_p^2 - w_n^2) d\xi,$$

из которого, очевидно, вытекает соотношение $\|\operatorname{grad} w_n\|_{L_2} \leq k_0$.

Докажем, что последовательность норм $\|P(u_n)\|_{L_2} = \|-\Delta u_n + f(u_n)\|_{L_2}$ сходится к нулю, откуда в силу условий $\|\operatorname{grad} u_n\|_{L_2} \leq k_1$

(3.3) и неравенства Бернштейна-Ладженской будет следовать равномерная ограниченность норм $\|u_n\|_{\omega_2^2}$. Для этой цели рассмотрим более подробно связь между $P(u_{n+1})$ и $P(u_n)$. Подставляя в равенство

$$P(u_{n+1}) = P(u_n) - \Delta \delta u_n + f_{u_{x_i}} (\delta u_n)_{x_i} + f_u \delta u_n$$

выражение δu_n из (3.2), согласно пункту 2° будем иметь

$$P(u_{n+1}(x)) = \int_D [\Delta_x g(x, \xi) - f_{u_{x_i}} G_{x_i}(x, \xi) - f_u G(x, \xi)] P(u_n(\xi)) d\xi.$$

Из оценок пункта 2° для функций $g(x, \xi)$ и $G(x, \xi)$ следует, что подинтегральное выражение представляет собою непрерывную в D , кроме точки $\xi = x$, функцию с особенностью в этой точке типа

$\frac{1}{|x - \xi|^{m-2}}$. Поэтому $P(u_{n+1})$ можно записать в виде

$$P(u_{n+1}(x)) = \int_D \frac{\omega(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} P(u_n(\xi)) d\xi, \quad (3.7)$$

где $\omega(x, \xi)$ — непрерывная неотрицательная функция в $\bar{D} \times \bar{D}$. Монотонная последовательность $u_n(x) = u_0(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \delta u_i(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится всюду в $\bar{D}$. Это означает, что для любого $x \in \bar{D}$ сходится ряд

$\int_D G(x, \xi) \sum_i P(u_i(\xi)) d\xi$. По теореме Леви последовательность функций

$G(x, \xi) P(u_n(\xi))$ при фиксированном $x \in \bar{D}$ почти всюду по ξ сходится в D к нулю.

Покажем, что отсюда вытекает сходимость к нулю почти всюду по ξ в D для самой последовательности $P(u_n(\xi))$.

Пусть D' — строго внутренняя подобласть в D и $x \in \bar{D}'$. В шаре $|\xi - x| < \frac{\rho_x}{3}$ функция $G(x, \xi) \geq k_x > 0$, следовательно, $P(u_n(\xi))$ сходит-

ся к нулю почти всюду по ξ в этом шаре. $\bar{D}'$ можно покрыть конечной системой таких шаров, поэтому $P(u_n(\xi))$ в D' почти всюду сходится к нулю. Но так как D можно представить как счетную сумму областей типа D' , то отсюда и следует, что $P(u_n(\xi))$ сходится к нулю почти всюду в D .

По теореме Лебега она сходится к нулю и по мере.

Теперь с помощью формулы (3.7), используя только что установленную сходимость по мере, легко доказать сходимость к нулю последовательности $\|P(u_n(x))\|_{L_1}$. В самом деле, по заданным ε и δ выберем $N = N(\varepsilon, \delta)$ так, чтобы для $n \geq N(\varepsilon, \delta)$ выполнялось соотношение

$$\text{mes } D(|P(u_n(\xi))| \geq \varepsilon) \leq \delta.$$

Обозначим множества $D(|P(u_n(\xi))| \geq \varepsilon)$ ($n > N(\varepsilon, \delta)$) через τ_n . Перепишем соотношение (3.7) в виде

$$|P(u_{n+1}(x))| = \int_{\tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} |P(u_n(\xi))| d\xi + \\ + \int_{D \setminus \tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} |P(u_n(\xi))| d\xi = w_3 + w_4.$$

Оценим нормы $\|w_3\|_{L_2}$ и $\|w_4\|_{L_2}$.

$$\|w_3\|_{L_2}^2 \leq \int_D \left(\int_{\tau_n} \frac{w^2(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \int_{\tau_n} \frac{|P(u_n(\xi))|^2}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \right) dx \leq \\ \leq \mu^2(\tau_n) \int_D \int_{\tau_n} \frac{|P(u_n(\xi))|^2}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi dx.$$

Интегрируя сначала по x (теорема Фубини), затем по ξ , получим

$$\|w_3\|_{L_2}^2 \leq \mu^2(\tau_n) \int_{\tau_n} |P(u_n(\xi))|^2 \int_D \frac{dx}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \leq \mu^2(\tau_n) k_8^2 \|P(u_n)\|_{L_2}^2, \\ \|w_4\|_{L_2}^2 \leq \varepsilon^2 \int_D \left(\int_{D \setminus \tau_n} \frac{w(x, \xi)}{|x - \xi|^{m-2}} d\xi \right)^2 dx \leq \varepsilon^2 K_9^2.$$

То есть имеют место оценки

$$\|P(u_{n+1})\|_{L_2} \leq \|w_3\|_{L_2} + \|w_4\|_{L_2} \leq \mu(\tau_n) k_8 \|P(u_n)\|_{L_2} + \varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|P(u_n)\|_{L_2}.$$

Выбирая $N(\varepsilon, \delta)$ настолько большим, чтобы $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 1$, нетрудно убедиться, что из формулы $\|P(u_{n+1})\|_{L_2} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \|P(u_n)\|_{L_2}$ будет следовать ограниченность последовательности $\|P(u_n)\|_{L_2}$. А отсюда, ввиду того, что ε_1 и ε_2 можно взять произвольно малыми за счет выбора $N(\varepsilon, \delta)$, следует, что $\|P(u_n)\|_{L_2} \rightarrow 0$.

По теоремам вложения Соболева можно из $\{u_n(x)\}$ выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $u_*(x)$ по норме пространства $\tilde{W}_2^1$. Так как $\{u_n(x)\}$ — монотонная последовательность, то она сама сходится к $u_*(x)$ по норме этого пространства [8].

Установим, что предельная функция $u_*(x)$ является решением задачи (1.1). Из соотношения $\|P(u_n)\|_{L_2} \rightarrow 0$ непосредственно получаем

$$\lim_n \int_D G_0(x, \xi) [-\Delta u_n(\xi) + f(u_n(\xi))] d\xi = \\ = \lim_n \left[u_n(x) + \int_D G_0(x, \xi) f(u_n(\xi)) d\xi \right] = 0.$$

Функции $u_n(x)$ сходятся всюду к $u_*(x)$, а для интеграла имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_n(\xi), \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi - \right. \\ & \left. - \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_*(\xi), \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_D G_0(x, \xi) \left| f_n(u_n(\xi) - u_*(\xi)) + \right. \\ & \left. + |f_{u_{x_i}}| \left| \frac{\partial u_n(\xi)}{\partial x_i} - \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i} \right| \right| d\xi \leq k_{10} \|u_n - u_*\|_{W_2^1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

То есть доказана формула

$$u_*(x) = - \int_D G_0(x, \xi) f\left(\xi, u_*(\xi), \frac{\partial u_*(\xi)}{\partial x_i}\right) d\xi.$$

Из нее следует, что $u_*(x) \in C^{(1, \alpha)}(D)$ для произвольного α из интервала $(0, 1)$, а затем на основании этого заключаем, что $f(u_*(\xi))$ принадлежит $C^{(2, \alpha')}(D)$. Следовательно, $u_*(x)$ дважды дифференцируема, то есть она является классическим решением задачи (1.1). Из непрерывности $u_*(x)$ и монотонности последовательности $\{u_n(x)\}$ следует, что $u_n(x)$ сходится к $u_*(x)$ равномерно.

В силу единственности решения предел верхних функций $v^*(x)$ должен совпадать с $u_*(x)$. Таким образом, доказана

Теорема. Пусть функция $f(x, u, u_{x_i})$ удовлетворяет условию гельдеровской непрерывности по x с показателем α' ($0 < \alpha' < 1$) в области $x \in D$, $u^2 + \text{grad}^2 u < \infty$ и имеет непрерывные производные $f_u, f_{u_{x_i}}$ в этой области, удовлетворяющие условиям (3.1).

Тогда задача (1.1) в m -мерной ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей Γ имеет единственное решение из класса $C^{(2, \alpha')}(D)$, к которому сходятся по норме пространства $W_2^1(D)$ чеплыгинские приближения, построенные по формулам (3.2), причем сходимость самих приближений — равномерна.

Заметим, что случай $m = 2$ не вводит новых моментов в доказательство теоремы. Рассуждения также не осложняются принципиально, если в уравнении заменить оператор Δ более общим линейным эллиптическим оператором с коэффициентами, подчиненными определенным условиям гладкости. Случай $m = 1$ решен в заметке [8].

Автор искренне благодарит проф. Е. М. Ландиса и С. Н. Кружкова за оказанную ими помощь при выполнении этой работы.

МАТЕМАТИКА

А. Г. ГЮЛЬМИСАРЯН

ОБЩИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Через $x = (x_1, \dots, x_n)$ будем обозначать точку n -мерного евклидова пространства R^n , $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, Ω —ограниченную область в R^n с границей Γ , Ω_1 —подобласть Ω с границей Γ_1 , не имеющей с Γ общих точек, $\Omega_2 = \Omega / \Omega_1$ (случай двух областей рассматривается для простоты изложения, все результаты верны и в случае разбиения Ω на конечное число областей. Случай неограниченной области, когда Ω_2 совпадает с R^n / Ω_1 будет рассмотрен в п. 4). На границы Γ и Γ_1 накладывается следующее условие: Γ и Γ_1 можно покрыть конечной системой областей U_i (соответственно V_i) в R^n таких, что в каждой из U_i (V_i) определено невырожденное бесконечно гладкое преобразование координат $x \rightarrow y$ такое, что после применения этого преобразования Γ (соответственно Γ_1) становится гиперплоскостью $y_n = 0$. При таком отображении прилегающая к Γ часть области Ω_2 оказывается лежащей в полупространстве $y_n > 0$, а при отображении границы Γ_1 прилегающая к ней часть области Ω_1 лежит в полупространстве $y_n < 0$, а прилегающая к границе Γ_1 часть области Ω_2 лежит в полупространстве $y_n > 0$. При этом требуется выполнение следующего условия: если начало координат исходной системы перенести в любую точку P границы Γ , либо Γ_1 и если y —локальная координата в области покрытия, то требуется, чтобы в точке P имело бы место

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_n} = \dots = \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 1, \quad \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial y_n}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Пусть $0 < t < T \leq +\infty$. Через Ω^T , Ω_1^T , Ω_2^T будем обозначать цилиндры $\Omega^T = \Omega \times (0 < t < T)$, $\Omega_1^T = \Omega_1 \times (0 < t < T)$, $\Omega_2^T = \Omega_2 \times (0 < t < T)$, а через S_Γ и S_{Γ_1} —боковые поверхности Ω^T и Ω_1^T : $S_\Gamma = \Gamma \times (0 < t < T)$, $S_{\Gamma_1} = \Gamma_1 \times (0 < t < T)$.

Приведем несколько известных фактов относительно пространств W_2^1 и $W_{x,t,2}^1$ (см. [1], [2]), которые понадобятся нам в дальнейшем. Пространство $W_2^1(R^n)$ определяется как пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по норме

$$\|u\|_{l, R^n} = \left(\int_{R^n} (1 + |\xi|^{2l}) |Fu|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

где Fu — преобразование Фурье функции $u(x)$. Если l — целое, то норма (1.1) эквивалентна норме

$$\left(\sum_{|a| \leq l} \int_{R^n} |D^a u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (1.2)$$

а при l дробном — норме

$$\left(\sum_{|a| \leq l} \int_{R^n} |D^a u(x)|^2 dx + \sum_{|a|=l} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|D^a u(x) - D^a u(y)|^2}{|x - y|^{n+2l-2|a|}} dx dy \right)^{1/2}. \quad (1.3)$$

Если Ω — ограниченная область, то, как обычно,

$$\|u\|_{l, \Omega} = \left(\sum_{|a| \leq l} \int_{\Omega} |D^a u(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^N \varphi_j(x) = 1 \quad (1.5)$$

— конечное разбиение единицы в окрестности области Ω , где $\varphi_j(x)$ — бесконечно гладкие функции. Тогда норма (1.4) эквивалентна норме

$$\left(\sum_{j=1}^N \|\varphi_j u\|_{l, R^n}^2 \right)^{1/2}.$$

В дальнейшем будем предполагать выполненным следующее: разбиение единицы (1.5) таково, что если носитель функции $\varphi_j(x)$ имеет с Γ либо с Γ_1 общие точки, то он целиком лежит внутри одной из областей U_j либо V_j покрытия границы. Пусть функции $\varphi_j(x)$ ($j = 1, \dots, r$) — те из функций разбиения (1.5), носители которых пересекают Γ . Их сужения на Γ снова обозначим через $\varphi_j(x)$. Пространство $W_2^l(\Gamma)$ определим как пополнение пространства $C^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|u\|_{l, \Gamma}^* = \left(\sum_{j=1}^r \|\varphi_j u\|_{l, R^{n-1}}^2 \right)^{1/2}, \quad (1.6)$$

где норма $\|\varphi_j u\|_{l, R^{n-1}}$ берется в локальных координатах. Аналогично определяется и пространство $W_2^l(\Gamma_1)$ с нормой $\|u\|_{l, \Gamma_1}^*$.

Пусть $[a, b]$ — некоторый интервал оси t , конечный или бесконечный. Пространство $W_{v, l, 2}^{l, k}(\Omega \times [a, b])$ определим как пополнение пространства $C^\infty(\Omega \times [a, b])$ по норме

$$\|u(x, t)\|_{l, k}^2 = \int_a^b \|u(x, t)\|_{l, \Omega}^2 dt + \int_{\Omega} \|u(x, t)\|_{k, [a, b]}^2 dx. \quad (1.7)$$

Норма функции $u(x', t)$ в пространстве $W_{x', t, 2}^{l, k}(\Gamma \times [a, b])$ определяется следующим образом

$$\|u\|_{l, k, \Gamma \times [a, b]}^2 = \left(\int_a^b \|u\|_{l, \Gamma}^2 dt + \sum_{j=1}^l \int_{\Gamma} \|\varphi_j u\|_{k, [a, b]}^2 dx' \right)^{1/2}. \quad (1.8)$$

Обозначим через R_+^n полупространство в R^n , где $x_n \geq 0$, а через R_-^n — полупространство $x_n \leq 0$. Если $u \in W_2^l(R^n)$, то ее сужение на R_+^n принадлежит $W_2^l(R_+^n)$ и

$$\|u\|_{l, R_+^n} \leq C_1 \|u\|_{l, R^n} \quad (1.9)$$

и, наоборот, если $u \in W_2^l(R_+^n)$, то ее можно продолжить на все R^n так, что

$$\|Lu\|_{k, R^n} \leq C_2 \|u\|_{k, R_+^n} \quad (k=0, 1, \dots, l), \quad (1.10)$$

где L — оператор продолжения функций с R_+^n на все R^n . Если $l > 1/2$, то для $u(x) \in W_2^l(R_+^n)$ справедливо

$$\|u(x', 0)\|_{l-1/2} \leq C_3 \|u\|_{l, R_+^n}. \quad (1.11)$$

Если q — числовой параметр, то верно следующее неравенство

$$|q|^{l-k} \|u\|_k \leq C_{kl} (\|u\|_l + |q|^l \|u\|_0) \quad (0 < k < l), \quad (1.12)$$

а также неравенство

$$|q|^{1/2} \|u(x', 0)\|_0 \leq C_4 (\|u\|_1 + |q| \|u\|_0), \quad (1.12')$$

где нормы берутся по R^n либо по R_+^n . Постоянные C_{kl} и C_4 не зависят от u и q (см. [3]). В дальнейшем нам понадобятся нормы, зависящие от числового параметра q

$$\|u\|_l^2 = \|u\|_l^2 + |q|^{2l} \|u\|_0^2. \quad (1.13)$$

где нормы берутся по R^n либо по R_+^n или R_-^n .

Рассмотрим прямую сумму соболевских пространств $W_2^l = W_2^l(R^n) = W_2^l(R_-^n) + W_2^l(R_+^n)$. Всякую функцию $u(x) \in W_2^l$ можно представить в виде

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in R_-^n \\ u_2(x), & x \in R_+^n, \end{cases} \quad (1.14)$$

где $u_1(x) \equiv 0$ при $x \in R_+^n$, $u_2(x) \equiv 0$ при $x \in R_-^n$.

Для функций вида (1.14) имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_l^2 &= \|u_1\|_{l, R_-^n}^2 + \|u_2\|_{l, R_+^n}^2 = \|u_1\|_{l, R_-^n}^2 + \\ &+ |q|^{2l} \|u_1\|_{0, R_-^n}^2 + \|u_2\|_{l, R_+^n}^2 + |q|^{2l} \|u_2\|_{0, R_+^n}^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Неравенства (1.9)–(1.11) можно записать в виде

$$\|u\|_{l, R_+^n} \leq C_1 \|Lu\|_{l, R^n}; \quad \|Lu\|_{l, R^n} \leq C_2 \|u\|_{l, R_+^n}, \quad (1.16)$$

$$\|u(x', 0)\|_{l-1/2} \leq C_3 \|u(x)\|_{l, R_+^n}, \quad (1.17)$$

вычисляя $\|u\|$ как нормы по подпространству, можно перенести неравенство (1.12) на нормы по Ω :

$$\|u\|_l = \|u\|_{l, \Omega} = (\|u\|_{l, \Omega}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Omega}^2)^{1/2} \leq \quad (1.12'')$$

$$\leq C_{kl} \left(\sum_{k=0}^l |q|^{2k} \|u\|_{l-k}^2 \right)^{1/2} \leq C_5 \|u\|_l.$$

Положим

$$\|u\|' = \|u\|_{l, \Gamma}^* = (\|u\|_{l, \Gamma}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Gamma}^2)^{1/2}, \quad (1.18)$$

$$\|u\|'' = \|u\|_{l, \Gamma_1}^* = (\|u\|_{l, \Gamma_1}^2 + |q|^{2l} \|u\|_{0, \Gamma_1}^2)^{1/2}. \quad (1.18')$$

Из (1.17) получаем, что при целом $l \geq 1$ функция из $W_{1/2}^l(\Omega)$ обладает граничными значениями и

$$\|u\|_{l-1/2}^* \leq C_5 \|u\|_{l, \Omega}. \quad (1.19)$$

В дальнейшем нам понадобятся пространства, введенные М. И. Вишиком и М. С. Аграновичем [3]. Пусть $G = \Omega \times (-\infty < t < +\infty)$, $G' = \Gamma \times (-\infty < t < +\infty)$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $l+1$, $\lambda+1/2$, b — целые положительные числа. Пусть $\gamma \geq 0$ фиксировано. Под пространством $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ понимается пространство функций $u(x, t)$, определенных в G , равных нулю при $t < 0$ и таких, что $e^{-\gamma t} u(x, t) \in W_{x, l+1/2}^{l, 1/2b}(G)$. За норму функции $u(x, t)$ в $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ примем норму $\|e^{-\gamma t} u\|_{e, l/2b}$ (см. (1.7)). Аналогично определяется и пространство функций $P_{\lambda, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ на G' : это функции $u(x', t)$, заданные на G' , равные нулю при $t < 0$, и такие, что $e^{-\gamma t} u(x', t) \in W_{\lambda, 1/2b}^{l, 1/2b}(G')$. За норму в $P_{\lambda, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ принимается норма $\|e^{-\gamma t} u(x', t)\|_{\lambda, 1/2b}$ (см. (1.8)).

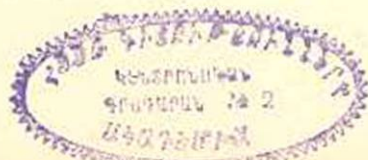
Пусть теперь l — целое неотрицательное, $\gamma > 0$. Пространство $E_{l, 1/2b}(\gamma, \Omega)$ определяется как совокупность функций $U(x, p)$, определенных при почти всех x и p , $\operatorname{Re} p > \gamma$, и обладающих свойствами:

1) при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$, и почти всех p , $\operatorname{Re} p = \gamma$,

$$U(x, p) \in W_{1/2}^l(\Omega),$$

2) при почти всех $x \in \Omega$ функция $U(x, p)$ задана и голоморфна при $\operatorname{Re} p > 0$ и

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |U(x, \sigma + i\tau)|^2 |\sigma + i\tau|^{2b} d\tau < +\infty$$



и для $D_x^\alpha U(x, p)$ при $|\alpha| < l$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |D_x^\alpha U(x, p)|^2 d\tau < +\infty,$$

3)

$$\|U(x, p)\|_{l, 1/2b}^2 = \int_{\sigma > \gamma} [\|U\|_{l, 2}^2 + |p|^{1/b} \|U\|_{0, 2}^2] d\tau < +\infty.$$

Аналогичным образом определяется пространство $E_{\lambda, \lambda/2b}(\gamma, \Gamma)$: это совокупность функций $U(x', p)$, определенных при почти всех $x' \in \Gamma$ и $\operatorname{Re} p \geq \gamma$, таких, что

1) при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p , $\operatorname{Re} p = \gamma$,

$$U(x', p) \in W_2^\lambda(\Gamma),$$

2) при почти всех $x' \in \Gamma$

$$\sup_{\sigma > \gamma} \int |U(x', p)|^2 \sigma + i\tau^{1/b} d\tau < +\infty,$$

3)

$$\|U(x', p)\|_{\lambda, \lambda/2b}^2 = \int_{\sigma > \gamma} [\|U\|_{\lambda, \Gamma}^2 + |p|^{1/b} \|U\|_{0, \Gamma}^2] d\tau < +\infty$$

(см. (1.6)). В [3] доказана следующая теорема.

Пусть γ — положительное число. Тогда преобразование Лапласа

$$U(x, p) = Lu(x, t) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt$$

взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ на пространство $E_{l, 1/2b}(\gamma, \Omega)$ (l — целое неотрицательное), а пространство $P_{\lambda, \lambda/2b}(e^{-\gamma t}, G')$ на $E_{\lambda, \lambda/2b}(\gamma, \Gamma)$ ($\lambda + 1/2$ — целое положительное).

§ 2. Пусть в области Ω^T задан линейный $2b$ — параболический по И. Г. Петровскому [4] оператор порядка $2m$ с разрывными коэффициентами

$$A(x, D_x, \partial/\partial t) = \begin{cases} A^1(x, D_x, \partial/\partial t), & (x, t) \in \Omega_1^T \\ A^2(x, D_x, \partial/\partial t), & (x, t) \in \Omega_2^T \end{cases}$$

$D_x = D_{x_1} \cdots D_{x_n}$; $D_{x_k} = -i \partial/\partial x_k$, A^i — операторы в частных производных с коэффициентами, зависящими бесконечно гладким образом от x в Ω_1^T ($i=1,2$). Порядки операторов A^i равны $2m$, а порядок члена $D_x^\alpha \partial^b/\partial t^b$ по определению $2b$ — параболичности равен $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + 2b$. Пусть функция $f_1(x, t)$ задана при $(x, t) \in \Omega_1^T$, а функция $f_2(x, t)$ при $(x, t) \in \Omega_2^T$. Положим

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in \Omega_1^T \\ u_2(x, t), & (x, t) \in \Omega_2^T \end{cases}$$

где $u_i(x, t) = 0$ при $(x, t) \in \Omega^T / \bar{\Omega}_i^T$ ($i = 1, 2$). При $(x, t) \in S_{\Gamma_i}$ под $u_i(x, t)$ понимается предельное значение $u(x, t)$ со стороны $\bar{\Omega}_i^T$ ($i = 1, 2$).

Рассмотрим следующие уравнения

$$A^1(x, D_x, \partial/\partial t) u_1(x, t) = f_1(x, t), \quad (2.1)$$

$$A^2(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t) = f_2(x, t) \quad (2.2)$$

при следующих граничных условиях

$$B_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_1(x, t)|_{S_{\Gamma_1}} + C_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t)|_{S_{\Gamma_1}} = g_j(x'', t), \\ j = 1, \dots, 2m; \quad x'' \in \Gamma_1 \quad (2.3)$$

$$R_j(x, D_x, \partial/\partial t) u_2(x, t)|_{S_{\Gamma}} = \psi_j(x', t); \quad j = 1, \dots, m; \quad x' \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Предполагается, что коэффициенты оператора B_j бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_1^T$, коэффициенты операторов C_j и R_j бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_2^T$. Порядок B_j и C_j равен m_j , а порядок R_j равен r_j .

К граничным условиям добавляются начальные условия

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \dots, \left. \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} \right|_{t=0} = \varphi_{m-1}(x) \quad (m = b, x). \quad (2.5)$$

Если допустить, что все $\varphi_k(x) \equiv 0$ и $T = +\infty$, то формальное преобразование Лапласа приводит задачу (2.1) — (2.5) к стационарной задаче

$$A^1(x, D_x, p) U_1(x, p) = F_1(x, p), \quad x \in \Omega_1, \quad (2.1')$$

$$A^2(x, D_x, p) U_2(x, p) = F_2(x, p), \quad x \in \Omega_2 \quad (2.2')$$

с граничными условиями

$$B_j(x, D_x, p) U_1(x, p)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, p) U_2(x, p)|_{\Gamma_1} = G_j(x'', p), \quad (2.3')$$

$$j = 1, \dots, 2m; \quad x'' \in \Gamma_1$$

$$R_j(x, D_x, p) U_2(x, p)|_{\Gamma} = \Psi_j(x', p), \quad j = 1, \dots, m; \quad x' \in \Gamma, \quad (2.4')$$

где p — комплексный параметр, пробегающий правую полуплоскость $\operatorname{Re} p \geq 0$. Положим $p = q^{2b}$ и вместо параметра p будем в дальнейшем рассматривать параметр q , изменяющийся в угле Q : $|\arg q| \leq \frac{\pi}{4b}$.

План наших дальнейших рассмотрений таков: сначала мы для стационарной (эллиптической) задачи (2.1') — (2.4') доказываем теорему существования и единственности в пространствах $E_{l, 1/2b}$, потом, воспользовавшись изоморфизмом пространств $E_{l, 1/2b}$ и $P_{l, 1/2b}$ получаем однозначную разрешимость параболической задачи (2.1) — (2.5) в пространствах $P_{l, 1/2b}$ (теорема 6).

Разрешимость задачи (2.1') — (2.4') доказывается в общем по тому же плану, как это обычно делается для эллиптических задач: сначала

для случая однородных операторов A^i , B_j , C_l , R_j с постоянными коэффициентами в полупространстве доказывается априорная оценка и существование, потом эти результаты переносятся на случай операторов с малоизменяющимися коэффициентами, и, наконец, с помощью разбиения единицы получается окончательный результат для операторов с переменными коэффициентами.

Граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами изучались в ряде работ, из которых мы упомянем недавно появившиеся интересные работы Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля [10] и З. Г. Шефтеля [11] (см. также цитированную там литературу). Заметим, что в рассматриваемом нами случае наличие параметра q позволяет получить априорную оценку (теорема 2), из которой сразу следует единственность решения задачи (2.1')—(2.4'), в то время как из оценки вида

$$\|U\|_l \leq K \{ \|F_1\|_{l-2m} + \|F_2\|_{l-2m} + \sum \|G_l\|_{l-m_j-1/2} + \sum \|\Psi_j\|_{l-m_j-1/2} + \|U\|_0 \},$$

с помощью которой получают основные результаты в [10], [11], единственность не следует. Кроме того, для достаточно больших по модулю q мы доказываем существование решения при любых правых частях, тогда как в [10], [11] существование решения доказывается при выполнении некоторых дополнительных условий, налагаемых на правые части.

Теорема существования и единственности для смешанных краевых задач для параболических уравнений (и систем) с бесконечно гладкими коэффициентами во всем $\mathbb{Q}^T$ с условиями вида (2.4) на Γ и условиями Коши (2.5) получена в работах М. С. Аграновича и М. И. Вишика [3], [5]. Отметим, что общей теорией разрешимости смешанных задач для параболических уравнений занимались Т. Я. Загорский [6], С. Д. Эйдельман [7], Л. Н. Слободский [8] и другие.

Используемые нами методы близки к методам, развитым в работах [3], [5], [9]. Доказательство некоторых теорем, сформулированных в настоящей работе, в частности в § 4 и § 5, схоже с доказательством аналогичных теорем из [3], поэтому мы ограничимся только формулировками этих теорем. Подробно (в § 3) мы остановимся только на случае, когда коэффициенты операторов задачи (2.1')—(2.4') постоянные, сами операторы однородны, а граничные условия задаются на гиперплоскости $x_n = 0$.

§ 3. Рассмотрим уравнения

$$A^1(D_x, q) u_1(x, q) = f_1(x, q); (x_n < 0) \quad (3.1)$$

$$A^2(D_x, q) u_2(x, q) = f_2(x, q); (x_n > 0), \quad (3.2)$$

где $A^1(D_x, q)$ и $A^2(D_x, q)$ — однородные порядка $2m$ эллиптические операторы с постоянными коэффициентами, числовой параметр q изменяется в угле Q .

При $x_n = 0$ зададим условия

$$B_j(D_x, q) u_1(x, q)|_{x_n \rightarrow -0} + C_j(D_x, q) u_2(x, q)|_{x_n \rightarrow +0} = g_j(x', q), \\ (j = 1, \dots, 2m) \quad (3.3)$$

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$; $B_j(\xi, q)$ и $C_j(\xi, q)$ — однородные полиномы по $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ порядка m_j с постоянными коэффициентами. На операторы $A^1(D_x, q)$ и $A^2(D_x, q)$ наложим следующее условие:

Условие 1. $A^i(\xi, q) \neq 0$ ($i = 1, 2$) при $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$.

При $n = 1$ дополнительно потребуем, чтобы уравнения $A^i(\xi', \lambda, q) = 0$ ($i = 1, 2$) имели бы ровно m корней с положительной мнимой частью и m с отрицательной мнимой частью.

Из условия 1 следует, что многочлены $A^1(\xi', \lambda, q)$ и $A^2(\xi', \lambda, q)$ можно представить в виде

$$A^1(\xi', \lambda, q) = M_1^+(\xi', \lambda, q) M_1^-(\xi', \lambda, q),$$

$$A^2(\xi', \lambda, q) = M_2^+(\xi', \lambda, q) M_2^-(\xi', \lambda, q),$$

где

$$M_i^\pm(\xi', \lambda, q) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_{ik}^\pm),$$

а $\lambda_{ik}^\pm$ — корни $A^i(\xi', \lambda, q)$ с положительной (отрицательной) мнимой частью. При $q = 0$ условие 1 превращается в условие эллиптичности операторов $A^1(D_x, 0)$ и $A^2(D_x, 0)$.

Положим $f_1(x, q) = f_2(x, q) = 0$. Сделаем преобразование Фурье по $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \rightarrow \xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, получим

$$A^1(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q) = 0, \quad (3.1')$$

$$A^2(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (3.2')$$

$$B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q)|_{x_n \rightarrow -0} +$$

$$+ C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n \rightarrow +0} = \tilde{g}_j(\xi', q) \quad (j = 1, \dots, 2m), \quad (3.3')$$

где $\tilde{g}_j = F' g_j$.

Через $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ будем обозначать пространство устойчивых решений уравнений (3.1') и (3.2'), то есть пространство функций $v(\xi', x_n, q)$, имеющих вид

$$v(\xi', x_n, q) = \begin{cases} v_1(\xi', x_n, q), & (x_n < 0) \\ v_2(\xi', x_n, q), & (x_n > 0) \end{cases} \quad (3.4)$$

и являющихся такими решениями (3.1') и (3.2'), которые стремятся к нулю, когда $x_n \rightarrow \pm \infty$. В частности, так как v_1 и v_2 суть решения

обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, а именно, уравнений

$$M_1^-(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_1(\xi', x_n, q) = 0,$$

$$M_2^+(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q) = 0,$$

то, очевидно, что базис в $\mathcal{M}_1$ могут составлять экспоненты вида $e^{i\lambda_1^+ x_n}$ ($k=1, \dots, m$), а в $\mathcal{M}_2$ — экспоненты вида $e^{i\lambda_2^+ x_n}$ ($k=1, \dots, m$), в случае кратных корней эти экспоненты умножаются на некоторые многочлены от x_n .

Условие 2. Задача (3.1')—(3.3') имеет одно и только одно решение вида (3.4) для любых правых частей $\tilde{g}_j(\xi', q)$, принадлежащее $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Условие 2 может быть записано в следующей алгебраической форме: если $e_1^-, \dots, e_m^-$ — базис в $\mathcal{M}_1$, а $e_1^+, \dots, e_m^+$ — базис в $\mathcal{M}_2$, то условие 2 эквивалентно условию

$$\det \left\{ B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) e_k^- \Big|_{x_n=-0} + C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) e_k^+ \Big|_{x_n=+0} \right\} \neq 0$$

$$\operatorname{Im} \xi = 0, \quad |\xi| + |q| \neq 0, \quad q \in Q.$$

Легко проверяется, что функции

$$e_k^- = \int_{\gamma^-} \frac{e^{i\lambda x_n} \lambda^{k-1}}{M_1^-(\xi', \lambda, q)} d\lambda, \quad (x_n < 0), \quad (k=1, \dots, m),$$

$$e_k^+ = \int_{\gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} \lambda^{k-1}}{M_2^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda, \quad (x_n > 0), \quad (k=1, \dots, m),$$

где γ^- (γ^+) — контур, содержащий все корни уравнения $M_1^-(\xi', \lambda, q) = 0$ ($M_2^+(\xi', \lambda, q) = 0$), образуют базис в $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$.

Построим теперь так называемый канонический базис в $\mathcal{M}$:

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \Omega_{1,j}^-(\xi', x_n, q), & (x_n < 0) \\ \Omega_{2,j}^+(\xi', x_n, q), & (x_n > 0), \end{cases} \quad (j=1, \dots, 2m)$$

такой, что

$$B_j(\xi', x_n, q) \Omega_{1,k}^- \Big|_{x_n=-0} + C_j(\xi', x_n, q) \Omega_{2,k}^+ \Big|_{x_n=+0} = \delta_{jk}, \quad (3.5)$$

δ_{jk} — символ Кронекера. Тогда любое решение (3.1')—(3.3') с произвольными правыми частями $\tilde{g}_j(\xi', q)$ запишется в виде

$$v(\xi', x_n, q) = \begin{cases} v_1(\xi', x_n, q) = \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{1,j}^-(\xi', x_n, q) \tilde{g}_j(\xi', q), & (x_n < 0), \\ v_2(\xi', x_n, q) = \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{2,j}^+(\xi', x_n, q) \tilde{g}_j(\xi', q), & (x_n > 0). \end{cases} \quad (3.4')$$

Действительно,

$$B_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) \sum_{k=1}^{2m} \Omega_{1,k}^- \tilde{g}_k(\xi', q)|_{x_n=0} + \\ + C_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) \sum_{k=1}^{2m} \Omega_{2,k}^+ \tilde{g}_k(\xi', q)|_{x_n=0} = \partial_{j,n} \tilde{g}_j(\xi', q) = \tilde{g}_j(\xi', q).$$

В дальнейшем нам понадобится интегральное представление канонического базиса. Функции Ω_j будем искать в виде

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \Omega_{1,j}^- = \sum_{k=1}^m \alpha_k^j e_k^- \\ \Omega_{2,j}^+ = \sum_{k=1}^m \beta_k^j e_k^+ \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (3.5) и решая полученную систему уравнений относительно α_k^j и β_k^j ($k=1, \dots, m$) при каждом j ($j=1, \dots, 2m$) по формулам Крамера, получим

$$\Omega_j(\xi', x_n, q) = \begin{cases} \int_{\gamma^-} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^1(\xi', \lambda, q)}{M_1^-(\xi', \lambda, q)} d\lambda; & (x_n < 0) \\ \int_{\gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^2(\xi', \lambda, q)}{M_2^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda; & (x_n > 0), \end{cases} \quad (3.7)$$

где функции N_j^1 и N_j^2 — бесконечно гладкие однородные степени $m - m_j - 1$ по совокупности аргументов, являющиеся полиномами по λ .

В дальнейшем в этом § будем считать, что функция $v(\xi', x_n, q)$ имеет вид (3.4), и что нормы $\|u_1\|$ и $\|u_1\|$ берутся по полупространству R_-^n , а нормы $\|u_2\|$ и $\|u_2\|$ по полупространству R_+^n . Положим

$$l \geq \max(2m, m_j + 1). \quad (3.8)$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1 и 2 и пусть целое l удовлетворяет (3.8). Тогда, при ненулевых $q \in Q$ и любых $f_1(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_-^n)$, $f_2(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$ существует одно и только одно решение

$$u(x, q) = \begin{cases} u_1(x, q), & (x_n < 0) \\ u_2(x, q), & (x_n > 0) \end{cases}$$

задачи (3.1), (3.2), принадлежащее $W_2^1(R^n)$. При этом при $|q| \geq q_0$ (q_0 — произвольное положительное число) имеет место двусторонняя априорная оценка

$$\|u\|_t \leq C \left\{ \|f_1\|_{t-2m, R_-^n} + \|f_2\|_{t-2m, R_+^n} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{t-m_j-1/2} \right\} \leq C' \|u\|_t$$

или (см. (1.13))

$$\begin{aligned} \|u\|_t + |q|^t \|u\|_0 &\leq C (\|f_1\|_{t-2m} + \|f_2\|_{t-2m} + |q|^{t-2m} (\|f_1\|_0 + \\ &+ \|f_2\|_0) + \sum_{j=1}^{2m} (\|g_j\|_{t-m_j-1/2} + |q|^{t-m_j-1/2} \|g_j\|_0)) \leq C' (\|u\|_t + |q|^t \|u\|_0). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\|A^1(D_x, q) u_1\|_{t-2m} \leq C_6 \sum_{k=0}^{2m} |q|^k \|u_1\|_{t-k},$$

откуда в силу (1.12') сразу следует

$$\|f_1\|_{t-2m} \leq C_7 \|u_1\|_t, \quad (3.10)$$

аналогично и

$$\|f_2\|_{t-2m} \leq C_8 \|u_2\|_t. \quad (3.11)$$

Точно так же легко заметить, что

$$\|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j} + \|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j} \leq C_9 (\|u_1\|_t + \|u_2\|_t), \quad (3.12)$$

но в силу (1.17)

$$\|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j-1/2} \leq C_3 \|B_j(D_x, q) u_1\|_{t-m_j} \quad (3.13)$$

$$\|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j-1/2} \leq C_3 \|C_j(D_x, q) u_2\|_{t-m_j}. \quad (3.14)$$

Из (3.10)–(3.14) сразу следует второе из неравенств (3.9). Для доказательства первого из неравенств (3.9) сведем задачу (3.1)–(3.3) к случаю, когда $f_1 = f_2 = 0$.

Пусть L_1 — оператор продолжения f_1 с R_-^n на R^n и L_2 — оператор продолжения f_2 с R_+^n на все R^n . Рассмотрим уравнения

$$A^1(D_x, q) u_1(x, q) = L_1 f_1(x, q),$$

$$A^2(D_x, q) u_2(x, q) = L_2 f_2(x, q).$$

При ненулевых $q \in Q$ частными решениями этих уравнений будут функции

$$u_1^0 = F^{-1} (A^1(\xi, q))^{-1} F L_1 f_1, \quad (3.15)$$

$$u_2^0 = F^{-1} (A^2(\xi, q))^{-1} F L_2 f_2. \quad (3.16)$$

Так как операторы $A^i(D_x, q)$ — однородные, степени $2m$, то мы имеем

$$|F u_1^0| \leq C_{10} (|\xi| + |q|)^{-2m} |F L_1 f_1|$$

$$|F u_2^0| \leq C_{10} (|\xi| + |q|)^{-2m} |F L_2 f_2|$$

или

$$(1 + |\xi|^{2l} + |q|^{2l}) \|F u_1^0\| \leq C_{11} (1 + |\xi|^{2l-2m} + |q|^{2l-2m}) \|F L_1 f_1\|^2, \\ (1 + |\xi|^{2l} + |q|^{2l}) \|F u_2^0\| \leq C_{11} (1 + |\xi|^{2l-2m} + |q|^{2l-2m}) \|F L_2 f_2\|^2.$$

Проинтегрировав по ξ по всему R^n , получим

$$\|u_1^0\|_{L, R^n} \leq C_{12} \|L_1 f_1\|_{L, R^n}$$

$$\|u_2^0\|_{L, R^n} \leq C_{12} \|L_2 f_2\|_{L, R^n}.$$

Так как u_1^0 и u_2^0 принадлежат $W_2^l(R^n)$, то их сужения на R^n (соответственно на R_+^n) принадлежат $W_2^l(R^n)$ ($W_2^l(R_+^n)$), так что согласно (1.16)

$$\|u_1^0\|_{L, R_+^n} \leq C_{12} \|f_1\|_{L-2m, R_+^n}, \quad (3.17)$$

$$\|u_2^0\|_{L, R_+^n} \leq C_{12} \|f_2\|_{L-2m, R_+^n}. \quad (3.18)$$

Положим

$$u^0(x, q) = \begin{cases} u_1^0(x, q), & (x_n < 0) \\ u_2^0(x, q), & (x_n > 0). \end{cases}$$

и

$$u(x, q) = u^0(x, q) + w(x, q); \quad w(x, q) = \begin{cases} w_1(x, q), & (x_n < 0) \\ w_2(x, q), & (x_n > 0). \end{cases}$$

Тогда функция $w(x, q)$ будет удовлетворять уравнениям

$$A^1(D_x, q) w_1(x, q) = 0,$$

$$A^2(D_x, q) w_2(x, q) = 0,$$

а при $x_n = 0$ — граничным условиям

$$B_j(D_x, q) w_1(x, q)|_{x_n \rightarrow -0} + C_j(D_x, q) w_2(x, q)|_{x_n \rightarrow +0} = g_j(x', q) - \\ - g_j^0(x', q), \quad (j = 1, \dots, 2m)$$

где

$$g_j^0(x', q) = B_j(D_x, q) u_1^0(x, q)|_{x_n \rightarrow -0} + C_j(D_x, q) u_2^0(x, q)|_{x_n \rightarrow +0}.$$

Теперь достаточно получить оценку

$$\|w\|_l \leq C_{13} \sum_{j=1}^{2m} \|g_j - g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^*, \quad (3.19)$$

так как отсюда и из (3.17), (3.18) будет следовать

$$\|u\|_l \leq \|u^0\|_l + \|w\|_l \leq \|u_1^0\|_l + \|u_2^0\|_l + \|w\|_l \leq \\ \leq C_{13} (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2}^* + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^*),$$

но так же, как и при доказательстве второго из неравенств (3.9),

$$\|g_j^0\|_{l-m_j-1/2}^* \leq C_{16} \|u^0\|_l \leq C_{17} (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m}).$$

Отсюда сразу следует первое из неравенств (3.9) и для завершения доказательства нам остается доказать оценку (3.19). Функция $v(\xi', x_n, q)$ из (3.4') является, по крайней мере, при почти всех ξ' и q устойчивым решением задачи (3.1') — (3.3'). Используя представление (3.4'), нетрудно найти вид функции

$$w(x, q) = \begin{cases} w_1(x, q) = (F')^{-1} \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{1,j}^-(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0), & (x_n < 0) \\ w_2(x, q) = (F')^{-1} \sum_{j=1}^{2m} \Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0), & (x_n > 0). \end{cases} \quad (3.20)$$

Оценим сейчас выражение $\Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0)$. Для этого воспользуемся интегральным представлением канонического базиса (3.7):

$$\Omega_{2,j}^+ = \int_{\Gamma^+} \frac{e^{i\lambda x_n} N_j^2(\xi', \lambda, q)}{M_{2,j}^+(\xi', \lambda, q)} d\lambda.$$

Дифференцируя по x_n под интегралом α раз и делая замену переменных $\lambda = \lambda_1 \sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2}$, получим

$$\left| \frac{\partial^\alpha \Omega_{2,j}^+}{\partial x_n^\alpha} \right| \leq C_{18} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{\alpha - m_j} e^{-C_{19} x_n \sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2}}.$$

Интегрируя по x_n , имеем

$$\int_0^\infty \left| \frac{\partial^\alpha \Omega_{2,j}^+}{\partial x_n^\alpha} \right|^2 dx_n \leq C_{20} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{\alpha - m_j - 1/2}.$$

Теперь, если только $|q| \geq q_0 > 0$, то

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha + \beta \leq l} |\xi'|^{2\beta} \int_0^\infty |D_{x_n}^\alpha \Omega_{2,j}^+|^2 dx_n + |q|^{2l} \int_0^\infty |\Omega_{2,j}^+|^2 dx_n \leq \\ & \leq C_{21} (|\xi'|^2 + |q|^2)^{l - m_j - 1/2} \leq C_{22} (1 + |\xi'|^{2l - 2m_j - 1} + |q|^{2l - 2m_j - 1}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Умножая обе части (3.21) на $\bar{g}_j(\xi', q) - \bar{g}_j^0(\xi', q)$ и интегрируя по ξ' , по определению нормы получим

$$\|(F')^{-1} \{ \Omega_{2,j}^+(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0) \} \|_{l, R^+}^2 \leq C_{23} (\|g_j\|_{l-m_j-v_2}' + \|g_j^0\|_{l-m_j-v_2}').$$

Аналогично оценивается и выражение $\Omega_{1,j}^-(\bar{g}_j - \bar{g}_j^0)$. Отсюда непосредственно следует оценка (3.19). Легко видеть, что функции

$$u_1(x, q) = \begin{cases} F^{-1} u_1^0 + \sum_{l=1}^{2m} (F')^{-1} |\mathfrak{Q}_{1,l}(\tilde{g}_l - \tilde{g}_l^0)|, & (x_n < 0) \\ 0, & (x_n > 0) \end{cases}$$

$$u_2(x, q) = \begin{cases} 0, & (x_n < 0) \\ F^{-1} u_2^0 + \sum_{l=1}^{2m} (F')^{-1} |\mathfrak{Q}_{2,l}^+(\tilde{g}_l - \tilde{g}_l^0)|, & (x_n > 0) \end{cases}$$

определяют решение задачи (3.1)–(3.3) при $f_1(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$, $f_2(x, q) \in W_2^{l-2m}(R_-^n)$, $g_j(x', q) \in W_2^{l-m, l-1/2}(R^{n-1})$ и $q \in Q$, принадлежащее $W_2^l(R^n)$. Теорема доказана.

В случае одного уравнения

$$A(D_x, q)u(x, q) = f(x, q), \quad (3.22)$$

рассматриваемого в полупространстве $x_n > 0$ с граничными условиями при $x_n = 0$

$$R_j(D_x, q)u(x, q)|_{x_n=0} = \psi_j(x', q); \quad (j = 1, \dots, m), \quad (3.23)$$

где A и R_j , как и в теореме 1, — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами (порядок A равен $2m$, порядок R_j равен r_j) при следующих условиях:

Условие 1'. $A(\xi, q) \neq 0$ при $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$, $q \in Q$. При $n = 1$ дополнительно предполагается, что половина корней уравнения $A(\xi', \lambda, q) = 0$ лежит в верхней полуплоскости, а половина — в нижней.

Условие 2'. Задача

$$A(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v(\xi', x_n, q) = 0$$

$$R_j(\xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \psi_j(\xi', q) \\ (j = 1, \dots, m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений, верна

Теорема (М. С. Агранович, М. И. Вишик [9]). При ненулевых $q \in Q$ для любых $f \in W_2^{l-2m}(R_+^n)$, $\psi_j \in W_2^{l-r_j, l-1/2}(R^{n-1})$ существует одно и только одно решение $u(x, q)$ задачи (3.22), (3.23), принадлежащее $W_2^l(R_+^n)$. При этом имеет место оценка

$$\|u\|_l \leq C \|f\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^m \|\psi_j\|_{l-r_j-1/2} \leq C' \|u\|_l,$$

где нормы берутся по полупространству R_+^n .

§ 4. Рассмотрения предыдущего параграфа позволяют получить некоторые результаты для задачи (2.1') — (2.4') в областях Ω_1 и Ω_2 (обозначения и условия на Γ и Γ_1 см. § 1).

Рассмотрим уравнения

$$A^1(x, D_x, q)u_1(x, q) = f_1(x, q); \quad x \in \Omega_1 \quad (4.1)$$

$$A^2(x, D_x, q)u_2(x, q) = f_2(x, q); \quad x \in \Omega_2 \quad (4.2)$$

с граничными условиями

$$B_j(x, D_x, q)u_1(x, q)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, q)u_2(x, q)|_{\Gamma_1} = g_j(x'', q) \quad (4.3)$$

$$(j = 1, \dots, 2m), \quad x'' \in \Gamma_1$$

$$R_j(x, D_x, q)u_2(x, q)|_{\Gamma} = \psi_j(x', q), \quad (4.4)$$

$$(j = 1, \dots, m), \quad x' \in \Gamma$$

Предполагается, что коэффициенты операторов A^1 и B_j бесконечно гладки в $\bar{\Omega}_1$, а коэффициенты операторов A^2 , C_j , R_j в $\bar{\Omega}_2$. Порядки A^1 и A^2 равны $2m$, порядки B_j и C_j равны m_j , а порядок R_j равен r_j . Через A_0^1 , A_0^2 , B_{j0} , C_{j0} , R_{j0} будем обозначать главные части операторов A^1 , A^2 , B_j , C_j , R_j , параметр $q \in Q$. Потребуем выполнения следующих условий.

Условие 1. $A_0^i(x, \xi, q) \neq 0$ ($i = 1, 2$) при $x \in \Omega_i$, $q \in Q$, $\text{Im } \xi = 0$, $|\xi| + |q| \neq 0$. При $n = 1$ дополнительно предполагается, что корни многочленов $A_0^i(x, \lambda, q)$ ($i = 1, 2$) поровну распределяются между верхней и нижней полуплоскостью.

Условие 2.

а) Задача

$$A_0^1(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_1(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n < 0)$$

$$A_0^2(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n > 0)$$

с граничными условиями

$$B_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_1(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} +$$

$$+ C_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \tilde{g}_j(\xi', q); \quad (j = 1, \dots, 2m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ (см. § 3) для любых $\tilde{g}_j(\xi', q)$.

б) Задача

$$A_0^2(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q)v_2(\xi', x_n, q) = 0, \quad (x_n > 0)$$

$$R_j(0, \xi', -i \frac{d}{dx_n}, q) v_2(\xi', x_n, q)|_{x_n=0} = \bar{\psi}_j(\xi', q) \\ (j = 1, \dots, m)$$

имеет одно и только одно решение в пространстве устойчивых решений для любых $\bar{\psi}_j(\xi', q)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1 и 2. Тогда существует такое $q_0 > 0$, что при $|q| > q_0$ решение (4.1)–(4.4) существует при любых $f_1 \in W_2^{l-2m}(\Omega_1)$, $f_2 \in W_2^{l-2m}(\Omega_2)$, $g_j \in W_2^{l-m_j-1/2}(\Gamma_1)$, $\psi_j \in W_2^{l-r_j-1/2}(\Gamma)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_l \leq C (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2} + \\ + \sum_{j=1}^{2m} \|\psi_j\|_{l-r_j-1/2}) \leq C' \|u\|_l \quad (4.5)$$

(см. (1.18), (1.18')).

Теорема 3. Пусть $\Omega_2 = R^n / \bar{\Omega}_1$ и коэффициенты оператора $A^2(x, D_x, q)$ имеют конечный предел при $|x| \rightarrow \infty$, а именно, для любого коэффициента $\alpha(x)$ оператора A^2 выполнено

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \alpha(x) = \alpha \quad (4.6)$$

и пусть выполнены условия 1 и 2а). Тогда задача

$$A^1(x, D_x, q) u_1(x, q) = f_1(x, q), \quad x \in \Omega_1$$

$$A^2(x, D_x, q) u_2(x, q) = f_2(x, q), \quad x \in \Omega_2 = R^n / \bar{\Omega}_1$$

$$B_j(x, D_x, q) u_1(x, q)|_{\Gamma_1} + C_j(x, D_x, q) u_2(x, q)|_{\Gamma_1} = g_j(x'', q) \\ (j = 1, \dots, 2m), \quad x'' \in \Gamma_1$$

имеет решение $u = u_1 + u_2 \in W_2^l(R^n)$ для любых $f_1 \in W_2^{l-2m}(\Omega_1)$, $f_2 \in W_2^{l-2m}(\Omega_2)$, $g_j \in W_2^{l-m_j-1/2}(\Gamma_1)$ и имеет место априорная оценка

$$\|u\|_l \leq C (\|f_1\|_{l-2m} + \|f_2\|_{l-2m} + \sum_{j=1}^{2m} \|g_j\|_{l-m_j-1/2}) \leq C' \|u\|_l. \quad (4.7)$$

Доказательство оценок (4.5) и (4.7) проводится с помощью известного метода локализации: берется конечное достаточно малое разбиение единицы области $\Omega_1 + \Omega_2$ (в случае теоремы 3 всего R^n)

$$\sum \varphi_j(x) \equiv 1$$

такое, что коэффициенты граничных операторов и операторов A^1 и A^2 в окрестности носителя каждой из $\varphi_j(x)$ близки к постоянным. После этого оценки (4.5) и (4.7) доказываются для функций $\varphi_j u$ и без труда

переносятся на функцию $u(x)$. Отметим, что в случае теоремы 3 в силу (4.6) во всем R^n можно построить требуемое конечное разбиение единицы, ибо можно выбрать достаточно большой шар S с центром в начале координат, такой, что вне этого шара коэффициенты оператора A^2 как угодно близки к постоянным. Если $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \dots, N$ — конечное разбиение единицы шара S , то полагаем

$$\varphi_{N+1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in UV_j \\ 1 - \sum_{j=1}^N \varphi_j(x), & x \in UV_j \end{cases}$$

где V_j — носитель φ_j , получим требуемое конечное разбиение единицы всего R^n .

Для доказательства существования решения строится „почти обратный“ оператор (см. [3], [9]), который в локальных координатах выражается формулами вида (3.15), (3.16), если носитель φ_j не пересекает Γ (соответственно Γ_1), и вида (3.20), если носитель φ_j имеет общие точки с границей.

§ 5. Перейдем теперь к изучению задачи (2.1) — (2.5). Сначала рассмотрим случай однородных начальных условий: все $\varphi_k(x) = 0$.

Задачу (2.1) — (2.5) будем называть *параболической*, если задача (2.1') — (2.4'), где p заменено на q^{2m} , удовлетворяет условиям 1 и 2

§ 4. Условие 1 есть условие параболическости каждого из операторов A^1 и A^2 , а условие 2 эквивалентно условию Т. Я. Загорского [6].

Наша цель — получение теорем существования и единственности параболической смешанной задачи (2.1) — (2.5) в пространствах $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$. Для этого, воспользовавшись теоремами предыдущего параграфа, перенесем результаты теорем 2 и 3 на пространства $E_{l, 1/2b}(\gamma, Q)$. Потом, используя изоморфизм пространств $P_{l, 1/2b}$, $P_{\lambda, 1/2b}$ и $E_{l, 1/2b}$, $E_{\lambda, 1/2b}$ (см. § 1), получим теорему о разрешимости параболической смешанной задачи в пространствах $P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$.

Теорема 4. Пусть задача (2.1') — (2.4'), где P заменено на q^{2b} удовлетворяет условиям 1 и 2 § 4. Пусть $l \geq \max(2m, m_1 + 1, r_1 + 1)$. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что решение задачи (2.1) — (2.4) существует при любых

$$F_1(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, Q_1), F_2(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, Q_2)$$

$$G_j(x'', p) \in E_{l-m_j-1/2, \frac{l-m_j-1/2}{2b}}(\gamma, \Gamma_1), \Psi_j(x', p) \in E_{l-r_j-1/2, \frac{l-r_j-1/2}{2b}}(\gamma, \Gamma)$$

и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|U\|_{l, 1/2b} &= \|U_1\|_{l, 1/2b} + \|U\|_{l, 1/2b} \leq C \left(\|F_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|F_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2m} \|G_j\|_{\mu, \frac{\mu}{2b}} + \sum_{j=1}^m \|\Psi_j\|_{\nu, \frac{\nu}{2b}} \right) \leq C' \|U\|_{l, 1/2b}. \\ (l-m_j-1/2 &= \mu, \quad l-r_j-1/2 = \nu). \end{aligned}$$

Функция $U(x, p)$ удовлетворяет (2.1') — (2.4') при всех p , $\operatorname{Re} p > \gamma$ и почти всех p с $\operatorname{Re} p = \gamma$.

Аналогичную теорему можно сформулировать и в случае, когда $\Omega_2 = R^n / \overline{\Omega}_1$.

Пусть теперь $u(x, t) \in P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ и γ произвольно. Легко проверить, что если $u(x, t)$ удовлетворяет (2.1) — (2.4), то

$$f_1(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_1), \quad f_2(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_2),$$

$$g_j(x'', t) \in P_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G'_1), \quad \psi_j(x', t) \in P_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G').$$

После преобразования Лапласа по t получаем задачу (2.1') — (2.4'), где в правых частях $F_1(x, p) \in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, \Omega_1)$, $F_2(x, p) \in$

$$\begin{aligned} &\in E_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\gamma, \Omega_2), \quad G_j(x'', p) \in E_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(\gamma, \Gamma_1), \quad \Psi_j(x', p) \in \\ &\in E_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(\gamma, \Gamma). \end{aligned}$$

Так как задача (2.1) — (2.5) — параболическая, то из теоремы 4, используя изоморфизм пространств $P_{l, 1/2b}$, $P_{\lambda, \lambda/2b}$ и $E_{l, 1/2b}$, $E_{\lambda, \lambda/2b}$, получаем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть (2.1) — (2.5) — параболическая задача и пусть $l \geq \max(2m, m_1 + 1, r_1 + 1)$. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что задача (2.1) — (2.5) имеет одно и только одно решение $u(x, t) \in P_{l, 1/2b}(e^{-\gamma t}, G)$ при любых правых частях $f_1(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_1)$, $f_2(x, t) \in P_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(e^{-\gamma t}, G_2)$, $g_j(x'', t) \in P_{\mu, \frac{\mu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G'_1)$, $\psi_j(x', t) \in P_{\nu, \frac{\nu}{2b}}(e^{-\gamma t}, G')$,

при этом справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{l, 1/2b} &\leq C \left(\|e^{-\gamma t} f_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|e^{-\gamma t} f_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|_{\mu, \frac{\mu}{2b}} + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|_{\nu, \frac{\nu}{2b}} \right) \leq C' \|e^{-\gamma t} u\|_{l, 1/2b}. \end{aligned}$$

В случае неоднородных начальных условий сформулируем условия согласованности правых частей $f_1, f_2, g_j, \psi_j, \varphi_k$: в области $\Omega \times (0, +\infty)$ существует такая функция $u_0(x, t)$, что

$$e^{-\gamma t} u_0(x, t) \in W_{x, l, \frac{l}{2}}^l(\Omega \times (0, +\infty)).$$

$$\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad (k=0, \dots, \kappa-1)$$

и если $A^1 u_0 = f_1^0$ в Ω_1 , $A^2 u_0 = f_2^0$ в Ω_2 и

$$B_j u_0|_{S_{\Gamma_1}} + C_j u_0|_{S_{\Gamma_2}} = g_j^0, \quad R_l u_0|_{S_{\Gamma}} = \psi_j^0,$$

то после продолжения функций $f_1 - f_1^0$, $f_2 - f_2^0$, $g_j - g_j^0$, $\psi_j - \psi_j^0$ нулем при $t < 0$ имеет место

$$e^{-\gamma t} [f_1 - f_1^0] \in W_{x, t, 2}^{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\Omega_1 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [f_2 - f_2^0] \in W_{x, t, 2}^{l-2m, \frac{l-2m}{2b}}(\Omega_2 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [g_j - g_j^0] \in W_{x, t, 2}^{p, \mu/2b}(\Gamma_1 \times (0, +\infty)),$$

$$e^{-\gamma t} [\psi_j - \psi_j^0] \in W_{x, t, 2}^{r, \nu/2b}(\Gamma \times (0, +\infty)).$$

Теорема 6. Пусть (2.1)–(2.5) – параболическая задача, $l/2b$ – целое, $l > \max(2m, m_j + 1, r_j + 1)$ – целое. Тогда существует такое $\gamma > 0$, что при любых $f_1, f_2, g_j, \psi_j, \varphi_k$, удовлетворяющих условию согласованности, существует одно и только одно решение задачи (2.1)–(2.5), причем $e^{-\gamma t} u(x, t) \in W_{x, t, 2}^{l, l/2b}(G)$ и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|e^{-\gamma t} u\|_{l, l/2b} &\leq C \left(\|e^{-\gamma t} f_1\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \|e^{-\gamma t} f_2\|_{l-2m, \frac{l-2m}{2b}} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{2m} \|e^{-\gamma t} g_j\|_{p, \mu/2b} + \sum_{j=1}^m \|e^{-\gamma t} \psi_j\|_{r, \nu/2b} + \sum_{k=0}^{\kappa-1} \|\varphi_k\|_{l-2b, k-b} \Big) \leq \\ &\leq C' \|e^{-\gamma t} u\|_{l, l/2b}. \end{aligned}$$

Аналогичную теорему существования и единственности параболической задачи в соответствующих пространствах можно сформулировать и для области Ω^T , T – конечное.

В заключение выражаю благодарность проф. М. И. Вишику за постановку задачи и ценные указания.

Московский энергетический институт

Поступила 24 IV 1964

Ա. Գ. ԳՅՈՒԼՄԻՍԱՐՅԱՆ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԽԶՎՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ՊԱՐԱՖՈՐՄԻԶՄԻ ԶԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա. Գ. Գ Յ Ո Ւ Մ Ս Ա Ր Յ Ա Ն

Գլանալին տիրույթում գիտվում է ըստ Պարաֆորմիզմի զմային 2b – պարաֆորմի 2m կարգի խզվող գործակիցներով հավասարումը:

Այն մակերևույթների վրա, որտեղ խզվում են հավասարման գործակիցները և դրանի կոդմային մակերևույթի վրա տրվում են եզրային պայմանները: Փամանակի սկզբնական մոմենտին տրվում են Կոշու պայմանները:

Ենթադրելով խնդիրը «պարարդիկուլյան» պայմանին և պահանջելով համաձայնեցվածություն հավասարման ու եզրային պայմանների աջ մասերի և Կոշու տվյալների միջև, ապացուցվում է խնդրի լուծման գոյությունը և միակությունը համապատասխան տարածություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, Л., 1950.
2. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их применение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. ЛГПИ им. А. И. Герцена. Уч. зап. физ.-мат. фак., 197, 1958, 54—112.
3. Агранович М. С., Вишик М. И. Краевые задачи для параболических уравнений. УМН, 19, вып. 4, 1964, 53—161.
4. Петровский И. Г. О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюлл. МГУ, секция А I, вып. 7, 1938, 1—72.
5. Агранович М. С., Вишик М. И. Параболические граничные задачи. УМН, 18, вып. 1, 1963, 206—207.
6. Загорский Т. Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений параболического типа. Львов, 1961.
7. Эйдельман С. Д. О краевых задачах для параболических систем в полупространстве. ДАН, 142, № 4, 1962, 812—814.
8. Слободецкий Л. Н. Оценки решений эллиптических и параболических систем. ДАН, 120, № 3, 1958, 468—471.
9. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические граничные задачи, зависящие от параметра. ДАН, 149, № 2, 1963, 223—226.
10. Ройтберг Я. А., Шифтель З. Г. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. ДАН, 148, № 5, 1963, 1034—1037.
11. Шифтель З. Г. Разрешимость в L_p и классическая разрешимость общих граничных задач для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. УМН, 19, вып. 4, 1964, 230—232.

В. Ц. ГНУНИ

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрены задачи статической и динамической устойчивости ортотропных неоднородных гибких оболочек.

§ 1. Предполагается, что ортотропная оболочка произвольно оперта по контуру* и симметрично неоднородна по толщине. Динамическая устойчивость рассматриваемой оболочки в первом приближении описывается уравнением [1]

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 \left[1 - \frac{T_{11}(t)}{T_{11*}} - \frac{T_{22}(t)}{T_{22*}} \right] f - \varepsilon f^2 + d f^3 = 0, \quad (1.1)$$

где ω — частота собственных свободных колебаний, T_{ii} — критические значения усилий T_{ii}^* при их независимом статическом действии, ε — коэффициент линейного затухания.

Здесь введены следующие обозначения [1, 2]:

$$\omega^2 = \frac{K}{A_0 + A^0}, \quad T_{11*} = \frac{K}{A_4}, \quad T_{22*} = \frac{K}{A_5}, \quad K = \frac{A' A_1' + A_2 A_2'}{A_1},$$

$$e = \frac{A_2 A_3' + A_2' A_3}{(A_0 + A^0) A_1}, \quad d = \frac{A_3 A_3'}{(A_0 + A^0) A_1}, \quad (1.2)$$

$$A_1 = \int_0^a \int_0^b (a_{11} X_n^{IV} Y_m + a_{13} X_n^* Y_m^* + a_{22} X_n Y_m^{IV}) X_n Y_m dx_1 dx_2,$$

$$A_1' = \int_0^a \int_0^b (D_{11} V_m U_n^{IV} + D_{13} U_n^* V_m^* + D_{22} U_n V_m^{IV}) U_n V_m dx_1 dx_2,$$

$$A_2 = - \int_0^a \int_0^b (k_1 U_n V_m^* + k_2 U_n^* V_m) X_n Y_m dx_1 dx_2,$$

$$A_2' = - \int_0^a \int_0^b (k_1 X_n Y_m^* + k_2 X_n^* Y_m) U_n V_m dx_1 dx_2, \quad (1.3)$$

* Вариации усилий на контуре оболочки равны нулю.

$$(T - T^*)f + \bar{e}f^2 - \bar{d}f^3 = 0, \quad (2.1)$$

где введены обозначения

$$T = T_{11} = \frac{T_{22}}{\kappa}, \quad T^* = \frac{K}{A_4 + \kappa A_5}, \quad \bar{e} = \frac{A_2 A_3 + A_2 A_4}{A_1 (A_4 + \kappa A_5)},$$

$$\bar{d} = \frac{A_3 A_4}{A_1 (A_4 + \kappa A_5)}. \quad (2.2)$$

Здесь T^* — верхнее критическое усилие, T — параметр усилий, κ — некоторый коэффициент.

Исследование уравнения (2.1) показывает, что нижнее критическое усилие достигается при

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{A_3} + \frac{A_2'}{A_3'} \right) \quad (2.3)$$

и определяется формулой

$$T_* = T^* - \frac{\bar{e}^2}{4\bar{d}}. \quad (2.4)$$

В случае шарнирно-опертых оболочек формула (2.3) принимает вид

$$\bar{f} = \frac{9}{64} \left(k_1 a^2 \frac{m}{n} + k_2 b^2 \frac{n}{m} \right). \quad (2.3')$$

Из формул (2.3) и (2.3') замечаем, что значение $\bar{f}$ в явном виде не зависит от физических свойств оболочки. Однако, при минимальных критических параметрах существенно ортотропной неоднородной оболочки m и n , а следовательно, и $\bar{f}$ зависят от коэффициентов упругости.

Отметим, что в пределах $T_* < T < T^*$ каждому значению усилия соответствуют три положения упругого равновесия. В этих пределах начальное невозмущенное состояние устойчиво по отношению к малым возмущениям, а при больших возмущениях оболочка может быть „заброшена“ на деформированное устойчивое положение.

Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [3].

В качестве числового примера рассмотрим шарнирно-опертую ортотропную трехслойную цилиндрическую оболочку радиуса R , характерные размеры которой суть $a = b = 3.1416$ м, $\delta_1 = \delta_3 = 0.03$ м, $\delta_2 = 0.01$ м.

Упругие постоянные материала каждого слоя оболочки приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Слой	E_1 ($\kappa\text{г}/\text{м}^2$)	E_2	G	ν_{12}	ν_{21}	γ ($\kappa\text{г}/\text{м}^3$)
I, III	$1178,40 \cdot 10^6$	$58,92 \cdot 10^6$	$50,00 \cdot 10^6$	0,60	0,03	817
II	$58,92 \cdot 10^6$	$1178,40 \cdot 10^6$	$50,00 \cdot 10^6$	0,03	0,60	817

При этих данных и при $\chi = 0$ имеем таблицу 2.

Таблица 2

R	T^* (кг/м)	T_*
10	53322	24350
25	31695	27062
∞	27576	27576

Рассматривая формулы (2.2), (2.4) и табл. 2, замечаем, что с увеличением пологости оболочки значение верхнего критического усилия уменьшается, а нижнего — увеличивается, и оба стремятся соответственно сверху и снизу к значению критического усилия пластинки.

Большой практический интерес представляет определение значений $\bar{n}$ и $\bar{m}$, при которых достигаются минимальные значения верхних и нижних критических усилий.

В случае шарнирно-опертых пластинок при $\chi = 0$ имеем [4]

$$\bar{n} = \frac{a}{b} \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right)^{1/4}, \quad \bar{m} = 1. \quad (2.5)$$

В случае же оболочек значения $\bar{n}$ и $\bar{m}$ следует определять из систем нелинейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^*}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial T^*}{\partial m} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial T_*}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial T_*}{\partial m} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.6)$$

соответственно для верхней и нижней критических усилий.

Значения $\bar{n}$ и $\bar{m}$ в случае ортотропных слоистых пластинок и оболочек зависят от отношений типа $\frac{E_1}{E_2}$, $\frac{\delta_1}{\delta_2}$, $\frac{a}{b}$, что дает возможность более свободного выбора оптимальных физических и геометрических параметров пластинок и оболочек в зависимости от условий их работы.

§ 3. Принимая

$$T_{ii}(t) = T_{i0} + T_{i1} \cos \theta t, \quad (3.1)$$

из уравнения динамической устойчивости (1.1) получим уравнение параметрически возбуждаемых колебаний

$$f'' + 2\epsilon f' + \Omega^2 (1 - 2\epsilon \cos \theta t) f - \epsilon f^2 + d f^3 = 0, \quad (3.2)$$

где

$$\Omega^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{T_{110} T_{22*} + T_{220} T_{11*}}{T_{11*} T_{22*}} \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{T_{11*} T_{22*} + T_{22*} T_{11*}}{T_{11*} T_{22*} - T_{110} T_{22*} - T_{220} T_{11*}}. \quad (3.3)$$

Асимметрия нелинейной характеристики уравнения (3.2) приводит к возможности существования резонансных колебаний для частот, меньших критических.

Уравнение типа (3.2) впервые получено В. В. Болотиным при рассмотрении задачи параметрически возбуждаемых колебаний гибкой сферической панели [5]. Отмечается, что характер установления ре-

зонансных колебаний оболочек качественно отличается от характера установления резонансных колебаний пластинок, и приводится примерный график зависимости амплитуды установившихся колебаний от возбуждающей частоты.

Ищем решения уравнения (3.2) в виде

$$f = f_{01} + f_{11} \cos\left(\frac{\theta t}{2} - \varphi_1\right), \quad f = f_{02} + f_{12} \sin\left(\frac{\theta t}{2} - \varphi_2\right), \quad (3.4)$$

соответственно для нижней и верхней границ главной области неустойчивости

$$\theta^2 \approx 4\Omega^2 \left(1 + \sqrt{\mu^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\Omega^2}}\right). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.4) в уравнение (3.2), после выделения постоянных членов и гармоник получим следующую нелинейную систему алгебраических уравнений:

$$df_{01}^2 - ef_{01}^2 + \Omega^2 f_{01} - \frac{1}{2} (e - 3df_{01}) f_{11}^2 = 0,$$

$$f_{11}^3 - \frac{1}{3d} [\theta^2 - 4\Omega^2 (1 + (-1)^l \mu) - 4\varepsilon \theta \lg \varphi_l] f_{11} - \frac{4}{3d} (2ef_{01} - 3df_{01}^2) f_{11} = 0,$$

$$\varphi_l = -(-1)^l \arcsin \frac{\varepsilon \theta}{\mu \Omega^2}. \quad (3.6)$$

В первом приближении, принимая $f_{01} \ll f_{11}$ [7] и пренебрегая нелинейными членами функции f_{01} , из первого уравнения системы (3.6) будем иметь

$$f_{01} = \frac{ef_{11}^2}{2\Omega^2 + 3df_{11}^2}. \quad (3.7)$$

С учетом этого из третьего уравнения (3.6) для f_{11} получим выражение

$$\begin{aligned} f_{11}^3 = & \frac{1}{6d} \left\{ \theta^2 - 4\Omega^2 (1 + (-1)^l \mu) - 4\varepsilon \theta \lg \varphi_l + A \pm \right. \\ & \pm \left[\theta^2 - 4\Omega^2 (1 + (-1)^l \mu) - 4\varepsilon \theta \lg \varphi_l + A \right]^2 + \\ & \left. + 8\Omega^2 [\theta^2 - 4\Omega^2 (1 + (-1)^l \mu) - 4\varepsilon \theta \lg \varphi_l] \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

или при $\varepsilon = 0$

$$f_{11}^2 = \frac{1}{6d} \left[\theta^2 - \theta_{cr}^2 + A \pm \sqrt{(\theta^2 - \theta_{cr}^2 + A)^2 + 8\Omega^2 (\theta^2 - \theta_{cr}^2)} \right], \quad (3.9)$$

где

$$A = \frac{8e^2}{3d} - 2\Omega^2. \quad (3.10)$$

Рассматривая (3.8), (3.9), нетрудно заметить, что при $A < 0$ для f_{ii}^2 имеем только одно положительное значение. Характер установления резонансных колебаний оболочки качественно не отличается от характера установления резонансных колебаний пластинки.

В случае $A > 0$ после потери устойчивости наблюдается падение возбуждающей частоты до некоторого критического значения $\bar{\theta}_{ci}$, которое определяется из уравнения*

$$(\bar{\theta}_{ci}^2 - \theta_{ci}^2 + A)^2 + 8\Omega^2(\bar{\theta}_{ci}^2 - \theta_{ci}^2) = 0. \quad (3.11)$$

Обнаруживаются резонансные колебания при частотах, меньших критических.

Устойчивость ненулевых решений проверяется обычными методами [8, 9].

Условие $A = 0$ определяет значение пологости оболочки, до которого резонансные колебания невозможны при $\theta < \theta_*$.

В случае пластинок $A = -2\Omega^2$. Таким образом, в пределах

$$-2\Omega^2 \leq A \leq 0 \quad (3.12)$$

оболочка работает как пластинка.

Решив уравнение (3.11), для нижних критических частот получим

$$\bar{\theta}_{ci}^2 = \theta_{ci}^2 - 2 \left(\frac{2e}{\sqrt{3d}} \mp \Omega^2 \right). \quad (3.13)$$

Этим частотам по формуле (3.9) соответствуют значения амплитуд колебаний

$$\bar{f}_{ii}^2 = \pm \frac{1}{6d} \left(\frac{8e\Omega}{\sqrt{3d}} \mp 4\Omega^2 \right). \quad (3.14)$$

Рассматривая формулу (3.14), замечаем, что первое значение (верхние знаки) нижней критической частоты для амплитуд колебаний дает действительное значение при $A > 0$, а второе — действительных значений не дает. Таким образом, для нижней критической частоты главного параметрического резонанса и соответствующего ей значения амплитуд колебаний имеем

$$\bar{\theta}_{ci}^2 = \theta_{ci}^2 - 2B^2, \quad \bar{f}_{ii}^2 = \frac{2\Omega}{3d} B, \quad f_{ii} = \frac{e}{3d} \frac{B}{\Omega + B}, \quad (3.15)$$

где

$$B = \frac{2e}{\sqrt{3d}} - \Omega.$$

Из условия (3.12) определим степень пологости оболочки, до которой динамический хлопок невозможен.

Для простоты выкладок предположим, что

* Для простоты выкладок рассматривается консервативная задача.

$$\Omega^2 = \omega^2, \quad k_1 = k, \quad k_2 = \chi k, \quad (3.16)$$

где k — параметр пологости, χ — некоторый коэффициент.

С учетом (3.16) представим частоту собственных колебаний в виде

$$\omega^2 = a_1 + k^2 a_2, \quad (3.17)$$

где

$$a_1 = \frac{L_1}{M}, \quad a_2 = \frac{(\mu_m^2 + \chi \chi_n^2)^2}{ML_2}. \quad (3.18)$$

Из формул (1.5), (1.6) получим следующее выражение для отношения

$$\frac{e^2}{d} = \frac{9}{2} k^2 a_2. \quad (3.19)$$

Подставив найденные значения ω^2 и e^2/d в формулу (3.10), при $A = 0$ получим

$$k_*^2 = a_1/5a_2, \quad (3.20)$$

то есть в пределах $0 < k < k_*$ динамический хлопок невозможен.

Таким образом, предположение $f_0 \ll f_1$ позволило получить простые формулы для нижних критических частот и амплитуд установившихся резонансных колебаний.

Отказываясь от этого предположения, нелинейную систему алгебраических уравнений (3.6), при $\varepsilon = 0$, перепишем в виде

$$\varphi_{0i}^3 - \frac{1}{10d} \left(\theta^2 - \theta_{*i}^2 + 2\Omega^2 + \frac{2}{3} \frac{e^2}{d} \right) \varphi_{0i} + \frac{e}{15d^2} \left(\frac{2}{9} \frac{e^2}{d} - \Omega^2 \right) = 0, \quad (3.21)$$

$$f_{1i}^2 = \frac{\theta^2 - \theta_{*i}^2}{3d} + Z_i. \quad (3.22)$$

Здесь введены обозначения

$$\varphi_{0i} = f_{0i} - \frac{e}{3d}, \quad Z_i = \frac{4e^2}{9d^2} - 4\varphi_{0i}^2. \quad (3.23)$$

Неравенство $Z_i(\theta_{*i}) > 0$ определяет условие, при котором на границах областей динамической неустойчивости возможны резонансные колебания для достаточно больших возмущений.

Решая уравнение (3.21) относительно θ^2 , получим

$$\theta^2 = \theta_{*i}^2 - 2\Omega^2 - \frac{2e^2}{3d} + 10d\varphi_{0i}^2 - \frac{2e}{3d} \left(\Omega^2 - \frac{2e^2}{9d} \right) \frac{1}{\varphi_{0i}}, \quad (3.24)$$

причем минимальное значение $\bar{\theta}_{*i}^2$ достигается при

$$\bar{\varphi}_{0i} = \sqrt{\frac{e}{30d^2} \left(\frac{2e^2}{9d} - \Omega^2 \right)}. \quad (3.25)$$

Рассмотрим трехслойную ортотропную цилиндрическую оболочку радиуса $R = 25$ м при упругих и геометрических данных, приведенных в § 2. Пусть

$$T_{112} = 15000 \text{ кг/м}, \quad T_{111} = 6678,0 \text{ кг/м}, \quad T_{220} = T_{221} = 0,$$

тогда

$$\Omega^2 = 3338,1 \text{ 1/сек}^2, \quad \mu = 0,2.$$

Отсюда для верхних критических частот главной области параметрического резонанса получим значения

$$\theta_{*1}^2 = 10682 \text{ 1/сек}^2, \quad \theta_{*2}^2 = 16023 \text{ 1/сек}^2.$$

Нижние критические частоты, определенные по формулам (3.15) и (3.24)–(3.25), соответственно будут

$$\begin{aligned} \text{и } \bar{\theta}_{*1}^2 &= 10427 \text{ 1/сек}^2, \quad \bar{\theta}_{*2}^2 = 15768 \text{ 1/сек}^2, \\ \bar{\theta}_{*1}^2 &= 10368 \text{ 1/сек}^2, \quad \bar{\theta}_{*2}^2 = 15709 \text{ 1/сек}^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Рассматривая (3.26), замечаем, что формулы (3.15), полученные на основе полунелинейного метода [7], для нижних критических частот дают достаточно хорошие значения (погрешность 0,5%).

В заключение отметим, что условия максимума ширины области главного параметрического резонанса приводят к нахождению минимальных значений верхних критических усилий в зависимости от m и n .

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 VI 1964

Վ. Յ. ԳԵՐՄԻՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆԶԱՄԱՍԵՌ ՓՈԲԵ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԵՄԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Ի. Մ. Մ. Մ.

Դիտարկված են օրթոտրոպ անհամասեռ թաղանթների առարկե և դի-
նամիկ կայունության ոչ գծային խնդիրները:

Հաշվված են ստորին ու վերին կրիտիկական պարամետրերը և ետևի-
տիկական վիճակի ճիշտ գնահատումները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гвуні В. Ц. К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
4. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
5. Болотин В. В. Устойчивость тонкостенной сферической оболочки под действием периодического давления. Расчеты на прочность. Машгиз, выпуск 2, 1958.
6. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.

7. *Муштари Х. М.* Средний изгиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие на своей плоскости ребра. Известия КФАН СССР, серия физ.-мат. наук, № 12, 1958.
8. *Мищенко Г. В.* О динамической устойчивости пологих упругих оболочек. Инженерный журнал, 1, выпуск 2, 1961.
9. *Хаяси Т.* Вынужденные колебания в нелинейных системах. ИЛ, 1957.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Н. МЕЛКОНЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК

Рассматривается задача об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок с учетом поперечных сдвигов по теории, предложенной С. А. Амбарцумяном [1]. Дается общее решение задачи изгиба пластинки произвольной поперечной нагрузкой в случае, когда два противоположных края пластинки свободно оперты, а два других края могут быть закреплены различным образом.

В частности решены задачи изгиба прямоугольных пластинок равномерно распределенной нагрузкой, когда пластинка: 1) свободно оперта по всему контуру; 2) свободно оперта по двум противоположным краям, а два других края заделаны.

§ 1. Общее решение задачи

Рассмотрим прямоугольную пластинку постоянной толщины h , изготовленную из трансверсально-изотропного материала. Принимаем, что плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки.

Как известно, решение задачи изгиба трансверсально-изотропных пластинок, согласно теории, учитывающей влияние поперечных сдвигов [1], сводится к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\frac{12}{h^3} Z, \\ D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{h^2 D}{10 G'} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{h^3}{12} \varphi &= 0, \\ D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w - \frac{h^2 D}{10 G'} \left(\frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \frac{h^3}{12} \psi &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через искомые функции $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ следующим образом:

$$M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2 D}{10 G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2 D}{10 G'} \left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \\
 H &= -(1 - \mu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{D(1 - \mu) h^2}{20 G'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \\
 N_1 &= \frac{h^3}{12} \varphi, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \psi.
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.3)$$

E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к срединной плоскости пластинки; $Z(x, y)$ — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Координатные оси x и y направим так, как показано на фиг. 1.

Пусть пластинка свободно опирается по двум противоположным краям $x=0$ и $x=a$. Условия свободного опирания по этим краям, согласно [1], запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ M_1 &= 0 \\ \psi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= a. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решение системы (1.1) ищем в виде

$$\begin{aligned} w &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \\ \varphi &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Заметим, что в силу (1.5) и (1.2) граничные условия (1.4) удовлетворяются тождественно.

Подставив (1.5) в систему (1.1) и представив внешнюю нагрузку в виде ряда

$$Z(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (1.6)$$

где

$$P_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a Z(x, y) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad (1.7)$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $W_n(y)$, $\Phi_n(y)$ и $\Psi_n(y)$:

$$\begin{aligned} \lambda_n \Phi_n - \Psi_n' &= \frac{12}{h^3} P_n(y), \\ \lambda_n W_n'' - \lambda_n^3 W_n - \frac{h^2(1-\mu)}{20 G'} \Phi_n + \left(-\frac{1-\mu^2}{E} + \frac{h^2 \lambda_n^2}{10 G'} \right) \Phi_n - \\ &- \frac{h^2(1+\mu) \lambda_n}{20 G'} \Psi_n' = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} W_n'''' - \lambda_n^4 W_n + \frac{h^2(1+\mu)}{20 G'} \Phi_n - \frac{h^2}{10 G'} \Psi_n' + \\ + \left(\frac{1-\mu^2}{E} + \frac{h^2(1-\mu) \lambda_n^2}{20 G'} \right) \Psi_n = 0, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (1.9)$$

Общее решение системы (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned} W_n(y) &= A_{n1} \operatorname{sh} \lambda_n y + A_{n2} \operatorname{ch} \lambda_n y + A_{n3} y \operatorname{sh} \lambda_n y + A_{n4} y \operatorname{ch} \lambda_n y + W_n^*(y), \\ \Phi_n(y) &= -\frac{24 D \lambda_n^2}{h^3} (A_{n3} \operatorname{ch} \lambda_n y + A_{n4} \operatorname{sh} \lambda_n y) + \\ &+ \frac{w_n}{\lambda_n} (A_{n5} \operatorname{sh} w_n y + A_{n6} \operatorname{ch} w_n y) + \Phi_n^*(y), \\ \Psi_n(y) &= -\frac{24 D \lambda_n^2}{h^3} (A_{n3} \operatorname{sh} \lambda_n y + A_{n4} \operatorname{ch} \lambda_n y) + A_{n5} \operatorname{ch} w_n y + \\ &+ A_{n6} \operatorname{sh} w_n y + \Psi_n^*(y), \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $A_{n1}, \dots, A_{n6}$ — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий по краям $y = \pm \frac{b}{2}$; $W_n^*(y)$, $\Phi_n^*(y)$ и $\Psi_n^*(y)$ — частные интегралы неоднородной системы (1.8), причем

$$\begin{aligned} W_n^*(y) &= -\frac{1}{4 D \lambda_n^5} \left[(1 + 2k \lambda_n^2 - \lambda_n y) I_{n1} e^{\lambda_n y} - (1 + 2k \lambda_n^2 + \lambda_n y) I_{n2} e^{-\lambda_n y} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n (I_{n3} e^{\lambda_n y} + I_{n4} e^{-\lambda_n y}) \right], \\ \Phi_n^*(y) &= -\frac{6}{h^3} (I_{n1} e^{\lambda_n y} - I_{n2} e^{-\lambda_n y}), \\ \Psi_n^*(y) &= -\frac{6}{h^3} (I_{n1} e^{\lambda_n y} + I_{n2} e^{-\lambda_n y}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n^2 + \frac{2}{(1-\mu)k}}, \quad k = \frac{Eh^2}{10(1-\mu^2)G}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} I_{n1} &= \int e^{-i\pi y} P_n(y) dy, & I_{n2} &= \int e^{i\pi y} P_n(y) dy, \\ I_{n3} &= \int ye^{-i\pi y} P_n(y) dy, & I_{n4} &= \int ye^{i\pi y} P_n(y) dy. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, решение каждой конкретной задачи сводится к нахождению постоянных интегрирования, входящих в выражения (1.10), после чего по вышеприведенным формулам могут быть определены все необходимые расчетные величины.

Ниже рассматриваются задачи изгиба прямоугольных пластинок под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $Z(x, y) = q = \text{const}$ при различных условиях закрепления краев.

Для равномерно распределенной нагрузки выражения (1.7) и (1.11) примут вид

$$P_n(y) = \frac{4q}{\pi n}, \quad (1.14)$$

$$W_n^*(y) = \frac{4q(1 + k\lambda_n^2)}{\pi D n \lambda_n^4},$$

$$\Phi_n^*(y) = \frac{48q}{\pi h^2 n \lambda_n}, \quad \Psi_n^*(y) = 0. \quad (1.15)$$

В этих выражениях n может принимать лишь нечетные значения $n = 1, 3, 5, \dots$.

§ 2. Пластинка, свободно опертая по всему контуру

Выше при рассмотрении изгиба прямоугольной пластинки в общей постановке принималось, что пластинка свободно оперта по краям $x = 0, x = a$. Здесь мы будем рассматривать задачу об изгибе прямоугольной пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$ в случае, когда пластинка свободно оперта также и

по краям $y = \pm \frac{b}{2}$. В этом случае изогнутая поверхность пластинки симметрична относительно оси x (фиг. 1). В силу указанной симметрии очевидно, что в выражениях (1.10) $W_n(y)$ и $\Phi_n(y)$ будут четными, а $\Psi_n(y)$ нечетными функциями. Поэтому для рассматриваемой здесь задачи в выражениях (1.10) следует положить

$$A_{n1} = A_{n4} = A_{n5} = 0. \quad (2.1)$$

Учитывая (2.1), а также (1.15), из (1.10) получим

$$\begin{aligned}
 W_n(y) &= A_{n2} \operatorname{ch} \lambda_n y + A_{n3} y \operatorname{sh} \lambda_n y + \frac{4q(1+k\lambda_n^2)}{\pi D n \lambda_n^3}, \\
 \Phi_n(y) &= -\frac{24 D \lambda_n^2}{h^3} A_{n3} \operatorname{ch} \lambda_n y + \frac{\omega_n}{\lambda_n} A_{n6} \operatorname{ch} \omega_n y + \frac{48q}{\pi h^3 n \lambda_n}, \\
 \Psi_n(y) &= -\frac{24 D \lambda_n^2}{h^3} A_{n3} \operatorname{sh} \lambda_n y + A_{n6} \operatorname{sh} \omega_n y.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Неизвестные постоянные A_{n2} , A_{n3} и A_{n6} , в силу симметрии, могут быть определены из условий свободного опирания пластинки по одному из краев $y = \pm \frac{b}{2}$.

Условия свободного опирания по краю $y = \frac{b}{2}$ имеют вид [1]

$$w = 0, M_z = 0, \varphi = 0. \quad (2.3)$$

Учитывая (1.5) и (1.2), граничные условия (2.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 W_n\left(\frac{b}{2}\right) &= 0, \\
 W_n'\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{h^2}{10 G'} \left[\mu \lambda_n \Phi_n\left(\frac{b}{2}\right) - \Psi_n'\left(\frac{b}{2}\right) \right] &= 0, \\
 \Phi_n\left(\frac{b}{2}\right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя значения W_n , Φ_n и Ψ_n из (2.2) в (2.4), получим систему трех уравнений относительно неизвестных постоянных A_{n2} , A_{n3} , A_{n6} . Решая систему, найдем

$$\begin{aligned}
 A_{n2} &= -\frac{qb}{\pi D n \lambda_n^3} \frac{\operatorname{sh} \alpha_n}{\operatorname{ch}^2 \alpha_n} - \frac{4q(1+k\lambda_n^2)}{\pi D \lambda_n^4} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_n}, \\
 A_{n3} &= \frac{2q}{\pi D n \lambda_n^3} \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_n}, \quad A_{n6} = 0,
 \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n b}{2} = \frac{n \pi b}{2a}. \quad (2.6)$$

После определения коэффициентов, пользуясь (2.2) и (1.5), для искомых функций окончательно получим

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \left[1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} \operatorname{ch} \lambda_n y + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\lambda_n}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} y \operatorname{sh} \lambda_n y \right] + k \lambda_n^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n} \right) \right\} \sin \lambda_n x,
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\varphi = \frac{48qa}{\pi h^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n} \right) \cos \lambda_n x,$$

$$\psi = -\frac{48qa}{\pi^2 h^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n} \sin \lambda_n x.$$

Имея выражения w , φ , и ψ , легко найти все необходимые расчетные величины, на чем останавливаться не будем. Приведем лишь выражение максимального прогиба, имеющего место при $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$,

$$w_{\max} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \left\{ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \left[1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{a^2} k \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_n} \right) \right\}. \quad (2.8)$$

Второе слагаемое в выражении (2.8) содержит множитель k , определяемый формулой (1.12), который характеризует влияние поперечных сдвигов. Полагая здесь $k=0$, получим соответствующее выражение для максимального прогиба, вычисленное по классической теории пластинок [2].

В случае, когда $b > a$, ряды в выражении (2.8) сходятся очень быстро. Поэтому при вычислении сумм этих рядов можно обеспечить достаточную точность, ограничиваясь лишь первыми двумя членами разложения.

В качестве примера вычислим максимальный прогиб для квадратной пластинки. Выполняя вычисления с учетом $b=a$ и подставляя значение k по формуле (1.12), из (2.8) получим

$$w_{\max} = w_{\max}^* \left(1 + \frac{1.8145 E h^2}{G' (1 - \mu^2) a^2} \right). \quad (2.9)$$

Здесь $w_{\max}^*$ представляет собой максимальный прогиб квадратной пластинки, вычисленный по классической теории пластинок, определяемый формулой [2]

$$w_{\max}^* = 0.00406 \frac{qa^4}{D}. \quad (2.10)$$

В табл. 1 приводятся значения отношения максимального прогиба квадратной пластинки (2.9) к соответствующей величине, вычисленной по классической теории пластинок (2.10) для различных значений отношений $\frac{E}{G'}$ и $\frac{h}{a}$ при $\mu = 0,3$.

Таблица 1

$\frac{h/a}{E/G'}$	0	2,6	5	10
0,1	1	1,0518	1,0997	1,1994
0,2	1	1,2074	1,3988	1,7976

В этой таблице $\frac{E}{G'} = 2,6$ соответствует случаю изотропной пластинки.

Отсюда замечаем, что, как и следовало ожидать [1], учет поперечных сдвигов приводит к увеличению прогибов.

§ 3. Пластинка, защемленная по краям $y = \pm \frac{b}{2}$

Пусть прямоугольная пластинка (фиг. 1), изгибаемая под действием равномерно распределенной нагрузки $q = \text{const}$, защемлена по краям $y = \pm \frac{b}{2}$ и, как было принято выше, свободно опирается по краям $x = 0, x = a$.

Относительно граничных условий по боковой поверхности пластинки следует отметить, что в рамках рассматриваемой здесь теории они не могут быть удовлетворены точно, то есть не могут быть выполнены в каждой точке боковой поверхности. Поэтому при удовлетворении условиям защемления пластинки по краям $y = \pm \frac{b}{2}$, аналогично случаю свободного опирания [1], будем ограничиваться требованием удовлетворения лишь "смягченных" граничных условий. А именно, как и в работе [3], будем предполагать, что условия равенства нулю тангенциальных перемещений в защемлении выполняются лишь при $z = \pm z_0$ ($0 < z_0 < \frac{h}{2}$).

Тангенциальные перемещения $u_x(x, y, z)$ и $u_y(x, y, z)$ имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \varphi, \\ u_y &= -z \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \psi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Таким образом, согласно вышесказанному, условия защемления по краям $y = \pm \frac{b}{2}$ могут быть представлены в виде

$$w = 0,$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \varphi &= 0, \\
 -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \psi &= 0.
 \end{aligned}
 \quad (3.2)$$

Нетрудно заметить, что второе из условий (3.2) эквивалентно условию

$$\varphi = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm \frac{b}{2}. \quad (3.3)$$

Здесь, как и в предыдущей задаче, изогнутая поверхность пластинки симметрична относительно оси x . Следовательно, поскольку $q = \text{const}$, $W_n(y)$, $\Phi_n(y)$ и $\Psi_n(y)$ будут определяться формулами (2.2).

Входящие в (2.2) неизвестные постоянные A_{n2} , A_{n3} и A_{n6} , в силу симметрии, могут быть определены из условий защемления пластинки по одному из краев $y = \pm \frac{b}{2}$.

В силу (1.5), граничные условия (3.2) с учетом (3.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 W_n \left(\frac{b}{2} \right) &= 0, \\
 \Phi_n \left(\frac{b}{2} \right) &= 0, \\
 -W_n' \left(\frac{b}{2} \right) + \frac{1}{2G'} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z_0^2}{3} \right) \Psi_n \left(\frac{b}{2} \right) &= 0.
 \end{aligned}
 \quad (3.4)$$

Подставляя значения W_n , Φ_n и Ψ_n из (2.2) в (3.4) и решая полученную систему относительно неизвестных постоянных A_{n2} , A_{n3} , A_{n6} , получим

$$A_{n2} = \frac{\Delta_{n2}}{\Delta_n}, \quad A_{n3} = \frac{\Delta_{n3}}{\Delta_n}, \quad A_{n6} = \frac{\Delta_{n6}}{\Delta_n}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= \frac{\omega_n}{2} (2\alpha_n + \text{sh } 2\alpha_n) \text{ch } \beta_n + \\
 &+ 10k\lambda_n^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) (\omega_n \text{sh } \alpha_n \text{ch } \beta_n - \lambda_n \text{ch } \alpha_n \text{sh } \beta_n) \text{ch } \alpha_n, \\
 \Delta_{n2} &= \frac{4q}{\pi Dn} \left\{ -\frac{1 + k\lambda_n^2}{\lambda_n^4} \omega_n \text{ch } \beta_n (\text{sh } \alpha_n + \alpha_n \text{ch } \alpha_n) + \right. \\
 &+ 10k \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \left[\frac{b}{4} \text{sh } \alpha_n \text{sh } \beta_n + \right. \\
 &\left. \left. + \frac{1 + k\lambda_n^2}{\lambda_n^4} (\lambda_n \text{ch } \alpha_n \text{sh } \beta_n - \omega_n \text{sh } \alpha_n \text{ch } \beta_n) \right] \right\},
 \end{aligned}
 \quad (3.6)$$

$$\Delta_{n3} = \frac{4q}{\pi D n} \left[\frac{\omega_n}{\lambda_n^3} (1 + k\lambda_n^2) \operatorname{sh} \alpha_n \operatorname{ch} \beta_n - \frac{6D}{nG'} \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \operatorname{ch} \alpha_n \operatorname{sh} \beta_n \right],$$

$$\Delta_{n6} = \frac{24q}{\pi h^3 n} \left\{ (\operatorname{sh} 2\alpha_n - 2\alpha_n) + 2k\lambda_n^2 \left[1 - 5 \left(\frac{1}{4} - \frac{z_0^2}{3h^2} \right) \right] \operatorname{sh} 2\alpha_n \right\},$$

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n b}{2}, \quad \beta_n = \frac{\omega_n b}{2}.$$

Таким образом, после нахождения постоянных (3.5), пользуясь (2.2) и (1.5), можно определить искомые функции w , φ и ψ , а следовательно, и все необходимые расчетные величины задачи, которые не приведены ввиду их громоздкости. Отметим лишь, что из получаемых результатов, полагая $k=0$ (точнее, выполняя предельный переход $k \rightarrow 0$), легко получить соответствующие результаты, вычисленные по классической теории пластинок.

Для количественной оценки влияния поперечных сдвигов на прогибы пластинки приведем выражение максимального прогиба, имеющего место при $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$, и результаты некоторых вычислений

$$w_{\max} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{4q}{\pi D} \frac{1+k\lambda_n^2}{n\lambda_n^4} + A_{n2} \right). \quad (3.7)$$

Отсюда, предельным переходом $k \rightarrow 0$, получим максимальный прогиб $w_{\max}^*$, вычисленный по классической теории пластинок,

$$w_{\max}^* = \frac{4qa^4}{\pi^3 D} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \left[1 - \frac{2(\operatorname{sh} \alpha_n + \alpha_n \operatorname{ch} \alpha_n)}{2\alpha_n + \operatorname{sh} 2\alpha_n} \right]. \quad (3.8)$$

В случае квадратной пластинки ($b=a$) из (3.8), ограничиваясь тремя членами разложения, обеспечивающими высокую точность вычислений, получим

$$w_{\max}^* = 0,001918 \frac{qa^4}{D}.$$

В табл. 2 и 3 приведены значения отношения $w_{\max}/w_{\max}^*$ для квадратной пластинки при различных отношениях E/G' , h/a и z_0/h .

Таблица 2

 $z_0 = 0,5h$

E/G' h/a	0	2,6	5	10
0,1	1	1,0813	1,1569	1,3144
0,2	1	1,3269	1,6284	2,2521

Таблица 3

 $z_0 = 0,1h$

E/G' h/a	0	2,6	5	10
0,1	1	1,1076	1,2057	1,4059
0,2	1	1,4217	1,7929	2,5214

Вычисления произведены при $\mu = 0,3$.

Результаты вычислений показывают, что учет поперечных сдвигов естественно приводит к увеличению прогибов.

Интересно отметить также, что, как видно из приведенных таблиц, при прочих одинаковых условиях с увеличением z_0 прогиб уменьшается.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 1964

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՇԱՏՅԱՆ

ՈՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՏՐԱՆՍԼԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Դիտարկված է տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված ողղանկյուն սալի ծռման խնդիրը ըստ Ա. Ա. Համբարձումյանի [1] առաջադրած տեսության, որտեղ հաշվի է առնվում լայնական սահքերի ազդեցությունը: Տրված է խնդրի ընդհանուր լուծումը կամայական արտաքին բևեռ դեպքում, երբ սալի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ հենված են, իսկ մյուս երկուսը ամրացված են տարբեր ձևերով: Մասնավորապես լուծված է հավասարաչափ բաշխված բևեռ դեպքը, երբ սալը՝ 1) ազատ հենված է ամբողջ եզրով, 2) երկու հանդիպակաց եզրերով ազատ հենված է, իսկ մյուս երկուսով ամրակցված է: Ստացված են բանաձևեր մաքսիմալ ձկվածքների համար և կատարված են թվային հաշվումներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1948.
3. Москаленко В. Н. К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, 1, вып. 3, 1961.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. В. МИШЕНКОВ

К ВОПРОСУ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ
 ВОЗБУЖДАЕМЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
 УПРУГИХ ПАНЕЛЕЙ

При рассмотрении динамической устойчивости упругих панелей, как правило, невозмущенное состояние панели отождествляют с ее недеформированным состоянием [4,5]. Однако, такая замена становится недопустимой, если невозмущенное состояние оказывается близким к резонансному. Связанные с этим явления для случая стержней и пластин были подробно рассмотрены В. В. Болотиным [1]; им же была предложена механическая модель, описывающая эти явления [3].

Ниже показывается, что учет взаимодействия параметрических и вынужденных колебаний тонких упругих панелей приводит к значительному расширению областей динамической неустойчивости. Устанавливается возможность возбуждения колебаний в зоне частот, близких к частотам собственных продольных колебаний.

§ 1. Рассмотрим упругую изотропную цилиндрическую панель, опирающуюся на прямоугольный в плане контур со сторонами a и b . Если пользоваться основными гипотезами нелинейной теории оболочек, то деформацию срединной поверхности панели можно описать системой уравнений

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Здесь $w(x,y)$ — нормальный прогиб, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, h — толщина панели, E — модуль упругости материала, R — радиус кривизны срединной поверхности панели, Φ — функция, связанная с усилиями в срединной поверхности известными соотношениями

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = N_y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = N_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -N_{xy}.$$

Для возмущенного состояния панели нормальную нагрузку q представим в виде

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.2)$$

где ρ — плотность материала панели, а ε — характеристика затухания.

Для конкретности будем предполагать, что панель свободно оперта по контуру, то есть прогиб w удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{aligned} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \quad (x=0, x=a), \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \quad (y=0, y=b), \end{aligned} \quad (1.3)$$

а круговые края загружены равномерно распределенными периодическими продольными силами $p = p_0 + p_1 \cos \Omega t$. Предположим также, что кромки $x=0$ и $x=a$ смещаются свободно, а усилия, возникающие при деформациях на продольных кромках $y=0$ и $y=b$ „в среднем“ равны нулю.

Для того, чтобы оценить влияние продольных сил инерции, поступим аналогично тому, как это сделано в [1]. Будем пренебрегать продольными силами инерции самой панели и предположим, что вся „продольная“ масса сосредоточена в загрузочных балках, расположенных по круговым торцам. Сформулированные выше граничные условия запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dy &= -(p_0 + p_1 \cos \Omega t) + m_0 \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (x=0, x=a), \\ \frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} dx &= 0 \quad (y=0, y=b), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\int_0^b \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} dy = 0 \quad (x=0, x=a), \quad \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} dx = 0 \quad (y=0, y=b),$$

где m_0 — „погонная“ масса загрузочной балки, а u — перемещение точки срединной поверхности панели в продольном направлении.

§ 2. Представим приближенно искомую функцию $w(x, y)$ в виде

$$w(x, y) = \zeta(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (2.1)$$

где $\zeta(t)$ — неизвестная пока функция времени, характеризующая форму колебаний панели. Используя второе уравнение системы (1.1), условия (1.4) и решение (2.1), с помощью процедуры Бубнова—Галеркина нетрудно получить выражение для определения функции усилий $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \frac{Eh}{32} \zeta^2 \left(m^2 \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{1}{m^2} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \\ + \frac{Eh}{R\pi^2} \frac{a^2}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{2} (p_0 + p_t \cos \theta t) y^2 + \frac{1}{2} m_0 \frac{d^2 u}{dt^2} y^2, \quad (2.2)$$

где $m=a/b$. С помощью (2.2) найдем осредненные усилия, возникающие в срединной поверхности при деформациях панели

$$N_x = -\frac{Eh}{8} \frac{\pi^2}{a^2} \zeta^2 \cos \frac{2\pi x}{a} - \frac{Eh}{R} \frac{1}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \\ - (p_0 + p_t \cos \theta t) + m_0 \frac{d^2 u}{dt^2}, \quad (2.3)$$

$$N_y = -\frac{Eh}{8} \frac{\pi^2}{b^2} \zeta^2 \cos \frac{2\pi y}{b} - \frac{Eh}{R} \frac{m^2}{(1+m^2)^2} \zeta \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Определим взаимное сближение криволинейных кромок [2]

$$u = -\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx dy = -\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^a \left[\frac{N_x - \mu N_y}{Eh} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (2.4)$$

Используя выражение (2.4), нетрудно получить уравнение, связывающее перемещения точек срединной поверхности панели в продольном и нормальном направлениях

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{4}{\pi^2} \frac{a}{R} \frac{1 - \mu m^2}{(1+m^2)^2} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} z^2 + \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh} \frac{a}{h}. \quad (2.5)$$

Здесь $\omega_0 = [Eh(m_0 a)^{-1}]^{1/2}$ — частота собственных продольных колебаний, вычисленная в предположении, что вся масса панели сосредоточена по торцам $x=0$ и $x=a$; $\bar{u} = u/h$, $z = \zeta/h$ — безразмерные параметры перемещений.

Для получения второго уравнения, описывающего деформацию панели при изгибе, по-прежнему применим процедуру Бубнова — Галеркина. Используя первое уравнение системы (1.1), решение (2.1) и (2.2), получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} + z\omega_1^2 \left(1 - \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{p_*} + \frac{m_0}{p_*} h \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} \right) - \\ - \beta \omega_1^2 z^2 + \alpha \omega_1^2 z^3 = 0, \quad (2.6)$$

Здесь вводятся обозначения:

$$\omega_1^2 = \pi^2/a^2 [DF(\phi h)^{-1}]^{1/2}$$

— частота собственных поперечных колебаний панели; $p_* = \pi^2/a^2 DF$ — верхнее критическое значение продольной нагрузки; $K = a^2/Rh$, $F = (1+m^2)^2 + 12(1-\mu^2)K^2 [\pi^4(1+m^2)^2]^{-1}$ — безразмерные характеристики панели;

$\alpha = 3(1 - \mu^2)(1 + m^4)(4F)^{-1}$, $\beta = 16/3F(1 - \mu^2)m^2K[1/2 + 8/(1 + m^2)^2]$ — безразмерные коэффициенты, характеризующие геометрическую нелинейность панели. Заметим, что при $m_0 = 0$ уравнение (2.5) определяет перемещение в продольном направлении, а (2.6) обращается в уравнение, хорошо изученное ранее в работах [4,5].

Остановимся на условиях возникновения незатухающих поперечных колебаний, пренебрегая в уравнении (2.6) нелинейными членами, зависящими от нормального перемещения z . Вместо (2.5) рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh} \frac{a}{h}, \quad (2.7)$$

для которого нетрудно получить решение, соответствующее установившемуся режиму продольных колебаний

$$\bar{u} = \frac{a}{h} \frac{p_0}{Eh} + \frac{a}{h} \frac{p_t}{Eh} \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \cos \theta t. \quad (2.8)$$

Найденное выражение для $\bar{u}$ подставим в линеаризованное уравнение (2.6). После преобразований получим

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \Omega^2 (1 - 2\nu \psi \cos \theta t) z = 0, \quad (2.9)$$

где $\Omega = \omega_1 (1 - p_0/p_*)^{-1}$ — частота собственных поперечных колебаний с учетом сжимающих продольных сил, $2\nu = p_t (p_* - p_0)^{-1}$ — коэффициент возбуждения, а через ψ обозначен безразмерный параметр частоты

$$\psi = \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega_0}\right)^2\right]^{-1}. \quad (2.10)$$

Параметр (2.10) удобнее представить в виде $\psi = (1 - \mu^2 \gamma^2)^{-1}$, если обозначить $\mu = \theta/\Omega$, $\gamma = \Omega/\omega_0$. Из (2.10) видно, что $\psi \rightarrow \infty$, если частота возмущения близка к частоте собственных продольных колебаний ($\theta \approx \omega_0$), и $\psi \rightarrow 1$, если масса загрузочной балки весьма мала ($\omega_0 \rightarrow \infty$).

Уравнение вида (2.9) подробно исследовалось в работе [1], где, в частности, было показано, что при значениях γ , близких к единице, границы областей неустойчивости нулевых решений уравнения значительно расширяются.

Обратимся к уравнениям (2.5) и (2.6), для последующих вычислений запишем их в виде

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} + \bar{u} = \frac{4a}{R\pi^2} \frac{1 - \mu^2 m^2}{(1 + m^2)^2} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} z^2 + \frac{a}{h} \frac{p_0 + p_t \cos \theta t}{Eh}, \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_1^2 \left[z - \frac{12(1 - \mu^2)}{\pi^2 F} \frac{a}{h} z \bar{u} - z^2 (\beta - \beta_0) + z^3 (z + z_0) \right] = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\alpha_0 = 3(1 - \mu^2)(2F)^{-1}, \quad \beta_0 = 48(1 - \mu^2)(1 - \mu m^2)K[\pi^4(1 + m^2)^2 F]^{-1}.$$

§3. Будем искать приближенное решение системы уравнений (2.11) и (2.12), соответствующее процессу установившихся колебаний, в виде

$$\bar{u} = a_0 + a_1 \cos \theta t, \quad z = b_0 + b_1 \cos \frac{\theta t}{2}, \quad (3.1)$$

где a_0, a_1, b_0, b_1 — коэффициенты, подлежащие определению. Подставим (3.1) в уравнение (2.11). После выделения постоянных членов, и членов, содержащих первую гармонику, получим

$$a_0 = \frac{4(1 - \mu m^2)}{\pi^2(1 + m^2)^2 R} \frac{a}{b_0} + \frac{\pi^2}{8} \frac{h}{a} \left(b_0^2 + \frac{b_1^2}{2} \right) + \frac{p_0}{Eh} \frac{a}{h},$$

$$a_1 = \psi \left(\frac{\pi^2}{16} \frac{h}{a} b_1^2 + \frac{p_1}{Eh} \frac{a}{h} \right). \quad (3.2)$$

Аналогичную процедуру выполним для уравнения (2.12); после некоторых преобразований получим

$$1 - b_0 \bar{\beta} + b_0^2 \bar{\alpha} + \frac{1}{2} b_1^2 \left[(3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) - \frac{\bar{\beta} - \bar{\beta}_0}{b_0} \right] = 0, \quad (3.3)$$

$$1 - \frac{n^2}{4} - \psi \bar{\psi} - b_0 (2\bar{\beta} - \bar{\beta}_0) + b_0^2 (3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) +$$

$$+ \frac{3}{4} b_1^2 \left[\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}_0}{3} (1 - \psi) \right] = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{1 - p_0/p_*}, \quad \bar{\beta}_i = \frac{\beta_i}{1 - p_0/p_*}.$$

Другое приближенное решение системы уравнений (2.11) и (2.12) получим, если вместо (3.1) возьмем

$$\bar{u} = a_0 + a_1 \cos \theta t, \quad z = b_0 - b_1 \cos \frac{\theta t}{2}.$$

Повторив предыдущие выкладки, вместо уравнения (3.4) будем иметь

$$1 - \frac{n^2}{4} + \psi \bar{\psi} - b_0 (2\bar{\beta} - \bar{\beta}_0) + b_0^2 (3\bar{\alpha} + 2\bar{\alpha}_0) + \frac{3}{4} b_1^2 \left[\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}_0}{3} (1 - \psi) \right] = 0, \quad (3.5)$$

а уравнение (3.3) останется прежним.

Если масса загрузочной балки $m_0 \rightarrow 0$, то $\omega_0 \rightarrow \infty$, а $\psi \rightarrow 1$. Нетрудно показать, что формулы (3.3), (3.4) и (3.5) в этом предельном случае совпадают с рассмотренными ранее в работах [4, 5].

§4. Границы областей неустойчивости нулевых решений уравнений (3.4) и (3.5) определяются формулой

$$1 - \frac{n^2}{4} \pm \nu\psi = 0$$

или

$$(4 - n^2)(1 - n^2\gamma^2) \pm 4\nu = 0. \quad (4.1)$$

Формула (4.1) дает две области неустойчивости. Одна из них лежит вблизи $n^2 = 4$, что соответствует главному параметрическому резонансу, другая — вблизи $n^2 = 1/\gamma^2$, что соответствует частоте возмущения, совпадающей с частотой собственных продольных колебаний. Нетрудно показать, что области неустойчивости сливаются в одну, если

$$\nu_* = \frac{(1 - 4\gamma^2)^2}{16\gamma^2}, \quad (4.2)$$

что соответствует безразмерной частоте

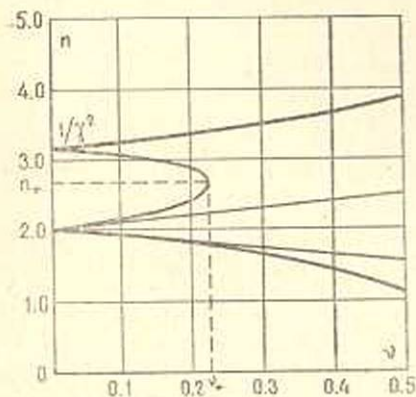
$$n_* = \left(2 + \frac{1}{2\gamma^2}\right)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Дадим оценку для коэффициента частоты γ ; учитывая обозначения, принятые ранее, получим

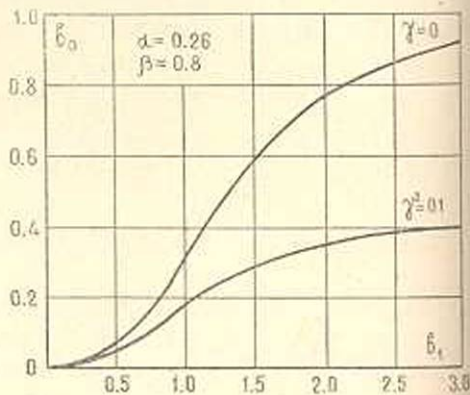
$$\gamma^2 = \frac{\pi^4}{12(1 - \mu^2)} \left(\frac{h}{a}\right)^2 m F \frac{M_0}{M} (1 - p_0/p_*). \quad (4.4)$$

Предположим, что $m = 1$, $h = 0,01a$, $\mu = 0,3$, $M_0 = 15M$, $p_0/p_* = 0,45$, $K = 13$; тогда при помощи (4.2), (4.3) и (4.4) получим $\nu_* = 0,225$, $n_* = 2,65$, $\gamma^2 = 0,1$, то есть слияние областей неустойчивости возможно лишь при значительной массе загрузочной балки и при больших амплитудах нагружки.

График зависимости (4.1) представлен на фиг. 1, где тонкими линиями показаны границы главной области неустойчивости, подсчитан-

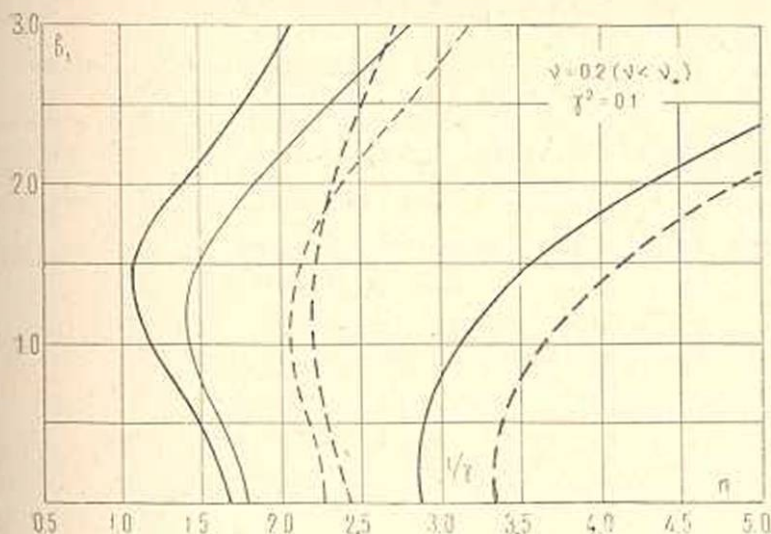


Фиг. 1.



Фиг. 2.

ные без учета взаимодействия. На графике видна область неустойчивости, соответствующая резонансу относительно продольной частоты.



Фиг. 3.

Для построения амплитудно-частотных кривых воспользуемся формулами (3.3), (3.4) и (3.5) и параметрами панели, которые приняты выше. Значения коэффициентов, входящих в (3.3), (3.4) и (3.5) при этом будут равны: $F=8,7$, $\alpha=0,26$, $\beta=0,8$, $\alpha_0=0,28$, $\beta_0=0,21$, $\gamma^2=0,1$. На фиг. 2 зависимость (3.3) представлена в графической форме. Графики амплитудно-частотных кривых приводятся на фиг. 3 (для случая, когда $v < v_*$). Тонкими линиями показаны решения для случая, когда масса загрузочной балки не учитывается; пунктиром показаны неустойчивые решения.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Поступила 25 VI 1964

Ч. 4. ШЕБЕНЮК

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՊԱՆԵԼՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻԿԱՌԵՆ «ԳՐԳՈՎՈՂ»
ԵՎ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԳԵՅՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՅԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. մ փ ո փ ու մ

Հաղվածում դիտարկվում է բարակ տառաչափան պանելների պարամետրիկորեն զրգովող և ստիպողական տատանումների փոխազդեցության հարցը: Յուրջ է արվում, որ բարակ տառաչափան պանելների պարամետրիկորեն և ստիպողական տատանումների փոխազդեցության հաշվարկը հանգեցնում է շինամիջին անկախությունից անհրաժեշտ լինող ընդլայնմանը: Հաստատվում է տատանումների զրգուման հնարավորությունը այն հաճախականությունների գոտում, որոնք մաս են սեփական լայնական տատանումների հաճախականություններին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, 1956.
2. *Вольмир А. С.* Гибкие пластины и оболочки. Гостехиздат, 1956.
3. *Болотин В. В.* Об одной механической модели, описывающей взаимодействие параметрических и вынужденных колебаний. Труды Моск. энергетич. ин-та, вып. 32, механ., 1959.
4. *Мищенко Г. В.* О динамической устойчивости-пологих упругих панелей. Инж. журнал, 1, № 2, 1961.
5. *Гуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости оболочек. Известия АН СССР, ОТИ, Механика и машиностроение, № 4, 1961.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. САРКИСЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СТЕРЖНЯ
С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Многочисленные работы посвящены исследованию задачи об изгибе анизотропных стержней, среди которых особое место занимают работы Сен-Венана [1], В. Фойгта [2], Л. С. Лейбензона [3], С. Г. Лехницкого [4—5] и др.

Решению задачи изгиба неортотропного стержня методом малого параметра (геометрический параметр) посвящены некоторые работы автора (см. [6]).

В работах [7, 8] решены задачи о кручении и об изгибе призматических стержней, обладающих прямолинейной анизотропией частного вида (неортотропные стержни), а в работе [9] — задача кручения стержня с цилиндрической анизотропией.

В настоящей статье предлагается метод решения задачи об изгибе цилиндрического или призматического стержня, обладающего цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси.

Введением новых переменных решение задачи представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ (физический параметр). Показано, что решение дифференциального уравнения в частных производных с неразделяющимися переменными сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В качестве примера решена задача об изгибе сплошного кругового цилиндра.

Исследован вопрос о сходимости и существовании решения задачи об изгибе стержня с произвольным поперечным сечением.

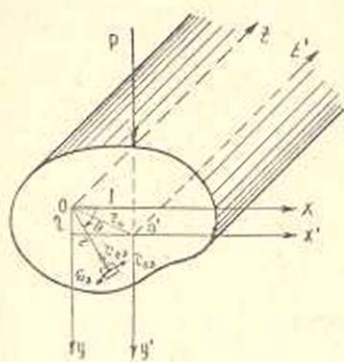
§ 1. Метод решения задачи. Пусть цилиндрический или призматический стержень обладает цилиндрической анизотропией такого вида, что в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, нормальная к его оси z (то есть стержень — неортотропный). Ось анизотропии (по предположению параллельная образующей) обозначим через oz , геометрическую ось тела — $o'z'$, главные оси инерции сечения — x', y' , полярную ось — ox , параллельную $o'x'$ (фиг. 1).

Поместим начало координат o' в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P , проходящей через центр тяжести и совпадающей с направлением y' . Примем далее, что упругие постоянные материала удовлетворяют условиям [4]

$$a_{13} = a_{23}, \quad a_{35} = 0. \quad (1.1)$$

Тогда напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_z = -\frac{P}{I} z y' = \\ = -\frac{P}{I} z (r \sin \theta - \eta), \\ \tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \tau_1, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \tau_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

где $\Psi(r, \theta)$ — функция напряжений при изгибе, I — момент инерции относительно оси x' , τ_1 и τ_2 — какие-нибудь частные решения уравнения

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} + \frac{\tau_1}{r} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = 0. \quad (1.3)$$

Внося выражения (1.2) в уравнения совместности и учитывая (1.1), для определения $\Psi(r, \theta)$ получим дифференциальное уравнение с частными производными с неразделяющимися переменными [4]

$$\begin{aligned} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2a_{45} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{a_{55} \partial^2 \Psi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{a_{44} \partial \Psi}{r \partial r} = -\frac{2a_{13} P}{I} r \cos \theta - 2\eta + \\ + a_{44} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial r} + \frac{\tau_2}{r} \right) + a_{45} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\tau_1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \tau_2}{\partial \theta} \right) - \frac{a_{55} \partial \tau_1}{r \partial \theta}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где η — некоторая постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины, a_{ik} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44} > 0, \quad a_{55} > 0, \quad a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0. \quad (1.5)$$

Условие на боковой поверхности будет

$$\tau_{rz} \cos(n, r) + \tau_{\theta z} \cos(n, \theta) = 0, \quad (1.6)$$

а в случае односвязной области сечения —

$$\Psi|_s = \int_0^s (\tau_2 dr - \tau_1 r d\theta). \quad (1.7)$$

Введем новые переменные t и φ , связанные со старыми зависимостями [9]

$$t = \ln \frac{r}{r_0}, \quad \varphi = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}} \theta. \quad (1.8)$$

Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = F_1(t, \varphi, a_{ij}) + \mu F_2(t, \varphi, a_{ij}), \quad (1.9)$$

где

$$\begin{aligned} a_{44}\Psi(r, \theta) &= \Phi(t, \varphi), \quad \mu = \frac{a_{45}}{\sqrt{a_{44}a_{55}}} < 1^*, \\ F_1(t, \varphi, a_{ij}) &= -\frac{2a_{13}\rho r_0^3 e^{3t}}{I} \cos \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} \varphi - 2\vartheta r_0^2 e^{2t} + \\ &+ a_{44}r_0 e^t \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1 \right) - \sqrt{a_{44}a_{55}} r_0 e^t \frac{\partial \tau_1}{\partial \varphi}, \\ F_2(t, \varphi, a_{ij}) &= r_0 e^t \left[\sqrt{a_{44}a_{55}} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial t} + \tau_1 \right) - a_{44} \frac{\partial \tau_1}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.9) в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$\Phi(t, \varphi) = \Phi_0(t, \varphi) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t, \varphi) \mu^i. \quad (1.11)$$

Подставляя значение $\Phi(t, \varphi)$ из выражения (1.11) в дифференциальное уравнение (1.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим

$$\Delta \Phi_0 = F_1(t, \varphi, a_{ij}), \quad (1.12)$$

$$\Delta \Phi_1 = F_2(t, \varphi, a_{ij}) + p_1(t, \varphi), \quad (1.13)$$

$$\Delta \Phi_i = p_i(t, \varphi) \quad (i = 2, 3, \dots), \quad (1.14)$$

где

$$p_i(t, \varphi) = 2 \frac{\partial^2 \Phi_{i-1}}{\partial t \partial \varphi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Из (1.7) при помощи (1.10) и (1.11), легко получается**

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1} &= r_0 \int_0^t e^t \left(\tau_1 dt - \tau_1 \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} d\varphi \right), \\ \Phi_i|_t &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.9) сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.12) — (1.14) при условии (1.15).

* Отметим, что для ортотропного стержня $\mu=0$.

** Здесь приводятся граничные условия для односвязной области, а для многосвязной области эти условия можно получить из (1.6) при помощи (1.10) и (1.11).

Теперь рассмотрим задачу о распределении напряжений в консоли, имеющей форму сплошного кругового цилиндра.

§ 2. Изгиб сплошного кругового цилиндра (фиг. 2). Предположим, что ось анизотропии совпадает с геометрической осью. Тогда можно принять

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0, & \tau_2 &= -\frac{P}{I} r^2 \cos \theta, \\ \left(I &= \frac{\pi a^4}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Следовательно, из (1.2) будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{P}{I} z r \sin \theta, \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, & \tau_{\theta z} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{P}{I} r^2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Фиг. 2.

Условие на поверхности — $\tau_{rz}|_{r=a} = 0$

и условие конечности напряжений на оси, учитывая (1.8), (1.10), (1.11), (1.15), можно написать так

$$\Phi_i(t, \varphi) = 0 \quad \text{на } t = 0, \quad (2.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} \Phi_i(t, \varphi) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Легко видеть, что здесь постоянную θ можно положить равной нулю. Тогда, с учетом (2.1), уравнение (1.12) примет вид

$$\Delta \Phi_0 = b_0 e^{3t} \cos \varphi m, \quad (2.5)$$

где

$$b_0 = -\frac{4P(2a_{13} + 3a_{44})}{\pi a}, \quad m = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}}.$$

Ищем решение уравнения (2.5) в виде

$$\Phi_0(t, \varphi) = f_0(t) \cos \varphi m. \quad (2.6)$$

Из (2.5), при помощи (2.6), для определения $f_0(t)$ получим следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 f_0}{dt^2} - m^2 f_0 = b_0 e^{3t}. \quad (2.7)$$

Общее решение уравнения (2.7) при условиях (2.3) и (2.4) можно представить в виде*

* Если $m < 1$, то есть $a_{55} < a_{44}$, то около оси будет происходить концентрация напряжений. В этом случае ось анизотропии следует исключить из рассмотрения, окружив ее цилиндром малого радиуса.

$$f_0(t) = \frac{b_0}{m^2 - 9} (e^{mt} - e^{3t}) \quad m \gg 1. \quad (2.8)$$

Итак, при помощи (2.8) и (2.6) можно записать

$$\Phi_0(t, \varphi) = \frac{b_0}{m^2 - 9} (e^{mt} - e^{3t}) \cos \varphi m. \quad (2.9)$$

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Подставляя выражения $\Phi_0(t, \varphi)$ из (2.9) в (1.13), получим

$$\Delta \Phi_1 = b_1(t) \sin m\varphi, \quad (2.10)$$

где

$$b_1(t) = -\frac{4P\sqrt{a_{44}a_{55}}}{\pi a} e^{3t} - \frac{2mb_0}{m^2 - 9} (me^{mt} - 3e^{3t}). \quad (2.11)$$

Представим решение уравнения (2.10) в виде

$$\Phi_1(t, \varphi) = f_1(t) \sin \varphi m. \quad (2.12)$$

Тогда для определения $f_1(t)$ получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} - m^2 f_1 = b_1(t). \quad (2.13)$$

Общее решение уравнения (2.13) при условиях (2.3) и (2.4), как нетрудно видеть, можно записать в виде

$$f_1(t) = \left[d_1 \left(t + \frac{6}{9 - m^2} \right) + d_2 \right] e^{mt} + d_3 e^{3t}, \quad (2.14)$$

где

$$d_1 = \frac{m^3 b_0}{9 - m^2}, \quad d_2 = \frac{4Pm^2 \sqrt{a_{44}a_{55}}}{\pi a (9 - m^2)},$$

$$d_3 = \frac{2m^2}{9 - m^2} \left[\frac{3mb_0}{m^2 - 9} - \frac{2P\sqrt{a_{55}a_{44}}}{\pi a} \right].$$

Следовательно, учитывая (2.12) и (2.14), находим

$$\Phi_1(t, \varphi) = \left\{ \left[d_1 \left(t + \frac{6}{9 - m^2} \right) + d_2 \right] e^{mt} + d_3 e^{3t} \right\} \sin \varphi m. \quad (2.15)$$

Итак, имея $\Phi_1(t, \varphi)$, при помощи (1.14) последовательно можно определить $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 2, 3, \dots$), а следовательно, и значение функции напряжений $\Psi(r, \theta)$, если только интеграл уравнения (1.9), удовлетворяющий условию (1.15), существует и разлагается в сходящийся ряд по положительным степеням r единственным образом.

Имея функцию напряжений, при помощи формулы (2.2) можно составить картину распределения касательных напряжений с любой точностью.

§ 3. Исследование решения основной краевой задачи. В настоящем параграфе дается исследование решения основного дифферен-

циального уравнения в частных производных эллиптического типа с неразделяющимися переменными (1.9) для любой области D , ограниченной достаточно гладкой кривой s , при условии (1.15). Для удобства сформулируем это в виде следующей краевой задачи, которую в дальнейшем будем называть *основной*.

Основная краевая задача*. Найти решение дифференциального уравнения в частных производных эллиптического типа

$$L\Phi = -g_0(x_1, x_2) - \mu g_1(x_1, x_2), \quad \left(L = \Delta - 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \quad (3.1)$$

для области D при граничном условии

$$\Phi|_s = 0. \quad (3.2)$$

Здесь примем, что свободные члены $g_0(x_1, x_2)$ и $g_1(x_1, x_2)$, квадратично-суммируемы в области D , μ — малый численный параметр, а оператор $-L$ положительно определенный.

Прежде чем перейти к исследованию решения основной краевой задачи, приведем некоторые известные факты.

Множество всех функций $\Phi(x) \equiv \Phi(x_1, x_2)$ из $W_2^2(D)$, удовлетворяющих на s условию (3.2), образуют подпространство $\tilde{W}_2^2(D)$ пространства $W_2^2(D)$. Норма в $W_2^2(D)$ определяется равенством [10]

$$\|\Phi\|_{W_2^2(D)} = \left\{ \int_D \left[\Phi^2 + \text{grad}^2 \Phi + \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right] dx \right\}^{1/2}. \quad (3.3)$$

Обозначим через $L_2(D)$ множество функций $g(x) \equiv g(x_1, x_2)$, интегрируемых вместе с $g^2(x)$ в конечной области D . Норма в $L_2(D)$ вводится так

$$\|g\|_{L_2(D)} = \left[\int_D g^2 dx \right]^{1/2}. \quad (3.4)$$

На основании теоремы вложения С. Л. Соболева [10] и работ [11—13] можно установить следующее:

1. Основная краевая задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение из $\tilde{W}_2^2(D)$, если $(g_0 + \mu g_1) \in L_2(D)$.

2. Если свободный член $(g_0 + \mu g_1)$ достаточно гладкий, то существует дважды непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}$ решение основной краевой задачи (3.1), (3.2).

3. Для любой функции из $\tilde{W}_2^2$ и любой области D с дважды непрерывно дифференцируемой границей справедливо неравенство

* Основную краевую задачу (3.1)—(3.2) при помощи аффинных преобразований можно свести к краевой задаче $\Delta\Phi = -f$ для D^* при $\Phi|_{s^*} = 0$ (*).

Причем, кривая s^* , ограничивающая область D^* , искажается, и решить краевую задачу (*) для области D^* становится существенно трудно. Так, например, для прямоугольника, кругового сектора и т. д.

$$\|\Phi\|_{W_2^2(D)} \leq C_1 \|L\Phi\|_{L_2(D)}, \quad (3.5)$$

если только оператор $-L$ положительно-определенный.

Наконец, приведем следующую теорему, доказанную С. Г. Михлиным [14].

Теорема. Если $g(x_1, x_2)$ — квадратично-суммируемая функция в области круга, а $\Phi(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi = -g(x_1, x_2)$ в $R^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1$ при краевом условии $\Phi|_{R=1} = 0$, то имеет место неравенство

$$\iint_{R<1} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_k \partial x_m} \right|^2 dx_1 dx_2 \leq C^2 \iint_{R<1} |g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2, \quad C = \text{const.} \quad (3.6)$$

Причем, для производных $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}$ $C = \frac{3}{2}$, а для $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}$ $C = 1$.

Теперь сформулируем и докажем следующие теоремы, которые относятся к поведению решения основной краевой задачи.

Теорема 1. Существует решение основной краевой задачи (3.1), (3.2), имеющее вид

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_k(x_1, x_2), \quad (3.7)$$

причем при $|\mu| < \frac{1}{2C_1}$ ряд (3.7) и ряды

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2) \quad (3.8)$$

сходятся в области D в среднем.

Доказательство. Пусть существует решение основной краевой задачи (3.1), (3.2) в виде (3.7). Тогда при помощи (3.7) из (3.1) и (3.2) можно получить систему рекуррентных краевых задач

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_0 &= -g_0(x_1, x_2), \\ \Phi_0|_s &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_1 &= -g_1(x_1, x_2) - p_1(x_1, x_2), \\ \Phi_1|_s &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Phi_k &= -p_k(x_1, x_2), \\ (k=2, 3, \dots) \quad \left(\begin{aligned} p_k &= -2 \frac{\partial^2 \Phi_{k-1}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Для доказательства существования такого решения необходимо оценить $\|\Phi_n\|_{L_2(D)}$ в зависимости от n . Для $\|\Phi_0(x_1, x_2)\|_{L_2(D)}$, учитывая (3.3)–(3.5) и (3.9), получим

$$\|\Phi_0\|_{L_2(D)} \leq \|\Phi_0\|_{W_2^1(D)} \leq A_1(D) \quad (A_1(D) = C_1 \|g_0\|_{L_2(D)}). \quad (3.12)$$

Методом математической индукции доказывается

$$\|\Phi_n\|_{L_2(D)} \leq 2^{n-1} C_1^n [B_1(D) + 2A_1(D)] \quad n \geq 1 \quad (B_1(D) = \|g_1\|_{L_2(D)}). \quad (3.13)$$

Из оценок (3.12) и (3.13) следует, что ряд (3.7) в области D сходится в среднем, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{2C_1}. \quad (3.14)$$

Напишем следующее неравенство

$$\left\| \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_i} \right\|_{L_2(D)} \leq \|\Phi_n\|_{W_2^1(D)} \quad (i = 1, 2) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Откуда, принимая во внимание (3.12), (3.13), вытекает, что при соблюдении условия (3.14) ряды (3.8) сходятся в области D в среднем.

Итак, теорема доказана.

Когда область D является кругом, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Существует решение основной краевой задачи, имеющее вид

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \Phi_k(x_1, x_2), \quad (3.16)$$

причем при $|\mu| < \frac{1}{2}$ ряд сходится абсолютно и равномерно по x_1 и x_2 в круге $x_1^2 + x_2^2 = R^2 \leq 1$, а ряды

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2) \quad (3.17)$$

сходятся в этом круге в среднем.

Доказательство. Предположим, что решение основной краевой задачи существует и имеет вид (3.16). Тогда при помощи (3.16) из (3.1) и (3.2) можно получить систему рекуррентных краевых задач (3.9)–(3.11) для кругов. Затем решение этой системы, пользуясь обычной формулой [15, 16], можно представить в виде

$$\Phi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{R < 1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) g_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.18)$$

$$\Phi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{R < 1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \left[g_1(\xi_1, \xi_2) - 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right] d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.19)$$

$$\Phi_n(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \int_{R < 1} G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \quad n \geq 2, \quad (3.20)$$

где $G(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2)$ — функция Грина для оператора Лапласа.

Для доказательства существования решения (3.16) необходимо оценить $|\Phi_n(x_1, x_2)|$ в зависимости от n равномерно по x_1 и x_2 в круге $R < 1$. Заметим, что [15]

$$\iint_{R < 1} G^2(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \leq \frac{1}{2\pi}. \quad (3.21)$$

Вводя в рассмотрение величины

$$B_0 = \left\{ \iint_{R < 1} g_0^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right\}^{1/2}, \quad B_1 = \left\{ \iint_{R < 1} g_1^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right\}^{1/2}, \quad (3.22)$$

учитывая (3.18)–(3.22), применяя неравенство Буняковского-Шварца, неравенство треугольника и неравенство (3.6), находим, что

$$|\Phi_0(x_1, x_2)| \leq \frac{B_0}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.23)$$

$$|\Phi_n(x_1, x_2)| \leq 2^{n-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} (B_1 + 2B_0) \quad n \geq 1. \quad (3.24)$$

Из оценок (3.23) и (3.24) следует, что ряд (3.16) мажорируется числовым рядом с положительными членами

$$2^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{2}} \left[2B_0 + (2B_0 + B_1) \sum_{k=1}^{\infty} (2|\mu|)^k \right], \quad (3.25)$$

который, очевидно, сходится как геометрическая прогрессия, если только параметр μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{2}. \quad (3.26)$$

Итак, при соблюдении условия (3.26) ряд (3.16) сходится абсолютно и равномерно по x_1 и x_2 внутри круга $R < 1$ и представляет собой решение основной краевой задачи (3.1), (3.2) для круга.

Для доказательства сходимости ряды (3.17) составим скалярное произведение

$$(\Phi, -L\Phi) = - \iint_{R < 1} \Phi L\Phi dx_1 dx_2. \quad (3.27)$$

Для выражения (3.27), применяя вторую формулу Грина и учитывая (3.2), получим

$$(\Phi, -L\Phi) = \iint_{R < 1} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 - 2\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right\} dx_1 dx_2. \quad (3.28)$$

Теперь составим норму энергии функции $\Phi - \tilde{\Phi}_n$ ($\tilde{\Phi}_n = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \dots + \mu^{n-1}\Phi_{n-1}$)

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}_n\|_L = \sqrt{(-L(\Phi - \tilde{\Phi}_n), \Phi - \tilde{\Phi}_n)}. \quad (3.29)$$

Принимая во внимание (3.9)–(3.11), нетрудно установить, что

$$L(\Phi - \tilde{\Phi}_n) = 2\mu^n \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3.30)$$

Затем, при помощи формул (3.18)–(3.20) и неравенства (3.23)–(3.24) получим

$$|\Phi - \tilde{\Phi}_n| \leq 2^n |\mu|^n \frac{2B_0 + B_1}{2^{1/2} \pi^{1/2} (1 - 2|\mu|)}, \quad (3.31)$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \Phi_{n-1}}{\partial x_1 \partial x_2} \right\| \leq 2^{n-2} (B_1 + 2B_0). \quad (3.32)$$

Имея ввиду (3.31) и (3.32), оценим

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}_n\|_L^2 \leq (2\mu)^{2n} \frac{2B_0 + B_1}{2^{1/2} \pi (1 - 2|\mu|)}. \quad (3.33)$$

Отсюда немедленно вытекает, что $\tilde{\Phi}_n(x_1, x_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_1, x_2)$, если только $|\mu| < \frac{1}{2}$. Затем, принимая во внимание (3.28), получим

$$\|\Phi - \tilde{\Phi}_n\|_L^2 \geq (1 - \mu) \iint_{R \leq 1} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_n}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_n}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2. \quad (3.34)$$

Из неравенства (3.34), учитывая сходимость по энергии $\tilde{\Phi}_n(x_1, x_2) \rightarrow \Phi(x_1, x_2)$, легко видеть, что

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2). \quad (3.35)$$

Таким образом, теорема доказана.

Замечание. При решении конкретных практических задач обычно ограничиваются вторым или третьим приближениями решения основной краевой задачи (3.1)–(3.2). С этой же точки зрения отметим следующее соображение. Если в ряде (3.16) ограничиться членами, содержащими μ^n , то, как легко видеть, ошибка не будет превосходить величины

$$\delta_n = \frac{(2B_0 + B_1) |\mu|^{n+1} 2^{n-\frac{3}{2}}}{\pi^{1/2} (1 - 2|\mu|)}, \quad (3.36)$$

а относительная погрешность будет

$$\varepsilon_n = \frac{2^n |\mu|^{n+1} (2B_0 + B_1)}{B_0 (1 - 2^{n+1} |\mu|^{n+1}) + B_1 |\mu| (1 - 2^n |\mu|^n)}$$

По формуле (3.36) можно установить, что, если потребовать, чтобы

ошибка не превосходила 5% при $\mu = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$, то соответственно $n = 4, 3, 1$.

В заключение выражаю признательность проф. Р. А. Александру за ценные указания.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 VIII 1964

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՊԱՆԱՅԻՆ ԱՆԵՂՈՏՐՈՊԻԱ ՈՐԵՆՑՈՂ ՉՈՂԻ ԾՈՒՄԱՆ ԽՆԴԻՐ ԼՈՒՇՄԱՆ ՄԻ ԵՂԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Անիզոտրոպ ձողերի ծուժան խնդրի լուծմանը նվիրված են շատ աշխատություններ, որոնց մեջ կարևոր տեղ են դրավում Սեն-Վենանի [1], Վ. Ֆոլխտի [2], Լ. Ս. Հիլբերտի [3], Ա. Գ. Լեխնիցկու [4—5] և ուրիշների աշխատությունները:

Հեղինակը փոքր պարամետրերի (երկրաչափական պարամետր) օգնությամբ լուծել է ոչ օրթոտրոպ պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծուժան խնդիրները (տե՛ս [6]):

[7]—[9] աշխատությունները նվիրված են ինչպես ուղղաձողային, այնպես էլ զլանային անիզոտրոպիա (ոչ օրթոտրոպ) ունեցող պրիզմայաձև ձողերի ոլորման և ծուժան խնդիրներին:

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է զլանային անիզոտրոպիա ունեցող ձողերի ծուժան խնդրի լուծման նոր եղանակ:

Լուծումը ներկայացված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր): Այդ եղանակով՝ շանջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման:

Որպես կիրառություն լուծված է հոծ շրջանային զլանի ծուժան խնդիրը:

Հետազոտված են կամայական լայնական կտրվածք ունեցող ձողի ծուժան խնդրի լուծման գոյությունը և զուգամիասության հարցերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Sciences math. et phys., 14, 1856, Paris.
2. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig—Berlin (Teubner), 1928.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. I. Изд. АН СССР, М., 1951.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. Лехницкий С. Г. Распределение напряжений в упругом стержне с криволинейной анизотропией под действием растягивающей силы и изгибающих моментов. ПММ, 13, № 3, 1949.

6. Саркисян В. С. Кручение и изгиб анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Кандидатская диссертация. МГУ, НИИ мех., 1962.
7. Саркисян В. С. К решению задачи кручения анизотропных призматических стержней. Известия АН СССР, ОТН, Мех. и машиностроение, № 2, 1963.
8. Саркисян В. С. К решению задачи изгиба анизотропных призматических стержней симметричных профилей. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 5, 1962.
9. Саркисян В. С. Об одном способе решения задачи кручения стержня с цилиндрической анизотропией. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 2, 1963.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.
11. Ладженская О. А. О замыкании эллиптического оператора. ДАН СССР, 79, № 5, 1951.
12. Ладженская О. А. Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений. Вестник ЛГУ, № 11, 1955.
13. Жиро Ж. О проблеме Дирихле. Ann. de l'Ecole Normale, 46, 1929.
14. Михлин С. Г. О некоторых оценках, связанных с функцией Грина. ДАН СССР, 28, № 3, 1951.
15. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, М., 1959.
16. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехтеориздат, М., 1957.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. КИРАКОСЯН

О ПОЛЗУЧЕСТИ СЛОЯ СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ
ДВУХОСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Вопросам теоретического определения напряженно-деформированного состояния конструкций из стеклопластиков в условиях ползучести посвящены работы Г. И. Брызгалина [1], Н. И. Малинина [2], П. М. Огибалова, Ю. В. Биккениной [3] и других.

В настоящей работе рассматривается задача определения деформаций и перераспределения напряжений между стекловолокном и связующим материалом отдельных рядов стеклошпона, вследствие ползучести связующего материала.

Показывается, что ползучесть стеклопластиков при двухосном растяжении можно описать уравнениями ортотропной наследственной линейной ползучести, при этом упругие постоянные и меры ползучести выражаются через упругие постоянные отдельных составляющих стеклопластика и меру ползучести связующего материала.

По безмоментной теории дается решение задачи осесимметричной ползучести и релаксации оболочек вращения, изготовленных из стеклопластиков.

§ 1. Рассмотрим однородный по толщине единичный элемент постоянной толщины δ_y , армированный лишь по направлению y — u плотностью n_y , причем

$$n_y = \frac{\Omega_a}{\Omega},$$

где Ω — площадь поперечного сечения элемента, Ω_a — площадь арматуры в этом сечении.

Пусть элемент растягивается слабо изменяющимися во времени усилиями $T_{1x}(t)$ и $T_{1y}(t)$. Предположим, что армирующее стекловолокно представляет собой упругое тело, а связующий материал обладает заметным свойством ползучести. Тогда с течением времени произойдет перераспределение напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 между стекловолокном и связующим материалом (фиг. 1).

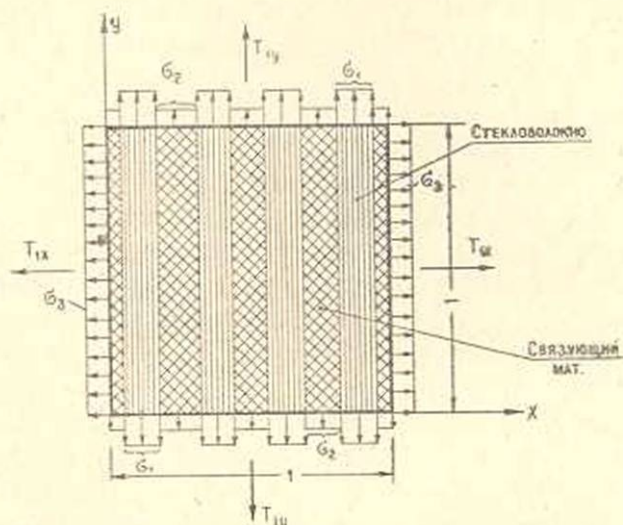
Из условий совместности деформирования стекла и связующего материала и уравнений равновесия единичного слоя в целом получим

$$\varepsilon_x = \frac{1-n_y}{E_{\text{св}}} [\sigma_3 - \nu_{\text{св}} \sigma_2 + E_{\text{св}} \varepsilon_x^c(\sigma_2, \sigma_3)] + \frac{n_y}{E_a} (\sigma_3 - \nu_a \sigma_1),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_{\text{св}}} [\sigma_2 - \nu_{\text{св}} \sigma_3 + E_{\text{св}} \varepsilon_y^c(\sigma_2, \sigma_3)] = \frac{\sigma_1 - \nu_a \sigma_3}{E_a}, \quad (1.1)$$

$$T_{1x} = \delta_y \sigma_3, \quad T_{1y} = \delta_y [n_y \sigma_1 + (1-n_y) \sigma_2], \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ — средние значения полных деформаций, $\varepsilon_x^c, \varepsilon_y^c$ — деформации ползучести связующего материала, $E_a, E_{\text{св}}$ и $\nu_a, \nu_{\text{св}}$ — соответственно модули упругости и коэффициенты Пуассона стекла и связующего материала.



Фиг. 1.

Рассмотрим теперь пластинку, составленную из $N = m + n$ рядов, симметрично собранных относительно срединной плоскости пластинки, из которых m рядов армированы по направлению $y-y$, а n — по $x-x$.

Для единичного элемента, вырезанного из такой составной пластинки, уравнения совместности деформаций стекла и связующего материала и уравнения равновесия для всего пакета в целом запишутся в виде

$$\varepsilon_x = \frac{1-n_y}{E_{\text{св}}} [\sigma_3 - \nu_{\text{св}} \sigma_2 + E_{\text{св}} \varepsilon_x^c(\sigma_2, \sigma_3)] + \frac{n_y}{E_a} (\sigma_3 - \nu_a \sigma_1) =$$

$$= \frac{1}{E_{\text{св}}} [\sigma_3 - \nu_{\text{св}} \sigma_2 + E_{\text{св}} \varepsilon_x^c(\sigma_2, \sigma_3)] = \frac{\sigma_3 - \nu_a \sigma_1}{E_a}, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-n_x}{E_{\text{св}}} [\sigma_2 - \nu_{\text{св}} \sigma_3 + E_{\text{св}} \varepsilon_y^c(\sigma_2, \sigma_3)] + \frac{n_x}{E_a} (\sigma_2 - \nu_a \sigma_4) =$$

$$= \frac{1}{E_{\text{св}}} [\sigma_2 - \nu_{\text{св}} \sigma_3 + E_{\text{св}} \varepsilon_y^c(\sigma_2, \sigma_3)] = \frac{\sigma_2 - \nu_a \sigma_4}{E_a}.$$

$$\begin{aligned} T_1 &= mT_{1x} + nT_{2x} = m\delta_y\sigma_3 + n\delta_x[n_x\sigma_4 + (1-n_x)\sigma_5], \\ T_2 &= mT_{1y} + nT_{2y} = m\delta_y[n_y\sigma_1 + (1-n_y)\sigma_2] + n\delta_x\sigma_6. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) образуют систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных ($\sigma_1, \dots, \sigma_6, \varepsilon_x, \varepsilon_y$). Характер этой системы существенным образом зависит от уравнений ползучести связующего материала. Для простоты в дальнейшем будем полагать

$$\delta_x = \delta_y = \delta.$$

Подставляя значения напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_5 &= \frac{T_1}{n\delta(1-n_x)} - \frac{m\sigma_3}{n(1-n_x)} - \frac{n_x}{1-n_x}\sigma_4, \\ \sigma_6 &= \frac{T_2}{n\delta} - \frac{mn_y}{n}\sigma_1 - \frac{m(1-n_y)\sigma_2}{n} \end{aligned} \quad (1.5)$$

из (1.4) в уравнения совместности (1.3), получим следующую систему алгебраических уравнений относительно напряжений $\sigma_1, \dots, \sigma_4$

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij}\sigma_j = b_i \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (1.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\nu_a n_y N}{E_a n}, \quad a_{12} = A + \frac{1-n_y}{E_a E_{cn} n} (E_a n \nu_{cn} + E_{cn} m \nu_a), \\ a_{13} &= -2A - \frac{E_{cn} n_y + E_a (1-n_y)}{E_a E_{cn}}, \quad a_{14} = \frac{1}{E_a}, \\ a_{21} &= \frac{1}{E_a} + \frac{mn_y}{n} \left[2\bar{A} + \frac{E_{cn} n_x + E_a (1-n_x)}{E_a E_{cn}} \right], \\ a_{22} &= \frac{m(1-n_y)}{n} \left[2\bar{A} + \frac{E_{cn} n_x + E_a (1-n_x)}{E_a E_{cn}} \right], \\ a_{23} &= -\frac{\nu_a}{E_a} - \frac{m}{n(1-n_x)} \left(A + \frac{1-n_x}{E_{cn}} \nu_{cn} \right), \\ a_{24} &= \frac{\nu_a n_x}{E_a} - \frac{n_x}{1-n_x} \left(\bar{A} + \frac{1-n_x}{E_{cn}} \nu_{cn} \right), \\ a_{31} &= -\frac{mn_y}{n} \left(\bar{B} + \frac{E_a \nu_{cn} - E_{cn} \nu_a}{E_a E_{cn}} \right), \\ a_{32} &= -\frac{m(1-n_y)}{n} \left(\bar{B} + \frac{E_a \nu_{cn} - E_{cn} \nu_a}{E_a E_{cn}} \right), \\ a_{41} &= \frac{m}{n(1-n_x)} \left(2\bar{B} + \frac{1}{E_{cn}} \right), \quad a_{43} = \frac{1}{E_a} + \frac{n_x}{1-n_x} \left(2\bar{B} + \frac{1}{E_{cn}} \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
 a_{41} &= \frac{1}{E_a}, \quad a_{42} = -2B - \frac{1}{E_{cs}}, \quad a_{43} = B + \frac{E_a \gamma_{cs} - E_{cs} \gamma_a}{E_a E_{cs}}, \quad a_{44} = 0, \\
 b_1 &= \frac{\gamma_a}{E_a \delta n} T_2, \quad b_2 = \frac{1}{\delta n} \left[2\bar{A} + \frac{E_{cs} n_x + E_a (1 - n_x)}{E_a E_{cs}} \right] T_2 - \\
 &\quad - \frac{1}{\delta n (1 - n_x)} \left[\bar{A} + \frac{(1 - n_x) \gamma_{cs}}{E_{cs}} \right] T_1, \\
 b_3 &= \frac{1}{\delta n (1 - n_x)} \left(2B + \frac{1}{E_{cs}} \right) T_1 - \frac{1}{\delta n} \left(B + \frac{E_a \gamma_{cs} - E_{cs} \gamma_a}{E_a E_{cs}} \right) T_2, \quad b_4 = 0, \\
 A &= \frac{(1 - n_y) \varepsilon_x^c(\sigma_2, \sigma_3)}{2\sigma_3 - \sigma_2}, \quad \bar{A} = \frac{(1 - n_x) \varepsilon_y^c(\sigma_5, \sigma_6)}{2\sigma_6 - \sigma_5}, \\
 B &= \frac{\varepsilon_x^c(\sigma_2, \sigma_3)}{2\sigma_3 - \sigma_2}, \quad \bar{B} = \frac{\varepsilon_y^c(\sigma_5, \sigma_6)}{2\sigma_2 - \sigma_3}.
 \end{aligned}$$

Систему (1.6) будем решать методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения берем упруго-мгновенные решения ($A^0 = \bar{A}^0 = B^0 = \bar{B}^0 = 0$)^{*}. Для получения первого приближения нужно полагать

$$A^1 = \frac{(1 - n_y) \varepsilon_x^c(\sigma_2^0, \sigma_3^0)}{2\sigma_3^0 - \sigma_2^0}, \quad B^1 = \frac{\varepsilon_x^c(\sigma_2^0, \sigma_3^0)}{2\sigma_3^0 - \sigma_2^0}, \dots$$

Аналогичным образом строятся и последующие приближения —

$$A^k = \frac{(1 - n_y) \varepsilon_x^c(\sigma_2^{k-1}, \sigma_3^{k-1})}{2\sigma_3^{k-1} - \sigma_2^{k-1}}, \dots \quad (1.8)$$

Решение системы (1.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{B_{11} A_{22} - B_{22} A_{11}}{A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}}, \quad \sigma_2 = \frac{B_{11} - A_{11} \sigma_1}{A_{12}}, \\
 \sigma_3 &= -\frac{a_{11} \sigma_1 + a_{12} \sigma_2}{a_{13}}, \quad \sigma_4 = \frac{b_1 - a_{11} \sigma_1 - a_{12} \sigma_2 - a_{13} \sigma_3}{a_{14}}, \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \frac{a_{43} (a_{21} a_{34} - a_{21} a_{24}) - a_{41} (a_{23} a_{31} - a_{23} a_{21})}{a_{42}}, \\
 A_{12} &= \frac{a_{42} (a_{22} a_{31} - a_{22} a_{21}) - a_{42} (a_{23} a_{31} - a_{23} a_{21})}{a_{43}}, \\
 A_{21} &= \frac{a_{43} (a_{11} a_{21} - a_{21} a_{14}) - a_{41} (a_{13} a_{21} - a_{23} a_{14})}{a_{43}}, \\
 A_{22} &= \frac{a_{42} (a_{12} a_{21} - a_{22} a_{14}) - a_{42} (a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11})}{a_{43}}, \\
 B_{11} &= a_{24} b_2 - a_{21} b_3, \quad B_{22} = a_{24} b_1 - a_{14} b_2.
 \end{aligned} \quad (1.10)$$

* Через f^k обозначено значение k -ого приближения функции f .

С помощью (1.5), (1.9) и (1.7), (1.10) для средних значений полных деформаций из (1.3) получим

$$\varepsilon_x = A_1 T_1 + A_2 T_2, \quad \varepsilon_y = B_1 T_1 + B_2 T_2, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{A_3}{\partial n (1 - n_x)} \left[\bar{A} + \frac{(1 - n_x) \gamma_{cn}}{E_{cn}} \right] - \frac{B_3}{\partial n (1 - n_x)} \left(2\bar{B} + \frac{1}{E_{cn}} \right), \\ A_2 &= \frac{A_3}{\partial n} \left[2\bar{A} + \frac{E_{cn} n_x + E_a (1 - n_x)}{E_a E_{cn}} \right] + \\ &+ \frac{B_3}{\partial n} \left(\bar{B} + \frac{E_a \gamma_{cn} - E_{cn} \gamma_a}{E_a E_{cn}} \right) - \frac{b A_{12} a_{24} \gamma_a}{E_a^2 \partial n (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})}, \\ A_3 &= \frac{a a_{34}}{E_a} + \frac{b A_{22} a_{34}}{E_a (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})} + \frac{b A_{12} a_{14}}{E_a (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})}, \\ B_3 &= \frac{a a_{24}}{E_a} + \frac{b A_{22} a_{24}}{E_a (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})}, \\ a &= \frac{1}{A_{12}} \left[\frac{\gamma_a m (1 - n_y)}{n} - \frac{a_{12}}{a_{14}} + \frac{a_{13} a_{43}}{a_{14} a_{43}} \right], \\ b &= \left\{ \frac{\gamma_a m n_y}{n} - \frac{a_{11}}{a_{14}} + \frac{a_{13} a_{41}}{a_{14} a_{43}} - \frac{A_{11}}{A_{12}} \left[\frac{\gamma_a m (1 - n_y)}{n} - \frac{a_{12}}{a_{14}} + \frac{a_{13} a_{43}}{a_{14} a_{43}} \right] \right\}, \\ B_1 &= \bar{A}_2, \quad B_2 = \bar{A}_1 \end{aligned} \quad (1.12)$$

(здесь и в дальнейшем черточка над функциями означает, что m , n , n_x , n_y , T_1 и T_2 в выражениях этих функций заменены, соответственно, через $\bar{n}$, $\bar{m}$, $\bar{n}_y$, $\bar{n}_x$, $\bar{T}_2$ и $\bar{T}_1$). Очевидно, что

$$\varepsilon_x^k = A_1^{k-1} T_1 + A_2^{k-1} T_2, \quad \varepsilon_y^k = \bar{A}_2^{k-1} T_1 + \bar{A}_1^{k-1} T_2. \quad (1.13)$$

Смысл k -ого приближения решения таков: расчет стеклопластика в условиях ползучести сводится к расчету некоторого приведенно-ортотропного упругого тела с соотношениями между деформациями и условиями (1.13). Причем упругие коэффициенты этого приведенного материала зависят от времени, чем и учитывается ползучесть стеклопластика, вызываемая ползучестью связующего материала.

При соблюдении определенных условий [5]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_1^k = A_1^\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_2^k = A_2^\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_x^k = \varepsilon_x, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_y^k = \varepsilon_y \quad (1.14)$$

и последовательность приведенно-ортотропных материалов сходится к некоторому определенному ортотропному упругому материалу, упругие коэффициенты которого A_1^∞ , A_2^∞ , $\bar{A}_1^\infty$ и $\bar{A}_2^\infty$ изменяются во времени.

Рассмотрим следующий иллюстрационный пример. Пусть

$$T_1 = 350 \frac{\text{кг}}{\text{см}}, \quad T_2 = 0, \quad \delta = 0,0015 \text{ см}, \quad m = 150, \quad n = 300,$$

$$n_x = 0,6, \quad n_y = 0,3, \quad E_a = 500000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad E_{cn} = 75000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

и деформация ползучести связующего материала определяется уравнением [6]

$$\varepsilon^c = m' t^{\alpha} \operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_m},$$

где $m' = 4 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_m = 100 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, $\alpha = 0,4$.

На основе расчетов по методу последовательных приближений в нижеприведенной таблице даются значения напряжений σ_2 , σ_4 , σ_5 и модуля упругости приведенного материала $E_{\text{пр}}$ для четырех моментов времени t .

		$\sigma_2, \text{кг/см}^2$	$\sigma_4, \text{кг/см}^2$	$\sigma_5, \text{кг/см}^2$	ε_x в %	$E_{\text{пр}} \cdot 10^{-5}$ кг/см^2
	Нулевое прибл.	206,2	1022,1	153,6	0,204	2,542
I приближен.	$t_1 = 10$ дн.	184,2	1048,9	140,9	0,210	2,469
	$t_2 = 30$ дн.	172,1	1063,6	134,0	0,213	2,434
	$t_3 = 60$ дн.	161,1	1077,0	127,6	0,215	2,412
	$t_4 = 100$ дн.	150,9	1089,4	121,7	0,218	2,379
II приближен.	t_1	188,8	1044,0	142,4	0,208	2,493
	t_2	168,8	1069,9	128,6	0,214	2,423
	t_3	147,9	1097,4	113,4	0,219	2,368
	t_4	127,1	1125,5	97,4	0,225	2,305
III приближен.	t_1	187,9	1044,8	142,3	0,209	2,481
	t_2	168,5	1069,6	129,4	0,214	2,423
	t_3	150,4	1093,2	116,6	0,219	2,368
	t_4	134,4	1114,3	104,9	0,223	2,325
IV приближен.	t_1	188,1	1044,7	142,3	0,209	2,481
	t_2	168,8	1069,5	129,2	0,214	2,423
	t_3	150,2	1093,8	115,9	0,219	2,368
	t_4	132,8	1116,9	103,0	0,223	2,325
V приближен.	t_1	188,1	1044,7	142,3	0,209	2,481
	t_2	168,7	1069,5	129,3	0,214	2,423
	t_3	150,1	1093,8	116,1	0,219	2,368
	t_4	133,1	1116,4	103,5	0,223	2,325

* Модуль упругости приведенного материала определяется формулой $E_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{ср}}}{\varepsilon_x}$, где $\sigma_{\text{ср}}$ — среднее по толщине пластинки нормальное напряжение.

§ 2. Рассмотрим случай, когда в качестве уравнений ползучести связующего материала принимаются соотношения теории линейной наследственности [4]. Тогда условия совместности деформирования стекла и связующего материала и уравнения равновесия для всего пакета пластинки в целом примут вид

$$\sigma_2 - \nu_{cb}\sigma_2 - \int_{\tau_1}^t (\sigma_2 - \nu_{cb}\sigma_2) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{E_{cb}}{E_a(1-n_y)} [\sigma_4 - \nu_a\sigma_4 - n_y(\sigma_2 - \nu_{cb}\sigma_2)],$$

$$\sigma_5 - \nu_{cb}\sigma_5 - \int_{\tau_1}^t (\sigma_5 - \nu_{cb}\sigma_5) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{E_{cb}}{E_a} (\sigma_4 - \nu_a\sigma_5), \quad (2.1)$$

$$\sigma_3 - \nu_{cb}\sigma_3 - \int_{\tau_1}^t (\sigma_3 - \nu_{cb}\sigma_3) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{E_{cb}}{E_a} (\sigma_1 - \nu_a\sigma_3),$$

$$\sigma_6 - \nu_{cb}\sigma_6 - \int_{\tau_1}^t (\sigma_6 - \nu_{cb}\sigma_6) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{E_{cb}}{E_a(1-n_x)} [\sigma_1 - \nu_a\sigma_2 - n_x(\sigma_6 - \nu_{cb}\sigma_6)];$$

$$T_1 = \delta [m\sigma_2 + n [n_x\sigma_4 + (1-n_x)\sigma_5]],$$

$$T_2 = \varepsilon [n\sigma_6 + m [n_y\sigma_1 + (1-n_y)\sigma_2]], \quad (2.2)$$

где τ_1 — возраст, $C(t, \tau)$ — мера ползучести связующего материала.

Исключая напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 и σ_4 из первого и последнего уравнений (2.1) с помощью (2.2) и второго и третьего уравнений (2.1), при этом имея в виду, что

$$\int_{\tau_1}^t \left[\int_{\tau_1}^{\tau} f(\xi) K_1(\tau, \xi) d\xi \right] K_1(t, \tau) d\tau = \int_{\tau_1}^t f(\tau) K_1(t, \tau) \left[\int_{\tau_1}^{\tau} K_1(\tau, \xi) d\xi \right] d\tau,$$

относительно напряжений σ_5 , σ_6 получим следующую систему двух линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода

$$a_1\sigma_5 + a_2\sigma_6 = f_1 + \int_{\tau_1}^t [\sigma_5 K_1(t, \tau) + \sigma_6 K_2(t, \tau)] d\tau$$

$$b_1\sigma_5 + b_2\sigma_6 = f_2 + \int_{\tau_1}^t [\sigma_5 K_3(t, \tau) + \sigma_6 K_4(t, \tau)] d\tau, \quad (2.3)$$

где введены обозначения

$$a_1 = - \frac{n(1-n_y)(E_a\nu_{cb} - E_{cb}\nu_a)}{E_a m(1-n_x)} \frac{E_a n_x + E_{cb}(1-n_x)}{E_a n_y + E_{cb}(1-n_y)} -$$

$$- \frac{E_a \nu_a n_x N + (1-n_x)(E_a m \nu_{cb} + E_{cb} n \nu_a)}{E_a m(1-n_x)},$$

$$\begin{aligned}
a_z = & \frac{1}{n(1-n^y)} \left\{ n^x n^y (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}})^2 - E_{ay^{cb}}^2 \right\} + mn^y E_a(1-n^x) + mn^y E_a + \\
& + n E_{cb} - mn^x n^y (E_a - E_{cb}) + v_a n^x n^y N (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}}) \left\{ \right. \\
b_1 = & \frac{mn^y (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}})^2}{E_a n^x + E_{cb} (1-n^x)} - \frac{E_a E_{cb} m}{E_a n^y + n [E_a n^y + E_{cb} (1-n^x)]} \cdot \\
& \frac{E_a E_{cb} m (1-n^y)}{E_a m (1-n^y) E_{cb}} \times \\
& \times \left\{ - \frac{n(1-n^y) [n^x n^y (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}})^2 - E_{ay^{cb}}^2] (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}})}{E_a n^y + E_{cb} (1-n^y)} + \right. \\
& + E_{cb} (E_{ay^{cb}} n + E_{ay^{cb}} m) + mn^x (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}}) [E_{ay^{cb}} + E_a (1-n^y)] \left. \right\}; \\
f_1 = & A_1 T_1 + A_2 T_2 + \int_0^t [T_1 K_1(t, \tau) + T_2 K_2(t, \tau)] d\tau; \\
f_2 = & B_1 T_1 + B_2 T_2 + \int_0^t [T_1 K_1(t, \tau) + T_2 K_2(t, \tau)] d\tau; \\
K_1 = & - \frac{1}{n(1-n^x)} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} [mn^x v_a + mn^y v_a (1-n^x) + mn^x v_a] - \\
& \times \left\{ - n^y (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}}) [E_a n^x + E_{cb} (1-n^x)] R(t, \tau) + \right. \\
& + \left. [E_a n^y + E_{cb} (1-n^y) + E_a n^y] \int_0^t R(\tau, \xi) d\xi \right\} \times \\
& \times \frac{m(1-n^y) [E_a n^y + E_{cb} (1-n^y)]^2}{m(1-n^y)} \\
K_2 = & \frac{1}{n(1-n^x)} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} [m(1-n^x) + v_a v_{ay^{cb}} n^x N] - \\
& \times \frac{m(1-n^y) [E_a n^y + E_{cb} (1-n^y)]^2}{m(1-n^y)} \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} [v_{ay^{cb}} E_a n^x + E_{ay^{cb}} (1-n^x) + n^x (E_{ay^{cb}} - E_{ay^{cb}}) - v_{ay^{cb}} n^x C(\tau, t)] \right\}
\end{aligned}$$

(2.5)

(2.4)

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \left[E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y) + E_a n_y \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi \right] \times \\
& \times [-2(E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) + E_a \nu_{cb} C(\tau, t)], \\
K_3 = & \left\{ -\frac{2nn_x [E_a - n_y (E_a - E_{cb})] + E_{cb} [n(1 - n_x - n_y) + m]}{mE_{cb} (1 - n_y)} + \right. \\
& + \frac{nn_y \nu_{cb} (E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) [E_a n_x + E_{cb} (1 - n_x)]}{mE_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y)]} \Big\} \times \\
& \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{nn_x E_a}{mE_{cb}} C(\tau, t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} + \\
& + \frac{nn_y [E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a - E_a \nu_{cb} C(\tau, t)]}{mE_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y)]^2} \times \\
& \times \left\{ -n_y (E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) [E_a n_x + E_{cb} (1 - n_x)] R(t, \tau) + \right. \\
& + [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y) + E_a n_y \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi] \times \\
& \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} [E_a n_x \nu_{cb} + E_{cb} \nu_{cb} (1 - n_x) + n_x (E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) - \\
& - E_a \nu_{cb} n_x C(\tau, t)] \Big\}, \\
K_4 = & \left\{ \frac{nn_x (1 - n_y) (2E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) + E_{cb} \nu_{cb} (m + nn_x n_y)}{mE_{cb} (1 - n_y)} - \right. \\
& - \frac{n \nu_{cb} [(E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a)^2 n_x n_y - E_{cb}^2]}{mE_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y)]} \Big\} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} - \\
& - \frac{nn_x E_a \nu_{cb}}{mE_{cb}} C(\tau, t) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{nn_y [E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a - E_a \nu_{cb} C(\tau, t)]}{mE_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y)]^2} \times \\
& \times \left\{ [n_x n_y (E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a)^2 - E_{cb}^2] R(t, \tau) + n_x \nu_{cb} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \times \right. \\
& \times \left[E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y) + E_a n_y \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi \right] \times \\
& \times [-2(E_a \nu_{cb} - E_{cb} \nu_a) + E_a \nu_{cb} C(\tau, t)] \Big\}, \\
A_1 = & \frac{E_{cb} [n_y (\nu_{cb} - \nu_a) - \nu_{cb}]}{\delta m (1 - n_x) [E_a n_y + E_{cb} (1 - n_y)]}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{E_{cb}}{\partial m (1-n_x) [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)]}, \\
B_1 &= \frac{1}{E_a \partial m} \left[\frac{n_y (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a)^2}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} - \frac{E_a (1-n_y) + E_{cb} n_y}{1-n_y} \right], \\
B_2 &= \frac{E_{cb}}{E_a \partial m} \left[\frac{\gamma_a}{1-n_y} + \frac{E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} \right], \\
K_5 &= \frac{E_{cb} (1-n_y)}{\partial m (1-n_x) [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)]^2} \left\{ [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y) + \right. \\
&\quad \left. + E_a n_y \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi \right] \gamma_{cb} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} - n_y (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a) R(t, \tau) \Big\}, \\
K_6 &= - \frac{E_{cb}^2 (1-n_y)}{\partial m (1-n_x) [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)]^2} R(t, \tau), \\
K_7 &= \frac{1}{\partial m E_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)]} \left\{ E_{cb} [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y) - \right. \\
&\quad \left. - 2n_y \gamma_{cb} (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{E_{cb} n_y^2 (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a)^2}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} R(t, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{E_a E_{cb} \gamma_{cb} n_y^2 (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a)}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi + E_a E_{cb}^2 \gamma_{cb}^2 n_y \times \right. \\
&\quad \times \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} C(\tau, t) - \frac{E_a E_{cb} n_y^2 \gamma_{cb} (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a) R(t, \tau) C(\tau, t)}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} + \\
&\quad \left. + \frac{E_a^2 E_{cb} n_y^2 \gamma_{cb}^2}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} C(\tau, t) \int_{\tau}^t R(\tau, \xi) d\xi \right\}, \\
K_8 &= \frac{1}{\partial m [E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)]} \left\{ E_{cb} n_y (E_a \gamma_{cb} - E_{cb} \gamma_a) R(t, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - E_{cb} \gamma_{cb} \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} - \frac{E_a E_{cb} n_y \gamma_{cb}}{E_a n_y + E_{cb} (1-n_y)} R(t, \tau) C(\tau, t) \right\} \\
&\quad \left(R(t, \tau) - \text{резольвента ядра } \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau}, \text{ то есть ядра релаксации} \right)
\end{aligned}$$

Разрешая систему (2.3), для напряжений σ_5, σ_6 получим

$$\begin{aligned}
\sigma_5 &= \frac{b_2}{D} f_1 - \frac{a_2}{D} f_2 + \int_{\tau_1}^t [f_1 K_9(t, \tau) + f_2 K_{10}(t, \tau)] d\tau, \\
\sigma_6 &= - \frac{b_1}{D} f_1 + \frac{a_1}{D} f_2 + \int_{\tau_1}^t [f_1 K_{11}(t, \tau) + f_2 K_{12}(t, \tau)] d\tau,
\end{aligned}$$

где

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

$$K_9 = \frac{D b_2 R_{13} - b_1 (b_2 K_2 - a_2 K_4)}{D^2} +$$

$$+ \frac{1}{D^2} \int_{\tau_1}^t (b_2 K_2 - a_2 K_4) \left[D K_{11} \left(1 + \int_{\xi}^{\tau} R_{13}(\xi, \eta) d\eta \right) - b_1 R_{13} \right] d\xi,$$

$$K_{10} = \frac{a_1 (b_2 K_2 - a_2 K_4) - D a_2 R_{13}}{D^2} +$$

$$+ \frac{1}{D^2} \int_{\tau_1}^t (b_2 K_2 - a_2 K_4) \left[D K_{12} \left(1 + \int_{\xi}^{\tau} R_{13}(\xi, \eta) d\eta \right) + a_1 R_{13} \right] d\xi, \quad (2.10)$$

$$K_{11} = \frac{b_2 K_1 - a_1 b_2 R_{13}}{a_2 D} - \frac{b_1 R_{14}}{D} +$$

$$+ \frac{b_2}{a_2 D} \int_{\tau_1}^t \left\{ K_1 \left[R_{14} + R_{13} \left(1 + \int_{\xi}^{\tau} R_{14}(\xi, \eta) d\eta \right) \right] - a_1 R_{13} R_{14} \right\} d\xi,$$

$$K_{12} = \frac{a_1 R_{13} - K_1 + a_1 R_{14}}{D} -$$

$$- \frac{1}{D} \int_{\tau_1}^t \left\{ K_1 \left[R_{13} + R_{13} \left(1 + \int_{\xi}^{\tau} R_{14}(\xi, \eta) d\eta \right) \right] - a_1 R_{13} R_{14} \right\} d\xi,$$

$$K_{13} = \frac{b_2 K_1 - a_2 K_3}{D}, \quad (2.11)$$

$$K_{14} = \frac{1}{a_2} \left[K_2 - \frac{b_2 K_2 - a_2 K_4}{D} \left(1 + \int_{\tau_1}^t R_{13}(\tau, \xi) d\xi \right) \left(a_1 - \int_{\tau_1}^t K_1(\tau, \xi) d\xi \right) \right] -$$

Через R_i обозначена резольвента ядра K_i .

С помощью третьего уравнения (1.3) для напряжения σ_4 в нашем случае получим

$$\sigma_4 = \frac{E_a}{E_{cs}} \sigma_5 - \frac{E_a \gamma_{cs} - E_{cs} \gamma_a}{E_{cs}} \sigma_6 - \frac{E_a}{E_{cs}} \int_{\tau_1}^t (\sigma_5 - \sigma_6 \gamma_{cs}) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.12)$$

Нетрудно заметить, что для напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 справедливы следующие выражения:

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_4, \quad \sigma_2 = \bar{\sigma}_5, \quad \sigma_3 = \bar{\sigma}_6. \quad (2.13)$$

Для средних значений полных деформаций ε_x и ε_y с учетом (2.9), (2.13) и (2.5) из (1.3) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= A_{11}T_1 + A_{12}T_2 + \int_{\tau_1}^t (T_1 K_{17} + T_2 K_{18}) d\tau, \\ \varepsilon_y &= A_{21}T_1 + A_{22}T_2 + \int_{\tau_1}^t (T_1 K_{19} + T_2 K_{20}) d\tau,\end{aligned}\quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= \frac{1}{DE_{cu}} [A_1(b_2 + \nu_{cu}b_1) - B_1(a_2 + \nu_{cu}a_1)], \\ A_{12} &= \frac{1}{DE_{cu}} [A_2(b_2 + \nu_{cu}b_1) - B_2(a_2 + \nu_{cu}a_1)], \\ K_{17} &= \frac{b_2 + \nu_{cu}b_1}{DE_{cu}} K_5 - \frac{a_2 + \nu_{cu}a_1}{DE_{cu}} K_7 + A_1 K_{15} + B_1 K_{16} + \\ &+ \int_{\tau_1}^t [K_5(t, \tau) K_{15}(\tau, \xi) + K_7(t, \tau) K_{16}(\tau, \xi)] d\tau, \\ K_{18} &= \frac{b_2 + \nu_{cu}b_1}{DE_{cu}} K_6 - \frac{a_2 + \nu_{cu}a_1}{DE_{cu}} K_8 + A_2 K_{15} + B_2 K_{16} + \\ &+ \int_{\tau_1}^t [K_6(t, \tau) K_{15}(\tau, \xi) + K_8(t, \tau) K_{16}(\tau, \xi)] d\tau, \\ A_{21} &= \bar{A}_{12}, \quad A_{22} = \bar{A}_{11}, \quad K_{19} = \bar{K}_{18}, \quad K_{20} = \bar{K}_{17}, \\ K_{15} &= \frac{1}{DE_{cu}} \left\{ D[1 - C(\tau, t)] [K_9(t, \tau) - \nu_{cu} K_{14}(t, \tau)] - (b_2 + \nu_{cu}b_1) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}, \\ K_{16} &= \frac{1}{DE_{cu}} \left\{ D[1 - C(\tau, t)] [K_{10}(t, \tau) - \nu_{cu} K_{12}(t, \tau)] + \right. \\ &\quad \left. + (a_2 + \nu_{cu}a_1) \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} \right\}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Уравнения (2.14) и уравнения ортотропной линейной наследственности [1]

$$\varepsilon_x = E_1^{-1} (T_1 - \nu_1^* T_2), \quad \varepsilon_y = E_2^{-1} (T_2 - \nu_2^* T_1), \quad (2.17)$$

где E_i и ν_i^* — операторы вида

$$Ef(t) = E^0 f(t) - E^0 \int_{\tau_1}^t E(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.18)$$

эквивалентны. В самом деле, из (2.17) с учетом (2.18) имеем

$$\varepsilon_x = \frac{T_1}{E_1} - \frac{\nu_1^* T_2}{E_1} + \frac{1}{E_1} \int_{\tau_1}^t H_1(t, \tau) T_1(\tau) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\gamma_1}{E_1} \int_0^t \left[\left(1 + \int_0^\tau H_1(\tau, \xi) d\xi \right) \gamma_1(t, \tau) - H_1(t, \tau) \right] T_2(\tau) d\tau, \\
\epsilon_y = & - \frac{\gamma_2 T_1}{E_2} + \frac{T_2}{E_2} + \frac{1}{E_2} \int_0^t H_2(t, \tau) T_2(\tau) d\tau + \\
& + \frac{\gamma_2}{E_2} \int_0^t \left[\left(1 + \int_0^\tau H_2(\tau, \xi) d\xi \right) \gamma_2(t, \tau) - H_2(t, \tau) \right] T_1(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Здесь $H_1(t, \tau)$ и $H_2(t, \tau)$ — резольвенты ядер $E_1(t, \tau)$ и $E_2(t, \tau)$.

Обозначая

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_1} = A_{11}, \quad -\frac{\gamma_1}{E_1} = A_{12}, \quad \frac{H_1(t, \tau)}{E_1} = K_{11}, \\
\frac{\gamma_1}{E_1} \left[\left(1 + \int_0^\tau H_1(\tau, \xi) d\xi \right) \gamma_1(t, \tau) - H_1(t, \tau) \right] = K_{12}, \\
-\frac{\gamma_2}{E_2} = A_{21}, \quad \frac{\gamma_2}{E_2} = A_{22}, \quad \frac{H_2(t, \tau)}{E_2} = K_{20}, \\
\frac{\gamma_2}{E_2} \left[\left(1 + \int_0^\tau H_2(\tau, \xi) d\xi \right) \gamma_2(t, \tau) - H_2(t, \tau) \right] = K_{21},
\end{aligned}$$

из (2.17) получим уравнения (2.14).

Таким образом, расчеты полосы из стеклопластика на двухосное растяжение сводились к расчетам полосы из некоторого приведенного ортотропного материала, для которого соотношения между деформациями и усилиями имеют вид (2.17). Тем самым оправдывается предположение, принятое в работе [1], об использовании соотношений анизотропной наследственной линейной ползучести для описания ползучести армированных пластиков.

§ 3. Рассмотрим оболочку вращения, изготовленную из листа стеклопласта постоянной толщины $h = \delta(m + n) = \delta N$, m рядов которой армированы по направлению образующих, а n — по параллели срединной поверхности оболочки. Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности оболочки будем определять меридиональной дугой s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$. Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок, один конец ее ($s = s_0$) зашкреплен (в безмоментном смысле), а другой конец ($s = l$) растягивается (сжимается) по направлению меридиана на величину $u = u_0(t)$.

Для тангенциальных усилий и перемещений оболочки имеем [7]

$$T_1(s, t) = \frac{F(t)}{r_2 \cos^2 \theta}, \quad T_2(s, t) = -\frac{F(t)}{r_1 \cos^2 \theta}. \quad (3.1)$$

$$u(s, t) = \cos \vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos \vartheta} \left(\varepsilon_1 - \frac{r_2}{r_1} \varepsilon_2 \right) ds, \quad w(s, t) = r_1 \varepsilon_1 - r_1 \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (3.2)$$

где $F(t)$ — неизвестная функция интегрирования, $r_1(s)$ и $r_2(s)$ — радиусы кривизны, ϑ — угол между касательной к меридиану и осью вращения срединной поверхности оболочки.

Удовлетворяя краевому условию $u(l, t) = u_0(t)$, с учетом (2.14), (2.15), (2.5) и (3.1), относительно функции $F(t)$ получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$F(t) = \frac{u_0(t)}{M_1 \cos \vartheta_1} - \int_{\tau_1}^t K_{21}(t, \tau) F(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

где

$$\vartheta_1 = \vartheta(l) \neq \frac{\pi}{2},$$

$$M_1 = \int_0^l \frac{1}{r_1 \cos \vartheta} (M_2 - r_2 \bar{M}_2) ds,$$

$$M_2 = \frac{1}{DE_{cn} \cos^2 \vartheta} \left[\frac{A_1(b_2 + \nu_{cn} b_1) - B_1(a_2 + \nu_{cn} a_1)}{r_2} + \right. \\ \left. + \frac{B_2(a_2 + \nu_{cn} a_1) - A_2(b_2 + \nu_{cn} b_1)}{r_1} \right],$$

$$K_{21}(t, \tau) = \frac{1}{M_1} \int_0^l \frac{1}{r_1 \cos \vartheta} [r_1 \Phi(s, t, \tau) - r_2 \bar{\Phi}(s, t, \tau)] ds,$$

$$\Phi(s, t, \tau) = \frac{1}{r_1 r_2 \cos^2 \vartheta} \left\{ [r_1 K_5(t, \tau) - r_2 K_6(t, \tau)] \left[\frac{b_2 + \nu_{cn} b_1}{DE_{cn}} + \right. \right. \quad (3.4)$$

$$\left. + \int_{\tau}^t K_{15}(\tau, \xi) d\xi \right] - [r_1 K_7(t, \tau) - r_2 K_8(t, \tau)] \left[\frac{a_2 + \nu_{cn} a_1}{DE_{cn}} - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau}^t K_{16}(\tau, \xi) d\xi \right] + (A_1 r_1 - A_2 r_2) K_{15}(t, \tau) + (B_1 r_1 - B_2 r_2) K_{16}(t, \tau) \}.$$

Решая уравнение (2.3), получим

$$F(t) = \frac{1}{M_1 \cos \vartheta_1} \left[u_0(t) - \int_{\tau_1}^t R_{21}(t, \tau) u_0(\tau) d\tau \right].$$

В случае, когда

$$u_0(t) = u_0^* = \text{const},$$

получится задача о релаксации напряжений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 V 1964

Н. В. ГИРЯНОВСКИЙ

ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻ ԵՐԿԱՌԱՆՅՔԻ ԶԳՎՈՂ ՇՆՔՏԻ ՍՈՂՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է ապակեպլաստի դեֆորմացիաների որոշման և նրա առանձին շերտերի ապակու և կապակցող նյութի միջև լարումների վերաբաշխման խնդիրը, երբ ապակեպլաստի շերտը ենթարկվում է երկառանգք ձգման (կամ սեղմման): Ընդունվում է, որ ապակին մաքուր առանցքային է, իսկ կապակցող նյութը օժտված է սողքի զգալի հատկություններով: Ընդհանուր դեպքում հիմնական հավասարումներն ստանալուց հետո ուսումնասիրությունները շարունակվում են ըստ սողքի զմային ժառանգականության տեսության [4]: Ցույց է տրվում, որ ապակեպլաստի սողքը կարելի է նկարագրել օրթոռոպ զմային ժառանգականության հավասարումներով, որի առանցքային հաստատունները և սողքի չափերը աշտահայտվում են ապակեպլաստի բաղադրիչների առանցքային հաստատունների և կապակցող նյութի սողքի չափի միջոցով: Դրանով իսկ տեսականորեն հիմնավորվում է [1] աշխատության մեջ կատարած ընդունելությունը, համաձայն որի ապակեպլաստները կարելի է դիտել որպես զմայնորեն սողքի ենթարկող անկողնորոպ մարմիններ:

Օգտվելով դեֆորմացիաների համար ստացած արտահայտություններից, թաղանթների անժամկետ տեսության հիման վրա արվում է պատման թաղանթների առանցքախիմերիկ սողքի և լարումների սկզբնական խնդիր լուծումը: Բերվում է թվային ցուցադրական օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Брызгалов Г. И. К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. ПМТФ, № 4, 1963.
2. Малинин Н. И. Ползучесть армированного слоя при двухосном растяжении. ПМТФ, № 6, 1962.
3. Огибалов П. М., Биккенина Ю. В. О расчете прочности армированных пластинок. Вестник МГУ, «матем., механ.», № 3, 1962.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 12, № 1, 1948.
5. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения уравнений. Физматгиз, М., 1960.
6. Фандли Б. Ползучесть и релаксация напряжений в пластиках. Сб. «Пробл. высоких температур в авиационных конструкциях». ИЛ, М., 1961, 207—232.
7. Каракосян Р. М. Релаксационная задача безмоментных оболочек вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 3, 1962.

С. Р. МЕСЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ МГНОВЕННЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ СДВИГЕ

Деформация материала, обладающего свойством ползучести, как известно, разбивается на мгновенную деформацию и на деформацию ползучести. Поэтому, при исследовании закономерностей деформирования грунтов, указанные деформации также рассматриваются отдельно, хотя они между собой тесно связаны и представляют этапы одного общего процесса.

Изучение закономерностей мгновенных деформаций при сдвиге, как и при сжатии [1], имеет важное значение для определения зависимости напряжение—мгновенная деформация, модуля мгновенной деформации $G_{\text{мгн}}$, его изменяемости вследствие уплотнения грунта под воздействием уплотняющих нагрузок, а также для выделения ползучести из полных деформаций.

В теории упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [2, 3] в числе других предпосылок принято также, что зависимость *напряжение—мгновенная деформация является линейной*, а модуль мгновенной деформации $G_{\text{мгн}}$ является переменной величиной, зависящей от состояния (плотности—влажности, структурной прочности) грунта в момент его испытания. С целью обоснования применимости указанной теории к глинистым грунтам выполнена настоящая работа по изучению закономерностей их мгновенных деформаций при сдвиге.

При изучении закономерностей мгновенных деформаций сдвига, в частности, зависимости касательное напряжение (q)—мгновенная деформация ($\gamma_{\text{мгн}}$) и изменяемости модуля мгновенной деформации $G_{\text{мгн}}$ вследствие изменения состояния грунта мы исходили из тех основных положений, которые достаточно подробно были изложены в наших работах [1, 4]. Поэтому, чтобы не повторяться, мы здесь не будем останавливаться на рассмотренных в указанных работах общих вопросах. Что же касается методики исследования и связанных со спецификой испытания грунтов на сдвиг вопросов, то они будут рассмотрены по ходу изложения результатов экспериментальных исследований.

Изучение закономерностей мгновенных деформаций сдвига проводилось на приборах одноплоскостного среза и кольцевого сдвига [17]

Опыты, проведенные на приборах одноплоскостного среза, носили методический характер и преследовали цель выяснить качественную сторону вопроса.

Опыты проводились на образцах нарушенной структуры, изготовленных из грунтовой пасты, обладающей влажностью, равной пределу текучести. В приборах одноплоскостного среза подвергались испытанию образцы высотой $h = 15$ и 35 мм, а в приборах кольцевого сдвига $h = 24$ мм. При испытании образца высотой $h = 15$ мм в приборах одноплоскостного среза обеспечивалось более равномерное распределение касательных напряжений (Э. В. Костерин, 1957). Испытание в кольцевых приборах образцов высотой 24 мм сильно упрощало измерение деформации сдвига. В этом случае перекашивание происходило по всей высоте образца, а базой измерения деформации являлась его высота в момент приложения касательного напряжения.

Испытание образцов в приборах обеих конструкций проводилось в условиях сложного напряженного состояния при действии как нормальных, так и касательных напряжений. Порядок приложения нагрузок был различным. В одном случае касательные напряжения прикладывались к образцу после завершения его уплотнения от действия нормального напряжения, а в другом—при незавершенном его уплотнении.

Ниже приводятся результаты изучения зависимости касательное напряжение q —мгновенная деформация сдвига $\gamma_{\text{мгн}}$ и влияния состояния грунта на указанную зависимость.

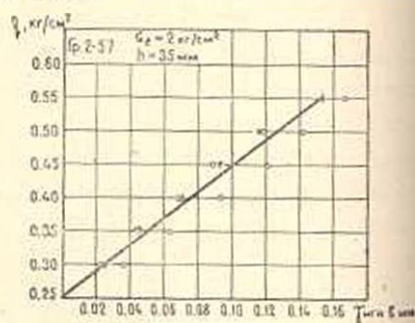
§ 1. *Изучение зависимости касательное напряжение q —мгновенная деформация сдвига $\gamma_{\text{мгн}}$.* В отличие от методики определения зависимости напряжение—мгновенная деформация сжатия, изложенной в работах [1, 4], мгновенная деформация сдвига определялась последовательным приложением к образцу ступеней касательных напряжений равной величины через определенные (равные и неравные) интервалы времени. Мгновенные деформации фиксировались в момент приложения ступеней нагрузок. Величина мгновенной деформации, соответствующая какому-либо фиксированному значению касательного напряжения, определялась как сумма мгновенных деформаций от всех приложенных ступеней нагрузок.

Для определения рассматриваемой здесь зависимости одновременно испытывались по 10—12 образцов-близнецов при величине ступеней нагрузок $q = 0.025$ — 0.1 кг/см². В ряде случаев применялись также ступени нагрузки больше 0.1 кг/см². Во избежание ошибок, которые обычно проявляются в начале эксперимента по тем или иным причинам, начальные участки кривых $q - \gamma_{\text{мгн}}$ (в пределах $q = 0.1$ — 0.25 кг/см²) исключались из рассмотрения. В ряде случаев, с той же целью, испытывались образцы, подвергнутые предварительному сдвигу напряжениями указанного выше порядка.

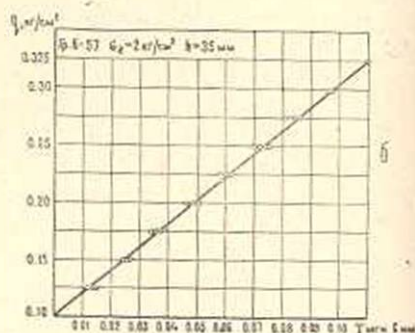
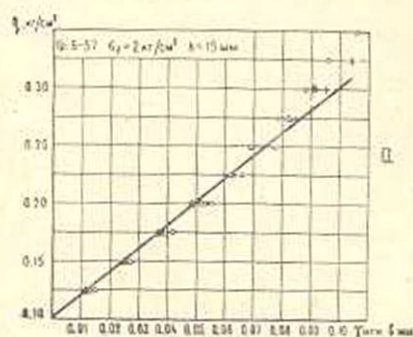
На основании многочисленных опытов (больше 200) установлено,

что связь между касательными напряжениями и мгновенными деформациями сдвига для какого-либо фиксированного состояния грунта в пределах рассмотренных (сравнительно небольших) напряжений и деформаций выражается линейным законом.

На графиках фиг. 1 и 2 приведено несколько кривых зависимости $q - \gamma_{\text{мгн}}$, полученных испытанием образцов суглинка и часов-ярской глины (табл. 1) на приборах одноплоскостного среза, при приложении ступеней касательных напряжений с интервалом 10 мин. Перед испытанием образцы-близнецы были подвергнуты предварительному уплотнению нормальным к плоскости среза напряжением $\sigma_z = 2 \text{ кг/см}^2$ в течение 15—30 дней. За это время уплотнение грунта от действия σ_z практически заканчивалось.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Таблица 1

Лаборат. № грунта	Удельный вес г/см³	Пределы пластичности		
		Предел текучести	Предел пла- стичности	Число пла- стичности
2-57	2,66	31,30	18,60	12,70
6-57	2,65	59,07	21,20	37,87
4-57	2,70	41,20	23,20	18,00
9-63	2,68	42,40	24,40	18,00

Из приведенных графиков следует, что равным ступеням напряжений соответствуют равные величины мгновенных деформаций. Следовательно, за период выполнения опытов физико-механические свойства образцов не подвергались изменениям. Из графика фиг. 2 вытекает также другой важный вывод, согласно которому величина мгновенной деформации сдвига, а это значит, что и модуль мгновен-

ной деформации $G_{\text{мгн}}$, не зависит от высоты испытанных образцов. Из этого следует, что зоны сдвига образцов $h = 15$ и 35 мм, испытанных в приборах одноплоскостного среза, имеют одинаковую величину.

Выполненные по изложенной выше методике на приборах кольцевого сдвига испытания образцов глины 4–57 (табл. 1) показали, что при больших напряжениях (вплоть, до величины предельного сопротивления сдвигу) и деформациях зависимость $q - \gamma_{\text{мгн}}$ нелинейна, но ее можно аппроксимировать ломаной линией, прямолинейные участки которой имеют разные углы наклона к оси абсцисс (деформаций).

Как и в случае сжатия [5], эти опыты свидетельствуют (фиг. 3) о наличии двух областей деформирования с двумя разными мгновенными модулями сдвига G_1 и G_2 . Напряжение, соответствующее точке

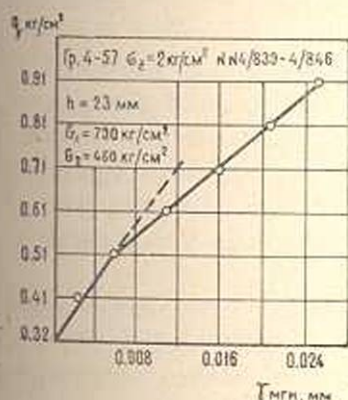
пересечения указанных прямых, является *пределом структурной прочности грунта*. Переход мгновенных деформаций из одной области деформирования в другую обусловлен разрушением начальной структуры грунта и его переходом в новое состояние.

Примечательным является то обстоятельство, что во второй области деформирования зависимость $q - \gamma_{\text{мгн}}$ остается линейной вплоть до момента разрушения грунта.

Указанное изменение модулей

мгновенных деформаций сдвига и перелом кривой $q - \gamma_{\text{мгн}}$ вызваны постепенным, медленным ростом касательных напряжений (длительность загрузки до величины предельного сопротивления сдвигу равнялась около 5 часов). Если, как в случае сжатия, опыты проводились бы по методике параллельного испытания образцов-близнецов напряжениями различной величины, с практически мгновенным их приложением, возможность разрушения структуры грунта была бы исключена, а зависимость $q - \gamma_{\text{мгн}}$ выражалась бы одной прямой. Поэтому модуль мгновенной деформации $G_{\text{мгн}}$, соответствующий состоянию грунта в момент его испытания, должен определяться по отрезку кривой $q - \gamma_{\text{мгн}}$ первой области деформирования (для гр. 4–57 при $\sigma_z = 2 \text{ кг/см}^2$, $G_1 = 730 \text{ кг/см}^2$, фиг. 3).

Сопоставление мгновенного модуля сдвига $G_1 = 730 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 3) с модулем сдвига $G_{\text{мгн}} = 710 \text{ кг/см}^2$ того же грунта, определенного от компрессионного модуля мгновенной деформации $E_k = 2500 \text{ кг/см}^2$ при $\mu = 0.3$, показывает их хорошее совпадение. Это значит, что, зная мгновенный компрессионный модуль сжатия и коэффициент Пуассона μ , можно определить как E , так и мгновенный модуль сдвига $G_{\text{мгн}}$. Точно также, зная $G_{\text{мгн}}$ и μ , можно определить как E , так и E_k .



Фиг. 3.

§ 2. Влияние состояния грунта на зависимость $q - \gamma_{\text{мгн}}$ и на изменяемость модуля мгновенной деформации сдвига $G_{\text{мгн}}$. При испытании грунта в условиях сложного напряженного состояния, когда на образец одновременно действуют касательные и нормальные напряжения, нарастание последнего приводит к уплотнению грунта и изменению его физико-механических свойств — к изменению его состояния. Вместе с изменением состояния грунта изменяются также его деформативные свойства, в частности, мгновенные деформации сжатия $\epsilon_{\text{мгн}}$ и сдвига $\gamma_{\text{мгн}}$.

Как и в случае сжатия, изучение изменяемости мгновенной деформации сдвига в зависимости от состояния (плотности-влажности, структурной прочности и т. д.) грунта в моменты приложения ступеней касательных напряжений, сводится к определению зависимости напряжение — мгновенная деформация сдвига в различных его состояниях. Поскольку плотность — влажность и структурная прочность (состояние) грунта определяются величиной нормального напряжения и продолжительностью его действия, учет влияния состояния грунта на мгновенные деформации сдвига можно будет выразить через величину σ_z . А это значит, что для указанной цели надо испытать несколько серий образцов-близнецов, предварительно уплотненных под различными нормальными напряжениями.

Влияние состояния грунта на мгновенные деформации сдвига можно учесть также испытанием одного образца последовательным приложением ступеней касательного и нормального напряжения.

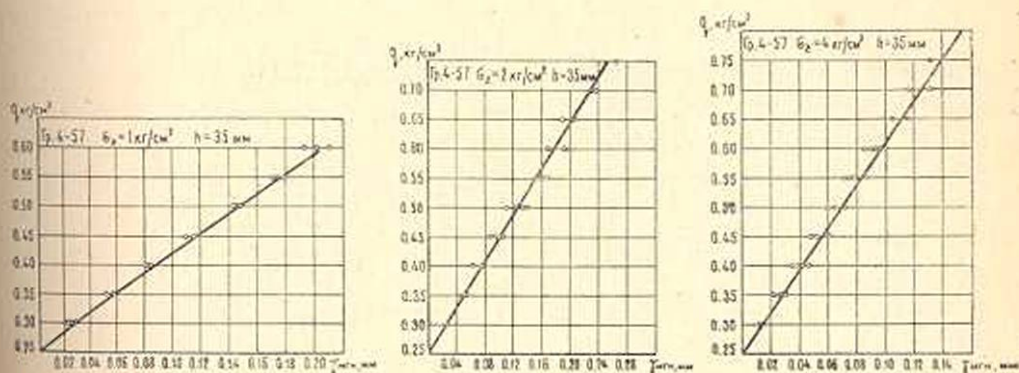
Познакомимся для примера с результатами [6] определения (на приборах одноплоскостного среза) зависимости $q - \gamma_{\text{мгн}}$ в трех различных состояниях глины 4—57. Указанные состояния грунта были достигнуты предварительным месячным уплотнением трех серий образцов-близнецов под нормальными напряжениями $\sigma_z = 1.2$ и 4 кг/см^2 . Как и ранее, образцы готовились из пасты, обладающей влажностью, равной пределу текучести грунта.

В рассматриваемом случае, зависимости между касательными напряжениями q и мгновенными деформациями сдвига $\gamma_{\text{мгн}}$ (фиг. 4), в каждом состоянии грунта, определялись испытанием образцов-близнецов при ступенчатом нарастании ступеней нагрузок ($q = 0.05 \text{ кг/см}^2$) с интервалом 10 минут. Мгновенные деформации фиксировались в моменты приложения ступеней нагрузок. Причем, для устранения влияния прибора на результаты опытов, которое проявляется при первых ступенях нагрузок, деформации мгновенных деформаций, соответствующие $q = 0.25 \text{ кг/см}^2$, исключались из рассмотрения.

Опыты показывают, что, как и в предыдущем случае, зависимость $q - \gamma_{\text{мгн}}$ при деформациях сдвига $\gamma < 2 \text{ м.м.}$, независимо от состояния грунта в начале испытания, выражается линейным законом. Причем, из графиков, приведенных на фиг. 4, ясно видно влияние состояния, то есть σ_z , на величины мгновенных деформаций.

При испытании образцов грунта в приборах одноплоскостного

среза Н. Н. Маслова—Ю. Ю. Лурье, нельзя достаточно точно определить влияние нормального напряжения на мгновенный модуль сдвига $G_{\text{мгн}}$, поскольку мы не знаем величины зоны сдвига испытанных образцов. Однако, если даже приближенно принять, что величина зоны сдвига (независимо от состояния грунта) равна одной трети высоты [7], то есть $\approx 10 \text{ мм}$, то можно будет получить некоторое представление об



Фиг. 4.

изменяемости $G_{\text{мгн}}$ в зависимости от величины σ_z (табл. 2).

Хотя приведенные в табл. 2 величины $G_{\text{мгн}}$ далеки от их истинных значений, однако они довольно точно отражают качественную сторону явления и подтверждают тот общезвестный факт, что уплотнение грунта приводит к уменьшению его деформаций сжатия и сдвига.

Таблица 2

Величина нормального напряжения $\sigma_z \text{ кг/см}^2$	1.0	2.0	4.0
Мгновенный модуль сдвига $G_{\text{мгн}} \text{ кг/см}^2$	17.5	19.4	35.0

Теперь познакомимся с результатами аналогичных опытов, выполненных на приборах кольцевого сдвига (фиг. 5).

Проведены три серии опытов на переуплотненных образцах нарушенной структуры глины 9-63 (табл. 1). Серии образцов-близнецов в начале были уплотнены напряжениями $\sigma_z = 2,3$ и 5 кг/см^2 , а затем разгружены до $\sigma_z = 1.2$ и 4 кг/см^2 соответственно и испытаны на сдвиг под этими же напряжениями. Длительность предварительного уплотнения 14-45 дней.

Касательные напряжения наращивались ступенями по $q = 0.05 - 0.1 \text{ кг/см}^2$ через различные интервалы времени. Последующая ступень касательного напряжения прикладывалась к образцу после условной стабилизации деформации сдвига (под условной стабилизацией деформации сдвига понимается скорость сдвига 0.01 мм за 2 минуты). Общая продолжительность загрузки, вплоть до разрушения образца, равнялась 4-5 часам. Деформации измерялись двухмикронными индикаторами часового типа, а для определения относительной дефор-

мации сдвига после опыта измерялись высоты образцов. Поскольку деформации сдвига измерялись по наружной окружности образца r_2 , напряжения сдвига определялись по зависимости (1) [8], при $\rho = r_2$:

$$q_p = \frac{2M_{kp}}{\pi(r_2^4 - r_1^4)} \rho, \quad (1)$$

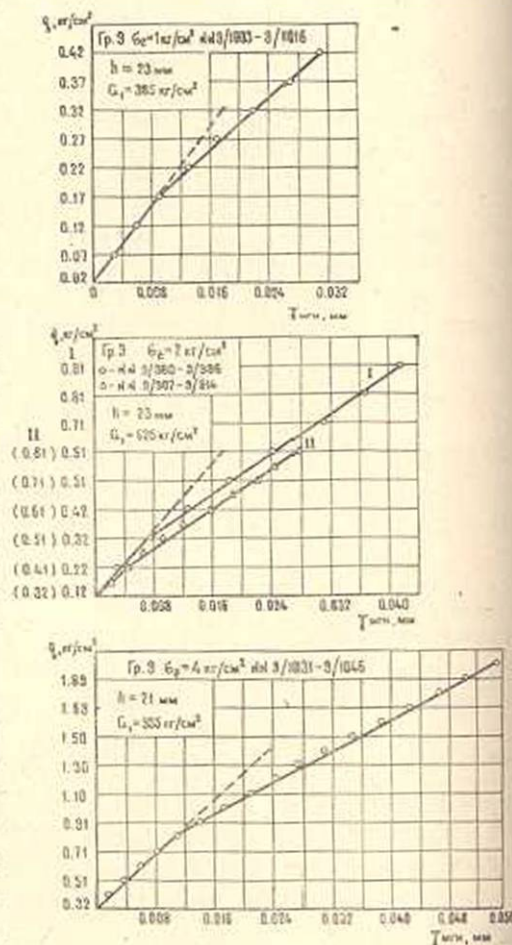
где M_{kp} , r_2 и r_1 — крутящий момент, наружный и внутренний радиусы образца.

При больших интервалах изменения касательных напряжений, кривые $q - \gamma_{\text{мгн}}$ аппроксимировались двумя прямыми.

При этом опыты показывают, что чем больше σ_z , то есть плотность и структурная прочность грунта в момент испытания, тем выше предел его структурной прочности. Величина указанного предела связана также со скоростью нарастания и величиной ступени касательного напряжения. С увеличением скорости приложения или уменьшением интервала между ступенями напряжений предел структурной прочности сдвига возрастает.

Сопоставление модулей мгновенных деформаций сдвига первых областей деформирования указанных трех состояний образцов грунта 9—63 показывает (табл. 3), что как и в случае сжатия, исключительно велико влияние состояния (плотности, влажности, структурной прочности и т. д.), то есть нормального напряжения σ_z и длительности его действия, на деформации сдвига грунта. Оно говорит о том, что при изучении закономерностей как мгновенных деформаций, так и деформации ползучести сдвига нельзя с этим фактором не считаться [6].

Наряду с тем, что приведенные в табл. 2 и 3 результаты опытов показывают один и тот же характер изменяемости мгновенного модуля сдвига $G_{\text{мгн}}$ с увеличением σ_z , они свидетельствуют также об исключительно большом различии между результатами, полученными



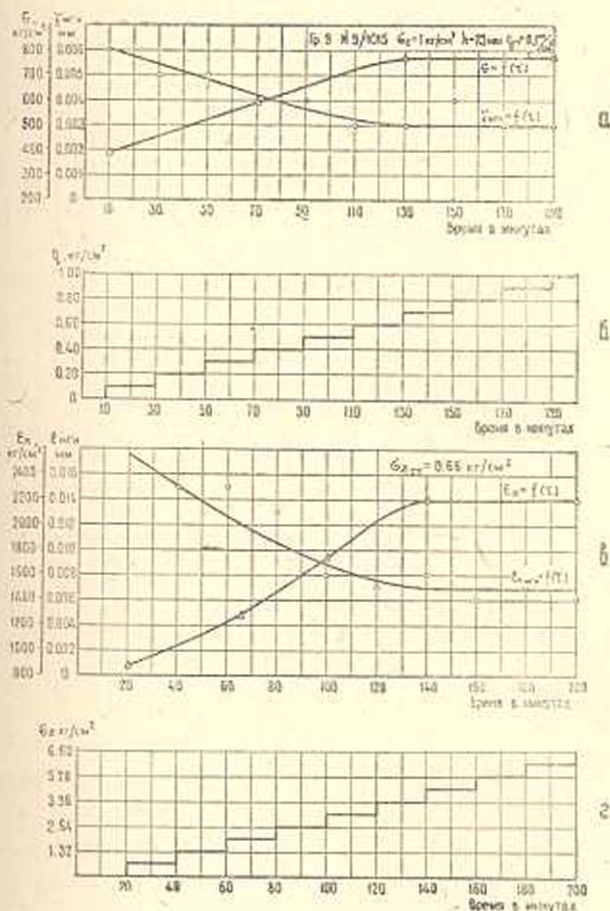
Фиг. 5.

испытанием образцов в приборах одноплоскостного среза и кольцевого сдвига. Это явление можно объяснить только влиянием конструкции прибора одноплоскостного среза, которое в основном обусловлено обжатием образца в его обойме [9,10]. Следовательно, предлагаемая Э. В. Костериным [11] методика испытания грунтов на сдвиг не исключает влияния способа приложения касательных напряжений на результаты опытов.

Для изучения характера изменчивости $\gamma_{\text{мгн}}$ и $G_{\text{мгн}}$ в зависимости от состояния грунта в моменты приложения касательных напряжений можно воспользоваться также испытанием одного образца

Таблица 3

Величина нормального напряжения σ_z , кг/см ²	1.0	2.0	4.0
Мгновенный модуль сдвига G_z , кг/см ²	385	625	935

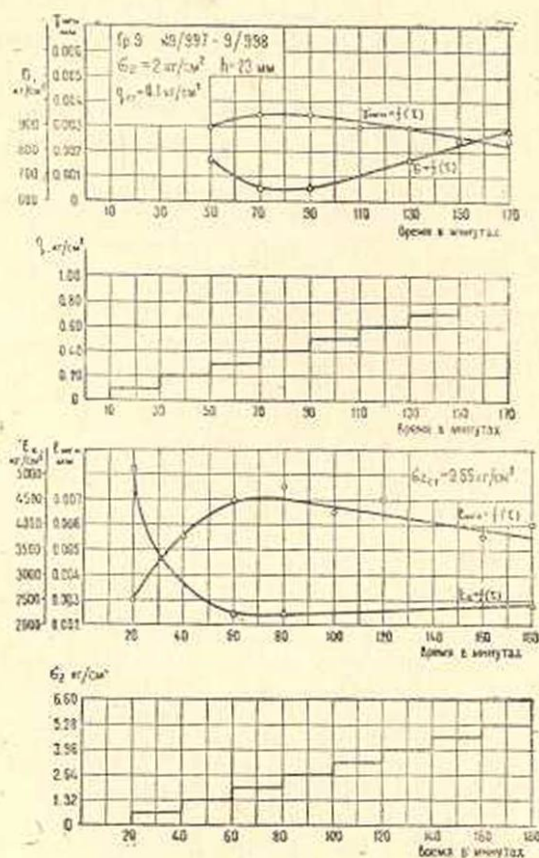


Фиг. 6.

при условии последовательного приложения ступеней касательных $\Delta\tau$ и нормальных $\Delta\sigma_z$ напряжений через определенные интервалы времени.

На графиках фиг. 6а и 7а приведены два примера изучения изменчивости $\gamma_{\text{мгн}}$ и $G_{\text{мгн}}$ в зависимости от состояния грунта в моменты

приложения ступеней касательных напряжений Δq (фиг. 6б и 7б). Здесь, как и в прежних исследованиях, изменяемость состояния грунта во времени обуславливается изменяемостью плотности-влажности, вследствие нарастания во времени нормального (уплотняющего) напряжения σ_z (фиг. 6г и 7г). На графиках (в) этих же фигур, для сопоставления, приведены кривые $l_{\text{мгн}} = f(\tau)$ и $E_k = f(\tau)$. E_k определялись по фиксированным в моменты приложения ступеней $\Delta\sigma_z = 0.66 \text{ кг/см}^2$ величинам $l_{\text{мгн}}$.

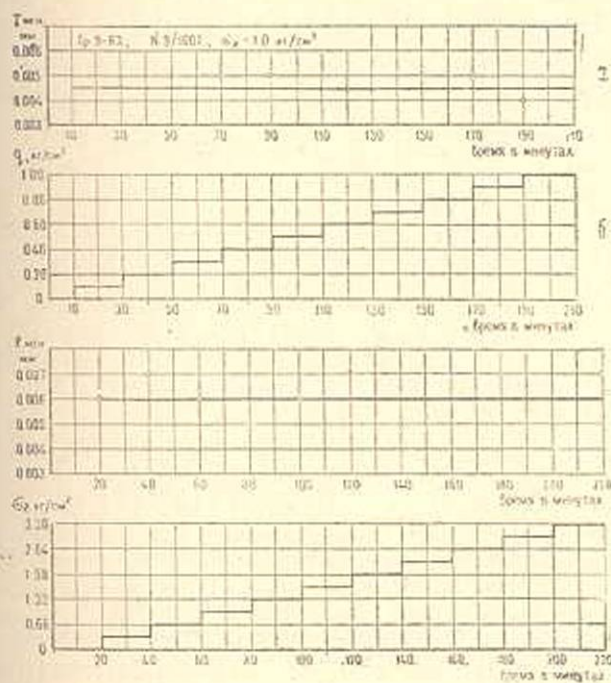


Фиг. 7.

Результаты опытов, приведенные на фиг. 6 и 7, показывают, что характер изменяемости $E_k(\tau)$ и $G_{\text{мгн}}(\tau)$ одинаков и что он зависит как от величины ступени $\Delta\sigma_z$, так и от длительности его действия. Действительно, при одинаковых условиях проведения эксперимента, характер изменяемости мгновенных деформаций и их модулей образцов, подвергнутых предварительному уплотнению напряжениями $\sigma_z = 1$ и 2 кг/см^2 , различен.

В случае испытания менее плотных образцов увеличение σ_z приводит к постепенному уплотнению и упрочнению грунта, уменьшению мгновенных деформаций и увеличению их модулей. Когда плотность

образца высокая, а структурные связи между частицами достаточно крепкие, вначале, с увеличением σ_z наблюдается увеличение мгновенных деформаций, вследствие постепенного разрушения существующих в грунте структурных связей. После возможного разрушения структурных связей в грунте (частичное или полное установление сцепления упрочнения [12]) изменяемость $\gamma_{\text{мгн}}$, $I_{\text{мгн}}$, $G_{\text{мгн}}$ и E_k протекает точно так, как в предыдущем случае.



Фиг. 8.

Ясно, что характер изменяемости $I_{\text{мгн}}$, $\gamma_{\text{мгн}}$, E_k и $G_{\text{мгн}}$ зависит также от скорости приложения и величин ступеней нормальных напряжений, вернее от их соотношений. Как показывают эксперименты, при малых $\Delta\sigma_z/\Delta q$ и больших интервалах их приложения σ_z могут и не повлиять на величины $\gamma_{\text{мгн}}$ и G (фиг. 8).

Изложенная методика изучения изменяемости $I_{\text{мгн}}$ и $\gamma_{\text{мгн}}$, основанная на испытании одного образца последовательным приложением ступеней касательных и нормальных напряжений, может быть использована также для определения G , E и μ (коэффициента Пуассона). Для этого надо кольцевые образцы испытать на кручение и сжатие при возможности бокового расширения грунта, то есть без наружных и внутренних колец, воспринимающих боковой распор и препятствующих его боковому расширению [17].

Полученные нами на приборах кольцевого сдвига данные о величине и изменяемости модуля мгновенной деформации сдвига пол-

ностью согласуются с результатами, полученными нами испытанием образцов на сжатие в компрессионных приборах [1, 4].

Для сопоставления, в табл. 4 приведены величины $G_{\text{мгн}}$, полученные различными исследователями [13].

Таблица 4

Исследователи	Метод испытания	Характеристика грунта	Влажность, %	σ_z , кг/см ²	$G_{\text{мгн}}$, кг/см
Б. Ф. Рельтов	Метод колебаний крутильного маятника	Паста кембрийской глины	50—60	0—1,0	20—60
Б. П. Ерыхов	Метод затухающих крутильных колебаний цилиндрического монолита	Глины и суглинки	17—32	—	3—187
Лаборатория динамики грунтов НИИОСП	То же	То же	6—27	—	2250—10.000
Г. М. Ломизе, А. М. Гуткин, Н. В. Жуков	Скашивание грунтовой призмы при относительном сдвиге не более $5 \cdot 10^{-5}$	1. Глины не нарушенной структуры 2. Пасты глины неокома	6—15 45,0—56,5	0,5—5,0 3,4	1280—1800 1000—1900
Автор	Кручение кольцевых образцов	1. Паста глины 4—57 2. Паста глины 9—63	35,1 35,8 32,6 30,3	2,0 1,0 2,0 4,0	730 385 625 935

Как видно из табл. 4, наши данные довольно близки к данным Г. М. Ломизе, А. М. Гуткина и Н. В. Жукова [13], полученным испытанием образцов нарушенной структуры почти при одинаковых σ_z и влажности грунтам w . Данные Б. Ф. Рельтова [14] согласуются с нашими, полученными при сжатии в компрессионных приборах образцов слабоуплотненных ($\sigma_n = 0,25$ кг/см²) глинистых паст. Что же касается данных Б. П. Ерыхова [15], то они явно заниженные.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1964

Ս. Ռ. ՄԵՇԿՅԱՆ

ԱՎԵՐԻՐԹԱՅԻՆ ՉԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՕՐԻՆԱԶԱՓՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ՍԱՀՔԻ ԴԵՊԲՈՒՄ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում բերված են խախտված կազմվածք ունեցող կավային բնահողերի ակնթարթային ձեւափոխությունների օրինաչափությունների ուսում-

նախորդյան արդյունքները սահմանափակվում, որոնք ստացվել են կտրման մեկ հարթության ունեցող և օղակալին սարքերում նրանց նմուշների փորձարկման ճեղքանքով:

Յուրյ է արված, որ փոքր լարումների դեպքում ակնթարթալին ձևափոխությունների և լարումների միջև եղած կապը արտահայտվում է գծալին օրենքով, իսկ ընդհանուր առմամբ գծալին չէ:

Ուսումնասիրված է ընհանրի դրույթյան (խտույթյան, խոնավության) ազդեցությունը ակնթարթալին ձևափոխությունների օրինաչափությունների վրա: Պարզված է, որ ընհանրի խտույթյան աճի հետ մեկտեղ, որը պայմանավորված է խտացող σ_z ընդունվածքի մեծությամբ և աղբյուրի տեղություններ, աճում է սահման ակնթարթալին մոդուլը $G: \sigma_z = \mu \cdot 1 - \mu \cdot 4 \text{ կգ/սմ}^2$ փոփոխման դեպքում, G -ն փոփոխվում է 385-ից մինչև 935 կգ/սմ², ալսինքն ալեկի քան 2,5 անգամ:

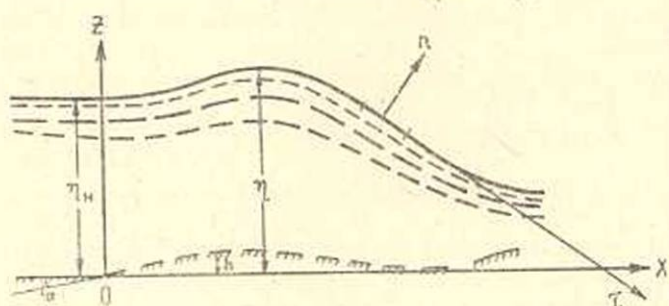
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Месчян С. Р. О ползучести связного грунта при сжатии. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат наук, 11, № 4, 1958.
2. Маслов Г. Н. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Известия ВНИИГ, 28, 1940.
3. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М., 1952.
4. Месчян С. Р. К вопросу экспериментального определения упругих характеристик связных грунтов при сжатии. ДАН Арм. ССР, 23, № 3, 1956.
5. Месчян С. Р. Экспериментальное изучение закономерностей ползучести глинистых грунтов. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат наук, 16, № 1, 1963.
6. Месчян С. Р. Влияние уплотняющей нагрузки на деформативные свойства глинистых грунтов при сдвиге. ДАН Арм. ССР, 31, № 4, 1960.
7. Навилович А. А. Сопротивление связных грунтов сдвигу при расчете гидротехнических сооружений на устойчивость. Стройиздат, М., 1948.
8. Беляев С. М. Сопротивление материалов. Гостехиздат, М., 1953.
9. Маслов Г. Н. К вопросу об условиях проявления ползучести глинистых грунтов в основаниях подпорных сооружений. Научные доклады Высшей школы. Строительство, № 1, 1958.
10. Сотников С. Н. Закономерности развития деформации ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Научное сообщение ЛИСИ, 1960.
11. Костерин Э. В. К методике определения сопротивления сдвигу глинистых грунтов. Гидротехническое строительство, № 7, 1957.
12. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минерчафта, М., 1961.
13. Ломизе Г. М., Гуткин А. М., Жуков Н. В. Измерение условно-мгновенного модуля упругости в связных грунтах. Инженерно-физический журнал, 5, № 5, 1962.
14. Денисов Н. Я., Рельтов Б. Ф. Упругие и структурные деформации глинистых пород. Материалы к IV Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. Изд. АН СССР, М., 1967.
15. Ерихов Б. П. Известия ВНИИГ, 63, 1960.
16. Месчян С. Р. Кольцевой прибор для изучения ползучести и длительного сопротивления сдвигу глинистых грунтов методом кручения. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 5, 1962.

Л. Е. ДАНИЕЛЯН

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ РУСЛЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОРИСТЫМ ДНОМ

§ 1. Рассматривается установившееся плоское ламинарное движение несжимаемой вязкой жидкости по открытому руслу с пористым дном, которое описывается заданной кривой ($z = h(x)$). Движение происходит под влиянием силы тяжести (фиг. 1).



Фиг. 1.

Задача приводится к интегрированию уравнений Навье—Стокса при соответствующих граничных условиях. Уравнения движения вместе с уравнением неразрывности, для данной задачи, будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u и w — компоненты скорости по осям ox и oz , p — давление, ρ — плотность жидкости, ν — кинематический коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, α — угол наклона дна к горизонту.

Из условия прилипания имеем

$$u = 0 \quad \text{при } z = h$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = h,$$

где k — коэффициент пористости дна.

Допустим, уравнение свободной поверхности выражается функцией $z = \eta(x)$. Тогда на свободной поверхности для вектора скорости и вектора напряжения получим следующие граничные условия [1]:

$$\begin{aligned} w &= u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta, \\ \frac{p}{\rho} \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 0 \quad \text{при } z = \eta, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 - \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] &= 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Примем также, что в начальном сечении глубина является постоянной величиной

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x = 0. \quad (1.4)$$

Определим законы изменения скорости и давления, а также вид свободной поверхности.

§ 2. Для решения задачи необходимо проинтегрировать систему квазилинейных уравнений (1.1) с частными производными при вышеуказанных граничных условиях.

Задача решается методом малого параметра. В качестве малого параметра σ принято отношение характерной глубины к характерной длине ($\sigma = \frac{H}{L}$). Чтобы ввести малый параметр σ в систему уравнений и в граничные условия, приведем их к безразмерному виду [2]. При этом система уравнений и граничные условия примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \sin \alpha + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \sigma^2 \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \sigma^2 \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\cos \alpha - \frac{\partial p}{\partial z} + \sigma^2 \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$w = -kp \quad \text{при } z = h,$$

$$w = u \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$p \left[1 - \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] + 2\sigma \nu \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{при } z = \eta, \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left[1 + \sigma^2 \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \right] = 4\sigma^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{d\eta}{dx} \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\eta = \eta_0 \quad \text{при } x=0,$$

где все величины безразмерные.

Неизвестные функции ищем в виде степенного ряда (по степеням σ), то есть

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \sigma u_1 + \sigma^2 u_2 + \dots \\ w &= w_0 + \sigma w_1 + \sigma^2 w_2 + \dots \\ p &= p_0 + \sigma p_1 + \sigma^2 p_2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \sigma \eta_1 + \sigma^2 \eta_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя значения u , w , p и η из (2.3) в систему уравнений (2.1) и в граничные условия (2.2) и приравнявая коэффициенты при нулевой степени σ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin x + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} &= 0, \\ 2. \quad -\cos x - \frac{\partial p_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial z} &= 0; \\ 1. \quad u_0 &= 0 \quad \text{при } z=h, \\ 2. \quad w_0 &= -kp_0 \quad \text{при } z=h, \\ 3. \quad w_0 &= u_0 \frac{d\eta_0}{dx} \quad \text{при } z=\eta_0, \\ 4. \quad p_0 &= 0 \quad \text{при } z=\eta_0, \\ 5. \quad \frac{\partial u_0}{\partial z} &= 0 \quad \text{при } z=\eta_0, \\ 6. \quad \eta_0 &= \eta_0 \quad \text{при } x=0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дважды интегрируя первое уравнение системы (2.4) и учитывая 1 и 5 граничные условия системы (2.5), для u_0 получим следующее выражение:

$$u_0 = \frac{\sin x}{2\nu} [(\eta_0 - h)^2 - (\eta_0 - z)^2]. \quad (2.6)$$

Из уравнения неразрывности, при граничном условии (2), для w_0 получим

$$w_0 = \frac{\sin x}{2\nu} \frac{d\eta_0}{dx} [(\eta_0 - h)^2 - (\eta_0 - z)^2] + \frac{\sin x}{\nu} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) (\eta_0 - z). \quad (2.7)$$

Давление определяется из второго уравнения системы (2.4) с учетом граничного условия (4) системы (2.5).

$$p_0 = (\eta_0 - z) \cos x. \quad (2.8)$$

Из третьего уравнения системы (2.5) при условии (6) получим вид свободной поверхности

$$\tau_0 = h + \sqrt{(\eta_0 - h)^2 - 2k\gamma \operatorname{ctg} \alpha \cdot x}. \quad (2.9)$$

Для определения искомых функций в первом приближении приравняем коэффициенты при первой степени σ . Применяя метод, предложенный в работе [1], получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}, \\ -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{при } z = h,$$

$$w_1 = -kp_1 \quad \text{при } z = h,$$

$$w_1 + \eta_1 \frac{\partial w_0}{\partial z} = \left(u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z} \eta_1 \right) \frac{d\tau_0}{dx} + u_0 \frac{d\tau_0}{dx} \quad \text{при } z = \tau_0,$$

$$p_1 + \eta_1 \frac{\partial p_0}{\partial z} + 2\gamma \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad \text{при } z = \tau_0. \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \eta_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = \tau_0,$$

$$\eta_1 = 0 \quad \text{при } x = 0.$$

Решая эту систему с соответствующими граничными условиями, получим следующие значения для неизвестных функций:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sin^2 \alpha}{4\gamma^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h)^3 (z - h)^2 + \frac{\cos \alpha}{2\gamma} \frac{d\tau_0}{dx} (z^2 - h^2) - \\ &- \frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{d\tau_0}{dx} (z - h) \tau_0 + \frac{\sin \alpha}{\gamma} (z - h) \eta_1 + \frac{\sin^2 \alpha}{6\gamma^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\ &\times (\tau_0 - h) \left(\frac{z^4}{4} - \tau_0 z^3 + \frac{3}{2} \tau_0^2 z^2 - 4\tau_0^3 z + 2\tau_0^4 h - 3\tau_0^2 h^2 + 2\tau_0 h^3 - \frac{3}{2} h^4 \right); \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{\sin^2 \alpha}{4\gamma^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\tau_0 - h)^2 (z - h)^3 - \frac{\sin^2 \alpha}{12\gamma^2} \left(\frac{d^2 \tau_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) \times \\ &\times (\tau_0 - h)^3 (z - h)^3 + \frac{\sin^2 \alpha}{4\gamma^2} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\tau_0 - h)^3 (z - h)^2 - \\ &- \frac{\cos \alpha}{6\gamma} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} z^3 + \frac{\cos \alpha}{2\gamma} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} zh^2 + \frac{\cos \alpha}{\gamma} \frac{d\tau_0}{dx} \frac{dh}{dx} zh + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} \tau_0 (z-h)^2 + \frac{\cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\tau_0}{dx} \right)^2 (z-h)^2 - \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} \frac{dh}{dx} \tau_0 z - \\
& - \frac{\sin \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_1}{dx} (z-h)^2 + \frac{\sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \tau_1 z - \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h) \times \\
& \times \left[\frac{d\tau_0}{dx} \left(-\frac{z^4}{4} + \tau_0 z^3 - 6\tau_0^2 z^2 + 6\tau_0^2 zh - 6\tau_0 z h^2 + 2zh^3 \right) + \right. \\
& + \frac{dh}{dx} (2\tau_0^3 z - 6\tau_0^2 zh + 6\tau_0 z h^2 - 2zh^3) \left. \right] - \frac{\cos \alpha}{3\nu} \frac{d^2 \tau_0}{dx^2} h^3 - \\
& - \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} \frac{dh}{dx} h^2 + \frac{\cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} \frac{dh}{dx} \tau_0 h - \frac{\sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \tau_1 h + \\
& + \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 \left(-\frac{9h^5}{20} + \frac{7\tau_0 h^4}{4} - \frac{5\tau_0^2 h^3}{2} \right) + \frac{\sin^2 \alpha}{6\nu^3} (\tau_0 - h) \times \\
& \times \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d\tau_0}{dx} \left(\frac{7h^4}{4} - 5\tau_0 h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\tau_0^3 h - 6\tau_0^2 h^2 - 2h^4) \right] + \\
& + k \sin \alpha \frac{d\tau_0}{dx} (\tau_0 - h) - 2k \sin \alpha \frac{dh}{dx} (\tau_0 - h) - k \tau_1 \cos \alpha; \quad (2.13)
\end{aligned}$$

$$p_1 = \sin \alpha \frac{d\tau_0}{dx} (\tau_0 - z) - 2 \sin \alpha \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h) + \tau_1 \cos \alpha; \quad (2.14)$$

$$\tau_1 = e^{-\int P dx} \left(c + \int Q e^{\int P dx} dx \right), \quad (2.15)$$

где P и Q — многочлены, зависящие от x .

Уравнения для следующих приближений решаются аналогичным образом. Переходя к размерным величинам, для искомых величин получим

$$\begin{aligned}
u(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{2\nu} [(\tau_0 - h)^2 - (\tau_0 - z)^2] + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h)^3 \times (z-h)^2 + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_0}{dx} (z^2 - h^2) - \\
& - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\tau_0}{dx} (z-h) \tau_0 + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \times \tau_1 (z-h) + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\tau_0 - h) \left(\frac{z^4}{4} - \tau_0 z^3 + \frac{3}{2} \tau_0^2 z^2 - 4\tau_0^3 z + \right. \\
& \left. + 2\tau_0^3 h - 3\tau_0^2 h^2 + 2\tau_0 h^3 - \frac{3}{2} h^4 \right), \\
w(x, z) = & \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \frac{d\tau_0}{dx} [(\tau_0 - h)^2 - (z-h)^2] + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\
& \times (\tau_0 - h) (\tau_0 - z) - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^3} \left(\frac{d\tau_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\tau_0 - h)^2 (z-h)^2 - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{12\nu^3} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) (\eta_0 - h)^3 (z - h)^3 + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h)^3 (z - h)^2 - \frac{g \cos \alpha}{6\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} z^3 + \\
& + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} z h^2 + \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} z h + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 (z - h)^2 + \\
& + \frac{g \cos \alpha}{2\nu} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 (z - h)^2 - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \eta_0 z - \\
& - \frac{g \sin \alpha}{2\nu} \frac{d\eta_0}{dx} (z - h)^2 + \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \eta_0 z - \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) \times \\
& \times \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(-\frac{z^3}{4} + \eta_0 z^3 - 6\eta_0^2 z^2 + 6\eta_0^2 z h - 6\eta_0 z h^2 + 2z h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 z - \right. \\
& \left. - 6\eta_0^2 z h + 6\eta_0 z h^2 - 2z h^3) \right] - \frac{g \cos \alpha}{3\nu} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} h^3 - \frac{g \cos \alpha}{\nu} \times \\
& \times \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} h^3 + \frac{g \cos \alpha}{\nu} \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \eta_0 h - \frac{g \sin \alpha}{\nu} \frac{dh}{dx} \eta_0 h + \\
& + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left(-\frac{9h^5}{20} + \frac{7\eta_0 h^4}{4} - \frac{5\eta_0^2 h^3}{2} \right) + \frac{g^2 \sin^2 \alpha}{6\nu^2} \times \\
& \times (\eta_0 - h) \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(\frac{7h^4}{4} - 5\eta_0 h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 - \right. \\
& \left. - 2h^4) \right] + \rho g k \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - h) - 2\rho g k \sin \alpha \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h) - \rho g k \eta_0 \cos \alpha, \\
p(x, z) = \rho g \left[\cos \alpha (\eta_0 - z) + \sin \alpha \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - z) - \right. \\
& \left. - 2 \sin \alpha \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) (\eta_0 - h) + \eta_0 \cos \alpha \right],
\end{aligned}$$

$$\eta(x) = h(x) + \sqrt{(\eta_0 - h)^2 - 2\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha x} + e^{-\int \rho dx} (C + \int Q e^{\int \rho dx} dx),$$

где

$$P(x) = \frac{2}{\eta_0 - h} \frac{d\eta_0}{dx} - \frac{1}{\eta_0 - h} \frac{dh}{dx} + \frac{\rho k \nu \operatorname{ctg} \alpha}{(\eta_0 - h)^2},$$

$$Q(x) = -\frac{g \sin \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 (\eta_0 - h)^3 -$$

$$- \frac{g \sin \alpha}{12\nu^2} \left(\frac{d^2 \eta_0}{dx^2} - \frac{d^2 h}{dx^2} \right) (\eta_0 - h)^3 + \frac{g \sin \alpha}{4\nu^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{dh}{dx} (\eta_0 - h)^3 -$$

$$- \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{6(\eta_0 - h)^2} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0^3 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{2(\eta_0 - h)^2} \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 h^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \eta_0 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 - \frac{g \sin \alpha}{6\nu^2 (\eta_0 - h)^2} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right)^2 \times \\
& \times \left(-\frac{17}{10} \eta_0^5 + 2\eta_0^4 h + 2\eta_0^3 h^2 - 3\eta_0^2 h^3 - \frac{1}{2} \eta_0 h^4 \right) - \frac{g \sin \alpha}{6\nu^2 (\eta_0 - h)} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \times \\
& \times \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(-\frac{21}{4} \eta_0^4 + 6\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 + 2\eta_0 h^3 \right) + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^4 - 6\eta_0^3 h + 6\eta_0^2 h^2 - \right. \\
& \left. - 2\eta_0 h^3) \right] - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \alpha \frac{d^2 \eta_0}{dx^2} \frac{h^3}{(\eta_0 - h)^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{d\eta_0}{dx} \frac{dh}{dx} \frac{h}{\eta_0 - h} + \\
& + \frac{g \sin \alpha}{6\nu^2 (\eta_0 - h)} \times \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \left[\frac{d\eta_0}{dx} \left(\frac{7}{4} h^4 - 5\eta_0 h^3 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{dh}{dx} (2\eta_0^3 h - 6\eta_0^2 h^2 - 2h^4) \right] - \frac{g \sin \alpha}{6\nu^2 (\eta_0 - h)} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{d\eta_0}{dx} (\eta_0 - h)^2 - \\
& - \frac{g \sin \alpha}{6\nu^2 (\eta_0 - h)} \left(\frac{d\eta_0}{dx} - \frac{dh}{dx} \right) \frac{d\eta_0}{dx} \times \left(-\frac{19}{4} \eta_0^4 - 2\eta_0^3 h - 3\eta_0^2 h^2 + 2\eta_0 h^3 - \right. \\
& \left. - \frac{3}{2} h^4 \right) + \frac{\rho k \nu}{\eta_0 - h} \frac{d\eta_0}{dx} - \frac{2\rho k \nu}{\eta_0 - h} \frac{dh}{dx} - \frac{\eta_0 + h}{\eta_0 - h} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2 \operatorname{ctg} \alpha + \\
& + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\eta_0}{\eta_0 - h} \left(\frac{d\eta_0}{dx} \right)^2.
\end{aligned}$$

Как видно из полученных результатов, если дно канала взять прямолинейным (то есть $h = 0$) получаем результаты работы [2].

§ 3. Для вычисления конкретного примера, рассмотрим движение воды с начальной глубиной 1 м вдоль пористого русла, угол наклона которого $\alpha = 34'$, а дно описывается кривой $h(x) = 0,1 \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

Примем

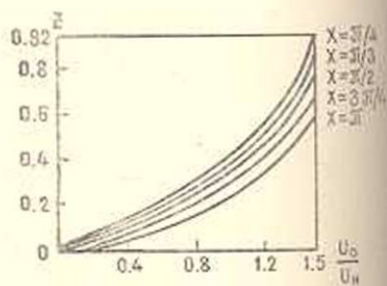
$$\rho = 100 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}, k = 10 \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{сек}}, \nu = 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}.$$

Численный пример решаем, ограничиваясь нулевым приближением.

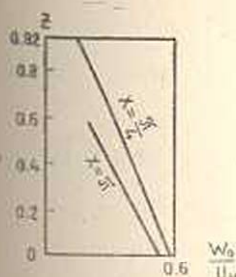
Изменение свободной поверхности вдоль оси ox показано на фиг. 2. Изменение проекций горизонтальной и вертикальной скоростей по глубине потока приведено на фиг. 3 и 4.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Как видно из фиг. 2, непрямолинейность дна существенно влияет на форму свободной поверхности.

На численном примере доказывается, что при $\lambda > 0$ (λ — угловой коэффициент касательной к кривой $z = h(x)$), вертикальная составляющая скорости (w) изменяется гораздо быстрее, чем в интервалах, где $\lambda < 0$. А горизонтальная составляющая (u) — наоборот: при $\lambda > 0$ изменяется медленнее, чем при $\lambda < 0$.

Ереванский государственный
университет

Поступила 16 V 1964

Լ. Ե. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ

ՄԱՏԵՄԱՏԻԿ ՀԵՂՈՐԿԻ ՇԱՐՖՈՐԴԸ ՈՒՅ ՆԱԿԱՏԿՈՆ ԿԱՄԱՅԱԿՈՆ ՀԱՏԱԿ
ՈՐԵՆՑՈՂ ՀՈՐԻՈՂ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոդվածում դիտարկվում է անսկզմակ մածուցիկ հեղուկի հարթ լամինար շարժումը բաց հունով, որի հատակը ծակոտիկն է և հանդիսանում է ցանկացած նախապես արված կոր:

Խնդիրը բերվում է Նավե-Ստոքսի համառարումների ինտեգրմանը համապատասխան կզրալին պայմաններով: Լուծումը որոնվում է փոքր պարամետրի մեթոդով:

Գտնվում է արագության, ճնշման, ինչպես նաև աղաղակային մակերևույթի փոփոխման օրենքը, և հաշվվում է թվային օրինակ:

Խնդիրը հանդիսանում է նախկինում լուծված ծակոտիկն ուղիղ հատակ ունեցող հունով մածուցիկ հեղուկի շարժման խնդրի ընդհանուր դեպքը:

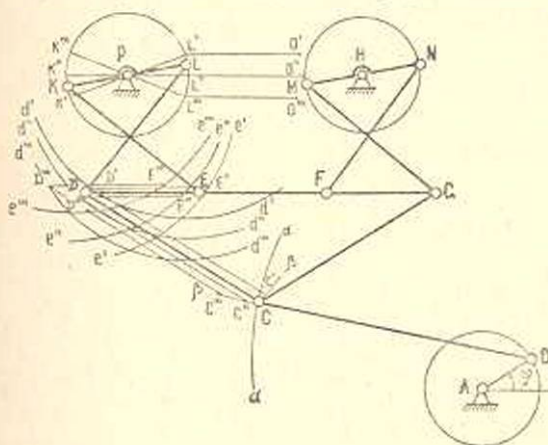
Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабаджанян Г. А., Назарян А. Г. Об одном решении задачи лаоского ламинарного движения жидкости в открытом канале. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 1, 1959.

2. Бабаджанян Г. А., Даниелян Л. Е. Течение вязкой жидкости в открытом пористом русле. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 3, 1963.

Легко убедиться, что если $DL = KE = MG = FN$, $KL = MN$, $DE = FG$ и $DF = EG = PH$, то базисное звено совершает поступательное движение, когда всегда имеет место условие $DG \parallel PH$, а звенья KL , LD , KE остаются соответственно параллельными звеньям MN , FN , MG .

Пусть звено AB повернулось на угол φ . Тогда ясно, что геометрическим местом возможных положений точек C является дуга $\alpha\alpha'$ окружности, описанной из точки B радиусом BC . Предположим, что при данном положении кривошипа AB звено KL занимает положение $K'L'$ (см. фиг. 2). Точки D и E будут лежать на дугах $d'd'$.



Фиг. 2.

$e'e'$, проведенных соответственно из точек K' и L' радиусами KE и LD , и при этом сохранится условие $D'E' \parallel PH$. Из точки L' проводим прямую, параллельную PH , и откладываем отрезок $L'O' = DE$. Далее из центра O' радиусом LD описываем дугу, при пересечении которой с $e'e'$ получается точка E' , из которой проводим прямую, параллельную PH , пересекающуюся с дугой $d'd'$ в точке D' . Из построения вытекает, что $D'E' = DE$. Потом, используя известные параметры треугольника DGC ($\rightarrow \omega$, DC), находим так называемое "ложное" положение C' точки C . Аналогичным путем для произвольно выбранных положений $K''L''$, $K'''L'''$ звена KL соответственно получаем точки C'' , C''' . Очевидно, действительное положение точки C будет располагаться в точке пересечения дуги $\alpha\alpha'$ и кривой $\beta\beta'$, соединяющей "ложные" положения C' , C'' , C''' . Имея положение точки C , можно определить положения и других точек, звеньев механизма.

Задачу определения положений можно решить также приближенным численным методом. С этой целью пользуемся векторными уравнениями замкнутости контуров $ABCDLPOA$ и $PKEFNHP$ (см. фиг. 1). Для первого контура можно написать

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DL} + \overline{LP} + \overline{PO} + \overline{OA} = 0. \quad (1)$$

Проектируя на оси x и y , получаем

$$AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} + CD \cos \varphi_{CD} + DL \cos \varphi_{DL} + LP \cos \varphi_{LP} + OA = 0 \quad (2)$$

$$AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi_{BC} + CD \sin \varphi_{CD} + DL \sin \varphi_{DL} + LP \sin \varphi_{LP} - PO = 0$$

Здесь φ_{AB} и $\varphi_{CD} = 180^\circ - \omega$ — известные величины и, следовательно, система (2) содержит 3 неизвестные переменные (φ_{BC} , φ_{DL} , φ_{LP}).

Для второго контура имеем

$$\overline{PK} + \overline{KE} + \overline{EF} + \overline{FN} + \overline{NH} + \overline{HP} = 0 \quad (3)$$

или

$$PK \cos \varphi_{PK} + KE \cos \varphi_{KE} + EF + FN \cos \varphi_{FN} + NH \cos \varphi_{NH} - HP = 0,$$

$$PK \sin \varphi_{PK} + KE \sin \varphi_{KE} + FN \sin \varphi_{FN} + NH \sin \varphi_{NH} = 0. \quad (4)$$

Из фиг. 1 очевидно, что

$$\varphi_{LP} = \varphi_{PK} = \varphi_{NH}, \quad \varphi_{FN} = \varphi_{DL}. \quad (5)$$

Подставляя условия (5) в уравнения 4 и $\varphi_{CD} = 180^\circ - \omega$ в (2), получаем следующую систему уравнений;

$$AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi_{BC} - CD \cos \omega + DL \cos \varphi_{DL} + LP \cos \varphi_{LP} + OA = 0,$$

$$AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi_{BC} + CD \sin \omega + DL \sin \varphi_{DL} + LP \sin \varphi_{LP} - PO = 0,$$

$$PK \cos \varphi_{LP} + KE \cos \varphi_{KE} + EF + FN \cos \varphi_{DL} + NH \cos \varphi_{LP} - HP = 0,$$

$$PK \sin \varphi_{LP} + KE \sin \varphi_{KE} + FN \sin \varphi_{DL} + NH \sin \varphi_{LP} = 0. \quad (6)$$

Система (6), содержащая 4 неизвестные (φ_{BC} , φ_{DL} , φ_{LP} , φ_{KE}), решается приближенными методами. С этой целью определенные графическим путем величины указанных неизвестных φ'_{BC} , φ'_{DL} , φ'_{LP} , φ'_{KE} подставляем в систему (6) и рассчитываем соответствующие отклонения δx , δy , $\delta x'$, $\delta y'$.

После подстановки получаем

$$AB \cos \varphi_{AB} + BC \cos \varphi'_{BC} - CD \cos \omega + DL \cos \varphi'_{DL} + LP \cos \varphi'_{LP} + OA = \delta x,$$

$$AB \sin \varphi_{AB} + BC \sin \varphi'_{BC} + CD \sin \omega + DL \sin \varphi'_{DL} + LP \sin \varphi'_{LP} - PO = \delta y,$$

$$PK \cos \varphi'_{LP} + KE \cos \varphi'_{KE} + EF + FN \cos \varphi'_{DL} + NH \cos \varphi'_{LP} - HP = \delta x',$$

$$PK \sin \varphi'_{LP} + KE \sin \varphi'_{KE} + EF + FN \sin \varphi'_{DL} + NH \sin \varphi'_{LP} = \delta y'. \quad (7)$$

Если к указанным неизвестным прибавим соответствующие угловые поправки $\Delta \varphi$, то левые части уравнений приравняются нулю. Учитывая малость угловых поправок $\Delta \varphi$ и принимая $\sin \Delta \varphi = \Delta \varphi$, $\cos \Delta \varphi = 1$, получаем

$$\sin \varphi_{BC} = \sin (\varphi'_{BC} + \Delta \varphi_{BC}) \cong \sin \varphi'_{BC} + \cos \varphi'_{BC} \Delta \varphi_{BC},$$

$$\cos \varphi_{BC} = \cos (\varphi'_{BC} + \Delta \varphi_{BC}) \cong \cos \varphi'_{BC} - \sin \varphi'_{BC} \Delta \varphi_{BC}.$$

$$\begin{aligned}
 \sin \varphi_{DL} &= \sin (\varphi'_{DL} + \Delta \varphi_{DL}) \cong \sin \varphi'_{DL} + \cos \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL}, \\
 \cos \varphi_{DL} &= \cos (\varphi'_{DL} + \Delta \varphi_{DL}) \cong \cos \varphi'_{DL} - \sin \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL}, \\
 \sin \varphi_{LP} &= \sin (\varphi'_{LP} + \Delta \varphi_{LP}) \cong \sin \varphi'_{LP} + \cos \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP}, \\
 \cos \varphi_{LP} &= \cos (\varphi'_{LP} + \Delta \varphi_{LP}) \cong \cos \varphi'_{LP} - \sin \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP}, \\
 \sin \varphi_{KE} &= \sin (\varphi'_{KE} + \Delta \varphi_{KE}) \cong \sin \varphi'_{KE} + \cos \varphi'_{KE} \Delta \varphi_{KE}, \\
 \cos \varphi_{KE} &= \cos (\varphi'_{KE} + \Delta \varphi_{KE}) \cong \cos \varphi'_{KE} - \sin \varphi'_{KE} \Delta \varphi_{KE}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в систему (6) и сравнивая полученную систему уравнений с системой (7), получаем

$$\begin{aligned}
 -(BC \sin \varphi'_{BC} \Delta \varphi_{BC} + DL \sin \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL} + LP \sin \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP}) &= \delta x, \\
 BC \cos \varphi'_{BC} \Delta \varphi_{BC} + DL \cos \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL} + LP \cos \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP} &= \delta y, \\
 -[(PK + NH) \sin \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP} + KE \sin \varphi'_{KE} \Delta \varphi_{KE} + FN \sin \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL}] &= \delta x', \\
 (PK + NH) \cos \varphi'_{LP} \Delta \varphi_{LP} + KE \cos \varphi'_{KE} \Delta \varphi_{KE} + FN \cos \varphi'_{DL} \Delta \varphi_{DL} &= \delta y'. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Данная система линейных уравнений (9) для определения неизвестных $\Delta \varphi_{BC}$, $\Delta \varphi_{DL}$, $\Delta \varphi_{KE}$, $\Delta \varphi_{LP}$ не представляет трудностей. Чтобы достичь большей точности, производится второе приближение и т. д.

Займемся задачей определения скоростей для заранее построенного положения механизма при известной угловой скорости ведущего

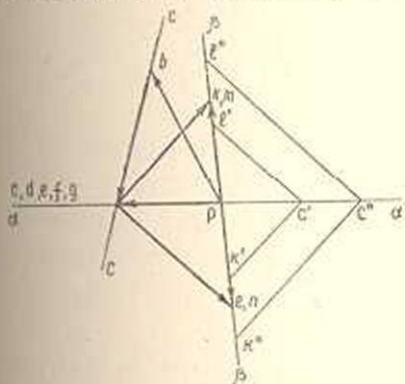
звена ω_{AB} . Вначале задачу решаем приближенным графическим методом (метод ложных положений). Масштабом μ_v из полюса p откладываем масштабную величину pb вектора $\bar{V}_B$. Для определения скорости точки C имеем (см. фиг. 3)

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{C|B}. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует, что конец c вектора абсолютной скорости точки C находится на прямой $cc \perp BC$. Так как звено DCG

совершает поступательное движение, то есть $\bar{V}_C = \bar{V}_D = \bar{V}_E = \bar{V}_F = \bar{V}_G$, то точки c, d, e, f, g на плане скоростей совпадают. Геометрическим местом возможных положений концов k, l векторов $\bar{V}_K$ и $\bar{V}_L$ является прямая $\beta\beta \perp KL$, притом $\bar{V}_K = -\bar{V}_L$, $\bar{PK} = -\bar{PL}$. Поэтому на прямой $\beta\beta$ выбираем равноудаленные от точки p „ложные положения“ $k'l'$ и $k''l''$ точек K и L , и на базе уравнений

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_D &= \bar{V}_C = \bar{V}_L + \bar{V}_{D|L} \\
 \bar{V}_E &= \bar{V}_C = \bar{V}_K + \bar{V}_{E|K}
 \end{aligned} \quad (11)$$



Фиг. 3.

получаем ложные положения C' и C'' точки C . Из построения следует прохождение $C'C''$ через полюс p , то есть для построения геометрического места ложных положений точки C , прямой az , достаточно найти лишь одну точку C' . Истинное положение точки C будет располагаться в точке пересечения прямых az и $\beta\beta$. Далее, исходя из равенств (11) и условий $\bar{V}_K = \bar{V}_M$, $\bar{V}_L = \bar{V}_N$, определяем положения точек k , m и l , n . Имея линейные скорости, легко определить угловые скорости соответствующих звеньев.

При необходимости достижения большей точности можно применять численный метод. Перепишем равенства (1) и (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} AB\dot{e}_{AB} + BC\dot{e}_{BC} + CD\dot{e}_{CD} + DL\dot{e}_{DL} + LP\dot{e}_{LP} + \overline{PO} + \overline{OA} &= 0, \\ PK\dot{e}_{LP} + KE\dot{e}_{KE} + \overline{EF} + FN\dot{e}_{DL} + NH\dot{e}_{LP} + \overline{HP} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\dot{e}_{AB}$, $\dot{e}_{BC}$, ... — соответствующие единичные векторы. Дифференцируя равенства (16) по обобщенной координате φ_{AB} , получаем

$$AB\dot{e}_{AB} + BC\dot{e}_{BC}\dot{\varphi}_{BC} + DL\dot{e}_{DL}\dot{\varphi}_{DL} + LP\dot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP} = 0, \quad (13)$$

$$PK\dot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP} + KE\dot{e}_{KE}\dot{\varphi}_{KE} + FN\dot{e}_{DL}\dot{\varphi}_{DL} + NH\dot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP} = 0. \quad (13')$$

где

$$\begin{aligned} \dot{e}_{KE} &= \frac{d\dot{e}_{KE}}{d\varphi_{KE}}, & \dot{e}_{AB} &= \frac{d\dot{e}_{AB}}{d\varphi_{AB}}, & \dot{e}_{BC} &= \frac{d\dot{e}_{BC}}{d\varphi_{BC}}, & \dot{e}_{DL} &= \frac{d\dot{e}_{DL}}{d\varphi_{DL}}, \\ \dot{e}_{LP} &= \frac{d\dot{e}_{LP}}{d\varphi_{LP}}. \end{aligned} \quad (14)$$

а

$$\dot{\varphi}_{KE}^* = \frac{d\varphi_{KE}}{d\varphi_{AB}}, \quad \dot{\varphi}_{BC}^* = \frac{d\varphi_{BC}}{d\varphi_{AB}}, \quad \dot{\varphi}_{DL}^* = \frac{d\varphi_{DL}}{d\varphi_{AB}}, \quad \dot{\varphi}_{LP}^* = \frac{d\varphi_{LP}}{d\varphi_{AB}}$$

—аналоги соответствующих угловых скоростей.

Скалярно умножая равенства (13), (13') на орты $\dot{e}_{BC}$ и $\dot{e}_{KE}$, соответственно получаем

$$AB\dot{e}_{AB}\dot{e}_{BC} + DL\dot{e}_{DL}\dot{e}_{BC}\dot{\varphi}_{DL} + LP\dot{e}_{LP}\dot{e}_{BC}\dot{\varphi}_{LP} = 0, \quad (15)$$

$$PK\dot{e}_{LP}\dot{e}_{KE}\dot{\varphi}_{LP} + FN\dot{e}_{DL}\dot{e}_{KE}\dot{\varphi}_{DL} + NH\dot{e}_{LP}\dot{e}_{KE}\dot{\varphi}_{LP} = 0. \quad (15')$$

Заменив скалярные произведения единичных векторов соответствующими тригонометрическими функциями, получаем

$$AB \sin(\varphi_{BC} - \varphi_{AB}) + DL \sin(\varphi_{BC} - \varphi_{DL})\dot{\varphi}_{DL} + LP \sin(\varphi_{BC} - \varphi_{LP})\dot{\varphi}_{LP} = 0, \quad (16)$$

$$PK \sin(\varphi_{KE} - \varphi_{LP})\dot{\varphi}_{LP} + FN \sin(\varphi_{KE} - \varphi_{DL})\dot{\varphi}_{DL} + NH \sin(\varphi_{KE} - \varphi_{LP})\dot{\varphi}_{LP} = 0.$$

Из этих линейных уравнений определяются величины φ'_{DL} , φ'_{LP} , а φ'_{BC} и φ'_{KE} определяются из равенств (13), (13'), умноженных на орты $\vec{e}_{DL}$ или $\vec{e}_{LP}$.

Имея аналоги угловых скоростей, следовательно и угловые скорости ($\omega_i = \varphi_i \omega_{AB}$), можно определить соответствующие линейные скорости. При постоянной величине $\dot{\omega}_{AB} = \text{const}$ угловой скорости кривошипа AB , ускорение будет равно

$$a_B = a_B^n = \omega_{AB}^2 l_{AB}. \quad (17)$$

Из полюса π в масштабе μ_a откладываем масштабную величину $\dot{\omega}_{AB}$ ускорения $\bar{a}_B$. Так как звено совершает плоско-параллельное движение, то

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C|B}^n + \bar{a}_{C|B}^t, \quad (18)$$

(см. фиг. 4)

где $\bar{a}_{C|B}^n = \frac{v_{C|B}^2}{l_{CB}}$ направлено по CB , а $\bar{a}_{C|B}^t \perp CB$.

Из вышеизложенного ясно, что геометрическим местом действительных положений точки C является прямая $\beta\beta$. Далее очевидно, что

$$\bar{a}_K = -\bar{a}_L, \quad \bar{a}_K^n = -\bar{a}_L^n,$$

$$\bar{a}_K^t = -\bar{a}_L^t, \quad \bar{a}_K^n = \bar{a}_L^n = \frac{v_K^2}{l_{PK}}. \quad (19)$$

По выражениям (19) находим точки n_3 , n_4 , и из этих точек проводим $t_K t_K$, $t_E t_E \perp n_3$, n_4 , на которых соответственно находятся равноудаленные от полюса π концы k , l векторов $\bar{a}_K$ и $\bar{a}_L$. Если выберем „ложное“ положение $k'l'$ отрезка kl и учтем, что для поступательно движущейся пилы $\bar{a}_C = \bar{a}_D = \bar{a}_E = \bar{a}_F = \bar{a}_G$, то

$$\bar{a}_C = \bar{a}_E = \bar{a}_K + \bar{a}_{E|K}^n, \quad \bar{a}_{E|K}^n = -\bar{a}_{K|E}^n, \quad \bar{a}_K^n = \frac{v_{K|E}^2}{l_{KE}}, \quad (20)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D = \bar{a}_L + \bar{a}_{D|L}^n + \bar{a}_{D|L}^t, \quad \bar{a}_{D|L}^n = -\bar{a}_{L|D}^n, \quad \bar{a}_{L|D} = \frac{v_{L|D}^2}{l_{LD}}.$$

По этим равенствам можно определить „ложные“ положения C' и C'' точки C . Из построения следует, что геометрическое место ложных положений—прямая $\alpha\alpha$, проходит через полюс π , пересечением которой с прямой $\beta\beta$ определяется точка C . Далее построениями в обратном порядке по следующим уравнениям:

$$\bar{a}_L = \bar{a}_D + \bar{a}_{D|L}^n + \bar{a}_{D|L}^t, \quad \bar{a}_K = \bar{a}_E + \bar{a}_{K|E}^n + \bar{a}_{K|E}^t \quad (21)$$

определяем точки l , k и совпадающие с ними n , m . При известных

тангенциальных ускорениях и длинах звеньев можно определить соответствующие угловые ускорения.

Для решения задачи более точным численным методом продифференцируем уравнения (13) и (13') по обобщенной координате φ_{AB}

$$AB\ddot{e}_{AB} + BC\ddot{e}_{BC}\dot{\varphi}_{BC}^2 + BC\dot{\varphi}_{BC}\ddot{e}_{BC} + DL\ddot{e}_{DL}\dot{\varphi}_{DL}^2 + \\ + DL\dot{\varphi}_{DL}\ddot{e}_{DL} + LP\ddot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP}^2 + LP\dot{\varphi}_{LP}\ddot{e}_{LP} = 0, \quad (22)$$

$$PK\ddot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP}^2 + PK\dot{\varphi}_{LP}\ddot{e}_{LP} + KE\ddot{e}_{KE}\dot{\varphi}_{KE}^2 + KE\dot{\varphi}_{KE}\ddot{e}_{KE} + FN\ddot{e}_{DL}\dot{\varphi}_{DL}^2 + \\ + FN\dot{\varphi}_{DL}\ddot{e}_{DL} + NH\ddot{e}_{LP}\dot{\varphi}_{LP}^2 + NH\dot{\varphi}_{LP}\ddot{e}_{LP} = 0, \quad (22')$$

где

$$\ddot{e}_{LP} = \frac{d^2\dot{e}_{LP}}{d\varphi_{LP}^2}, \quad \ddot{e}_{AB} = \frac{d^2\dot{e}_{AB}}{d\varphi_{AB}^2}, \quad \ddot{e}_{BC} = \frac{d^2\dot{e}_{BC}}{d\varphi_{BC}^2}, \quad \ddot{e}_{KE} = \frac{d^2\dot{e}_{KE}}{d\varphi_{KE}^2}, \quad (23)$$

а

$$\ddot{\varphi}_{BC} = \frac{d^2\dot{\varphi}_{BC}}{d\varphi_{AB}^2}, \quad \ddot{\varphi}_{DL} = \frac{d^2\dot{\varphi}_{DL}}{d\varphi_{AB}^2}, \quad \ddot{\varphi}_{LP} = \frac{d^2\dot{\varphi}_{LP}}{d\varphi_{AB}^2}, \quad \ddot{\varphi}_{KE} = \frac{d^2\dot{\varphi}_{KE}}{d\varphi_{AB}^2}$$

— аналоги угловых ускорений.

Скалярно умножая векторные равенства (22), (22') соответственно на орты $\dot{e}_{BC}$ и $\dot{e}_{KE}$ и вводя вместо сохраненных векторных произведений определенные тригонометрические выражения, получаем

$$-AB \cos(\varphi_{AB} - \varphi_{BC}) - BC\dot{\varphi}_{BC}^2 - DL \cos(\varphi_{DL} - \varphi_{BC})\dot{\varphi}_{DL}^2 + \\ + DL \cos(\varphi_{DL} - \varphi_{BC})\dot{\varphi}_{DL} - LP \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{BC})\dot{\varphi}_{LP}^2 + \\ + LP \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{BC})\dot{\varphi}_{LP} = 0, \quad (24) \\ -PK \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{LP}^2 + PK \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{LP} - KE\dot{\varphi}_{KE}^2 - \\ - FN \cos(\varphi_{DL} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{DL}^2 + FN \cos(\varphi_{DL} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{DL} - \\ - NH \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{LP}^2 + NH \cos(\varphi_{LP} - \varphi_{KE})\dot{\varphi}_{LP} = 0.$$

Таким образом, мы получили систему 2 линейных уравнений, откуда нетрудно определить искомые аналоги $\dot{\varphi}_{LP}$, $\dot{\varphi}_{DL}$ угловых ускорений. Величины $\dot{\varphi}_{BC}$, $\dot{\varphi}_{KE}$ определяются из равенств (22) и (22') умножением последних на орты $\dot{e}_{DL}$ и $\dot{e}_{LP}$ и последующим преобразованием, аналогичным с рассмотренным выше случаем. Величины любых линейных ускорений легко определить, пользуясь известными аналогами угловых ускорений и их истинных величин ($\varepsilon_i = \dot{\varphi}_i \dot{e}_{AB}$).

Разные точки базисного звена DCG описывают семейство замкнутых шатунных кривых, вид и размеры которых зависят от известных параметров рассматриваемого механизма.

Между координатами точек C и L существует рекуррентное соотношение, которое представляется в следующем виде (фиг. 1):

$$\begin{aligned}x_L &= L + AB \cos \varphi - BC \cos \alpha - CD \cos \omega + DL \cos \gamma, \\y_L &= AB \sin \varphi + BC \sin \alpha + CD \sin \omega + DL \sin \gamma.\end{aligned}\quad (25)$$

Из фиг. 1 очевидно, что

$$\varphi = 180^\circ - (\beta + \eta), \quad \alpha = \eta - \theta. \quad (26)$$

Из $\triangle ABC$ имеем

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB}, \\ \sin \beta &= \pm \frac{\sqrt{4AC^2 AB^2 - (AC^2 + AB^2 - BC^2)^2}}{2 \cdot AC \cdot AB}, \\ \cos \theta &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC}, \\ \sin \theta &= \pm \frac{\sqrt{4AC^2 BC^2 - (AC^2 + BC^2 - AB^2)^2}}{2 \cdot AC \cdot BC},\end{aligned}\quad (27)$$

где

$$AC = \sqrt{y^2 + (L - x)^2}.$$

Кроме того, имеем

$$\cos \eta = \frac{L - x}{AC}, \quad \sin \eta = \frac{y}{AC}, \quad (28)$$

$\angle KED = \angle KLD$, так как KD — общая сторона, $KE = LD$, а $KL = DE$ и, следовательно, $\angle KED = \angle KLD$. Вводим следующие обозначения $\angle KED = \gamma_1$, $\angle LDE = \gamma$. Таким образом,

$$\angle KED = \gamma = \rho, \quad \gamma - \rho = \gamma_1. \quad (29)$$

Из фиг. 1 имеем

$$h = DL \sin \gamma - PL \sin \rho, \quad (30)$$

$$h = KE \sin \gamma_1 - PK \sin \rho. \quad (31)$$

Из системы трех уравнений (29), (30), (31) определяются γ , γ_1 , ρ . Подставляя в уравнение окружности, описываемой точкой L ,

$$x_L^2 = (y_L - H)^2 = PL^2$$

выражения x_L , y_L из (25) и пользуясь выражениями $\cos \gamma$, $\sin \gamma$, определенными из системы (29)–(31), и выражениями $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, определенными из системы (26)–(28), получаем уравнение искомой шатунной кривой.

Մ. Բ. ԷԴԻՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Լ. ՏԱՐԿԻՅԱՆ

ՇՏՐԻՊՍԱՅԻՆ ՄՆԵԱՆԻՉՄԻ ԿԻՆԵՄԱՏՐԳԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատությունը նվիրված է քարի սդոցման հաստոցի շտրիպային մեխանիզմի կինեմատիկական անալիզին: Կառուցվածքային հասկանիչը բարդացնում է մեխանիզմի տատման ժամանակահատվածները և բացառում խնդրի ճշգրիտ լուծումը: Աշխատության մեջ տառադարձվում են հետազոտության մոտավոր գրաֆիկական (կեղծ գիրքերի) և հաշվային մեթոդներ, որոնք հնարավորություն են ընձևոտում, կլնելով կտրման պահանջվող արագությունից, բավարար ճշտությամբ որոշել տանող օղակի համապատասխան պատասխավել: Նշված է բաղիտային օղակի որոշակի կետի արտագծած շարժաթեկային կտրի համարման արտածումը:

А. Д. ГАЗАЗЯН

ВЫНУЖДЕННЫЙ β -РАСПАД ПРОТОНА, ИНДУЦИРОВАННЫЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ.

§ 1. Введение

Особый интерес, проявляемый к многофотонным процессам, обусловлен созданием мощных источников электромагнитного излучения. Рассмотрению этих вопросов посвящены несколько работ [1—3], в которых изучается влияние интенсивного поля на различные квантовоэлектродинамические процессы. В работе [4] рассматривается также влияние интенсивного излучения на ход реакций $\pi \rightarrow \mu + \nu$ и $\pi \rightarrow e + \gamma$.

В данной работе мы рассмотрим вынужденный β -распад протона под действием интенсивного электромагнитного излучения как с линейной, так и с круговой поляризацией. Очевидно, что для выполнения закона сохранения энергии число поглощенных квантов s должно удовлетворять соотношению

$$s \geq \min s = \frac{\Delta + m^*}{\omega}, \quad (1.1)$$

где $\Delta = M_n - M_p \approx 2,5 m$, m — обычная масса свободного электрона, m^* — „эффективная“ масса электрона в поле (см. формулы (2.10) и (3.6)). При вычислениях взаимодействие с электромагнитным излучением рассматривалось точно, а слабое взаимодействие учитывалось по теории возмущений.

Пусть электромагнитная волна распространяется по оси z и имеет вид $\vec{A}_\perp = \vec{A}_\perp(t - z)$, где $\vec{A}_\perp$ — вектор с компонентами $(A_x, A_y, 0)$. В таком поле интегралами движения являются поперечные компоненты импульса электрона p_x и p_y , а также некоторая величина λ , являющаяся собственным значением коммутирующего с гамильтонианом оператора $i\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Величину λ можно представить в виде $\lambda = E - p_z$, где E и p_z — некоторые постоянные и связаны друг с другом обычным релятивистским соотношением $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. При выключении электромагнитного поля, E и p_z будут совпадать с энергией

и третьей компонентой импульса электрона. Решение уравнения Дирака для электрона в таком поле имеет вид

$$e^{-\mu}(x) = \frac{v}{2\lambda} \begin{pmatrix} m + \lambda + \sigma_z(\vec{\sigma} \vec{\pi}_\perp) \\ (m - \lambda) \sigma_z + (\vec{\sigma} \vec{\pi}_\perp) \end{pmatrix} g^{\mu} e^{i(\vec{p} \vec{r} - Et) - iS(t-z)} \quad (1.2)$$

(см., напр. [3]), где индексом μ определяются два линейно независимых решения уравнения Дирака, v — нормировочный множитель, равный

$$v = \frac{2\lambda}{\sqrt{2 \int_V (m^2 + \vec{\pi}_\perp^2 + \lambda^2) dV}} \quad (1.3)$$

$\vec{\pi}_\perp = \vec{p}_\perp - e\vec{A}_\perp$ — поперечный импульс электрона в поле, g^μ — нормированный спинор

$$g^\mu g^\mu = 1 \quad (1.4)$$

и

$$S(t-z) = \frac{1}{2\lambda} \int_{t-z}^{t+z} [-2e(\vec{p}_\perp \vec{A}_\perp(\xi) + e^2 \vec{A}_\perp^2(\xi))] d\xi \quad (1.5)$$

Таким образом, четыре величины p_x , p_y , λ и μ образуют полный набор квантовых чисел, состояние которых для $\lambda > 0$ дается волновой функцией (1.2).

Рассмотрим β -распад

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu,$$

который энергетически запрещен для свободного протона. Лагранжиан взаимодействия для этого процесса имеет вид [5]

$$L_{int}(x) = \frac{G}{\sqrt{2}} (\bar{n}(x) \gamma_\mu (1 + \Lambda \gamma_5) p(x)) (\bar{\nu}(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e^-(x)), \quad (1.6)$$

где под уничтожением электрона мы будем понимать рождение позитрона, волновую функцию которого можно получить (1.2) заменой $E \rightarrow -E$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}^+$ и, следовательно, $\lambda \rightarrow -\lambda_+$ ($\lambda_+ > 0$) и $\vec{\pi}_\perp \rightarrow -\vec{\pi}_\perp^+$ ($\vec{\pi}_\perp^+ = \vec{p}_\perp^+ + e\vec{A}_\perp$). Наличие Λ обусловлено сильным взаимодействием между протоном и нейтроном в барионном токе и равно приблизительно 1, 25 [5].

При взаимодействии заряженной частицы с электромагнитным излучением важную роль играет безразмерная константа $\gamma = \frac{ea}{m}$, где a — амплитуда внешнего поля. При $\gamma \ll 1$ результаты переходят в соответствующие выражения теории возмущений, в которой взаимодействие происходит с отдельными фотонами излучения. Так как

масса нуклонов намного превышает массу позитрона, то влиянием электромагнитного излучения на эти частицы можно пренебречь.

В заключение этого параграфа отметим, что окончательные результаты этой работы можно использовать для изучения влияния электромагнитного излучения на ход реакции β -распада нейтрона.

§ 2. Случай линейной поляризации электромагнитного излучения

Рассмотрим β -распад протона в поле плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией

$$\vec{A}_\perp = \vec{e}_\perp a \cos \omega(t - z), \quad (2.1)$$

где $\vec{e}_\perp$ — единичный вектор в плоскости, перпендикулярной распространению электромагнитной волны ($|\vec{k}| = k_z = \omega$). В этом случае решение уравнения Дирака для позитрона можно представить в виде

$$e^{+p}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^2 a^2}{4\lambda_+ E_+}}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s V_s^{+p}(\vec{p}_\perp, \lambda_+; x) e^{-i[(\vec{q}^+ - s\vec{k})\vec{r} - (\varepsilon_+ - s\omega)t]}, \quad (2.2)$$

где

$$V_s^{+p}(\vec{p}_\perp, \lambda_+; x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{s+2k}(\alpha) J_k(\beta) \left(u_0^{+p} + \frac{s+2k}{\alpha} u_1^{+p} \right); \quad (2.3)$$

$$\alpha = x \cos \varphi, \quad (2.4)$$

φ — угол между поперечными векторами $\vec{e}_\perp$ и $\vec{p}_\perp$,

$$x = \gamma \frac{m}{\omega} \frac{|\vec{p}_\perp|}{\lambda_+}; \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{e^2 a^2}{8\lambda_+ \omega} \quad (2.6)$$

$$u_0^{+p} = \frac{1}{2\lambda_+} \sqrt{\frac{\lambda_+}{E_+}} \begin{pmatrix} m - \lambda_+ - \sigma_z (\vec{\sigma} \vec{p}_\perp) \\ (m + \lambda_+) \sigma_z - (\vec{\sigma} \vec{p}_\perp) \end{pmatrix} g^{\mu} \quad (2.7)$$

(u_0^{+p} — амплитуда свободного решения уравнения Дирака),

$$u_1^{+p} = \frac{1}{2} \gamma \frac{m}{\lambda_+} \sqrt{\frac{\lambda_+}{E_+}} \begin{pmatrix} \sigma_z (\vec{\sigma} \vec{e}_\perp) \\ (\vec{\sigma} \vec{e}_\perp) \end{pmatrix} g^{\mu}, \quad (2.8)$$

$q^+ (p_x^+, p_y^+, q_z^+)$ и ε_+ — соответственно средний „эффективный“ импульс и энергия электрона в поле:

$$q_z^+ = p_z^+ + \frac{1}{4} \gamma^2 \frac{m^2}{\lambda_+},$$

$$\varepsilon_+ = E_+ + \frac{1}{4} \gamma^2 \frac{m^2}{\lambda_+} \quad (E_+ > 0, \lambda_+ > 0). \quad (2.9)$$

Исходя из этих соотношений будем считать, что частица во внешнем поле обладает некоторой „эффективной“ массой, которую можно определить как

$$m^* = \sqrt{\varepsilon_+^2 - \vec{q}^{+2}} = m \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{2}}. \quad (2.10)$$

Подставляя волновую функцию (2.2) в выражение лагранжиана (1.6) и пренебрегая взаимодействием электромагнитного излучения в барийном токе, в первом приближении теории возмущений по отношению к слабому взаимодействию, легко получить матричный элемент вынужденного β -распада протона с поглощением s фотонов электромагнитного излучения:

$$(S_f^{(1)})_i = -\frac{iG}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{1 + \frac{e^2 a^2}{4\lambda_+ E_+}}} (-1)^s \delta(\vec{p}_p + s\vec{k} - \vec{p}_n - \vec{p}_\gamma - \vec{q}^+) \times$$

$$\times \delta(E_p + s\omega - E_n - E_\gamma - \varepsilon_+) \times \quad (2.11)$$

$$\times (\bar{u}_{p'}(p_n) \gamma_\mu (1 + \Lambda \gamma_5) u_p(p_p)) (\bar{v}_{\mu'}(p_\gamma) \gamma_\nu (1 + \gamma_5) V_s^{+\mu}(\vec{p}_\gamma^+, \lambda_+; x)),$$

где индексами p' , p , p' и μ обозначаются поляризационные состояния соответствующих частиц.

Рассмотрим для простоты лабораторную систему, где протон покоится ($\vec{p}_p = 0$) и предположим, что нейтрон получает очень малый

импульс ($\frac{|\vec{p}_n|}{M_n} \ll 1$). Определяя число конечных состояний как

$$d\Gamma = \frac{d\vec{p}_n}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{p}_\gamma}{(2\pi)^3} \frac{d\vec{q}^+}{(2\pi)^3}, \quad (2.12)$$

для дифференциальной вероятности β -распада протона с поглощением s фотонов получим следующее выражение:

$$d\omega_s = \frac{G^2}{(2\pi)^5} (1 + 3\Lambda^2) (s\omega - \Delta - \varepsilon_+)^2 d\vec{p}^+ dO_\gamma \times$$

$$\times \left| \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} J_{s-2k}(\alpha) J_k(\beta) J_{s+2l}(\alpha) J_l(\beta) \left(f_0 - \frac{(s+2k)\omega}{\alpha} \frac{\omega}{E_+} \left(\alpha f_1 - \frac{s+2l}{\alpha} \beta f_2 \right) \right) \right|^2, \quad (2.13)$$

где

$$f_0 = 1 + \chi \vec{v}_v \cdot \vec{v}^+,$$

$$f_1 = 1 + \frac{\chi}{2} \left[\frac{m - E_+}{(\vec{e}_\perp \cdot \vec{p}^+)} \left(\frac{(\vec{p}_\perp^+ \cdot \vec{e}_\perp)(\vec{p}^+ \cdot \vec{n})}{(m - E_+)^2} (\vec{v}_v \cdot \vec{n}) - \frac{2\lambda_+}{m - E_+} (\vec{v}_v \cdot \vec{e}_\perp) \right) - \left(1 + \frac{m - \lambda_+}{m - E_+} \right) (\vec{v}_v \cdot \vec{n}) \right], \quad (2.14)$$

$$f_2 = 4\chi \vec{v}_v \cdot \vec{n},$$

$$\chi = \frac{1 - \Lambda^2}{1 + 3\Lambda^2}, \quad \vec{v}_v = \frac{\vec{p}_v}{E_v}, \quad \vec{v}^+ = \frac{\vec{p}^+}{E_+},$$

$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ — единичный вектор по направлению оси z .

После интегрирования по углам вылета нейтрино, окончательно получим

$$d\omega_s = \frac{2G^2}{(2\pi)^4} (1 + 3\Lambda^2) (s\omega - \Delta - \varepsilon_+)^2 d\vec{p}^+ \times \left| \sum_{k, l=-\infty}^{\infty} J_{s+2k}(x) J_k(\beta) J_{s+2l}(x) J_l(\beta) \left(1 - \frac{\omega}{E_+} (s + 2k) \right) \right|. \quad (2.15)$$

§ 3. Случай круговой поляризации электромагнитного излучения

Рассмотрим вынужденный β -распад протона в поле плоской электромагнитной волны с круговой поляризацией, которую удобно написать по компонентам:

$$\begin{aligned} A_x &= a \cos \omega(t - z), \\ A_y &= a \sin \omega(t - z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Аналогично случаю линейной поляризации, решение уравнения Дирака для позитрона в таком поле можно написать в виде

$$\begin{aligned} e^{+\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{e^2 a^2}{2\lambda_+ E_+}}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} (-1)^s e^{is\Phi} V_s^{+\mu}(\vec{p}_\perp^+, \lambda_+; x) \times \\ &\times e^{-i[(\vec{q}^+ - s\vec{k}) \cdot \vec{r} - (\varepsilon_+ - s\omega)t]}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$V_s^{+\mu}(\vec{p}_\perp^+, \lambda_+; x) = u_0^{+\mu} J_s(x) + v_1^{+\mu} J_{s-1}(x) e^{-i\Phi} + v_2^{+\mu} J_{s+1}(x) e^{i\Phi}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 u_0^{+\mu} &= \frac{1}{2\lambda_+} \sqrt{\frac{\lambda_+}{E_+}} \begin{pmatrix} m - \lambda_+ - \sigma_z (\vec{\sigma} \vec{p}_+^+) \\ (m + \lambda_+) \sigma_z - (\vec{\sigma} \vec{p}_+^+) \end{pmatrix} g^\mu, \\
 v_1^{+\mu} &= \frac{1}{4} \gamma \frac{m}{\lambda_+} \sqrt{\frac{\lambda_+}{E_+}} \begin{pmatrix} \sigma_x + i\sigma_y \\ \sigma_x + i\sigma_y \end{pmatrix} g^\mu, \\
 v_2^{+\mu} &= \frac{1}{4} \gamma \frac{m}{\lambda_+} \sqrt{\frac{\lambda_+}{E_+}} \begin{pmatrix} -(\sigma_x - i\sigma_y) \\ \sigma_x - i\sigma_y \end{pmatrix} g^\mu, \\
 x &= \gamma \frac{m}{\omega} \frac{|\vec{p}_+^+|}{\lambda_+} \quad (E_+ > 0, \quad \lambda_+ > 0),
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

а Φ — угол, который составляет поперечный вектор $\vec{p}_+^+$ с осью x .

Вектор $\vec{q}^+ (p_x^+, p_y^+, q_z^+)$ и ε_+ , как и в случае линейной поляризации, представляют соответственно средний „эффективный“ импульс и энергию частицы в поле

$$\begin{aligned}
 q_z^+ &= p_z^+ + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{m^2}{\lambda_+}, \\
 \varepsilon_+ &= E_+ + \frac{1}{2} \gamma^2 \frac{m^2}{\lambda_+}.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Соответственно, „эффективная“ масса частицы во внешнем поле будет равна

$$m^* = \sqrt{\varepsilon_+^2 - \vec{q}^{+2}} = m \sqrt{1 + \gamma^2}. \tag{3.6}$$

Подставляя волновую функцию позитрона (3.2) в выражение лагранжиана (1.6) и пренебрегая взаимодействием электромагнитного излучения в барионном токе, аналогично первому случаю, для матричного элемента вынужденного β -распада протона с поглощением s фотонов излучения, в первом приближении теории возмущений по отношению к слабому взаимодействию, получим

$$\begin{aligned}
 (S_{if}^{(1)})_s &= \frac{-iG}{V^2} \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{1 + \frac{e^2 a^2}{2\lambda_+ E_+}}} (-1)^s e^{is\Phi} \delta(\vec{p}_p + s\vec{k} - \vec{p}_n - \vec{p}_s - \vec{q}^+) \times \\
 &\quad \times \delta(E_p + s\omega - E_n - E_s - \varepsilon_+) \times \\
 &\quad \times (\bar{u}_p(p_n) \gamma_5 (1 + \Lambda \gamma_5) \rho_p(p_p)) (\bar{v}_n(p_s) \gamma_5 (1 + \gamma_5) V_s^{+u}(\vec{p}_+^+, \lambda_+; x)).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Рассмотрим лабораторную систему, где протон покоится ($\vec{p}_p = 0$), и предположим, что нейтрон получает очень малый импульс

($\frac{|\vec{p}_n|}{M_n} \ll 1$). Тогда, определяя число конечных состояний $d\Gamma$ анало-

гично первому случаю, для дифференциальной вероятности вынужденного β -распада протона с поглощением s фотонов получим следующее выражение:

$$dw_s = \frac{G^2}{(2\pi)^5} (1 + 3\lambda^2) (s\omega - \Delta - \varepsilon_+)^2 d\vec{p}^+ dO_+ \left\{ J_s^2(x) (1 + \chi \vec{v}_+ \cdot \vec{v}^+) + \right. \\ \left. + \gamma \frac{m}{E_+} J_{s+1}(x) \left[\frac{|\vec{p}_+^+|}{\lambda_+} \left(\frac{1}{2} \gamma \frac{m}{|\vec{p}_+^+|} J_{s+1}(x) - J_s(x) \right) (1 + \chi \vec{v}_+ \cdot \vec{n}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \chi \frac{E_+}{|\vec{p}_+^+|} J_s(x) (\vec{v}_+^+ \cdot \vec{v}_+) \right] \right\}. \quad (3.8)$$

После интегрирования по углам вылета нейтрино окончательно получим

$$dw_s = \frac{2G^2}{(2\pi)^4} (1 + 3\lambda^2) (s\omega - \Delta - \varepsilon_+)^2 d\vec{p}^+ \times \\ \times \left[J_s^2(x) + x J_{s+1}(x) \frac{\omega}{E_+} \left(\frac{1}{2} \frac{\omega}{|\vec{p}_+^+|} \frac{\lambda_+}{|\vec{p}_+^+|} x J_{s+1}(x) - J_s(x) \right) \right]. \quad (3.9)$$

При достижимых в настоящее время полях лазерного излучения ($\sim 10^8$ в/см), эффект вынужденного β -распада протона весьма мал и составляет величину порядка 10^{-6} сек $^{-1}$.

Для нахождения полной дифференциальной вероятности процесса, надо произвести суммирование по s :

$$dW = \sum_{s > \min s}^{\infty} dw_s,$$

где $\min s$ определяется условием (1.1).

В заключение автор выражает благодарность профессору М. Л. Тер-Микаеляну за постоянный интерес и содействие в работе, а также В. И. Ритусу и И. И. Гольдману за дискуссию.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета и
Академии наук Армянской ССР

Поступила 14 VIII 1964

Ա. Դ. ԳԱԶԱՐՅԱՆ

ՊՐՈՏՈՆԻ ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ β -ՏՐՈՂՈՒՄԸ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅ
ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԵԻՍԱԿԱՆ ՀԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ԿՈՂՄԻՑ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ գիտարկված է պրոտոնի ստիպողական β -տրոհումը հարթ էլեկտրամագնիսական հառաքայթման կողմից: Ստացված է նաև արտա-

հարաբերակցություններ արձակված պողիտրոնի հաճախականությունների անկյունային ու էներգետիկ բաշխման համար՝ էլեկտրամագնիսական ճառագայթման հարթ և շրջանային բևեռացումների դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Reiss H. R. Absorption of Light by Light. J. Math. Phys., 3, 59, 1962.
2. Никитов А. И., Ритус В. И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле I. ЖЭТФ, 46, 1964, 776.
3. Гольдман И. И. Эффекты интенсивности в комптоновском рассеянии. ЖЭТФ, 46, 1964, 1412.
4. Никитов А. И., Ритус В. И. Квантовые процессы в поле плоской электромагнитной волны и в постоянном поле II. ЖЭТФ, 46, 1964, 1768.
5. Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, М., 1963.

Ю. М. АИВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

ВОЗБУЖДЕНИЕ СИСТЕМЫ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

В настоящей работе рассматривается возбуждение системы полубесконечных плоских волноводов при вылете из одного из них линейного источника, то есть заряженной или токовой нити. Также рассматривается излучение в волновой зоне и предельный переход, когда расстояние между пластинами стремится к нулю. Отметим, что задачи дифракции электромагнитных волн на такой системе были рассмотрены в [1, 2], а в работах [3] рассматривалось возбуждение системы полубесконечных плоскостей, когда линейные источники пролетают мимо них.

Пусть линейный источник, параллельный оси z , вылетает с постоянной скоростью v по оси x из одного из полубесконечных волноводов. Система идеально проводящих полуплоскостей описывается уравнениями $y = (2n + 1)b$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $x < 0$, $-\infty < z < \infty$. Расстояние между двумя соседними полуплоскостями равно $2b$. Для начала рассмотрим равномерно заряженную нить с линейной плотностью заряда ρ . В этом случае отличны от нуля компоненты полей E_x , E_y и H_z . В данном случае удобно искать $E_x = E$, которое в силу граничных условий должно быть равно нулю на полуплоскостях. Остальные компоненты полей находятся из E_x . Рассмотрим область $(2n - 1)b < y < (2n + 1)b$, то есть область n -го волновода и его продолжения. Поле в этой области обозначим через $E_n(x, \xi)$, где $\xi = y - 2nb$, $|\xi| < b$. Представим $E_n(x, \xi)$ в виде интеграла

$$E_n(x, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} E_{n,p}(x, \xi) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} E_p(x, \xi) e^{i\mu n} d\mu. \quad (1)$$

Из этого разложения вытекает, что

$$E_{n+1,p}(x, \xi) = E_{n,p}(x, \xi) e^{i\mu}. \quad (2)$$

Будем искать $E_{n,p}$ в виде $E_{n,p} = \tilde{E}_{n,p} + E_{n,p}^0$, где

$$E_{n,p}^0(x, \xi) = \frac{1}{2\pi} E^0(x, \xi) e^{i\mu n}, \quad (3)$$

а $E^0(x, \xi)$ есть поле движущейся заряженной нити в бесконечном волноводе $-b < \xi = y < b$, $-\infty < x, z < \infty$. Для $E^0(x, \xi)$ легко получить следующее выражение

$$E^0(x, \xi) = \int E^0_\omega(x, \xi) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$E^0_\omega(x, \xi) = -\frac{i\rho\omega\gamma}{kc^2} e^{i\frac{\rho\omega}{v}x} \left[e^{-k\gamma|\xi|} - \frac{chk\gamma\xi}{chk\gamma b} e^{-k\gamma b} \right]. \quad (4)$$

$$k = \frac{|\omega|}{c}, \quad \gamma^2 = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

$\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi)$ будем искать в виде

$$\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi) = \int \tilde{E}_{n,\mu\omega}(a, \xi) e^{-i\alpha x - i\omega t} d\alpha d\omega. \quad (5)$$

Введем обозначение $\tilde{E}_{n,\mu\omega}(a, \xi) \equiv \varphi_n(a, \xi)$. Так как $\tilde{E}_{n,\mu}(x, \xi)$ должно удовлетворять однородному уравнению Даламбера, то $\varphi_n(a, \xi)$ имеет следующий вид

$$\varphi_n(a, \xi) = A_n e^{\lambda\xi} + B_n e^{-\lambda\xi}, \quad (6)$$

где A_n и B_n функции от a , $\lambda^2 = a^2 - k^2$, $\text{Im} k = \delta > 0$. Из условия непрерывности $E_n(x, b) = E_{n+1}(x, -b)$ с учетом того, что $E^0(x, \pm b) = 0$ и (2) получим

$$B_n = CA_n, \quad C = \frac{e^{-\lambda b + i\mu b} - e^{\lambda b}}{e^{-\lambda b} - e^{\lambda b + i\mu b}}. \quad (7)$$

Введем теперь обозначения

$$\varphi_n^\pm(a, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{E}_{n,\mu\omega}(\pm a, \xi) e^{\pm i\alpha x} d\alpha, \quad (8)$$

тогда

$$\varphi_n(a, \xi) = \varphi_n^+(a, \xi) + \varphi_n^-(a, \xi). \quad (9)$$

При $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, следовательно, имеем

$$\varphi_n^+(\xi) + \varphi_n^-(\xi) = A_n (e^{\lambda\xi} + C e^{-\lambda\xi}), \quad (10)$$

здесь мы вместо $\varphi_n^\pm(a, \xi)$ написали просто $\varphi_n^\pm(\xi)$ для удобства. Введем теперь обозначение $\varphi_n(\xi) = \int \varphi_n(\xi) d\xi$, тогда

$$\varphi_n^+(\xi) + \varphi_n^-(\xi) = \frac{A_n}{\lambda} (e^{\lambda\xi} - C e^{-\lambda\xi}) \quad (11)$$

при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$ и, аналогично, при $(2n+1)b < y < (2n+3)b$

$$\varphi_{n+1}^{+}(\xi) + \varphi_{n+1}^{-}(\xi) = \frac{A_n e^{i\mu}}{\lambda} (e^{i\xi} - C e^{-i\xi}). \quad (12)$$

Напишем теперь соотношения (10)–(12) при $y = (2n+1)b$, то есть на n -ой пластине и ее продолжении и учтем, что в силу граничных условий $\varphi_n^{-}(b) = 0$

$$\varphi_n^{+}(b) = A_n (e^{i\lambda b} + C e^{-i\lambda b}), \quad (13)$$

$$\varphi_n^{+}(b) + \varphi_n^{-}(b) = \frac{A_n}{\lambda} (e^{i\lambda b} - C e^{-i\lambda b}), \quad (14)$$

$$\varphi_{n+1}^{+}(-b) + \varphi_{n+1}^{-}(-b) = \frac{A_n e^{i\mu}}{\lambda} (e^{-i\lambda b} - C e^{i\lambda b}). \quad (15)$$

Обозначим

$$\varphi_{n+1}^{+}(-b) - \varphi_n^{+}(b) = S^{\pm}. \quad (16)$$

Здесь функция $S^{\pm}$ неизвестная. Она голоморфна в нижней полуплоскости комплексного переменного α . $S^{\pm}$ можно легко определить из условий непрерывности интеграла полного поля. Из этого условия получаем

$$S^{\pm} = -\frac{Q}{\alpha + \frac{w}{v}}, \quad \text{где } Q = \frac{\rho}{4\pi^2 w} \frac{e^{i\mu n} (1 + e^{i\mu})}{ch k \gamma b}. \quad (17)$$

Вычитая (15) из (14) и учитывая (16), (17) и (7), получим уравнение

$$S^{\pm} + \frac{Q}{\alpha + \frac{w}{v}} = -\frac{1}{b} \frac{K(\mu, \alpha)}{\lambda^2} \varphi_n^{+}(b), \quad (18)$$

где

$$K(\mu, \alpha) = \frac{2\lambda b (\ch 2\lambda b - \cos \mu)}{\sh 2\lambda b}.$$

Уравнение (18) типа Винера-Хопфа. Для его решения необходимо факторизовать функцию $K(\mu, \alpha)$, то есть представить её в виде $K(\mu, \alpha) = K_{+}(\mu, \alpha) K_{-}(\mu, \alpha)$, где K_{+} и K_{-} соответственно голоморфны в нижней и верхней полуплоскостях комплексного переменного α . Как нетрудно убедиться K_{+} и K_{-} имеют следующий вид:

$$K_{\pm}(\mu, \alpha) = (1 - \cos \mu)^{1/2} e^{\pm i \frac{2b\alpha}{\pi} \ln 2} \left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \mp \frac{2b\alpha}{|\mu|} \right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\lambda_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\lambda_j} \right] \left[\left(1 - \frac{4b^2 k^2}{\gamma_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\gamma_j} \right]}{\left[\left(1 - \frac{4k^2 b^2}{(\pi j)^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\pi j} \right]}, \quad (19)$$

где $\lambda_j = 2\pi j + \mu$, $\gamma_j = 2\pi j - \mu$, $\lambda_0 = |\mu|$.

Решение уравнения (18) имеет следующий вид:

$$\varphi_n^{\pm}(b) = \frac{b(x+k) \left(k + \frac{\omega}{v} \right) Q}{\left(x + \frac{\omega}{v} \right) K_{-} \left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_{+}(\mu, x)}. \quad (20)$$

Коэффициенты A_n и B_n выражаются через $\varphi_n^{\pm}(b)$ следующим образом:

$$A_n = \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda b} (e^{2\lambda b} - e^{-i\mu})}{\operatorname{sh} 2\lambda b} \varphi_n^{+}(b), \quad B_n = -\frac{1}{2} \frac{e^{\lambda b} (e^{-2\lambda b} - e^{-i\mu})}{\operatorname{sh} 2\lambda b} \varphi_n^{+}(b), \quad (21)$$

Теперь, учитывая (1), (5), (6), а также то, что функции $K_{\pm}(\mu, x)$ согласно их определению (19), — четные по μ , получим при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{x,\omega}(x, y) &= \frac{cb}{4\pi^2\omega} \frac{k + \frac{\omega}{v}}{\operatorname{ch} k\gamma b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\alpha + k}{\alpha + \frac{\omega}{v}} d\alpha \times \\ &\times \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\xi_n(\lambda) e^{\lambda(y-2nb)} + \xi_{-n}(\lambda) e^{-\lambda(y-2nb)}}{K_{-} \left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_{+}(\mu, x) \operatorname{sh} 2\lambda b} d\mu, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\xi_n(\lambda) = [\cos \mu n + \cos \mu(n+1)] e^{\lambda b} - [\cos \mu n + \cos \mu(n-1)] e^{-\lambda b}$.

Отметим, что при $n \neq 0$ $\tilde{E}_{x,\omega}$, очевидно, есть Фурье-компонента полного поля E_x . При $n=0$ для получения полного поля к $\tilde{E}_{x,\omega}$ необходимо добавить $E_{x,\omega}^0$ из (4). Рассмотрим поле $E_{x,\omega}$ внутри n -го волновода, то есть при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, $x < 0$. Нетрудно убедиться, что подынтегральное выражение в (22) не имеет точки ветвления в верхней полуплоскости комплексного переменного α . Поэтому интегрирование по α в (22) в этом случае сведется к вычислению вычетов подынтегрального выражения. Эти вычеты дают собственные волноводные волны

$$\tilde{E}_{x,\omega}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ P_{nm} \cos \left[\frac{\pi(2m-1)}{2b} (y-2nb) \right] e^{-i\alpha_{2m-1}x} + \right.$$

$$+ Q_{nm} \sin \frac{m\pi}{b} (y - 2nb) e^{-i\alpha_{2m}x}, \quad (23)$$

$$Q_{nm} = \frac{\rho m (-1)^{m+1}}{\omega l b \alpha_{2m}} \frac{(\alpha_{2m} + k) \left(k + \frac{\omega}{v}\right)}{\left(\alpha_{2m} + \frac{\omega}{v}\right) \operatorname{ch} k_1 b} \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\sin \mu n \sin \mu}{K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v}\right) K_+(\mu, \alpha_{2m})} d\mu,$$

$$P_{nm} = \frac{\rho (2m-1) (-1)^{m+1}}{\omega l b \alpha_{2m-1}} \frac{(\alpha_{2m-1} + k) \left(k + \frac{\omega}{v}\right)}{\left(\alpha_{2m-1} + \frac{\omega}{v}\right) \operatorname{ch} k_1 b} \times$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\cos \mu n (1 + \cos \mu)}{K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v}\right) K_+(\mu, \alpha_{2m-1})} d\mu, \quad (24)$$

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{2b}\right)^2}.$$

Оценка интегралов (24) производится точно также, как в [1]. Для оценки запишем

$$P_{nm} = \int_0^\pi \cos \mu n \dot{\psi}_m(\mu) d\mu, \quad Q_{nm} = \int_0^\pi \sin \mu n \dot{\xi}_m(\mu) d\mu;$$

интегрируя два раза по частям и учитывая, что $\xi_n(0) = \xi_n(\pi) = 0$, получим

$$P_{nm} = [(-1)^n \dot{\psi}_m(\pi) - \dot{\psi}_m(0)] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (25)$$

$$Q_{nm} = [(-1)^n \dot{\xi}_m(\pi) - \dot{\xi}_m(0)] \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (26)$$

Формулами (25) и (26) можно пользоваться уже при $n=3$. Ошибка при этом порядка 0,01.

Перейдем теперь к вычислению поля в дальней зоне при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$, $x > 0$. Положим $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. При больших r интеграл по z в (22) можно вычислить по методу перевала. В этом случае необходимо также учитывать полюс при $z = -\frac{\omega}{v}$.

Вклад от этого полюса плюс нулевое поле задачи, которое необходимо учитывать при $n=0$, дают поле нити в пустоте. Отвлекаясь от этого, для $E_{x,w}$ при больших r получим следующее выражение для $E_{x,w}(x, y)$ при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$:

$$E_{x,w}(x, y) = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{pb}{i\omega} \frac{\left(k + \frac{\omega}{v}\right)(1 - \cos \theta) \sin \theta}{\operatorname{ch} k\gamma b \sin(2kb \sin \theta) \left(\frac{\omega}{v} - k \cos \theta\right)} \times \\ \times \frac{e^{\frac{ikr-l}{4}}}{r^{1/2}} \int_0^{\pi} \frac{[\zeta_+(ik \sin \theta) - \zeta_-(-ik \sin \theta)] e^{-2ikb \sin \theta}}{K_-(\mu, -\frac{\omega}{v}) K_+(\mu, -k \cos \theta)} d\mu. \quad (27)$$

Необходимо еще вычислить интеграл по μ . Для этого предположим что $2\pi j < 2kb \sin \theta < (2j+1)\pi$. В этом случае в K_+ при $0 < \mu < \pi$ обращается в 0 член с λ_j , а при $(2j-1)\pi < 2kb \sin \theta < 2\pi j$ обращается в 0 член с λ_j^* . Рассмотрим, например, случай, когда $2\pi j < 2kb \sin \theta < (2j+1)\pi$. Введем переменную x по формуле $4b^2k^2 - \lambda_j^2 = 4b^2x^2$, тогда

$$\frac{1}{K_-(\mu, -k \cos \theta)} \sim \frac{1}{x - k \cos \theta} = P \frac{1}{x - k \cos \theta} + i\pi \delta(x - k \cos \theta).$$

При этом интегралом в смысле главного значения можно пренебречь, так как из-за больших n подынтегральное выражение в нем будет сильно осциллирующей функцией. Интеграл же от δ -функции сразу берется. Вводя также обозначения

$$\bar{K}_{\pm}(\mu, x) = \frac{K_{\pm}(\mu, x)}{\left[\left(1 - \frac{4b^2k^2}{\lambda_j^2}\right)^{1/2} \mp i \frac{2bx}{\lambda_j}\right]}, \quad (28)$$

окончательно получим следующее выражение для поля в дальней зоне

$$E_{x,w}(x, y) = \frac{4kib^2\beta^2}{\omega} \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{\left(k + \frac{\omega}{v}\right)(1 - \cos \theta)}{\operatorname{ch} k\gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)} \times \\ \times \frac{\sin^2 \theta \cos \theta \cos(bk \sin \theta)}{\bar{K}_+(\sigma, -k \cos \theta) \bar{K}_-(\sigma, -\frac{\omega}{v})} \frac{e^{\frac{ikr-l}{4}}}{r^{1/2}}, \quad (29)$$

где $\sigma = 2\pi j - 2bk \sin \theta$, при $2\pi j < 2bk \sin \theta < (2j+1)\pi$. В случае, когда $(2j-1)\pi < 2bk \sin \theta < 2\pi j$, $\sigma = 2kb \sin \theta - 2\pi j$. В этом случае в (29) появляется общий минус, а в определении $\bar{K}_{\pm}(\mu, x)$ в (28) λ_j нужно за-

менить на γ_l . Выражение (29) не зависит от n , это и понятно, так как поле в дальней зоне представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну. Остальные компоненты полей можно найти из (29) или (22) с помощью уравнений Максвелла. Приведем выражение для интенсивности излучения $I_m(\theta) = cr |H_{z,m}|^2$. Полная интенсивность излучения будет

$$I_m = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_m(\theta) d\theta, \quad (30)$$

$$I_m(\theta) = \frac{2b^4 k^4 \rho^2 \beta^2}{\pi c} \frac{(1 + \beta)^2 \sin^2 2\theta (1 - \cos \theta)^2 \cos^2 (bk \sin \theta)}{\operatorname{ch}^2 k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2 \left| \tilde{K}_- \left(\sigma, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(\sigma, -k \cos \theta \right) \right|^2}, \quad (31)$$

здесь σ зависит от величины $2kb \sin \theta$, как было указано ранее. Рассмотрим предельный случай $b \rightarrow 0$. Из (31) получим при $b \rightarrow 0$

$$I_m(\theta) = \frac{2\rho^2 \beta^2}{\pi \omega} \frac{(1 + \beta)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

Это есть интенсивность переходного излучения заряженной нити, вылетающей из среды, имеющей бесконечную проводимость вдоль оси z и нулевую проводимость вдоль оси y . Естественно, что эта интенсивность отличается от переходного излучения заряженной нити, вылетающей из однородного металла.

Рассмотрим теперь случай, когда вылетает нить, по которой течет ток J . В этом случае отличны от нуля компоненты полей E_z , H_x и H_y . Будем искать E_z . Решение ищется вполне аналогично предыдущему случаю, но в (11) и (12) вместо интегрирования нужно брать производные. Это связано с тем, что около края пластин наведенные токи и заряды должны иметь следующее поведение $\rho \sim x^{-1/2}$, $i_x \sim x^{1/2}$, $j_z \sim x^{-1/2}$. Для $E_{z,m}$ получим при $(2n-1)b < y < (2n+1)b$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{z,m}(x, y) = & -\frac{\omega J b}{4\pi^2 v c^2 \operatorname{ch} k \gamma b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i z x} dx \times \\ & \times \int_0^{\pi} \frac{\zeta_n e^{\lambda(y-2nb)} + \zeta_{-n} e^{-\lambda(y-2nb)}}{\left(\alpha + \frac{\omega}{v} \right) K_- \left(\mu, -\frac{\omega}{v} \right) K_+ \left(\mu, \alpha \right) \operatorname{sh} 2\lambda b} d\mu. \end{aligned} \quad (32)$$

Приведем выражение для $E_{z,m}$ при $r \rightarrow \infty$ в дальней зоне.

$$E_{z,\omega}(x, y) =$$

$$= -i\omega J b^2 k c \beta \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} \frac{\sin \theta \sin 2\theta \cos(bk \sin \theta) e^{ikr - i \frac{\pi}{4}}}{\operatorname{ch} k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \tilde{K}_- \left(z, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(z, -k \cos \theta \right)} \quad (33)$$

Для интенсивности излучения имеем

$$I_{\omega}(\theta) = cr (|E_z, \omega|)^2 = \frac{2cJ^2 b^4 k^2 \beta^2}{\pi} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 2\theta \cos^2(bk \sin \theta)}{\operatorname{ch}^2 k \gamma b (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \left| \tilde{K}_- \left(z, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}_+ \left(z, -k \cos \theta \right) \right|^2} \quad (34)$$

полная интенсивность отсюда находится по формуле (30). Рассмотрим в этой формуле предельный переход $b \rightarrow 0$. Получим в этом случае

$$I_{\omega}(\theta) = \frac{2J^2 \beta^2 c^2}{\pi \omega} \frac{\cos^2 \theta}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2}.$$

Эта формула совпадает с формулой для интенсивности переходного излучения нити с током из сплошной однородной металлической среды в вакуум. Это вполне понятно, так как в данной задаче имелось только лишь поле E_z , которое направлено вдоль оси с бесконечной проводимостью.

ЦИНФТЛ АН Армянской ССР
ФИАН СССР им. П. Н. Лебедева

Поступила 29 V 1964

ՅՈՒ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿԻՆ

ԿԻՍԼՈՒՆՆԵՐԶ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻՑ ԲԱՂԱՅԱՆՍԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ԳՐԳՈՒՄԸ
ԳԾԱՅԻՆ ԱՂՅՈՒՐՆԵՐՈՎ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Աշխատության մեջ դիտարկվում է կիսաանվիրջ հարթ ալիքատարների սխեմայի զրգույրը նրանցից մեկի միջից լիցքավորված կամ հոսանքատար լարի դուրս թողնու գնալքում: Որոշվում են էլեկտրամագնիսական դաշտի էլեկտրական վեկտորի տանգենցիալ կոմպոնենտների Շնորհիվ ալիքատարների սխեմայի պերիոդիկ հատուկությունների, էլեկտրամագնիսական դաշտերի «կարումը» բերվում է այդ դաշտերի «կարմանը» միայն մեկ թվի միջոցով: Էլեկտրական վեկտորի տանգենցիալ կոմպոնենտների համար ստացվում են վիճակ-հոսքի տիպի ֆունկցիոնալ հավասարումներ, որոնք և լուծվում են: Դրանով են ալիքատարների սխեմայի հառադրվածան խնամակալությունը ալիքային դաշտում, ալիքատարների ներքում և նրանցից դուրս: Կատարված է սահմանային անցում, երբ թիվի միջև հեռավորությունը ձգտում է

արդի: Յույժ է տրված, որ հսկանալու լարի դեպքում հառադալթման
րանաձևը անցնում է հարմար անցումային հառադալթման ինտենսիվության
րանաձևին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бахланов Е. В. Излучение электромагнитных волн из системы полубесконечных пластин. ДАН СССР, 153, 1963, 570.
2. Carlson J. F., Heins A. E. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates I. Quart. Appl. Math., 4, 1946, 313. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates II. Quart. Appl. Math., 5, 1947, 82.
3. Болотовский Б. М. и Воскресенский Г. В. Поле заряженной нити, равномерно движущейся вблизи от системы идеально проводящих полуплоскостей. ДАН СССР, 156, 1964, 770. Излучение линейного источника, пролетающего вблизи дифракционной решетки, образованной системой идеально проводящих полуплоскостей. ЖТФ, 34, 1964, 1856.

В. С. АРАКЕЛЯН, Р. А. КАЗАРЯН, Л. В. СИМОНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БЕНТОНИТА

Электрооптический эффект как способ внешней модуляции света к настоящему времени получил наибольшее распространение.

В этой связи определенный интерес представляют исследования возможностей применения для названной цели новых материалов, в частности, коллоидного раствора бентонита—глины, в основном, состоящей из минералов группы монтмориллонита и бейделита и, как известно, обладающей аномально большой постоянной Керра и теоретически малым временем релаксации [2]. Исследования электрооптических свойств, выполненные для вайоминского бентонита [3] и [4] преследуют иные цели и поэтому на поставленный выше вопрос не отвечают. Ниже приводятся результаты исследования электрооптических свойств армянского (саригюхского) бентонита. Исследованию подвергались три образца особым образом приготовленных коллоидных растворов, отличающихся размерами взвешанных частиц.

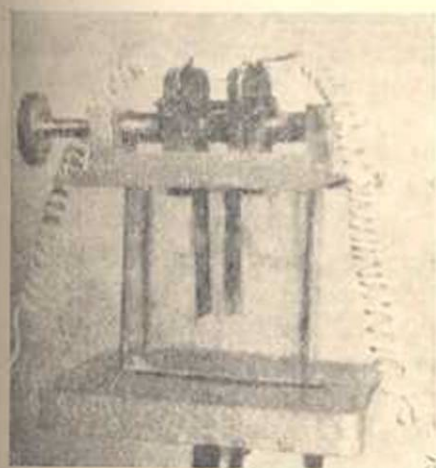
При этом образец № 1 состоял из частиц с диаметрами, не превосходящими 0,6 м, а образец № 2 состоял из частиц с диаметрами не более 2 м. Кроме того, ввиду большой электропроводимости бентонитной суспензии, основные измерения были повторены с образцом № 1, предварительно подвергнутом электродиализу в течение 14 часов на электродиализаторе ВД—1 (образец № 3). Измерялись прозрачность, постоянная Керра, а также зависимость постоянной Керра от частоты подаваемого на ячейку Керра синусоидального напряжения.

Во избежание коагуляции частиц, имеющей место при воздействии на коллоид постоянного напряжения, в наших измерениях использовались синусоидальные и импульсные напряжения. Исследуемый раствор помещался в стеклянную ячейку (фиг. 1) с серебряными электродами, расстояние между которыми изменялось регулируемым винтом.

1. *Пропускание* образцов относительно эталона, пропускание которого принимается равным 100%, измерялось на кварцевом спектрофотометре СФ—4 на длинах волн 6493 Å, 6328 Å и 5400 Å. Результаты измерения приведены в табл. 1.

II. *Постоянная Керра* определялась по схеме фиг. 2, когда переключатель II находился в положении I. Переменное напряжение частотой 50 гц снималось с ЛАТР-а.

Через ячейку Керра пропусклся поляризованный свет, полученный в результате прохождения неполяризованного света от источника через поляризатор. В результате воздействия на ячейку Керра напряжения, раствор становился двоякопреломляющим, вследствие чего выходящий из ячейки свет приобретал



Фиг. 1.

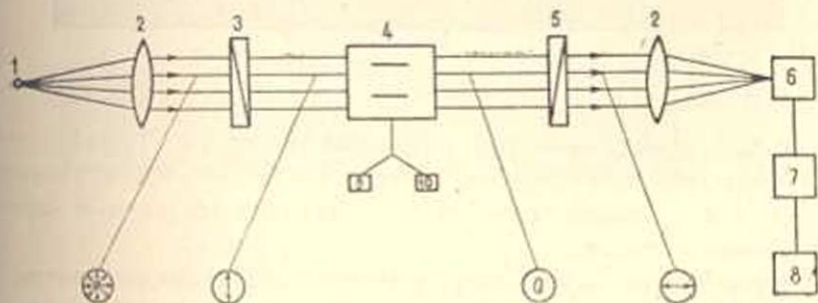
эллиптическую поляризацию. Пройдя через анализатор, эллиптически поляризованный свет снова становился линейно поляризованным, причем его амплитуда менялась в соответствии с напряжением, подаваемым на ячейку Керра.

Постоянная Керра вычислялась из выражения

$$B = \frac{\delta}{2\pi l E^2},$$

где l —длина луча света в ячейке,

E —напряженность электрического поля в ячейке Керра,



Фиг. 2. 1—источник света; 2—линза; 3—поляризатор; 4—ячейка Керра; 5—анализатор; 6—монокроматор; 7—фотоумножитель; 8—осциллограф; 9—источник импульсного напряжения; 10—источник синусоидального напряжения.

δ —сдвиг фазы, определяемый из выражения $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{a}{b}$, где a и b —соответственно малая и большая полуоси эллипса. Результаты измерений постоянной Керра приведены в табл. 2. Для сравнения отметим, что постоянная Керра нитробензола равняется $2 \cdot 10^{-5}$ CGSE.

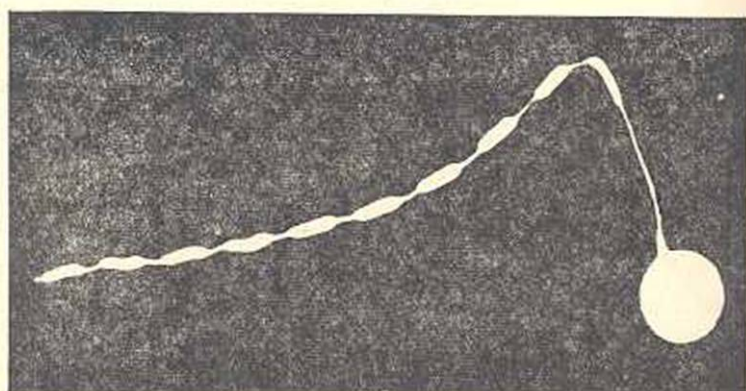
Таблица 2

№ образ- цов	в ед. CGSE
1	0.3
2	0.01
3	0.2

III. *Время релаксации*, как показали предварительные измерения, оказалось значительным, вследствие чего метод, описанный в [1] здесь непригоден.

Использованный нами метод измерения времени релаксации заключался в сравнении длительности фронта импульса напряжения, подаваемого на ячейку Керра, и фронта светового импульса, наблюдаемых на осциллографе (переключатель II в положении II, фиг. 2).

Импульсное напряжение получалось в результате разряда конденсатора, либо прерывания постоянного напряжения от УИП-1. Длительность фронта импульса напряжения, подаваемого на ячейку Керра, практически равнялась нулю, в то время как фронт импульса света, прошедшего через ячейку (фиг. 3), растягивался ввиду инерционности эффекта Керра.

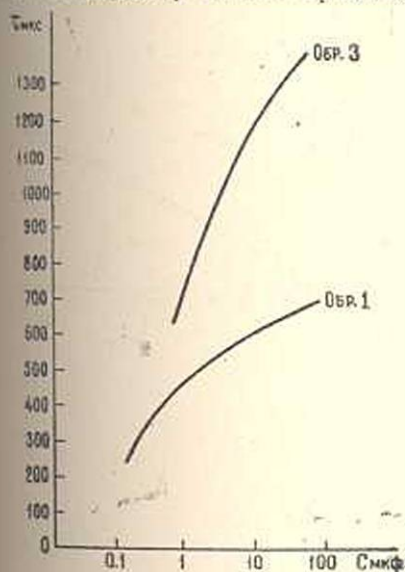


Фиг. 3.

Как видно из графика фиг. 4, время релаксации растет с увеличением разрядной емкости. Это говорит о том, что время релаксации сравнимо, а при малых емкостях превосходит постоянную времени разряда конденсаторов.

Следовательно, максимальное время релаксации получится при разряде бесконечно большой емкости, то есть при действии на ячейку достаточно длинного импульса с постоянной высотой. Это максимальное значение времени релаксации, полученное при воздействии прерывистого напряжения величиной 200 в. , оказалось порядка 4 мкс (фиг. 5).

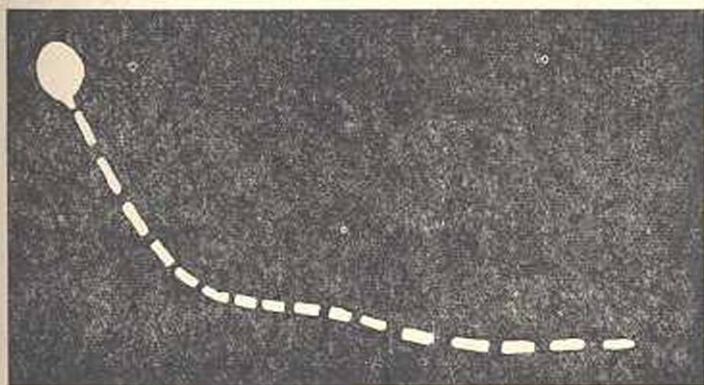
С другой стороны, при заданной емкости изменение зарядного напряжения не влияло на время релаксации, определяемое по отрезку, отсекаемому на оси времени касательной к осциллограмме импульса света в начальной точке.



Фиг. 4.

по схеме фиг. 2 (переключатель II в положении I).

Источником синусоидального напряжения служил генератор ГЗ-1. Как видно из этих графиков, переменная составляющая фазового сдвига для образца №1 резко падает до частот порядка 150 гц—



Фиг. 5.

200 гц, в то время как для диализованного раствора (обр. №3) заметная переменная составляющая наблюдается до частот порядка 1 кгц.

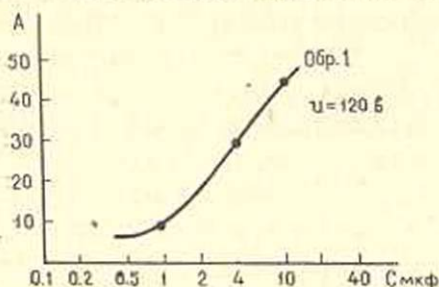
Однако, незначительная по величине переменная составляющая сохраняется до частот порядка нескольких килогерц.

Кроме того были получены графики зависимостей амплитуды осциллограммы выходного сигнала A (в относительных единицах): а) от разрядной емкости при постоянном напряжении на ячейке, равном 120 в и расстоянии между пластинами 3 мм (фиг. 6), б) от подаваемого напряжения при постоянной разрядной емкости, равной 1 мкф (фиг. 7).

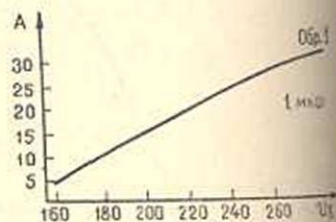
Последние два графика получены по схеме фиг. 2 (переключатель II в положении II).

Наконец, на фиг. 8 приведены амплитудно-частотные характеристики для образцов №1 и №3, снятые

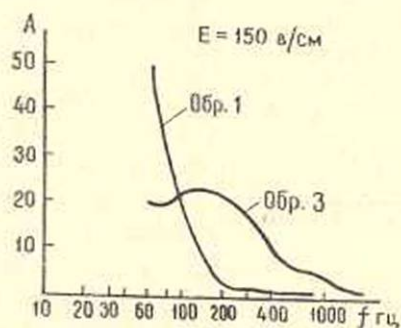
Таким образом, из результатов измерений времени релаксации и амплитудно-частотной характеристики следует непригодность бентонитных коллоидов для получения высокочастотной модуляции света.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Авторы считают своей приятной обязанностью поблагодарить преподавателей кафедры инженерной геологии за полезные советы, также сотрудников названной кафедры Мнацаканян С. и Степанян А. за приготовление образцов.

Ереванский государственный
университет

Поступила 16 VII 1966

Վ. Ս. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ, Բ. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Լ. Վ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ԲԵՆՏՈՆԻՏԻ ԷԼԵԿՏՐՈՊԵԼԿԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Դիտարկված են լույսի մոդուլացիայի համար բենտոնիտի կոլոիդ լուծույթի կիրառման հնարավորությունները: Չափվել են ալիքի 6943 Å, 6328 և 5400 Å երկարությունների համար բենտոնիտի լուծույթի տարբեր նմուշների թափանցիկությունը, կերրի հաստատունը և սելաքոսցիայի ժամանակը: Բերված է բենտոնիտի կոլոիդ լուծույթի հաճախականության բնութագրի մասին տվյալների հիման վրա արված է այն հզորակացությունը, որ բենտոնիտի լուծույթը լույսի բարձր հաճախականության մոդուլացիա ստանալու համար պիտանի չէ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландсберг Г. С. Оптика. Гостехиздат, Л., 1957.
2. Шпольский Э. В. Электрооптические свойства коллоидов, УФН, 27, 1, 1945, 97.
3. Shah M. J., Hart C. M. Investigations of the electro-optical birefringence of polydisperse bentonite suspensions. IBM Journal of Res. and Development, vol. 7, N1, 1963.
4. Shah M. J., Thompson D. C., Hart C. M. Reversal of electro-optical birefringence in bentonite suspensions. Journ. of Physic. Chemistry, vol. 6, 1964, 1170.

Л. Л. ДЕКАБРУН, А. Р. МКРТЧЯН

СИСТЕМА УПРАВЛЕНИЯ ТОКОМ ВОЗБУЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ СПЕКТРОМЕТРОВ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

Краткая аннотация. Источники поляризуемого магнитного поля H_0 являются основными узлами спектрометров ядерного магнитного резонанса. При исследовании методом ЯМР-спектроскопии кристаллов в качестве источника H_0 может быть использован только электромагнит со специальной системой питания. В статье описана одна из возможных систем питания и найдено решение некоторых фундаментальных вопросов, общих для прецизионных систем питания электромагнитов. Параметры собственно электромагнита рассматриваются только там, где они непосредственно определяют параметры системы питания. Влияние колебаний сетевого напряжения нейтрализовано применением электромашинного преобразователя с относительно грубой электронной стабилизацией выходного напряжения. Начальное значение тока возбуждения электромагнита и закон его развертки во времени устанавливаются с помощью двух независимых источников опорного напряжения в системе стабилизации тока. Длительность развертки может превышать 2 часа. Обеспечен оптимальный рабочий режим проходных ламп. Специальная конструкция прерывателя и усилителя сигнала ошибки обеспечивают надежное усиление микровольтовых сигналов. Подвергнута критике принятая в ряде работ схема замещения электромагнита.

Источник главного магнитного поля H_0 в спектрометрах ядерного магнитного резонанса (ЯМР), предназначенных для исследования строения природных кристаллов, должен обладать некоторыми особенностями, не присущими источникам H_0 ЯМР-спектрометров других назначений. Важнейшая особенность состоит в том, что здесь требуется большая длительность (до двух часов) и большая глубина (до $0,1 H_0$) линейной развертки магнитного поля в процессе регистрации спектров. Следующая особенность состоит в том, что начальное значение H_0 для разных кристаллов может иметь существенно различное значение в пределах, например, от 1 до 10 килоэрстед. Наряду с этим сохраняются присущие ЯМР-спектрометрам требования высокой однородности магнитного поля в рабочем объеме, где размещается исследуемый образец, а также точное соответствие H_0 тому значению, которое предписывается условиями опыта. Из этих требований только одно (высокая однородность магнитного поля) относится к конструкции магнита. Все остальные относятся к системе питания магнита и стабилизации H_0 .

Перечисленные требования затрудняют использование для исследования кристаллов высококачественных электромагнитов, выпускае-

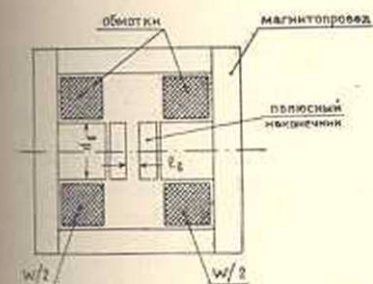
мых в настоящее время [1]. Широко используемые в ЯМР—спектроскопии постоянные магниты [2, 3, 4] не могут здесь рассматриваться, так как допускают регулировку H_0 только в узких пределах.

Для целей исследования методами ЯМР-спектроскопии упорядочения—разупорядочения кристаллов [5] авторами совместно с конструкторами и технологами Производственного отдела Института химической физики АН СССР (руководитель отдела тов. Руссиян Е. К.) разработан источник H_0 , удовлетворяющий всем необходимым требованиям. Найденные при этом решения некоторых основных вопросов могут быть использованы в источниках H_0 других назначений.

Настоящая статья посвящена, главным образом, системе питания электромагнита, поскольку, как отмечалось, именно от системы питания зависят интересующие нас качества источника H_0 . Принципиально система питания должна жестко поддерживать установленную величину тока возбуждения магнита I_m (флуктуации I_m по относительной величине не должны превышать 10^{-6}), независимо от того, является ли эта установленная величина постоянной или изменяется

во времени по некоторому предписанному закону. Параметры системы питания тесно связаны с параметрами электромагнита, которые в связи с этим приходится иногда затрагивать.

Вопросы конструкции электромагнитов для ЯМР-спектроскопии рассмотрены во многих работах (см., например, [6, 7, 8]). Конструктивная схема в общих чертах общепринята (см. фиг. 1):



Фиг. 1. Конструктивная схема электромагнита ЯМР-спектрометра

1. Замкнутый магнитопровод жесткой конструкции,
2. Симметричное расположение намагничивающих обмоток,
3. Пространственно-юстируемые полюсные наконечники.

Высокая однородность магнитного поля в центральной области воздушного зазора обеспечивается следующими мерами:

1. Точной оптической обработкой рабочих поверхностей полюсных наконечников,
2. Высокой металлургической однородностью материала полюсных наконечников,
3. Большой величиной отношения диаметра полюсных наконечников d_n к длине воздушного зазора l_n :

$$\frac{d_n}{l_n} > 5. \quad (1)^*$$

* Это соотношение в значительной мере является эмпирическим. Расчет конфигурации магнитного поля в зазоре электромагнита, опубликованный около 80 лет назад [9], основан на предположении равномерной поляризации полюса, для чего нет строгих оснований, тем более при оценке микронедоднородностей, играющих

Для расчета ампервитков, которые должна создавать обмотка электромагнита, предложен ряд формул, где насыщение магнитопровода учитывается эмпирическими коэффициентами [7]. При $H_0 < 10^6$ удовлетворительный результат дает формула

$$JW = 1,25 \frac{H_0 I_n}{0,4\pi} \quad (3)$$

Система питания и конструктивные размеры магнита существенно зависят от того, какая плотность тока j задается в обмотках. На фиг. 2 приведены графики, дающие качественное представление о том, как от плотности тока j зависят следующие величины:

1. Мощность, потребляемая магнитом, P ,
2. Вес магнита Q ,
3. Поверхность охлаждения обмоток $S_{охл.}$,
4. Удельная мощность $P_0 = P/S_{охл.}$.

Эти графики (которые для конкретных величин I_n и d_n могут быть легко приведены к количественному масштабу) показывают, что за счет увеличения веса (следовательно, и габаритов) магнита можно неограниченно снижать величину необходимой мощности. Выбор той или иной конкретной величины^{*} требует учета ряда дополнительных факторов, основной из которых — возможность искусственного охлаждения. Поскольку искусственное охлаждение обмоток крайне неудобно в эксплуатации, мы ориентировались на такую удельную мощность, при которой в условиях естественного (конвекционного) охлаждения температура обмоток будет превышать температуру окружающего воздуха не более, чем на $10^\circ - 15^\circ$ [10]. При этом P составляет около 780 ватт.

Необходимая мощность

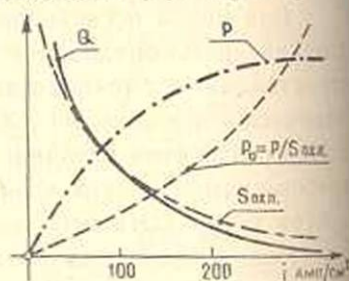
$$P = U_m I_m \quad (4)$$

может быть получена при любом значении силы тока I_m . Конкретная величина зависит от выбора системы стабилизации I_m : если эта система строится на транзисторах, то U_m должно быть мало, порядка нескольких десятков вольт, если же система стабилизации строится на электронных лампах, то желательно уменьшать величину I_m (чтобы

основную роль в ЯМР-спектрометрах. По-видимому, более точно, конфигурация магнитного поля может быть найдена из того факта, что энергия магнитного поля

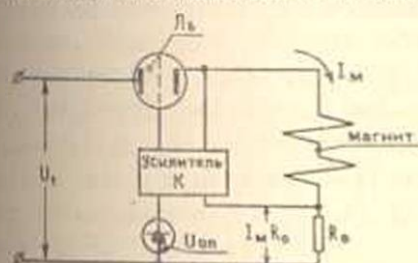
$$A_m = \frac{1}{8\pi} \iiint H^2(x; y; z) dx dy dz \quad (2)$$

электромагнита стремится к максимуму. Однако, решение этой очень важной для прецизионных магнитов задачи не входит в рамки настоящей работы.



Фиг. 2. Зависимость основных параметров электромагнита от плотности тока в его обмотках

не использовать слишком мощные лампы), увеличивая соответственно U_0 . Полупроводниковые стабилизаторы I_m тока пока еще уступают ламповым в отношении точности [11, 12, 13, 14,], и в практике ЯМР-спектроскопии основными видами стабилизаторов I_m являются ламповые стабилизаторы последовательного типа [15], которые приняты и в нашей системе питания.



Фиг. 3. Принципиальная схема электронного стабилизатора тока последовательного типа

ли коэффициент передачи разомкнутой петли имеет достаточно большую величину

$$\Lambda S R_0 = 10^3 + 10^5 \quad (5)$$

(S —крутизна проходных ламп L_0 при данной нагрузке), характеризуется соотношением

$$(I_m)_0 = \frac{U_{оп}}{R_0} \quad (6)$$

Основными источниками нестабильности I_m являются:

1. Нестабильность опорного напряжения $U_{оп}$,
2. Дрейф усилителя сигнала ошибки,
3. Температурные изменения сопротивления обмотки магнита R_m ,
4. Нестабильность напряжения питания U_1 .

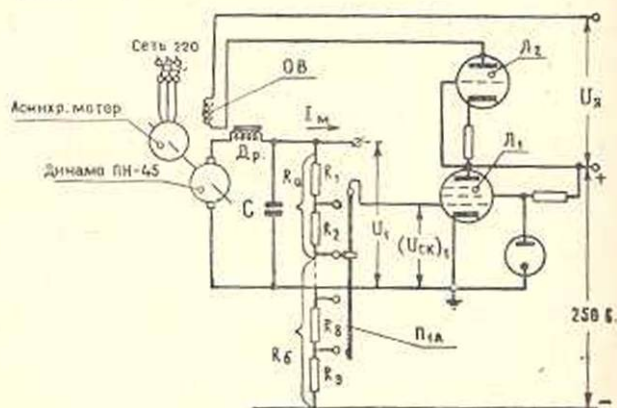
Влияние первого из перечисленных факторов подробно рассмотрено в [16]. Из остальных факторов наибольшую роль играет нестабильность U_1 . Если U_1 изменяется на ΔU_1 , то это приводит к изменению I_m на величину

$$\Delta I_m = \frac{\Delta U_1}{R_l + R_m + p K R_0} \approx \frac{\Delta U_1}{S R_l K R_0} \quad (7)$$

(R_l —дифференциальное внутреннее сопротивление проходных ламп, p —их статический коэффициент усиления).

Если U_1 получается непосредственным выпрямлением сетевого напряжения ($\Delta U_1 = (+0,1 \div -0,15) U_{10}$), то для поддержания изменений I_m в допустимых пределах требуется очень большая величина $K S R_0$. Кроме того, в этом случае система стабилизации I_m должна содержать дополнительные узлы, предназначенные для компенсации кратковременных динамических бросков U_1 [17]. По-видимому, более рациональным решением является предварительная стабилизация напряжения U_1 . Влияние динамических бросков сетевого напряжения будет полностью нейтрализовано, если вместо выпрямления получать

напряжение U_1 с помощью электромашинных агрегатов. Такое решение имеет ряд недостатков, в частности, шум агрегата и создаваемая им вибрация. Однако, помимо полной нейтрализации (благодаря жесткой тяговой характеристике асинхронного двигателя и большому запасу кинетической энергии вращающихся масс) бросков сетевого напряжения электромашинный агрегат имеет еще и то преимущество, что позволяет легко, плавно или ступенями, регулировать в широких пределах величину U_1 . Схема получения U_1 , использованная авторами, представлена на фиг. 4. Обмотка возбуждения динамо включена в анодную цепь лампы Λ_2 (6С18С), которая является выходным каскадом системы стабилизации U_1 . Напряжение U_1 посредством делителя $R_1 R_2; \dots; R_6$ сравнивается с хорошо стабилизированным напряжением $(U_{оп})_1$ (250 вольт), усиливается лампой Λ_1 (6Ж9П) и управляет током возбуждения i_b .



Фиг. 4. Принципиальная схема стабилизации напряжения питания электромагнитного агрегата.

В установившемся режиме

$$\frac{U_1}{R_a} \approx \frac{(U_{оп})_1}{R_0},$$

откуда:

$$U_1 = (U_{оп})_1 \frac{R_a}{R_0}.$$

Изменяя с помощью переключателя П1А отношение R_a/R_0 , можно в широких пределах изменять U_1 , причем каждое из установленных значений будет стабилизировано в данном случае с точностью лучшей, чем $\pm 10^{-3}$.

В соответствии с характеристиками динамо ПН-45 (это наиболее высоковольтная машина данной серии) установлены такие параметры обмотки возбуждения магнита, при которых

$$(I_m)_{\max} = 2,5 \text{ ампера}$$

$$(U_m)_{\max} = 310 \text{ вольт},$$

при этом в воздушном зазоре достигается индукция ~ 10.000 э,

Процесс съемки спектра ЯМР предполагает установку некоторого начального значения напряженности магнитного поля $(H_0)_{\text{нач}}$ и последующего изменения этого поля по линейному закону на глубину ΔH_r за время T_r . Система стабилизации должна подавить самопроизвольные, обусловленные внутренними причинами флуктуации H_0 до такой степени, чтобы обусловленные этими флуктуациями искажения предписанного закона развертки были пренебрежимо малы

$$\frac{dH_0}{dt} \gg \frac{\delta H_0}{dt} \quad (10)$$

(δH_0 — величина самопроизвольных изменений H_0 .)

Это соотношение определяет абсолютную величину коэффициента передачи разомкнутой петли $KS \cdot R_0$ и технические характеристики отдельных узлов (усилитель сигнала ошибки, источники опорного напряжения, контрольное сопротивление R_0).

Закономерность, описанная выше, может быть обеспечена использованием в системе стабилизации двух источников опорного напряжения: $(U_{оп})'$, задающего начальную величину тока I_m и, следовательно, $(H_0)_{\text{нач}}$; и источника $(U_{оп})''$, напряжение которого изменяется по необходимому закону во времени (фиг. 5). Согласно (6),

$$I_m = \frac{(U_{оп})'}{R_0} + \frac{(U_{оп})''}{R_0}. \quad (11)$$

Поскольку время развертки T_r может достигать двух часов, обычно используемые для развертки электронные интегрирующие схемы



Фиг. 5. Принцип управления начальным значением магнитного поля и его разверткой

[18] здесь неприменимы. Единственным решением задачи является механическая развертка с помощью синхронного мотора. Необходимый набор скоростей развертки обеспечивается переключением питания синхронного мотора на электронные генераторы различной частоты и переключением ступеней механического редуктора. Необходимая определенность в установке $(H_0)_{\text{нач}}$,

в диапазоне от 2-х до 10 кОэ, достигается ступенчато-плавной системой.

В описываемой системе авторы использовали специально разработанный источник опорного напряжения — кремниевые стабилитроны с термокомпенсирующими делителями [16]. В соответствии с принципом термокомпенсирующего делителя, его выходное (манганиновое) сопротивление должно иметь совершенно определенную величину. Этим определяются схемы коммутации $(U_{оп})'$ и $(U_{оп})''$, которые мы здесь не приводим.

При широкой регулировке величины I_m существенным вопросом является режим проходных ламп. Ступенчатое изменение величины

U_1 дает возможность использовать проходные лампы наиболее эффективно — в режиме максимальной крутизны и наиболее легкой тепловой нагрузки.

Наиболее экономичными лампами для системы стабилизации являются мощные триоды 6С18С. Полный ток магнита (2,5 ампера) могут пропустить 6 таких ламп, включенных параллельно. На фиг. 6 приведены характеристики такой группы ламп и показаны ступени регулировки I_m . Проходные лампы имеют постоянное отрицательное смещение на сетках (20 вольт). К этой постоянной величине добавляется напряжение, создаваемое усилителем сигнала ошибки, за счет которого I_m доводится до величины, заданной напряжениями $(U_{оп})'$ и $(U_{оп})''$. Система управления I_m , принцип которой представлен на фиг. 6, имеет следующие серьезные преимущества:

1. Проходные лампы всегда работают в оптимальном режиме по крутизне и тепловой нагрузке.
2. От усилителя сигнала ошибки не требуется на выходе больших напряжений (система всегда находится в состоянии, близком к состоянию равновесия), что благоприятно отражается на точности стабилизации.

Важным узлом системы стабилизации I_m является усилитель сигнала ошибки. Это усилитель постоянного тока с ничтожно малым приведенным дрейфом и уровнем шумов. Предельная допустимая скорость дрейфа устанавливается соотношением (10), уровень шумов лимитируется следующим очевидным соотношением:

$$\delta I_m R_0 \gg (\bar{U}_ш) \quad (12)$$

(δI_m — допустимое отклонение I_m ; R_0 — контрольное сопротивление).

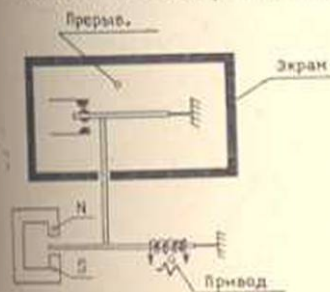
Сопротивление R_0 по вполне очевидным причинам не может иметь большую величину; в нашем случае оно равно 1,96 ома. Величина δI_m , как отмечалось, не должна превышать 10^{-6} от I_m . Следовательно, усилитель должен четко реагировать на сигнал в несколько микровольт. Его коэффициент усиления, в соответствии с (4) и при крутизне проходных ламп, получаемой из графика фиг. 6, должен составлять примерно 10^6 .

Для реализации перечисленных требований необходим усилитель с преобразованием сигнала ошибки в напряжение переменного тока [19]. Рабочая частота прерывателя и синхронного детектора нами выбрана равной 82 пер/сек. Эта величина дает возможность эффективно отстроиться от помех, создаваемых сетью. В целях снижения фона все цепи в схеме RC-усилителя (анодные цепи, экранированные сетки, на-



Фиг. 6. Режим работы проходных ламп системы стабилизации на различных ступенях $(I_m)_{нач}$.

кад ламп) питаются от хорошо стабилизированных источников постоянного тока. Благодаря этому, а также тщательной экранировке, RC-усилитель, включающий три каскада на низкошумящих пентодах 6Ж4, с общим коэффициентом усиления $2 \cdot 10^6$ имеет фоновое напряжение 50 пер/сек, не превышающее 1,5—2 микровольта. Прерыватель заключен в электростатический и электромагнитный экран. Его привод, являющийся мощным источником наводок, вынесен за пределы экрана (фиг. 7). В качестве основы для прерывателя использована контактная система поляризованного реле РП-4. Контакты выполнены либо из чистого золота, либо из сплава с преимущественным содержанием золота. Такие контакты надежно коммутируют микровольтовые напряжения [20].



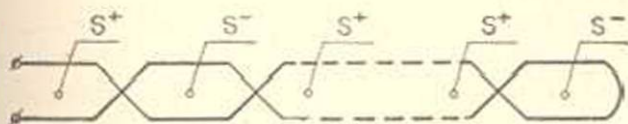
Фиг. 7. Конструктивная схема преобразователя сигналов ошибки

Тщательно продуманная конструкция контрольного сопротивления R_0 —необходимое условие высококачественной стабилизации I_m . Речь идет о следующих факторах, способных вызвать нестабильность I_m :

1. Нестабильность величины R_0 , связанная с колебаниями его температуры.
2. Паразитные термоэдс в местах соединения R_0 с другими цепями схемы.
3. Электромагнитные наводки в контуре R_0 .

Нейтрализация перечисленных факторов возможна многими способами, наиболее простыми и эффективными, по мнению авторов, являются следующие:

1. Сопротивление R_0 выполняется из манганиновой проволоки, обладающей очень малым температурным коэффициентом и ничтожно малой термоэдс по отношению к меди. Сопротивление размещается в масляной ванне благодаря чему уменьшается его температура в рабочем режиме и, что более важно, увеличивается тепловая инерция.



Фиг. 8. Схема расположения петли контрольного сопротивления

2. Конструктивно R_0 выполняется в виде бифилярной петли (фиг. 8), которая перекрещивается в ряде мест, образуя, таким образом, по отношению к внешнему электромагнитному полю элементарные петли с площадями S^+ и S^- . При достаточно точной укладке

петли, когда

$$\Sigma S^+ \approx \Sigma S^-,$$

ЭДС, наводимая в контуре R_0 внешними электромагнитными полями, будет иметь ничтожно малую величину.

Нам остается рассмотреть вопрос об устойчивости системы. В электронных устройствах оценка устойчивости в большинстве случаев производится по критерию Найквиста [21], согласно которому ответ на вопрос об устойчивости дает реакция разомкнутой системы на гармоническое возмущение. Для этого возмущения коэффициент передачи разомкнутой петли является комплексной величиной:

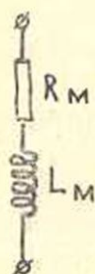
$$kSR_0 = \dot{F}(\omega). \quad (1)$$

Анализируя функцию $\dot{F}(\omega)$ в диапазоне

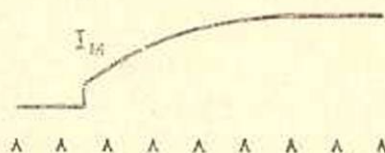
$$0 \leq \omega \leq \infty,$$

можно установить устойчива или неустойчива данная система при замыкании петли обратной связи. Зная комплексную величину $\dot{S}$, трудно задать параметры усилителя, то есть комплексную величину $\dot{F}$ так, чтобы обеспечивалась надежная устойчивость системы стаби-

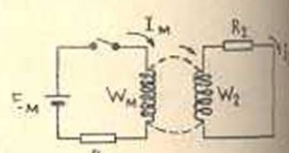
зации. Для определения $\dot{S}$ необходимо знать комплексный характер сопротивления обмотки электромагнита, то есть предположить определенную схему замещения



Фиг. 9. Схема замещения обмотки электромагнита



Фиг. 10. Осциллограмма переходного процесса в обмотке электромагнита



Фиг. 11. Демпфирующее действие вихревых токов в массе магнитопровода

для этой обмотки. Обычно [22] в схему замещения магнита вводят активное сопротивление его обмотки R_m , ее индуктивность L_m и определенную емкость C_m . Последняя сказывается только в области очень высоких частот, лежащих за пределами полосы пропускания усилителя сигнала ошибки, следовательно, эффективными параметрами остаются только R_m и L_m (фиг. 9). На фиг. 10 приведена осциллограмма переходного процесса в обмотке электромагнита, показывающая, что эквивалентная схема, представленная на фиг. 9, не соответствует истине. По мнению авторов, основным фактором, определяющим переходной процесс (и, следовательно, вид частотной характеристики), является не распределенная емкость витков, а демпфирующее действие вихревых токов в массе магнитопровода. Принципиально масса магнитопровода может быть представлена как некоторая короткозамкнутая обмотка W_2 (фиг. 11). Переходной процес-

в такой системе, как нетрудно показать, описывается следующим уравнением:

$$i_m = \frac{E_m}{R_m} \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{t}{(\tau_1 + \tau_2)}} \right]. \quad (14)$$

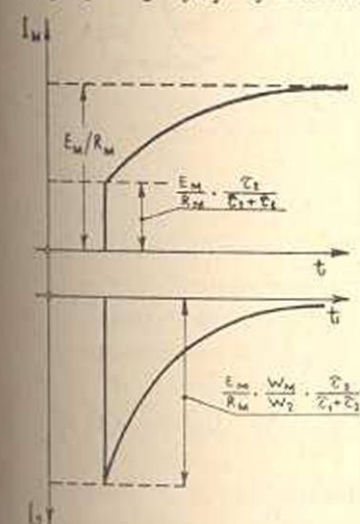
Здесь

$$\tau_1 = \frac{L_m}{R_m}; \quad \tau_2 = \frac{L_2}{R_2}.$$

Переходной процесс во вторичной цепи описывается уравнением

$$i_2 = \frac{E_m W_1}{R_m W_2} \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} e^{-\frac{t}{(\tau_1 + \tau_2)}}. \quad (15)$$

Уравнения (14) и (15), графики которых приведены на фиг. 12, являются приближенными: они предполагают постоянство магнитных сопротивлений для потоков обеих обмоток. На самом деле высокочастотные компоненты магнитного потока будут в результате действия вихревых токов вытеснены к периферии магнитопровода, благодаря чему τ_1 и τ_2 будут уменьшаться по мере увеличения частоты. Вытес-



Фиг. 12. Переходная характеристика магнита, рассчитанная с учетом влияния массы магнитопровода

нение магнитного потока, также как и явление скин-эффекта будет, по-видимому, описываться через цилиндрические функции Бесселя. Принципиально возможно рассчитать точно переходную характеристику магнита, а значит, и найти его схему замещения. Такую задачу авторы перед собой не ставили: несоответствие между фактическим поведением системы стабилизации и тем, которое можно было ожидать на основании общепринятой схемы замещения магнита, обнаружено в процессе отладки системы питания на заключительном этапе работы. Для принятия необходимых мер мы ограничились качественным анализом, приняв допущения, сделанные при выводе уравнений (14) и (15) (постоянство τ_1 и τ_2). Частотные

характеристики при этом находятся легко.

Пусть

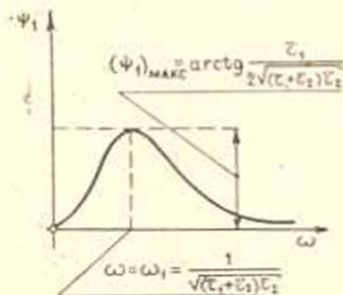
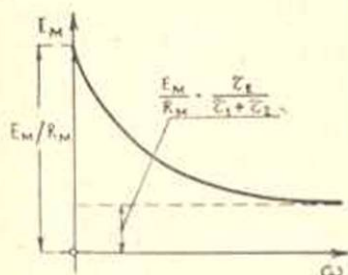
$$e_m = E_m \sin \omega t \quad (0 \leq \omega \leq \infty), \quad (16)$$

тогда по схеме, фиг. 11, находим

$$i_m = I_m \sin(\omega t + \phi_1), \quad (17)$$

где

$$I_M = \frac{E_M}{R_M} \frac{1}{1 + \omega^2 (\tau_1 + \tau_2)^2} \sqrt{1 + \omega^2 (\tau_1 + \tau_2)^2 + \omega^2 \tau_1^2}, \quad (18)$$



Фиг. 13. Частотные характеристики магнита с учетом влияния массы магнитопровода

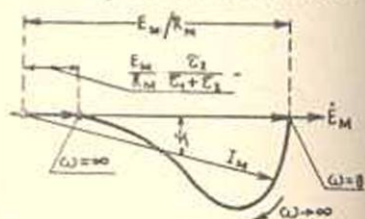
$$\operatorname{tg} \phi_1 = - \frac{\omega \tau_1}{1 + \omega^2 (\tau_1 + \tau_2)^2}$$

Графически зависимости

$$I_M = f_1(\omega),$$

$$\phi_1 = f_2(\omega),$$

представлены на фиг. 13. Те же зависимости в векторной форме представлены на фиг. 14. Графики показывают, что при возрастании частоты крутизна будет уменьшаться до нуля, как это было бы в случае эквивалентной схемы



Фиг. 14. Векторная форма частотной характеристики магнита

фиг. 9. При неизбежных фазовых сдвигах в усилительном тракте это может стать причиной самовозбуждения системы стабилизации, перехода ее в автоколебательный режим. В связи с этим необходимо жесткое ограничение полосы пропускания усилителя так, чтобы она не превышала ω_1 (фиг. 13). Это достигается увеличением постоянной времени синхронного детектора [23].

Институт химической
физики АН СССР

Поступила 18 IV 1978

Л. Л. ДЕКАБРУН, А. Р. МКРТЧЯН

ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՄԱԿԵՆՈԱԿԱՆ ՌԵԶՈՆԱՆՍՆԵՐ ՍՊԵԿՏՐՈՄԵՏՐԵՐԻ
ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԵՏԻՎԵՐ ԳՐԳԻՄԱՆ ՀՈՍԱՆԻՐ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ
ՍԽԵՄԵՐ

Ա. Վ. Փ. Ն. Փ. Ն. Փ.

Միջուկային մագնիսական ռեզոնանսի (ՄՐՌ) սպեկտրոմետրների հիմնական հաճախային օգտակար հաճախանում են բևեռացնող մագնիսական դաշտի (H_0) աղբյուրները: ՄՐՌ սպեկտրոսկոպիայի մեթոդով բյուրեղային ամուսնաների կառուցվածքի և H_0 մագնիսական դաշտի աղբյուր կարգ է օգտագործվել միայն հատուկ սնուցման սխեման անհրաժեշտ էլեկտրամագնիսական

ծում նկարագրված է սնուցման հնարավոր սխեմաներից մեկը և լուծված են մի քանի հիմնական հարցեր, որոնք ընդհանուր են պրեցեդիային էլեկտրամագնիսների սնուցման սխեմաների համար: Էլեկտրամագնիսի սեփական պարամետրները դիտարկվում են հատկապես ախտիզ, ուր նրանք անմիջապես որոշում են սնուցման սխեմայի պարամետրները: Յանցային լարման առատումների ազդեցությունները չեզոքացվում են էլեկտրամագնիսական վերափոխիչի կիրառումով՝ ելքային լարման համեմատաբար կոպիտ էլեկտրոնային կալունացմամբ:

Էլեկտրամագնիսի զրգոյիչ հոսանքի սկզբնական արժեքը և բոտ ժամանակի նրա փոփոխման օրենքը հալատվում ու իրագործվում են հոսանքի կալունացման սխեմայի մեջ՝ նեցուկային լարման երկու անկախ ազդյունների միջոցով: Փոփոխման տեղումները կարող է մեծ լինել երկու ժամկետ: Անցումային լարման համար ապահովված է լավագույն աշխատանքային սեփմ: Հատուկ կոնստրուկցիայի ընդհատիչը և սխալի ազդանշանի ուժեղացուցիչ ապահովում են միկրոփոխարկի ազդանշանների վստահելի ուժեղացումը: Քննադատության է ենթարկված էլեկտրամագնիսը հաստատուն մագնիսով փոխարինելու սխեման, որը ընդունված ու պաշտպանված է մի շարք աշխատություններում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Любимов А. Н., Вареник А. Ф., Слоним Н. Я., ЯМР-спектрометр ЦЛА и результаты его применения. Заводская лаборатория, 28, 1962, 991.
2. Самитов Ю. Ю. „ЯМР—спектрометр высокой разрешающей силы“. ПТЭ, № 5, 1961, 100.
3. Быстров В. Ф., Буколов Ю. Е., Декабрун Л. Л., Степанянц А. У. „Постоянный магнит для ЯМР спектрометра высокого разрешения“. Сборник „Парамагнитный резонанс“, Казань, 1960.
4. Быстров В. Ф., Декабрун Л. Л., Степанянц А. У. „ЯМР спектрометр высокого разрешения“, ПТЭ, № 2, 1964.
5. Мкртчян А. Р. „О новой возможности использования ЯМР для изучения упорядоченности кристаллов“. Доклады АН Арм. ССР, 37, 5, 1963.
6. Bloom A., Packard M. „Magnets and Magnetic Field Measurements“. Seienes 122, 1955, 738, New York.
7. Primas H., Arndt R., Ernst R. „Kernresonanz“ Ztschr. für Instrumentenkunde 1959, Dezember.
8. Scheller G., Köhler H., Petting H. „Die Electromagnetische Berechnung“. Hochfrequenzspectroscopie, Berlin, 1961.
9. Stefan J. J. „The calculation of configuration of Magnetic Field in the gap of Electromagnet“. Annalen der Physik, Leipzig, 38, 1889, 440.
10. Коменко М. П., „Электрические машины“, ГЭИ, 1944.
11. Garvin R. „Efficient Precision current Regulator for Low—voltage Magnets.“ RSI, 29, 1958, 223, New York.
12. Sauzade M. „Alimentation stabilisée à transistors destinée à alimenter un électroaimant utilisé pour des études de resonance nucléaire.“ Compte Rend, Paris, 24, 1959, 205.
13. Poal Yang. „Régulateur de courant Transistorisé pour Aimant de 12 Parkes“. Le journal de phys. et la Radium № 3, mars, 1960, 39.
14. Ануфриев В., Дохловский С., Журкин Б., Копыловский Б., Потин Н. „Полупроводниковые стабилизаторы тока с большой точностью. ПТЭ, 1962, 129.

15. Нельсон Ф. „Принципы построения приборов ЯМР спектрокопии высокого разрешения“. Сборник „ЯМР и ЭПР в спектроскопии“, издание „Мир“, 1964.
16. Декабрун Л. Л., Мкртчян А. Р. „Опорное напряжение для стабилизатора тока большой точности“. Доклады АН Арм. ССР, 39, № 3, 1964.
17. Фирменное описание спектрометра J. N. M—3H—60 Japan. Electron Opt. Токуо.
18. Декабрун Л. Л., Кильянов Ю. И. „Генирирование линейных разверток большой длительности“. ПТЭ, № 2, 1964.
19. Декабрун Л. Л. „Усилители и источники питания“. Росвуиздат, 1961.
20. Холм Р. „Электрические контакты“. ИЛ, 1956.
21. Хэммонд Н. „Отрицательная и обратная связь и ее применение“. ИЛ, 1962.
22. Sommers H., Weiss P., Halpern W. „Magnet Current Stabilizer“. RSI 22, 61, 1951, New York.
23. Декабрун Л. Л. „Об усилителях сигналов ошибок в системах стабилизации“. Автоматика и Телемеханика, 21, № 1, 1960.

А. А. БАБЛОЯН, О. О. ПИРУМЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВАЛА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Задача о крутильных колебаниях полуплоскости была впервые решена Сагоци [1]. Позднее эту задачу более рациональным методом решил Я. С. Уфлянд [2]. К вопросу о крутильных колебаниях полуплоскости и бесконечного слоя относятся работы Арнольда, Бикрофта, Варбуртона [3], Бикрофта [4] и других.

Крутильные колебания круглого цилиндра, один торец которого закреплен, а на другом торце действует периодическая касательная сила при свободной боковой поверхности, рассматривались в работе Сенгупта [5] и Митра [6]. В работе Митра рассмотрены также крутильные колебания вала при закрепленных торцах, когда периодическая крутящая нагрузка задана на боковой поверхности.

Настоящая работа посвящена вопросу о вынужденных колебаниях сплошного и полого цилиндров конечной длины.

§ 1. Задача динамического кручения вала сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \nu^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad \left(\nu^2 = \frac{\rho}{G} \right), \quad (1.1)$$

где ρ — плотность, G — модуль сдвига.

Напряжения и перемещение через функцию перемещений $\psi(r, z, t)$ выражаются формулами

$$v = r\dot{\psi}, \quad \tau_r = Gr \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \tau_z = Gr \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Пользуясь преобразованием Лапласа [7]

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \varphi(r, z, p) e^{pt} dp, \\ \varphi(r, z, p) &= \int_0^\infty \psi(r, z, t) e^{-pt} dt \end{aligned} \quad (1.3)$$

и начальными условиями

$$\begin{aligned}\psi(r, z, 0) &= \frac{1}{r} v(r, z, 0) = f_1(r, z), \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} &= \frac{1}{r} \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = f_2(r, z),\end{aligned}\quad (1.4)$$

из уравнения (1.1) для определения функции φ получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - c^2 \varphi = F(r, z, p), \quad (1.5)$$

где

$$\begin{aligned}F(r, z, p) &= v^2 p f_1(r, z) - v^2 f_2(r, z), \\ c^2 &= v^2 p^2.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Фундаментальными решениями уравнения (1.5) без правой части являются функции

$$\varphi(r, z, p) = \begin{cases} \frac{1}{r} (A \operatorname{sh} bz + B \operatorname{ch} bz) \begin{matrix} J_1(\mu r) \\ Y_1(\mu r) \end{matrix} \\ \frac{1}{r} \frac{I_1(ar)}{K_1(ar)} (C \sin \lambda z + D \cos \lambda z), \end{cases} \quad (1.7)$$

где

$$a = \sqrt{c^2 + \lambda^2}, \quad b = \sqrt{\mu^2 + c^2}. \quad (1.8)$$

Заметим, что функции

$$\operatorname{sh} cz, \quad \operatorname{ch} cz, \quad \frac{1}{r} \frac{I_1(cr)}{K_1(cr)} (Ez + F)$$

также являются решениями однородной части уравнения (1.5). Функцию $\varphi(r, z, p)$ для сплошного вала ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi(r, z, p) &= A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + D \frac{I_1(cr)}{r} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} b_k z + B_k \operatorname{ch} b_k z) \frac{J_1(\mu_k r)}{r} + \\ &+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{I_1(a_h r)}{r} (C_h \sin \lambda_h z + D_h \cos \lambda_h z) + \Phi(r, z, p),\end{aligned}\quad (1.9)$$

где

$$a_k = \sqrt{c^2 + \lambda_k^2}, \quad b_k = \sqrt{c^2 + \mu_k^2}. \quad (1.10)$$

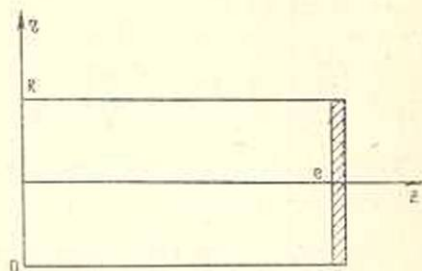
а функция $\Phi(r, z, p)$ — частное решение неоднородного уравнения (1.5).

§ 2. Рассмотрим задачу о кручении цилиндра конечной длины со следующими граничными условиями (фиг. 1):

$$\begin{aligned}\tau_r(R, z, t) &= GR\chi_1(z, t), \\ \tau_z(r, 0, t) &= Gr\chi_2(r, t), \\ v(r, l, t) &= r\chi_3(r, t).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Для функции $\varphi(r, z, p)$, ввиду (1.2), (1.3) и (2.1), граничные условия получаются в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, z, p) &= \int_0^\infty \chi_1(z, t) e^{-pt} dt = \\ &= \bar{\chi}_1(z, p), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, 0, p) &= \int_0^\infty \chi_2(r, t) e^{-pt} dt = \\ &= \bar{\chi}_2(r, p),\end{aligned}\quad (2.2)$$



Фиг. 1.

$$\varphi(r, l, p) = \int_0^\infty \chi_3(r, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_3(r, p).$$

Функцию $\varphi(r, z, p)$ ищем в виде (1.9). Принимая $D = C_k = 0$ и удовлетворяя граничным условиям (2.2), для определения неизвестных коэффициентов A_k, B_k, D_k, A, B получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{D_k a_k}{R} I_1(a_k R) \frac{l}{2} &= \int_0^l \left[\bar{\chi}_1(z, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] \cos \lambda_k z dz, \\ A_k b_k \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_k R) &= \int_0^R \left[\bar{\chi}_2(r, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] r^2 J_1(\mu_k r) dr, \\ Ac \frac{R^4}{4} &= \int_0^R \left[\bar{\chi}_3(r, p) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} \right] r^3 dr,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$(A_k \operatorname{sh} b_k l + B_k \operatorname{ch} b_k l) \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_k R) = \int_0^R [\bar{\chi}_3(r, p) - \Phi(r, l)] r^2 J_1(\mu_k r) dr,$$

$$(A \operatorname{sh} cl + B \operatorname{ch} cl) \frac{R^4}{4} = \int_0^R [\bar{\chi}_3(r, p) - \Phi(r, l)] r^3 dr,$$

где

$$\lambda_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l},$$

а μ_k — положительные корни функции $J_2(xR)$.

Рассмотрим случай, когда вал свободен от нагрузки, а на торце $z = l$ перемещение задано по закону

$$\psi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При этом имеем

$$\bar{\chi}_1(z, p) = 0, \quad \bar{\chi}_2(r, p) = 0, \quad \bar{\chi}_3(r, p) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{p^3}. \quad (2.4)$$

Полагая, что в начальный момент вал находился в состоянии покоя, то есть

$$f_1(r, z) = f_2(r, z) = 0 \quad \text{или} \quad F(r, z, p) = \Phi(r, z, p) = 0, \quad (2.5)$$

из (2.3), (2.4), (2.5) для коэффициентов получим

$$A = A_k = B_k = D_k = 0, \quad B = \frac{\varepsilon}{p^3 \operatorname{ch} cl}. \quad (2.6)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в (1.9), для функции φ получим

$$\varphi(r, z, p) = \frac{\varepsilon}{p^3} \frac{\operatorname{ch} \nu pz}{\operatorname{ch} \nu pl}, \quad (2.7)$$

а в силу (1.3) для функции $\psi(r, z, t)$ получается следующее выражение

$$\psi(r, z, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu pz}{p^3 \operatorname{ch} \nu pl} e^{pt} dp \quad (\gamma > 0). \quad (2.8)$$

Легко доказать, что функция $\psi(r, z, t)$ удовлетворяет всем граничным и начальным условиям рассматриваемой задачи.

Вычисляя интеграл (2.8) с помощью вычетов, функцию $\psi(r, z, t)$ можно представить в виде бесконечного ряда

$$\psi(r, z, t) = \frac{\varepsilon}{2} [t^2 - \nu^2 (l^2 - z^2)] + \frac{2\nu^2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k (l-z) \cos \frac{\lambda_k}{\nu} t}{\lambda_k^3}. \quad (2.9)$$

В качестве другого примера рассмотрим случай, когда на торце $z = l$ угловая скорость задана по закону

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = V(1 - e^{-\nu t}).$$

Тогда для $\bar{\chi}_3(p)$ будем иметь

$$\bar{\chi}_3(p) = V \int_0^{\infty} \left[t - \frac{1 - e^{-\nu t}}{\nu} \right] e^{-pt} dt = \frac{V \varepsilon}{p^2 (\varepsilon + p)}. \quad (2.10)$$

Поступая таким же образом, как и в предыдущем примере, для функции $\psi(r, z, t)$ получим

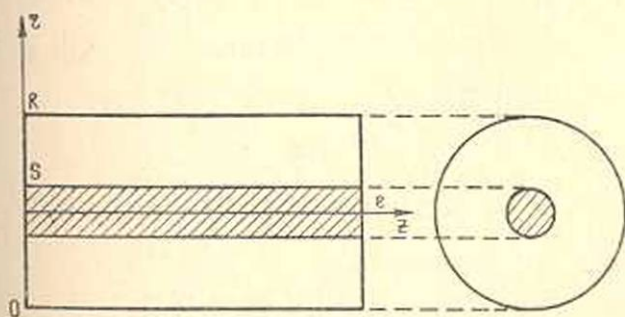
$$\psi(r, z, t) = \frac{V\varepsilon}{2\pi i} \int_{\gamma-l\infty}^{\gamma+l\infty} \frac{\operatorname{ch} \nu pz}{p^2 (\varepsilon + p) \operatorname{ch} \nu pl} e^{pt} dp, \quad (2.11)$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi(r, z, t) = V & \left[t - \frac{1 - e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} - \frac{e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \nu \varepsilon z}{\operatorname{ch} \nu \varepsilon l} \right) \right] + \\ & + \frac{2V\varepsilon^2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k z}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k l} \frac{\lambda_k \cos \frac{\lambda_k}{\nu} t - \nu \varepsilon \sin \frac{\lambda_k}{\nu} t}{\varepsilon^2 \varepsilon^2 + \lambda_k^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

§ 3. Рассмотрим теперь задачу динамического кручения полого вала (фиг. 2) конечной длины l , когда на цилиндрической поверхности $r=s$ заданы перемещения, а на остальных частях поверхности известны напряжения, то есть граничные условия заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_r(R, z, t) &= GR\chi_1(z, t), \\ v(s, z, t) &= s\chi_2(z, t), \\ \tau_z(r, 0, t) &= rG\chi_3(r, t), \\ \tau_z(r, l, t) &= rG\chi_4(r, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 2.

Эти условия через функцию φ примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(R, z, p) &= \int_0^{\infty} \chi_1(z, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_1(z, p), \\ \varphi(s, z, p) &= \int_0^{\infty} \chi_2(z, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_2(z, p), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, 0, p) &= \int_0^{\infty} \chi_3(r, t) e^{-pt} dt = \bar{\chi}_3(r, p), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(r, l, p) = \int_0^{\infty} \gamma_4(r, t) e^{-pt} dt = \bar{\gamma}_4(r, p).$$

Функцию φ ищем в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини [8]

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, p) = & A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + C \frac{I_1(cr)}{r} + D \frac{K_1(cr)}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} b_k z + B_k \operatorname{ch} b_k z) \frac{W_1(\mu_k r)}{r} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_k \frac{I_1(a_k r)}{r} + D_k \frac{K_1(a_k r)}{r} \right] \cos \lambda_k z + \Phi(r, z, p). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь

$$a_k = \sqrt{c^2 + \lambda_k^2}, \quad b_k = \sqrt{c^2 + \mu_k^2}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (3)$$

$\Phi(r, z, p)$ — частное решение неоднородного уравнения (1.5), а функции $W_n(\mu_k r)$ имеют вид

$$W_n(\mu_k r) = \frac{J_n(\mu_k r)}{J_1(\mu_k s)} - \frac{Y_n(\mu_k r)}{Y_1(\mu_k s)} = \frac{J_n(\mu_k r) Y_1(\mu_k s) - Y_n(\mu_k r) J_1(\mu_k s)}{J_1(\mu_k s) Y_1(\mu_k s)}, \quad (3)$$

где μ_k — положительные корни уравнения

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{W_1(\mu_k r)}{r} \right]_{r=R} = \frac{W_2(\mu_k R)}{R^2} = 0$$

или

$$J_2(\mu_k R) Y_1(\mu_k s) - Y_2(\mu_k R) J_1(\mu_k s) = 0. \quad (3)$$

Легко показать, что системы функций $\{W_1(\mu_k r)\}$ и $\{W_2(\mu_k r)\}$ ортогональны в промежутке $[s, R]$ с весом r .

Удовлетворяя граничным условиям (3.2), для определения неизвестных получим

$$\begin{aligned} & \frac{Cc}{R} I_2(cR) - \frac{Dc}{R} K_2(cR) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{C_k a_k}{R} I_2(a_k R) - \frac{D_k a_k}{R} K_2(a_k R) \right] \cos \lambda_k z = \bar{\gamma}_1(z, p) - \Phi'_r(R, z) \\ & A \operatorname{sh} cz + B \operatorname{ch} cz + \frac{C}{s} I_1(cs) + \frac{D}{s} K_1(cs) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{C_k}{s} I_1(a_k s) + \frac{D_k}{s} K_1(a_k s) \right] \cos \lambda_k z = \bar{\gamma}_2(z, p) - \Phi(s, z), \end{aligned} \quad (3)$$

$$cA + \sum_{k=1}^{\infty} b_k A_k \frac{W_1(\mu_k r)}{r} = \bar{\chi}_3(r, p) - \Phi'_z(r, 0),$$

$$cA \operatorname{ch} cl + cB \operatorname{sh} cl +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [b_k A_k \operatorname{ch} b_k l + b_k B_k \operatorname{sh} b_k l] \frac{W_1(\mu_k r)}{r} = \bar{\chi}_4(r, p) - \Phi'_z(r, l).$$

Неизвестные коэффициенты, входящие в выражение (3.3), в общем случае можно определить из соотношений (3.7). Для простоты предположим, что вал свободен от внешней нагрузки, а на цилиндрической поверхности $r = s$ задано перемещение по закону

$$\psi = \frac{v}{s} = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (3.8)$$

то есть граничные условия имеют вид

$$\bar{\chi}_1 = \bar{\chi}_4 = \bar{\chi}_5 = 0, \quad \bar{\chi}_2(p) = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-pt} dt = \frac{\varepsilon}{p^3}. \quad (3.9)$$

Если предположить, что в начальный момент $t = 0$ вал находится в покое, то есть

$$f_1(r, z) = f_2(r, z) = F(r, z, p) = 0, \quad \Phi(r, z, p) = 0, \quad (3.10)$$

то из системы (3.7) получим

$$A = B = A_k = B_k = C_k = D_k = 0,$$

$$CI_2(cR) - DK_2(cR) = 0,$$

$$CI_1(cs) + DK_1(cs) = \frac{s\varepsilon}{p^3}, \quad (3.11)$$

откуда, определяя C и D и подставляя их значения в (3.3), получим

$$\varphi = \frac{s\varepsilon}{p^3 r} \frac{I_1(cr) K_2(cR) + K_1(cr) I_2(cR)}{I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR)}, \quad (3.12)$$

следовательно,

$$\psi = \frac{s\varepsilon}{2\pi r i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p^3} \frac{I_1(cr) K_2(cR) + K_1(cr) I_2(cR)}{I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR)} e^{pt} dp. \quad (3.13)$$

Вычислим этот интеграл с помощью вычетов. Из соотношения

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix), \quad K_n(x) = \frac{\pi i^{n+1}}{2} [J_n(ix) + i Y_n(ix)] \quad (3.14)$$

получим, что

$$I_1(cs) K_2(cR) + K_1(cs) I_2(cR) = J_2(icR) Y_1(ics) - J_1(ics) Y_2(icR). \quad (3.15)$$

Учитывая (3.6) и формулу

$$Y_n(-x) = (-1)^n [Y_n(x) + i\pi J_n(x)],$$

для корней выражения (3.15) получим

$$p_k = \pm \frac{i\mu_k}{v} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Поэтому интеграл (3.13) окончательно можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi = 2\varepsilon v^2 & \left\{ \frac{1}{16} \left[\frac{4t^2}{v^2} + \frac{(R^2 - r^2)^2}{r^2} - \frac{(R^2 - s^2)^2}{s^2} \right] - \right. \\ & - \frac{s}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[J_2(\mu_k R) Y_1(\mu_k r) - J_1(\mu_k r) Y_2(\mu_k R)] \cos \frac{\mu_k}{v} t}{\mu_k^3 [R [J_1(\mu_k R) Y_1(\mu_k s) - Y_1(\mu_k R) J_1(\mu_k s)] +} \\ & \left. \rightarrow \dots + s [Y_2(\mu_k R) J_2(\mu_k s) - J_2(\mu_k R) Y_2(\mu_k s)] \right\}. \end{aligned}$$

Как видно из выражения (3.18), частота колебания зависит от v . Что же касается ускорения вращательного движения ε , то оно влияет лишь на амплитуду колебания.

Для численного примера рассмотрим случай, когда $\frac{R}{s} = 1$.

Вычисляя по формулам (3.18) и (1.2) и ограничиваясь членами ряда, для относительного перемещения $V = v - \frac{\varepsilon t^2}{2}$

пряжения в точках радиуса вала $\rho = \frac{r}{s} = 1, 2, 3, 4, 5$ ($= R$)

чим следующие выражения:

$$V = -4\varepsilon v^2 s^3 \left[A_p + \sum_{k=1}^5 c_{kp} \cos \alpha_k T \right],$$

$$\tau_r = -4\varepsilon v^2 s^2 G \left[A_p^* + \sum_{k=1}^5 \dot{c}_{kp} \cos \alpha_k T \right],$$

где T и α_k — безразмерные величины и имеют вид

$$T = \frac{t}{sv}, \quad \alpha_k = \mu_k s.$$

Значения коэффициентов $A_p, A_p^*, c_{kp}, \dot{c}_{kp}$ приведены в табл.

Таблица 1

 A_p

ϵ_{kp}					
$k \backslash p$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	-68.104	-0.093	-0.022	-0.004	+0.001
3	-102.608	-0.072	+0.011	+0.005	-0.002
4	-142.750	+0.012	+0.008	-0.006	+0.002
5	-180.053	+0.064	-0.014	+0.005	-0.002

$p \backslash k$	
1	0
2	58.219
3	102.667
4	142.734
5	180.000

Таблица 2

 A_p^*

ϵ_{kp}^*					
$k \backslash p$	1	2	3	4	5
1	-38.826	-0.078	-0.030	-0.016	-0.010
2	-9.552	+0.007	+0.015	+0.012	+0.006
3	-3.827	+0.046	+0.011	-0.007	-0.004
4	-1.470	+0.040	-0.015	+0.003	+0.002
5	0	0	0	0	0

$p \backslash k$	
1	39.000
2	9.516
3	3.778
4	1.441
5	0

Значения касательных напряжений τ_r и относительных перемещений V в различные моменты времени для некоторых точек радиуса приведены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

 $-V/2\epsilon\nu^2s^2$

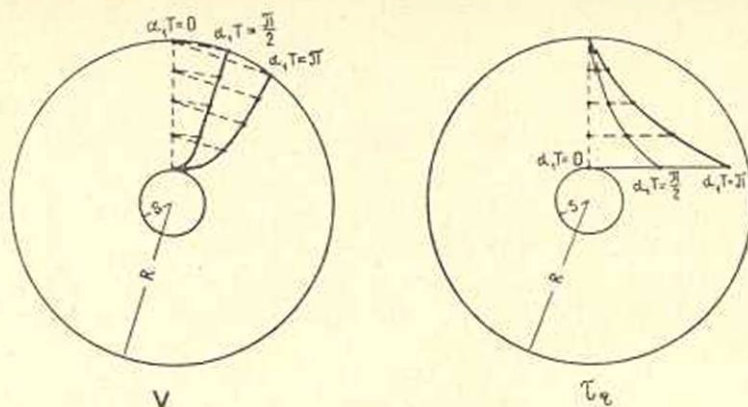
	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0	58.29	102.74	142.73	179.93
π	0	116.25	205.22	285.50	360.09
$\frac{3\pi}{2}$	0	58.28	102.70	142.73	179.97
2π	0	0.11	0.04	-0.03	-0.02
$\frac{5\pi}{2}$	0	58.22	102.65	142.73	180.02
3π	0	116.38	205.30	285.48	360.03
$\frac{7\pi}{2}$	0	58.15	102.61	142.75	180.04
4π	0	0.18	0.14	-0.03	-0.12

Таблица 4

 $-\tau_r/4\epsilon\nu^2s^2G$

	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	39.06	9.52	3.75	1.39	0
π	77.77	19.07	7.65	2.94	0
$\frac{3\pi}{2}$	39.06	9.50	3.75	1.43	0
2π	0.18	-0.04	-0.06	0.01	0
$\frac{5\pi}{2}$	39.00	9.51	3.77	1.46	0
3π	77.90	19.04	7.59	2.89	0
$\frac{7\pi}{2}$	38.94	9.52	3.82	1.47	0
4π	0.22	-0.02	-0.09	-0.08	0

Для наглядности построены эиоры (фиг. 3).



Фиг. 3.

Как видно из этих результатов, при равноускоренном вращении радиусы вала всегда отстают от первоначального положения и колеблются относительно некоторого среднего положения с частотой $\mu_1/2\pi\gamma$. Кроме этого, точки, лежащие на линии в радиальном направлении, колеблются также и с другими частотами, но гораздо меньшими амплитудами, чем амплитуды основной частоты, так что на общую картину колебания влияние последних незначительно.

Аналогичное колебание имеет место и для касательного напряжения τ_r .

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 25 VI. 1964

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Օ. Օ. ՓԻՐՈՒՄՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆԲԵ ԳԼԱՆԱԶԵՎ ԼԻՍԵՆԻ ԴԻՆԱՄԻԿ
ՈՒՐՐԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Հոդվածում դիտարկվում են վերջավոր երկարությամբ գլանաձև լիսենի վերաբերյալ զինամիկ ոլորման մի քանի խնդիրներ՝ խառը եզրային պայմաններով: Լապլասի ձևափոխության օգնությամբ խնդիրները բերվում են $\varphi(r, z, p)$ ֆունկցիայի գանկուն, իսկ վերջինս որոշվում է Ֆուրիե և Ֆուրիե-Դինիի շարքերի գումարի տեսքով: Շարքերի գործակիցները որոշվում են եզրային պայմաններից վերջավոր տեսքով: Դիտարկված են մի քանի օրինակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space II. J. Appl. Phys., 15, № 9, 1944.
2. Уфлянд Я. С. О крутильных колебаниях полупространства. ПММ, 25, вып. 1, 1961.

3. Arnold R. N., Bycroft G. N., Warburton G. B. Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid. *J. Appl. Mech.*, **22**, № 3, 1955.
4. Bycroft G. N. Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and on an elastic stratum. *Philosoph. trans., series A*, **248**, 1956.
5. Sengupta A. M. Note on a simple case of forced torsional oscillation of a circular cylinder. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **41**, № 1, 1949, 47—48.
6. Mitra A. K. Note on the forced torsional vibration of a cylinder having periodic shearing forces along a ring on the curved surface. *Indian Journ. Theor. Phys.*, **7**, № 1, 1959, 1—4.
7. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.