

А. Е. Бадалян

Об одной вариационной задаче

С ускорительной техникой, а также с некоторыми математическими вопросами связана следующая вариационная задача: дана квадратная матрица порядка n

$$A = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Пусть Φ является множеством всевозможных взаимно-однозначных отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя. Требуется найти

$$\min_{\varphi \in \Phi} \max_i |a_{i\varphi(i)}| \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

и отображение φ , для которого достигается указанный минимум*.

Решение.

Набор элементов $a_{i\varphi(i)} < a_{1\varphi(1)}, \dots, a_{i\varphi(i)}, \dots, a_{n\varphi(n)} >$ назовем набором матрицы A . Очевидно, этот набор содержит из каждой строки и из каждого столбца матрицы A один и только один элемент. Между множествами

$$R = \{ < a_{1\varphi(1)}, \dots, a_{i\varphi(i)}, \dots, a_{n\varphi(n)} > \} \text{ и } \Phi$$

имеет место взаимно однозначное соответствие. Количество элементов этих множеств равно $n!$

Обозначим через m_1 максимальный элемент матрицы A , а множество наборов матрицы, содержащих элемент m_1 — через R_1 .

Обозначим через m_2 максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных m_1 , а множество наборов, содержащих m_2 и не содержащих m_1 , — через R_{02} .

Обозначим через m_3 максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных m_1 и m_2 , а множество наборов, содержащих m_3 и не содержащих m_1 и m_2 , — через R_{003} и, вообще, обозначим через m_k максимум среди элементов матрицы A , за исключением элементов, равных m_1, m_2, \dots, m_{k-1} , а множество наборов, содержащих m_k и не содержащих m_1, m_2, \dots, m_{k-1} , — через $R_{0 \dots 0k}^{k-1}$. Яс-

но, что множества $R_1, R_{02}, \dots, R_{0 \dots 0k}^{k-1}$ попарно не пересекаются.

* На эту задачу обратил мое внимание Р. Оганян.

Теорема. Для того, чтобы $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\bigcup_{i=1}^k R_{0 \dots 0 i}^{i-1} = R. \quad (1)$$

Действительно, если $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$, то в R не существует набор, максимальный элемент которого меньше m_k . Значит, для всех наборов из R максимальный элемент $\geq m_k$, то есть каждый набор из R находится среди слагаемых левой части равенства (1). Обратно, если в R существует набор, который не содержится в левой части равенства (1), то максимальный элемент этого набора $< m_k$, то есть

$$m_k \neq \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}.$$

Количество наборов в множестве $R_{0 \dots 0 i}^{i-1}$ обозначим через $S_{0 \dots 0 i}^{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, k$).

Тогда имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^k S_{0 \dots 0 i}^{i-1} = n!, \quad (1')$$

если $m_k = \min_{\varphi} \max_i \{a_{i\varphi(i)}\}$.

Введем следующее обозначение: пусть $R_{i_1 \dots i_l \dots i_k}$ означает множество наборов, содержащих

$$P(i_1 \neq 0) \cdot m_1 \& P(i_2 \neq 0) m_2 \& \dots \& P(i_l \neq 0) m_l \& \dots \& P(i_k \neq 0) m_k,$$

где считается

$$P(i_l \neq 0) \cdot m_l = \begin{cases} m_l & \text{при } P(i_l \neq 0) = 1 \\ \wedge & \text{при } P(i_l \neq 0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1, \\ R_{02} &= R_2 - R_{12}, \\ R_{003} &= R_3 - R_{013} - R_{103} - R_{123}, \\ &\dots \\ R_{0 \dots 0 k}^{k-1} &= R_k - R_{02 \dots k-1k} - \dots - R_{12 \dots k-20k} - R_{003 \dots k-1k} - \\ &\dots - R_{133 \dots k-300k} - \dots - R_{0 \dots 0 i+1 \dots k} - \dots - R_{12 \dots k-i-1 0 \dots 0 k} - \\ &\dots - R_{0 \dots 0 k-1k} - \dots - R_{10 \dots 0k} - R_{123 \dots k-1k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Соответственно имеем:

$$S_{0 \dots 0 k}^{k-1} = S_k - S_{02 \dots k-1k} - \dots - S_{12 \dots k-20k} - S_{003 \dots k-1k} - \dots$$

* Здесь & означает конъюнкцию.

$$\begin{aligned}
 & - S_{123 \dots k-300k} \dots - S_{0 \dots 0 \overbrace{l+1 \dots k}^i} \dots - S_{12 \dots k-i-10 \dots 0k} \dots \\
 & \dots - S_{0 \dots 0k-1k} \dots - S_{10 \dots 0k} - S_{123 \dots k-1k}. \quad (2')
 \end{aligned}$$

Формула (2') является основной формулой и с равенством (1') дает возможность находить m_k . В частном случае, если m_i ($i=1, 2, \dots, k$) встречаются в матрице однократно и если они попарно находятся в разных строках и в разных столбцах, члены правой части формулы (2') принимают следующие значения:

$$S_k = (n-1)!,$$

$$S_{02 \dots k} = S_{103 \dots k} = \dots = S_{12 \dots k-20k} = (n-k+1)! - (n-k)!,$$

$$\begin{aligned}
 S_{003 \dots k} = S_{00204 \dots k} = \dots = S_{12 \dots k-300k} &= (n-k+2)! - \\
 & - [C_2^{(1)}(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{0004 \dots k} = S_{00305 \dots k} = \dots = S_{123 \dots k-4000k} &= (n-k+3)! - \\
 & - [C_3^1(n-k+2)! + C_3^2(n-k+1)! + C_3^3(n-k)!],
 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\begin{aligned}
 S_{0 \dots 0 \overbrace{l+1 \dots k}^i} = \dots = S_{12 \dots k-i-10 \dots 0k} &= (n-k+i)! - [C_i^1(n-k+i-1)! + \\
 & + C_i^2(n-k+i-2)! + \dots + C_i^{i-1}(n-k+1)! + C_i^i(n-k)!].
 \end{aligned}$$

Подставляя последнее значение в (2'), получим:

$$\begin{aligned}
 S_{0 \dots 0k} &= (n-1)! - C_{k-1}^1 \{ (n-k+1)! - (n-k)! \} - \\
 & - C_{k-1}^2 \{ (n-k+2)! - [C_2^1(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!] \} - \\
 & - C_{k-1}^3 \{ (n-k+3)! - [C_3^1(n-k+2)! + C_3^2(n-k+1)! + \\
 & + C_3^3(n-k)!] \} - \dots - C_{k-i}^i \{ (n-k+i)! - [C_i^1(n-k+i-1)! + \\
 & + C_i^2(n-k+i-2)! + \dots + C_i^{i-1}(n-k+1)! + \\
 & + C_i^i(n-k)!] \} - \dots - C_{k-1}^{k-1}(n-k)!
 \end{aligned}$$

Если же все m_i ($i=1, 2, \dots, k$) встречаются в матрице однократно, но они расположены так, что первая строка содержит μ_{1k} элементов из m_1, m_2, \dots, m_k , вторая строка содержит μ_{2k} элементов из m_1, m_2, \dots, m_k и т. д., n -ая строка содержит μ_{nk} элементов из m_1, m_2, \dots, m_k ; $\mu_{1k} + \dots + \mu_{nk} = k$, а столбцы матрицы содержат соответственно $\nu_{1k}, \nu_{2k}, \dots, \nu_{nk}$ элементов из m_1, m_2, \dots, m_k ; $\nu_{1k} + \nu_{2k} + \dots + \nu_{nk} = k$, то

$$\begin{aligned}
 S_{0 \dots 0k} &= (n-1)! - A_1 \{ (n-k+1)! - (n-k)! \} - A_2 \{ (n-k+2)! - \\
 & - [C_2^1(n-k+1)! + C_2^2(n-k)!] \} - \dots - A_i \{ (n-k+i-1)! - \\
 & - [C_{i-1}^1(n-k+i-2)! + C_{i-1}^2(n-k+i-3)! + \dots + C_{i-1}^{i-2}(n-k+1)! + \\
 & + C_{i-1}^{i-1}(n-k)!] \} - \dots - A_{k-2} \{ (n-3)! - [C_{k-3}^1(n-4)! + C_{k-3}^2(n-5)! +
 \end{aligned}$$

$$+ \dots + C_{k-3}^{k-4} (n-k+1)! + C_{k-3}^{k-3} (n-k)! \}].$$

Здесь

$$A_l = \tilde{C}_{k-1}^l - \tilde{C}_{k-\mu_{1k}-1}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\mu_{sk}}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\mu_{nk}-1}^l - \tilde{C}_{k-\nu_{1k}-1}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\nu_{lk}}^l - \dots - \tilde{C}_{k-\nu_{nk}-1}^l,$$

где

$$\tilde{C}_{k-\alpha-1}^l = \begin{cases} C_{k-\alpha-1}^l, & \text{если } \alpha \neq 0 \\ 0, & \text{если } \alpha = 0; \end{cases}$$

предполагается также, что m_k находится в s -той строке и в l -том столбце.

В общем случае формула не приводится из-за громоздкости.

Замечания:

1. Число тех φ , при которых $\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = m_k$, равно $S_{0 \dots 0k}$, а каждый из φ соответствует некоторому набору из множества $R_{0 \dots 0k}$, поэтому φ можно найти.

2. Фактически имеется и решение следующей задачи. Найти класс Φ' тех φ , при которых $\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = a_{i_0 j_0}$, где $a_{i_0 j_0}$ — произвольный фиксированный элемент исходной матрицы A . Очевидно, если $a_{i_0 j_0} < m_k$, то не существует φ , для которого

$$\min_{\varphi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} = a_{i_0 j_0}.$$

А если $a_{i_0 j_0} \geq m_k$, то есть $a_{i_0 j_0} = m_l (l \leq k)$, то класс Φ' есть множество тех φ , которые соответствуют наборам из $R_{0 \dots 0l}$. Число таких φ будет $S_{0 \dots 0l}$.

3. Описанным методом можно найти также $\max_{\varphi} \min_l \{a_{l\varphi(l)}\}$

$$(i = 1, 2, \dots, n; \varphi \in \Phi).$$

Ереванский государственный университет

Поступила 19 X 1963

Հ. Ե. Բազալյան

ՄԻ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունն մեջ լուծված է հետևյալ վարիացիոն խնդիրը՝ տված է n կարգի քառակուսային մատրիցա $A = [a_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) և $\{1, 2, \dots, n\}$ բազմությունը բոլոր փոխմիարժեք արտապատկերումների բազմությունը իր վրա:

Պահանջվում է գտնել՝

$$\min_{\varphi \in \Phi} \max_l \{a_{l\varphi(l)}\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

և այն φ -ն, որը տալիս է նշված մինիմումը:

Ընդ որում որոշված է նաև պահանջվող φ -երի թիվը:

М. Б. Балк

О бианалитических функциях с неизолированными a -точками

1. Функция $f(z)$ называется бианалитической в некоторой области D комплексной z -плоскости, если она представима в виде

$$f(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z), \quad (1)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции, аналитические в D .

Функция (1) называется бианалитической в точке, если она бианалитична в какой-либо области, содержащей эту точку, и называется бианалитической на множестве E , если она бианалитична в каждой точке этого множества.

Как известно, точка z_0 называется a -точкой функции $f(z)$, если $f(z_0) = a$. Мы будем точку z_0 называть неизолированной a -точкой бианалитической функции $f(z)$, если, во-первых, $f(z)$ бианалитична в некоторой окрестности $\delta \{ |z - z_0| < \rho \}$ точки z_0 и, во-вторых, z_0 является предельной точкой для некоторого множества a -точек функции $f(z)$.

Аналитическая функция $f(z)$, отличная от константы, принимает каждое свое значение a изолированно: если $f(z_0) = a$, то существует вокруг z_0 такая достаточно малая окрестность $|z - z_0| < \rho$, что при $0 < |z - z_0| < \rho$ $f(z) \neq a$.

Совершенно иначе обстоит дело с бианалитическими функциями: существуют такие бианалитические функции, отличные от константы, которые принимают некоторые (или даже все) свои значения неизолированно. Такова, например, функция $\bar{z} \cdot z$ (принимает изолированно — только в точке $z = 0$ — значение 0; и неизолированно — на окружности $|z| = \sqrt{a}$ — любое положительное значение a); такова функция $z + \bar{z}$ (принимает любое вещественное значение a неизолированно — на целой прямой $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}a$).

Легко проверить, что всякая бианалитическая функция $V(z)$, осуществляющая вырожденное отображение (то есть такая, которая переводит некоторую область в множество без внутренних точек),

имеет неизолированные a -точки; более того, если $V(z) \neq \text{const}$ (такая запись здесь и в дальнейшем означает: $V(z)$ не есть константа), то множество значений a , принимаемых этой функцией неизолированно, имеет мощность континуума. В этом нетрудно убедиться, если воспользоваться формулами (17)–(18) из статьи [2].

Пусть вырожденная бианалитическая функция $V(z)$ (то есть осуществляющая вырожденное отображение) имеет неизолированный нуль z_0 , функция $A(z)$ — произвольная аналитическая в окрестности точки z_0 , a — произвольная константа; тогда бианалитическая функция

$$B(z) = A(z) \cdot V(z) + a \quad (2)$$

будет, очевидно, принимать неизолированно значение a .

Интересно выяснить: существуют ли еще какие-то другие бианалитические функции (кроме вырожденных или получаемых из вырожденных с помощью формул вида (2)), имеющие неизолированные a -точки?

Если функция $f(z)$ принимает на некотором множестве значение a , то функция $F(z) \equiv f(z) - a$ принимает на том же множестве значение 0. Поэтому достаточно изучить бианалитические функции, имеющие неизолированные нули.

Можно проверить, что для вырожденной бианалитической функции множество неизолированных нулей может заполнить только одну из следующих линий: окружность, прямую, луч, логарифмическую спираль.

Любопытно выяснить: существуют ли бианалитические функции, нули которых заполняют какую-либо другую линию, например, параболу?

2. Мы говорим, что последовательность $\{z_n\}$ сходится к точке z_0 вдоль прямой

$$z = z_0 + te^{i\alpha} \quad (-\infty < t < \infty, \text{Im } \alpha = 0), \quad (3)$$

если члены этой последовательности возможно представить в виде

$$z_n = z_0 + t_n \exp(i\alpha_n), \quad (4)$$

где t_n и α_n вещественны и при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 0$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha$.

Мы говорим, что множество E сгущается к точке z_0 вдоль некоторой прямой (2), если в E содержится последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0 вдоль этой прямой.

Замечание 1. Если z_0 — неизолированная a -точка бианалитической функции $f(z)$, отличной от тождественной константы, то должна существовать единственная прямая, вдоль которой множество E всех a -точек функции $f(z)$ сгущается к точке z_0 .

Этот факт является тривиальным следствием из теоремы единственности для полианалитических функций (см. [2], подробное доказательство приведено в [3]).

Если бы множество E сгущалось к точке z_0 вдоль двух (или более) различных прямых, то в силу этой теоремы единственности

из совпадения на E двух бианалитических функций— $f(z)$ и тождественной константы a —следовало бы тождество $f(z) \equiv a = \text{const.}$

Если гомеоморф Γ некоторого интервала (α, β) может быть задан с помощью аналитической функции $z = \lambda(t) = x(t) + iy(t)$ ($\alpha < t < \beta$), причем $\lambda'(t) \neq 0$ на (α, β) , то Γ будем называть *открытой простой правильной аналитической дугой* (ОППАД). Случаи $\alpha = -\infty$ или $\beta = \infty$ не исключаются.

Замечание 2. Если две функции $f(z)$ и $g(z)$, бианалитические на некоторой ОППАД Γ , принимают равные значения на некотором множестве E , принадлежащем дуге Γ и имеющему хотя бы одну предельную точку на Γ , то $f(z) \equiv g(z)$ на *всей* дуге Γ .

Для доказательства достаточно рассмотреть две функции: $F(t) \equiv f[\lambda(t)]$ и $G(t) \equiv g[\lambda(t)]$ на сегментах вида $[a, b]$, где $\alpha < a < b < \beta$. Функции $F(t)$ и $G(t)$ аналитичны в некоторой окрестности сегмента $[a, b]$. Применение к этим функциям классической теоремы единственности и приводит к доказательству замечания 2. Подробно доказательство (для более общего случая) изложено в [3].

3. Не предпринимая пока вопроса о существовании бианалитических функций, не представимых в виде (2), но имеющих неизолрованные a -точки, докажем следующую теорему.

Теорема 1. Для того, чтобы бианалитическая функция $B(z)$ имела в точке z_0 неизолрованную a -точку, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$B(z) = a + \Psi(\zeta) \cdot [\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta], \quad (5)$$

где $\zeta = (z - z_0) e^{-i\alpha}$, a —вещественная константа, $\Psi(\zeta)$ и $\Theta(\zeta)$ аналитичны в точке $\zeta = 0$, причем $\Theta(\zeta)$ совпадает с $\text{Im} \zeta$ на некоторой ОППАД, касающейся вещественной оси плоскости переменного ζ в точке $\zeta = 0$.

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна. Докажем его необходимость. Можем считать, что $B(z) \neq \text{const.}$ Так как по условию точка z_0 —неизолрованная a -точка функции $B(z)$, то существует такая последовательность $\{z_n\}$ a -точек функции $B(z)$, которая сходится к z_0 . В силу замечания 1 последовательность $\{z_n\}$ должна сходиться к z_0 вдоль некоторой (единственной) прямой. Пусть уравнение этой прямой $z = z_0 + t e^{i\alpha}$ (α —вещественная константа, $-\infty < t < \infty$).

Перейдем к новому переменному ζ по формуле

$$z = z_0 + e^{i\alpha} \zeta. \quad (6)$$

Рассмотрим функцию

$$F(\zeta) \equiv B(z) - a \equiv B(z_0 + e^{i\alpha} \zeta) - a. \quad (7)$$

Эта функция бианалитична в некоторой окрестности δ точки $\zeta = 0$. Нулями $F(\zeta)$ являются точки

$$\zeta_n = (z_n - z_0) e^{-i\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8)$$

Ясно, что $\zeta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, так что точка $\zeta = 0$ служит неизолрованным нулем функции $F(\zeta)$. Числа ζ_n можно представить в виде

$$\zeta_n = t_n \exp(i\lambda_n), \quad (9)$$

где t_n и λ_n вещественны, причем при $n \rightarrow \infty$ $t_n \rightarrow 0$ и $\lambda_n \rightarrow 0$. Функцию $F(\zeta)$ возможно в δ представить в виде

$$F(\zeta) = \varphi(\zeta) + \bar{\zeta} \cdot \psi(\zeta), \quad (10)$$

где $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ — функции, аналитичные в δ .

Ясно, что ни одна из функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ не является тождественным нулем в δ . Поэтому существует достаточно малый кружок $d\{|\zeta| < \rho\}$, в котором $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ представимы в виде

$$\varphi(\zeta) = \zeta^m \varphi_1(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \zeta^p \psi_1(\zeta), \quad (11)$$

причем $\varphi_1(\zeta)$ и $\psi_1(\zeta)$ вовсе не обращаются в нуль при $|\zeta| < \rho$, а m и p — какие-то целые неотрицательные числа.

Покажем, что $m = p + 1$ и $\varphi_1(0)/\psi_1(0) = -1$. (12)

Почти все члены последовательности (8) (то есть все, кроме, возможно, конечного числа) удовлетворяют условиям

$$\zeta_n \neq 0, \quad |\zeta_n| < \rho.$$

Кроме того $\zeta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но $F(\zeta_n) = 0$, то есть

$$\zeta_n^m \varphi_1(\zeta_n) + \bar{\zeta}_n \zeta_n^p \psi_1(\zeta_n) = 0,$$

откуда

$$\zeta_n^{m-p-1} \frac{\varphi_1(\zeta_n)}{\psi_1(\zeta_n)} + \frac{\bar{\zeta}_n}{\zeta_n} = 0. \quad (13)$$

Второе слагаемое в (13) при $n \rightarrow \infty$ имеет предел 1. Модуль же первого слагаемого стремился бы к 0 при $m > p + 1$ и к ∞ при $m < p + 1$. Значит, $m = p + 1$. Из (13) при $n \rightarrow \infty$ найдем: $\frac{\varphi_1(0)}{\psi_1(0)} = -1$.

В силу (10) — (13) возможно $F(\zeta)$ записать так:

$$F(\zeta) = \psi(\zeta) \left[\frac{\varphi_1(\zeta)}{\psi_1(\zeta)} + \bar{\zeta} \right]. \quad (14)$$

Функция $\varphi_1(\zeta)/\psi_1(\zeta)$ аналитична в d . Учитывая (12), можно написать: $\varphi_1(\zeta)/\psi_1(\zeta) = -1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu}$ (b_{ν} — константы) (15)

$$F(\zeta) = \psi(\zeta) \left[\zeta \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu} - \zeta + \bar{\zeta} \right] = \Psi(\zeta) [\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta], \quad (16)$$

где

$$\Psi(\zeta) = 2i\psi(\zeta) \quad \text{и} \quad \Theta(\zeta) = \zeta^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \zeta^{\nu-1}. \quad (17)$$

Используя (7), получим (5).

Остается еще показать, что равенство

$$\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta = 0 \quad (18)$$

имеет место на некоторой ОППАД Γ , касающейся оси $\text{Im } \zeta = 0$ в точке $\zeta = 0$.

Это очевидно, если $\Theta(\zeta) \equiv 0$: тогда равенство (18) имеет место на всей вещественной оси плоскости переменного ζ . Пусть теперь $\Theta(\zeta) \not\equiv 0$. Из (17) видно, что для $\Theta(\zeta)$ точка $\zeta = 0$ является нулем порядка $k \geq 2$. Поэтому $\Theta(\zeta)$ представима в виде

$$\Theta(\zeta) = b_{k-1}\zeta^k + b_k\zeta^{k+1} + \dots, \quad \text{где } b_{k-1} \neq 0, \quad k \geq 2. \quad (19)$$

Так как $F(\zeta_n) = 0$, а почти для всех n $\psi(\zeta_n) \neq 0$, то в силу (16)–(17) почти для всех n) $\Theta(\zeta_n) = \text{Im } \zeta_n$, то есть

$$\zeta_n^k (b_{k-1} + b_k \zeta_n + \dots) = t_n \sin \lambda_n, \quad (20)$$

При $n \rightarrow \infty$ должен существовать предел правой части равенства (20), ибо существует предел левой части—он равен b_{k-1} . Но $(\sin \lambda_n)/t_n^{k-1}$ —вещественное число при любом n ; поэтому и b_{k-1} —вещественное число.

Пусть $\Theta(\zeta) = u(\zeta, \eta) + i v(\zeta, \eta)$, а $\zeta_n = \xi_n + i \eta_n$.

Ясно, что в каждой точке ζ_n имеют место равенства $v(\xi_n, \eta_n) = 0$, $u(\xi_n, \eta_n) - \eta_n = 0$. Таким образом, все точки ζ_n лежат на кривой $v(\xi, \eta) = 0$. В силу (19) эта кривая распадается в достаточно малой окрестности d точки $\zeta = 0$ на k ОППАД, проходящих через точку $\zeta = 0$, причем касательные к этим кривым в точке $\zeta = 0$ делят полный угол вокруг этой точки на $2k$ равных углов. Так как b_{k-1} вещественно и $b_{k-1} \neq 0$, то среди этих кривых имеется одна, которая касается вещественной оси в точке $\zeta = 0$. Обозначим ее через Γ ($\eta = h(\xi)$).

По условию последовательность $\{\zeta_n\}$ сходится к точке $\zeta = 0$ вдоль вещественной оси. Поэтому почти все точки последовательности $\{\zeta_n\}$ лежат на кривой Γ . Так как в точках ζ_n совпадают бианалитические функции $\text{Im } \zeta$ и $\Theta(\zeta)$, то они, в силу замечания 2, совпадают на всей дуге Γ . Теорема доказана.

Заметим, что на кривой Γ $\eta/\xi \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$, так что $\zeta/\xi \rightarrow 1$. Кроме того из (18) видно, что на Γ

$$\eta = \Theta(\zeta) = \zeta^k (b_{k-1} + b_k \zeta + \dots). \quad (21)$$

Поэтому при $\xi \rightarrow 0$ $\eta/\xi^k \rightarrow b_{k-1}$ ($k \geq 2$). (22)

Так как кривая Γ аналитическая и касается вещественной оси, то она может быть задана в окрестности точки $\zeta = 0$ с помощью ряда вида

$$\eta = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots$$

Из условия (22) ясно, что $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$, $c_k = b_{k-1} \neq 0$, так что уравнение кривой Γ можно представить так:

$$\eta = \xi^k \mu(\xi), \quad \text{где } \mu(0) \neq 0, \quad \mu(\xi) = \sum_{v=k}^{\infty} c_v \xi^{v-k}, \quad k \geq 2. \quad (23)$$

4. Теорема 1 сводит поиск бианалитических функций, имеющих неизолированные a -точки, к поиску аналитических функций $\Theta(z)$, совпадающих с $\text{Im} z$ на каких-либо ОППАД, касающихся вещественной оси в точке $z=0$. Вопрос о существовании такого рода функций $\Theta(z)$ решается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть Γ — произвольная ОППАД, касающаяся вещественной оси плоскости переменного z в точке $z=0$. Тогда существует — и притом единственная — функция $\Theta(z)$, аналитическая в некоторой окрестности δ точки $z=0$ и обладающая тем свойством, что бианалитическая функция $\Theta(z) - \text{Im} z$ обращается в нуль во всех точках дуги Γ , лежащих внутри δ .

Доказательство. Пусть Γ отлична от какого-либо интервала вещественной оси (в противном случае теорема очевидна, $\Theta(z) \equiv 0$).

Вблизи точки $z=0$ возможно кривую Γ задать уравнением вида

$$y = x^k \mu(x) \quad (\alpha < x < \beta), \quad (23')$$

где $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\mu(0) \neq 0$, k — натуральное число, $k \geq 2$, $\mu(z)$ аналитична в некоторой окрестности $d \{ |z| < R \}$ точки $z=0$ и вещественна на вещественной оси. Можно считать, что

$$R < \min \{ |\alpha|, |\beta| \}.$$

Функция

$$z \equiv v(\omega) = \omega + i\omega^k \mu(\omega) \quad (24)$$

аналитична в круге d , причем $v(0) = 0$, $v'(0) = 1$. Поэтому (см., например, [4]) в плоскости переменного z существует достаточно малый кружок $\delta \{ |z| < \rho \}$, в котором функция $\omega = \lambda(z)$, обратная по отношению к $z = v(\omega)$, определена и однозначна, причем все значения, которые принимает функция $\omega = \lambda(z)$ в круге δ , принадлежат кругу d . Обозначим через L тот кусок кривой Γ , который принадлежит кругу δ .

Рассмотрим функцию

$$\Theta(z) = i[\lambda(z) - z], \quad (25)$$

которая, очевидно, аналитична и однозначна в δ .

Пусть $z \in L$, так что $z = x + ix^k \mu(x)$.

Тогда $\lambda(z) = x$ и $\Theta(z) = x^k \mu(x)$,

то есть $\Theta(z) - \text{Im} z = 0$ на L .

Единственность такой функции $\Theta(z)$ следует, очевидно, из внутренней теоремы единственности для аналитических функций. Теорема 2 доказана. Одновременно с доказательством мы получили алгоритм для построения искомой функции $\Theta(z)$.

Следствие. Какова бы ни была ОППАД Γ , проходящая через точку z_0 , и каким бы ни было комплексное число a , всегда существует такая функция $B(z)$, бианалитическая в некоторой окрестности δ точки z_0 , которая на куске кривой Γ , лежащем в этой окрестности, равна a .

Действительно, пусть касательная к Γ в точке z_0 образует угол α с вещественной осью; пусть $\Psi(\zeta)$ — произвольная функция, аналитическая в окрестности точки $\zeta = 0$. Тогда нетрудно проверить, что требуемыми свойствами обладает функция

$$B(z) = \Psi(\zeta) [\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta] + a, \quad (26)$$

где

$$\zeta = (z - z_0) e^{-i\alpha}.$$

Замечание 3. Если оказывается, что кривая Γ , о которой говорится в теореме 2, принадлежит области аналитичности функции $\theta(z)$, то функция $\theta(z) - \text{Im} z$ обращается в нуль во *всех* точках кривой Γ . Для доказательства достаточно воспользоваться замечанием 2.

5. Пример. Построим аналитическую функцию $\theta(z)$, которая на куске L параболы $y = x^2$, лежащем внутри достаточно малой окрестности точки $z = 0$, удовлетворяет условию

$$\theta(z) - \text{Im} z = 0.$$

В данном случае $k = 2$, $\mu(z) = 1$.

Строим функцию $z = \omega + i\omega^2$ и ей обратную

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4iz}}{2i}.$$

При этом однозначную ветвь функции $\sqrt{1 + 4iz}$ следует выбрать так, чтобы $\lambda(0) = 0$, то есть, чтобы $\sqrt{1 + 4iz} = 1$ при $z = 0$. По формуле (25)

$$\theta(z) = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4iz}) - iz. \quad (27)$$

Функция $\theta(z)$ имеет одну особую точку (точку ветвления) $z = i/4$, так что парабола $y = x^2$ целиком лежит в области аналитичности функции $\theta(z)$. Поэтому, в силу замечания 3, равенство $\theta(z) - \text{Im} z = 0$ имеет место на *всей* параболе.

Легко и путем непосредственной проверки убедиться, что равенство $\theta(z) = \text{Im} z$ имеет место на параболе $y = x^2$. Действительно, на этой кривой $z = x + ix^2$ и

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 4i(x + ix^2)}) - i(x + ix^2) = \\ &= \frac{1}{2} [-1 + (1 + 2ix)] - i(x + ix^2) = x^2 = \text{Im} z. \end{aligned}$$

Беря $\theta(z)$ по формуле (27), при любом выборе функции $\Psi(z)$, регулярной в некотором круге D с центром в точке $z = 0$ мы с помощью формулы $B(z) = a + \Psi(z) [\theta(z) - \text{Im} z]$ будем получать бивалентную функцию, для которой точки параболы $y = x^2$, которые лежат в круге D , будут изолированными α -точками. При любом выборе вещественной константы α и комплексной константы z_0 функция $\Phi(z) = B[(z - z_0) e^{i\alpha}]$ будет иметь изолированными α -точками все точки дуги некоторой параболы, получающейся из параболы $y = x^2$ путем сдвига и поворота.

6. Теорема 2 носит локальный характер. Чтобы можно было воспользоваться замечанием 3, необходимо уже знать функцию $\Theta(z)$. Следующая теорема позволяет сделать аналогичный вывод еще до построения функции $\Theta(z)$.

Теорема 3. Для всякой ОППАД $\Gamma \{z = z(t)\}$ существует функция $V(z)$, которая бианалитична в некоторой области D , содержащей дугу Γ , и которая обращается в нуль во всех точках этой дуги.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка на дуге Γ , α — угол между вещественной осью и касательной к Γ в этой точке. Перейдем к новому переменному ζ с помощью преобразования

$$z = z_0 + e^{i\alpha}\zeta \quad (\zeta = (z - z_0)e^{-i\alpha}).$$

В координатной плоскости нового переменного ζ кривая Γ имеет уравнение

$$\zeta = \zeta(t) = [z(t) - z_0]e^{-i\alpha},$$

причем она проходит через точку $\zeta = 0$ и в этой точке касается вещественной оси (координатной плоскости переменного ζ).

В силу теоремы 2 существует такая функция $\Theta(\zeta)$, аналитическая в некоторой окрестности δ точки $\zeta = 0$ и удовлетворяющая условию $\Theta(\zeta) - \text{Im} \zeta = 0$ на той части Γ_δ дуги Γ , которая попадает в кружок δ .

Вернемся теперь к переменному z ; получим, что на Γ_δ

$$\Theta[(z - z_0)e^{-i\alpha}] - \frac{1}{2i}[(z - z_0)e^{-i\alpha} - (\bar{z} - \bar{z}_0)e^{i\alpha}] = 0. \quad (28)$$

Коэффициент при \bar{z} — константа $e^{i\alpha}/2i$.

Разделив обе части равенства (28) на этот коэффициент, можем формулу (28) привести к виду

$$\varphi(z) + \bar{z} = 0, \quad (29)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности точки z_0 .

Итак, около каждой точки z_0 дуги Γ возможно описать открытый круг $\delta \equiv \delta(z_0; \Gamma)$ так, чтобы в нем существовала некоторая аналитическая функция $\varphi(z)$, удовлетворяющая условию (29) на той части Γ_δ дуги Γ , которая попадает в δ . Пусть дуга Γ имеет уравнение $z = z(t)$ ($\alpha < t < \beta$).

Выберем числа a и b так, чтобы $\alpha < a < b < \beta$. Тогда кривая $\gamma \{z = z(t), a \leq t \leq b\}$ — замкнутая часть дуги Γ . Пусть точка z_0 пробегает дугу γ . В силу леммы Гейне-Бореля возможно из бесконечного множества открытых кругов $\delta(z_0; \Gamma)$ выбрать конечное число таких кругов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$, которые вместе покрывают всю дугу γ , причем при любом ν ($\nu = 1, 2, \dots, m-1$) кружки δ_ν и $\delta_{\nu+1}$ содержат общий кусок $\gamma_\nu, \gamma_{\nu+1}$ дуги γ . Как мы видели выше (см. формулу (29)), при $\nu = 1, 2, \dots, m$ существует в круге δ_ν такая аналитическая функ-

ция $\varphi_\nu(z)$, что на куске γ_ν дуги Γ , лежащем в δ_ν , имеет место равенство

$$\varphi_\nu(z) + \bar{z} = 0. \quad (30)$$

Так как на дуге $\gamma_{\nu, \nu+1}$ имеют место равенства $\varphi_\nu(z) + \bar{z} = 0$ и $\varphi_{\nu+1}(z) + \bar{z} = 0$, то $\varphi_\nu(z) = \varphi_{\nu+1}(z)$ на $\gamma_{\nu, \nu+1}$, и в силу теоремы единственности для аналитических функций, функция $\varphi_{\nu+1}(z)$ служит аналитическим продолжением функции $\varphi_\nu(z)$ на круг $\delta_{\nu+1}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m-1$).

Но тем самым установлено существование некоторой функции $\varphi(z)$, которая аналитична в некоторой области D , содержащей дугу γ , и удовлетворяет на γ условию

$$\varphi(z) + \bar{z} = 0. \quad (31)$$

Беря числа a и b достаточно близкими к x и β и пользуясь теоремой единственности для аналитических функций, нетрудно убедиться, что область D аналитичности функции $\varphi(z)$ должна содержать все точки дуги Γ , причем в каждой из этих точек имеет место (31). Функция $\varphi(z) + \bar{z}$ и будет искомой бианалитической функцией.

Умножая ее на произвольную функцию $A(z)$, аналитическую в D , мы опять получим функцию, удовлетворяющую условию теоремы.

7. Бианалитическую функцию $B(z)$ назовем *мероморфной*, если она представима в виде

$$B(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z), \quad (32)$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — мероморфные функции. Аналогично определяется *целая* бианалитическая функция.

Выясним теперь, каковы те целые и мероморфные бианалитические функции, которые имеют изолированные нули. Ниже запись вида „ $A(z) \sim B(z)$ при больших z “ будет означать, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [A(z)/B(z)] = \text{const} \neq 0.$$

Если функция $R(z)$ представима в виде

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n / \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

то под $\bar{R}(z)$ будем понимать функцию

$$\bar{R}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n z^n / \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n z^n.$$

Теорема 4. *Всякая мероморфная бианалитическая функция (1), имеющая изолированный нуль, совпадает — с точностью до мероморфного аналитического сомножителя — с некоторой вырожденной бианалитической функцией.* Иными словами, функция $B(z)$ может быть в данном случае представлена в виде

$$B(z) = M(z) V(z), \quad (33)$$

где $V(z)$ — бианалитическая функция, которая осуществляет вырожденное отображение, а $M(z)$ — мероморфная аналитическая функция.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $B(z) \neq 0$ и что неизолированным нулем функции $B(z)$ является точка $z=0$. Поэтому должна существовать такая последовательность $\{z_n\}$, что $B(z_n) = 0$ и $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Обратимся к представлению (32) функции $B(z)$. Ясно, что $\psi(z) \neq 0$ (в противном случае точка $z=0$ наверняка не могла бы быть предельной для множества нулей функции $B(z)$). Отсюда следует, что среди точек z_n имеется не более, чем конечное число нулей функции $\psi(z)$. Поэтому можно считать, что $\psi(z_n) \neq 0$ (нули функции $\psi(z)$ удалим из последовательности $\{z_n\}$). Положим

$$R(z) = -\varphi(z)/\psi(z). \quad (35)$$

$$\Phi(z) = R(z) - \bar{z}. \quad (36)$$

Тогда

$$B(z) = -\psi(z)\Phi(z). \quad (37)$$

Понятно, что $R(z)$ — мероморфная функция.

Во всех точках z_n $\Phi(z) = 0$, то есть

$$R(z) = \bar{z}, \quad (38)$$

$$\bar{R}(\bar{z}) = z, \quad (39)$$

откуда

$$\bar{R}[R(z)] = z. \quad (40)$$

Функция $R(z)$ регулярна в точке $z=0$. В той же точке, как легко понять, регулярны также функции $\bar{R}(z)$ и $\bar{R}[R(z)]$.

Нетрудно убедиться, что функция $\bar{R}[R(z)]$ может быть аналитически продолжена из окрестности точки $z=0$ в любую регулярную точку этой функции. Отсюда и из теоремы единственности следует, что равенство (40) справедливо на всей плоскости.

Выясним, какой вид может иметь мероморфная (в конечной плоскости) функция $R(z)$, удовлетворяющая условию (40).

Сначала покажем, что $R(z)$ не может быть трансцендентной функцией. Действительно, если $R(z)$ была бы трансцендентна, то она в силу теоремы Пикара принимала бы бесконечное число раз любое конечное значение, кроме, возможно, двух. Поэтому мы могли бы выбрать такую точку γ , которая не была бы полюсом для $\bar{R}(z)$, и такую последовательность $\{\zeta_n\}$, что 1) $\zeta_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и 2) $R(\zeta_n) = \gamma$. Тогда при любом n , согласно равенству (40), имело бы место равенство $\bar{R}(\gamma) = \zeta_n$, что, очевидно, невозможно.

Итак, $R(z)$ — рациональная функция. Тогда $R(z)$ имеет вид

$$R(z) = A + \sum_{k=1}^n P_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) + P(z), \quad (41)$$

где $P_k(u)$ и $P(z)$ — какие-то полиномы, причем $P_k(0) = 0$, $P(0) = 0$, $A = \text{const}$. Покажем теперь, что $R(z)$ имеет лишь один полюс — конечный или бесконечный — и притом обязательно простой.

Рассмотрим сначала полином $P(z)$ и выясним, какой может быть его точная степень m . Допустим, что $m > 1$. Тогда при больших z $R(z) \sim z^m$ и $\bar{R}[R(z)] \sim z^{m^2}$, так что при больших z равенство (40) невозможно. Итак, $P(z)$ — полином степени не выше первой.

Если $P(z)$ имеет простой полюс в бесконечности ($m = 1$), то других полюсов функция $R(z)$ иметь не может.

Действительно, если $P_1(z) \neq 0$ (то есть $R(z)$ имеет еще полюс $z = a_1$), то при $z \rightarrow a_1$, $P_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right) \rightarrow \infty$, так что $\zeta \equiv R(z) \rightarrow \infty$. Но тогда (при $m = 1$) $\bar{R}(\zeta) \rightarrow \infty$, так что равенство (40) невозможно. Итак, в данном случае $R(z)$ имеет вид $R(z) = A + Bz$ (A и B константы).

Так как $R(0) = 0$ (см. (38)), то $A = 0$. Из (40) следует, что $\bar{B}Bz = z$, так что $|B| = 1$, $B = e^{i\alpha}$, где $\alpha = \text{const}$, $\text{Im } \alpha = 0$. Итак, в данном случае $R(z) = e^{i\alpha}z$,

$$\Phi(z) = e^{i\alpha}z - \bar{z}, \quad (42)$$

$$B(z) = -\psi(z)[e^{i\alpha}z - \bar{z}]. \quad (42')$$

Здесь $\psi(z)$ — мероморфная аналитическая функция, а $\Phi(z)$ действительно осуществляет вырожденное отображение (сравните с формулой (17) в [2]).

Пусть теперь $R(z)$ не имеет полюса в бесконечности (то есть $P(z) \equiv 0$). Покажем, что тогда $R(z)$ может иметь лишь один конечный полюс, и притом простой. Действительно, пусть a_1 — какой-либо полюс функции $R(z)$. Тогда $\zeta \equiv R(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow a_1$, и поэтому (см. формулу (41)) $\bar{R}(\zeta) \rightarrow A$. Из формулы (40) мы получим, что это возможно лишь в том случае, когда $a_1 = \bar{A}$. Таким образом, в рассматриваемом случае только точка \bar{A} может быть полюсом функции $R(z)$. Поэтому в данном случае $R(z)$ имеет вид

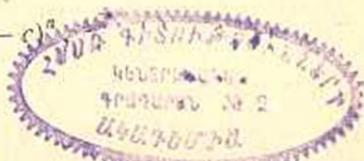
$$R(z) = \bar{c} + \frac{b_k}{(z-c)^k} + \frac{b_{k+1}}{(z-c)^{k+1}} + \dots + \frac{b_n}{(z-c)^n} = \bar{c} + \frac{P_{n-1}(z-c)}{(z-c)^n}, \quad (43)$$

где $\bar{c} = A$, $1 \leq k \leq n$, $b_k \neq 0$, $b_n \neq 0$, $P_{n-1}(z-c)$ — полином степени $n-k$ от $z-c$. Ясно, что при $z \rightarrow \infty$

$$P_{n-1}(z-c)/(z-c)^n \sim \frac{1}{(z-c)^k}.$$

Обозначим, как и раньше, $R(z)$ через ζ . Тогда

$$\zeta - \bar{c} = P_{n-1}(z-c)/(z-c)^n$$



$$\begin{aligned} \bar{R}(\zeta) &= c + \frac{\bar{b}_k}{(\zeta - \bar{c})^k} + \dots + \frac{\bar{b}_n}{(\zeta - \bar{c})^n} = \\ &= c + \bar{b}_k \left[\frac{(z - c)^n}{P_{n-1}(z - c)} \right]^k + \dots + \bar{b}_n \left[\frac{(z - c)^n}{P_{n-1}(z - c)} \right]^n. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $z \rightarrow \infty$ $\bar{R}(\zeta) \sim (z - c)^{nk}$. Поэтому равенство (40), то есть равенство $\bar{R}(\zeta) = z$, заведомо невозможно при больших z , если $n > 1$.

Итак, $n = 1$ и $R(z)$ имеет вид

$$\zeta = R(z) = \bar{c} + \frac{B}{z - c}.$$

Но в окрестности точки $z = 0$ $R(z) = \bar{z}$. Отсюда следует, что $B = |c|^2$. Таким образом,

$$R(z) = \bar{c} + |c|^2 / (z - c), \quad (44)$$

$$B(z) = \frac{\psi(z)}{z - c} (|z - c|^2 - |c|^2). \quad (45)$$

Из формул (42') и (45) следует справедливость теоремы.

Следствие 1. Если мероморфная бианалитическая функция $B(z)$ имеет неизолированную a -точку в точке z_0 , то она представима в одном из следующих видов:

- I. $B(z) = \psi(z) [e^{b\alpha} (z - z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0)] + a$,
- II. $B(z) = \psi(z) [|z - z_0 - c|^2 - |c|^2] + a$,

где $\psi(z)$ — мероморфная аналитическая функция, $\alpha = \text{const}$, $\text{Im } \alpha = 0$, $c = \text{const}$.

Следствие 2. Если мероморфная бианалитическая функция имеет хотя бы одну неизолированную a -точку, то геометрическим местом a -точек этой функции служит прямая или окружность, если отвлечься от множества точек, которое либо является конечным, либо имеет единственной предельной точкой бесконечность.

Теорема 4 позволяет сделать некоторые выводы о целых (или мероморфных) бианалитических функциях, принимающих неизолированно два (соответственно — три) значения.

Приведем здесь без доказательства один такой результат.

Теорема 5. *Целая бианалитическая функция, принимающая неизолированно два каких-либо значения, осуществляет вырожденное отображение (n , следовательно, принимает неизолированно континуум значений).*

8. Поиск неизолированных a -точек бианалитической функции возможно несколько упростить, если учесть следующие соображения. Пусть функция $\omega = B(z) = \varphi(z) + \bar{z} \cdot \psi(z)$ бианалитична в некоторой области D .

Если якобиан $J_{w/z}$ отображения $w = B(z)$ в какой-то точке z_0 из области D отличен от нуля, то в достаточно малой окрестности этой точки, как известно, отображение будет взаимно-однозначным.

Если же z_0 — предельная точка для α -точек функции $B(z)$, то отображение $w = B(z)$ заведомо не будет взаимно-однозначным в этой окрестности.

Следовательно, все неизолированные α -точки функции $B(z)$ принадлежат „кривой“ $J_{w/z} = 0$, то есть „кривой“

$$|\varphi'(z) + \bar{z}\psi'(z)| = |\psi(z)|.$$

Допустим, что эта „кривая“ представлена в виде суммы нескольких (быть может, частично перекрывающихся) ОППАД

$$\Gamma_\nu \{z = z_\nu(t), \alpha_\nu < t < \beta_\nu\} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Из замечания 2 следует, что если на какой-то из этих дуг Γ_ν найдутся две точки z'_ν и z''_ν такие, что $B(z'_\nu) \neq B(z''_\nu)$, то дуга Γ_ν вовсе свободна от неизолированных α -точек.

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступила 19 VI 1963

Մ. Բ. Բալկ

ՉՄԵԿՈՒՍԱՑՎԱԾ α ԿԵՏԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարկածում ապացուցվում է

$$B(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z)$$

անփոփոխելի ֆունկցիայի գոյությունը և տրվում է նրա կառուցման եղանակը, որտեղ $\varphi(z)$ և $\psi(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են ինչ որ տիրույթում, և $B(z)$ -ը ոչ առանձնացված կերպով — ավելի անալիտիկ ազնիվ բարձրանչյուր կետում, ընդունում է նախորդ տված α արժեքը:

Հաստատվում է, որ մերոմորֆ $\varphi(z)$ -ի և $\psi(z)$ -ի դեպքում, չմեկուսացված ձևով զերո արժեք ընդունող $B(z)$ բիանալիտիկ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել որպես մի մերոմորֆ անալիտիկ ֆունկցիայի և վերահերված արտադրյալի որպես կառուցված բիանալիտիկ ֆունկցիայի արտադրյալ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Балк М. Б. К теории полианалитических функций. Сб. „V Всесоюзная конференция по теории функций“, Ереван, 1960.
2. Балк М. Б. Вырожденные бианалитические отображения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 17, № 2, 1964.
3. Балк М. Б. Теоремы единственности для полианалитических функций. Сб. „Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного“, под ред. А. И. Маркушевича* (готовится к печати).
4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, гл. VIII, § 1, п. 1. Гостехиздат, М., 1954.

Г. В. Генджоян

О двусторонних чаплыгинских приближениях решения двухточечной граничной задачи

1. В настоящей статье строятся двусторонние чаплыгинские приближения к решению граничной задачи

$$P(y) = -y'' + f(x, y, y') = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

доказывается их сходимость к решению. Тем самым устанавливается и существование решения. При этом на функцию f накладываются условия: она непрерывна по x, y, y' в области $0 < x < 1, y^2 + y'^2 < \infty$ непрерывно дифференцируема по y и y' , при этом $0 \leq f_y \leq M, |f_{y'}| \leq M$ в этой области.

Эти условия отличны от требований, предъявленных к функции f в работах [2—6], где либо f не зависит от y' [2—4], либо зависит линейно [5], или же при нелинейной зависимости от y' строятся чаплыгинские приближения только с одной стороны [6]. Отметим, что условия, выставленные в настоящей работе, отличны также от условий, накладываемых на f в статье [7].

2. Назовем нижней (верхней) функцией $u(x)$ [$v(x)$], если она удовлетворяет условиям (2) и неравенству $P(u) \leq 0$ [$P(v) \geq 0$] на всем отрезке $[0, 1]$. Отсюда следует соотношение $v(x) \geq u(x)$. В самом деле, обозначая $v(x) - u(x) = g(x)$, получим

$$-g'' + f_y g' + f_{y'} g = \varphi(x) \geq 0, \quad g(0) = g(1) = 0. \quad (3)$$

Допустим, что $g(x) < 0$ хотя бы в одной точке отрезка $[0, 1]$. Пусть x_0 — точка, в которой $g(x)$ достигает отрицательного минимума. Тогда существует интервал (x_0, x_1) , где $0 < x_0 < x_1 \leq 1$ такой, что $g(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_1)$, $g'(x_1) > 0$.

Переписывая равенство из соотношений (3) в виде

$$g'(x) = g'(x_1) e^{x_1 - x} + \int_{x_1}^x e^{x_1 - t} [f_y g(t) - \varphi(t)] dt,$$

убеждаемся, что $g'(x_0) > 0$, а это противоречит условию минимума

в точке x_0 . Покажем, что классы верхних и нижних функций непусты.

Пусть число $N \geq 0$ такое, что $|f(x, 0, 0)| < 2e^{\frac{N}{2}}$, а $R = \max(N, \alpha)$, где $\alpha = \frac{M + \sqrt{M^2 + 4}}{2}$.

Легко проверить, что функция

$$u(x) = e^{Rx} + e^{R(1-x)} - e^R - 1$$

— нижняя, а $v(x) \equiv -u(x)$ — верхняя функция.

3. Обозначая $\delta u_n(x) = u_{n+1}(x) - u_n(x)$, $\delta v_n(x) = v_{n+1}(x) - v_n(x)$ определим алгоритм чаплыгинского типа:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \delta u_n + P(u_n) &= -\delta u_n' + k(x) \delta u_n' + I(x) \delta u_n + P(u_n) = 0 \\ \Gamma \delta v_n + P(v_n) &= -\delta v_n' + k(x) \delta v_n' + I(x) \delta v_n + P(v_n) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\delta u_n(0) = \delta u_n(1) = 0, \quad \delta v_n(0) = \delta v_n(1) = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

где

$$k(x) = \frac{(M+1)[e^{-(M+1)x} - e^{(M+1)(x-1)}]}{I(x)}, \quad I(x) = \frac{2(M+1)^2}{I(x)},$$

$$I(x) = 2 - e^{(M+1)(x-1)} - e^{-(M+1)x}.$$

В качестве $u_0(x)$ и $v_0(x)$ могут быть взяты любые нижние и верхние функции, например, указанные в пункте 2.

Покажем, что $P(u_{n+1}) \leq 0$, если $P(u_n) \leq 0$. По формуле конечных приращений

$$P(u_{n+1}) = P(u_n) + P(u_{n+1}) - P(u_n) = -\delta u_n' + f_y \delta u_n' + f_y \delta u_n + P(u_n).$$

Поэтому достаточно показать, что $P(u_{n+1}) \leq \Gamma \delta u_n + P(u_n)$, то есть

$$[k(x) - f_y] \delta u_n' + [I(x) - f_y] \delta u_n \geq 0. \quad (6)$$

Согласно (4), (5) поправка δu_n определяется таким образом

$$\delta u_n(x) = - \int_0^1 G(x, \xi) P(u_n(\xi)) d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина для оператора $\Gamma u = -u'' + k(x)u' + I(x)u$ при условиях $u(0) = u(1) = 0$.

Она имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \omega_1(\xi) z_2(x) & \text{при } \xi \leq x \\ \omega_2(\xi) z_1(x) & \text{при } \xi \geq x, \end{cases}$$

где

$$z_i(x) = e^{(-1)^i (M+1) \left(\frac{1}{2} - x\right) - \frac{M+1}{2}} \quad (i=1, 2)$$

$$\omega_i(\xi) = \frac{e^{(-1)^i (M+1) \left(\frac{1}{2} - \xi\right) - \frac{M+1}{2}}}{(M+1) I(\xi)}$$

Учитывая выражение $\delta u_n(x)$ через $G(x, \xi)$, видим, что для доказательства неравенства (6) ввиду неотрицательности $\omega_i(\xi)$ и условия $P(u_n) < 0$ достаточно установить неравенства

$$[k(x) - f_y] z'_i(x) + [l(x) - f_y] z_i(x) \geq 0.$$

В силу того, что $\Gamma(z_i) = 0$, эти неравенства эквивалентны следующим:

$$z'_i(x) - f_y z'_i(x) - f_y z_i(x) \geq 0.$$

Учитывая условия $0 \leq f_y \leq M$, $|f_y| \leq M$, прямой подстановкой убедимся в справедливости этих неравенств.

Очевидно, что $u_{n+1}(x)$ удовлетворяет условиям (2), если им удовлетворяет $u_n(x)$. Следовательно, доказано, что алгоритмом (4), (5) действительно определяется последовательность нижних функций $u_n(x)$.

Доказательство того, что определяемые этим алгоритмом $v_n(x)$ — верхние функции, аналогично.

Так как $G(x, \xi) \geq 0$, то, исходя из дифференциальных неравенств $P(u_n) < 0 \leq P(v_n)$, получим $\delta v_n \leq 0 \leq \delta u_n$.

Таким образом, алгоритмы (4), (5) определяют монотонные последовательности нижних и верхних функций. Причем выполняются неравенства

$$u_0(x) < u_1(x) < \dots < u_n(x) < \dots < v_n(x) < \dots < v_1(x) < v_0(x).$$

4. Покажем, что последовательности $\{u'_n(x)\}$ и $\{v'_n(x)\}$ ограничены. Последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ ограничены функцией

$$\omega(x) = \max[|u_0(x)|, |v_0(x)|].$$

Легко установить важные для дальнейшего соотношения

$$|f(x, u_n, u'_n)| \leq A + M u_n'^2, \quad |f(x, v_n, v'_n)| \leq A + M v_n'^2, \quad (7)$$

где A — некоторая положительная постоянная. Действительно, например, для $f(x, u_n, u'_n)$ имеем

$$|f(x, u_n, u'_n)| = |f(x, 0, 0) + f_y u_n(x) + f_y u'_n(x)| \leq A + M u_n'^2,$$

где

$$A = \max |f(x, 0, 0)| + Mh + M, \quad h = \max_{0 < x < 1} \omega(x).$$

Следуя С. Н. Бернштейну [8], введем новые переменные

$$u_n(x) = -h + \frac{\ln p_n}{M}, \quad v_n(x) = h - \frac{\ln q_n}{M}.$$

Ради краткости мы покажем лишь ограниченность последовательности $\{u'_n(x)\}$, так как для $\{v'_n(x)\}$ это делается совершенно аналогично. Имеем

$$u'_n(x) = \frac{p'_n(x)}{Mp'_n(x)}, \quad u''_n(x) = \frac{p''_n(x)}{Mp'_n(x)} - \frac{p'_n(x)p''_n(x)}{M^2p_n^2(x)}$$

Подставляя эти выражения в неравенство $P(u_n) \leq 0$, с учетом оценок (7) будем иметь

$$u''_n \geq f(x, u_n, u'_n) \geq -A - Mu''_n, \\ \frac{p'_n(x)}{Mp'_n(x)} - \frac{p''_n(x)}{M^2p_n^2(x)} \geq -A - M \frac{p''_n(x)}{M^2p_n^2(x)}, \quad \frac{p'_n(x)}{Mp'_n(x)} \geq -A.$$

Но из построения функции $p_n(x)$ следует, что $p_n(x) \geq 1$ на $[0, 1]$, поэтому из последнего неравенства получим

$$p'_n(x) \geq -AMp_n(x).$$

Интегрируя это неравенство на интервале $(0, x)$, где $x \leq 1$, получим

$$p'_n(x) \geq p'_n(0) - AM \int_0^x p_n(t) dt.$$

В силу положительности $p_n(t)$, очевидно, верно и усиленное неравенство

$$p'_n(x) \geq p'_n(0) - AM \int_0^1 p_n(t) dt.$$

Точно так же интегрированием на интервале $(x, 1)$ приходим к соотношению

$$p'_n(x) \leq p'_n(1) + AM \int_0^1 p_n(t) dt.$$

Возвращаясь к производной $u_n(x)$, получим

$$Mu'_n(0)p_n(0) - AM \int_0^1 p_n(t) dt \leq Mu'_n(x)p_n(x) \leq \\ \leq Mu'_n(1)p_n(1) + AM \int_0^1 p_n(t) dt,$$

$$\frac{u'_n(0)p_n(0)}{p_n(x)} - A \int_0^1 e^{M[u_n(t) - u_n(x)]} dt \leq u'_n(x) \leq$$

$$\leq \frac{u'_n(1) p_n(1)}{p_n(x)} + A \int_0^1 e^{M[u_n(t) - u_n(x)]} dt.$$

Пусть

$$\alpha = \max [|u'_0(0)|, |u'_0(1)|].$$

Легко убедиться, что из последних неравенств следует оценка

$$|u'_n(x)| \leq C = \alpha e^{Mh} + A e^{2Mh}.$$

Нетрудно доказать ограниченность и последовательности $\{u'_n(x)\}$, что будет использовано в дальнейшем.

Используя соотношения (4) и разложение $f(x, u, u')$ в ряд Тейлора, получим для поправок δu_n равенство

$$-u''_n + f(x, u_n, u'_n) = [f_{y'} - k(x)] \delta u'_n + [f_y - l(x)] \delta u_n.$$

Учитывая ограниченность последовательностей $\{u'_n(x)\}$ и $\{u_n(x)\}$, а также неравенства (7), получим

$$|u''_n| \leq A + M u''_n + [M + \max |k(x)|] \cdot 2C + [M + \max |l(x)|] \cdot 2h = C_1.$$

5. Докажем, что последовательности нижних и верхних функций сходятся к решению задачи (1), (2).

Приведем доказательство только для нижних функций.

Из результатов предыдущего пункта вытекает, что последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{u'_n(x)\}$ удовлетворяют условиям теоремы Арцела. Отсюда следует, что первая из них в силу монотонности равномерно сходится к некоторой предельной функции $u(x)$. Легко видеть, что пределы любых сходящихся подпоследовательностей $\{u'_{n_k}(x)\}$ служат производной для $u(x)$ и, следовательно, совпадают. Покажем, что и сама последовательность $\{u'_n(x)\}$ сходится равномерно к $u'(x)$.

В самом деле, при обратном допущении существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что имеют место соотношения

$$\sup |u'_{n_i}(x) - u'(x)| \geq \varepsilon_0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Но тогда из $\{u'_{n_i}(x)\}$ невозможно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

Умножая обе части уравнения

$$-\delta u''_n + k(x) \delta u'_n + l(x) \delta u_n + f(x, u_n, u'_n) - u''_n = 0$$

на функцию Грина $G_0(x, \xi)$ для оператора $\frac{d^2}{dt^2}$ при условиях $y(0) = y(1) = 0$ и интегрируя на $[0, 1]$, получим

$$u_{n+1}(x) = \int_0^1 G_0 f(\xi, u_n(\xi), u'_n(\xi)) d\xi + \int_0^1 G_0 k(\xi) \delta u'_n(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_0^1 G_0 l(\xi) \delta u_n(\xi) d\xi.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, будем иметь

$$u(x) = \int_0^1 G_0(x, \xi) f(\xi, u(\xi), u'(\xi)) d\xi.$$

Итак, установлено, что $u(x)$ имеет вторую непрерывную производную и является решением задачи (1), (2).

Рассуждениями, сходными с теми, которыми мы воспользовались в пункте 2, доказывается единственность решения задачи (1), (2). Следовательно, предельные функции чеплыгинских приближений, построенных снизу и сверху, совпадают. Итак, полностью доказана

Теорема. Если в области $0 \leq x < 1$, $y^2 + y'^2 < \infty$ функция $f(x, y, y')$ непрерывна по x, y, y' , непрерывно дифференцируема по y и y' , имеют место соотношения $0 \leq f_y \leq M$, $|f_{y'}| \leq M$, то чеплыгинские приближения, определяемые алгоритмом (4), (5), равномерно сходятся к единственному решению задачи (1), (2).

Отрезок $[0, 1]$ и нулевые граничные условия были взяты только для простоты выкладок.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. Н. Слугина за ценные указания и постоянное внимание к работе.

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступила 6 XI 1963

Գ. Վ. ԳԵՆԺՅԱՆԻ

ԵՐԿԿԵՏԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ԶԱՊԼԻԳԻՆՅԱՆ ԵՐԿԿՈՂՄԱՆԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է

$$P(y) = -y'' + f(x, y, y') = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (2)$$

խնդրի լուծումը վերինը և ներքևից մոտարկելու հարցը: f ֆունկցիան որոշ պայմանների ենթարկելու դեպքում կառուցվում է առաջին «ներքին» (սվերին) մոտավոր լուծման օրինակ՝ $u_0(x)$ [$v_0(x)$]:

Եզրում է հաջորդական մոտավոր լուծումները որոշելու հետևյալ ալգորիթմը:

$$-\delta y_n'' + k(x) \delta y_n' + l(x) \delta y_n + P(y_n) = 0 \quad (3)$$

$$y_n(0) = y_n(1) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4)$$

որանի $\delta y_n = y_{n+1}(x) - y_n(x)$, $y_n(x) \equiv u_n(x)$ [$y_n(x) \equiv v_n(x)$], իսկ $k(\cdot)$ և $l(x)$ ֆունկցիաները սրտչվում են աված պարմաններով: Ապացուցվում է, որ ստացվող մոտավոր լուծումների հաջորդականությունները մոնոտոն են և ապացուցվում է հետևյալը:

Թեև որևէ: երբ $0 \leq x \leq 1$, $y^2 + y'^2 < \infty$ տիրույթում $f(x, y, y')$ ֆունկցիան անընդհատ և ըստ x -ի, y -ի և y' -ի, անընդհատ դիֆերենցելի ըստ y -ի և y' -ի, բնդ որում տեղի ունեն

$$0 \leq f_y \leq M, \quad |f_{y'}| \leq M$$

ապմանները, որանի M -ը որևէ հաստատուն և, ապա (3), (4) ալգորիթմով որոշվող չապլիգինի մոտավորությունները հավասարաչափ զուգամիտում են $[0, 1]$ հատվածում (1), (2) խնդրի լուծմանը, որը գոյություն ունի և ճիշակն է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
2. Бабкин Б. Н. Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. ПММ, 18, вып. 2, 1954.
3. Росфе-Бекетов Ф. С. О краевой задаче для нелинейного дифференциального уравнения. Математическое просвещение, вып. 1, 1957.
4. Пак С. А. Условия сохранения знака функции Грина задачи Штурма-Лиувилля. ДАН СССР, 148, № 6, 1963.
5. Балусев А. Н. К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина. ДАН СССР, 83, № 6, 1952.
6. Кондюрин Ю. Н. Сходимость метода Чаплыгина для решения двухточечной граничной задачи. Вестник ЛГУ, № 19, 1956.
7. Слугин С. Н. Некоторые применения методов двусторонних приближений. Известия высш. уч. зав., математика, № 6 (7), 1958.
8. Бернштейн С. Н. Об уравнениях вариационного исчисления. Успехи мат. наук, вып. 8, 1940.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян

Некоторые вопросы развития теории
анизотропных слоистых оболочек*

Введение. Настоящий обзор посвящается современным вопросам теории анизотропных и неоднородных (слоистых) оболочек. Здесь освещаются лишь те вопросы, которые наиболее важны с точки зрения автора и по своему духу близки его научным интересам.

Обзор составлен на основании работ, опубликованных как у нас в СССР, так и за границей. Однако, основное внимание уделяется исследованиям советских авторов.

Здесь сознательно не рассматриваются работы, посвященные трехслойным оболочкам, так как они достаточно полно освещены в ранее опубликованном обзоре [1].

Из большого числа работ, посвященных теории анизотропных слоистых оболочек, здесь будет цитирована лишь часть, которая необходима автору для подтверждения выдвинутых идей и положений.

Считаем нужным отметить, что первые работы по теории анизотропных оболочек выполнены в СССР в двадцатых годах нашего века и посвящены вопросу теории осесимметрично нагруженных ортотропных оболочек вращения [2].

Вопросы линейной теории статического равновесия анизотропных слоистых оболочек. Основы общей теории статического равновесия анизотропных слоистых оболочек разрабатывались на базе классической теории изотропных оболочек [3—6] и теории анизотропных слоистых пластинок [7, 8]. Симбиоз этих двух разделов теории упругости дал возможность построить общую теорию анизотропных слоистых оболочек на уровне классической теории изотропных оболочек. Однако, построенная при этом теория содержит серию специфических особенностей, которые препятствуют непосредственному распространению всех результатов классической теории изотропных оболочек на случай анизотропных слоистых оболочек.

Вся специфика теории анизотропных слоистых оболочек обусловлена соотношениями упругости, которые принципиально отличаются от соотношений упругости однородных изотропных оболочек.

Принимая для всего пакета оболочки в целом гипотезу недеформируемых нормалей, построена общая теория анизотропных сло-

* Работа доложена на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

истых оболочек в случае, когда в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки [9—13].

Как и следовало ожидать [7, 8], в общей теории анизотропных слоистых оболочек уравнения равновесия*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B T_1}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} T_2 + \frac{\partial A S_{21}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{12} + A B k_1 N_1 &= - A B X, \\ \frac{\partial A T_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial B S_{12}}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} S_{21} + A B k_2 N_2 &= - A B Y, \\ -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{A B} \left(\frac{\partial B N_1}{\partial x} + \frac{\partial A N_2}{\partial \beta} \right) &= - Z, \\ \frac{\partial B M_1}{\partial x} + \frac{\partial A H_{21}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_{12} - \frac{\partial B}{\partial x} M_2 &= A B N_1, \\ \frac{\partial A M_2}{\partial \beta} + \frac{\partial B H_{12}}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} H_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 &= A B N_2, \\ S_{12} - S_{21} + \frac{H_{12}}{R_1} - \frac{H_{21}}{R_2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

геометрические соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + k_1 \omega, \quad \varepsilon_2 = \dots \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right), \\ \gamma_1 &= - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - \frac{1}{A B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial k_1}{\partial x} \frac{u}{A} + \frac{\partial k_2}{\partial \beta} \frac{v}{B} - k_1^2 \omega, \quad \gamma_2 = \dots \\ \tau &= - \frac{2}{A B} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) + \\ &+ (k_1 - k_2) \left[\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) - \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v}{B} \right) \right]; \end{aligned} \quad (2)$$

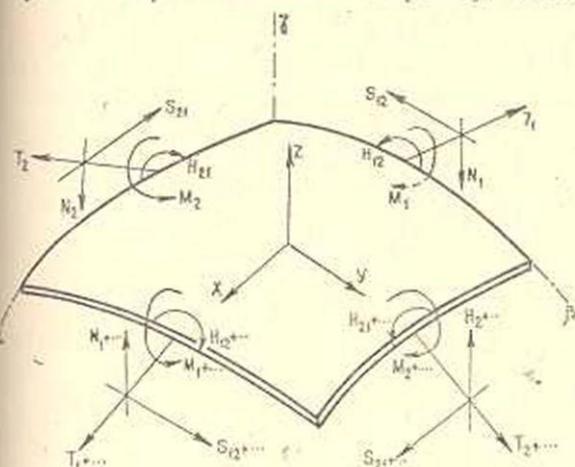
уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau + k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega + \\ + k_1 \left[A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \omega \frac{\partial A}{\partial \beta} - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] &= 0, \\ A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \tau + k_1 \frac{\partial B}{\partial x} \omega + \\ + k_2 \left[B \frac{\partial \omega}{\partial x} + \omega \frac{\partial B}{\partial x} - A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

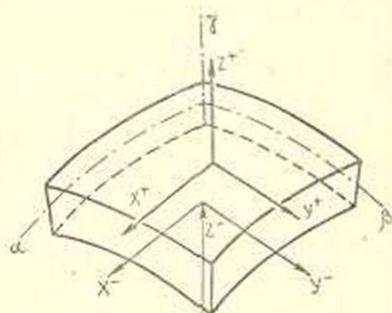
* Здесь и в последующем принимаются общеизвестные обозначения [3—8, 13].

$$k_2 x_1 + k_1 x_2 + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{A} \left[B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \omega \right] \right\}$$

и геометрические граничные условия остаются такими же, как и в случае изотропных оболочек [3—6]. Статические же граничные условия остаются неизменными лишь в общей формулировке (фиг. 1, 2).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Что же касается соотношений упругости, то они, как было указано выше, принципиально отличаются от соотношений упругости теории изотропных оболочек и в случае анизотропных слоистых оболочек, в простейшем варианте, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} (T_1, T_2) \quad T_i &= C_{ii} \varepsilon_i + C_{ik} \varepsilon_k + C_{ij} \omega + K_{ii} x_i + K_{ik} x_k + K_{ij} \tau, \\ (S_{12}, S_{21}) \quad S_{ik} &= C_{ij} \omega + C_{ij} \varepsilon_i + C_{kj} \varepsilon_k + K_{ij} \tau + K_{ij} x_i + K_{kj} x_k + \\ &+ k_k (K_{ij} \omega + K_{ij} \varepsilon_i + K_{kj} \varepsilon_k + D_{ij} \tau + D_{ij} x_i + D_{kj} x_k), \\ (M_1, M_2) \quad M_i &= D_{ii} x_i + D_{ik} x_k + D_{ij} \tau + K_{ii} \varepsilon_i + K_{ik} \varepsilon_k + K_{ij} \omega, \\ (H_{12}, H_{21}) \quad H_{ik} &= D_{ij} \tau + D_{ij} x_i + D_{kj} x_k + K_{ij} \omega + K_{ij} \varepsilon_i + K_{kj} \varepsilon_k \\ &(i = 1, 2; k = 1, 2; j = 6). \end{aligned} \quad (4)$$

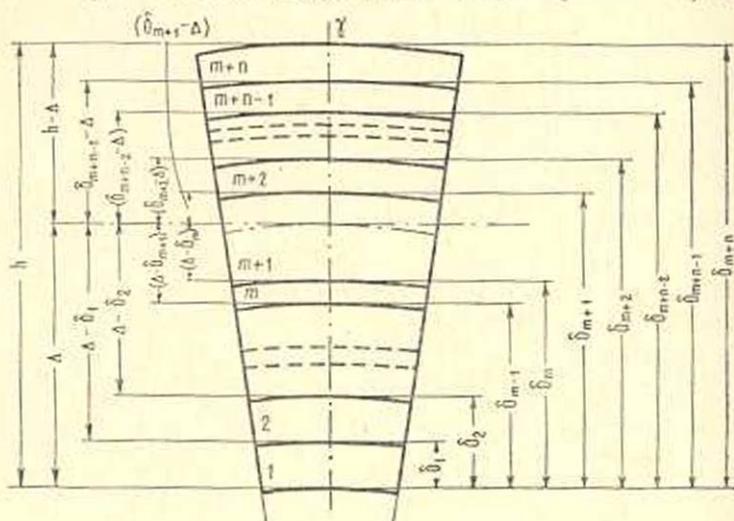
(Поперечные силы N_i , как и в случае изотропных оболочек, определяются из уравнений равновесия).

Для полноты картины приведем также значения жесткостей (фиг. 3)

$$C_{pq} = \sum_{s=1}^{m+n} B_{pq}^s (\delta_s - \delta_{s-1}), \\ K_{pq} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m+n} B_{pq}^s [(\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2) - 2\Delta (\delta_s - \delta_{s-1})], \quad (5)$$

$$D_{pq} = \frac{1}{3} \sum_{s=1}^{m+n} B_{pq}^s [(\delta_s^3 - \delta_{s-1}^3) - 3\Delta(\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2) + 3\Delta^2(\delta_s - \delta_{s-1})].$$

Рассматривая соотношения упругости (4), замечаем, что в общем случае анизотропии (здесь и в последующем под общим случаем анизотропии оболочки будем понимать случай, когда в каждой точке каждого слоя имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная срединной поверхности оболочки), в отличие от случая однородной изо-



Фиг. 3.

тропной оболочки, соотношения упругости анизотропных слоистых оболочек содержат «дополнительные» члены, которые могут иметь порядок «основных» членов. Эти «дополнительные» члены (подчеркнутые в (4)) характеризуют взаимное влияние различных видов деформаций.

В силу указанной структуры соотношений упругости, основные уравнения теории анизотропных слоистых оболочек, даже в случае весьма пологих или круговых цилиндрических оболочек, записываются в виде сложной и громоздкой системы дифференциальных уравнений в частных производных восьмого порядка с неразделяющимися переменными.

Полную систему дифференциальных уравнений линейной теории анизотропных слоистых оболочек можно составить и решить различными способами [13]. Наиболее распространенными способами являются:

а) решение задачи в перемещениях, то есть представление полной системы уравнений в виде трех дифференциальных уравнений относительно трех искоемых перемещений $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ и $w(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w &= X, \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w &= Y, \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w &= Z, \end{aligned} \quad (6)$$

б) решение задачи в перемещениях и функциях напряжений, то есть, например, представление полной системы в виде двух дифференциальных уравнений относительно нормального перемещения w и функции напряжений $F(x, \beta)$

$$\begin{aligned} L_1 w - L_3 F + \nabla_r F &= Z \\ L_2 F + L w + \nabla_r w &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

в) решение задачи в потенциальных функциях, то есть, например, представление основного уравнения в виде одного уравнения восьмого порядка относительно одной потенциальной функции Φ

$$L_3 \Delta + L_4 \Phi + L_5 \Phi = 0, \quad (8)$$

г) решение задачи в усилиях и моментах, то есть непосредственно с помощью уравнений равновесия (1) и уравнений неразрывности деформаций, записанных в усилиях и моментах.

В этих уравнениях линейные операторы L_i с переменными коэффициентами (в общем случае) содержат множители, зависящие от жесткостей C_{ik} , K_{ik} , D_{ik} .

В общем случае эти операторы имеют весьма сложную структуру, например,

$$\begin{aligned} L_4 = & \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{A} \left\{ B \frac{\partial}{\partial x} L(d_{22}) + \frac{\partial B}{\partial x} [L(d_{22}) - L(d_{11})] - \right. \\ & \left. - \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} L(d_{66}) - \frac{\partial A}{\partial \beta} L(d_{66}) \right\} + \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left\{ A \frac{\partial}{\partial \beta} L(d_{11}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial A}{\partial \beta} [L(d_{11}) - L(d_{22})] - \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial x} L(d_{22}) - \frac{\partial B}{\partial x} L(d_{66}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(d_{ik}) = & \frac{d_{k2}}{B} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A^2} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right] + \\ & + 2 \frac{d_{k6}}{AB} \left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial \beta} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial x} \right] + \\ & + \frac{d_{k1}}{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{1}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right], \quad d_{ik} = d_{ik}(C_{ik}, k_{ik}). \end{aligned}$$

Описанная сложная картина существенно упрощается в случае ортотропных оболочек (здесь и в последующем под ортотропными оболочками будем понимать такие оболочки, которые изготовлены из ортотропного материала так, что два главных направления упругости в каждой точке каждого слоя оболочки совпадают с направлениями соответствующих линий кривизны срединной поверхности, а третье направление — с нормалью к срединной поверхности).

Для полноты картины укажем, что в случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упру-

гости не совпадают с направлениями линий кривизны, повторяется картина общего случая анизотропии, то есть задача математически формулируется так же, как для общей анизотропии, при этом лишь надо учесть, что жесткости с индексами „16“ и „k6“ будут представлены посредством соответствующих жесткостей с индексами «11», «22», «12», «66».

В случае ортотропных оболочек в соотношениях упругости все члены с коэффициентами «16» и «26» превращаются в нули и соотношения упругости приобретают структуру соотношений упругости изотропных оболочек. Поэтому исходные уравнения получают общую структуру соответствующих дифференциальных уравнений теории изотропных оболочек. При этом ошибочно утверждать, что теория ортотропных оболочек совпадает с теорией изотропных оболочек. Однако, следует отметить, что родственная структура разрешающих уравнений дает широкие возможности распространять разработанные для изотропных оболочек методы решения основных дифференциальных уравнений на случай ортотропных оболочек [13].

При построении общей теории анизотропных оболочек не были забыты и статико-геометрические аналогии. Как и в теории изотропных оболочек, установлены статико-геометрические аналогии [14], которые представляют структурную связь между однородными статическими и геометрическими соотношениями.

Таким образом, мы можем констатировать, что в принципе общая теория анизотропных слоистых оболочек на основании гипотезы недеформируемых нормалей построена. Однако, и на сегодня имеется много интересных вопросов, которые важны с точки зрения общей теории анизотропных оболочек. К таким вопросам, например, относятся: анализ асимптотических свойств интегралов дифференциальных уравнений анизотропных слоистых оболочек, установление связи между механическими характеристиками и асимптотическими свойствами интегралов уравнений и т. д. Большое прикладное значение имела бы разработка общих принципов установления рациональных типов анизотропии и неоднородности оболочек при заданных вероятных формах нагружения. Весьма актуальным надо считать разработку теории анизотропных оболочек, изготовленных из материалов с различными физико-механическими свойствами на сжатие и растяжение.

В завершение этого раздела приведем некоторые соображения относительно принятой исходной гипотезы недеформируемых нормалей Кирхгоффа-Лява.

В последнее время в литературе по теории оболочек и пластинок все чаще и чаще указывается, что гипотеза Кирхгоффа-Лява, будучи чисто геометрической, с известной точностью справедлива для тонких оболочек и пластинок независимо от типа материала оболочки. Такое утверждение надо считать неверным. Дело в том, что гипотеза недеформируемых нормалей, будучи геометрически сформулированной, имеет явно физико-механическое содержание. В этом легко убе-

даться, рассматривая, например, теории анизотропных оболочек и пластинок, построенные без гипотезы Кирхгоффа-Лява [13]. Из этих исследований видно, что теории оболочек и пластинок, построенные на основании гипотезы недеформируемых нормалей, безразличны к поперечным нормальным и сдвиговым характеристикам материала оболочки, т. е. к физико-механическим отношениям типа E_{II}/G_{I3} , E_{II}/G_{K3} , E_{II}/E_{33} и т. д. Таким образом, принимая гипотезу недеформируемых нормалей, при различных значениях отношений типа E_{II}/E_{33} и т. д., для рассматриваемой оболочки получим одни и те же значения перемещений и напряжений, что в корне ошибочно, тем более для анизотропных оболочек.

В связи с этим напрашивается разговор о точности и пределах применимости теории анизотропных слоистых оболочек, построенной на базе гипотезы недеформируемых нормалей.

Этот весьма важный вопрос привлек внимание исследователей лишь недавно и до сих пор окончательно не исследован. Дело в том, что установленная для однородных изотропных оболочек точность гипотезы Кирхгоффа-Лява сформулирована чисто геометрически и не отражает всей сложной картины, связанной с анизотропией и слоистостью оболочки.

Здесь взамен простой и четкой оценки

$$1 \pm \frac{h}{R_i} \approx 1$$

напрашивается что-то обобщающее, вроде

$$1 \pm f\left(\frac{h}{R_i}, \nu_i, E_{II}/G_{I3}, E_{II}/E_{33}, \dots\right) \approx 1. \quad (9)$$

По-видимому, решение этой весьма важной проблемы следует искать в исследованиях анизотропных слоистых оболочек, выполняемых на базе уравнений трехмерной задачи теории упругости анизотропного тела.

В последующих разделах обзора будем рассматривать отдельные частные теории и отдельные типы оболочек. Однако, при этом будут освещаться не только узкие специфичные вопросы, но и общие положения, которые важны с точки зрения общей теории анизотропных слоистых оболочек вообще.

Безмоментная теория анизотропных слоистых оболочек. Как и в теории изотропных оболочек, под безмоментной теорией подразумевается приближенный метод расчета оболочек, основанный на предположении такого распределения расчетных напряжений по толщине оболочки, что в уравнениях равновесия (1) члены моментного происхождения могут быть пренебрежены. Эта наиболее элементарная теория до сих пор построена лишь для однородных и симметрично собранных относительно срединной поверхности слоистых анизотропных оболочек [15, 13]. Что же касается произвольно соб-

ранных слоистых оболочек, то здесь, в общем случае, нет возможности реализовать безмоментное напряженное состояние вообще и, пожалуй, можно говорить лишь об отдельно взятых безмоментных слоях оболочки.

Следует указать, что до последних лет безмоментная теория анизотропных оболочек, ввиду кажущейся тривиальности, не обращала на себя внимание широкого круга исследователей. Однако, уже выполненные исследования [15, 16, 13] говорят, что вопрос безмоментной теории анизотропных и, тем более, анизотропных слоистых оболочек представляет самостоятельный интерес и нуждается в дополнительных исследованиях*.

Любопытно отметить, что уже для однородной оболочки наличие „дополнительных“ членов в соотношениях упругости (4) в задачах прочности и деформативности анизотропной оболочки приводит к качественно новым, специфичным результатам [13, 15].

Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. Вопросам построения теории и разработки методов интегрирования уравнений симметрично нагруженных анизотропных слоистых оболочек вращения посвящены исследования многих авторов [2, 13, 17—24]. Однако, все известные нам работы, за исключением одной [23], посвящены ортотропным оболочкам. В этих работах, как правило, введением вспомогательных функций типа Мейсснера-Рейсснера исходные уравнения представляются в виде системы двух уравнений относительно двух искомых функций $V(s)$ и $W(s)$ или, в общем случае, наложением некоторых ограничений на механические характеристики оболочки ($C_{22}/C_{11} = K_{22}/K_{11} = D_{22}/D_{11} = \lambda$) система двух дифференциальных уравнений приводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка относительно искомой комплексной функции σ

$$L(s) + iA(C_{ik}, K_{ik}, D_{ik}) \frac{\sigma}{R_2} = \Psi(s), \quad (10)$$

$$\sigma = w + i\varphi(C_{ik}, K_{ik}, D_{ik}) w,$$

(укажем, что в некоторых частных случаях для получения уравнения (10) нет необходимости вводить приведенные выше ограничения).

Исходные уравнения теории анизотропных слоистых оболочек вращения в общем случае, как правило, решаются методом асимптотического интегрирования. При этом ограничиваются лишь первым приближением (кстати, в этом случае введенное механическое ограничение теряет свою силу). Полученное таким образом решение, как и следовало ожидать, не может быть использовано вблизи особых точек. В теории анизотропных оболочек вращения нет исследований, в которых найденные интегралы исходных дифференциальных урав-

* Доскональное исследование безмоментного состояния анизотропных оболочек важно также потому, что безмоментная теория лежит в основе весьма важной задачи устойчивости анизотропных слоистых оболочек.

лений сохраняют силу и в особых точках [25, 26]. Такое исследование представило бы большой интерес, так как в отличие от изотропных оболочек, здесь мы, вероятно, столкнемся как с геометрическими, так и с физико-механическими особенностями оболочки. Пожалуй, здесь мы будем иметь физико-геометрические особые точки.

Анизотропия оболочки существенным образом влияет на величины зон распространения эффектов от линий и точек искажения. Например, она существенным образом влияет на зону распространения краевого эффекта. В этом легко убедиться, рассматривая формулу длины зоны распространения краевого эффекта в однородной ортотропной круговой цилиндрической оболочке

$$S^* = \pi R \sqrt{\frac{h}{R} \left[3 \left(\frac{E_\theta}{E_t} - \nu_\theta^2 \right) \right]^{-1/2}}. \quad (11)$$

Результаты, полученные при исследовании зон распространения эффектов от линий искажения, были использованы при построении теории конструктивно анизотропных оболочек вращения [13, 27]. В этих работах, использованием законов распространения краевого эффекта, установлены принципы „размазывания“ эффекта дискретно расположенных поперечных ребер при переходе к конструктивно анизотропным оболочкам.

Однако, мы считаем, что вопрос построения общей теории конструктивно анизотропных оболочек вращения и на сегодня представляет большой интерес. Здесь следует построить достаточно точную теорию оболочек вращения в общем случае анизотропии с дискретно расположенными поперечными ребрами и найти обоснованные правила „размазывания“ ребер по всей оболочке. При этом особого внимания требует задача контакта (точного) одного ребра с анизотропной оболочкой вращения.

В заключение этого раздела еще раз напомним, что лишь в одной работе [23] сделана попытка исследования оболочек вращения в общем случае анизотропии. В указанной работе рассматривается круговая цилиндрическая оболочка, изготовленная из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки, что, как было указано выше, задачу сводит к уравнениям общего случая анизотропии.

Мы считаем, что исследование симметрично нагруженных оболочек вращения в общем случае анизотропии должно быть в центре внимания исследователей, так как эта проблема имеет как большое теоретическое, так и важное прикладное значение. (Здесь мы, например, имеем в виду оболочки вращения, косоармированные стекловолокном, проволокой, железобетонные оболочки с косою арматурой, металлические оболочки с часто расположенными косыми ребрами и др.).

Анизотропные слоистые цилиндрические оболочки. Теория анизотропных цилиндрических оболочек разработана достаточно полно. Основные уравнения теории в случае однородных ортотропных оболочек были получены еще в тридцатых годах нашего столетия [28]. Что же касается общего случая анизотропии, то основные уравнения цилиндрических оболочек были получены лишь в 1948—50 годах [13].

Цилиндрическая форма оболочки принципиально новых особенностей в общую теорию не вносит, однако, в случае цилиндрических оболочек исходные уравнения существенно упрощаются и появляются реальные возможности решения этих уравнений в случае большой серии конкретных задач ортотропных оболочек.

Обобщением методов Навье и М. Леви на случай слоистых ортотропных оболочек, решены многочисленные конкретные задачи слоистых ортотропных цилиндрических оболочек, представляющие большой интерес для современной техники. Получены асимптотические формулы для внутренних усилий ортотропной цилиндрической оболочки в окрестности точки приложения сосредоточенной силы [29].

Много работ посвящено конструктивно анизотропным цилиндрическим оболочкам. Из этой серии работ особо следует отметить те, в которых, исходя из теории оболочек с конечным числом подкреплений, делаются попытки дать достаточно обоснованные условия „размазывания“ ребер [5, 13, 27, 30—32].

Однако, как и в случае оболочек вращения, проблема „размазывания“, то есть основная задача конструктивно анизотропных цилиндрических оболочек, до сих пор окончательно не разрешена. На сегодня мы еще не имеем четких и обоснованных рецептов, которыми можно пользоваться при рассмотрении цилиндрических оболочек с различными типами подкреплений, материалов ребер и оболочек, граничных условий и нагрузок. Особо важным надо считать разработку теории цилиндрических оболочек, косо подкрепленных ребрами или навивкой. В этом случае задача „размазывания“ становится весьма специфичной, ибо сразу сталкиваемся с вопросами общего случая анизотропии.

Общий случай анизотропии является слабым местом в теории цилиндрических оболочек. В этой области почти ничего не сделано. Здесь мы большие надежды возлагаем на метод малого физического параметра, где в роли малого параметра, по которому разлагаются искомые величины задачи, выступает не относительная толщина h/R_0 , а некоторая малая физическая величина типа [117]

$$\mu = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}D_{66}}} < 1. \quad (12)$$

В теории анизотропных оболочек особый интерес представляют задачи концентрации напряжений у краев отверстий, задачи оболочек с подкрепленными отверстиями и другие. Нам кажется, что эти задачи в случае существенно анизотропных оболочек должны быть

исследованы с помощью более точных уравнений, чем уравнения классической теории, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей. Дело в том, что классическая теория не в состоянии дать достаточно точную картину распределения напряжений вблизи от линий искажений, что очень важно при рассмотрении задачи оболочек с отверстиями [118]. Мы полагаем, что эти исследования надо начать с анизотропных весьма пологих и цилиндрических оболочек.

Теория анизотропных оболочек, ввиду большого числа независимых упругих постоянных, дает возможность по-иному, с единых физических позиций, подойти к построению приближенных теорий как изотропных, так и анизотропных оболочек. В некоторых работах [33, 34], варьированием упругих постоянных уравнений анизотропной цилиндрической оболочки, получены семь самостоятельных вариантов приближенных уравнений теории цилиндрических оболочек. Показана взаимная равнозначность некоторых геометрических и статических гипотез прикладных теорий оболочек.

С точки зрения построения приближенных теорий анизотропных оболочек вообще большой интерес представили бы исследования асимптотических свойств интегралов уравнений анизотропных цилиндрических оболочек.

Пологие анизотропные оболочки. Теория анизотропных слоистых оболочек с большим показателем изменчивости. В 1947—48 годах уже были записаны исходные дифференциальные уравнения теории пологих оболочек в общем случае анизотропии [9, 10], однако, до сих пор ни одна конкретная задача в общем случае анизотропии не решена, и все последующие исследования были посвящены ортотропным оболочкам [13].

При решении задач пологих ортотропных слоистых оболочек были использованы как метод Навье, так и метод М. Леви. Здесь достаточно эффективным оказывается обобщенный метод Навье, с усилением сходимости рядов путем выделения решений некоторой изотропной пластинки. Показано существенное влияние слоистости на напряженное и деформированное состояние пологих оболочек, в частности, указано, что периферийное расположение материалов с большим модулем упругости эффективнее для пологих оболочек, чем для подъемистых, а также эффективнее для оболочек с линиями и точками искажения, чем для гладких оболочек [13].

Проблема пологих оболочек в общем случае анизотропии, как и в случае других типов оболочек, остается не разрешенной и, вероятно, может быть разрешена с помощью применения метода малого физического или физико-геометрического параметра, то есть примерно так, как в случае цилиндрической оболочки.

Уравнения теории пологих анизотропных оболочек, как и в случае изотропных оболочек [6], могут быть истолкованы как уравнения теории оболочек с большим показателем изменчивости. Однако, как и следовало ожидать, они могут быть использованы и при решении

задач, казалось бы мало похожих на задачу о построении напряженных состояний с большим показателем изменчивости. (Например, при рассмотрении задач пологих оболочек, оболочек нулевой гауссовой кривизны, оболочек, не имеющих особенностей, при рассмотрении задач о построении простого краевого эффекта и др.).

Приведенные выше проблемы и задачи заимствованы из арсенала теории изотропных оболочек, и поэтому все они в случае вьизотропных оболочек нуждаются в коррективах. Дело в том, что анизотропия и слоистость оболочки настолько действенны, что вынудят внести коррективы не только в формулировку задач, но зачастую и в определения. Например, в случае пологой цилиндрической оболочки необходимо уточнить определение „не слишком длинная оболочка“; или, например, надо уточнить формулы асимптотического представления интегралов исходных дифференциальных уравнений

$$\sigma = k^q \psi(\alpha, \beta, k) e^{k\omega(\alpha, \beta, k)}, \quad \psi = \psi_0 + \frac{1}{k} \psi_1 + \frac{1}{k^2} \psi_2 + \dots, \quad (13)$$

так как здесь показатель изменчивости будет функцией не только относительной толщины, но и физико-механических характеристик материала оболочки [13, 6].

Нелинейная теория анизотропных слоистых оболочек. Этот раздел теории анизотропных слоистых оболочек начал развиваться лишь в последние годы. Поэтому полученные здесь результаты несколько ограничены и, как правило, на основании нелинейной теории изотропных оболочек, обобщают результаты линейной теории анизотропных слоистых оболочек на случай нелинейных задач.

На сегодня в основном завершено построение исходных соотношений и уравнений на уровне нелинейной теории изотропных оболочек Кармана-Власова [20, 35—39].

Наиболее полно изучены уравнения приближенной теории пологих оболочек

$$\begin{aligned} L_1(D_{ik}, K_{ik}) \omega - L_3(C_{ik}K_{ik}) \varphi + L_5 \varphi \omega + \nabla_i \varphi &= Z, \\ L_2(C_{ik}) \varphi + L_4(C_{ik}, K_{ik}) \omega + L_6 \varphi \omega - \nabla_i \omega &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

которые интегрированы лишь в случае ортотропной оболочки, при этом использованы приближенные методы интегрирования. Были использованы как различные варианты метода последовательных приближений и метода малого параметра (метод возмущений), так и прямые методы типа Ритца и Бубнова-Галеркина. Однако, до сих пор нет исследований, посвященных обоснованию применения этих методов в случае анизотропных оболочек. Надо полагать, что и здесь анизотропия внесет свои коррективы.

Пожалуй, было бы весьма эффективным применение функционального анализа для исследования общих особенностей и обоснования применения приближенных и прямых методов в нелинейной теории анизотропных оболочек. Здесь напрашивается обобщение боль-

шой серии работ в этой области, выполненных по теории изотропных оболочек [40, 41], на случай анизотропных оболочек.

Наконец, отметим необходимость постановки исследований по нелинейной теории подкрепленных и конструктивно анизотропных слоистых оболочек. В связи с этим, не анализируя ее значения и фактического места в общей теории оболочек, отметим исследования гофрированных мембран и оболочек [42, 43], теория которых может сыграть важную роль при построении нелинейной теории подкрепленных и конструктивно анизотропных оболочек.

Вопросы устойчивости и колебаний анизотропных слоистых оболочек. Задачи устойчивости и свободных колебаний анизотропных слоистых оболочек, по сути дела, как и в случае изотропных оболочек, сводятся к определению собственного значения однородной системы дифференциальных уравнений с однородными граничными условиями.

Вопросы устойчивости ортотропных оболочек были предметом исследования уже четверть века тому назад [28, 39]. В этих работах, исходя из приближенных уравнений локальной устойчивости, рассмотрены некоторые задачи устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек в линейной постановке.

В последующем задачи устойчивости ортотропных цилиндрических, сферических и конических оболочек, при различных условиях закрепления краев и нагружения, были рассмотрены многими авторами [44—47]. Из этой большой серии работ наибольший интерес представляют те, в которых рассматриваются различные варианты совместного действия различных типов нагрузок. Дело в том, что в этих случаях ярче всего сказывается влияние анизотропии на критические параметры задачи.

Как и в теории устойчивости изотропных оболочек, большой интерес представляют задачи устойчивости анизотропных оболочек в геометрически нелинейной постановке [49—51]. Эти исследования дали возможность определить нижние критические значения внешней нагрузки, то есть величину нагрузки, соответствующую нижней границе устойчивых равновесных изогнутых форм оболочки.

Исследование устойчивости ортотропной слоистой оболочки в большом привело к интересным результатам [108]. Установлено, что, в отличие от однородных и относительно срединной поверхности симметрично неоднородных (симметрично собранных слоистых) оболочек, в общем случае неоднородной по толщине (произвольно слоистой) оболочки, потеря устойчивости в большом возможна без „хлопка“. Показано, что соответствующим выбором типа неоднородности (слоистости) можно добиться уменьшения склонности оболочки к „хлопку“. Указывается возможность потери устойчивости неоднородной пластинки с „хлопком“.

Приведенные выше исследования относятся лишь к ортотропным оболочкам. Несмотря на то, что уравнения локальной устойчи-

ности оболочек в общем случае анизотропии были написаны еще в 1947—48 годах [9, 10], на сегодня мы не имеем ни одного исследования статической устойчивости какой-либо оболочки в общем случае анизотропии. Мы считаем, что эти исследования весьма важны как с точки зрения общей теории, так и с точки зрения приложений.

Совершенно не исследованы вопросы устойчивости анизотропных оболочек, ослабленных отверстиями (малыми и большими).

Большой интерес представили бы исследования устойчивости анизотропных оболочек при ударном и динамическом нагружении.

Несмотря на наличие некоторого количества интересных работ по устойчивости конструктивно анизотропных оболочек, проблему устойчивости анизотропных оболочек с дискретно расположенными ребрами жесткости надо считать не разрешенной и весьма актуальной.

Мы ждем обобщения исследований [52, 53], по послекритическому поведению изотропных оболочек, на случай анизотропных слоистых оболочек.

Безусловно интересным является разработка методов нахождения форм потери устойчивости, в особенности в общем случае анизотропии.

Мы хотели бы обратить внимание на задачи устойчивости и послекритического поведения анизотропных слоистых оболочек с начальными несовершенствами. Эти несовершенства, как и следует ожидать, будут не только геометрическими, но и физико-механическими и могут внести существенно новые положения в теорию устойчивости оболочек с начальными механико-геометрическими несовершенствами.

Уравнения колебаний анизотропных оболочек были записаны в 1947—48 годах [9, 10]. В последующем рассмотрены конкретные задачи по определению частот свободных колебаний ортотропных сферических и конических оболочек в линейной [54—57] и нелинейной [24, 58] постановках при различных типах граничных закреплений. Рассмотрены задачи вынужденных нелинейных колебаний ортотропных сферических и конических оболочек [58].

Исследование вынужденных колебаний весьма пологих ортотропных слоистых оболочек [59] привело к любопытному факту, заключающемуся в том, что в нелинейных вынужденных колебаниях оболочек, кроме обычного резонанса, возможны резонансы на полонинных и кратных частотах.

Первые задачи динамической устойчивости ортотропных оболочек в линейной постановке были решены в 1949—50 годах [60, 61]. В этих работах, обычным образом [62], задача определения областей динамической неустойчивости ортотропной цилиндрической панели была сведена к уравнению Матье.

Большая серия работ [63—65, 108] посвящена нелинейным задачам динамической устойчивости анизотропных слоистых оболочек. Определены критические частоты и амплитуды установившихся резонансных колебаний. Указывается возможность существования резонансных ко-

обаний для частот, меньших критических. Приводятся соотношения для определения нижних критических частот. Показано, что нет принципиальной разницы в послекритическом поведении ортотропных произвольно неоднородных по толщине пластинок и оболочек. Показано также, что при определенной неоднородности строения пластинки по толщине возможны резонансные колебания для частот, меньших критических (это характерно, вообще говоря, лишь для оболочки). Доказала необходимость учета невозмущенных деформаций при определении областей параметрического резонанса [65].

Для ясности укажем, что в цитированных работах [54—65], как правило, основным аппаратом исследования являлся вариационный метод Бубнова-Галеркина.

Здесь мы считаем, что основными предметами исследований должны стать: задачи динамической устойчивости оболочек в общем случае анизотропии; задачи динамической устойчивости анизотропных оболочек, подкрепленных дискретно расположенными ребрами. Указанные задачи должны быть решены как в линейной, так и в нелинейной постановках.

Некоторые работы последних лет [66—71] посвящены исследованию устойчивости анизотропных слоистых оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Во всех этих работах, обычным образом [72], устанавливаются зависимости между формой колебания и скоростью флаттера, в случае же нелинейной задачи—также и связь между амплитудой установившихся флаттерных колебаний и скоростью потока.

Проанализирована [67] зависимость критической скорости флаттера от числа волн в окружном направлении ортотропной слоистой круговой цилиндрической оболочки конечной длины. Показано, что, в отличие от однородных изотропных оболочек, критическое число волн в окружном направлении существенно зависит от механических характеристик материала слоев и от типа слоистости оболочки, то есть от отношений типа E_{12}/E_{11} и ν_1/ν_2 .

На примере ортотропной цилиндрической панели [66, 69] показана возможность существования флаттерных колебаний для скоростей, меньших критических. Определены нижние и верхние критические скорости флаттера и амплитуды установившихся колебаний. Указано, что, в пределах изменения скорости от нижней критической до верхней, невозмущенное состояние оболочки устойчиво в малом, а при больших возмущениях устанавливается изогнутое устойчивое состояние.

Особо следует отметить исследование [68], посвященное задаче устойчивости бесконечно длинной анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Как частный вариант общего случая анизотропии, предполагается, что оболочка изготовлена из ортотропного материала так, что главные направления упругости не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки. Пока-

зано, что критическая скорость флаттера существенным образом зависит как от ориентации главных направлений упругости материала, так и от отношений типа E_{1k}/E_{11} .

Здесь следует отметить, что исследования в области флаттера анизотропных оболочек, по сути дела, только начаты, и в этой области еще очень многое должно быть сделано.

Температурная задача. Ползучесть. Пластичность. Этим трем, безусловно важным, вопросам теории анизотропных слоистых оболочек посвящается весьма малое количество исследований.

Работы, посвященные температурной задаче теории анизотропных слоистых оболочек [23, 35, 73, 74], по сути дела, обобщают исследования термоупругой задачи изотропных оболочек на случай ортотропных слоистых оболочек. Исходя из классической постановки задачи термоупругости [75], рассматриваются стационарные задачи термоупругости различных типов ортотропных слоистых оболочек. Более подробно исследованы оболочки вращения и пологие оболочки.

В последнее время начали обращать особое внимание на задачи термоупругости анизотропных оболочек в предположении изменчивости упругих свойств материала оболочки от температуры [74]. Эти исследования очень важны, тем более, когда рассматриваются задачи устойчивости и колебаний оболочек, находящихся в поле действия высоких температур, изменяющихся во времени [76—78].

Сделана попытка [23] обобщения термоупругой задачи ортотропных оболочек на случай круговой цилиндрической оболочки, изготовленной так, что главные направления упругости ортотропного материала оболочки не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки. Начатое исследование должно быть продолжено с целью разработки основных положений термоупругости оболочек в общем случае анизотропии.

Безусловно будут интересны нестационарные задачи термоупругости анизотропных слоистых оболочек и проблема термического удара в анизотропных оболочках. Особый интерес представляют задачи термопластичности анизотропных слоистых оболочек.

Разработана общая теория несущей способности и ползучести однослойных анизотропных оболочек при наличии сильных градиентов высоких температур [79]. Приведены исходные уравнения оболочки в тензорной форме в случае вязкого релаксирующего и наследственного материала.

Рассмотрено влияние линейной ползучести материала оболочки на деформированное и напряженное состояние ортотропной оболочки. В частности, рассмотрены некоторые конкретные задачи цилиндрических и пологих оболочек, а также симметрично нагруженных оболочек вращения. Рассмотрен простой краевой эффект в ортотропных цилиндрических и сферических оболочках [80—82] с учетом линейной ползучести.

Исследователями ползучести ортотропных оболочек совершенно

не затрагивались задачи оболочек с учетом нелинейной ползучести материала. Не исследованы также вопросы ползучести оболочек в общем случае анизотропии. Этот случай безусловно интересен как при линейной, так и при нелинейной ползучести материала оболочки.

Исследования ползучести оболочек в общем случае анизотропии, пожалуй, надо начать с рассмотрения задачи ползучести оболочки, изготовленной из ползучего ортотропного материала, главные направления упругости и ползучести которого не совпадают с главными геометрическими направлениями оболочки.

Сделаны первые попытки разработки теории анизотропных оболочек, деформирующихся за пределами упругости [83, 84]. Рассмотрены вопросы жестко-пластического анализа, упруго-пластического равновесия ортотропных слоистых оболочек.

Разработка теории анизотропных слоистых оболочек, деформирующихся за пределами упругости, представляет большой теоретический и практический интерес. Однако, несмотря на это, исследования в указанной области весьма ограничены.

Новые теории анизотропных оболочек. До сих пор предметом наших рассмотрений были различные аспекты классической теории анизотропных слоистых оболочек, построенной на основе гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета оболочки в целом. Было указано, что классическая теория в случае существенной анизотропии материала оболочки или при достаточно большой приведенной относительной толщине нуждается в коррективах.

Все сказанное вызвало необходимость разработать теорию анизотропных оболочек без использования гипотезы недеформируемых нормалей.

Вопрос разработки теории изотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей по тому или иному поводу интересовал многих исследователей [85—93]. Все эти работы, посвященные уточненным теориям изотропных пластин и оболочек, здесь не будут обсуждаться.

Теория анизотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей стала темой исследования лишь недавно и в основном развивалась по следующим направлениям.

Первое направление, развитое в работах [13, 94—97], базируется на следующих предположениях:

а) расстояния по нормали (γ) между двумя точками оболочки до и после деформации остаются неизменными;

б) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, могут быть пренебрежены по сравнению с прочими напряжениями;

в) при определении деформаций сдвига $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считается, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений $(\tau_{\alpha\gamma}^0, \tau_{\beta\gamma}^0)$, найденных по теории, базирующейся на гипотезе недеформируемых нормалей.

Укажем, что второе допущение (6), которое по сути дела вносит незначительные погрешности, зачастую не используется [13].

Принятые выше предположения таковы, что вносят коррективы лишь в правую часть основных дифференциальных уравнений задачи, где наряду с обычными грузовыми членами появляются члены, зависящие от $\tau_{\alpha\gamma}^0$ и $\tau_{\beta\gamma}^0$, то есть от решений классической теории. Однородные уравнения этой теории ничем не отличаются от однородных уравнений классической теории анизотропных оболочек и могут быть записаны как в перемещениях, так и с помощью функции напряжений. Несколько изменяются соотношения упругости, в них появляются члены, зависящие от $\tau_{\alpha\gamma}^0$ и $\tau_{\beta\gamma}^0$, например, для ортотропной оболочки

$$M_1 = D_{11}x_1 + D_{12}x_2 + \frac{h^2}{10} \left(D_{11}a_{33} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{12}a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) + \\ + A_1 \frac{h^3}{120} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) \text{ и т. д.} \quad (15)$$

Если полагать, что классическая теория является первым приближением к точной теории, то здесь по сути дела имеем последующее приближение [13].

В связи с этим направлением исследований следует отметить, что теория [98], в которой в целом удерживаются величины порядка h^2/L^2 , подтверждает предположение о том, что рассмотренная здесь уточненная теория анизотропных оболочек улавливает главную часть поправки к классической теории.

Основы этой теории были использованы для построения геометрически нелинейной теории ортотропных оболочек [96], а также для построения теории двухслойных и, пожалуй впервые, несимметрично собранных трехслойных ортотропных оболочек [94, 95, 97].

В связи с упоминанием трехслойных оболочек, отметим, что на сегодня накопилось и продолжает накапливаться большое количество разнообразных исследований, посвященных разработке различных вариантов теории трехслойных пластин и оболочек [1]. Эти варианты теории, отличаясь в некоторых редких случаях в принципе, а, как правило, лишь в мелочах, создают невероятную пестроту "теорий". Мы считаем, что необходимы солидные исследования, посвященные классификации этих теорий с указанием их точности и пределов применимости. Пожалуй, такой анализ должен быть выполнен с позиций трехмерной задачи теории упругости, без каких-либо упрощающих предположений.

Второе направление, развитое в работах [13, 99—102], базируется на следующих предположениях:

- а) расстояния по нормали между двумя точками оболочки после деформации остаются неизменными;
- б) касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ или соответствующие де-

формации $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ по толщине оболочки меняются по заданному закону, т.е. есть

$$\begin{aligned}\tau_{\alpha\gamma} &= f_1(\gamma) \varphi(x, \beta) + \frac{\gamma}{h} (X^+ + X^-) + \frac{X^+ - X^-}{2}, \\ \tau_{\beta\gamma} &= f_2(\gamma) \psi(x, \beta) + \frac{\gamma}{h} (Y^+ + Y^-) + \frac{Y^+ - Y^-}{2},\end{aligned}\quad (16)$$

где $\varphi(x, \beta)$, $\psi(x, \beta)$ — искомые функции, характеризующие величины поперечных сдвигов; $f_i(\gamma)$ — функции, представляющие законы изменения поперечных касательных напряжений.

Теория, построенная на основании этих предположений, существенно отличается от классической теории анизотропных оболочек. Основное отличие заключается в том, что здесь порядок исходных дифференциальных уравнений повышается и доходит до десяти, количество независимых граничных условий на каждом краю оболочки становится равным пяти, наряду с искомыми перемещениями u , v , w появляются новые искомые функции φ и ψ .

Эта теория была использована при рассмотрении задач прочности, статической и динамической устойчивости и колебаний различных ортотропных и трансверсально изотропных оболочек, в линейной и нелинейной постановках [99—105]. На основании этой теории рассмотрена также температурная задача теории круговой цилиндрической оболочки, когда физико-механические характеристики оболочки зависят от температуры [106].

Рассмотренная здесь теория очень гибка и существенно реагирует на изменения отношений типа E_{11}/E_{33} , F_{11}/G_{12} и т. д.

Показано, что с увеличением подъемности оболочки влияние поперечных сдвигов на напряженное и деформированное состояние оболочки уменьшается; указывается, что напряженное и деформированное состояние оболочки существенно зависит от некоторой относительной приведенной толщины, которая зависит как от геометрии оболочки, так и от физико-механических характеристик материала оболочки (9).

Установлено, что в задачах статической устойчивости [103—105] с увеличением относительной приведенной толщины значение критической силы уменьшается по сравнению с соответствующей критической силой классической теории [107]. Та же самая картина наблюдается и при рассмотрении колебаний ортотропной оболочки [103, 104], т.е. с увеличением относительной приведенной толщины частота свободных колебаний уменьшается по сравнению с соответствующей частотой, найденной по классической теории. В частности, погрешность классической теории значительно увеличивается, когда рассматриваются высшие формы колебаний.

По новым теориям рассмотрены также задачи динамической устойчивости ортотропной цилиндрической панели и трансверсально изотропной сферической оболочки [104, 105], показано, что с увели-

чением относительной приведенной толщины оболочки расширяются области динамической неустойчивости.

Рассмотрены задачи устойчивости бесконечно длинной трансверсально изотропной круговой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа с учетом поперечных сдвигов и нормального напряжения σ_r [66]. Исследован нелинейный флаттер прямоугольной в плане пологой ортотропной оболочки с учетом лишь поперечных сдвигов [69]. Показано, что учет поперечных сдвигов приводит к уменьшению критической скорости и увеличению амплитуды установившихся колебаний флаттера заданной формы.

За исключением одной работы [98], нет исследований, посвященных установлению точности и пределов применимости указанных здесь двух теорий, которые по сути дела уточняют лишь „внутреннюю“ задачу теории анизотропных оболочек [91, 92].

Широкое применение анизотропных материалов в современной технике настойчиво требует создания совершенной математической теории оболочек, изготовленных из существенно анизотропных материалов. Такая теория дала бы возможность установить пределы применимости и точности технических теорий анизотропных оболочек.

Мы считаем весьма важным постановку прецизионных экспериментов в области анизотропных слоистых оболочек.

Здесь мы достаточно подробно остановились лишь на тех двух новых направлениях, которые по своему духу ближе всего автору и специально посвящены разработке теории анизотропных оболочек без гипотезы недеформируемых нормалей.

Нам кажется интересным обобщение результатов различных теорий изотропных оболочек, не опирающихся на гипотезу недеформируемых нормалей [85—93, 109], на случай анизотропных оболочек. Примером такого обобщения может служить исследование [110], где результаты работы [111] обобщаются на случай анизотропных пластинок.

Настоящий обзор не претендует на полноту ни с точки зрения охвата выполненных работ, ни с точки зрения выдвижения перспективных направлений дальнейших исследований. Пожалуй, наш обзор должен быть рассмотрен, как некоторое дополнение к ранее опубликованным обзорам [1, 112—116].

Ս. Ս. Համբարձումյան

ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ
ՉԱՐԳԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատությունը ակնարկային է, բայց պատեղ հատուկ ուշադրության է արժանացել անիզոտրոպ շերտավոր թաղանթների տեսության զարգացման հետազոտողների հարցը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Куршин Л. М. Обзор работ по расчету трехслойных пластин и оболочек. Расчет пространственных конструкций. Сборн. ст., вып. VII. Госстройиздат, М., 1962.
2. Штаерман И. Я. К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Известия Киевск. политехн. и сельхоз. ин-та, 1924.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. Гостехиздат, М., 1935.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М., 1949.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1951.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
7. Huber M. T. Teorja plyt. Lwow, 1921.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. ГИТТЛ, М., 1957.
9. Амбарцумян С. А. Некоторые вопросы теории анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия естеств. наук, № 9, 1947.
10. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ, 12, в. 1, 1948.
11. Амбарцумян С. А. Некоторые основные уравнения теории тонкой слоистой оболочки. ДАН АрмССР, 8, № 5, 1948.
12. Амбарцумян С. А. К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 6, № 3, 1953.
13. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
14. Висарион В., Стэнэску Кр. Исследование квазинвариантов статико-геометрической аналогии для тонких упругих оболочек. ПММ, 25, в. 1, 1961.
15. Амбарцумян С. А. Безмоментная теория анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 1, № 6, 1948.
16. Мовсисян Л. А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 1958.
17. Амбарцумян С. А. Симметрично нагруженные анизотропные оболочки вращения. ДАН АрмССР, 9, № 5, 1948.
18. Амбарцумян С. А. Расчет слоистых оболочек вращения. ДАН АрмССР, 11, № 2, 1949.
19. Амбарцумян С. А. Длинные анизотропные оболочки вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 4, № 6, 1951.
20. Бурмистров Е. Ф. Симметричный изгиб ортотропных оболочек вращения с учетом больших прогибов. Инж. сб., 24, 1956.
21. Бурмистров Е. Ф. Симметричная деформация оболочки, мало отличающейся от цилиндрической. ПММ, 8, в. 4, 1949.
22. Пешт-малджян Д. В. К расчету симметрично нагруженных слоистых анизотропных оболочек вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 10, № 2, 1957.
23. Мовсисян Л. А. К расчету анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 4, 1959.
24. Известия АН, серия физ.-мат. наук, № 3

24. Бурмистров Е. Ф. Симметричная деформация конструктивно-ортотропных оболочек вращения. Изд-во Саратовского ун-та, 1962.
25. Clark R. A. On the theory of thin elastic toroidal shells. J. Math. Phys., 29, 1950.
26. Naghdí P. M., De Silva C. N. Deformation of elastic ellipsoidal shells of revolution. Proc. second U. S. Congr. Appl. Mech., 1955.
27. Амбарцумян С. А. К расчету анизотропных цилиндрических оболочек вращения, подкреплённых поперечными ребрами. Известия АН СССР, ОТН, № 12, 1955.
28. Муштари Х. М. Некоторые обобщённые теории тонких оболочек. ПММ, 2, в. 4, 1939.
29. Христенко А. С. О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 3, 1962.
30. Амбарцумян С. А. Расчет симметрично нагруженной круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными ребрами. ДАН АрмССР, 21, № 4, 1955.
31. Schnell W. Krafteinleitung in versteifte kreiszylinderschalen, Teil 1, Die orthotrope Schale. Z. Flugwiss, 3, № 12, 1955.
32. Schnell W. Krafteinleitung in versteifte kreiszylinderschalen, Teil 2, Die Schale mittendlich vielen Soanten. Z. Flugwiss, 5, № 1, 1955.
33. Амбарцумян С. А. К вопросу построения приближенных теорий расчета пологих цилиндрических оболочек. ПММ, 10, в. 3, 1954.
34. Амбарцумян С. А. О пределах применимости некоторых гипотез теории тонких цилиндрических оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 5, 1954.
35. Бурмистров Е. Ф. Симметричный изгиб неоднородных и однородных ортотропных оболочек вращения с учетом больших прогибов и неравномерного температурного поля. Инж. сб., 27, 1960.
36. Reissner E. Symetric bending of shallow shells of revolution. J. of Math. and Mechanics, 7, № 2, 1958.
37. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
38. Бурмистров Е. Ф. Расчет пологих ортотропных оболочек с учетом конечных деформаций. Инж. сб., 22, 1955.
39. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению устойчивости упругих анизотропных оболочек. Известия Казанского физ.-мат. общества, 11, 1938.
40. Воронич И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек. ПММ, 20, в. 4, 1956.
41. Воронич И. И. Погрешность прямых методов в нелинейной теории оболочек. ДАН СССР, 122, № 2, 1958.
42. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круговой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ, 9, в. 5, 1945.
43. Вейнберг Д. В., Сазанов Р. М., Семенов П. И. Расчет гофрированных оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 7, 1962.
44. Григолюк Э. И. Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 3, 1955.
45. Nash W. A. General instability of ringreinforced cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure. Proc. 2-nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1955.
46. Лусаш П. А. Об устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек. Наука, докл. высш. школы (строительство), № 2, 1958.
47. Даревский В. М., Кукуджаков С. Н. Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки при кручении с внутренним давлением. ДАН СССР, 123, № 1, 1958.
48. Кармишин А. В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки, подкреплённой кольцевыми ребрами, при осевом сжатии. Труды Гос. союзн. ин-та, в. 3, 1953.
49. Александровский С. В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при больших прогибах. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 3, 1955.

50. *Ленько О. Н.* Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки, нагруженной осевыми силами и внешним давлением. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 5, 1959.
51. *Теребушко О. И.* К расчету на устойчивость и проектирование цилиндрических подкрепленных оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 7, 1962.
52. *Алумян Н. А.* Дифференциальные уравнения состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ, 13, в. 1, 1949.
53. *Алумян Н. А.* Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек. ПММ, 14, в. 1, 1950.
54. *Сахаров И. Е.* Уравнения колебаний пологих сферических и конических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 5, 1960.
55. *Песеникова Н. К., Сахаров И. Е.* Частоты свободных колебаний основного тона сферических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 2, 1961.
56. *Кутникова В. П., Сахаров И. Е.* Частоты собственных колебаний основного тона ортотропных пологих конических оболочек. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 4, 1961.
57. *Онишвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, 1957.
58. *Бурмистров Е. Ф.* Нелинейные поперечные колебания ортотропных оболочек вращения. Инж. сб., 26, 1958.
59. *Багдасарян Ж. Е., Гнуни В. Ц.* Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 1, 1961.
60. *Марков А. Н.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. ПММ, 13, в. 2, 1949.
61. *Хачатурян Т. Т.* Динамическая устойчивость анизотропных цилиндрических оболочек. Сб. трудов ЕрПИ, № 4, 1950.
62. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
63. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных пологих оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 1, 1960.
64. *Гнуни В. Ц.* О параметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных гибких оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 3, 1962.
65. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
66. *Багдасарян Ж. Е.* Некоторые задачи устойчивости анизотропных оболочек и пластинок в сверхзвуковом потоке газа. Автореферат, 1963.
67. *Багдасарян Ж. Е.* Устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки в потоке газа. Труды конф. по теории пластин и оболочек, Ереван, 1964.
68. *Багдасарян Ж. Е.* Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 6, 1962.
69. *Багдасарян Ж. Е.* Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 1, 1963.
70. *Librescu L.* Vibratile structurilor elastice subtiri de forma cilindrica circulara, plasate intr-un curent fluid supersonic. Studii si cercetari de mecanica aplicata, Acad. RPR, 12, 1, 1962.
71. *Librescu L.* Vibrations of non-homogeneous circular cylindrical shells in supersonic fluid flow. Revue de mecanique appliquee. Acad. RPR, 5, 6, 1961.
72. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
73. *Амбарцумян С. А.* Температурные напряжения в слоистых анизотропных обо-

- лочках. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат., естест. и техн. наук, **5**, № 6, 1952.
74. Дургарьян С. М. К температурному расчету тонких ортотропных оболочек вращения. Инж. ж., в. 3, 1962.
75. Новацкий В. Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, 1962.
76. Амбарцумян С. А. Об одной задаче колебания ортотропной пластинки, находящейся в поле действия высоких температур. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 4, 1963.
77. Амбарцумян С. А., Дургарьян С. М. О колебаниях ортотропной пологой оболочки, находящейся в переменном температурном поле. ДАН АрмССР, **38**, №2, 1964.
78. Дургарьян С. М. К устойчивости нагруженной нагреваемой гибкой ортотропной пластинки с начальной погибью. ДАН АрмССР, **38**, № 5, 1964.
79. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. Научное сообщение «ЦНИИСК», в. 13, 1960.
80. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в ортотропных оболочках. Инж. сб., **24**, 1956.
81. Григорян Г. С. К расчету слоистых ортотропных оболочек с учетом ползучести материала. Сб. трудов ЕрПИ, юбилейный выпуск, 1961.
82. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на распределение внутренних усилий в системах, состоящих из неоднородных элементов. Научн. доклады высш. школ (строительство), № 1, 1958.
83. Микеладзе М. Ш. Статика анизотропных пластичных оболочек. Изд-во АН Груз. ССР, 1963.
84. Савчук А. О теории анизотропных пластических оболочек и пластинок. Механика, ИЛ, № 3, 1961.
85. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, **2**, в. 4, 1939.
86. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгоффа в теории оболочек. ПММ, **7**, в. 5, 1943.
87. Green A., Zerna W. The equilibrium of thin elastic shells. Quart. J. Mech. Appl. Math., **3**, 1950.
88. Reissner E. Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, J. Math., Phys., **31**, 1952.
89. Векуа Н. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек. Труды Тбил. мат. ин-та им. А. М. Размадзе, **21**, 1955.
90. Nagdi P. M. On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math., **14**, № 4, 1957.
91. Green A. E. On the linear theory of thin elastic shells. Proceedings of the Royal Society, A 266, № 1325, 1962.
92. Green A. E. Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells. Proceedings of the Royal Society, A 269, № 1339, 1962.
93. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, **27**, в. 4, 1963.
94. Амбарцумян С. А. К расчету двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1957.
95. Амбарцумян С. А. О двух методах расчета двухслойных ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **10**, № 2, 1957.
96. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К нелинейной теории пологих ортотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, № 1, 1958.
97. Хачатрян А. А. К расчету трехслойной ортотропной оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 5, 1959.
98. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. Теория пологих оболочек средней толщины. Известия АН СССР, ОТН (мех. и маш.), № 6, 1959.

99. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, **22**, в. 2, 1958.
100. Ambartsumyan S. A. On the theory of anisotropic shells and plates. Proceedings of an IMTAM. Symposium held in Warsaw sept. 1958, 1960.
101. Амбарцумян С. А., Пештмалджян Д. В. К теории ортотропных оболочек и пластинок. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 1, 1959.
102. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, **24**, в. 2, 1960.
103. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях пологой ортотропной цилиндрической панели. ДАН АрмССР, **30**, № 1, 1960.
104. Хачатрян А. А. Об устойчивости и колебаниях трансверсально изотропной сферической оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **8**, № 4, 1960.
105. Хачатрян А. А. Об устойчивости круговой цилиндрической оболочки при некоторых нагрузках. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 5, 1960.
106. Дургарьян С. М. К осесимметричной температурной задаче ортотропной цилиндрической оболочки. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961.
107. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
108. Гнуки В. Ц. Некоторые нелинейные задачи статической и динамической устойчивости анизотропных неоднородных оболочек и пластинок. Автореферат, 1963.
109. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. Изд-во АН УкрССР, 1963.
110. Girkman K. Flächentragwerke. Wien, Springer-Verlag, V, 1959.
111. Reissner E. On bending of elastic plates. Quart. Appl. Math., **5**, № 1, 1947.
112. Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. О математической теории равновесия упругих оболочек (обзор работ, опубликованных в СССР). ПММ, **11**, в. 5, 1947.
113. Naghdī P. M. A survey of recent progress in the theory of elastic shells. Appl. Mech. Reviews, **9**, № 9, 1956.
114. Вольмир А. С. Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек. Сб. Расчет пространственных конструкций, в. 4, 1958.
115. Nash W. A. Recent advances in the buckling of thin shells. Appl. Mech. Reviews, **13**, № 3, 1960.
116. Гольденвейзер А. Л. Развитие теории упругих тонких оболочек. Труды Всесоюз. съезда по теоретической и прикладной механике. Изд-во АН СССР, 1962.
117. Саркисян В. С. К решению задачи изгиба анизотропных (неортотропных) пластин. ДАН АрмССР, **37**, № 3, 1963.
118. Аксентян О. К., Воронич И. И. Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, **27**, в. 6, 1963.

Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, А. А. Баблоян

О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой обоймой

Задача о равновесии упругой сферы исследовалась в работах Ламе [1], В. Томсона [2], Кри [3], Б. Г. Галеркина [4], А. И. Лурье [5,6], К. Вебера [7], Э. Штернберга и Ф. Розенталя [8] и других [9-16].

В этих работах рассмотрены некоторые случаи о напряженном состоянии сплошных и полых сфер.

В настоящей работе рассматривается одна контактная задача для упругой сферы.

Решение задачи сводится к определению некоторых коэффициентов из „парных“ рядов, содержащих полиномы Лежандра. Эта последняя задача, в свою очередь, сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

§ 1. Постановка задачи

Пусть упругая сфера, окантованная экваториальной жесткой обоймой, находится под действием симметричной относительно оси и экваториальной плоскости нормальной нагрузки (фиг. 1). Касательные напряжения на всей поверхности сферы полагаем отсутствующими.

В силу симметрии достаточно рассматривать деформацию только четвертой части сферы.

Граничные условия этой задачи имеют вид

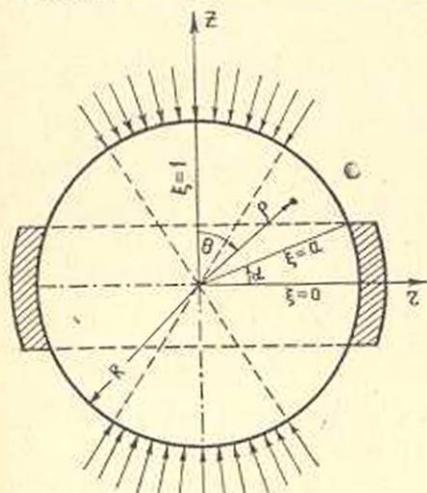
$$\begin{aligned} u_r|_{r=R} &= 0 & \left(\frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \leq \frac{\pi}{2} \right), \\ \tau_{r\theta}|_{r=R} &= 0 & \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right), \\ \sigma_r|_{\theta=R} &= \psi^*(\theta) & \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} - \alpha \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Условия симметрии относительно оси z и плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ (или $z=0$) представляются соотношениями

$$u_\theta|_{\theta=0} = \tau_{\rho\theta}|_{\theta=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$u_\theta|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \tau_{\rho\theta}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Здесь u_ρ и u_θ — радиальный и меридиональный компоненты перемещения; $\tau_{\rho\theta}$ и σ_ρ — касательное и нормальное напряжения в сферических координатах ρ, θ, φ ; $\psi^*(\theta)$ — кусочно-непрерывная функция, определяющая вид нормальной нагрузки, а α — параметр, определяющий ширину ободья.



Фиг. 1.

Уравнения равновесия в сферических координатах при условии осевой симметрии и отсутствия массовых сил имеют вид

$$(\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial}{\partial \rho} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) = 0, \quad (1.3)$$

$$(\lambda + 2\mu) \sin \theta \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} - \mu \frac{\partial}{\partial \theta} (2\rho \omega_\varphi \sin \theta) = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) \right],$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u_\theta) - \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \right], \quad (1.4)$$

λ и μ — коэффициенты Ламе.

Переходя от координаты θ к координате $\xi = \cos \theta$, ищем решение уравнений (1.3) в виде рядов

$$u_\rho = f_0(\rho) + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} f_k(\rho) P_k(\xi), \quad (1.5)$$

$$u_\theta = \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \varphi_k(\rho) (1 - \xi^2)^{1/2} P'_k(\xi).$$

Здесь $P_k(\xi)$ — полиномы Лежандра [10], $P'_k(\xi) = \frac{d}{d\xi} P_k(\xi)$, а $f_0(\rho)$,

$f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя выражения (1.5) и (1.4) в уравнения равновесия (1.3), после некоторых преобразований для определения функций $f_0(\rho)$, $f_k(\rho)$ и $\varphi_k(\rho)$ получим дифференциальные уравнения типа Эйлера, решения которых берем в форме

$$f_n(\rho) = A_n \frac{\rho^n}{R^n},$$

$$f_k(\rho) = -kA_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} - \frac{\lambda k + \mu(k-2)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} (k+1) C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1}, \quad (1.6)$$

$$\varphi_k(\rho) = A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-1} + C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k+1},$$

где постоянные интегрирования A_0 , A_k и C_k подлежат определению из граничных условий.

В координатной системе ρ , ξ , φ условия (1.1) и (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} u_\rho|_{\rho=R} &= 0 & (0 \leq \xi < a = \sin \alpha), \\ \tau_{\rho\theta}|_{\rho=R} &= 0 & (0 \leq \xi \leq 1), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\sigma_\rho|_{\rho=R} = \frac{\psi(\xi)}{R} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (a < \xi \leq 1);$$

$$\left. \begin{aligned} u_\theta|_{\xi=1} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=1} &= 0 \\ u_\theta|_{\xi=0} = \tau_{\rho\theta}|_{\xi=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq \rho \leq R). \quad (1.8)$$

Здесь введено обозначение

$$\psi^*(\theta) = \frac{\psi(\xi)}{R} \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}. \quad (1.9)$$

Пользуясь обычными формулами

$$\sigma_\rho = \frac{\lambda}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 u_\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u_\theta \sin \theta) \right] + 2\mu \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad (1.10)$$

$$\tau_{\rho\theta} = \mu \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} - \frac{u_\theta}{\rho} \right]$$

и соотношениями (1.5) и (1.6), для напряжений σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{3\lambda + 2\mu}{R} A_0 - \frac{2\mu}{R} \sum_{k=2,4,\dots} P_k(\xi) \left\{ k(k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \right. \\ &+ \left. \frac{(k+1)[\lambda(k^2 - k - 3) + \mu(k+1)(k-2)]}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} &= \frac{2\mu}{R} \sum_{k=2,4,\dots} (1-\xi^2)^{1/2} P'_k(\xi) \left[(k-1) A_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^{k-2} + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda k(k+2) + \mu(k^2 + 2k - 1)}{\lambda(k+3) + \mu(k+5)} C_k \left(\frac{\rho}{R}\right)^k \right]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Нетрудно убедиться, что условия (1.8) удовлетворяются тождественно, при этом должно быть использовано соотношение

$$P'_{2m}(0) = 0. \quad (1.13)$$

Удовлетворяя, далее, условиям (1.7), находим

$$C_k = - \frac{(k-1) [\lambda(k+3) + \mu(k+5)]}{\lambda k(k+2) + \mu(k^2+2k-1)} A_k, \quad (k=2, 4, \dots) \quad (1.14)$$

а для определения коэффициентов A_0 и A_k ($k=2, 4, \dots$) получим следующие ряды-уравнения

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi \leq 1), \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k P_k(\xi) = 0 \quad (0 < \xi < a),$$

где введены следующие обозначения

$$B_0 = A_0, \quad B_k = - \frac{\lambda k(2k+1) + 2\mu(2k^2-1)}{\lambda k(k+2) + \mu(k^2+2k-1)} A_k \quad (k=2, 4, \dots), \quad (1.16)$$

$$\alpha_k = - \frac{4\mu^2 k^2 + (\lambda - \mu)(3\lambda + 4\mu)k + 6\lambda^2 + 14\lambda\mu + 6\mu^2}{2(\lambda + \mu)[\lambda(2k+1)k + 2\mu(2k^2-1)]}. \quad (1.17)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к определению коэффициентов B_k ($k=0, 2, \dots$) из „парных“ рядов (1.15), содержащих полиномы Лежандра. После определения коэффициентов все постоянные интегрирования определяются соотношениями (1.14) и (1.16).

§ 2. Исследование „парных“ рядов

Если в рассмотренной нами задаче принять, что при наличии сжимающих сил жесткая обойма, в свою очередь, вдавливается в сферу, тогда решение задачи сведется к „парным“ рядам-уравнениям вида

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi \leq 1), \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=0,2,\dots} B_k P_k(\xi) = g(\xi) \quad (0 < \xi < a),$$

где B_k — неизвестные коэффициенты, числа α_k при $k \rightarrow \infty$ остаются ограниченными, $g(\xi)$ — непрерывная функция и имеет кусочно-непрерывную производную, а $\psi(\xi)$ — кусочно-непрерывная функция, имеющая ограниченное изменение в указанном интервале.

Ввиду этого целесообразно вместо системы (1.15) рассматривать более общую систему (2.1).

Предварительно рассмотрим следующую систему

$$\sum_{n=0} X_n \left(n + \frac{1}{2} + \alpha_n \right) P_n(\xi) = \psi(\xi) \quad (0 < a < \xi < 1), \quad (2.2)$$

$$\sum_{n=0} X_n P_n(\xi) = g_1(\xi) \quad (-1 < \xi < a).$$

Подобная система в частном случае была рассмотрена в работе Н. М. Минкова [17], а общее решение этой системы при $\alpha_n = 0$ дано в работе А. А. Баблюяна [18].

Займемся решением „парных“ рядов (2.2). Для этого обозначим значение второго ряда (2.2) в области $a < \xi \leq 1$ через $W(\xi)$

$$W(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n P_n(\xi) \quad (a < \xi \leq 1). \quad (2.3)$$

Тогда из второго уравнения системы (2.2) и из (2.3) для коэффициентов X_n получим

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^a g_1(\xi) P_n(\xi) d\xi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi. \quad (2.4)$$

С помощью известной формулы

$$\sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}} \int_{\gamma}^1 \frac{P_n(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \quad (2.5)$$

преобразуем первое уравнение системы (2.2) к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} X_n \left(1 + \frac{2\alpha_n}{2n+1}\right) \sin \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}}. \quad (2.6)$$

Умножив теперь обе части уравнения (2.6) на $(1 - \gamma^2)^{-1/2}$ и проинтегрировав полученное выражение по γ в пределах от a до γ , получим

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{2n+1} \left(1 + \frac{2\alpha_n}{2n+1}\right) \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos \gamma \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \arccos a \right] \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}} \quad (a < \gamma \leq 1). \quad (2.7)$$

Подставляя значение X_n из (2.4) в (2.7), после некоторых преобразований получим

$$\int_a^{\gamma} \frac{W(\xi) d\xi}{(\gamma - \xi)^{1/2}} = \int_{-1}^a [(a - \xi)^{-1/2} - (\gamma - \xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] g_1(\xi) d\xi + \\ + \int_a^1 S(\xi, \gamma) W(\xi) d\xi + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi - \gamma)^{1/2}}, \quad (2.8)$$

где введено обозначение

$$S(\xi, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\alpha_n}{2n+1} P_n(\xi) \left\{ \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos a \right] - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] \right\}. \quad (2.9)$$

При получении формулы (2.8) использовано известное значение ряда [19]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\xi) \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] = \begin{cases} [2(\gamma - \xi)]^{-1/2} & (\gamma > \xi) \\ 0 & (\gamma < \xi). \end{cases} \quad (2.10)$$

Пользуясь формулой обращения интегрального уравнения типа Абеля, для определения функции $W(\xi)$ из (2.8) получим следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 S(\xi, \gamma) W(\xi) d\xi + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} + \int_{-1}^a [(a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} + S(\xi, \gamma)] g_1(\xi) d\xi \right\} \quad (a < z \leq 1). \quad (2.11)$$

Примем далее, что

$$g_1(\xi) = \begin{cases} W(\xi) & (-1 < \xi < -a) \\ g(\xi) & (-a < \xi < a) \end{cases} \quad (2.12)$$

и рассмотрим случай, когда функции $W(\xi)$ и $g(\xi)$ обе четные.

В этом случае формулу (2.4) и интегральное уравнение (2.11) можно представить в виде

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) [1 + (-1)^n] \left\{ \int_0^a g(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi \right\}, \quad (2.13)$$

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_0^1 [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] W(\xi) d\xi + \int_0^a [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + (a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] g(\xi) d\xi + \int_a^{\gamma} \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{\gamma}^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\}, \quad (2.14)$$

где

$$S_1(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) + S(-\xi, \gamma). \quad (2.15)$$

Отсюда видно, что решение (2.13) системы (2.2) совпадает с решением „парных“ рядов (2.1), то есть

$$X_{2k} = B_{2k}, \quad X_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.16)$$

функция $W(z)$, которая определяется из интегрального уравнения (2.14), является значением второго ряда системы (2.1) в области $a < z < 1$, то есть значением перемещения в этой области.

Для задачи, рассмотренной в § 1, положив в формулах (2.13) (2.14) $g(\xi) = 0$, получим значение коэффициентов „парных“ рядов (2.15) в виде

$$B_k = (2k+1) \int_a^1 W(\xi) P_k(\xi) d\xi, \quad (2.17)$$

где функция $W(z)$ определяется из интегрального уравнения

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 [(a+\xi)^{-1/2} - (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_1(\xi, \gamma)] W(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_1^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\} \quad (a < z < 1). \quad (2.18)$$

Здесь

$$S_1(\xi, \gamma) = 4\sqrt{2} \sum_{k=0,2,\dots}^{\infty} \frac{a_k}{2k+1} P_k(\xi) \left\{ \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \arccos a \right] - \right. \\ \left. - \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \arccos \gamma \right] \right\}. \quad (2.19)$$

Следует отметить, что если в (2.11) и (2.12) принять обе функции $W(\xi)$ и $g(\xi)$ нечетными (это может иметь место при решении других краевых задач о сфере), то в этом случае (2.4) и уравнение (2.11) примут вид

$$X_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) [1 - (-1)^n] \left\{ \int_0^a g(\xi) P_n(\xi) d\xi + \int_a^1 W(\xi) P_n(\xi) d\xi \right\}, \quad (2.20)$$

$$W(z) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{d\gamma}{(z-\gamma)^{1/2}} \left\{ \int_a^1 [S_2(\xi, \gamma) - (a+\xi)^{-1/2} + (\gamma+\xi)^{-1/2}] W(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^a [(a-\xi)^{-1/2} - (\gamma-\xi)^{-1/2} - (a+\xi)^{-1/2} + (\gamma+\xi)^{-1/2} + S_2(\xi, \gamma)] g(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_a^1 \frac{d\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_1^1 \frac{\psi(\xi) d\xi}{(\xi-\gamma)^{1/2}} \right\}, \quad (2.21)$$

$$S_2(\xi, \gamma) = S(\xi, \gamma) - S(-\xi, \gamma). \quad (2.22)$$

Легко видеть, что при этом решение (2.20) системы (2.22) совпадает с решением следующих „парных“ рядов уравнений

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \left(k + \frac{1}{2} + \alpha_k \right) P_k(\xi) = \psi(\xi) \quad (a < \xi < 1), \quad (2.23)$$

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k P_k(\xi) = g(\xi) \quad (0 < \xi < a),$$

то есть

$$X_{2k+1} = A_{2k+1}, \quad X_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 IV 1964

Կ. Խ. Հարությունյան, Բ. Լ. Աբրահամյան, Յ. Լ. Բաբլոյան

ԿՈՇՏ ՕՂԱԿԱԶԵԿ ԳՈՏԵԿԱՊՈՎ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԳՆԴԻ ՍԵՂՄՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ի Մ

Հոդվածում գիտարկվում է առաձգական գնդի համար մի կոնստիտուիվն խնդիր:

Խնդրի լուծումը բերվում է կեմանդրի ֆունկցիաներ պարունակող «գույժ» շարքերից որոշ գործակիցների որոշմանը: Այս վերջին խնդիրը իր հերթին բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lame G.* Lecons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris, 1859.
2. *Thomson W.* (Kelvin). Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. *Math. and Phys. Papers.* 111, 1890, 351; *Trans. Roy. Phil. Soc.*, 153, 1863.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solution and application. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 14, 1889, 250—369.
4. *Галеркин Б. Г.* Равновесие упругой сферической оболочки. *ПММ*, 6, вып. 6, 1942, 487—496.
5. *Лурье А. И.* Равновесие упругой полой сферы. *ПММ*, 17, вып. 3, 1953, 311—332.
6. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1955.
7. *Weber C.* Kugel mit normalgerichteten Einzelkräften. *Zeitschr. f. ang. Math. und Mech.*, 32 № 6, 1952, 186—195.

8. Sternberg E., Rosenthal F. The elastic sphere under concentrated loads. Journ. Appl. Mech., **19**, № 4, 1952, 413—421; **20**, № 2, 1953, 304—307; Сборник сокращ. переводов ин. лит. „Механика“, 1954, № 1 (23), 109—124.
9. Leutert W. The heavy sphere supported by a concentrated force. Pacific Journ. of Mathematics, **1**, № 1, 1951, 97—101.
10. Collins D. On the stress distributions due to force nuclei in an elastic solid bounded internally by a spherical hollow and in an elastic sphere. ZAMP, **11**, № 1, 1960, 3—16.
11. Dean W. R., Parsons H. W., Sneddon I. N. A type of stress distribution on the surface of semiinfinite elastic solid. Proc. Camb. Phil. Soc., **40**, Part 1, 1944, 5—19.
12. Prelog E. Integration des équations élastostatiques de Lamé pour une charge quelconque sur la sphère et la cylindre ayant une épaisseur quelconque. Actes IX Congr. internat. mécan. appl., **5**, Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957, 143—154.
13. Александров А. Я., Вольперт В. С. О применении одного метода решения осесимметричных задач теории упругости к задаче о шаре и о пространстве с шаровой полостью. Известия АН СССР, ОТН, Механика и маш. № 6, 1961, 106—109.
14. Sternberg E., Eubanks A., Sadowsky M. A. On the axisymmetric problem of elasticity theory for a region bounded by two concentric spheres. Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Chicago, June 1951, N. Y., 1952, 209—215.
15. Соляник-Красса К. В. Решение осесимметричной задачи в сферических координатах. Труды Ленинградского политех. института, № 178, Гидротехника и строит. дело, 1955, 133—149.
16. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.
17. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях. ПММ, **24**, вып. 5, 1960, 964—967.
18. Баблюя А. А. Решение некоторых парных рядов. ДАН АрмССР, **39**, 1964.
19. Градштейн И. С., Ризик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962, 1043.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. С. Вольмир, И. Г. Кильдибеков

Нелинейные акустические колебания
цилиндрической оболочки

Задача о вынужденных колебаниях подкрепленных оболочек, вызванных пульсациями акустического давления, уже рассматривалась в литературе. Наибольший интерес представляет исследование в нелинейной постановке колебаний круговых цилиндрических панелей, закрепленных по контуру и находящихся в акустическом поле. Этому вопросу посвящены работы Кирхмана и Гринспона [1], Лэсситера, Хесса и Хаббарда [2], Лина [3] и других; см. обзорную статью Гудмана и Ратгайи [4]. В работах В. В. Болотина [5], М. Ф. Диментберга [6] и других авторов эта проблема рассматривается в статистической постановке.

В настоящем сообщении исследуются собственные и акустические вынужденные нелинейные колебания круговых цилиндрических панелей, имеющих „идеальную“ форму, а также с учетом начальных неправильностей в форме срединной поверхности. Используется метод определения амплитудно-частотных характеристик, предложенный Э. Н. Григолоуком [7]; проведено сравнение с данными, полученными другим путем Г. В. Мишенковым [8].

§ 1. Рассмотрим колебания круговой цилиндрической панели, находящейся под воздействием сжимающих усилий p вдоль образующей и акустического равномерного нормального давления $q(t) = q_a \cos \omega t$. Для определения амплитуды давления q_a можно воспользоваться известной формулой $N = 20 \lg(q_e/q_0)$; N — уровень шума в децибелах, q_0 — условный порог давления $q_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ н/м}^2$, q_e — эффективная величина звукового давления. Отсюда находим

$$q_a = \sqrt{2} q_e = 2^{1.5} \cdot 10^{5(0,01N-1)} \text{ н/м}^2 \approx 2^{1.5} \cdot 10^{5(0,01N-2)} \text{ кг/см}^2.$$

Исходные уравнения теории гибких пологих оболочек примем, как обычно, в виде [9]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \omega = L(\omega + \omega_0, \Phi) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{q(x, y, t)}{h}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{2} L(\omega + 2\omega_0, \omega) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Здесь ω и ω_0 — соответственно дополнительный и начальный прогибы

панели, h — толщина, R — радиус кривизны срединной поверхности, Φ — функция напряжений в срединной поверхности, L — оператор, который в применении к функциям $(w + w_0)$, Φ будет

$$L(w + w_0, \Phi) = \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2(w + w_0)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

координаты x и y откладываются вдоль образующей и по дуге. Нормальная нагрузка $q(x, y, t)$ для панели, совершающей колебания, равна

$$q(x, y, t) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + q_a \cos \omega t, \quad (3)$$

где ε — коэффициент затухания.

Примем края панели шарнирно опертыми. Аппроксимируем w и w_0 выражениями

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение совместности деформаций (2), определяем функцию Φ . Удовлетворяя, далее, уравнению (1) по методу Бубнова-Галеркина, получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее в первом приближении нелинейные акустические колебания панели

$$\frac{d^2 \zeta}{d\tau^2} + \frac{2\varepsilon}{\omega} \frac{d\zeta}{d\tau} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{p^*}{p_u^*}\right) (\alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \gamma \zeta^3) = \zeta_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{p^*}{p_u^*} + \frac{16}{\pi^2} \frac{V^2}{a^2 \omega^2} q_a^* \cos \tau; \quad (5)$$

принято $\zeta = f(t)/h$, $\zeta_0 = f_0/h$, $\tau = \omega t$; введены безразмерные параметры $p^* = \rho a^2/Eh^2$, $p_u^* = \rho_u a^2/Eh^2$, $q_a^* = q_a a^2/Eh^2$. Параметр верхнего критического напряжения p_u^* равен

$$p_u^* = \frac{\pi^2 (1 + \lambda^2)^2}{12 (1 - \mu^2)} + \frac{k^2 \lambda^4}{\pi^2 (1 + \lambda^2)^2}, \quad (6)$$

где $\lambda = a/b$, $k = b^2/Rh$. Величина ω_0^2 , равная квадрату основной частоты собственных колебаний панели при малых прогибах, определяется выражением

$$\omega_0^2 = \pi^2 p_u^* \frac{V^2 h^2}{a^4}; \quad (7)$$

здесь V — скорость распространения упругих волн в материале оболочки $V = (Eg/\gamma)^{1/2}$. Через α в (5) обозначено

$$\alpha = 1 + \frac{1 - \mu^2}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)} \left\{ \frac{3}{2} (1 + \lambda^4) \zeta_0^2 - \frac{16\lambda^4 k}{\pi^4} \left[1 + \frac{8}{(1 + \lambda^2)^2} \right] \zeta_0 \right\}. \quad (8)$$

Под β и η понимаются величины

$$\beta = \frac{1 - \mu^2}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)} \left\{ \frac{16\lambda^4 k}{\pi^4} \left[\frac{1}{2} + \frac{8}{(1 + \lambda^2)^2} \right] - \frac{9}{4} (1 + \lambda^4) \zeta_0 \right\}, \quad (9)$$

$$\eta = \frac{0,75 (1 - \mu^2) (1 + \lambda^4)}{\left[(1 + \lambda^2)^2 + \frac{12\lambda^4 k^2 (1 - \mu^2)}{\pi^4 (1 + \lambda^2)^2} \right] \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)}. \quad (10)$$

Положив в выражениях (5), (8–10) $\zeta_0 = 0$, приходим к случаю вынужденных колебаний идеальной панели. При $q_n = 0$ получим уравнение, отвечающее собственным колебаниям панели. Эти случаи исследовались ранее Г. В. Мишенковым [8].

§ 2. Рассмотрим сначала статическую задачу. Опуская динамические члены в уравнении (5), получим

$$\alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \eta \zeta^3 = \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} + q, \quad (11)$$

где параметр нагрузки q равен

$$q = \frac{16}{\pi^2} \frac{V^2}{a^2 \omega_0^2} \left(1 - \frac{p^*}{p_n^*} \right)^{-1} q_n. \quad (12)$$

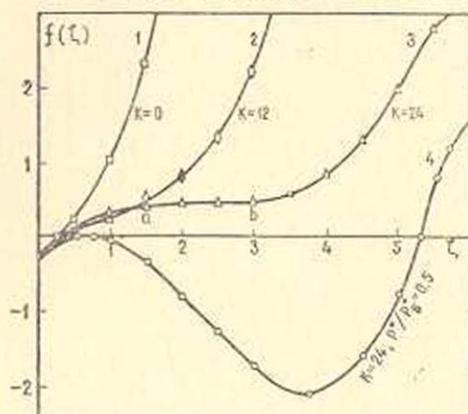
При соответствующего однородного уравнения отвечают возможным равновесным положениям ненагруженной идеальной панели. При $\beta < 2\sqrt{\eta}$ имеется одно положение равновесия, около которого происходят колебания; при $\beta > 2\sqrt{\eta}$ получим три положения равновесия. Возможные положения равновесия нагруженной оболочки определяются, исходя из зависимости

$$f(\zeta) = \alpha \zeta - \beta \zeta^2 + \eta \zeta^3 - \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} - q. \quad (13)$$

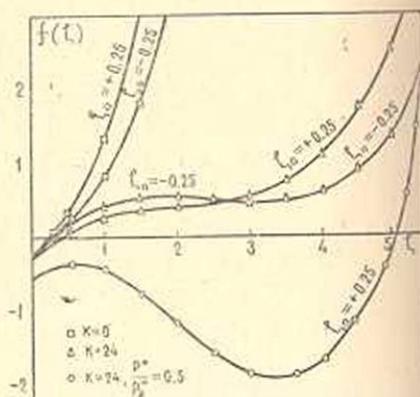
На фиг. 1 представлены соответствующие кривые 1–3 для квадратных идеальных панелей при $k=0$ (плоская панель), $k=12$, $k=24$; во всех случаях принято $q=0,3$. Линия 4 отвечает случаю панели, нагруженной одновременно поперечным давлением и продольной сжимающей силой; эта линия пересекает ось ζ в трех точ-

ках, что соответствует трем возможным равновесным положениям системы.

Влияние начальной погиби демонстрируется данными, приведенными на фиг. 2. График построен для панелей с теми же параметрами кривизны и при тех же условиях нагружения, что и на фиг. 1; на обеих фигурах приняты одинаковые обозначения.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

§ 3. Перейдем к исследованию амплитудно-частотных зависимостей, используем при этом путь, предложенный Э. И. Григोलюком [7]. Примем решение уравнения (5) в виде $\zeta = a \cos \tau$; подставив это выражение в (5) и выполняя условие ортогональности результата подстановки к функции $\cos \tau$ по четверти периода, получим

$$v^2 + \frac{4}{\pi} \frac{\varepsilon}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{p^*}{p_n}}} v - a + \frac{8}{3\pi} \beta a - \frac{3}{4} \eta a^2 + \frac{4}{\pi a} \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} + \frac{q}{a} = 0, \quad (14)$$

где

$$v = \frac{\omega}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{p^*}{p_n}}}. \quad (15)$$

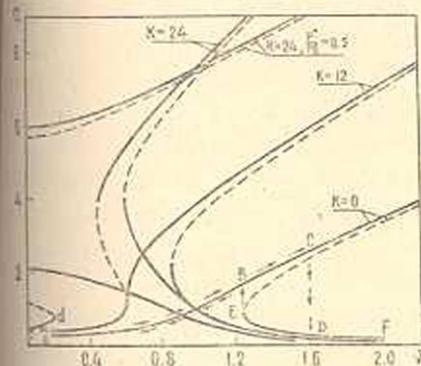
При $\varepsilon = 0$ будет

$$v^2 = a - \frac{8}{3\pi} \beta a + \frac{3}{4} \eta a^2 - \frac{4}{\pi a} \frac{\zeta_0}{\frac{p_n^*}{p^*} - 1} - \frac{q}{a}. \quad (16)$$

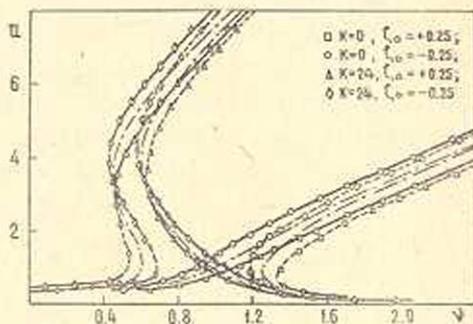
При $q=0$ получаем уравнение так называемой „скелетной“ линии, отвечающее случаю свободных колебаний панели.

На фиг. 3, 4 представлены амплитудно-частотные характеристики по (16); по-прежнему принято $q=0,3$. Проследим характер изменения амплитуды с возрастанием частоты для случая плоской панели ($k=0$). Вдоль участка AB амплитуда меняется монотонно. За точкой B возможны колебания различного типа. В некоторой точке C , положение

которой в каждом конкретном случае определяется особо, происходит "срыв" колебаний: амплитуда падает скачком до значения, отвечающего точке D нижней ветви. Дальнейшее уменьшение амплитуды соответствует ветви DF . При уменьшении частоты происходит скачкообразное изменение амплитуды в точке E . Явление "срыва" колебаний наблюдалось экспериментально Кирхманом и Гринспоном [1] при изучении реакции плоских панелей на воздействие шума при уровне звукового давления в 150 дб.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В случае панели с параметром кривизны, равным 12, эффект нелинейности возрастает. При параметре кривизны, равном 24, получаем две области неустойчивости.

Рассмотрим далее случай, когда панель подвергается дополнительному действию продольных усилий, интенсивность которых составляет $1/2$ от верхнего критического значения. При этом становятся возможными три вида колебательных движений: а) колебания около основного устойчивого положения равновесия, б) колебания около прощелкнутого устойчивого положения, в) колебания, охватывающие оба эти положения. Колебаниям около основного положения равновесия соответствует ветвь $сmd$; верхние ветви отвечают третьему типу колебаний.

Данные, представленные на фиг. 4, демонстрируют влияние начальной погни на амплитудно-частотные зависимости; штрих-пунктирные линии отвечают случаю идеальной панели. Как видим, начальные неправильности, направленные к центру кривизны, как бы "спрямляют" амплитудно-частотные кривые; напротив, наличие отрицательной начальной погни приводит к усилению эффекта нелинейности.

В заключение отметим, что полученные здесь данные для идеальных панелей достаточно хорошо согласуются с результатами, полученными Г. В. Мишенковым по методу "гармонического баланса", если проводить сравнение максимальных значений прогибов панелей относительно невозмущенного состояния.

Ս. Ս. Վոլմիր, Ի. Գ. Կիլդիբեկով

ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՈԶ-ԳԾԱՅԻՆ ԱՎՈՒՍՏԻԿ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորվածում գիտարկված է ակուստիկ ճնշման տակ գանձող շրիտալական» ձևի զլանալին պանելի և սկզբնալին անճշտություններով միջին մակերևույթի ձև ունեցող պանելի ստիպողական ոչ-գծային տատանումների խրնդիրը: Պանելի հողակապալին հենման զեպքի համար թաղանթները տեսություն ոչ-գծային հավասարումների սխառմը Բուբնով-Գալյորկինի եղանակի օգնությամբ բերվում է ստորական դիֆերենցիալ հավասարման: Ամպլիտուդային-հաճախականությունների կապը ստանալու համար օգտագործված է Է. Ի. Գրիգոլյուսկի եղանակը: Այնուհետև բերված են տատանումների ժամանակ պանելների վարքագծի վրա կորոթվան, սկզբնալին անճշտություններով միջին մակերևույթի ձևի և բևեռավորման պայմանի պարամետրների ազդեցությունը ցուցադրող գրաֆիկները: Երևք հավասարակշռության վիճակ ունեցող պանելի համար հարավոր են մեծ ամպլիտուդով տատանումներ, որոնք ուղեկցվում են սխառմի մի կալան հավասարակշռության վիճակից մի ուրիշ հավասարակշռության վիճակին շրխկվումով անցումով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Kirchman E. J. and Greenspon J. E. Nonlinear response of aircraft panels in acoustic noise. J. Acoust. Soc. Amer., 29, № 7, 1957, 854—857.
2. Lassiter L. W., Hess R. W. and Hubbard H. H. An experimental study of the response of simple panels to intense acoustic loading. J. Aeronaut. Sci., 24, № 1, 1957, 19—24.
3. Lin Y. K. Response of a nonlinear flat panel to periodic and randomly-varying loadings. J. Aerospace Sci., 29, № 9, 1962, 1029—1033.
4. Goodman L. E., Rattayya J. V. Review of panel flutter and effects of aerodynamic noise. Applied Mech. Reviews, 13, № 2, 1960, 81—87 (перепод: „Механика“, ИЛ, № 5, 1960, 135—152).
5. Болотин В. В. Применение методов теории вероятностей в теории пластин и оболочек. Теория оболочек и пластин. Изд. АН АрмССР, 1964.
6. Диментберг М. Ф. Нелинейные колебания упругих панелей при случайных нагрузках. Известия АН СССР, ОТИ, Мех. и машиностр., № 5, 1962, 102—110.
7. Григोलук Э. И. О колебаниях пологой круговой цилиндрической панели, испытывающей конечные прогибы. ПММ, 19, № 3, 1955, 376—382.
8. Митенков Г. В. Вынужденные нелинейные колебания упругих панелей. Известия АН СССР, ОТИ, Мех. и машиностр., № 4, 1961, 97—103.
9. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

О законе движения ударной волны в жидкости

Рассмотрим задачу проникания давления $P_A(t)$, движущегося по поверхности жидкого полупространства со скоростью $R'(t)$, в глубь него. Рассмотрим осесимметричную задачу. Уравнение политропы для жидкости возьмем в виде $P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]$, где P —давление, ρ —плотность, B, n —постоянные.

Выберем оси Ox_0 и Oz в плоскости поверхности жидкости и поворачиваем к ней, точка O соответствует началу распространения давления на поверхности.

Будем искать решение вблизи ударной волны, соответствующей области влияния начальной точки O —области дифракции. Сначала рассмотрим движение по оси симметрии Oz .

Решение линейной задачи дается в виде [3]

$$P = -P_A \left(t - \frac{z}{a} \right) + P_A(t') \frac{z + R(t') R'(t')}{a(t-t')}, \quad (1)$$

где P —давление, a —начальная скорость звука жидкости, t —время, $R(t)$ —координата фронта давления на поверхности, а для t' имеем уравнение

$$\sqrt{a^2(t-t')^2 - z^2} = R(t').$$

Пусть давление на границе $P_A(t)$ резко падает со временем и в некоторый малый момент $t = t_0$ обращается в нуль. Тогда область возмущенного движения в области дифракции будет ограничена узкой прифронтальной областью, то есть будет [2] короткой волной.

Найдем давление на ударной волне для больших t . Запишем линейное решение (1) на уточненных характеристиках

$$t = \frac{z}{a} - \frac{1}{a} \frac{n+1}{2} \int_{ay}^z \frac{P}{Bn} dz + y, \quad (2)$$

$$P = -P_A(y) + P_A(t') \frac{z + R(t') R'(t')}{a(t-t')}, \quad (3)$$

где в выражении t' нужно заменить $t - \frac{z}{a} \rightarrow y$, $y = \text{const}$ вдоль характеристик (2).

Для больших z из (3) имеем

$$p = \frac{y P_A(y) \frac{R''(y)}{a}}{z} \quad (4)$$

Если подставить (4) в (2) и написать соотношение для скорости ударной волны, легко определить y вдоль ударной волны [1]

$$P_A''(y) y^2 \int_{ay}^z \frac{R''(y)}{a} \frac{1}{Bn} \frac{dz}{z} = \frac{4}{n+1} \int_0^y P_A(y) y dy \quad (5)$$

Из граничных условий $P_A(y_0) = 0$, и, следовательно, имеет место эффект нелинейного затухания. Здесь обозначено $y_0 = t_0$.

Для больших z из (5) имеем $y \rightarrow y_0$ и

$$P_A(y) y = \sqrt{\frac{\frac{4}{n+1} a^2 \int_0^{y_0} P_A(y) y dy}{R''(y) \frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}} \quad (6)$$

Из (4) найдем

$$p = \frac{R'(y)}{a} \frac{1}{z} \sqrt{\frac{\frac{4}{n+1} \int_0^{y_0} P_A(y) y dy}{\frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}} \quad (7)$$

В случае, когда давление на границе задано в виде $P_A(t) = P_A(0) + P_A'(0)t$, имеем $y_0 = -\frac{P_A(0)}{P_A'(0)}$.

Для всей части ударной волны, ограничивающей область влияния точки 0, можно получить соотношение, подобное (7).

Пусть мы имеем для граничного давления $P_A(t)$ падение со временем до нулевого значения $P_A(t_0) = 0$, где t_0 — некоторое число, или $P_A(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Здесь уже нет эффекта короткой волны, но есть N -волна [1].

В линейном случае имеем для давления в области дифракции

$$p = \frac{1}{a} \frac{1}{2z} \frac{\partial}{\partial t'} P_1(t') R^2(t') \quad (8)$$

где $t' = t - \frac{z}{a}$.

Снова заменим характеристики линейной задачи уточненными

$$t = \frac{z}{a} - \frac{n+1}{2} \frac{1}{aBn} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{P_1(y') R^2(y')}{2a} \ln \frac{z}{ay} + y. \quad (9)$$

Обозначим

$$\beta(z) = \frac{1}{aBn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{z}{ay}, \quad (10)$$

$$F(y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{P_1(y) R^2(y)}{2a}.$$

Из соотношения на ударном фронте найдем для y [1]

$$\beta(z) = \frac{2 \int_0^y F(y) dy}{F^2(y)}$$

$$F(y) = \sqrt{\frac{2a \int_0^{y_0} F(y) dy}{\frac{n+1}{2} \frac{1}{Bn} \ln \frac{z}{ay_0}}}, \quad (11)$$

поскольку при $z \rightarrow \infty$ имеем $F(y) \rightarrow 0$, $y \rightarrow y_0$. В самом деле, пусть $P(t_0) = 0$ или $P(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $R(t_0)$ конечно. Тогда по теореме Роля будет нуль $F(y_0) = 0$, причем $0 < y_0 < t_0$.

Уравнение ударного фронта найдется из (10) и (11) в виде

$$t = \frac{z}{a} - \sqrt{\beta(z)} \sqrt{2 \int_0^{y_0} F(y) dy} + y_0.$$

Для давления на фронте найдем

$$\rho = \frac{F(y)}{z} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{2 \int_0^{y_0} F(y) dy}{\beta(z)}}. \quad (12)$$

Предельная характеристика найдется из (10)

$$t = \frac{z}{a} + y_0.$$

Найдем еще условие образования заднего скачка, как огибающей характеристик (10)

$$t = \frac{z}{a} - (z) F(y) + y,$$

$$\beta(z) F'(y) = 1.$$

Задний скачок образуется, если $F'(y) > 0$. Легко показать, что при заданных граничных значениях $P(y)$ и $R(y)$ условие $F'(y) > 0$ выполняется и имеется задний скачок, в котором давление повышается до невозмущенного.

Отметим, что для граничного давления в виде

$$P_A(t)f\left(\frac{r}{R}\right)$$

предыдущее решение меняется незначительно. В частности, в формуле (7) вместо P_A нужно писать $2P_A \int_0^1 \zeta f(\zeta) d\zeta$.

Теперь рассмотрим всю область влияния начальной точки.

В линейном случае имеем для давления в области дифракции

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} \frac{P_A(t') r dr}{\sqrt{r^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos \psi + z^2}}, \quad (13)$$

где

$$r_0^* = R \left(t - \frac{1}{a} \sqrt{r_0^2 + r_0^{*2} - 2rr_0^* \cos \psi + z^2} \right),$$

$$t' = t - \frac{1}{a} \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \psi + z^2}.$$

Для больших $r_1 = \sqrt{r_0^2 + z^2}$, если ввести полярные координаты $r_0 = r_1 \cos \theta$, $z = r_1 \sin \theta$, получим

$$P = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r dr P_1 \left(t - \frac{1}{a} r_1 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right), \quad (14)$$

то есть тот же эффект, что и для сосредоточенной силы.

Решение (14) можно переписать в виде

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial t'} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} r dr P_1 \left(t - \frac{1}{a} r_1 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right), \quad (15)$$

где учтено, что в принятом приближении (для больших r_1)

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\sin \theta}{a}; \quad t' = t - \frac{1}{a} r_1.$$

Заменим характеристики линейной задачи уточненными; пусть $t - \frac{r_1}{a} = y$. Тогда получим

$$P = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr, \quad (16)$$

где

$$r_0^* = R \left(y + \frac{1}{a} r_0^* \cos \theta \cos \psi \right),$$

и уравнение характеристик

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{1}{aBn} \frac{n+1}{2} F(y) \ln \frac{r_1}{ay} + y, \quad (17)$$

где

$$F(y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \theta}{a} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr.$$

Заметим, что уравнение характеристик, вообще говоря, дается соотношением

$$1 - v_r \frac{\partial t}{\partial r_1} - v_\theta \frac{\partial t}{r_1 \partial \theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{r_1 \partial \theta} \right)^2} a \left(1 + \frac{h-1}{2} \frac{P}{Bn} \right). \quad (18)$$

Здесь v_r , v_θ — радиальная и трансверсальная проекции вектора скорости.

Из (14) следует, что $v_r = O\left(\frac{1}{r_1}\right)$, $v_\theta = O\left(\frac{1}{r_1^2}\right)$. Тогда, учитывая, что $t = \frac{r_1}{a} + O(\ln r_1)$, и оставляя в (18) малые порядка $\frac{1}{r_1}$, найдем, что производные по θ не понадобятся и уравнение характеристик дается (17).

Соотношение на ударном фронте дает для y

$$\frac{1}{aBn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_1}{ay} = \frac{2 \frac{\cos \theta}{a} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(y + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}{F^2(y)} \quad (19)$$

или

$$F(y) = \frac{\sqrt{\frac{\cos \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0^*} P_1 \left(y_0 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}}{\sqrt{\frac{1}{Bn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_0}{ay_0}}}, \quad (20)$$

где y_0 находится, как и прежде, из соотношения $F(y_0) = 0$ и по теореме Роля существует для граничных давлений заданного типа, $0 < y_0 < t_0$.

Для давления на ударной волне получим

$$P = \frac{1}{r_1} F(y) = \frac{1}{r_1} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\cos \theta}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{r_0} P_1 \left(y_0 + \frac{1}{a} r \cos \theta \cos \psi \right) r dr}}{\sqrt{\frac{1}{Bn} \frac{n+1}{2} \ln \frac{r_1}{ay_0}}}$$

Рассмотрим теперь решение в окрестности точки $\cos \theta = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$ для постоянной скорости $R'(t) = V$. Давление в линейной постановке дается (13).

Пусть $P_A = \text{const}$, что несущественно. Тогда для точек, близких к фронту, $t - \frac{1}{a} \sqrt{r_0^2 + z^2}$ мало и можно найти

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \times \int_0^{\pi} \frac{at}{M} - r_0 \cos \psi - \sqrt{\left(\frac{at}{M} - r_0 \cos \psi \right)^2 - (a^2 t^2 - r_0^2 - z^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}{\left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{at}{M} - r_0 \cos \psi \right)^2 - (a^2 t^2 - r_0^2 - z^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}} d\psi.$$

Поскольку $t - \frac{r_1}{a} = y$, $r_0 = r_1 \cos \theta$, $z = z_1 \sin \theta$, имеем

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{r_1} \int_0^{\pi} \frac{f_1(\psi) - \sqrt{f_1^2(\psi) - (a^2 t^2 - r_1^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}}{\left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{f_1^2(\psi) - (a^2 t^2 - r_1^2) \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}} d\psi,$$

где

$$f_1(\psi) = \frac{r_1}{M} - r_1 \cos \theta \cos \psi + \frac{ay}{M}.$$

Найдем решение на луче $\cos \theta = \frac{1}{M}$. Тогда отбрасывая малые высшего порядка, имеем

$$P = \frac{1}{\pi} P_1 \frac{1}{r_1} \int_0^{\pi} \frac{f_2(\psi) + \frac{ay}{M} - \sqrt{f_2^2(\psi) - ya2r_1 \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}}{\left(\frac{1}{M^2} - 1 \right) \sqrt{f_2^2(\psi) - ya2r_1 \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right)}} d\psi, \quad (21)$$

где

$$f_2(\psi) = 2 \sin^2 \frac{\psi}{2} r_1 \cos \theta.$$

В выражении (21) особенность появляется вблизи точки $\psi = 0$, причем легко видеть, что $\sin^2 \frac{\psi}{2} \sim y$. С учетом этого сделаем замену

$\frac{\psi}{2} = \varphi$, $\sin^2 \varphi = \frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2r_1 \cos^2 \theta} t = y_1 t$. Тогда, если отбросить малые высшего порядка, нетрудно найти выражение для давления вблизи точки $r_0 = \frac{at}{M}$

$$P = K \sqrt[4]{y_1} = \frac{1}{2\pi} P_1 \sqrt[4]{y_1} \sin \theta \times \\ \times \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1}} \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1 - \sqrt{y_1 t}}} dt. \quad (22)$$

Покажем, что в интеграле можно считать $y_1 = 0$.

Представим его в виде

$$\int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1}} t^{-\frac{3}{4}} dt + \\ + \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} \frac{t^{-\frac{3}{4}} \sqrt{y_1 t} dt}{A(1+A)}, \quad (23)$$

$$A = \sqrt{1 - \sqrt{y_1 t}}.$$

Множитель $1 - \frac{1}{M^2}$ не влияет на дальнейшее доказательство и будет отброшен. Второй из интегралов записывается в виде

$$\sqrt{y_1} \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} t^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}}{A(1+A)} dt + \\ + \sqrt{y_1} \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\sqrt{t+1} (\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} t^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}}{A(1+A)} dt.$$

В этом выражении достаточно показать, что второй интеграл стремится к нулю при $y_1 \rightarrow 0$.

Произведем оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1} \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{1}{\sqrt{t+1}(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})} t^{-\frac{3}{4}} \frac{\sqrt{t}}{A(1+A)} dt &\leq \\ &\leq \sqrt{y_1} \int_1^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t}}{t^{\frac{3}{4}} \sqrt{1 - \sqrt{y_1 t}}} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену $\sqrt{y_1 t} = 1 - x$, $dt = -\frac{2(1-x) dx}{y_1}$. Интеграл переписывается так

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1} \int_{1-\sqrt{y_1}}^0 \frac{y_1^{\frac{5}{4}}}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \frac{-2dx}{y_1 \sqrt{x}} = \\ = \sqrt{y_1} \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{-2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}} y_1^{\frac{1}{4}} + \sqrt{y_1} \int_{1-\sqrt{y_1}}^{\frac{1}{2}} \frac{-2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}} y_1^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Здесь опять достаточно исследовать второй интеграл

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{y_1} \int_{1-\sqrt{y_1}}^{\frac{1}{2}} \frac{y_1^{\frac{1}{4}} 2dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x}} \right| &\leq \sqrt{y_1} \left| \int_{1-\sqrt{y_1}}^{\frac{1}{2}} \frac{4y_1^{\frac{1}{4}} dx}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} \right| = \\ &= \sqrt{y_1} \left(8 - \frac{8y_1^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{2}}} \right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что второй из интегралов (23) стремится к нулю при $y_1 \rightarrow 0$.

Итак, для давления на уточненных характеристиках $t - \frac{r_1}{a} \rightarrow y_1$ получим при $\cos \theta = \frac{1}{M}$

$$P = K \sqrt[4]{y_1}, \quad (24)$$

где

$$K = \frac{1}{2\pi} P_1 \sin \theta \int_0^{\frac{1}{y_1}} \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) \sqrt{t+1}} t^{-\frac{3}{4}} dt, \quad (25)$$

$$y_1 = \frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2r_1 \cos^2 \theta}.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \sqrt[4]{\frac{ay \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}} \frac{1}{a} \frac{4}{3} r_1^{\frac{3}{4}} + y. \quad (26)$$

Из соотношений на ударной волне получим

$$\frac{1}{a} \frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \frac{4}{3} r_1^{\frac{3}{4}} \sqrt[4]{\frac{a \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}} = \frac{y^{\frac{5}{4}} \frac{8}{5}}{\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}} = \frac{8}{5} y^{\frac{3}{4}}. \quad (27)$$

Из (24) и (27) найдем для давления на ударной волне при $\cos \theta = \frac{1}{M}$

$$P = K \left(\frac{n+1}{2} \frac{K}{Bn} \frac{5}{6} \sqrt[4]{\frac{1 - \frac{1}{M^2}}{2 \cos^2 \theta}} a \right)^{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{\frac{a \left(1 - \frac{1}{M^2}\right)}{2 \cos^2 \theta}},$$

причем уравнение ударной линии в виде

$$t = \frac{r_1}{a} - \frac{3}{5} y.$$

Таким образом, в отличие от остальной части ударной волны в области дифракции, где давление имеет экспоненциальный порядок малости, вблизи точки $\cos \theta = \frac{1}{M}$ давление будет малой величиной

порядка $\left(\frac{P_1}{Bn}\right)^{\frac{4}{5}}$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 XII 1963

Բազդոն Յ. Գ.

ՇԵՂՈՒԿՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հարվածում դիտարկվում է հեղուկների թափանցած հարվածային ալիքի շարժման խնդիրը ժամանակի մեծ մասնանների համար: Գծայնացված խա-

բակտերիատիկները նշգրտաներով փոխարինելու օգնությամբ որոշվում է հար-
վածակին ալիքի մարման օրինաչափությունը: Եզակի կեսի շրջակայքում
ստացված է ոչ-զգծակին ինդքի լուծումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Whitam G. B.* The propagation of Weak Spherical Shocs in Star. Communications on pure and applied Mathematics, Volume VI, 1953.
2. *Губкин К. Г.* Образование разрывов в звуковых волнах. ПММ, № 4, 1958.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. М. Айвазян

Излучение при пролете линейного источника над двумя идеально проводящими параллельными полуплоскостями

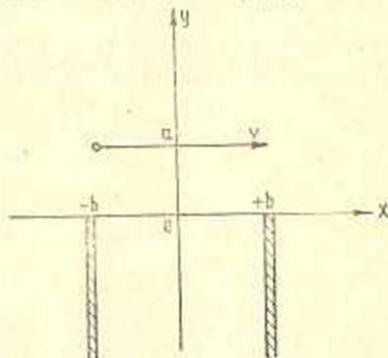
Задача о возбуждении двух параллельных идеально проводящих полуплоскостей равномерно движущейся заряженной нитью относится к типу задач, которые можно точно решить методом Винера-Хопфа.

Пусть нить с линейной плотностью заряда q , параллельная оси z движется в вакууме в положительном направлении оси x со скоростью v на расстоянии a от краев двух идеально проводящих параллельных полуплоскостей ($x = \pm b, y < 0$) (фиг. 1). В этом случае \vec{H} имеет только H_z компоненту, а \vec{E} и \vec{k} лежат в плоскости (x, y) . Вектор Герца $\vec{\Pi}$ имеет только компоненту

Π_x . Полный вектор Герца $\vec{\Pi}_1$ ищем в виде

$$\vec{\Pi}_1 = \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}, \quad (1)$$

где $\vec{\Pi}_0$ описывает поле нити, а $\vec{\Pi}$ описывает поле излучения, которое и будет нас интересовать. Потенциалы поля выражаются через вектор Герца следующим образом:



Фиг. 1.

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}, \quad \varphi = -\text{div} \vec{\Pi}, \quad (2)$$

а поля \vec{E} и \vec{H} выражаются через потенциалы поля по обычным формулам. Вектор Герца Π_0 равен

$$\Pi_0 = \int \Pi_0(k, \omega) e^{-i \frac{\omega}{v}(x-vt) - ik|y-a|} dk d\omega, \quad (3)$$

где

$$\Pi_0(k, \omega) = \frac{iq}{\pi} \frac{1}{\omega [k^2 + \alpha^2]},$$

$$x^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2), \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Вектор Герца Π ищем в виде

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int \Pi(k, \omega, x) e^{-ikx + i\omega t} dk d\omega. \quad (4)$$

Величина $\Pi(k, \omega, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2 \right) \Pi(k, \omega, x) = 0, \quad (5)$$

$$\gamma^2 = k^2 - \alpha^2 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{\omega}{c} + i\delta, \quad \delta > 0.$$

Решения уравнения (5), удовлетворяющие условию исчезновения на бесконечности и непрерывности $\Pi' \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial x}$ при $x = \pm b$ имеют вид

$$\Pi(k, \omega, x) = \begin{cases} (A - Be^{2\gamma b}) e^{-\gamma x} & \text{при } x \geq b \\ Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x} & \text{при } |x| \leq b \\ (-Ae^{2\gamma b} + B) e^{\gamma x} & \text{при } x \leq -b, \end{cases} \quad (6)$$

где A и B — функции k . При этом выбирается ветвь γ такая, что $\text{Re } \gamma > 0$ при $|\text{Im } k| < \delta$.

Введем теперь обозначения

$$\Pi(k, \omega, x) = \Pi_+ + \Pi_-, \quad (7)$$

$$\Pi_{\pm}(k, \omega, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \Pi(x, \pm y, t) e^{-iky - i\omega t} dy dt. \quad (8)$$

При этом $k\Pi_+$ регулярна по k в области $\text{Im } k > -\delta$, а $k\Pi_-$ регулярна в области $\text{Im } k < \delta$. Введем обозначения $\Pi_{\pm}(k, \omega, x \pm 0) \equiv \Pi_{\pm}(x \pm 0)$. Под $\Pi_{\pm}(x \pm 0)$ понимаются пределы справа и слева. Из (7) и (6) получим следующие соотношения:

$$\Pi_+(b+0) + \Pi_-(b+0) = Ae^{-\gamma b} - Be^{\gamma b}, \quad (9)$$

$$\Pi_+(b-0) + \Pi_-(b-0) = Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}, \quad (10)$$

$$\Pi_+(-b+0) + \Pi_-(-b+0) = Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}, \quad (11)$$

$$\Pi_+(-b-0) + \Pi_-(-b-0) = -Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}. \quad (12)$$

Из условий непрерывности Π при $y > 0$ имеем

$$\Pi_+(b+0) = \Pi_+(b-0), \quad (13)$$

$$\Pi_+(-b+0) = \Pi_+(-b-0). \quad (14)$$

Из условий непрерывности $\Pi' \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial x}$ имеем еще следующие соотношения:

$$\Pi'_+(b) + \Pi'_-(b) = \gamma (-Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}), \quad (15)$$

$$\Pi'_+(-b) + \Pi'_-(-b) = \gamma (-Ae^{\gamma b} + Be^{-\gamma b}); \quad (16)$$

из граничных условий $E_y(\pm b, y < 0) = 0$ получим

$$\Pi'_+(\pm b) = \frac{q}{v} e^{-\alpha x \mp i \frac{\omega}{v} b} \frac{1}{k(k - i\alpha)}. \quad (17)$$

Положим

$$\Pi'_+(b) + \Pi'_+(-b) = P'_+, \quad (18)$$

$$\Pi'_+(b) - \Pi'_+(-b) = Q'_+,$$

$$\Pi_-(\pm b + 0) - \Pi_-(\pm b - 0) = \pm 2\Phi_-(\pm b), \quad (19)$$

где

$$\Phi_-(b) = -Be^{\gamma b}, \quad \Phi_-(-b) = -Ae^{\gamma b}. \quad (20)$$

Положим еще

$$\Phi_-(b) - \Phi_-(-b) = Q_-, \quad (21)$$

$$\Phi_-(b) + \Phi_-(-b) = P_-.$$

Образум сумму и разность равенств (19) и то же самое сделаем с равенствами (15) и (16). Используем обозначения (21) и (18). Из полученных соотношений исключим $A + B$ и $A - B$. Получим

$$P'_+ + \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k(k - i\alpha)} = -\gamma (1 + e^{-2\gamma b}) Q_-, \quad (22)$$

$$Q'_+ - \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k(k - i\alpha)} = -\gamma (1 - e^{-2\gamma b}) P_-. \quad (23)$$

К этим уравнениям можно применить стандартный метод Винера-Хопфа. Используем известные факторизации [1]

$$\frac{1}{2} (1 + e^{-2\gamma b}) = M(k) = M_+(k) M_-(k), \quad (24)$$

$$\frac{1}{2\gamma b} (1 - e^{-2\gamma b}) = L(k) = L_+(k) L_-(k), \quad (25)$$

где функции $M_+(k)$ и $L_+(k)$ регулярны при $\text{Im } k > -\delta$, а функции $M_-(k)$ и $L_-(k)$ регулярны при $\text{Im } k < \delta$.

Явный вид этих функций такой

$$L_{\pm}(k) = \exp[\mp \Psi_{\pm}(k) - R_{\pm}(k)] \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - \alpha^2 b_n^2)^{1/2} \mp ikb_n] e^{\pm ikb_n}, \quad (26)$$

$$M_{\pm}(k) = \exp[\pm \Psi_1(k) - R_{\pm}(k)] \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \alpha^2 b_{n-1/2}^2)^{\pm 1/2} \mp i k b_{n-1/2} e^{\pm i k b_{n-1/2}}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(k) &= -\frac{ibk}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{\pi}{2b\alpha} \right) \right] + \frac{1}{2} kb, \\ \Psi_2(k) &= -\frac{ibk}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{b\alpha} \right) \right] + \frac{1}{2} kb, \\ b_n &= \frac{b}{n\pi}, \quad b_{n-1/2} = \frac{b}{(n-1/2)\pi}, \\ \exp(-\gamma b) &= \exp[-R_+(k)] \exp[-R_-(k)], \\ R_+(k) &= \frac{b\gamma}{\pi} \arccos \frac{k}{\alpha}, \quad R_-(k) = R_+(-k). \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом этих факторизаций преобразуем уравнения (22) и (23) к виду

$$\begin{aligned} \frac{kP'_+}{(\alpha+k)^{1/2} M_+(k)} + \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k-ix} \left(\frac{1}{(\alpha+k)^{1/2} M_+(k)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(\alpha+ix)^{1/2} M_+(ix)} \right) &= -2M_-(k) (\alpha-k)^{1/2} kQ_- - \frac{2q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(\alpha+ix)^{1/2} M_+(ix)}, \\ \frac{kQ'_+}{(k+\alpha) L_+(k)} - \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{k-ix} \left(\frac{1}{(k+\alpha) L_+(k)} - \frac{1}{(ix+\alpha) L_+(ix)} \right) &= \\ = -2bk(k-\alpha) L_-(k) P_- + \frac{2iq}{v} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(ix+\alpha) L_+(ix)}. \end{aligned}$$

Правые части этих уравнений регулярны при $\text{Im } k < \delta$, а левые при $\text{Im } k > -\delta$. Совершая аналитическое продолжение и применяя теорему Лиувилля, находим из этих уравнений

$$kQ_- = -\frac{q}{v} \frac{\cos \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(\alpha+ix)^{1/2} (\alpha-k)^{1/2} M_+(ix) M_-(k)}, \quad (29)$$

$$kP_- = \frac{iq}{vb} \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-\alpha x}}{(k-ix)(k-\alpha)(ix+\alpha) L_+(ix) L_-(k)} \quad (30)$$

Для вектора Герца теперь легко найдем следующие выражения:

$$\Pi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} (P_- \operatorname{ch} \gamma x + Q_- \operatorname{sh} \gamma x) e^{-\gamma b - iky + i\omega t} dk d\omega \quad (31)$$

при $|x| \leq b$ и

$$\Pi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} (P_- \operatorname{sh} \gamma b \pm Q_- \operatorname{ch} \gamma b) e^{-\gamma|x| - iky + i\omega t} dk d\omega, \quad (32)$$

где верхний знак берется для $x \geq b$, а нижний для $x \leq -b$, $|\tau| < \delta$.
Магнитное поле при $|x| \leq b$, $y < 0$ имеет следующий вид:

$$H_z = -\frac{1}{2\pi c} \int k\omega (P_- \operatorname{ch} \gamma x + Q_- \operatorname{sh} \gamma x) e^{-\gamma b - iky + i\omega t} dk d\omega. \quad (33)$$

В этом случае подинтегральное выражение не имеет точки ветвления в верхней полуплоскости комплексного переменного k . Поэтому контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости и поле H_z будет определяться особенностями подинтегрального выражения в верхней полуплоскости комплексного переменного k .

При этом вычет в полюсе $k = ix$ дает падающую волну H_z^0 , но с обратным знаком. Вычет в точке $k = \alpha$ в P_- дает основную распространяющуюся в волноводе волну типа ТЕМ. Кроме этих полюсов есть

еще полюса в P_- при $\operatorname{sh} \gamma b = 0$, то есть в точках $k_{2m} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 (2m)^2}{4b^2}}$

и в Q_- при $\operatorname{ch} \gamma b = 0$ в точках $k_{2m+1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 (2m+1)^2}{4b^2}}$. Эти полюса

дают собственные волноводные волны. Беря все вычеты, находим, что поле между пластинами имеет вид

$$\begin{aligned} H_z = & \frac{qv}{cb} \int \frac{\sin \frac{\omega}{v} b e^{-ax - i \frac{\omega}{c} y + i\omega t}}{\omega L_+(ix) L_-\left(\frac{\omega}{c}\right)} d\omega + \\ & + \frac{q}{c v b} \sum_m \int \frac{(-1)^m \omega \sin \frac{\omega}{v} b L_+(k_{2m}) \gamma_{2m}^2 \operatorname{ch}(\gamma_{2m} x)}{(k_{2m} - ix) \left(k_{2m} - \frac{\omega}{c}\right) \left(ix + \frac{\omega}{c}\right) L_+(ix) k_{2m}} \times \\ & \times e^{-ax - ik_{2m} y + i\omega t} d\omega + \\ & + \frac{iq}{c v} \sum_m \int \frac{(-1)^m \omega \cos \frac{\omega}{v} b M_+(k_{2m+1}) \operatorname{sh}(\gamma_{2m+1} x) \gamma_{2m+1}}{(k_{2m+1} - ix) \left(\frac{\omega}{c} + ix\right)^{1/2} \left(\frac{\omega}{c} - k_{2m+1}\right)^{1/2} M_+(ix) k_{2m+1}} \times \\ & \times e^{-ax - ik_{2m+1} y + i\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (34)$$

Интересно отметить, что в волне ТЕМ нет частот, для которых

$\sin \frac{\omega}{v} b = 0$, то есть $\omega = \frac{v\pi m}{b}$. В выражениях для других волн тоже есть аналогичные множители. Обращение волны TEM в нуль при $\omega = \frac{v\pi m}{b}$ имеет простой физический смысл. Если время прохождения источника между пластинами равно или кратно периоду волны, то такая волна TEM не возбуждается. Аналогичный результат получился и в работе [1], в которой рассматривалось возбуждение заряженной нитью бесконечной системы равноотстоящих параллельных идеально проводящих полуплоскостей.

Поток вектора Пойтинга в волноводе можно получить по формуле

$$W_{\omega} = c \int_{-b}^b F_{x,\omega} H_{z,-\omega} dx, \quad (35)$$

где $H = \int H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$. При этом нужно суммировать только по тем m , для которых k_{2m} и k_{2m+1} вещественны.

Поле вне волновода на больших расстояниях можно получить интегрированием по методу перевала. При этом при $b \rightarrow 0$ результаты, очевидно, переходят в результаты работы [3], где рассматривалась дифракция поля заряженной нити на одной идеально проводящей полуплоскости.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 14 XII 1963

ՏՈՒՄՆԵՐ

ԳԾԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԶԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ԵՐԿՈՒ ԻԴԵԱԼԱՊԵՍ շԱՂՈՐԴՈՂ ԶՈՒԳԱԶԵՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱՅՈՎ ԹՈՒՋՔԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է հարթ կիսամանրիկը ակցատարի դր-դատմը հավասարաչափ շարժվող լիցքավորված թելի կողմից:

Ապացուցված է, որ դաշտը ակցատարի մեջ բաղկացած է հիմնական ակցից և ակցատարի սեփական ակցիցներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. И. Л., М., 1962.
2. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Излучение линейного источника, пролетающего вблизи дифракционной решетки, образованной системой идеально проводящих полуплоскостей. ЖТФ, 34, вып. 4, 1964 704.
3. Седракян Д. М. Излучение заряженной нити, движущейся параллельно краю бесконечно проводящего экрана. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, 3, 1963, 115.

Э. Д. Газазян, О. С. Мергелян

Переходное излучение в гиротропных диэлектриках

В работе исследованы особенности переходного излучения в гиротропной среде. Рассмотрена задача об излучении точечного заряда, пересекающего границу раздела гиротропная среда — идеальный проводник. Гиротропия диэлектрика вызвана наложением внешнего магнитного поля \vec{H}_0 .

§ 1. Поле заряда в намагниченном диэлектрике

Пусть точечная частица заряда e движется со скоростью \vec{v} вдоль оси z из $-\infty$ в $+\infty$ в среде с диэлектрической постоянной ϵ (μ считаем равным 1). На среду наложено внешнее магнитное поле \vec{H}_0 (H_{0z}), вследствие чего материальные уравнения электромагнитного поля принимают вид [1]

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon \vec{E} + i [\vec{E} \vec{g}], \\ \vec{B} &= \vec{H}, \\ \vec{g} &= f(\omega) \vec{H}_0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Поле частицы описывается уравнениями (1.1) и уравнениями Максвелла, которые, если представить поля в виде тройных интегралов Фурье

$$\vec{E} = \int \vec{E}(\vec{k}) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\omega t)} d\vec{k},\tag{1.2}$$

имеют вид

$$\begin{aligned}i [\vec{k} \vec{H}(\vec{k})] &= -i \frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}) + \frac{e\vec{v}}{2\pi^2 c}, \\ i [\vec{k} \vec{E}(\vec{k})] &= i \frac{\omega}{c} \vec{H}(\vec{k}), \\ \vec{k} \vec{H}(\vec{k}) &= 0, \\ i \vec{k} \vec{D}(\vec{k}) &= \frac{e}{2\pi^2}, \quad \omega = \vec{k} \vec{v}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Разложив Фурье—компоненты поля частицы на составляющие

$$\vec{E}(\vec{k}) = E_x \frac{\vec{x}}{x} + E_y \frac{\vec{v}}{v} + E_{[xv]} \frac{[\vec{x}\vec{v}]}{xv}, \quad (1.4)$$

$$\vec{k} = \vec{x} + \frac{\omega}{v^2} \vec{v},$$

из (1.1) и (1.3) получим для них следующее уравнение

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\right) \vec{E} + i \frac{\omega^2}{c^2} [g\vec{E}] - i k \frac{g}{\varepsilon} \chi E_{[xv]} = \frac{ie}{2\pi^2 \varepsilon} \left(\frac{\omega \vec{v}}{c^2} \varepsilon - \vec{k}\right). \quad (1.5)$$

Из (1.5) для Фурье—компонент полей излучения имеем

$$E_x = -\frac{ie}{2\pi^2 \varepsilon} \frac{x}{\Delta} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\right),$$

$$E_{[xv]} = \frac{e}{2\pi^2 \varepsilon} \frac{x}{\Delta} \frac{\omega^2}{c^2} g, \quad (1.6)$$

$$\Delta = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\right)^2 + \frac{g^2}{\varepsilon^2} \left(x^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\right) \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon.$$

Формулы (1.2) и (1.6) дают нам поле заряда в гиротронном диэлектрике.

§ 2. Переходное излучение

Пусть теперь плоскость $z=0$ является границей раздела среды с константами ε и \vec{g} и идеальным проводником. Чтобы удовлетворить граничным условиям, полное электромагнитное поле будем искать в виде суммы полей (1.2) и (1.6), а решения однородных уравнений Максвелла в виде

$$\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \int (\vec{E}_1(\vec{k}) e^{-i\lambda_1 z} + \vec{E}_2 e^{-i\lambda_2 z}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t} d\vec{k}, \quad (2.1)$$

где

$$\lambda_{1,2} = \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2 \pm \frac{g}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

Граничные условия имеют вид

$$E_x + E_{1x} + E_{2x} = 0, \quad (2.3)$$

$$E_{[xv]} + E_{1[xv]} + E_{2[xv]} = 0$$

и, кроме того, из однородных уравнений поля имеем

$$\pm \frac{\omega}{c} n E_{1,2x} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2} E_{1,2[\lambda v]} = 0, \quad (2.4)$$

$$n = \sqrt{\varepsilon}.$$

Из уравнений (2.3) и (2.4) для Фурье-компонент полей переходного излучения имеем

$$E_{1,2x} = -\frac{1}{2} \left(E_{\pm} \mp i \frac{c}{\omega n} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2} E_{[\lambda v]} \right). \quad (2.5)$$

Представляя Δ в виде

$$\Delta = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon + \frac{g}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2} \right) \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \frac{g}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2} \right), \quad (2.6)$$

запишем Фурье-компоненты (2.5) следующим образом:

$$E_{1,2x} = \frac{ie}{4\pi^2 \varepsilon} \frac{x}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mp \frac{g}{\varepsilon} \frac{\omega}{c} n \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2}}. \quad (2.7)$$

Интегрирование выражений (2.1) проведем с учетом того, что $g \ll \varepsilon$ и поэтому мы отбросим члены $\sim \frac{g^2}{\varepsilon^2} \ll 1$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = \lambda \mp \frac{1}{2} \frac{g}{\varepsilon} \frac{\omega}{c} n, \quad (2.8)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2},$$

$$\frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mp \frac{g}{\varepsilon} \frac{\omega}{c} n \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2}} =$$

$$= \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon} \left\{ 1 \pm \frac{g}{\varepsilon} \frac{\omega}{c} n \frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - x^2}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon} \right\}.$$

После интегрирования по Φ и по x ($dk = x dx d\Phi \frac{d\omega}{v}$), причем интегрирование по x производится методом перевала [2], имеем

$$E_{\pm} = \frac{e^2 v}{\pi R c^2} \sin \theta \cos \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \left(\frac{\omega}{c} n R - \omega t \right)}}{1 - \beta^2 \varepsilon \cos^2 \theta} \left[\cos \left(\frac{g}{2\varepsilon} \frac{\omega}{c} n R \cos \theta \right) + \right.$$

$$+ ig \frac{\beta^2 \varepsilon}{1 - \beta^2 \varepsilon \cos^2 \theta} \sin \left(\frac{g}{2z} \frac{\omega}{c} nR \cos \theta \right) \Big] d\omega, \quad (2.9)$$

$$E_{\varphi} = \frac{ev \sin \theta}{\pi R c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i \left(\frac{\omega}{c} nR - \omega t \right)}}{1 - \beta^2 \varepsilon \cos^2 \theta} \left[-\sin \left(\frac{g}{2z} \frac{\omega}{c} nR \cos \theta \right) + \right. \\ \left. + ig \frac{\beta^2 \varepsilon}{1 - \beta^2 \varepsilon} \cos \left(\frac{g}{2z} \frac{\omega}{c} nR \cos \theta \right) \right] d\omega.$$

Из формул (2.9) следует, что переходное излучение назад в гиротропной среде состоит из поляризованных по кругу волн, плоскость поляризации которых вращается влево, делая полный оборот на расстоянии

$$R_0 = 4\pi \frac{c}{\omega n} \frac{\varepsilon}{g \cos \theta}. \quad (2.10)$$

Интенсивность его такая же, как и в случае $g=0$, то есть в телесный угол $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ излучается энергия

$$dW = d\Omega \cdot \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} V_{\varepsilon} \left| \frac{1}{1 - \beta^2 \varepsilon \cos^2 \theta} \right|^2 d\omega. \quad (2.11)$$

Кроме этого, имеет место и правополяризованное излучение, однако, его интенсивность ничтожно мала ($\sim \frac{g^2}{\varepsilon^2}$).

§ 3. Излучение Вавилова—Черенкова

При интегрировании выражений (2.1) методом перевала мы не учли полюс подынтегрального выражения в точке $x = \frac{\omega}{v} \sqrt{\beta^2 \varepsilon - 1}$.

Если выполняются неравенства

$$0 < \beta^2 \varepsilon - 1 < \beta^2 \varepsilon \sin^2 \theta, \quad (3.1)$$

то этот полюс дает вклад в интеграл и описывает черенковское излучение, отраженное от границы раздела.

Плоскость поляризации отраженного черенковского поля вращается влево, делая полный оборот на расстоянии R_0 , а интенсивность его задается формулой Тамма и Франка [3

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon} \right) \omega d\omega,$$

то есть равна интенсивности падающего потока (отметим, что на границу раздела падала правополяризованная волна).

Есть в отраженном черенковском поле и правополяризованное излучение, но интенсивность его $\sim \frac{g^2}{\varepsilon^2}$.

В заключение авторы выражают благодарность Б. М. Болотовскому за обсуждение результатов.

ЦНИ физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 2 XI 1963

Է. Գ. Գաղապյան, Ն. Ս. Մեղեկյան

ԱՆՅՈՒՍԱՅԻՆ ՃԱՌԱԳԱՅՔՈՒՄԸ ՀԻՐՈՏՐՈՊ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿՆԵՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ ուսումնասիրված են կետային լիցքի անցումային ճառագայթման առանձնահատկությունները իզևայական հաղորդիչ և հիրոտրոպ դիէլեկտրիկ սահմանի վրա: Հիրոտրոպիան ստեղծված է արտաքին մագնիսական դաշտի միջոցով, որն ուղղված է լիցքի շարժմանը զուգահեռ: Իրատրված են ճառագայթման սպեկտրն ու բևեռացումը, ստացված է բանաձև՝ ճառագայթման ինտենսիվության համար:

Յույց է տրված, որ չիրենկովյան ճառագայթման պայմանի կատարման դեպքում առաջացած ճառագայթումը լիովին անդրադաճում է հաղորդչի մակերևույթից և ունի սկզբնական ճառագայթման բևեռացմանը հակառակ բևեռացում: Հաշվումները կատարված են $\frac{g}{\varepsilon} \ll 1$ մոտավորությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
2. Гарибян Г. М. К теории переходного излучения. ЖЭТФ, **33** 1957, 1403.
3. Франк И. М., Тамм И. Е. Когерентное излучение быстрого электрона в среде. ДАН СССР, **14** 1937, 107.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

П. А. Безирганян

Функция вероятности распределения молекул в газах,
жидкостях и аморфных твердых телах

Обычно для описания распределения молекул в газах, жидкостях и аморфных твердых телах вводится функция вероятности $W(r)$. Предполагается, что эта функция вероятности распределения сферически симметрична [1]—[4]. С помощью этой функции определяется радиальное распределение молекул в том случае, если относительно любой молекулы облучаемого объема оно сферически-симметричное.

Однако, в случаях, когда статическая однородность в облучаемом объеме не сохраняется, функция вероятности W не может быть сферически симметричной и с помощью этой функции не может быть описано статистическое распределение молекул.

В данной работе вводится новая функция G , которая дает вероятность распределения молекул в направлении вектора $\vec{S} = \vec{s} - \vec{s}_0$ при их любом распределении, где \vec{s}_0 и \vec{s} — единичные векторы в направлении падения и рассеяния. С помощью функции G можно найти зависимость распределения молекул от направления. В случае, когда распределение молекул не зависит от направления, функция G совпадает с функцией W .

§ 1. Замена трехмерного усреднения двумерным усреднением

Интенсивность волн, рассеянных любым скоплением мотивов (атомов, молекул, ячеек) по лауэвскому приближению выражается формулой (см. [3])

$$|A|^2 = C_1 \left[\sum_{p=1}^N |f_p|^2 + \sum_{p,q}^{p \neq q} f_p f_q^* \exp \{ ik (\vec{S}_{pq}) \} \right], \quad (1.1)$$

где

$$C_1 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{e}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2},$$

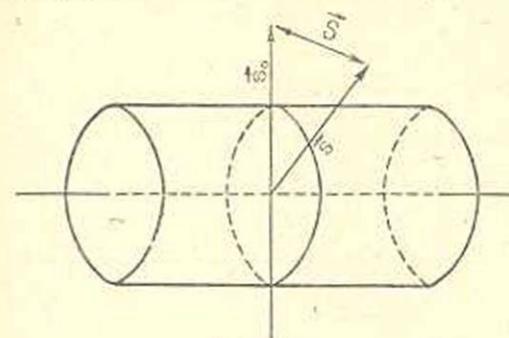
f_p — функция рассеяния мотива p ,

N — число рассеивающих мотивов.

Для нахождения измеряемой интенсивности волн, рассеянных в газах, жидкостях и аморфных твердых телах, выражение (1.1) обычно усредняют по всем возможным конфигурациям, что часто, в зависимости от формы облучаемого объема приводит к большим математическим расчетным трудностям. С другой стороны, этот метод усреднения дает возможность определить только сферически симметричное распределение рассеивающих атомов, т. е. распределение, определяемое вероятностью W .

Нетрудно убедиться в том, что трехмерное усреднение в пространстве облучаемого объема можно заменить одномерным усреднением по линии, параллельной вектору $\vec{S} = \vec{s} - \vec{s}_0$. Этим, во-первых, задачу усреднения выражения (1.1) можно значительно упростить и, во-вторых, этот метод усреднения даст возможность с помощью функции вероятности G найти распределения атомов в любом направлении, тогда как прежний метод усреднения дает возможность определить только сферически симметричное распределение.

Действительно, допустим, что монохроматическая плоская волна в направлении \vec{s}_0 падает на рассеивающий объем V , и мы исследуем интенсивность рассеяния в направлении \vec{s} (см. фиг. 1). Ясно, что все



Фиг. 1.

одинаковые мотивы, расположенные на одной и той же плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{S} , независимо от агрегатного состояния рассеивающего вещества, рассеивают в одинаковых фазах. Разности фаз возникают только между волнами, рассеянными мотивами, принадлежащими различным плоскостям.

Следовательно, с точки зрения возникновения разностей фаз безразлично в какой точке данной плоскости (перпендикулярной к \vec{S}) расположен рассеивающий мотив.

Если так, то рассеивающий объем можно заменить рассеивающей линией, параллельно вектору \vec{S} , приписывая каждой точке этой линии такую рассеивающую способность, какую имеет плоскость (данного объема), проходящая через эту точку, перпендикулярная к \vec{S} . Таким образом, для средней интенсивности волн, рассеянных в газе, состоящем из точечных атомов, по лауэвскому приближению получим

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left[N + \frac{N(N-1)}{V^2} \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} \alpha \alpha' \exp \{i2k \sin \theta (x - x')\} dx dx' \right], \quad (1.2)$$

где σ и σ' — поперечные сечения облучаемого объема, перпендикулярные к вектору \vec{S} , соответственно в точках x и x' (см. фиг. 5),

l — максимальный линейный размер облучаемого объема в направлении \vec{S} , 2θ — угол рассеяния.

Так как области изменения переменных x и x' , а так же σ и σ' одинаковые, то (1.2) можно переписать в виде

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + \frac{N(N-1)}{V^2} \left[\int_{-l/2}^{+l/2} \sigma \exp(i2k \sin \theta x) dx \right]^2 \right\}. \quad (1.3)$$

Как видно, последняя формула представляет собой среднюю интенсивность, полученную одномерным усреднением.

Используя последнюю формулу, легко можно найти среднюю интенсивность облучаемого объема, если только известно уравнение поверхности этого объема, тогда, когда эти расчеты по принятым методам иногда представляют большие трудности. Одновременно эта формула дает возможность введения функции распределения G , зависящей от направления.

Для иллюстрации преимуществ предлагаемого метода рассчитаем среднюю интенсивность рассеянных волн для некоторых случаев облучаемого объема.

1. *Случай эллипсоидального облучаемого объема.* Пусть облучаемый объем имеет форму эллипсоида вращения с полуосями $a = b$ и c_0 и допустим вектор \vec{S} лежит в плоскости ab , то есть в плоскости кругового сечения, тогда получим

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + N(N-1) \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 \frac{a^2 c_0^2}{V^2} [\Phi(\mu a)]^2 \right\}, \quad (1.4)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{3(\sin x - x \cos x)}{x^3},$$

$$\mu = \frac{4\pi \sin \theta}{\lambda}.$$

2. *Случай шарового облучаемого объема.* В случае шарового облучаемого объема, поставив в (1.4) $a = c = R$, получим

$$\bar{J} = C_1 f^2 [N + N(N-1) [\Phi(\mu R)]^2]. \quad (1.5)$$

Как видно, последнее выражение точно совпадает с аналогичным выражением, выведенным трехмерным усреднением (см. [1] и [2]).

3. *Случай цилиндрического облучаемого объема.* В случае, когда облучаемый объем имеет вид кругового цилиндра и вектор \vec{S} перпендикулярен к оси цилиндра, можно различать случаи, когда плоскость падения совпадает с плоскостью кругового сечения и когда ось цилиндра лежит в плоскости падения (см. фиг. 1 и 2). Для этих двух случаев σ имеет одинаковое значение

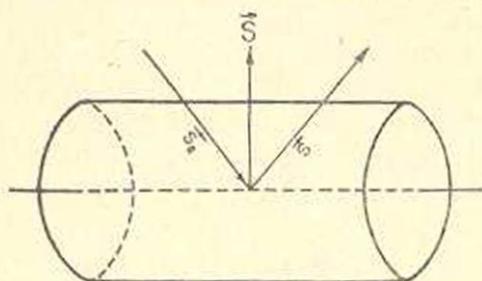
$$\sigma = l \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (1.6)$$

где R и l —соответственно радиус и длина цилиндра, x —расстояние σ от оси цилиндра.

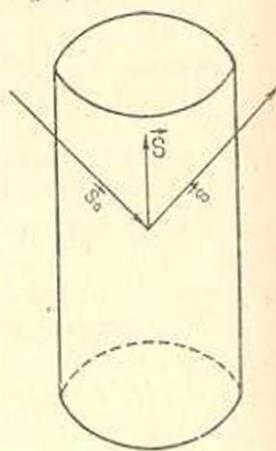
Имея в виду (1.3) и (1.6), получим

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + N(N-1) \left[\frac{J_1(z)}{z} \right]^2 \right\}, \quad (1.7)$$

где $J_1(z)$ —функция Бесселя первого порядка, $z = \mu R$. В случае, когда вектор \vec{S} параллелен оси цилиндра (см. фиг. 3), для σ получим $\sigma = \pi R^2$. Имея в виду последнее,



Фиг. 2.



Фиг. 3.

из (1.3) получим

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + N(N-1) \frac{\sin^2(kl \sin \theta)}{(kl \sin \theta)^2} \right\}. \quad (1.8)$$

4. *Случай параллелепипедального облучаемого объема.* В случае, когда облучаемый объем имеет вид параллелепипеда и вектор \vec{S} перпендикулярен к его грани, для σ получим (см. фиг. 4) $\sigma = ab$, что для интенсивности дает

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + N(N-1) \frac{\sin^2(kc \sin \theta)}{(kc \sin \theta)^2} \right\}. \quad (1.9)$$

§ 2. Функция вероятности распределения мотивов

Облучаемый объем разобьем на тонкие параллельные слои, перпендикулярные к вектору \vec{S} (см. фиг. 5). Как уже сказано, интенсивность рассеянных волн не зависит от распределения рассеивающих мотивов в направлении, перпендикулярном к вектору \vec{S} , а зависит лишь от распределения в направлении \vec{S} , то есть в данном бесконечно тонком слое при данном числе рассеивающих мотивов интенсивность волн, рассеянных этим слоем, совершенно не зависит от распределения мотивов внутри слоя—только зависит от их числа.

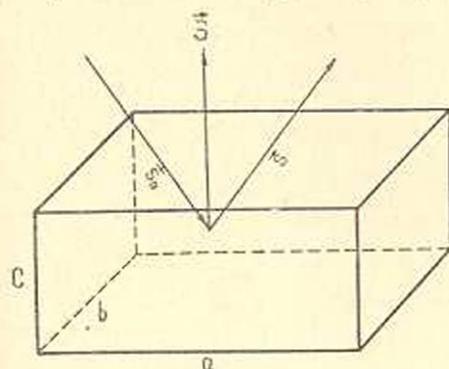
Вероятность того, что мотив p расположен в слое i и одновременно мотив q расположен в слое j , для точечных мотивов равна

$$\frac{\sigma_i dx_i}{V} \cdot \frac{\sigma_j dx_j}{V} \quad (2.1)$$

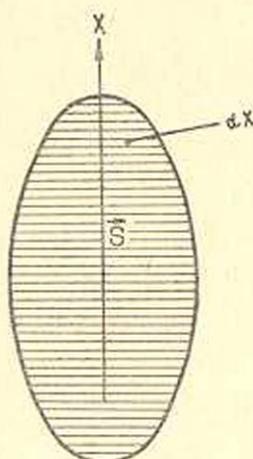
а для газа, состоящего из одноатомных молекул конечного размера, эта вероятность будет

$$G(x) \frac{\sigma_i dx_i}{V} \cdot \frac{\sigma_j dx_j}{V} \quad (2.2)$$

\bar{G} зависит от характера распределения мотивов в направлении x (координатная ось x параллельна вектору \vec{S} (см. фиг. 5)).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В случае вероятности (2.1) средняя интенсивность выражается формулой (1.3), а в случае (2.2) эта интенсивность может быть выражена формулой

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + N(N-1) \frac{1}{V^2} \int_{-1/2}^{+1/2} \int_{-1/2}^{+1/2} G \sigma_i \sigma_j e^{i2k(x_i - x_j) \sin \theta} dx_i dx_j \right\},$$

которую удобно переписать в виде (см. [1])

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N + \frac{N(N-1)}{V^2} \left[\int_{-1/2}^{+1/2} \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx \right]^2 - \right. \\ \left. - \frac{N(N-1)}{V} \int_{-1/2}^{+1/2} [1 - G(x)] \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx \right\}.$$

Первый интеграл в последнем выражении мы уже рассмотрели. Этот интеграл имеет заметное значение только при очень малых углах, поэтому мы этот член опустим, следовательно,

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N - \frac{N(N-1)}{V} \int_{-1/2}^{+1/2} [1 - G(x)] \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx \right\}.$$

Пределы интегрирования мы можем взять от $-\infty$ до $+\infty$, так как на больших расстояниях функция вероятности $G(x)$ как и $W(r)$ стремится к единице. Распределение в данном слое может влиять на распределение только ближних слоев. Однако, можно и освободиться от этого ограничения. Действительно, даже если в пределах всего облучаемого объема функция распределения $G(x)$ отлична от единицы, то есть если на любых расстояниях распределение мотивов не совсем беспорядочно, то все-таки пределы интегрирования можно взять от $-\infty$ до $+\infty$, так как вне пределов облучаемого объема величина $\sigma(x)$ равна нулю

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N - \frac{N(N-1)}{V} \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - G(x)] \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx \right\}. \quad (2.3)$$

Если предполагать, что размер рассеивающих мотивов (эффективный размер области действия) в направлении \vec{S} равен q и при $x > q$ $G(x) = 1$, а при $x < q$, $G(x) = 0$, то (2.3) даст

$$\bar{J} = C_1 f^2 \left\{ N - \frac{N(N-1)}{V} \int_{-q/2}^{+q/2} \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx \right\}. \quad (2.4)$$

откуда на основании формул (1.4)–(1.9), можно вычислить среднюю интенсивность для различных видов областей действия мотивов.

§ 3. Определение функции вероятности распределения

С помощью формулы (2.3), используя экспериментальные данные, можем вычислить функции вероятности распределения. Действительно, заменяя $N-1$ через N , из (2.3) получим

$$\left\{ \frac{\bar{J}_M(\theta)}{C_1 f^2} - 1 \right\} \frac{1}{n_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} [G(x) - 1] \sigma(x) \exp(i2kx \sin \theta) dx, \quad (3.1)$$

где $\bar{J}_M(\theta) = \frac{\bar{J}}{N}$ — среднее рассеяние, приходящееся на один мотив,

$n_0 = \frac{N}{V}$ — средняя плотность мотивов.

Применяя интегральное преобразование Фурье, из (3.1) получим

$$n_0 [G(x) - 1] \sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mu) \exp(i2\pi x \mu) d\mu, \quad (3.2)$$

где

$$\mu = \left| \frac{\vec{S}}{\lambda} \right| = \frac{2 \sin \theta}{\lambda}, \quad \varphi(\mu) = \frac{\bar{J}_M(\mu)}{C_1 f_M} - 1.$$

Определив экспериментально $\bar{J}_M(\mu)$, можем вычислить интеграл в (3.2) и определить функцию $G(x)$.

§ 4. Обсуждение результатов и выводы

Из результатов вышеприведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Выводы формул (1.4)—(1.9) показывают, что предлагаемый метод значительно упрощает расчеты интенсивности волн, рассеянных в газах, жидкостях и аморфных твердых телах.

2. Введена новая функция вероятности распределения мотивов, зависящая от направления.

Используя экспериментальные данные, можно определить функцию вероятности распределения $G(x)$.

Можно ввести также функцию плотности мотивов $n(x)$, которая определяется тем, что $\sigma(x)n(x)dx$ есть среднее число мотивов в слое, расположенном между координатами x и $x+dx$.

Функция вероятности $G(x)$ и функция плотности $n(x)$ связаны соотношением

$$n(x) = n_0 G(x) = \frac{N}{V} G(x). \quad (4.1)$$

Действительно, при совершенно беспорядочном распределении $G(x) = 1$ и $n(x)$ совпадает с n .

В силу (4.1) выражение (3.2) примет следующий вид:

$$[n(x) - n_0] \sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mu) \exp(i2\pi\mu x) d\mu. \quad (4.2)$$

Последнее дает возможность определить $n(x)$ для любого x . Формулы (3.2) и (4.2) в особых случаях, например, в случаях волокнистых веществ, смогут быть очень полезными.

Действительно, для определения сферически симметричных функций вероятности $w(r)$ и плотности $\rho(r)$, интеграл в выражении (см. [1])

$$4\pi r^2 [\rho(r) - \rho_0] = \frac{2r}{\pi} \int_0^{\infty} \mu i(\mu) \sin \mu r d\mu$$

берется для всех значений $\mu = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta$, то есть при $r = \text{const}$ для всех значений угла рассеяния θ , поэтому функция $w(r)$ является сферически симметричной и фактически представляет вероятность среднего распределения молекул на поверхности сферы радиуса r . Функция $w(r)$ зависит только от величины, а не от направления вектора \vec{r} . Функция $\rho(r)$ является средней атомной плотностью на расстоянии

r от любого атома, то есть средней плотностью на поверхности сферы радиуса r .

Так как в процессе определения $\bar{G}(x)$ и $n(x)$ все наши расчеты производились для данного направления вектора $\vec{S} = \vec{s} - \vec{s}_0$, и именно, поэтому функции $\bar{G}(x)$ и $n(x)$ зависят от направления. Для различных направлений вектора \vec{S} эти функции могут иметь различные значения, если в облучаемом объеме распределение молекул зависит от направления. Следовательно, в процессе определения $\bar{G}(x)$ и $n(x)$ при вычислении интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mu) \exp(i2\pi\mu x) d\mu$$

необходимо использовать только те экспериментальные данные, то есть только те значения μ , которые соответствуют одному и тому же направлению вектора \vec{S} .

Как известно, в волокнистых веществах распределение молекул сильно зависит от направления. Вдоль оси волокна и поперек вероятности плотностей распределения молекул резко отличаются. Именно с помощью рассматриваемых здесь функций $\bar{G}(x)$ и $n(x)$ можно определить зависимость плотности молекул от направления, что очень важно при исследовании волокнистых веществ.

Ереванский государственный университет

Поступила 5 X 1963

Պ. 2. Բեզիրգանյան

ԳԱԶԵՐՈՒՄ, ՇԵՂՈՒԿՆԵՐՈՒՄ ԵՎ ԱՍՈՐՖ ՊԻՆԴ ՍԱՐՄԻՆՆԵՐՈՒՄ ՄՈՆԵԿՈՒԼՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ՉԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Սովորաբար դադերի, հեղուկների և ամորֆ պինդ մարմինների մեջ մոլեկուլների բաշխումը նկարագրելու համար կիրառվում է մի ֆունկցիա, որը սֆերիկ սիմետրիկ է: Այդ ֆունկցիայի օգնությամբ որոշվում է մոլեկուլների ռադիալ բաշխումը այն դեպքում, երբ նա ճառագայթվող ծավալի ցանկացած մոլեկուլի համար սֆերիկ սիմետրիկ է:

Տվյալ աշխատությունում կիրառվում է մի նոր ֆունկցիա, որը տալիս է մոլեկուլների բաշխումը $\vec{S} = \vec{s} - \vec{s}_0$ վեկտորի ուղղությամբ, որտեղ \vec{s} և \vec{s}_0 համապատասխանաբար անկման m ցրման ուղղությամբ միավոր վեկտորներ են:

Ինտենսիվությունները հաշվելու համար առաջարկված է նոր մեթոդ, որն զգալիորեն պարզեցնում է այդ հաշիվները դադերի, հեղուկների և ամորֆ պինդ մարմինների դեպքում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. И—Л, М., 1950.
2. Гинье А. Рентгенография кристаллов. Физматгиз, М., 1961.
3. Китайгородский А. И. Рентгеноструктурный анализ мелкокристаллических и аморфных тел. Техтеориздат, М.—Л., 1960.
4. Данилов В. И. Рассеяние рентгеновских лучей в жидкостях. ОНТИ, М., 1953.

И. Д. Караченцев

О неустойчивости сферического скопления галактик в Coma

§ 1. Общие сведения

В последнее время вопрос о стационарности различных систем галактик приобрел большую остроту и значимость. Начиная с 1955 года, в серии работ В. А. Амбарцумяна и других авторов [1, 2, 3, 4] было указано на неустойчивость конкретных групп и скоплений галактик.

Конференция по неустойчивости систем галактик [5], состоявшаяся в 1961 году в Санта-Барбаре США, подвела итоги дискуссии по этому вопросу. Сделаны были следующие выводы:

1. Тесные физические пары галактик, по-видимому, стабильны.
2. Небольшие группы с трапецеидальной конфигурацией (Квинтет Стефана) расширяются.
3. Неправильные скопления типа Virgo подозреваются в неустойчивости.
4. Компактные правильные скопления (Coma) имеют отрицательную полную энергию и стационарны.

Последнее утверждение подробно обосновано Ф. Цвикки, который много лет занимался изучением сферического скопления Coma. Перечислим его аргументы (в порядке возрастания убедительной силы):

- а) высокая степень симметрии сферических скоплений прямо указывает на стационарность их;
- б) распределение плотности числа галактик вдоль радиуса скопления соответствует ожидаемому из теории для изотермической газовой сферы Эмдена;
- в) далекие скопления галактик не обнаруживают по сравнению с близкими каких-либо эволюционных изменений;
- г) в скоплениях заметна сегрегация ярких и слабых галактик. Имеется аналог больцмановского распределения плотности для смеси "газов". А такое распределение устанавливается лишь с достижением системой стационарного состояния;
- д) в сферических скоплениях очень высок процент эллиптических и линзовидных (SO) галактик. Такое население образовалось в

результате взаимных столкновений, приводящих к потере пыли и сглаживанию структурных неоднородностей. Поскольку столкновения между галактиками редки, то обилие типов E и SO указывает на солидный возраст скопления;

е) положительный знак энергии у всех скоплений противоречит общезвестному факту, что большинство галактик входит в скопления;

ж) для расширяющихся скоплений „время экспансии“ в 5–10 раз меньше, чем возраст наблюдаемой части Метагалактики ($13 \cdot 10^9$ лет).

Единственным обстоятельством, не укладывающимся в эту систему аргументов, явилось применение к скоплениям теоремы вириала. В предположении стационарности скоплений из теоремы вириала получались ненормально большие значения отношения массы к светимости $\frac{M}{L}$ для галактик. Устранить указанную трудность пытались введением следующих предположений:

а) эллиптические галактики, входящие в скопления, действительно имеют $\frac{M}{L}$ большее, чем галактики фона;

б) в массу скопления существенный вклад вносит светящаяся и невидимая межгалактическая материя.

Однако, эти предположения кажутся искусственными и, более того, противоречат некоторым наблюдательным данным.

В сферическом скоплении галактик Coma как в системе гравитирующих частиц возможны четыре различных состояния стационарности:

1. Неустойчивое состояние с положительной полной энергией.
2. Состояние нестационарности в общем регулярном поле при отрицательной энергии.
3. Стационарное состояние в регулярном поле.
4. Квазистационарное состояние в поле иррегулярных сил.

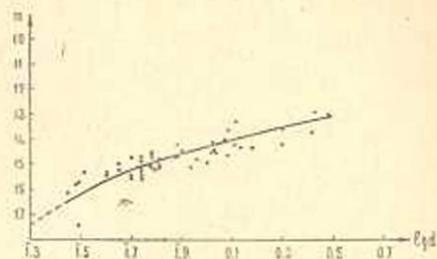
В четвертом случае должно устанавливаться равномерное распределение энергии между галактиками с разными массами. Именно этой точки зрения и придерживается Ф. Цвикки. Предположение, что у Coma полная энергия положительна, впервые было выдвинуто В. А. Амбарцумяном [2]. Промежуточная точка зрения принадлежит Т. А. Агекяну [6]: он считает скопление Coma стационарным только в общем регулярном поле.

Задачей данной работы является отыскание таких морфологических и динамических критериев, которые могли бы однозначно указать на степень стационарности сферического скопления Coma.

§ 2. Результаты измерений

В районе скопления Coma на картах Паломарского атласа определялись координаты, угловые диаметры и типы галактик до определенного углового размера d_{\min} . По этим данным строилась диаграмма

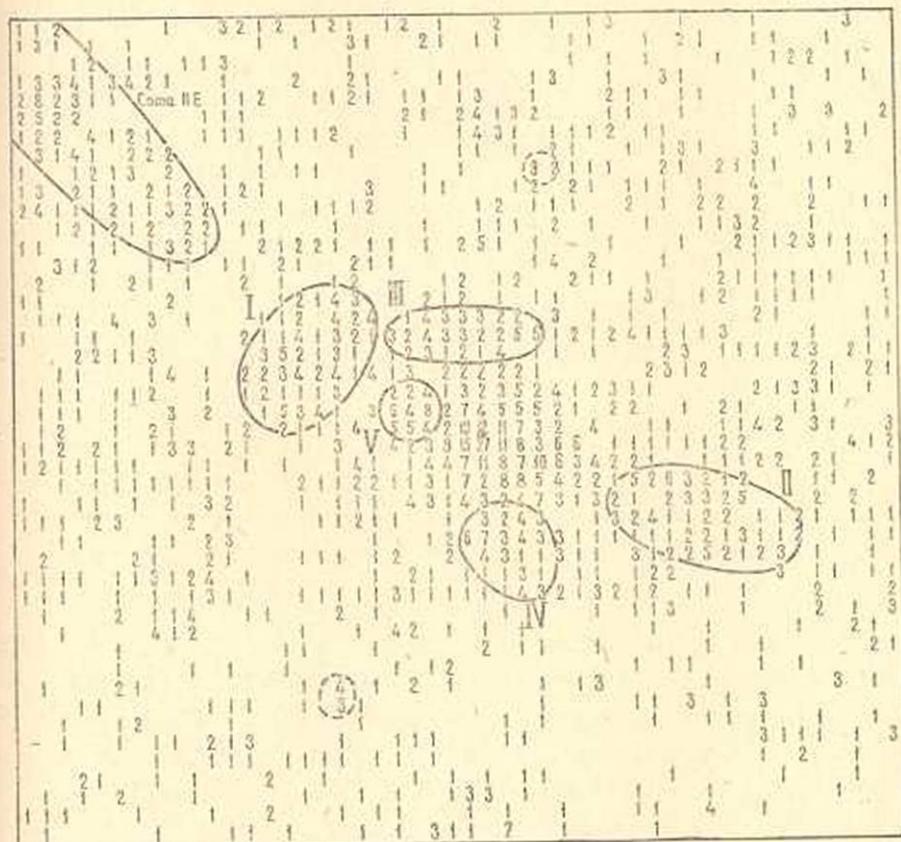
распределения галактик. На диаграмму галактики наносились различными индексами и цветами в зависимости от яркости и типа. Такой способ изучения скоплений трудоемок, на зато дает гораздо больше морфологических сведений, чем обыкновенные подсчеты чисел галактик в единичных площадках. В частности, имеется возможность определять характер населенности скопления и количественно изучать эффекты сегрегаций. Для перехода от углового размера к фотографической звездной величине строилась зависимость $m_{\phi} \sim \lg d$ по 49 галактикам с известными звездными величинами (фиг. 1).



Изученная область имеет вид прямоугольника с размерами $9^{\circ} \times 8^{\circ},4$ и центром, приблизительно

совпадающим с центром скопления (фиг. 2 и 3). На этой площади обнаружено 617 галактик ярче $15^m,6$ и 1937 галактик ярче $17^m,4$.

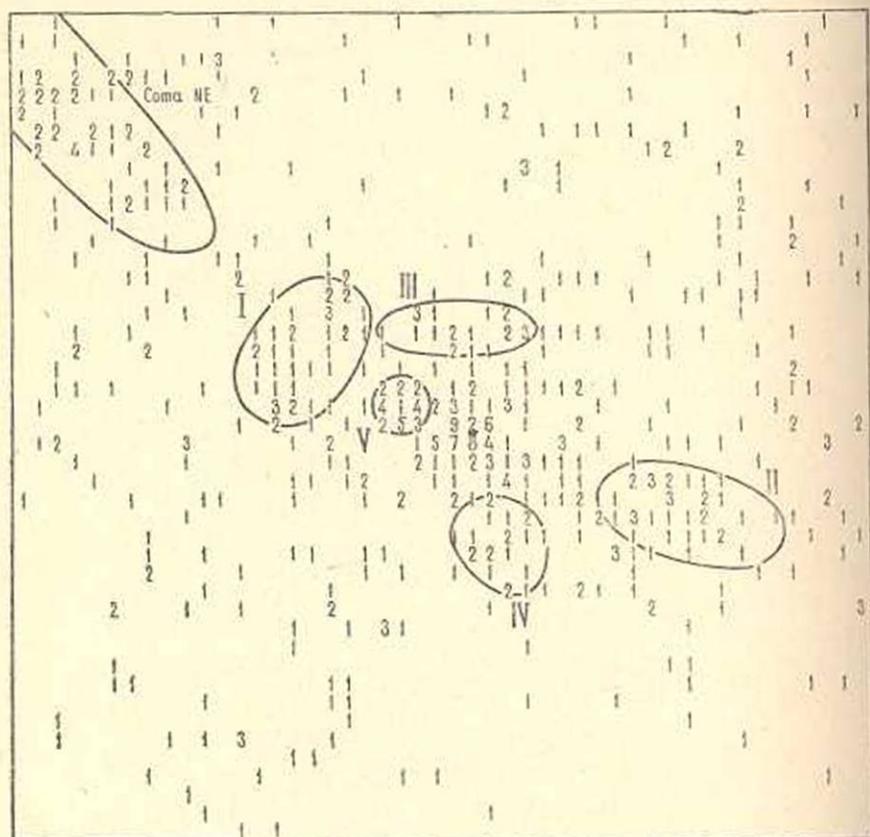
Фиг. 1. Зависимость звездная величина—логарифм углового диаметра для галактик Сомы.



Фиг. 2. Распределение галактик ярче $17^m,4$. Центр скопления отмечен черным кружком. Каждая цифра указывает число галактик в квадрате со стороной $11',2$.

Распределение их в первом приближении сферичное. Однако, имеются и заметные неоднородности. На фигурах они обведены линиями. Ниже будет показано, что эти неоднородности распределения образуют структурные особенности скопления Coma.

Подсчеты галактик в кольцевых зонах и вычисленное по ним распределение плотности числа галактик вдоль радиуса приведены в табл. 1. Центр скопления ($\alpha = 12^{\text{h}}57^{\text{m}}3^{\text{s}}$, $\delta = +28^{\circ}14'$) выбирался по мак-



Фиг. 3. Распределение галактик ярче $15^{\text{m}}6$. Масштаб тот же, что и на фиг. 2.

симальной концентрации, он приходится на самую яркую галактику NGC 4874. Из таблицы видно, что граница скопления довольно неопределенна. Если из подсчетов чисел галактик фона не исключать соседнее скопление (Coma NE), то падение плотности прекращается на расстоянии $3^{\circ}-4^{\circ}$ от центра. Если же Coma NE исключить, то плотность падает вплоть до последней зоны, т. е. до $5^{\circ}-6^{\circ}$. Возможно, что скопление простирается еще дальше.

Чтобы найти количество членов скопления, нужно принять определенное значение числа галактик фона на квадратный градус $N_{\text{ф}}$. При $N_{\text{ф}} = 15$ к скоплению принадлежит 890 галактик ярче $17^{\text{m}}4$.

Заметим, что изучаемая область располагалась на четырех картах. Из-за непостоянства атмосферных условий N_{ϕ} различно для разных карт. Сравнение подсчетов галактик на участках, общих для двух карт, показывает, что N_{ϕ} меняется от карты к карте всего на 15–20%.

Для выявления эффекта сегрегации ярких и слабых членов скопления в каждой зоне вычислялась средняя звездная величина галактик \bar{m} . Такая характеристика удобнее критерия Цвикки (отношения чисел галактик ярче и слабее $16^m 5$) [7], т. к. зависимость $\bar{m}(r)$, вообще говоря, может быть получена и теоретически. Значения \bar{m} указаны в табл. 2. В ней же приводится и процентное содержание галактик различных типов (галактики фона не исключались).

Таблица 1

Номер зоны	Радиусы зоны	Число галактик в зоне	Число галактик на квадратный радиус
1	0'–5'	22	1010
2	5–10	33	494
3	10–15	40	367
4	15–20	32	210
5	20–25	25	127
6	25–30	42	175
7	30–35	31	110
8	35–40	40	123
9	40–45	32	86
10	45–50	36	87
11	50–55	26	57
12	55–60	39	78
13	60–70	67	59
14	70–80	65	50
15	80–90	54	37
16	90–100	59	36
17	100–110	54	30
18	110–120	66	33
19	120–140	135	30
20	140–160	99	19.0
21	160–180	108	18.2
22	180–200	130	19.6
23	200–220	139	19.0
24	220–240	150	18.7 17.1**)
25	240–260	146	16.8 16.2
26*)	260–360	287	17.4 11.7

Анализ таблицы позволяет подметить следующие тенденции: \bar{m} с большими колебаниями возрастает от центра к периферии; процент эллиптических галактик убывает от 80–90% в центре до 30% на краю скопления; процент *SO* приблизительно постоянен; процент спиралей возрастает с 5 до 40–50%; неправильные галактики почти

* Последняя зона охватывает не все направления, а только четыре угла прямоугольника. Среднее расстояние вершин углов от центра равно 367'.

** Число галактик на квадратный градус после исключения соседнего скопления Coma NE.

отсутствуют в центре, а на периферии составляют 5—10%; галактики с низкой поверхностной яркостью составляют 1—2%; процент пекулярных убывает от 15% в центре до 5% на краю скопления.

Может показаться, что Coma состоит исключительно из *E* и *SO* галактик и что наличие спиралей, также как сегрегация спиралей и

Таблица 2

Номер зоны	\bar{m}	$E^*/\%$	$SO^*/\%$	$S^*/\%$	$Jr^*/\%$	С низкой поверхностной яркостью %	Из них пекулярных %	N_s
1	14 ^m .77	86	9	5	—	—	18	50
2	15,10	91	6	3	—	—	13	15
3	16,16	73	15	12	—	—	13	46
4	15,26	47	34	13	6	—	6	27
5	15,91	64	16	20	—	—	8	25
6	15,80	52	31	17	—	—	7	30
7	15,82	45	32	17	6	—	—	19
8	15,98	45	22	28	5	—	3	34
9	15,07	59	16	19	6	—	13	16
10	15,37	42	33	25	—	—	3	22
11	16,42	77	15	8	—	—	12	5
12	15,59	39	23	25	8	5	8	20
13	15,59	48	18	25	9	—	9	15
14	15,46	40	22	29	6	3	14	15
15	15,00	28	30	35	4	3	11	13
16	15,29	29	32	22	14	3	9	8
17	15,73	33	9	54	4	—	2	16
18	15,73	36	29	29	6	—	—	10
19	15,46	32	13	46	5	4	6	13
20	16,10	32	13	48	7	—	2	9
21	16,12	40	19	37	4	—	6	7
22	15,64	38	20	34	8	—	5	7
23	16,16	36	15	41	7	1	4	8
24	15,80	30	21	37	11	1	1	7
25	15,51	30	15	46	7	2	7	8
26	15,61	31	17	45	4	3	3	8
26*	15,80	24	12	51	8	5	2	6

Во втором столбце приводится средняя звездная величина галактик в зоне.

В третьем—шестом указан процент галактик различных типов.

Последний столбец дает число спиралей на квадратный градус.

эллиптических галактик, обусловлены наложением галактик фона. Последний столбец табл. 2 дает число спиралей на квадратный градус для каждой зоны. Убыль N_s от центра наружу указывает на реальное присутствие спиралей в скоплении.

§ 3. Структурные неоднородности Coma

Изучая распределение галактик в Coma, Шейн и Виртанен [8] обнаружили подскопление к югу от центра на расстоянии 1° . Ван ден Берг [9] исследовал угловые расстояния между галактиками и тоже пришел к выводу, что в Coma существуют подскопления. Однако, его методика не давала возможности исключать эффекты поглощения и наложения далеких скоплений.

* Та же зона, но без скопления Coma NE.

На диаграмме распределения галактик выделяются, по крайней мере, пять подскоплений (I—V) возле центрального ядра, а к северо-востоку на расстоянии 5° от центра находится скопление, обозначенное символом Сомы NE .

Поскольку Сомы находится вблизи галактического полюса, то поглощение света пылью Галактики невелико. Чтобы выявить межгалактическое поглощение света, использовался следующий прием. Ослабление света сопровождается покраснением. При наличии поглощения в областях, бедных галактиками, должен наблюдаться избыток цвета CE . Следовательно, должна существовать связь между числами галактик в единичных площадках на красной (N_k) и синей (N_c) картах Паломарского атласа. Выясним вид этой зависимости.

Для однородного поля одинаковых по яркости галактик справедливо соотношение:

$$N = N^0 \cdot 3,98^{-\Delta m}, \quad (3.1)$$

где Δm —поглощение света в звездных величинах, N^0 и N , соответственно,—числа галактик на единичной площадке в отсутствии и при наличии поглощения.

Применяя (3.1) к синей и красной картам, имеем

$$\frac{N_c}{N_k} = \frac{N_c^0}{N_k^0} \cdot 3,98^{-(\Delta m_c - \Delta m_k)} = \text{const} \cdot 3,98^{-CE}.$$

Избыток цвета линейно связан с поглощением: $CE = \frac{\Delta m_c}{\gamma}$; здесь коэффициент γ выражается через эффективные длины волн двух спектральных областей следующим образом: $\gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$; для Паломарского атласа $\lambda_2 = 6500 \text{ \AA}$, $\lambda_1 = 4300 \text{ \AA}$ и $\gamma = 2,96 \approx 3$. Тогда

$$\frac{N_c}{N_k} = \text{const} \cdot N_c^{\frac{1}{3}}. \quad (3.2)$$

Следовательно, между $\lg \frac{N_c}{N_k}$ и $\lg N_c$ должна наблюдаться линейная зависимость. Подсчеты галактик до 20^m в 102-х площадках, расположенных на разных расстояниях от центра скопления, дали для коэффициента корреляции между $\lg \frac{N_c}{N_k}$ и $\lg N_c$ значение $K = 0,3 \pm 0,1$.

Но галактики 20^m заметно ослабляются красным смещением. Для галактик ярче 17^m9 $K = +0,1 \pm 0,1$.

Аналогичные подсчеты проводились и для звезд. Полученные результаты позволяют утверждать, что ни галактическое, ни межгалактическое поглощения не могут быть причиной наблюдаемых неоднородностей в Соме.

На реальность существования подскоплений указывают также данные табл. 3. Мы видим, что в каждом подскоплении процент ярких галактик выше, чем у фона. Средняя звездная величина \bar{m} галактик подскопления меньше \bar{m} для галактик соседних областей, находящихся от центра скопления на том же расстоянии. Следовательно, наложение далеких скоплений не может быть ответственным за наблюдаемые неоднородности распределения.

Таблица 3

Область	$N_{\square} \%$	$N_{\Delta} \%$	\bar{m}	$\bar{m}_{\text{зоны}}$	\bar{m}_{10}	$\left[\frac{W(n)}{W(\bar{n})} \right]_{\square}$	$\left[\frac{W(n)}{W(\bar{n})} \right]_{\Delta}$
Сота I	9	34	15 ^m 40	15 ^m 67	14 ^m 3	4 · 10 ⁻⁹	6 · 10 ⁻⁵
Сота II	13	34	15,39	15,58	14,3	2 · 10 ⁻¹⁰	3 · 10 ⁻¹³
Сота III	14	26	15,32	15,50	14,4	8 · 10 ⁻²	3 · 10 ⁻¹
Сота IV	12	19	15,54	15,56	14,5	1 · 10 ⁻²	5 · 10 ⁻¹
Сота V	9	41	15,36	15,64	14,6	1 · 10 ⁻⁴	5 · 10 ⁻¹⁰
Сота NE	10	34	15,46	15,73	14,2	—	—
Фон	5	18	—	—	—	—	—

$N_{\square} \%$ — процент галактик ярче 14^m6,

$N_{\Delta} \%$ — процент галактик в интервале 15^m6—14^m6,

\bar{m} — средняя звездная величина галактик подскопления (ярче 17^m4),

$\bar{m}_{\text{зоны}}$ — средняя звездная величина галактик в зоне (ярче 17^m4), в которой расположено подскопление,

\bar{m}_{10} — средняя звездная величина 10 ярчайших членов подскопления,

$\left[\frac{W(n)}{W(\bar{n})} \right]_{\square}$ — относительная вероятность случайной флуктуации для галактик ярче 17^m4,

$\left[\frac{W(n)}{W(\bar{n})} \right]_{\Delta}$ — относительная вероятность случайной флуктуации для галактик ярче 15^m6.

Средняя звездная величина 10 ярчайших членов у каждого подскопления приблизительно одинакова, значит подскопления находятся примерно на одинаковом расстоянии от наблюдателя и образуют физическую систему.

Обнаруженные неоднородности распределения не могут быть случайными. Вероятности случайных флуктуаций распределения галактик внутри областей Сота I—V для галактик ярче 17^m4 и ярче 15^m6 приведены в последних столбцах табл. 3. Вероятности рассчитывались по формуле

$$W(\bar{n}) = W(\bar{n}) \cdot e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}}$$

где \bar{n} —среднее (наивероятнейшее) число галактик в данной области, n —наблюдаемое число, $W(\bar{n})$ —вероятность наивероятнейшего распределения, а $W(n)$ —вероятность флуктуации ($n - \bar{n}$). Вероятность случайного сгущения в областях I, II, V составляет ничтожную величину: 10^{-4} — 10^{-13} . Для областей III и IV вероятность порядка 10^{-1} — 10^{-2} . Однако, нужно помнить, что пространственная флуктуация плотности всегда больше, чем в проекции на картинную плоскость. Поэтому вычисленные вероятности систематически завышены на несколько порядков.

Подсчеты галактик на диаграмме 2 показывают, что в подскопления I—V входит более четверти всего населения Coma.

Отметим такой любопытный факт: скопление Coma NE вытянуто в направлении Coma, а система подскоплений Coma I—V, в свою очередь, ориентирована на Coma NE. Такая диагональная асимметрия Coma хорошо заметна и на фиг. 2 в статье Мэйалла [10]. Судя по звездным величинам ярчайших галактик, оба скопления равноудалены от наблюдателя. Вполне возможно, что здесь мы имеем сверхсистему, напоминающую цепочку скоплений в Геркулесе.

На диаграмме распределения галактик, выделяются еще две небольшие группы. Они обведены на фиг. 2 пунктиром. Северная из них имеет диаметр $12'$ и состоит из 8 эллиптических галактик средней яркости, угловой диаметр южной— $25'$, состоит она исключительно из спиралей (9 членов ярче $17^m.4$). Эти группы находятся, по-видимому, за скоплением, но не исключена возможность и того, что они принадлежат скоплению.

§ 4. Оценки массы и светимости скопления

По данным Мэйалла [10] средняя лучевая скорость для 50 галактик скопления составляет $+6920 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$, а дисперсия лучевых скоростей— $982 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$.

Этому соответствует при $H = 75 \frac{\text{км}}{\text{сек-млс}}$ расстояние

$r = 92 \text{ млс}$. Прокалиброванная зависимость $m_{\phi} \sim \lg d$ позволяет найти интегральную светимость скопления. С учетом галактического ($0^m.24$) и межгалактического ($0^m.21$) ослабления света общая светимость составляет $4,9 \cdot 10^{13} L_{\odot}^*$. Абсолютная фотографическая величина Солнца бралась по Аллену [11] равной $5^m.31$. Интегральная светимость скопления соответствует излучению от 950 галактик с абсолютной звездной величиной— $19^m.0$. Основной вклад в светимость скопления вносят яркие галактики. Для них зависимость $m_{\phi} \sim \lg d$ прокалибрована достаточно хорошо. Точность оценки L составляет примерно 30%.

* Эйбелл получил несколько меньшее значение— $4,5 \cdot 10^{13} L_{\odot}$. Но за радиус Coma он принимал $R = 2,5$.

Для определения массы скопления предположим, что оно стационарно и применим теорему вириала:

$$2T + U = 0. \quad (4.1)$$

Кинетическая энергия T вычисляется по дисперсии лучевых скоростей. Потенциальную энергию U можно оценить двумя следующими способами:

а) разобьем скопление эквипотенциальными поверхностями на ряд тонких концентрических слоев. Потенциал внутри каждого сферического слоя считаем постоянным. Тогда гравитационная энергия скопления представляется формулой

$$U = \frac{1}{2} G \frac{M^2}{\bar{R}}, \quad (4.2)$$

где

$$\bar{R} = \frac{5}{6} \frac{\left(\sum_{i=1}^k N_i \right)^2}{\sum_{i=1}^k N_i^2 \frac{r_i^5 - r_{i-1}^5}{(r_i^3 - r_{i-1}^3)^2}}, \quad (4.3)$$

здесь r_i — радиус i -го сферического слоя, N_i — число галактик в нем, а индекс „ k “ связан с радиусом скопления: $r_k = R$. Записанное в явном виде относительно массы уравнение (4.1) принимает вид:

$$M = 233 \langle \Delta v^2 \rangle \cdot 2\bar{R}, \quad (4.4)$$

масса скопления выражена в солнечных массах, дисперсия скоростей $\langle \Delta v^2 \rangle$ в $\frac{\text{км}}{\text{сек}}$, а эффективный радиус \bar{R} в парсеках. Беря N_i из табл. 1,

имеем $\bar{R} = 0,45 R$. Для $R = 5''$ получается $M = 5,03 \cdot 10^{15} M_{\odot}$. Эта оценка дает нижний предел массы скопления, т. к. при вычислении \bar{R} использовалось распределение плотности в проекции на картинную плоскость;

б) верхний предел массы можно оценить методом „полос“ Амбарцумяна [12]. В этом методе все галактики проектируются на некоторую произвольную ось y , проходящую через центр сферического скопления. Потенциальная энергия дается точной формулой

$$U = G \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(y)]^2 dy, \quad (4.5)$$

где G — постоянная тяготения, а $\varphi(y)$ — распределение плотности в проекции на ось y . Задача нахождения U сводится к подсчетам чисел галактик в параллельных полосах шириной Δy . Подставляя (4.5) в теорему вириала (4.1), получаем

$$M = 233 \frac{N^2}{\left[\sum_{i=1}^N N_i(y) \Delta y \right]^2} \cdot \langle \Delta v^2 \rangle \cdot \Delta y; \quad (4.6)$$

здесь Δy —ширина полосы в парсеках, $\langle \Delta v^2 \rangle$ —дисперсия скоростей в $\frac{\text{км}}{\text{сек}}$, $N_i(y) \Delta y$ —число галактик в i -ой полосе, а N —полное число галактик. В силу неравенства Коши-Буняковского методом „полос“ получается верхнее значение массы. Расчет массы по формуле (4.6) (полосы брались шириной в 33') дает $M = 4.96 \cdot 10^{13} M_{\odot}$.

Как видим, согласие независимых оценок массы хорошее. Для среднего значения $M = 5.0 \cdot 10^{13} M_{\odot}$ получаем отношение массы к светимости $\frac{M}{L} = 1020 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$, т. е. на полтора порядка больше обычного.

Объяснить избыток M присутствием между галактиками темного газо-пылевого вещества невозможно: за Сома видно много далеких скоплений. По данным радионаблюдений [13] масса нейтрального водорода не превышает 3% общего количества вещества в Сома.

Если предположить, что избыток M сосредоточен в невидимых плотных телах с массами порядка массы галактики, то снова натолкнемся на трудность. Для Сома время релаксации $t_E = 10^{11} - 10^{12}$ лет. Чтобы удовлетворить критерию устойчивости скопления, требуется отнести на долю невидимых тел 98% всей массы. Но тогда t_E уменьшится до $2 \cdot 10^9 - 2 \cdot 10^{10}$ лет, то есть скопление быстро достигло бы квазистационарного состояния в иррегулярном поле. А в Сома нет признаков стационарности даже в регулярном поле (подскопления!).

Некоторые полагают, что у гигантских эллиптических галактик могут быть чрезвычайно большие значения $\frac{M}{L}$, и поэтому в

$\frac{M}{L}$ Сома = 1020 нет ничего удивительного. Однако, если для слабых галактик $\frac{M}{L}$ нормальное, т. е. примерно 20—30, то у ярких должно быть $\sim 1000 - 2000$. Поскольку из теоремы вириала, применяемой к внутреннему движению звезд в галактиках, $M \sim \langle \Delta v^2 \rangle R$, а из графика 1 $L \sim R$, то $\frac{M}{L} \sim \langle \Delta v^2 \rangle$. Из этого следует, что у гигантских галактик дисперсия скоростей звезд должна быть на порядок больше, чем у нормальных и составлять примерно $2000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$. Но в

пользу такой большой дисперсии скоростей звезд у гигантов нет никаких наблюдательных данных. Более того, большая размытость спектральных линий поглощения у E -гигантов приводила бы к большим погрешностям в оценках их лучевых скоростей. Однако, в каталоге

[14] лучевые скорости ярчайших галактик NGC 4874 и 4889 приведены с погрешностью $\pm 30 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ и $\pm 40 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$, соответственно, тогда как у слабых галактик погрешность в 2–3 раза больше. К этому следует добавить, что, имея $\frac{M}{L} \sim 1000$, галактики Coma заметно отличались бы от галактик фона. При той же светимости или их диаметры должны были быть на два порядка больше нормальных или же внутренняя дисперсия скоростей звезд больше на порядок, чем у галактик фона. Ни то, ни другое не подтверждается наблюдениями.

Попытка объяснить большую кинетическую энергию скопления ссылкой на существование в нем подскоплений не устраняет количественного расхождения. Прибавление к трем степеням свободы поступательного движения галактики еще двух степеней вращательного движения меняет коэффициент при кинетической энергии менее, чем в два раза.

Таким образом остается единственный выбор: скопление нестационарно и расширяется.

§ 5. Аргументы, подтверждающие нестабильность Coma

Мэйнал [10] обнаружил уменьшение дисперсии лучевых скоростей галактик Coma при переходе от центральных областей скопления к периферии, что указывает на радиальный характер движений в скоплении. Такой эффект как раз и должен наблюдаться, если скопление расширяется.

Для ярких галактик дисперсия $\langle \Delta v_r \rangle$ меньше, чем для слабых. Коэффициент корреляции между $\langle \Delta v_r \rangle$ и m равен $+0,1$. Этим, по-видимому, и обусловлена сегрегация ярких и слабых галактик. Если стать на точку зрения образования галактик за счет деления и выбросов из ядер, то эффект получает естественную интерпретацию: в процессе деления менее массивная галактика получает по закону сохранения количества движения большую скорость относительно центра тяжести. Поэтому массивные галактики—родительницы имеют малую дисперсию скоростей. К примеру, средняя скорость двух ярчайших центральных галактик NGC 4874 и 4889 отличается от средней для скопления всего на $115 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$.

В Coma найдено 15 двойных и 3 тройных системы галактик, члены которых соединены перемычками или диффузной светящейся материей. Общая оболочка указывает на то, что пары эти физические. Однако, в случае достижения скоплением квазистационарного состояния в иррегулярном поле между числом пар и числом одиночных галактик должно установиться диссоциативное равновесие. Применяя формулу Амбарцумяна [15] к данному скоплению галактик, получаем

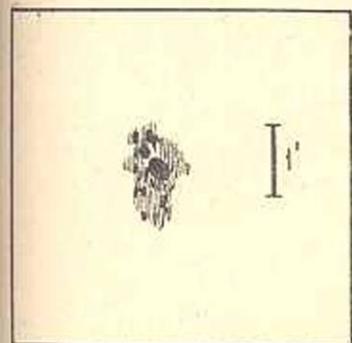
$$\frac{\delta n}{n} = 10^{-8}, \quad (5.1)$$

где δn — число пар, а n — число одиночных галактик. Для $n = 1000$ имеем $\delta n = 10^{-5}$, то есть на 100000 скоплений типа Сомы должна приходиться одна физическая пара галактик (с расстоянием между компонентами в 50 *кпс*). Следовательно, факт существования в Соме нескольких пар говорит об отсутствии в нем квазистационарного состояния.

На расстоянии 4° от центра скопления расположена пекулярная система NGC 4676 („играющие мышки“). Лучевая скорость „мышек“ $v_r = 6550 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ отличается от средней для скопления всего на $370 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$.

Бэрбиджи [16] считают эту пару членом скопления. Они полагают, что возраст „мышек“ порядка 10^8 лет.

На $85'$ к северу от центра находится объект, изображенный на фиг. 4. Из эллиптической галактики как бы вытекает шлейф светящейся материи. В голубоватую материю вкраплены три галактикоподобных сгущения.



Фиг. 4. Пекулярный объект в Соме.

Возле самого центра скопления находится двухядерная галактика NGC 4898. Небольшой возраст этих систем не вызывает сомнений. Список подобных объектов можно было бы продолжить. Пекулярные галактики составляют 9% от общего числа галактик в области Сомы, т. е. приблизительно около 80 из них принадлежат скоплению.

Будет небезынтересен такой подсчет. Разделяющиеся галактики выглядят пекулярными в течение примерно $5 \cdot 10^8$ лет. Если возраст Сомы равен возрасту Метагалактики, то в настоящее время процент пекулярных должен составлять $\frac{5 \cdot 10^8}{1,3 \cdot 10^{10}} = 4\%$ (образование галактик предполагается равномерным и непрерывным во времени). Эта величина по порядку согласуется с наблюдениями.

Подчеркнем: присутствие молодых объектов в Соме говорит о том, что члены скопления возникли неодновременно; процесс образования галактик продолжается в настоящее время. Именно благодаря постоянному возникновению новых членов расширяющееся скопление все еще наблюдается нами как скопление.

Экспансионный возраст Сомы для $R = 5^\circ$ равен $5 \cdot 10^8$ лет, то есть в два раза меньше H^{-1} . Однако, нет никаких оснований считать $R = 5^\circ$ предельным радиусом скопления. На таких расстояниях плотность $N(r)$ настолько мала, что совершенно замывается соседними в проекции скоплениями. Если возраст Сомы равен H^{-1} , то до расстоя-

ния в $15^\circ - 20^\circ$ от центра скопления должны попадаться галактики с лучевыми скоростями, мало отличающимися от средней, поскольку они движутся под небольшими углами к картинной плоскости. И действительно, в каталоге Хьюмаса, Мэйалла и Сандейджа [14] имеется пара пекулярных галактик IC 3481 и апон (№ 43 в каталоге „взаимодействующих“ галактик Воронцова-Вельяминова), удаленных от центра Coma на 18° и имеющих среднюю скорость $v_r = 7120 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$,

то есть всего на $200 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ больше, чем у скопления. Принадлежность этой системы к Coma весьма вероятна.

В ы в о д ы

Вернемся к аргументам а)–ж), якобы подтверждавшим стационарность сферических скоплений. Им можно соответственно противопоставить следующие факты и соображения:

а) сферическая симметрия скоплений весьма условна. Даже самое регулярное скопление Coma имеет крупные неоднородности и вытянуто в направлении SW — NE;

б) модель изотермической газовой сферы Эмдена находится в противоречии с радиальным характером движений галактик в скоплении. Более того, ход плотности, предсказываемый теорией, плохо согласуется с данными табл. 1. Если считать, что в центре скопления теоретическая плотность равна наблюдаемой, то уже на расстоянии $30'$ от центра теоретическое значение составляет 50% наблюдаемого, а на расстоянии $160'$ — только 20%. Можно увязать теорию с наблюдениями следующим способом (Цвикки). Масса и радиус изотермической сферы Эмдена бесконечны. Произвольно вычитая некоторую постоянную величину можно урезать плотность до нуля на конечном расстоянии от центра. Но даже такое согласование плотности на периферии не в состоянии устранить больших расхождений теории с наблюдениями в средних областях скопления;

в) сравнение далеких скоплений с близкими производилось до лучевой скорости $V_r = 61000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ (Hydra). Скопление Hydra находится от нас на расстоянии $2,7 \cdot 10^9$ световых лет. Этого мало, чтобы заметить при большой селекции наблюдений эволюционные изменения в скоплении, имеющем возраст порядка $1,3 \cdot 10^{10}$ лет;

г) сегрегация ярких и слабых галактик появляется при достижении скоплением квазистационарного состояния в иррегулярном поле. Однако, за то же время должно устанавливаться и диссоциативное равновесие между числом пар и одиночных галактик. Так как последнее не наблюдается, то причина сегрегации должна быть иная (см. выше);

д) нельзя считать E и SO галактики более старыми, чем спирали. Они (E и SO) входят во многие группы галактик с положи-

тельной полной энергией. Цепочки в Virgo и Perseus также состоят из этих типов. А системы в виде цепочки или трапеции имеют возраст порядка $10^8 - 10^9$ лет;

е) скопление, в котором постоянно образуются новые галактики, будет выглядеть скоплением даже несмотря на расширение. При этом остается справедливым утверждение, что большинство галактик входит в скопления (в наблюдательном отношении процесс образования новых членов компенсирует расширение скопления);

ж) малое время экспансии для скоплений вызвано, по-видимому, недооценкой их размеров.

Изучение других сферических скоплений (Cancer, Perseus, Pegasus) показало, что и эти скопления неустойчивы. Признаки нестационарности выражены у них не менее явно, чем в Сома. Среди больших систем галактик, по-видимому, вообще нет устойчивых образований.

Считаю долгом выразить признательность академику В. А. Амбарцумяну и доценту А. Ф. Богородскому за внимание к работе и ценные советы.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
АН Армянской ССР

Поступила 17 XII 1963.

Ի. Գ. Կարաչեցև

Сома-ոՒՄ ԳԱԼԱԿՏԻԿԱՆԵՐԻ ԱՑԵՐԻԿ ԿՈՒՏԱԿՄԱՆ
ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Քննադատարար զիտարելված են տարրեր փաստարկներ, որոնք հիմնավորում են Сома գալակտիկաների կուլտի ստացիոնարությունը: Տարրեր անկլունային չափերի գալակտիկաների հաշվումներով որոշվում է Сома կուլտի ինտեգրալ պայծառությունը: Բերվում են մոբիլոդինական տվյալներ կուլտի մասին, մասնավորապես՝ գալակտիկաների սեզրեղացիայի էֆեկտները ըստ պայծառության և տիպերի: Հաշվարկներված են մի քանի ենթակուլտեր: Երկու տարրեր վարիանտներով դնահատվում է մասսան, մասսայի լուսատվության հարաբերությունն ստացվում է 1030 (մինչև 30%-ի ճշտությամբ):

Ստացված տվյալների համաձայն, կուլտի լրիվ էներգիան դրական է: Բերված են լրացուցիչ փաստարկներ, որոնք խոսում են Сома-ի լայնացման օգտին: Արվում է ենթադրություն, որ կուլտը տարածվում է շատ ավելի հեռու, քան ընդունված է ներկայումս:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян В. А. Некоторые замечания о кратных галактиках. Сообщение на симпозиуме Международного астрономического союза в Дублине. Ереван, 1955.

2. Амбарцумян В. А. Об эволюции галактик. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **11**, № 5, 1958, 9.
3. Burbidge G. and Burbidge Marg E. The Hercules cluster of nebulae. *Ap. J.*, **130**, № 2, 1959, 629.
4. Gerard de Vaucouleurs. The apparent density of matter in groups and clusters of galaxies. *Ap. J.*, **131**, № 3, 1960, 285.
5. Proceedings of the conference on instability of systems of galaxies. Middletown, Connecticut, U. S. A., 1961.
6. Агекян Т. А., Петровская И. В. О распределении плотности в сферических скоплениях звезд и галактик. Уч. зап. ЛГУ, серия матем. наук, **36**, № 307, 1962, 187.
7. Zwicky F. Morphological astronomy. Berlin, Springer, 1957.
8. Shane C. D. and Wirtanen C. A. The distribution of extragalactic nebulae. *A. J.*, **59**, № 8, 1954, 285.
9. Sidney van den Bergh. The clustering of galaxies. *PASP*, **73**, № 430, 1961, 46.
10. Mayall N. U. Advantages of electronic photography for extragalactic spectroscopy. *Ann. d'a. p.*, **23**, 3, 1960, 344.
11. Аллен К. У. Астрофизические величины. И. Л., М., 1960.
12. Амбарцумян В. А. О гравитационной потенциальной энергии открытых скоплений. ДАН СССР, **24**, 1939, 875.
13. Muller C. A. 21-cm observations on the Coma cluster. *B. A. N.* **14**, № 493, 1959, 339.
14. Humason M. L., Mayall N. U. and Sandage A. R. Redshifts and magnitudes of extragalactic nebulae. *A. J.*, **61**, № 3, 1956, 97.
15. Амбарцумян В. А. К статистике двойных звезд. *А. Ж.*, **14**, 1937, 207.
16. Burbidge G. and Burbidge Marg E. NGC 4676, a peculiar system in the Coma cluster of galaxies. *Ap. J.*, **133**, № 2, 1961, 726.

С. Р. Месчян

Методика определения характеристик ползучести скелета глинистых грунтов применительно к условиям одномерного уплотнения

Изучение закономерностей и определение параметров, характеризующих ползучесть глинистого грунта, являются сложной и трудоемкой работой, требующей длительного испытания большого количества образцов, обладающих одинаковыми физико-механическими свойствами.

Если изготовление большого количества образцов с одинаковыми свойствами при испытании грунтов нарушенной структуры все же возможно, то получение таких при испытании образцов ненарушенной структуры очень трудно, порою даже невозможно. Поэтому необходимо стремиться к уменьшению количества испытываемых образцов при изучении деформаций ползучести глинистых грунтов разработкой приближенных, простых, но достаточно точных методик исследований. Как известно, для определения зависимости напряжение сдвига—скорость деформации сдвига Н. Н. Маслов [1] испытывает один образец, а метод, позволяющий определить длительную прочность грунтов испытанием одного образца, предложен М. Н. Гольдштейном [2].

Как известно, для представления зависимости напряжение—деформация ползучести—время в виде интегральных соотношений линейной (1) и нелинейной (2) теорий упруго-ползучего тела Г. Н. Маслова—Н. Х. Арутюняна [3, 4]

$$l(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \quad (1)$$

$$l(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) \frac{1}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_0}^t F[\sigma(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

необходимо знать меру ползучести материала $C(t, \tau)$, зависимость напряжение—деформация ползучести (в случае нелинейной ползучести—функцию напряжения $F(\sigma)$), а также необходимо экспериментально доказать справедливость закона наложения Больцмана [5] для деформации ползучести.

Мера ползучести $C(t, \tau)$ представляет собой изменение деформации материала во времени при постоянной единичной нагрузке $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$, приложенной к нему в возрасте τ . Она определяется из соответствующего эксперимента. $F(\sigma)$ — функция напряжения, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями ползучести, определяется из семейства опытных кривых ползучести, t — время, для которого определяется деформация.

В наших работах [6, 7], опубликованных ранее, вопросам определения меры ползучести и функции напряжения уделено большое место, поэтому на этих вопросах мы здесь не остановимся. Что же касается проверки справедливости закона наложения для деформаций ползучести, то, поскольку в работе [6] рассмотрен только один частный случай, позволим себе несколько подробнее осветить этот вопрос.

Закон наложения для деформаций ползучести материалов, обладающих свойством старения, то есть изменяемостью механических свойств во времени, при линейной и нелинейной ползучести выражается зависимостями (3) и (4)

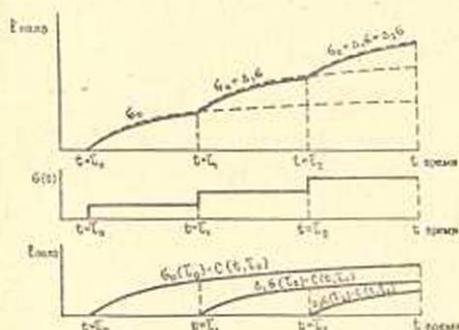
$$l_{\text{полз.}}(t) = \sigma_0(\tau_0) C(t, \tau_0) + \Delta_1 \sigma(\tau_1) C(t, \tau_1) + \dots + \Delta_i \sigma(\tau_i) C(t, \tau_i) \quad (3)$$

$$l_{\text{полз.}}(t) = F[\sigma_0(\tau_0)] C(t, \tau_0) + \Delta_1 F[\sigma(\tau_1)] C(t, \tau_1) + \dots + \Delta_i F[\sigma(\tau_i)] C(t, \tau_i). \quad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что деформация ползучести материала, обладающего свойством „старения“, при ступенчатом его нагружении, к моменту времени t определяется суммированием приращений деформаций ползучести от приращения напряжений, соответствующих его возрасту в моменты приложения нагрузок (фиг. 1).

Для глинистого грунта, обладающего как уплотнением, так и „старением“, влияние указанных факторов на характер протекания деформации ползучести может проявляться в трех различных сочетаниях как вместе, так и независимо друг от друга.

1. Изменяемость деформации ползучести при переходе от одной ступени нагрузки к другой в основном обусловлена изменяемостью плотности грунта, влиянием внутренних физико-химических процессов, протекающих во времени, можно пренебречь. (Этот случай соответствует кратковременным испытаниям, испытаниям „старых“ грунтов упрочнение во времени которых завершено, и нагрузкам, превышающим предел структурной прочности грунта [7]).

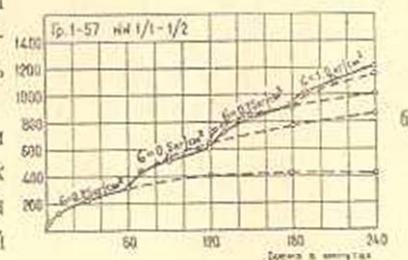
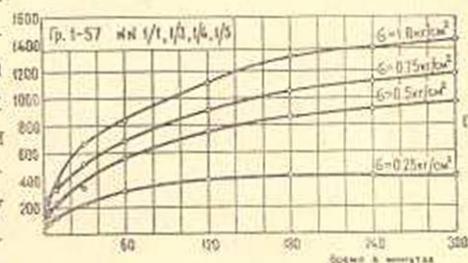


Фиг. 1.

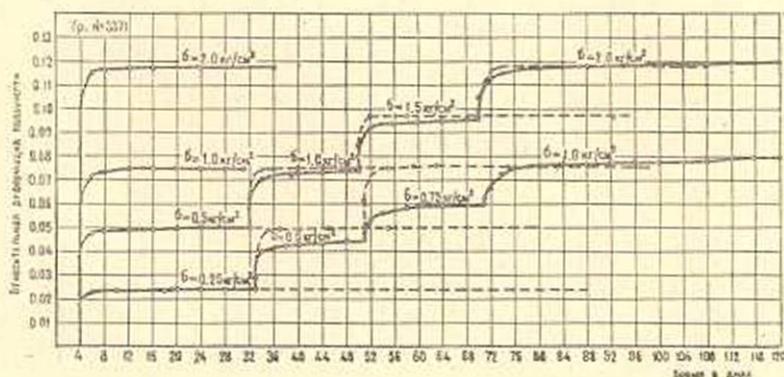
Рассматриваемый случай характеризуется тем, что одному и тому же приращению напряжения соответствуют одни и те же деформации ползучести как при их нарастании ступенями, так и при испытании грунтов постоянными напряжениями. Это условие экспериментально выражается тем, что независимо от того, по какому закону происходит загрузка материала, его конечная деформация ползучести равна деформации ползучести, возникающей от силы, равной сумме всех приложенных сил (фиг. 2 и 3). А это значит, что деформация ползучести грунта при ступенчатом нарастании нагрузок может быть определена из семейства кривых ползучести, полученных испытанием образцов-близнецов при различных постоянных напряжениях. Следовательно, проверку принципа наложения следует выполнить точно так, как это делается для „старого“ бетона, когда влиянием его возраста на ползучесть можно пренебречь [8].

В соответствии с изложенным полная деформация ползучести к моменту времени t определяется как сумма приращений деформаций ползучести [8]

$$l_{\text{полз.}}(t) = \sum [F(\sigma_i) - F(\sigma_{i-1})] C(t - \tau_i) \quad (5)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Мера ползучести $C(t - \tau)$ зависит только от длительности действия нагрузки $(t - \tau)$.

На фиг. 2б и 3 приведены два примера проверки справедливости принципа наложения для деформации ползучести, соответствующие рассмотренному здесь случаю. Опыты проводились на образцах на-

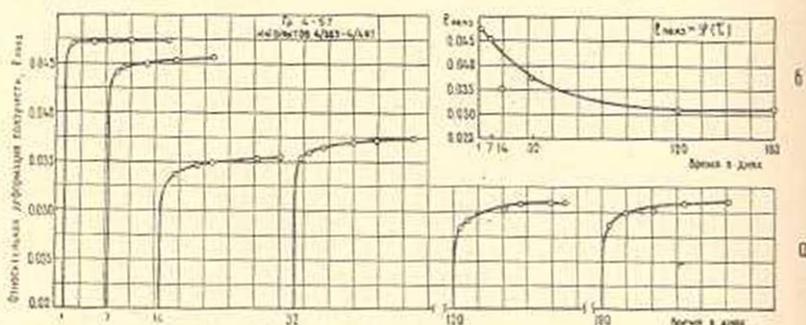
рушенной структуры в компрессионных приборах при влажности, равной влажности грунтов при пределе текучести. Высота образцов 20 мм, диаметр 70 мм.

Из графиков фиг. 2 и 3 следует, что закон наложения для деформации ползучести глинистых грунтов справедлив. Вместе с тем надо отметить, что кривые, построенные по указанному закону на начальных участках, непосредственно примыкающих к моменту приложения ступеней нагрузок, более крутые. Это явление присуще случаю испытания грунтов нагрузками, превышающими их структурную прочность, и обусловлено лавинным разрушением их структурного каркаса, протеканием большей части деформации в самом начале процесса ползучести.

При более медленном нарастании нагрузок процесс ползучести протекает значительно медленнее, хотя конечные деформации ползучести не зависят от способа загрузки.

2. Изменяемость деформации ползучести в процессе ступенчатого нагружения обусловлена как уплотнением, так и упрочнением во времени по причинам внутренних физико-химических процессов. Причем указанные факторы независимы друг от друга.

В этом случае, как и в случае ползучести стареющего бетона [8], влияние упрочнения грунта во времени учитывается функцией старения $\varphi(\tau)$, определяемой из семейства кривых ползучести, показанной на фиг. 4.



Фиг. 4.

Каждая кривая из указанного семейства получена испытанием образца в возрасте τ_1 , под которым понимается время от начала изготовления образца до момента его испытания постоянной нагрузкой ($\tau = 0,25 \text{ кг/см}^2 = \text{const}$).

Проверка справедливости закона наложения осуществляется по изложенному выше способу, а для учета влияния упрочнения грунта во времени приращению деформаций от приращения напряжений умножаются на функцию старения $\varphi(\tau)$, которая определяется по кривой $E_{\text{полз}} = \varphi(\tau)$ (фиг. 4б).

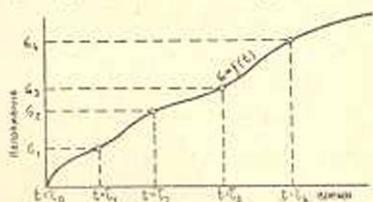
Изложенный случай не представляет особого практического интереса, поскольку упрочнение грунта во времени и уплотнение

взаимно тесно связаны. Поэтому определение влияния упрочнения грунта во времени на изменяемость деформации ползучести, вне зависимости от его уплотнения, практически не является возможным.

3. Наиболее общим является случай, когда изменяемость деформации ползучести обусловлена указанными в пункте 2 факторами, которые взаимно связаны и оказывают друг на друга влияние.

Этот случай при постоянной скорости нарастания нагрузок был рассмотрен в работе [6]. Если рост напряжений во времени происходит по некоторому произвольному закону (фиг. 5), для осуществле-

ния перехода от кривых ползучести, определенных при различных постоянных нагрузках, к кривой ползучести, соответствующей переменной нагрузке, необходимо знать зависимости $\sigma - t_{\text{полз}}$ и $C(t - \tau)$ в различных состояниях плотности-влажности и структурной прочности грунта. Для этого необходимо иметь несколько семейств кривых [7], характеризующих свой-



Фиг. 5.

ства ползучести грунта в различных его состояниях, обусловленных величиной и длительностью действия предварительно уплотняющих нагрузок.

Длительность предварительного уплотнения $t = \tau_0, \tau_1 \dots \tau_i$ серии образцов-близнецов является переменной величиной. Она определяется из графика кривой $\sigma = f(t)$ (фиг. 5). Причем для осуществления указанного выше перехода, по выражениям (3) и (4), состояние материала, определяемое по σ , необходимо выразить через τ , то есть через моменты приложения нагрузок (фиг. 5).

Следует отметить, что как в случае, изложенном в пункте 2, так и в пункте 3 конечная деформация ползучести грунта, определенная при росте нагрузок ступенями, будет всегда *меньше*, чем деформация ползучести, возникающая от нагрузки, равной сумме всех приложенных нагрузок.

На основании приведенных многочисленных исследований по определению закономерностей деформаций глинистых грунтов с учетом фактора времени позволили автору (применительно к условиям одномерного уплотнения) разработать приближенную методику определения всех основных характеристик ползучести их скелета. Предлагаемая методика в несколько раз сокращает объем работ без существенного ущерба точности получаемых результатов. Она позволяет для определения характеристик ползучести какого-либо *конкретного состояния* („возраста“) *грунта* в начале загрузки обходиться испытанием двух образцов-близнецов или же четырех образцов-близнецов при двукратном повторении опыта.

Согласно предлагаемой методике, первый (или первая пара) образец-близнец испытывается на ползучесть при единичной нагрузке $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ для определения меры ползучести $C(t - \tau)$ [4]

$$C(t-\tau) = C_0 [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (6)$$

а второй (или вторая пара) образец испытывается на ползучесть при нарастании нагрузок во времени ступенями (через равные интервалы времени) для определения зависимости напряжение-деформация ползучести и функции напряжения $F(\sigma)$ [8]

$$F(\sigma) = \alpha\sigma + \beta\sigma^n. \quad (7)$$

В выражениях (6) и (7) C_0 , γ , α , β и n — определяемые из опыта параметры, l — основание натуральных логарифмов.

Испытание грунта на ползучесть при $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ и определение параметров, входящих в (6), выполняется как обычно и не представляет особых трудностей. Что же касается определения $F(\sigma)$, то в этом случае очень важен вопрос правильного выбора интервала приложения ступеней нагрузок.

Из работы автора, опубликованной ранее [7] (1963), известно, что кривые ползучести, соответствующие различным нагрузкам, не подобны, поэтому и $F(\sigma)$ зависит от продолжительности загрузки t . Причем неподобие указанных кривых проявляется особенно сильно при небольших t , а после постепенно исчезает. Установлено, что при $t > 7-14$ суток (в зависимости от величины нагрузок) кривые ползучести практически становятся подобными, а $l_{\text{полз.}} = f(\sigma)$ — независимой от длительности испытания. А это значит, что интервал между приложением нагрузок может колебаться в пределах указанных выше цифр (желательно 14 дней). Желательно, чтобы величина ступени нагрузки была постоянной, но это не обязательно. Если заранее известен закон нарастания напряжения во времени, величины ступеней нагрузок могут быть определены из указанного условия.

Надо отметить, что для определения $C(t-\tau)$ испытание образца при $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ необязательно. Наоборот, если напряжение наращивается достаточно медленно, указанное испытание надо выполнить при $\sigma = 0,1, 0,2$ или $0,3 \text{ кг/см}^2$. В этом случае параметры γ и C_0 , входящие в уравнение (6), будут определяться по кривой, соответствующей $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$, полученной на основании опытной кривой и зависимости $l_{\text{полз.}} = f(\sigma)$.

Приведем два примера определения зависимости (7) и проверки закона наложения для деформации ползучести новошвейцарской глины (лаб. № 7-57) и суглинка (лаб. № 2-57).

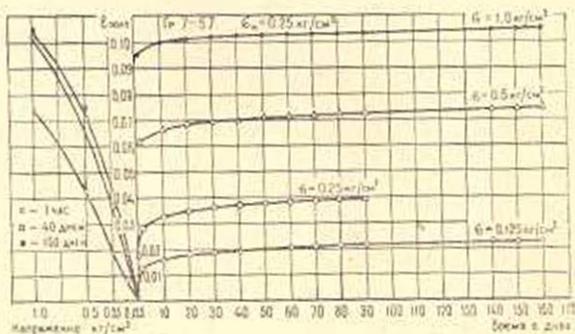
Таблица 1

Наименование грунта	№ лаб.	Удельный вес г/см ³	Пределы пластичности, %		
			предел текучести	предел пла- стичности	число пла- стичности
Глина	7-57	2.63	64.4	30.5	33.9
Суглинок	2-57	2.66	31.3	18.6	12.7

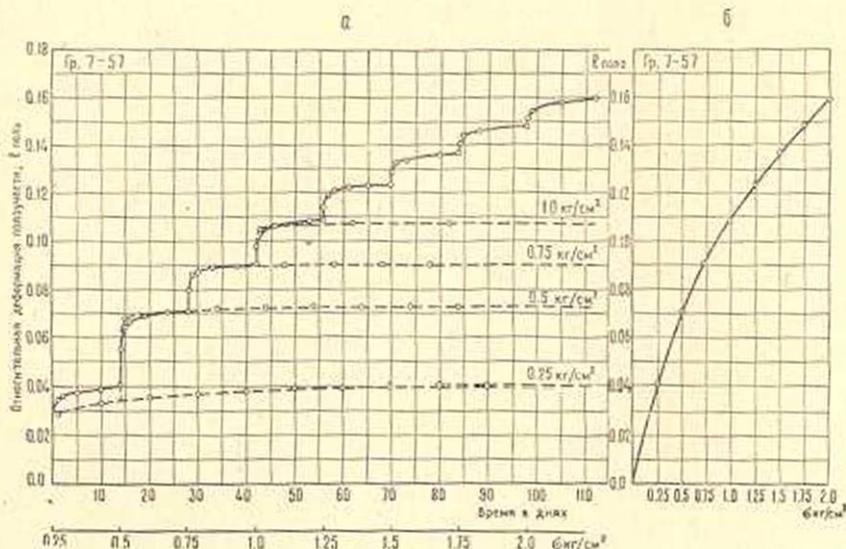
Познакомимся с проверкой закона наложения грунта 7-57, выполненной по изложенной в пункте 1 методике, и сопоставим ее результаты с результатами, полученными по [предлагаемой приближенной методике.

Опыты проводились в компрессионных приборах на предварительно уплотненных в течение двух месяцев (под нагрузкой $\sigma = 0,25 \text{ кг/см}^2$) образцах-близнецях.

На графике фиг. 7а пунктирами показана кривая ползучести, построенная по закону наложения на основании семейств кривых ползучести (фиг. 6) и методике, изложенной в пункте 1. Сопоставление этой и экспериментальной кривых (сплошная линия) показывает, что для деформации ползучести глины 7-57, как и в приведенных выше двух случаях, закон наложения справедлив.



Фиг. 6.



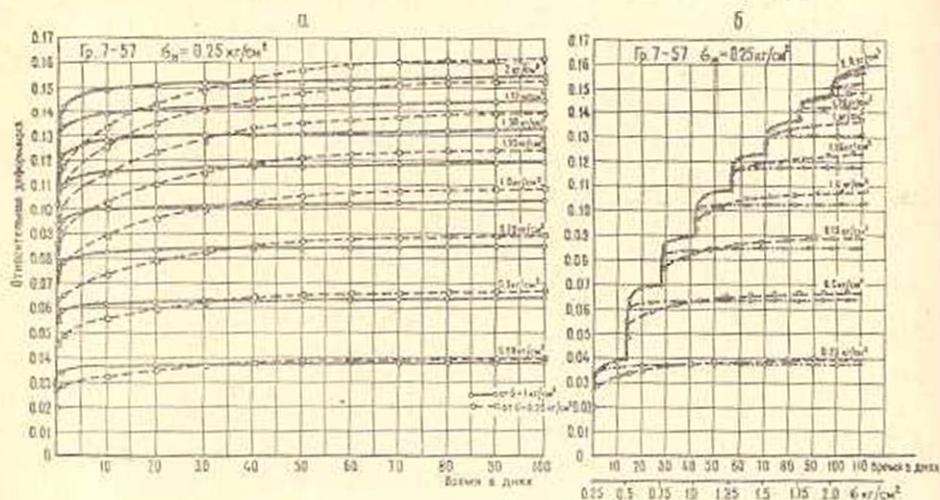
Фиг. 7.

Теперь на основании того же примера познакомимся с предлагаемой методикой и результатом проверки закона наложения, выполненной по этой методике.

Как мы уже говорили, предлагаемая методика основана на использовании двух экспериментальных кривых: а) кривой ползучести, определенной испытанием образца-близнеца постоянной нагрузкой и б) кривой, полученной при ступенчатом нагружении другого образца-близнеца. Если первой является кривая ползучести от единичного напряжения ($\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$), приведенная на фиг. 6, а второй — экспериментальная кривая, приведенная на фиг. 7а (показана сплошной линией), то на основании последней определяются кривая, аналитическое выражение зависимости $l_{\text{полз.}} = f(\sigma)$ и функция напряжения $F(\sigma)$

$$F(\sigma) = 4,54\sigma - 3,54\sigma^{1,1}. \quad (8)$$

На фиг. 8а сплошными линиями показаны кривые ползучести, полученные умножением ординат кривой ползучести, определенной при $\sigma = 1$, на функцию напряжения (8). Кривая напряжения, построенная на основании указанного семейства, показана на фиг. 8б линиями точка-тире-точка. Из указанного графика следует, что кривая наложения, построенная по предлагаемой методике, расходится с экспериментальной кривой больше, чем в случае, рассмотренном на фиг. 7а. Однако, их расхождение в худшем случае достигает 15%, что, конечно, допустимо, ибо разброс опытных данных при параллельном испытании нескольких образцов-близнецов того же порядка.



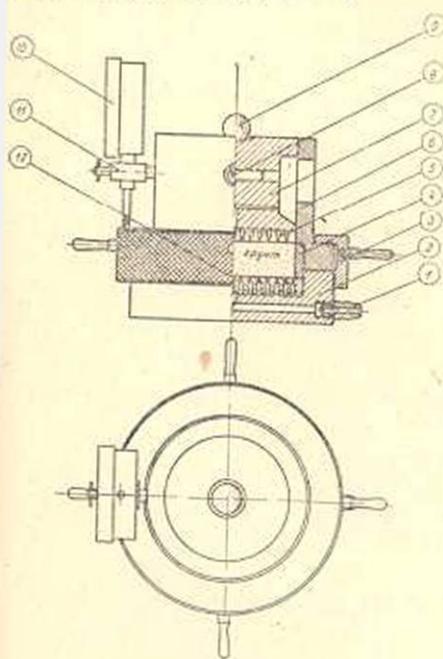
Фиг. 8.

Из графика 8б также следует, что указанные выше кривые существенно отличаются по форме. Деформации ползучести по кривой, построенной по предлагаемой методике, затухают быстрее, чем это имеет место на самом деле. Ясно, что это явление обусловлено различием между величиной ступени нагрузки и нагрузкой ($\sigma = 1.0 \text{ кг/см}^2$), приложенной к образцу грунта для определения меры ползучести $S(t - \tau)$.

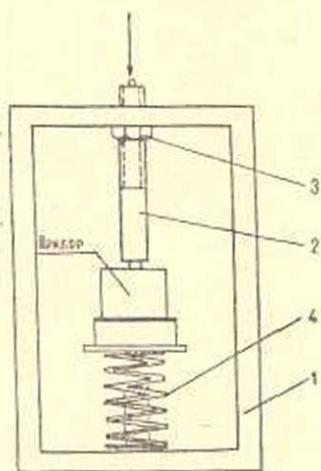
Чтобы избежать изложенного явления, испытание образца на ползучесть при $\sigma = \text{const}$ необходимо выполнить при напряжении, равном или близком к величине ступени напряжения. Как, например, если в рассмотренном примере вместо кривой ползучести $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ использовать кривую, определенную испытанием образца-близнеца грузкой $\sigma = 0,25 \text{ кг/см}^2$ (фиг. 6), на основании этой кривой и зависимости $I_{\text{полз.}} = f(\sigma)$ построить семейство кривых ползучести для различных σ (на фиг. 8а показаны пунктирами) и выполнить проверку справедливости закона наложения (фиг. 8б, кривая точка-тире-точка), можно будет убедиться в вышесказанном. В этом случае кривая напряжения достаточно точно характеризует изменения деформации ползучести при ступенчатом нагружении грунта.

Наконец, рассмотрим еще один пример определения зависимости $I_{\text{полз.}} = f(\sigma)$, $F(\sigma)$ и проверки принципа наложения, выполненных по результатам испытания 4 образцов-близнецов суглинка (фиг. 9) компрессионных приборах высокого давления (фиг. 9) конструкции втора. Размеры образцов прежние. Перед испытанием образцы подвергались предварительному уплотнению в течение 2 месяцев при $\sigma = 20,0 \text{ кг/см}^2$.

Загрузки приборов осуществлялись в специальных пружинных приспособлениях (фиг. 10), позволяющих испытать грунты при напряжениях до 100 кг/см^2 . Указанное приспособление состоит из жесткой рамы 1, пружины 4 и загрузочной рамы 1 со стопорной гайкой 3. Приложение нагрузки к образцу



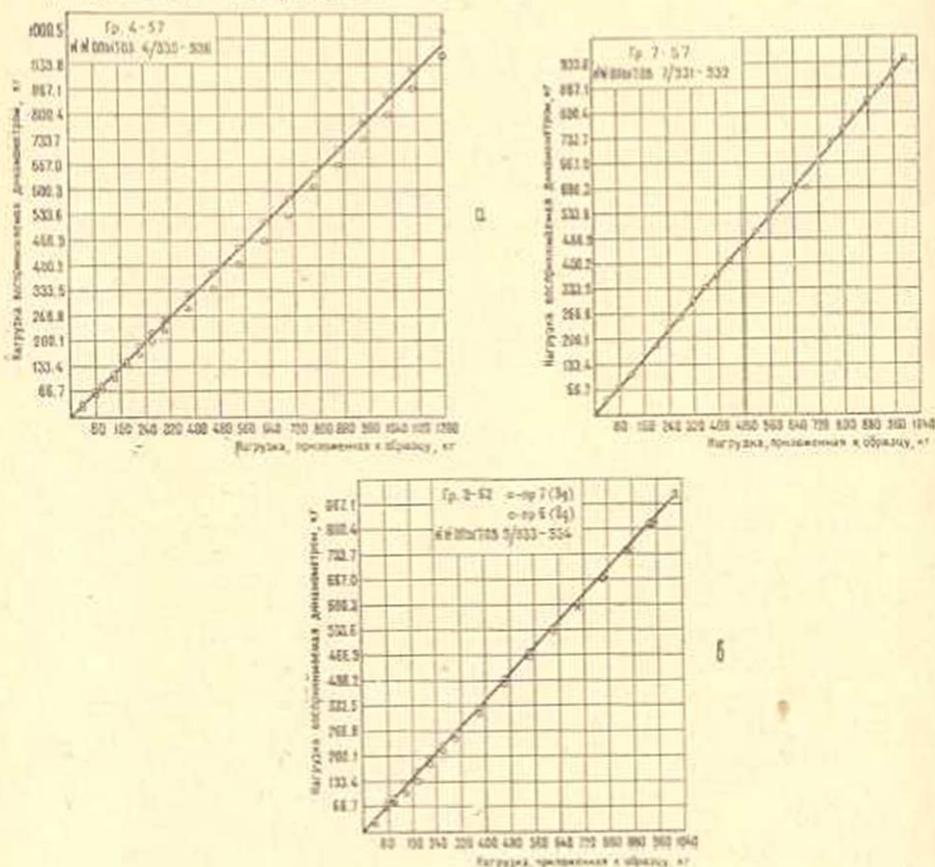
Фиг. 9.



Фиг. 10.

грунта осуществляется пяти- или десятитонным прессом через загрузочный болт, шарик и поршень прибора. После загрузки образца до заданного напряжения затягивается стопорная гайка, и приспособление с прибором снимается с пресса.

Напряжение, установленное вначале, в течение всего опыта поддерживается упругостью пружины. Понижение напряжения, заданное в начале опыта, за счет деформации грунта и расслабления пружины при испытании предварительно уплотненных глинистых паст нагрузками $10\text{--}20 \text{ кг/см}^2$ колебалось (в зависимости от вида грунта) в пределах $1\text{--}5\%$. Потеря напряжения на боковое трение образца о грунтовое кольцо, в зависимости от свойств грунта, колебалось от 6 до 16% . Она экспериментально определялась как разность приложенной к грунту и воспринятой днищем (динамометром) прибора нагрузок. Три тарировочных графика, определенных для трех различных грунтов, приведены на фиг. 11.



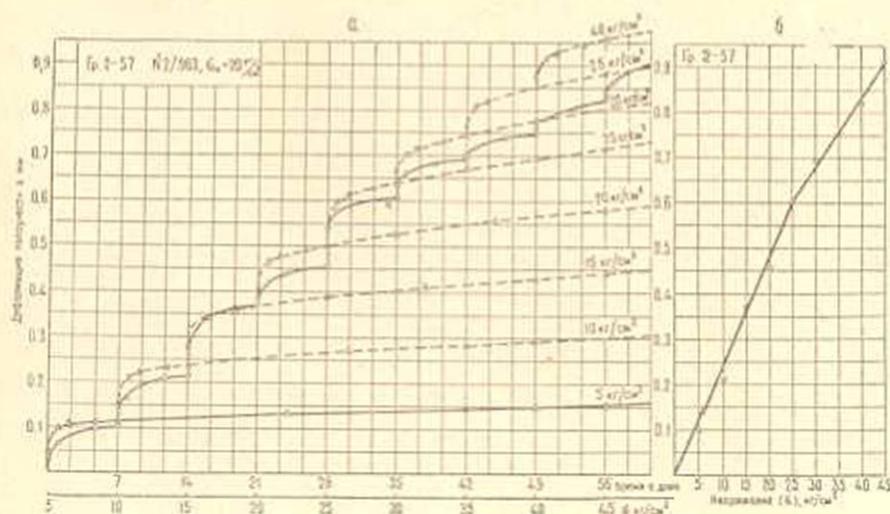
Фиг. 11.

На фиг. 12а сплошными линиями показаны две кривые, полученные попарным испытанием четырех образцов-близнецов на ползучесть при постоянном напряжении ($\sigma = 5 \text{ кг/см}^2$) и при нарастании напряжения ступенями по 5 кг/см^2 через каждые семь дней. На фиг. 12б приведена кривая зависимости $I_{\text{полз.}} = f(\sigma)$, которая аппроксимирована двумя прямыми с точкой пересечения при $\sigma = 25 \text{ кг/см}^2$.

Кривая наложения на фиг. 12а показана пунктирами, она построена, исходя из условия линейной зависимости между напряжениями

и деформациями ползучести, с учетом изменяемости модуля деформации при $\sigma > \text{кг/см}^2$.

Как видно из фиг. 12а, как по величине деформации, так и по виду кривая, построенная по закону наложения*, довольно близка к экспериментальной кривой. Их максимальное расхождение едва достигает 15%. Если бы интервал приложения ступеней нагрузок был больше, чем было принято в рассмотренном случае, это расхождение было бы еще меньше.



Фиг. 12.

Считаем необходимым обратить внимание на тот факт, что изменяемость деформаций ползучести при ступенчатом нагружении носит несколько хаотический характер. При переходе от одной ступени нагрузки к другой имеет место как увеличение, так и уменьшение деформации ползучести (ступенчатая деформация по терминологии Тролопа и Чэна [9] (1960)). Такое поведение, как показано работами автора [10] (1956, 1958), Тролопа и Чэна [9] (1960), обусловлено структурными изменениями грунта в процессе деформирования.

Мы полагаем, что можно ограничиваться приведенными выше двумя примерами. Они достаточно убедительно показали возможность определения характеристик ползучести на основании двух экспериментальных кривых. В приведенных примерах было условно принято, что экспериментальная кривая ползучести при $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ с достаточной точностью описывается выражением вида (6) и поэтому вопросы определения параметров, входящих в выражение меры ползучести (6), не были рассмотрены.

При необходимости учета влияния изменяемости свойств грунта вследствие протекания внутренних физико-химических процессов, изложенное выше определение экспериментальных кривых необходимо

* Учитывая малую нелинейность в зависимости $I_{\text{полз.}} = f(\tau)$, приближенно считаем справедливым закон наложения при нелинейной ползучести.

повторить в нескольких различных его состояниях. Состояние грунта определяется величиной и длительностью действия предварительно уплотняющей нагрузки σ , которые определяются по кривой $\sigma = f(t)$ (фиг. 5).

Следует отметить, что поскольку сжатие грунта в условиях отсутствия бокового расширения происходит при разных главных напряжениях, то грунт претерпевает как изменение объема, так и формы. Поэтому по результатам опытов, подобных приведенным выше, можно получить зависимости, характеризующие изменение объема (9) и формы грунта (10)

$$\theta(t) = \theta(\sigma_{cp}, t) \quad (9)$$

$$l_i(t) = l_i(\sigma_i, t, \tau), \quad (10)$$

где θ — деформация объема; σ_{cp} — среднее нормальное напряжение, равное $\sigma_{cp} = \frac{\sigma(1+2\xi)}{3}$ (ξ — коэффициент бокового давления); l_i и σ_i — интенсивности деформаций и напряжений, определяемые (для какого-либо заданного состояния грунта и момента времени t) выражениями

$$\sigma_i = (1 - \xi)\sigma, \quad (11)$$

$$l_i = 2/3 l. \quad (12)$$

Для определения зависимостей (9) и (10) испытание образцов надо провести в приборах, позволяющих определить боковое давление грунта и его коэффициент ξ . Причем, поскольку при компрессии объемная деформация образца θ равна деформации его сжатия l ($l = \theta$), а компрессионный модуль мгновенной деформации E — мгновенному модулю объемной деформации E_θ ($E = E_\theta$), для получения (9) надо в (1) и (2) l заменить на θ , E на E_θ , а σ на σ_{cp} . Тогда, в соответствии с (1) и (2), для $\theta(t)$ получим следующие выражения:

$$\theta(t) = \frac{\sigma_{cp}(t)}{E_\theta(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_{cp}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_\theta(\tau)} + C_1(t, \tau) \right] d\tau, \quad (13)$$

$$\theta(t) = \frac{\sigma_{cp}(t)}{E_\theta(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma_{cp}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_\theta(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_0}^t F_1[\sigma_{cp}(\tau)] \frac{\partial G(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (14)$$

где $C_1(t, \tau)$ — мера объемной ползучести; $F_1(\sigma_{cp})$ — функция среднего напряжения, характеризующая нелинейную зависимость между σ_{cp} и θ .

Зависимость, аналогичная (14) может быть записана для выражения связи между σ_i , l_i , t и τ .

Для определения (13) и (14) наиболее удобным является испытание образцов на сжатие в условиях отсутствия бокового расширения. В этом случае, в отличие от испытания образца в приборах трехосного сжатия (стабилометрах), отпадает необходимость измере-

ния продольных и боковых деформаций в середине образца (на какой-нибудь базе), которая связана с большими трудностями.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 2 III 1964

Ս. Ռ. ՄԷԼՅԱՆ

ԿԱՎԱՅԻՆ ԲՆԱՀՈՂԵՐԻ ԿՍԱԽԲԻ ՍՈՂՔԻ ԲՆՈՒՓԱԳՐԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿԸ ՄԻԱՉԱՓ ԽՏԱՑՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում շարադրված է կավային բնահողերի կմախքի սողքի միաչափ սեղման բնութագրերի որոշման համար հեղինակի մշակած մոտավոր եղանակը: Համաձայն այդ եղանակի, սողքի բնութագրերի որոշման համար փորձարկում են երկու կամ երկու զույգ երկվորյակ-նմուշներ: Ըստ որում՝ մեկ կամ մեկ զույգ նմուշները բնանախորվում են հաստատուն (միափոր), իսկ երկրորդ կամ երկրորդ զույգ նմուշները՝ աստիճանաձև աճող բնանվածքներով:

Առաջին զույգ նմուշների փորձարկումից որոշվում են սողքի չափի (A) արտահայտության մեջ մտնող պարամետրները (C_0 , γ), իսկ երկրորդ զույգի փորձարկումներից՝ լարումների և սողքային ձևափոխությունների միջև եղած առնչությունը և լարումների ֆունկցիան:

Փորձերը ցույց են տալիս, որ նշված եղանակը զգալի չափով պակասեցնում է փորձարկումների ծախսը, իսկ սողքի կորերի գրանցման արդյունքները շատ քիչ են տարբերվում սովորական եղանակով ստացված արդյունքներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маслов Н. Н. Условия устойчивости склонов и откосов в гидроэнергетическом строительстве. Госэнергоиздат, М.—Л., 1955.
2. Гольдштейн М. И. и Бабичкая С. С. Методика определения длительной прочности грунтов. Журнал «Основания, фундаменты и механика грунтов», № 4, 1959.
3. Маслов Г. Н. Термонапряженное состояние в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Изв. ВНИИГ, 28, 1941.
4. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
5. Boltzmann L. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiener Ber., v. 70, 1874.
6. Месчян С. Р. О ползучести связного грунта при сжатии в условиях невозможности бокового расширения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 11, № 4, 1958.
7. Месчян С. Р. Экспериментальное исследование закономерностей деформации ползучести глинистого грунта. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 16, № 1, 1963.
8. Васильев П. И. Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия ВНИИГ, 43, 1953.
9. Trollope D., Chan C. Soil structure and the stepstrain phenomenon. Proc. of the Amer. Soc. Civ. Engrs, v. 86, pt. 1 NSM2, 1960.
10. Месчян С. Р. К вопросу о влиянии продолжительности нагружения на ползучесть связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, 23, № 2, 1956.

В. С. Виденский

О тригонометрических многочленах полуцелого, порядка

Обозначим через $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ класс многочленов вида

$$s(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ a_k \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)t + b_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t \right\}, \quad (1)$$

которые называют тригонометрическими многочленами полуцелого порядка. В последние годы А. Х. Турецкий [1,2] и А. И. Пулатов [3,4] рассмотрели некоторые задачи об интерполировании, механических квадратурах и разложении функций в ряды по ортогональным многочленам вида (1). Эти вопросы естественным образом связаны с оценками производных от многочленов класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

В настоящей заметке устанавливаются экстремальные неравенства для производных от многочленов класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ на отрезке длины 2ω , $0 < \omega < \pi$. Затем с помощью перехода к пределу при $\omega \rightarrow \pi$ выводится неравенство на отрезке длины 2π , а следовательно, на всей вещественной оси. Впрочем, при $\omega = \pi$ это неравенство представляет собой частный случай неравенства С. Н. Бернштейна для целых функций конечной степени.

Теорема 1. Если $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ и

$$|s(t)| \leq 1 \quad (-\omega \leq t \leq \omega, \quad 0 < \omega < \pi), \quad (2)$$

то

$$|s'(t)| \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{t}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}} \quad (-\omega < t < \omega), \quad (3)$$

причем равенство в (3) достигается только для многочленов

$$\gamma_{2n+1}(t) = \gamma \cos(2n+1) \operatorname{arccos} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (-\omega \leq t \leq \omega), \quad (4)$$

$|\gamma| = 1$, в $2n+1$ точках t_k , являющихся нулями $\tau_{2n+1}(t)$ на отрезке $[-\omega, \omega]$.

Эта теорема аналогична теореме об оценке производной обыкновенного тригонометрического многочлена целого порядка на отрезке, длина которого меньше, чем период. Доказательство основано на той же идее, что и в заметке [5].

Пусть $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$; сделаем подстановку $ax = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, где

$$a = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

тогда

$$s(t) = \frac{P_{2n+1}(x)}{\sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}}}, \quad (5)$$

где $P_{2n+1}(x)$ — алгебраический многочлен степени $2n+1$. Заметим, что наша подстановка переводит отрезок $-\omega \leq t \leq \omega$ в отрезок $-1 \leq x \leq 1$. Если $s(t)$ удовлетворяет неравенству (2), то из (5) следует, что

$$|P_{2n+1}(x)| \leq \sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}} \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (6)$$

Для того, чтобы применить общую схему оценки производных алгебраических многочленов, представим положительный многочлен $(1+a^2x^2)^{2n+1}$ в виде

$$(1+a^2x^2)^{2n+1} = M_{2n+1}^2(x) + (1-x^2)N_{2n}^2(x), \quad (7)$$

где $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ — алгебраические многочлены степени $2n+1$ и $2n$, все нули которых лежат в промежутке $(-1, 1)$ и взаимно разделены, причем $M_{2n+1}(1) > 0$, $N_{2n}(1) > 0$. Как известно, для любого положительного на $[-1, 1]$ многочлена такое представление возможно и притом единственно. Легко проверить (см. [6]), что в нашем случае эти многочлены определяются при $-1 < x < 1$ равенствами

$$\left. \begin{aligned} M_{2n+1}(x) &= \operatorname{Re} (ax + i\sqrt{1-x^2})^{2n+1} \\ \sqrt{1-x^2}N_{2n}(x) &= \operatorname{Im} (ax + i\sqrt{1-x^2})^{2n+1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $a = \sqrt{1+a^2}$. Таким образом, мы можем неравенство (6) переписать в виде

$$|P_{2n+1}(x)| \leq |M_{2n+1}(x) + i\sqrt{1-x^2}N_{2n}(x)| \quad (-1 < x < 1), \quad (9)$$

где $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ определены посредством (8). Но, как доказано в работе [7], из (9) вытекает неравенство

$$|[\varphi(x) P_{2n+1}(x)]'| \leq |[\varphi(x) [M_{2n+1}(x) + i \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x)]]'|$$

$$(-1 \leq x \leq 1) \quad (10)$$

для любой положительной и непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$ функции $\varphi(x)$. Для того, чтобы вывести из (10) неравенство (3), положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}}} \quad (11)$$

Если, кроме того, мы положим

$$\cos \theta = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \quad (12)$$

то из (8), (11) и (12) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) M_{2n+1}(x) &= \operatorname{Re} [e^{i(2n+1)\theta}] = \cos(2n+1) \arccos \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \\ \varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x) &= \operatorname{Im} [e^{i(2n+1)\theta}] = \sin(2n+1) \arccos \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Отсюда, возвращаясь к исходной переменной t , мы можем при $-\omega \leq t \leq \omega$ написать

$$\left. \begin{aligned} \tau_{2n+1}(t) &\equiv \varphi(x) M_{2n+1}(x) = \cos(2n+1) \arccos \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}, \\ \sigma_{2n+1}(t) &\equiv \varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x) = \sin(2n+1) \arccos \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Замечая, что в силу (5) и (11), $s(t) = \varphi(x) P_{2n+1}(x)$ и что

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1+a^2x^2},$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(x) P_{2n+1}(x)]' &= s'(t) \frac{2}{1+a^2x^2}, \\ [\varphi(x) M_{2n+1}(x)]' &= \tau'_{2n+1}(t) \frac{2}{1+a^2x^2}, \\ [\varphi(x) \sqrt{1-x^2} N_{2n}(x)]' &= \sigma'_{2n+1}(t) \frac{2}{1+a^2x^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10), получаем неравенство

$$|s'(t)| \leq |\tau'_{2n+1}(t) + iz'_{2n+1}(t)| \quad (-\omega < t < \omega), \quad (16)$$

эквивалентное неравенству (3). Ясно, что в (16) равенство достигается для многочленов $\gamma \tau_{2n+1}(t)$, $|\gamma| = 1$, в точках t_k ($k = 1, 2, \dots, 2n+1$), в которых обращается в нуль $\sigma'_{2n+1}(t)$. А в силу теоремы, доказанной в работе [7], равенство в (16) достигается только для этих многочленов и только в указанных точках. Остается лишь заметить, что нули $\sigma'_{2n+1}(t)$ совпадают с нулями $\tau_{2n+1}(t)$. Итак, теорема 1 доказана.

В качестве следствия из теоремы 1 выведем оценку для производной $s(t)$ на всей оси.

Следствие. Если $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ и

$$|s(t)| \leq 1 \quad (-\pi \leq t \leq \pi), \quad (17)$$

то

$$|s'(t)| \leq n + \frac{1}{2} \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (18)$$

причем равенство в (18) достигается только для многочленов $\gamma \cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t + \beta\right]$, $|\gamma| = 1$, β — любое вещественное число.

Зафиксируем точку t_0 , $-\pi < t_0 < \pi$, и выберем такое положительное число ω , что $t_0 < \omega < \pi$. Из (17) вытекает, что на отрезке $[-\omega, \omega]$ имеет место неравенство (2); следовательно, в промежутке $(-\omega, \omega)$ и, в частности, в точке t_0 выполняется неравенство (3), то есть

$$|s'(t_0)| \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right) \cos \frac{t_0}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{t_0}{2}}}. \quad (19)$$

Устремляя теперь в правой части (19) параметр ω к π , в пределе получаем

$$|s'(t_0)| \leq n + \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Неравенство (20) установлено, таким образом, в каждой внутренней точке промежутка $(-\pi, \pi)$. Благодаря непрерывности $s'(t)$, неравенство (20) сохраняет силу и на концах промежутка в точках $\pm \pi$, то есть неравенство (20) справедливо на замкнутом отрезке $[-\pi, \pi]$. Из этого вытекает, что неравенство (20) выполняется на всей оси, так как всякий многочлен полуцелого порядка удовлетворяет условию

$$s(t) = (-1)^m s(t + 2\pi m) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (21)$$

Итак, следствие доказано.

Как было уже отмечено вначале, неравенство (18) следует из общего неравенства С. Н. Бернштейна для производной от целой

функции конечной степени. В самом деле, из (21) мы заключаем, что неравенство (17), справедливое на отрезке длиной 2π , выполняется на всей вещественной оси; с другой стороны, ясно, что многочлены $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ являются целыми трансцендентными функциями конечной степени $\leq n + \frac{1}{2}$. Следовательно, по теореме С. Н. Бернштейна неравенство (17) влечет за собой неравенство (18).

Мы можем усилить теорему 1, если заменим предположение (2) более общим, а именно допустим, что многочлен $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству

$$|s(t)| \leq h(t) \quad (-\omega \leq t \leq \omega, 0 < \omega < \pi), \quad (22)$$

где $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$ и $h(t) > 0$ на отрезке $[-\omega, \omega]$. Докажем предварительно следующее утверждение.

Теорема 2. Если многочлен $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$ положителен на отрезке $[-\omega, \omega]$, $0 < \omega < \pi$, тогда при любом целом $n \geq l$ многочлен $h^2(t)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$h^2(t) = \mu^2(t) + \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \right] \nu^2(t), \quad (23)$$

где $\mu(t)$ и $\nu(t)$ — многочлены класса $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$, имеющие в промежутке $(-\omega, \omega)$ соответственно $2n+1$ и $2n$ нулей, причем эти нули взаимно перемежаются, $\mu(\omega) > 0$, $\nu(\omega) > 0$.

Несколько более общая теорема для положительных тригонометрических многочленов целого порядка доказана в моем обзорном докладе [8]. Для того, чтобы установить равенство (23), мы применим снова подстановку $ax = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $a = \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. Это позволяет записать $h^2(t)$ в виде

$$h^2(t) = \frac{H_{2l+1}^2(x)}{(1+a^2x^2)^{2l+1}} = \frac{H_{2l+1}^2(x)(1+a^2x^2)^{2n-2l}}{(1+a^2x^2)^{2n+1}}, \quad (24)$$

где $H_{2l+1}(x)$ — алгебраический многочлен степени $2l+1$, положительный на отрезке $[-1, 1]$. Положительный на $[-1, 1]$ алгебраический многочлен степени $4n+2$, стоящий в числителе правой части (24), мы представляем в виде

$$H_{2l+1}^2(x)(1+a^2x^2)^{2n-2l} = M_{2n+1}^2(x) + (1-x^2)N_{2n}^2(x), \quad (25)$$

где $M_{2n+1}(x)$, $N_{2n}(x)$ — алгебраические многочлены степени $2n+1$ и $2n$, обладающие теми же свойствами, что и соответствующие многочлены в формуле (7). Возвращаясь к переменной t и полагая

$$\mu(t) = \frac{M_{2n+1}(x)}{\sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}}}, \quad \nu(t) = \frac{N_{2n}(x)}{\sqrt{(1+a^2x^2)^{2n+1}}}, \quad (26)$$

мы непосредственно получаем формулу (23). Положим для краткости

$$\lambda(t) = \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \nu(t).$$

Учитывая (23), мы можем неравенство (22) переписать следующим образом

$$|s(t)| \leq |\mu(t) + i\lambda(t)| \quad (-\omega < t < \omega). \quad (27)$$

Теорема 3. Если многочлен $s(t) \in \mathcal{T}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству (27), то

$$|s'(t)| \leq |\mu'(t) + i\lambda'(t)| \quad (-\omega < t < \omega), \quad (28)$$

причем равенство в (28) достигается только для многочленов $\gamma \mu(t)$, $|\gamma| = 1$, в $2n+1$ точках t_k , являющихся нулями функции $\lambda'(t)$ на отрезке $[-\omega, \omega]$.

Доказательство подобно доказательству теоремы 1. Оно также основано на неравенстве (10), где $\varphi(x)$ выбирается по формуле (11), а многочлены $M_{2n+1}(x)$ и $N_{2n}(x)$ определяются тождеством (25).

Если многочлен $h(t) \in \mathcal{T}\left(l + \frac{1}{2}\right)$ положителен на отрезке $[-\pi, \pi]$ и на этом отрезке имеет место неравенство (22), то вводя параметр ω , $0 < \omega < \pi$, а затем устремляя ω к π и рассуждая так же, как при выводе неравенства (18), из (28) получаем

$$|s'(t)| \leq |\mu'(t) + i\nu'(t)| \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (29)$$

Заметим, что неравенство (29) есть частный случай одной общей теоремы Н. И. Ахиезера [9] об ограничении производной целой функции конечной степени в предположении, что эта функция мажорируется на всей оси некоторой другой положительной целой функцией конечной степени.

В заключение формулируем теорему, которая даст точную оценку производной многочлена полуцелого порядка на всем отрезке $[-\omega, \omega]$.

Теорема 4. Если многочлен $s(t) \in \mathcal{T}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ удовлетворяет неравенству (2), то при

$$n > \frac{1}{2} \left[3 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

справедливо неравенство

$$|s'(t)| \leq \frac{1}{2} (2n+1)^2 \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} = c_{2n+1}(\omega) \quad (-\omega \leq t \leq \omega), \quad (30)$$

причем равенство в (30) достигается только для многочленов $\gamma_{2n+1}(t)$, $|\gamma| = 1$, в точках $t = \pm \omega$.

Аналогичная теорема для многочленов целого порядка доказана в заметке [5]. Так как рассуждения при доказательстве теоремы 4 вполне сходны с приведенными в [5], то нет необходимости их здесь повторять.

Ленинградский электротехнический институт
связи им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Поступила 25 VI 1963

Վ. Ս. Վիդենսկի

ԿԻՍԱԱՄԲՈՂՋ ԿԱՐԳԻ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆԱԶՍՓԱԿԱՆ ԲՍԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում են (1) տեսքի բաղմանդամներ, որոնք կոչվում են կիսամամբողջ կարգի եռանկյունաչափական բաղմանդամներ: Այդ բաղմանդամների դասը նշանակվում է $T\left(n + \frac{1}{2}\right)$: Նրանց ամանցյալների համար սահմանվում են անհավասարություններ, որոնք համանման են սովորական եռանկյունաչափական բաղմանդամների համար հեղինակի կողմից [5] և [8] աշխատություններում ստացված անհավասարություններին: Ապացուցվում է, որ եթե բաղմանդամը $s(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ և տեղի է ունենում (2) անհավասարությունը, ապա զրանից հեռում են (3) և (30) անհավասարությունները: Ավելի ընդհանուր անհավասարություն, քան (3)-ը, ստացվում է այն ենթադրությամբ, որ $s(t)$ -ն բախարարում է (22) պայմանին, որտեղ $h(t) \in T\left(l + \frac{1}{2}\right)$, $h(t) > 0$, l կրթ $-\omega \leq t \leq \omega$, $0 < \omega < \pi$: Այդ նպատակով ապացուցվում է, որ ցանկացած $n \geq l$ ամբողջի դեպքում $h^2(t)$ բաղմանդամը կարող է ներկայացվել (23) տեսքով, որտեղ $v(t)$ և $\nu(t) \in T\left(n + \frac{1}{2}\right)$ դասի բաղմանդամներ են, որոնք $(-\omega, \omega)$ միջակայքում ունեն համապատասխանաբար $2n+1$ և $2n$ պարզ արմատներ, ընդ որում այդ արմատները փոխադարձաբար ընդմիջվում են, այսինքն՝ մի բաղմանդամի հարևան արմատների լուրջքանջուր դուրդի միջև ընկնում է մյուս բաղմանդամի ճիշտ մեկ արմատ: Ծնորհիվ (23) բանաձևի, (22) անհավասարությունը կարելի է արտազրել (27) տեսքով: Ապացուցվում է, որ (27)-ից բխում է (28) անհավասարությունը:

(3) *անհավասարությունը հանդիսանում է (28) անհավասարության մասնավոր դեպքը և նրանից ստացվում է, երբ բաղմանդամը հաշվարար հավասար է մեկի:*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Турецкий А. Х. О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов. Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина, серия физ.-мат. наук, вып. 1 (49), 1959, 31—54.
2. Турецкий А. Х. Об оценке приближений в среднем непрерывных периодических функций тригонометрическими интерполяционными полиномами. Докл. АН УзССР, № 4, 1959, 7—11.
3. Пулатов А. И. Некоторые вопросы тригонометрических многочленов, ортогональных с весом. Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук, № 4, 1960, 25—29.
4. Пулатов А. И. О разложении функций в ряд по тригонометрическим многочленам полуполого порядка. Известия АН УзССР, серия физ.-матем. наук, № 6, 1960, 34—44.
5. Виденский В. С. Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем, чем период. ДАН, 130, № 1, 1960, 13—16.
6. Бернштейн С. Н. Об одном классе ортогональных многочленов. Сочинения, том 1, статья № 42; М., 1952.
7. Виденский В. С. Некоторые оценки производных от рациональных дробей. Известия АН СССР, серия матем., 26, 1962, 415—426.
8. Виденский В. С. Экстремальные оценки производных полинома на отрезке. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций (сборник статей под ред. В. И. Смирнова). М., 1961; стр. 98—106.
9. Ахиезер Н. И. О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа. Известия АН СССР, серия матем., 10, 1946, 411—428.

В. И. Мацейчик, И. И. Ивахин

Об устойчивости длинных скрученных стержней при воздействии температурных напряжений

Вопросом устойчивости стержней при действии осевой силы и крутящего момента без учета силы веса и температурных напряжений занимались А. Г. Гринхилл [1], Л. С. Лейбензон [2], А. Н. Динник [3], Е. Л. Николаи [4] и другие. Влияние температурных напряжений на потерю устойчивости тонких стержней рассмотрено в работах [6] и [7].

В данной статье исследуется устойчивость вертикального длинного тонкого стержня при воздействии скручивающего момента, осевой силы, равномерно распределенной нагрузки и температуры, меняющейся по линейному закону.

Этот вопрос имеет большое практическое значение при бурении скважин. При увеличении глубин скважин изменяется температура, которая оказывает влияние на растягивающую силу, обеспечивающую постоянное давление долота на забой.

Рассматривая бурильную колонну как стержень с защемленными концами, будем искать критическое давление долота на забой, при котором возможно нейтральное равновесие колонны.

Обозначим:

l — длина колонны,

M_z — крутящий момент,

q — вес одного погонного метра бурильной колонны в глинистом растворе,

ΔT_1 и ΔT_2 — приращение температуры на верхнем и нижнем концах стержня,

P — растягивающая сила.

Так как концы колонны защемлены, в ней под воздействием температуры возникнет нормальное сжимающее усилие, которое имеет величину

$$Q = \alpha E F \Delta T, \quad (1)$$

где

$$\Delta T = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}.$$

Давление долота на забой будет равно

$$S = \frac{1}{2} q l + Q - P. \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения упругого равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{EJ}{l^2} \frac{d^4 u}{d\zeta^4} + \frac{M_z}{l} \frac{d^3 v}{d\zeta^3} + (S - q\zeta) \frac{d^2 u}{d\zeta^2} - ql \frac{du}{d\zeta} &= 0, \\ \frac{EJ}{l^2} \frac{d^4 v}{d\zeta^4} - \frac{M_z}{l} \frac{d^3 u}{d\zeta^3} + (S - q\zeta) \frac{d^2 v}{d\zeta^2} - ql \frac{dv}{d\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где u и v — проекции перемещения на оси x и y , $\zeta = \frac{z}{l}$, ось z направлена по оси стержня. Для зашпеленных концов граничные условия будут

$$\begin{aligned} \text{при } \zeta = 0 \quad u = 0, \quad \frac{du}{d\zeta} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{dv}{d\zeta} = 0; \\ \text{при } \zeta = 1 \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{du}{d\zeta} = 0, \quad \frac{dv}{d\zeta} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение системы уравнений (3) будем искать методом Бубнова-Галеркина. Так как при малых деформациях упругая линия мало отличается от плоской кривой, то аппроксимирующие функции выберем в виде

$$u = ae^{-\beta^2 \zeta^2} (1 - \zeta)^3 \quad \text{и} \quad v = be^{-2\beta^2 \zeta^2} (1 - \zeta)^2. \quad (5)$$

Выбор таких функций соответствует экспериментальным исследованиям [5], а также физическим соображениям.

Функции (5) полностью удовлетворяют граничным условиям (4). Применяя метод Бубнова-Галеркина, после преобразований и упрощений получим систему двух однородных линейных уравнений относительно a и b

$$\begin{aligned} \left(3 \frac{EJ}{l^2} \beta^2 - S + \frac{3}{2\beta} ql \right) a + \frac{32}{81} \beta \frac{M_z}{l} b = 0, \\ \frac{256}{81} \beta \frac{M_z}{l} a + \left(12 \frac{EJ}{l^2} \beta^2 - S - \frac{3}{4\beta} ql \right) b = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Составляя определитель этой системы и приравнявая его нулю, получаем выражение, в которое входят все факторы, определяющие устойчивость колонны

$$\begin{aligned} S^2 - \left(15 \frac{EJ}{l^2} \beta^2 + 2,25 \frac{ql}{\beta} \right) S + 36 \left(\frac{EJ}{l^2} \beta^2 \right)^2 + \\ + 20,25 \frac{EJ}{l} \beta q + 1,125 \frac{(ql)^2}{\beta^2} - 1,25 \left(\frac{M_z}{l} \right)^2 \beta^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно S , получим

$$S = 7,5 \frac{EJ}{l^2} \beta^2 + 1,125 \frac{ql}{\beta} - \sqrt{\left(4,5 \frac{EJ}{l^2} - 0,375 \frac{ql}{\beta}\right)^2 + 1,25 \left(\frac{M_z}{l}\right)^2} \beta^2. \quad (8)$$

Параметр β надо подобрать так, чтобы S имело минимальное значение то есть

$$\frac{dS}{d\beta} = 0,$$

откуда

$$\beta^{12} - 0,448 \frac{ql^3}{EJ} \beta^9 + 0,062 \left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^2 \beta^6 - 0,003 \left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^3 \beta^3 + 0,00005 \left(\frac{ql^3}{EJ}\right)^4 = 0. \quad (9)$$

В уравнении (9) пренебрегли членами, содержащими M_z , так как они мало влияют на величину β . Уравнение (9) решаем методом последовательных приближений. Действительный корень, при котором S принимает минимальное значение, оказался равным

$$\beta = 0,355 \sqrt[3]{\frac{ql^3}{EJ}}.$$

Следовательно,

$$S_{кр} = 4,104 \sqrt[3]{q^2 EJ} - \sqrt{0,243 \sqrt[3]{q^4 E^2 J^2} + 0,157 M_z^2 \sqrt[3]{\frac{q^2}{E^2 J^2}}}.$$

Значение $S_{кр}$ не зависит от длины колонны.

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 5 IX 1963

Վ. Ի. Մացեպիկ, Ի. Ի. Իվանցից

ՈՒՈՐՎԱԾ ԵՐԿԱՐ ԶՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Հողվածում հետազոտվում է հիմքերի վրա կիրառված M_z սլորող մոմենտների, P առանցքային ուժերի, q ինաննախիլաթյան հավասարաչափ բաշխված բնուի և զծային օրենքով փոփոխվող շերտային աղբեցության տակ գտնվող ուղղաձիգ երկար բարակ ձողի կալունությունը:

Օգտվելով Բուբնով-Վալյորկինի մեթոդից, որոշված է ձողի տաքացման այն կրիտիկական շերտատիճանի արտահայտությունը, որի գնացում ձողն սկսում է ծայել:

Մտադրված արդյունքները կարող են օգտագործվել հորատման սլունների սլան կալունություն հետազոտման ժամանակ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Greenhill A. G.* Proc. Inst. Mech. Eng. London, 1883.
2. *Лейбензон Л. С.* Собр. трудов, т. 1. Изд-во АН СССР, 1951.
3. *Динник А. Н.* Избр. труды, т. II. Изд-во АН УССР, 1956.
4. *Николаи Е. Л.* Труды по механике. Гос. Изд-во технико-экономической лит., М., 1955.
5. *Балицкий П. В.* Исследование на механической модели статической устойчивости колонны бурильных труб. Нефтяное машиностроение, т. III. Гостоптехиздат, М., 1958.
6. *Сароян А. Е.* НХ № 11, 1960.
7. *Мацейчик В. И., Ивахин И. И., Асатурян А. Ш.* Нефть и газ, № 10, 1961.