ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Я. ГУСМАН

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КОШИ-РИМАНА С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = f_1(x, y, u, v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = f_2(x, y, u, v) \end{cases} \tag{1}$$

записывается в виде одного уравнения

$$w_{\bar z} = a(z, w), \tag{2}$$

где

$$z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad a(z, w) = \frac{1}{2}(f_1(x, y, u, v) + + if_2(x, y, u, v)).$$

Уравнение (2) и его решения подробно исследованы в монографии [1] для случая $a(z, w) = a(z)w + b(z)\bar{w} + c(z)$, где $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ принадлежат $L_p(\bar{D})$ или $L_{p, 2}$, $p > 2$. Ниже приводятся некоторые результаты для более общего случая, когда $a(z, w)$ непрерывна по w при любом $z \in \bar{D}$, где $\bar{D}$ — замыкание области D, измерима при любом непрерывном $w(z)$ и удовлетворяет неравенству

$$|a(z, w)| \leqslant a(z)(|w| + 1)^2 (\ln(|w| + 2))^{\beta}, \tag{3}$$

где $a(z)$ принадлежит $L_p^1(\bar{D})$ или $L_{p, 2}$, если область D неограничена, $p > 2$. Если D — область римановой поверхности R, то $a(z, w)$ должна быть ковариантой вида

$$a(z^*, w) = a(z, w)\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}^*}.$$

$a(z)$ изменяется в этом случае по закону $a(z^*) = a(z)\left|\frac{dz}{dz^*}\right|$. О пространстве L_p на R см. [2].

Регулярным решением уравнения (2) назовем непрерывную в D однозначную функцию $w(z)$, которая почти всюду имеет обобщенную производную и удовлетворяет уравнению (2).

1. D — комплексная плоскость.

Теорема 1. *При $\alpha<1$, а также при $\alpha=1$ и $\beta<0$ существует регулярное решение уравнения (2), принимающее в данной точке z_0 данное значение w_0.*

Доказательство. Введем вспомогательное переменное $\zeta(z)=$ $=w(z)-w_0$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$\zeta(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{(z_0-z)\,a(t,\zeta(t)+w_0)}{(t-z)(t-z_0)}\,d\sigma_t=N\zeta(z). \tag{4}$$

Из неравенства (3) следует, что оператор N переводит при достаточно большом натуральном n множество функций, удовлетворяющих условиям

$$C_{\frac{p-2}{p}}(f(z))<n,\quad f(z_0)=0, \tag{5}$$

в себя. По принципу Шаудера уравнение (4) имеет в этом множестве решение $\zeta_0(z)$. Функция $\zeta_0(z)+w_0$ является искомой.

Замечание 1. Условие $\alpha\leqslant 1$, так же как и непрерывность $a(z,w)$ по w, являются существенными для справедливости теоремы 1. Например, если $a(z,w)=\begin{cases}1, & |z|\leqslant 1,\quad w=0\\ 0, & |z|>0 \text{ или } w\neq 0\end{cases}$, то не существует регулярного решения уравнения (2), равного нулю в начале координат. Примеры уравнений вида (2), не имеющих целых решений, для любого $\alpha>1$ имеются в работе [3].

Замечание 2. Из условий теоремы 1 не следует единственности регулярного решения, равного w_0 в точке z_0. Например, уравнение (2) при $a(z,w)=\begin{cases}0, & |z|\leqslant 1\\ -\dfrac{4w^2}{(|zw|+1)^2}, & |z|>1\end{cases}$ имеет наряду с решением $w=0$ также решение $w_1=\begin{cases}z, & |z|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{\bar z}, & |z|\geqslant 1,\end{cases}$ которое тоже равно нулю в начале координат. Уравнение $w_{\bar z}=a(z)\,w^{1-\frac{1}{n}}$, где $a(z)\in L_{p,2}C_\alpha$, имеет ровно n регулярных решений, принимающих значение $w_0\neq 0$ в точке z_0.

2. D — ограниченная плоская область или область на замкнутой римановой поверхности.

Теорема 2. *Пусть $P_1,\cdots,P_n$ — точки D, а $w_1,\cdots,w_n$ — произвольные комплексные числа. При $\alpha<1$, а также при $\alpha=1$ и $\beta<0$ существуют однозначные решения уравнения (2), принимающие в каждой точке P_k значение w_k, $k=1,\cdots,n$.*

Доказательство. Введем вспомогательное переменное $\zeta(z)=w(z)-\varphi(z)$, где $\varphi(z)$—ограниченная на $\bar{D}$ аналитическая функция, принимающая в точке P_k значение w_k, $k=1,\cdots,n$. Полагая $\hat{A}(t,z)=A(t,z)-\sum_{k=1}^{n}A(t,z(P_k))$, где $A(t,z)$—ядро Коши на $\bar{D}$ (см. [4]), рассмотрим интегральное уравнение

$$\zeta(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_D a(t,\zeta(t)+\varphi(t))\,\hat{A}(t,z)\,d\sigma_t. \qquad (4')$$

По принципу Шаудера оно имеет решение $\zeta_0(z)$; функция $\zeta_0(z)+\varphi(z)$ является искомой.

Следствие. *Уравнение*

$$w_{\bar z}=\frac{a(z,w)}{[(z-z_1)\cdots(z-z_n)]^{\frac{p-2}{p}}}, \qquad (6)$$

где $z_1,\cdots,z_n$—различные точки плоской области D, имеет при $\alpha<1$ и при $\alpha=1$, $\beta<0$ регулярные решения.

Теорема 3. *Если последовательность $\{w_n(z)\}$ регулярных решений уравнения (2) сходится равномерно в D к $w(z)$, то $w(z)$ является регулярным решением этого уравнения.*

Доказательство. Сходящейся последовательности $\{w_n(z)\}$ соответствует по формуле

$$\varphi(z)=w(z)+\frac{1}{\pi}\iint_D a(t,w(t))\,A(t,z)\,d\sigma_t \qquad (7)$$

равномерно сходящаяся последовательность аналитических в D функций, предел которой аналитичен в D, откуда и следует справедливость теоремы 3. При доказательстве этой теоремы неравенство (3) не используется.

Теоремы 2 и 3 остаются справедливыми на произвольной открытой римановой поверхности D, если $a(z)$ имеет компактный носитель. Если D—замкнутая риманова поверхность, то, как показал Ю. Л. Родин, даже уравнение

$$w_{\bar z}=a(z) \qquad (8)$$

не имеет в общем случае регулярных решений, так как его решения выражаются формулой

$$w(z)=\Phi(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D A(t,z)\,a(t)\,d\sigma_t,$$

а $A(t,z)$ на D имеет особенности по z.

3. Частным случаем уравнения (2) является уравнение

$$w_{\bar z}=a(z,w)\,w, \qquad (9)$$

однако, оно не удовлетворяет при $\alpha > 0$ и при $\alpha = 0$, $\beta \geqslant 0$ условиям теорем 1 и 2. При $\alpha > 0$ это уравнение может не иметь регулярных решений [3], но при $\alpha = 0$ и $\beta < 1$ на уравнение (9) распространяются результаты теоремы 1. Для доказательства достаточно сделать подстановку $\zeta = \ln w$. Возможность этой подстановки обеспечивается тем, что в силу неравенства (3) ограниченное на всей плоскости и не равное тождественному нулю решение уравнения (9) является обобщенной аналитической функцией и не имеет нулей.

Пермский государственный
университет

Поступила 20 I 1964

Ս. Յա. ԳՈՒՍՄԱՆ

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՋ ՄԱՍԵՐՈՎ ԿՈՇԻ-ՌԻՄԱՆԻ ՍԻՍՏԵՄԻ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում է Կոշի-Ռիմանի $W_{\bar z} = a(z,w)$ սիստեմը, բավականաչափ ընդհանուր տեսքի աջ մասով, որ բավարարում է որոշակի գնահատականի, և ուսումնասիրվում են նրա ռեգուլյար լուծումները։ Այն դեպքում, երբ սիստեմը որոշված է ամբողջ հարթության վրա, ապացուցված է Կոշու խնդրի ռեգուլյար լուծման գոյությունը ընդհանրապես ոչ միայն այնպիսի $a(z,w)$-երի, որոնց աճը ըստ w-ի ենթարկված է մի քանի անհավասարությունների։ Համանման պնդումները երևան են բերված սահմանափակ հարթ կամ փակ ռիմանյան մակերևույթների վրա գտնվող տիրույթների դեպքում, ինչպես նաև հետազոտված է ռեգուլյար լուծումների հավասարաչափ սահմանների վարքը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
2. *Филимонова И. И.* Некоторые свойства операторов T и П на конечных римановых поверхностях. Ученые записки Пермского госуниверситета, **22**, вып. 2, 1962, 65—72.
3. *Саркисян С. Ц.* О разрушении решений систем уравнений с частными производными. ДАН АрмССР, **36**, № 5, 1963.
4. *Гусман С. Я.* и *Родин Ю. Л.* Ядро интеграла типа Коши на замкнутых римановых поверхностях. Сиб. мат. журнал, **3**, № 4, 1962, 527—531.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկ-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. А. ГАРАКОВ

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ДВОИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

В статье описывается алгоритм определения двоичных неприводимых полиномов и их показателей, приводится таблица этих полиномов для степеней $m \leqslant 11$, а для последующих степеней до $m = 20$ — таблица количественной характеристики указанных полиномов и их показателей.

Неприводимые двоичные полиномы являются основой образования бинарных циклических кодов для обнаружения и корректировки как независимых ошибок, так и пакетов ошибок [1, 2]. Поэтому, естественно, иметь удобный алгоритм определения неприводимых полиномов и их показателей.

§ 1. О двоичных неприводимых полиномах

Полиномы

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m, \tag{1.1}$$

коэффициенты которых могут принимать лишь значения 0 или 1 рассматриваются в соответствии с законами обычной алгебры за одним исключением, а именно: сложение здесь осуществляется по mod 2, например:

сложение	умножение
$1 + x^2 + x^3 + x^4$	$1 + x^2 + x^3 + x^4$
$x + x^2 + x^4$	$1 + x$
$1 + x + x^3$	$1 + x^2 + x^3 + x^4$
	$x + x^3 + x^4 + x^5$
	$1 + x + x^2 + x^5.$

Полиномы вида (1.1) с операцией сложения по mod 2 будем называть двоичными. Двоичные полиномы обладают объединительными, распределительными и вычислительными свойствами обычных полиномов. Также, как и в обычной алгебре, каждый двоичный полином может быть разложен на простые множители (то есть на простые двоичные полиномы) единственным способом.

В этой статье рассматриваются только двоичные полиномы.

Определение 1. Двоичный полином степени m называется неприводимым, если он не имеет двоичных полиномов-делителей со степенью больше нуля и меньше m. Полиномы первой степени x, $1+x$, очевидно, являются неприводимыми. Полиномы высших степеней не могут быть неприводимыми, если содержат множитель x. Поэтому неприводимые полиномы высших степеней должны обязательно содержать свободный член 1.

Легко понять, что если полином содержит четное число членов, то он не может быть неприводимым, так как будет иметь делитель $1+x$. Следовательно, неприводимые полиномы степени m надо искать во множестве полиномов вида

$$p(x) = 1 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{m-1} x^{m-1} + x^m \tag{1.2}$$

с нечетным числом членов (с нечетным весом).

В дальнейшем для полинома (1.2) мы часто будем пользоваться также обозначением $(1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}, 1)$.

Определение 2. Для полинома $p(x)$ обратным (сопряженным) называется полином

$$\overline{p}(x) = x^m p\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1.3}$$

Полином $\overline{p}(x)$ также степени m и характеризуется набором коэффициентов $(1, \alpha_{m-1}, \cdots, \alpha_1, 1)$.

Определение 3. Показателем полинома $p(x)$ называется наименьшее положительное целое число e, при котором $x^e - 1$ $(= x^e + 1 \bmod 2)$ делится на $p(x)$ без остатка.

Можно показать, что для любого целого положительного числа m существует, по крайней мере, один полином степени m, который имеет показатель $e = 2^m - 1$. Это значение является максимально возможным значением e.

Теорема 1. *Если полином $p(x)$ неприводимый, то и обратный полином $\overline{p}(x)$ неприводимый.*

Доказательство: Допустим противное, пусть

$$\overline{p}(x) = p_1(x)\, p_2(x).$$

В этом тождестве заменим x на $\frac{1}{x}$ и умножим обе его части на x^m:

$$x^m \overline{p}\left(\frac{1}{x}\right) = x^m p_1\left(\frac{1}{x}\right) p_2\left(\frac{1}{x}\right) = x^{m_1} p_1\left(\frac{1}{x}\right) x^{m_2} p_2\left(\frac{1}{x}\right) = \overline{p}_1(x)\, \overline{p}_2(x),$$

где m_1 и m_2 — соответственно степени полиномов $p_1(x)$, $p_2(x)$. В последнем равенстве слева имеем полином $p(x)$, а справа — произведение двух полиномов, степени которых больше нуля и меньше m, что противоречит условию неприводимости полинома $p(x)$.

Теорема 2. *Полиномы $p(x)$ и $\overline{p}(x)$ имеют один и тот же показатель.*

Пусть $p(x)$ имеет показатель e, а $\bar{p}(x)-\bar{e}$.

Покажем, что $\bar{e}=e$.

Полином x^e+1 делится на $p(x)$. Пусть

$$x^e+1=p(x)\,q(x).$$

В этом тождестве заменим x на $\frac{1}{x}$ и обе его части умножим на x^e, при этом получим:

$$x^e+1=x^e p\left(\frac{1}{x}\right) q\left(\frac{1}{x}\right)=x^m p\left(\frac{1}{x}\right) x^q q\left(\frac{1}{x}\right)=\bar{p}(x)\,\bar{q}(x),$$

где m и q — соответственно степени полиномов $p(x)$ и $q(x)$. Из последнего равенства вытекает, что $\bar{e}\leqslant e$. Аналогично можно показать, что $e\leqslant\bar{e}$, откуда и получим $\bar{e}=e$.

Теорема 3. *Если полином $p(x)$ принадлежит максимальному показателю $e=2^m-1$, то он неприводимый.*

Доказательство. Допустим противное, пусть

$$p(x)=p_1(x)\,p_2(x),$$

где полиномы $p_1(x)$ и $p_2(x)$ сперва предположим взаимно простыми. Далее, пусть эти полиномы имеют соответственно степени m_1, m_2 и показатели e_1, e_2.

Тогда, очевидно, полином

$$x^{e_1e_2}-1=(x^{e_1})^{e_2}-1=(x^{e_2})^{e_1}-1$$

делится как на $p_1(x)$, так и на $p_2(x)$, а следовательно, и на их произведение $p(x)$.

С другой стороны,

$$e_1e_2\leqslant(2^{m_1}-1)(2^{m_2}-1)=2^m+1-2^{m_1}-2^{m_2}<2^m-1=e,$$

что противоречит условию принадлежности $p(x)$ максимальному показателю e.

Общий случай

$$p(x)=p_1^{m_1}(x)\,p_2^{m_2}(x)\cdots p_k^{m_k}(x),$$

где $p_i(x)$, $i=1,\ 2\cdots k$ и $k\geqslant2$ — неприводимые полиномы, легко привести к рассмотренному случаю.

Наконец, остается рассмотреть случай

$$p(x)=[p_1(x)]^{m_1},$$

где $p_1(x)$ — неприводимый полином и $m_1\geqslant2$. Пусть степень полинома $p_1(x)-\gamma$, показатель $-e_1$.

Кроме того, пусть $2^{r-1}<m_1\leqslant2^r$. Тогда

$$[p_1(x)]^{m_1}/(x^{e_1}-1)^{m_1}/(x^{e_1}-1)^{2^r}=x^{e_1\cdot2^r}-1.$$

Поэтому

$$e \leqslant e_1 \cdot 2^r \leqslant (2^\gamma - 1) \cdot 2^r = 2^{\gamma + r} - 2^r < 2^{\gamma + r} - 1 \leqslant 2^{m_1 \gamma} - 1 = 2^m - 1 = e, \quad (1.4)$$

что следует из очевидных неравенств

$$r \leqslant m_1 - 1 \; (m_1 \leqslant 2^{m_1 - 1}), \quad \gamma + r \leqslant \gamma + m_1 - 1 \leqslant m_1 \gamma, \quad m_1 \geqslant 2, \quad \gamma \geqslant 1.$$

Противоречие (1.4) показывает, что последний случай также невозможен. Этим завершается доказательство теоремы. К максимальным показателям могут принадлежать только неприводимые полиномы, а к немаксимальным показателям как неприводимые, так и приводимые полиномы. Например, неприводимый полином

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^6$$

принадлежит показателю 21, этому же показателю также принадлежит полином

$$f(x) = 1 + x^2 + x^5 + x^6 = (1 + x)(1 + x + x^2)(1 + x^2 + x^3).$$

Теперь рассмотрим вопрос о количестве неприводимых полиномов степени m. Пусть $n = 2^m - 1$ имеет делители $n_1, n_2, \cdots n_k$, причем $n_1 = 1$ и $n_k = 2^m - 1$. Для каждого из этих делителей n_i имеет место сравнение

$$2^m \equiv 1 \pmod{n_i}, \quad i = 1, 2, \cdots k. \quad (1.5)$$

Однако, для некоторых из делителей n_i сравнение вида (1.5) может иметь место и при меньших, чем m степенях:

$$2^\gamma \equiv 1 \pmod{n_i}, \quad 1 \leqslant \gamma < m. \quad (1.6)$$

Для других же делителей n_i возможно только сравнение (1.5) и невозможно сравнение вида (1.6). Именно эти последние делители n_i и только они, являются теми показателями, к которым могут принадлежать неприводимые полиномы степени m. Такие делители числа $n = 2^m - 1$ обозначим через $\overline{n}_i$. Очевидно, $n_k = 2^m - 1$ является делителем этого последнего вида.

Число неприводимых полиномов степени m, имеющих показатель $\overline{n}_i$, будет $\frac{\varphi(\overline{n}_i)}{m}$, где $\varphi(\overline{n}_i)$ — функция Эйлера, показывающая число натуральных чисел, непревосходящих $\overline{n}_i$ и взаимнопростых с $\overline{n}_i$ [4].

Число неприводимых полиномов степени m, принадлежащих максимальному показателю $e = 2^m - 1$, равно $\frac{\varphi(2^m - 1)}{m}$.

Число же всех неприводимых полиномов степени m равно

$$N(m) = \sum_{\overline{n}_i / 2^m - 1} \frac{\varphi(\overline{n}_i)}{m}.$$

Например, для

$$m = 9, \quad n = 2^9 - 1 = 511 = 7 \cdot 73$$

$$\bar{n}_1 = 1, \quad \bar{n}_2 = 7, \quad \bar{n}_3 = 73, \quad \bar{n}_4 = 511,$$

имеем:

$$2^1 \equiv 1 \pmod{1}$$
$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$
$$2^9 \equiv 1 \pmod{73}$$
$$2^9 \equiv 1 \pmod{511},$$

и делителями вида $\bar{n}_i$ будут 73 и 511.

Число же всех неприводимых полиномов 9-ой степени будет:

$$\frac{\varphi(73)}{9} + \frac{\varphi(511)}{9} = 56.$$

§ 2. Описание алгоритма определения неприводимых полиномов данной степени и их показателей

Этот алгоритм может быть описан блок-схемой (фиг. 1).

Блок № 1. Для получения всех полиномов (1.2) — $(1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{m-1}, 1)$ с нечетными весами, достаточно последовательно брать все наборы вида

$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-2}, 0, \tag{2.1}$$

начиная с нулевого, и каждый из них поразрядно складывать по mod 2 с набором, который получается из (2.1) путем сдвига его разрядов на одну позицию вправо:

$$\begin{array}{r} \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-2}, 0 \\ 0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{m-3}, \gamma_{m-2} \\ \hline (0+\gamma_1), (\gamma_1+\gamma_2), \cdots, (\gamma_{m-3}+\gamma_{m-2}), (\gamma_{m-2}+0) \end{array}. \tag{2.2}$$

Полученный набор-сумма (2.2) будет иметь четный вес, так как независимо от вида набора (2.1) общее количество единиц в наборах-слагаемых четно, а в результате их модульного сложения число единиц может уменьшиться только на четное число.

Теперь, если инвертировать в наборах (2.2) последний (вообще любой фиксированный) разряд, то получим все наборы

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}) \tag{2.3}$$

с нечетными весами.

В самом деле, достаточно показать, что в результате применения описанных выше операций к двум различным наборам γ и β вида (2.1) полученные преобразованные наборы $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$ будут также различными. Действительно, допустим, что $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$ совпадают:

$$[(0+\gamma_1),\ (\gamma_1+\gamma_2),\cdots(\gamma_{m-3}+\gamma_{m-2}),\ \overline{(\gamma_{m-2}+0)}] =$$
$$=[(0+\beta_1),\ (\beta_1+\beta_2),\cdots,(\beta_{m-3}+\beta_{m-2}),\ \overline{(\beta_{m-2}+0)}],$$

откуда имели бы

$$\gamma_i=\beta_i \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ m-2),$$

что противоречит условию нетождественности γ и β.

Наконец, сложив полученные наборы (2.3) с постоянным набором $1\underbrace{00\cdots0}_{m-1}1$, получим точно 2^{m-2} наборов (полиномов) $(1, \alpha_1,\cdots \cdots\alpha_{m-1}\, 1)$ с нечетными весами.

Блок № 2. Здесь осуществляется проверка — является ли поступивший в блок очередной полином (набор) $p(x)$ с нечетным весом неприводимым или нет. Для этого полином $p(x)$ последовательно делится на все неприводимые полиномы степени $\frac{m}{2}$, либо $\frac{m-1}{2}$ в зависимости от четности или нечетности числа m, начиная с неприводимого полинома второй степени.

Фиг. 1. Блок—схема определения неприводимых двоичных полиномов данной степени и их показателей.

Так, для $m=10$ (также $m=11$) полином $p(x)$ должен делиться на все неприводимые полиномы (наборы)

111*, 1101, 11001, 11111*,
100101, 101111, 110111,

а также на их обратные полиномы, то есть всего на 12 неприводимых полиномов, которые могут быть получены непосредственно.

Символом * отмечены самосопряженные полиномы, то есть полиномы, которые совпадают со своими обратными.

При этом делении нас не интересует частное, а важно знать имеет ли место деление с остатком или без остатка.

Алгоритм самого процесса деления прост: делитель пишется под делимым так, чтобы коэффициент его члена в наивысшей степени находился под коэффициентом аналогичного члена делимого. Написанные наборы поразрядно складываются по mod 2; полученный набор-сумма сдвигается на одну позицию влево, анализируется его левый крайний разряд; если он—единица, то делитель складывается по mod 2 со сдвинутым набором, если же он—нуль, то сдвинутый набор снова сдвигается влево на один разряд и т. д. Процесс сдвигов и модульного сложения продолжается до тех пор, пока в последнем полученном наборе-сумме число разрядов станет меньше числа разрядов делителя. Последний набор-сумма будет остатком от деления. Если набор-сумма состоит только из одних нулей, то деление имеет место без остатка, в противном случае с остатком.

Если полином $p(x)$ делится на один из неприводимых полиномов степени $\frac{m}{2}$ $\left(\text{либо } \frac{m-1}{2}\right)$, то этот полином—приводимый и поэтому управление передается блоку № 1 для посылки очередного полинома (1.2) с нечетным весом.

Полином $p(x)$ будет неприводимым, если он не делится (без остатка) ни на один из неприводимых полиномов степени $\frac{m}{2}\left(\text{либо } \frac{m-1}{2}\right)$.

Из числа 2^{m-2} кандидатов в неприводимые полиномы степени m через блок № 2 пройдут лишь $\sum\limits_{\overline{n}_i/2^m-1} \frac{\varphi(\overline{n}_i)}{m}$ неприводимых полиномов.

Блок № 3. Здесь определяется показатель неприводимого полинома степени m. Работа блока определяется в зависимости от количества делителей числа $n=2^m-1$ вида $\overline{n}_i$.

Так, для $m=11$, $n=2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ делителями будут

$$\overline{n}_1=1,\ \overline{n}_2=23,\ \overline{n}_3=89 \text{ и } \overline{n}_4=2047.$$

Число неприводимых полиномов 11-ой степени, принадлежащих последним трем делителям, соответственно будет 2, 8 и 176.

Для определения показателя неприводимого полинома $p(x)$ сначала делим $x^{23}+1$ на этот полином по вышеописанному алгоритму. Если деление имеет место без остатка, то показатель полинома $p(x)-23$, если же $x^{23}+1$ не делится на полином $p(x)$, то на него делим $x^{89}+1$ (ввиду особенной простоты полинома (набора) вида x^k+1 его деление на другие полиномы в ЭВЦМ легко осуществляется). В случае, если это последнее деление будет безостаточное, то показатель полинома $p(x)-89$, в противном случае полином $p(x)$ будет принадлежать максимальному показателю 2047.

Блок функционирует так, что если выбраны все $\frac{\varphi(\overline{n}_i)}{m}$ неприводимых полиномов степени m, принадлежащих показателю $\overline{n}_i$, то работа соответствующего подблока по выявлению именно этих неприводимых полиномов прекращается, но работа других аналогичных подблоков, по которым еще соответствующие количества неприводимых полиномов степени m не выбраны, продолжается.

Надобность в блоке отпадает в том случае, когда число $n=2^m-1$ является простым, ибо тогда все неприводимые полиномы степени m будут принадлежать максимальному показателю $e=2^m-1$ [4].

Для простоты числа $n=2^m-1$ необходимо, чтобы число m было простым. Но это условие недостаточно, так как уже при $m=11$, n — составное.

До сих пор неизвестно, существует ли конечное или бесконечное число простых чисел вида $n=2^m-1$. Известно 20 простых чисел этого вида (для $m=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ и др.), из которых наибольшее — $n=2^{4423}-1$, которое вместе с тем является наибольшим

ТАБЛИЦА №1

НЕПРИВОДИМЫХ ДВОИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

(ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ $m \leq 11$)

m	P(x)	e	m	P(x)	e	m	P(x)	e
1	2	–		1207	511		2257	341
	3*)	1		1225	511		2355	341
				1243	511		2437	341
2	7*)	3		1257	511		2547	341
				1267	511		2633	341
3	13	7		1275	511		2653	341
				1317	511		3277	341
4	23	15		1333	511		3367	341
	37	5		1423	511		3417	341
				1437	511			
5	45	31		1473	511		2065	93
	57	31		1517	511		2413	33
	67	31		1533	511		3247	93
				1577	511			
6	103	63		1617	511		2251*)	33
	133	63					3043*)	33
	147	63		1003	73			
	127	21		1027	73		3777*)	11
	111*)	9		1113	73			
				1145	73	11	4005	2047
7	203	127					4027	2047
	211	127	10	2011	1023		4053	2047
	217	127		2033	1023		4055	2047
	235	127		2047	1023		4107	2047
	247	127		2055	1023		4143	2047
	253	127		2145	1023		4145	2047
	277	127		2157	1023		4161	2047
	313	127		2213	1023		4173	2047
	357	127		2305	1023		4215	2047
				2327	1023		4225	2047
8	435	255		2347	1023		4237	2047
	453	255		2363	1023		4251	2047
	455	255		2377	1023		4261	2047
	515	255		2415	1023		4317	2047
	537	255		2443	1023		4347	2047
	543	255		2475	1023		4353	2047
	607	255		2503	1023		4365	2047
	717	255		2527	1023		4415	2047
				2553	1023		4423	2047
	477	85		2617	1023		4445	2047
	567	85		2627	1023		4451	2047
	573	85		2707	1023		4473	2047
	613	85		2767	1023		4475	2047
	433	51		2773	1023		4505	2047
	637	51		3023	1023		4533	2047
	471*)	17		3067	1023		4563	2047
	727*)	17		3117	1023		4565	2047
				3133	1023		4577	2047
9	1021	511		3177	1023		4603	2047
	1033	511		3337	1023		4617	2047
	1055	511		3427	1023		4653	2047
	1063	511		2017	341		4655	2047
	1131	511		2035	341		4671	2047
	1137	511		2107	341		4707	2047
	1157	511		2123	341		4745	2047
	1167	511		2143	341		4767	2047
	1175	511		2231	341		5007	2047

m	P(x)	e	m	P(x)	e	m	P(x)	e
	5023	2047		5607	2047		6417	2047
	5025	2047		5613	2047		6447	2047
	5155	2047		5623	2047		6507	2047
	5177	2047		5657	2047		6557	2047
	5235	2047		5667	2047		6637	2047
	5247	2047		5675	2047		6673	2047
	5253	2047		5733	2047		6727	2047
	5263	2047		5747	2047		6747	2047
	5265	2047		6015	2047		7047	2047
	5337	2047		6037	2047		7137	2047
	5357	2047		6127	2047		7237	2047
	5373	2047		6153	2047		7317	2047
	5403	2047		6163	2047			
	5463	2047		6227	2047		4303	89
	5477	2047		6233	2047		4467	89
	5513	2047		6263	2047		4757	89
	5537	2047		6277	2047		5777	89
	5557	2047		6307	2047			
	5575	2047		6367	2047		2345	23

ТАБЛИЦА № 2

КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРИВОДИМЫХ ДВОИЧНЫХ ПОЛИНОМОВ И ИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ $12 \leq m \leq 20$

Степень полинома	Число полиномов с нечетными весами	Число всех неприводимых полиномов	
		Всего	В том числе по показателям
12	1024	335	4095 (144); 1365(48); 819(36); 585 (24); 455(24); 315(12); 273([illegible] 195 (8); 117(6); 105(4); 91(6); 65(4); 45(2); 39(2); 35(2); 13(1)
13	2048	630	8191 (630)
14	4096	1161	16383 (756); 5461 (378); 381 (18); 129 (6); 43(3)
15	8192	2182	32767 (1800), 4681 (300); 1057 (60); 217 (12), 151 (10)
16	16384	4080	65535 (2048); 13845 (1024); 13107 (512); 4369 (256); 3855(128); 1285 (64); 771 (32); 257 (16)
17	32768	7710	131071 (7710)
18	65536	14532	262143 (7776), 87381 (2592), 37449 (1296); 29127 (864), 13797 (432); 12483 (432); 9709 (432), 4599 (144), 4161 (144); 2991 (108); 1971 (72); 1533 (48); 1387 (72), 1197 (36); 657 (24); 513 (18); 399 (12); 219 (8); 189 (6), 171 (6); 133 (6); 57 (2); 27(1), 19 (1)
19	131072	27594	524287 (27594)
20	262144	52377	1048575 (24000); 349525 (12000); 209715 (4800); 95325 (2400); 69905 (2400); 41934 (1200); 33825 (800); 31775 (1200); 25575 (600), 19065 (480); 13981 (600); 11275 (400); 8525 (300); 6765 (160); 6355 (240); 5115 (120); 3813 (120); 3075 (80); 2325 (60); 2255 (80); 1705 (60); 1353 (40); 1271 (60), 1025 (40); 825 (20), 775 (30); 615 (16); 465 (12), 451 (20); 275 (10), 205 (8), 165 (4); 155 (6); 123 (4), 75 (2); 55(2); 41(2); 25 (1)

известным в настоящее время простым числом, имеющим 1332 цифры [3].

По описанному выше алгоритму на электронно-вычислительной машине были определены неприводимые полиномы и их показатели. Для степеней $m \leqslant 11$ неприводимые полиномы и их показатели приведены в табл. 1. В ней m—степень, а e—показатель полинома $p(x)$. Полиномы записаны в восьмерично-двоичной системе. Так, например, записи 1267, 2065 и 5623 или (001) (010) (110) (111), (010) (000) (110)(101) и (101) (110) (010) (011) соответственно означают полиномы x^9+x^7+ $+x^5+x^4+x^2+x+1$, $x^{10}+x^5+x^4+x^2+1$ и $x^{11}+x^9+x^8+x^7+$ $+x^4+x+1$.

Знаком * отмечены самосопряженные полиномы; из двух сопряженных (обратных) неприводимых полиномов в таблицу включен тот, который в восьмерично-двоичной системе изображается меньшим числом. Для полиномов степеней от $m=12$ до $m=20$ в табл. 2 приведены количественные характеристики числа неприводимых полиномов и их показателей. В скобках указано количество неприводимых полиномов, принадлежащих данному показателю.

Из этой таблицы видно, что число неприводимых полиномов при увеличении степени полинома на единицу почти удваивается. С ростом m увеличивается также объем вычислений, необходимых для определения неприводимых полиномов данной степени и их показателей. Однако, с практической точки зрения нас всегда интересуют небольшие значения m, для которых применение описанного алгоритма не требует значительного объема вычислений.

Поступила 16 III 1964

Գ. Հ. ԳԱՐԱԿՈՎ

ԵՐԿՈՒԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ՉՎԵՐԱԾՎՈՂ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՆ ՈՒ ՆՐԱՆՑ ՑՈՒՑԻՉՆԵՐԸ ԳՏՆԵԼՈՒ ԱԼԳՈՐԻԹՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված են երկուական սիստեմի չվերածվող բազմանդամների հատկությունները, որոնց հիման վրա նկարագրված է այդ բազմանդամները և նրանց ցուցիչները գտնելու ալգորիթմ։

Բերված են (աղյուսակի ձևով) մինչև 11 աստիճանի նշված բազմանդամները և նրանց ցուցիչները, որոնք ստացված են էլեկտրոնային հաշվիչ մեքենայի օգնությամբ՝ ըստ առաջարկված ալգորիթմի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гараков Г. А.* Об использовании циклических кодов для контроля записи и считывания с магнитной ленты ЭЦВМ. Вопросы радиоэлектроники, серия VII, № 5, 1963.
2. *Гараков Г. А.* Коды Р. К. Боуза—Д. К. Рой-Чоудхури и вопросы их схемной реализации. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 6, 1963.
3. *Серпинский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. *Bernard Elspas.* The theory of autonomous linear sequential networks. IRE, Transactions of circuit theory, CT—6, № 1, March (1959), 45—60.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ш. АСАТУРЯН, Ю. П. КИЧАЕВ

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАКОНОМ УПРУГОСТИ

Имеется обширная литература, посвященная крутильным колебаниям цилиндрических валов при линейном законе деформации.

Существует ряд задач, имеющих большое практическое значение, при рассмотрении которых необходимо обращаться к нелинейной теории крутильных колебаний, например, крутильные колебания стержней из материала с естественной нелинейностью. К таким материалам относятся различные детали машин из пластических масс на основе эпоксидных смол и др.

Допустим, что для углов сдвига при кручении можно взять такие же выражения, как и в линейной теории, то есть

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \psi_{xy} = 0, \quad \psi_{yz} = \omega x, \quad \psi_{xz} = -\omega y, \tag{0.1}$$

где $\omega = \omega(z, t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ является углом закручивания на единицу длины стержня.

Для интенсивности деформации сдвига из соотношения (0.1) непосредственно следует, что

$$\psi_0^2 = \frac{2}{3}(\psi_{yz}^2 + \psi_{xz}^2) = \frac{2}{3}\omega^2 r^2 = \frac{2}{3} r^2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2, \tag{0.2}$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

В нелинейной технической теории упругости связь между компонентами тензора деформации и тензором напряжения устанавливается следующими уравнениями [1]

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0,$$

$$\tau_{yz} = G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_{yz}, \quad \tau_{xz} = G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_{xz}.$$

Очевидно, что результирующее касательное напряжение в сечениях цилиндра плоскостями $z = \text{const}$, будет равно

$$T = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, G(1 + \gamma\psi_0^2)\psi_0. \tag{0.3}$$

здесь G — модуль сдвига,

τ — модуль интенсивности касательных напряжений.

Для модуля интенсивности касательных напряжений предлагается следующее соотношение [1]

$$\tau = -\frac{NG^2(3K+G)}{K}, \tag{0.4}$$

где G — модуль сдвига, $н/см^2$,

K — модуль объемного сжатия $н/см^2$,

N — постоянная материала, например:

для меди $N = 0{,}177 \cdot 10^{-8}\,\frac{см^4}{H^2}$,

для стали $N = 0{,}25 \cdot 10^{-8}\,\frac{см^4}{H^2}$.

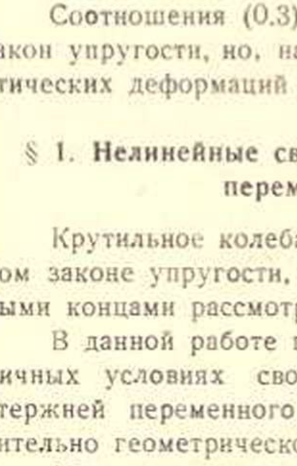
Соотношения (0.3) и (0.4) характеризуют не только нелинейный закон упругости, но, например, служат некоторым выражением пластических деформаций в зоне упрочнения.

§ 1. Нелинейные свободные крутильные колебания стержней переменного поперечного сечения

Крутильное колебание цилиндрического стержня, при нелинейном законе упругости, с постоянным поперечным сечением и заделанными концами рассмотрено в работе [1].

В данной работе приводится исследование при различных граничных условиях свободных нелинейных крутильных колебаний стержней переменного сечения, являющихся телами вращения относительно геометрической оси симметрии.

Итак, рассмотрим в декартовой системе координат стержень переменного кругового сечения. Пусть для недеформированного стержня его ось симметрии совпадет с осью z, а плоскость сечения—с плоскостью xoy (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для исследования нелинейного крутильного колебания упругой системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. По принципу Гамильтона-Остроградского для консервативной системы сил при изохронной вариации имеем соотношение

$$F = \int_0^{t_1} (A - E)\,dt, \quad \delta F = 0. \tag{1,1}$$

Здесь A — полная работа упругих сил,

E — кинетическая энергия стержня.

Удельная работа деформации при кручении стержня, вызванная касательными напряжениями T, будет

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\int_0^{\psi_0} T\,d\psi_0.$$

Подставляя сюда значение T из уравнения (0.3) и интегрируя от 0 до ψ_0, получим

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,G\left(1-\frac{\gamma}{2}\psi_0^2\right)\psi_0^2.$$

Так как $\psi_0=\frac{2}{3}r^2\omega^2=\frac{2}{3}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$, то из предыдущего

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dA}{dz}\right)=\frac{G}{\sqrt{6}}\left[1+\frac{\gamma}{3}r^2\left(\frac{\partial\varphi}{dz}\right)^2\right]r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Интегрируя по площади S поперечного сечения, найдем работу деформации сдвига на единицу длины стержня

$$\frac{dA}{dz}=\frac{G}{\sqrt{6}}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\iint_S r^2dxdy+\frac{\gamma}{3}\left(\frac{\partial\varphi}{dz}\right)^4\iint_S r^4dxdy\right].$$

Вводя в рассмотрение моменты инерции сечения

$$I_1=\iint_S r^2dxdy,\qquad I_2=\iint_S r^4dxdy, \tag{1.2}$$

при этом работа деформации для всего стержня будет иметь вид

$$A=\int_0^l\frac{dA}{dz}\,dz=\frac{G}{\sqrt{6}}\int_0^l\left[I_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{\gamma I_2}{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^4\right]dz. \tag{1.3}$$

Кинетическую энергию стержня определяем путем интегрирования живой силы отдельных элементов высотой dz при кручении, то есть

$$E=\frac{\rho}{2}\int_0^l I_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2dz, \tag{1.4}$$

где ρ — плотность материала стержня.

Подставляя (1.3) и (1.4) в уравнение (1.1) будем иметь

$$F=\int_0^{t_1}\int_0^l\left[\frac{I_1G}{\sqrt{6}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+\frac{\gamma I_2}{3\sqrt{6}}G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^4-\frac{\rho I_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right]dtdz. \tag{1.5}$$

Для упрощения дальнейших вычислений, примем следующие обозначения

$$t_1=\frac{2\pi}{p},\qquad \tau=pt,\qquad \xi=\frac{kz}{l}, \tag{1.6}$$

$$I_1 = I_{01} f_1(z) = I_{01} f_1(\xi), \quad I_2 = I_{02} f_2(z) = I_{02} f_2(\xi), \tag{1.7}$$

где индекс 0 показывает, что все величины вычислены в заделанном сечении стержня, τ — безразмерное время, ξ — безразмерная координата, p — частота собственных колебаний стержня, k — безразмерный параметр, подлежащий определению.

Так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dz} = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{k}{l}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} p, \tag{1.8}$$

то на основании (1.6), (1.7) и (1.8) уравнение (1.5) примет вид

$$F = \frac{\rho I_{01} l}{2kp} \int_0^{2\pi}\int_0^k \left\{ \alpha^2 f_1(\xi) \left[1 + \frac{\lambda f_2(\xi)}{f_1(\xi)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - p^2 f_1(\xi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)^2 \right\} d\xi d\tau, \tag{1.9}$$

где для сокращения записи приняты следующие обозначения

$$\alpha^2 = \frac{2}{\rho}\frac{k^2}{l^2}\frac{G}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{k^2 G}{\rho l^2},$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{3}\frac{I_{02}}{I_{01}}\frac{k^2}{l^2} = \frac{\gamma}{3}\frac{\frac{2}{9}\pi a^6}{\frac{\pi a^4}{2}} = \frac{4}{27}\frac{a^2}{l^2}\gamma k^2, \tag{1.10}$$

где a — радиус данного сечения.

Из (1.9) следует, что уравнение Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи $\delta F = 0$ является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных с переменными коэффициентами. Поэтому вариационную задачу будем решать приближенно. Для этого величину $\varphi(z, t)$ будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от координаты ξ, а вторая — только от безразмерного времени τ, то есть

$$\varphi(\xi, \tau) = R(\xi) q(\tau). \tag{1.11}$$

Подставляя функцию (1.11) в формулу (1.9), получим

$$F = \frac{\rho I_{01} l}{2kp} \int_0^{2\pi} \left[\alpha^2 q^2 \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi + \alpha^2 \lambda q^4 \int_0^k f_2(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^4 d\xi - \right.$$

$$\left. - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 \int_0^k f_1(\xi) R^2(\xi) d\xi \right] d\tau.$$

Для простоты обозначим

$$b_0 = \int_0^k f_1(\xi) R^2(\xi)\, d\xi, \qquad \vartheta^2 = \frac{1}{b_0} \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^2 d\xi,$$

$$b_1 = \frac{1}{\vartheta^2 b_0} \int_0^k f_2(\xi) \left(\frac{dR}{d\xi}\right)^4 d\xi. \tag{1.12}$$

Тогда для действия F по Гамильтону-Остроградскому получим следующее значение

$$F = \frac{\rho I_{01} l b_0}{2kp} \int_0^{2\pi} \left[\vartheta^2 \alpha^2 (q^2 + \lambda b_1 q^4) - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 \right] d\tau. \tag{1.13}$$

По принципу Гамильтона-Остроградского для консервативной системы сил при изохронной вариации из формул (1.1) и (1.13) получим

$$\delta F = \int_0^{2\pi} \delta L\, d\tau = 0,$$

где

$$L = \vartheta^2 \alpha^2 q^2 + \vartheta^2 \alpha^2 \lambda b_1 q^4 - p \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2.$$

Отсюда, для действительного движения вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа в обобщенных координатах запишется в виде

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + p_1^2 (q + \lambda_1 q^3) = 0. \tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) описывает свободные колебания материальной точки или физического маятника с нелинейной восстанавливающей силой.

Интегрируя уравнение (1.14) от начального положения Q до q, где Q — наибольшая начальная амплитуда крутильных колебаний системы в радианах, получим

$$\tau = \frac{\sqrt{2}}{p_1 \sqrt{2 + \lambda_1 Q^2}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \chi^2 \sin^2\theta}}, \tag{1.15}$$

где

$$\eta = \frac{q}{Q} = \sin\theta \quad \text{и} \quad -\chi^2 = \frac{\lambda_1 Q^2}{2 + \lambda_1 Q^2} < -1;$$

χ — модуль эллиптического интеграла.

Так как полный период колебаний должен иметь значение 2π, то из (1.15) следует соотношение

$$2\pi = \frac{4\sqrt{2}\, K(\chi)}{p_1 \sqrt{2 + \lambda_1 Q^2}},$$

где

$$K(\varkappa) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\chi^2 \sin^2\theta}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда следует, что

$$p_1 = \frac{2\sqrt{2}\, K(\chi)}{\pi\sqrt{2+\lambda_1 Q^2}}.$$

Или, переходя к размерным величинам, для частоты колебания будем иметь

$$p = \frac{\pi a\vartheta}{2K(\varkappa)}\sqrt{1+\lambda b_1 Q^2},$$

$$-\chi^2 = \frac{\lambda b_1 Q^2}{1+\lambda b_1 Q^2} \leqslant -1. \tag{1.16}$$

Из соотношения (1.16) видно, что частота крутильных колебаний валов зависит от начальной амплитуды. С увеличением амплитуды частота собственных колебаний уменьшается вследствие увеличения функции $K(\chi)$ и уменьшения подкоренного выражения. Из модуля эллиптического интеграла непосредственно следует, что отношение

$$|\lambda b_1 Q^2| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь собственные колебания стержня переменного сечения с одним закрепленным концом (фиг. 1). Граничные условия при этом будут

$$\varphi\Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Big|_{\xi=k} = 0. \tag{1.17}$$

Так как эллиптический интеграл есть функция верхнего предела η, то обратная функция от τ определяется эллиптической функцией Якоби в виде [3]

$$\eta = \mathrm{Sn}\,\tau.$$

Подставляя сюда значение амплитуды η, будем иметь

$$q = Q\,\mathrm{Sn}\,\tau. \tag{1.18}$$

На основании (1.17) и (1.18) уравнение (1.11) в первом приближении при нелинейном колебании примет вид

$$\varphi(\xi, \tau) = R(\xi)\, q(\tau) = Q \sin\xi\, \mathrm{sn}\,\tau, \tag{1.19}$$

где по-прежнему

$$\xi = \frac{kz}{l}, \quad \tau = pt, \quad k = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

В формуле (1.19) начальная амплитуда колебания заранее нам не известна, но ее можно определить из условия максимального касательного напряжения. Так как касательное напряжение при кручении определяется соотношением

$$\tau_1 = Ga\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то отсюда на основании (1.19) максимальное напряжение будет

$$\tau_{1\max} = \frac{QakG}{l},$$

причем $|\cos\xi|_{\max} = 1$, но, как известно [3], $|\operatorname{sn}\tau|_{\max} = 1$.

Решая последнее соотношение относительно амплитуды, будем иметь

$$Q = \frac{l}{ka}\frac{\tau_{1\max}}{G}. \qquad (1.20)$$

Таково значение амплитуды в зависимости от начального максимального напряжения, вызванного парой сил.

Вычислим значение коэффициента $\lambda b_1 Q^2$.

Подставляя значение $\lambda b_1 Q^2$ из (1.10) и начальной амплитуды из (1.20), получим

$$\lambda b_1 Q^2 = b_1\frac{\gamma}{3}\frac{I_{02}}{I_{01}}\frac{k^2}{l^2}\frac{l^2}{k^2a^2}\frac{\tau_{1\max}^2}{G^2}.$$

Так как $\frac{I_{02}}{I_{01}} = \frac{4}{9}a^2$, то из последнего соотношения следует, что

$$\lambda b_1 Q^2 = \frac{4}{27}\gamma b_1\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2, \qquad (1.21)$$

где $\gamma < 0$.

Подставляя значение α из (1.10) в формулу (1.16) и учитывая (1.21), после несложных преобразований для частоты свободных колебаний при нелинейном законе упругости получим следующее выражение:

$$\frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\,l\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,p = \frac{k\vartheta}{K(\chi)}\sqrt{1+\frac{4}{27}b_1\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2},$$

$$\chi^2 = -\frac{4b\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2}{27+4b_1\gamma\left(\frac{\tau_{1\max}}{G}\right)^2}, \qquad k = \frac{(2n+1)\pi}{2}. \qquad (1.22)$$

В случае вала со свободными концами граничные условия будут

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right|_{\xi=k} = 0.$$

В этом случае в первом приближении уравнение упругой линии (1.2) примет вид

$$\varphi(\xi, \tau) = R(\xi)\,q(\tau) = Q\cos\xi\operatorname{sn}\tau, \qquad (1.23)$$

а частота собственных колебаний определится из (1.22), причем здесь нужно принять, что $k = n\pi$.

В формуле (1.22) величины ϑ и b_1 определяются из выражения (1.13).

§ 2. Примеры

Для того, чтобы определить частоту собственных колебаний стержней переменного сечения по формуле (1.22), необходимо знать закон изменения моментов инерции вдоль оси z. Для конического вала закон изменения радиуса будет

$$a_z = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{l} z.$$

Переходя к безразмерным координатам, получим

$$a_z = a_0 \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi \right).$$

Учитывая последнее выражение, придадим формуле (1.7) вид

$$I_1 = I_{01} f_1(\xi) = \frac{\pi a_0^4}{k} \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi \right)^4,$$

$$I_2 = I_{02} f_2(\xi) = \frac{2\pi a^6}{9} \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi \right)^6.$$

Отсюда

$$f_1(\xi) = \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi \right)^4, \quad f_2(\xi) = \left(1 - \frac{1 - \frac{a_1}{a_0}}{k} \xi \right)^6. \tag{2.1}$$

Аналогичным путем можем определить значение функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ для параболоида вращения (фиг. 2)

$$f_1(\xi) = \left[1 - \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \xi \right]^2, \quad f_2(\xi) = \left[1 - \left(1 - \frac{a_1^2}{a_0^2} \right) \xi \right]^3. \tag{2.2}$$

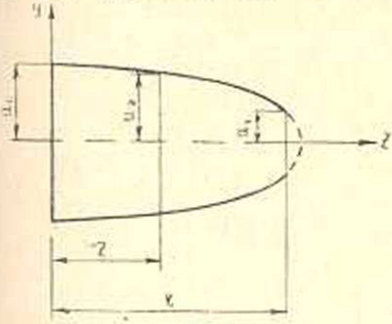
Легко составить выражения функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ для ступенчатого вала. Например, фиг. 3,

$$f_1(\xi) = 1, \quad f_2(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi < \frac{k}{4};$$

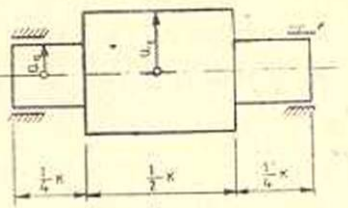
$$f_1(\xi) = \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^4, \quad f_2(\xi) = \left(\frac{a_1}{a_0} \right)^6 \quad \text{при} \quad \frac{k}{4} < \xi < \frac{3k}{4};$$

$$f_1(\xi)=1, \quad f_2(\xi)=1 \quad \text{при} \quad \frac{3k}{4}<\xi\leqslant k. \tag{2.3}$$

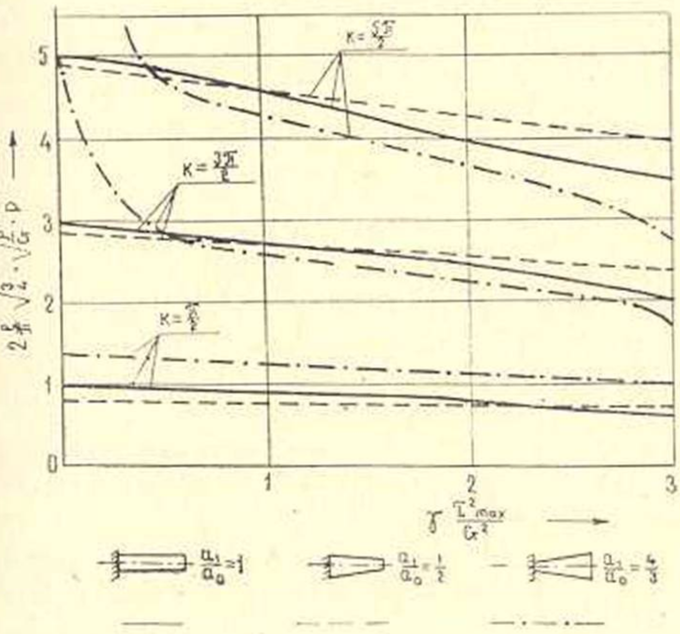
На основании (2.1), (2.2) и (2.3) вычислены значения параметров ϑ и b_1. Эти величины для различных отношений приведены в табл. 1.



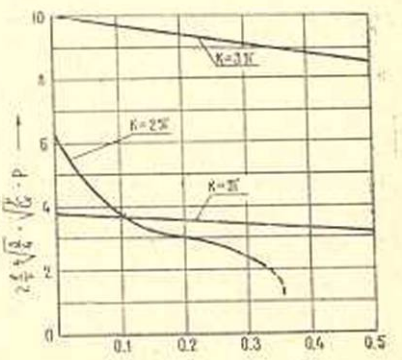
Фиг. 2



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Из табл. 1 следует, что числовые величины ϑ и b_1 асимптотически приближаются к значению прямого цилиндра.

Частоты собственных крутильных колебаний стержней для сечения (2.1), (2.3), подсчитанные по формуле (1.22), приведены на графиках фиг. 4 и 5 для конического и ступенчатого валов соответственно. Эти графики полностью отражают эффект нелинейности.

Таблица 1

	$\frac{a_1}{a_0}$	ϑ, $k=\frac{\pi}{2}$	ϑ, $k=\frac{3\pi}{2}$	ϑ, $k=\frac{5\pi}{2}$	b_1, $k=\frac{\pi}{2}$	b_1, $k=\frac{3\pi}{2}$	b_1, $k=\frac{5\pi}{2}$
Вал конический	0,5 0,75	0,808 0,845	0,950 0,976	0,980 0,990	0,130 0,522	0,487 0,602	0,523 0,606
Вал конический	$\frac{4}{3}$	1,348	1,03	1,008	0,62	1,018	1,046
Вал цилиндрический	1,0	1,0	1,0	1,0	0,75	0,75	0,75
Вал с боковой поверхностью в виде параболоида вращения	0,5 0,75	0,627 0,795	0,98 0,975	0,985 0,990	0,184 0,442	0,554 0,599	0,556 0,610

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 26 XI 1963

Ա. Շ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ, ՅՈՒ. Պ. ԿԻՉԱԵՎ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է պտտման մարմիններ հանդիսացող փոփոխական հատվածքի ձողերի ազատ ոչ գծային ոլորման տատանումների ուսումնասիրությունը սահմանային զանազան պայմանների դեպքում։ Ձողերի ոլորման սեփական տատանումների հաճախականությունը որոշելու համար կիրառված է Համիլտոն-Օստրոգրադսկու վարիացիոն սկզբունքը։ Առաձգականության ոչ-գծային օրենքի դեպքում ազատ տատանումների հաճախականության համար ստացված է հետևյալ բանաձևը

$$\frac{2}{\pi}\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\,l\sqrt{\frac{\rho}{G}}\,p=\frac{k\vartheta}{K(x)}\sqrt{1+\frac{4}{27}\,b_1\,\gamma\left(\frac{\tau_{max}}{G}\right)^2}\;:$$

Բերված աղյուսակներն ու գրաֆիկները բնութագրում են ոչ-գծայնության և հատվածքի փոփոխականության էֆեկտները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. ИЛ, 1961.
2. *Асатурян А. Ш., Кичаев П. М.* Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15, № 5**, 1962.
3. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. МОВСИСЯН

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В рамках безмоментной теории изучается поведение цилиндрической оболочки при продольном ударе жесткой массой. Вопросы пластических деформаций и устойчивости здесь не затрагиваются. Случай, когда полубесконечная цилиндрическая оболочка ударяется о жесткую преграду, решен в [1].

Рассмотрим круговую ортотропную цилиндрическую оболочку длиной l и радиусом r. Главные направления упругости материала оболочки совпадают с линиями кривизны оболочки, которые выбраны в качестве координатных линий. Один из концов оболочки $(x=0)$ закреплен, а второй $(x=l)$ — свободен. Свободный конец оболочки подвергается удару в продольном направлении жесткой массой. Предполагается, что ударяющая нагрузка равномерно распределяется по свободному концу оболочки, а также, что после удара ударяющее тело все время движется вместе с оболочкой.

Принимая, что удар происходит без кручения, для уравнения движения элемента оболочки будем иметь [2] (с прибавлением инерционных членов)

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad T_1 = c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - c_{12}\frac{w}{r},$$

$$T_2 - rm\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \qquad T_2 = c_{12}\frac{\partial u}{\partial x} - c_{12}\frac{w}{r}, \tag{1}$$

где T_1 и T_2 — усилия в продольном и круговом направлениях, u и w — перемещения в направлении образующей и нормали к срединной поверхности соответственно, $m=\frac{h\gamma}{g}$ — масса оболочки единичной площади, x — координата в направлении образующей, t — время, а c_{ik} — имеют значения [2].

Уравнения движения в перемещениях будут

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c_{11}}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{c_{22}}{rm}w - \frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2}$$

По предположению на концах имеются следующие условия

$$u(0, t) = 0, \tag{3}$$

$$2\pi r T_1(l, t) = -\frac{P}{g}\frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2}, \tag{4}$$

где P — вес ударяющего тела.

Имеются также следующие начальные условия (если принять, что удар производится в момент $t = 0$)

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \ \text{ при } \ 0 < x < l, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \ \text{ при } \ 0 < x < l \ \text{ и } \ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -v \ \text{ при } \ x = l, \tag{6}$$

где v — скорость удара.

Систему (2) можно заменить одним уравнением, если принять

$$u = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{c_{22}}{r^2 m}\Phi,$$

$$w = \frac{c_{12}}{rm}\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{7}$$

Тогда для неизвестной $\Phi(x, t)$ будем иметь

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial t^4} + a\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - b\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2} - c\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \tag{8}$$

где

$$a = \frac{c_{22}}{r^2 m}, \qquad b = \frac{c_{11}}{m}, \qquad c = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{m^2 r^2}. \tag{9}$$

Решение (8) будем искать в виде

$$\Phi(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{10}$$

тогда из (8) получим

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{11}$$

$$T^{\text{IV}} + (a + b\lambda^2)\, T'' + c\lambda^2 T = 0, \tag{12}$$

где λ — пока неизвестная постоянная.

Краевые условия для (11) получим из (3) и (4) с учетом (10) и (12)

$$\begin{aligned} &X(0) = 0, \\ &X'(l) = Ml\lambda^2 X(l). \end{aligned} \tag{13}$$

где M — отношение веса ударяющего тела к весу оболочки.

Решение уравнения (11) после удовлетворения первому условию из (13) будет

$$X(x) = A\sin\lambda x. \tag{14}$$

Из второго условия (13) получим собственные значения λ, которые определяются из следующего уравнения

$$\varkappa_i \operatorname{tg} \varkappa_i = Q, \tag{15}$$

где $\varkappa_i = \lambda_i l$, а $Q = \frac{1}{M}$.

Решение уравнения (12) будет

$$T_i = c_1 \sin p_i t + c_2 \cos p_i t + c_3 \sin q_i t + c_4 \cos q_i t, \tag{16}$$

где

$$p_i^2 = -\frac{1}{2}\left[a + b\lambda_i^2 + \sqrt{(a + b\lambda_i^2)^2 - 4c\lambda_i^2}\right],$$

$$q_i^2 = -\frac{1}{2}\left[a + b\lambda_i^2 - \sqrt{(a + b\lambda_i^2)^2 - 4c\lambda_i^2}\right]. \tag{17}$$

То, что $T_i(t)$ действительно имеет вид (16), легко доказывается, если учесть, что $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \geqslant 0$.

Начальные условия (5) с учетом (7) и (10) дадут

$$T(0) = T'(0) = T''(0) = 0. \tag{18}$$

Удовлетворяя (16) и условиям (18), получим

$$T_i(t) = c_i\left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i}\sin q_i t\right). \tag{19}$$

Из (10), (14) и (19) будем иметь

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^{*}\left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i}\sin q_i t\right)\sin\frac{\varkappa_i x}{l}. \tag{20}$$

Постоянные A_i^{*} определяются из еще не использованного условия (6).

Известно [3], что если

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\varkappa_n x}{l}, \tag{21}$$

где $\varkappa_n$ — корни уравнения вида (15), то коэффициенты разложения определяются формулой

$$c_n = \frac{4}{l}\,\frac{\varkappa_n}{2\varkappa_n + \sin 2\varkappa_n}\int_0^l \omega(\zeta)\cos\frac{\varkappa_n \zeta}{l}\,d\zeta. \tag{22}$$

Чтобы получить наш случай, достаточно продифференцировать (21). Кроме того, надо иметь в виду, что $\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} = 0$ при $t = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l - \delta$ и $\frac{\partial^3\Phi}{\partial t^3} = -v$ при $l - \delta \leqslant x \leqslant l$ (как видно из (6), (10) и (18)).

В пределе, когда δ стремится к нулю, для A_i^* получим

$$A_i^* = \frac{4v\cos\varkappa_i}{p_i(p_i^2 - q_i^2)(2\varkappa_i + \sin 2\varkappa_i)}. \tag{23}$$

Таким образом,

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4v\cos\varkappa_i}{p_i(p_i^2 - q_i^2)(2\varkappa_i + \sin 2\varkappa_i)}\left(\sin p_i t - \frac{p_i}{q_i}\sin q_i t\right)\sin\frac{\varkappa_i x}{l}. \tag{24}$$

Имея выражение для $\Phi(x, t)$, по формулам (1) и (7) можно определить усилия и перемещения оболочки, вызванные ударом.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 II 1964

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ ուսումնասիրվում է օրթոտրոպ գլանային թաղանթ, որը ենթարկվում է երկայնական հարվածի կոշտ մարմնի միջոցով։ Խնդիր դիտարկվում է առաձգականության սահմաններում անմոմենտ տեսությամբ։

Ճիգերի և տեղափոխությունների գտնելը բերվում է մի ֆունկցիայի որոշման, որի համար տեղի ունի (24) արտահայտությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berkowitz H. M.* Longitudinal Impact of a Semi-Infinite Elastic Cylindrical Shell. Journal of applied mechanics, **30**, (series E) number 3, 1963.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Крылов А. Н.* Собрание трудов, т. III, часть 2. Издательство АН СССР, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

БАБЛОЯН А. А., ТОНОЯН В. С.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВОГО СЕКТОРА

Исследованию плоской задачи теории упругости анизотропного тела посвящено много работ, среди которых особое место занимают работы Д. И. Шермана [1—3], С. Г. Лехницкого [4, 5], Г. Н. Савина [6], С. Г. Михлина [7] и других.

В настоящей работе рассматриваются некоторые конкретные задачи плоской теории упругости для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора, ограниченного двумя концентрическими окружностями и двумя радиусами, когда на кромках сектора граничные условия заданы: а) в напряжениях и б) в некотором смешанном виде. Решения этих задач сводятся к определению одной „бигармонической" функции. Задачи решаются методом Фурье. Определение постоянных интегрирования в первой задаче сведено к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти системы регулярны и имеют ограниченные сверху свободные члены. Вторая задача решается без применения бесконечных систем линейных уравнений.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим ортотропное однородное упругое тело (предполагается, что физические и геометрические оси тела совпадают), имеющее в плане форму кольцевого сектора.

Как известно [4], в плоской задаче теории упругости напряжения могут быть определены через функцию Эри $\Phi(r, \varphi)$ следующими формулами:

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \tag{1.1}$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right).$$

Переходим к новым координатам (t, φ) [9, 10]

$$r = ae^t, \quad \varphi = \varphi \tag{1.2}$$

и вместо функции $\Phi(t, \varphi)$ вводим новую функцию

$$F(t, \varphi) = e^t \Phi(t, \varphi). \tag{1.3}$$

Тогда напряжения будут выражаться через новую функцию $F(t, \varphi)$ соотношениями [10]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{e^{-t}}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial F}{\partial t} + F\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{e^{-t}}{a^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{\partial F}{\partial t}\right), \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{e^{-t}}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varphi}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Подставляя эти значения в соотношения обобщенного закона Гука для ортотропного материала и проинтегрировав их, для радиальных и тангенциальных перемещений получим выражения

$$\begin{aligned} au(t, \varphi) &= a_1 \int \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + F\right) dt + a_2 \frac{\partial F}{\partial t} + (a_1 + a_2) F + f'(\varphi), \\ av(t, \varphi) &= -a_1 \iint F\, dt\, d\varphi + \int \left(a_3 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial F}{\partial t} - a_1 F\right) d\varphi - \\ &\quad - a_1 \int \frac{\partial F}{\partial \varphi} dt + a_2 \frac{\partial F}{\partial \varphi} + f_0(t) - f(\varphi), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где

$$a_1 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad a_2 = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}, \quad a_3 = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \tag{1.6}$$

а функции $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$f''(\varphi) + f(\varphi) = 0, \quad f_0'(t) - f_0(t) = 0. \tag{1.7}$$

Проинтегрировав эти уравнения, для функций $f_0(t)$ и $f(\varphi)$ получим

$$f(\varphi) = E_0 \sin \varphi + F_0 \cos \varphi, \quad f(t) = D_0 e^t. \tag{1.8}$$

Функция $F(t, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$a_3 \frac{\partial^4 F}{\partial t^4} + a_5 \frac{\partial^4 F}{\partial t^2 \partial \varphi^2} + a_1 \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} - (a_1 + a_3)\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + 2a_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + a_1 F = 0, \tag{1.9}$$

где

$$a_4 = a_{66}, \quad a_5 = a_4 + 2a_2. \tag{1.10}$$

Частными решениями этого уравнения являются следующие функции:

$$\begin{aligned} &(A \operatorname{sh} \alpha t + B \operatorname{ch} \alpha t + C \operatorname{sh} \beta t + D \operatorname{ch} \beta t)(M \sin \lambda\varphi + N \cos \lambda\varphi), \\ &(A \operatorname{sh} \gamma\varphi + B \operatorname{ch} \gamma\varphi + C \operatorname{sh} \delta\varphi + D \operatorname{ch} \delta\varphi)(M \sin \mu t + N \cos \mu t), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{a_3 + a_1 + a_5\lambda^2 + \sqrt{(a_5^2 - 4a_1a_3)\lambda^4 + 2(a_3a_5 + a_1a_5 + 4a_1a_3)\lambda^2 + (a_3 - a_1)^2}}{2a_3}},$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{a_3 + a_1 + a_5\lambda^2 - \sqrt{(a_5^2 - 4a_1a_3)\lambda^4 + 2(a_3a_5 + a_1a_5 + 4a_1a_3)\lambda^2 + (a_3 - a_1)^2}}{2a_3}},$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{a_5\mu^2 - 2a_1 + \sqrt{(a_5^2 - 4a_1a_2)\mu^4 - 4(a_1a_2 + a_1^2 + a_1a_5)\mu^2}}{2a_1}},$$

$$\delta = \pm\sqrt{\frac{a_5\mu^2 - 2a_1 - \sqrt{(a_5^2 - 4a_1a_3)\mu^4 - 4(a_1a_3 + a_1^2 + a_1a_5)\mu^2}}{2a_1}}. \qquad (1.12)$$

Параметры α, β, γ и δ — комплексные числа, где α и β, γ и δ — сопряженные, и могут быть представлены следующим образом:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \alpha_1 - i\alpha_2,$$
$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \delta = \gamma_1 - i\gamma_2,$$

при этом в общем случае

$$\alpha \neq \beta, \quad \gamma \neq \delta.$$

Случай, когда эти параметры равны, получается из общего решения путем предельного перехода.

Легко проверить, что функции

$$\begin{gathered}(A\,\mathrm{sh}\,t + B\,\mathrm{ch}\,t + C\,\mathrm{sh}\,\alpha_0 t + D\,\mathrm{ch}\,\alpha_0 t)(M\varphi + N),\\ (A\sin\varphi + B\cos\varphi + C\varphi\sin\varphi + D\varphi\cos\varphi)(Mt + N),\end{gathered} \qquad (1.13)$$

где

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{a_1}{a_3}},$$

также являются решениями уравнения (1.9).

Функцию $F(t, \varphi)$ ищем в виде

$$F(t, \varphi) = a(\varphi) + b(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k(t)\cos\lambda_k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\varphi)\cos\mu_k t \qquad (1.14)$$

в области $(0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1,\ 0 \leqslant t \leqslant t_1)$,

где

$$\begin{gathered}\Psi_k(t) = A_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k t + B_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k(t_1 - t) + C_k\,\mathrm{sh}\,\beta_k t + D_k\,\mathrm{sh}\,\beta_k(t_1 - t),\\ \Phi_k(\varphi) = E_k\,\mathrm{sh}\,\gamma_k\varphi + G_k\,\mathrm{sh}\,\gamma_k(\varphi_1 - \varphi) + F_k\,\mathrm{sh}\,\delta_k\varphi + H_k\,\mathrm{sh}\,\delta_k(\varphi_1 - \varphi),\end{gathered} \qquad (1.15)$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{\varphi_1}, \qquad \mu_k = \frac{k\pi}{t_1}, \qquad (1.16)$$

а величины α_k, β_k, γ_k и δ_k определяются формулами (1.12) с учетом значений (1.16).

Подставив (1.14) в (1.4) и (1.5), для напряжений и перемещений получим следующие выражения:

$$a^2 e^t \sigma_r(t,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) - (\lambda_k^2 - 1)\Psi_k(t)]\cos\lambda_k\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi_k(\varphi)\sin\mu_k t +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [\Phi_k'(\varphi) + \Phi_k(\varphi)]\cos\mu_k t + a''(\varphi) + a(\varphi) + b'(t) + b(t),$$

$$a^2 e^t \sigma_\varphi(t,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} [\Psi_k'(t) + \Psi_k'(t)]\cos\lambda_k\varphi -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi_k(\varphi)(\sin\mu_k t + \mu_k \cos\mu_k t) + b''(t) + b'(t),$$

$$a^2 e^t \tau_{r\varphi}(t,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Psi_k'(t)\sin\lambda_k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \Phi_k'(\varphi)\sin\mu_k t,$$

$$av(t,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_3(\Psi_k'(t) + \Psi_k'(t)) - (a_2\lambda_k^2 + a_1)\Psi_k(t) +$$

$$+ a_1(\lambda_k^2 - 1)\int \Psi_k(t)\,dt \Big] \frac{\sin\lambda_k\varphi}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_1\Phi_k'(\varphi) +$$

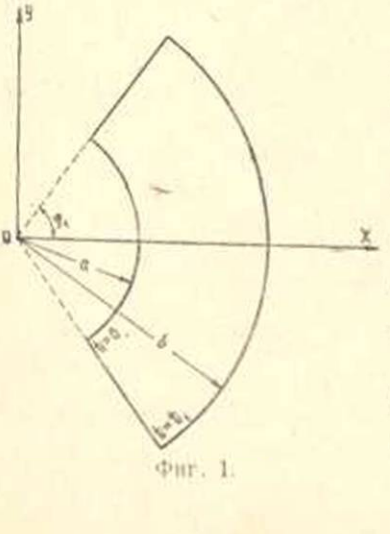
$$+ (a_3\mu_k^2 + a_1)\int \Phi_k(\varphi)\,d\varphi \Big] \frac{\sin\mu_k t + \mu_k\cos\mu_k t}{\mu_k} + (a_1 + a_2) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k'(\varphi)\cos\mu_k t + \varphi\Big[a_3 b''(t) + a_2 b'(t) -$$

$$- a_1 b(t) - a_1 \int b(t)\,dt \Big] - a_1 t \Big[a'(\varphi) + \int a(\varphi)\,d\varphi \Big] +$$

$$+ a_2 a'(\varphi) - a_1 \int a(\varphi)\,d\varphi + f_0(t) - f(\varphi). \qquad (1.17)$$

§ 2. Решение плоской задачи для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора в напряжениях



Фиг. 1

Полагаем, что на кромках кольцевого сектора внешняя нагрузка распределена симметрично относительно оси x и задана следующим образом (фиг. 1)

$$\left.\begin{aligned} a^2 e^{t_1}\sigma_r(t_1,\varphi) &= f_1(\varphi) \\ a^2\sigma_r(0,\varphi) &= f_2(\varphi) \\ a^2 e^{t_1}\tau_{r\varphi}(t_1,\varphi) &= f_3(\varphi) \\ a^2\tau_{r\varphi}(0,\varphi) &= f_4(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (0 < \varphi < \varphi_1)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 e^t\sigma_\varphi(t,\varphi_1) &= f_5(t) \\ a^2 e^t\tau_{r\varphi}(t,\varphi_1) &= f_6(t) \end{aligned}\right\}, \quad (0 < t < t_1) \qquad (2.1)$$

где функции f_i $(i=1, 2, \cdots, 6)$ — кусочно непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси x имеем также

$$v(t, 0) = \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.9) с ограниченными условиями (2.1) и (2.2).

Согласно (1.8) и (1.13) функции $f(\varphi)$, $f_0(t)$, $a(\varphi)$ и $b(t)$ берем в виде

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= a_0\varphi\sin\varphi, \qquad f_0(t) = D_0 e^t, \\ b(t) &= c_0 e^t + c_1 t e^{-t}, \quad f(\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Разложим функции f_i $(i=1, 2, \cdots, 6)$ в ряд Фурье по функциям $\{\sin\lambda_k\varphi\}$, $\{1; \cos\lambda_k\varphi\}$, $\{\sin\mu_k t\}$ и $\varphi_k(t)$, где

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} e^t & \text{при } k=0 \\ \sin\mu_k t + \mu_k\cos\mu_k t & \text{при } k=1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{2.4}$$

ортогональность и полнота которых подробно исследованы в работе [10].

Тогда граничные условия (2.1) и (2.2) примут вид

$$\left.\begin{aligned} a^2 e^{t_1}\sigma_r(t_1, \varphi) &= d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k\cos\lambda_k\varphi \\ a^2\sigma_r(0, \varphi) &= d_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)}\cos\lambda_k\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$a^2 e^t\sigma_\varphi(t, \varphi_1) = g_0\varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k(t), \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 e^{t_1}\tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k\sin\lambda_k\varphi \\ a^2\tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)}\sin\lambda_k\varphi \\ a^2 e^t\tau_{r\varphi}(t, \varphi_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k\sin\mu_k t \\ v(t, 0) &= \tau_{r\varphi}(t, 0) = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{2.7}$$

Удовлетворив условиям (2.7), получим

$$G = H = 0, \quad D_0 = 0,$$

$$A_k\,\mathrm{sh}\,\alpha_k t_1 = \frac{c_k}{\lambda_k} - C_k\,\mathrm{sh}\,\beta_k t_1,$$

$$B_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1 = \frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k} - D_k \operatorname{sh} \beta_k t_1, \tag{2.8}$$

$$E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 = \frac{q_k}{\mu_k} - F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1.$$

Подставим значение σ_r из (1.17) в (2.5) и умножим обе части полученных равенств на 1 и $\cos \lambda_p \varphi$. После интегрирования по φ от 0 до φ_1, получим

$$(\lambda_p^2 - 1) \Psi_p(t_1) = \frac{2(-1)^p}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{(\gamma_k^2 + 1) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1}{\gamma_k^2 + \lambda_p^2} E_k + \right.$$

$$\left. + \frac{(\delta_k^2 + 1) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1}{\delta_k^2 + \lambda_p^2} F_k \right] + \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{c_p}{\lambda_p} - d_p,$$

$$\tag{2.9}$$

$$(\lambda_p^2 - 1) \Psi_p(0) = \frac{2(-1)^p}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(\gamma_k^2 + 1) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1}{\gamma_k^2 + \lambda_p^2} E_k + \frac{(\delta_k^2 + 1) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1}{\delta_k^2 + \lambda_p^2} F_k \right] +$$

$$+ \frac{4a_0}{\varphi_1} \frac{(-1)^{p+1} \sin \varphi_1}{\lambda_p^2 - 1} + \frac{c_p^{(1)}}{\lambda_p} - d_p^{(1)},$$

$$2a_0 \sin \varphi_1 + 2c_0 e^{t_1} + c_1 e^{-t_1} = d_0 + \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[\frac{\gamma_k^2 + 1}{\gamma_k^2} E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_k^2 + 1}{\delta_k^2} F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1 \right],$$

$$\tag{2.10}$$

$$2a_0 \sin \varphi_1 + 2c_0 + c_1 = d_0^{(1)} - \frac{1}{\varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k^2 + 1}{\gamma_k^2} E_k \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_k^2 + 1}{\delta_k^2} F_k \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1 \right].$$

Подставив значение σ_φ из (1.17) в (2.6), умножив обе части полученного равенства на $\varphi_p(t)$ $(p = 0, 1, 2, \cdots)$ и проинтегрировав по t от 0 до t_1, получим

$$(\mu_p^2 + 1) \Phi_p(\varphi_1) = \frac{2}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[A_k \frac{(-1)^p (\alpha_k^2 - 1)}{\alpha_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 - \right.$$

$$- B_k \frac{\alpha_k^2 - 1}{\alpha_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \alpha_k t_1 + C_k \frac{(-1)^p (\beta_k^2 - 1)}{\beta_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \beta_k t_1 -$$

$$\left. - D_k \frac{\beta_k^2 - 1}{\beta_k^2 + \mu_p^2} \operatorname{sh} \beta_k t_1 \right] - g_p \frac{\mu_p^2 + 1}{\mu_p} - c_1 \frac{8[1 + (-1)^{p+1} e^{-t_1}]}{t_1 (\mu_p^2 + 1)} \tag{2.11}$$

при $p \neq 0$ и

$$c_0(e^{2t_1}-1)-2c_1t_1=\frac{g_0}{2}(e^{2t_1}-1)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}[A_ke^{t_1}\operatorname{sh}\alpha_kt_1-$$

$$-B_k\operatorname{sh}\alpha_kt_1+C_ke^{t_1}\operatorname{sh}\beta_kt_1-D_k\operatorname{sh}\beta_kt_1] \tag{2.12}$$

при $p=0$.

Введем новые неизвестные

$$\begin{gathered}(\delta_k^2-\gamma_k^2)F_k\operatorname{sh}\delta_k\varphi_1=mX_k,\\ (\beta_k^2-\alpha_k^2)(C_k-D_k)\operatorname{sh}\beta_kt_1=(-1)^kY_k,\\ (\beta_k^2-\alpha_k^2)(C_k+D_k)\operatorname{sh}\beta_kt_1=(-1)^{k+1}Z_k,\end{gathered} \tag{2.13}$$

где

$$m=-\frac{\varphi_1}{t_1}.$$

Произведя замену неизвестных в формулах (2.9) и (2.11), после некоторых преобразований получим следующие бесконечные системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}Y_p&=\sum_{k=2,4\cdots}^{\infty}a_{pk}X_k+P_p\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (p=1,\ 2,\ 3,\cdots)\\ Z_p&=\sum_{k=1,3\cdots}^{\infty}b_{pk}X_k+Q_p\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$X_p=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}Y_k+b_p\quad (p=2,4,\cdots)$$

$$X_p=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}Z_k+R_p\quad (p=1,\ 3,\cdots),$$

где введены обозначения

$$a_{pk}=\frac{4\alpha_p\beta_p(\beta_p^2-\alpha_p^2)}{t_1\left(\beta_p\operatorname{cth}\dfrac{\alpha_pt_1}{2}-\alpha_p\operatorname{cth}\dfrac{\beta_pt_1}{2}\right)(\gamma_k^2+\lambda_p^2)(\delta_p^2+\lambda_p^2)},$$

$$b_{pk}=\frac{4\alpha_p\beta_p(\beta_p^2-\alpha_p^2)}{t_1\left(\beta_p\operatorname{th}\dfrac{\alpha_pt_1}{2}-\alpha_p\operatorname{th}\dfrac{\beta_pt_1}{2}\right)(\gamma_k^2+\lambda_p^2)(\delta_k^2+\lambda_p^2)}, \tag{2.15}$$

$$c_{pk}=\frac{2\gamma_p\delta_p(\delta_p^2-\gamma_p^2)}{\varphi_1(\delta_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1-\gamma_p\operatorname{cth}\delta_p\varphi_1)(\alpha_k^2+\mu_p^2)(\beta_k^2+\mu_p^2)},$$

$$P_p=\frac{\alpha_p\beta_p(\beta_p^2-\alpha_p^2)}{\alpha_p\operatorname{cth}\dfrac{\beta_pt_1}{2}-\beta_p\operatorname{cth}\dfrac{\alpha_pt_1}{2}}\left[\frac{4}{\varphi_1(\lambda_p^2-1)}\sum_{k=2,4\ldots}^{\infty}\frac{(\gamma_k^2+1)q_k}{\mu_k(\gamma_k^2+\lambda_p^2)}+\right.$$

$$+\frac{(-1)^p c_p}{\lambda_p}\left(\frac{1}{\lambda_p^2-1}-\frac{\operatorname{cth}\frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p}\right)+\frac{(-1)^p c_p^{(1)}}{\lambda_p}\left(\frac{1}{\lambda_p^2-1}+\frac{\operatorname{cth}\frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p}\right)-$$

$$-\frac{(-1)^p (d_p+d_p^{(1)})}{\lambda_p^2-1}-\frac{8a_0\sin\varphi_1}{\varphi_1(\lambda_p^2-1)}\Bigg]; \tag{2.16}$$

$$Q_p=\frac{\alpha_p\beta_p(\beta_p^2-\alpha_p^2)}{\alpha_p\operatorname{th}\frac{\beta_p t_1}{2}-\beta_p\operatorname{th}\frac{\alpha_p t_1}{2}}\left[\frac{4}{\varphi_1(\lambda_p^2-1)}\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{(\gamma_k^2+1)q_k}{\mu_k(\gamma_k^2+\lambda_p^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^{p+1}(c_p-c_p^{(1)})}{\lambda_p}\left(\frac{1}{\lambda_p^2-1}+\frac{\operatorname{th}\frac{\alpha_p t_1}{2}}{\alpha_p}\right)-\frac{(-1)^{p+1}(d_p-d_p^{(1)})}{\lambda_p^2-1}\right]; \tag{2.17}$$

$$b_p=\frac{\gamma_p\delta_p(\delta_p^2-\gamma_p^2)}{\delta_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1-\gamma_p\operatorname{cth}\delta_p\varphi_1}\left[\frac{2}{\varphi_1(\mu_p^2+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha_k^2-1)(c_k-c_k^{(1)})}{\lambda_k(\alpha_k^2+\mu_p^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{g_p}{m\mu_p}+\frac{q_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1}{m\mu_p\gamma_p}-\frac{8c_1[(-1)^{p+1}e^{-t_1}+1]}{\varphi_1(\mu_p^2+1)^2}\right]; \tag{2.18}$$

$$R_p=\frac{\gamma_p\delta_p(\delta_p^2-\gamma_p^2)}{\delta_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1-\gamma_p\operatorname{cth}\delta_p\varphi_1}\left[\frac{2}{\varphi_1(\mu_p^2+1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(\alpha_k^2-1)(c_k+c_k^{(1)})}{\lambda_k(\alpha_k^2+\mu_p^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{g_p}{m\mu_p}+\frac{q_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1}{m\mu_p\gamma_p}-\frac{8c_1[(-1)^{p+1}e^{-t_1}+1]}{\varphi_1(\mu_p^2+1)^2}\right]. \tag{2.19}$$

Исключив неизвестные коэффициенты Y_k и Z_k в бесконечных системах (2.14), для коэффициентов X_k получим следующие системы бесконечных линейных уравнений

$$\begin{aligned} X_p &= \sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} u_{pn}X_n+U_p \quad (p=1,3,5,\cdots)\\ X_p &= \sum_{n=2,4\cdots}^{\infty} v_{pn}X_n+V_p \quad (p=2,4,6,\cdots), \end{aligned} \tag{2.20}$$

где

$$\begin{aligned} u_{pn}&=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}b_{nk}, \qquad U_p=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}a_k+R_p,\\ v_{pn}&=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}a_{nk}, \qquad V_p=\sum_{k=1}^{\infty}c_{pk}P_k+b_p. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Отметим, что X_{2k} и X_{2k+1} удовлетворяют отдельным уравнениям, то есть значения этих коэффициентов вычисляются независимо друг от друга. Это обстоятельство намного облегчает вычисления при решении конкретных примеров.

Имея значения X_p, из первых двух уравнений (2.14) найдем значения Y_p и Z_p.

Подставляя найденные из (2.8) и (2.13) значения неизвестных коэффициентов в (1.14) и (1.15), для функции напряжений получим следующее выражение

$$F(t, \varphi) = a_0\varphi \sin\varphi + c_0 e^t + c_1 t e^{-t_1} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{c_k \operatorname{ch}\alpha_k t - c_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k (t_1 - t)}{\alpha_k\lambda_k \operatorname{sh}\alpha_k t_1} + \frac{(-1)^{k+1} Y_k}{\beta_k^2 - \alpha_k^2}\left[\frac{\operatorname{ch}\left(t - \frac{t_1}{2}\right)\alpha_k}{\alpha_k \operatorname{sh}\frac{\alpha_k t_1}{2}} - \right.\right.$$

$$\left.-\frac{\operatorname{ch}\beta_k\left(t - \frac{t_1}{2}\right)}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k \frac{t_1}{2}}\right] + \frac{(-1)^{k+1} Z_k}{\beta_k^2 - \alpha_k^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\beta_k\left(t - \frac{t_1}{2}\right)}{\beta_k \operatorname{sh}\beta_k \frac{t_1}{2}} - \right.$$

$$\left.\left.-\frac{\operatorname{sh}\alpha_k\left(t - \frac{t_1}{2}\right)}{\alpha_k \operatorname{sh}\frac{\alpha_k t_1}{2}}\right]\right\}\cos\lambda_k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{q_k \operatorname{ch}\gamma_k\varphi}{\gamma_k\mu_k \operatorname{sh}\gamma_k\varphi_1} + \right.$$

$$\left.+\frac{mX_k}{\delta_k^2 - \lambda_k^2}\left[\frac{\operatorname{ch}\delta_k\varphi}{\delta_k \operatorname{sh}\delta_k\varphi_1} - \frac{\operatorname{ch}\gamma_k\varphi}{\gamma_k \operatorname{sh}\gamma_k\varphi_1}\right]\right\}\cos\mu_k t, \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1), \tag{2.22}$$

где коэффициенты a_0, c_0 и c_1 определяются из систем уравнений

$$2c_0(e^{t_1} + 1) + \frac{4a_0 \sin\varphi_1}{\varphi_1} + c_1(e^{-t_1} + 1) =$$

$$= d_0 + d_0^{(1)} - \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=2,4\ldots}^{\infty}\frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k\gamma_k^2} + \frac{2m}{\varphi_1}\sum_{k=2,4\ldots}^{\infty}\frac{X_k}{\delta_k^2\gamma_k^2},$$

$$2c_0(e^{t_1} - 1) + c_1(e^{-t_1} - 1) = d_0 - d_0^{(1)} + \frac{2}{\varphi_1}\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{(\gamma_k^2 + 1) q_k}{\mu_k\gamma_k^2} -$$

$$-\frac{2m}{\varphi_1}\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{X_k}{\delta_k^2\gamma_k^2}, \tag{2.23}$$

$$c_0(e^{2t_1} - 1) - 2c_1 t_1 = \frac{g_0}{2}(e^{2t_1} - 1) + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(e^{t_1}c_k - c_k^{(1)})}{\lambda_k}.$$

Неизвестные коэффициенты X_k, входящие в соотношения (2.23), определяются из бесконечных систем линейных уравнений (2.20) и выражаются через постоянные a_0 и c_1. Подставив определенные значения неизвестных X_k из (2.20) в (2.23) и разрешив полученные соотношения относительно a_0, c_0 и c_1, получим их значения.

§ 3. Исследование бесконечных систем (2.20)

Покажем, что полученные бесконечные системы линейных уравнений (2.20) регулярны. В силу (2.15) и (2.21) имеем

$$\sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} |u_{pn}| = \sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} b_{nk} = \frac{8\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{t_1 \varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \times$$

$$\times \sum_{n=1,3\cdots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dfrac{\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{\beta_k \operatorname{cth} \dfrac{\alpha_k t_1}{2} - \alpha_k \operatorname{cth} \dfrac{\beta_k t_1}{2}}}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)(\delta_n^2 + \lambda_k^2)(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)} =$$

$$= \frac{a_1}{a_3} \frac{2\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)} =$$

$$= 1 - \frac{\delta_p^2 - \gamma_p^2}{\varphi_1 \gamma_p \delta_p (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} < 1; \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=2,4\cdots}^{\infty} |v_{np}| = \sum_{n=2,4\cdots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} a_{nk} = \frac{8\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{t_1 \varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \times$$

$$\times \sum_{n=2,4\cdots}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\dfrac{\alpha_k \beta_k (\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{\beta_k \operatorname{cth} \dfrac{\alpha_k t_1}{2} - \alpha_k \operatorname{cth} \dfrac{\beta_k t_1}{2}}}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)(\delta_n^2 + \lambda_k^2)(\gamma_n^2 + \lambda_k^2)} =$$

$$= \frac{a_1}{a_3} \frac{2\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{2(\beta_k^2 - \alpha_k^2)}{t_1 \alpha_k \beta_k \left(\beta_k \operatorname{cth} \dfrac{\alpha_k t_1}{2} - \alpha_k \operatorname{cth} \dfrac{\beta_k t_1}{2}\right)}}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)} <$$

$$< \frac{a_1}{a_3} \frac{2\gamma_p \delta_p (\delta_p^2 - \gamma_p^2)}{\varphi_1 (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \mu_p^2)(\beta_k^2 + \mu_p^2)} =$$

$$= 1 - \frac{\delta_p^2 - \gamma_p^2}{\varphi_1 \delta_p \gamma_p (\delta_p \operatorname{cth} \gamma_p \varphi_1 - \gamma_p \operatorname{cth} \delta_p \varphi_1)} < 1. \tag{3.2}$$

При этом использованы значения рядов [11]

$$\sum_{k=2,4\dots}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k^2 + \lambda_p^2)(\delta_k^2 + \lambda_p^2)} = \frac{a_1}{a_3} \frac{1}{\beta_p^2 - \alpha_p^2} \left(\frac{t_1}{4\alpha_p} \operatorname{cth} \frac{\alpha_p t_1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{t_1}{4\beta_p} \operatorname{cth} \frac{\beta_p t_1}{2} - \frac{1}{2\alpha_p^2} + \frac{1}{2\beta_p^2} \right),$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_k^2+\lambda_p^2)(\delta_k^2+\lambda_p^2)} = \frac{a_1}{a_3}\frac{1}{\beta_p^2-\alpha_p^2}\left(\frac{t_1}{4\alpha_p}\operatorname{th}\frac{\alpha_p t_1}{2} - \frac{t_1}{4\beta_p}\operatorname{th}\frac{\beta_p t_1}{2}\right), \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2+\mu_p^2)(\beta_k^2+\mu_p^2)} = \frac{a_3}{a_1}\frac{1}{\delta_p^2-\gamma_p^2}\left(\frac{\varphi_1}{2\gamma_p}\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1 - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi_1}{2\delta_p}\operatorname{cth}\delta_p\varphi_1 - \frac{1}{2\gamma_p^2} + \frac{1}{2\delta_p^2}\right)$$

и неравенств

$$\begin{gathered} 0 < \frac{2(\alpha_p^2-\beta_p^2)}{t_1\alpha_p\beta_p\left(\beta_p\operatorname{cth}\frac{\alpha_p t_1}{2} - \alpha_p\operatorname{cth}\frac{\beta_p t_1}{2}\right)} < 1 \\ 0 < \frac{\delta_p^2-\gamma_p^2}{\varphi_1\delta_p\gamma_p(\delta_p\operatorname{cth}\gamma_p\varphi_1 - \gamma_p\operatorname{cth}\delta_p\varphi_1)} < 1. \end{gathered} \quad (3.4)$$

Таким образом, мы получили, что бесконечные системы регулярны.

Легко видеть из (2.16)—(2.19) и (2.21), что свободные члены этих систем при $\lambda_p \neq 1$ ограничены. Покажем, что при $\lambda_p = 1$ эти члены не обращаются в бесконечность. Для этого нужно только показать, что при $\lambda_p = 1$ $Q_p < \infty$.

Составим уравнение равновесия ($\Sigma F_x = 0$) для рассматриваемого случая.

В силу симметрии оно будет иметь вид

$$-\int_0^{\varphi_1}\tau_{r\varphi}(t_1,\varphi)\sin\varphi ds + \cos\varphi_1\int_a^b\tau_{r\varphi}(t,\varphi_1)dr + \int_0^{\varphi_1}\tau_{r\varphi}(0,\varphi)\sin\varphi ds_1 +$$

$$+\int_0^{\varphi_1}\sigma_r(t_1,\varphi)\cos\varphi ds - \int_0^{\varphi_1}\sigma_r(0,\varphi)\cos\varphi ds_1 - \sin\varphi_1\int_a^b\sigma_\varphi(t,\varphi_1)dr = 0. \quad (3.5)$$

Подставив сюда значения напряжений на контуре из (2.21), получим условия равновесия в следующем виде:

$$2\cos\varphi_1\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{q_k}{\mu_k} + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k^{(1)}-c_k)\frac{\lambda_k(-1)^{k+1}\sin\varphi_1}{\lambda_k^2-1} + (d_0-d_0^{(1)})\sin\varphi_1 +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(d_k-d_k^{(1)})\frac{(-1)^{k+1}\sin\varphi_1}{\lambda_k^2-1} - \sin\varphi_1\int_a^b\sigma_\varphi(t,\varphi_1)dr = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6), переходя к пределу, когда $\lambda_k \to 1$ (то есть $\varphi_1 = \pi$ при $k = 1$), получим

$$\frac{4(-1)^p}{p\pi}\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty}\frac{q_k}{\mu_k}+c_p^{(1)}-c_p=0. \tag{3.7}$$

Из значения Q_p видно, что выражение в квадратных скобках при $\lambda_k \to 1$ с точностью до постоянного множителя совпадает с левой частью уравнения (3.7), то есть обращается в нуль того же порядка, как и $\lambda_k - 1$.

Таким образом, при $\lambda_k = 1$ выражение Q_p обращается в неопределенность типа 0/0. Перейдя к пределу, легко можно вычислить значения Q_p при $\lambda_k = 1$.

Итак, мы доказали, что свободные члены систем (2.20) всегда ограничены сверху. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией регулярных систем линейных уравнений [12] и оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью.

Для изотропного тела

$$a_1 = a_3 = \frac{1}{E}, \quad a_2 = -\frac{\nu}{E}, \quad a_4 = \frac{2(1+\nu)}{E}, \quad a_5 = \frac{2}{E},$$
$$\alpha_k = \lambda_k + 1, \quad \beta_k = \lambda_k - 1, \quad \gamma_k = \mu_k + i, \quad \delta_k = \mu_k - i. \tag{3.8}$$

Подставляя эти значения в (2.14)—(2.19) и (2.22), получим решение плоской задачи теории упругости для изотропного кольцевого сектора, рассмотренной в работе [10]. Аналогично можно решить плоскую задачу теории упругости для кольцевого сектора, изготовленного из ортотропного материала, когда внешняя нагрузка распределена несимметрично относительно оси x.

§ 4. Об одной смешанной задаче для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора

Рассмотрим ортотропную пластинку в виде кольцевого сектора, когда на криволинейных частях границы заданы напряжения, а на прямолинейных частях известны касательные напряжения и нормальные перемещения (фиг. 2), то есть

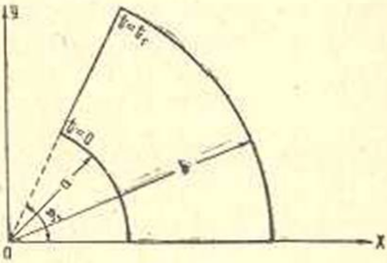
$$\left.\begin{aligned}
a^2 e^{t_1}\sigma_r(t_1, \varphi) &= f_1(\varphi) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos\lambda_k\varphi \\
a^2\sigma\ (0, \varphi) &= f_2(\varphi) = d_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(1)} \cos\lambda_k\varphi \\
a^2 e^{t_1}\tau_{r\varphi}(t_1, \varphi) &= f_3(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\lambda_k\varphi \\
a^2\tau_{r\varphi}(0, \varphi) &= f_4(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)} \sin\lambda_k\varphi
\end{aligned}\right| \quad (0 < \varphi \leqslant \varphi_1) \tag{4.1}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a^2 e^t \tau_{rz}(t,\ \varphi_1) &= f_5(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \mu_k t \\
a^2 e^t \tau_{rz}(t,\ 0) &= f_6(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{(1)} \sin \mu_k t \\
av(t,\ \varphi_1) &= g_0 \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k(t) \\
av(t,\ 0) &= g_0^{(1)} \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(1)} \varphi_k(t)
\end{aligned}
\right| \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \qquad (4.2)
$$

Эта задача сводится к решению уравнения (1.9) с граничными условиями (4.1) и (4.2).

В силу (1.8) и (1.13) выберем функции $f(\varphi)$, $f_0(t)$, $a(\varphi)$ и $b(t)$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
a(\varphi) &= A_0, \quad f_0(t) = D_0 e^t, \\
b(t) &= c_0 e^t, \quad f(\varphi) = F_0 \cos \varphi.
\end{aligned} \qquad (4.3)
$$



Фиг. 2.

Удовлетворяя условиям (4.1), (4.2) и пользуясь соотношениями (1.17), для неизвестных коэффициентов A_k, B_k, C_k, D_k, E_k, G_k, F_k и H_k получим следующие значения:

$$
A_k = \frac{c_k}{\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} - C_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1}, \qquad B_k = \frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} - D_k \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1},
$$

$$
\begin{aligned}
C_k = \frac{1}{\Delta_k} \Bigg\{ & Q_k \left(\frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1}{\beta_k} - \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1 \operatorname{cth} \alpha_k t_1}{\alpha_k} \right) - Q_k^{(1)} \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \\
& + \frac{c_k}{\alpha_k \lambda_k} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\alpha_k} - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} \beta_k t_1 - 1}{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \frac{c_k^{(1)}}{\alpha_k \beta_k \lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_k = \frac{1}{\Delta_k} \Bigg\{ & Q_k \left(\frac{1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) - Q_k^{(1)} \left(\frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1}{\beta_k} - \frac{1}{\alpha_k} \frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1 \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) + \\
& + \frac{c_k}{\alpha_k \beta_k \lambda_k} \frac{\operatorname{ch} \beta_k t_1 - \operatorname{ch} \alpha_k t_1}{\operatorname{sh} \alpha_k t_1} + \frac{c_k^{(1)}}{\alpha_k \lambda_k} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_k t_1}{\alpha_k} - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k t_1 \operatorname{ch} \beta_k t_1 - 1}{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_k t_1} \right) \Bigg\}, \quad (4.4)
\end{aligned}
$$

$$
E_k = \frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} \left(\frac{q_k}{\mu_k} - \delta_k^2 M_k \right), \qquad F_k = \frac{-\delta_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1} \left(\frac{q_k}{\mu_k} - \gamma_k^2 M_k \right),
$$

$$
G_k = \frac{\gamma_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \gamma_k \varphi_1} \left(\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} - \delta_k^2 M_k^{(1)} \right),
$$

$$
H_k = \frac{-\delta_k^2}{(\gamma_k^2 - \delta_k^2) \operatorname{sh} \delta_k \varphi_1} \left(\frac{q_k^{(1)}}{\mu_k} - \gamma_k^2 M_k^{(1)} \right),
$$

где

$$\Delta_k=\frac{\alpha_k^2+\beta_k^2}{\alpha_k^2\beta_k^2}\operatorname{sh}^2\beta_k t_1-\frac{2}{\alpha_k\beta_k}\frac{\operatorname{sh}\beta_k t_1(\operatorname{ch}\alpha_k t_1\operatorname{ch}\beta_k t_1-1)}{\operatorname{sh}\alpha_k t_1},$$

$$Q_k=\frac{1}{\lambda_k^2-1}\left[\frac{c_k}{\lambda_k}-d_k+\frac{2}{\varphi_1}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}N_{pk}\right],$$

$$Q_k^{(1)}=\frac{1}{\lambda_k^2-1}\left[\frac{c_k^{(1)}}{\lambda_k}-d_k^{(1)}+\frac{2}{\varphi_1}\sum_{p=1}^{\infty}N_{pk}\right],$$

$$N_{pk}=\frac{q_p^{(1)}+(-1)^k q_p}{\mu_p(\gamma_p^2-\delta_p^2)}\left[\frac{\gamma_p^2(\gamma_p^2+1)}{\gamma_p^2+\lambda_k^2}+\frac{\delta_p^2(\delta_p^2+1)}{\delta_p^2+\lambda_k^2}\right]-$$

$$-\left[M_p^{(1)}+(-1)^k M_p\right]\frac{\gamma_p^2\delta_p^2}{\gamma_p^2-\delta_p^2}\left[\frac{\gamma_p^2+1}{\gamma_p^2+\lambda_k^2}+\frac{\delta_p^2+1}{\delta_p^2+\lambda_k^2}\right], \tag{4.5}$$

$$M_k=\frac{2\mu_k}{t_1(\mu_k^2+1)(a_3\mu_k^2+a_1)}\left[(a_1+a_2)\sum_{p=1}^{\infty}{}^{*}\frac{q_k\mu_k[(-1)^{k+p}-1]}{\mu_p(\mu_k^2-\mu_p^2)}+\right.$$

$$+\frac{t_1q_k(a_2\mu_k^2-a_1)}{2\mu_k^2}-F_0\cos\varphi_1\frac{1+(-1)^{k+1}}{\mu_k}-$$

$$\left.-a_1\varphi_1A_0\frac{(-1)^{k+1}}{\mu_k}-\frac{t_1g_k}{2}(\mu_k^2+1)\right],$$

$$M_k^{(1)}=\frac{2\mu_k}{t_1(\mu_k^2+1)(a_3\mu_k^2+a_1)}\left[(a_1+a_2)\sum_{p=1}^{\infty}{}^{*}\frac{q_p^{(1)}\mu_k[(-1)^{k+p}-1]}{\mu_p(\mu_k^2-\mu_p^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{t_1q_k^{(1)}(a_2\mu_k^2-a_1)}{2\mu_k^2}-F_0\frac{1+(-1)^{k+1}}{\mu_k}-\frac{t_1g_k^{(1)}}{2}(\mu_k^2+1)\right].$$

Знак (*) при $\sum\limits_{p=1}^{\infty}$ означает следующее: если в выражений под суммой k — четное число, то p принимает только нечетные значения и, обратно, если k — нечетное, то p принимает только четные значения.

Для определения неизвестных коэффициентов A_0, c_0, D_0, F_0 получим следующие уравнения:

$$2c_0e^{t_1}+A_0=d_0-\frac{1}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kN_{k0},$$

$$2c_0+A_0=d_0^{(1)}-\frac{1}{\varphi_1}\sum_{k=1}^{\infty}N_{k0},$$

$$(a_1+a_2)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k[1+(-1)^{k+1}e^{t_1}]}{\mu_k^2+1}+[2(a_2-a_1)\varphi_1c_0+D_0]\frac{e^{2t_1}-1}{2}-$$

$$-a_1\varphi_1 A_0 t_1 e^{t_1} - F_0 \cos\varphi_1 (e^{t_1} - 1) - \frac{g_0}{2}(e^{2t_1} - 1) = 0, \qquad (4.6)$$

$$(a_1 + a_2)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k^{(1)}[1 + (-1)^{k+1} e^{t_1}]}{\alpha_k^2 + 1} + D_0 \frac{e^{2t_1} - 1}{2} -$$

$$- F_0 (e^{t_1} - 1) - \frac{g_0^{(1)}}{2}(e^{2t_1} - 1) = 0.$$

Подставляя значения (4.5) и (4.6) в (1.14) и пользуясь соотношениями (1.15) и (4.3), получим выражения для функции напряжений $F(t, \varphi)$.

Решение данной задачи в случае изотропного материала получается из (4.5) и (4.6) предельным переходом, используя при этом формулы (3.8).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 XI 1963

Ս. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏԵՍՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է առաձգականության տեսության որոշ հարթ խնդիրների ճշգրիտ լուծումը օղակային սեկտորի տեսք ունեցող օրթոտրոպ սալերի համար, երբ սեկտորի եզրերում եզրային պայմանները տրված են ա) լարումներով և բ) խառը տեսքով: Այդ խնդիրները բերվում են մի բիհարմոնիկ ֆունկցիայի որոշմանը, որը ներկայացվում է Ֆուրյեի շարքերի տեսքով:

Ինտեգրման հաստատունների որոշումը առաջին խնդրում հանգում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը:

Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները ռեգուլյար են, իսկ ազատ անդամները՝ սահմանափակ: Երկրորդ խնդիրը լուծվում է առանց գծային անվերջ հավասարումների սիստեմների օգտագործման:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938.
2. *Шерман Д. И.* К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, **6**, вып. 6, 1942.
3. *Шерман Д. И.* Новое решение плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ДАН СССР, **32**, № 5, 1941.
4. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

5. *Лехницкий С. Г.* Плоская задача теории упругости для тела с цилиндрической анизотропией. Ученые записки Саратовского гос. университета им. Н. Г. Чернышевского, т. I (XIV), серия физ.-мат. наук, вып. 2, 1938.
6. *Савин Г. Н.* Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды. Труды института строительной механики УАН. № 32, 1938.
7. *Михлин С. Г.* Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 76, 1936.
8. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ—ГТТИ, Л., 1934.
9. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* Кручение круглых стержней с продольными выточками. ПММ, **24**, 2, 1960.
10. *Баблоян А. А.* Решение плоской задачи теории упругости для кольцевого сектора в напряжениях. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 1, 1962.
11. *Гончаров В. Л.* Теория функций комплексного переменного. Учпедгиз, М., 1955.
12. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզ.-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

КАРАПЕТЯН К. С., КОТИКЯН Р. А.

ОБ ОСНОВНОМ УРАВНЕНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ТЕОРИИ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕГО ТЕЛА

Согласно теории упруго-ползучего тела [1] осевая относительная деформация призматического бетонного бруса, находящегося под действием осевых напряжений $\sigma(t)$, приложенных в некотором возрасте бетона τ, выражается зависимостью

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}-\int_{\tau_1}^{t}\sigma(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau. \qquad (1)$$

В данном уравнении $C(t, \tau)$ является мерой ползучести, то есть деформацией ползучести в момент времени t от единичного напряжения, приложенного в возрасте τ.

В работе [2] Александровский С. В. считает такое определение функции $C(t, \tau)$ неточным, так как по его мнению это в ряде случаев может привести к недоразумениям и даже к ошибкам. Чтобы доказать сказанное, он рассматривает уравнение (1) для воображаемого идеально-упругого тела, необладающего свойством ползучести, с изменяющимся во времени модулем упругости. В рассматриваемом случае, поскольку $C(t, \tau)=0$, из уравнения (1) должен следовать закон Гука, однако, фактически получается

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E(t)}+\int_{\tau_1}^{t}\frac{E'(\tau)}{E^2(\tau)}\sigma(\tau)\,d\tau. \qquad (2)$$

По мнению Алесандровского С. В. данное противоречие является следствием того, что в уравнении (1) $C(t, \tau)$ представляет собой не меру ползучести, а лишь ее часть. Чтобы устранить это противоречие, он предлагает для меры ползучести следующее выражение

$$C^*(t,\tau)=C(t,\tau)+\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}. \qquad (3)$$

Здесь $C(t, \tau)$ представляет собой меру ползучести в нашем обычном понимании. Что касается $\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}$, то это есть разница удельных упругих деформаций бетонного бруса в момент времени τ приложения единичных напряжений и в момент времени наблюдения t. Для упругого тела, не обладающего ползучестью, Александровский С. В. принимает

$$C^*(t, \tau)=0 \tag{4}$$

и тогда из уравнения (3) при условии (4) получает, что

$$C(t, \tau)=\frac{1}{E(t)}-\frac{1}{E(\tau)}. \tag{5}$$

Таким образом, по Александровскому С. В. в рассматриваемом случае хотя „действительная мера ползучести" $C^*(t, \tau)$ равна нулю, но ее часть $C(t, \tau)$ не равна нулю. И если теперь в уравнение (1) подставить значение $C(t, \tau)$ (5), то тем самым, как это указывает Александровский С. В., будет устранено то противоречие зависимости (1) для рассматриваемого случая, о котором указывалось выше.

Однако, логически, если для упругого тела, необладающего ползучестью $C^*(t, \tau)$ равно нулю, а $C(t, \tau)$ не равно нулю, то это значит, что по своему характеру $C(t, \tau)$ не является деформацией ползучести. Данное противоречие вызвано тем, что в выражении $C^*(t, \tau)$ (3) фигурируют деформации $\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}$, которые по своему характеру являются упруго-мгновенными и их никак нельзя считать частью меры ползучести.

Рассмотрим к чему может привести выражение $C^*(t, \tau)$ (3), когда имеем материал, обладающий ползучестью в следующих трех случаях:

1) модуль упругости материала во времени возрастает,
2) модуль упругости материала во времени не изменяется,
3) модуль упругости материала во времени уменьшается.

Реальным материалом, для которого все эти три случая характерны, является бетон.

В первом случае, поскольку модуль упругости во времени возрастает, $\frac{1}{E(\tau)}>\frac{1}{E(t)}$. Поэтому разница $\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}$ положительна и

$$C^*(t, \tau)>C(t, \tau).$$

Во втором случае, поскольку модуль упругости во времени не изменяется, $\frac{1}{E(\tau)}=\frac{1}{E(t)}$. Поэтому разница $\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}=0$ и

$$C^*(t, \tau)=C(t, \tau).$$

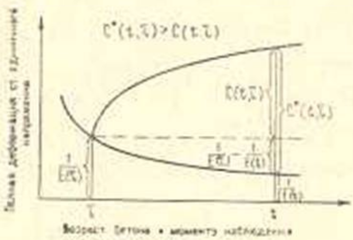
В третьем случае, поскольку модуль упругости во времени уменьшается, $\frac{1}{E(\tau)}<\frac{1}{E(t)}$. Поэтому разница $\frac{1}{E(\tau)}-\frac{1}{E(t)}$ отрицательна и

$$C^*(t, \tau)<C(t, \tau).$$

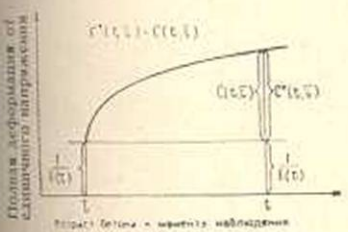
Все эти три случая графически представлены на фиг. 1, 2 и 3.

Наиболее характерными из рассмотренных случаев являются первый и последний (фиг. 1 и 3).

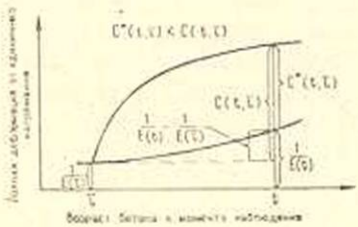
В первом случае увеличение модуля упругости во времени приводит к увеличению меры ползучести. Между тем известно, что упрочнение и уменьшение деформативной способности бетона во времени никак не может привести к увеличению меры ползучести.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В третьем случае, наоборот, уменьшение модуля упругости во времени приводит к уменьшению меры ползучести, что также далеко от действительности. Поскольку в данном случае $C^*(t, \tau) < C(t, \tau)$, это значит, что $C^*(t, \tau)$ к моменту t даже меньше фактических деформаций ползучести материала, нагруженного в возрасте τ (фиг. 3).

Следует также отметить, что если бы даже предлагаемое Александровским С. В. выражение меры ползучести $C^*(t, \tau)$ было лишено тех недостатков, о которых указывалось выше, при решении задач оно не вносит никаких изменений в ядро интегрального уравнения типа Вольтерра. Так например, в данном случае

$$\frac{\partial}{\partial\tau}C^*(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[C(t, \tau) + \frac{1}{E(\tau)}\right], \quad (6)$$

то есть получается ядро уравнения (1).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 IV 1964

Կ. Ս. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱ-ՍՈՂՔԱՅԻՆ ՄԱՐՄՆԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՍՈՂՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ցույց է տրվում, որ առաձգա-սողքային մարմնի տեսության սողքի հիմնական հավասարման մեջ $C(t, \tau)$ սողքի չափը չի կարող փոխարինվել Ս. Վ. Ալեքսանդրովսկու առաջարկած $C^*(t, \tau)$ արտահայտությամբ, քանի որ $C^*(t, \tau)$-ն հիմնավորված չէ, իր մեջ պարունակում է պարզ հակասություններ և, բացի դրանից, ոչ մի փոփոխություն չի մտցնում (1) Վոլտերայի տիպի ինտեգրալ հավասարման կորիզի մեջ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.–Л., 1952.
2. *Александровский С. В.* О методике исследований ползучести и влажностных деформаций бетона. Труды координационного совещания „Методика лабораторных исследований деформаций и прочности бетона, арматуры и железобетонных конструкций". Госстройиздат, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ЖИДКОСТИ

§ 1. Рассмотрим задачу проникания давления в сжимаемую жидкость. Уравнение состояния жидкости политропическое:

$$P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right],$$

где P — давление, ρ — плотность. Рассмотрим плоскую задачу.

Как показано в [5], вблизи фронта звуковой волны $r = a_0 t$ линейное решение имеет вид

$$\frac{P(x, y, t)}{P_A(0)} = \frac{2}{\pi}\frac{V_0 t M^2}{r} y \frac{\sqrt{a_0 t - r}\sqrt{2r}}{V_0^2 t^2 - x^2 M^4}, \tag{1.1}$$

где оси Ox и Oy направлены по границе жидкости и нормально к ней, t — время, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $M = \frac{V_0}{a_0}$, $P_A(t)$ — заданное на границе давление, $V_0 = R'(0)$; $R'(t)$ — скорость движения фронта давления по границе, причем решение (1.1) имеет место как для $R'(t) > a_0$, так и для $R'(t) < a_0$.

Если ввести полярные координаты

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

(1) запишется вблизи звуковой линии $r = a_0 t$ в виде

$$\frac{P}{P_A} = \frac{2}{\pi} M \sin\theta \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{r}{a_0 t}}}{1 - \cos^2\theta M^2}. \tag{1.2}$$

Для потенциала скоростей $\varphi(x, y, t)$ имеем из (1.2):

$$\frac{\varphi}{t} = -\gamma a_0^2 f(\theta)\left(1 - \frac{r}{a_0 t}\right)^{3/2}, \tag{1.3}$$

где

$$\gamma = \frac{P_A(0)}{\rho_0 a_0^2}, \qquad f(\theta) = \frac{2}{3}\frac{2}{\pi}\frac{M\sin\theta}{1 - \cos^2\theta M^2}\sqrt{2}.$$

В работе [6] получено методом Лайтхилла [1] распределение давления на ударной волне, ограничивающей область влияния точки O, во втором приближении

$$P = \gamma^2 \frac{27}{16} (n+1) \rho_0 a_0^2 f^2 (\theta). \tag{1.4}$$

Получим (1.4) по методу Витема [2].

В формуле (1.2) для линейного решения заменим линеаризованные характеристические переменные $t - \frac{r}{a_0}$ точными, обозначая их через Y:

$$\frac{P}{P_A(0)} = \frac{3}{2} f(\theta) \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{\frac{r}{a_0}}}. \tag{1.5}$$

Уравнение характеристики, с учетом того, что ударная волна отличается от звуковой волны $t = \frac{r}{a_0}$ во втором порядке, имеет вид

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0} \frac{n+1}{2} \frac{P}{Bn}. \tag{1.6}$$

Интегрируя (6), найдем уравнение характеристик

$$t = \alpha(r) - \beta(r) \sqrt{Y} + Y, \tag{1.7}$$

где

$$\alpha(r) = \frac{r}{a_0}, \qquad \beta(r) = \frac{1}{a_0} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{P_A}{B_n} \int_0^r \frac{3}{2} f(\theta) \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{a_0}}}. \tag{1.8}$$

Если продифференцировать условие (1.7) вдоль ударного фронта и подставить в формулу Пфрима, легко найти [2] соотношение:

$$\beta(r) = \frac{2 \int_0^Y \sqrt{Y}\, dY}{(\sqrt{Y})^2} = \frac{4}{3} \sqrt{Y}. \tag{1.9}$$

Теперь из (1.5) и (1.9) имеем

$$\frac{P}{P_A(0)} = \frac{27}{8} \frac{n+1}{2} f^2(\theta) \frac{P_A(0)}{\rho_0 a_0^2}, \tag{1.10}$$

что совпадает с формулой (1.4).

Таким образом, метод Витема для случая ударных фронтов, отличающихся от фронтов линейных задач во втором порядке, дает решение во втором приближении.

Поскольку линейное решение (1.2) имеет место для произвольного во времени давления на границе $P_Л(t)$ и поскольку при построении второго приближения используется линейное решение [1], можно утверждать, что решение (1.4) имеет место для произвольного $P_Л(t)$ и скорости фронта по поверхности $R'(t)$. Чтобы подтвердить это положение, проделаем, эту же процедуру способом, предложенным В. М. Булахом [4].

Уравнение потенциала скоростей φ в переменных r, θ, t имеет вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}-\frac{a^2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\cdots=0, \quad (1.11)$$

где невыписанные члены содержат производные по θ и, как видно будет из дальнейшего, не влияют на решение.

Введем переменные $\xi=\frac{r}{t}$, θ, t. Тогда (1.11) примет вид

$$\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\xi^2}\left[\left(\xi-\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\xi}\right)^2-a^2\right]-\frac{a^2}{\xi}\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\xi}+t^2\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial t^2}-$$

$$-t\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\xi\partial t}\left(\xi-\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial\xi}\right)+2\frac{\partial\tilde\varphi}{\partial t}t+\cdots=0, \quad (1.12)$$

где $\tilde\varphi=\frac{\varphi}{t}$.

В случае, когда $\tilde\varphi$ не зависит от t так же, как и в [4], легко найти разложение $\tilde\varphi$ в окрестности звуковой волны $r=a_0t$:

$$\tilde\varphi=\frac{1}{n+1}(a_0-\xi)^2+\gamma_1(a_0-\xi)^3\ln(a_0-\xi),$$

$$\gamma_1=\frac{2n^3+6n+3n^2+8}{(n+1)^3 6a_0}. \quad (1.13)$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial^2\tilde\varphi}{\partial\xi^2}\neq 0$, имеет место явление пограничного слоя и решение (1.12) можно искать в виде

$$\tilde\varphi=\lambda^2\varphi_1=\lambda^2\varphi_2^2\,y(\tilde t)\frac{1}{n+1}, \quad (1.14)$$

где λ — малый параметр, $\tilde t=\frac{\xi-a_0}{\lambda\varphi_2}$, причем на ударной волне $\tilde t=1$.

Если предположить, что φ_2 зависит только от θ, что естественно, поскольку линейное решение (1) вблизи звуковой волны $r=a_0t$ зависит только от $\xi=\frac{r}{t}$ и θ и, следовательно, вдоль ударной волны, определяемой линейным решением, ξ зависит только от θ и собрать в уравнении (1.12) члены с первой степенью λ, легко найти уравнение для y:

$$y''(2\tilde{t}-y')=y'. \tag{1.15}$$

Граничные условия на ударной волне дают

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}=V=\frac{2D}{n+1}-\frac{a_0^2}{D}\frac{2}{n+1},$$

где D — скорость ударной волны, V — скорость частиц

$$D=\xi\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{\xi^2}\xi_0^2\right)$$

или с точностью до малых третьего порядка

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\xi}=\frac{4}{n+1}(\xi-a_0)=\frac{4}{n+1}\lambda\varphi_2. \tag{1.16}$$

Подставляя сюда выражение (1.14) и учитывая условие $\tilde{\varphi}=0$, имеем при $\tilde{t}=1$

$$y=0,\quad y'=4.$$

Решение (1.15) при этих граничных условиях найдется [4] в виде:

$$y=\frac{8}{3}\left[\tilde{t}-\frac{8}{9}\left(1-\frac{3}{4}\tilde{t}\right)^{3/2}-\frac{8}{9}\right].$$

Теперь из (1.14) находим при больших $(-\tilde{t})$:

$$\tilde{\varphi}=\lambda^2\varphi_2^2 y\frac{1}{n+1}=-\lambda^2\varphi_2^2\frac{1}{n+1}\frac{8\sqrt{3}}{9}\frac{(a_0-\xi)^{3/2}}{(\lambda\varphi_2)^{3/2}}. \tag{1.17}$$

Сравнение с (1.3) дает

$$\lambda\varphi_2=\frac{27}{64}\left(\frac{P_A}{\rho_0 a_0^2}\right)^2 f^2(\theta)\,a_0(n+1)^2.$$

Для давления из соотношений на ударной волне находим

$$P=\rho_0 DV=\rho_0 a_0\frac{4}{n+1}\lambda\varphi_2=\frac{27}{16}\rho_0 a_0^2(n+1)\left(\frac{P_A}{\rho_0 a_0^2}\right)^2 f^2(\theta),$$

что совпадает с (1.4). Полученные формулы верны для переменного во времени, но постоянного за фронтом давления на поверхности $P_A(t)$, однако, случай переменного давления по координате не внесет дополнительных трудностей.

В случае неоднородной жидкости выберем оси Ox_0 по поверхности жидкости, ось Oz_0 направим вглубь. Уравнение звуковой волны имеет вид [5]:

$$t = \lambda x_0 + \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}\, dz = \tau(x_0, z_0),$$

$$x_0 = \int_0^{z_0} \frac{\lambda dz}{\sqrt{\frac{1}{a^2(z)} - \lambda^2}},$$

где λ характеризует угол выхода луча из точки O с осью Ox_0, $a(z)$ — начальная скорость звука жидкости.

Для давления вблизи звуковой волны можно получить асимптотическую формулу из общих квадратур [5], получаемых по методу Адамара [5].

Если заменить в этой формуле, пользуясь методом Витема [2], характеристическую переменную $t - \tau(x_0, z_0)$ через точную характеристику y, получим для распределения давления

$$\frac{P(x_0, z_0, t)}{P_\lambda(0)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\frac{\mu(0)}{\mu(z_0)}}{J_1(z_0, 0)\, J_2(z_0, 0)}}\, V_0 \sqrt{\frac{2x_0}{\lambda}}\, \frac{2}{1 - \lambda^2 V_0^2} \sqrt{y}, \quad (1.18)$$

где

$$\mu(z_0) = \sqrt{\frac{1}{a^2(z_0)} - \lambda^2}, \quad J_1(z_0, 0) = \int_{z_0}^{0} \frac{dz}{a^2(z)\,\mu^3(z)},$$

$$J_2(z_0, 0) = \int_{z_0}^{0} \frac{dz}{\mu(z)}.$$

Обозначим через s длину дуги вдоль характеристического луча. Тогда вдоль характеристики имеет место соотношение [3]:

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{a(z)} - \frac{1}{a(z)} \frac{n+1}{2} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)}. \quad (1.19)$$

Интегрируя (1.19) вдоль характеристики, получим:

$$t = \int \frac{ds}{a(z)} - \frac{n+1}{2} \int \frac{ds}{a(z)} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)} + y, \quad (1.20)$$

где P находится из (1.18).

Дифференцируя (1.20) вдоль ударного фронта и используя формулу для скорости фронта

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{a(z)} - \frac{n+1}{4} \frac{1}{a(z)} \frac{P}{\rho_0 a^2(z)},$$

получим уравнение для y вдоль фронта

$$y\int\limits_0^s \frac{ds}{a^2(z)}\frac{P}{\sqrt{y}}\frac{1}{\rho_0 a^2(z)}=\frac{4}{n+1}\int\limits_0^y \sqrt{y}\,dy. \tag{1.21}$$

Уравнение (1.21) для неоднородной жидкости легко выводится из соотношения, найденного К. Е. Губкиным [3] при решении задачи о коротких волнах.

Подставляя в (1.21) выражение P из (1.18), найдем, используя уравнение звуковой волны: $ds=\frac{dz}{a(z)\mu(z)}$, распределение y вдоль ударной волны

$$\sqrt{y}\,\frac{8}{3}\,\frac{1}{n+1}=\frac{V_0}{\pi}\int\limits_0^{z_0}\frac{\sqrt{\mu(0)}\,\frac{P_A(0)}{\rho_0 a^2(z)}\sqrt{\frac{2x_0}{\lambda}}\,dz}{a^2(z)\,\mu^3(z)\,(1-V_0^2\lambda^2)\sqrt{J_1(z_0,0)\,J_3(z_0,0)}}. \tag{1.22}$$

Подстановка (1.22) в (1.18) дает давление на ударной волне.

Легко видеть, что давление будет малой порядка $\left(\frac{P_A}{\rho_0 a^2}\right)^2$.

§ 2. Рассмотрим осесимметричную задачу распространения давления в сжимаемую жидкость. Уравнение политропы

$$P=B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n-1\right], \tag{2.1}$$

где P — давление, ρ — плотность, B, n — постоянные.

Выберем оси координат Ox в плоскости поверхности, Oy перпендикулярно к ней. Если ввести еще полярные координаты $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, решение задачи [5] вблизи звуковой волны $r=a_0t$ запишется

$$\frac{P}{P_A(0)}=\frac{\widetilde{M}^5 r\sin\theta\,(at-r)\,2r}{2V_0^3t^3\,(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}, \tag{2.2}$$

где $\widetilde{M}=\frac{V_0}{a_0}$, a_0 — скорость звука невозмущенной жидкости, t — время, V_0 — скорость фронта давления по границе, $P_A(t)$ — давление на границе.

Ищем решение во втором приближении, пользуясь методом Витема [2]. Заменяя в (2.2) линейные характеристики точными, найдем

$$\frac{P}{P_A(0)}=\frac{\widetilde{M}^3\sin\theta\, y}{\frac{r}{a_0}(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}=\varphi(\theta)\frac{1}{\frac{r}{a_0}}y, \tag{2.3}$$

где $\varphi=\frac{\widetilde{M}^3\sin\theta}{(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{3/2}}$, $y=\mathrm{const}$ — характеристическая линия точной задачи. Уравнение характеристик во втором приближении записывается

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0}\frac{P}{Bn} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_0}\frac{\varphi(\theta)}{\frac{r}{a_0}}\frac{P_A(0)}{Bn}y. \tag{2.4}$$

Решение (2.4) при начальном условии (2.1) $t = y$ $r = a_0 y$ имеет вид

$$t = \alpha(r) - \beta(r)\, y + y. \tag{2.5}$$

Здесь

$$\alpha(r) = \frac{r}{a_0}, \qquad \gamma = \frac{P_A(0)}{Bn},$$

$$\beta(r) = \frac{\widetilde{M}^3}{a_0}\frac{\sin\theta}{(1-\widetilde{M}^2\cos^2\theta)^{1/2}}\gamma a_0 \ln\frac{r}{a_0 y}.$$

Условие на ударном фронте [2] дает связь $\beta(r)$ и y

$$\beta(r) = \frac{2\int\limits_0^y y\,dy}{y^2} = 1$$

или

$$\varphi(\theta)\,\gamma \ln\frac{r}{a_0 y} = 1. \tag{2.6}$$

Отсюда имеем, что

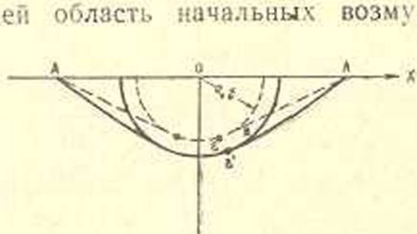
$$y = \frac{r}{a_0} e^{-\frac{1}{\gamma\varphi(\theta)}}. \tag{2.7}$$

Из (2.3) и (2.7) имеем

$$\frac{P}{P_A(0)} = \varphi(\theta)\, e^{-\frac{1}{\gamma\varphi(\theta)}}. \tag{2.8}$$

Решение (2.8) может быть использовано для сферической задачи расширения поршня.

Таким образом, найдено решение в осесимметричной задаче на фронте ударной волны, ограничивающей область начальных возмущений. Для случая $V_0 > a_0$, однако, это решение не будет верно вблизи точки $\cos\theta = \frac{1}{\widetilde{M}}$ касания сферы $r = a_0 t$ и волны AB, то есть точки c, фиг. 1.



Фиг. 1.

§ 3. Пусть граничные условия задачи таковы, что в предположении малости возмущений движение за ударной волной можно считать простой волной. Рассмотрим политропическое уравнение состояния жидкости, $P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$, где P — давление, ρ — плотность. Уравнения простой волны запишутся в виде [7]:

$$\left(\frac{x}{t} - V_x\right)\cos\varphi + \left(\frac{y}{t} - V_y\right)\sin\varphi = a,$$
$$dV_x = \frac{2}{n-1}da\cos\varphi, \qquad dV_y = \frac{2}{n-1}da\sin\varphi, \tag{3.1}$$

где Ox, Oy — оси декартовых координат, t — время, V_x, V_y — скорости по осям, a — скорость звука жидкости. Покажем, что если движение малое, то из системы (3.1) можно получить с точностью до малых третьего порядка соотношения на ударной волне.

Введем модуль и угол скорости:

$$V_x = V\cos\beta, \quad V_y = V\sin\beta.$$

Тогда имеем

$$dV = \frac{dP}{\rho a}\cos(\varphi - \beta),$$
$$Vd\beta = \frac{dP}{\rho a}\sin(\varphi - \beta). \tag{3.2}$$

В линейной задаче скорость направлена по нормали к характеристике, совпадающей с ударным фронтом, и $\varphi_0 - \beta_0 = 0$. Поэтому $\varphi - \beta$ мало и с точностью до малых третьего порядка имеем

$$dV = \frac{dP}{\rho a},$$
$$Vd\beta = \frac{dP}{\rho a}(\varphi - \beta). \tag{3.3}$$

Невозмущенное состояние перед фронтом ударной волны имеет параметры $V = 0$, $P = 0$, $\rho = \rho_0$.

Пусть параметром, характеризующим малость движения, будет $\frac{P}{\rho_0 a_0^2}$.

Из (3.3) имеем

$$\left(\frac{dV}{dP}\right)_{P=0} = \frac{1}{\rho_0 a_0}, \quad \left(\frac{d^2V}{dP^2}\right)_{P=0} = -\frac{n+1}{2}\frac{1}{\rho_0 a_0}\frac{1}{Bn}, \quad Bn = \rho_0 a_0^2.$$

Тогда для V найдем разложение

$$V = \frac{P}{\rho_0 a_0} - \frac{n+1}{4}\frac{P}{\rho_0 a_0}\frac{P}{\rho_0 a_0^2}. \tag{3.4}$$

Если записать уравнение $P = B\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right]$ до третьего порядка, имеем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{P}{Bn} - \frac{1}{n}\frac{n-1}{n}\frac{1}{2}\left(\frac{P}{B}\right)^2. \tag{3.5}$$

Тот же результат получится из уравнения ударной адиабаты для жидкости, если ограничиться вторым порядком.

Уравнения неразрывности и импульсов записываются

$$\begin{aligned} \rho_0 D &= \rho(D - V), \\ P &= \rho_0 D V, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где D — скорость ударной волны.

Из (3.5) и (3.6) получим приближенно

$$\frac{P^2}{Bn}\left(1 - \frac{n+1}{2}\frac{P}{Bn}\right) = \rho_0 V^2$$

или

$$V = a_0 \frac{P}{Bn}\left(1 - \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}\right),$$

что совпадает с (3.4),

Выражение для касательной составляющей скорости к ударной волне имеет вид

$$V_s = V \sin(\lambda - \beta),$$

где λ — угол нормали к ударной волне с осью Ox, причем из условий на ударном фронте приближенно угол λ есть среднее арифметическое углов нормалей к характеристикам до ударной волны и за ней $\lambda = \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}$.

Из (3.2) имеем

$$\left(\frac{d\beta}{dP}\right)_{P=0} = \left(\frac{\varphi - \beta}{V}\right)_{P=0}\frac{1}{\rho_0 a_0} = \frac{d(\varphi - \beta)}{dP}\frac{1}{\rho_0 a_0}\frac{dP}{dV}$$

или

$$2\left(\frac{d\beta}{dP}\right)_{P=0} = \left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0}, \quad \text{откуда} \quad \beta = \beta_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} P,$$

$$\beta = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} P + O(P^2). \tag{3.7}$$

Но из условий на ударной волне

$$\lambda = \varphi_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dP}\right)_{P=0} + O(P^2). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) имеем

$$V_s = V \cdot O(P^2) = O(P^3).$$

Итак, нами выведены условия сохранения массы, импульса и энергии и условие для касательной составляющей скорости из уравнений простой волны.

Заметим, что при решении задачи во втором приближении величины β, D, φ, λ достаточно найти в первом приближении. Покажем это. Из уравнений (3.5) найдем для скорости ударной волны

$$D^2 = \frac{P}{\rho_0\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}.$$

Если для $\frac{\rho}{\rho_0}$ взять разложение до второго порядка включительно, для D получим

$$D = a_0\left(1 + \frac{n+1}{4}\frac{P}{Bn}\right),$$

то есть первое приближение. Чтобы найти малые второго порядка в выражении D, мы должны задать в разложении $\frac{\rho}{\rho_0}$ члены порядка $\left(\frac{P}{Bn}\right)^3$, то есть выйти за пределы изэнтропического приближения.

Таким образом, мы определяем во втором приближении физические параметры V_x, V_y, P, ρ, V, причем для угла β, например, достаточно брать первое приближение; в самом деле, $V_x = V\cos\beta$, $V_y = V\sin\beta$ и точность в первом порядке β обеспечит точность во втором порядке для компонент скорости.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 XI 1963

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԻ ԱԼԻՔԻ ՎՐԱ ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է հեղուկում հարվածի ալիքի ճնշման որոշման խնդիրը ինչպես համասեռ, այնպես էլ ոչ համասեռ հեղուկների համար։ Ցույց է տրվում, որ ճնշումը երկրորդ կարգի փոքր է։ Կատարված է այս խնդրի լուծման տարբեր մեթոդների համեմատություն։

ЛИТЕРАТУРА

1. Проблемы механики. Сборник статей под редакцией Драйдена и Кармана. Цзян Сюэ-сянь. Метод Пуанкаре-Лайтхилла-Го.
2. *Witham G. B.* The propagation of Weak Spherical Shoks in Stars. Communications of Pure and Applied Mathematics, Vol. VI, 1953.

Губкин К. Е. Образование разрывов в звуковой волне. ПММ, № 4, 1959.

Булах Б. М. О некоторых свойствах сверхзвуковых конических течений газа. ПММ, № 3, 1961.

Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.

Багдоев А. Г. Определение закона распределения давления, распространяющегося с дозвуковой скоростью. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **15**, № 4, 1962.

Яненко Н. Н. Бегущие волны системы квазилинейных уравнений. ДАН СССР, 109, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. М. МАРТИРОСЯН

О ПОЛЗУЧЕСТИ СТЕКЛОПЛАСТИКА СВАМ В РАННИЙ ПЕРИОД ПОСЛЕ ИЗГОТОВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Длительными опытами на старение, при комнатной температуре, стеклопластика СВАМ на связующем Э—1200 и БФ—4 установлено, что со временем повышаются как предел прочности материала, (см. табл. 1), так и его сопротивляемость деформированию. Поэтому для получения сопоставимых результатов экспериментов всегда должен быть учтен возраст материала, то есть время, отсчитываемое от момента изготовления материала до момента приложения нагрузки. Особое значение приобретает влияние возраста материала на ползучесть, когда элемент конструкции находится под воздействием длительной нагрузки.

Таблица 1

Соотношение волокон пластины	Предел прочности σ_b *кг/мм²*		
	4 мес.	12 мес.	18 мес.
1:1	43,4	53,9	—
1:5	66,6	76,0	—
1:10	70,5	76,5	85,0

В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования ползучести стеклопластика СВАМ, выполненного на образцах через 45 дней после изготовления материала.

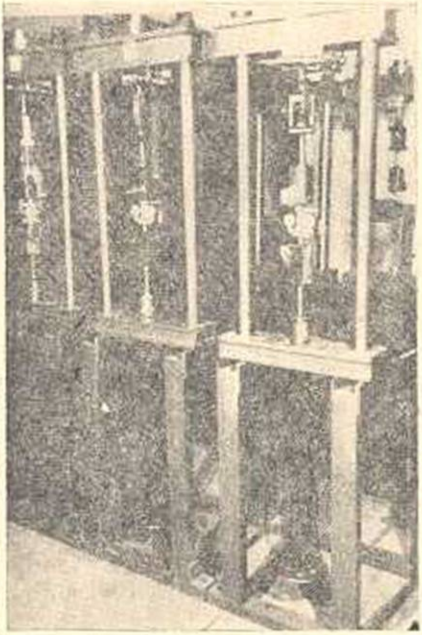
Материалом исследования служил стеклопластик СВАМ с соотношением продольных и поперечных волокон 1:1 на связующем БФ—4, изготовленный на ленинградском заводе слоистых пластиков. Образцы были изготовлены с учетом ориентации волокон и составляли с основным направлением углы 0°; 22,5°; 45°; 67,5° и 90°*. В каждом направлении образцы нагружались при относительных напряжениях $0{,}25\sigma_b$; $0{,}5\sigma_b$ и $0{,}75\sigma_b$, где σ_b—предел прочности материала на растяжение в момент приложения нагрузки с учетом ориентации.

Для исследования ползучести стеклопластиков были использованы двухрычажные установки (см. фиг. 1). Деформации измерялись на базе 40 *мм* механическими тензометрами с точностью 0,001 *мм*. Форма и размеры образца соответствовали ГОСТ 4649—55. Необходимо отметить, что если форма образца (плоская двусторонняя лопатка) удовлетворительна для испытания в направлении волокон, то в остальных направлениях, когда целостность волокон нарушена по краям, влияние формы и размеров образца требует дополнительных исследований.

* Подробно об этом см. литературу [1, 2].

На фиг. 2 приведены экспериментальные кривые ползучест СВАМ, полученные при разной ориентации волокон и различных на пряжениях.

Полная деформация образца от воздействия длительной нагрузк слагается из деформации, возникающей в момент нагружения и де формации ползучести, развиваю щейся во времени.



Фиг. 1.

Деформации в момент нагру жения, условно названные мгновен ными, в зависимости от величин нагрузки, анизотропии и скорост нагружения имеют разный характе и величину. Эти деформации дл всех образцов, независимо от ори ентации, имели упругий характе при нагрузках, не превышающи значения предела пропорционал ности. При разгружении эти де формации полностью восстанавли ваются со скоростью, равной ско рости разгружения.

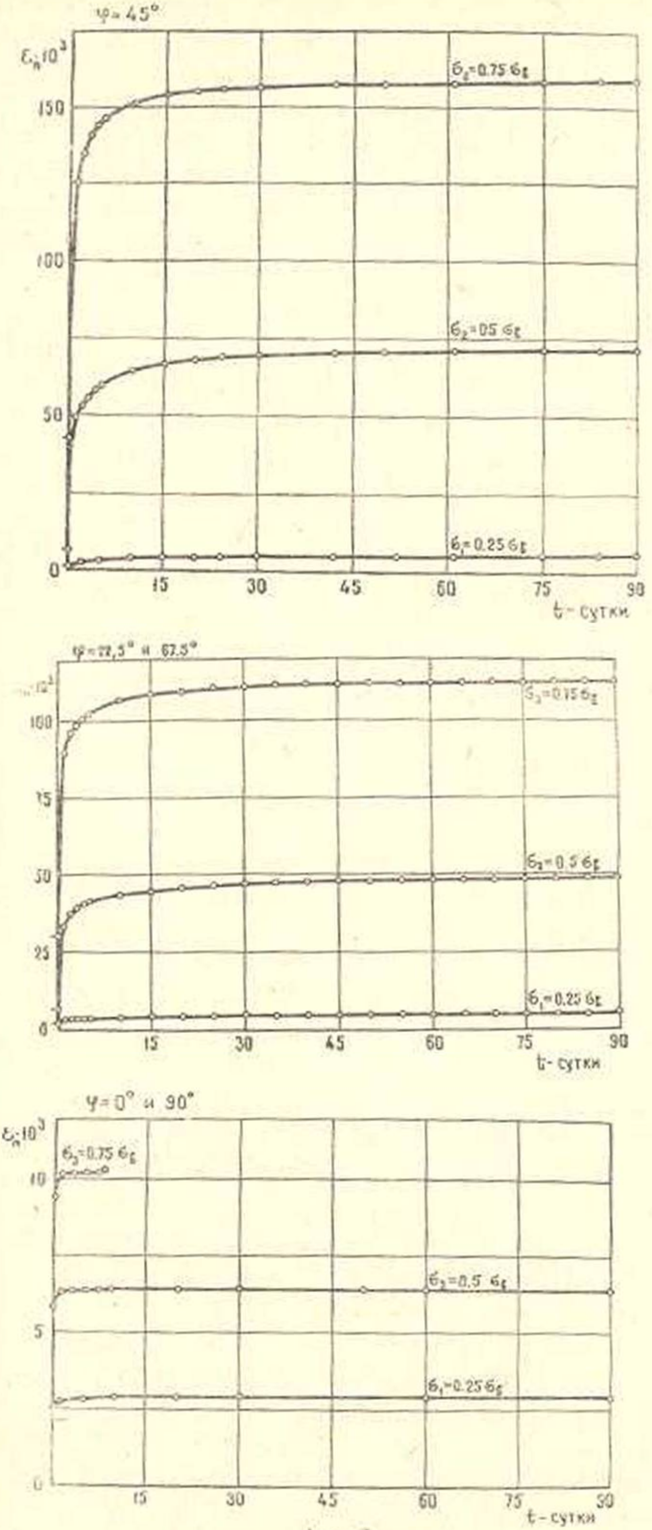
Для СВАМ величина предел пропорциональности зависит от ан изотропии и возраста материал В наших экспериментах при орие тации образцов 0 и 90° предел про порциональности условно прин равным пределу прочности, при 22,5° и 67,5° около $0{,}4\,\sigma_b$ и при 45 до $0{,}3\,\sigma_b$. Таким образом, мгновенные деформации для образцов ориентацией 22,5°, 45° и 67,5° имели упругий характер только пр относительном напряжении $0{,}25\,\sigma_b$, а для образцов с ориентацией 0 и 90°—при всех 3-х ступенях напряжений.

В табл. 2 приведены величины мгновенных, упруго-мгновенны деформаций и деформации ползучести в зависимости от ориента образца и величины относительных напряжений. Приведенные данны

Таблица 2

Угол ориентации	ε мгн $\times 10^3$			ε упр. мгн $\times 10^3$			$\varepsilon_n \times 10^3$		
	$0{,}25\,\sigma_b$	$0{,}5\,\sigma_b$	$0{,}75\,\sigma_b$	$0{,}25\,\sigma_b$	$0{,}5\,\sigma_b$	$0{,}75\,\sigma_b$	$0{,}25\,\sigma_b$	$0{,}5\,\sigma_b$	$0{,}75\,\sigma_b$
0° и 90°	2,6	5,9	9,45	2,6	5,9	9,2	0,34	0,54	—
22,5° и 67,5°	1,7	5,7	30,0	1,7	3,7	5,8	3,8	43.4	83,0
45°	1,5	5,8	43,0	1,5	3,6	5,65	4,7	65,0	116,2

ε мгн.—мгновенные деформации в момент нагружения,
ε упр. мгн.—упругие деформации в момент нагружения,
ε_n —деформации ползучести.


φ = 45°
ε_n·10³
150
100
50
0
σ₃=0.75 σ_Е
σ₂=0.5 σ_Е
σ₁=0.25 σ_Е
15
30
45
60
75
90
t - сутки
φ = 22,5° и 67,5°
100
75
50
25
0
σ₃=0.75 σ_Е
σ₂=0.5 σ_Е
σ₁=0.25 σ_Е
t - сутки
φ = 0° и 90°
ε_n·10³
10
5
0
σ₃=0.75 σ_Е
σ₂=0.5 σ_Е
σ₁=0.25 σ_Е
t - сутки

Фиг. 2.

являются усредненными от 3-х испытаний. Максимальное отклонение отдельных значений от усредненного не больше 5%. При высоком уровне напряжения и ориентациях, близких к направлению наименьшей жесткости материала, скорость развития деформаций ползучести в момент нагружения очень велика. Для разграничения мгновенных деформаций в этом случае необходимо время приложения полной нагрузки довести до минимума, то есть необходимо, чтобы скорость роста мгновенных деформаций опережала бы скорость развития пластических и высокоэластических деформаций ползучести.

Деформации ползучести слагаются из высокоэластических деформаций, то есть упругих деформаций, развивающихся во времени, и пластических деформаций, также развивающихся во времени. Легко заметить, что деформации ползучести увеличиваются с приближением угла ориентации образца к углу наименьшей жесткости материала. Угол наименьшей жесткости СВАМ зависит от соотношения волокон пластины. При соотношении волокон 1 : 1 этот угол равен 45°, а в пластинах с соотношением 1 : 5 и 1 : 10—больше 45° [2]. Следует особо отметить деформации ползучести образцов с ориентацией 0° и 90.

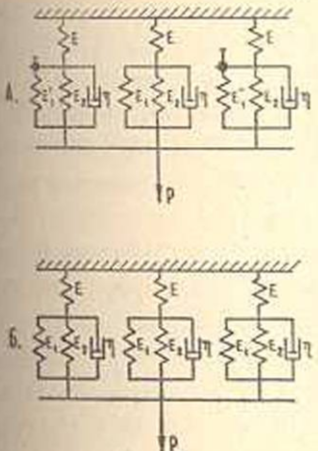
Если рассмотреть стеклопластик СВАМ как систему, состоящую из упругого скелета (стекловолокно) и вязкого заполнителя (полимерное связующее), то станет очевидным, что в направлении волокон деформации ползучести будут иметь упругий характер, если нагрузки не превышают значения предела длительной прочности.

Опыты показали, что при относительных напряжениях $0{,}25\,\sigma_b$ и $0{,}5\,\sigma_b$, действительно, после разгружения вся деформация практически восстанавливается за очень короткое время.

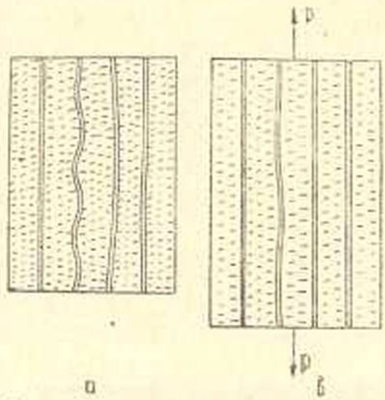
При относительном напряжении $0{,}75\,\sigma_b$ образцы разрушались в среднем через 190 часов с разбросом 5—6 часов с момента нагружения. Разгружение контрольных образцов через 150 часов ползучести выявило остаточные деформации, которые не восстанавливались и через 500 часов. Можно предположить, что эти остаточные деформации являются следствием нарушения монолитности системы разрыва отдельных волокон и образования трещин в материале, развитие которых в дальнейшем приводит к разрушению образца.

Как видно из кривых ползучести и данных табл. 2, деформации ползучести в направлении волокон весьма незначительны. Развитие этих деформаций происходит с низкой скоростью и уже через 190—260 часов практически прекращается.

Если для описания процесса ползучести в направлении волокон воспользоваться механической моделью, показанной на фиг. 3, можно показать, что при предварительно натянутых волокнах прекращение деформации ползучести наступит раньше. На фиг. 3, 4 схематически показаны сечения СВАМ вдоль волокон, где армирующие стекловолокна натянуты неравномерно. В момент приложения нагрузки материал деформируется, однако, вследствие неодинаковых длин волокне нагружаются неодновременно. Таким образом, в начальный момент основное сопротивление деформированию оказывают вязко-упругое связующее и волокна, которые находились в натянутом состоянии. Постепенно, с удлинением материала, в общую схему сопротивления деформированию включаются другие волокна, в результате чего падает скорость ползучести. После натяжения n-ого волокна, когда сопротивление материала деформированию становится выше воздействия нагрузки P, деформация прекращается.



Фиг. 3.



Фиг. 4. а—до нагружения; б—под нагрузкой.

Если нагрузка значительно меньше предела длительной прочности материала, возможно, что в материале окажутся волокна, которые вследствие небольших деформаций всей системы не натянутся и не будут нагружены.

При нагрузках, превышающих предел длительной прочности, одни волокна будут разрываться от чрезмерного натяга, тогда как другие волокна не будут еще нагружены. Очевидно, что это приведет к разрушению материала.

При равномерно натянутых волокнах (фиг. 3б) усилие P воспринимается всеми элементами сразу. Сопротивление деформированию система оказывает одновременно, вследствие чего деформации ползучести будут меньше.

Из схемы видно, что через определенное время вязкие элементы, на которые при деформировании приходилась доля напряжения, после прекращения деформирования совершенно выключаются.

Очевидно, то же самое произойдет с полимерным связующим, в котором со временем, в результате перераспределения напряжений, произойдет частичная релаксация.

Из приведенной схемы можно заключить также, что чем больше приложенная нагрузка, тем раньше наступит равновесие.

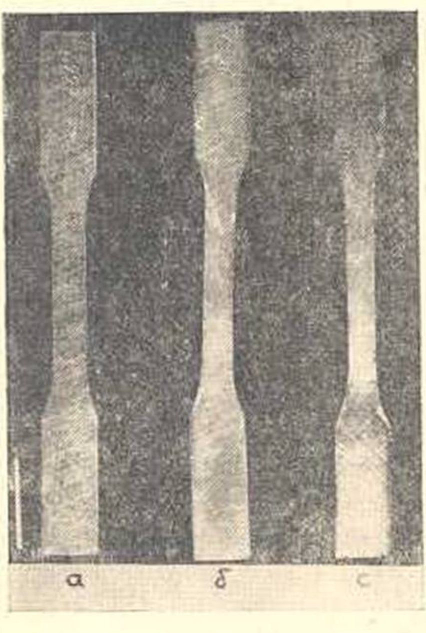
В табл. 3 приведены экспериментальные данные деформации ползучести образцов с ориентацией 0° и 90° под разными нагрузками.

Как видно из данных, деформации ползучести образцов, ползучесть которых протекала под относительным напряжением $0{,}5\sigma_b$, прекращаются на 8 день, тогда как под напряжением $0{,}25\sigma_b$ — только на 11 день. Из данных табл. 3 можно заключить также, что связь между деформациями ползучести и напряжениями для образцов с ориентацией 0° и 90°—линейная.

Таблица 3

Относительное напряжение	$\varepsilon_n \times 10^3$												
	время t в сутках												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	30
$0{,}25\sigma_b$	0,17	0,21	0,22	0,23	0,23	0,24	0,26	0,27	0,29	0,31	0,34	0,34	0,34
$0{,}5\sigma_b$	0,4	0,45	0,48	0,5	0,5	0,5	0,52	0,54	0,54	0,54	0,54	0,54	0,54
$0{,}75\sigma_b$	0,61	0,69	0,73	0,77	0,79	0,81	0,84	0,89	разрыв				

Совершенно иная схема ползучести образцов, вырезанных под разными углами к волокнам. Если за все время ползучести образцов с ориентацией 0° и 90° не были обнаружены изменения поперечного сечения, то в образцах с другой ориентацией первоначальные поперечные сечения значительно изменяются. Эти изменения зависят от ориентации образца и величины нагрузки. Максимальное сужение наблюдается у образцов с ориентацией 45°. В наших экспериментах у этих образцов при относительном напряжении $0{,}75\sigma_b$ изменение сечения доходило до 20% по отношению к первоначальному сечению.



Фиг. 5. а—до нагружения; б—после ползучести $\varphi=22{,}5°$; с—после ползучести $\varphi=45°$.

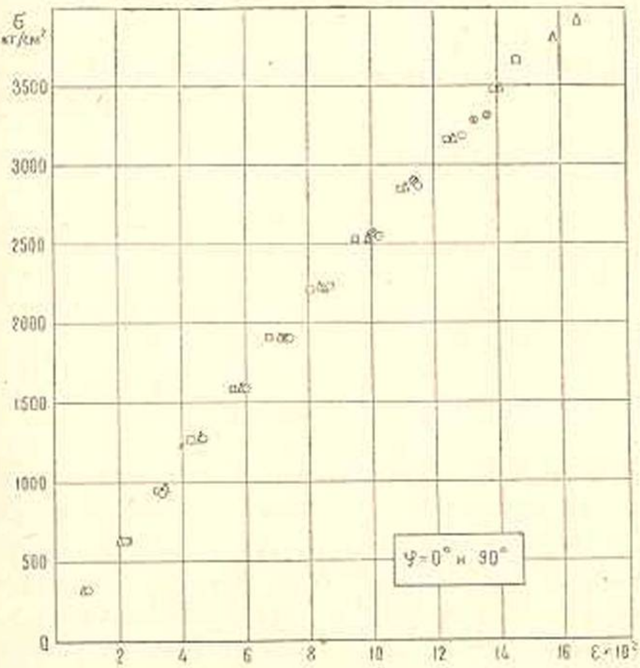
В результате удлинения и сужения образца происходит переориентация волокон по направлению растягивающих усилий. Так, угол наклона в 45° после ползучести в течение 2200 часов при относительном напряжении $0{,}75\sigma_b$ превратился в 31°, а угол 22,5° при тех же условиях—в 19°. Помимо сужения, образцы с ориентацией 22,5° и 67,5° за время нахождения под нагрузкой сильно перекашиваются.

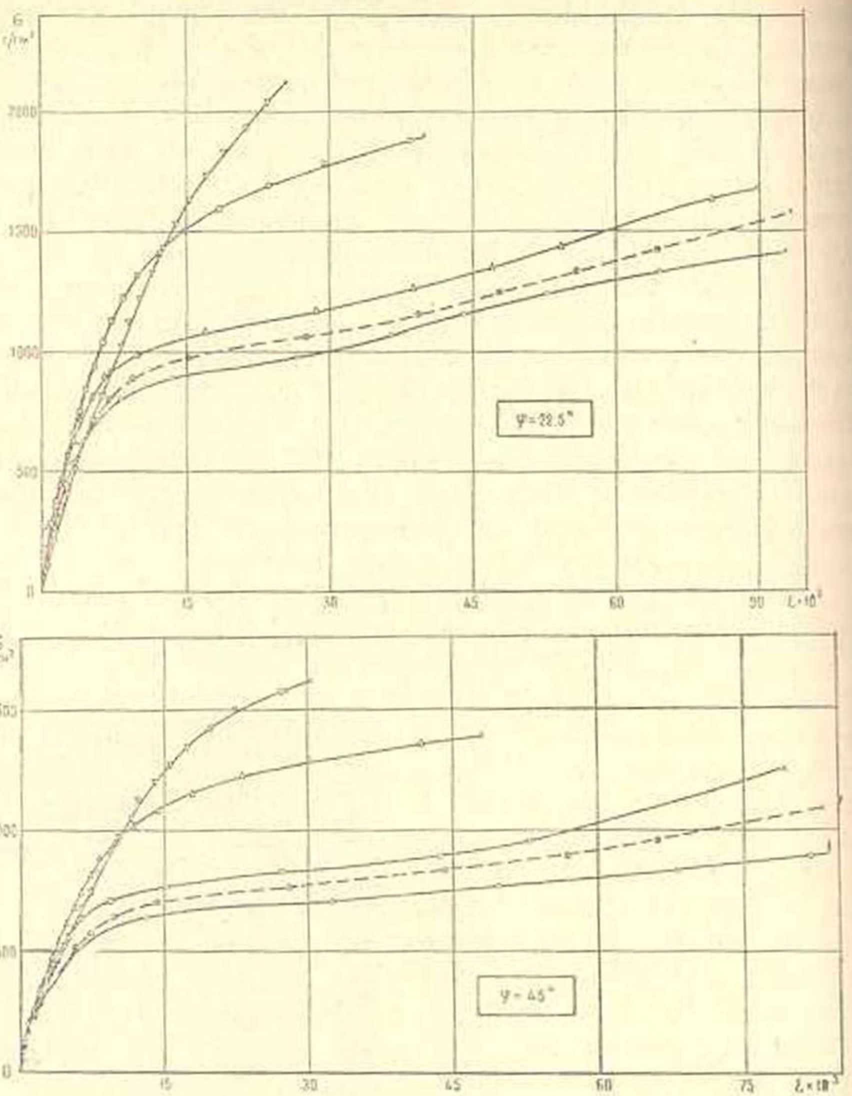
На фиг. 5 приведены фотоснимки образцов с ориентацией 22,5° и 45° до и после ползучести. На рисунке хорошо видны как сужение и удлинение, так и перекашивание образца. Повторные эксперименты показали, что перекашивание имеет место при испытании образцов, в которых взаимно-перпендикулярные волокна в рабочей части не имеют одинаковой длины, то есть когда угол ориентации образца отличен от 45° (кроме образцов с ориентацией 0° и 90°).

Очевидно, что в результате изменения сечений образцов первоначальные напряжения, возникающие от постоянных во времени нагрузок, также изменятся. В табл. 4 приведены значения напряжений, соответствующие сечениям образцов в момент нагружения и через 2200 часов ползучести. Опыты показывают (см. фиг. 2), что такие чувствительные повышения напряжений не вызывают увеличения скорости деформаций и перехода в третью стадию ползучести. Испытание образцов, находящихся под различными нагрузками в течение более чем 2200 часов, и контрольных образцов, старение которых проходило в тех же условиях, но без нагрузки, выявило значительное упрочнение первых. На фиг. 6 приведены кривые зависимости относительных удлинений от напряжений для образцов с разными ориентациями, полученные при кратковременных испытаниях.

Таблица 4

Ориентация волокон φ	Относительное напряжение в момент нагружения	Напряжения в образце в $кг/см^2$		Относительное напряжение в конце ползучести	Прирост в %
		при первоначальном сечении	после сужения сечений		
22,5° и 67,5°	$0{,}5\ \sigma_b$	705	742	$0{,}53\sigma_b$	6
	$0{,}75\sigma_b$	1058	1206	$0{,}86\sigma_b$	14
45°	$0{,}5\ \sigma_b$	532	570	$0{,}534\sigma_b$	7
	$0{,}75\sigma_b$	799	969	$0{,}91\sigma_b$	21





Фиг. 6. Кривые изменения предела прочности и деформативности в зависимости от ориентации образца.

⊙—контрольная перед нагружением,
□—после ползучести под условным напряжением $0{,}25\,\sigma_b$,
△— „ „ „ „ $0{,}5\,\sigma_b$,
▽— „ „ „ „ $0{,}75\,\sigma_b$,
⊕—контрольная после старения без нагрузки.

Из приведенных кривых и данных табл. 5 легко заключить, что предел прочности материала и его сопротивляемость деформированию повышаются с увеличением нагрузки, под которой протекала ползучесть. Таким образом, хотя с уменьшением поперечных сечений образцов истинные напряжения увеличиваются, однако, в результате повышения пределов прочности относительные напряжения значительно уменьшаются. Этим в основном можно объяснить, почему ощутимое уменьшение поперечных сечений образцов не вызывает повышения скорости ползучести. В табл. 6 приведены изменения относительных напряжений в образцах в результате повышения пределов прочности.

Таблица 5

Угол ориентации образца φ	Перед установкой на ползучесть и старение	Старение в комнатных условиях 2200 часов	Ползучесть при $=0{,}25\,\sigma_b$ 2200 часов	Ползучесть при $=0{,}5\,\sigma_b$ 2200 часов	Ползучесть при $=0{,}75\,\sigma_b$ 2200 часов
	Пределы прочности σ_b в *кг/см²*				
0° и 90°	3215	3400	3760	3915	—
22,5° и 67,5°	1410	1585	1680	1900	2120
45°	1065	1190	1250	1390	1065

Таблица 6

Ориентация образца φ	$0{,}25\sigma_b^*$	$0{,}5\sigma_b^*$	$0{,}75\sigma_b^*$
22,5° и 67,5°	$0{,}21\sigma_b$	$0{,}39\sigma_b$	$0{,}57\sigma_b$
45°	$0{,}21\sigma_b$	$0{,}41\sigma_b$	$0{,}59\sigma_b$

σ_b^*—предел прочности образцов перед установкой на ползучесть,
σ_b—предел прочности образцов после ползучести.

Параллельно с экспериментами на ползучесть на контрольных образцах, старение которых проходило в тех же условиях, проверялось наличие деформаций от усадок. С этой целью на образцах-близнецах по ширине и длине были нанесены контрольные метки. Через определенные промежутки времени измерялись расстояния между контрольными метками с точностью 0,5 микрона. Проверка показала, что за время старения более чем 2200 часов размеры образца не изменяются. Следовательно, деформации, развивающиеся во времени, являются только деформациями ползучести, образованными от воздействия постоянной во времени нагрузки.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1964

Մ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

„СВАМ" ԱՊԱԿԵՊԼԱՍՏԻԿԻ ՍՈՂՔԸ ՆՅՈՒԹԻ ՊԱՏՐԱՍՏՄԱՆ ՎԱՂ ԺԱՄԱՆԱԿԱՇՐՋԱՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված են «СВАМ» ապակեպլաստիկի սողքի էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները նյութի մամլումից 45 օր հետո:

Պարզված է, որ սենյակի նորմալ ջերմաստիճանի պայմաններում ապակեպլաստիկների սողքի դեֆորմացիաները կախված են անիզոտրոպիայից, լարող ուժի մեծությունից և ժամանակից: Փորձ է արված սողքի դեֆոր-

մացիաների բնույթը ապակու մանրաթելի ուղղությամբ՝ նկարագրել մեխանիկական մոդելի օգնությամբ։

Պարզված է, որ 0-ից տարբեր անկյունների տակ պատրաստված նմուշների կարրվածքը փորձի ժամանակ զգալի չափով փոքրանում է, որը սակայն չի հանգեցնում սողքի արագության աճի երեք ամիս տևող փորձի ընթացքում։ Հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ նմուշների ամրության սահմանը աճում է կախված այն ուժի մեծություններից, որի տակ տեղի էր ունեցել սողքը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буров А. К., Андреевская Г. А.* Высокопрочные стеклопластики СВАМ. Изд. АН СССР, 1958.
2. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков, ЛДНТП, Л., 1961.
3. *Брызгалин Г. И.* К расчету на ползучесть пластинок из стеклопластиков. ПМТФ, № 4, 1963.
4. *Финдли В.* Ползучесть и релаксация напряжений в пластинках. Проблемы высоких температур в авиационных конструкциях. ИЛ, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզ.-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. МХИТАРЯН, М. Г. ДАГЕСТАНЯН

О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ НА БРИЗОВУЮ ЦИРКУЛЯЦИЮ

В этой работе исследуется вопрос о влиянии формы береговой черты в плане на развитие бризовой циркуляции в рамках линейной теории.

Отметим, что в работах [3—5], а также [6] и в ряде других [2, 7—9] рассмотрены вопросы развития бризов над плоским прямолинейным берегом. В работе [1] рассмотрен вопрос о влиянии береговой линии на воздушные течения и распределение осадков.

В работе [6] дано решение задачи для ряда случаев, соответствующих учету или неучету ускорения Кориолиса, постоянному или переменному коэффициенту вертикального турбулентного обмена и др. В частности, подробно исследовано влияние точного учета особенностей распределения температуры подстилающей поверхности по сравнению с его схематическим заданием в виде „ступеньки", с разрывом над береговой чертой.

В этом последнем случае удалось получить ряд количественных выводов, хорошо согласующихся с данными фактических наблюдений. Это особенно касается развития вертикальных токов, вопрос о расчете которых рассмотрен и в работе [2].

Вопрос о бризовой циркуляции рассмотрен в ряде исследований. Краткие сведения об этом можно получить в [6]. Здесь же приведен список работ, посвященных этому вопросу.

В данной работе строится простая теоретическая модель бризовой циркуляции над плоским берегом при криволинейной форме береговой черты. Распределение температуры по подстилающей поверхности принимается заданным.

§ 1. Основные уравнения задачи

Исходными являются общие уравнения гидротермодинамики, которые мы здесь выписывать не будем. Сделав обычные упрощения теории конвекции [2, 6], линеаризируя уравнения для бризовых отклонений, как сделано, например, в работе [6], можно написать указанную систему уравнений в следующем упрощенном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -RT\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + lv, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -RT\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right) - lu, \qquad (1.2)$$

$$-RT\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\vartheta = 0, \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right). \qquad (1.5)$$

Здесь: начало координат помещено на земной поверхности; ось x направлена по нормали к берегу от водной поверхности к суше, y — по касательной, z — вертикально вверх; u, v, w — составляющие вектора скорости ветра по соответствующим осям, R — газовая постоянная; T — средняя по всему земному шару температура; ϑ — отклонения температуры от ее стандартных значений; k — коэффициент турбулентного обмена (число Прандтля принято равным единице); $l = 2\omega \cos\varphi$ — параметр Кориолиса, где ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта местности; $\lambda = g/T$; $p = p'/P$, где g — ускорение силы тяжести; p' — отклонение давления от стандартных его значений P.

Таким образом, пять уравнений (1.1)—(1.5) служат для определения пяти неизвестных функций: u, v, w, ϑ, p, зависящих от координат x, y, z и времени t.

Сформулируем краевые условия.

При $z = z_0$ или $z = 0$

$$u = v = w = 0; \quad \vartheta = \vartheta_0(x, y, t), \qquad (1.6)$$

при $z \to \infty$

$$u = v = p = \vartheta = 0.$$

Здесь z_0 — параметр шероховатости.

Отметим, что ищется периодическое решение задачи, поэтому начальные условия отсутствуют.

§ 2. Решение задачи

Наметим следующую схему решения.

Используя граничные условия (1.6), из (1.5) находим температуру. Подставляя последнее выражение в (1.3), легко найти давление. Тогда из системы (1.1)—(1.2) находятся горизонтальные составляющие скорости, а из уравнения неразрывности (1.4) — вертикальная ее составляющая.

Для упрощения выкладок положим $k=\text{const}$, и, кроме того, пусть известная функция $\vartheta_0(x, y, t)$ представлена в виде следующего ряда

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n(x, y)\cos n\omega t + T_n'(x, y)\sin n\omega t]. \tag{2.1}$$

Здесь T_n и T_n' — известные коэффициенты.

Умножая тогда уравнение (1.2) на i, складывая с (1.1), обозначая

$$V = u + iv \tag{2.2}$$

и частично используя граничные условия (1.6), можно систему (1.1)—(1.5) представить в следующем виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}, \tag{2.3}$$

$$p = \frac{\lambda}{RT}\int_{\infty}^{z}\vartheta dz, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{il}{k}V = \frac{RT}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)p, \tag{2.5}$$

$$w = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dz. \tag{2.6}$$

При граничных условиях $\vartheta = \vartheta_0$ при $z=0$ и $\vartheta=0$ при $z\to\infty$, уравнение (2.3) имеет следующее решение

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma_n z}[T_n\cos(n\omega t - \sigma_n z) + T_n'\sin(n\omega t - \sigma_n z)], \tag{2.7}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{n\omega}{2k}. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7) в (2.4) и выполняя квадратуры, получим

$$p = -\frac{\lambda}{2RT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n}[(T_n - T_n')\cos(n\omega t - \sigma_n z) + \\ + (T_n + T_n')\sin(n\omega t - \sigma_n z)]. \tag{2.9}$$

Подставляя это решение в (2.5), получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{il}{k}V = -\frac{\lambda}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n}[M_n\cos\alpha_n + M_n'\sin\alpha_n]. \tag{2.10}$$

Здесь для краткости введены следующие обозначения:

$$M_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(T - T_n'); \quad M_n' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(T_n + T_n'). \tag{2.11}$$

$$\alpha_n = n\omega t - \sigma_n z.$$

Решая уравнение (2.10) и отделяя затем действительную и мнимую части, получим [6]

$$u = \frac{\lambda}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n}[K_{ny}\cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{ny}\sin(n\omega t - \sigma_n z)] + \tag{2.12}$$

$$+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n}[(K'_{nx} - K_{ny})\cos(n\omega t - a_n z) - (K_{nx} + K'_{ny})\sin(n\omega t - a_n z)] -$$

$$-\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n}[(K'_{nx} + K_{ny})\cos(n\omega t \mp b_n z) - (K_{nx} - K'_{ny})\sin(n\omega t \mp b_n z)],$$

$$v = \frac{\lambda}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n}[K_{nx}\cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{nx}\sin(n\omega t - \sigma_n z)] + \tag{2.13}$$

$$+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n}[(K_{nx} + K'_{ny})\cos(n\omega t - a_n z) + (K'_{nx} - K_{ny})\sin(n\omega t - a_n z)] +$$

$$+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n}[(K_{nx} - K'_{ny})\cos(n\omega t \mp b_n z) + (K'_{nx} + K_{ny})\sin(n\omega t \mp b_n z)].$$

Здесь введены следующие обозначения

$$K_{nx} = \frac{\partial}{\partial x}(T_n - T'_n), \qquad K'_{nx} = \frac{\partial}{\partial x}(T_n + T'_n),$$

$$K_{ny} = \frac{\partial}{\partial y}(T_n - T'_n), \qquad K'_{ny} = \frac{\partial}{\partial y}(T_n + T'_n), \tag{2.14}$$

$$a_n^2 = \frac{n\omega + l}{2k}, \qquad b_n^2 = \left|\frac{n\omega - l}{2k}\right|.$$

Отметим, что верхние знаки в выражениях последних строк (2.12) и (2.13) берутся при $n\omega > l$, нижний при $n\omega < l$. Кроме того, под корнем в (2.14) для b_n всегда берется абсолютное значение.

Подставляя полученное решение в (2.6), найдем

$$w = -\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n\sigma_n}(\Delta T_n\cos n\omega t + \Delta T'_n\sin n\omega t) +$$

$$+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n z}}{a_n\sigma_n}[\Delta T_n\cos(n\omega t - a_n z) + \Delta T'_n\sin(n\omega t - a_n z)] +$$

$$+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n\sigma_n}\left(\begin{matrix}\Delta T_n\\ \Delta T'_n\end{matrix}\cos n\omega t \begin{matrix}+\Delta T'_n\\ -\Delta T_n\end{matrix}\sin n\omega t\right) -$$

$$-\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-b_n z}}{b_n\sigma_n}\left[\begin{matrix}\Delta T_n\\ \Delta T'_n\end{matrix}\cos(n\omega t \mp b_n z) \begin{matrix}+\Delta T'_n\\ -\Delta T_n\end{matrix}\sin(n\omega t \mp b_n z)\right]. \tag{2.15}$$

В случае отсутствия ускорения Кориолиса $l=0$ имеем $a_n = b_n = \sigma_n$, и выражения (2.12), (2.13) и (2.15) становятся неопределенностью. Раскрывая их обычным способом, получим [6]

$$u = -\frac{\lambda z}{4k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^2}\left[\frac{\partial T_n'}{\partial x}\cos(n\omega t-\sigma_n z)-\frac{\partial T_n}{\partial x}\sin(n\omega t-\sigma_n z)\right], \tag{2.16}$$

$$v = -\frac{\lambda z}{4k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^2}\left[\frac{\partial T_n'}{\partial y}\cos(n\omega t-\sigma_n z)-\frac{\partial T_n}{\partial y}\sin(n\omega t-\sigma_n z)\right], \tag{2.17}$$

$$w = \frac{\lambda}{8k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n^4}(\Delta T_n\cos n\omega t+\Delta T_n'\sin n\omega t)-$$

$$-\frac{\lambda}{8k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^4}\{[\sigma_n z\Delta(T_n+T_n')+\Delta T_n]\cos\alpha_n+[\sigma_n z\Delta(T_n'-T_n)+$$

$$+\Delta T_n']\sin\alpha_n\}. \tag{2.18}$$

Таким образом, решение задачи в случае $l\neq 0$ дается выражениями (2.7), (2.9), (2.12), (2.13) и (2.15), а в случае $l=0$ — (2.7), (2.9) и (2.16)—(2.18).

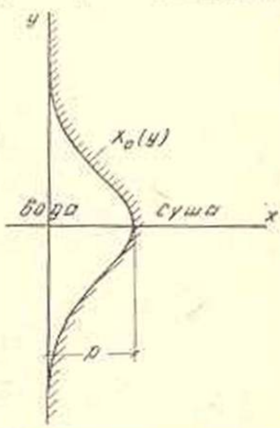
§ 3. Расчет бризов при криволинейном очертании берега

Пусть форма береговой линии представлена в виде следующего уравнения

$$x_0 = pe^{-qy^2}. \tag{3.1}$$

Схематически это представлено на фиг. 1. Здесь p и q — параметры, характеризующие форму симметричного залива.

Если теперь вернуться к уравнению (1.2) и считать, что берег прямолинейный (совпадает с осью y) и $l=0$, то есть рассмотреть по сути дела плоскую задачу, то это уравнение при граничных условиях (1.6) имеет тривиальное решение $v=0$. Таким образом, при криволинейном береге из-за того, что $\partial/\partial y\neq 0$, получаем $v\neq 0$, кроме того, учет ускорения Кориолиса ($l\neq 0$) приведет к повороту ветра в течение суток. Влияние последнего фактора рассмотрено в [6], сейчас рассмотрим влияние формы берега.



Фиг. 1. Схема очертания береговой линии.

Для облегчения расчетов положим, что все $T_n = T_n' = 0$, кроме T_1' и, кроме того, положим [6]

$$T_1'(x, y) = 2{,}8 + 2{,}2\, th z\,[x - x_0(y)]. \tag{3.2}$$

При прямолинейном береге $x_0=\mathrm{const}$ или, в частности, $x_0\equiv 0$. При (3.2) решение примет следующий вид:

I случай, $l=0$

$$\vartheta = T_1' e^{-\sigma z} \sin(\omega t - \sigma z), \tag{3.3}$$

$$p = -\frac{\lambda T_1}{2RT} \frac{e^{-\sigma z}}{\sigma} [\cos(\omega t - \sigma z) - \sin(\omega t - \sigma z)], \tag{3.4}$$

$$u = -\frac{\lambda z}{4k} \frac{\partial T_1'}{\partial x} \frac{e^{-\sigma z}}{\sigma^2} \cos(\omega t - \sigma z), \tag{3.5}$$

$$v = -\frac{\lambda z}{4k} \frac{\partial T_1'}{\partial y} \frac{e^{-\sigma z}}{\sigma^2} \cos(\omega t - \sigma z), \tag{3.6}$$

$$w = \frac{\lambda \Delta T_1'}{8k\sigma^4} \{\sin \omega t - e^{-\sigma z} [\sigma z \cos(\omega t - \sigma z) + (\sigma z + 1) \sin(\omega t - \sigma z)]\}. \tag{3.7}$$

Здесь, как и выше

$$\Delta T_n = \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2}. \tag{3.8}$$

II случай, $l \neq 0$

$$u = -\frac{\lambda}{2l} \frac{e^{-\sigma z}}{\sigma} \frac{\partial T_1'}{\partial y} [\cos(\omega t - \sigma z) - \sin(\omega t - \sigma z)] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4l} \frac{e^{-az}}{\sigma} \left(\left[\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \cos(\omega t - az) + \left(\frac{\partial T_1'}{\partial x} - \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \sin(\omega t - az) \right] -$$

$$- \frac{\lambda}{4l} \frac{e^{-bz}}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial T_1'}{\partial x} - \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \cos(\omega t \mp bz) + \left(\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \sin(\omega t \mp bz) \right], \tag{3.9}$$

$$v = \frac{\lambda}{2l} \frac{e^{-\sigma z}}{\sigma} \frac{\partial T_1'}{\partial x} [\cos(\omega t - \sigma z) - \sin(\omega t - \sigma z)] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4l} \frac{e^{-az}}{\sigma} \left[\left(-\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \cos(\omega t - az) + \left(\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \sin(\omega t - \sigma z) \right] -$$

$$- \frac{\lambda}{4l} \frac{e^{-bz}}{\sigma} \left[\left(\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \cos(\omega t \mp bz) + \left(-\frac{\partial T_1'}{\partial x} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\right) \sin(\omega t \mp bz) \right], \tag{3.10}$$

$$w = -\frac{\lambda \Delta T_1'}{4la\sigma} [\sin \omega t - e^{-az} \sin(\omega t - az)] +$$

$$+ \frac{\lambda \Delta T_1'}{4lb\sigma} \left\{ \left[\left({0 \atop 1} \cos \omega t + {1 \atop 0} \sin \omega t \right) - e^{-bz} \left[{0 \atop 1} \cos(\omega t \mp bz) \mp {1 \atop 0} \sin(\omega t \mp bz) \right] \right\}. \tag{3.11}$$

В этом случае решения для ϑ и p совпадают с (3.3) и (3.4), а параметры σ, a и b определяются по (2.8) и (2.14) при $n=1$.

Для расчетов остается лишь вычислить $T_1'(x, y)$ по (3.2), а также производные этой функции.

Заметим, что имеют место следующие соотношения

$$\frac{\partial T_1'}{\partial y} = -x_0' \frac{\partial T_1'}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 T_1'}{\partial y^2} = -x_0'' \frac{\partial T_1'}{\partial x} + (x_0')^2 \frac{\partial^2 T_1'}{\partial x^2},$$

$$\Delta T_1' = \frac{\partial^2 T_1'}{\partial x^2}(1 + x_0'^2) - x_0'' \frac{\partial T_1'}{\partial x}. \qquad (3.12)$$

Причем для вычисления x_0' и x_0'' следует продифференцировать (3.1) по y. При этом для параметров залива принято $p = 0{,}5 \cdot 10^4$ *м*, $q = 0{,}5 \cdot 10^{-7}$ *м*^{2}. Это означает, что высота или стрелка залива равна 5 *км*, а форма выбрана так, что уже на расстоянии $y = \pm 13$ *км* от центра криволинейный берег практически совпадает с прямолинейным (расстояние между ними порядка 1 *м*).

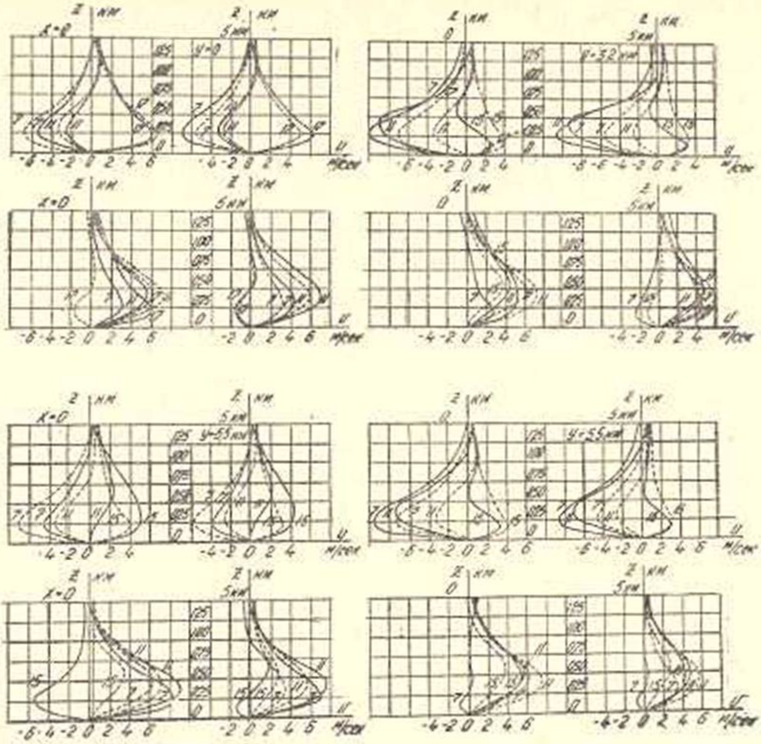
Принимая еще $T \approx 288$ °С, то есть $\lambda = 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ *м сек*$^{-2}$ *град*$^{-1}$, получим $\sigma = 0{,}316 \cdot 10^{-2}$ *м*$^{-1}$. Расчеты проводятся для широты озера Севан ($\varphi = 40°$ с. ш.).

Вычисляя T_1' и ее производные по формулам (3.2) и (3.12) для различных значений x, y, можно легко подсчитать все элементы бриза по формулам (3.3)—(3.7) для случая $l = 0$ и (3.9)—(3.11) для случая $l \neq 0$. Используя также результаты подобного расчета при прямолинейном береге [6], можно оценить роль формы береговой линии.

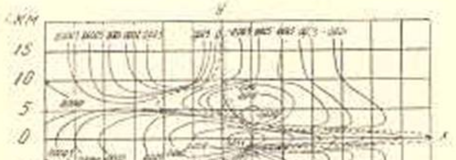
Ниже, на фиг. 2—5 представлены некоторые результаты расчетов. Так, на фиг. 2 сопоставлены профили составляющих скорости бриза для рассмотренных выше случаев при различных значениях y.

Фиг. 2. Сопоставление профилей скорости бриза для случаев $l = 0$ (сплошные) и $l \neq 0$ (пунктирные) при $y = 3{,}2$ и $5{,}5$ *км*.

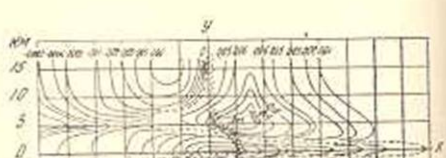
На фиг. 3 сопоставлены профили горизонтальных составляющих скорости бриза при прямолинейном и криволинейном очертании берега. На фиг. 4 и 5 приведены карты изолиний вертикальных токов в 15 часов при $l = 0$ и $l \neq 0$ на одной и той же высоте 300 *м*.



Фиг. 3. Сопоставление профилей скорости бриза для случаев криволинейного (сплошные) и прямолинейного (пунктирные) берега при $y=0$; 3,2 и $\pm 5,5$ *км*; $l \neq 0$.



Фиг. 4. Изолинии вертикальных токов в *м/сек* на высоте $z=300$ *м* в 15 часов при $l=0$.



Фиг. 5. Изолинии вертикальных токов в *м/сек* на высоте $z=300$ *м* в 15 часов при $l \neq 0$.

§ 4. Анализ полученных результатов

Прежде чем изложить полученные выводы, определим еще момент наступления бриза по отношению к ходу температуры подстилающей поверхности, а также вычислим угол наклона ветра у земли.

Как известно [3, 6], момент наступления бриза определяется из следующего выражения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{4.1}$$

Пользуясь решениями (3.5) для случая $l=0$, получим

$$\cos\omega t_0 = 0; \quad \omega t_0 = \pi/2, \tag{4.2}$$

то есть запаздывание хода ветра по отношению к таковому для температуры составляют 6 часов, независимо от широты. Этот результат совпадает с таковым для прямолинейного берега [6].

Пользуясь решением (3.9) для случая $l \neq 0$, получим

$$\operatorname{tg}\omega t_0 = -\frac{\frac{\partial T_1'}{\partial x}\begin{pmatrix}-a+ & b\\ & 0\end{pmatrix} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\ -b\end{pmatrix}}{\frac{\partial T_1'}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix} + \frac{\partial T_1'}{\partial y}\begin{pmatrix}a-2\sigma+ & b\\ & 0\end{pmatrix}}. \tag{4.3}$$

Здесь, как и везде, верхние знаки и выражения соответствуют случаю $\omega > l$ ($\varphi < 30°$), нижние — $\omega < l$ ($\varphi > 30°$).

Используя связь между первыми производными от T_1' по x и y, согласно (3.12), получим

$$\operatorname{tg}\omega t_0 = -\frac{\begin{pmatrix}-a+ & b\\ & 0\end{pmatrix} - x_0'\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0\\ b\end{pmatrix} - x_0'\begin{pmatrix}a-2\sigma+ & b\\ & 0\end{pmatrix}}.$$

Это выражение распадается на два следующих

$$\operatorname{tg}\omega t_0 = \frac{a-b}{x_0'(2\sigma-a-b)}, \qquad \omega > l \quad (\varphi < 30°), \tag{4.4}$$

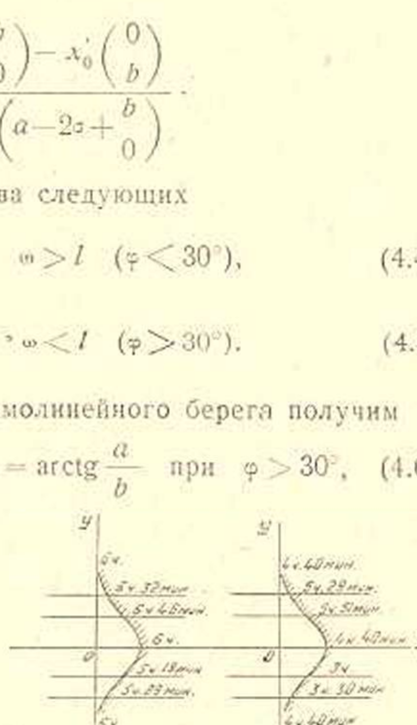
$$\operatorname{tg}\omega t_0 = \frac{a-bx_0'}{b+x_0'(2-a)}, \qquad \omega < l \quad (\varphi > 30°). \tag{4.5}$$

Полагая здесь $x_0'=0$, для случая прямолинейного берега получим

$$\omega t_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \varphi < 30° \quad \text{и} \quad \omega t_0 = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \quad \text{при} \quad \varphi > 30°, \tag{4.6}$$

что совпадает с соответствующим результатом из [6].

Результаты расчета по формулам (4.4) и (4.5) представлены на фиг. 6.



Фиг. 6. Запаздывание ветра в разных пунктах берега на широтах $\varphi=20°$ и 40° с. ш.

Определим угол наклона ветра у земли

$$\operatorname{tg}\alpha = \left.\frac{v}{u}\right|_{z=0}. \tag{4.7}$$

Подставляя сюда решения (3.5) и (3.6) для случая $l=0$, получим:

[5] Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 5

$$\operatorname{tg}\alpha = -x_0'. \tag{4.8}$$

В случае прямолинейного берега $x_0' = 0$ и $\alpha = 0$, что совпадает с результатом из [6].

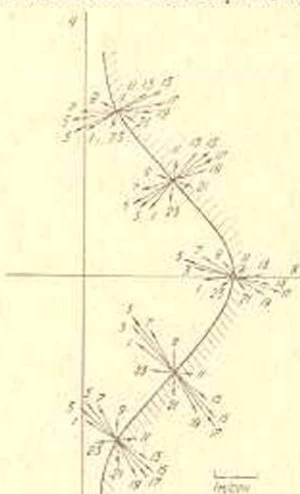
В случае $l \neq 0$, согласно (3.9) и (3.10), имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_0'(a-b) + (2\sigma - a - b)\operatorname{tg}\omega t}{-a + b + x_0'(2\sigma - a - b)\operatorname{tg}\omega t}, \quad \varphi < 30^\circ, \tag{4.9}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ax_0' + b + (2\sigma - a - bx_0')\operatorname{tg}\omega t}{-a + bx_0' + [x_0'(2\sigma - a) + b]\operatorname{tg}\omega t}, \quad \varphi > 30^\circ. \tag{4.10}$$

В частности, при $x_0' = 0$ получим выражения для прямолинейного берега [6].

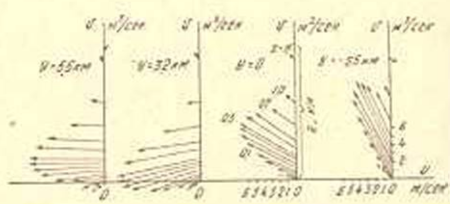
Суточный ход ветра представлен на фиг. 7. На фиг. 8 показано изменение вектора скорости ветра с высотой при $l \neq 0$ в 7 часов на суше.



Фиг. 7. Суточный ход вектора скорости ветра на высоте флюгера в разных пунктах берега.

Анализ результатов позволяет сделать ряд выводов в дополнение к полученным в [6].

В случае прямолинейного берега ни одна из величин не зависит от y, поэтому картины в разных вертикальных плоскостях повторяются. При криволинейном же очертании эти картины разные. В [6] можно было проследить как



Фиг. 8. Изменение вектора скорости ветра с высотой при $l \neq 0$, $x = 10$ *км*, в 7 часов. Пунктиром показано направление ветра у земли (при $z = 0$).

влияет ускорение Кориолиса на развитие процесса для прямолинейного берега, здесь на фиг. 2 показано это влияние для криволинейного берега. Легко заметить, что учет силы Кориолиса приводит к лучшему соответствию хода ветра данным наблюдений.

Как показывает фиг. 3, пунктирные профили, соответствующие прямолинейному берегу, повторяются при одних и тех же значениях x и разных значениях y, в то время, как профили, соответствующие криволинейному берегу, на разных расстояниях от оси x сильно отличаются друг от друга. Пунктирные профили при $x = y = 0$ совпадают со сплошными при $x = 0$, $y = p$, так как здесь $\partial T_1/\partial y = 0$ и $x_0' = 0$. На больших расстояниях от оси x, где криволинейный берег приближается к прямолинейному, снова имеет место $\partial T_1'/\partial y \to 0$ и $x_0' \to 0$, поэтому влияние берега здесь также исчезает.

Большой интерес представляют карты изолиний вертикальных токов (фиг. 4 и 5). В случае прямолинейного берега эти изолинии прямые, параллельные береговой линии, причем нулевая изолиния совпадает с последней. Криволинейная форма берега приводит к резкой деформации этого поля. Нулевая линия лишь на больших расстояниях приближается к береговой линии и дважды пересекает последнюю (в точках перегиба), языкообразно далеко вдаваясь в сторону суши и двумя обширными частями в сторону воды. При этом имеют место и замкнутые изолинии, причем вся картина получается симметричной относительно оси x как в случае $l \neq 0$, так и $l = 0$.

Отметим, что абсолютная величина вертикальных токов определяется значениями двух параметров — ε и q, первый из которых характеризует контраст температуры суша-вода, а второй — кривизну берега. Величина вертикальных токов оказывается прямо пропорциональной квадрату каждого из указанных параметров. По-видимому, развитый бриз в значительной степени стирает горизонтальную неоднородность температуры и влияние берега, поэтому вертикальные токи по своей абсолютной величине будут несколько меньше, чем получено теоретически, но все же наблюдения над облаками подтверждают своеобразную их форму, в большой степени соответствующую тому, что получено на картах изолиний.

Как показывают формулы (4.4)—(4.5), момент наступления бриза при криволинейном береге и $l \neq 0$ зависит от широты везде, в отличие от прямолинейного берега. Кроме того, как показывает фиг. 6, при одном и том же значении широты этот момент зависит от у и лишь в вершине залива и на больших расстояниях от оси x совпадает с результатом для случая прямолинейного берега [6].

Скорость ветра на берегу при $l = 0$ везде направлена по нормали к береговой линии и поэтому лишь на вершине и на больших расстояниях от оси x совпадает с последней ($v = 0$). Но лишь при учете силы Кориолиса имеется суточный ход направления ветра. Фиг. 7 показывает суточный ход величины и направления скорости ветра. С высотой имеет место правый поворот скорости ветра (фиг. 8), на некоторых высотах имеет место течение обратного направления.

Таким образом, учет формы береговой линии приводит к существенно новым результатам, которые не могли быть получены из решения задачи для прямолинейного берега. При этом учет силы Кориолиса принципиально улучшает результаты.

Институт водных проблем и гидротехники
МВХ Армянской ССР

Поступила 1 IV 1964

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ, Մ. Գ. ԴԱՂՍՏԱՆՅԱՆ

ԱՓԱԳԾԻ ՁԵՎԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲՐԻԶԱՅԻՆ ՇՐՋԱՊՏՈՒՅՏԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է բրիզային շրջապտույտի խնդրի լուծումը, երբ ափագիծն ունի (3.1) կորագիծ տեսքը։ Սխեմատիկորեն այն ներկայացված է գծ. 1-ում։ Խնդրի լուծման համար ելնում ենք հիդրոթերմոդինամիկայի գծայնացված (1.1)—(1.5) հավասարումներից (1.6) եզրային պայմանների դեպքում։

Պարզության համար ընդունված է, որ ուղղաձիգ տուրբուլենտականության գործակիցը հաստատուն է։ Լուծումը ստացվում է (2.7), (2.9), (2.12), (2.13) և (2.15) տեսքով, երբ հաշվի է առնվում Կորիոլիսի արագացումը, և (2.7), (2.9), (2.16), (2.17), (2.18) տեսքով, երբ Կորիոլիսի արագացումը բացակայում է։ Ծածկույթի ջերմաստիճանի (3.2) տեսքի դեպքում կատարված են հաշվարկներ և արդյունքները ներկայացված են բերված գծագրերում։ Գծ. 2-ում ներկայացված են y-ի տարբեր արժեքների համար ստացված քամու պրոֆիլները Կորիոլիսի արագացման առկայության, ինչպես նաև նրա բացակայության դեպքում։ Գծ. 3-ում ներկայացված են քամու արագության հորիզոնական բաղադրիչների արդյունքները ուղղագիծ ափի համար ստացված արդյունքների հետ միասին։ Ի տարբերություն ուղղագիծ ափի, այստեղ ստացված են տարբեր ուղղաձիգ հարթություններում տարբեր պատկերներ։

Բրիզի ծագման ժամկետը, երբ Կորիոլիսի արագացումը բացակայում է, որոշվում է (4.2) բանաձևով, որից ստացված արդյունքը համընկնում է [6]-ում ստացված արդյունքի հետ։ Կորիոլիսի արագացումը հաշվի առնելիս ստացված է, որ բրիզի ծագման ժամկետը ափի տարբեր մասերում տարբեր է, որը և երևում է գծ. 6-ում։ Միայն որոշ կետերում այն համընկնում է [6]-ի արդյունքների հետ։

Քամու թեքության անկյունը որոշվում է (4.7), (4.9) և (4.10) բանաձևերով։ (4.9)-ից և (4.10)-ից ստացված արդյունքները ներկայացված են գծ. 7-ում, իսկ գծ. 8-ում ցույց է տրված արագության վեկտորի փոփոխությունը ըստ բարձրության, երբ հաշվի է առնվում Կորիոլիսի արագացումը։

Առանձին հետաքրքրություն են ներկայացնում ուղղաձիգ հոսանքների իզոգծերի քարտեզները (գծ. գծ. 4 և 5)։ Ուղղագիծ ափի համար այդ իզոգծերը ափին զուգահեռ ուղիղներ են։ Ափի կոր տեսքը բերում է այս դաշտի դեֆորմացիային։ Զերոյական գիծը միայն շատ մեծ հեռավորությունների վրա համընկնում է ափագծի հետ, երկու անգամ հատում է այն և լեզվակի ձևով տարածվում ցամաքի վրա։ Ըստ որում գոյություն ունեն նաև փակ իզոգծեր և պատկերը սիմետրիկ է x առանցքի նկատմամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Буз А. И.* К вопросу о влиянии береговой линии на воздушные течения и распределение осадков. Сборник по региональной синоптике, № 5, 1960.
2. *Бурман Э. А.* К вопросу о распределении вертикальных токов при бризовых циркуляциях. Труды ОГМИ, вып. 5, 1953.
3. *Гутман Л. Н.* О структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.

4. *Гутман Л. Н.* О вертикальных токах при бризах. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.
5. *Гутман Л. Н.* О распределении бризов по нормали к берегу. Метеорология и гидрология, № 2, 1949.
6. *Мхитарян А. М.* О бризах в бассейне оз. Севан и некоторые результаты их расчета по фактическому распределению температуры подстилающей поверхности. Сообщение I: Известия АН АрмССР, серия техн. наук, № 5, 1962; сообщение 2: там же, № 6, 1962.
7. *Ситников И. Г.* Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
8. *Трубников Б. Н.* О вертикальных токах при бризе над плоским берегом. Известия АН СССР, серия геофиз., № 2, 1961.
9. *Pearce R. P.* The calculation of the sea-breese circulation in terms of the differential heating across the coastline. Quart. Journ. of the Roy. Met. Soc., **81**, № 349, 1955; **82**, № 1352, 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э. Д. ГАЗАЗЯН, О. С. МЕРГЕЛЯН

ИЗЛУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИСТОЧНИКОВ, ЛЕТЯЩИХ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА С ГИРОТРОПНЫМ ФЕРРИТОМ

В работе рассмотрено излучение линейных зарядов и токов, летящих в вакууме параллельно границе раздела с гиротропным ферритом. Рассмотрен простейший случай, когда магнитная проницаемость феррита имеет вид [3]

$$\mu_{ik}=\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -ig \\ 0 & ig & \mu \end{pmatrix}.$$

Такая гиротропия может быть вызвана, в частности, наложением постоянного внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси x. Задача решена для произвольного значения постоянной гирации g, а также подробно исследованы предельные случаи $g \ll \mu$ и $g \gg \mu$. Во всех случаях вычислены потери энергии на излучение и исследована поляризация излучения волн. При $g=0$ результаты совпадают с полученными в [1]—[2]. Работа может быть использована при генерировании электромагнитных волн нужной поляризации, в зависимости от степени гиротропности среды.

§ 1. Излучение линейного заряда, летящего вдоль плоской границы с гиротропным ферритом

Пусть плоскость $z=d$ разделяет вакуум ($z<d$) и феррит с постоянными ε и μ_{ik}, где

$$\mu_{ik}=\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -ig \\ 0 & ig & \mu \end{pmatrix} \quad z>d. \tag{1.1}$$

Нить, имеющая линейную плотность заряда ρ_0 и параллельная оси y, движется вдоль оси x со скоростью v, находясь в плоскости $z=0$.

Поле нити в вакууме имеет вид

$$\vec{E}^0=\int d\vec{k}\,(\vec{E}(\vec{k})\,e^{ik_z z}+\vec{E}'(\vec{k})\,e^{-ik_z z})\,e^{i\frac{\omega}{v}(x-vt)}, \tag{1.2}$$

где

$$d\vec{k} = dk_z \frac{d\omega}{v}; \qquad \omega = \vec{k}\vec{v},$$

$$\vec{E}(\vec{k}) = \frac{i\rho_0}{\pi} \frac{\dfrac{\omega\vec{v}}{c^2} - \vec{k}}{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}, \qquad \lambda = i\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}, \tag{1.3}$$

а $\vec{E}'(\vec{k})$ определяется из граничных условий.

Поле в феррите ищем в виде

$$\vec{E}^{\Phi} = \int d\vec{k}\,(\vec{E}_1(\vec{k})\,e^{i\lambda_1 z} + \vec{E}_2(\vec{k})\,e^{-i\lambda_2 z})\,e^{i\frac{\omega}{v}(x-vt)}, \tag{1.4}$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega}{v} S_{1,2}, \qquad S_{1,2} = \left\{\beta^2\varepsilon\mu - 1 + \beta^2\varepsilon\mu\frac{g^2}{2\mu^2}\alpha_{1,2}\right\}^{1/2}, \tag{1.5}$$

$$\alpha_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\mu^2}{\beta^2\varepsilon\mu g^2}}.$$

Кроме того, из однородных уравнений поля следует, что в феррите между компонентами полей имеют место следующие соотношения

$$E_{1,2x}(\vec{k}) = -i\frac{v}{\omega}\lambda_{1,2}\alpha_{1,2}\frac{g}{2\mu}E_{1,2y}(\vec{k}),$$
$$E_{1,2z}(\vec{k}) = i\alpha_{1,2}\frac{g}{2\mu}E_{1,2y}(\vec{k}). \tag{1.6}$$

Из граничных условий с учетом соотношений (6) для определения Фурье-компонент полей получаем систему уравнений

$$(\lambda_1 + \mu\lambda)\,E_{1y}e^{i(\lambda_1 - k_z)d} + (\lambda_2 + \mu\lambda)\,E_{2y}e^{i(\lambda_2 - k_z)d} = 0,$$

$$\alpha_1(\lambda_1 + \varepsilon\lambda)\,E_{1y}e^{i(\lambda_1 - k_z)d} + \alpha_2(\lambda_2 + \varepsilon\lambda)\,E_{2y}e^{i(\lambda_2 - k_z)d} = -\frac{2\mu}{g}\frac{\rho_0}{\pi}\frac{\lambda(k_z+\lambda)}{k_z^2 - \lambda^2},$$

разрешая которую имеем

$$E_{1,2y}(\vec{k}) = \pm\frac{1}{\Delta}\frac{2\mu}{g}\frac{\rho_0}{\pi}(\lambda_{2,1} + \mu\lambda)\frac{\lambda(k_z+\lambda)}{k_z^2 - \lambda^2}e^{i(k_z - \lambda_{1,2})d},$$
$$E_{1,2x}(\vec{k}) = \mp\frac{i\rho_0}{\pi\Delta}\frac{v}{\omega}\alpha_{1,2}\lambda_{1,2}(\lambda_{2,1} + \mu\lambda)\frac{\lambda(k_z+\lambda)}{k_z^2 - \lambda^2}e^{i(k_z - \lambda_{1,2})d}, \tag{1.7}$$

где

$$\Delta = (\lambda_1 + \mu\lambda)(\lambda_2 + \varepsilon\lambda)\alpha_2 - (\lambda_1 - \varepsilon\lambda)(\lambda_2 + \mu\lambda)\alpha_1 =$$

$$= \frac{\omega^2}{v^2}\left\{\left(S_1 + i\mu\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\left(S_2 + i\varepsilon\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\alpha_2 - \right.$$

$$-\left(S_1+i\varepsilon\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\left(S_2+i\mu\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\alpha_1\Big\}=\frac{\omega^2}{v^2}\Delta_0. \quad (1.8)$$

После интегрирования по k_z имеем

$$E_{1,2x}=\frac{2\rho_0}{v}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_{1,2}\alpha_{1,2}}{\Delta_0}\left(S_{2,1}+i\mu\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)i\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\times$$

$$\times e^{i\frac{\omega}{v}S_{1,2}(z-d)+i\frac{\omega}{v}(x-vt)-\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}\,d}\,d\omega. \quad (1.9)$$

Из непрерывности тангенциальной составляющей при $z=d$ имеем

$$E'_x(\vec{k})=E_{1x}(\vec{k})+E_{2x}(\vec{k})-E_x(\vec{k})=-\frac{\rho_0}{\pi\Delta}\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\times$$

$$\times\frac{1}{k_z^2-\lambda^2}\{\alpha_1(\lambda_2+\mu\lambda)(\varepsilon\lambda^2-k_z\lambda_1)-\alpha_2(\lambda_1+\mu\lambda)(\varepsilon\lambda^2-k_z\lambda_2)\}\,e^{-2\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}d}. \quad (1.10)$$

Потери энергии на единице пути даются следующей формулой

$$\frac{dW}{dx}=\frac{4\rho_0^2}{v}\left(\mathrm{Re}\int\limits_{S_1^2>0}f_1(\omega)\,e^{-2\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}\,d}\,d\omega+\mathrm{Re}\int\limits_{S_2^2>0}f_2(\omega)\,e^{-2\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}d}\,d\omega,\right. \quad (1.11)$$

где

$$f_{1,2}=\frac{i\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\left\{\alpha_{1,2}\left(S_{2,1}+i\mu\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\left(S_{1,2}-i\varepsilon\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\right\}}{\Delta_0}$$

При $d=0$ формулы (1.11) переходят в соответствующие формулы работ [1], [2]. Из формулы (1.10) следует, что в гиротропной среде могут излучаться две волны, соответствующие условиям $S_{1,2}^2>0$. Идут они под углами $\vartheta_{1,2}$ к оси x, определяемыми из равенств $S_{1,2}=\mathrm{tg}\,\vartheta_{1,2}$.

Поляризация излученных волн эллиптическая.

Если вместо линейного заряда мы имеем прямой ток $\vec{j}$, то его поле имеет вид

$$E^{\vec{j}}_{1,2y}=\mp\frac{2j}{c^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha_{2,1}\left(S_{2,1}+i\varepsilon\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\mu}{\Delta_0}\,e^{-d\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}}\times$$

$$\times e^{i\frac{\omega}{v}S_{1,2}(z-d)+i\frac{\omega}{v}(x-vt)}\,d\omega. \quad (1.12)$$

$$E_y^{\prime \vec{j}} = \frac{j}{c^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [A_1(\omega) + A_2(\omega)]\, e^{-2d\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2} + i\frac{\omega}{v}S_{1,2}(z-d) + i\frac{\omega}{v}(x-vt)}\, d\omega,$$

где

$$A_{1,2}(\omega) = \pm \frac{\alpha_{2,1}}{\Delta_0}\left(S_{2,1} + i\varepsilon\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right)\left(S_{1,2} - i\mu\frac{|\omega|}{\omega}\sqrt{1-\beta^2}\right).$$

Потери энергии имеют вид

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW_1}{dx} + \frac{dW_2}{dx},$$

где

$$\frac{dW_{1,2}}{dx} = -\frac{2j^2}{vc^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{S_{1,2}^2>0} A_{1,2}(\omega)\, e^{-2d\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2}}\, d\omega. \tag{1.13}$$

Перейдем к рассмотрению предельных случаев $g \ll \mu$ и $g \gg \mu$.

§ 2. Частные случаи $g \ll \mu$ и $g \gg \mu$

При $g \ll \mu$ можно пренебречь малыми членами в амплитудах полей. Это приводит к тому, что везде считается $g=0$, кроме фаз, так как в этом случае g не влияет на интенсивность излучения, но существенно вращает плоскость поляризации излученной волны. Тогда имеем такую картину: в гиротропной среде распространяется одна волна правой круговой поляризации, интенсивность которой такая же, как и в случае $g=0$ и имеет вид [1]

$$\frac{dW^{\rho}}{dx} = \frac{4\rho_0^2}{v}\int\limits_{S^2>0} \frac{\varepsilon S(1-\beta^2)}{S^2+\varepsilon^2(1-\beta^2)}\, e^{-2\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}\, d}\, d\omega,$$
$$\frac{dW^{\vec{j}}}{dx} = \frac{4j^2}{vc^2}\int\limits_{S^2>0} \frac{\mu S}{S^2+\mu^2(1-\beta^2)}\, e^{-2\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}\, d}\, d\omega, \tag{2.1}$$

где

$$S^2 = \beta^2\varepsilon\mu - 1,$$

а плоскость поляризации излученных волн делает полный оборот на расстоянии

$$z_0 = \frac{4\pi S\mu}{g\sqrt{\varepsilon\mu}}\,\frac{c}{\omega}.$$

Если мы имеем $g \gg \mu$, то излучается только одна волна правой поляризации, для которой $S_1^2 > 0$. Для волны $S_2^2 < 0$ имеет место сильное затухание.

Физический институт ГКАЭ
ЦНИ Физико-техническая
лаборатория АН Армянской ССР

Поступила 31 III 1964

Է. Դ. ԳԱԶԱԶՅԱՆ, Հ. Ս. ՄԵՐԳԵԼՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԼԻՑՔԵՐԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՆՐԱՆՑ՝ ՀԻՐՈՏՐՈՊՖԵՐՐԻՏԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՍԱՀՄԱՆԻՆ ԶՈՒԳԱՀԵՌ ՇԱՐԺՎԵԼԻՍ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ դիտարկված են անվերջ երկարության լիցքավորված թելի և հոսանքի ճառագայթումը, երբ նրանք շարժվում են հիրոտրոպ-ֆերրիտային միջավայրի սահմանին զուգահեռ: Հաշված են ճառագայթման ինտենսիվությունն ու բևեռացումը: Դիտարկված են նաև հիրացիայի գործակցի երկու սահմանային դեպքերը, երբ $g \ll \mu$ *և* $g \gg \mu$*: Ցույց է տրված, որ առաջին դեպքում ճառագայթման ինտենսիվությունը գործնականորեն չի տարբերվում իզոտրոպ դեպքից, երբ* $g = 0$, *իսկ ճառագայթված ալիքները բևեռացված են շրջանաձև՝ աջ. երկրորդ դեպքում, երբ* $g \gg \mu$, *տարածվում է միայն աջ բևեռացված ալիքը:*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозов А. И.* Взаимодействие между движущейся заряженной струей и магнитодиэлектриком. Вестник МГУ, **1**, 72, 1957.
2. *Мергелян О. С.* Излучение заряженной нити, несущей ток, при движении параллельно границе раздела сред. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, **13**, 3, 1960.
3. *Микаэлян А. Л.* Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах. Госэнергоиздат, М.—Л., 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. И. ГОЛЬДМАН

ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР ФОТОНОМ В ИНТЕНСИВНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

Рождение пар при столкновении фотонов в теории возмущений описывается двумя диаграммами Фейнмана, различающимися перестановкой местами фотонов. При больших интенсивностях фотонов одного сорта теория возмущений в соответствующей вершине становится несправедливой подобно тому, как это имеет место в эффекте Комптона [1]. Как и там, параметр, инвариантно характеризующий плотность фотонов ξ, имеет вид $\xi^2 = \dfrac{4\pi\hbar Ne^2}{m^2c^2\omega'}$ (ω' — частота интенсивной волны) и теория возмущений пригодна лишь в пределе $\xi \ll 1$. В противном случае в области взаимодействия $\sim \hbar/mc$ окажется много ($\sim 137\,\xi^2$) фотонов и рождение пары будет происходить с заметной вероятностью ниже двухчастичного порога. Чтобы учесть влияние интенсивности, воспользуемся точным решением уравнения Дирака в поле плоской волны [2—4]. Теория возмущений применяется при таком подходе лишь в отношении фотонов слабого пучка.

Матричный элемент поглощения фотона частоты ω и рождения электрона $(\vec{p}'\lambda')$ и позитрона $(\vec{p}\lambda)$ имеет вид $(\hbar = c = 1)$:

$$\langle 0, \vec{p}'\lambda' | H_{int} | 1, \vec{p}\lambda \rangle = e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\int \psi^{+\prime}\,\vec{e}\,\vec{\alpha}\,\psi\, e^{-i\omega\tau}\, d\vec{r}\, d\tau, \qquad (1)$$

где $\psi_{\vec{p}\lambda}$ — волновые функции электрона в поле плоской волны. Система отсчета выбрана так, чтобы фотоны двигались навстречу плоской волне. Все векторы здесь и дальше двухмерны и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению движения фотонов; $\vec{e}$ — вектор поляризации фотона, $\vec{\alpha}$ — матрицы Дирака. Вычисление (1) дает

$$\langle H_{int} \rangle = 2e\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\, cc' e^{-i(\lambda-\lambda'+2\omega)t}\, \delta_{\vec{p}',\, \vec{p}}\, \overset{+}{v}{}' \left(B_0 + i\sigma_s B_s\right) v, \qquad (2)$$

причём c, c' — нормировочные постоянные в ψ, ψ'; v — двухкомпонентный спинор, σ_s — матрицы Паули и, наконец,

$$B_0 = (\lambda + \lambda') \vec{e} (\vec{p} I + m\vec{F}),$$

$$B_1 = m e_y (\lambda - \lambda') I, \quad B_2 = - m e_x (\lambda - \lambda') I, \tag{3}$$

$$B_3 = (\lambda - \lambda') [\vec{e}, \vec{p} I + m\vec{F}]_z.$$

Входящие сюда интегралы выражаются через вектор-потенциал плоской волны $\vec{A}\ (z-t)$ следующим образом:

$$[I, \vec{F}] = \int e^{i[S - S' - \omega\tau]} \left\{ 1, -\frac{e}{m} \vec{A}(\tau) \right\} d\tau, \tag{4}$$

где $S(\tau)$ — слагаемое в классическом действии:

$$S(\tau) = \frac{1}{2\lambda} \int^{\tau} \{ [\vec{p} - e\vec{A}(\tau)]^2 + m^2 - \lambda^2 \} d\tau. \tag{5}$$

После суммирования по поляризациям в конечном состоянии получаем для вероятности образования пары с поперечным импульсом электрона $\vec{p}$ выражение:

$$dW = \frac{e^2 \sum\limits_{s=0}^{3} |B_s|^2 d\vec{p}}{2\pi\omega\, |\lambda'^2 - \lambda^2|\, [\vec{p}^2 + m^2 (1 + \xi^2)]}, \qquad \xi^2 = \frac{e^2}{m^2} \overline{\vec{A}^2}, \tag{6}$$

причем, как это следует из (3), усредненное по $\vec{e}$ выражение для $\Sigma |B_s|^2$ имеет вид

$$\overline{\Sigma |B_s|^2} = (\lambda - \lambda')^2 m^2 I^2 + (\lambda^2 + \lambda'^2) |\vec{p} I + m\vec{F}|^2. \tag{7}$$

Подчеркнем, что в отношении интенсивного пучка до сих пор не делалось никаких предположений ни в отношении монохроматичности, ни поляризации. Теперь мы остановимся подробнее на случае монохроматической волны и возьмем вектор-потенциал в виде

$$\begin{aligned} eA_x &= \sqrt{2}\, \xi m \sin\alpha \cos\omega'\tau, \\ eA_y &= \sqrt{2}\, \xi m \cos\alpha \cos(\omega'\tau + \beta), \end{aligned} \tag{8}$$

предполагающем произвольную (эллиптическую) поляризацию. Теперь подинтегральные выражения в (4) представляют собой произведение двух периодических функций от τ: одной с периодом $2\pi/\omega'$ и другой, имеющей вид $e^{i\Delta}$, где

$$\Delta = \left[\frac{\vec{p}^2 + m^2 (1 + \xi^2) - \lambda^2}{2\lambda} - \frac{\vec{p}^2 + m^2 (1 + \xi^2) - \lambda'^2}{2\lambda'} - \omega \right] \tau. \tag{9}$$

Легко убедиться, что I, $\vec{F}$ будут объемно малы, если между обоими периодами не выполняется соотношение

$$\Delta = -n\omega'\tau, \quad n\text{—целое число}. \tag{10}$$

Из вида зависимости от t матричного элемента (2) следует закон сохранения

$$\lambda' - \lambda = 2\omega. \tag{11}$$

Вспоминая, что $\lambda < 0$, $\lambda' > 0$, находим, что целое

$$n = \frac{\vec{p}^2 + m^2(1+\xi^2)}{2\omega'}\left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda}\right) \text{— положительно.} \tag{12}$$

Введем теперь удобные для дальнейшего обозначения*

$$v = \sqrt{1 - \frac{m^2(1+\xi^2)}{n\omega'\omega}}, \qquad p = \frac{m^* v}{\sqrt{1-v^2}}\sin\theta. \tag{13}$$

Выразим через новые переменные λ и λ':

$$\lambda' = \omega(1 + v\cos\theta), \quad \lambda = -\omega(1 - v\cos\theta), \tag{14}$$

а также фазовый объем

$$d\vec{p} = \frac{m^{*2}v^2}{1-v^2}\cos\theta d\Omega. \tag{15}$$

Интегралы $I, \vec{F}$ в системе координат, определяемой требованием $\gamma_z = 0$, имеют вид

$$\{I, F_x, F_y\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(nu - s\sin u + q\sin 2u + r\cos 2u)}\{1, \sqrt{2}\,\xi\sin\alpha\cos u, \sqrt{2}\,\xi\cos\alpha\cos(u+\beta)\}du, \tag{16}$$

а входящие в них параметры равны

$$s = \frac{n\xi\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{1+\xi^2}}\,\frac{2v\sqrt{1-v^2}\sin\theta}{1-v^2\cos^2\theta}, \qquad n = \frac{m^2(1+\xi^2)}{\omega'\omega(1-v^2)},$$

$$\{q; r\} = \frac{n\xi^2(1-v^2)}{2(1+\xi^2)(1-v^2\cos^2\theta)}\{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos 2\beta;\ \cos^2\alpha\sin 2\beta\}. \tag{17}$$

Вводя плотность потока $\xi^2 m^2\omega'/2\pi e^2$ в выражение для вероятности, найдем дифференциальное сечение образования пары

$$d\sigma = \frac{r_0^2 v\Sigma|B|^2 d\Omega}{4\xi^2\omega'\omega^3(1-v^2\cos^2\theta)}. \tag{18}$$

---

* В поле плоской волны электрон становится „тяжелее" [4]: его эффективная масса равна $m^* = m\sqrt{1+\xi^2}$. Такая интерпретация соответствует порогу рождения, определяемому из условия $n\omega'\omega = m^2(1+\xi^2)$. Введенные обозначения теперь приобретают следующий смысл: v—это скорость, а θ—угол вылета „позитрона" в системе покоя, где $n\omega' = \omega$. В случае малых ξ эти величины близки к физическим значениям скорости и угла в системе Ц. И.

В частном случае плоско-поляризованной волны получается результат работы [3]. Однако, наиболее прост случай циркулярной поляризации $\left(q=r=0,\ \alpha=\frac{\pi}{4}\right)$, когда интегралы сводятся к функциям Бесселя

$$I=J_n(s), \qquad F_x=\frac{n\xi}{s}J_n(s), \qquad F_y=i\xi J_n'(s), \tag{19}$$

и для неполяризованных фотонов ω находим сечение

$$d\sigma=\frac{r_0^2 nv(1-v^2)}{2(1+\xi^2)}\left\{\frac{1+v^2\cos^2\theta}{1-v^2\cos^2\theta}\left[J_n'^2+\left(\frac{n^2}{s^2}-1\right)J_n^2\right]+\xi^{-2}J_n^2\right\}d\Omega. \tag{20}$$

Если можно ограничиться первым членом разложения $J_n(s)$ по аргументу (то есть при условии $s\ll\sqrt{n}$)

$$d\sigma=\frac{r_0^2 nv(1-v^2)}{2(1+\xi^2)(n-1)!^2}\left(\frac{s}{2}\right)^{2(n-1)}\times$$

$$\times\frac{1-v^4\cos^4\theta+2v^2(1-v^2)(1+\xi^2)^{-1}\sin^2\theta}{(1-v^2\cos^2\theta)^2}d\Omega. \tag{21}$$

Полагая здесь $n=1$, $\xi\ll 1$, получаем формулу Брейта и Уилера, описывающую образование пар при столкновении двух фотонов [5, 6]. Формулы (20) и (21) показывают, что при $n>1$ возможно образование пар ниже двухчастичного порога, определяемого равенством $\omega'\omega=m^2$. В качестве примера рассмотрим столкновение γ-квантов с энергией 10 Бэв с пучком рубинового лазера $\omega'\simeq 1{,}78$ эв, интенсивность которого соответствует $\xi\simeq 1$. У порога процесса образования пар в акте взаимодействия поглощается сразу 30 фотонов, но сечение (21) достигает максимума при $n\sim 50$ и составляет $\sim 10^{-32}$ $см^2$.

Физический институт ГКАЭ
г. Ереван

Поступила 25 III 1964

Ի. Ի. ԳՈԼԴՄԱՆ

ԷԼԵԿՏՐՈՆ-ՊՈԶԻՏՐՈՆ ԶՈՒՅԳԻ ԱՌԱՋԱՑՈՒՄԸ ՖՈՏՈՆԻ ԿՈՂՄԻՑ ԻՆՏԵՆՍԻՎ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում տրվում է ֆոտոնի հանդիպման ժամանակ էլեկտրոն-պոզիտրոն զույգի ծնվելու հավանականության հաշվումը, առանց օգտագործելու գրգռման տեսության ինտենսիվ էլեկտրամագնիսական ալիքի նկատմամբ։ Ուսումնասիրվել է առաջացած էլեկտրոնի և պոզիտրոնի անկյունային բաշխումը։ Բացի էլեկտրամագնիսական ալիքի կամավոր զույգի ընդհանուր դեպքից, ուսումնասիրված է նաև մոնոխրոմատիկ ալիքի դեպքը։

Քննարկվում է բազմաֆոտոնային պրոցեսների կլանման հարցը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goldman I. I.* Intensity effects in compton scattering. Physics letters, **8**, 103, 1964.
2. *Wolkow D. M.* Eine neue Losung der diracsche Gleichung. Zeits. Phys, **94**, 250, 1935.
3. *Reiss H. R.* Absorption of light by light. Journ. Math. Physics, **3**, 59, 1962.
4. *Гольдман И. И.* Дираковский электрон в поле плоской электромагнитной плоской волны. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **17**, № 6, 1964.
5. *Jauch J. M., Rohrlich F.* The theory of photons and electrons. Massachusets, 1955, 300.
6. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. Гостехиздат, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ДЖРБАШЯН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЯДРА МЕДЛЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Взаимодействие частицы с ядром в нерелятивистском случае можно представить в виде [1, 2]

$$V=\frac{Z_1 Z_2 e^2}{|r-r_n|}-i\frac{4\pi\omega}{c}\sum_{\lambda\mu}J_n A^M_{\lambda\mu}(<)\,JA^M_{\lambda\mu}(>), \tag{1}$$

где J_n — ядерный ток, $A^M_{\lambda\mu}$ — вектор-потенциал магнитного 2^λ-поля

$$A^M_{\lambda\mu}=[\lambda(\lambda+1)]^{-1/2}\zeta_\lambda L Y_{\lambda\mu}, \tag{2}$$

$$\zeta_\lambda=j_\lambda\approx\frac{1}{(2\lambda+1)!!}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^\lambda \text{ для ядерного излучения: } (<), \tag{2a}$$

$$\zeta_\lambda=h^{(1)}_\lambda\approx-i(2\lambda-1)!!\left(\frac{\omega r}{c}\right)^{-\lambda-1} \text{ для расходящейся волны: } (>), \tag{2б}$$

$J=J_{\text{орб.}}+J_{\text{спин.}}$ есть ток, обусловленный движением частицы. Из уравнения Паули для него имеем

$$J_{\text{орб.}}A^M_{\lambda\mu}=-\frac{Z_1 eh}{2\pi mc}PA^M_{\lambda\mu}, \tag{3}$$

$$J_{\text{спин.}}A^M_{\lambda\mu}=\frac{Z_1 eh\,\mu_p}{2\pi mc}\,s\,\text{rot}\,A^M_{\lambda\mu}. \tag{4}$$

Воспользовавшись выражениями (1)—(4) для $V^1=V-\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ получим

$$V^1=V^{1E}+V^{1M\text{орб.}}+V^{1M\text{спин.}}, \tag{5}$$

где

$$V^{1E}=\sum_{\lambda\mu}\frac{4\pi}{2\lambda+1}(-1)^\mu Q(E\lambda,-\mu)\,\mathrm{R}(E\lambda,\mu), \tag{6}$$

$$V^{1M\text{орб., спин.}}=-\sum_{\lambda\mu}\frac{4\pi}{2\lambda+1}(-1)^\mu Q(M\lambda,-\mu)\,\mathrm{R}_{\text{орб., спин.}}(M\lambda,\mu), \tag{7}$$

Q—мультипольный момент ядра, R—оператор перехода, относящийся к частице. Последний соответственно равен

$$R(E\lambda, \mu) = Z_1 e r^{-\lambda-1} Y_{\lambda\mu}(\theta\varphi) \tag{8}$$

$$R_{\text{орб.}}(M\lambda, \mu) = \frac{Z_1 e h}{2\pi m c \lambda} r^{-\lambda-1} L Y_{\lambda\mu}(\theta\varphi)\vec{\nabla}. \tag{9}$$

$$R_{\text{спин.}}(M\lambda, \mu) = \frac{Z_1 e h \mu_p}{2\pi m c} s\vec{\nabla}(r^{-\lambda-1} Y_{\lambda\mu}(\theta\varphi)). \tag{10}$$

Подставляя (5)—(10) в исходное выражение для сечения возбуждения [3, 4, 5]

$$\sigma = \frac{4\pi^2 m^2 v_f}{h^4 v_i} \frac{1}{(2s+1)(2l+1)} \int \sum_{M_i M_f \mu_i \mu_f} \left| \int u^*_{\mu_f} \varphi^*_f F^{*-}_{k_f} V^1 u_{\mu_i} \varphi_i F^+_{k_i} \right|^2 d\Omega, \tag{11}$$

и пользуясь известными формулами, окончательно получим

$$\sigma = \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\sigma^E_\lambda + \sigma^{M\text{орб.}}_\lambda + \sigma^{M\text{спин.}}_\lambda), \tag{12}$$

где σ^E_λ — сечение 2^λ — польного кулоновского возбуждения [3],

$\sigma^{M\text{орб.}}_\lambda$ — сечение 2^λ — польного магнитно-орбитального возбуждения:

$$\sigma^{M\text{орб.}}_\lambda = \left(\frac{2\pi Z_1 e}{hc}\right)^2 \frac{v_f}{v_i} B(M, \lambda) \frac{64\pi^2(\lambda+1)}{\lambda(2\lambda+1)} \sum_{l_i l_f} (2l_f+1)(2l_i+3) \times$$
$$\times (2l_i+1)^2 (l_i+1) \begin{pmatrix} l_i+1 & l_f & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} \lambda & \lambda & 1 \\ l_i & l_i+1 & l_f \end{Bmatrix}^2 \left| M^{-\lambda-2}_{l_i l_f} \right|^2. \tag{13}$$

$\sigma^{M\text{спин.}}_\lambda$ — сечение 2^λ — польного магнитно-спинового возбуждения:

$$\sigma^{M\text{спин.}}_\lambda = \left(\frac{2\pi Z_1 e}{hc}\right)^2 \frac{v_f}{v_i} \frac{s(s+1)}{3} \mu_p^2 B(M, \lambda) \frac{64\pi^2(\lambda+1)}{2\lambda+1} \times$$
$$\times \sum_{l_i l_f} (2l_i+1)(2l_f+1) \begin{pmatrix} l_i & l_f & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \left| M^{-\lambda-2}_{l_i l_f} \right|^2. \tag{14}$$

$B(M, \lambda)$ — приведенная вероятность переходов,

$M^{-\lambda-2}_{l_i l_f}$ — радиальный матричный элемент [3].

Формула (13) несколько отличается от выражения статьи Альдер и др. [3], поскольку там (в формулах II B-49, II B-50) допущена неточность, и аналогична выражению Биденхарна и др. [2].

$\sigma^{M\text{спин.}}_\lambda$ просто связано с $\sigma^E_{\lambda+1}$ и при спине частицы $s=1/2$ и $\lambda=1$ совпадает с результатом Биденхарна и Талера [6].

В заключение отметим, что при $s > 1/2$ (например, при возбуждении дейтронами) сечение возбуждения M1 практически обусловлено спиновой частью $\frac{\sigma_1^{M\text{спин.}}}{\sigma_1^{M\text{орб.}}}$. В этом легко убедиться, представив отношение в виде

$$\frac{\sigma_1^{M\text{спин.}}}{\sigma_1^{M\text{орб.}}} = \frac{s(s+1)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{C}-1\right)}$$

и воспользовавшись значениями $C = C(\xi, \eta)$, приведенными на рис. 2 работы [6].

Физический институт ГКАЭ
г. Ереван

Поступила 15 II 1964

Վ. Հ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ՄԻՋՈՒԿԻ ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԳՐԳՌՈՒՄԸ ԿԱՄԱՎՈՐ ՍՊԻՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԴԱՆԴԱՂ ՄԱՍՆԻԿՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատության մեջ ստացված է կամավոր սպին ունեցող դանդաղ մասնիկով միջուկի 2^{λ}*-պոլային էլեկտրամագնիսական գրգռման կտրվածքը։ Ցույց է տրված, որ մասնիկի սպինային մագնիսական մոմենտով պայմանավորված կտրվածքի մասը* M1 *գրգռման մեջ տալիս է հիմնական ներդրումը, երբ* $s > \frac{1}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. ГИТТЛ, М., 1953.
2. *Biedenharn L. C., Mc Hale J. L., Thaler R. M.* Quantum calculation of Coulomb excitation. Phys. Rev., **100**, 1955, 376.
3. *Alder K., Bohr A., Huus T., Mottelson B., Winther A.* Study of nuclear structure by electromagnetic excitation with accelerated ions. Rev. Mod. Phys., **28**, 1956, 432.
4. *Джрбашян В. А.* Возбуждение ядер медленными заряженными частицами. ЖЭТФ, **44**, 1963, 157.
5. *Джрбашян В. А.* Дисперсионная формула в теории возбуждения ядер. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, 2, 1963, 87.
6. *Biedenharn L. C., Thaler R. M.* Quantum calculation of Coulomb excitation. M1 and M1—E2 mixed transitions and classical approximation Phys. Rev., **104**, 1956, 1643.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Б. В. ХАЧАТРЯН

СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ В ПЕРИОДИЧЕСКИ-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

При равномерном движении осциллятора с частотой Ω вдоль оси z в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \Delta \cos\frac{2\pi}{l} z \tag{1}$$

наблюдается спектр излученных частот [1] (в квазиклассическом приближении)

$$\omega = \frac{n\Omega + \frac{2\pi v_0}{l} m}{1 - \frac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta} \tag{2}$$

(v_0 — скорость поступательного движения осциллятора, ϑ — угол излучения, отсчитываемый от направления скорости, $n,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots$).

Однако, спектр вида (2) в квазиклассическом приближении характерен не только для излучения осциллятора в среде с диэлектрической проницаемостью (1). Такой спектр частот излучается и в произвольной периодически-неоднородной среде

$$\varepsilon(\omega, z) = \varepsilon_0(\omega) + \varepsilon_1(z), \quad \varepsilon_1(z + nl) = \varepsilon_1(z) \tag{3}$$

зарядом, совершающим движение по закону*

$$\begin{aligned} v(t + nT) &= v(t) = v_z(t), \\ z(t + nT) &= z(t) + nz_0 \end{aligned} \tag{4}$$

$\left(l\right.$ — период среды, $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ — период движения, $z_0 = v_0 T$, v_0 — скорость поступательного движения $\left.\right)$.

Исходим из выражения для векторного потенциала в неоднородной среде [3]

* Как мне любезно сообщил Б. М. Болотовский, им и В. Е. Пафомовым была рассмотрена аналогичная задача для излучения при произвольном периодическом движении заряда в вакууме [2].

$$A(q, z) = \frac{ie}{4\pi^2 c\varkappa(z)} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \exp\left\{i\left(\omega t + \int_{z(t)}^{z} \varkappa(z')\,dz'\right)\right\} dt, \tag{5}$$

где

$$\varkappa(z) = \varkappa_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2\varkappa_0^2}\varepsilon_1(z)}, \tag{6}$$

$$\varkappa_0 = k_0 \cos\vartheta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta, \quad q = k_0 \sin\vartheta.$$

Так как $\varepsilon_1(z)$—периодическая функция, то корень в выражении (6) можно разложить в ряд Фурье, причем конечный результат не меняется, если для простоты предполагать, что $\varepsilon_1(z)$ — четная функция от координаты

$$\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2\varkappa_0^2}\varepsilon_1(z)} = a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \cos\frac{2\pi r}{l}z, \tag{7}$$

где a_0 и a_r — коэффициенты разложения.

Подставим разложение (7) в (5). Поскольку верхний предел интегрирования по z' не зависит от t, то, вынося соответствующие множители из-под знака интеграла по t, мы найдем, что вектор-потенциал пропорционален следующему выражению

$$R = \int v(t)\, e^{i(\omega t - a_0\varkappa_0 z(t))} \prod_{r=1}^{\infty} \exp\left\{-iA_r \sin\frac{2\pi r}{l} z(t)\right\} dt,$$

где $A_r = \frac{\varkappa_0 l a_r}{2\pi r}$.

Используя теперь известное равенство

$$e^{-ia\sin x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a)\, e^{-imx},$$

получаем

$$R = \int v(t) e^{i(\omega t - a_0\varkappa_0 z(t))} \prod_{r=1}^{\infty} \left\{\sum_m J_m(A_r) e^{-i\frac{2\pi r}{l}mz(t)}\right\} dt. \tag{8}$$

Выражение $\prod_{r=1}^{\infty}\left\{\sum_m \cdots\right\}$ можно представить в виде суммы членов следующего типа

$$\left(\prod_{r=1}^{\infty} J_{m_r}(A_r)\right) e^{-i\frac{2\pi M}{l}z(t)},$$

где $M = \prod_{r=1}^{\infty} r m_r$, а m_r — некоторые целые числа из набора $0, \pm 1$,

$\pm 2, \cdots$. Тогда R разобьется на сумму членов, пропорциональных интегралам вида

$$B=\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\, e^{i\left(\omega t-a_0\varkappa_0 z(t)-\frac{2\pi M}{l} z(t)\right)} dt. \tag{9}$$

Представляя интеграл (9) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{(n-1)T}^{nT} \cdots dt,$$

делая замену

$$t=(n-1)\, T+t'$$

и учитывая (4), получим

$$B=\int_0^T v(t) \exp\left\{i\left[\omega t-\left(a_0\varkappa_0+\frac{2\pi M}{l}\right) z(t)\right]\right\} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(n-1)\left[\omega T-\left(a_0\varkappa_0+\frac{2\pi M}{l}\right) z_0\right]\right\} dt.$$

Но

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{i(n-1)\left[\omega T-\left(a_0\varkappa_0+\frac{2\pi M}{l}\right) z_0\right]\right\}=$$

$$=2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left[\omega T-\left(a_0\varkappa_0+\frac{2\pi M}{l}\right) z_0-2\pi k\right]. \tag{10}$$

Формулу (10) легче всего проверить, разлагая периодическую функцию $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-2\pi k)$ в ряд Фурье [4]).

Отсюда следует, что излучение возможно только при выполнении условия

$$\omega T-\left(a_0\varkappa_0+\frac{2\pi M}{l}\right) z_0-2\pi n=0.$$

Разделив на T, получаем спектр частот

$$\omega=\frac{n\Omega+\frac{2\pi v_0}{l} M}{1-\frac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\, a_0 \cos\vartheta}. \tag{11}$$

При малых неоднородностях, когда $\frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2\varkappa_0^2} \ll 1$, формула (11) переходит в формулу (2), которая фактически получена также при малых неоднородностях.

Спектр частот (2) можно получить и исходя из законов сохранения энергии и импульса. Предварительно сделаем следующее замечание. Как указал И. М. Франк, излучение заряженной частицы, движущейся с периодической во времени скоростью в однородной среде, эквивалентно (в смысле спектра излучения) излучению равномерно движущейся частицы в неоднородной среде. Применительно к нашей задаче это замечание сводится к следующему: излучение заряженной частицы, движущейся со скоростью (4) в среде с диэлектрической проницаемостью (3) эквивалентно излучению частицы, движущейся с постоянной скоростью v_0 в среде, диэлектрическая постоянная которой является периодической функцией координаты и времени с периодами l и T соответственно (нестационарная и неоднородная среда).

Запишем теперь законы сохранения энергии и импульса при излучении частицей кванта $h\omega$ в нестационарной и неоднородной среде [5].

Изменение энергии частицы

$$\Delta E = h\omega - nh\Omega. \tag{12}$$

Изменение импульса

$$\Delta\vec{p} = h\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\,\vec{e} + mh\frac{2\pi}{l}\frac{\vec{l}}{l}, \tag{13}$$

$\vec{e}$ — направление распространения кванта, $\vec{l}$ — направление неоднородности.

Умножая (13) на $\vec{v}_0$ и используя известное соотношение $\vec{v}_0\Delta\vec{p} = \Delta E$ (мы предполагаем, что вследствие излучения скорость частицы изменилась мало), получим из (12) и (13)

$$\omega = \frac{n\Omega + \frac{2\pi m}{l^2}(\vec{l}\,\vec{v}_0)}{1 - \frac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\vartheta}, \tag{14}$$

где ϑ — угол между $\vec{v}_0$ и направлением распространения кванта; при $\vec{l}\parallel\vec{v}_0$ формула (14) переходит в формулу (2).

В заключение выражаю благодарность Б. М. Болотовскому и М. Л. Тер-Микаеляну за обсуждения.

Ереванский государственный университет

Поступила 30 I 1964

Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՍՊԵԿՏՐԸ ՊԵՐԻՈԴԻԿ-ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՊԵՐԻՈԴԻԿ ՇԱՐԺՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է կամայական պերիոդիկ-անհամասեռ միջավայրում կամայական պերիոդիկ արագությամբ շարժվող լիցքավորված մասնիկի կողմից արձակված ճառագայթման սպեկտրը։ Ստացված է, որ սպեկտրն ունի հետևյալ ընդհանուր տեսքը՝

$$\omega = \frac{n\Omega + \frac{2\pi v_0 m}{l^2}(\vec{l}\,\vec{v}_0)}{1 - \frac{v_0}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta}$$

որտեղ Ω — *մասնիկի տատանման հաճախականությունն է,* v_0-*ն՝ մասնիկի համընթաց շարժման արագությունը,* l-*ը՝ անհամասեռության պերիոդը և* θ-*ն՝* $\vec{v}_0$-*ի և քվանտի տարածման ուղղության միջև եղած անկյունը,* $n, m = 0, \pm 1 \pm 2 \cdots$։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хачатрян Б. В.* Об излучении осциллятора, движущегося в неоднородной среде. Известия высш. уч. зав., Радиофизика, **6**, 1963, 904.
2. *Болотовский Б. М., Пафомов В. Е.* Частное сообщение.
3. *Тер-Микаелян М. Л.* Излучение фотонов быстрыми частицами в неоднородной среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 2, 1961, 103.
4. *Лифшиц И. М., Каганов М. И.* Некоторые вопросы электронной теории металлов. УФН, **78**(3), 1962, 411.
5. *Барсуков К. А., Болотовский Б. М.* Излучение быстрых частиц в нестационарной неоднородной среде. ЖЭТФ, **45**, 1963, 303.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

П. А. БЕЗИРГАНЯН

ЗАВИСИМОСТЬ ДИФРАКЦИОННОЙ ШИРИНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ОТ РАЗМЕРОВ ОТРАЖАЮЩЕГО КРИСТАЛЛА

Как известно, размеры и форма области вокруг узлов обратной решетки, в пределах которой значения интенсивности дифракционного максимума существенны, зависят от размеров и внешней формы отражающего кристалла.

Границы этой области в случае параллелепипедального кристалла обычно определяются из следующих условий:

$$h-\frac{1}{N_1}\leqslant\xi\leqslant h+\frac{1}{N_1}, \qquad k-\frac{1}{N_2}\leqslant\eta\leqslant k+\frac{1}{N_2},$$

$$l-\frac{1}{N_3}\leqslant\zeta\leqslant l+\frac{1}{N_3}, \tag{1}$$

где h, k, l — целые числа,

$N_1, N_2\, N_3$ — числа атомов соответственно в направлениях $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,

ξ, η, ζ — компоненты вектора S/λ, параллельные трем осям обратной решетки, выраженные как кратные обратных трансляций $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$ и $\vec{c}^*$,

$\vec{s}=\vec{S}-\vec{S}_0$ — где $\vec{S}$ и $\vec{S}_0$ — единичные векторы направления распространения отраженной и падающей волн соответственно.

По (1) получается, что размер вышеуказанной области вокруг узла обратной решетки в данном направлении, а следовательно, и ширина дифракционного максимума в этом направлении, зависят только от размера кристалла в этом же направлении.

Таким образом, по (1) получается, что узлы обратной решетки при малых кристаллах, превратятся в параллелепипеды со сторонами

$$\frac{\vec{a}^*}{N_1}; \quad \frac{\vec{b}^*}{N_2}; \quad \frac{\vec{c}^*}{N_3};$$

величины которых обратно пропорциональны соответствующим величинам сторон кристаллического параллелепипеда.

Условия (1) получены на основании формулы для интенсивности

$$J = \frac{|\Phi_0|}{R^2} J_0,$$

где J_0—лауэвская функция интерференции

$$J_0 = \frac{\sin^2(\pi N_1 \xi)}{\sin^2(\pi\xi)} \frac{\sin^2(\pi N_2 \eta)}{\sin^2(\pi\eta)} \frac{\sin^2(\pi N_3 \zeta)}{\sin^2(\pi\zeta)}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и вытекающие из них выводы получены на основании следующих двух предположений:

1. Величины ξ, η и ζ в области вокруг узлов обратной решетки, в пределах которой значения интенсивности дифракционного максимума существенны, то есть в пределах (1), независимы друг от друга.

2. Волны, рассеянные различными атомами облученного объема в направлении точки наблюдения, считаются параллельными.

На основании этих предположений доказывается [1]—[4], что ширина спектральной линии (колец Дебая-Шеррера) зависит только от размеров кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей.

В данной работе рассматривается характер независимости величин ξ, η и ζ друг от друга и доказывается, что ширина спектральной линии (колец Дебая-Шеррера) зависит как от числа отражающих плоскостей (толщины кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей), так и от размеров отражающих плоскостей.

§ 1. Характер независимости величин ξ, η и ζ друг от друга в области узла обратной решетки

ξ, η и ζ можно выразить через параметры кристаллической решетки следующим образом:

$$\xi = \frac{a(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)}{\lambda},$$

$$\eta = \frac{b(\cos\beta_0 - \cos\beta)}{\lambda}, \quad (3)$$

$$\zeta = \frac{c(\cos\gamma_0 - \cos\gamma)}{\lambda},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — трансляции прямой решетки, α_0, β_0 и γ_0 — углы между вектором $\vec{S}_0$ и векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно, α, β и γ — углы между вектором $\vec{S}$ и векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ соответственно.

Как известно, между углами α, β и γ существует соотношение, которое в случае прямоугольных координат имеет вид

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad (4)$$

Следовательно, при постоянстве одного из этих углов с изменением второго третий не может не изменяться. Это означает, что при данном $\vec{S}_0$ с изменением одной из величин ξ, η и ζ остается неизменной только одна из остальных двух.

Выражение (2) представляет собой произведение трех множителей типа

$$\frac{\sin^2 NZ}{\sin^2 Z},$$

которые, согласно (3) и (4), независимы друг от друга: с изменением одного из углов α, β и γ, то есть с изменением направления рассеяния, остается неизменным только один из этих множителей.

„Размер" узла обратной решетки, например, в направлении $\vec{b}^*$ обычно определяется расстоянием от узла обратной решетки в направлении $\vec{b}^*$ до той точки, где интерференционная функция J_0 падает до нуля*. Эта точка от узла обратной решетки, согласно (2), находится на расстоянии $\vec{b}^*/N_2$, то есть „размер" узла обратной решетки в направлении $\vec{b}^*$ обратно пропорционален числу частиц кристалла в направлении $\vec{b}^*$.

Допустим, что плоскость векторов $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$ (плоскость падения) совпадает с плоскостью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда (3) примет вид

$$\xi = \frac{a(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}{\lambda},$$

$$\eta = \frac{b(\sin\alpha + \sin\alpha_0)}{\lambda}, \tag{5}$$

$$\zeta = 0.$$

Как видно из последнего, при данном α_0 с изменением множителя

$$\frac{\sin^2(\pi N_2 \eta)}{\sin^2(\pi\eta)}$$

изменяется и множитель

$$\frac{\sin^2(\pi N_1 \xi)}{\sin^2(\pi\xi)}. \tag{6}$$

Следовательно, если N_1 значительно больше N_2, то с изменением η (угла α) множитель (6), следовательно, и J_0 может принимать нулевое значение до того, как η примет значение

$$\eta = \frac{1}{N_2}.$$

---

* Интерференционная функция J_0 в узлах обратной решетки имеет максимальное значение.

то есть „размер“ узла обратной решетки в направлении $\vec{b}^*$ при данно

$\vec{S}_0$ может быть меньше, чем $\vec{b}^*/N_2$.

Таким образом, в данном случае „размер“ узла обратной решет

в направлении $\vec{b}^*$ не только зависит от размера кристалла в напра

лении $\vec{b}$, но и от размера кристалла в направлении $\vec{a}$.

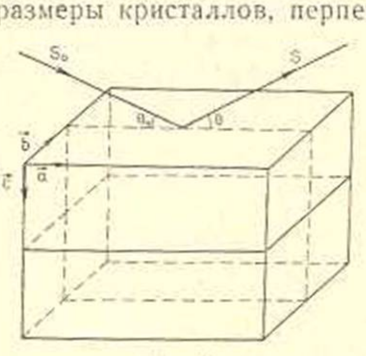
Выражения (5) показывают, что с изменением одной из велич ξ и η может остаться неизменной другая только в том случае, ког одновременно изменяются углы α и α_0.

Этот случай мы рассмотрим более детально.

§ 2. Зависимость ширины колец Дебая-Шеррера от размеров частиц

В работах [1]—[4] выведены различные формулы для определе ния ширины колец Дебая-Шеррера в зависимости от размеров кр сталлов (числа отражающих плоскостей).

По мнению авторов с помощью этих формул можно определи размеры кристаллов, перпендикулярные к отражающим плоскостям



Фиг. 1.

Докажем, что дифракционные шир ны колец Дебая-Шеррера зависят толь от наименьших размеров криста в плоскости падения и что с помощ дифракционных ширин этих колец мож определить только эти размеры.

Пусть плоскость падения (плоско

векторов $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$) совпадает с плос

стью векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и вектор $\vec{S}_0$

ставляет угол θ_0 с вектором $\vec{a}$ (

фиг. 1), тогда для интерференционной функции J_0 получим

$$J_0 = N_2^2 \frac{\sin^2\left[\dfrac{ak(\cos\theta - \cos\theta_0)}{2} N_1\right]}{\sin^2\left[\dfrac{ak(\cos\theta - \cos\theta_0)}{2}\right]} \cdot \frac{\sin^2\left[\dfrac{ck(\sin\theta + \sin\theta_0)}{2} N_3\right]}{\sin^2\left[\dfrac{ck(\sin\theta + \sin\theta_0)}{2}\right]},$$

где θ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{S}$.

J_0 принимает максимальное значение при $\theta = \theta_0$ и нулевое з чение при

$$\frac{ak(\cos\theta_1 - \cos\theta_0)}{2} = \pm\frac{\pi}{N_1}, \qquad (\theta = \theta_1)$$

или при

$$\frac{ck(\sin\theta_3+\sin\theta_0)}{2}=\pm\frac{\pi}{N_3}+ck\sin\theta. \qquad (\theta=\theta_3).$$

В случае

$$\theta_1=\theta_0+\Delta\theta_1 \quad \text{и} \quad \theta_3=\theta_0+\Delta\theta_3$$

из последних соотношений получим

$$\Delta\theta_1=\frac{\lambda}{N_1 a\sin\theta_0}=-\frac{\lambda}{L_1\sin\theta_0}, \tag{8}$$

$$\Delta\theta_3=\frac{\lambda}{N_3 c\cos\theta_0}=\frac{\lambda}{L_3\cos\theta_0}, \tag{9}$$

где L_1 и L_3 — размеры кристалла в направлении $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Как видно из (7)—(9), при

$$\cos\theta-\cos\theta_0=0,$$

то есть при постоянном ξ, что выполняется при одновременном увеличении или уменьшении углов θ_0 и θ, ширина спектральной линии определяется условием (9).

При условии же

$$\frac{ck(\sin\theta+\sin\theta_0)}{2}=n\pi=\text{const},$$

то есть при постоянном η, что выполняется тогда, когда с увеличением одной из величин θ или θ_0 другая уменьшается, ширина спектральной линии определяется условием (8). Угловая ширина кольца Дебая-Шеррера равна $2\Delta\theta_3$, если $\Delta\theta_3>\Delta\theta_1$, в противном случае, то есть в случае $\Delta\theta_3<\Delta\theta_1$, равна $2\Delta\theta_1$.

Из (8) и (9) следует

$$\frac{\Delta\theta_3}{\Delta\theta_1}=\frac{L_1\sin\theta_0}{L_3\cos\theta_0}=\frac{L_1}{L_3}\,\text{tg}\,\theta_0. \tag{10}$$

При $\theta_0=45^\circ$ из (10) получим

$$\frac{\Delta\theta_3}{\Delta\theta_1}=\frac{L_1}{L_3}. \tag{11}$$

Из (8)—(11) можно сделать следующие выводы:

1. Дифракционная ширина кольца Дебая-Шеррера зависит от угла Вульфа-Брега и от размеров кристалла только в плоскости падения и не зависит от размера кристалла в направлении нормали к плоскости падения.

2. Дифракционная ширина кольца Дебая-Шеррера определяется размером кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей до тех пор, пока

$$\frac{L_1}{L_3}\,\text{tg}\,\theta_0<1, \tag{12}$$

то есть когда $\Delta\theta_3<\Delta\theta_1$. В противном случае, то есть в случае

$$\frac{L_1}{L_3}\operatorname{tg}\theta_0 > 1, \tag{13}$$

дифракционная ширина кольца зависит от размеров отражающих плоскостей в направлении плоскости падения. Таким образом, получается, что в случае, когда удовлетворяется условие (12), ширина кольца зависит от числа отражающих плоскостей, а в случае удовлетворения условия (13) ширина кольца зависит только от размеров отражающих плоскостей в плоскости падения.

3. (12) и (13) показывают, что при очень малых углах ($\theta \ll 90°$) дифракционная ширина кольца определяется размером кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей, а при очень больших углах ($\theta \sim 90°$) зависит от размеров отражающих плоскостей в направлении плоскости падения.

4. Из (8) и (9) для линейной дифракционной ширины кольца Дебая-Шеррера получим

$$B_1 = R\cdot 2\Delta\theta_1 = \frac{2R\lambda}{L_1\sin\theta_0}, \tag{14}$$

$$B_3 = R\cdot 2\Delta\theta_3 = \frac{2R\lambda}{L_3\cos\theta_0}, \tag{15}$$

откуда для размеров кристалла получим

$$L_1 = \frac{2R\lambda}{B_1\sin\theta_0},$$

$$L_3 = \frac{2R\lambda}{B_3\cos\theta_0}.$$

Таким образом, в случае (12) с помощью ширины кольца Дебая-Шеррера определяется L_1, а в случае (13)—L_3.

Дифракционная полуширина кольца определяется из условий

$$\frac{1}{2} = \frac{J_0(\theta_0+\Delta\theta)}{J_0(\theta_0)} = \frac{1}{N_1 N_2}\,\frac{\sin^2\left[L_1\dfrac{\sin\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}{\sin^2\left[\dfrac{\sin\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}\,\frac{\sin^2\left[L_3\dfrac{\cos\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}{\sin^2\left[\dfrac{\cos\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}. \tag{16}$$

Как видно, дифракционная полуширина зависит как от L_1, так и от L_3, то есть от размеров кристалла в двух взаимоперпендикулярных направлениях в плоскости падения. Полуширина, определяемая формулой (16), гораздо меньше полуширины, определяемой только одним множителем

$$\frac{1}{2} = \frac{J_0(\theta_0+\Delta\theta)}{J_0(\theta_0)} = \frac{\sin^2\left[L_3\dfrac{\cos\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}{\sin^2\left[\dfrac{\cos\theta_0\cdot\Delta\theta}{2}k\right]}\,\frac{1}{N_3^2}. \tag{17}$$

(8), (9), (14) и (15) получены для частного случая, когда плоскость падения совпадает с плоскостью главных направлений $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В общем случае для отражающих плоскостей (hkl), если кристаллы имеют форму параллелепипеда со сторонами N_1a, N_2b и N_3c и если толщину кристалла в направлении нормали к отражающей плоскости характеризовать длиной отрезка, проходящего через две противоположные грани [10], то вместо (8) и (9) получим

$$\Delta\theta_1 = \frac{\lambda}{N_1 a_1 \sin\theta_0} = \frac{\lambda}{P\sin\theta_0}, \tag{18}$$

$$\Delta\theta_3 = \frac{\lambda}{\cos\theta_0} \frac{\sum}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}}, \tag{19}$$

где $\sum = \frac{h}{N_1 a^2}$, когда отрезок, характеризующий толщину кристалла, проходит через грани bc

$= \frac{k}{N_2 b^2}$, когда проходит через грани ac

$= \frac{k}{N_3 c^2}$, когда проходит через грани ab,

P — размер кристалла в плоскости падения в направлении отражающих плоскостей.

Как видно (9) и (19) совпадают соответственно с формулами Шеррера-Селякова [2], [3] и Лауэ [1].

Таким образом, неудовлетворительность формул Шеррера, Селякова и Лауэ в том, что в расчете ширины кольца в этих формулах не учтены соответственно условия (8) и (18).

Рассмотрим численный пример. Допустим излучение CuK_{α_1} ($\lambda = 1{,}5375$) падает на кристалл кальцита и отражается от плоскостей поверхности скола (111). Пусть размер кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей будет 10^{-4} *см*, а размер отражающих плоскостей в направлении плоскости падения 10^{-5} *см*. Имея в виду, что межплоскостные расстояния этих плоскостей при первом порядке отражения равны $d_1 = 3{,}0290$ A°, для угла Вульфа-Брэгга получим $\theta_1 = 14°29'$. Тогда согласно (8) и (9) для $\Delta\theta_1$ и $\Delta\theta_3$ получим

$$\Delta\theta_1 = \frac{1{,}5375\cdot 10^{-8}\ см}{10^{-4}\ см\cdot 0{,}25}, \qquad \Delta\theta_3 = \frac{1{,}5375\cdot 10^{-8}\ см}{10^{-5}\ см\cdot 0{,}25},$$

откуда $\Delta\theta_3 > \Delta\theta_1$, то есть в данном случае дифракционной шириной является $\Delta\theta_3$, которая на порядок больше, чем $\Delta\theta_1$.

Таким образом, в рассматриваемом случае дифракционная ширина обусловлена не размером кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей, а размером отражающих плоскостей в направлении плоскости падения. Наоборот, если с помощью дифракционной ширины спектральной линии определить размер кристалла, то в рассматриваемом случае определяется размер отражающих плоскостей в направлении плоскости падения, что на порядок меньше от размера кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей. Следовательно, если согласиться с мнениями авторов [1]—[4], то при определении размера кристалла в направлении нормали отражающих плоскостей в данном частном случае можно ошибиться на порядок.

§ 3. Более строгое решение задачи

При учете разности фаз, возникающих из-за непараллельности волн, рассеянных различными атомами облучаемого объема в направлении точки наблюдения M, для амплитуды отраженной волны вместо лауэвского выражения (см. [5]—[7])

$$A = \frac{f}{R}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)\sum \exp\left[-ik(\vec{S}-\vec{S}_0)\,\vec{r}\right]$$

получается выражение

$$A = \frac{f}{R}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)\sum \exp\left\{-ik\left[(\vec{S}-\vec{S}_0)\,\vec{r} + \frac{r^2}{2R} - \frac{(\vec{r}\vec{S})^2}{2R}\right]\right\}, \tag{20}$$

где $\vec{S}_0$ — единичный вектор, указывающий направление падения;

$\vec{S}$ — единичный вектор, указывающий направление точки наблюдения от начала координат O.

R — среднее расстояние облучаемых атомов от точки наблюдения. Падающая волна плоская.

Пусть одна из отражающих плоскостей совпадает с плоскостью XOY, а плоскость, содержащая $\vec{S}$ и $\vec{S}_0$, — с плоскосью XOZ. Если $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$ составляют с осью X углы соответственно θ_0 и θ, то для амплитуды рассеянной волны в точке наблюдения M получим

$$A = \frac{f}{R}\frac{e^2}{mc^2}\sum \exp\left\{-ik\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)\,x + (\sin\theta - \sin\theta_0)\,z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{y^2}{2R} + \frac{x^2\sin^2\theta}{2R} + \frac{z^2\cos^2\theta}{2R} - xz\sin 2\theta\right]\right\}. \tag{21}$$

Заменяя суммирование интегрированием, для амплитуды рассеянной волны получим (при плоской падающей волне)

$$A \; \frac{f}{R}\frac{e^2}{mc^2}\,n\int_0^U\int_0^V\int_0^W \exp\left\{-ik\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)\,x + (\sin\theta - \sin\theta_0)\,z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{y^2}{2R} + \frac{x^2\sin^2\theta}{2R} - xz\sin 2\theta\right]\right\} dxdydz, \tag{22}$$

где n — число атомов в единице объема.

При точечном источнике* для этой же амплитуды получим (см. [8])

$$A = \frac{f}{R_1 R_2} \frac{e^2}{mc^2} n \iiint \exp\left\{-ik\left[-\vec{r}(\vec{S}-\vec{S}_0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) - \frac{(\vec{S}_0\vec{r})^2}{2R_1} - \frac{(\vec{S}\vec{r})^2}{2R_2}\right]\right\} dxdydz. \quad (23)$$

Если ориентировка векторов $\vec{S}$ и $\vec{S}_0$ относительно координатных осей x, y, z та же самая, что и в случае падающей плоской волны, то из (23) получим

$$A = \frac{f}{R_1 R_2} \frac{e^2 n}{mc^2} \int_0^U \int_0^V \int_0^W \exp\left\{-ik\left[(\cos\theta_0 - \cos\theta)x + (\sin\theta_0 - \sin\theta)z + \right.\right.$$

$$+ \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{x^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta_0}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}\right) -$$

$$\left.\left. - xz(\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta)\right]\right\} dxdydz. \quad (24)$$

В (22) и (24) U, V, W размеры кристалла соответственно в направлениях x, y и z.

Если плоскость падения (содержащую $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$) вращать вокруг оси z так, чтобы она совпадала с плоскостью zoy, то для амплитуды рассеянной волны получим:

при падающей плоской волне

$$A = \frac{f}{R} \frac{e^2 n}{mc^2} \int_0^U \int_0^V \int_0^W \exp\left\{-ik\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)y + (\sin\theta + \sin\theta_0)z + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2\sin^2\theta}{2R} + \frac{z^2\cos^2\theta}{2R} - xz\sin 2\theta\right]\right\} dxdydz, \quad (25)$$

при падающей сферической волне:

$$A = \frac{f}{R_1 R_2} \frac{e^2 n}{mc^2} \int_0^U \int_0^V \int_0^W \exp\left\{-ik\left[(\cos\theta - \cos\theta_0)y + (\sin\theta - \sin\theta_0)z + \right.\right.$$

$$+ \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta_0}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_1}\right) -$$

$$\left.\left. - yz(\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta)\right]\right\} dxdydz. \quad (26)$$

---

* Естественные источники, являющиеся совокупностями точечных источников (атомы можно считать точечными источниками рентгеновских лучей).

Нетрудно догадаться, что (22) и (24) в функции от θ определяют „размеры" узла обратной решетки в направлении $\vec{a}^*$ при плоской и сферической падающих волнах соответственно.

Таким же образом (25) и (26) определяют „размеры" узла обратной решетки в направлении $\vec{b}^*$ при плоской и сферической падающих волнах соответственно. Для определения „размера" узла обратной решетки в направлении $\vec{c}^*$ надо плоскость падения (плоскость векторов $\vec{S}_0$ и $\vec{S}$) вращать вокруг оси ox на $180°$ и в выражениях (22) и (24) x заменить через z, а z через x:

в случае падающей плоской волны

$$A=\frac{f}{R}\frac{e^2n}{mc^2}\int\limits_0^U\int\limits_0^V\int\limits_0^W \exp\left\{-ik\left[(\sin\theta-\sin\theta_0)x+(\cos\theta-\cos\theta_0)z+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{y^2}{2R}+\frac{x^2\cos^2\theta}{2R}-\frac{z^2\sin^2\theta}{2R}-xz\sin 2\theta\right]\right\}dxdydz, \tag{27}$$

в случае падающей сферической волны

$$A=\frac{f}{R_1R_2}\frac{e^2n}{mc^2}\int\limits_0^U\int\limits_0^V\int\limits_0^W \exp\left\{-ik\left[(\sin\theta-\sin\theta_0)x+(\cos\theta-\cos\theta_0)z+\right.\right.$$

$$+\frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{\cos^2\theta_0}{R_1}+\frac{\cos^2\theta}{R_2}\right)+\frac{z^2}{2}\left(\frac{\sin^2\theta_0}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2}\right)-$$

$$\left.\left.-xz(\sin 2\theta_0+\sin 2\theta)\right]\right\}dxdydz. \tag{28}$$

Как видно из (22)—(28), как при плоской, так и при сферической падающих волнах при изменении размера кристалла в одном направлении изменяются „размеры" узла обратной решетки во всех направлениях. Действительно, например, из (22), (25) и (27) видно, что при изменении размера кристалла в направлении z „размер" узла обратной решетки, а следовательно, и размеры дифракционного максимума изменяются не только в направлении $\vec{c}^*$, но и в направлениях $\vec{a}^*$ и $\vec{b}^*$.

Вышеизложенное можно более наглядно показать численным примером. Для этого определив из (28) $|A|^2$ и приведя интегралы к виду интегралов Френеля, можно построить график зависимости $|A|^2$ от Θ.

Такие расчеты приведены в [9], и здесь не будем повторять их.

Выводы

Из вышеприведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. Дифракционная ширина спектральной линии при неподвижном монокристалле и плоско-параллельном падающем пучке зависит только от наибольшего размера кристалла в плоскости падения, и с помощью этих ширин спектральных линий можно определить только указанный размер.

2. Дифракционная ширина спектральной линии при плоскопараллельном падающем пучке и качающем кристалле или при расходящемся падающем пучке и неподвижном кристалле зависит от наименьшего размера кристалла в плоскости падения. В этом случае с помощью дифракционных ширин спектральных линий можно определить только этот наименьший размер кристалла.

3. Дифракционная ширина колец Дебая-Шеррера зависит от наименьших размеров кристалла в плоскости падения, следовательно, с помощью дифракционной ширины не всегда определяются размеры кристаллов в направлении нормали отражающих плоскостей (см. [8]–[13]).

Ереванский государственный
университет

Поступила 17 XII 1963

Գ. Ա. ԲԵԶԻՐԳԱՆՅԱՆ

ՍՊԵԿՏՐԱԼ ԳԾԻ ԴԻՖՐԱԿՑԻՈՆ ԼԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ԿԱԽՈՒՄԸ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՉԱՓԵՐԻՑ

Ամփոփում

Սովորաբար համարում են, որ հակադարձ ցանցի հանգույցների չափերը հակադարձ համեմատական են բյուրեղի չափերին։

Տվյալ աշխատության մեջ ապացուցվում է, որ

1. ռենտգենյան սպեկտրալ գծի դիֆրակցիոն լայնությունը անշարժ բյուրեղի և հարթ զուգահեռ ընկնող ճառագայթների դեպքում կախված է միայն անկման հարթության մեջ բյուրեղի ամենամեծ չափից և սպեկտրալ գծի այդ լայնության միջոցով կարելի է որոշել միայն վերոհիշյալ չափերը,

2. հարթ զուգահեռ սկզբնական փնջի և տատանվող բյուրեղի կամ տարամիտվող սկզբնական փնջի և անշարժ բյուրեղի դեպքում սպեկտրալ գծի դիֆրակցիոն լայնությունը կախված է անկման հարթության մեջ բյուրեղի փոքրագույն չափից։ Այդ դեպքում սպեկտրալ գծի դիֆրակցիոն լայնության միջոցով որոշվում է բյուրեղի փոքրագույն չափը,

3. Դեբայ-Շեռերի օղակների լայնությունը կախված է անկման հարթության մեջ բյուրեղի ամենափոքր չափերից, հետևաբար, օղակի դիֆրակցիոն լայնության միջոցով միշտ չէ, որ որոշվում է բյուրեղի չափը անդրադարձնող հարթությունների ուղղահայաց ուղղությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Laue M., Lorentz.* Factor und Intensitätsverteilung in Debey-Scherer Ringen. Zs. f. kristallogr., **64**, 1926, 115.
2. *Scherrer P.*, Nachr. von d. könig̈. Ges. d. Wiss. zu Gött, **98**, 1918.
3. *Селяков Н.* Рентгенографический метод определения размеров кристаллов в мелкокристаллическом веществе. Ж. Р. Ф. Х. О., ч. физ., **56**, 71, Л., 1924.
4. *Колпинский В. А.* Элементарный вывод выражения для ширины кольца Дебай--Шеррера. ЖЭТФ, **6**, вып. 8, 1936.
5. *Безирганян П. А.* Диссертация, МГУ, 1954.
6. *Безирганян П. А., Боровский И. Б.* Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. Труды Ереванского гос. университета, серия физ-мат., **48**, вып. 2, 1955.
7. *Безирганян П. А.* Рассеяние рентгеновских лучей в газах, жидкостях и аморфных твердых телах. ЖТФ, вып. 6, 1962.
8. *Безирганян П. А., Акритов А. Г.* Зависимость интенсивности отраженных волн от размеров отражающего монокристалла. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, вып. 3, 1962.
9. *Безирганян П. А., Никоян Ж. О.* Зависимость ширины дифракционных максимумов от размеров кристалла. Кристаллография, **7**, вып. 3, 1963.
10. *Китайгородский А. И.* Рентгеноструктурный анализ мелкокристаллических и аморфных тел. М., 1952.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. В. БАДАЛЯН

ПОЛУЧЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ СИСТЕМЕ

1. Ныне в электронной оптике широкое применение получили аксиально-симметричные магнитные поля, создаваемые короткими, безжелезными катушками. Такие соленоидальные катушки, однако, обладают рядом недостатков: заметная сферическая абберация, не лучшая форма аксиально-симметричного поля, большое рассеянное поле, отсутствие экранировки от посторонних полей и, наконец, значительная потребляемая мощность и вес.

Кельман, Перегуд и Скопина [1] предложили другую конструкцию магнитной линзы, не обладающую перечисленными недостатками. В этом случае поле, имеющее наперед заданное осевое распределение, создается катушкой с распределенной намоткой. Экранирование линзы осуществляется с помощью железной трубы, надеваемой поверх обмотки, причем при расчете обмотки ферромагнетик не принимается во внимание.

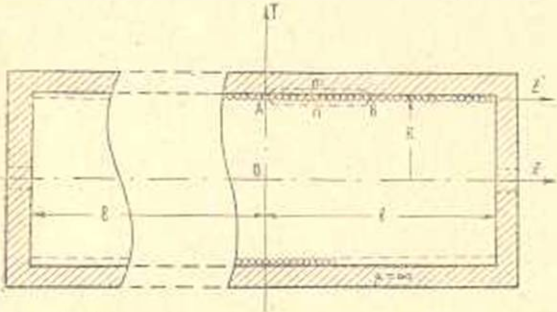
В недавно вышедшей работе Захарова [2] предлагается интересный численный метод определения распределения плотности ампер-витков по длине воздушной катушки для получения заданного осевого распределения магнитного поля.

Как в упомянутых, так и в других работах расчет поля ведется с использованием закона Био-Савара, причем решение обратной задачи проводится или с применением обратных преобразований Лапласа (см. [3]), или используя разные искусственные приемы. В настоящей работе сделана попытка подойти к решению таких задач иначе, с непосредственным учетом присутствия железа. Задача будет решаться привлечением теории скалярного магнитного потенциала для рассматриваемой электромагнитной системы при определенных граничных условиях (см. [4—6]).

2. Пусть имеется ферромагнитный цилиндр конечной длины с конечной толщиной стенок. Будем рассматривать несколько упрощенный вариант, когда торцы цилиндра также закрыты железом* (фиг. 1). Непосредственно на внутренней боковой поверхности железного ци-

* Просверление отверстий малого диаметра в торцах магнитной линзы для пропускания пучка частиц, по-видимому, не внесет заметных искажений магнитного поля.

линдра „наматываются" круговые ампер-витки. Ток во времени постоянный. Требуется, задаваясь определенной плотностью распределения ампер-витков по длине магнита, $n(z')$, найти соответствующее аксиальносимметричное магнитное поле в полости внутри сердечника. Выбираем цилиндрическую систему координат с началом в центре поля. Магнитное поле внутри линзы характеризуется скалярным магнитным потенциалом ψ, являющимся решением уравнения Лапласа. В цилиндрической системе координат при аксиальной симметрии



Фиг. 1. Продольный разрез магнита и система координат.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0. \tag{1}$$

Данное дифференциальное уравнение решается методом разделения радиальных и осевых переменных. Решение уравнения для физического реального поля (без расходимостей) имеет вид [4]

$$\psi=(A\cos\lambda z+B\sin\lambda z)\,I_0(\lambda r), \tag{2}$$

где $I_0(\lambda r)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента,

λ — параметр разделения (собственное значение уравнения),

A, B — постоянные интегрирования.

Для определения постоянных, а также спектра значений λ, применим граничные условия:

а) при $z=0$, $H_r=-\dfrac{\partial\psi}{\partial r}=0$ из-за симметрии задачи, отсюда $A=0$,

б) при $z=l$ (см. фиг. 1) силовые линии из-за условия $\mu\gg1$ входят в торцы перпендикулярно к железу (железо как эквипотенциальная поверхность), поэтому также

$$H_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r}=0.$$

В результате этого имеем

$$\sin\lambda l=0, \tag{3}$$

откуда следует спектр возможных значений λ:

$$\lambda=\frac{k\pi}{l},\quad \text{где}\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$$

Полное выражение для магнитного скалярного потенциала будет, очевидно, иметь вид

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi z}{l} I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right). \tag{4}$$

Амплитуды B_k определяются методом отыскания коэффициентов Фурье-компонент.

Действительно, выражение потенциала на цилиндрической граничной ($r = R$) поверхности поля дает

$$\psi_{z'} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi z'}{l} I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right) = -0{,}4\pi N(z'). \tag{5}$$

Нетрудно показать, что функция $N(z')$ есть не что иное как интегральное распределение ампер-витков на граничной цилиндрической поверхности.

В самом деле, руководствуясь соображениями, аналогичными в работе [5], для контура $AmBn$ (фиг. 1) можно написать

$$\oint_{AmBn} \vec{H} d\vec{l} = 0{,}4\pi \int_{AB} n(z')\, dz', \tag{6}$$

где коэффициент $0{,}4\pi$ введен из-за применения практической системы единиц.

Далее, допуская для ферромагнетика $\mu \gg 1$ и пренебрегая интегралом $\int_{AmB} \vec{H} d\vec{l}$, получим

$$\int_{BnA} \vec{H} d\vec{l} = \psi_A - \psi_B = 0{,}4\pi \int_{AB} n(z')\, dz'. \tag{7}$$

Потенциал в точке $A\,(z' = 0)$ можно для удобства приравнять нулю, тогда окончательно

$$\psi_B = \psi_{z'} = -0{,}4\pi \int_0^{z'} n(z')\, dz' = -0{,}4\pi N(z'). \tag{8}$$

Умножая обе части равенства (5) на $\sin \frac{k\pi z'}{l}$ и интегрируя по z' от 0 до l, в результате ортогональности тригонометрических функций получим

$$B_k = -\frac{2 \cdot 0{,}4\pi}{l \cdot I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z')\, dz'. \tag{9}$$

Окончательно, полный вид скалярного магнитного потенциала будет

$$\psi = -\frac{0{,}8\pi}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \sin \frac{k\pi z}{l} \frac{I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)} \int_0^l \sin \frac{k\pi z'}{l} N(z')\, dz'. \tag{10}$$

Составляющие напряженности магнитного поля внутри линзы будут соответственно

$$H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{0{,}8\pi}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\sin\frac{k\pi z}{l}\,\frac{I_0'\left(\frac{k\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)}\int_0^l \sin\frac{k\pi z'}{l}N(z')\,dz', \quad (11)$$

$$H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{0{,}8\pi}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi z}{l}\,\frac{I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)}\int_0^l \sin\frac{k\pi z'}{l}N(z')\,dz'. \quad (12)$$

Последние формулы дают возможность по заданному распределению плотности ампер-витков $n(z') = \frac{dN(z')}{dz'}$ определить поле в любой точке пространства внутри магнита.

3. На практике наиболее ценна постановка обратной задачи: найти тот закон распределения плотности ампер-витков, при котором получается заданное требуемое поле. При этом, разумеется, речь идет о получении полей, которые заведомо удовлетворяют уравнению Лапласа и граничным условиям.

Для решения обратной задачи воспользуемся граничным условием (8). Дифференцируя его по z', получим

$$\frac{\partial\psi_{z'}}{\partial z'} = -0{,}4\pi n(z'), \quad (13)$$

но $\frac{\partial\psi_{z'}}{\partial z'} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{r=R} = -H_z(R, z')$, следовательно,

$$n(z') = \frac{1}{0{,}4\pi}H_z(R, z'). \quad (14)$$

Получается простая и наглядная связь между распределением ампер-витков и формой поля.

Отметим, что имея аналитическое выражение одной из составляющих магнитного поля, вторую составляющую мы автоматически найдем из условия $\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, а именно

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = \frac{\partial H_r}{\partial z}. \quad (15)$$

4. В качестве примера рассмотрим получение поля типа

$$H_z(r, z) = H_0 I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)\cos\frac{k\pi z}{l}, \quad (16)$$

где H_0 — поле в центре, $k = 0, 1, 2, \cdots$.

В соответствии с (15), радиальная составляющая поля

$$H_r(r, z) = H_0 I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)\sin\frac{k\pi z}{l}. \tag{17}$$

Выбранное поле удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, следовательно, для него можно применить вышевыведенные соотношения. Согласно уравнению (14), распределение ампер-витков для получения заданного поля будет

$$n(z')\,dz' = \frac{H_0}{0{,}4\pi} I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)\cos\frac{k\pi z'}{l}\,dz'. \tag{18}$$

При разных значениях параметра k получаем разные поля. Действительно,

а) $k = 0$, $H_z = H_0$, $H_r = 0$ — однородное аксиальносимметричное поле (фиг. 2а),

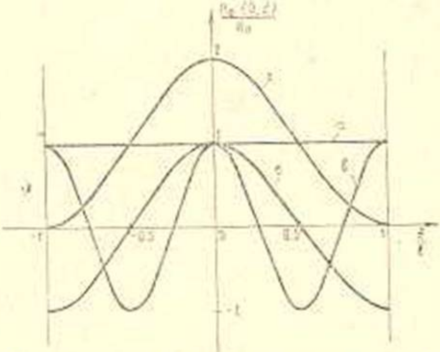
а) $k = 1, 2, \cdots$ получаем синусоидальные периодические поля разной кратности с переменным знаком, причем поле с радиусом возрастает по Бесселю (фиг. 2б, в).

Можно рассматривать более сложный случай, когда выбранное поле представлено в виде суммы нескольких членов:

$$H_z(r, z) = \sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0\left(\frac{k\pi r}{l}\right)\cos\frac{k\pi z}{l}. \tag{19}$$

Соответственно

$$H_r(r, z) = \sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0'\left(\frac{k\pi r}{l}\right)\sin\frac{k\pi z}{l}. \tag{20}$$



Фиг. 2. Различные формы распределения z-компоненты поля на оси магнита (обозначения—в тексте).

Согласно уравнению (14), требуемое распределение ампер-витков

$$n(z')\,dz' = \frac{1}{0{,}4\pi}\sum_{k=m}^{k=n} H_0 I_0\left(\frac{k\pi R}{l}\right)\cos\frac{k\pi z'}{l}\,dz'. \tag{21}$$

Например, при $m = 0$, $n = 1$ имеем

$$H_z(r, z) = H_0\left[1 + I_0\left(\frac{\pi r}{l}\right)\cos\frac{\pi z}{l}\right]. \tag{22}$$

Отсюда, распределение поля на оси ($r = 0$) будет

$$H_z(0, z) = H_0\left(1 + \cos\frac{\pi z}{l}\right), \quad H_r(0, z) = 0, \tag{23}$$

то есть плавное „колоколообразное“ распределение по оси без перехода через нуль (фиг. 2г).

Возможны также другие виды полей, которые мы здесь не будем рассматривать.

5. Резюмируя, можно сказать, что для рассмотренной замкнутой линзы точно можно рассчитать магнитное поле при заданном распределении ампер-витков, или наоборот, создавать определенный класс аксиальносимметричных магнитных полей с помощью соответствующего распределения ампер-витков.

Рассмотренные пространственно-модулированные поля находят и могут найти применение во многих областях электронной оптики: разного рода фокусировки, пространственная модуляция электронного пучка [7] и т. д.

Решение задачи для магнитной линзы с открытыми (не железными) торцами требует специального рассмотрения.

Автор приносит свою благодарность А. Ц. Аматуни, В. А. Джрбашяну, М. А. Задояну, Ю. Ф. Орлову и В. А. Шахбазяну за интерес к работе, ее обсуждение и помощь.

Физический институт ГКАЭ
г. Ереван
Поступила 21 II 1964

Հ. Վ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՔՍԻԱԼ-ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՍՏԱՑՈՒՄԸ ՖԵՐՐՈՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ օգտագործելով սկալյար մագնիսական պոտենցիալի ապարատը որոշակի սահմանային պայմանների դեպքում, դիտարկված է հաստատուն աքսիալ-սիմետրիկ մագնիսական դաշտերի ստացումը փակ ֆերրոմագնիսական սիստեմում:

Ստացված են դաշտի կոմպոնենտների և երկաթի ներքին սահմանային գլանային մակերևույթի վրա ամպեր-գալարների բաշխման օրենքի միջև առնչություններ: Ասվածը ցուցադրված է մի շարք գործնական օրինակների վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кельман В. М., Перегуд Б. П., Скопина В. И.* Короткая магнитная линза с распределенной намоткой. ЖТФ, **29**, 1959, 1219.
2. *Zacharov B.* A method for the design of axially symmetric magnetic fields for image tube systems. Nucl. instrum. and meth., **17**, 1962, 132.
3. *Глазер В.* Основы электронной оптики, § 36, М., 1957.
4. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., 1948.
5. *Бадалян Г. В.* Получение постоянных магнитных полей заданной формы с помощью неявнополюсной магнитной системы. ЖТФ, **33**, 1963, 345.
6. *Азатян А. А., Бадалян Г. В., Ерицян Г. Н.* Получение постоянных магнитных полей заданной формы. ПТЭ, № 3, 1963.
7. *Маринин В. Г.* Движение электронов в магнитном поле с пространственной модуляцией. ЖТФ, **33**, 1963, 518.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 5, 1964 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Б. В. ХАЧАТРЯН, С. С. ЭЛБАКЯН

К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯДА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Излучение заряда, движущегося в неоднородной среде, рассма-
тривалось в ряде работ (см., например, [1, 2]).

В работе [1] получена формула для излученной электроном энер-
гии при равномерном движении его вдоль направления изменения
свойств среды $\Big($диэлектрическая проницаемость среды дается выра-
жением $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta \cos \frac{2\pi}{l} z$, $\frac{\Delta}{\varepsilon_0} \ll 1\Big)$.

В работе [2] получена формула для случая движения заряда
под углом α к направлению изменения свойств среды.

Как работа [1], так и работа [2] выполнены в приближении гео-
метрической оптики, которое допускает получение результатов с точ-
ностью до членов порядка $\frac{\lambda}{l} \ll 1$ включительно, где $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega \sqrt{\varepsilon_0}}$
- длина излученной волны, l — период неоднородности среды.

Нами обнаружено, что при $\alpha = 0$ формулы, полученные в [2],
не совпадают с соответствующими формулами работы [1], при этом,
если в формулах работы [2] положить $\varepsilon_0 \beta^2 = 1$, то интенсивность ре-
зонансного излучения обращается в нуль (см. формулу (9) работы
[2]), в то время как согласно работе [1] она пропорциональна $\frac{\lambda}{l}$. Пре-
небрежение членами порядка $\frac{\lambda}{l}$, сделанное в [2], необоснованно:
пренебрегать членами порядка $\frac{\lambda}{l}$ можно лишь при выполнении ус-
ловия $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_0 \beta^2}\right) \gg \frac{\lambda}{l}$. Если же $1 - \frac{1}{\varepsilon_0 \beta^2} \leqslant b \frac{\lambda}{l}$, где b — некоторое
число, по абсолютной величине меньшее единицы, то согласно [2],
излучение пропорционально $b \frac{\lambda}{l}$ и исчезает при $b = 0$. Согласно же
[1] оно пропорционально $(b + 2m) \frac{\lambda}{l}$ (для m-ой гармоники). Что ка-

сается членов порядка $\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2$, которые входят в формулу для излучения работы [1], то это есть превышение точности квазиклассического приближения, и при исследовании они, естественно, не должны рассматриваться.

Члены порядка $\frac{\lambda}{l}$, которые имеют существенное значение для величины спектральной плотности излучения и пропущены в [2], можно получить при учете зависимости ε и $\varkappa$ от z в формуле (5) работы [2], в которой, для простоты, полагаем $\alpha = 0$. Разлагая $\frac{1}{\varepsilon(z)}$, $\sqrt{\varepsilon(z)}$ и $\frac{1}{\sqrt{\varkappa(z)}}$ в ряд по степеням $\frac{\Delta}{\varepsilon_0}$ и вычисляя работу, совершаемую полем над движущейся частицей, получим следующую формулу для величины излученной энергии за все время пролета заряженной частицы:

$$dI = T\frac{e^2 v}{c^2}\,\omega d\omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(a)\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon_0\beta^2}\left[1 - \frac{2\pi m v}{\omega l}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0\beta^2} + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_0\beta^2)\right)\right]\right\}, \tag{1}$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad a = \frac{\omega^2 l\Delta}{4\pi c^2 \varkappa_0}, \qquad \varkappa_0 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta.$$

Заметим, что учет зависимости ε и $\varkappa$ от z в формуле (4.3) работы [1], также приводит к замене формулы (4.6) этой же работы формулой (1). Однако, поскольку линейные члены порядка $\frac{\lambda}{l}$ существенны только при $\varepsilon_0\beta^2 \sim 1$, то формула (4.6) работы [1] фактически не отличается от (1).

На наш взгляд кажется более целесообразным рассчитывать величину излучаемой энергии, используя формулу, аналогичную формуле (3.16) работы [1] $\Big($поскольку члены порядка $\frac{\lambda}{l}$ учитываются при этом „автоматически"$\Big)$. В результате получается следующее выражение для излучения при наклонном пролете заряда

$$dI = T\frac{e^2 v\omega d\omega}{2\pi^2 c\cos\alpha}\sum_{\substack{m=-\infty\\ i=1,2}}^{\infty}\int \frac{J_m^2(a_i)\, q_i\left\{1 - \frac{1}{\varepsilon_0\beta^2}\left(1 - \frac{2\pi m v}{l\omega}\cos\alpha\right)^2\right\}}{\left|q_i(1+\Phi^2) - \Phi\left(\frac{\omega}{v\cos\alpha} - \frac{2\pi m}{l}\right)\right|}\,d\varphi, \tag{2}$$

где

$$q_l = \frac{\left(\frac{\omega}{v\cos\alpha} - \frac{2\pi}{l}m\right)\Phi \pm \sqrt{(1+\Phi^2)\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0 - \left(\frac{\omega}{v\cos\alpha} - \frac{2\pi}{l}m\right)^2}}{1+\Phi^2},$$

$$\Phi = \sin\varphi \operatorname{tg}\alpha$$

(ср. с формулой (10) работы [2]).

Два значения q_l при фиксированном φ соответствуют тому, что при одном и том же угле между волновым вектором и скоростью частицы возможны два угла между осью z и волновым вектором.

В заключение выражаем благодарность М. Л. Тер-Микаеляну за ценные обсуждения.

Ереванский государственный
университет
Физический институт ГКАЭ

Поступила 14 VII 1964

Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Ս. Ս. ԷԼԲԱԿՅԱՆ

ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԼԻՑՔԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ստացված է ճառագայթման սպեկտրալ ինտենսիվության ճշգրիտ բանաձևը այն դեպքի համար, երբ լիցքը z *առանցքի նկատմամբ* α *անկյան տակ հավասարաչափ շարժվում է* $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\cos\frac{2\pi}{l}z$ *դիէլեկտրիկ թափանցելիություն ունեցող միջավայրում։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Микаелян М. Л.* Излучение фотонов быстрыми частицами в неоднородной среде. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, 103, 1961.
2. *Эйдман В. Я.* Об излучении зарядов в неоднородной среде. Известия высших уч. зав., „Радиофизика", **5**, 1962, 897.