

Г. Ц. ТУМАРКИН

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТЫ СЕМЕЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим семейство H аналитических в области G функций $h(z)$. Будем говорить, что семейство H имеет в области G аналитическую мажоранту, если существует однозначная аналитическая функция $\tilde{h}(z)$ такая, что

$$|h(z)| \leq |\tilde{h}(z)| \text{ при всех } z \in G \text{ и } h(z) \in H.$$

В том случае, когда однозначная аналитическая мажоранта $h^*(z)$ семейства H не превосходит по модулю любую другую аналитическую мажоранту $\tilde{h}(z)$ того же семейства:

$$|h^*(z)| \leq |\tilde{h}(z)| \text{ при всех } z \in G,$$

мы называем $h^*(z)$ наилучшей аналитической мажорантой семейства H в области G .

В этой работе мы указываем необходимые и достаточные условия для существования аналитической мажоранты у заданного семейства функций. Эти условия в случае, когда область G есть круг $|z| < 1$ заключаются в том, что всевозможные частные $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, получающиеся от деления произвольной функции $h(z)$ семейства H на фиксированную функцию $h_0(z)$ этого семейства, должны быть мероморфными функциями ограниченного вида. Причем должно быть конечным выражение

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln^+ \left| \frac{h(re^{i\theta})}{h_0(re^{i\theta})} \right| d\theta < \infty$$

кроме того должно существовать множество точек $\{z_j\}$, для кото-

* К этому случаю немедленно сводится случай, когда G есть произвольная односвязная область. Для этого достаточно воспользоваться конформным отображением на круг. Случай, когда G многосвязна, требует специального рассмотрения. Соответствующие результаты указываются далее.

рого $\sum (1 - |\beta_j|) < \infty$ такое, что полюса любой функции $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, где $h \in H$, должны содержаться во множестве $\{\beta_j\}$. Мы доказываем, что из существования аналитической мажоранты у семейства H аналитических функций в односвязной области следует существование у того же семейства наилучшей аналитической мажоранты. Заметим, что этот факт не является очевидным. Действительно, рассмотрим, например, семейство H аналитических и равномерно ограниченных в круге $|z| < 1$ функций $h(z)$:

$$|h(z)| < C, \quad |z| < 1, \quad h \in H.$$

Фиксируем какую-либо точку z_0 внутри круга $|z| < 1$. Найдем теперь среди множества $\tilde{H}$, — всех аналитических мажорант семейства H (множество $\tilde{H}$ не пусто, ибо оно, очевидно, содержит всевозможные константы $\geq C$), функцию $\tilde{h}_{z_0}(z)$, реализующую

$$\inf_{h \in \tilde{H}} |\tilde{h}(z_0)|.$$

Тогда, *a priori*, не ясно, что на этой же самой функции будет реализоваться и $\inf_{h \in \tilde{H}} |\tilde{h}(z)|$ при любой z с $|z| < 1$. Мы откладываем изучение условий существования аналитической мажоранты у произвольных семейств аналитических в области функций до § 3.

Вначале мы указываем два достаточных условия существования аналитической мажоранты семейства функций. Эти условия являются также и необходимыми при дополнительном предположении о наличии в заданном семействе функций хотя бы одной функции ограниченного вида или функции, по нулям которой можно образовать сходящееся произведение Бляшке. Заметим, что из существования аналитической мажоранты у семейства, содержащего хотя бы одну из перечисленных функций (например, функцию ограниченного вида) следует, что все рассматриваемое семейство будет состоять только из функций соответствующего класса (функций ограниченного вида). Чаще всего приходится сталкиваться именно с такими семействами функций. В перечисленных двух случаях устанавливаются способы получения и указывается исчерпывающая характеристика наилучшей аналитической мажоранты рассматриваемого семейства. Особенно подробно рассматривается случай, когда наше семейство состоит из функций ограниченного вида. Условия существования аналитической мажоранты и наилучшая аналитическая мажоранта могут быть тогда выражены в терминах, фигурирующих в параметрическом представлении Р. Неванлинна—В. И. Смирнова функций заданного семейства.

В заключение мы рассматриваем вопросы, связанные с существованием аналитической и наилучшей аналитической мажоранты для

семейства функций, аналитических в многосвязной области G . Даже для случая, когда G конечно-связна, получающиеся результаты существенно отличаются от того, что имело место для односвязного случая. А именно, условия существования аналитической мажоранты остаются подобными тем, какие были приведены для односвязной области. В то же время из существования у заданного семейства аналитической мажоранты, как правило, не вытекает существование у того же семейства наилучшей аналитической мажоранты, как это было для односвязных областей. Более того оказывается, что если функция, построенная по правилу, аналогичному применявшемуся при построении наилучшей аналитической мажоранты для односвязной области, оказалась однозначной, то наилучшая аналитическая мажоранта существует. Пусть теперь эта функция будет многозначной. Так, вообще говоря, и должно быть, ибо указанное правило определяет лишь логарифм модуля нашей функции, однозначность которого в многосвязной области G не влечет, конечно, за собой однозначности самой функции. Тогда оказывается, что функция $\tilde{h}_{z_0}(z)$, реализующая среди всех однозначных мажорант данного семейства $\inf$ модуля в фиксированной точке $z_0 \in G$, не остается неизменной при переходе от взятой точки z_0 к какой-либо другой точке той же области. Это и означает, что в рассматриваемом случае наилучшая мажоранта у нашего семейства не существует.

Остановимся кратко на случае, когда G бесконечно-связна. Заметим, что если в заданной области не существует аналитической и ограниченной в G функции $\neq \text{const}$, то тогда семейство аналитических функций может иметь аналитическую мажоранту лишь при выполнении тривиального условия, когда все функции $h(z)$ нашего семейства получаются умножением одной из них $h_0(z)$ на константы c_h :

$$h(z) = c_h h_0(z), \quad \text{причем } |c_h| \leq c_0 < \infty.$$

§ 1. Условия существования аналитической мажоранты у семейства функций в единичном круге, содержащего хотя бы одну функцию, для нулей α_j которой выполняется условие

$$\sum (1 - |\alpha_j|) < \infty$$

Теорема 1. Для того чтобы семейство H аналитических функций $h(z)$ имело аналитическую мажоранту достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C < \infty, \quad 0 < r < 1. \quad (1)$$

При дополнительном предположении о наличии в семействе H хотя бы одной функции $h(z)$, для нулей α_j которой выполняется

условие $\sum (1 - |\alpha_j|) < \infty^*$, условие (1) является и необходимым для существования аналитической мажоранты.

Если семейство H удовлетворяет условию (1), то это семейство будет иметь и наилучшую аналитическую мажоранту $h^*(z)$, определяемую единственным образом с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, α — действительно, по формуле

$$h^*(z) = e^{i\alpha} b^*(z) \exp[u(z) + i v(z)]. \quad (2)$$

Здесь $b^*(z)$ — произведение Бляшке, нулями которого являются все те и только те точки α_j^* , $|\alpha_j^*| < 1$, в которых все функции $h(z) \in H$ имеют нули**.

Для определения функции $u(z)$ рассматривается вначале функция $\mu(z) = \sup_{h \in H} \ln |h(z)|$. Доказывается, что $\mu(z)$ является субгармонической в круге $|z| < 1$ функцией, для которой существует гармоническая мажоранта. Функцию $u(z)$ полагаем равной наименьшей гармонической мажоранте в $|z| < 1$ субгармонической функции $\mu(z)$, а $v(z)$ — гармонической функции, сопряженной с $u(z)$.

Прежде всего надо показать субгармоничность функции $\mu(z)$. Для этого достаточно лишь проверить полунепрерывность сверху этой функции, так как верхняя огибающая субгармонических функций будет при этом условии сама субгармонична (см., например, [6]). Семейство H функций, удовлетворяющее условию (1), будет семейством функций, равномерно ограниченных в каждом замкнутом круге $|z| \leq r < 1$.

Чтобы убедиться в этом, возьмем какое-либо R , $0 < R < 1$, и построим гармоническую в $|z| < R$ функцию $u_R(z)$ по формуле

$$u_R(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} \mu(Re^{i\theta}) d\theta, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Это возможно, так как по условию теоремы существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \mu(Re^{i\theta}) d\theta < C, \quad 0 < R < 1.$$

Тогда $u_R(z)$ будет в круге $|z| < R$ гармонической мажорантой всех функций $\ln |h(z)|$, $h \in H$, так как на окружности $|z| = R$ будем иметь $\ln |h(Re^{i\theta})| \leq u_R(Re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Поэтому

$$\ln |h(z)| \leq u_R(z), \quad |z| < R, \quad h \in H,$$

что и доказывает равномерную ограниченность внутри $|z| < 1$ семей-

* Равносильное, как известно, тому, что $\int_0^{2\pi} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta < \infty$, $0 < r < 1$.

(см., например, [6]).

** Как и всегда с учетом их кратностей.

ства H функций $h(z)$. Отсюда же, как это хорошо известно, вытекает равностепенная непрерывность функций $h(z)$ семейства H в каждом круге $|z| \leq r < 1$. Опираясь на это, легко устанавливается непрерывность функции $\mu(z)$ во всех точках, в которых $\mu(z) \neq -\infty$. Существование гармонической мажоранты у функции $\mu(z)$ следует теперь из условия (1), которое означает, что

$$\int_0^{2\pi} \mu(re^{i\theta}) d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1$$

(см., например, [7], стр. 42).

Докажем теперь, что формула (2) определяет наилучшую аналитическую мажоранту семейства H . То, что $h^*(z)$ является мажорантой, почти очевидно.

Действительно, возьмем произвольную функцию $h(z) \in H$. Очевидно, что $\ln |h(z)| \leq \mu(z)$. Учитывая условие (1), отсюда имеем

$$\int_0^{2\pi} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1.$$

Поэтому произведение Бляшке $b(z)$, составленное для нулей функции $h(z)$, окажется сходящимся (см., например, [7], стр. 36–37). Тогда для функции $h(z)$ будем иметь представление

$$h(z) = b(z)\varphi(z), \quad \text{где } \varphi(z) \neq 0 \text{ при } |z| < 1.$$

Причем $\ln |\varphi(z)|$ будет наименьшей гармонической мажорантой в круге $|z| < 1$ функции $\ln |h(z)|$.

Из определения $b^*(z)$ сразу следует, что

$$|b(z)| \leq |b^*(z)| \quad \text{при } |z| < 1. \quad (3)$$

В то же время из неравенства

$$\ln |h(z)| \leq \mu(z), \quad |z| < 1,$$

связывающего две субгармонические в круге $|z| < 1$ функции $\ln |h(z)|$ и $\mu(z)$, вытекает подобное же неравенство и для их наименьших субгармонических мажорант $\ln |\varphi(z)|$ и $u(z)$

$$\ln |\varphi(z)| \leq u(z) \quad \text{при } |z| < 1. \quad (4)$$

Учитывая (3), (4), а также определение (2) функции $h^*(z)$, получаем

$$|h(z)| \leq |h^*(z)|, \quad |z| < 1, \quad h \in H.$$

Теперь надо проверить, что $h^*(z)$ будет наименьшей аналитической мажорантой семейства H . Пусть аналитическая функция $\tilde{h}(z)$ такова, что

$$|h(z)| \leq |\tilde{h}(z)|, \quad |z| < 1, \quad h \in H. \quad (5)$$

Ясно, что нулями ее могут быть только те точки z , круга $|z| < 1$, в которых все функции $h(z)$ семейства H обращаются в нуль. Поэтому, обозначая через $\tilde{b}(z)$ произведение Бляшке для нулей $\tilde{h}(z)$:

$$\tilde{h}(z) = \tilde{b}(z) \tilde{\varphi}(z), \quad (6)$$

имеем

$$|b^*(z)| \leq |\tilde{b}(z)| \quad \text{при } |z| < 1.$$

Далее из неравенства (5) можно сразу вывести, что

$$\mu(z) = \sup_{h \in H} \ln |h(z)| \leq \ln |\tilde{h}(z)|, \quad |z| < 1.$$

Откуда будет следовать аналогичное неравенство для наименьших гармонических мажорант $u(z)$ и $\ln |\tilde{\varphi}(z)|$ субгармонических функций $\mu(z)$ и $\ln |\tilde{h}(z)|$:

$$u(z) \leq \ln |\tilde{\varphi}(z)|, \quad |z| < 1. \quad (7)$$

Учитывая (3) и (7), получаем

$$|h^*(z)| \leq |\tilde{h}(z)|, \quad |z| < 1.$$

Единственность наилучшей аналитической мажоранты семейства H с точностью до множителя $e^{i\alpha}$ доказывается немедленно. Действительно, если $h^*(z)$ и $h_1^*(z)$ обладают этим свойством, то одновременно должно быть

$$|h^*(z)| \leq |h_1^*(z)| \quad \text{и} \quad |h_1^*(z)| \leq |h^*(z)| \quad \text{при } |z| < 1.$$

Откуда имеем, что всюду в $|z| < 1$

$$|h^*(z)| = |h_1^*(z)|.$$

Из этого сразу следует доказательство нужного нам факта.

Для завершения доказательства теоремы, остается установить необходимость условия (1) при дополнительном предположении о наличии в семействе H хотя бы одной функции $h(z)$ со свойством

$$\int_0^{2\pi} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1. \quad (8)$$

Предположим, что у семейства H существует аналитическая мажоранта $\tilde{h}(z)$. Тогда можно будет построить сходящееся произведение Бляшке, нулями которого являются нули $\tilde{h}(z)$, ибо нули $\tilde{h}(z)$ могут находиться лишь среди точек, являющихся нулями $h(z)$, а по нулям $h(z)$, ввиду условия (8), возможно построить сходящееся произведение Бляшке (см., например, [6], гл. II). Отсюда сразу же будет вытекать, что

$$\int_0^{2\pi} \ln |\tilde{h}(re^{i\theta})| d\theta \leq C_1, \quad 0 < r < 1.$$

Последнее неравенство, ввиду того, что $\tilde{h}(z)$ — аналитическая мажоранта семейства H , означает, что

$$\int_0^{2\pi} \ln \sup_{h \in H} |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C_1, \quad 0 < r < 1.$$

§ 2. Условия существования аналитической мажоранты у семейства, содержащего функции ограниченного вида

Очевидно, что утверждение теоремы 1 сохраняет силу, если вместо предположения о том, что

$$\int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln |h(re^{i\theta})| d\theta < C < \infty, \quad 0 < r < 1, \quad (9)$$

считать выполненным условие

$$\int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln^+ |h(re^{i\theta})| d\theta < C < \infty, \quad 0 < r < 1. \quad (10)$$

Условие (10) на первый взгляд гораздо более стеснительное, чем (9), в котором равномерная ограниченность интегралов может получаться за счет взаимной компенсации положительных и отрицательных значений. Однако, мы сейчас докажем, что если среди функций семейства H существует хотя бы одна функция $h_1(z)$ ограниченного вида, то при выполнении для семейства H условия (9) будет выполняться и условие (10). Следовательно, все семейство должно состоять тогда из функций ограниченного вида. Действительно, используя обычные обозначения $\mu^+ = \max\{\mu, 0\}$ и $\mu^- = -\min\{0, \mu\}$, так что $\mu = \mu^+ - \mu^-$,

и замечая, что $\mu^-(z) < \ln^+ \frac{1}{|h_1(z)|}$ *, имеем в силу (9)

$$\int_0^{2\pi} \mu^+(re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} \mu(re^{i\theta}) d\theta + \int_0^{2\pi} \mu^-(re^{i\theta}) d\theta \leq C + \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|h_1(re^{i\theta})|} d\theta. \quad (11)$$

Но для функции $h_1(z)$ ограниченного вида известно, что будут равномерно ограничены интегралы

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|h_1(re^{i\theta})|} d\theta < C_1, \quad 0 < r < 1. \quad (12)$$

Учитывая (12), имеем из (11)

* Напомним ранее введенное обозначение

$$\mu(z) = \sup_{h \in H} \ln |h(z)|.$$

$$\int_0^{2\pi} \mu^-(re^{i\theta}) d\theta \leq C_1 + C = C_2.$$

Это означает, что

$$\int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln^+ |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C_2, \quad 0 < r < 1.$$

Что и требовалось доказать.

Полученный результат позволяет сделать, принимая во внимание теорему 1, следующий вывод:

Теорема 2. Для того чтобы семейство H аналитических в односвязной области G функций $h(z)$, среди которых есть хотя бы одна функция ограниченного вида, имело аналитическую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы все функции этого семейства были ограниченного вида, причем функция $\mu^+(z) = \sup_{h \in H} \ln^+ |h(z)|$ имела в области G гармоническую мажоранту.

Доказательство для общего случая немедленно сводится к случаю круга с помощью конформного отображения области G . Заметим, что теорема 2 может быть легко доказана непосредственно, не опираясь при этом на теорему 1. В самом деле, пусть семейство H , содержащее хотя бы одну функцию ограниченного вида $h_0(z)$ имеет аналитическую мажоранту $\tilde{h}(z)$. Тогда $\tilde{h}(z)$ должна быть функцией ограниченного вида. Действительно, $g(z) = \frac{h_0(z)}{\tilde{h}(z)}$ является аналитической

в круге $|z| < 1$ функцией с $|g(z)| \leq 1$. Поэтому $\tilde{h}(z) = h_0(z) \frac{1}{g(z)}$ как произведение двух функций ограниченного вида будет функцией ограниченного вида. Но теперь уже, очевидно, что все функции $h(z)$ семейства H будут функциями ограниченного вида. (Для этого надо лишь заметить, что $\left| \frac{h(z)}{\tilde{h}(z)} \right| \leq 1$). Достаточность

предположения о существовании гармонической мажоранты у $\mu^+(z)$ для заключения о наличии аналитической мажоранты семейства H устанавливается рассуждениями, аналогичными использованным в теореме 1 для функции $\mu(z)$.

В рассматриваемом случае можно дать дополнительную информацию о свойствах наименьшей аналитической мажоранты, позволяющих получать ее структурное представление, если известны структурные представления функций семейства H .

Как известно, при условии

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |h(re^{i\theta})| d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1,$$

функция $h(z)$ представляется в виде

$$h(z) = e^{i\gamma_h} b_h(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi_h(\theta) \right\}, \quad (13)$$

где $\psi_h(\theta)$ — функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$. Аналогичное представление

$$h^*(z) = e^{i\gamma^*} b^*(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi^*(\theta) \right\} \quad (14)$$

имеет место и для наилучшей аналитической мажоранты $h^*(z)$ семейства H , так как из (10) будет следовать, что

$$\int_0^{2\pi} \ln^- |h^*(re^{i\theta})| d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1. *$$

В теореме 1 указывалось как связано произведение Бляшке $b^*(z)$ с произведениями $b_h(z)$. Установим теперь связь между $\psi^*(\theta)$ и $\psi_h(\theta)$ **.

Теорема 3. Для того чтобы семейство H аналитических функций ограниченного вида, определенных формулами (13), имело аналитическую мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы существовала верхняя огибающая у мер $d\psi_h(\theta)$, $h \in H$, то есть нашлась бы такая функция ограниченной вариации $\tilde{\psi}(\theta)$, что все функции $\tilde{\psi}(\theta) - \psi_h(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $h \in H$, являлись бы неубывающими на отрезке $[0, 2\pi]$.

Наилучшей аналитической мажоранте соответствует тогда функция $\psi^*(\theta)$, являющаяся среди верхних огибающих $\tilde{\psi}(\theta)$ семейства $\{\psi_h(\theta)\}$ функцией, реализующей $\min \int_0^{2\pi} d\tilde{\psi}(\theta)$. (Указанный $\min$

ищется среди функций $\tilde{\psi}(\theta)$, для которых

$$\int_E d\psi_h(\theta) \leq \int_E d\tilde{\psi}(\theta) \quad (15)$$

во всем борелевском множестве $E \subset [0, 2\pi]$ и $h \in H$).

Доказательство. Предположим, что семейство H имеет аналитическую мажоранту $\tilde{h}(z)$. По теореме 2 она должна быть функцией ограниченного вида и допускать поэтому представление

$$\tilde{h}(z) = e^{i\gamma} \tilde{b}(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tilde{\psi}(\theta) \right\}. \quad (16)$$

* В ходе доказательства теоремы 2 было установлено, что аналитические мажоранты семейства H должны быть функциями ограниченного вида.

** Чтобы избежать различных осложнений, всюду в дальнейшем предполагаем, что функции нормированными, как в работе [13] (см. [13], формулы (4)).

Тогда для функции $\frac{h(z)}{\bar{h}(z)}$, где $h \in H$, которая будет аналитична в $|z| < 1$, и

$$\left| \frac{h(z)}{\bar{h}(z)} \right| \leq 1 \quad \text{при } |z| < 1 \quad (17)$$

будем иметь из (13) и (16) представление

$$\frac{h(z)}{\bar{h}(z)} = e^{i(\gamma_h - \bar{\gamma})} \frac{b_h(z)}{\bar{b}(z)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d[\psi_h(\theta) - \bar{\psi}(\theta)] \right\}. \quad (18)$$

Здесь $\frac{b_h(z)}{\bar{b}(z)}$ будет давать произведение Бляшке, составленное для нулей $\frac{h(z)}{\bar{h}(z)}$. Но для аналитической функции $\frac{h(z)}{\bar{h}(z)}$ с условием (17) функ-

ция $\psi_h(\theta) - \bar{\psi}(\theta)$, фигурирующая в параметрическом представлении (18) обязана быть невозрастающей на отрезке $[0, 2\pi]$. Так же просто показывается, что из существования функции $\psi(\theta)$ такой, что функции $\bar{\psi}(\theta) - \psi_h(\theta)$ будут неубывающими на $[0, 2\pi]$, вытекает существование аналитической мажоранты у семейства H . Ею будет, например, функция

$$\bar{h}(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\bar{\psi}(\theta) \right\}.$$

В этом можно тут же убедиться, разделив какую-либо функцию $h(z) \in H$ на $\bar{h}(z)$. Тогда частное будет иметь вид

$$e^{i\gamma_h} \frac{b_h(z)}{\bar{b}(z)} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d[\psi_h(\theta) - \bar{\psi}(\theta)] \right\},$$

причем $|b_h(z)| < 1$ при $|z| < 1$ и подобным же свойством будет обладать модуль последнего множителя.

Используя далее установленное в теореме 1 существование наилучшей аналитической мажоранты $h^*(z)$ семейства H , нетрудно проверить сформулированное в лемме свойство функции $\psi^*(\theta)$ давать

минимальное значение $\int_0^{2\pi} d\bar{\psi}(\theta)$ среди всех верхних огибающих $\bar{\psi}(\theta)$ семейства $\{\psi_h(\theta)\}$. То, что наилучшая аналитическая мажоранта обладает этим свойством, ясно, так как для функции (16)

$$\ln |\tilde{h}(0)| = \ln |\tilde{b}(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\tilde{\psi}(\theta).$$

Минимальность первого слагаемого автоматически достигается выбором нулей $\tilde{b}^*(z)$ по правилу, изложенному в формулировке теоремы 1. Так что для выполнения вытекающего из определения наилучшей аналитической мажоранты условия минимальности модуля в точке

$z=0$ на функции $\tilde{\psi}^*(\theta)$ должен реализоваться $\min \int_0^{2\pi} d\tilde{\psi}(\theta)$ среди всех

допустимых $\tilde{\psi}(\theta)$. Пусть теперь обратно $\tilde{\psi}^*(\theta)$ такова, что $\tilde{\psi}^*(\theta) - \tilde{\psi}_n(\theta)$ не убывает на $[0, 2\pi]$ при всех $h(z) \in H$, и $\int_0^{2\pi} d\tilde{\psi}^*(\theta)$ обладает мини-

мальным значением среди всех допустимых $\tilde{\psi}(\theta)$. Тогда, если взять функцию (14), где $b^*(z)$ определено в теореме 1, то (14) будет аналитической мажорантой семейства H , причем в точке $z=0$ ее модуль будет минимальным среди возможных, как это следует из ранее сказанного. Но тогда взятая функция будет наилучшей аналитической мажорантой нашего семейства ввиду того, что значение ее модуля в точке $z=0$ должно оказаться равным значению в той же точке модуля наилучшей аналитической мажоранты семейства H . Отсюда будет следовать совпадение модулей этих функций всюду в $|z| < 1$ и, следовательно, совпадение самих функций с точностью до множителя $e^{i\alpha}$, α — действительно.

Сделаем теперь некоторые дополнительные замечания по поводу указанных фактов. Можно доказать существование наилучшей аналитической мажоранты у функций $h(z)$ семейства H , удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} (\ln^+ |h(re^{i\theta})|) d\theta \leq C, \quad 0 < r < 1.$$

вести непосредственно, отираваясь от параметрического представления этих функций. В этом случае надо будет опираться на предварительно доказываемую следующую лемму.

Лемма 1. Пусть дано семейство $\{\psi_n(\theta)\}$ функций ограниченной вариации, для которых существует функция $\tilde{\psi}(\theta)$ ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ такая, что функции $\tilde{\psi}(\theta) - \psi_n(\theta)$ для всех $h \in H$ будут неубывающими на $[0, 2\pi]$. Тогда среди функций $\tilde{\psi}(\theta)$ с подобным свойством найдется функция $\tilde{\psi}^*(\theta)$ такая, что разности $\tilde{\psi}(\theta) - \tilde{\psi}^*(\theta)$ для всех функций $\tilde{\psi}(\theta)$ будут неубывающими функ-

циями на $[0, 2\pi]$. То есть среди функций $\tilde{\psi}(b)$, для которых по всем $E \subset [0, 2\pi]$ и $h \in H$

$$\int_E d\psi_h(b) \leq \int_E d\tilde{\psi}(b),$$

найдется функция, реализующая сразу на всех борелевских множествах $E \subset [0, 2\pi]$

$$\inf_h \int_E d\tilde{\psi}(b).$$

Доказательство. Покажем, как может быть получена мера $\psi^*(E)$, обладающая указанным свойством. Для любого борелевского множества E рассмотрим разбиение E на сумму $\bigcup_{k=1}^n E_k$ непересекающихся борелевских подмножеств. Обозначая это разбиение через S , полагаем

$$\psi_s(E) = \sum_{k=1}^n \sup_{h \in H} \psi_h(E_k).$$

После этого определяем $\psi^*(E)$ равенством

$$\psi^*(E) = \sup_S \psi_s(E),$$

где $\sup$ берется по всем подразделениям S данного множества E . Полученная функция $\psi^*(E)$, определенная на всех борелевских множествах $E \subset [0, 2\pi]$, будет, как нетрудно видеть, аддитивна. Полная аддитивность ее вытекает из того, что она будет мажорироваться сверху мерой $\tilde{\psi}(E)$, которая мажорировала по условию все меры $\psi_h(E)$, $h \in H$. Снизу же минорантой $\psi^*(E)$ может служить любая мера $\psi_h(E)$. Легко проверяется, что полученная мера $\psi^*(E)$ обладает требуемыми свойствами.

Подобный прием был применен Рудиным [12] (см. также [2]) для разбора частного случая, когда все семейство H состоит из аналитических в круге $|z| < 1$ функций $M(z)$ таких, что $|M(z)| \leq 1$ при $|z| < 1$, $|M(e^{i\theta})| = 1$ почти всюду (по терминологии Бейрлинга [10] функции $M(z)$ с такими свойствами называются внутренними). $M(z)$ допускают тогда представления следующего вида:

$$M(z) = e^{i\gamma_M} b_M(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\psi_M(b) \right\},$$

где $b_M(z)$ — произведение Бляшке, а $\psi_M(b)$ — невозрастающая сингулярная функция.

Рудин доказал, что для всякого непустого семейства F внутренних функций $M(z)$ существует наибольший дивизор, то есть такая внутренняя функция $M_0(z)$, что при любой $M(z) \in F$ частное

$\frac{M(z)}{M_0(z)}$ есть снова внутренняя функция. Но в то же время, если $\tilde{M}(z)$ — другая внутренняя функция, которая обладает тем же свойством, что и $M_0(z)$, то частное $\frac{M_0(z)}{\tilde{M}(z)}$ дает внутреннюю функцию. Этот ре-

зультат был использован Рудиным для выяснения структуры замкнутых идеалов в алгебре аналитических в $|z| < 1$ и непрерывных в $|z| \leq 1$ функций. Легко видеть, что этот результат Рудина есть частный случай приведенных выше теорем 2 и 3. Когда семейство H состоит из внутренних функций $M(z)$, наименьшая аналитическая мажоранта, существование которой обосновано нами при значительно более общих предположениях, и будет наибольшим общим дивизором данного семейства. В то же время использованный для доказательства теорем 1 и 2 метод, не привлекающий структурного представления функций семейства, заслуживает предпочтения при рассмотрении некоторых вопросов. Действительно, этот метод допускает немедленное распространение на произвольные области. Метод же, связанный со структурными представлениями, не распространяется так легко на произвольные области или римановы поверхности, ибо вопрос о самих структурных представлениях функций различных классов в областях общего вида является весьма сложным.

В заключение этого параграфа отметим некоторые способы получения функции $\psi^*(\theta)$, фигурирующей в параметрическом представлении (14) наилучшей аналитической мажоранты.

Лемма 2. *Функция ограниченной вариации $\psi^*(\theta)$, соответствующая наименьшей мажоранте $\psi^*(E)$ семейства мер $\{\psi_n(E)\}$, описанной в лемме 1, может быть получена как предельная функция последовательности $\{\psi_n^*(\theta)\}$, определенной следующим образом:*

каждая из функций $\psi_n^(\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $\psi_n^*(0) = 0$, является функцией скачков со скачками в точках $\frac{2\pi k}{2^n}$, $k = 1, \dots, 2^{n-1}$, равны-*

$$\text{или } \sup_{n \in N} \int_{\frac{2\pi(k-1)}{2^n}}^{\frac{2\pi k}{2^n}} d\psi_n^*(\theta).$$

Мы опускаем доказательство леммы 2, ибо совершенно ясно, как оно может быть проведено. Заметим, что, конечно, в качестве множества точек, в котором функции $\{\psi_n^*(\theta)\}$, сходящиеся к $\psi^*(\theta)$, имеют скачки, может быть взято любое счетное всюду плотное на $[0, 2\pi]$ множество точек.

Лемма 3. *Пусть дано семейство H аналитических в круге $|z| < 1$ функций $h(z)$ ограниченного вида, допускающих следующее представление*

$$h(z) = e^{i\gamma_h} h_h(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln |h(e^{i\theta})| d\theta \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\lambda_h(\theta) \right\}, \quad (19)$$

где $\lambda_h(\theta)$ — сингулярная функция на $[0, 2\pi]$. Тогда наименьшая аналитическая мажоранта $h^*(z)$ семейства H имеет вид

$$h^*(z) = e^{i\gamma^*} b^*(z) \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \ln |h^*(e^{i\theta})| d\theta \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\lambda^*(\theta) \right\}, \quad (20)$$

где $\ln |h^*(e^{i\theta})| = \sup_{h \in H} \ln |h(e^{i\theta})|$, $\lambda^*(E)$ — верхняягибающая сингулярных мер $\{\lambda_h(E)\}$.

§ 3. Условия существования аналитической мажоранты для произвольного семейства функций в односвязной области

Так как с помощью конформного отображения общий случай односвязной области сводится к случаю круга, то достаточно ограничиться рассмотрением произвольных семейств аналитических функций в единичном круге.

Теорема 4. Для того чтобы семейство H аналитических в круге $|z| < 1$ функций имело аналитическую мажоранту в $|z| < 1$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

I. Все частные $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, полученные от деления произвольной функции $h(z) \in H$ на фиксированную функцию $h_0(z)$ того же семейства, должны быть мероморфными функциями ограниченного вида, все полюса которых (с учетом их кратностей) содержатся среди счетного множества точек $\{\beta_i\}$ с условием

$$\sum (1 - |\beta_i|) < \infty. \quad (21)$$

$$\text{II.} \quad \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln^+ \left| \frac{h(re^{i\theta})}{h_0(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq C < \infty. \quad (22)$$

Из существования аналитической мажоранты вытекает существование наилучшей аналитической мажоранты у этого семейства.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что семейство H имеет аналитическую мажоранту $\tilde{h}(z)$. Тогда для всякой $h(z) \in H$, очевидно, имеем:

$$\left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| \leq \left| \frac{\bar{h}(z)}{h_0(z)} \right| \quad \text{при } |z| < 1. \quad (23)$$

Функция $\frac{\bar{h}(z)}{h_0(z)}$ будет обладать свойством $\left| \frac{\bar{h}(z)}{h_0(z)} \right| \geq 1$ в $|z| < 1$. Поэтому она будет мероморфной в круге $|z| < 1$ функцией ограниченного вида. Условие ограниченности характеристики рассматриваемой функции сводится к тому, что для полюсов $\{\beta_j\}$ мы имеем:

$$\sum (1 - |\beta_j|) < \infty, \quad (24)$$

и кроме того
$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{\bar{h}(re^{i\theta})}{h_0(re^{i\theta})} \right| d\theta \leq C < \infty \quad (25)$$

(см. [5], а также [6]).

Принимая во внимание (23), можно сразу установить, опираясь на (24) и (25), выполнение условий (21) и (22) теоремы.

Приступаем теперь к проведению доказательства достаточности условий (21) и (22) для наличия у семейства H аналитической мажоранты. Составим для этого произведение Бляшке $b_0(z)$, нулями которого являются все те точки круга $|z| < 1$, в которых хотя бы одна из функций $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, $h(z) \in H$ имеет полюс. Условие (21) говорит о том, что $b_0(z)$ окажется сходящимся произведением. Рассмотрим далее семейство функций вида $\left\{ \frac{h(z)}{h_0(z)} b_0(z) \right\}$, где $h(z) \in H$. Это семейство будет уже семейством функций, аналитических в круге $|z| < 1$. Причем из (22) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \sup_{h \in H} \ln^+ \left| \frac{h(re^{i\theta})}{h_0(re^{i\theta})} b_0(re^{i\theta}) \right| d\theta < C < \infty.$$

Поэтому семейство $\left\{ \frac{h(z)}{h_0(z)} b_0(z) \right\}$ будет семейством функций, удовлетворяющим условиям теоремы 2. В силу указанной теоремы рассматриваемое семейство будет иметь наилучшую аналитическую мажоранту, которую обозначим через $g^*(z)$. Легко убедиться, повторяя приведенные ранее рассуждения, что функция $h^*(z) = \frac{h_0(z)}{b_0(z)} g^*(z)$ будет наилучшей аналитической мажорантой семейства H . Что и требовалось доказать.

Заметим, что вместо семейств аналитических функций можно было бы рассматривать семейства мероморфных в данной области функций, ввести далее понятие мероморфной мажоранты и наилучшей мероморфной мажоранты. Нетрудно видеть, что приведенные выше условия существования аналитической мажоранты переносятся без изменения на случай мероморфных функций, причем это не потребует каких-либо изменений в методе доказательства.

§ 4. О существовании аналитической мажоранты семейства аналитических функций в многосвязных областях

Пусть теперь G — конечносвязная область и H — семейство аналитических в G функций $h(z)$. Мы установим сейчас необходимое и достаточное условие для существования у семейства аналитической мажоранты, являющееся естественным распространением на многосвязные области доказанного в теореме 4 соответствующего условия для круга.

Теорема 5. Для того чтобы у семейства H аналитических в конечно-связной области G функций $h(z)$ существовала аналитическая мажоранта $\tilde{h}(z)$ необходимо и достаточно, чтобы

I. Расположенные внутри G полюса всех функций вида $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, где $h_0(z)$ — фиксированная, а $h(z)$ — произвольная функции семейства H , содержались среди счетного множества $\{z_i\}$ точек с условием:

$$\sum_i g(z_i, z_0) < \infty, \quad (26)$$

где $g(z, z_0)$ — функция Грина области G с полюсом в z_0 , z_0 — фиксированная точка области G .

II. Нашлась бы последовательность подобластей $\{G_k\}$, $G_k \subset G$, сходящаяся при $k \rightarrow \infty$ к G , такая, что

$$\int_{\Gamma_k} \sup_{h \in H} \ln^+ \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| \frac{\partial g_k(z, z_0)}{\partial n} ds \leq C < \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Здесь Γ_k — граница области G_k , $g_k(z, z_0)$ — функция Грина области G_k с полюсом в z_0 (предполагаем, не нарушая общности, что $z_0 \in G_k$, $k = 1, 2, \dots$).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы заметим, что из условий I и II следует, что все функции $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, $h(z) \in H$, будут

мероморфными функциями ограниченного вида. Заметим также, что при существовании аналитической мажоранты у семейства H условие II должно выполняться для всякой последовательности $G_k \rightarrow G$, $G_k \subset G$.

В частности, можно взять за такую последовательность последовательность подобластей G , ограниченных линиями уровня функции Грина $g(z, z_0)$. Тогда условие (27) принимает более простой вид:

$$\int_{\Gamma_k} \sup_{h \in H} \ln^+ \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| \frac{\partial g(z, z_0)}{\partial n} ds \leq C < \infty, \quad k = 1, 2, \dots \quad (28)$$

где $g(z, z_0) = \frac{1}{k}$ при $z \in \Gamma_k$.

Считая область G кругом $|z| < 1$, а z_0 — центром этого круга, получаем (22). Условие (26) равносильно в этом случае условию (21). Тем самым показано, что только что приведенная теорема содержит теорему 4 как частный случай.

Доказательство. Необходимость устанавливается аналогично тому, как это было сделано в теореме 4, основываясь на неравенстве

$$\left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| \leq \left| \frac{\tilde{h}(z)}{h_0(z)} \right|, \quad z \in G, \quad h(z) \in H, \quad (29)$$

и на том, что $\frac{\tilde{h}(z)}{h_0(z)}$ будет функцией ограниченного вида в G (Ведь $\left| \frac{h_0(z)}{\tilde{h}(z)} \right| \leq 1$ при $z \in G$). Расписывая условие ограниченности харак-

теристики функции $\frac{\tilde{h}(z)}{h_0(z)}$ (см., например, [8]) и используя (29), немедленно приходим к (26) и (27). Доказательство достаточности, приведенное в теореме 4, не переносится механически на рассматриваемый нами случай. Нам придется привлечь сейчас дополнительные соображения, чтобы устранить возможную многозначность используемых в качестве мажорант функций. Действительно, предположим, что выполняются условия I и II теоремы. Составим сумму функций Грина с полюсами во всех тех точках β_j (с учетом кратностей), где имелись полюсы хотя бы у одного частного $\frac{h(z)}{h_0(z)}$, $h(z) \in H$. Получа-

ющийся ряд $\sum_j g(z, \beta_j)$ будет сходиться при всяком $z \in G$, ибо он сходился по условию I при $z = z_0$. В этом можно убедиться либо с помощью принципа Гарнака, либо рассмотрев конформное отображение $z = \omega(t)$ универсальной поверхности наложения $\hat{G}$ области G на круг $|t| < 1$, такое что $\omega(0) = z_0$. Тогда, если обозначить через a_{kj} , $k = 1, 2, \dots$, образы точки β_j в круге $|t| < 1$ при отображении $z = \omega(t)$, то, как известно, $g(z, \beta_j)$ переходит при этом в сумму функций Грина круга $|t| < 1$ с полюсами в точках a_{kj} , $k = 1, 2, \dots$:

$$g[\omega(t), \beta_j] = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - \bar{a}_{kj} t}{t - a_{kj}} \right|$$

(см., например, [5], стр. 216).

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} g(z, \beta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| \frac{1 - \bar{a}_{kj} t}{t - a_{kj}} \right|, \quad z = \omega(t). \quad (30)$$

Причем при $t = 0$ имеем $\omega(0) = z_0$, и в силу условия (26) ряд в правой части (30) будет сходиться. Но при определении бесконеч-

ных произведений Бляшке доказывается, что из сходимости ряда $\sum_{j,k} \ln \frac{1}{|a_{kj}|}$ вытекает сходимость произведения Бляшке с нулями a_{kj} , а вместе с этим и сходимость ряда, стоящего в правой части (30). Тем самым доказана сходимость при всех z , за исключением, конечно, точек β_j ряда $\sum_{j=1}^{\infty} g(z, \beta_j)$. Рассмотрим теперь семейство функций

$$\left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\}. \quad (31)$$

Семейство (31) будет семейством функций, субгармонических в области G , ибо все логарифмические полюсы каждой функции $\ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right|$ в окрестности которых было справедливо разложение с главным членом вида $\ln \left| \frac{1}{z - \beta_j} \right|$, уничтожаются в результате вычитания $\sum_j g(z, \beta_j)$. Условие теоремы (27) позволяет тем более заключить, что

$$\int_{\Gamma_k} \sup_{h \in H} \left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\} + \frac{\partial g_k(z, z_0)}{\partial n} ds \leq C. \quad (32)$$

Функция $\sup_{h \in H} \left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\}$ будет верхней огибающей семейства субгармонических функций. Используя (32) и соображения, аналогичные примененным в случае круга, нетрудно убедиться в полунепрерывности сверху рассматриваемой функции. В силу этого $\sup_{h \in H} \left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\}$ будет субгармонической функцией в области G .

Неравенство (32) гарантирует существование гармонической мажоранты этой функции. Но тогда существует и наилучшая гармоническая мажоранта $u(z)$ функции

$$\sup_{h \in H} \left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\}.$$

Возьмем теперь функцию

$$\tilde{h}(z) = h_0(z) \exp \{u(z) + i v(z)\} \cdot \exp \left\{ \sum_j g(z, \beta_j) + i h(z, \beta_j) \right\}. \quad (33)$$

Здесь $v(z)$ и $h(z, \beta_j)$ — гармонические функции, сопряженные соответственно с $u(z)$ и $g(z, \beta_j)$.

Нетрудно убедиться, что $|h(z)| \leq |\tilde{h}(z)|$, когда $z \in G$ для всех $h(z) \in H$. Однако, $\tilde{h}(z)$ может оказаться многозначной, ибо $\arg \tilde{h}(z)$ при обходе граничных контуров может иметь периоды, не являющиеся

числами, кратными 2π . Происхождение их вызвано тем, что гармоническая функция $v(z) + \sum_j h(z, \beta_j)$, сопряженная с однозначной функцией $u(z) + \sum_j g(z, \beta_j)$, получает, вообще говоря, при обходе граничных контуров периоды, не являющиеся кратными 2π . Поэтому $\tilde{h}(z)$ не является еще аналитической мажорантой семейства H , в качестве которой допускаются лишь однозначные функции.

Покажем, как при помощи найденной функции $\tilde{h}(z)$ возможно найти функцию $\tilde{h}(z)$, аналитическую и однозначную в области G такую, что $|\tilde{h}(z)| > |\tilde{h}(z)|$, $z \in G$. Функция $\tilde{h}(z)$ будет тогда удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к аналитической мажоранте семейства H . Для определения функции $\tilde{h}(z)$ построим гармоническую в G функцию $u_0(z)$, принимающую на одном из граничных контуров значение 0 и постоянные значения на каждом из других контуров, подобранные так, что периоды при обходе граничных контуров функции $v_0(z)$, сопряженной с $u_0(z)$, лишь знаком отличались от периодов функции, сопряженной с $\ln |\tilde{h}(z)|$. Существование функции $u_0(z)$ с указанными свойствами хорошо известно (см., например, [1]). Добавляя, если это окажется необходимым, к функции $u_0(z)$ константу, можно получить функцию, удовлетворяющую требованию $u_0(z) \geq 0$, $z \in G$.

Если теперь положить $\tilde{h}(z) = \tilde{h}(z) \exp\{u_0(z) + iv_0(z)\}$, то мы, очевидно, будем иметь однозначную функцию, которая может служить аналитической мажорантой семейства H . Тем самым наша теорема доказана.

Остановимся теперь на вопросе о существовании наилучшей аналитической мажоранты семейства H в конечносвязной области.

Теорема 6. В случае, когда определенная в ходе доказательства предыдущей теоремы функция $\tilde{h}(z)$ (см. (33)), оказывается однозначной в G , она и будет являться наилучшей аналитической мажорантой. Если же функция $\tilde{h}(z)$ будет многозначной, то наилучшей аналитической мажоранты семейства H вообще не существует.

Действительно, прежде всего заметим, что модуль всякой аналитической мажоранты семейства H не может быть меньше, чем модуль функции $\tilde{h}(z)$. В самом деле, если $\tilde{h}_1(z)$ — какая-либо аналитическая мажоранта семейства H , то мы сможем написать неравенство

$$e^{-\sum_j g(z, \beta_j)} \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{\tilde{h}_0(z)} \right| \geq e^{-\sum_j g(z, \beta_j)} \left| \frac{\tilde{h}(z)}{\tilde{h}_0(z)} \right|, \quad z \in G, \quad h(z) \in H, \quad (34)$$

где $\beta_j, j = 1, \dots$ — те нули $h_0(z)$, которые не являются в то же время нулями всех функций $h(z) \in H$. Из неравенства (34) следует, что

$$\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \geq \sup_{h(z) \in H} \left\{ \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \right\}. \quad (35)$$

Заметим, что функция $\frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)}$ будет по модулю ≥ 1 и в каждой точке β_j имеет полюс. Действительно,

$$\left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| > \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| \quad \text{при } z \in G$$

для всех $h(z) \in H$, причем, по крайней мере, одна функция $\frac{h(z)}{h_0(z)}$ имеет в точке β_j полюс.

Отсюда следует, что функция $\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j)$ так же как и $\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right|$ принимает в G лишь неотрицательные значения

$$\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \geq 0.$$

Подобный факт просто проверяется и хорошо известен для случая круга. Рассматриваемый случай сводится к случаю круга при помощи использованных выше при доказательстве теоремы 5 рассуждений с конформным отображением универсальной поверхности наложения $\hat{G}$ области G на круг. Функция, находящаяся в левой части равенства (35), будет, ввиду сказанного, супергармонической в области G , как логарифм модуля мероморфной в области G функции с модулем ≥ 1 . В то же время функция, стоящая в правой части неравенства (35), будет, как отмечалось ранее, субгармонической. Поэтому наилучшая

гармоническая миноранта $\tilde{u}_1(z)$ функции $\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j)^*$ должна при всех $z \in G$ быть $\geq u(z)$ — наилучшей гармонической мажоранты функции $\sup_{h(z) \in H} \ln \left| \frac{h(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j)$.

Действительно, если $u_1(z) \geq u(z)$ при $z \in G$, причем $u_1(z)$ супергармонична, а $u(z)$ субгармонична, то подобным же неравенством

* которая существует в силу того, что

$$\ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j) \geq 0, \quad z \in G.$$

будут связаны наилучшие гармонические миноранта $\tilde{u}_1(z)$ и мажоранта $\tilde{u}(z)$ соответственно функций $u_1(z)$ и $u(z)$. Подобное соотношение сразу получается для каждой подобласти $G_1 \subset G$ и тут же проверяется для всей области G переходом к пределу по последовательности подобластей, исчерпывающих G .

Заметим теперь, что

$$|\tilde{h}_1(z)| \geq e^{\tilde{u}_1(z)} |h_0(z)| e^{\sum_j g(z, \beta_j)}, \quad (36)$$

что следует сразу из свойства $\tilde{u}_1(z)$ быть гармонической минорантой:

$$\tilde{u}_1(z) \leq \ln \left| \frac{\tilde{h}_1(z)}{h_0(z)} \right| - \sum_j g(z, \beta_j). \quad (37)$$

В то же время из определения (33) функции $\tilde{h}(z)$ имеем

$$|\tilde{h}(z)| = |h_0(z)| \exp \left\{ \tilde{u}(z) + \sum_j g(z, \beta_j) \right\}. \quad (38)$$

Сравнивая (36) и (38) и учитывая, что $\tilde{u}_1(z) \geq \tilde{u}(z)$, убеждаемся в том, что

$$|\tilde{h}(z)| \leq |\tilde{h}_1(z)|, \quad z \in G.$$

Таким образом, доказано, что любая аналитическая мажоранта $\tilde{h}_1(z)$ семейства H должна быть по модулю $\geq |\tilde{h}(z)|$, где $\tilde{h}(z)$ — функция, определенная ранее.

Покажем теперь, что в случае, когда определенная формулой (33) функция $\tilde{h}(z)$ многозначна в G , не существует наилучшей аналитической мажоранты семейства H . Рассмотрим семейство $U_\alpha = \{u_\alpha(z)\}$ всех однозначных неотрицательных гармонических в области G функций $u_\alpha(z)$, сопряженные функции $v(z)$ которых приобретают при обходе граничных контуров γ_k периоды вида $-\alpha_k + 2m\pi$, где α_k — период функции, сопряженной с $\ln |\tilde{h}(z)|$, при обходе γ_k , а m — целое число. Будем теперь искать в семействе $\{u_\alpha(z)\}$ функцию $u_0(z)$, реализующую

$$\inf_{u_\alpha(z) \in U_\alpha} u_\alpha(z_0), \quad z_0 \in G.$$

Можно доказать, используя известные результаты (см. [4], [11], [3]), что экстремальная функция $\tilde{u}_{z_0}(z)$ будет непрерывной всюду на границе Γ области G , за исключением конечного числа точек. При приближении z к $\zeta \in \Gamma$ функция $\tilde{u}_{z_0}(z)$ стремится к 0, если ζ — точка непрерывности $\tilde{u}_{z_0}(z)$.

Если же ζ — одна из конечного числа точек разрыва функции $\tilde{u}_{z_0}(z)$, то можно подобрать такой путь при приближении, по которому $\tilde{u}_{z_0}(z) \rightarrow \infty$. Поэтому найдутся такие точки $z^* \in G$, в которых $\tilde{u}_{z_0}(z)$ будет принимать значение, превосходящее значение в тех же самых точках функции $\tilde{u}_1(z)$, построенной в ходе доказательства теоремы 5, ибо функция $\tilde{u}_1(z)$ ограничена в области G . Возьмем тогда одну из точек z^* с только что указанным свойством и будем искать функцию $\tilde{u}_{z^*}(z)$, реализующую

$$\inf_{u(z) \in U_z} u(z^*),$$

Ясно, что экстремальная функция $\tilde{u}_{z^*}(z)$ не может совпадать с $\tilde{u}_{z_0}(z)$, ибо в допустимом классе U_z существует функция $\tilde{u}_1(z)$ такая, что $\tilde{u}_1(z) \leq \tilde{u}_{z_0}(z)$. Этим самым показано, что аналитическая мажоранта $\tilde{h}_{z_0}(z)$ семейства H , реализующая $\inf |\tilde{h}(z_0)|$ среди всех аналитических мажорант $\tilde{h}(z)$ данного семейства, зависит в рассматриваемом случае от взятой точки z_0 .

Московский геологический институт
им. С. Орджоникидзе

Поступила 15.11.1964

Գ. Յ. ՏՈՒՄԱՐԿԻՆ

ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԱԺՈՐԱՆՏԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Աշխատության մեջ սահմանված են անալիտիկ մաթորանտի գոյության մի շարք չափանիշներ՝ միակապ և բազմակապ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների ընտանիքների համար: G տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների H ընտանիքի անալիտիկ մաթորանտ ենք անվանում G -ում աչալիս $h^*(z)$ հոլոմորֆ ֆունկցիան, երբ բոլոր $z \in G$, $h(z) \in H$ դեպքում իրավացի է

$$|h(z) \in H| \leq |h^*(z)|$$

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է նաև ամենափոքր անալիտիկ մաթորանտի գոյության հարցը:

Միավոր շրջանում հոլոմորֆ և թեկուզ մեկ սահմանափակ տեսքի ֆունկցիա պարունակող ֆունկցիաների ընտանիքի համար ուսումնասիրվում են ամենափոքր անալիտիկ մաթորանտի հատկությունները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.—Л., 1952.
2. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций. ИЛ, М., 1963.
3. Кочетков А. И. Экстремальные задачи для аналитических функций с положительной вещественной частью, удовлетворяющих дополнительным условиям. ДАН СССР, 148, № 3, 508—511.
4. Крейн М. Г. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. Успехи математических наук, 6, № 4, 1951, 3—120.
5. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М.—Л., 1941.
6. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Изд. МГУ, 1941.
7. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-ое. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
8. Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я. Классы аналитических функций в многосвязных областях. Сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного“, М., 1960, 46—77.
9. Тумаркин Г. Ц. и Хавинсон С. Я. О существовании в многосвязных областях однозначных аналитических функций с заданным модулем граничных значений. Известия АН СССР, серия матем., 22, 1958, 543—562.
10. Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math. 81, 1949.
11. Nehari Z. Analytic functions possessing a positive real part. Duke Math. J., 15, № 4, 1948, 1033—1042.
12. Rudin W. The closed ideals in an algebra of continuous functions. Can. J. Math., 9, 1957.
13. Тумаркин Г. Ц. Условия равномерной сходимости и сходимости граничных значений аналитических и мероморфных функций с равномерно ограниченными характеристиками. Сибирский математический журнал, 5, № 2, 1964, 387—417.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблян, С. М. Саакян

О ДВУХ ЗАДАЧАХ О РАВНОВЕСИИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА СО СМЕШАННЫМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях была поставлена Ламе [4] в 1852 году. Он указал на важность этой задачи для практических приложений и вместе с тем отметил особую ее трудность.

Однако, задача эта до сего времени не получила полного решения. Известны некоторые приближенные решения частных случаев задачи Ламе.

Численным методом С. П. Тимошенко решил плоскую задачу о сжатии параллелепипеда двумя жесткими плитами с полным трением по поверхностям контакта [5]. К. Хагер рассмотрел задачу о равномерном сжатии прямоугольной призмы [6]. Задача о сжатии параллелепипеда жесткими плитами при неполном трении приближенно решена Л. Фешлом [7]. Пользуясь вариационным методом Кастильяно, М. М. Филоненко-Бородич решил некоторые задачи о равновесии упругого параллелепипеда [1—3]. Тем же методом некоторые задачи о стесненном кручении упругого параллелепипеда рассмотрены в работах В. Н. Нетребко [11] и М. И. Мешкова [10, 17].

Точные решения для некоторых смешанных задач о равновесии упругого параллелепипеда были получены в работах Г. М. Валова [8], Б. Ф. Власова [9], В. В. Вишнякова [16], Мелконяна [13], Теодореску [15], Мишонова [14] и других. Задаче о равновесии параллелепипеда посвящена также работа Э. Н. Байды [12].

В настоящей работе дается точное решение двух задач о равновесии упругого параллелепипеда со следующими смешанными граничными условиями:

а) на плоскостях параллелепипеда $z=0$, $z=c$ заданы касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и нормальное перемещение w , а на остальной части поверхности параллелепипеда нагрузка задана компонентами напряжения;

б) на боковых плоскостях параллелепипеда $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$ заданы соответствующие касательные напряжения и нормальные перемещения, а на плоскостях $z=0$, $z=c$ заданы напряжения. Подобная задача, с нулевыми условиями на боковых поверхностях была решена Г. М. Валовым [8].

Пользуясь методом Фурье, решения уравнений равновесия в форме Ламе представляются в виде суммы трех двойных рядов Фурье.

Определение неизвестных коэффициентов в первой задаче сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти бесконечные системы квази-регулярные и имеют ограниченные сверху и стремящиеся (порядка $\frac{1}{m^2 n}$ или $\frac{1}{l^2 n}$) к нулю свободные члены, когда m , n и l стремятся к бесконечности. Вторая задача решается без применения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

§ 1. Решение однородных уравнений Ламе

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (1.1)$$

ищем в виде суммы двойных рядов Фурье

$$\begin{aligned}u &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ v &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ w &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(3)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,\end{aligned}\quad (1.2)$$

где

$$\alpha_l = \frac{l\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{c}.$$

Так как при отсутствии объемных сил перемещения являются бигармоническими функциями, то функции $f_{mn}^{(i)}(x)$, $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$, $\psi_{lm}^{(i)}(z)$ ($i=1, 2, 3$) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 f_{mn}^{(i)}(x) &= A_{mn}^{(i)} \operatorname{sh} k_{mn} x + B_{mn}^{(i)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{ch} k_{mn} x, \\
 \varphi_{ln}^{(i)}(y) &= M_{ln}^{(i)} \operatorname{sh} k_{ln} y + N_{ln}^{(i)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y, \\
 \psi_{lm}^{(i)}(z) &= K_{lm}^{(i)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(i)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + G_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z,
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$k_{mn}^2 = \beta_m^2 + \gamma_n^2, \quad k_{ln}^2 = \alpha_l^2 + \gamma_n^2, \quad k_{lm}^2 = \alpha_l^2 + \beta_m^2.$$

Между 36 постоянными коэффициентами, входящими в (1.3), существует зависимость. Удовлетворив уравнениям (1.1), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 k_{mn} A_{mn}^{(1)} + (2\gamma_1 + 1) k_{mn} D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} &= 0, \\
 k_{mn} B_{mn}^{(1)} + (2\gamma_1 + 1) k_{mn} C_{mn}^{(1)} + \beta_m A_{mn}^{(2)} + \gamma_n A_{mn}^{(3)} &= 0, \\
 k_{mn} D_{mn}^{(3)} + \gamma_n C_{mn}^{(1)} = 0, & \quad k_{mn} C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0, \\
 \beta_m D_{mn}^{(3)} = \gamma_n D_{mn}^{(2)}, & \quad \beta_m C_{mn}^{(3)} = \gamma_n C_{mn}^{(2)};
 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
 k_{ln} M_{ln}^{(2)} + (2\gamma_1 + 1) k_{ln} F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} &= 0, \\
 k_{ln} N_{ln}^{(2)} + (2\gamma_1 + 1) k_{ln} E_{ln}^{(2)} + \alpha_l M_{ln}^{(1)} + \gamma_n M_{ln}^{(3)} &= 0, \\
 \gamma_n E_{ln}^{(2)} + k_{ln} F_{ln}^{(3)} = 0, & \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(3)} = 0, \\
 \gamma_n F_{ln}^{(1)} = \alpha_l F_{ln}^{(3)}, & \quad \gamma_n E_{ln}^{(1)} = \alpha_l E_{ln}^{(3)};
 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 k_{lm} K_{lm}^{(3)} + (2\gamma_1 + 1) k_{lm} G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m L_{lm}^{(2)} &= 0, \\
 k_{lm} L_{lm}^{(3)} + (2\gamma_1 + 1) k_{lm} H_{lm}^{(3)} + \alpha_l K_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} &= 0, \\
 \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0, & \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} = 0, \\
 \alpha_l H_{lm}^{(2)} = \beta_m H_{lm}^{(1)}, & \quad \alpha_l G_{lm}^{(2)} = \beta_m G_{lm}^{(1)},
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\gamma_1 = 1 - 2\nu.$$

Отсюда видно, что число неизвестных коэффициентов, входящих в (1.3), равно 18.

Пользуясь обычными формулами, для компонентов напряжения получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{G} \tau_{yz} &= b_3 + c_2 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m f_{mn}^{(3)} + \gamma_n f_{mn}^{(2)}) \sin \beta_m y \sin \gamma_n z + \\
 &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(3)}}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\
 &+ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(2)}}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G} \tau_{xy} = & a_2 + b_3 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(2)}}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)} \right) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(1)}}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)} \right) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_l \varphi_{lm}^{(2)} + \beta_m \varphi_{lm}^{(1)}) \sin \alpha_l x \sin \beta_m y, \\
\frac{1}{G} \tau_{xz} = & c_1 + a_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(3)}}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)} \right) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z - \\
& - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_l \varphi_{ln}^{(3)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(1)}) \sin \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(1)}}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)} \right) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\
A\sigma_x = & \eta' a_1 + b_2 + c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \beta_m f_{mn}^{(2)} + \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \eta' \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \eta' \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} + \beta_m \psi_{lm}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \quad (1.7) \\
A\sigma_y = & a_1 + \eta' b_2 + c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \eta' \beta_m f_{mn}^{(2)} + \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} + \eta' \beta_m \psi_{lm}^{(2)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \\
A\sigma_z = & a_1 + b_2 + \eta' c_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{df_{mn}^{(1)}}{dx} + \beta_m f_{mn}^{(2)} + \eta' \gamma_n f_{mn}^{(3)} \right) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d\varphi_{ln}^{(2)}}{dy} + \alpha_l \varphi_{ln}^{(1)} + \eta' \gamma_n \varphi_{ln}^{(3)} \right) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\
& + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\eta' \frac{d\psi_{lm}^{(3)}}{dz} + \beta_m \psi_{lm}^{(2)} + \alpha_l \psi_{lm}^{(1)} \right) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,
\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{1 - 2\nu}{2\nu G}, \quad \eta' = \frac{1 - \nu}{\nu}.$$

§ 2. Граничные условия для задачи (а) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \tau_{xy}(0, y, z) &= f_1(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(a, y, z) &= f_1^{(1)}(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a'_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xz}(0, y, z) &= f_2(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xz}(a, y, z) &= f_2^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b'_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(x, 0, z) &= f_3(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{xy}(x, b, z) &= f_3^{(1)}(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c'_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, 0, z) &= f_4(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, b, z) &= f_4^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d'_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) &= f_5(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) &= f_5^{(1)}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e'_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) &= f_6(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ \frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) &= f_6^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h'_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y, \\ w(x, y, 0) &= f_7(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 w(x, y, z) &= f_7^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y; \\
 A z_x(0, y, z) &= f_8(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\
 A z_x(a, y, z) &= f_8^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_{mn}^* \cos \beta_m y \cos \gamma_n z, \\
 A z_y(x, 0, z) &= f_9(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z, \\
 A z_y(x, b, z) &= f_9^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ln}^* \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из граничных условий (2.1) для касательных напряжений и нормальных перемещений получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \frac{df_{mn}^{(2)}(0)}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)}(0) &= a_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(1)}(0)}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)}(0) &= c_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(2)}(a)}{dx} - \beta_m f_{mn}^{(1)}(a) &= a_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(1)}(b)}{dy} - \alpha_l \varphi_{ln}^{(2)}(b) &= c_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(3)}(0)}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)}(0) &= b_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(3)}(0)}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)}(0) &= d_{ln}, \\
 \frac{df_{mn}^{(3)}(a)}{dx} - \gamma_n f_{mn}^{(1)}(a) &= b_{mn}, & \frac{d\varphi_{ln}^{(3)}(b)}{dy} - \gamma_n \varphi_{ln}^{(2)}(b) &= d_{ln}, \\
 \frac{d\psi_{lm}^{(1)}(0)}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)}(0) &= e_{lm}, & \frac{d\psi_{lm}^{(2)}(0)}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)}(0) &= h_{lm}, \\
 \frac{d\psi_{lm}^{(1)}(c)}{dz} - \alpha_l \psi_{lm}^{(3)}(c) &= e_{lm}, & \frac{d\psi_{lm}^{(2)}(c)}{dz} - \beta_m \psi_{lm}^{(3)}(c) &= h_{lm}, \\
 \psi_{lm}^{(3)}(0) &= f_{lm}, & \psi_{lm}^{(3)}(c) &= f_{lm}.
 \end{aligned} \quad (2.3) \quad (2.4)$$

Из соотношений (1.4) и (2.2), (1.5) и (2.3), (1.6) и (2.4) некоторые из постоянных интегрирования определяются непосредственно, другие выражаются через постоянные $C_{mn}^{(3)}$, $D_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$.

Исключая найденные постоянные, заменяя далее другие их выражениями через $C_{mn}^{(3)}$, $D_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$ и удовлетворяя затем последним 4 условиям из (2.1), для определения коэффициентов $D_{mn}^{(3)}$, $C_{mn}^{(3)}$, $E_{ln}^{(3)}$ и $F_{ln}^{(3)}$ получим следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
Z_{mn} &= \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} a_{lmn} X_{ln} + b_{mn}, & \begin{pmatrix} m=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Z_{mn} &= \sum_{l=2,4,\dots}^{\infty} a_{lmn} Y_{ln} + b_{mn}, & \begin{pmatrix} m=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
U_{mn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} X_{ln} + d_{mn}, & \begin{pmatrix} m=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
U_{mn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} Y_{ln} + d_{mn}, & \begin{pmatrix} m=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
X_{ln} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} e_{lmn} Z_{mn} + h_{ln}, & \begin{pmatrix} l=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
X_{ln} &= \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} e_{lmn} U_{mn} + h_{ln}, & \begin{pmatrix} l=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Y_{ln} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} g_{lmn} Z_{mn} + f_{ln}, & \begin{pmatrix} l=0, 2, 4, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}, \\
Y_{ln} &= \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} g_{lmn} U_{mn} + f_{ln}, & \begin{pmatrix} l=1, 3, \dots \\ n=1, 2, \dots \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} k_{ln} (E_{ln}^{(3)} \operatorname{sh} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)} \operatorname{ch} k_{ln} b - F_{ln}^{(3)}) &= X_{ln}, \\
\frac{a}{b} k_{ln} (E_{ln}^{(3)} \operatorname{sh} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)} \operatorname{ch} k_{ln} b + F_{ln}^{(3)}) &= Y_{ln},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\frac{b}{a} k_{mn} (C_{mn}^{(3)} \operatorname{sh} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)} \operatorname{ch} k_{mn} a - D_{mn}^{(3)}) = Z_{mn},$$

$$\frac{b}{a} k_{mn} (C_{mn}^{(3)} \operatorname{sh} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)} \operatorname{ch} k_{mn} a + D_{mn}^{(3)}) = U_{mn};$$

$$\begin{aligned}
a_{lmn} &= -\frac{8}{ak_{mn}} \frac{(-1)^m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a}{(\operatorname{ch} k_{mn} a + 1)(\operatorname{sh} k_{mn} a + k_{mn} a)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{ln}^2 + (\alpha_l^2 + \nu_{ln}^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2}, \\
c_{lmn} &= -\frac{8}{ak_{mn}} \frac{(-1)^m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a}{(\operatorname{ch} k_{mn} a - 1)(\operatorname{sh} k_{mn} a - k_{mn} a)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{ln}^2 + (\alpha_l^2 + \nu_{ln}^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2}, \\
e_{lmn} &= -\frac{8}{bk_{ln}} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}^2 k_{ln} b}{(\operatorname{ch} k_{ln} b + 1)(\operatorname{sh} k_{ln} b + k_{ln} b)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{mn}^2 + (\beta_m^2 + \nu_{ln}^2) \alpha_l^2}{(k_{mn}^2 + \alpha_l^2)^2}, \\
g_{lmn} &= -\frac{8}{bk_{ln}} \frac{(-1)^l \operatorname{sh}^2 k_{ln} b}{(\operatorname{ch} k_{ln} b - 1)(\operatorname{sh} k_{ln} b - k_{ln} b)} \frac{\nu_{ln}^2 k_{mn}^2 + (\beta_m^2 + \nu_{ln}^2) \alpha_l^2}{(k_{mn}^2 + \alpha_l^2)^2}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
& a \frac{(1 + \operatorname{ch} k_{mn} a) (\operatorname{sh} k_{mn} a + k_{mn} a)}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} b_{mn} = \\
& = \frac{\gamma_n (1 + \operatorname{ch} k_{mn} a)}{2k_{mn}^2 \operatorname{sh} k_{mn} a} \left[\beta_m (a'_{mn} - a_{mn}) + \gamma_n (b'_{mn} - b_{mn}) - \right. \\
& - \frac{2\gamma_n}{bk_{mn} l=2,4,\dots} \sum_{l=2,4,\dots} \frac{(-1)^m}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{\alpha_l (k_{ln}^2 + \gamma_n^2)}{k_{ln}^2} [c'_{ln} - (-1)^m c_{ln}] - \right. \\
& - \frac{\gamma_n \alpha_l^2}{k_{ln}^2} [d'_{ln} - (-1)^n d_{ln}] \left. \right\} + \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn} l=2,4,\dots} \sum_{l=2,4,\dots} \frac{k_{lm} (-1)^n}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\gamma' \alpha_l^2 + k_{mn}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \right. \\
& - \frac{\gamma' \alpha_l^2 + \beta_m^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\gamma' \alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \\
& - \frac{\beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] \left. \right\} + \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn}} (g'_{mn} + g_{mn}); \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a \frac{(\operatorname{ch} k_{mn} a - 1) (\operatorname{sh} k_{mn} a - k_{mn} a)}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} d_{mn} = \frac{\gamma_n (\operatorname{ch} k_{mn} a - 1)}{2k_{mn}^2 \operatorname{sh} k_{mn} a} \times \\
& \times [\beta_m a'_{mn} + \gamma_n b'_{mn} + \beta_m a_{mn} + \gamma_n b_{mn}] + \frac{2\gamma_n}{bk_{mn} l=1,3,\dots} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{(-1)^m}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \times \\
& \times \left\{ \frac{\alpha_l (k_{ln}^2 + \gamma_n^2)}{k_{ln}^2} [c'_{ln} - (-1)^m c_{ln}] - \frac{\gamma_n \alpha_l^2}{k_{ln}^2} [d'_{ln} - (-1)^m d_{ln}] \right\} - \\
& - \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\gamma' - 1) k_{mn} l=1,3,\dots} \sum_{l=1,3,\dots} \frac{(-1)^n k_{lm}}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\gamma' \alpha_l^2 + k_{mn}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\gamma' \alpha_l^2 + \beta_m^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^m f_{lm}] - \frac{\gamma' \alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \frac{\beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{mn} (\gamma' - 1)} (g'_{mn} - g_{mn}); \quad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b \frac{(1 + \operatorname{ch} k_{ln} b) (\operatorname{sh} k_{ln} b + k_{ln} b)}{\operatorname{sh}^2 k_{ln} b} h_{ln} = \frac{\gamma_n (1 + \operatorname{ch} k_{ln} b)}{2k_{ln}^2 \operatorname{sh} k_{ln} b} [\alpha_l (c'_{ln} - c_{ln}) + \\
& + \gamma_n (d'_{ln} - d_{ln})] - \frac{2\gamma_n}{ak_{ln} m=2,4,\dots} \sum_{m=2,4,\dots} \frac{(-1)^l}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{\beta_m (k_{mn}^2 + \gamma_n^2)}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^i a_{mn}] - \frac{\gamma_n \beta_m^2}{k_{mn}^2} [b'_{mn} - (-1)^i b_{mn}] \Big\} + \\
& + \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{(\eta' - 1) k_{ln}} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k_{lm} (-1)^n}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\eta' a_l^2 + k_{lm}^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\eta' \beta_m^2 + a_l^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\eta' \beta_m}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] - \frac{\alpha_l}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] \Big\} + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} (p_{ln} + p'_{ln}); \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b \frac{(\operatorname{ch} k_{ln} b - 1) (\operatorname{sh} k_{ln} b - k_{ln} b)}{\operatorname{sh}^2 k_{ln} b} f_{ln} = \frac{\gamma_n (\operatorname{ch} k_{ln} b - 1)}{2k_{ln}^2 \operatorname{sh} k_{ln} b} [\alpha_l (c'_{ln} - c_{ln}) + \\
& + \gamma_n (d'_{ln} - d_{ln})] + \frac{2\gamma_n}{ak_{ln}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^i}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{\beta_m (k_{mn}^2 + \gamma_n^2)}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - \right. \\
& - (-1)^i a_{mn}] - \frac{\gamma_n \beta_m}{k_{mn}^2} [a'_{mn} - (-1)^i a_{mn}] \Big\} - \\
& - \frac{4}{c} \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^n k_{lm}}{k_{lm}^2 + \gamma_n^2} \left\{ \frac{2k_{lm}^2 (\eta' \beta_m^2 + k_{lm}^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)} \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} k_{lm} c \cdot G_{lm}^{(1)} - (-1)^n G_{lm}^{(1)} + H_{lm}^{(1)} \operatorname{sh} k_{lm} c] - \frac{\eta' \beta_m^2 + a_l^2 + k_{lm}^2}{k_{lm}} [f'_{lm} - \\
& - (-1)^n f_{lm}] - \frac{\eta' \beta_m}{k_{lm}} [h'_{lm} - (-1)^n h_{lm}] - \frac{\alpha_l}{k_{lm}} [e'_{lm} - (-1)^n e_{lm}] \Big\} + \\
& + \frac{\gamma_n}{k_{ln} (\eta' - 1)} (p'_{ln} - p_{ln}), \quad (2.11)
\end{aligned}$$

При удовлетворении граничным условиям получаются еще и следующие равенства:

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{c'_{l0} - c_{l0}}{\alpha_l b} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e'_{l0} - e_{l0}}{\alpha_l c} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} (g'_{00} - g_{00}), \\
& \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a'_{m0} - a_{m0}}{\alpha_m^2} + \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{h'_{m0} - h_{m0}}{c_m^2} = \frac{\nu}{1 - 2\nu} (p'_{00} - p_{00}). \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Эти равенства являются уравнениями равновесия внешних сил, действующих на поверхности параллелепипеда по направлениям осей X и Y ($\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$). Коэффициенты c_0 , c_2 , a_1 , b_2 будут определены из соотношений

$$\begin{aligned}
 \eta' a_1 + b_2 + c_3 &= \frac{g_{00} + g'_{00}}{2} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \left[\sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{c_{l0} - c'_{l0}}{a a_l} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{e_{l0} - e'_{l0}}{c a_l} \right], \\
 a_1 + b_2 \eta' + c_3 &= \frac{p_{00} + p'_{00}}{2} + \frac{1-2\nu}{2\nu} \left[\sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{a_{m0} - a'_{m0}}{a^2_{l'm}} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} \frac{h_{m0} - h'_{m0}}{c^2_{\beta m}} \right], \\
 c_0 &= \frac{f_{00}}{4}, \quad c_0 + c c_3 = \frac{f'_{00}}{4}.
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Докажем, что бесконечные системы (2.5) квази-регулярные. Вычислим суммы модулей коэффициентов при неизвестных.

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} |a_{lma}| &= \frac{8}{a k_{mn}} \frac{\text{sh}^2 k_{mn} a}{(\text{ch } k_{mn} a + 1)(\text{sh } k_{mn} a + k_{mn} a)} \times \\
 &\quad \times \sum_{l=0,2,\dots}^{\infty} \frac{\nu \gamma_n^2 k_{ln}^2 + (x_l^2 + \nu \gamma_n^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2} = \\
 &= \left[1 - \frac{\frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{mn}^2} - \frac{4\nu \gamma_n^2}{a k_{mn}} \text{th} \frac{a k_{mn}}{2} + \frac{a(k_{mn}^2 + \beta_m^2)}{k_{mn} \text{sh } k_{mn} a}}{1 + \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}} \right] < 1, \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} |c_{lma}| &= \frac{8}{a k_{mn}} \frac{\text{sh}^2 k_{mn} a}{(\text{ch } k_{mn} a - 1)(\text{sh } k_{mn} a - k_{mn} a)} \times \\
 &\quad \times \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu \gamma_n^2 k_{ln}^2 + (x_l^2 + \nu \gamma_n^2) \beta_m^2}{(k_{ln}^2 + \beta_m^2)^2} = \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}} \left[1 - \frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{mn}^2} + \frac{a \beta_m^2}{k_{mn} \text{sh } k_{mn} a} \right]. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

При фиксированном значении параметров m или n последнее выражение становится меньше единицы, начиная с некоторого значения n или m , которое имеет место при удовлетворении следующего неравенства:

$$\frac{1-2\nu}{2 \frac{\beta_m^2}{\gamma_n^2} + 1} > \frac{a k_{mn}}{\text{sh } k_{mn} a}; \quad (2.16)$$

аналогичным образом получим

$$\sum_{m=0, 2, \dots}^{\infty} |e_{lmn}| < 1,$$

$$\sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} |g_{lmn}| = \frac{1}{1 - \frac{k_{ln}b}{\operatorname{sh} k_{ln}b}} \left[1 - \frac{(1-2\nu) \gamma_n^2}{k_{ln}^2} + \frac{ba_l^2}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b} \right]. \quad (2.17)$$

При фиксированном значении параметров n или l последнее выражение становится меньше единицы, начиная с некоторого значения l или n , которое имеет место при удовлетворении следующего неравенства

$$\frac{1-2\nu}{2 \frac{a_l^2}{\gamma_n^2} + 1} > \frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}. \quad (2.18)$$

Таким образом, системы (2.5) оказались квази-регулярными. Если примем, что в соответствующих областях изменения граничные функции $f_i, f_i^{(1)}$ — непрерывные, а функции $f_i, f_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$) — кусочно-непрерывные, то легко видеть, что свободные члены систем (2.5) b_{mn} и d_{mn} будут стремиться к нулю как $O\left(\frac{1}{m^2n}\right)$, а h_{ln} и f_{ln} — как $O\left(\frac{1}{l^2n}\right)$.

Если в системах (2.5) исключить неизвестные X_{ln} и Y_{ln} , то для определения неизвестных Z_{mn} и U_{mn} получим следующие бесконечные системы

$$Z_{mn} = \sum_{p=0, 2, \dots}^{\infty} \bar{a}_{pmn} Z_{pn} + \bar{b}_{mn} \quad (m = 0, 2, 4, \dots),$$

$$Z_{mn} = \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \bar{c}_{pmn} Z_{pn} + \bar{d}_{mn} \quad (m = 1, 3, \dots), \quad (2.19)$$

$$U_{mn} = \sum_{p=0, 2, \dots}^{\infty} \bar{e}_{pmn} U_{pn} + \bar{h}_{mn} \quad (m = 0, 2, \dots),$$

$$U_{mn} = \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \bar{g}_{pmn} U_{pn} + \bar{f}_{mn} \quad (m = 1, 3, \dots),$$

где

$$\bar{a}_{pmn} = \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} e_{lpn}, \quad \bar{b}_{mn} = b_{mn} + \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} h_{ln},$$

$$\bar{c}_{pmn} = \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} g_{lpn}, \quad \bar{d}_{mn} = d_{mn} + \sum_{l=0, 2, \dots}^{\infty} a_{lmn} f_{ln},$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_{pmn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} e_{lpm}, & \bar{h}_{mn} &= d_{mn} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lma} h_{ln}, \\ \bar{g}_{lmn} &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} g_{lpm}, & \bar{f}_{mn} &= d_{mn} + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_{lmn} f_{ln}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В бесконечных системах (2.19) неизвестные постоянные $Z_{2k,n}$, $Z_{2k+1,n}$, $U_{2k,n}$ и $U_{2k+1,n}$ разделяются, то есть они определяются независимо друг от друга. Используя неравенства (2.14)–(2.18) и обозначения (2.20), легко доказать, что новые системы (2.19) также квазирегулярны, а свободные члены этих систем ограничены сверху и стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{m^2 n}\right)$, и $O\left(\frac{1}{l^2 n}\right)$.

§ 3. Рассмотрим теперь задачу об изгибе толстой прямоугольной плиты, когда на боковых поверхностях заданы касательные напряжения и нормальные перемещения, а на верхней и нижней плоскостях — напряжения. Граничные условия для задачи имеют вид

$$u(0, y, z) = f_1(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$u(a, y, z) = f_1^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a'_{mn} \cos \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$v(x, 0, z) = f_2(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$v(x, b, z) = f_2^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b'_{ln} \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(0, y, z) = f_3(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(a, y, z) = f_3^{(1)}(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c'_{mn} \sin \beta_m y \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(x, 0, z) = f_4(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xy}(x, b, z) = f_4^{(1)}(x, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d'_{ln} \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(0, y, z) = f_5(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(a, y, z) = f_5^{(1)}(y, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e'_{mn} \cos \beta_m y \sin \gamma_n z, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, y, 0) = f_6(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{xz}(x, y, c) = f_6^{(1)}(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f'_{lm} \sin \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, 0, z) = f_7(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, b, z) = f_7^{(1)}(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g'_{ln} \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, 0) = f_8(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,$$

$$\frac{1}{G} \tau_{yz}(x, y, c) = f_8^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} h'_{lm} \cos \alpha_l x \sin \beta_m y,$$

$$A\sigma_z(x, y, 0) = f_9(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y,$$

$$A\sigma_z(x, y, c) = f_9^{(1)}(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p'_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1) и решая полученную систему линейных алгебраических уравнений вместе с системами (1.5–1.7), для определения неизвестных коэффициентов получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} D_{mn}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)}, & C_{mn}^{(1)} &= -\frac{k_{mn}}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)}, & A_{mn}^{(3)} &= \frac{e_{mn} + \gamma_n a_{mn}}{k_{mn}} - D_{mn}^{(3)}, \\ C_{mn}^{(2)} &= -\frac{\beta_m}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{mn} a D_{mn}^{(3)} + \frac{\bar{D}_{mn}}{\operatorname{sh} k_{mn} a}, & B_{mn}^{(1)} &= a_{mn}, \\ A_{mn}^{(1)} &= -\frac{ak_{mn}^2}{\gamma_n} \frac{D_{mn}^{(3)}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} + \frac{ak_{mn}^2 \operatorname{ch} k_{mn} a}{\beta_m \operatorname{sh}^2 k_{mn} a} \bar{D}_{mn} - a_{mn} \operatorname{cth} k_{mn} a, \\ B_{mn}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)} \left(\operatorname{cth} k_{mn} a + \frac{ak_{mn}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn} a} \right) - \frac{\bar{D}_{mn}}{\operatorname{sh} k_{mn} a} (1 + ak_{mn} \operatorname{cth} k_{mn} a) - \\ &\quad - \frac{e_{mn} + \beta_m a_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{cth} k_{mn} a + \frac{e'_{mn} + \beta_m a'_{mn}}{k_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 B_{mn}^{(3)} &= D_{mn}^{(3)} \left(\frac{ak_{mn}}{\operatorname{sh}^2 k_{mn}a} + \operatorname{cth} k_{mn}a \right) - \frac{\gamma_n}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn} (1 + ak_{mn} \operatorname{cth} k_{mn}a) + \\
 &\quad + \frac{e'_{mn} + \gamma_n a'_{mn}}{k_{mn} \operatorname{sh} k_{mn}a} - \frac{e_{mn} + \gamma_n a_{mn}}{k_{mn}} \operatorname{cth} k_{mn}a, \\
 C_{mn}^{(3)} &= -\operatorname{cth} k_{mn}a D_{mn}^{(3)} + \frac{\gamma_n}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn}, \\
 D_{mn}^{(1)} &= \frac{k_{mn}}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{mn}a D_{mn}^{(3)} - \frac{k_{mn}}{\beta_m \operatorname{sh} k_{mn}a} \bar{D}_{mn}, \\
 A_{mn}^{(2)} &= \frac{e_{mn} + \beta_m a_{mn}}{k_{mn}} - \frac{\beta_m}{\gamma_n} D_{mn}^{(3)},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} D_{mn}^{(3)} = \frac{\gamma_n}{2(\eta+1)k_{mn}^2} \left(2k_{mn}a_{mn} + \frac{\beta_m e_{mn} + \gamma_n e'_{mn}}{k_{mn}} \right), \\ \bar{D}_{mn} = \frac{\beta_m}{2(\eta+1)k_{mn}} \left(2a'_{mn} + \frac{\beta_m e'_{mn} + \gamma_n e_{mn}}{k_{mn}^2} \right), \end{cases} \\
 F_{ln}^{(1)} &= \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)}, \quad E_{ln}^{(2)} = -\frac{k_{ln}}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)}, \quad M_{ln}^{(3)} = \frac{g_{ln} + \gamma_n b_{ln}}{k_{ln}} - F_{ln}^{(3)}, \\
 N_{ln}^{(2)} &= b_{ln}, \quad E_{ln}^{(1)} = -\frac{\alpha_l}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{ln}b F_{ln}^{(3)} - \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}, \\
 M_{ln}^{(2)} &= \frac{bk_{ln}^2}{\gamma_n \operatorname{sh}^2 k_{ln}b} F_{ln}^{(3)} + \frac{bk_{ln}}{\alpha_l} \frac{\operatorname{ch} k_{ln}b}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} F_{ln}^{(3)} - b_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b, \\
 N_{ln}^{(1)} &= \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)} \left(\operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} \right) - \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b} (1 + bk_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b) - \\
 &\quad - \frac{d_{ln} + \alpha_l b_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{d'_{ln} + \alpha_l b'_{ln}}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b}, \quad (3.3) \\
 N_{ln}^{(3)} &= F_{ln}^{(3)} \left(\frac{bk_{ln}}{\operatorname{sh}^2 k_{ln}b} + \operatorname{cth} k_{ln}b \right) - \frac{\gamma_n}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b} (1 + bk_{ln} \operatorname{cth} k_{ln}b) + \\
 &\quad + \frac{g'_{ln} + \gamma_n b'_{ln}}{k_{ln} \operatorname{sh} k_{ln}b} - \frac{g_{ln} + \gamma_n b_{ln}}{k_{ln}} \operatorname{cth} k_{ln}b, \\
 E_{ln}^{(3)} &= -F_{ln}^{(3)} \operatorname{cth} k_{ln}b + \frac{\gamma_n}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b}, \\
 F_{ln}^{(2)} &= \frac{k_{ln}}{\gamma_n} \operatorname{cth} k_{ln}b F_{ln}^{(3)} - \frac{k_{ln}}{\alpha_l} \frac{\bar{F}_{ln}}{\operatorname{sh} k_{ln}b},
 \end{aligned}$$

$$M_{ln}^{(1)} = \frac{d_{ln} + \alpha_l b_{ln}}{k_{ln}} - \frac{\alpha_l}{\gamma_n} F_{ln}^{(3)},$$

где

$$\left\{ \begin{aligned} F_{ln}^{(3)} &= \frac{\gamma_n}{2(\gamma+1)k_{ln}^2} \left(2k_{ln}b_{ln} + \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n g_{ln}}{k_{ln}} \right), \\ \bar{F}_{ln} &= \frac{\alpha_l}{2(\gamma+1)k_{ln}} \left(2b_{ln} + \frac{\alpha_l d_{ln} + \gamma_n g_{ln}}{k_{ln}^2} \right), \end{aligned} \right.$$

$$H_{lm}^{(2)} = \frac{\beta_m}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)}, \quad G_{lm}^{(3)} = -\frac{k_{lm}}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)}, \quad G_{lm}^{(1)} = \frac{\alpha_l}{\beta_m} G_{lm}^{(2)},$$

$$H_{lm}^{(3)} = -\frac{k_{lm}}{\beta_m} G_{lm}^{(2)}, \quad K_{lm}^{(3)} = \frac{\gamma k_{lm}}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} + \frac{P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}},$$

$$L_{lm}^{(3)} = \frac{(\gamma+1)k_{lm}}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} - \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^2},$$

$$K_{lm}^{(1)} = \frac{\gamma \alpha_l}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} + \frac{f_{lm}}{k_{lm}} - \frac{\alpha_l (\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm})}{2k_{lm}^3},$$

$$K_{lm}^{(2)} = \gamma G_{lm}^{(2)} + \frac{h_{lm}}{k_{lm}} - \frac{\beta_m (\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm})}{2k_{lm}^3},$$

$$L_{lm}^{(1)} = (\gamma+1) H_{lm}^{(1)} + \frac{\beta_m (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c} -$$

$$- \frac{\beta_m (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3} \operatorname{cth} k_{lm} c - \frac{\alpha_l P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2}, \quad (3.4)$$

$$L_{lm}^{(2)} = \frac{\beta_m}{\alpha_l} (\gamma+1) H_{lm}^{(1)} + \frac{\alpha_l (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3} \operatorname{cth} k_{lm} c -$$

$$- \frac{\alpha_l (\beta_m f_{lm} - \alpha_l h_{lm})}{k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c} - \frac{\beta_m P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2},$$

где $H_{lm}^{(1)}$ и $G_{lm}^{(2)}$ определяются из уравнений

$$\frac{1 - k_{lm} c \operatorname{cth} k_{lm} c}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} - \frac{k_{lm} c}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} = \frac{P_{lm} - P_{lm} c \operatorname{ch} k_{lm} c}{(\gamma'-1)k_{lm}^2 \operatorname{sh} k_{lm} c} + \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3},$$

$$\frac{1 + k_{lm} c \operatorname{cth} k_{lm} c}{\alpha_l} H_{lm}^{(1)} + \frac{k_{lm} c}{\beta_m} G_{lm}^{(2)} = \frac{P_{lm}}{(\gamma'-1)k_{lm}^2} -$$

$$- \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3 \operatorname{th} k_{lm} c} + \frac{\alpha_l f_{lm} + \beta_m h_{lm}}{2k_{lm}^3 \operatorname{sh} k_{lm} c}.$$

Здесь через P_{lm} и P_{lm}' обозначены следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_{lm} &= p_{lm} - \frac{2}{ab} \left[b \sum_{n=0}^{\infty} Q_{lmn} + a \sum_{n=0}^{\infty} R_{lmn} \right], \quad (l \neq 0, m \neq 0), \\ P_{lm} &= p_{lm} - \frac{2}{ab} \left[b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Q_{lmn} + a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R_{lmn} \right], \quad (l \neq 0, m \neq 0) \end{aligned} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{lmn} &= \frac{k_{mn}}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{2k_{mn}^2 (\beta_m^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \alpha_l^2)}{\gamma_n (k_{mn}^2 + \alpha_l^2)} D_{mn}^{(3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{mn}^2 + \beta_m^2}{k_{mn}} a_{mn} - \frac{\gamma_l' \gamma_n e_{mn} + \beta_m c_{mn}}{k_{mn}} \right\} - \\ &\quad - \frac{k_{mn} (-1)^l}{k_{mn}^2 + \alpha_l^2} \left\{ \frac{2k_{mn}^2 (\beta_m^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \alpha_l^2)}{\beta_m (k_{mn}^2 + \alpha_l^2)} \bar{D}_{mn} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{mn}^2 + \beta_m^2}{k_{mn}} a'_{mn} - \frac{\gamma_l' \gamma_n e'_{mn} + \beta_m c'_{mn}}{k_{mn}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} R_{lmn} &= \frac{k_{ln}}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{2k_{ln}^2}{\gamma_n} \frac{\alpha_l^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \beta_m^2}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} F_{ln}^{(3)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{ln}^2 + \alpha_l^2}{k_{ln}} b_{ln} - \frac{\gamma_l' \gamma_n g_{ln} + \alpha_l d_{ln}}{k_{ln}} \right\} - \\ &\quad - \frac{(-1)^m k_{ln}}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} \left\{ \frac{2k_{ln}^2}{\alpha_l} \frac{\alpha_l^2 + \gamma_l'^2 \gamma_n^2 + \beta_m^2}{k_{ln}^2 + \beta_m^2} F_{ln} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_l' \gamma_n^2 + k_{ln}^2 + \alpha_l^2}{k_{ln}} b_{ln} - \frac{\gamma_l' \gamma_n g'_{ln} + \alpha_l d'_{ln}}{k_{ln}} \right\}. \end{aligned}$$

Для определения свободных членов получаются уравнения

$$\begin{aligned} a_1 + b_2 + c_3 \gamma_l' &= \frac{p_{00} + p'_{00}}{2} + \frac{1 + 2\nu}{2\nu} \left[\sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{e_{0n} - e'_{0n}}{a \gamma_n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{g_{0n} - g'_{0n}}{b \gamma_n} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$a_0 = a_{00}, \quad a_1 = \frac{a'_{00} - a_{00}}{a}, \quad b_0 = b_{00}, \quad b_2 = \frac{b'_{00} - b_{00}}{b}.$$

При удовлетворении граничных условий получаем также следующее равенство:

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{e_{0n} - e'_{0n}}{a \gamma_n} + \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{g_{0n} - g'_{0n}}{b \gamma_n} = \frac{\nu (p_{00} - p'_{00})}{1 - 2\nu}, \quad (3.8)$$

которое является уравнением равновесия внешних сил, действующих на поверхности параллелепипеда по направлению оси Z ($\Sigma Z = 0$).

Пример. В качестве примера рассмотрен изгиб толстой плиты ($a = b = 3c = \pi$), находящейся под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки $\sigma_z(x, y, z) = -P$, когда на боковых поверхностях отсутствуют нормальные перемещения и касательное напряжение τ_{xz} . На этих же поверхностях касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в направлениях x и y изменяются по закону синуса, а в направлении z либо по закону симметричной параболы, либо же остаются постоянными. Для этой задачи граничные условия (3.1) примут вид

$$\left. \begin{aligned} f_i = f_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6, 8), \quad f_9 = 0, \quad f_9(x, y, z) = -P, \\ -f_5 = f_5^{(1)} = A_0 z \left(\frac{\pi}{3} - z \right) \sin y, \quad -f_7 = f_7^{(1)} = A_0 z \left(\frac{\pi}{3} - z \right) \sin x, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} f_i = f_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6, 8), \quad f_9 = 0, \quad f_9(x, y, z) = -P, \\ -f_5 = f_5^{(1)} = A_0' \sin y, \quad -f_7 = f_7^{(1)} = A_0' \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Здесь постоянные A_0 и A_0' определяются из уравнения равновесия сил (3.8), действующих на плиту вдоль оси z , и имеют значения

$$A_0 = \frac{81P}{4\pi}, \quad A_0' = \frac{3\pi P}{8}. \quad (3.11)$$

Некоторые значения напряжений τ_{xz} , σ_x и перемещения w для различных точек плиты, вычисленные по формулам (1.4) при $\nu = 0,3$ для рассматриваемого случая, приведены в таблицах 1, 2, 3, 4, 5. В этих таблицах напряжения σ_x и τ_{xz} приведены в долях (P), а перемещения w в долях $\left(\frac{P}{G}\right)$.

Таблица 1

Значение τ_{xz} для $x = \frac{9\pi}{10}$ при
условии (3.9)

$y \backslash z$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	0,0865	0,3456	0,6040
$\frac{\pi}{6}$	0,1222	0,5009	0,8595
$\frac{\pi}{4}$	0,0474	0,3187	0,6037

Таблица 2

Значение τ_{xz} для $x = \frac{9\pi}{10}$
при условии (3.10)

$y \backslash z$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{12}$	0,6039
$\frac{\pi}{6}$	0,8576
$\frac{\pi}{4}$	0,6032

Таблица 3

Значение τ_x для $y = \frac{\pi}{2}$
при условии (3.9)

$x \backslash z$	0
0	-1,3990
$\frac{\pi}{6}$	-0,1429
$\frac{\pi}{3}$	+1,1133

Таблица 4

Значение w для $z=0$ при
условии (3.9)

$y \backslash x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1,1091	-0,9178	-0,2139
$\frac{\pi}{4}$	-0,9178	-0,5991	-0,0341
0	-0,2139	-0,0341	0

Таблица 5

Значение w для $z=\frac{\pi}{3}$ при условии (3.9)

$y \backslash x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	-1,2587	-1,0674	-0,3635
$\frac{\pi}{4}$	-1,0674	-0,7487	-0,1837
0	-0,3635	-0,1837	-0,1496

Из табл. 1 и 2 видно, что, когда на плоскости $z=c$ имеем равномерно распределенную нормальную нагрузку, независимо от того, каким образом задан закон распределения касательных напряжений τ_{xz} вдоль z на боковых плоскостях $x=0$ и $x=a$, закон распределения этих напряжений вдоль z на средней линии $\left(y = \frac{\pi}{2}\right)$

плоскости $\left(x = \frac{9\pi}{10}\right)$ является параболическим. На линиях $\left(y=0, \right.$

$y = \frac{\pi}{4}\left.)\right)$ этой плоскости закон распределения касательных напряжений τ_{xz} существенно не отличается от параболического закона. По-

этому можно сказать, что теория, предложенная Амбарцумяном С. А. [18] для расчета тонких плит, дает хороший результат и при расчете достаточно толстых плит, даже вблизи торцов плиты, если закон распределения нагрузки на поверхности плиты близок к равномерному. Из табл. 3 видно, что для рассматриваемого случая закон рас-

пределения нормальных напряжений σ_x на средней линии $\left(y = \frac{\pi}{2}\right)$

плоскости „защемления“ ($x=0$) вдоль оси z является линейным, при- том „нулевая“ точка не совпадает со средней точкой $\left(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ и

перемещена вверх относительно этой точки. Выше „нулевой“ точки существуют растягивающие нормальные напряжения σ_x , ниже — сжимающие. Нужно отметить, что сделанные выводы имеют приближенный характер, так как основаны на значениях напряжений τ_{xz} , τ_{xy} для трех и пяти точек соответствующих сечений.

Вычисления показывают, что для рассматриваемого случая на средней плоскости плиты $\left(z = \frac{\pi}{6}\right)$ существуют постоянные сжимающие нормальные напряжения σ_x и σ_y величиной

$$\sigma_x\left(x, y, \frac{\pi}{6}\right) = \sigma_y\left(x, y, \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} P.$$

Из табл. 4 и 5 видно, что перемещения w соответствующих точек

плоскости $\left(z = \frac{\pi}{3}\right)$ больше, чем перемещения w точек плоскости ($z=0$): разница между соответствующими значениями постоянна и равна $w_0 = -0,1496$. Это значит, что плоскости $z=0$ и $z = \frac{\pi}{3}$ после деформации опять останутся параллельными.

Считаем приятным долгом выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Б. Л. Абрамяну за руководство.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский политехнический институт

Поступила 10 V 1964

Ա. Լ. ԲԱՐՈՅԱՆ, Ս. Ի. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ՈՒՂԱՆԿՅՈՒՆ ԶՈՒԿԱԶՆԵՐՆԵՍԻ
ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍՏՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Հոդվածում արվում է ուղղանկյուն դուգանաանիստի առաձգական հավասարակշռության երկու խնդիրների ճշգրիտ լուծումը հետևյալ եզրային պայմանների դեպքում.

ա) Զուգահեռաանիստի $z=0$, $z=c$ նիստերում արված են τ_{xz} և τ_{yz} շոշափող լարումները և w տեղափոխումը, իսկ դուգանաանիստի մակերևույթի միացած մասերում՝ լարումները: Այդ խնդիրը կարելի է դիտել որպես Ալմանդիի խնդիր ուղղանկյուն կտրվածքով ձողերի համար:

բ) Զուգահեռաանիստի $x=0$, $x=a$ և $y=0$, $y=b$ նիստերի վրա արված են համապատասխան շոշափող լարումները և նորմալ տեղափոխումները, իսկ $z=0$, $z=c$ հարթությունների վրա արված են լարումները, այսինքն դիտարկվում է ուղղանկյուն կտրվածքով սալերի ծաման խնդիրը:

Օգտվելով Ֆուրիեի մեթոդից, Լամեի հավասարակշռության հավասարումների լուծումը ներկայացված է Ֆուրիեի կրկնակի շարքերի գումարի տեսքով:

Առաջին խնդրում անհայտ գործակիցների որոշումը բերվում է գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների լուծմանը, ցույց է արվում, որ այդ սիստեմները սեղուկար են, իսկ ազատ անդամները սահմանափակ են վերին և ձգտում են դերոյի $O\left(\frac{1}{l^2 n}\right)$ կարգով:

Երկրորդ խնդիրը լուծվում է առանց գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների օգտագործման: Այդ խնդրի համար դիտարկված է թվային օրինակ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях. ПММ, 15, вып. 2, 1951.

2. Филоменко-Бородич М. М. Две задачи о равновесии упругого параллелепипеда. ПММ, 15, вып. 5, 1951.
3. Филоменко-Бородич М. М. О задаче Ламе для параллелепипеда в общем случае поверхностных нагрузок. ПММ, 21, вып. 4, 1957.
4. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. § 66, Paris, 1852.
5. Тимошенко С. П. Курс теории упругости, ч. 1, § 44. ОНТИ, М., 1937.
6. Hager K. Spannungen in gleichmäßig gedrückten Prismen. Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstag gewidmet. Berlin, 1916.
7. Фепфль А. и Л. Сила и деформация, ч. 1, § 16. ОНТИ. НКТП СССР, М.—Л., 1936.
8. Валов Г. М. Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. Вестник МГУ, № 3, 1959.
9. Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты. Вестник МГУ, № 2, 1957.
10. Мешков А. И. Общее решение задачи о кручении косоугольного параллелепипеда. Вестник МГУ, № 3, 1959.
11. Нетребко В. Н. Стержневое кручение упругого параллелепипеда. Вестник МГУ, № 6, 1956.
12. Байда Э. Н. Задача об упруго-деформированном состоянии ортотропного и изотропного параллелепипеда. Известия высших учебных заведений, Стр. и архит., № 6, 1959.
13. Мелконян А. П. О сжатии прямоугольного параллелепипеда. Юбилейный сборник трудов Ереванского политехн. ин-та, 1961.
14. Мишоноу М. Общий метод решения пространственной задачи теории упругости для параллелепипеда. Известия техн. ин-та Болгар. АН, КН 9—10, 1960.
15. Теодореску П. П. Sur le problème du parallélepède élastique. Archiwimechaniki stosowanej, 5/6, 12, 1960.
16. Вишняков В. В. Решение трех краевых задач пространственной теории упругости для прямоугольной призмы. Доклады VI научной конференции Новокузнецкого педагогического института по физ.-мат. наукам. Новокузнецк, 1963, 10—12.
17. Мешков А. И. Равновесие упругого параллелепипеда. Вестник МГУ, № 2, 1957.
18. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. С. ЗАРГАРЯН

О КРУЧЕНИИ ВАЛА, ОСЛАБЛЕННОГО ПРЯМОУГОЛЬНОЙ
НЕСООСНОЙ ПОЛОСТЬЮ

В настоящее время существует небольшое число решений задач о кручении круговых цилиндров (валов), имеющих несоосную полость. В работах Н. М. Макдональда, Е. Вейнеля и Р. Морис [12–14] в разное время изучалось напряженное состояние классической задачи о кручении стержня, поперечное сечение которого ограничено двумя эксцентричными окружностями. Пользуясь методом Д. И. Шермана [4], напряженное состояние при кручении валов с несоосной эллиптической и квадратной полостями изучил Ю. А. Амензаде [8, 9]. Аналогичная задача о кручении кругового цилиндра, имеющего квадратную несоосную полость, методом конформного отображения была решена нами в работе [10].

В настоящей работе рассматривается задача кручения призматического стержня, поперечное сечение которого ограничено извне кривой, близкой к окружности, а изнутри — прямоугольником с закругленными углами, центр которого не совпадает с центром окружности.

Задача решается методом конформного отображения, причем предварительно строится функция, реализующая конформное отображение концентрического кольца в рассматриваемую двусвязную область способом, предложенным нами в работе [10].

§ 1. Известно, что конформное отображение внешности прямоугольной области на внутренность единичного круга $|\omega| < 1$ осуществляется функцией Кристоффеля-Шварца. При этом отображении окружности $|\omega| = R < 1$ переходят в овалообразные кривые, оси симметрии которых совпадают с осями симметрии прямоугольника, являющегося образом окружности $|\omega| = 1$ [3].

Если заменить интеграл Кристоффеля-Шварца полиномом, составленным из первых нескольких членов разложения этого интеграла в ряд, то при отображении этим полиномом окружности $|\omega| = R < 1$ перейдут также в овалообразные кривые, а образом окружности $|\omega| = 1$ становится прямоугольник со слабо вогнутыми сторонами и закругленными углами. Увеличением числа членов полинома, как показано Г. Н. Савиным [6] и другими, можно с требуемой точностью выпрямить стороны и уменьшить радиус закругления в углах этого прямоугольника.

Разложение отображающей функции Кристоффеля-Шварца в ряд дано в работах Г. Н. Савина [7] и О. М. Сапонджяна [5].

В качестве исходной функции для построения отображающей функции концентрического кольца в двусвязную область рассматриваемого поперечного сечения скручиваемого стержня воспользуемся полиномом

$$z = \Omega(w) = D \left[\frac{1}{w} + C_1 w + C_3 w^3 + \dots + C_{2n+1} w^{2n+1} \right], \quad (w = Re^{i\varphi}), \quad (1.1)$$

образованным из первых нескольких членов разложения функции Кристоффеля-Шварца в ряд, где

$$C_{2n+1} = -\frac{1}{n+1} [C_{2n-1} \cos 2\alpha + C_{2n-3} \cos 4\alpha + \dots + C_{-1} \cos (2n+2)\alpha],$$

$$(n = 0, 1, \dots)$$

$$C_{-1} = -1 \quad (1.2)$$

и параметр α зависит от отношения сторон прямоугольника.

Реккурентная формула (1.2) для последовательного определения коэффициентов полинома (1.1) получена в вышеуказанной работе О. М. Сапонджяна.

Для того, чтобы окружности $|\zeta_1| = r < 1$ новой плоскости ζ_1 , начиная с некоторого значения $r_0 < 1$, переходили бы в кривые, близкие к окружности, и имели бы произвольное по отношению к прямоугольнику расположение, отличное от вышеописанного овалообразного, единичный круг $|w| \leq 1$, который полиномом (1.1) отображается на внешность прямоугольника с закругленными углами, отобразим на самого себя известной функцией

$$w = \frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta_1}, \quad (\zeta_1 = re^{i\varphi}), \quad (1.3)$$

где α — комплексный параметр ($|\alpha| < 1$).

Подставив (1.3) в (1.1), получим

$$z = \Omega(\zeta_1) = D \left[\frac{1 - \bar{\alpha}\zeta_1}{\zeta_1 - \alpha} + C_1 \frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta_1} + \right. \\ \left. + C_3 \left(\frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta_1} \right)^3 + \dots + C_{2n+1} \left(\frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta_1} \right)^{2n+1} \right]. \quad (1.4)$$

Так как отображение единичного круга на самого себя обладает свойством сохранения своей первоначальной границы, то образ окружности $|\zeta_1| = 1$ при отображении функцией (1.4) совпадет с образом окружности $|w| = 1$ при отображении полиномом (1.1), то есть тем же прямоугольником.

Однако, функция (1.4) имеет уже полюс в точке $\zeta_1 = \alpha$ в отличие от полюса $w = 0$ полинома (1.1) и поэтому образ окружности $|\zeta_1| = r_0 < 1$ станет иначе расположенным по отношению к прямо-

угольнику, нежели образ окружности $|w|=R<1$. Изменения расположения образов окружностей $|\zeta_1|=r<1$ по отношению к границе прямоугольника зависят от комплексного параметра α .

Представим функцию (1.4) рядом Лорана с центром в точке $\zeta_1 = 0$. Так как функция (1.4) имеет особенность в $\zeta_1 = a$ круга $|\zeta_1| \leq 1$, то ее можно представить либо рядом Лорана в кольце $|\alpha| < |\zeta_1| \leq 1$, либо рядом Тейлора в круге $|\zeta_1| < |\alpha|$. Однако, последнее разложение не содержит в себе интересующую нас окружность $|\zeta_1| = 1$, образом которой на плоскости z является прямоугольник. Следовательно, воспользуемся разложением функции (1.4) в ряд Лорана в кольце $|\alpha| < |\zeta_1| \leq 1$. Учитывая, что точка $\zeta_1 = \frac{1}{a}$ находится вне круга $|\zeta_1| \leq 1$

($2n+1$)-ую степень дробно-линейной функции (1.3), фигурирующую в (1.4), разложим в ряд Тейлора

$$\left(\frac{\zeta_1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}\zeta_1}\right)^{2n+1} = d_0^{(2n+1)} + d_1^{(2n+1)}\zeta_1 + d_2^{(2n+1)}\zeta_1^2 + \dots + d_k^{(2n+1)}\zeta_1^k + \dots, \quad (1.5)$$

Перепиывая (1.4) с учетом (1.5), получим

$$z = \Omega_1(\zeta_1) = D[G(\zeta_1) + B_0 + B_1\zeta_1 + B_2\zeta_1^2 + \dots + B_k\zeta_1^k + \dots], \quad (1.6)$$

где

[illegible]

$$b) \quad G(\zeta_1) = \frac{1 - x_{\zeta_1}^2}{\zeta_1 - a}. \quad (1.8)$$

Разложим функцию (1.8) вне круга $|\zeta_1| = |\alpha|$ в ряд

$$G(\zeta_1) = \frac{1 - \bar{\alpha}_{\zeta_1}}{\zeta_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\zeta_1}\right)} = \frac{1 - \bar{\alpha}_{\zeta_1}}{\zeta_1} \left[1 + \frac{\alpha}{\zeta_1} + \frac{\alpha^2}{\zeta_1^2} + \dots + \frac{\alpha^n}{\zeta_1^n} + \dots \right] =$$

$$= B_0^* + \frac{B_{-1}}{\zeta_1} + \frac{B_{-2}}{\zeta_1^2} + \dots + \frac{B_{-n}}{\zeta_1^n} + \dots, \quad (1.9)$$

где $B_0^* = -\alpha$, а $B_{-n} = x^{n-1}(1-\alpha)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Подставив (1.9) в (1.6) и полагая при этом, что $B_6 + B_9 = 0$, что всегда возможно, окончательно получим

$$z = \Omega_1(\zeta_1) = D \left[\sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta_1^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{-k} \zeta_1^{-k} \right]. \quad (1.10)$$

Пользуясь комплексным представлением функции напряжений через комплексную функцию кручения [11]

$$\Psi = -\frac{i}{2} \left[\Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - i z \bar{z} \right] \quad (2.3)$$

($z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$; $\Phi_1(z)$ — комплексная функция кручения) и учитывая, что полином

$$z = \omega(\zeta) = D \left[\sum_{k=1}^{n_1} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{n_2} D_{-k} \zeta^{-k} \right], \quad \text{где } \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

составленный из первых n_1 членов правильной и n_2 первых членов главной частей ряда (1.10), в котором ради удобства предварительно сделано преобразование $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta}$ и введены обозначения

$$B_k = D_{-k}, \quad B_{-k} = D_k, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

отображает кольцо $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$ на двусвязную область, ограниченную извне кривой Γ_2 , являющейся теперь уже образом окружности $|\zeta| = \rho_2$, а изнутри образом окружности $|\zeta| = 1$ — прямоугольником Γ_1 , после подстановки (2.4) в (2.3), получим

$$\Psi = -\frac{i}{2} \left[\Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - i \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} \right]. \quad (2.6)$$

Функцию $\Phi(\zeta)$, голоморфную в кольце $1 \leq |\zeta| \leq \rho_2$, будем искать в виде

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \text{где } a_k = b_k + ic_k. \quad (2.7)$$

Произведение $\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$, фигурирующее в (2.6), на линиях $\rho = \text{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{1}{2} \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2} |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1} (P_k^2 + Q_k^2) \rho^{2k} + \sum_{k=1}^{n_2} (P_{-k}^2 + Q_{-k}^2) \rho^{-2k} \right], \\ \alpha_1 &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (P_k P_{k+1} + Q_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n_2-1} (P_{-k} P_{-(k+1)} + Q_{-k} Q_{-(k+1)}) \rho^{-(2k+1)} \right], \\ \alpha_n &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-n} (P_k P_{k+n} + Q_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n_2-n} (P_{-k} P_{-k-n} + Q_{-k} Q_{-k-n}) \rho^{-(2k+n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} P_{-k} + Q_{n-k} Q_{-k}) \rho^{n-2k} \Big],$$

$$(n = 2, 3, \dots, N);$$

$$\beta_1 = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (Q_k P_{k+1} - P_k Q_{k+1}) \rho^{2k+1} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n_1-1} (P_{-k} Q_{-k-1} - Q_{-k} P_{-k-1}) \rho^{-(2k+1)} \right],$$

$$\beta_n = |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n} (Q_k P_{k+n} - P_k Q_{k+n}) \rho^{2k+n} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n_2-n} (P_{-k} Q_{-(k+n)} - Q_{-k} P_{-(k+n)}) \rho^{-(2k+n)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{n-1} (P_{n-k} Q_{-k} + Q_{n-k} P_{-k}) \rho^{n-2k} \right], \quad (n = 2, 3, \dots, N),$$

здесь $D_k = P_k + iQ_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) и $N = n_1 + n_2$.

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты α_n и β_n будут снабжены сверху индексом (1), а при $\rho = \rho_2$ — индексом (2).

Подставляя (2.7) в (2.6) с учетом (2.8) и удовлетворяя граничным условиям (2.2), получим

$$b_k = \frac{\rho_k^{(2)} - \rho_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_k = \frac{\alpha_k^{(2)} - \alpha_k^{(1)} \rho_2^{-k}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}},$$

$$b_{-k} = \frac{\rho_k^{(2)} - \rho_k^{(1)} \rho_2^k}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad c_{-k} = \frac{\alpha_k^{(1)} \rho_2^k - \alpha_k^{(2)}}{\rho_2^k - \rho_2^{-k}}, \quad (2.9)$$

где $k = 1, 2, \dots, N$.

Для остальных $k > N$ $b_k = b_{-k} = c_k = c_{-k} = 0$. Входящая в (2.2) постоянная C и коэффициент a_0 , не влияющие на напряженное состояние, равны $C = \alpha_0^{(2)} - \alpha_0^{(1)}$, $a_0 = i\alpha_0^{(2)}$.

§ 3. Крутящий момент, приложенный к основаниям стержня, равен

$$M = \tau K, \quad (3.1)$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении, которая определяется по формуле [11]

$$K = \frac{\mu\pi}{2} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(2)} A_{-n-1}^{(2)} + \lambda_{-n-1}^{(2)} A_n^{(2)}) - \sum_{n=0}^N (\lambda_n^{(1)} A_{-n-1}^{(1)} + \lambda_{-n-1}^{(1)} A_n^{(1)}) \right] +$$

$$+ \mu\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(2)} - a_n \lambda_{-n}^{(2)}) - \sum_{n=1}^N n (a_{-n} \lambda_n^{(1)} - a_n \lambda_{-n}^{(1)}) \right]. \quad (3.2)$$

Здесь μ — модуль сдвига,

$$\begin{aligned}
\lambda_0^{(j)} &= 2\alpha_0^{(j)}, \\
\lambda_n^{(j)} &= (\alpha_n^{(j)} - i\beta_n^{(j)}) \rho_j^{-n}, \quad \lambda_{-n}^{(j)} = (\alpha_n^{(j)} + i\beta_n^{(j)}) \rho_j^n; \\
A_0^{(j)} &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) \bar{D}_k D_{k+1} \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+1)} \rho_j^{-2(k+1)} \right], \\
A_n^{(j)} &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n-1} (k+n+1) \bar{D}_k D_{k+n+1} \rho_j^{2k} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{n_2-n-1} k D_{-k} \bar{D}_{-(k+n+1)} \rho_j^{-2(k+n+1)} + \sum_{k=1}^n k D_{-k} \bar{D}_{-(n-k+1)} \rho_j^{-2(n-k+1)} \right], \\
&\quad [n=1, 2, \dots, (N-1)], \\
A_{-1}^{(j)} &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2} k D_k \bar{D}_k \rho_j^{2k} - \sum_{k=1}^{n_1} k D_{-k} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right], \\
A_{-2}^{(j)} &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_1-1} k D_k \bar{D}_{k+1} \rho_j^{2(k+1)} - \sum_{k=1}^{n_1-1} (k+1) D_{-(k+1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} \right], \\
A_{-n}^{(j)} &= |D|^2 \left[\sum_{k=1}^{n_2-n-1} k D_k \bar{D}_{k+n-1} \rho_j^{2(k+n-1)} - \sum_{k=1}^{n_2-n-1} (k+n-1) D_{-(k+n-1)} \bar{D}_{-k} \rho_j^{-2k} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-2} k D_{-k} \bar{D}_{n-k-1} \rho_j^{2(n-k-1)} \right], \\
&\quad (j=1, 2), \quad [n=3, 4, \dots, (N+1)].
\end{aligned} \quad (3.4)$$

Фигурирующие в этих выражениях коэффициенты $\alpha_n^{(j)}$ и $\beta_n^{(j)}$ ($j=1, 2$) определяются по (2.8).

§ 4. Как известно [1], касательные напряжения при кручении определяются по формуле

$$\tau_\varphi = i\tau_\theta = \mu\tau \frac{\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} [\Phi'(\zeta) - i\overline{\omega'(\zeta)} \omega'(\zeta)]. \quad (4.1)$$

Как показано в [11], определяемые по (3.4) коэффициенты A_n , зависящие от ρ на линиях $\rho = \text{const}$ являются коэффициентами разложения в ряд функции $\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta)$

$$\overline{\omega(\zeta)} \omega'(\zeta) = \sum_{n=-N}^N A_n \zeta^n, \quad (\zeta = \rho^2) \quad (4.2)$$

и при $\rho = \rho_j$ ($j=1, 2$) эти коэффициенты суть $A_n^{(j)}$ ($j=1, 2$), входящие в выражение жесткости (3.2).

Полагая $A_n = T_n + iS_n$ и учитывая (2.4) и (2.7), отделив действительные и мнимые части (4.1), получим

$$\tau_\varphi = \frac{\mu\tau}{|\omega'(\zeta)|} \left\{ \sum_{n=1}^N [(nb_n + S_{n-1}) \rho^{n-1} - (nb_{-n} - S_{-n-1}) \rho^{-n-1}] \cos n\theta + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} - (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta \Big\}, \quad (4.3)$$

$$\tau_0 = \frac{\mu\tau}{|w'(\zeta)|} \left\{ T_{-1} \rho^{-1} + \sum_{n=1}^N [(T_{n-1} - nc_n) \rho^{n-1} + (T_{-n-1} + nc_{-n}) \rho^{-n-1}] \times \right. \\ \left. \times \cos n\theta - \sum_{n=1}^N [(nb_n + S_{n-1}) \rho^{n-1} + (nb_{-n} - S_{-n-1}) \rho^{-n-1}] \sin n\theta \right\}. \quad (4.4)$$

§ 5. Рассмотрим численный пример. В качестве исходной функции (1.1) ограничимся полиномом

$$z = D \left[\frac{1}{w} + 0,309 w - 0,150747 w^3 - 0,027952 w^5 + \right. \\ \left. + 0,008439 w^7 - 0,009052 w^9 \right], \quad (5.1)$$

в котором коэффициенты получены по (1.2) при значении параметра $\alpha = 0,2\pi$.

Образ окружности $|w| = 1$ при отображении по (5.1) есть прямоугольник с отношением сторон $\frac{l}{h} = 2$, причем $h \approx 1,16D$, а образы окружностей $|w| = r < 1$ — вышеописанные овалообразные кривые. Полином девятой степени (5.1) обеспечивает незначительную закругленность углов прямоугольника и достаточную прямолинейность сторон. Отклонение сторон от прямолинейности не превышает $0,03D$.

Подставив (1.3) в (5.1) при действительном значении параметра $\alpha = -0,3$, учитывая при этом (1.5), (1.7), (1.9), (2.5) и принимая в качестве внешней границы Γ_2 образ окружности $|\zeta| = 2,4$, ограничимся следующим полиномом в отображающей функции (2.4)

$$z = w(\zeta) = D \left(\sum_{k=1}^{18} D_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{12} D_{-k} \zeta^{-k} \right), \quad (5.2)$$

где

$$D_k = 0,91 \cdot (-0,3)^{k-1}, \\ \begin{array}{ll} D_{-1} = 0,243156 & D_{-7} = -0,026255 \\ D_{-2} = -0,191249 & D_{-8} = 0,019586 \\ D_{-3} = -0,038305 & D_{-9} = -0,007625 \\ D_{-4} = 0,054391 & D_{-10} = -0,000449 \\ D_{-5} = -0,039120 & D_{-11} = 0,002433 \\ D_{-6} = 0,025656 & D_{-12} = -0,001065. \end{array} \quad (5.3)$$

Так как коэффициенты D_k и D_{-k} при принятом действительном значении α действительны, то образами окружностей $|\zeta| = \rho < 1$ являются кривые, симметричные относительно действительной оси.

Построение образов окружностей $|\zeta| = \rho_1 = 1$ и $|\zeta| = \rho_2 = 2,4$ по полиному (5.2) с коэффициентами (5.3) показывает, что (фиг. 1):

1) образом окружности $|\zeta|=1$ является такой же прямоугольник Γ_1 с центром в точке $O_1(-0,393D, 0)$ и $h \approx 1,16D$, каким был образ окружности $|\omega|=1$ при отображении полиномом (5.1), что и следовало ожидать, так как полином (5.2) на окружности $|\zeta|=1$ приближенно, но с высокой точностью аппроксимирует функцию (5.1) на окружности $|\omega|=1$; отклонение сторон от прямолинейности также не превышает $0,03D$;

2) дискретные точки $z_k = \omega(p_2 e^{i\theta_k})$ располагаются по кривой Γ_2 , близкой к окружности.

Принимая за центр этой приближенной окружности точку $O_2(-3,264D, 0)$ — середину отрезка действительной оси, отсекаемой кривой Γ_2 от этой оси, и сравнивая расстояния от этой точки до 20-ти точек, расположенных в верхней полуплоскости (эти точки на фиг. 1 показаны пересечением кривой Γ_2 черточками), видим, что максимальная разница между этими расстояниями не превышает $4,35\%$ ($R_{\max} = 4,609D$, $R_{\min} = 4,4D$). Кроме того, на окружности $p_2 = 2,4$ удовлетворяется условие выпуклости (1.11) кривой Γ_2 . Поэтому с известным приближением считаем кривую Γ_2 приближенной окружностью. Расстояние между центрами этой окружности Γ_2 и прямоугольника Γ_1 равно $z = 2,871D$.

Жесткость рассматриваемого сечения, сосчитанная по формуле (3.2), равна $K = 130,01 \pi D^4$.

Эпюры касательных напряжений $\tau_z/\mu\tau D$ по контурам Γ_1 и Γ_2 сечения приведены на фиг. 1.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 23 VI 1964

Ա. Բ. ԶԱՐԿԱՆՅԱՆ

ՈՉ ՀԱՄԱՌԱՆՅՔ ՌԵԳԱՆԿՅՈՒՆ ԽՈՌՈՉ ՈՐԵՆՅՈՂ ԼԻՍՅՈՒ ՈՂՈՐՈՒՄԸ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է պրիզմատիկ ձողի ոլորման խնդիրը, որի լայնական կտրվածքը արտաքինից սահմանափակված է շրջանաղծին բաժանաչափ մոտ կտրով, իսկ ներսից՝ կլորացված անկյուններ ունեցող ուղղանկյունով, որի կենտրոնը չի համընկնում շրջանաղծի կենտրոնի հետ:

Խնդիրը լուծված է կոնֆորմ արտապատկերման մեթոդով, ըստ որում համակենտրոն օղակը դիտարկվող նրկկառ տիրույթի վրա արտապատկերող ֆունկցիան կառուցվում է [10] աշխատության մեջ ադաչաբկված եղանակով:

Որպես թվային օրինակ լուծված է $\frac{l}{h} = 2$, $z = 2,871D$ և $R_{\max} = 4,609D$

պարամետրերով կտրվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը: Հաշվված է ալգ ձողի կոշտութունը և կառուցված են կտրվածքի եզրագծերի համար շոշափոխ լարումների էպուրները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1960.
3. Лаврентьев М. А. Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики. Гостехтеориздат, М.—Л., 1946.
4. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. ДАН СССР, **63**, № 5, 1948.
5. Сапонджян О. М. К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля-Шварца. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, **9**, № 9, 1956.
6. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
7. Савин Г. Н. Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, сообщение 10, 1936.
8. Амензаде Ю. А. Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием. ДАН СССР, **119**, № 6, 1958.
9. Амензаде Ю. А. Об одной задаче нестесненного кручения. Инженерный журнал АН СССР, **3**, в. 2, 1963.
10. Заргарян С. С. Кручение кругового цилиндра, имеющего несоосную многогранную полость. ДАН АрмССР, **39**, № 4, 1964.
11. Заргарян С. С. Кручение призматических стержней полигонального поперечного сечения с произвольно расположенной круговой цилиндрической полостью. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **17**, № 2, 1964.
12. Macdonald H. M. On the torsional strength of a hollow shaft. Proc. Cambridge Philosoph. Soc., **8**, 1893.
13. Weinel E. Das Torsionsproblem für den exzentrischen Kreisring. Ingenieur Archiv, **3**, 1932.
14. Morris Rosa. Some general solutions of Saint-Venant's torsion and flexure problem, II and III. Proc. London Math. Soc., (2) **51**, 1949.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

МОВСИСЯН Л. А.

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ПРИ ПРОДОЛЬНОМ УДАРЕ

Целью настоящей работы является исследование поведения упругой цилиндрической оболочки при продольном ударе жесткой массой.

Известная нам работа [1], по-видимому, единственная, где продольное нагружение на оболочку прилагается ударно. Для сжимающего усилия, действующего на поперечных сечениях оболочки, автор берет значение сжимающего усилия балки.

В настоящей работе показано, что для оболочек при продольном ударе, кроме продольного сжимающего усилия, должно быть учтено также окружное усилие и что потеря устойчивости такой оболочки при продольном ударе происходит так, как при совместном действии продольного сжатия и поперечного давления.

§ 1. Постановка задачи

Пусть имеется идеальная круговая замкнутая цилиндрическая оболочка длиной l , толщиной h и радиусом r . Один конец оболочки заземлен (подробно о граничных условиях потом), а второй конец свободен. Оболочка подвергается осесимметричному удару жесткой массой по свободному концу в продольном направлении.

Волна сжатия, распространяясь в оболочке, может достигнуть такой величины, что первоначальное безмоментное напряженное состояние оболочки будет не единственным. Причем возникшее моментное состояние будет иметь различный характер в зависимости от длины распространения волны. В частности, начиная от некоторой длины распространения продольной волны, амплитуды моментного состояния будут бесконечно возрастать. В отличие от статической потери устойчивости, где для заданной длины оболочки определяется критическая сила, здесь вопрос ставится так: для заданной силы найти критическую длину потери устойчивости. Критической назовем ту минимальную длину распространения продольной волны, при которой моментное состояние, если оно возникнет, будет носить возрастающий характер. Так как потеря устойчивости при ударе носит локальный характер (что и показывают экспериментальные исследования

[1]), то граничные условия ставятся не на концах оболочки, как обычно, а одна группа ставится на одном из концов (в зависимости от того, критическая длина реализуется у ударяемого конца или у защемленного конца), а вторая группа — на фронте волн сжатия.

Что же касается части оболочки впереди фронта ударной волны, то там останется безмоментное напряженное состояние, так как после возникновения неустойчивости эта область неспособна будет передавать высокую величину сжимающей силы, которая уже вызвала потерю устойчивости.

Из вышесказанного следует, что для определения критической длины потери устойчивости оболочки будем иметь общезвестные уравнения [2] („уравнения в вариациях“)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{\alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{(1-\nu^2)m}{Eh} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \beta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= \frac{(1-\nu^2)m}{Eh} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \varepsilon^2 \nabla^2 w + w - \frac{1-\nu^2}{Ehr^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T_1^* \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(T_2^* \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \right] = \frac{(1-\nu^2)m}{Eh} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где все обозначения — общепринятые [2], T_1^* и T_2^* — продольное и окружное усилия, значения которых определяются из безмоментного напряженного состояния.

§ 2. Определение T_1^* и T_2^*

Для определения T_1^* и T_2^* будем исходить из известных уравнений безмоментного состояния [3] с добавлением инерционных членов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1^*}{\partial x} &= m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad S^* = 0, \quad T_1^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{r} \right), \\ T_2^* &= -rm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad v = 0, \quad T_2^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

К системе (2.1) надо присоединить граничные и начальные условия.

Граничные условия таковы:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad (2.2)$$

$$2\pi r T_1^* = -M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{при} \quad x = l, \quad (2.3)$$

где M — масса ударяющего тела.

* Надо иметь в виду, что, хотя для перемещений здесь и в (1.1) приняты общие обозначения, они различные. Здесь они — перемещения безмоментного состояния а в (1.1) — приращения перемещений.

Если обозначить через k ($k = \frac{M}{2\pi r l m}$) отношение веса ударяющего тела к весу оболочки, из (2.1) и (2.3) получим

$$-kl \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (1 - \nu^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{r} \right) \quad \text{при } x = l, \quad (2.4)$$

где $a = \sqrt{\frac{Eg}{\rho}}$ — скорость распространения упругой волны в цилиндре.

Начальные условия следующие:

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x < l, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \quad \text{при } t = 0, \quad x = l,$$

где c — скорость удара,

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.6)$$

Представим уравнения движения (2.1) в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1 - \nu^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{r^2} &= \frac{1 - \nu^2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Решения (2.7) будем искать, разлагая перемещения в ряды по малому параметру ν . Легко показать, что ряд для u содержит лишь четные степени ν , а ряд для w — только нечетные, так что

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \nu^2 u_2 + \dots, \\ w &= \nu w_1 + \nu^3 w_3 + \dots. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для u_i и w_{i+1} имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \frac{a^2}{r^2} w_1 &= -\frac{a^2}{r} \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} &= \frac{a^2}{r} \frac{\partial w_{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{i-2}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial t^2} + \frac{a^2}{r^2} w_{i+1} &= -\frac{a^2}{r} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Условия на концах для каждого приближения будут

$$\left. \begin{aligned} u_i &= 0 \quad \text{при } z=0 \\ kl \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= -a^2 \frac{\partial u_0}{\partial z} \\ \dots \dots \dots \\ kl \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial u_i}{\partial z} &= kl \frac{\partial^2 u_{i-2}}{\partial t^2} - \frac{a^2}{r} w_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z=l. \quad (2.10)$$

Начальные условия

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0, \quad 0 \leq z < l, \quad i=2, 4, \dots$$

и

$$u_0 = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0, \quad 0 \leq z < l, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -c \quad \text{при } t=0, \quad z=l,$$

$$w_{i+1} = \frac{\partial w_{i+1}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t=0, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (2.12)$$

Полученные рекуррентные уравнения позволяют определить каждое новое приближение, если известны все предыдущие. Как видно из (2.9)–(2.12), для каждого приближения u_i имеем волновое уравнение, причем нулевое приближение, как и следовало ожидать, дает решение для балки, а для w_{i+1} имеются уравнения вынужденных колебаний.

Волновые уравнения будем решать методом распространяющихся волн.

Для u_0 имеется готовое решение балки [4, 5, 6], мы приведем его в окончательном виде

$$u_0 = \frac{kcl}{a} \left[e^{\frac{l-at-z}{kl}} - 1 \right] \quad \text{для } 0 \leq t < \frac{l}{a}, \quad (2.13)$$

$$u_0 = \frac{kcl}{a} \left[e^{\frac{l-at-z}{kl}} - e^{\frac{l+at-z}{kl}} \right] \quad \text{для } \frac{l}{a} < t \leq \frac{2l}{a} \quad (2.14)$$

и т. д.

Функцию w_1 определяем из второго уравнения (2.9) и (2.12)

$$w_1 = -a \int_0^t \frac{\partial u_0}{\partial z} \sin \frac{a}{r} (t-\tau) d\tau$$

или

$$w_1 = \frac{crk^2l^2}{a(r^2 + k^2l^2)} e^{\frac{l-z}{kl}} \left[e^{-\frac{at}{kl}} - \cos \frac{at}{r} + \frac{r}{kl} \sin \frac{at}{r} \right] \quad (2.15)$$

для $0 \leq t \leq \frac{l}{a}$ и т. д.

Таким образом, можно найти любое приближение. Например, второе приближение имеет вид

$$u_2 = \frac{cr^2}{4akl(r^2 + k^2l^2)} \left[\operatorname{ch} \frac{l - at - \alpha}{kl} - 1 \right] + \\ + \frac{cr^2k^2l^2}{a(r^2 + k^2l^2)^2} e^{\frac{l-\alpha}{kl}} \sin \frac{at}{r} - \frac{cr^2k^3l^3}{a(r^2 + k^2l^2)^2} e^{\frac{l-\alpha}{kl}} \sin \frac{at}{r} + \\ + \frac{cr^2kl}{4a(r^2 + k^2l^2)} \frac{l - \alpha - at}{kl} e^{\frac{l-\alpha-at}{kl}} \quad \text{для } 0 \leq t \leq \frac{l}{a}. \quad (2.16)$$

Имея выражения для u_i и w_{i+1} , можно получить T_1^* и T_2^* с любой наперед заданной точностью.

§ 3. Свободно опертая оболочка

Рассмотрим случай полубесконечной оболочки, край $\alpha = 0$ которой свободно оперт и удар производится по этому концу. Как уже отметили, одна из групп граничных условий должна быть поставлена на ударяемом конце цилиндра, а вторая — на фронте волн. Нетрудно видеть, что на фронте волн, если иметь в виду гипотезу недеформируемых нормалей, будем иметь условия защемления, то есть $u = v = w = \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$. Для решения задачи и получения некоторых качествен-

ных результатов делаем допущение, что на фронте также имеются условия опирания. Такое допущение может влиять только на количественную сторону получаемых результатов (причем в некоторых случаях возможно несущественно), а нас в основном интересует качественная картина выпучивания, кроме того известно, что при решении задач устойчивости оболочки граничные условия, как правило, удовлетворяются лишь приближенно.

Полагая также, что отношение веса ударяющего тела к весу оболочки настолько большое, что можно принять равным бесконечности ($k \rightarrow \infty$), для T_1^* и T_2^* с точностью до v^2 включительно получим значения

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a} \left(1 + v^2 \cos \frac{at}{r} \right), \\ T_2^* = -\frac{vEhc}{a} \cos \frac{at}{r}, \quad (3.1)$$

верные для первого прохождения волны напряжений.

Ищем решение (1.1) в виде

$$u = U(t) \sin \lambda x \cos n\beta, \\ v = V(t) \sin \lambda x \sin n\beta, \\ w = W(t) \sin \lambda x \cos n\beta, \quad (3.2)$$

где $\lambda = \frac{m\pi}{L}$, m и n — целые числа, а L — такая длина распространения упругой волны, при которой оболочка теряет устойчивость.

Подставляя (3.2) в (1.1), для неизвестных $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ получим систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$m \frac{d^2 \bar{f}}{dt^2} + (\bar{R} - T_1^* \bar{S}_1 - T_2^* \bar{S}_2) \bar{f} = 0, \quad (3.3)$$

где $\bar{f}$ — вектор с компонентами $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$,

$$\bar{R} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 & -\frac{1+\nu}{2} \lambda n & -\nu \lambda \\ -\frac{1+\nu}{2} \lambda n & n^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 & n \\ -\nu \lambda & n & z^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \end{vmatrix}$$

$$\bar{S}_1 = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{vmatrix}, \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{r^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \end{vmatrix}.$$

Критическая длина потери устойчивости по определению найдется из условия [2]

$$\left| \bar{R} - \frac{Ehc}{a} \left(1 \pm \frac{1}{2} \nu^2 \right) \bar{S}_1 \pm \frac{1}{2} \frac{Ehc\nu}{a} \bar{S}_2 - \frac{1}{4} \frac{a^2}{r^2} \bar{E} \right| = 0, \quad (3.4)$$

где $\bar{E}$ — единичная матрица.

Наименьшее значение L , определяемое из (3.4), по определению есть критическая длина (l_{kp}).

Таким образом, для заданной скорости удара можно найти критическую длину выпучивания и время потери устойчивости ($t = \frac{l_{kp}}{a}$).

Фактически, полученное решение дает возможность определить критическую длину и для конечной оболочки. В самом деле, если скорость удара достаточно большая (то есть большие скорости, определяемой из условия $l = l_{kp}$), то потеря устойчивости произойдет при первом прохождении волны сжатия, $l_{kp} < l$, и все полученные результаты останутся в силе.

В случае, когда c такое, что при первом прохождении волны сжатия оболочка не теряет устойчивости, то потеря устойчивости может произойти после нескольких отражений волны напряжения, так как при каждом отражении величина сжимающего усилия увеличивается по ступенчатому закону. Поэтому после Q отражений для T_1^* и T_2^* будем иметь

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a}(1+Q)\left(1+v^2\cos\frac{at}{r}\right),$$

$$T_2^* = -\frac{\sqrt{Ehc}}{a}(1+Q)\cos\frac{at}{r}. \quad (3.5)$$

Вопрос о том, после скольких отражений произойдет выпучивание, решается следующим образом. Если для заданной скорости удара данная оболочка не выпучивается при первом прохождении волны, то можно рассматривать удар по второму концу со скоростью $2c$ и найти $l_{кр}$. Если и тогда не получится потеря устойчивости, то можно рассматривать удар на удараемом конце со скоростью $3c$ и т. д.

Таким образом, для данной оболочки и заданной скорости удара найдутся усилия потери устойчивости, критическая длина и время выпучивания $t = \frac{l}{a}Q + \frac{l_{кр}}{a}$.

Если критические усилия достигаются при четном числе отражений, то потеря устойчивости произойдет на удараемом конце, при нечетном отражении — на другом конце. С появлением вмятин ударяющее тело движется за счет увеличения вмятин в том конце, где началось выпучивание, в то время как второй конец цилиндра остается невозмущенным.

Для критической длины потери устойчивости при ударе получится достаточно простая формула в случае, если скорость удара достаточно большая. В этом случае вместо (3.1) можно принять приближенно

$$T_1^* = -\frac{Ehc}{a}(1+v^2),$$

$$T_2^* = -\frac{\sqrt{Ehc}}{a}.$$

В уравнениях устойчивости можно брать (1.1) без инерционных членов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 1963

Г. А. ГИГОУМЗЯН

ԳԻՈՒՄԵՐԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿՈՐՅՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ՝
ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐՂԱՄԻ ԴԵՊՈՐՏԻՐ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ն

Հոգիվածում դիտարկված է զրանային թաղանթի կալունություն հարցը, երբ զրանի մի կողմն ամրակցված է, իսկ մյուս կողմն ազատ է: Կոչում մարմինը Ե արագություն հարվածում է զրանի ազատ կողմին: Ստացված է

դրանի կաշտնաթյունը կորցնելու կրիտիկական երկարությունը տված հարվածի արագության համար: Կրիտիկական երկարության համար առաջված է անընդհատ սպեկտր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Коппа А. О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе. „Механика“ (сб. переводов), № 6, 1961.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. Гольденгейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
4. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле, Физматгиз, М., 1959.
5. Кальчевский Н. А. Теория соударения твердых тел. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. Goldsmith W. Impact, London, 1960.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. МОСКАЛЕНКО

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

На основе применения линеаризованных уравнений нелинейной теории упругости дано точное решение задачи об устойчивости толстой трехслойной плиты при условиях типа Навье на боковых гранях ("опертый" край). В качестве контактных условий использованы условия отсутствия проскальзывания между слоями. На конкретных примерах дано численное сопоставление результатов точного и известных приближенных решений.

§ 1. Задача об устойчивости равновесия упругого тела при отсутствии объемных сил сводится, как известно [1, 2], к определению собственных функций и собственных значений краевой задачи для линеаризованных относительно возмущений уравнений нелинейной теории упругости.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + L^0 u' &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + L^0 v' &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + L^0 w' &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left(L^0 = \tau_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tau_z^0 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + 2\tau_{xz}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + 2\tau_{yz}^0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\left[\tau'_x + \sigma_x^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau'_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau'_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{nx} + \\ &+ \left[\tau'_{xy} + \tau_{xy}^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \sigma_y^0 \frac{\partial u'}{\partial y} + \tau'_{yz} \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{ny} + \\ &+ \left[\tau'_{xz} + \tau_{xz}^0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \tau'_{yz} \frac{\partial u'}{\partial y} + \sigma_z^0 \frac{\partial u'}{\partial z} \right] \cos \widehat{nz} = S_x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ноликом обозначены компоненты невозмущенного напряженного состояния, относительно которого предполагается, что для его опре-

деления могут быть использованы уравнения линейной теории упругости. Штрихи относятся к возмущениям тензора напряжений, вектора смещений и поверхностных нагрузок.

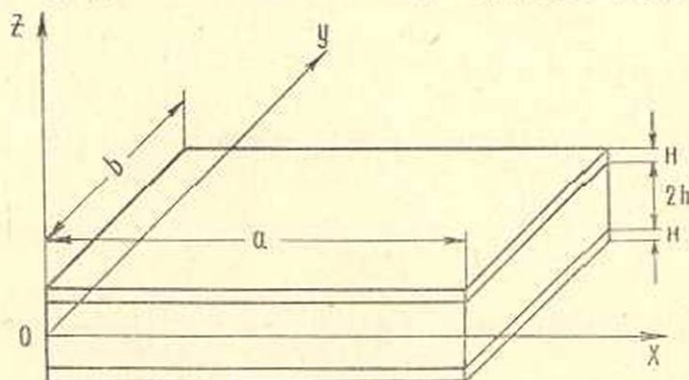
Используя для возмущений закон Гука, получим систему уравнений для возмущений компонент вектора смещений

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta u' + L^0 u' &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta v' + L^0 v' &= 0, \\(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right) + \mu \Delta w' + L^0 w' &= 0.\end{aligned}\quad (1.3)$$

§ 2. Рассмотрим устойчивость равновесия упругой прямоугольной в плане плиты, составленной из трех изотропных слоев. Плиту будем считать симметричной относительно плоскости $z = 0$ (фиг. 1), упругие постоянные λ_1, μ_1 для крайних слоев одинаковыми, а коэффициент Пуассона ν одинаковым для всех трех слоев. Кроме того, будем предполагать, что нагрузки p и p_1 , q и q_1 связаны соотношениями

$$\frac{p}{\mu} = \frac{p_1}{\mu_1}, \quad \frac{q}{\mu} = \frac{q_1}{\mu_1}.\quad (2.1)$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные Ламе для среднего слоя.



Фиг. 1.

При этом невозмущенное напряженное состояние определится равенствами

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = -q, \quad \sigma_z^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0\quad (2.2)$$

— для среднего слоя и

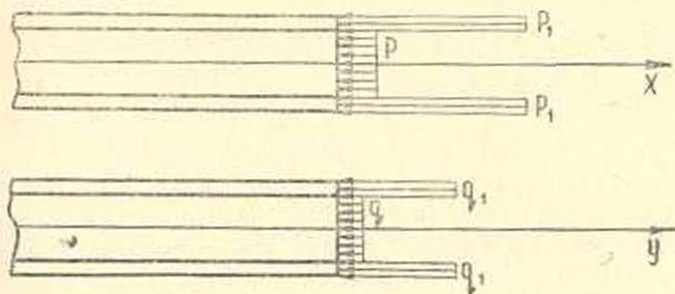
$$\sigma_x^0 = -p_1, \quad \sigma_y^0 = -q_1, \quad \sigma_z^0 = \tau_{xz}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{xy}^0 = 0\quad (2.3)$$

— для верхнего и нижнего слоев (фиг. 2).

В качестве условий на боковых гранях ($x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$) возьмем условия вида

$$\sigma_n + \sigma_n^0 \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, \quad u_s = 0, \quad w = 0. \quad (2.4)$$

Здесь и далее штрихи опускаются; σ_n — нормальное напряжение, u_n — нормальное смещение, u_s — смещение в направлении касательной к контуру плиты. Условия (2.4) соответствуют известным в теории пластин и оболочек условиям Навье.



Фиг. 2.

В качестве условий контакта между слоями выберем условия отсутствия проскальзывания. Это дает

$$u|_{z=h-0} = u|_{z=h+0}, \quad v|_{z=h-0} = v|_{z=h+0}, \quad w|_{z=h-0} = w|_{z=h+0}. \quad (2.5)$$

Приравнявая компоненты усилий на площадках поверхности контакта, получим

$$S_x|_{z=h-0} = S_x|_{z=h+0}, \quad S_y|_{z=h-0} = S_y|_{z=h+0}, \quad S_z|_{z=h-0} = S_z|_{z=h+0}. \quad (2.6)$$

Из условий (2.6) и (1.2) найдем контактные условия для компонент напряжения

$$\tau_{xz}|_{z=h-0} = \tau_{xz}|_{z=h+0}, \quad \tau_{yz}|_{z=h-0} = \tau_{yz}|_{z=h+0}, \quad \sigma_z|_{z=h-0} = \sigma_z|_{z=h+0}. \quad (2.7)$$

Аналогично для свободной поверхности получим

$$\tau_{xz}|_{z=h+H} = 0, \quad \tau_{yz}|_{z=h+H} = 0, \quad \sigma_z|_{z=h+H} = 0. \quad (2.8)$$

§ 3. Решение уравнений (1.3) для среднего слоя будем искать в виде, удовлетворяющем граничным условиям „опирания“ (2.4)

$$u = F(z) \cos k_1 x \sin k_2 y, \quad v = \Phi(z) \sin k_1 x \cos k_2 y, \quad w = \Psi(z) \sin k_1 x \sin k_2 y,$$

$$k_1 = \frac{m_1 \pi}{a}, \quad k_2 = \frac{m_2 \pi}{b} \quad (m_1, m_2 = 1, 2, \dots). \quad (3.1)$$

Подставляя выражения (3.1) в уравнения (1.3), убеждаемся, что функции F , Φ , Ψ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \mu F'' - [(\lambda + \mu) k_1^2 + (1 - \alpha) \mu k^2] F - (\lambda + \mu) k_1 k_2 \Phi + (\lambda + \mu) k_1 \Psi' &= 0, \\ -(\lambda + \mu) k_1 k_2 F + \mu \Phi'' - [(\lambda + \mu) k_2^2 + (1 - \alpha) \mu k^2] \Phi + (\lambda + \mu) k_2 \Psi' &= 0, \\ -(\lambda + \mu) k_1 F' - (\lambda + \mu) k_2 \Phi' + (\lambda + 2\mu) \Psi'' - (1 - \alpha) \mu k^2 \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\left(k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad z = \frac{pk_1^2 + qk_2^2}{\mu k^2} \right).$$

Корни соответствующего характеристического уравнения даются выражениями

$$\gamma_{1,2} = \pm r_1, \quad \gamma_{3,4} = \pm r_2, \quad \gamma_{5,6} = \pm r_3.$$

Здесь

$$r_1^2 = r_2^2 = k^2(1 - \alpha), \quad r_3^2 = k^2(1 - \tau\alpha), \quad \tau = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}.$$

Общее решение уравнений (3.2) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(z) &= (-k_2 a_1 + k_1 a_2) \operatorname{sh} r_1 z + k_1 a_3 \operatorname{sh} r_3 z + \\ &\quad + (-k_2 b_1 + k_1 b_2) \operatorname{ch} r_1 z + k_1 b_3 \operatorname{ch} r_3 z, \\ \Phi(z) &= (k_1 a_1 + k_2 a_2) \operatorname{sh} r_1 z + k_2 a_3 \operatorname{sh} r_3 z + (k_1 b_1 + k_2 b_2) \operatorname{ch} r_1 z + k_2 b_3 \operatorname{ch} r_3 z, \\ \Psi(z) &= \frac{k^2}{r_1} a_1 \operatorname{ch} r_1 z + r_2 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \frac{k^2}{r_1} b_1 \operatorname{sh} r_1 z + r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь a_{1-3}, b_{1-3} — постоянные интегрирования.

Для дальнейшего необходимо определить выражения для трех компонент $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ тензора возмущений напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \left\{ \left(-k_2 r_1 a_1 + k_1 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} a_1 \right) \operatorname{ch} r_1 z + 2k_1 r_3 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \right. \\ &\quad \left. + \left(-k_2 r_1 b_1 + k_1 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} b_1 \right) \operatorname{sh} r_1 z + 2k_1 r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z \right\} \cos k_1 x \sin k_2 y, \\ \tau_{yz} &= \mu \left\{ \left(k_1 r_1 a_1 + k_2 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} a_1 \right) \operatorname{ch} r_1 z + 2k_2 r_3 a_3 \operatorname{ch} r_3 z + \right. \\ &\quad \left. + \left(k_1 r_1 b_1 + k_2 \frac{k^2 + r_1^2}{r_1} b_1 \right) \operatorname{sh} r_1 z + 2k_2 r_3 b_3 \operatorname{sh} r_3 z \right\} \sin k_1 x \cos k_2 y, \\ \sigma_z &= \mu \{ 2k^2 a_2 \operatorname{sh} r_1 z + (k^2 + r_1^2) a_3 \operatorname{sh} r_3 z + \\ &\quad + 2k^2 b_2 \operatorname{ch} r_1 z + (k^2 + r_1^2) b_3 \operatorname{ch} r_3 z \} \sin k_1 x \sin k_2 y. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решения для крайних слоев имеют аналогичный вид. Для верхнего слоя вместо величин μ, a_i, b_i следует подставить μ_1, A_i, B_i , а для нижнего слоя — μ_1, A_i', B_i' .

§ 4. Из симметрии плиты относительно плоскости $z = 0$, а также из свойств граничных и контактных условий вытекает, что возможны два вида потери устойчивости, сопровождающиеся, соответственно, антисимметричной или симметричной деформацией (изгиб и симметричное выпучивание).

В случае антисимметричной деформации должны выполняться равенства

$$b_i = 0, \quad A_i = A_i, \quad B_i = -B_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.1)$$

Удовлетворяя условиям (2.5), (2.7) и (2.8), получим девять уравнений для определения девяти неизвестных a_i, A_i, B_i . Критические значения параметра α внешней нагрузки получим, приравняв нулю определитель системы уравнений. При этом оказывается, что определитель распадается на два сомножителя. В связи с этим рассмотрим два случая.

1. Первый сомножитель равен нулю:

$$\xi C_1 C_1 + t_1^2 S_1 S_1 = 0. \quad (4.2)$$

В этом случае должны выполняться равенства

$$a_2 = a_3 = 0, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad B_2 = B_3 = 0.$$

Компонента w вектора смещения обращается в нуль.

2. Второй сомножитель равен нулю:

$$\begin{aligned} & \xi^2 [(\xi^2 C_1 S_3 - 4 t_1^2 S_1 C_3) c_1 c_3 + (\xi^2 S_1 C_3 - 4 t_3^2 C_1 S_3) t_1^2 s_1 s_3] + \\ & + \xi^2 x^2 (\xi^2 c_1 s_3 - 4 t_1^2 s_1 c_3) + \\ & + [\xi^2 (C_1 C_3 - 1) - 4 t_1^2 t_3^2 S_1 S_3] [(2 - \xi)^2 c_1 s_3 - 4 (1 - \xi)^2 t_1^2 s_1 c_3] + \\ & + [\xi^2 S_1 S_3 - 4 (C_1 C_3 - 1)] [(\xi - 2\xi)^2 t_1^2 s_1 c_3 - \xi^2 (1 - \xi)^2 c_1 s_3] = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mu}{\mu_1}, \quad t_i = \frac{r_i}{k}, \quad \xi = 1 + t_1^2, \quad s_i = \frac{\text{sh } r_i h}{t_i}, \\ c_i &= \text{ch } r_i h, \quad S_i = \frac{\text{sh } r_i H}{t_i}, \quad C_i = \text{ch } r_i H. \end{aligned}$$

При этом постоянные a_i, A_i, B_i должны обращаться в нуль.

Симметричной деформации соответствуют соотношения

$$a_i = 0, \quad A_i = -A_i, \quad B_i = B_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.4)$$

Удовлетворяя условиям (2.5), (2.7) и (2.8) и приравняв нулю определитель полученной системы уравнений, получим уравнение для определения критического значения параметра α внешней нагрузки. Как и в предыдущем случае, определитель распадается на два сомножителя, и следует рассмотреть два частных случая.

1. Первый сомножитель обращается в нуль

$$\xi C_1 S_1 + S_1 C_1 = 0, \quad (4.5)$$

тогда справедливы соотношения:

$$b_2 = b_3 = 0, \quad A_2 = A_3 = 0, \quad B_2 = B_3 = 0. \quad (4.6)$$

Соответствующее деформированное состояние характеризуется обращением в нуль компоненты w вектора смещений.

2. Приравнявая нулю второй сомножитель, получим

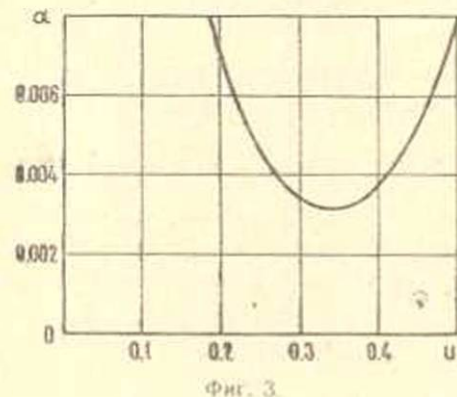
$$\begin{aligned} & \xi x^2 [t_3^2 s_1 s_2 (C_2^2 C_1 S_2 - 4 t_1^2 C_2 S_1) + c_1 c_2 (C_2^2 S_1 C_2 - 4 t_1^2 C_1 S_2)] + \\ & + \xi^2 x^2 (C_2^2 s_1 c_2 - 4 t_1^2 c_1 s_2) + \\ & + [C_2^2 (C_1 C_2 - 1) - 4 t_1^2 t_3^2 s_1 s_2] [(2 - \xi)^2 s_1 c_2 - 4 (1 - \xi)^2 t_3^2 c_1 s_2] + \\ & + [C_2^2 S_1 S_2 - 4 (C_1 C_2 - 1)] [(C_2 - 2\xi)^2 t_3^2 c_1 s_2 - C_2^2 (1 - \xi)^2 s_1 c_2] = 0. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Отметим, что физический смысл имеют только те критические значения параметра α , которые малы по сравнению с единицей. Это обусловлено тем, что в исходном напряженно-деформированном состоянии деформации имеют порядок $\frac{P}{E}$ или $\frac{q}{E}$, то есть порядок α , тогда как исходные уравнения получены в предположении, что эти деформации малы.

Следует также отметить, что предположение (2.1) и предположение о постоянстве коэффициента Пуассона ν можно снять. Это приведет лишь к тому, что выражения для корней характеристического уравнения r_i будут различными для среднего и крайних слоев и несколько усложнятся уравнения (4.4) и (4.7).

§ 5. Рассмотрим антисимметричную (изгибную) потерю устойчивости толстой трехслойной плиты с мягким средним слоем, квадратную в плане ($a = b = 10(h + H)$), $H = 0.1(h + H)$, $\nu = 0.3$; $\xi = 0.001$. Приближенный подход [3, 4] дает для α значение, равное 0.00492. Решение уравнения (4.4) дает значение $\alpha = 0.00497$.

Для плиты с жестким средним слоем ($a = b = 10(h + H)$, $H = 0.5(h + H)$, $\nu = 0.3$, $\xi = 0.1$) по теории [5] получаем $\alpha = 0.0599$. Точное значение оказывается равным $\alpha = 0.0631$.



Фиг. 3.

Результаты вычислений зависимости точного значения α от отношения $\frac{a}{m_1}$ полутолщины $(h + H)$ плиты к длине полутолщины выпукчивания $\frac{a}{m_1}$ нанесены на фиг.

($\nu = 0.4$, $\xi = 0.000119$). Минимальное значение оказывается равным $\alpha = 0.00330$. Приближенные методы [3, 4] дают $\alpha = 0.00273$. Приближенная теория К. М. Муштары [6]

дает значение $\alpha = 0.00320$. Критическое значение α , полученное в предположении, что крайние слои — пластины в смысле гипотез Кирхгофа-Лява, а средний слой — упругий континуум [6, 7], оказывается равным $\alpha = 0.00315$.

Վ. Ն. ՄՈՍՈՎԵՆԿՈ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՍԱՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ոչ դժային առաճգակնություն տեսության դժայնացված հավասարումների հիման վրա ստացված է եռաշերտ սաղի կայունության խնդրի ճշգրիտ լուծումը կողմնային կողերում նավթի տիպի եզրային պայմանների դեպքում: Դիտարկված մի քանի կոնկրետ խնդիրներում բերված է ճշգրիտ և հայտնի մոտավոր լուծումների արդյունքների համեմատությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.—М., 1948.
2. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
3. Reissner E. Finite deflection of sandwich plates. J. Aeronaut. Sci., 15, № 7, 1948.
4. Прусаков А. П. Основные уравнения изгиба и устойчивости трехслойных пластин с легким заполнителем. ПММ, 15, вып. 1, 1951.
5. Григорюк Э. И. Конечные прогибы трехслойных оболочек с жестким заполнителем. Известия АН СССР, ОН, № 1, 1958.
6. Муштарі Х. М. Об одном уточнении приближенной теории трехслойных пластин с заполнителем. Известия АН СССР, ОН, механика и машиностр., № 1, 1962.
7. Воронович А. П. Устойчивость обшивки с заполнителем при сжатии. Диссертация, 1948.

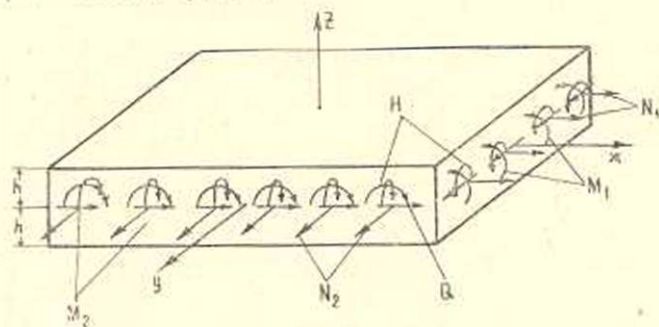
М. А. ЗАДЯН

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

В статье исследуются задачи о предельном состоянии прямоугольной плиты и толстостенной цилиндрической оболочки.

В рассматриваемых задачах материал полагается жестко-пластическим и подчиняется законам теории идеально-пластического течения с условием Губера-Мизеса [1—4]. Для решения этих задач использованы результаты, полученные в статьях [5—6].

§ 1. Совместный изгиб, растяжение и кручение прямоугольной плиты. Обычная теория пластического изгиба плит основана на гипотезе Кирхгофа-Лява [1, 2, 7] и др. Не пользуясь указанной гипотезой, рассмотрим предельное состояние прямоугольной плиты, вызванное изгибающими моментами M_1 , M_2 , растягивающими силами N_1 , N_2 , крутящим моментом H и касательными силами Q , приложенными на торцах плиты, фиг. 1.



Фиг. 1.

Принимая в решении, приведенном в [5], некоторые произвольные постоянные равными нулю, получим:

для компонентов напряжений —

$$\sigma_x = \frac{k(2\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \quad \sigma_y = \frac{k(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{k\gamma_{xy}}{\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma_{xy}^2}}, \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

где

$$\varepsilon_x = A_0 + A_1 z, \quad \varepsilon_y = B_0 + B_1 z, \quad \gamma_{xy} = C_0 + C_1 z; \quad (1.2)$$

для компонентов скорости перемещения —

$$\begin{aligned} u &= A_1 xz + C_1 yz + A_0 x + D_0 y, \\ v &= C_1 xz + B_1 yz + (2C_0 - D_0)x + B_0 y, \\ w &= -\frac{A_1}{2}x^2 - \frac{B_1}{2}y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2}z^2 - C_1 xy - (A_0 + B_0)z. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Как в этом, так и в следующем параграфе * точки — символы производных опущены. Так что $A_1, B_1, \dots$, будучи произвольными постоянными по отношению к x, y и z , могут зависеть от времени или от аналогичного параметра.

Принимая, например, $A_1 \neq 0$, компоненты напряжения можем представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k[2a_0 + b_0 + (2 + b_1)z]}{\sqrt{az^2 + 2\beta z + \gamma}}, & \sigma_y &= \frac{k[a_0 + 2b_0 + (1 + 2b_1)z]}{\sqrt{az^2 + 2\beta z + \gamma}}, \\ \tau_{xy} &= \frac{k(c_0 + c_1 z)}{\sqrt{az^2 + 2\beta z + \gamma}}, & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где обозначены $A_0 = a_0 A_1, B_0 = b_0 A_1, B_1 = b_1 A_1, C_0 = c_0 A_1, C_1 = c_1 A_1$,

$$x = 1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2,$$

$$\beta = a_0 + b_0 b_1 + c_0 c_1 + \frac{1}{2}(a_0 b_1 + b_0), \quad (1.5)$$

$$\gamma = a_0^2 + a_0 b_0 + b_0^2 + c_0^2.$$

Имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \sigma_x dz &= N_1, & \int_{-h}^h \sigma_y dz &= N_2, & \int_{-h}^h \tau_{xy} dz &= Q, \\ \int_{-h}^h \sigma_x z dz &= M_1, & \int_{-h}^h \sigma_y z dz &= M_2, & \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz &= H. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Подставляя σ_x, σ_y и τ_{xy} из (1.4) в (1.6) и вводя обозначения

$$I_i = \int_{-h}^h \frac{z^i dz}{\sqrt{az^2 + 2\beta z + \gamma}}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (1.7)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{k} &= (2a_0 + b_0)I_0 + (2 + b_1)I_1, \\ \frac{N_2}{k} &= (a_0 + 2b_0)I_0 + (1 + 2b_1)I_1, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{M_1}{k} &= (2a_0 + b_0) I_1 + (2 + b_1) I_2, \\ \frac{M_2}{k} &= (a_0 + 2b_0) I_1 + (1 + 2b_1) I_2.\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\frac{Q}{k} = c_0 I_0 + c_1 I_1, \quad \frac{H}{k} = c_0 I_1 + c_1 I_2. \quad (1.10)$$

Полученная система из шести нелинейных алгебраических уравнений содержит пять неизвестных постоянных. Шестое уравнение устанавливает соотношение между внешними силами, при котором наступает предельное состояние плиты. Из этих неизвестных постоянных три можно легко исключить. Определяя значения I_0 и I_1 из (1.8), а также I_1 и I_2 из (1.9), получим

$$I_0 = \frac{2N_2 - N_1 - b_1(2N_1 - N_2)}{3k(b_0 - a_0 b_1)}, \quad (1.11)$$

$$I_1 = \frac{b_0(2N_1 - N_2) - a_0(2N_2 - N_1)}{3k(b_0 - a_0 b_1)}, \quad (1.12)$$

$$I_1 = \frac{2M_2 - M_1 - b_1(2M_1 - M_2)}{3k(b_0 - a_0 b_1)}, \quad (1.13)$$

$$I_2 = \frac{b_0(2M_1 - M_2) - a_0(2M_2 - M_1)}{3k(b_0 - a_0 b_1)}, \quad (1.14)$$

причем предположено $b_0 - a_0 b_1 \neq 0$. Приравнявая правые части (1.12) и (1.13), будем иметь

$$b_1 = \frac{2M_2 - M_1}{2M_1 - M_2} + \frac{2N_2 - N_1}{2N_1 - N_2} a_0 - \frac{2N_1 - N_2}{2M_1 - M_2} b_0. \quad (1.15)$$

Подставляя значение b_1 из (1.15) в (1.11), (1.12) и (1.14), находим

$$I_0 = \frac{3(M_1 N_2 - M_2 N_1) + (2N_1 - N_2)[N_1(a_0 + 2b_0) - N_2(2a_0 + b_0)]}{3k[(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}, \quad (1.16)$$

$$I_1 = \frac{(2M_1 - M_2)[N_1(a_0 + 2b_0) - N_2(2a_0 + b_0)]}{3k[(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}, \quad (1.17)$$

$$I_2 = \frac{(2M_2 - M_1)[M_1(a_0 + 2b_0) - M_2(2a_0 + b_0)]}{3k[(M_1 + a_0 N_1)(a_0 + 2b_0) - (M_2 + a_0 N_2)(2a_0 + b_0)]}. \quad (1.18)$$

В выражения для I_0 , I_1 и I_2 входят две произвольные постоянные a_0 и b_0 , поэтому выражение для b_1 , определяемое по (1.15), а также следующие из (1.10) выражения для c_0 и c_1 :

$$c_0 = \frac{H I_1 - Q I_2}{k(I_1^2 - I_0 I_2)}, \quad c_1 = -\frac{H I_0 - Q I_1}{k(I_1^2 - I_0 I_2)}. \quad (1.19)$$

также будут зависеть только от a_0 и b_0 .

Вычисляя значения интегралов (1.7), получим

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{\sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} + \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}{\sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma} - \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}, \quad (1.20)$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} - \sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma}}{a} -$$

$$- \frac{\beta}{a\sqrt{x}} \ln \frac{\sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} + \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}{\sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma} - \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}, \quad (1.21)$$

$$I_2 = \frac{ah - 3\beta}{2a^2} \sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} + \frac{ah + 3\beta}{2a^2} \sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma} +$$

$$+ \frac{3\beta^2 - ah}{2a^2 \sqrt{x}} \ln \frac{\sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} + \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}{\sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma} - \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}. \quad (1.22)$$

Далее, делая для упрощения некоторые преобразования, будем иметь

$$\frac{\sqrt{ah^2 + 2\beta h + \gamma} + \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}}{\sqrt{ah^2 - 2\beta h + \gamma} - \sqrt{x}h + \frac{\beta}{\sqrt{x}}} = e^{\gamma_0 I}, \quad (1.23)$$

$$[(\gamma + \beta h) I_0 + (3\beta + ah) I_1 + 2aI_2]^2 +$$

$$+ [(\gamma - \beta h) I_0 + (3\beta - ah) I_1 + 2aI_2]^2 = 8h^2 (ah^2 + \gamma), \quad (1.24)$$

$$[(\gamma + \beta h) I_0 + (3\beta + ah) I_1 + 2aI_2]^2 -$$

$$- [(\gamma - \beta h) I_0 + (3\beta - ah) I_1 + 2aI_2]^2 = 16h^2 \beta. \quad (1.25)$$

Два уравнения из системы (1.23)–(1.25), где I_0 , I_1 , I_2 даются формулами (1.16)–(1.18), определяют неизвестные постоянные a_0 и b_0 , а третье уравнение устанавливает соотношение между внешними силами.

Считая, что значения a_0 и b_0 тем или иным приближенным способом определены, напомним выражения компонентов скорости перемещения (1.3) в виде

$$\frac{u}{A_1} = xz + c_1 yz + a_0 x + d_0 y,$$

$$\frac{v}{A_1} = c_1 xz + b_1 yz + (2c_0 - d_0) x + b_0 y, \quad (1.26)$$

$$-\frac{2w}{A_1} = x^2 + b_1 y^2 + (1 + b_1) z^2 + 2c_1 xy + 2(a_0 + b_0)z.$$

Очевидно, что для определения A_1 и d_0 требуются данные относительно скоростей перемещений.

Рассмотрим теперь более простой случай, когда толстая прямоугольная плита подвергается только изгибу и кручению. Положим, что на торцах плиты соответственно приложены нормальные напряжения $x p_1$, $x p_2$ и касательные напряжения $x q$ (фиг. 2), где $x = \text{sign } z$. Тогда, полагая в (1.4) $a_0 = b_0 = c_0 = 0$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{xk(2 + b_1)}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}}, & \sigma_y &= \frac{xk(1 + 2b_1)}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}}, \\ \tau_{xy} &= \frac{xkc_1}{\sqrt{1 + b_1 + b_1^2 + c_1^2}}, & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Определяя неизвестные b_1 и c_1 из краевых условий

$$b_1 = \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2}, \quad c_1 = \frac{3q}{2p_1 - p_2}, \quad (1.28)$$

причем $2p_1 - p_2 \neq 0$, поскольку $A_1 \neq 0$, находим компоненты напряжения в плите

$$\begin{aligned} \sigma_x &= x p_1, & \sigma_y &= x p_2, & \tau_{xy} &= x q, \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

и зависимость между p_1 , p_2 и q

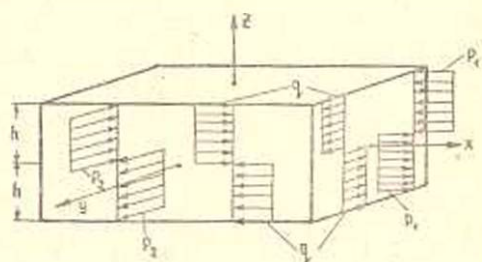
$$p_1^2 - p_1 p_2 + p_2^2 + 3q^2 = 3k^2. \quad (1.30)$$

Компоненты скорости перемещений в этом случае будут

$$\begin{aligned} \frac{u}{A_1} &= xz + \frac{3q}{2p_1 - p_2} yz + d_0 y, \\ \frac{v}{A_1} &= \frac{3q}{2p_1 - p_2} xz + \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2} yz - d_0 x, \\ -\frac{2w}{A_1} &= x^2 + \frac{2p_2 - p_1}{2p_1 - p_2} y^2 + \frac{p_1 + p_2}{2p_1 - p_2} z^2 + \frac{3q}{2p_1 - p_2} xy. \end{aligned} \quad (1.31)$$

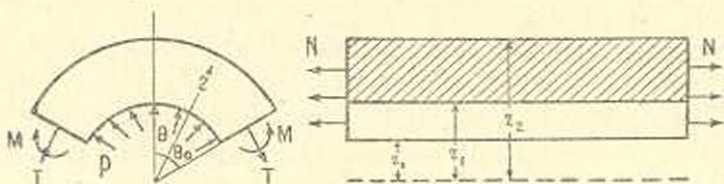
На фиг. 2 показан тот случай, когда p_1 и p_2 имеют одинаковые знаки, однако, полученные формулы верны и для $p_1 p_2 < 0$.

§ 2. Об одной задаче предельного состояния толстостенной цилиндрической оболочки. Пусть толстостенная цилиндрическая оболочка из несжимаемого идеально жестко-пластического материала находится под совместным действием приложенных на боковых сече-



Фиг. 2

ниях $\theta = \pm \theta_0$ изгибающих моментов и растягивающих сил с интенсивностями M и T , а также внутреннего давления P и продольных сил $2N\theta_0$, действующих на концевых сечениях $z = \pm l$ (фиг. 3). При этом, очевидно, $T = Pr_1$.



Фиг. 3.

Аналогичная плоская задача, когда отсутствуют продольные деформации, исследована Р. Хиллом [3].

Для решения поставленной задачи используем выражения компонентов напряжения и скорости перемещения, полученные в [6]. Принимая в этих выражениях некоторые постоянные равными нулю, будем иметь

$$\tau_r = -D + \int_{r_1}^r \frac{k(2\varepsilon_0 + \varepsilon_z)}{V \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2} \frac{dr}{r}, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_r + \frac{k(2\varepsilon_0 + \varepsilon_z)}{V \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2}, \quad \varepsilon_z = \sigma_r + \frac{k(\varepsilon_0 + 2\varepsilon_z)}{V \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_z + \varepsilon_z^2}, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_0 = A - \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_z = B, \quad (2.2)$$

$$u = -(A+B)r - \frac{C}{r}, \quad v = (2A+B)r\theta, \quad w = Bz. \quad (2.3)$$

Принимая $C \neq 0$ и вводя обозначения $A = aC$, $B = bC$,

$$\alpha = a^2 + ab + b^2, \quad \beta = a + \frac{1}{2}b, \quad (2.4)$$

где a и b — новые произвольные постоянные, выражения (2.1)–(2.3) можно переписать в следующем виде:

$$\tau_r = -D - \int_{r_1}^r \frac{2k(1 - \beta r^2)}{V \alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1} \frac{dr}{r}, \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0,$$

$$\varepsilon_0 = \sigma_r - \frac{2k(1 - \beta r^2)}{V \alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}, \quad \varepsilon_z = \sigma_r - \frac{k[1 - (a + b)r^2]}{V \alpha r^4 - 2\beta r^2 + 1}, \quad (2.5)$$

$$-\frac{u}{C} = (a+b)r + \frac{1}{r}, \quad \frac{v}{C} = (2a+b)r\theta, \quad \frac{w}{C} = bz. \quad (2.6)$$

Используя условие на внутренней поверхности $r = r_1$, получим $D = P$. Тогда, вычисляя интеграл для выражения σ_r , будем иметь

$$\begin{aligned} z_r = -P - k \ln \frac{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1}{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1} \frac{r^2}{r_1^2} - \\ - \frac{k\beta}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{a} r_1^2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}}{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{a} r^2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из условия на внешней поверхности $z_r(r_2) = 0$ находим

$$\frac{P}{k} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{2(\beta r^2 - 1)}{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r^2 + 1}} \frac{dr}{r} \quad (2.8)$$

Вводя обозначения

$$I_0 = \int_{r_1^2}^{r_2^2} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 - 2\beta x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_2^2 + 1} + \sqrt{a} r_2^2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}}{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{a} r_1^2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}}, \quad (2.9)$$

$$I_2 = \int_{r_1^2}^{r_2^2} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 - 2\beta x + a}} = \ln \frac{\sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1}{\sqrt{ax_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \beta r_2^2 + 1} \frac{r_2^2}{r_1^2}, \quad (2.10)$$

получим

$$\frac{P}{k} = \beta I_0 - I_2. \quad (2.11)$$

Подставляя выражения σ_θ и σ_z из (2.5) в соотношения

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_\theta r dr = M, \quad \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r dr = N \quad (2.12)$$

и используя в ходе преобразования двухкратных интегралов равенство (2.8), находим

$$\begin{aligned} \frac{2M}{k} &= (\beta r_1^2 - 1) I_0 + \beta I_1 - r_1^2 I_2, \\ \frac{2N}{k} &= r_1^2 (\beta I_0 - I_2) + \frac{3}{2} \beta I_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где введено новое обозначение

$$I_1 = \int_{r_1^2}^{r_2^2} \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 - 2\beta x + 1}} = \frac{\sqrt{ax_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \sqrt{ax_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1}}{a} -$$

$$-\frac{\beta}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{ar_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} + \sqrt{a} r_2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}}{\sqrt{ar_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{a} r_1 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}} \quad (2.14)$$

Систему уравнений (2.11) и (2.13) преобразованием можно привести к более простым выражениям

$$\begin{aligned} \sqrt{ar_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \sqrt{ar_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} &= \frac{2a(2N - Pr_1^2)}{3kb} + \\ &+ \frac{\beta}{2k} \left\{ 2M - Pr_1^2 - \frac{2\beta(2N - Pr_1^2)}{3b} \right\}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{ar_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} - \beta r_1^2 + 1}{\sqrt{ar_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} - \beta r_2^2 + 1} \frac{r_2^2}{r_1^2} &= \\ = \exp \left\{ \frac{2\beta^2(2N - Pr_1^2)}{3kb} - \frac{\beta(2M - Pr_1^2)}{k} - \frac{P}{k} \right\}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{\sqrt{ar_2^4 - 2\beta r_2^2 + 1} + \sqrt{a} r_2 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}}{\sqrt{ar_1^4 - 2\beta r_1^2 + 1} + \sqrt{a} r_1 - \frac{\beta}{\sqrt{a}}} = \exp \left\{ \frac{2\beta(2N - Pr_1^2)}{3kb} - \frac{2M - Pr_1^2}{k} \right\}. \quad (2.17)$$

Таким образом, получена система из трех алгебраических уравнений (2.15)–(2.17), содержащих два неизвестных a и b . Третье из этих уравнений дает соотношение между P , M и N , при котором наступает предельное состояние оболочки.

Отметим, что условие

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_\theta dr = T, \quad (2.18)$$

как нетрудно проверить, удовлетворяется тождественно.

В случае отсутствия продольных деформаций появляется поверхность разрыва. Принимая в выражениях (2.5) $b = 0$, получим

$$\sigma_r = -D \pm 2k \ln r, \quad \sigma_\theta = \sigma_r \pm 2k, \quad \sigma_z = \sigma_r \pm k. \quad (2.19)$$

Принимая D различным на разных сторонах от поверхности разрыва $r = r_0$ и удовлетворяя условиям $\sigma_r(r_1) = -P$, $\sigma_r(r_2) = 0$, $\sigma_r(r_0 - 0) = \sigma_r(r_0 + 0)$, находим формулы

$$\sigma_r = -2k \ln \frac{r_2}{r}, \quad \sigma_\theta = 2k \left(1 - \ln \frac{r_2}{r} \right), \quad r_0 \leq r \leq r_2, \quad (2.20)$$

$$\sigma_r = -P - 2k \ln \frac{r}{r_1}, \quad \sigma_\theta = -P + 2k \left(1 + \ln \frac{r}{r_1} \right), \quad r_1 \leq r \leq r_0,$$

$$r_0 = \sqrt{r_1 r_2} e^{-\frac{\rho}{4k}},$$

полученные Р. Хиллом [3]. Как в первом, так и в этом параграфе пренебрегается изменение геометрических размеров тела в ходе деформации.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 VI 1964

Մ. Ա. ԶԱԿԱՅԱՆ

ԻԳԵԱԿԱՆ ՓԼԱՍՏԻԿՈՒԹՅԱՆ ՏՅՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԿՆԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ ֆ ո ֆ ու լ լ

Նախորդ հոդվածներում ստացված պլաստիկության անսովյան հավասարումների մասնավոր լուծումների հիման վրա կառուցվում են երկու նոր խնդիրների լուծումներ: Առաջին պարագրաֆում ասումնաարվում է ուղղանկյուն առի սահմանային վիճակը, երբ նրա վրա ազդում են ձգող ուժեր, ծռող և ուրրող մոմենտներ: Ինչպես առաջին, այնպես էլ երկրորդ պարագրաֆում ասումնաարվող խնդիրներում ընդունվում է, որ նյութը անսեղմելի է և ենթարկվում է Հուբեր-Միլերի պլաստիկության պայմանին: Երկրորդ պարագրաֆում դիտարկվում է դանային հաստ թաղանթի համառեղ ծռման և ձգման խնդիրը (գծ. 3):

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
4. Прагер В. и Ходжс Ф. Г. Теория идеально-пластических тел. ИЛ, М., 1956.
5. Задоян М. А. Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. ДАН СССР, 156, № 1, 1964.
6. Задоян М. А. О некотором частном решении уравнений теории идеальной пластичности в цилиндрических координатах. ДАН АрмССР, 39, № 5, 1964.
7. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. КАРАПЕТЯН

ВЛИЯНИЕ ДЛИТЕЛЬНОГО СЖАТИЯ НА ПРОЧНОСТЬ
И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ БЕТОНА

Исследованию влияния длительного нагружения на прочность и деформативность бетона посвящены работы А. В. Саталкина и Б. А. Сенченко [8], Р. Лермита [7], Н. И. Катина [6], автора настоящей работы [5] и других.

Исследования автора [5] показали, что длительное кручение бетона, когда интенсивность напряжения в момент нагружения не превышает 0,6—0,7, практически не оказывает влияния на конечную прочность бетона на кручение. При более высокой интенсивности напряжения длительное кручение приводит к некоторому понижению прочности бетона. Так, например, при интенсивности напряжения 0,9 понижение прочности составляет примерно 20%.

Длительное кручение качественно и количественно влияет и на деформативность бетона. Когда в момент приложения длительной нагрузки интенсивность напряжения не превышает 0,75, это приводит к уменьшению деформаций кручения бетона, а при более высокой интенсивности напряжения имеет место обратное явление.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния длительного обжатия на прочность и деформативность бетона при сжатии в зависимости от интенсивности напряжения и возраста бетона к моменту длительного нагружения.

§ 1. Методика исследования

В работе [4] нами были приведены результаты исследования линейной и нелинейной ползучести бетона при сжатии с учетом фактора старения бетона. В работу вошли результаты большой серии опытов, в которых наибольшая длительность нагружения для образцов, нагруженных в молодом возрасте ($\tau=7$ дней), тогда составляла 285 дней. Однако, после этого все образцы продолжали оставаться под нагрузкой и велись наблюдения за их дальнейшими деформациями. В дальнейшем, помимо образцов, нагруженных длительной нагрузкой в возрастах 7, 14, 29, 95 и 185 дней, были нагружены образцы в годичном возрасте.

Опыты были поставлены над тяжелым бетоном, мелким заполнителем которого являлся кварцевый песок, а крупным заполнителем — ба-

зальтовый щебень. В качестве вяжущего был применен портландцемент марки 400. Состав бетона приведен в табл. 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м ³ в кг				Объемный вес бетона в месячном возрасте в кг/м ³
	цемент	песок	щебень	вода	
1:4, 70:3,53	230	1001	811	187	2230

Опыты были поставлены на цилиндрических образцах диаметром 10 см, высотой 60 см. Образцы бетонировались в металлических разборных формах. Приготовление бетона производилось вручную, а уплотнение — на виброплощадке при продолжительности вибрации 15 секунд. Образцы освобождались от форм через одни сутки и далее хранились в помещении, где $T=20\pm 5^{\circ}\text{C}$, а относительная влажность $P=80\pm 10\%$.

Всего было приготовлено 5 замесов бетона и изготовлено 250 цилиндрических образцов и соответствующее количество кубиков размерами ребер 10 см.

Количество длительно нагруженных образцов, их возрасты (τ), напряжения и относительные напряжения в момент длительного нагружения приведены в табл. 2. Одновременно приводятся и прочностные характеристики бетона в различных возрастах.

Таблица 2

Данные о нагруженных образцах

τ в днях	R_k в кг/см ²	$R_{\text{н}}$ в кг/см ²	$\frac{\sigma}{R_{\text{н}}}$	σ в кг/см ²	Количество
1	2	3	4	5	6
7	86	41,2	0,25	10,3	2
			0,50	20,6	3
			0,60	24,7	3
			0,75	30,9	3
			0,90	37,1	4
			0,95	39,1	1
14	105	52,9	0,25	13,2	2
			0,50	26,4	3
			0,60	31,7	3
			0,75	39,7	3
			0,90	47,6	3
			0,95	50,3	1
29	132	64,3	0,25	16,1	3
			0,50	32,2	3
			0,60	38,6	3
			0,75	48,2	3
			0,90	57,9	3
			0,95	61,1	3

1	2	3	4	5	6
95	143	74,9	0,25	18,7	3
			0,50	37,4	3
			0,60	44,9	3
			0,75	56,1	3
			0,90	67,4	3
185	141	78,3	0,25	19,6	3
			0,50	39,2	3
			0,60	47,0	3
			0,75	58,7	3
			0,90	70,5	4
			0,95	74,4	2
365	161	86,0	0,25	21,5	3
			0,50	43,0	3
			0,60	51,6	3
			0,75	64,5	3

После разгрузки образцов из-под длительной нагрузки и наблюдений за восстановлением деформаций ползучести все образцы были испытаны под кратковременной нагрузкой с целью изучения влияния длительного сжатия на цилиндрическую прочность и деформативность бетона. Одновременно были испытаны и образцы, которые не находились под длительной нагрузкой, а были предназначены для определения усадочных деформаций.

Образцы, нагруженные в возрасте 185 дней, были разгружены по частям через 571 и 782 дней.

При испытании цилиндрических образцов до разрушения нагрузка повышалась ступенями и после каждой ступени брались отсчеты по приборам, измеряющим продольные деформации. Под каждой ступенью нагрузки образец выдерживался лишь на время, необходимое для взятия отсчетов по приборам, измеряющим деформации.

§ 2. Влияние длительного сжатия на цилиндрическую прочность бетона

Результаты испытания цилиндрических образцов приведены в табл. 3.

В табл. 3 для каждого возраста бетона к моменту длительного нагружения (τ) и относительного напряжения $\left(\frac{\tau}{R_n}\right)$ приведены как цилиндрическая прочность бетона, так и ее отношение к цилиндрической прочности соответствующих образцов, которые не были под длительной нагрузкой.

Рассмотрение данных таблицы показывает, что независимо от τ цилиндрическая прочность бетона с увеличением относительного напряжения в момент длительного нагружения повышается. Однако, в большин-

стве случаев это повышение не превышает 10% и только в отдельных случаях доходит до 19%. Вместе с этим в некоторых случаях прочность длительно обжатых образцов получилась меньше, чем усадочных образцов. Понижение R_d наблюдается у тех образцов, которые испытывали малые относительные напряжения, что никак нельзя приписать влиянию длительного обжатия.

Таблица 3

Влияние длительного сжатия на цилиндрическую прочность бетона

Возраст бетона к моменту длительного нагружения (τ) в днях	Возраст бетона к моменту испытания (τ_1) в днях	Продолжительность приложения нагрузки (t) в днях	Цилиндрическая прочность бетона (R_d) в кг/см ² при относительном напряжении в момент длительного нагружения						
			0	0,25	0,50	0,60	0,75	0,90	0,95
7	963	520	$\frac{105}{1,00}$	$\frac{99}{0,94}$	$\frac{106}{1,01}$	$\frac{102}{0,97}$	$\frac{113}{1,07}$	$\frac{112}{1,06}$	$\frac{115}{1,09}$
14	960	518	$\frac{107}{1,00}$	$\frac{108}{1,01}$	$\frac{95}{0,89}$	$\frac{106}{0,99}$	$\frac{106}{0,99}$	$\frac{117}{1,09}$	$\frac{114}{1,06}$
23	966	505	$\frac{107}{1,00}$	$\frac{101}{0,94}$	$\frac{104}{0,97}$	$\frac{105}{0,98}$	$\frac{110}{1,03}$	$\frac{109}{1,02}$	$\frac{108}{1,01}$
95	965	447	$\frac{106}{1,00}$	$\frac{123}{1,16}$	$\frac{122}{1,15}$	$\frac{122}{1,15}$	$\frac{125}{1,18}$	$\frac{127}{1,19}$	—
185	969	571	$\frac{106}{1,00}$	$\frac{119}{1,12}$	$\frac{112}{1,05}$	$\frac{116}{1,09}$	$\frac{120}{1,13}$	$\frac{117}{1,10}$	$\frac{122}{1,15}$
185	1173	782	$\frac{104}{1,00}$	$\frac{112}{1,07}$	$\frac{112}{1,07}$	$\frac{116}{1,11}$	$\frac{115}{1,10}$	$\frac{118}{1,13}$	—
365	1123	539	$\frac{109}{1,00}$	—	$\frac{106}{0,97}$	$\frac{117}{1,07}$	$\frac{118}{1,08}$	—	—

Наблюдаемое повышение и понижение цилиндрической прочности бетона находится в пределах точности опытов, так как необходимо учесть, что испытывались образцы, отношение высоты которых к диаметру составляло 6.

В итоге рассмотрения результатов изучения влияния длительного сжатия на прочность бетона можно сделать тот важный вывод, что длительное сжатие бетона даже напряжением, близким к пределу прочности, не приводит к понижению прочности бетона. Причем сказанное относится даже и к тому случаю, когда бетон нагружен в старом возрасте.

В наших опытах ни один образец, даже нагруженный в старом возрасте высоким относительным напряжением, не разрушился. Это позво-

дует отметить, что длительная прочность бетона при сжатии в большой мере зависит от возраста бетона к моменту длительного нагружения и от интенсивности нарастания прочности бетона во времени.

Как уже указывалось, образцы, которые были нагружены длительной нагрузкой в возрасте 185 дней, были разгружены по частям через 571 и 782 дней. Как видно из табл. 3, более длительное пребывание образцов под нагрузкой практически не оказало влияния на цилиндрическую прочность бетона.

§ 3. Влияние длительного сжатия на деформативность бетона

На фиг. 1 и 2 приведены кривые деформаций цилиндрических бетонных образцов после их разгрузки и испытания до разрушения. Одновременно приводятся и кривые деформаций усадочных образцов. На указанных фигурах каждый график соответствует одному возрасту бетона к моменту длительного нагружения (τ). Рассматривая график для $\tau = 7$ дней, видим, что все кривые вогнутостью обращены к оси деформаций. Причем чем больше относительное напряжение в момент длительного нагружения, тем выше расположена кривая.

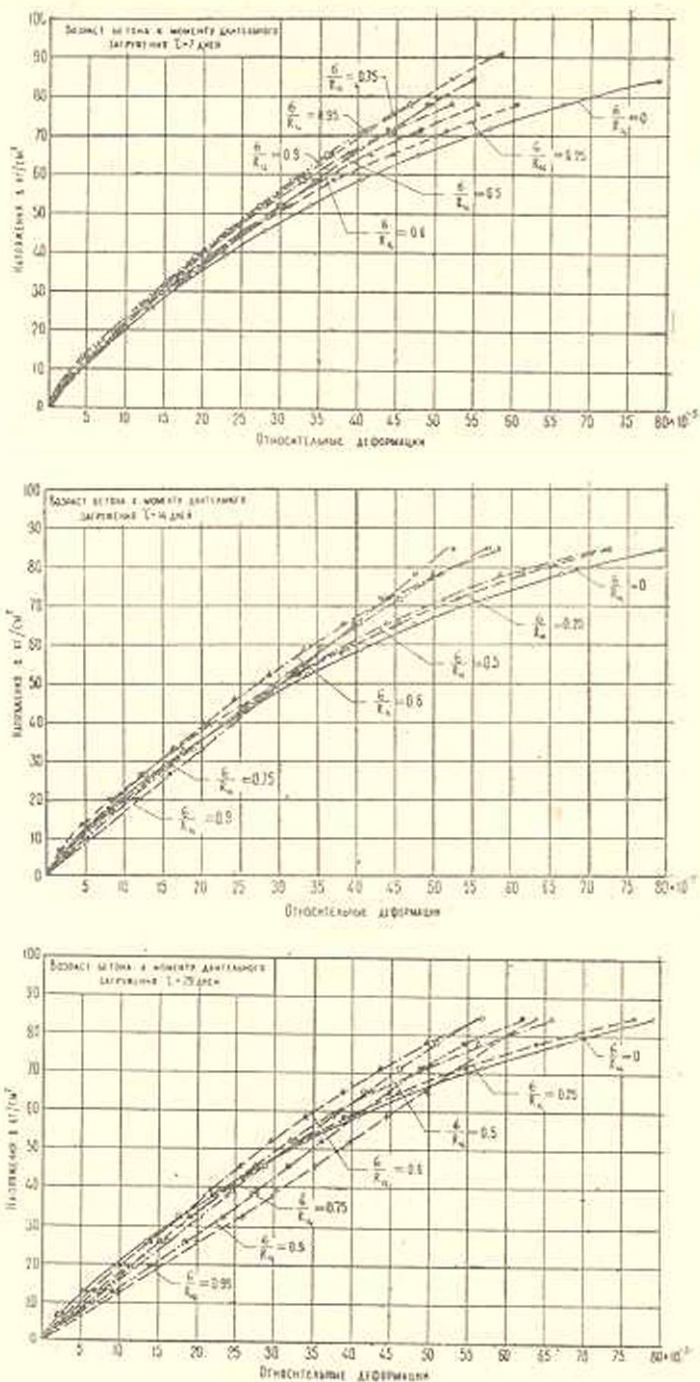
Качественно аналогичная закономерность деформаций имеет место и для тех образцов, которые соответствуют $\tau = 14$ дней. Разница заключается лишь в том, что в этом случае зависимость между напряжениями и деформациями для образцов, нагруженных относительным напряжением 0,9, уже выражается линейной зависимостью. При этом нижний участок прямой деформаций проходит ниже всех остальных кривых деформаций, а затем с повышением напряжения пересекает все кривые и далее занимает положение выше всех.

Дальнейшее увеличение возраста бетона к моменту нагружения (τ) приводит к еще большему уменьшению кривизны кривых деформаций и даже к тому, что при $\tau = 29$ дней кривые деформаций образцов, соответствующие относительным напряжениям 0,75 и 0,9, изменяют свою кривизну и вогнутостью обращаются к оси напряжений. При этом нижние участки кривых тем больше отходят от кривой деформаций усадочных образцов к оси напряжений, чем больше относительное напряжение.

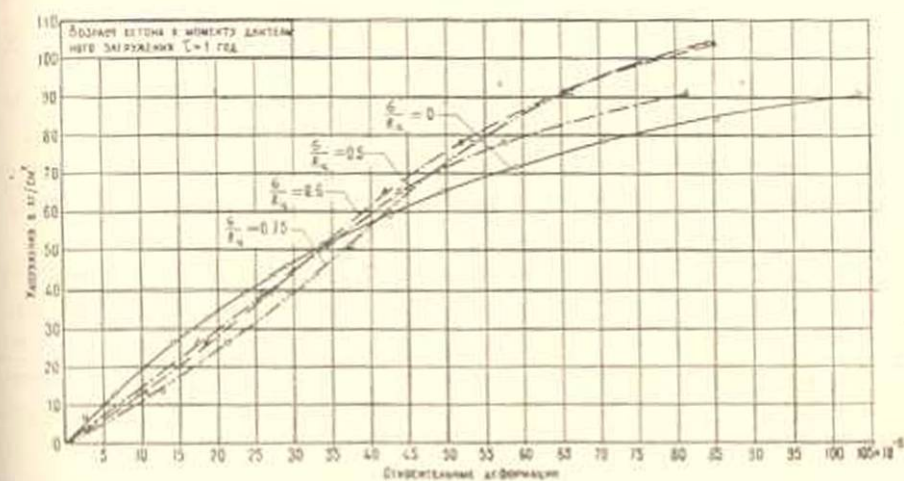
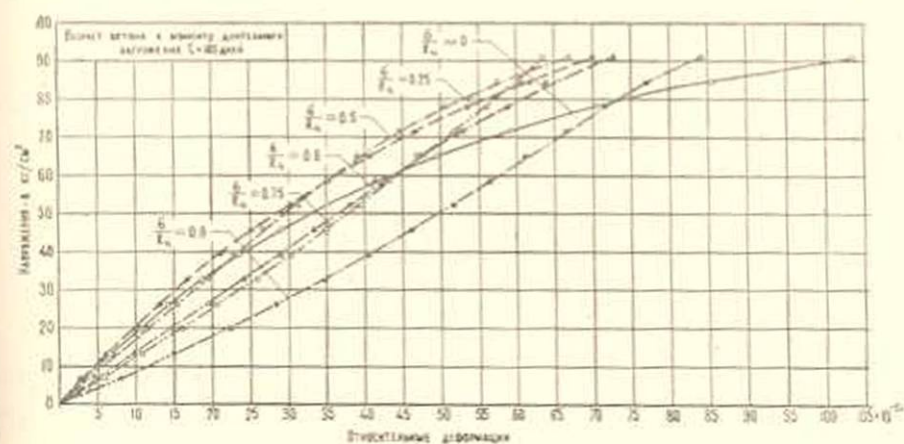
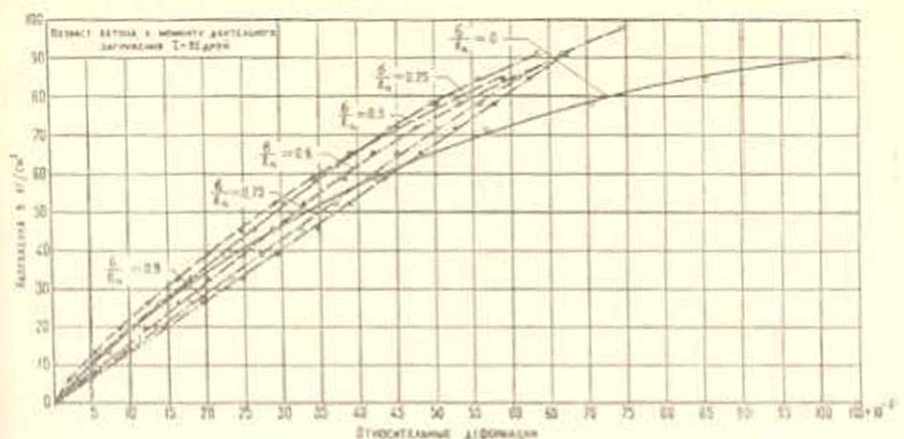
Качественно такая же закономерность деформаций имеет место и для тех образцов, которые были нагружены в более поздние возрасты. Разница заключается лишь в том, что с увеличением τ расхожимость кривых деформаций, соответствующих разным $\frac{\sigma}{R_u}$, увеличивается. Одно-

временно увеличивается и кривизна тех кривых, которые до определенных напряжений своей вогнутостью обращены к оси напряжений.

Следует также отметить, что когда начальная зависимость между напряжениями и деформациями бетона выражается прямой или кривой, вогнутостью обращенной к оси напряжений, то такая зависимость сохраняется до определенных напряжений, после чего деформации начинают расти быстрее, чем напряжения, и начальные закономерности деформаций изменяются. На последнем этапе нагружения зависимости между



Фиг. 1.



Фиг. 2.

напряжениями и деформациями по характеру опять представляют кривые, однако, уже вогнутостью обращенные к оси деформаций.

Таким образом, как видим, длительное сжатие хотя и не оказывает заметного влияния на прочность бетона, однако ее влияние на деформативность весьма существенно. Длительное сжатие приводит не только к количественным изменениям деформаций бетона, но и к существенным качественным изменениям закономерности деформаций бетона.

На фиг. 3 и 4 приведены те же кривые деформаций бетона, однако в этом случае каждый график соответствует одному значению относительного напряжения, но разным возрастам бетона к моменту длительного нагружения.

По графику, соответствующему относительному напряжению 0,25, как общая закономерность, следует, что чем старше бетон к моменту длительного нагружения, тем меньше деформации. Начиная с относительного напряжения 0,5, эта закономерность изменяется, и с повышением относительного напряжения деформации бетона возрастают.

Как видно из фиг. 3 и 4, с увеличением относительного напряжения и возраста бетона к моменту длительного нагружения изменяется и характер кривых деформаций.

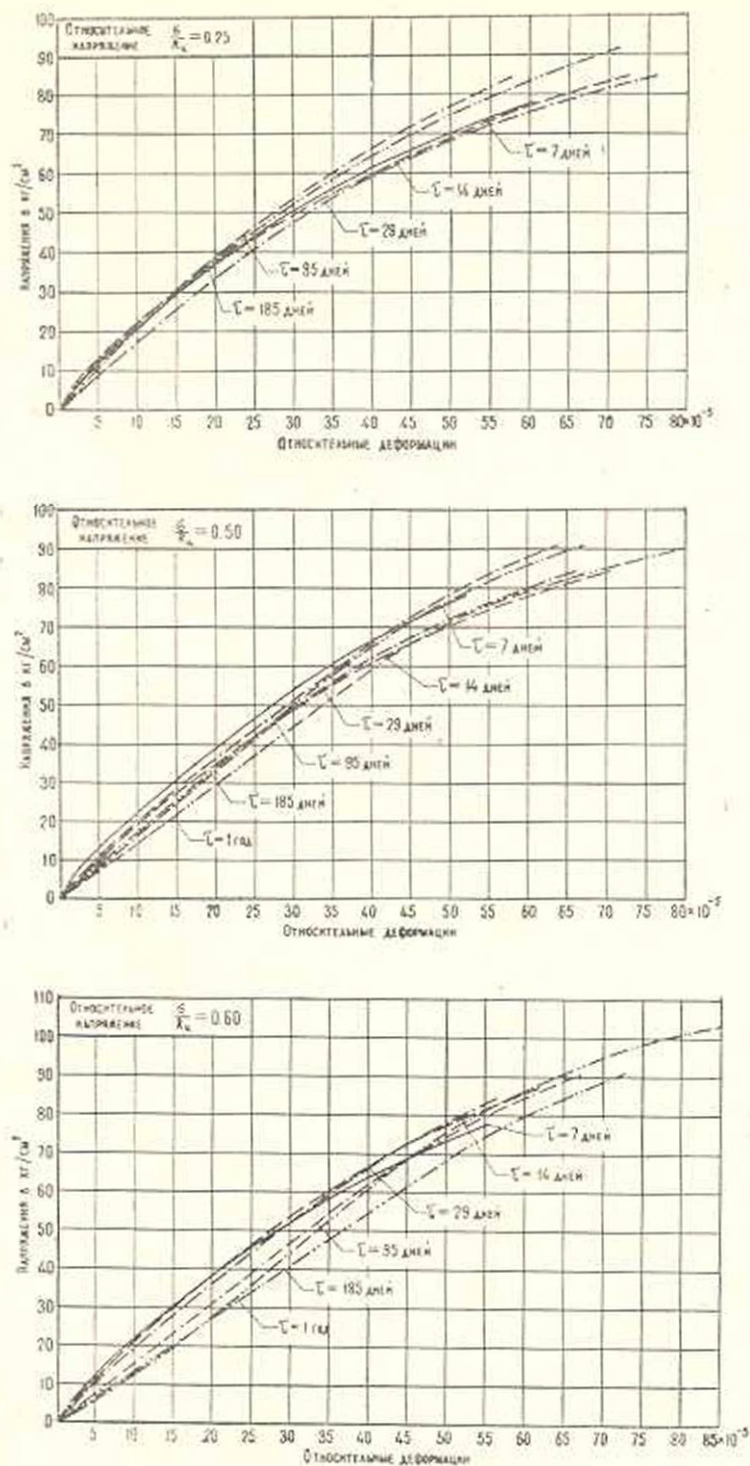
§ 4. Причины влияния длительного сжатия на деформативность бетона

В § 3 нами были рассмотрены результаты исследования длительного сжатия на деформативность бетона. При этом было установлено, что длительное сжатие в зависимости от интенсивности напряжения и возраста бетона к моменту длительного обжатия может привести к следующим трем характерным закономерностям деформаций бетона.

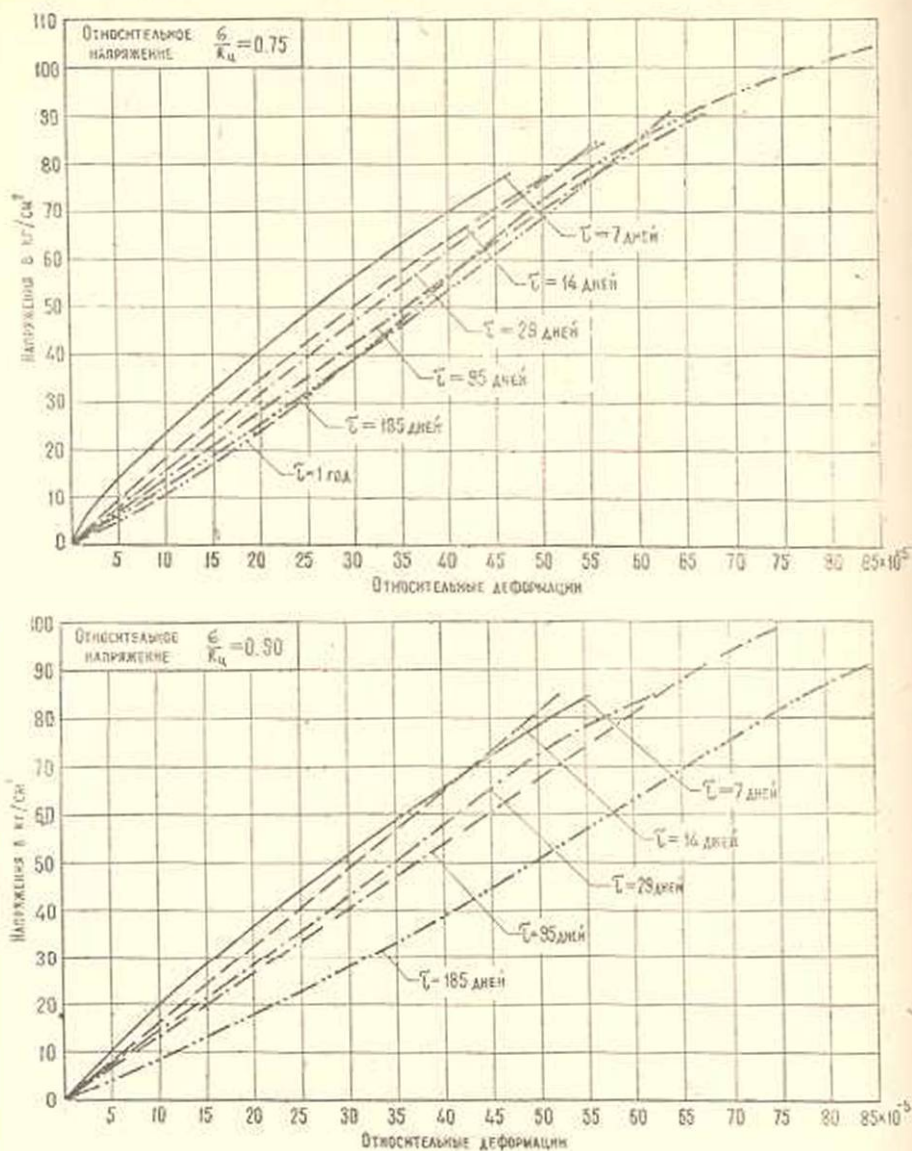
1. Кривая зависимости между напряжениями и деформациями вогнутостью обращена к оси деформаций;
2. Зависимость между напряжениями и деформациями до определенного напряжения линейна, а выше выражается кривой, вогнутостью обращенной к оси деформаций;
3. Кривая зависимости между напряжениями и деформациями до определенного напряжения вогнутостью обращена к оси напряжений, а выше вогнутостью обращена к оси деформаций.

Как известно, с момента длительного нагружения в бетоне развиваются деформации ползучести, которые в зависимости от различных факторов могут в несколько раз превосходить соответствующие упруго-мгновенные деформации. Поэтому влияние длительного сжатия на деформативность бетона, очевидно, тесно связано с закономерностями ползучести бетона.

Многочисленными опытами установлено, что до определенных напряжений имеет место линейная ползучесть, а выше — нелинейная ползучесть.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Наши исследования [3] показали, что напряжение, при котором кончается линейная область и начинается нелинейная область ползучести бетона, в большой мере зависит от возраста бетона к моменту длительного нагружения. При этом чем моложе бетон, тем больше то напряжение, при котором кончается линейная и начинается нелинейная область ползучести. Молодой бетон, находясь под длительной сжимающей нагрузкой, в начальный период может претерпевать нелинейную ползучесть, а спустя некоторое время — линейную ползучесть.

Как известно, О. Я. Берг установил, что при обычных кратковременных испытаниях бетона с наступлением определенного напряжения R_T в бетоне появляются разрывы, микротрещины, развитие которых с повыше-

нием напряжения приводит к разрушению бетона [1]. Первые микротрещины были обнаружены при напряжениях, составляющих примерно 0,55—0,6 от предела прочности бетона. Однако, последующие исследования О. Я. Берга показали, что напряжение R_T , характеризующее начало разрушения бетона, зависит от призмочной прочности бетона [2]. Чем прочнее бетон, тем больше R_T .

Согласно О. Я. Бергу, полная деформация бетона при сжатии состоит из следующих пяти компонентов

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_y + \varepsilon_n + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

где ε_0 — начальный участок развития деформаций; ε_y — упругие деформации; ε_n — деформации ползучести, то есть деформации, развивающиеся во времени без нарушения сплошности бетона; ε_1 — пластические деформации второго рода, связанные с развитием (при $\varepsilon > R_T$) несмыкающихся микроразрывов; ε_2 — псевдопластические деформации, которые имеют место при высоких напряжениях, когда в результате разрастания микроразрушений образуются внутренние разрушения [2].

В работе [3] мы, основываясь на исследованиях Е. Фрейсине [10], А. Е. Шейкина [11], И. И. Улицкого [9], О. Я. Берга [1] и на наших исследованиях, предложили обобщенную гипотезу механизма ползучести бетона. Согласно этой гипотезе, ползучесть бетона до напряжения 0,6 от предела прочности бетона является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня, так и капиллярных явлений, а при более высоких напряжениях еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне.

Появлением и развитием микротрещин нами объяснялось нарушение линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести [3]. В дальнейшем наши более обширные исследования полностью подтвердили ранее сделанные нами выводы и дали возможность сделать ряд новых ценных выводов [4].

В начале данного параграфа мы отметили те три разные по характеру закономерности деформаций бетона, которые получились при испытании длительно обжатых цилиндрических образцов после их разгрузки. Первая из них выражается кривой, вогнутостью обращенной к оси деформаций. Как уже было показано, такую закономерность деформаций имеют те образцы, которые были нагружены длительной сжимающей нагрузкой в возрасте 7 дней вплоть до относительного напряжения 0,95, а в возрасте 14 дней — 0,75. Что касается образцов, нагруженных в возрасте более 14 дней, то такую закономерность деформаций имеют все те образцы, для которых относительное напряжение в момент их длительного нагружения составляло не более 0,5—0,6 от предела цилиндрической прочности бетона.

В табл. 4 приведены изменения относительных напряжений в длительно нагруженных образцах во времени благодаря нарастанию прочности бетона во времени. Как видно из табл. 4, нарастание прочности бе-

тона во времени приводит к заметному падению начальных высоких относительных напряжений в случае нагружения бетона в молодом возрасте. Так, например, при $\tau=7$ дней относительное напряжение 0,9 уже на 29-й день падает до значения 0,577. В результате падения относительного напряжения ползучесть, обусловленная образованием и развитием микротрещин в бетоне, затухает и далее ползучесть, в основном, протекает за счет вязкости геля и капиллярных явлений.

Таблица 4

Изменение относительных напряжений в длительно обжатых образцах во времени вследствие нарастания прочности бетона

R_n в кг/см ²	τ	σ в кг/см ²	$\frac{\sigma}{R_n}$	Относительное напряжение при возрасте бетона					
				14 дней	29 дней	95 дней	185 дней	1 год	3 года
41,2	7 дней	10,3	0,25	0,195	0,160	0,137	0,131	0,120	0,095
		20,6	0,50	0,390	0,320	0,274	0,252	0,240	0,190
		24,7	0,60	0,467	0,384	0,329	0,315	0,287	0,227
		30,9	0,75	0,585	0,480	0,411	0,393	0,360	0,285
		37,1	0,90	0,701	0,577	0,495	0,474	0,431	0,341
		39,1	0,95	0,739	0,609	0,522	0,500	0,455	0,360
52,9	14 дней	13,2	0,25	—	0,205	0,176	0,168	0,154	0,122
		26,4	0,50	—	0,410	0,352	0,337	0,307	0,243
		31,7	0,60	—	0,493	0,423	0,405	0,369	0,292
		39,7	0,75	—	0,615	0,530	0,507	0,461	0,365
		47,6	0,90	—	0,740	0,635	0,609	0,553	0,438
		50,3	0,95	—	0,782	0,672	0,642	0,585	0,464
64,3	29 дней	16,1	0,25	—	—	0,215	0,205	0,187	0,148
		32,2	0,50	—	—	0,430	0,411	0,374	0,297
		38,6	0,60	—	—	0,515	0,493	0,448	0,356
		48,2	0,75	—	—	0,641	0,616	0,561	0,445
		57,9	0,90	—	—	0,773	0,739	0,673	0,533
		61,1	0,95	—	—	0,816	0,780	0,710	0,563
74,9	95 дней	18,7	0,25	—	—	—	0,239	0,217	0,172
		37,4	0,50	—	—	—	0,478	0,235	0,345
		44,9	0,60	—	—	—	0,573	0,522	0,413
		56,1	0,75	—	—	—	0,717	0,652	0,517
		67,4	0,90	—	—	—	0,861	0,784	0,621
78,3	185 дней	19,6	0,25	—	—	—	—	0,228	0,180
		39,2	0,50	—	—	—	—	0,456	0,360
		47,0	0,60	—	—	—	—	0,546	0,433
		58,7	0,75	—	—	—	—	0,682	0,540
		70,5	0,90	—	—	—	—	0,820	0,650
		74,4	0,95	—	—	—	—	0,865	0,686
86,0	1 год	21,5	0,25	—	—	—	—	—	0,198
		43,0	0,50	—	—	—	—	—	0,396
		51,6	0,60	—	—	—	—	—	0,475
		64,5	0,75	—	—	—	—	—	0,594

Таким образом, изменение деформативных свойств молодого бетона в результате длительного обжатия, в основном, является следствием линейной ползучести бетона за счет вязкости геля и капиллярных явлений. Линейная ползучесть приводит к уплотнению структуры бетона, причем уплотнение тем больше, чем больше относительное напряжение в момент длительного нагружения бетона. Именно этим следует объяснить то явление, что на фиг. 1 кривые деформаций длительно обжатых образцов расположились выше кривой деформаций тех образцов, которые не были под длительной сжимающей нагрузкой, причем тем выше, чем больше было относительное напряжение в момент длительного нагружения. С повышением относительного напряжения уменьшается и кривизна кривых деформаций.

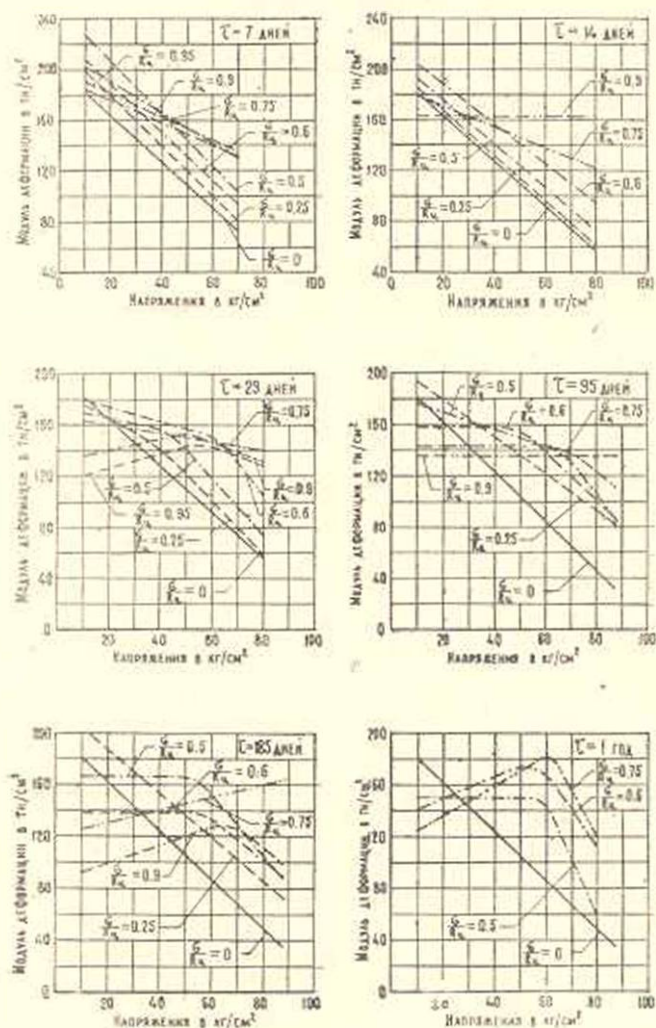
На основании вышесказанного нетрудно заключить, что характер кривых деформаций длительно обжатых образцов в данном случае ($\tau=7$ дней) качественно сохранился обычным, так как ползучесть за счет образования и развития микротрещин в бетоне имела скоропроходящий характер и поэтому не успела оказать свое отрицательное влияние на деформативность бетона.

То же самое явление мы наблюдали и в том случае, когда образцы были нагружены длительной нагрузкой в возрасте 14 дней относительным напряжением до 0,75. Однако, кривая деформаций образцов, для которых относительное напряжение составляло 0,9, уже качественно имеет другой характер. В этом случае, как уже указывалось, закономерность деформаций до определенного напряжения линейна, а выше выражается кривой, вогнутостью обращенной к оси деформаций.

Мы пока воздержимся от рассмотрения причин, приводящих к такой закономерности деформаций и сперва рассмотрим тот случай, когда зависимость между напряжениями и деформациями бетона в результате длительного сжатия представляет кривую, причем до определенного напряжения вогнутостью обращенную к оси напряжений, а выше — к оси деформаций. Подобную закономерность деформаций имеют те образцы, которые были нагружены длительной нагрузкой в возрастах 29 и 185 дней и 1 год относительным напряжением более 0,6 (фиг. 1 и 2). Причиной этого несомненно является ползучесть бетона вследствие образования и развития микротрещин, отрицательное влияние которого на деформативность бетона увеличивается с увеличением τ . Объясняется это тем, что чем больше τ , тем меньше дальнейшее нарастание прочности бетона во времени, а поэтому и меньше падение начального высокого относительного напряжения. А сохранение высокого относительного напряжения приводит как к более длительным, так и большим деформациям ползучести за счет образования и развития микротрещин. Именно с этим связано то, на первый взгляд, необычное явление, что кривая деформаций длительно обжатого бетона до определенного напряжения вогнутостью обращена к оси напряжений, а выше вогнутостью обращена к оси деформаций.

Как известно, в момент разгрузки бетона из-под длительной нагруз-

ки мгновенно восстанавливается часть упругой деформации, а далее во времени — часть деформации ползучести. Восстановление деформаций вызвано тем, что в момент длительного нагружения заполнитель бетона деформируется лишь упруго, а поэтому при разгрузке стремится восстановить свою первоначальную форму, однако этому препятствует затвердевший во времени цементный камень. По этой причине имеет место не полное, а частичное восстановление деформаций.

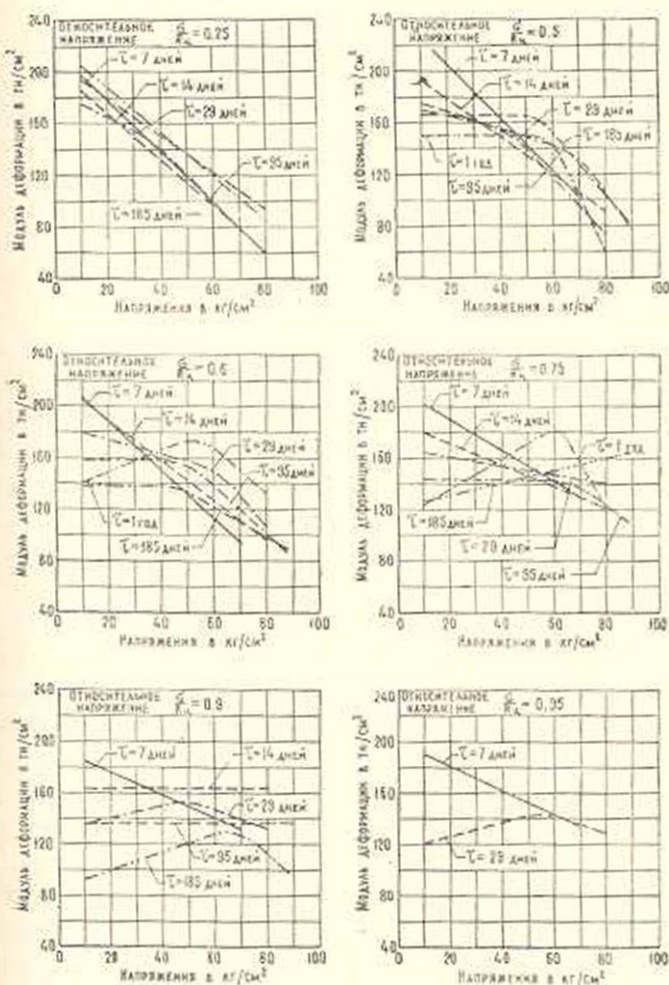


фиг. 5.

Обратимость деформаций зависит от большого количества факторов, из числа которых одним из важных является величина напряжения, в зависимости от которого, как уже отмечалось, может иметь место линейная и нелинейная ползучесть.

В рассматриваемом нами случае, поскольку имела место нелинейная ползучесть, в момент разгрузки бетона и в дальнейшем, помимо обратимых деформаций за счет деформаций упруго-деформированного заполни-

тия, частично восстановятся и те деформации ползучести, которые являются следствием образования и развития микротрещин. При этом происходит смыкание микротрещин, которые нарушили сплошность бетона. Однако, вполне понятно, что при повторном нагружении такого бетона сжимающей нагрузкой его деформации до определенного напряжения будут складываться из упругих деформаций и деформаций за счет раскрытия ранее образовавшихся микротрещин. При этом с повышением напря-



Фиг. 6.

жения сопротивляемость раскрытию микротрещин будет возрастать до того момента, пока наступит то относительное напряжение, которое было в бетоне в момент его разгрузки из-под длительной нагрузки, к которой бетон уже приспособился в период длительного нагружения. Вот та основная причина, которая привела к рассматриваемой нами закономерности деформаций длительно обжатого бетона, когда связь между напряжениями и деформациями до определенного относительного напряжения имеет вид кривой, вогнутостью обращенной к оси напряжений.

Однако, как только относительное напряжение благодаря дальнейшему повышению сжимающей нагрузки превысит то относительное напряжение, которое испытывал бетон в момент разгрузки из-под длительной нагрузки, микротрещины получают дальнейшее развитие и наступит разрушение. По этой причине на последнем этапе начальная закономерность деформаций изменяется и приобретает вид кривой, вогнутостью обращенной к оси деформаций.

Теперь, когда мы выяснили причины первой и третьей характерных закономерностей деформаций длительно обжатого бетона, нетрудно объяснить и причины второй характерной закономерности, которая до определенного напряжения представляет прямую, а выше—кривую, вогнутую к оси деформаций. Указанная закономерность есть нечто среднее между двумя ранее рассмотренными закономерностями деформаций длительно обжатого бетона. Поэтому ясно, что в зависимости от различных факторов сочетание положительной роли ползучести бетона за счет вязкости геля и капиллярных явлений, а также отрицательной роли ползучести за счет образования и развития микротрещин может привести к такой закономерности.

На фиг. 5 и 6 приведены кривые изменения модулей деформаций в зависимости от напряжения длительно обжатого бетона. На фиг. 5 каждый график соответствует одному возрасту бетона к моменту длительного нагружения, а на фиг. 6 одному значению относительного напряжения.

На основании фиг. 5 и 6 можно получить более наглядное представление о влиянии длительного обжатия на деформативность бетона.

В ы в о д ы

1. Длительное сжатие практически не оказывает влияния на прочность бетона даже в тех случаях, если бетон нагружается в старом возрасте относительным напряжением 0,9—0,95.

2. Длительное сжатие оказывает существенное влияние на деформативность бетона. В зависимости от величины напряжения и возраста бетона к моменту длительного нагружения, длительное сжатие может привести как к уменьшению, так и к увеличению деформаций бетона.

3. Влияние длительного сжатия на деформативность бетона обусловлено ползучестью бетона, которая в зависимости от величины напряжения и возраста бетона к моменту длительного нагружения может быть линейной и нелинейной.

4. Линейная ползучесть бетона при сжатии, независимо от возраста бетона к моменту длительного нагружения, приводит к уплотнению бетона и тем самым к уменьшению его деформаций. Уменьшение деформаций тем больше, чем больше относительное напряжение в момент длительного нагружения бетона.

5. Нелинейная ползучесть в зависимости от возраста бетона к моменту длительного нагружения и величины напряжения может привести как к уменьшению, так и к увеличению деформаций бетона.

Уменьшение деформаций имеет место в том случае, когда бетон нагружен в молодом возрасте. Интенсивный рост прочности бетона во времени приводит к быстрому падению начального высокого относительного напряжения и тем самым к затуханию деформаций ползучести за счет образования и развития микротрещин в бетоне, которые обуславливают нелинейную ползучесть. Ввиду скоропроходящего характера, нелинейная ползучесть не успевает оказать своего отрицательного влияния на деформативность бетона, а если и успевает, то оно компенсируется положительной ролью линейной ползучести.

Увеличение деформаций имеет место в том случае, когда бетон нагружен в зрелом возрасте. В этом случае дальнейшее нарастание прочности бетона во времени уже не столь существенно, чтобы смогло бы заметно уменьшить начальное высокое относительное напряжение и тем самым привести к затуханию деформаций ползучести вследствие образования и развития микротрещин. Поэтому основным фактором, определяющим деформации бетона, уже становится ползучесть, обусловленная образованием и развитием микротрещин, так как положительное влияние линейной ползучести на деформативность бетона уже не может полностью компенсировать отрицательное влияние ползучести за счет образования и развития микротрещин. По этой причине чем больше напряжение, тем больше деформации длительно обжатого бетона.

6. Длительное сжатие приводит к изменению характера закономерности деформаций бетона. В зависимости от величины относительного напряжения и возраста бетона к моменту длительного нагружения, длительное сжатие может привести к следующим характерным закономерностям деформаций бетона:

а. Кривая зависимости между напряжениями и деформациями вогнутостью обращена к оси деформаций. Такая закономерность деформаций имеет место независимо от возраста бетона к моменту длительного нагружения, во-первых, в пределах линейной ползучести и, во-вторых, тогда, когда бетон нагружен высокими напряжениями в молодом возрасте, однако благодаря нарастанию прочности бетона во времени нелинейная ползучесть имеет скоропроходящий характер;

б. Зависимость между напряжениями и деформациями до определенного напряжения линейна, а выше криволинейна (кривая вогнутостью обращена к оси деформаций). Такая закономерность деформаций имеет место при некотором сочетании положительного влияния линейной ползучести и отрицательного влияния ползучести за счет образования и развития микротрещин, зависящих от возраста бетона и величины относительного напряжения в момент длительного нагружения;

в. Кривая зависимости между напряжениями и деформациями до определенного напряжения вогнутостью обращена к оси напряжений, а выше—вогнутостью обращена к оси деформаций. Такая закономерность характерна для того случая, когда бетон нагружен в зрелом возрасте, претерпевающим нелинейную ползучесть, в результате чего отрицатель-

ное влияние ползучести на деформативность бетона за счет образования и развития микротрещин преобладает над положительным влиянием линейной ползучести.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 VI 1964

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԱՂԴԵՅՈՒԹՅԱՆՆԵՐ ԲԵՏՈՆԻ ԱՄՐՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԴԵՖՈՐՄԱՏԻՎ ՀԱՏՆՈՒԹՅԱՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ երկարատև սեղմումը կապի չի ազդում բետոնի ամրության վրա, բայց նրա աղդեցությունը զեֆորմացիոն հատկությունների վրա մեծ է: Նախած բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակին և լարումների մեծություններին, երկարատև սեղմումը կարող է բերել զեֆորմացիաների ինչպես փորրացման, այնպես էլ մեծացման:

Երկարատև սեղմումը բերում է զեֆորմացիաների պակասեցման, երբ բետոնը բեռնավորված է փորր հասակում անկախ լարման մեծությունից, քանի որ բետոնի ամրության հետագա աճը արագ կերպով իջեցնում է սկզբնական բարձր հարաբերական լարումը, միաժամանակ մարելով սողքի զեֆորմացիաները:

Երբ ծերացած բետոնը բեռնավորվում է մեծ լարումով, ամրության հետագա աճը արդեն ի վիճակի չէ նկատելի կերպով փորրացնելու սկզբնական մեծ հարաբերական լարումը և զրանով նպաստելու ոչ զծային սողքի զեֆորմացիաների մարմանը:

Այս գնալով երկարատև սեղմումը բերում է զեֆորմացիաների մեծացման, քանի որ զծային սողքի բարերար աղդեցությունը, որն արտահայտվում է բետոնի խտացմամբ, ի հաշիվ սոսաջացած մաղաձաքերի, այլևս չի կարող փոխհատուցել սողքի բացասական աղդեցությունը:

Նախած բեռնավորման մոմենտում բետոնի հասակին և հարաբերական լարման մեծությունը, երկարատև սեղմումը կարող է բերել լարումների ու զեֆորմացիաների կապի բնույթի փոփոխման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Берг О. Я. К вопросу о прочности и пластичности бетона. ДАН СССР, 12, № 4, 1950.
2. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона, Гостройиздат, М., 1962.
3. Карапетян К. С. Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, 5, № 4, 1952.
4. Карапетян К. С. Влияние старения бетона на зависимости между напряжениями и деформациями ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 4, 1959.

5. *Карпетян К. С.* Ползучесть бетона при кручении. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 6, 1962.
6. *Катин Н. И.* Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Сборник НИИЖБ, „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций“, Госстройиздат, М., 1959.
7. *Дермит Р.* Проблемы технологии бетона. Госстройиздат, М., 1959.
8. *Саталкин А. В., Севченко Б. А.* Раннее нагружение бетона и железобетона в мостостроении. Автотрансиздат, М., 1956.
9. *Улицкий Н. И.* Ползучесть бетона. Гостехиздат Украины, Киев, 1948.
10. *Фрейсине Е.* Переворот в технике бетона. ОНТИ, 1938.
11. *Шейкин А. Е.* К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона. Труды МИИТ, вып. 69, Трансжелдориздат, М., 1946.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Р. МЕСЧЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ
ПРИ СДВИГЕ

В работе рассматриваются вопросы исследования закономерностей ползучести глинистых грунтов и результаты их математической интерпретации в соответствии с теорией упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [1, 2].

§ 1. Закономерности ползучести глинистых грунтов. За последнее время выполнено довольно много работ [8, 3, 4, 5, 9, 11, 12, 15], посвященных исследованию реологических свойств глинистых грунтов при сдвиге. Эгими работами установлено, что глинистые грунты, в зависимости от их состояния в момент испытания, ведут себя как ньютоновская вязкая (структурированная) жидкость, так и условно-пластическое тело (в ряде случаев они могут обладать также свойствами упруго-хрупких и упруго-пластичных тел). Поэтому для выражения зависимости касательное напряжение q —скорость установившейся ползучести (течения) $d\gamma_n/dt = \dot{\gamma}(q)$ обычно пользуются реологическим уравнением состояния ньютоновской вязкой жидкости или тела Шведова-Бингама. Для определения предельного напряжения сдвига (течения) θ пользуются как условием пластичности Н. Н. Маслова [3], так и экстраполяцией на ось напряжений экспериментальной зависимости касательные напряжения—скорости деформации сдвига [4].

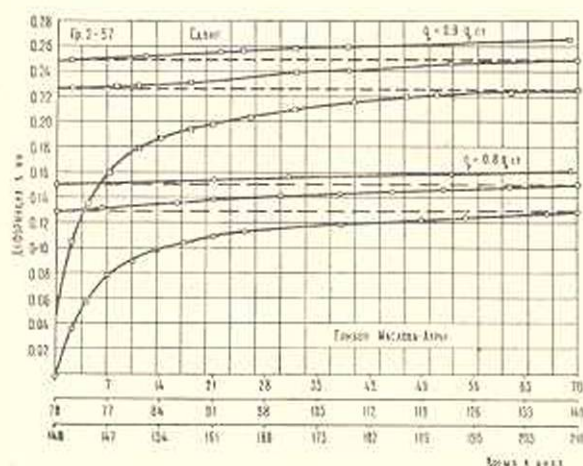
Большим достоинством реологических уравнений состояния ньютоновской вязкой жидкости и тела Шведова-Бингама является простота. Вместе с тем они не в состоянии воспроизвести реальное поведение тела под напряжением. По ним невозможно достаточно точно определить деформации ползучести материала, так как рассматриваются только протекающие с постоянной скоростью деформации, пренебрегая затухающими деформациями, проявляющимися как при $q < \theta$, так и при $q > \theta$, до наступления стадии течения.

Чтобы убедиться в сказанном, познакомимся с несколькими кривыми ползучести сдвига, полученными нами [5] при испытании образцов грунтов на ползучесть в приборах одноплоскостного среза Н. Н. Маслова—Ю. Ю. Лурье и кольцевого сдвига Гидропроекта.

На фиг. 1 и 2 приведены деформации ползучести образцов-близнецов суглинка 2—57, испытанных на указанных выше приборах. Образцы-близнецы испытаны на ползучесть при $\sigma_z = 2 \text{ кг/см}^2$, $q = 0,8$ и

0,9 от $q_{ст}$ или $M = 0,8$ и 0,9 от $M_{пр}$ ($q_{ст}$ и $M_{пр}$ — сопротивление сдвигу и предельный крутящий момент, определяемые по стандартной методике, изложенной в [6]).

Рассмотрение кривых, приведенных на фиг. 1 и 2, показывает, что наступлению стадии установившейся ползучести (течения) пред-

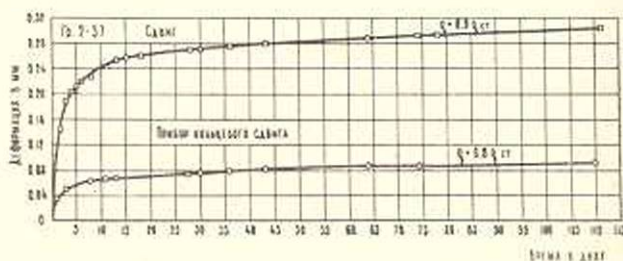


Фиг. 1.

шествует стадия затухающей ползучести, продолжительность которой достигает до трех месяцев. При этом доля затухающей ползучести в общей деформации сдвига довольно большая и, поэтому, очевидно, нельзя считать правильным игнорирование деформациями указанной стадии [5]. Нельзя также считать правильным экстраполяцию прямого участка кривой ползучести на ось

деформации, в целях математической аппроксимации экспериментальных данных реологическим уравнением состояния Максвеллова тела (Тан Тьенг-ки, [7]).

Отнесение глинистых грунтов к Максвелловому телу вызвано недостаточной длительностью проведения испытаний на ползучесть и

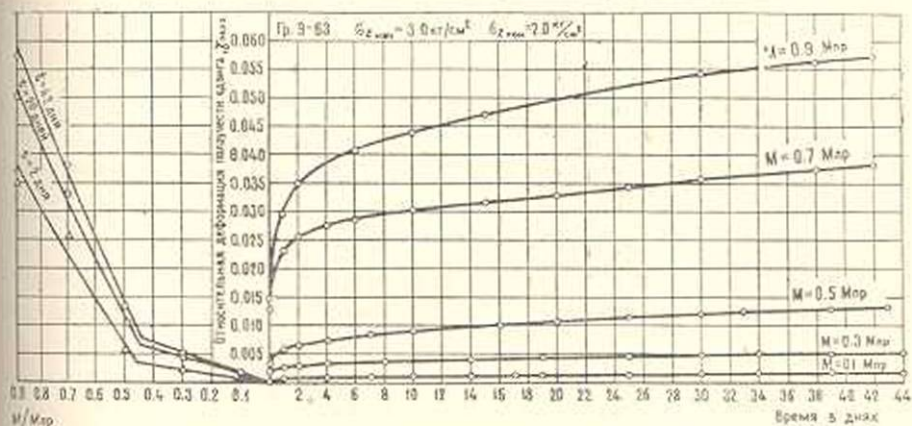


Фиг. 2.

кажущимся наступлением стадии установившейся ползучести (течения). Известно, что в опытах Гёза и Тан Тьенг-ки [8] с продолжительностью 48 часов, стадия течения „наступала“ через 5 часов после момента загрузки образца. Совершенно очевидно, что этот результат никак нельзя считать правильным. Достаточно посмотреть на кривые ползучести, приведенные на фиг. 1 и 2, чтобы убедиться в этом. Об этом свидетельствуют также исследования С. Е. Могилевской [9].

Чтобы стадию затухающей ползучести отличить от стадии установившейся ползучести (течения), надо выполнить длительные опыты на ползучесть.

По изложенной выше причине нельзя считать достаточно обоснованным определение скорости течения грунта по отрезку кривой ползучести, соответствующей 5—15 суткам после момента приложения ступени касательного напряжения [4]. Определенная по такой методике скорость деформации всегда будет больше истинной скорости течения грунта. Возможна также ошибка в установлении величины предельного напряжения сдвига θ . Вполне возможно, что кривая, считавшаяся незатухающей в пределах $t = 10 - 15$ суток (кривая $M = 0,3 M_{пр}$, фиг. 3), может оказаться затухающей при более длительной продолжительности опыта. Ибо, как отмечают Н. В. Михайлов и П. А. Ребиндер [10] и как доказано экспериментами [5], при очень медленной деформации условно-пластические тела (коагуляционные структуры) способны упрочняться во времени.



Фиг. 3.

Несмотря на то, что для определения скорости течения грунта Тян Тьенг-ки [11] предлагает выдержать образец под нагрузкой до наступления стадии установившейся ползучести, его же опыты не удовлетворяют этому условию. При испытании ланджоуйского лёсса за ползучесть длительность выдерживания образца под ступенью нагрузки равнялась 14 дням.

Для получения более полного представления о поведении глинистого грунта при длительном действии касательных напряжений, познакомимся с семейством кривых ползучести, приведенным на фиг. 3.

Кривые ползучести семейства, приведенные на фиг. 3, получены испытанием серии образцов-близнецов на приборах кольцевого сдвига. До опыта образцы-близнецы сперва были подвергнуты предварительному уплотнению напряжениями $\sigma_z = 3 \text{ кг/см}^2$, а затем разгружены до напряжения $\sigma_z = 2 \text{ кг/см}^2$, под которым и испытаны на ползучесть. Длительность предварительного уплотнения образцов была около одного месяца. Данные, характеризующие физические свойства образцов грунта после опыта, сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Лаб. № грунта	Наимено- вание	№ № опытов	Удельный вес γ , г/см ³	Объемный вес γ_s , г/см ³	Влажность w , %	Пределы пластичности		
						Предел текуче- сти	Предел пластич- ности	Число пластич- ности
9-63	глина	9 980— 9 996	2.68	1.82	33.0	42.4	24.4	18.0

Образцы-близнецы были испытаны на сдвиг при относительных крутящих моментах, равных $M/M_{пр} = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$. $M_{пр}$ — предельный крутящий момент (соответствующий предельному сопротивлению грунта сдвигу) определялся испытанием трех образцов-близнецов на сдвиг по стандартной методике [6], то есть касательные напряжения наращивались ступенями по $q = 0.1$ кг/см², а последующая ступень прикладывалась к образцу после условной стабилизации деформации сдвига. Порядок приложения крутящего момента (касательного напряжения) до заданного M точно такой же, как и при определении $M_{пр}$.

Деформации сдвига измерялись по наружной окружности кольцевого образца индикаторами часового типа с точностью 0.002 мм. Зная M , можно определить величину касательного напряжения. Однако, для простоты и наглядности обсуждения результатов экспериментов мы будем пользоваться величиной относительного крутящего момента $M/M_{пр}$.

Опыты выполнялись двукратно на образцах нарушенной структуры. Чтобы предотвратить испарение влаги из грунта, в течение всего опыта образцы находились в водяном окружении. Кольца, окружающие образец, покрывались тавотом.

Из графика фиг. 3 следует, что при $M/M_{пр} = 0.1$ и 0.3 деформации грунта во времени полностью протекают в стадии затухающей ползучести. В конце опыта, начиная от $t = 30$ дней, деформации практически прекращаются. Вернее, они протекают настолько медленно, что на указанном промежутке их невозможно измерить.

Кривые ползучести, соответствующие $M/M_{пр} = 0.5, 0.7$ и 0.9 , вначале обнаруживают тенденцию затухания, а затем, после наступления стадии установившейся ползучести, спрямляются, то есть принимают форму течения. В рассматриваемом случае, длительность стадии затухающей ползучести колеблется в пределах 30 дней. Эти кривые еще раз подтверждают правильность высказанных выше соображений о характере изменяемости деформации сдвига во времени.

Примечательным является то, что ни в одном случае испытания образцов не обнаружено наступление третьей стадии деформирования — стадии прогрессирующего течения (разрушения). А это значит, что при $M < M_{пр}$, то есть при касательных напряжениях, не превышающих стандартное сопротивление сдвигу $q_{ст}$, деформации ползуче-

сти сдвига протекают только в первых двух стадиях деформирования — затухающей и установившейся ползучести.

Теперь посмотрим как выглядит кривая зависимости деформация ползучести сдвига — относительный крутящий момент $M/M_{пр}$.

Кривые указанной зависимости для различных моментов времени t после приложения к образцам-близнецам крутящих моментов $M/M_{пр}$ приведены на левой части графика фиг. 3. Как и в случае ползучести грунтов при сжатии в компрессионных приборах, так и в рассматриваемом случае, зависимость $\gamma_{полз} = f(M/M_{пр})$ аппроксимируется двумя прямыми с различными углами наклона к оси ординат, то есть с различными модулями деформации ползучести сдвига. Это, как было отмечено выше, свидетельствует о наличии двух областей деформирования. Граница между указанными областями определяется крутящим моментом (напряжением), соответствующим пределу структурной прочности грунта.

В первой области деформирования деформации ползучести носят структурно-адсорбционный, а во второй — характер структурных деформаций [13]. Переход из одной области в другую является результатом разрушения структуры, которой обладает грунт в начале загрузки.

Из рассмотрения кривых деформация ползучести сдвига — относительный момент следует, что предел структурной прочности грунта практически не зависит от длительности испытания и примерно равен $M/M_{пр} \approx 45$, то есть примерно половине стандартного сопротивления грунта сдвигу. Если принять во внимание то обстоятельство, что при $M/M_{пр} = 0.1$ и $0.3 < 0.45$ кривые ползучести являются затухающими, нетрудно будет понять, что предел структурной прочности является тем пределом, ниже которого деформации ползучести затухают, а выше — нет. Иначе говоря, предел структурной прочности грунта совпадает с условно-динамическим пределом текучести структурированных жидкостей и с границей условно-упругой области условно-пластичных тел. В ряде случаев, в зависимости от состояния грунта, он может являться истинным пределом текучести.

Если грунт не обладает пределом структурной прочности, то есть предельным напряжением сдвига θ , как, например, пластичная глина, при всех касательных напряжениях он проявляет способность течения с постоянной скоростью.

Небезынтересно отметить, что при рассмотрении вопроса о сдвиговых деформациях глинистых грунтов во времени К. Терцаги и Р. Пек [14] отмечают, что «как только касательные напряжения в глине становятся больше примерно половины пикового значения, глина, по-видимому, может «ползти» при постоянной сдвигающей силе. Другими словами, кривая время-деформация приближается к наклонной, а не к горизонтальной асимптоте». Полученный нами результат является прямым доказательством справедливости изложенного мнения.

Понятно, что предел структурной прочности является переменной величиной, зависящей от свойств грунта в момент испытания. По результатам, полученным при определении зависимости касательное напряжение—мгновенная деформация переуплотненных паст, его величина в долях от сопротивления грунта сдвигу изменяется в следующих пределах (табл. 2).

Таблица 2

Лаб. № грунта	Величина нормального напряжения σ_z кг/см ²		
	1.0	2.0	4.0
4—57	—	0.55	—
9—63	0.4	0.35 (0.5)	0.4

Из изложенного следует, что для определения предельных напряжений сдвига (порог ползучести по Н. Н. Маслову [3]), ниже которых деформации ползучести имеют затухающий характер, можно воспользоваться также величиной предела структурной прочности сдвига, определяемой по зависимости касательное напряжение—деформация ползучести сдвига.

Надо отметить, что аппроксимация зависимости $\tau_{полз} = f(M/M_{пр})$ двумя прямыми впервые была выполнена Гёзом и Тан Тьенг-ки [8]. Однако, по причине малой продолжительности опытов, течение грунта было обнаружено и в первой области деформирования. Поэтому не случайно, что для предельного напряжения ими получены явно заниженные величины 0.02—0.1 кг/см².

По данным Н. Н. Маслова, С. Н. Сотникова и С. Е. Могилевской [3], предельное напряжение сдвига (порог ползучести) саратовской глины нарушенной структуры колеблется в пределах $\bar{b} = 0.35—0.45$ кг/см², а для кинельской глины и лёссовидного суглинка ненарушенной структуры— $\bar{b} = 0.32—1.5$ кг/см². По нашим данным предел структурной прочности переуплотненных паст (грунты № № 4—57 и 9—63), то есть предельное напряжение сдвига, колеблется в пределах $\bar{b} = 0.17—0.81$ кг/см².

§ 2. Описание кривых ползучести. При описании экспериментальных кривых ползучести использованы основные интегральные соотношения линейной (1) и нелинейной (2) теорий упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [1, 2]

$$\tau_{полз}(t) = - \int_0^t q(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} + \omega(t, \tau) \right] d\tau, \quad (1)$$

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = - \int_{t_1}^t F[q(\tau)] \left[\frac{\partial \omega(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (2)$$

где $\omega(t, \tau)$ — мера ползучести сдвига, определяемая выражением вида

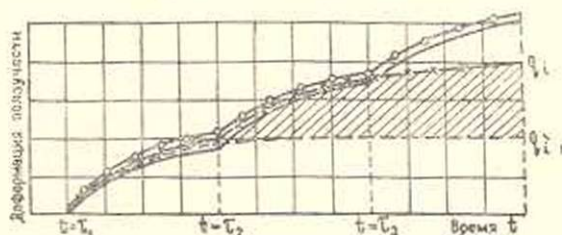
$$\omega(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\eta(t-\tau)}], \quad (3)$$

$G(t)$ — модуль мгновенной деформации сдвига в момент (τ) приложения касательного напряжения (q) ; $F(q)$ — функция напряжений, характеризующая нелинейную зависимость между $\gamma_{\text{полз}}$ и q ; $\varphi(\tau)$ — функция старения, характеризующая изменение свойств грунта во времени („старение“). В рассматриваемом здесь случае $\varphi(\tau) = C_0 = \text{const}$.

Приведем два примера описания семейств кривых ползучести, определенных испытанием образцов-близнецов нарушенной структуры на приборах одноплоскостного среза [15] и кольцевого сдвига.

Для описания семейств кривых ползучести, полученных испытанием образцов-близнецов на приборах одноплоскостного среза Г. Н. Маслова — Ю. Ю. Лурье,

кривые ползучести были определены не обычным, прямым, а обратным методом. По этому методу нагружение образца до заданной величины касательного напряжения выполняется приложением нагрузок ступенями по



Фиг. 4.

$q = 0.025 \text{ кг/см}^2$ с интервалом 10 минут (схема нагружения образцов показана на фиг. 4). Определение деформаций ползучести, соответствующих какому-либо заданному напряжению q_n , осуществляется сум-

мированием приращений деформаций ползучести $\gamma_{\text{полз}}(t) = \sum_{i=1}^n \Delta_i \gamma(t)$

от приращения напряжений $\Delta_i q$. Приращения деформаций ползучести, соответствующие приращению напряжения $\Delta_i q = q_i - q_{i-1}$, определяются как разность ординат кривых ползучести при q_i и q_{i-1} (фиг. 4).

На правой части фиг. 5 сплошными линиями показаны кривые ползучести, соответствующие различным значениям касательных напряжений, построенные указанным выше способом. На левой части того же графика сплошными линиями показаны кривые — зависимости $\gamma_{\text{полз}} = f(q)$, построенные на основании семейства кривых для различных t (t — длительность нагружения).

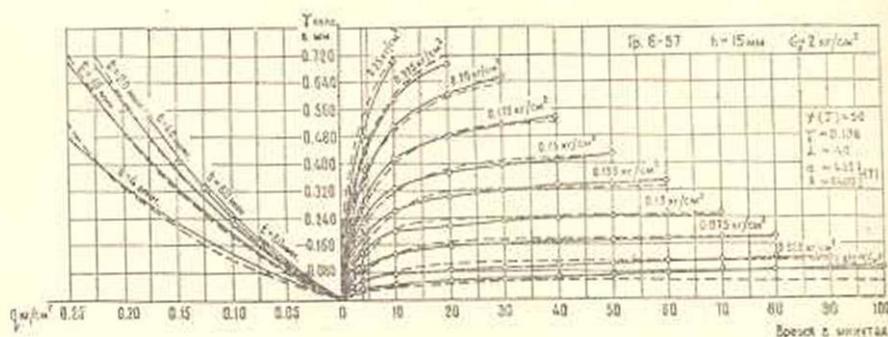
Для описания единичной кривой ползучести использовано выражение (3), а для перехода от этой кривой к другим, учитывая нелинейную связь между касательными напряжениями и деформациями ползучести сдвига, — выражение (4)

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = \omega(t) \cdot F(q, t). \quad (4)$$

Функция напряжений $F(q, t)$ определялась зависимостью вида

$$F(q, t) = \alpha q + \beta(t) q^n, \quad (5)$$

где α — параметр, $\beta(t)$ — некоторая функция, учитывающая длительность нагружения t , $\beta(t) = \frac{\beta^*(t)}{q_{\text{ср}}^{n-1}}$.



Фиг. 5.

Для наших экспериментов $\beta(t)$ определялась зависимостью вида

$$\beta^*(t) = \lambda(1 - e^{-kt}). \quad (6)$$

На правой половине фиг. 5 пунктирами показаны кривые, определенные на основании зависимостей (4), (5) и (6) при соответствующем подборе параметров. Для аппроксимации зависимостей между напряжениями и деформациями ползучести сдвига (левая часть фиг. 5), соответствующим длительностям нагружения 4, 10 и 20 мин, использовано выражение (5). Переход от функции напряжения $F(q)$ к указанной выше зависимости и наоборот объяснений не требует.

В приведенном примере для описания единичной кривой ползучести использовано уравнение меры ползучести (3), справедливое для затухающих деформаций. Однако, поскольку из-за неподобия кривых ползучести, при определении $\gamma_{\text{полз}} = f(q)$ и $F(q)$ учитывалась и длительность нагружения t , стало возможным использовать выражение (3) для описания как затухающих, так и незатухающих деформаций.

Иначе говоря, введением в функцию напряжений $F(q)$ независимой переменной t стало возможным описать кривые ползучести без разделения деформаций на затухающие и незатухающие. Но, чтобы избежать усложнений выражений и получить возможность экстраполяции деформаций установившейся ползучести (течения) на более длительное время, можно $\gamma_{\text{полз}}(t)$ рассмотреть как сумму затухающих и незатухающих деформаций ползучести.

В этом случае выражение (3) запишется в следующем виде:

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t-t_0)}] F_1(q) + Q_0 \cdot (t - \tau) F_2(q). \quad (7)$$

где Q_0 —коэффициент, характеризующий скорость течения при $q = 1$; $F_1(q)$ и $F_2(q)$ —функции напряжений, характеризующие нелинейную зависимость между напряжениями, деформациями затухающей и незатухающей ползучести соответственно. Обе функции удовлетворяют условию: $F_1(1) = 1$ и $F_2(1) = 1$.

Когда грунт обладает предельным напряжением сдвига θ (порог ползучести), а зависимость касательное напряжение—деформация установившейся ползучести подчиняется линейному закону, выражение (7) принимает следующий вид:

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = C_0 [1 - e^{-\tau(t-\tau)}] F_1(q) + Q_1 \cdot (t - \tau) (q - \theta), \quad (8)$$

где Q_1 —коэффициент, характеризующий скорость течения грунта при $q - \theta = 1$.

Если вместо зависимости $q - \gamma''_{\text{полз}}$ (γ'' —деформация установившейся ползучести) воспользоваться зависимостью $q - \dot{\gamma}''$ ($\dot{\gamma}''$ — скорость установившейся ползучести), из (8) получим

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = C_0 [1 - e^{-\tau(t-\tau)}] F_1(q) + \frac{q - \theta}{\tau} (t - \tau), \quad (9)$$

где τ —коэффициент вязкости.

На примере семейства кривых ползучести, приведенного на фиг. 3, исходя из расчленения деформаций на затухающие и незатухающие (фиг. 6), выполнено описание кривых ползучести.

На фиг. 6а приведены графики кривых затухающих деформаций ползучести, а на фиг. 6б—деформаций установившейся ползучести, определенных на основании экспериментальных кривых, показанных на фиг. 3.

Для описания единичной кривой, соответствующей $M/M_{\text{пр}} = 0.1$, использовано выражение вида [20]

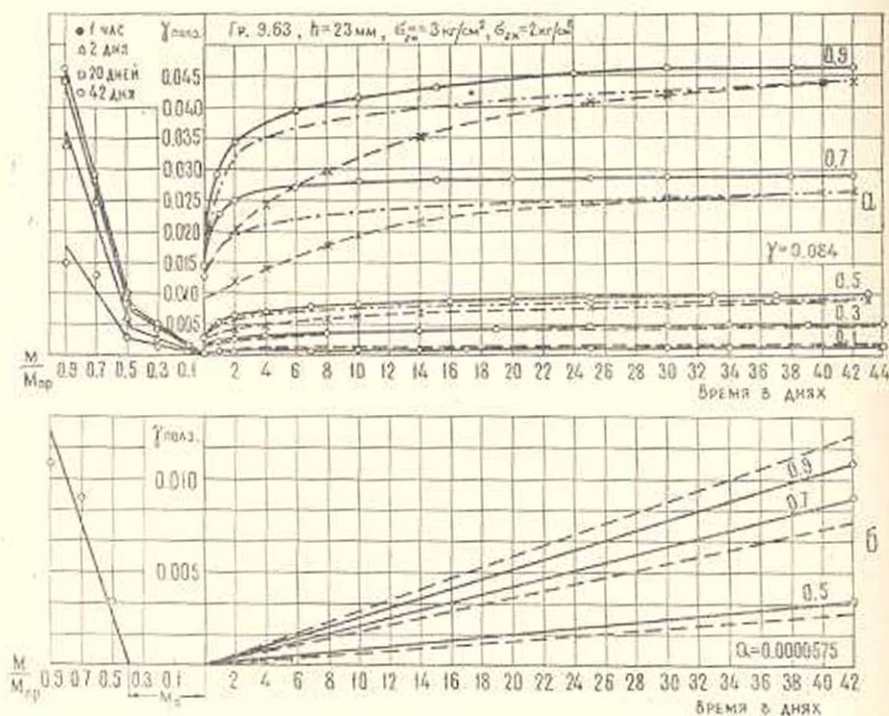
$$\omega(t) = A + (C_0 - A) [1 - e^{-\tau t}], \quad (10)$$

где C_0 —предельное значение меры ползучести, A —деформация ползучести, соответствующая часу после момента загрузки.

На графике фиг. 6а пунктирами показаны кривые, построенные по выражению (10), исходя из условия линейной зависимости между напряжениями и деформациями ползучести сдвига, с учетом изменчивости модуля деформации после $M = M_0$ (M_0 —крутящий момент, соответствующий пределу структурной прочности грунта), но без учета влияния длительности загрузки t , а точками-тире—кривые, построенные с ее учетом. Как видно из указанного графика, неучет длительности загрузки t , приводит к плохому, а учет—к удовлетворительному описанию кривых ползучести.

Для описания кривых установившейся ползучести, показанных на фиг. 6б, в левой части указанного графика построена кривая $\gamma_{\text{полз}} = f(M/M_{\text{пр}})$, а по кривой, соответствующей $M/M_{\text{пр}} = M_0 = 1$, опреде-

лен параметр $Q_1 = 0.0000675$. По величинам Q_1 и $M_0 \approx 0.4$ выполнено описание кривых установившейся ползучести, которое на том же графике показано пунктиром. Расхождение между опытными кривыми и кривыми, построенными по Q_1 и M_0 , находится в пределах 15%.



Фиг. 6.

С той же целью, в соответствии с выражением (9), вычислены скорости течения для $M/M_{\text{пр}} = 0.5, 0.7$ и 0.9 и построена кривая зависимости относительная скорость деформации сдвига ($\dot{\gamma}$) — $M/M_{\text{пр}}$ (фиг. 7). Как видно из графика фиг. 7, зависимость $d\gamma_{\text{полз}}/dt = f(M/M_{\text{пр}})$ выражается прямой, отсекающей на оси $M/M_{\text{пр}}$ отрезок, соответствующий пределу структурной прочности грунта и предельному напряжению сдвига θ (порог ползучести по Н. Н. Маслову). Следовательно, течение грунта при различных касательных напряжениях протекает при постоянной вязкости. Коэффициент вязкости в рассматриваемом случае определяется величиной $\eta = 1.5 \times 10^{14}$ пуаз.

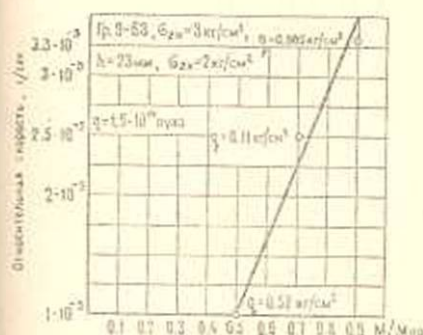
При переменном во времени касательном напряжении выражения (7), (8) и (9) соответственно переписываются в виде (11), (12) и (13)

$$\gamma_{\text{полз}}(t) = - \int_{\tau_1}^t F_1[q(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_1}^t F_2[q(\tau)] Q_0(\tau) d\tau, \quad (11)$$

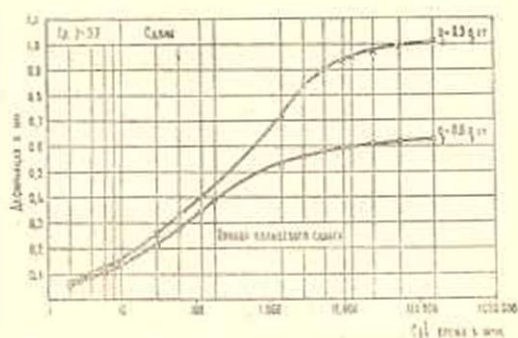
$$\gamma_{полз}(t) = - \int_{\tau_2}^t F_1[q(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_2}^t [q(\tau) - \theta(\tau)] Q_1(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$\gamma_{полз}(t) = - \int_{\tau_1}^t F_1[q(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \tau) d\tau + \int_{\tau_2}^t \frac{1}{\eta(\tau)} [q(\tau) - \theta(\tau)] d\tau, \quad (13)$$

где $F_1(q)$ и $F_2(q)$ — функции напряжений деформаций затухающей и незатухающей ползучести; Q_0 — скорость течения при $q = 1$; Q_1 — скорость течения при $q - \theta = 1$; $\frac{1}{\eta(\tau)}$ — скорость ползучести при $q - \theta = 1$, η — коэффициент вязкости; τ_2 — время, необходимое для достижения q величины предельного напряжения сдвига (θ).



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Отметим, что интегральные выражения (11), (12) и (13) применимы при возрастающих напряжениях, а их справедливость должна быть еще проверена путем сравнения деформаций при различных режимах нагружения.

Если, как обычно [2], принять, что при сложном напряженно-деформированном состоянии грунта интенсивности напряжений σ_i и деформаций l_i связаны той же зависимостью, что и при простом сдвиге, то $l_i = l_i(\sigma_i, t, \tau)$ при нелинейной ползучести (в соответствии с 2 и 11) будет выражаться следующими уравнениями:

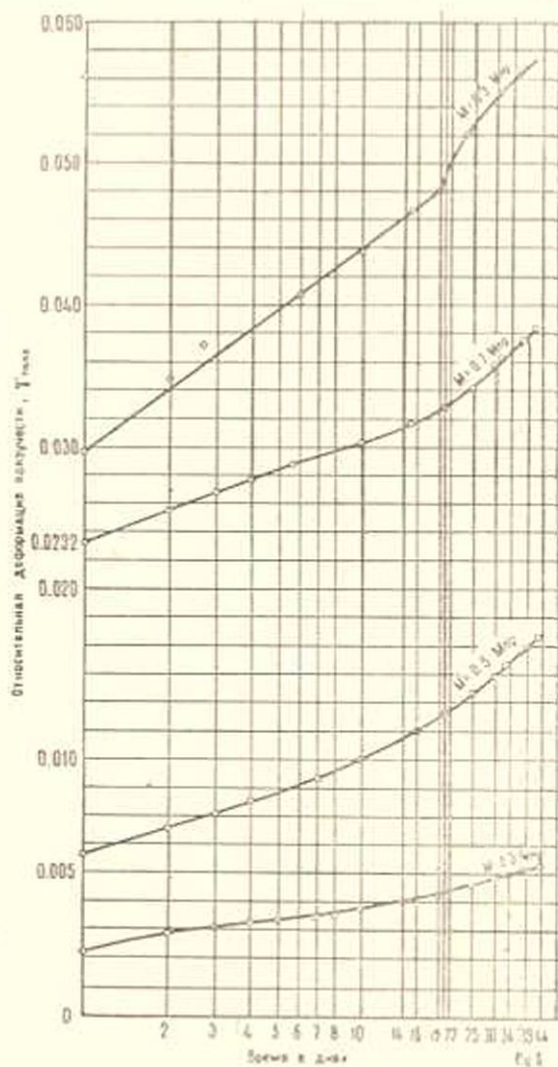
$$l_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t F_1 \left[\sigma_i(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \tau) d\tau, \quad (14)$$

$$l_i(t) = \frac{\sigma_i(t)}{G(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma_i(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{G(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_2}^t F_2 \left[\sigma_i(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \tau) d\tau + \\ + \int_{\tau_1}^t F_2 \left[\sigma_i(\tau) \right] Q_0(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Чтобы проверить возможность описания кривых ползучести логарифмической и степенной зависимостями Г. И. Покровского — К. Бюисмана [16, 17] и Штрауба [18]

$$\dot{\gamma}_{полз}(t) = A t^m \sigma^n, \quad (16)$$

на фиг. 8, 9 и 10 в полулогарифмической и логарифмической сетках координат показаны кривые, приведенные ранее на фиг. 2 и 3.



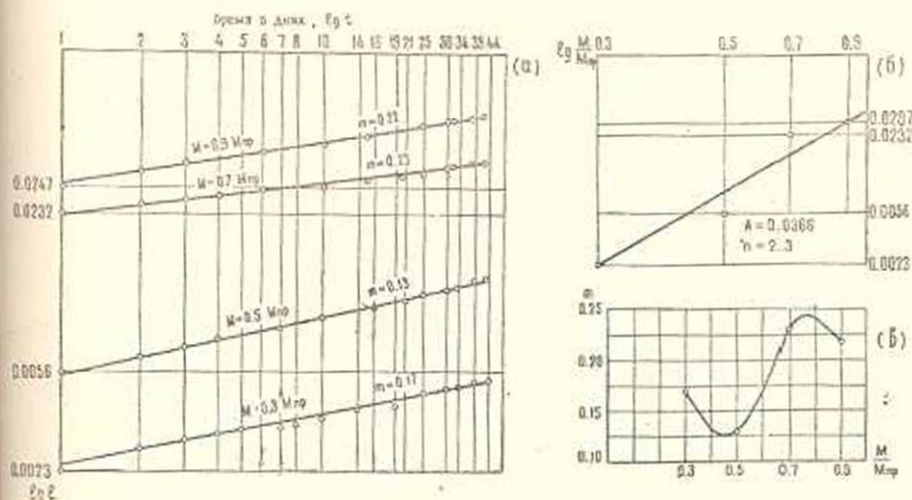
Фиг. 9.

Нанесение экспериментальных данных на указанные сетки координат показывает, что логарифмические зависимости не подходят для описания кривых ползучести сдвига, а степенная зависимость может быть использована для этой цели. Параметры A и n , входящие в степенную зависимость (16), с достаточной точностью могут быть при-

ияты за постоянные величины. Что же касается параметра m , то он находится в очень сложной зависимости от M/M_{op} (фиг. 10).

Из изложенного следует, что при подобии кривых ползучести, вместо выражения (5), в качестве функции напряжений можно использовать

$$F(q) = q^n. \quad (17)$$



Фиг. 10.

Пользуясь случаем, считаем нужным отметить, что в работе [19], в выражениях функции напряжений $F(\sigma)$ и меры ползучести $C(t)$ имеются опечатки. Вместо $F(\sigma) = A\sigma^n$ надо читать $F(\sigma) = A^n$, а вместо $C(t) = t^m$ надо читать $C(t) = At^m$ [12].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 V 1964

И. И. ИВАНОВ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀԱՂԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՍԱՀՔԻ ԴԵՊԻՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում բերված են խախտված կազմվածք ունեցող կավային բնու-
նդների սողքի օրինաչափությունների ուսումնասիրության արդյունքները սահ-
քի ղեկավար: Նրանք ստացվել են կարման մեկ հարթություն ունեցող և օդա-
լիքին սարքերում նմուշների փորձարկման հետևանքով:

Պարզված է, որ սողքային ձևափոխությունները սահքի ղեկավար, կախ-
ված լարման մեծությունից, նրա աղգման տեսակից և նյութի հատկու-
թյուններից, կարող են լինել ինչպես մարդ, այնպես էլ չմարդ: Ըստ որում,
նեղհույ միջև $q = 0.9 - 0.95 q_{\infty}$ (q — շոշափող լարումն է, իսկ q_{∞} — բնա-

հողի սահքի ստանդարտ զիմադրությունն է) սողքային ձևափոխությունները ընթանում են երկու՝ մարման և հաստատուն ձևափոխությունների ոլորտներում:

Բերված են սողքի կորերի զրանցման արդյունքները Գ. Ն. Մալով—Ն. Խ. Հարությունյանի առաձգա-սողքային մարմնի տեսության հիմնական տեսություններով, ինչպես նաև հեղինակի կողմից առաջարկված անշտություններով, որոնց հիմքում ընկած է մարդ և չմարդ սողքի կորերի առանձին-առանձին զրանցման սկզբունքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Известия ВНИИГ, 28, 1940.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехтеориздат, М., 1952.
3. Маслов Н. Н. К вопросу об условиях проявления ползучести глинистых грунтов в основаниях подпорных сооружений. Научные доклады Высшей школы. Строительство, № 1, 1958.
4. Сотников С. Н. Закономерности развития деформации ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Научное сообщение ЛИСИ, 1960.
5. Месчян С. Р. К вопросу о длительном сопротивлении глинистых грунтов сдвигу. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962.
6. Руководство по лабораторному определению физико-механических характеристик грунтов при устройстве оснований сооружений. Госстройиздат, М., 1956.
7. Tan Tjong-kie. Secondary time effects and consolidation of clays. Scientia Sinica, 7, № 11, 1958.
8. Geuse E., Tan Tjong-kie. The mechanical behaviour of clays. Proc. of the Second Intern. Congress on Rheology, London, 1954.
9. Мозилевская С. Е. Вопросы ползучести и длительной прочности глинистых грунтов в связи с давлением на подпорные стенки. В кн. «Исследование физико-механических свойств горных пород». Изд. АН СССР, 1962.
10. Михайлов Н. В. и Ребиндер П. А. О структурно-механических свойствах дисперсных и высокомолекулярных систем. Коллоидный журнал, 17, № 2, 1955.
11. Tan Tjong-kie. Proceedings of the 5-th ICOSOMEF. Discussion, 3, 141, 1961, Paris.
12. Месчян С. Р. Экспериментальное изучение закономерностей деформации ползучести глинистых грунтов. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 1, 1963.
13. Денисов Н. Я. О природе деформации глинистых пород. Изд. Минвосточного СССР, М., 1951.
14. Терцаги и Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике. Госстройиздат, М., 1958.
15. Месчян С. Р. Исследование деформативных свойств связных грунтов при сдвиге. ДАН Арм. ССР, 28, № 5, 1959.
16. Покровский Г. И. Применение принципа Больцмана к расчету осадки фундаментов. Труды ВНОС, ст. 1. Госстройиздат, М., 1933.
17. Buissman K. Results on long duration settlement tests. Proc. 1-st ICOSOMEF, 1, 100—106, Cambridge, 1936.
18. Straub. Proceedings of the Amer. Soc. of Civ. Eng., 1931.
19. Месчян С. Р. и Маркарян Э. М. Изучение ползучести водонасыщенного грунта. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 4, 1964.
20. Kohlrausch F. Experimentale Untersuchungen über die elastische Nachwirkung bei der Torsion, Ausdehnung und Biegung. „Pogg. Ann.“ 1876. Bd. 158, S. 337.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Е. С. СИНАЙСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА,
 ИМЕЮЩЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

§ 1. Связь между изображениями преобразованных по Лапласу ядра $K(t)$ и резольвенты $R(t)$ уравнения Вольтерра второго рода с разностным ядром имеет вид

$$\frac{1}{1-\bar{K}} = 1 + R, \quad (1.1)$$

где черточками отмечены изображения соответствующих функций. Если изображение резольвенты удастся разложить в сходящийся при $\operatorname{Re} p > s_0 > 0$ ряд по обратным степеням операционной переменной p

$$\bar{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}, \quad (1.2)$$

то сама резольвента представится рядом

$$R(t-\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (t-\tau)^n}{(n+1)!}. \quad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) составляют содержание тождества Вольтерра в операционной форме [1] (стр. 122).

Если в качестве ядра $K(t-\tau)$ взять функцию Абеля

$$I_\alpha = \lambda \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (\alpha > -1), \quad (1.4)$$

то резольвента получается [2] в виде

$$R(\lambda; t-\tau) = \lambda \mathcal{E}_\alpha(\lambda; t-\tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (t-\tau)^{(n+1)\alpha+1}}{\Gamma[(n+1)(\alpha+1)]}. \quad (1.5)$$

Функция Ю. Н. Работнова $\mathcal{E}_\alpha(\lambda; t-\tau)$ [3] в теории наследственной упругости выбирается в качестве ядра наследственности.

Соответствующий подбор параметров по опытным кривым позволяет с ее помощью хорошо описывать процессы деформирования упруго-наследственных систем. Выведенные в работах [3-5] свойства оператора $\mathcal{E}_\alpha(\lambda)$ дают возможность эффективно решать большое число задач теории наследственной упругости.

Благодаря специальному виду оператора $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$

$$\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) f(t) = \int_0^t \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

при его воздействии на интегрируемую функцию $f(t)$ и ввиду простоты изображения функции $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t)$:

$$\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) = \frac{1}{p^{\alpha+1} - \lambda} \quad (1.7)$$

свойства операторов $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$ можно перевести на язык операционного исчисления. Все теоремы для операторов $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$, переформулированные для изображений $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p)$, выглядят конструктивно так же. Приведем основные из них

$$\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) \mathfrak{A}_\gamma(\mu; p) = \frac{\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p) - \mathfrak{A}_\alpha(\mu; p)}{\lambda - \mu}, \quad (1.8)$$

$$\frac{1}{1 - \alpha \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p)} = 1 + \alpha \mathfrak{A}_\alpha(\lambda + \alpha; p), \quad (1.9)$$

$$\mathfrak{A}_\alpha^n(\lambda; p) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} \mathfrak{A}_\alpha(\lambda; p). \quad (1.10)$$

Выражения (1.7)–(1.10) позволяют линейные статические (без учета инерционных сил) задачи теории наследственной упругости с ядром наследственности вида $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t - \tau)$ эффективно решать также и операционным методом. Кроме того, знание изображения функции $\mathfrak{A}_\alpha(\lambda; t)$ согласно (1.7) дает возможность получить новые свойства интегральных операторов $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda)$. Так, ниже будет получено выражение произведения $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu)$, когда $\alpha \neq \gamma$, при его воздействии на степенную функцию.

§ 2. Преобразованное по Лапласу выражение $\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu) t^k$ имеет вид

$$L[\mathfrak{A}_\alpha^*(\lambda) \mathfrak{A}_\gamma^*(\mu) t^k] = \frac{\Gamma(1+\delta)}{(p^{\alpha+1} - \lambda)(p^{\gamma+1} - \mu) p^{1+\delta}}, \quad (2.1)$$

где L — оператор преобразования Лапласа.

Пусть $\alpha + 1 = \frac{a}{c}$ и $\gamma + 1 = \frac{m}{n}$ — несократимые дроби меньше единицы, а числа a, c, m, n — целые. Правую часть (2.1) с помощью подстановки $p = z^{cn}$ можно представить конечными суммами вида:

$$\sum_{k=1}^{k=an} \frac{A_k \Gamma(1+\delta) p^{\frac{a}{c} - \frac{k}{cn} - 1 - \delta}}{p^{\frac{a}{c} - \delta}} + \sum_{l=1}^{l=cm} \frac{B_l \Gamma(1+\delta) p^{\frac{m}{n} - \frac{l}{cn} - 1 - \delta}}{p^{\frac{m}{n} - \delta}} =$$

$$= \Xi_a(\lambda; p) \Gamma(1+\delta) \sum_{k=1}^{an} A_k p^{\frac{a}{c} - \frac{k}{cn} - 1 - \delta} + \Xi_b(\mu; p) \Gamma(1+\delta) \sum_{s=1}^{cm} B_s p^{\frac{m}{n} - \frac{s}{cn} - 1 - \delta} \quad (2.2)$$

Постоянные A_k и B_s определяются методом неопределенных коэффициентов.

Возвращаясь к оригиналам, получим для любого $\delta > 0$ и для $\delta < 0$ при $\delta + 1 > \max \left\{ \frac{a}{c} - \frac{1}{cn}, \frac{m}{n} - \frac{1}{cn} \right\}$

$$\begin{aligned} \Xi_a^*(\lambda) \Xi_b^*(\mu) t^k &= \sum_{k=1}^{an} A_k \Xi_a^*(\lambda) \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma\left(-\frac{a}{c} + \frac{k}{cn} + 1 + \delta\right)} t^{k - \frac{a}{c} + \frac{k}{cn}} + \\ &+ \sum_{s=1}^{cm} B_s \Xi_b^*(\mu) \frac{\Gamma(1+\delta)}{\Gamma\left(-\frac{m}{n} + \frac{s}{cn} + 1 + \delta\right)} t^{k - \frac{m}{n} + \frac{s}{cn}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $a = \gamma$ (2.3) переходит в формулу Ю. Н. Работнова [3]. Непосредственное вычисление по формуле (2.3) затруднительно ввиду медленной сходимости ряда (1.5). Поэтому для больших значений t удобнее пользоваться соответствующей аппроксимацией. Представляя изображение $\Xi_a^*(\lambda) t^k$ в виде

$$\frac{\Gamma(1+\delta)}{p^{1+\delta}(p^r - \lambda)} = -\Gamma(1+\delta) \sum_{n=0}^N \lambda^{-n-1} p^{r(n-1)} + r_N(p), \quad (2.4)$$

по теореме 11 работы [6] (стр. 218) получаем при $0 < r = 1 + \alpha < 1$ и любом λ (в общем случае комплекснозначном)

$$\Xi_a^*(\lambda) t^k = - \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(1+\delta)}{\lambda^{n+1} \Gamma(1+\delta - nr)} t^{k-nr} + \text{Res} \frac{\Gamma(1+\delta) e^{pt}}{p^{1+\delta}(p^r - \lambda)} + r_N(t), \quad (2.5)$$

где вычет вычисляется в полюсе $p = \lambda^{\frac{1}{r}}$ при $|\arg \lambda| < \pi r$ и отсутствует в противном случае.

При $\lambda < 0$ первый член суммы в выражении (2.5) совпадает с аппроксимацией автора [7], а аппроксимация, полученная в работе [8], есть частный случай (2.5) при $\delta = 0$.

Оценка остаточного члена методами работы [6] дает

$$|r_N(t)| \leq \frac{\Gamma(1+\delta) \Gamma(rn + r - \delta)}{\pi c |\lambda|^{N+1}} t^{-rn-r+\delta}, \quad (2.6)$$

$$\text{где } c = \begin{cases} |\lambda| \sin \phi & \text{при } 0 < \phi < \frac{\pi}{2} \\ |\lambda| & \text{при } \phi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

а $\phi = |\pi r - \arg \lambda|$.

§ 3. Решение ряда задач теории наследственной упругости со сложными реологическими свойствами связано с нахождением резольвенты ядра вида

$$K = a_1 \mathfrak{D}_\lambda(\lambda; t - \tau) + a_2 \mathfrak{D}_\mu(\mu; t - \tau). \quad (3.1)$$

Согласно (1.1) изображение резольвенты ядра (3.1) представится так

$$\tilde{R} = \frac{a_1(p^{\gamma+1} - \mu) + a_2(p^{\alpha+1} - \lambda)}{(p^{\alpha+1} - \lambda)(p^{\gamma+1} - \mu) - a_1(p^{\gamma+1} - \mu) - a_2(p^{\alpha+1} - \lambda)}. \quad (3.2)$$

Полагая, как и раньше, что $\alpha + 1 = \frac{a}{c}$, $\gamma + 1 = \frac{m}{n}$ — несократимые

дроби, можно рационализировать выражение (3.2) подстановкой $p = z^{cn}$. Однако, разложение на множители получившегося в знаменателе многочлена высокой степени затруднительно. Приблизительные значения параметров a и γ , определяемые в результате обработки опытных кривых ползучести, позволяют обходиться многочленами не выше пятой степени в случае, когда $\alpha + 1$ в 1,5; 2; 3 и 4 раза больше, чем $\gamma + 1$. Представив изображение резольвенты (3.2) суммой простых дробей, можно с помощью (1.7) перейти к оригиналам.

§ 4. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о прогибе свободно опертой по контуру трехслойной изотропной пластинки со слоями одинаковой толщины, равной $\frac{h}{3}$, обладающими наследствен-

ной упругостью, причем к среднему слою из одного материала прижимают два одинаковых слоя из другого материала. Жесткость D такой пластинки по книге С. Г. Лехницкого [9] (стр. 265) имеет вид

$$D = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{3} \right)^3 \left(\frac{26 E_1}{1 - \nu_1^2} + \frac{E_2}{1 - \nu_2^2} \right), \quad (4.1)$$

где E_1 , ν_1 и E_2 , ν_2 — упругие постоянные соответственно внешних и внутреннего слоев.

По принципу Вольтерра-Работнова [3] прогиб такой пластинки получим заменой в решении соответствующей упругой задачи [10] (стр. 119) жесткости при изгибе D оператором

$$D_t = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{3} \right)^3 \left\{ \frac{26 E_{01}}{1 - \nu_1^2} [1 - \chi_1 \mathfrak{D}_\lambda^*(\beta_1)] + \frac{E_{02}}{1 - \nu_2^2} [1 - \chi_2 \mathfrak{D}_\mu^*(\beta_2)] \right\}, \quad (4.2)$$

где E_{01} и E_{02} — упругие модули в начальный момент при $t = 0$.

Хотя коэффициенты Пуассона ν_1 и ν_2 меняются со временем, квадраты их величин достаточно малы, чтобы с небольшой погрешностью можно было принять в качестве ν_1 и ν_2 некоторые средние их значения.

Величина прогиба рассматриваемой пластинки имеет вид

$$w = \frac{12 Q(x, y)}{\left(\frac{h}{3} \right)^3 a_0 [1 - a_1 \mathfrak{D}_\lambda^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_\mu^*(\beta_2)]}, \quad (4.3)$$

где

$$a_0 = \frac{26 E_{01}}{1 - \gamma_1^2} + \frac{E_{02}}{1 - \gamma_2^2}, \quad a_1 = \frac{26 \gamma_1 E_{01}}{(1 - \gamma_1^2) a_0}, \quad a_2 = \frac{\gamma_2 E_{02}}{(1 - \gamma_2^2) a_0},$$

$Q(x, y)$ — величина, зависящая от размеров и формы пластинки, от величины и распределения нагрузки и независящая от свойств материала пластинки.

Обращение выражения $\frac{1}{1 - a_1 \mathfrak{D}_x^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_1^*(\beta_2)}$ согласно [4] сводится к нахождению резольвенты R ядра $K = a_1 \mathfrak{D}_x(\beta_1; t - \tau) + a_2 \mathfrak{D}_1(\beta_2; t - \tau)$. Изображение резольвенты для этого случая имеет вид (3.2).

Рассмотрим числовой пример для пластинки, которая находится при комнатной температуре и имеет внутренний слой медный, а наружные из алюминия. Обработывая опытные данные, приведенные в работе [11], получим для алюминия и меди соответственно:

$$\begin{aligned} \alpha &= -0,4, \quad \beta_1 = 0,11 (\text{час})^{-0,6}, \quad \gamma_1 = 0,097 (\text{час})^{-0,6}, \\ \gamma_1 &= 0,4, \quad E_{01} = 6,76 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \\ \gamma &= -0,7, \quad \beta_2 = -0,45 (\text{час})^{-0,3}, \quad \gamma_2 = 0,36 (\text{час})^{-0,3}, \\ \gamma_2 &= 0,38, \quad E_{02} = 10,2 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2. \end{aligned}$$

Тогда $a_1 = 0,091$, $a_2 = 0,0203$,

$$\begin{aligned} R &= \frac{0,0203 p^{0,6} + 0,091 p^{0,3} + 0,0432}{p^{0,9} + 0,43 p^{0,6} + 0,019 p^{0,3} + 0,0063} = \frac{0,045}{p^{0,3} + 0,421} + \\ &+ \frac{-0,063 + 0,4125i}{p^{0,3} + 0,0045 + 0,1233i} = \frac{0,063 + 0,4125i}{p^{0,3} + 0,0045 - 0,1233i}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Переходя к оригиналам по формуле (1.7), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - a_1 \mathfrak{D}_x^*(\beta_1) - a_2 \mathfrak{D}_1^*(\beta_2)} &= 1 + 0,45 \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,421) + (-0,063 + 0,4125i) \times \\ &\times \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,0045 - 0,1233i) + (-0,063 - 0,4125i) \times \\ &\times \mathfrak{D}_{-0,7}^*(-0,0045 + 0,1233i). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3) и используя аппроксимацию (2.5) при $\beta = 0$, $t = 1000 \text{ час}$, $N = 3$, получим

$$w = \frac{12Q(x, y)}{a_0 \left(\frac{h}{3}\right)^3} (1 + 2,516).$$

Итак, величина прогиба рассматриваемой пластинки с учетом наследственных свойств в 3,5 раза превосходит прогиб, образованный за 1000 час, с учетом только упругих свойств материала пластинки.

В заключение благодарю М. И. Розовского за ценные советы и обсуждение работы.

Է. Ս. ՍԻՆԱՅՍԿԻ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՆԵՅՈՂ ՀԱՏՈՒԿ
ՈՊԵՐԱՏՈՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատության մեջ կապալի ինտեգրալ ձևափոխման հիման վրա ստացված են Յու. Ն. Ռարտենովի $\Theta_2(\lambda; t - \tau)$ կորիզով ինտեգրալ օպերատորների նոր հատկություններ, որոնք թույլ են տալիս լուծել ժառանգական առաձգականության տեսության ինգերներ, երբ որպես սողքի կորիզ ընտրվում է α, β, γ տարրեր պարամետրերով $\Theta_2(\lambda; t - \tau)$ ֆունկցիաների դուժարից կազմված մի արտահայտություն: Որոշված է ժառանգական հատկություններ ունեցող եռաչերտ սալի ճկվածքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, ч. I. Линейные уравнения Вольтерра. ГТИ, Л.—М., 1934.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
3. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 12, в. I, 1948.
4. Розовский М. И. Об одном классе функций и их приложениях. Журн. вычисл. мат. и мат. физики, 2, № 1, 1962.
5. Розовский М. И. Об одном свойстве степени специального оператора и его приложении к решению упруго-наследственных динамических задач. Сборн. Ползучесть и длительная прочность. Труды всесоюзн. совещ. 1963 г. С. о. АН СССР, Новосибирск.
6. Фуке Б. А. и Левин В. И. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Специальные главы. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
7. Брызгалов Г. И. К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. Прикл. мех. и техн. физика, № 4, 1963.
8. Аннин Б. Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка. ПММ, 25, в. 4, 1961.
9. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М.—Л., 1957.
10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
11. Ровинский Б. М. и Лютица В. Г. Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1953.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. М. АПВАЗЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

О ДИФРАКЦИИ ПОЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ
 ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ
 КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

В настоящей работе мы рассмотрим поля излучения заряженной частицы, движущейся неравномерно по оси полубесконечного круглого волновода.

Выберем ось z по оси волновода. Стенки волновода описываются уравнениями $r = a$, $z > 0$. Уравнения движения частицы зададим в виде $z = z(t)$.

Введем вектор Герца Π , через который поля определяются обычным образом [1]. Из симметрии задачи видно, что отлична от нуля только лишь компонента $\Pi_z = \Pi$. Полный вектор Герца Π^1 ищем в виде $\Pi^1 = \Pi^0 + \Pi$, где Π^0 — вектор Герца, описывающий поле неравномерно движущейся частицы в пустоте, а Π описывает добавочные поля, появляющиеся из-за наличия экрана. Вектор Герца Π^0 удовлетворяет неоднородному волновому уравнению $\square \Pi^0 = -4\pi \rho$, $j = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, $j = eu(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z - z(t))$. Решая это уравнение и используя связь между полями и вектором Герца, для компоненты E_{z0} электрического поля получим следующее выражение:

$$E_{z0} = \frac{ie}{\pi} \int \frac{k^2 - \kappa^2}{\kappa} f_{\omega}(\kappa) K_0(\sqrt{\kappa^2 - k^2}r) e^{i\kappa z} d\kappa, \quad (1)$$

где

$$f_{\omega}(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\kappa z(t) + i\omega t} dt, \quad k = \frac{|\omega|}{c}, \quad \text{Im } k > 0, \quad \text{Im}(\sqrt{\kappa^2 - k^2}) > 0.$$

Вектор Герца Π удовлетворяет однородному волновому уравнению и имеет вид [2]

$$\Pi_{\omega} = -\frac{2\pi^2 a}{\omega} \int \left\{ \begin{matrix} I_0(vr) H_0^1(va) \\ I_0(va) H_0^1(vr) \end{matrix} \right\} F(w) e^{i\omega z} dw, \quad (2)$$

где $v = \sqrt{k^2 - \omega^2}$, $\text{Im } v > 0$. (Верхнее выражение для $r < a$, а нижнее для $r > a$). Здесь $F(w)$ — неизвестная функция, которую мы можем определить с помощью граничного условия $E_z^1 = 0$ при $r = a$, $z > 0$

и условия отсутствия токов на продолжении стенок волновода, то есть при $r = a$, $z < 0$. С помощью этих условий получаем систему парных интегральных уравнений типа Винера-Хопфа

$$\begin{aligned} \pi a \int_0^\infty v^2 I_0(va) H_0^1(va) F(w) e^{i w z} dw = \\ = - \frac{i e \omega}{2 \pi^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 - k^2}{x} f_-(x) K_0(\sqrt{x^2 - k^2} a) e^{i x z} dx, \quad z > 0, \\ \int_{-\infty}^\infty F(w) e^{i w z} dw = 0, \quad z < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решая эту систему методом парных интегральных уравнений [2; 3], получаем

$$F(w) = \frac{i e \omega}{8 \pi^2 a} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{k^2 - x^2} \varphi_2(x) f_-(x) dx}{\sqrt{k^2 - w^2} \varphi_2(w) I_0(\sqrt{k^2 - w^2} a) (w - x)x}, \quad (4)$$

где $\varphi_2(x)$ — функция, голоморфная в нижней полуплоскости комплексного переменного x . Ее можно найти, например, в [2].

Рассмотрим поля внутри волновода $r < a$, $z > 0$. Подставляя (4) в (2) и интегрируя по w , получим Π_{-} . Для вектора Герца полного поля внутри волновода будем иметь

$$\begin{aligned} \Pi_{-}^1 = \frac{i e}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[K_0(\lambda r) - \frac{K_0(\lambda a)}{I_0(\lambda a)} I_0(\lambda r) \right] \frac{f_-(x)}{x} e^{i x z} dx + \\ + \frac{e}{2} \sum_m \frac{I_0(v_m r) H_0^1(v_m a) e^{i w_m z}}{\sqrt{k^2 - w_m^2} \varphi_2(w_m)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{k^2 - x^2} \varphi_2(x) f_-(x) dx}{x I_0(\lambda a) (w_m - x)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $w_m = \sqrt{k^2 - \frac{v_m^2}{a^2}}$, $v_m = \sqrt{k^2 - w_m^2}$, $\lambda = \sqrt{x^2 - k^2}$, а v_m есть корень уравнения $I_0(v_m) = 0$. Вектор Герца Π_{-} вне волновода имеет вид

$$\Pi_{-} = - \frac{2 \pi^2 a}{\omega} \int_0^\infty F(w) I_0(va) H_0^1(vr) e^{i w z} dw. \quad (6)$$

Заметим, что интегралы по x берутся в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому аргументы функций Бесселя в этих интегралах могут быть действительными или мнимыми, смотря по тому $|x| > k$ или $|x| < k$. Это связано с тем, что поле неравномерно движущейся частицы состоит как бы из двух частей: поля, увлекаемого частицей и поля излучения из-за неравномерности движения. Первые поля падают экспоненциально с увеличением r , вторые падают как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, то есть как поля излучения. Поля излучения дифрагируют на открытом конце волновода, а поля, увлекаемые частицей, дифрагируют на открытом конце волновода и дают добавочное излучение. В случае равномер-

ного движения имеются только экспоненциально падающие поля, и излучение возникает только при пролете мимо открытого конца [1].

Первый член в (5) описывает поле неравномерно движущейся частицы в бесконечном круглом волноводе, а второй член есть вклад в поле от открытого конца. Функция $f_m(x)$ может иметь различные аналитические свойства по x . Если $f_m(x)$ не имеет разрывов в плоскости x , то вычеты в нулях функции Бесселя дают волны, распространяющиеся в бесконечном волноводе.

В случае, когда $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$, $|\omega| < \Omega$, где Ω — какое-то определенное значение частоты, неравномерно движущаяся частица в бесконечном волноводе не излучает, и излучение появляется лишь только из-за открытого конца. Для этого случая в пространстве вне волновода можно получить поля излучения на больших расстояниях от начала координат интегрированием по методу перевала.

$$\Pi_m = - \frac{e \cdot e^{ikR}}{2\pi R \sqrt{2k} \sin \frac{\theta}{2}} \int \frac{\sqrt{k^2 - x} I_0(ka \sin \theta) f_m(x) \varphi_0(x) dx}{(k \cos \theta - x) I_0(\sqrt{x^2 - k^2} a) \varphi_2(k \cos \theta) x}, \quad (7)$$

а спектральная плотность излучения вне волновода определяется отсюда по формуле

$$W_m = ck^4 \sin^2 \theta |\Pi|^2 R^2 d\Omega. \quad (8)$$

В случае, когда $f_m(x) \neq 0$ при $|x| \leq k$, положение несколько усложняется тем, что появляется необходимость учитывать излучения неравномерно движущейся частицы в пустоте.

Рассмотрим некоторые частные случаи движения частицы. В случае равномерного движения $f_m(x) = \delta(xu - \omega)$ интеграл по x сразу берется, и результаты переходят в результаты работы [1]. Заметим, что в этом случае всегда $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$.

В случае движущегося осциллятора $z(t) = ut + b \cos \omega_0 t$ функция $f_m(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n I_n(xb) \delta(xu - \omega_0 n + \omega)$. Полный вектор Герца внутри волновода будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi_m^i = & \frac{ie}{\pi u} \sum_n \frac{(-i)^n I_n(x_n b)}{x_n} \left[K_0(\lambda_n r) - \frac{K_0(\lambda_n a)}{I_0(\lambda_n a)} I_0(\lambda_n r) \right] e^{ix_n z} + \\ & + \frac{e}{2u} \sum_{m,n} \frac{(-i)^n I_0(v_m r) H_0^1(v_m a) I_n(x_n b) \varphi_2(x_n) e^{i\omega_m z}}{\sqrt{k^2 - \omega_m^2} \varphi_2^*(\omega_m) I_0(\lambda_n a) (\omega_m - x_n) x_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\lambda_n = \sqrt{x_n^2 - k^2}$, $x_n = \frac{\omega_0 n - \omega}{u}$.

Заметим, что в первом члене при мнимых λ_n имеются полюса в точках $\lambda_n a = \gamma_k$, то есть $x_n = \omega_k$. Это означает, что в бесконечном волноводе излучаются преимущественно лишь определенные частоты, которые легко находятся из этого условия. Во втором члене имеются

аналогичные особенности. При $I_m \omega \pi > 0$ волны, происходящие от второго члена, затухают, вглубь волновода. Приведем еще выражение для вектора Герца Π_m в пространстве вне волновода для частот $|\omega| < \Omega = \frac{\omega_0}{1 + \beta}$. В этом случае $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$ и можно применить формулу (7)

$$\Pi_m = - \frac{e \cdot e^{ikR}}{2\pi R \sqrt{2k \sin \frac{\theta}{2}}} \sum_n \frac{(-i)^n \sqrt{k - x_n} I_0(ka \sin \theta) I_n(x_n b) \varphi_2(x_n)}{(k \cos \theta - x_n) I_0(\lambda_n a) x_n u \varphi_2(k \cos \theta)} \quad (10)$$

Излучение во все открытое пространство для частот $\omega < \Omega$ определяется выражением

$$W_m = \frac{ek^2}{2\pi u^2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta I_0^2(ka \sin \theta)}{|\varphi_2(k \cos \theta)|^2 (1 - \cos \theta)} \times \\ \times \left| \sum_n (-i)^n \frac{\sqrt{k - x_n} I_n(x_n b) \varphi_2(x_n)}{(k \cos \theta - x_n) I_0(\lambda_n a) x_n} \right|^2 d\theta \quad (11)$$

Заметим, что при $b \rightarrow 0$ все члены суммы при $n \neq 0$ стремятся к нулю из-за множителя $I_n(x_n b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$ и $n \neq 0$. Тогда вместо x_n нужно поставить $x_0 = \frac{\omega}{u}$, следовательно, требование, что $f_m(x) = 0$ при $|x| < k$, выполняется для всех частот, и формула (11) переходит в формулу излучения равномерно движущейся частицы.

Член с $n = 0$ в формуле (11) дает основной вклад в излучение и с точностью до множителя $I_0^2\left(\frac{\omega}{u} b\right)$ совпадает с формулой для излучения равномерно движущейся частицы. С ростом номера n по модулю все члены суммы (11) начинают экспоненциально падать.

Физико-техническая лаборатория

АН Армянской ССР

Поступила 19 III 1964

ՅՈՒ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵՂՐԱԿՅԱՆ.

ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԶՈՓ ՇԱՐՃՎՈՂ ԼԻՑԷԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ԴԱՇՏԻ
ԴԻՖՐԱԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆԻ ԿՈՍԱՆՎԵՐՋ ԴԱՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔԱՏԱՐԻ ՎՐԱ

Ա մ ֆ ո լ ո լ մ

Հողմածուժ դիտարկված է անհավասարաչափ շարժվող լիցքավորված մասնիկի դաշտի դիֆրակցիան կիսաանվերջ զլանային ալիքատարի վրա: Ստացված են արտահայտություններ դաշտերի համար ալիքատարի ներսում և ազատ տարածության մեջ: Դիտարկված են մասնավոր դեպքեր՝ հավասարաչափ շարժվող մասնիկի դեպքում և հավասարաչափ շարժվող օսցիլլատորի դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение точечной заряженной частицы, пролетающей по оси полубесконечного круглого волновода. ЖТФ. 34, вып. 4, 1964, 711.
2. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Советское радио, М., 1953.
3. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. ИЛ, М., 1962.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. И. ГОЛЬДМАН

ДИРАКОВСКИЙ ЭЛЕКТРОН В ПОЛЕ ПЛОСКОЙ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В в е д е н и е

Уравнение Дирака для электрона во внешнем поле допускает точное решение лишь в небольшом числе случаев, важнейшими среди которых являются: однородное постоянное магнитное поле, кулоново поле и поле плоской волны. Последнему случаю посвящено помимо оригинальной работы Волкова [1] еще несколько работ [2, 3, 4]. В [1] дано решение для монохроматической и набора монохроматических плоскополяризованных волн, полученное квадрированием уравнения Дирака. Тауб [2, 3] применил к той же задаче формальный прием зависящего от координат матричного „преобразования Лоренца“.

В § 1 дается решение уравнения Дирака для случая произвольной плоской электромагнитной волны, основанное на использовании проекционных матриц, что приводит к существенным упрощениям.

Важным для приложений вопросом является разделение решений на электронные и позитронные состояния. Очевидно, что для правильного решения этого вопроса совершенно недостаточно одного лишь требования, чтобы это разделение совпадало с обычным, когда поле отсутствует. Применение в некоторых работах (см. напр. [5])

для этой цели оператора $\Gamma = \frac{H \pm E}{2E}$, следовательно, является незаконным. В § 2 дано решение этого вопроса, основанное на рассмотрении ограниченного электромагнитного цуга.

В [6] плосковолновое решение используется для вычисления комптоновского рассеяния интенсивных потоков фотонов. При этом возникает вопрос об ортогональности системы решений уравнения Дирака. Доказательство ортогональности полученных решений приводится в § 3. Наконец, в § 4 рассмотрен случай монохроматической волны.

§ 1. Решение уравнения Дирака для электрона в поле
плоской волны

Рассмотрим произвольную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении оси z и описываемую вектор-

-потенциалом $\vec{A}(z-t)$. Вектор $\vec{A}$ в силу поперечности имеет две компоненты в плоскости xu . Запишем уравнение для волновой функции электрона ψ

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi, \quad H = \vec{\alpha} [\vec{p} - e \vec{A}(z-t)] + \alpha_z \hat{p}_z + \beta m, \quad (1)$$

где $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$ и $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ — матрицы Дирака и все векторы лежат в плоскости xu . Будем искать решение в виде

$$\psi = e^{i \vec{p} \vec{r} - i \lambda t} \chi(z-t). \quad (2)$$

Для χ получим уравнение

$$-i(1 - \alpha_z) \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m - \lambda) \chi, \quad (3)$$

где

$$\vec{\pi}(\tau) = \vec{p} - e \vec{A}(\tau).$$

Введем в рассмотрение эрмитовы проекционные матрицы $a_{\pm} = \frac{1 \pm \alpha_z}{2}$. Их собственные значения — 0, 0, 1, 1, и они обладают следующими свойствами:

$$a_+^2 = a_+, \quad a_-^2 = a_-, \quad a_+ a_- = a_- a_+ = 0, \quad a_+ + a_- = 1; \\ a_+ \vec{\alpha} = \vec{\alpha} a_-, \quad a_+ \beta = \beta a_-. \quad (4)$$

Представим χ в виде

$$\chi = \chi_+ + \chi_-, \quad \chi_{\pm} = a_{\pm} \chi. \quad (5)$$

Тогда из (3) следует

$$-2i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m) \chi_+ - \lambda \chi_-, \quad (6)$$

$$0 = (\vec{\alpha} \vec{\pi} + \beta m) \chi_- - \lambda \chi_+. \quad (6a)$$

Исключив χ_+ , найдем уравнение для χ_-

$$-2i \frac{\partial \chi_-}{\partial \tau} = \frac{\vec{\pi}^2 + m^2 - \lambda^2}{\lambda} \chi_-, \quad (7)$$

решение которого имеет вид

$$\chi_-(\tau) = e^{i S(\tau)} \chi_0, \quad (8)$$

где

$$S(\tau) = \frac{1}{2\lambda} \int_0^\tau (\vec{\pi}^2 + m^2 - \lambda^2) d\tau, \quad (8a)$$

а χ_0 — постоянный биспинор, удовлетворяющий условию $a_+ \chi_0 = 0$. Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -s_z \end{pmatrix} v, \quad (9)$$

где v — произвольный постоянный двухкомпонентный спинор.

Используя (5) и (6a), находим

$$\psi = \begin{pmatrix} \lambda + m + s_z s p \\ (m - \lambda) s_z + s p \end{pmatrix} v e^{iS(\tau) - i\epsilon - i p x - i p t - i p z}, \quad (10)$$

причем $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A}(z - t)$, а $S(\tau)$ определяется из (8a). Уравнение (10) дает решение задачи о движении электрона в поле произвольной плоской волны.

§ 2. Физический анализ решения

Прежде всего необходимо выделить электронные и позитронные состояния. С этой целью предположим, что электромагнитная волна $\vec{A}$ представляет собой ограниченный пакет, то есть $\vec{A}(\tau)$ обращается в нуль при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Тогда ψ с точностью до постоянного фазового множителя переходит в плоскую волну при $\tau \rightarrow \pm \infty$:

$$\psi \approx \begin{pmatrix} \lambda + m + s_z s p \\ (m - \lambda) s_z + s p \end{pmatrix} v e^{i\vec{p} \cdot \vec{r} + i \left(\frac{\vec{p}^2 + m^2 - \lambda^2}{2\lambda} \right) z - i \left(\frac{\vec{p}^2 + m^2 + \lambda^2}{2\lambda} \right) t}. \quad (11)$$

Отсюда находим, что при $t \rightarrow \pm \infty$

$$p_z = \frac{\vec{p}^2 + m^2 - \lambda^2}{2\lambda}, \quad \epsilon = \frac{\vec{p}^2 + m^2 + \lambda^2}{2\lambda}, \quad \lambda = \epsilon - p_z, \quad (12)$$

и, как нетрудно проверить, автоматически выполняется соотношение $\epsilon^2 = p^2 + p_z^2 + m^2$. Поскольку знаки ϵ и λ совпадают, область изменений $\lambda \in [-\infty, 0]$ отвечает позитронному, а $[0, \infty]$ электронному состояниям. Может показаться неожиданным то обстоятельство, что ϵ и p_z до и после взаимодействия одинаковы, несмотря на воздействие поля, зависящего от z и t . Этот парадокс находит свое разрешение в том, что

работа электрического поля $\int \vec{E} dt = \vec{A}(+\infty) - \vec{A}(-\infty)$ при наших

предположениях ($\vec{A} \rightarrow 0$) обращается в нуль, а магнитное поле, как

известно, работы над зарядом не производит. Если пакет таков, что значения $\vec{A}$ на пределах разные, простые соотношения (12) не будут справедливы.

Перейдем теперь к рассмотрению состояний поляризации. Как известно [7], между двумя спинорами $\begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix}$ в плоской волне вы-

полняется соотношение $w' = \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{z + m} w$. Несложные выкладки показывают, что это соотношение выполняется и для верхнего и для нижнего спиноров, входящих в (11). Если $\vec{p} = 0$, то, выбрав в качестве w собственные функции σ_z , получим два ортогональных состояния:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (спин вдоль оси } z \text{)}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (спин против оси } z \text{)}.$$

Отметим, что поляризация после взаимодействия с плоской волной не меняется (это утверждение, однако, неточно, ввиду наличия у электрона радиационной добавки к магнитному моменту). Следует подчеркнуть также, что фазовый множитель в (10), набегающий за время действия пула, зависит от параметров плоской волны $(\vec{p}, \vec{\lambda})$.

Следует отметить, что если электрон до взаимодействия покоился, то в поле плоской волны он приобретает некоторую среднюю скорость. Это становится ясным, если вычислить плотность тока:

$$\vec{j} = \psi \vec{\alpha} \psi = \frac{2\lambda (\vec{p} - e\vec{A})}{m^2(1 + \xi^2) + \lambda^2 + \vec{p}^2}, \quad j_z = \frac{m^2 - \lambda^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2}{m^2(1 + \xi^2) + \lambda^2 + \vec{p}^2}. \quad (13)$$

Из этих выражений видно, что система координат, в которой электрон в среднем покоится ($\vec{j} = 0$), характеризуется $\vec{p} = 0$, $\lambda = m\sqrt{1 + \xi^2}$ и отлична от системы координат, где электрон покоился до взаимодействия ($\vec{p} = 0$, $\lambda = m$).

§ 3. Нормировка. Доказательство ортогональности

Для дальнейшего удобно перейти от непрерывного спектра к дискретному при помощи обычного приема, вводя условие периодичности на поверхностях куба с ребром L . В связи с этим предположим, что

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r} + L) \quad (14)$$

и потребуем, чтобы такому же условию периодичности удовлетворяла волновая функция электрона. Тогда

$$\vec{p} = \frac{2\pi n}{L}, \quad \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \xi^2) - \lambda^2}{2\lambda} = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (15)$$

где $\vec{n}$, n_z — целые числа и введено обозначение

$$\xi^2 = \frac{e^2}{m^2 L} \int_0^L \vec{A}^2 dz = \frac{e^2}{m^2} \overline{A^2}, \quad (16)$$

а также предполагается, что

$$\int_0^L \vec{A} dz = 0. \quad (17)$$

Последнее условие (15) обеспечивает периодичность $S(\tau) = S(\tau + L)$. Очевидно, что параметр

$$\xi^2 = \frac{e^2}{m^2} \overline{A_\mu^2}, \quad A_\mu = 0, \quad (18)$$

где A_μ — четыре-потенциал плоской волны явно релятивистски инвариантен и, как мы покажем сейчас, не меняется при преобразовании калибровки. Действительно, для плоской волны A_μ зависит лишь от $n \cdot x$, где n характеризует направление распространения волны $n_\mu^2 = 0$.

При калибровочном преобразовании

$$A_\mu = A_\mu + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} = A_\mu + n_\mu \varphi', \quad (19)$$

где $\varphi(n \cdot x)$ — скалярная функция. Отсюда находим, учитывая поперечность $n_\mu A_\mu = 0$, что параметр ξ не только релятивистски, но и калибровочно инвариантен.

Для того, чтобы доказать ортогональность ψ , рассмотрим интеграл

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L dz \psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z, t) \psi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{r}, z, t). \quad (20)$$

Пользуясь периодичностью

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z + L, t), \quad (21)$$

можно изменить пределы интегрирования по z и записать $I(t)$ в виде*

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L dz \psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z + t, t) \psi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{r}, z + t, t). \quad (22)$$

* Мы не пишем спинорных индексов у ψ .

Введем обозначения

$$\psi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z, t) = \varphi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, z - t, t) = \varphi(\vec{r}, \tau, t) \quad (23)$$

и заметим, что φ подчиняется уравнению

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \tilde{H} \varphi, \quad (24)$$

где

$$\tilde{H} = i(1 - \alpha_z) \frac{\partial}{\partial \tau} + \vec{\alpha}[\vec{p} - e\vec{A}(\tau)] + \beta m \quad (25)$$

— эрмитов оператор, не зависящий от времени с собственным значением λ . Согласно общим теоремам φ , относящиеся к различным собственным значениям $\tilde{H}$ и $\vec{p}$, образуют полную ортогональную систему функций в кубе L^3 . Тем самым доказано, что

$$I(t) = \int_0^L d\vec{r} \int_0^L d\tau \varphi_{\vec{p}\lambda}(\vec{r}, \tau, t) \varphi_{\vec{p}'\lambda'}(\vec{r}, \tau, t) = I(t) \delta_{\vec{p}\lambda}^{\vec{p}'\lambda'}, \quad (26)$$

то есть ортогональность ψ в произвольный момент t . Так как φ зависит от t только через $e^{-i\lambda t}$, нормировочная постоянная не зависит от t . Замечая, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\vec{p}\lambda}^+ \varphi_{\vec{p}\lambda} &= v^+ (m + \lambda + \vec{\sigma} \vec{\pi} \sigma_z, (m - \lambda) \sigma_z + \vec{\sigma} \vec{\pi}) \begin{pmatrix} m + \lambda + \sigma_z \vec{\sigma} \vec{\pi} \\ (m - \lambda) \sigma_z + \vec{\sigma} \vec{\pi} \end{pmatrix} v = \\ &= 2v^+ v (m^2 + \lambda^2 + \vec{\pi}^2), \end{aligned} \quad (27)$$

найдем, таким образом, нормировочную постоянную, которую надо ввести в ψ при условии $v^+ v = 1$:

$$c_{\vec{p}\lambda} = [2L^3 [m^2(1 + \frac{1}{2}) + \lambda^2 + \vec{p}^2]]^{-1/2}. \quad (28)$$

§ 4. Монохроматическая волна

Выделим в выражении (8а) для $S(\tau)$ член, монотонно зависящий от τ :

$$S(\tau) = \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \frac{1}{2}) - i^2}{2\lambda} \tau - \frac{e\vec{p}}{\lambda} \int \vec{A}(\tau) d\tau + \frac{e^2}{2i} \int (\vec{A}^2 - \vec{A}^2) d\tau. \quad (29)$$

Вектор-потенциал эллиптически поляризованной волны с частотой ω возьмем в виде

$$\begin{aligned}
 A_x &= -\frac{\sqrt{2}\xi m}{l} \sin \alpha \cos \omega \tau, \\
 A_y &= -\frac{\sqrt{2}\xi m}{l} \cos \alpha \cos (\omega \tau + \beta),
 \end{aligned}
 \quad (30)$$

причем $\tau = t - z$ и α, β — параметры, характеризующие поляризацию. Интегрирование в (29) дает теперь

$$\begin{aligned}
 S(\tau) &= \frac{\vec{p}^2 + m^2(1 + \xi^2) - \lambda^2}{2\lambda} \tau + \frac{\vec{p} \sqrt{2}\xi m \sin \alpha}{\lambda \omega} \sin \omega \tau + \\
 &+ \frac{\xi^2 m^2 \sin^2 \alpha}{4\lambda \omega} \sin 2\omega \tau + \frac{\xi^2 m^2 \cos^2 \alpha}{4\lambda \omega} \sin 2(\omega \tau + \beta).
 \end{aligned}
 \quad (31)$$

В частном случае $\alpha = \beta = 0$ получается результат [1] для плоскополяризованной волны.

Физический институт ГКАЭ
г. Ереван

Поступила 25 III 1964

Ի. Ի. ՎՈՎՈՅԱՆ

ԳԻՐԱԿՑԱՆ ԷԼԵԿՏՐՈՆԵՐ ՀԱՐՔ ԷԼԵԿՏՐՈՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԱՐԲԻ ԳԱՇՏՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ն. Փ. Ն. Մ.

Հոգիածում արվում է Գիրակի համասարման պարզ լուծումը հարթ ալիքի դաշտում, հիմնված պրոչեկցիոն մաթեմատիկայի օգտագործման վրա: Արված է էլեկտրոնային ու պոզիտրոնային վիճակների բաժանում և ցույց է տրված, որ էլեկտրոնի բեկոսացումը հարթ ալիքի փոխադրեցությունից հետո մնում է անփոփոխ: Լուծման ֆիզիկական առաջնությունը հիմնված է էլեկտրամագնիսական ալիքի վերջնական ցույցի ուսումնասիրության վրա: Մոնոթորմատիկ հարթ բեկոսացված ալիքի մասնավոր դեպքում լուծումը համընկնում է Վոլկովի հաշտի արդյունքի հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Volkov D. M. Eine neue Lösung der Diracsche Gleichung. Z. Phys., 94, 25, 1935.
2. Taub A. H. New approach to the solution of the Dirac equation. Rev. Mod. Phys., 21, 1949, 388.
3. Taub A. H. The movement of electron in electromagnetic field. Phys. Rev., 73, 1948, 786.
4. Sengupta N. D. On the solution of the equation of electron in the field of radiation. Bull. Calcutta Math. Soc., 39, 1947.
5. Reiss H. R. Absorption of light by light. J. Math. Phys., 59, 1962.
6. Гольдман И. И. Эффекты интенсивности в комптоновском рассеянии. ЖЭТФ, 46, вып. 4, 1964.
7. Ахмезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Гостехиздат, М., 1959.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

БЕЗИРГАНЯН П. А., ЗАЗЯН З. Ф., АВУНДЖЯН В. И.

МЕТОД ИЗГОТОВЛЕНИЯ АЛЮМИНИЕВЫХ МОНОКРИСТАЛЛОВ
С КРИВИЗНОЙ ОТРАЖАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ, В ДВА РАЗА
МЕНЬШЕЙ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

Даже при идеально изогнутом кристалле, используемом в качестве анализатора рентгеновского излучения, в методе Иоганна (идеальный монокристалл изогнут точно по цилиндрической поверхности) фокус точечного источника представлен небольшой конечной областью, а не точкой. Эта область увеличивается с увеличением длины действующей части анализатора, то есть фокусировка ухудшается.

Метод Иогансона дает точечную фокусировку — рентгеновские лучи, отраженные от различных точек анализатора, пересекутся в одной точке фокальной окружности независимо от действующей длины кристалла-анализатора.

При фокусировке по Иогансону кривизна поверхности кристалла-анализатора должна быть в два раза больше кривизны отражающих плоскостей. Поэтому при изготовлении кристаллов для этого метода возникают известные трудности.

В [1], [2] было показано, что алюминиевые монокристаллы дают сильные отражения от плоскостей [111]. Интенсивность отраженных лучей возрастает примерно в 50—70 раз по сравнению с отражениями от монокристаллов кварца (плоскостей [1010]).

Нами разработан способ изготовления алюминиевых монокристаллов, кривизна отражающих плоскостей которых в два раза меньше кривизны поверхности этого кристалла.

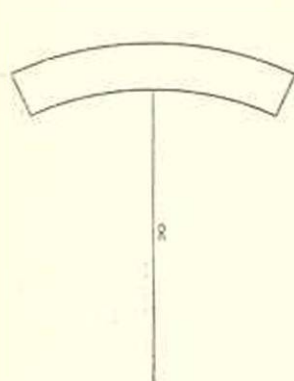
Способ состоит в следующем.

Поликристаллические алюминиевые пластинки размерами $200 \times 30 \times 0,4$ мм для снятия напряжений, возникающих при изготовлении (в прокатке), отжигались при температуре 600°C в течение 5 мин. Пластинки растягивались по длине на 2—3%, затем изгибались по цилиндрической поверхности радиуса R (образующие этой поверхности направлены по ширине пластинки, см. фиг. 1). Из этих поликристаллических образцов (с цилиндрическими поверхностями) методом рекристаллизации выращивались монокристаллы с заданной ориентировкой отражающих плоскостей [1].

Монокристаллы выращивались таким образом, что плоскости (не изогнутые) были перпендикулярны центральному радиусу $OA = R$

цилиндрической поверхности. На фиг. 2 показано круговое сечение кристалла (прямые линии—следы плоскостей).

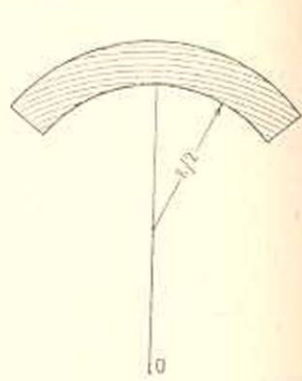
После этого полученные монокристаллы с цилиндрической поверхностью (радиуса R), но прямыми отражающими плоскостями изгибались по цилиндрической поверхности радиуса $R/2$. Таким образом, получали изогнутый кристалл, кривизна отражающих плоскостей которого в два раза меньше кривизны его поверхности—радиус кривизны отражающих плоскостей равен R , а радиус кривизны поверхности— $R/2$. Такие монокристаллы при $R = 60$ см дают фокус размерами порядка 0,3—0,4 мм.



Фиг. 1. Поликристаллический цилиндрический образец.



Фиг. 2. Отражающие плоскости неизогнуты и перпендикулярны центральному радиусу. $OA=R$ —центральный радиус.



Фиг. 3. Отражающие плоскости изогнуты по цилиндрической поверхности радиуса R , а поверхность кристалла изогнута по радиусу $R/2$.

Наш опыт показал, что достаточно трудно выращивать монокристаллы с заданной ориентировкой отражающих плоскостей. Часто рост данного кристалла прекращается и начинается рост нового кристалла.

Поэтому в наших последующих опытах выращивалось большое количество монокристаллов со случайной ориентировкой отражающих плоскостей и из полученных экземпляров выбирались такие, плоскости $[111]$, $[100]$ или $[101]$ которых были параллельными оси цилиндрической поверхности. Действительно, как известно, для фокусировки достаточно, чтобы отражающие плоскости были бы вертикальны—параллельны оси цилиндрической поверхности (метод Иоганна—Протопопова, Кошуа и Иогансона). Оказалось, что из 20 выращенных кристаллов примерно 2—3 получают такие, ориентировки отражающих плоскостей которых удовлетворяют нашим требованиям.

ԲԵՐԲՐԱՅԱՆ Պ. Է., ՉԱՉԻԱՆ Զ. Յ., ՀԱՍՈՒՆՉՅԱՆ Վ. Ի.

ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՐՈՒԹՅՈՒՆՑ ԵՐԿՈՒ ԱՆԳԱՄ ՓՈՔՐ ԿՈՐՈՒԹՅԱՄԲ
ԱՆԻՐԱԳԱՐՉՆՈՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ԱՅՈՒՄԵՆՅԱ ՄԻԱԹՅՈՒՐԵՎՆԵՐԻ
ԱՃՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Թեև աղկնյան ճառագայթների ֆոկուսացման Իոհանսոնի մեթոդը պահանջում է աչքափախ բյուրեղներ, որոնց մակերևույթի կորությունը երկու անգամ մեծ է անդրադարձնող հարթությունների կորությունից:

Աշխատության մեջ նկարագրվում է հենց աչքափախ ալյումինյա բյուրեղների պատրաստման մի մեթոդ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Н. С., Безирганян П. А. Выращивание монокристаллов алюминия заданной ориентировки. Журнал технической физики, 24, вып. 10, 1954.
2. Безирганян П. А., Зазян З. Ф., Ахунджян В. И. Изогнутые кристаллы с двумя радиусами кривизны отражающих плоскостей. Зав. лаборат., 29, вып. 2, 1963.

Г. В. БАДАЛЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛУЧЕНИЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

В в е д е н и е

Из уравнений Максвелла следует возможность получения постоянных аксиально-симметричных магнитных полей во внутренней полости ферромагнетика. В частности, этому посвящена работа [1].

Поля создаются распределением по определенному закону соленоидальных ампер-витков на внутренней цилиндрической поверхности полого железного цилиндра, имеющего конечную толщину стенок и оснований.

При выбранных различных распределениях ампер-витков можно получить целое семейство постоянных аксиально-симметричных магнитных полей в полости сердечника.

С целью проверки практической эффективности и целесообразности метода, нами были изготовлены лабораторные образцы электромагнитов и проведены подробные исследования топографии магнитных полей.

Образцы магнитов выполнены для получения и исследования 3-х типов полей (см. фиг. 2 работы [1]):

а) однородное поле

$$H_z(r, z) = H_0; \quad (1)$$

б) „колоколообразное“ поле вершиной вверх или вниз

$$H_z(r, z) = H_0 \left[1 \pm I_0 \left(\frac{\pi r}{l} \right) \cos \frac{\pi z}{l} \right]; \quad (2)$$

(на продольной оси магнита, т. е. при $r = 0$ имеем „чистый колокол“);

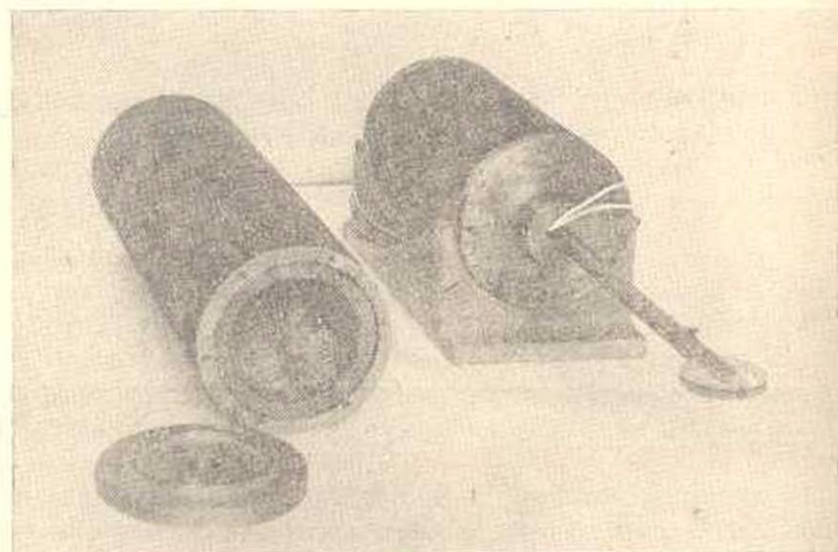
в) косинусоидальное поле

$$H_z(r, z) = H_0 I_0 \left(\frac{2\pi r}{l} \right) \cos \frac{2\pi z}{l}, \quad (3)$$

где H_0 — поле в центре ($r = 0, z = 0$), I_0 — Бесселева функция от мнимого аргумента, l — полудлина магнитного поля.

Выполнение образцов магнита. Магнитопроводом служила стальная (марка 40Х) труба с внутренним диаметром 112 мм, толщиной стенки 10 мм (фиг. 1). Для получения полей типа а), б) ра-

бочая длина трубы была 23 см, а в случае в) — 40 см. Со стороны оснований магнитопровод закрывался стальными (марка СТ-3) дисками толщиной 14 мм. С целью введения во внутрь магнита измерительного приспособления (а вообще для пропускания через магнитное поле пучка электронов), в торцевых дисках сделаны центральные отверстия $\varnothing 20$ мм (см. фиг. 1).



Фиг. 1. Общий вид образцов электромагнитов.

Распределенная соленоидальная катушка выполнялась отдельно на изоляционном каркасе с таким расчетом, чтобы после введения во внутрь магнитопровода, она близко прилегала к железу*. Для обеспечения соосности катушки с магнитопроводом каркас с катушкой одевается при сборке на кольцевые небольшие выступы, имеющиеся на торцевых дисках. Все катушки выполнены из медного провода марки ПБД-0,83. Для улучшения теплоотвода с катушки изоляционный каркас продырявлен по всей боковой поверхности, что создает доступ воздуха к токоведущим проводникам.

Согласно работе [1], закон распределения плотности ампер-витков по длине катушки, необходимый для создания требуемой формы поля $H_z(r, z)$, выражается так:

$$n(z') = \frac{1}{0,4\pi} H_z(R, z') \frac{a \times \text{вит}}{\text{см}}, \quad (4)$$

где R — средний радиус катушки.

* Изоляционный каркас нужного диаметра изготовлялся в лабораторных условиях из обманной с одной стороны эпоксидной смолы бумаги, которая наматывалась на 8—10 слоев на соответствующей гладкой металлической оправе, и после сушки при комнатной температуре в течение 24 час. приобретала необходимую жесткость.

Для получения поля типа а) выбрано $H_0 = 45$ эрст. Тогда согласно (1) и (4)

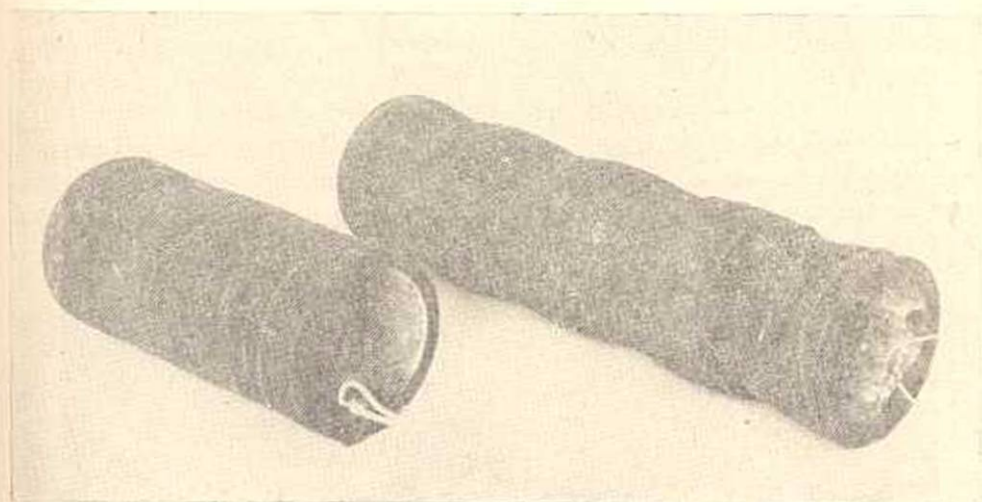
$$n(z') = 36 \frac{a \times \text{вит}}{\text{см}}. \quad (5)$$

При токе питания $I = 1a$ получается 4-слойная катушка с полным числом витков около 800.

Для получения поля типа б) на катушку образца а) была наложена дополнительная распределенная обмотка при параметрах $H_0 = 45$ эрст, $R \approx 5,4$ см. Плотность распределения, согласно (2) и (4),

$$n(z') = \pm 59,5 \cos \frac{\pi z'}{11,5} \frac{a \times \text{вит}}{\text{см}}. \quad (6)$$

При токе питания $I = 1a$ дополнительно уложено около 860 витков. При изменении направления тока в дополнительной обмотке получим „колоколообразное“ поле вершиной вниз.



Фиг. 2. Катушки с распределенной намоткой.

Наконец, для получения поля типа в) при значениях параметров $H_0 = 45$ эрст. и $R \approx 5,2$ см, согласно (3) и (4), нужно

$$n(z') = 64,0 \cos \frac{2\pi z'}{20} \frac{a \times \text{вит}}{\text{см}}. \quad (7)$$

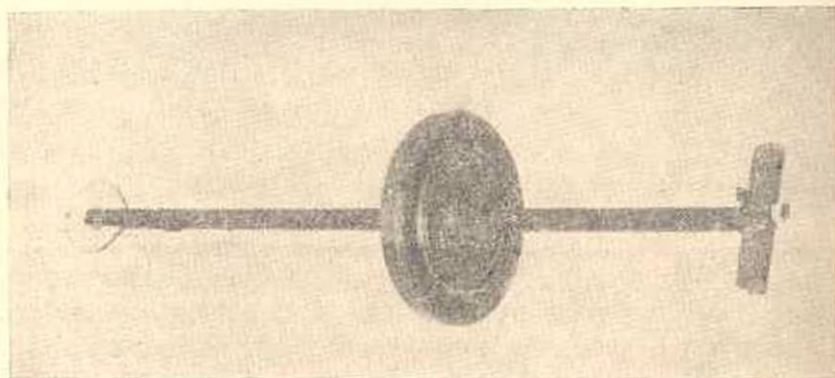
При токе $I = 1a$ полное число витков катушки составляет около 1610. Намотка распределенных обмоток осуществлялась дискретно, с интервалами по длине 1 см, причем после выполнения каждой ступени последняя закреплялась изолянтной. Подводка питающих проводов катушки после сборки магнита осуществлялась через отверстия в торцах магнитопровода.

Электромагниты питались от стандартного выпрямителя ВС—111. При измерениях ток питания электромагнитов доводился до 1,5а, причем большие токи ограничили тепловым режимом катушки.

Стабильность тока, $\sim 1\%$, обеспечивалась феррорезонансным стабилизатором С—0,75 в цепи питания выпрямителя.

Методика магнитных измерений. Для магнитных измерений использовались баллистический гальванометр М 21 и сопряженный с ним датчик поля. Последний представлял из себя небольшую плоскую катушку $\varnothing 7,6 \times \varnothing 6 \times 3,8$ (каркас из орг. стекла), содержащую 2000 витков из провода марки ПЭЛ—0,03. Благодаря применению специально сконструированного приспособления имелась возможность измерять продольную компоненту магнитного поля в различных точках пространства внутри катушки электромагнита.

Изображенное на фиг. 3 приспособление представляет вводимую во внутрь через торцевое отверстие магнита латунную трубку, на внутреннем конце которой закреплена поперечная рейка с четырьмя маленькими роликами и с натянутой на них крепкой нитью. В центре рейки на нити приклеен датчик. На наружном конце трубки на оси установлено небольшое колесико, на которое выведены через трубку и закреплены концы упомянутой нити. Вращением колесика на определенный угол, благодаря перемещению нити, достигается соответствующее радиальное смещение датчика с центрального положения. Осевое же перемещение всей трубки в целом через торцевое отверстие магнита дает возможность устанавливать датчик в различных точках вдоль длины магнита.



Фиг. 3. Измерительное приспособление с датчиком поля.

Точность относительных магнитных измерений определяется точностью отсчета на шкале гальванометра (абсолютная ошибка $\sim \pm 0,5$ м.и), стабильностью тока питания и величиной самих отбросов и числом измерений (мы повторяли измерения по 4 и больше раз). В случае образца а) отбросы гальванометра близки друг другу

(54—59) мм, и соответствующая средне-квадратичная ошибка составляет $\leq 1\%$. В случае же образцов б), в), величины отбросов меняются в широких пределах (от 3—4 мм до 118 мм) и поэтому относительная точность измерений будет различна в различных местах снятых экспериментальных распределений поля, начиная от $\leq 1\%$ при больших отбросах до $\leq 10\%$ при малых отбросах.

Результаты измерений. Программа магнитных измерений включала следующее:

1) снятие осевого распределения H_z -компоненты магнитного поля в 3-х образцах магнитов;

2) снятие радиального распределения H_z -компоненты поля как в центральном поперечном сечении магнитов, так и в сечении вблизи торца;

3) проверка влияния отверстий в торцевых дисках, конечной толщины распределенной обмотки и других факторов на распределение поля в магнитах.

На фиг. 4—5 приведены результаты измерений магнитных полей всех 3-х образцов магнитов а), б), в) по намеченной программе, причем дальние торцы были закрыты дисками без отверстий*. На тех же графиках приведены для сравнения теоретически ожидаемые распределения согласно формулам (1)—(3).

Видно, что как однородное поле, так и „колоколообразное“ или косинусоидальное поля экспериментально хорошо выявлены.

Рассмотрение экспериментальных данных в пределах точности относительных измерений, показывает близкое согласие экспериментальных и расчетных распределений.

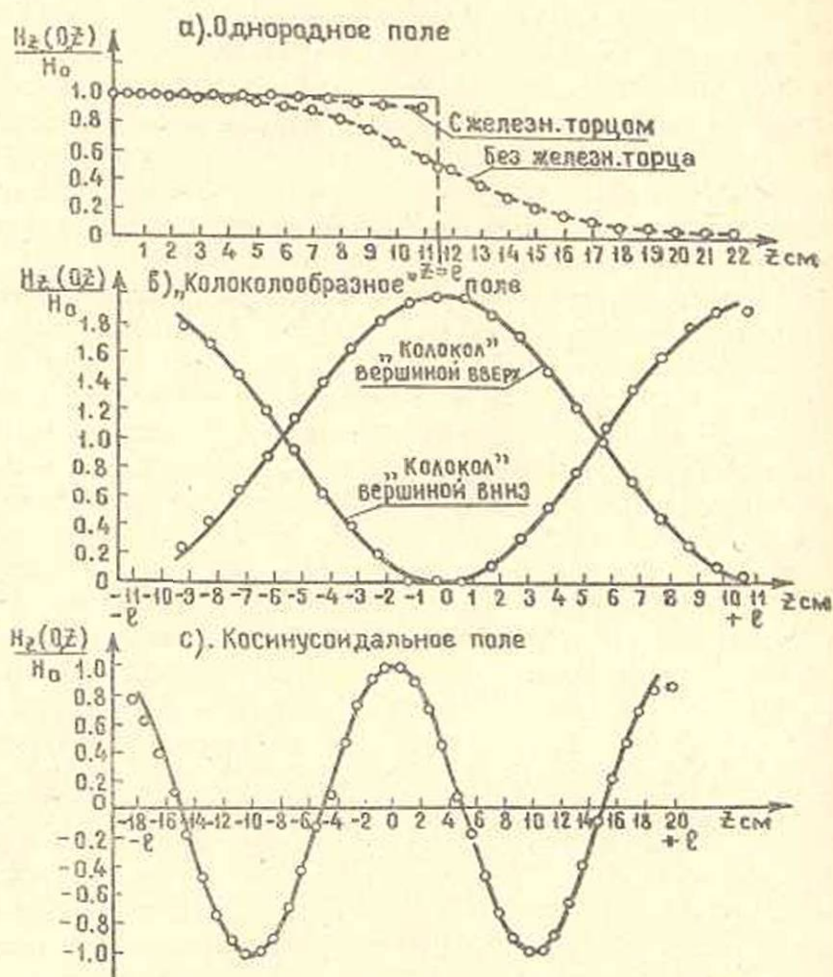
Однако, как это видно на графиках, наблюдается некоторое занижение поля до 7—8% в областях, приближающихся к торцам. Проведенное подробное исследование возможных причин показало, что наблюденное занижение поля к торцам обусловлено, по всей вероятности, неточным соблюдением основных предпосылок задачи: магнитная проницаемость сердечника бесконечна, а также распределенные ампер-витки имеют конечную радиальную толщину, составляющую около $\frac{1}{6}$ часть внутреннего радиуса сердечника. Дополни-

тельно отметим, что наличие „пассивных“ зон до 2—3 мм между стальным торцом и краем распределенной катушки увеличивает вышеупомянутое занижение поля у торцов вплоть до 10%.

Проверка влияния торцевых отверстий на картину поля осуществлялась повторением всего цикла измерений для позиции, когда торцевые диски имеют отверстия. В результате оказалось, что в пределах ошибок измерений картины поля совпадают с теми, которые имелись при отсутствии отверстия, за исключением области поля, не-

* Ввиду конструктивных особенностей измерительного приспособления, датчик не доходил до стенки дальнего торца на 0,5 см и до стенки ближнего торца на 1,5 см.

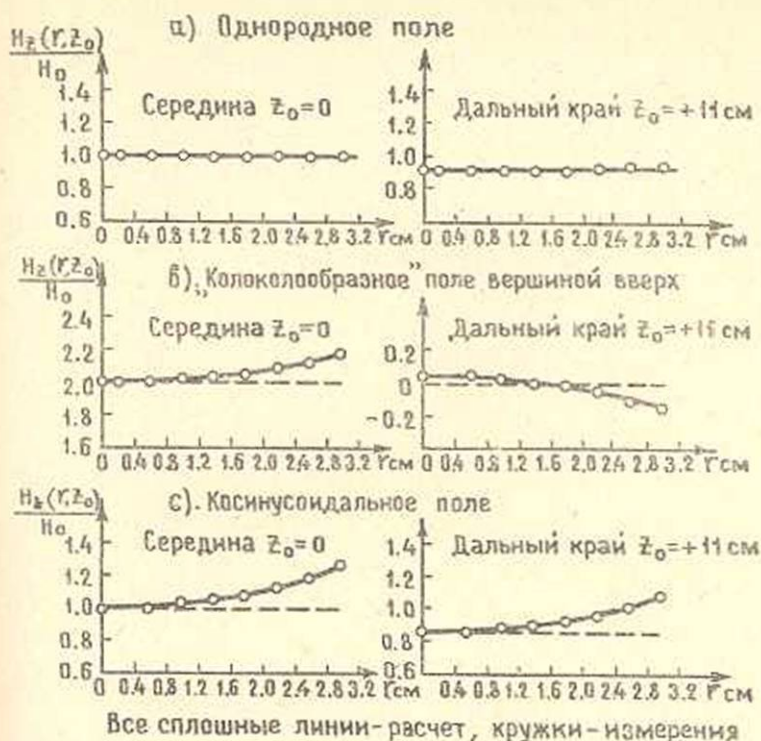
посредственно прилегающей к отверстию. Здесь, на отрезке 15—20 мм (область порядка диаметра отверстия) наблюдается более резкое занижение поля вплоть до 34—35% (сравни с 7—8% при отсутствии отверстия).



Фиг. 4. Распределение H_z -компоненты поля вдоль оси электромагнитов.

На фиг. 4а изображено осевое распределение поля, снятое при отсутствии торцевого диска вообще. Видно как сильно падает поле по сравнению со случаем, когда имеется железный торец.

Таким образом, результаты опытной проверки показывают хорошую близость измеренных топографий полей к расчетным, и, если учесть отсутствие каких-либо существенных трудностей в изготовлении этих магнитов, то по-видимому они не лишены практического интереса.



Фиг. 5. Распределение H_z -компоненты поля по радиусу электромагнитов.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Азатяну, Ф. Ц. Кечяну и Г. С. Айрапетяну за помощь при изготовлении магнитов и проведении измерений.

Физический институт
ГКАЭ

Поступила 31 III 1964

Հ. Վ. ՔԱԳԱՅԱՆ

ՏԳՅԱԼ ՉԵՎԻ ԱԲՍՐԱԼ-ՄԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ
ՍՏԱՅՄԱՆ ՌԻՍՈՒՄԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ն Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ կատարված է փակ ֆերրոմագնիսական սիստեմում ալյալ ձևի աբսիալ-սիմետրիկ հատաստուն մագնիսական դաշտերի ստացման էքսպերիմենտալ հետազոտություն:

Պատրաստված լաբորատորային էլեկտրամագնիսների միջոցով ստացվել են համասեռ, «դանդաման» ու կոսինուսային դաշտեր և շափվել են նրանց տարածական բաշխումները:

էքսպերիմենտալ և տեսականորեն սպասվող դաշտերի բաշխումների հա-

մեծատուճր տալիս է լավ համընկնում, բացառությամբ այն տիրույթների, որոնք մասնենում են մագնիսների եզրերին. այստեղ դիտվում է դաշտի լարվածության փոքր ինչ իջեցում (մինչև 7—8%):

ЛИТЕРАТУРА

1. Бадалян Г. В. Получение постоянных аксиально-симметричных магнитных полей в ферромагнитной системе. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 17, № 5, стр. 121, 1964.