ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (III)

Введение

Эта работа является продолжением работ [1, 2]. В первом параграфе излагается выбор подвижного репера семейства плоскостей.

Во втором параграфе методом Г. Ф. Лаптева найдена одна важная инвариантная трилинейная форма, связанная с первой дифференциальной окрестностью, и выяснен ее геометрический смысл. Эта форма оказалась тесно связанной с тремя известными (см. [1, 2]) инвариантными билинейными системами. Фактически эта работа и работы [1, 2] посвящены исследованию инвариантной трилинейной формы.

В §§ 2—10 дается приложение всех этих результатов к теории многомерных поверхностей. Здесь получается много новых результатов. Кроме того, старые результаты получают новое содержание.

Параграфы 11 и 12 посвящены дифференциальным окрестностям высоких порядков. Каждая дифференциальная окрестность обладает одной или несколькими инвариантными трилинейными формами, исследование которых не отличается существенно от предыдущих исследований.

В § 13 дается общий принцип отображения многомерной проективной геометрии на множества различных образов другой проективной или непроективной геометрии. Доказывается изоморфизм этих двух геометрий.

В § 14 приводится несколько примеров такого изоморфизма. В частности, здесь излагается так называемая проективная геометрия сфер и окружностей эвклидова пространства.

§ 1. Выбор подвижного репера

Как известно [1, 2], дифференциальные уравнения семейства d-мерных плоскостей пишутся в виде

$$\omega_i^p = a_{i\varkappa}^p du^\varkappa, \qquad i = 0 \cdots d,\ p = d+1 \cdots n,\ \varkappa = 1 \cdots a. \tag{1.1}$$

Внешнее дифференцирование этой системы приводит к квадратичным уравнениям

$$[da^p_{i\varkappa} + a^q_{i\varkappa}\,\omega^p_q - a^p_{j\varkappa}\,\omega^j_i,\; du^\varkappa] = 0;\quad i, j = 0, \cdots d;\; p, q = d+1 \cdots n. \tag{1.2}$$

Вариация коэффициентов $a^p_{i\varkappa}$ определяется системой

$$\delta a^p_{i\varkappa} = a^p_{j\varkappa}\,\pi^j_i - a^q_{i\varkappa}\,\pi^p_q, \tag{1.3}$$

где $\pi^\beta_\alpha(\alpha, \beta = 0 \cdots n)$ — значения форм ω^β_α при фиксации главных параметров.

Так как первые $d+1$ вершин подвижного репера лежат на d-плоскости семейства, то касательное подпространство над этой плоскостью определяется грассмановым произведением [1]

$$(A_0 \cdots A_d,\; a^p_{01} A_p, \cdots,\; a^p_{0a} A_p, \cdots a^p_{da} A_p) \tag{1.4}$$

или системой уравнений $X_i = 0$, $a^p_{i\varkappa} X_p = 0$, где X_α — тангенциальные координаты текущей гиперплоскости. (1.4) показывает, что миноры высшего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} E_{d+1} & 0 \\ 0 & a^p_{i\varkappa} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

являются грассмановыми координатами касательного подпространства.

Как известно [1], размерность касательного подпространства всегда равна $d + r(a^p_{i\varkappa})$. Полагая n достаточно большим, получим для этой размерности число $d + a(d+1)$. Выбрав первые $d + a(d+1) + 1$ вершины репера в касательном подпространстве, получим

$$a^p_{i\varkappa} = 0,\quad p = d + a(d+1) + 1 \cdots n, \tag{1.6}$$

и, в силу (1.6), нижняя матрица (1.5) будет квадратной, т. е касательное подпространство будет иметь только одну отличную от нуля координату $|a^p_{i\varkappa}|$. Ради сохранения общности, мы пока не будем пользоваться системой (1.6).

§ 2. Инвариантная трилинейная форма дифференциальной окрестности первого порядка

Рассмотрим три произвольных объекта: точку x^i d — плоскости семейства, гиперплоскость X_p, проходящую через эту плоскость, и однопараметрическое подсемейство $du^\varkappa$ нашего семейства. Методом Г. Ф. Лаптева [3] нетрудно доказать, что трилинейная форма

$$\Phi \equiv a^p_{i\varkappa}\, x^i\, X_p\, du^\varkappa \tag{2.1}$$

является относительно-инвариантной формой, т. е.

$$\delta\Phi = \theta\Phi.$$

Следовательно, обращение формы (2.1) в нуль устанавливает геометрическую связь между этими тремя объектами. Для выяснения геометрического смысла уравнения $\Phi = 0$ рассмотрим касательную в точке x^i плоскость $d+1$-мерной поверхности $du^\varkappa$ (точечное многообразие, образованное однопараметрическим подсемейством d-мерных плоскостей, является $d+1$-поверхностью). Эта плоскость определяется точками $A_0\cdots A_d$, $x^i \omega_i^p A_p$ и принадлежит гиперплоскости $X_p a^p (p = d+1\cdots n)$, удовлетворяющей одному уравнению

$$\Phi = 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, получается

Теорема 2.1. *Если заданы точка $x^i A_i$ и перемещение $du^\varkappa$, то $a^p_{i\varkappa} x^i X_p du^\varkappa = 0$ определяет касательную в точке x^i $d+1$-мерную плоскость $d+1$-мерной поверхности $du^\varkappa$.*

Так как ($a^{d+1}\cdots a^n$, df), где ($f = X_p a^p$) определяет $d-1$-мерное подпространство d-мерной плоскости, а уравнение этого подпространства также записывается в виде (2.2), то справедлива и следующая

Теорема 2.2. *Если заданы гиперплоскость $X_p a^p$ и перемещение $du^\varkappa$, то $a^p_{i\varkappa} x^i X_p du^\varkappa = 0$ определяет такое $d-1$-мерное подпространство d-мерной плоскости, в каждой точке которого касательная $d+1$-плоскость $d+1$-поверхности $du^\varkappa$ принадлежит данной гиперплоскости.*

Точно так же доказывается

Теорема 2.3 *Если заданы точка $x^i A_i$ и гиперплоскость $X_p a^p$, то $a^p_{i\varkappa} x^i X_p du^\varkappa = 0$ определяет такое $a-1$-мерное подсемейство нашего семейства, касательная в точке x^i $d+1$-плоскость каждого 1-подсемейства которого принадлежит гиперплоскости X_p.*

Наконец, мы здесь дадим четвертую (наиболее ясную) трактовку уравнения (2.2).

Теорема 2.4. *Точка $x^i A_i$, гиперплоскость $X_p a^p$ и перемещение $du^\varkappa$ удовлетворяют уравнению $a^p_{i\varkappa} x^i X_p du^\varkappa = 0$ тогда и только тогда, когда касательная в точке x^i плоскость $d+1$-поверхности $du^\varkappa$ принадлежит гиперплоскости X_p, или, когда фокальное в гиперплоскости X_p $d-1$-подпространство перемещения $du^\varkappa$ содержит точку x^i* [1, 2].

Эта теорема дает два необходимых и достаточных условия для выполнения (2.2).

В дальнейшем, если тройка объектов (x^i, X_p и $du^\varkappa$) удовлетворяет инвариантному соотношению (2.2), то она называется сопряженной тройкой.

Три билинейные системы

$$a^p_{i\varkappa} x^i du^\varkappa = 0, \qquad a^p_{i\varkappa} x^i X_p = 0, \qquad a^p_{i\varkappa} X_p du^\varkappa = 0 \tag{2.3}$$

получаются из (2.2) приравниванием нулю всех коэффициентов соответственно при X_p, $du^\varkappa$ и x^i.

Решение первой системы (2.3) означает, что в семействе существуют такие точки x^i и перемещения du^κ, которые образуют сопряженную тройку с любой гиперплоскостью X_p. Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных двух систем.

Исследование систем (2.3) изложено в работах [1, 2].

Теперь приведем ряд примеров из известных семейств трехмерного пространства и рассмотрим форму (2.2) для каждого из них.

(I) Для линейчатой поверхности уравнение (2.2) пишется в виде $a^p_{i1} x^i X_p du^1 = 0$, что кроме $du^1 = 0$ дает еще $a^p_{i1} x^i X_p = 0$. Последнее соотношение устанавливает известное соответствие между x^i-точкой луча и X_p-касательной в этой точке плоскости поверхности. Причем, в этом соответствии один из объектов (точку или гиперплоскость) можно задавать произвольно, после чего второй объект определяется однозначно.

(II) Для линейчатой конгруэнции равенство (2.2) приводит к результату: в сопряженной тройке два объекта задаются вполне произвольно, после чего третий объект определяется однозначно. Решение систем (2.3) дает фокусы, фокальные направления и фокальные плоскости конгруэнции.

(III) Для комплекса прямых трехмерного пространства теоремы 2.1, 2.2 и 2.3 приведут к тривиальным результатам. Первая и третья системы (2.3) после решения дают развертывающиеся поверхности, их точки возврата и касательные плоскости. Вторая система (2.3) для комплекса не имеет решения.

Приложение этих теорем к семействам четырехмерного пространства дает более интересные результаты, на которых мы здесь останавливаться не будем (см. [4, 5]).

§ 3. Приложение к теории многомерных поверхностей

Рассмотрим некоторые частные случаи приложения вышеуказанных результатов. Пусть $d = 0$, тогда наше семейство становится a-мерной поверхностью, а уравнение (2.2) пишется в виде $a^p_{0\kappa} X_p du^\kappa = 0$ и устанавливает соответствие между направлениями du^κ поверхности и гиперплоскостями X_p, проходящими через точку поверхности. Для каждого направления du^κ получается одно уравнение между X_p, которое в силу теоремы 2.1 дает касательную прямую этого направления. Наоборот, если задана произвольная гиперплоскость X_p, то то же самое уравнение устанавливает одну связь между параметрами du^κ, т. е. определяет одно $a-1$-мерное подмногообразие (неголономное) нашей поверхности, касательная плоскость которой принадлежит гиперплоскости X_p.

Касательная плоскость поверхности определяется из того же уравнения, если в нем полагать все коэффициенты при du^κ равными нулю: $a^p_{0\kappa} X_p = 0$ $(p = 1 \cdots n)$. Располагая первые вершины $A_1 \cdots A_a$ в касательной плоскости, получим $\omega^p_0 = 0$ или $a^p_{0\kappa} = 0$ $(p = a + 1 \cdots n)$.

Теперь мы продолжаем изучать ту же поверхность, но с новой точки зрения: ее мы рассматриваем как геометрическое место своих касательных плоскостей ($d = a$). Следовательно, здесь можно применить всю теорию семейств многомерных плоскостей.

Итак, предположим, что наша поверхность (A_0) тангенциально не вырождается, т. е. ее касательная плоскость зависит ровно от a параметров, а это значит, что мы имеем a-параметрическое 0-фокальное семейство a-мерных плоскостей.

Как известно, уравнение поверхности для такого репера пишется в виде

$$\omega_0^p = 0,\ \omega_i^p = a_{ij}^p \omega^j,\ a_{ij}^p = a_{ji}^p,\ \omega_0^i = \omega^i;\quad i, j = 1 \cdots d,\ p = d + 1 \cdots n. \qquad (3.1)$$

В дальнейшем вместо независимых неизвестных du^α мы будем брать ω^i.

Уравнение (2.2) для поверхности запишется в виде

$$a_{ij}^p x^i X_p \omega^j = 0; \qquad i, j = 1 \cdots a = d, \quad p = d + 1 \cdots n. \qquad (3.2)$$

Так как для поверхности каждое перемещение ω^i в подпространстве $A_1 \cdots A_d$ определяет некоторую точку $y^i = \theta\omega^i$, то вместо уравнения (3.2) можно взять уравнение

$$a_{ij}^p x^i y^j X_p = 0. \qquad (3.3)$$

Каждое однопараметрическое семейство ω^i касательных плоскостей d-мерной поверхности образует $d + 1$-мерную поверхность, которая в дальнейшем будет называться *$d + 1$-мерной поверхностью* ω^i.

Теорема 2.1 для многомерной поверхности утверждает, что если взять произвольную точку x^i на касательной плоскости и произвольное перемещение ω^i (или y^i), то уравнение (3.3) определяет единственную $d + 1$-мерную плоскость, касающуюся в точке x^i $d + 1$-мерной поверхности y^i. Так как 1) касательная $d + 1$-мерная плоскость в 0-фокальном семействе вдоль прямой $A_0 + x^i A_i$ не меняется (см. [2]), 2) каждому перемещению ω^i соответствует некоторая вполне определенная точка y^i в плоскости $A_1 \cdots A_d$ и 3) коэффициенты a_{ij}^p симметричны относительно нижних индексов, то для многомерной поверхности мы получим несколько неожиданную теорему.

Теорема 3.1. *Каждая пара произвольных направлений x^i и y^i в касательной плоскости d-мерной поверхности определяет единственное $d + 1$-мерное подпространство, которое в точках первого направления касается $d + 1$-мерной поверхности y^i, и наоборот.* Единственное, но весьма важное исключение из этой теоремы приводит к тождественному удовлетворению уравнения (3.3), т. е.

$$a_{ij}^p x^i y^j = 0. \qquad (3.4)$$

Как известно, если пара направлений удовлетворяет соотношениям (3.4), то она называется сопряженной парой направлений многомерной поверхности. Таким образом, получается новая характеристика сопряженных направлений на поверхности.

Теорема 3.2. *Сопряженная пара направлений d-мерной поверхности характеризуется тем свойством, что $d+1$-мерное подпространство этой пары является неопределенным.*

Формулировка этой теоремы не корректна для случая гиперповерхности. Но для гиперповерхности уравнение (3.3) имеет единственный коэффициент $a^n_{ij}x^i y^j$, обращение в нуль которого приводит к сопряженным направлениям.

§ 4. Конус сопряженности многомерной поверхности

Как известно, два направления на поверхности называются сопряженными, если характеристика касательной плоскости по одному направлению содержит второе направление.

Сопряженные направления удовлетворяют соотношениям

$$a^p_{ij}x^i y^j = 0, \quad i, j = 1 \cdots d; \quad p = d+1 \cdots n. \tag{4.1}$$

В этом параграфе мы найдем условия, при которых многомерная поверхность допускает сопряженные направления. Система (4.1) представляет собой алгебраическое соответствие (см. [6], т. II). Для существования $s-1$-мерного решения y^i необходимо и достаточно, чтобы

$$r(a^p_{ij}x^i) = d - s, \qquad s \geqslant 1, \tag{4.2}$$

где $r(a^p_{ij}x^i)$ — ранг матрицы (a^p_{ij}). Система (4.2) содержит ровно $s(n-2d+s)$ независимых алгебраических уравнений. Следовательно, для ее совместности, вообще говоря, должно соблюдаться условие

$$s(n-2d+s) \leqslant d-1. \tag{4.3}$$

Разность этих двух чисел, т. е.

$$R_s = d - 1 - s(n-2d+s),$$

дает размерность алгебраического многообразия (4.2). Так как система (4.1) симметрична относительно двух серий неизвестных, то для y^i получим то же самое алгебраическое многообразие (4.2).

Многообразие (4.2) лежит в пространстве $A_1 \cdots A_d$. Так как из $s<t$ следует, что $R_s > R_t$, то наибольшая размерность для многообразия получится при $s=1$, т. е. когда

$$r(a^p_{ij}x^i) = d - 1. \tag{4.4}$$

Соединяя прямыми все точки алгебраического многообразия (4.4) с точкой A_0 поверхности, в касательной плоскости получим некоторый конус. Он здесь называется конусом сопряженности. Это название оправдывается тем, что каждая образующая прямая этого конуса образует сопряженную пару направлений с некоторой образующей прямой того же конуса.

При $s > 1$ каждому направлению x^i, удовлетворяющему системе (4.2), сопряжено уже s-мерное подпространство, которое также принадлежит конусу сопряженности.

Таким образом, для сопряженных направлений многомерной поверхности получается

Теорема 4.1. *Конус сопряженности наиболее общей d-мерной поверхности n-мерного пространства определяется системой $r(a^p_{ij} x^i) = d - 1$. Размерность этого конуса равна числу $R_1 + 1 = 3d - n - 1$. В случае $R_1 = 0$ поверхность имеет конечное число сопряженных направлений.*

Из соотношения (4.3) следует

Теорема 4.2. *Наиболее общая d-мерная поверхность допускает s-мерные сопряженные направления тогда и только тогда, когда $d(2s+1) \geqslant sn + s^2 + 1$. Равенство соответствует случаю, когда на поверхности существует конечное число таких сопряженных направлений.*

Теперь мы найдем условие, при котором каждое направление на касательной плоскости составляет сопряженную пару с некоторым другим направлением. В этом случае условие

$$r(a^p_{ij} x^i) = d - 1$$

не должно накладывать никакого ограничения на x^i. А это означает, что число строк этой матрицы не больше $d - 1$ или $n - d \leqslant d - 1$, или $n \leqslant 2d - 1$. Таким образом,

Теорема 4.3. *Каждое направление касательной плоскости является направлением некоторой сопряженной пары тогда и только тогда, когда $n \leqslant 2d - 1$.*

§ 5. Тангенциально вырожденные поверхности

Пусть направление x^i на поверхности сопряжено с любым другим направлением. В этом случае все коэффициенты при y^j в системе (3.4) должны обращаться в нуль, т. е.

$$a^p_{ij} x^i = 0. \qquad (5.1)$$

Эта система будет иметь решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a^p_{ij}) (где i — индекс столбцов) меньше d; или короче

$$r(a^p_{ij}) = d - s, \qquad s \geqslant 1. \qquad (5.2)$$

Нетрудно заметить, что число параметров касательной плоскости будет равно $d - s$ и, следовательно, поверхность тангенциально вырождается. Действительно, из (3.1) имеем $\omega^p_i = a^p_{ij}\omega^j$. По направлению $\omega^j = \theta x^j$ в силу (5.1) все формы ω^p_i обращаются в нуль, следовательно, касательная плоскость поверхности по направлению x^i не меняется. Причем, если соблюдается условие (5.2), то направления, вдоль которых касательные плоскости не меняются, образуют s-мерную плоскость. Такие поверхности называются развертывающимися поверхностями класса s. Следовательно, справедлива следующая

Теорема 5.1. *Развертывающаяся поверхность класса s характеризуется условием $r(\underline{a^p_{ij}}) = d - s$. В каждой точке этой поверхности существует такое s-мерное направление, которое сопряжено с любым направлением этой поверхности.*

Нетрудно заметить, что такие направления удовлетворяют уравнениям $a^p_{ij} x^i x^j = 0$ и, следовательно, являются асимптотическими направлениями.

§ 6. Касательное подпространство направлений многомерной поверхности

В третьем параграфе мы видели, что с любой несамосопряженной парой направлений поверхности связывается единственное $d+1$-мерное подпространство (см. теорему 3.1). В этом параграфе мы предположим, что эти направления совпадают. Уравнение (3.3) в этом случае запишется в виде

$$a^p_{ij} x^i x^j X_p = 0, \tag{6.1}$$

которое для данного направления x^i определяет $d+1$-мерное подпространство. Это подпространство называется касательным по данному направлению. Таким образом, получается

Теорема 6.1. *С каждым направлением многомерной поверхности связывается единственное $d+1$-мерное (касательное) подпространство, которое в точках этого направления касается $d+1$-мерной поверхности того же направления.*

Единственное исключение этой теоремы получается только тогда, когда уравнение (6.1) тождественно обращается в нуль, т. е.

$$a^p_{ij} x^i x^j = 0. \tag{6.2}$$

Как известо, направления, удовлетворяющие системе (6.2), называются асимптотическими. Таким образом, асимптотические направления получают новый характеризующий признак:

Теорема 6.2. *Асимптотические направления многомерной поверхности характеризуются тем, что касательные подпространства по этим направлениям становятся неопределенными.*

На каждой поверхности асимптотические направления (если существуют) образуют асимптотический конус с уравнениями (6.2), вершина которого совпадает с рассматриваемой точкой поверхности. Асимптотический конус является подмногообразием конуса сопряженности.

Так как число уравнений системы (6.2) в общем случае равно $n-d$, а число неизвестных равно d, то для совместности этой системы необходимо и достаточно выполнение требования

$$n-d \leqslant d-1. \tag{6.3}$$

Следовательно, здесь доказывается

Теорема 6.3. *Наиболее общая многомерная поверхность обладает асимптотическими направлениями тогда и только тогда, когда* $n \leqslant 2d+1$.

§ 7. «Сопряженная пара» и поверхности, допускающие такую пару

Мы здесь опять возвращаемся к сопряженной тройке объектов. Для краткости эта тройка обозначается в виде $(xX\omega)$, где x — точка касательной плоскости, X — гиперплоскость, проходящая через эту плоскость и ω — перемещение (или направление на касательной плоскости). Согласно определению эта тройка удовлетворяет инвариантному уравнению

$$a_{ij}^{p} x^{i} X_{p} \omega^{j}=0. \tag{7.1}$$

Теорема 2.2 для многомерной поверхности гласит

Теорема 7.1. *Если заданы произвольно гиперплоскость* X *и направление* ω, *то (7.1) определяет такое* $d-1$*-мерное подпространство (проходящее через* A_0*), каждая точка* x *которого образует сопряженную тройку* $(xX\omega)$. *Причем, заданное направление* ω *принадлежит этому* $d-1$*-мерному подпространству тогда и только тогда, когда гиперплоскость* X *принадлежит касательному подпространству направления* ω.

Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из уравнения (6.1).

Таким образом, с каждой парой (ωX) направления и гиперплоскости однозначно связывается определенное $d-1$-мерное подпространство, инцидентное точке касания и касательной плоскости поверхности. В дальнейшем оно называется подпространством пары (ωX).

Из условий $a_{ij}^{p}=a_{ji}^{p}$ и из теоремы 7.1 вытекает, что если x образует сопряженную тройку с y и X, то y также образует сопряженную тройку с x и X, т. е.

Теорема 7.2. *Если* x *принадлежит* $d-1$*-мерному подпространству пары* $\omega^{i}=\theta y^{i}$ *и* X, *то* y *принадлежит* $d-1$*-мерному подпространству пары* $\omega^{i}=\theta x^{i}$ *и* X, *и наоборот.*

Теорема 7.1 имеет единственное, но очень важное исключение. Действительно, если пара (ωX) удовлетворяет соотношениям

$$a_{ij}^{p} \omega^{i} X_{p}=0, \tag{7.2}$$

то подпространство этой пары становится неопределенным.

Определение. Если пара (ωX) удовлетворяет соотношениям (7.2), то она называется сопряженной парой (ωX). Следовательно, геометрический смысл сопряженной пары (ωX) заключается в том, что она не обладает $d-1$-мерным подпространством.

Теперь найдем поверхности, которые допускают такую пару. Для таких поверхностей алгебраическое соответствие (7.2) должно быть совместным. Если в этой системе полагать $\omega^i=\theta x^i$, то для существования единственного решения X_p необходимо и достаточно, чтобы

$$r(a^p_{ij}x^i)=n-d-1. \tag{7.3}$$

Соотношения (7.3) содержат всего $2d-n+1$ независимых алгебраических соотношений. В общем случае (7.3) будет иметь решение относительно x^i тогда и только тогда, когда

$$n\geqslant d+2. \tag{7.4}$$

Сформулируем этот результат в виде теоремы.

Теорема 7.3. *Многомерная поверхность обладает сопряженной парой* (ωX) *тогда и только тогда, когда* $n\geqslant d+2$. *Когда* $n=d+2$, *то в каждой точке поверхность имеет ровно* d *таких пар.*

Последнее утверждение теоремы доказывается в силу (7.5), которое получается ниже.

Таким образом, сопряженной парой (ωX) обладают все поверхности, кроме гиперповерхностей.

В силу принципа счета констант (см. [6], т. II) тот же самый результат получится, если систему (7.2) рассматривать как уравнения относительно неизвестных x^i (или ω^i). В этом случае для существования единственного решения x^i необходимо

$$r(a^p_{ij}X_p)=d-1. \tag{7.5}$$

Нетрудно заметить, что (7.5) содержит только одно уравнение порядка d, ибо матрица (7.5) квадратная. Таким образом, в пространстве переменных $X_p\,(p=d+1\cdots n)$ уравнение (7.5) является гиперповерхностью порядка d.

Таким образом, алгебраическое многообразие образовано только из тех направлений, которые принадлежат к сопряженным парам (ωX). Точно так же уравнениям (7.5) удовлетворяют только те гиперповерхности, которые образуют сопряженную пару (ωX). Оба многообразия (7.4) и (7.5) являются конусами. Первый конус лежит в касательной плоскости, причем его вершина совпадает с точкой касания. Этот конус называется конусом направлений сопряженных пар (ωX). Второй конус образован из гиперплоскостей, причем его вершина совпадает с касательной плоскостью поверхности. Этот конус называется конусом гиперплоскостей сопряженных пар (ωX). Следовательно, здесь справедлива

Теорема 7.4. *С каждой точкой многомерной поверхности связываются два конуса, первый из которых образован направлениями сопряженных пар* (ωX), *второй образован из гиперповерхностей тех же пар. Исключение составляют только гиперповерхности, которые не обладают сопряженными парами* (ωX).

Особый интерес представляет случай, когда конус направлений сопряженных пар (ωX) является гиперконусом. В этом случае из (7.3) получим $n=2d$. Следовательно, когда $n>2d$, то каждое направление ω^i в касательной плоскости образует сопряженную пару (ωX) с некоторой гиперплоскостью X. Таким образом,

Теорема 7.5. *Конус направлений сопряженных пар (ωX) d-мерной поверхности является гиперконусом тогда и только тогда, когда $n=2d$. Каждое направление касательной плоскости образует сопряженную пару (ωX) с некоторой гиперповерхностью тогда и только тогда, когда $n>2d$.*

§ 8. Совпадение конусов сопряженности и сопряженных пар (ωX) поверхности

Как уже известно, конус сопряженности и конус направлений сопряженных пар (ωX) определяются соответственно системами

$$r(a^p_{ij}x^i)=d-1, \qquad r(a^p_{ij}x^i)=n-d-1. \tag{8.1}$$

Здесь возможны только три случая: $d>n-d$, $d=n-d$ и $d<n-d$, и так как левые части соотношений (8.1) одни и те же, то справедлива

Теорема 8.1. *Конус сопряженности и конус пар (ωX) многомерной поверхности совпадают тогда и только тогда, когда $n=2d$. Если $n>2d$, то первый конус является подмногообразием второго конуса. Если $n<2d$ то, наоборот, второй конус является подмногообразием первого.*

Например, в четырехмерном пространстве ($n=4$) двумерная поверхность обладает единственной сопряженной сетью. В силу теоремы 8.1 каждое из этих направлений одновременно образует пару (ωX) с двумя определенными гиперповерхностями X (см. [3,4]).

Приложение теоремы 2.3 к теории поверхностей в силу теоремы 7.2 приводит к уже известным результатам.

§ 9. Соприкасающаяся плоскость поверхности

Рассмотрим такие гиперплоскости, которые образуют сопряженную пару (ωX) с любым направлением, т. е. удовлетворяют системе

$$a^p_{ij}X_p=0. \tag{9.1}$$

Нетрудно заметить, что система (9.1) определяет соприкасающуюся плоскость поверхности (плоскость минимальной размерности, в которой лежат все дифференциалы второго порядка точки поверхности). Таким образом,

Теорема 9.1. *Соприкасающаяся плоскость многомерной поверхности характеризуется тем свойством, что каждая гиперплоскость, инцидентная этой плоскости, образует сопряженную пару (ωX) с любым направлением поверхности.*

Если система (9.1) имеет только нулевое решение, то соприкасающаяся плоскость совпадает с n-пространством.

Система (9.1) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы (a_{ij}^p) (где p — индекс столбцов) меньше $n-d$ или короче

$$r(a_{ij}^p) = n - d - s, \qquad s \geqslant 1. \tag{9.2}$$

Следовательно, система (9.1) в силу (9.2) определяет плоскость размерности $n - s$. Итак,

Теорема 9.2. *Размерность соприкасающейся плоскости многомерной поверхности всегда равна $n - s$, где $r(a_{ij}^p) = n - d - s$.*

Нетрудно заметить, что для наиболее общей поверхности размерность соприкасающейся плоскости равна $d + \min\left(n - d,\ d + \frac{d(d-1)}{2}\right)$. Если n достаточно велико, то эта размерность равна $2d + \frac{d(d-1)}{2}$.

§ 10. Связки гиперплоскостей многомерной поверхности

Пусть d-мерная поверхность отнесена к подвижному реперу первого порядка, т. е.

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad \omega_0^p = 0, \quad \omega_i^p = a_{ij}^p \omega^j, \quad a_{ij}^p = a_{ji}^p;$$
$$i, j = 1 \cdots d; \quad p = d + 1 \cdots n. \tag{10.1}$$

Инфинитезимальное перемещение тангенциального репера пишется в виде (см. [1])

$$da^\alpha = -\omega_\beta^\alpha a^\beta, \quad a^\alpha = (-1)^\alpha (A_0 \cdots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \cdots A_n); \quad \alpha, \beta = 0 \cdots n. \tag{10.2}$$

Гиперплоскость, проходящая через точку A_0 поверхности (A_0) в тангенциальных координатах пишется в виде

$$m = X_q a^q, \qquad q = 1 \cdots n. \tag{10.3}$$

Найдем условие, при котором дифференциал гиперплоскости (10.2) принадлежит той же связке. В силу (10.2) это требование приведет к единственному уравнению

$$X_i \omega^i = 0, \qquad i = 1 \cdots d, \tag{10.4}$$

а это означает, что гиперплоскость X проходит через касательную $d-1$-мерную плоскость $d-1$-мерной поверхности (10.4). Итак, каждой гиперповерхности X связки (10.3) соответствует такая $d-1$-мерная поверхность (неголономная), по которой пересекаются гиперплоскость X и поверхность (A_0). Для краткости связку гиперповерхностей (10.3), проходящих через точку поверхности, назовем 0—связкой гиперповерхностей, а связку гиперповерхностей, проходящих через касательную плоскость d-мерной поверхности, назовем d-связкой. Следовательно, здесь доказывается следующая

Теорема 10.1. *Дифференциал гиперплоскости 0-связки принадлежит той же 0-связке тогда и только тогда, когда дифференциал берется по направлениям пересечения этой гиперплоскости с поверхностью. Гиперповерхность принадлежит d-связке тогда и только тогда, когда ее дифференциал по всем направлениям принадлежит 0-связке.*

Последнее утверждение теоремы просто вытекает из основного соотношения (10.4) при обращении всех коэффициентов при ω^i в нуль. Мы фактически здесь имеем новое характеризующее свойство касательной плоскости многомерной поверхности.

Все результаты этого параграфа фактически были получены с помощью инвариантной трилинейной формы в § 3.

Аналогичная задача для d-связки гиперплоскостей приводит к соотношениям

$$a^p_{ij} X_p \omega^i = 0; \qquad i, j = 1 \cdots d, \quad p = d + 1 \cdots n, \tag{10.5}$$

которые приводят к теореме:

Теорема 10.2. *Дифференциал гиперплоскости d-связки приводит к гиперплоскости той же связки тогда и только тогда, когда эта гиперплоскость и направление дифференцирования образуют сопряженную пару* (ωX).

§ 11. Число $d-1$-мерных сопряженных направлений многомерной поверхности

В силу теоремы 4.2 d-мерная поверхность в n-мерном пространстве допускает конечное число $d-1$-мерных сопряженных направлений тогда и только тогда, когда

$$n = d + 2. \tag{11.1}$$

В этом параграфе мы найдем число таких направлений на поверхности. Как известно (см. [2]), эта задача сводится к отысканию числа $(d-2)$-мерных фокусов d-семейства $d-1$-мерных плоскостей $n-1$-мерного пространства.

Известно, что совокупность всех $d-1$-мерных плоскостей, пересекающихся с данной $d-1$-мерной плоскостью по $d-2$-мерным подпространствам, образует шубертово многообразие (см. [1, 6]), которое на грассмановам многообразии $\Omega(d-1,\ n-1)$ представляет $n-1$-мерный конус порядка C^{d-1}_{n-2}. В силу (11.1) порядок этого конуса равен числу d. Таким образом, доказывается

Теорема 11.1. *В общем случае только $d = n - 2$-мерная поверхность допускает конечное число $d-1$-мерных сопряженных направлений. Количество этих направлений равно числу d.*

Характеристика $d=n-2$-мерной касательной плоскости по одному из этих направлений представляет $d-1$-мерное подпространство, проходящее через остальные $d-1$ направления.

§ 12. Дифференциальные окрестности высоких порядков

Мы в этом параграфе опять возвращаемся к общим a-семействам d-мерных плоскостей. Здесь рассмотрим дифференциальную окрестность второго порядка и сделаем соответствующие выводы для окрестностей более высоких порядков.

Для краткости будем пользоваться соотношениями (1.6), т. е. предположим, что касательное подпространство семейства является гранью подвижного репера. С помощью леммы Картана из (1.2) получим

$$da^p_{i\varkappa}+a^q_{i\varkappa}\omega^p_q-a^p_{j\varkappa}\omega^j_i=a^p_{i\varkappa\varkappa_1}du^{\varkappa_1},\qquad a^p_{i\varkappa\varkappa_1}=a^p_{i\varkappa_1\varkappa},$$

$$i,\ j=0\cdots d;\quad p,\ q=d+1\cdots n;\quad \varkappa,\ \varkappa_1=1\cdots a. \tag{12.1}$$

В силу (1.6) из (12.1) получим систему

$$a^q_{i\varkappa}\omega^p_q=a^p_{i\varkappa\varkappa_1}du^{\varkappa_1};\qquad q=d+1\cdots d+a(d+1);$$

$$p=d+a(d+1)\cdots n, \tag{12.2}$$

которая однозначно определяет новые главные формы ω^p_q.

Теперь мы можем рассматривать новое семейство, образованное из касательных подпространств a-семейства d-мерных плоскостей. В общем случае размерность этого семейства также будет равна a. Инвариантная трилинейная форма этого семейства имеет вид

$$\Phi_1=\omega^p_q x^q X_p=b^p_{q\varkappa_1}x^q X_p du^{\varkappa_1}, \tag{12.3}$$

где тензор $b^p_{q\varkappa_1}$ однозначно определяется из системы

$$a^q_{i\varkappa}b^p_{q\varkappa_1}=a^p_{i\varkappa\varkappa_1}. \tag{12.4}$$

Семейство касательных подпространств является d-фокальным семейством, т. е. все подпространства первой дифференциальной окрестности каждого подпространства проходят через d-мерную плоскость первоначального семейства.

Обращение формы (12.3) в нуль приводит к известным уже результатам (§ 2), но для нового семейства касательных подпространств. В работах [1, 2] и в этой работе фактически мы занимались геометрией инвариантной трилинейной формы Ф. Аналогичные приемы, примененные к инвариантной форме Φ_1, приводят к новым, но столь же глубоким результатам. Все эти результаты будут связаны со второй дифференциальной окрестностью d-мерной плоскости.

Точно так же с третьей дифференциальной окрестностью связывается инвариантная форма Φ_2 (и, следовательно, тензор $C^p_{r\varkappa_2}$), проводится аналогичное исследование и т. д.

Значение последовательности инвариантных трилинейных форм Φ, Φ_1, $\Phi_2 \cdots$ в дифференциальной геометрии трудно переоценить. Каждое подмногообразие изучаемого многообразия также обладает такой последовательностью инвариантных форм. Каждая такая последовательность обрывается только тогда, когда касательное подпространство данного порядка совпадает с объемлющим пространством.

§ 13. Последовательность инвариантных трилинейных форм на грассмановом отображении семейства

В классической теории конгруэнций и комплексов прямых большая роль принадлежит линейным многообразиям прямых, т. е. демиквадрике, линейной конгруэнции и линейному комплексу. Эти многообразия в P_5 представляются подпространствами различных измерений. Каждое семейство (линейчатая поверхность, конгруэнция или комплекс) на грассмановом (плюккеровом) многообразии представляет некоторую поверхность. Касательные плоскости (различных порядков) этих поверхностей (или их сопряженные плоскости) как раз представляют касательные линейные многообразия к этим семействам.

В четырехмерном пространстве касательные линейные многообразия для двупараметрического семейства прямых и плоскостей подробно изучены в работах [3, 4]. В работе [1] изучается касательное линейное многообразие произвольного a-параметрического семейства d-мерных плоскостей. Так как касательные плоскости различных порядков многомерной поверхности получаются с помощью трилинейной инвариантной формы соответствующей дифференциальной окрестности (см. § 3—10), то изучение линейного многообразия данного a-семейства приводится к изучению последовательности инвариантных форм, присоединенной к a-поверхности (образу a-семейства) грассманова многообразия $\Omega(d, n)$.

Мы здесь не будем заниматься подробным изучением этих многообразий, несмотря на то, что результаты будут представлять определенный интерес в проективно-дифференциальной геометрии. Дело в том, что метод изучения этих многообразий ничем не отличается от метода, примененного в этой работе и в работах [1, 2].

Отображение на грассмановом многообразии дает хорошую интерпретацию теории пар семейств d-мерных плоскостей. Действительно, пара a-семейств d-мерных плоскостей отображается в пару a-поверхностей, принадлежащих грассманову многообразию. Две касательные плоскости этих поверхностей в пространстве P_N $(N = C_{n+1}^{d+1} - 1)$ в общем случае либо пересекаются по некоторому s-мерному подпространству, либо находятся в некотором k-мерном подпространстве. Так как каждое подпространство из P_N отображает некоторое линейное многообразие d-мерных плоскостей (см. [1]), то это линейное многообразие инвариантно связывается с рассматриваемой парой семейств d-плоскостей. В случаях, когда размерность пересечения или суммы этих плоскостей больше s или меньше k, получаются частные случаи (классы) пары семейств, причем в каждом конкретном случае очень легко можно классифицировать пары в каждом пространстве. Например, в трехмерном пространстве существуют три основные пары конгруэнций: A, T и Θ [7, 8]. В том же пространстве существует только одна основная пара комплексов, это пара T [9], и т. д.

§ 14. Изоморфизм проективных геометрий различных образующих элементов

Согласно идее Д. Гильберта [10] основные элементы (точка, прямая и т. д.) геометрии не получают определения. Следовательно, эти элементы и отношения между ними могут выбираться произвольно, только лишь с одним ограничением; выбранные элементы и отношения между ними должны удовлетворять определенным свойствам (аксиомам) этой геометрии.

В этом параграфе мы будем пользоваться этой идеей и построим ряд геометрий, изоморфных проективным геометриям многомерных пространств. Взаимно-однозначное соответствие этих геометрий покоится на следующем принципе:

Принцип отображения. Точка (x^i) пространства P_n ставится в соответствие с таким геометрическим объектом другого пространства P (не обязательно проективного), уравнение которого имеет ровно $n+1$ однородных коэффициентов (x^i). Если $x^i F_i = 0$ уравнение этого объекта в P (где F_i зависят от координат пространства P), то точки $x^i + \lambda y^i$ прямой (xy) соответствуют объектам пучка $(x^i + \lambda y^i) F_i = 0$; точки $x^i + \lambda y^i + \mu z^i$ плоскости (xyz) соответствуют объектам $(x^i + \lambda y^i + \mu z^i) F_i = 0$ и т. д.

Устанавливаемое таким образом соответствие пространств P_n и P всегда является взаимно-однозначным. Фундаментальная группа пространства P совпадает с фундаментальной группой P_n.

Соответствие инцидентностей этих двух геометрий устанавливается следующей очевидной теоремой:

Теорема 14.1. *Если два подпространства в P_n пересекаются по k-мерному подпространству, то соответствующие им пучки в P пересекаются по k-мерному пучку.*

Здесь k-мерным пучком называется совокупность объектов, которая определяется уравнением

$$(x^i + \lambda_1 y^i + \cdots + \lambda_k z^i) F_i = 0.$$

Таким образом, *устанавливается изоморфизм между точечной геометрией P_n и геометрией данных образов другого пространства P. Мы последнюю геометрию называем проективной геометрией* *образов в пространстве P.* Все эти рассуждения более подробно выясним на следующем примере.

§ 15. Проективная геометрия окружностей и сфер трехмерного евклидова пространства

Как известно, сфера трехмерного эвклидова пространства в прямоугольных координатах определяется уравнением

$$x^0(x^2+y^2+z^2)+2x^1x+2x^2y+2x^3z+x^4=0. \qquad (15.1)$$

Следовательно, каждая сфера из E_3 однозначно определяется точкой (x^i) проективного четырехмерного пространства P_4. Для получения взаимно-однозначного соответствия мы должны во множество сфер E_3 включить все сферы мнимого радиуса, все плоскости (когда $x_0=0$), в том числе и бесконечно удаленную плоскость и, наконец, все точки пространства E_3.

Легко заметить, что соответствие между основными элементами этих двух пространств будет иметь вид

P_4	E_3
1. Точки.	1. Сфера.
2. Точки прямой.	2. Сферы, проходящие через данную окружность. Эта окружность действительна, когда пучок сфер эллиптический; мнимая, когда этот пучок гиперболический и, наконец, является точкой, когда пучок параболический. Причем не нужно ставить различия между этими тремя видами окружностей, ибо существуют преобразования фундаментальной группы, которые переводят один вид окружностей в другой. Мы в дальнейшем их назовем просто окружностями.
3. Точки двумерной плоскости.	3. Сферы двумерного пучка, т. е. все сферы, проходящие через две (действительные или мнимо-сопряженные) точки.
4. Точки трехмерной плоскости.	4. Сферы трехмерного пучка или (как легко доказать) все сферы, ортогональные одной сфере.
5. Две прямые пересекаются.	5. Две окружности консферичны (принадлежат одной сфере) и т. д.

Принцип двойственности четырехмерного пространства приводит к такому же принципу в E_3, т. е. сфера $\longleftrightarrow$ трехмерный пучок сфер, одномерный пучок сфер $\longleftrightarrow$ двумерный пучок сфер.

Таким образом, устанавливается изоморфизм между точечной четырехмерной проективной геометрией и так называемой „проективной геометрией сфер“ трехмерного пространства.

С помощью этого изоморфизма каждой теореме из P_4 соответствует теорема в геометрии сфер и окружностей. Например, в P_4

если три прямые не принадлежат одной гиперплоскости, то обладают единственной трансверсалью (прямой, пересекающей эти прямые). В E_3 этот результат приводит к теореме (доказательство которой в элементарной геометрии связано с большими затруднениями):

Теорема 15.1. *Существует единственная окружность, которая консферична с каждой из трех заданных (не ортогональных одной сфере) окружностей.*

Две прямые в P_4 определяют единственную гиперплоскость, в которой они лежат. Точно так же

Теорема 15.2. *Две окружности c и c_1 определяют единственную сферу O, которой ортогональны все сферы пучков этих окружностей. Причем на каждой сфере, ортогональной O, существует единственная окружность, которая консферична как с c, так и с c_1.*

На этом пути без доказательства можно сформулировать очень много теорем в геометрии сфер и окружностей, но мы на этом не останавливаемся.

В работе [11] нами были подробно изучены линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Все результаты этой работы автоматически переносятся в геометрию сфер и окружностей. В этой работе мы рассматриваем некоторые свойства конфигурации Власова. В свете этого изоморфизма получается

Теорема 15.3. *Пентациклы Стефаноса являются изоморфными отображениями прямых конфигурации Власова. Все замечательные свойства конфигурации Власова переходят в новые свойства для пентациклов Стефаноса.*

Аналогично доказывается, что линейчатая геометрия трехмерного проективного пространства изоморфна проективной геометрии окружностей эвклидовой плоскости.

Другим примером изоморфизма двух геометрий является изоморфизм между точками пятимерного проективного пространства и линейного комплекса прямых трехмерного пространства. Этот изоморфизм приводит к ряду интересных свойств семейства демиквадрик, которыми здесь заниматься не будем.

Армянский заочный педагогический институт
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 VI 1963

Ս. Ե. Կարապետյան

ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ (III)

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Ներկա աշխատությունը հանդիսանում է [1, 2] աշխատությունների շարունակությունը։ Այստեղ հայտնաբերված է մի եռգծային ինվարիանտ ձև, որը լրիվ հետազոտված է։

3—10-րդ պարագրաֆներում տրված է այդ ձևի կիրառությունը բազմաչափ մակերևույթների ուսումնասիրության համար։ Այստեղ ստացված են մի շարք նոր արդյունքներ։

Վերջում տրված է բազմաչափ տարածությունների երկրաչափության մի մեկնաբանություն, որի օգնությամբ ստեղծվում են նոր երկրաչափություններ, որոնց տարածության հիմնական էլեմենտը ոչ թե կետն է, այլ մի ուրիշ երկրաչափական օբյեկտ։ Այս սկզբունքով շարադրված է էվկլիդյան եռաչափ տարածության գնդերի և շրջանագծերի պրոյեկտիվ երկրաչափությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **16**, № 3, 1963.
2. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-фат. наук, **16**, № 5, 1963.
3. *Лаптев Г. Ф.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Труды III мат. съезда, т. III, М., 1958.
4. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 2, 1962.
5. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
6. *Ходж В.* и *Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии, т. I, II. ИЛ, М., 1954.
7. *Карапетян С. Е.* О теории пар конгруэнций. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 1961.
8. *Карапетян С. Е.* Пара А и некоторые свойства пары Т. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.
9. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложения. ДАН СССР, **133**, № 5, 1960.
10. *Гильберт Д.* Основания геометрии. ИЛ, М., 1948.
11. *Карапетян С. Е.* Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 1, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

В. П. Петренко

Некоторые оценки логарифмической производной мероморфной функции

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в $z \neq \infty$. Будем пользоваться следующими обозначениями:
$n(r, a)$ — число корней уравнения $f(z)=a$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$;

$$n(r)=n(r, 0)+n(r, \infty),$$

$$N(r, a)=\int_0^r \frac{n(t, a)-n(0, a)}{t}\, dt+n(0, a) \ln r,$$

$$N(r)=N(r, 0)+N(r, \infty),$$

$$m(r, a)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\, d\theta,$$

$$m(r, \infty)=m(r, f)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$T(r, f)=m(r, \infty)+N(r, \infty),$$

$$\varkappa=\varkappa(f)=\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r)}{T(r, f)},$$

$$\delta(a)=\delta(a, f)=1-\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a)}{T(r, f)},$$

$$S(r, f)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta,$$

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}=\rho; \quad \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}=\lambda$$

(напомним, что ρ называется порядком мероморфной функции $f(z)$, λ—ее нижним порядком). Буквой C с индексами будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от r и R $(R>r)$.

§ 1. Р. Неванлинна показал [1], что для всех значений r, $0<r_0\leqslant r<\infty$, за исключением, быть может, системы интервалов с конечной суммой длин, справедлива оценка

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right)=O(\ln(rT(r, f))) \quad (r\to\infty). \tag{1.1}$$

Эту оценку Р. Неванлинна использовал для доказательства соотношения дефектов

$$\sum_{(a)}\delta(a)\leqslant 2,$$

справедливого для любой мероморфной функции.

В работе [2] Фукс доказал, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка сходится ряд

$$\sum_{(a)}\sqrt{\delta(a)}.$$

В доказательстве Фукса весьма существенную роль играла оценка величины $S\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ (растущей, вообще говоря, гораздо быстрее, чем $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$). Эта оценка давалась следующей теоремой:

Теорема А. (Фукс [2]). *Пусть $g(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ. Положим*

$$p=\max(2, \lambda).$$

Справедливо соотношение

$$\varliminf_{r\to\infty}[T(r, g)]^{-1}\, rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_1 p+C_2 \varkappa p\ln p. \tag{1.2}$$

В недавней заметке [3] И. В. Островский и И. В. Казакова получили следующую оценку для $S\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, дополняющую результат Фукса.

Теорема Б. *Пусть $g(z)$ — мероморфная функция порядка ρ, $0\leqslant\rho<1$. Справедливо соотношение*

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r)]^{-1} rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_3\rho^2\operatorname{cosec}\pi\rho, \tag{1.3}$$

где $C_3=4{,}4$.

Основным результатом нашей работы является

Теорема 1. *Пусть ρ и λ — соответственно порядок* и нижний порядок мероморфной функции $g(z)$. Тогда*

$$\varliminf_{r\to\infty}[N(r)]^{-1} rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\leqslant C_3\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}\{x^2|\operatorname{cosec}\pi x|\}. \tag{1.4}$$

Оценка (1.4) содержит оценку (1.3).

* ρ может равняться $+\infty$.

Отметим, что если $\rho > \lambda$ или $\rho = \lambda$ и ρ — нецелое, то из оценки (1.4) и элементарного неравенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ f(x)\,dx \leqslant \ln^+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right) + \ln 2$$

вытекает следующая оценка для $m\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, справедливая для некоторой последовательности значений $r = r_k$, $\{r_k\} \uparrow \infty$

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) = \ln^+ \frac{N(r)}{r} + O(1).$$

Эта оценка дополняет оценку (1.1).

В доказательстве теоремы 1 мы использовали некоторые приемы Б. Чельберга [4], А. Эдрея и В. Фукса [5], И. В. Островского [8].

Доказательство теоремы 1 мы изложим в § 2. § 3 посвящен приложениям этого результата к оценке $\sum\limits_{(a)} \sqrt{\delta(a)}$ и $\sum\limits_{(a)} \delta(a)$. В § 4 мы покажем, что оценка (1.4) в известной мере близка к наилучшей.

§ 2. Для доказательства теоремы 1 нам необходимо ввести некоторые обозначения и установить несколько вспомогательных соотношений.

Рассмотрим, следуя Эдрею и Фуксу [5], функцию

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|re^{i\theta} - 1|}, \qquad (0 < r < +\infty).$$

Эдрей и Фукс показали [5], что при $0 < \sigma < 1$ для $\Phi(r)$ имеет место равенство

$$\int_0^\infty r^{-\sigma}\Phi(r)\,dr = J(\sigma),$$

где

$$J(\sigma) = \frac{\pi^2 \operatorname{cosec} \pi\sigma}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1-2\sigma}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1-2\sigma}{4}\right)} \leqslant 4{,}4 \operatorname{cosec} \pi\sigma. \qquad (2.1)$$

Условимся через $\{c_k\}$ обозначать объединенную последовательность, состоящую из нулей $\{a_k\}$ и полюсов $\{b_l\}$ мероморфной функции $g(z)$. Не нарушая общности, можно считать, что $g(0) = 1$.

Лемма 1. (Ср. лемма 1 [8]). *Пусть $g(z)$, $g(0) = 1$, — мероморфная функция с нулями $\{a_k\}$ и полюсами $\{b_l\}$; $q \geqslant 0$ — заданное целое число. При любом $R > 0$ имеет место соотношение*

$$z\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{|a_k|<R}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^{q+1}}{\frac{z}{a_k}-1}-\sum_{|b_l|<R}\frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^{q+1}}{\frac{z}{b_l}-1}+z\lambda_R(z), \tag{2.2}$$

где при $|z|\,r\leqslant\frac{R}{2}$

$$|z\lambda_R(z)|\leqslant C_4\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+C_5r^q. \tag{2.3}$$

Доказательство. Известно [1], что для мероморфной функции $g(z)$ при $|z|<R$ имеет место представление

$$\ln g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(Re^{i\theta})|\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}d\theta+$$

$$+\sum_{|b_l|<R}\ln\frac{R^2-\bar{b}_lz}{R(z-b_l)}-\sum_{|a_k|<R}\ln\frac{R^2-\bar{a}_kz}{R(z-a_k)}.$$

Дифференцируя $q+1$ раз по z, получим

$$\frac{d^{q+1}}{dz^{q+1}}\ln g(z)=\sum_{|a_k|<R}\frac{(-1)^qq!}{(z-a_k)^{q+1}}-\sum_{|b_l|<R}\frac{(-1)^qq!}{(z-b_l)^{q+1}}+K_R(z), \tag{2.4}$$

где

$$K_R(z)=q!\sum_{|a_k|<R}\left(\frac{\bar{a}_k}{R^2-\bar{a}_kz}\right)^{q+1}-q!\sum_{|b_l|<R}\left(\frac{\bar{b}_l}{R^2-\bar{b}_lz}\right)^{q+1}+$$

$$+\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g(Re^{i\theta})|\frac{2Re^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^{q+2}}d\theta.$$

При $|z|=r\leqslant\frac{R}{2}$ находим

$$|K_R(z)|\leqslant q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R,0)+q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R,\infty)+$$

$$+(q+1)!2^{q+3}R^{-q-1}2T(R)=q!2^{q+1}R^{-q-1}n(R)+(q+1)!2^{q+4}R^{-q-1}T(R). \tag{2.5}$$

Для $n(R)$ имеем оценку

$$n(R)\ln 2\leqslant\int_0^R\ln^+\frac{2R}{t}dn(t)\leqslant\int_0^{2R}\ln^+\frac{2R}{t}dn(t)=N(2R)\leqslant T(2R). \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует неравенство

$$|K_R(z)|\leqslant C_6\,q!\,R^{-q-1}T(2R).$$

Интегрируя обе части равенства (2.4) q раз в пределах от 0 до z, находим

$$\frac{g'(z)}{g(z)}-P_{q-1}(z)=\sum_{|a_k|<R}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^q}{z-a_k}-\sum_{|b_l|<R}\frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^q}{z-b_l}+K_R^1(z),$$

где

$$|K_R^1(z)|\leqslant C_6 r^q R^{-q-1}T(2R), \tag{2.7}$$

а $P_{q-1}(z)$ — полином степени не выше $q-1$.

Поэтому

$$z\frac{g'(z)}{g(z)}=\sum_{|a_k|<R}\frac{\left(\frac{z}{a_k}\right)^{q+1}}{\frac{z}{a_k}-1}-\sum_{|b_l|<R}\frac{\left(\frac{z}{b_l}\right)^{q+1}}{\frac{z}{b_l}-1}+zK_R^1(z)+P_q(z).$$

Обозначая

$$zK_R^1(z)+P_q(z)=z\lambda_R(z)$$

и используя оценку (2.7), получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Для мероморфной функции $g(z)$, удовлетворяющей условиям леммы 1, имеет место неравенство*

$$rS\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leqslant\int_0^R\left(\frac{r}{t}\right)^q\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dn(t)+C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+C_8r^q, \tag{2.8}$$

где $r\leqslant\frac{R}{2}$, $R>0$.

Доказательство. Из соотношения (2.2) находим

$$rS\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leqslant\sum_{|c_k|<R}\left(\frac{r}{|c_k|}\right)^{q+1}\Phi\left(\frac{r}{|c_k|}\right)+C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+$$

$$+C_8r^q=\int_0^R\left(\frac{r}{t}\right)^{q+1}\Phi\left(\frac{r}{t}\right)dn(t)+C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+C_8r^q=^*$$

$$=\int_0^R\left(\frac{r}{t}\right)^q\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dn(t)+C_7\left(\frac{r}{R}\right)^{q+1}T(2R)+C_8r^q.$$

Лемма доказана.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1 для случая, когда $\lambda<\rho$. Выберем в (2.8) $q=[x]$, где x — любое нецелое число, удовлетворяющее неравенству

$$\lambda<x<\rho.$$

Тогда

* Используется тождество $t\Phi(t)\equiv\Phi\left(\frac{1}{t}\right)$.

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{q-x-1} \int\limits_{0}^{R} t^{-q}\, \Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t)\, dr +$$

$$+ C_9 \frac{T(2R)}{R^x} + \frac{C_8}{(x-q)\, r_0^{x-q}}. \tag{2.9}$$

Обозначим через I повторный интеграл в (2.9). Мы имеем

$$I = \int\limits_{0}^{R} t^{-q}\, dn(t) \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{q-x-1}\, \Phi\left(\frac{t}{r}\right) dr.$$

Производя замену $r = ts$, находим

$$I = \int\limits_{0}^{R} t^{-x} dn(t) \int\limits_{\frac{r_0}{t}}^{\frac{R}{2t}} s^{q-x-1} \Phi\left(\frac{1}{s}\right) ds \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} s^{q-x-1} \Phi\left(\frac{1}{s}\right) ds \int\limits_{0}^{R} t^{-x}\, dn(t).$$

Интегрирование по частям второго интеграла справа дает

$$\int\limits_{0}^{R} t^{-x}\, dn(t) = \frac{n(R)}{R^x} + x\frac{N(R)}{R^x} + x^2 \int\limits_{0}^{R} N(s)\, s^{-x-1} ds,$$

поэтому

$$I \leqslant \left\{\frac{n(R)}{R^x} + x\frac{N(R)}{R^x} + x^2 \int\limits_{0}^{R} N(s)\, s^{-x-1}\, ds\right\} \int\limits_{0}^{\infty} s^{q-x} \Phi(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \left\{x^2 \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} N(s)\, s^{-x-1}\, ds + \frac{n(R)}{R^x} + C_{10} \frac{N(R)}{R^x} + O(1)\right\} J(x-q) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{x^2 \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} N(s)\, s^{-x-1} ds + C_{11} \frac{T(2R)}{R^x} + O(1)\right\} J(x-q).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant x^2 J(x-q) \int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1} N(r)\, dr +$$

$$+ C_{12} \frac{T(2R)}{R^x} + O(1).$$

и

$$\frac{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1} N(r)\, dr} \leqslant x^2 J(x-q) + \frac{C_{12} R^{-x}\, T(2R) + O(1)}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1} N(r)\, dr}. \tag{2.10}$$

Так как $x < \rho$, то при $R \to \infty$

$$\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1} N(r)\, dr \to +\infty.$$

Так как $\lambda < x$, то найдется последовательность $\{R_i\} \uparrow \infty$, такая, что

$$R_i^{-x}\, T(2R_i) \to 0.$$

Следовательно, устремляя в (2.10) $R \to \infty$ по этой последовательности $\{R_i\} \uparrow \infty$, находим

$$\varliminf_{r \to \infty} \frac{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr}{\int\limits_{r_0}^{\frac{R}{2}} r^{-x-1} N(r)\, dr} \leqslant x^2 J(x-q).$$

Поэтому

$$\varliminf_{r \to \infty} [N(r)]^{-1}\, rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant x^2 J(x-q).$$

Учитывая неравенство (2.1), мы получаем (1.4).

Для завершения доказательства теоремы 1 остается рассмотреть случай, когда мероморфная функция $g(z)$ имеет регулярный рост, т. е. $\lambda = \rho$, причем ρ — нецелое.

Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3. *Если $g(z)$ — мероморфная функция нецелого порядка $\rho < +\infty$ и $\rho < \gamma < \rho + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то*

$$\varlimsup_{t \to \infty} t^{2\varepsilon} \left\{ \sum_{|c_k| \geqslant t} \frac{1}{|c_k|^{\gamma}} \right\} = \varlimsup_{t \to \infty} t^{2\varepsilon} \int\limits_t^{\infty} \frac{dn(s)}{s^{\gamma}} = +\infty.$$

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда

$$\int\limits_t^{\infty} \frac{dn(s)}{s^{\gamma}} \leqslant \frac{C_{13}}{t^{2\varepsilon}}, \quad 0 < C_{13} < \infty,$$

и

$$\frac{1}{t^{1-\varepsilon}}\int_t^\infty \frac{dn(s)}{s^\gamma} \leqslant \frac{C_{13}}{t^{1+\varepsilon}}.$$

Поэтому при достаточно большом $N > N_0$ будем иметь

$$\int_1^N \frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\int_t^\infty \frac{dn(s)}{s^\gamma} \leqslant \frac{C_{13}}{\varepsilon}. \tag{2.11}$$

С другой стороны,

$$\int_1^N \frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\int_t^\infty \frac{dn(s)}{s^\gamma} = \frac{1}{\varepsilon}\left\{t^\varepsilon \int_t^\infty \frac{dn(s)}{s^\gamma}\Bigg|_1^N + \int_1^N \frac{dn(s)}{s^{\gamma-\varepsilon}}\right\}.$$

Так как $\gamma - \varepsilon < \rho$, то при $N \to \infty$

$$\int_1^N \frac{dn(s)}{s^{\gamma-\varepsilon}} \to \infty,$$

поэтому получаем противоречие с неравенством (2.11). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь мероморфную функцию $g(z)$ нецелого порядка ρ. Не уменьшая общности, можно считать, что $g(z)$ имеет вид

$$g(z) = e^{P_p(z)} \frac{\prod\limits_{k=1}^\infty E\left(\frac{z}{a_k}, p\right)}{\prod\limits_{l=1}^\infty E\left(\frac{z}{b_l}, p\right)},$$

где $P_p(z)$ — полином степени не выше $p = [\rho]$.

Очевидно, при всех $r > r_0$ имеет место неравенство

$$rS\left(r, \frac{g'}{g}\right) \leqslant C_{14} r^p + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{r}{|c_k|}\right)^{p+1} \Phi\left(\frac{r}{|c_k|}\right).$$

Выберем $\rho < \gamma < \rho + \varepsilon$, тогда предыдущее неравенство дает

$$r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} \leqslant r^{-\gamma-1}\int_0^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^p \frac{r}{t}\Phi\left(\frac{r}{t}\right) dn(t) + C_{14} r^{p-\gamma-1} =$$

$$= r^{-\gamma-1}\int_0^\infty \left(\frac{r}{t}\right)^p \Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t) + C_{14} r^{p-\gamma-1}.$$

Поэтому

$$\int_x^\infty r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant \int_x^\infty r^{p-\gamma-1}\int_0^\infty t^{-p}\Phi\left(\frac{t}{r}\right) dn(t)\, dr +$$

$$+ C_{14}(\gamma - p)^{-1} x^{p-\gamma}. \tag{2.12}$$

Обозначим через I повторный интеграл в (2.12). Мы находим, производя замену $r=ts$

$$I=\int_0^\infty t^{-\rho}dn(t)\int_x^\infty r^{\rho-\gamma-1}\Phi\left(\frac{t}{r}\right)dr=\int_0^\infty t^{-\rho}\,dn(t)\int_{\frac{x}{t}}^\infty t^{\rho-\gamma}s^{\rho-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds=$$

$$=\int_0^\infty t^{-\gamma}dn(t)\int_{\frac{x}{t}}^\infty s^{\rho-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds.$$

Введем следующие обозначения

$$G(t)=\int_t^\infty s^{\rho-\gamma-1}\Phi\left(\frac{1}{s}\right)ds,$$

$$F(t)=\int_t^\infty s^{-\gamma}dn(s).$$

Производя интегрирование по частям в последнем интеграле, находим

$$F(t)=-\frac{n(t)}{t^\gamma}-\gamma\frac{N(t)}{t^\gamma}+\gamma^2\int_t^\infty N(s)\,s^{-\gamma-1}ds. \tag{2.13}$$

Кроме того, для I имеем

$$I=-\int_0^\infty G\left(\frac{x}{t}\right)dF(t)=-F(t)\,G\left(\frac{x}{t}\right)\Big|_0^\infty+$$

$$+\int_0^\infty F(t)\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t}=\int_0^\infty F(t)\left(\frac{x}{t}\right)^{\rho-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x}\right)\frac{dt}{t}. \tag{2.14}$$

В силу леммы 3 существует последовательность $\{x_i\}\uparrow\infty$, что

$$t^{2\varepsilon}F(t)\leqslant x_i^{2\varepsilon}F(x_i)\quad\text{при}\quad t\leqslant x_i \tag{2.15}$$

и, так как $F(t)$ монотонно убывает, то

$$F(t)\leqslant F(x_i)\quad\text{при}\quad t\geqslant x_i. \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.15) и (2.16) находим

$$I\leqslant F(x_i)\left\{\int_0^{x_i}\left(\frac{x_i}{t}\right)^{2\varepsilon+\rho-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x_i}\right)\frac{dt}{t}+\int_{x_i}^\infty\left(\frac{x_i}{t}\right)^{\rho-\gamma}\Phi\left(\frac{t}{x_i}\right)\frac{dt}{t}\right\}=$$

$$=F(x_i)\left\{\int_0^1 u^{\gamma-\rho-2\varepsilon-1}\Phi(u)\,du+\int_1^\infty u^{\gamma-\rho-1}\Phi(u)\,du\right\}=F(x_i)\,A(\varepsilon).$$

Положив в (2.12) $x = x_l$, получим

$$\int_{x_l}^{\infty} r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr \leqslant F(x_l)\,A(\varepsilon) + C_{15} x_l^{p-\gamma}. \tag{2.17}$$

Из (2.15) и леммы 3 находим, что

$$\lim_{x_l \to \infty} x_l^{2\varepsilon} F(x_l) = +\infty,$$

поэтому при $x_l > x_0$

$$[F(x_l)]^{-1} \leqslant x_l^{2\varepsilon}$$

и

$$x_l^{p-\gamma}[F(x_l)]^{-1} \leqslant x_l^{p-\gamma+2\varepsilon} \to 0. \tag{2.18}$$

Таким образом, из (2.13), (2.17) и (2.18) следует неравенство

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{x}^{\infty} r^{-\gamma-1}\left\{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)\right\} dr}{\int\limits_{x}^{\infty} r^{-\gamma-1} N(r)\, dr} \leqslant \gamma^2 A(\varepsilon),$$

т. е.

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{rS\left(r, \frac{g'}{g}\right)}{N(r)} \leqslant \gamma^2 A(\varepsilon).$$

Устремляя $\varepsilon \to \infty$, мы получим

$$\gamma^2 A(\varepsilon) \to \rho^2 \int\limits_{0}^{\infty} u^{\rho-p-1}\,\Phi(u)\, du = \rho^2 J(p+1-\rho).$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. При помощи оценки величины $S\left(r, \frac{g'}{g}\right)$, даваемой теоремой А, Фукс [2] получил следующий результат.

Теорема В. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, $p = \max(2, \lambda)$. Тогда для дефектов мероморфной функции $f(z)$ имеет место неравенство*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant C_{16}\sqrt{p \ln p}.$$

Используя нашу теорему 1, мы сейчас получим теорему, усиливающую этот результат при малых λ.

Теорема 2. *Пусть ρ и λ — соответственно порядок и нижний порядок мероморфной функции $f(z)$. Если $f(z)$ обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять неравенству*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant C_{17} \min_{\lambda \leqslant x \leqslant \rho} x \sqrt{|\operatorname{cosec} \pi x|} \qquad (C_{17} = 10{,}6). \tag{3.1}$$

Доказательство. Мы будем опираться на следующий результат Фукса [2].

Теорема Г. *Если $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка—обладает по меньшей мере двумя дефектными значениями, то имеет место соотношение*

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant \sqrt{2\pi \varliminf_{r\to\infty} [T(r, f)]^{-1} rS\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}\,. \tag{3.2}$$

Из неравенства (3.2) находим

$$\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)} \leqslant \sqrt{2\pi \varliminf_{r\to\infty} [T(r, f)]^{-1} rS\left(r, \frac{f''}{f'}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2\pi\varkappa \varliminf_{r\to\infty} [N(r, f)]^{-1} rS\left(r, \frac{f''}{f'}\right)}\,. \tag{3.3}$$

Положив теперь в (1.4) $g(z) = f'(z)$ и заметив, что

$$N(r, f') \leqslant 2N(r, f),$$

получим неравенство

$$\varliminf_{r\to\infty} [N(r, f)]^{-1} rS\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r\to\infty} [N(r, f')]^{-1} rS\left(r, \frac{f''}{f'}\right) \varlimsup_{r\to\infty} N(r, f')\,[N(r, f)]^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3 \min_{\lambda' \leqslant x \leqslant \rho'} [x^2 |\operatorname{cosec} \pi x|], \tag{3.4}$$

где λ' — нижний порядок мероморфной функции $f'(z)$, ρ' — ее порядок.

Как известно, при $r > r_0$ имеют место следующие неравенства [6] (стр. 52):

$$\ln T(r, f') \leqslant \ln T(kr, f) + C_{18},$$
$$\ln T(r, f) \leqslant \ln T(kr, f') + C_{19},$$

где $k > 1$. Из этих неравенств следует, что $\rho' = \rho$, $\lambda' = \lambda$. Теорема доказана.

Из неравенства (3.1) вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Если мероморфная функция $f(z)$ обладает по крайней мере двумя дефектными значениями, то ее дефекты должны удовлетворять неравенству*

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant C_{20} \min_{\lambda \leqslant x \leqslant \rho} x^2 |\operatorname{cosec} \pi x| \qquad (C_{20} = 112{,}4). \tag{3.5}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться соотношением

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant \left(\sum_{(a)} \sqrt{\delta(a)}\right)^2.$$

Из второй основной теоремы Неванлинна следует, что величины дефектов мероморфной функции удовлетворяют условию

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant 2.$$

При $\lambda \leqslant 0{,}03$ правая часть (3.5) строго меньше 2.

Наша теорема 3 является усилением следующей теоремы, недавно полученной Эдреем и Фуксом [7]:

Теорема Д. *Если мероморфная функция конечного порядка ρ, $0 \leqslant \rho < \frac{1}{2}$ обладает по крайней мере двумя дефектными значениями, то*

$$\sum_{(a)} \delta(a) \leqslant C_{21} \sin \frac{\pi\rho}{2},$$

где C_{21} — абсолютная постоянная.

§ 4. Следующий пример дает возможность проверить точность оценки (1.4). Пусть $\rho > 0$ — нецелое число.

Рассмотрим каноническое произведение

$$h(z, \rho) = \prod_{k=1}^{\infty} E\left(-\frac{z}{k^{\frac{1}{\rho}}}; p\right) \quad p = [\rho],$$

где $E(u, p)$ — канонический множитель Вейерштрасса рода p. В плоскости с разрезом по лучу от -1 до $-\infty$ выберем ту ветвь $\ln h(z, \rho)$, которая равна 0 при $z = 0$. Мы имеем

$$\ln h(z, \rho) = (-1)^p \int_1^{\infty} \frac{n(t) z^{p+1}}{t^{p+1}(z+t)} dt.$$

Отсюда

$$\frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} = (-1)^p z^p \int_1^{\infty} \frac{n(t)\,[pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(z+t)^2} dt.$$

Найдем асимптотику последнего выражения в угле

$$V = \{|\arg z| \leqslant \pi - \delta\}, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Учитывая, что в угле V имеет место неравенство

$$|z + t| \geqslant \frac{\sin\delta}{2}(r + t) \quad (z = re^{i\theta},\ t \geqslant 0)$$

и что $|n(t) - t^{\rho}| < 1$, мы имеем оценки

$$\left|\frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} - (-1)^p z^p \int_1^{\infty} \frac{t^{\rho}\,[pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(z+t)^2} dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(p+1)r^p}{\sin^2\delta} \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{p+1}(t+r)} = O(|z|^{p-1}), \qquad (4.1)$$

$$\left| z^p \int_0^1 \frac{t^\rho [pz + (p+1)t]}{t^{p+1}(t+z)^2} dt \right| < \frac{4(p+1)r^p}{\sin^2 \delta} \int_0^1 \frac{dt}{t^{p+1-\rho}(t+r)} <$$

$$\leqslant \frac{4(p+1)r^{p-1}}{\sin^2 \delta} \int_0^1 \frac{dt}{t^{p+1-\rho}} = O(|z|^{p-1}). \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) следует равенство

$$\frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} = (-1)^p z^p \int_0^\infty \frac{pz + (p+1)t}{t^s (z+t)^2} dt + O(|z|^{p-1}),$$

где

$$s = p + 1 - \rho, \quad 0 < s < 1, \quad z \in V.$$

Замечая, что

$$(-1)^p z^p \int_0^\infty \frac{pz + (p+1)t}{t^s (z+t)^2} dt = (-1)^p \pi\rho \operatorname{cosec} \pi(\rho - p) z^{\rho-1} =$$

$$= \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho \, z^{\rho-1},$$

получаем

$$z \frac{h'(z, \rho)}{h(z, \rho)} = \pi\rho \operatorname{cosec} \pi\rho \, z^\rho + O(|z|^p) \quad (z \in V). \tag{4.3}$$

Для величины $N(r, 0) = N(r)$ мы имеем соотношение

$$\left| N(r) - \int_1^r t^{\rho-1} dt \right| = \left| \int_1^r \frac{n(t) - t^\rho}{t} dt \right| \leqslant \int_1^r \frac{dt}{t} = \ln r.$$

Поэтому

$$N(r) = \frac{r^\rho}{\rho} + O(\ln r). \tag{4.4}$$

Учитывая (4.3) и (4.4), находим

$$\varliminf_{r \to \infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{h'(re^{i\theta}, \rho)}{h(re^{i\theta}, \rho)} \right| d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \varliminf_{r \to \infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} \left| \frac{h'(re^{i\theta}, \rho)}{h(re^{i\theta}, \rho)} \right| d\theta = (\pi - \delta) \rho^2 |\operatorname{cosec} \pi\rho|.$$

Так как это последнее соотношение справедливо при любом $\delta > 0$, то

$$\varliminf_{r \to \infty} [N(r)]^{-1} \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{h'(re^{i\theta}, \rho)}{h(re^{i\theta}, \rho)} \right| d\theta \geqslant \pi\rho^2 |\operatorname{cosec} \pi\rho|.$$

Полученное неравенство показывает, что оценка (1.4) близка к точной. Действительно, из (1.4) находим

$$\varlimsup_{r\to\infty}\,[N(r)]^{-1}\,\frac{r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{h'(re^{i\theta},\rho)}{h(re^{i\theta},\rho)}\right|d\theta\leqslant 4{,}4\rho^2\,|\operatorname{cosec}\pi\rho|.$$

Выражаю глубокую благодарность И. В. Островскому за ценные замечания.

Харьковский государственный университет

Поступила 1 VII 1963

Վ. Պ. Պետրենկո

ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԼՈԳԱՐԻԹՄԱԿԱՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Հոդվածի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է։

Դիցուք $f(z)$-ը ρ կարգի և λ ստորին կարգի մերոմորֆ ֆունկցիա է։ Այն դեպքում

$$\varlimsup_{r\to\infty}\,[N(r,0)+N(r,\infty)]^{-1}\,\frac{r}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|d\theta\leqslant 4{,}4\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}\{x^2\,|\operatorname{cosec}\pi x|\}.$$

Այս թեորեմը λ-ի փոքր արժեքների դեպքում ուժեղացնում է [2]-ում և [3]-ում ստացված արդյունքը։

Որպես կիրառումներ ստացված են

$$\sum_{(a)}\delta(a)\leqslant 112{,}4\min_{\lambda\leqslant x\leqslant\rho}x^2\,|\operatorname{cosec}\pi x|,$$

$$\sum_{(a)}\sqrt{\delta(a)}\leqslant 10{,}6\min_{\lambda<x\leqslant\rho}x\sqrt{|\operatorname{cosec}\pi x|},$$

գնահատականները, որոնք ճիշտ են երկուսից ոչ պակաս դեֆեկտային արժեքներ ունեցող, ρ կարգի և λ ստորին կարգի ամեն մի մերոմորֆ ֆունկցիայի համար։ Այդ գնահատականները փոքր λ-ների համար ավելի ճշգրի են, քան [2], [3] և [7] աշխատություններում բերվածները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nevanlinna R.* Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris, 1929.
2. *Fuchs W. H. J.* A Theorem on the Nevanlinnas Deficiencies of Meromorphic Functions of Finite Order. Ann. of Math., **68**, № 2, 1958, 203—209.
3. *Островский И. В.* и *Казакова И. В.* Замечание о дефектах мероморфных функций малого порядка. Записки мех.-мат. фак. ХГУ и ХМО, **30**, 1963, 73—78.

4. *Kjellberg B.* On the Minimum Modulus of Entire Functions of Lower Order less than one. Math. Scand., **8**, 1960, 189—197.
5. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* On the Growth of Meromorphic Functions with Several Deficient Values. Trans. Amer. Math. Soc., **93**, № 2, 1959, 292—328.
6. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., 1960.
7. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* On the Deficiencies of Meromorphic Functions of Order less than one. Duke. Math. J., **27**, 1960, 233—240.
8. *Островский И. В.* К одной задаче из теории распределения значений, ДАН СССР, **151**, № 1, 1963, 34—37.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

П. О. Галфаян

Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника

В настоящей работе приводится решение смешанной плоской задачи теории упругости для прямоугольника, на одной кромке которого заданы перемещения, а на трех остальных—напряжения.

Функция напряжений рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье. Для определения коэффициентов разложений получены бесконечные системы линейных уравнений. Доказывается, что полученная система квазивполне регулярна и имеет ограниченные сверху свободные члены.

Частный случай этой задачи рассмотрен в статье [6]. Подобные задачи теории упругости для прямоугольника рассмотрены в работах [1—5].

В качестве примера решена задача изгиба консольной балки, когда изгибающая нагрузка приложена на конце балки $x=l$ и статически эквивалентна заданному грузу P. Решение задачи доведено до числовых результатов. Исследовано распределение нормальных и касательных напряжений вблизи места закрепления и вычислен прогиб конца консоли.

1. Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях и перемещениях.

Как известно [7], в плоской задаче теории упругости в случае отсутствия массовых сил функция напряжений Эри удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta^2\Phi=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0 \tag{1.1}$$

внутри прямоугольника $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant y\leqslant h$.

Напряжения через функцию Φ выражаются формулами

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\qquad \sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\qquad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}, \tag{1.2}$$

а перемещения определяются соотношениями [2]

$$u=\frac{1}{E}\left\{\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,dx-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\}-ay+b,$$
$$v=\frac{1}{E}\left\{\int\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dy-\nu\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\}+ax+c. \tag{1.3}$$

Здесь E—модуль упругости, ν—коэффициент Пуассона, a, b и c—постоянные, которые определяются при помощи контурных условий.

Рассмотрим плоское напряженное состояние прямоугольника, на контуре которого выполняются следующие условия:

$$\sigma_y(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\alpha_k x,\qquad \tau_{xy}(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\alpha_k x \tag{1.4}$$
$$(0<x<l)$$
$$\sigma_y(x,h)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos\alpha_k x,\qquad \tau_{xy}(x,h)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k\sin\alpha_k x \tag{1.5}$$

$$\sigma_x(l,y)=\sum_{k=1}^{\infty}e_k\sin\beta_k y,\qquad \tau_{xy}(l,y)=\frac{f_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}f_k\cos\beta_k y \tag{1.6}$$
$$(0<y<h)$$
$$u(0,y)=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\sin\beta_k y,\qquad v(0,y)=\frac{h_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}h_k\cos\beta_k y, \tag{1.7}$$

где

$$\alpha_k=(2k-1)\frac{\pi}{2l},\qquad \beta_k=\frac{k\pi}{h}, \tag{1.8}$$

l—длина прямоугольника, а h—высота.

Функцию напряжений $\Phi(x,y)$ ищем в виде [6]

$$\Phi(x,y)=Axy+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\operatorname{ch}\alpha_k y+B_k\operatorname{sh}\alpha_k y+$$
$$+\alpha_k y(C_k\operatorname{ch}\alpha_k y+D_k\operatorname{sh}\alpha_k y)]\cos\alpha_k x+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[E_k\operatorname{ch}\beta_k x+F_k\operatorname{sh}\beta_k x+\beta_k x(G_k\operatorname{ch}\beta_k x+H_k\operatorname{sh}\beta_k x)]\sin\beta_k y. \tag{1.9}$$

Используя граничные условия (1.4)—(1.7), для определения неизвестных коэффициентов a, b, c, A, A_k, B_k, E_k и F_k получаем соотношения

$$a=-\frac{\nu}{E}A,\quad b=0,\quad c=\frac{h_0}{2}+$$
$$+\frac{1+\nu}{Eh}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k-c_k}{\alpha_k^2}-\frac{2}{1+\nu}\left(C_k+D_k\operatorname{th}\frac{\alpha_k h}{2}\right)\operatorname{sh}\alpha_k h\right], \tag{1.10}$$

$$A = -\frac{f_0}{2} - \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{a_k - c_k}{\alpha_k}, \qquad A_k = -\frac{a_k}{\alpha_k^2}, \tag{1.11}$$

$$B_k = -\alpha_k h\,(D_k + C_k \operatorname{cth} \alpha_k h) + \frac{1}{\alpha_k^2}\left(a_k \operatorname{cth}\alpha_k h - \frac{c_k}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\right), \tag{1.12}$$

$$E_k = -G_k\left(\beta_k l + \frac{1-\nu}{1+\nu}\operatorname{th}\beta_k l\right) - H_k \beta_k l \operatorname{th}\beta_k l +$$

$$+\frac{1}{\beta_k^2}\left(\frac{E\beta_k}{1+\nu}\, g_k \operatorname{th}\beta_k l - \frac{e_k}{\operatorname{ch}\beta_k l}\right), \tag{1.13}$$

$$F_k = \frac{1-\nu}{1+\nu}\, G_k - \frac{E}{1+\nu}\,\frac{g_k}{\beta_k}. \tag{1.14}$$

Пользуясь этими значениями для определения неизвестных C_k, D_k, G_k и H_k, после некоторых преобразований получаем следующие четыре бесконечные системы линейных уравнений:

$$-(\operatorname{sh}\alpha_p h + \alpha_p h)\left(D_p + C_p \operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}(G_k \operatorname{sh}\beta_k l + H_k \operatorname{ch}\beta_k l) +$$

$$+\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{8}{\alpha_p l}\sum_{k=1,3,}^{\infty} G_k\,\frac{\beta_k^2(\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2)}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} +$$

$$+\frac{4}{l}\cdot\frac{(-1)^p}{\alpha_p}\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left[\frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu}Eg_k\right] +$$

$$+\frac{1}{\alpha_p^2}\left[b_p - d_p - (a_p + c_p)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}\right], \quad (p = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.15}$$

$$(\operatorname{sh}\alpha_p h - \alpha_p h)\left(D_p + C_p \operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\right) =$$

$$= \frac{8}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=2,4}^{\infty}\frac{\beta_k^3}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}(G_k \operatorname{sh}\beta_k l + H_k \operatorname{ch}\beta_k l) +$$

$$+\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{8}{\alpha_p l}\sum_{k=2,4,}^{\infty} G_k\,\frac{\beta_k^2(\alpha_p^2 - \nu\beta_k^2)}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} +$$

$$+\frac{4}{l}\cdot\frac{(-1)^p}{\alpha_p}\sum_{k=2,4,}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left[\frac{e_k}{\alpha_p} - \frac{(-1)^p}{1+\nu}Eg_k\right] +$$

$$+\frac{1}{\alpha_p^2}\left[b_p + d_p - (a_p - c_p)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2} + \frac{4}{\alpha_p l}\cdot A\right], \quad (p = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1.16}$$

$$\left(\operatorname{sh}\beta_p l+\beta_p l\cdot\lambda_p-\frac{2}{1+\nu}\right)(H_p+G_p\gamma_p)=$$

$$=\frac{4}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}\left[\alpha_k+\frac{(-1)^k}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{\beta_p}\right](C_k\operatorname{sh}\alpha_k h+$$

$$+D_k\operatorname{ch}\alpha_k h)+\frac{4}{h}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{(-1)^k\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}\left[\alpha_k+\frac{(-1)^k}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{\beta_p}\right]+$$

$$+\frac{2}{\beta_p h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-(-1)^p c_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[1-(-1)^k\frac{\alpha_k}{\beta_p}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_p^2}\left[e_p\mu_p-f_p+\frac{E\beta_p}{1+\nu}(h_p+g_p\lambda_p)\right] \tag{1.17}$$

$$\left(\operatorname{sh}\beta_p l-\beta_p l\cdot\mu_p+\frac{2}{1+\nu}\right)(H_p+G_p\delta_p)=$$

$$=\frac{4}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}\left[\alpha_k-\frac{(-1)^k}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{\beta_p}\right]\times$$

$$\times(C_k\operatorname{sh}\alpha_k h+D_k\operatorname{ch}\alpha_k h)+$$

$$+\frac{4}{h}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\frac{(-1)^k\alpha_k^2}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}\left[\alpha_k-\frac{(-1)^k}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{\beta_p}\right]-$$

$$-\frac{2}{\beta_p h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-(-1)^p c_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[1+(-1)^k\frac{\alpha_k}{\beta_p}\right]+$$

$$+\frac{1}{\beta_p^2}\left[e_p\lambda_p-f_p-\frac{E\beta_p}{1+\nu}(h_p+g_p\mu_p)\right], \tag{1.18}$$

где

$$\gamma_p=\frac{\operatorname{ch}\beta_p l+\beta_p l+\frac{1-\nu}{1+\nu}\lambda_p}{\operatorname{sh}\beta_p l+\beta_p l\cdot\lambda_p-\frac{2}{1+\nu}},\qquad \delta_p=\frac{\operatorname{ch}\beta_p l-\beta_p l-\frac{1-\nu}{1+\nu}\mu_p}{\operatorname{sh}\beta_p l-\beta_p l\cdot\mu_p+\frac{2}{1+\nu}}, \tag{1.19}$$

$$\lambda_p=\frac{\operatorname{sh}\beta_p l+1}{\operatorname{ch}\beta_p l},\qquad \mu_p=\frac{\operatorname{sh}\beta_p l-1}{\operatorname{ch}\beta_p l}. \tag{1.20}$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh}\beta_k x=\frac{2\beta_k}{l}\operatorname{ch}\beta_k l\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\alpha_p x}{\alpha_p^2+\beta_k^2},\qquad 1=\frac{2}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin\alpha_p x}{\alpha_p},$$

$$\operatorname{ch}\beta_k x=\frac{2\beta_k}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\alpha_p x}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\left[\operatorname{sh}\beta_k l+(-1)^{p+1}\frac{\alpha_p}{\beta_k}\right],$$

$$x\operatorname{sh}\beta_k x=\frac{2}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\alpha_p x}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\left[\operatorname{sh}\beta_k l+\beta_k l\cdot\operatorname{ch}\beta_k l-\right.$$
$$\left.-\frac{2\beta_k^2}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\left(\operatorname{sh}\beta_k l+(-1)^{p+1}\frac{\alpha_p}{\beta_k}\right)\right], \tag{1.21}$$

$$x\operatorname{ch}\beta_k x=\frac{2}{l}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\alpha_p x}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\left[\operatorname{ch}\beta_k l+\beta_k l\cdot\operatorname{sh}\beta_k l-\frac{2\beta_k^2}{\alpha_p^2+\beta_k^2}\operatorname{ch}\beta_k l\right],$$

а также аналогичные разложения для функций $\operatorname{sh}\alpha_k y$, $\operatorname{ch}\alpha_k y$, $y\operatorname{sh}\alpha_k y$ и $y\operatorname{ch}\alpha_k y$ по функциям $\{\cos\beta_k y\}$ на интервале $(0, h)$.

Введем новые неизвестные

$$\frac{(-1)^k\alpha_k^2}{h}(C_k\operatorname{sh}\alpha_k h+D_k\operatorname{ch}\alpha_k h)=X_k-Y_k,\quad \frac{(-1)^k\alpha_k^2}{h}D_k=X_k+Y_k,$$
$$\tag{1.22}$$
$$\frac{\beta_k^2}{l}(G_k\operatorname{sh}\beta_k l+H_k\operatorname{ch}\beta_k l)=Z_k-W_k,\quad \frac{\beta_k^2}{l}G_k=Z_k+W_k.$$

Тогда

$$D_p+C_p\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}=X_p\frac{(-1)^p}{\alpha_p^2}\cdot\frac{2h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2},$$

$$D_p+C_p\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}=-Y_p\frac{(-1)^p}{\alpha_p^2}\cdot\frac{2h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2},$$
$$\tag{1.23}$$
$$H_p+G_p\gamma_p=\frac{l}{\beta_p^2}[Z_p(\gamma_p-\mu_p)+W_p(\gamma_p-\lambda_p)],$$

$$H_p+G_p\delta_p=\frac{l}{\beta_p^2}[Z_p(\delta_p-\mu_p)+W_p(\delta_p-\lambda_p)].$$

Произведя замену неизвестных и решая уравнения (1.17) и (1.18) относительно Z_p и W_p, получаем следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$X_p=\sum_{k=1,3,}^{\infty}a_{pk}Z_k+\sum_{k=1,3,}^{\infty}b_{pk}W_k+m_p,$$

$$Y_p=\sum_{k=2,4,}^{\infty}c_{pk}Z_k+\sum_{k=2,4,}^{\infty}d_{pk}W_k+n_p,$$
$$(p=1,\ 2,\ 3,\cdots) \tag{1.24}$$
$$Z_p=\sum_{k=1}^{\infty}e_{pk}X_k+\sum_{k=1}^{\infty}f_{pk}Y_k+r_p,$$

$$W_p=\sum_{k=1}^{\infty}g_{pk}X_k+\sum_{k=1}^{\infty}h_{pk}Y_k+s_p,$$

где

$$a_{pk}=\frac{4\alpha_p^2}{h\zeta_p}\left[\beta_k-\frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$b_{pk}=-\frac{4\alpha_p^2}{h\zeta_p}\left[\beta_k+\frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},$$

$$c_{pk}=\frac{4\alpha_p^2}{h\eta_p}\left[\beta_k-\frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2},\tag{1.25}$$

$$d_{pk}=-\frac{4\alpha_p^2}{h\eta_p}\left[\beta_k+\frac{(-1)^p}{1+\nu}\cdot\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{\alpha_p}\right]\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2};$$

$$e_{pk}=\frac{4\beta_p^2}{l}\cdot\frac{[1-(-1)^p](M_p+N_p)}{M_p^2-N_pL_p}\left[\alpha_k+(-1)^k\frac{R_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$f_{pk}=\frac{4\beta_p^2}{l}\cdot\frac{[1+(-1)^p](M_p+N_p)}{M_p^2-N_pL_p}\left[\alpha_k+(-1)^k\frac{R_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$g_{pk}=-\frac{4\beta_p^2}{l}\cdot\frac{[1-(-1)^p](M_p+L_p)}{M_p^2-N_pL_p}\left[\alpha_k-(-1)^k\frac{Q_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2};\tag{1.26}$$

$$h_{pk}=-\frac{4\beta_p^2}{l}\cdot\frac{[1+(-1)^p](M_p+L_p)}{M_p^2-N_pL_p}\left[\alpha_k-(-1)^k\frac{Q_p}{\beta_p}\cdot\frac{\alpha_k^2-\nu\beta_p^2}{1+\nu}\right]\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2},$$

$$m_p=-\frac{2}{lh}\cdot\frac{\alpha_p}{\zeta_p}\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left[\frac{e_k}{\alpha_p}-\frac{(-1)^p}{1+\nu}Eg_k\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{2h\zeta_p}\left[b_p-d_p-(a_p+c_p)\operatorname{th}\frac{\alpha_ph}{2}\right],$$

$$n_p=-\frac{2}{lh}\cdot\frac{\alpha_p}{\eta_p}\sum_{k=2,4,}^{\infty}\frac{\beta_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2}\left[\frac{e_k}{\alpha_p}-\frac{(-1)^p}{1+\nu}Eg_k\right]+$$

$$+\frac{(-1)^{p+1}}{2h\eta_p}\left[b_p+d_p-(a_p-c_p)\operatorname{cth}\frac{\alpha_ph}{2}+\frac{4}{\alpha_pl}\cdot A\right],$$

$$r_p=\frac{M_p+N_p}{M_p^2-N_pL_p}\left\{\frac{2\beta_p}{lh}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-(-1)^p\cdot c_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[R_p-(-1)^k\frac{\alpha_k}{\beta_p}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{l}\left[-\frac{M_p\mu_p+N_p\lambda_p}{M_p+N_p}e_p-f_p+\frac{E\beta_p}{1+\nu}\left(R_ph_p+\frac{M_p\lambda_p-N_p\mu_p}{M_p+N_p}\cdot g_p\right)\right]\right\},\tag{1.27}$$

$$s_p=\frac{M_p+L_p}{M_p^2-N_pL_p}\left\{\frac{2\beta_p}{lh}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-(-1)^pc_k}{\alpha_k^2+\beta_p^2}\left[Q_p+(-1)^k\frac{\alpha_k}{\beta_p}\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{l}\left[\frac{M_p\lambda_p+L_p\mu_p}{M_p+L_p}e_p-f_p-\frac{E\beta_p}{1+\nu}\left(Q_ph_p+\frac{M_p\mu_p-L_p\lambda_p}{M_p+L_p}g_p\right)\right]\Bigg\},$$

$$(p=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

$$\zeta_p=\left(1+\frac{\alpha_ph}{\operatorname{sh}\alpha_ph}\right)\operatorname{th}\frac{\alpha_ph}{2},\qquad \eta_p=\left(1-\frac{\alpha_ph}{\operatorname{sh}\alpha_ph}\right)\operatorname{cth}\frac{\alpha_ph}{2},$$

$$R_p=\frac{M_p-N_p}{M_p+N_p},\qquad Q_p=\frac{M_p-L_p}{M_p+L_p},$$

$$M_p=\frac{4}{1+\nu}\operatorname{th}\beta_pl+\frac{2\beta_pl}{\operatorname{ch}^2\beta_pl},\tag{1.28}$$

$$N_p=\frac{3-\nu}{1+\nu}\lambda_p-\mu_p-\frac{2\beta_pl}{\operatorname{ch}\beta_pl}\operatorname{th}\beta_pl,$$

$$L_p=\frac{3-\nu}{1+\nu}\mu_p-\lambda_p+\frac{2\beta_pl}{\operatorname{ch}\beta_pl}\operatorname{th}\beta_pl.$$

2. Докажем квазивполне регулярность бесконечной системы (1.24).

Рассмотрим уравнения системы (1.24) отдельно при четном и нечетном p. Для суммы абсолютных значений коэффициентов уравнений первой бесконечной системы (1.24) при p нечетном будем иметь

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|=\frac{4\alpha_p^2}{h\zeta_p}\left\{\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}\left|\beta_k+\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{(1+\nu)\alpha_p}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}\left|\beta_k-\frac{\alpha_p^2-\nu\beta_k^2}{(1+\nu)\alpha_p}\right|\right\}=$$

$$=\frac{4x_p^2}{\pi\zeta_p(x_p)}\left\{\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left|k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left|k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right|\right\},\tag{2.1}$$

где

$$x_p=\frac{\alpha_ph}{\pi}=(2p-1)\frac{h}{2l},\qquad \zeta_p(x_p)=\left(1+\frac{x_p\pi}{\operatorname{sh}x_p\pi}\right)\operatorname{th}\frac{x_p\pi}{2},$$

$$(p=1,\ 3,\cdots)\tag{2.2}$$

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|=\frac{4x_p^2}{\pi\zeta_p(x_p)}\left\{\sum_{k=1,3.}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]-\right.$$

$$-\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]-\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]+$$

$$+\sum_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]\Bigg\}\cdot \tag{2.3}$$

Здесь k_p^0 и k_p^1—нечетные числа, определяемые из следующих неравенств

$$\begin{aligned} &k+\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{x_p^2-\nu k^2}{x_p}\geqslant 0 \quad \text{при всех нечетных } k\leqslant k_p^0,\\ &k-\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{x_p^2-\nu k^2}{x_p}\leqslant 0 \quad \text{при всех нечетных } k\leqslant k_p^1. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из формул (2.4) получим

$$k_p^0\leqslant \nu_0\cdot x_p, \quad k_p^1\leqslant \nu_1\cdot x_p, \tag{2.5}$$

где

$$\nu_0=\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu}+(1+\nu)}{2\nu}, \qquad \nu_1=\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu}-(1+\nu)}{2\nu}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$k_p^0\geqslant k_p^1. \tag{2.7}$$

В силу (2.7) для выражения (2.3) будем иметь

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|=\frac{4x_p^2}{\pi\zeta_p(x_p)}\Bigg\{\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]+$$

$$+\sum_{k_p^1+2}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]-\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k+\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)x_p}\right]-$$

$$-\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]+\sum_{k_p^1+2}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]+$$

$$+\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}\left[k-\frac{x_p^2-\nu k^2}{(1+\nu)\,x_p}\right]\Bigg\}=$$

$$=\frac{8x_p^2}{\pi\zeta_p(x_p)}\Bigg\{\sum_{k_p^1+2}^{k_p^0}\frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}+\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}+$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{x_p}\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2}-\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}-$$

$$-\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{x_p}\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2}\Bigg\}=$$

$$=\frac{8x_p^2}{\pi\zeta_p(x_p)}\left\{\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}+J_1(x_p,\nu)\right\}=\varphi_1(x_p,\nu), \qquad (2.8)$$

где

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}\frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}\leqslant S_1(x_p)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x_p^2)^2}+\dfrac{21+x_p^2}{4(9+x_p^2)^2} & \text{при } x_p<3\\[2mm] \dfrac{3+x_p^2}{4(1+x_p^2)^2}+\dfrac{1}{8x_p^3} & \text{при } x_p>3,\end{cases} \qquad (2.9)$$

$$J_1(x_p,\nu)=\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k=1,3,}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}-\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}+$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{x_p}\sum_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2}-\frac{\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{x_p}\sum_{k=1,3,}^{k_p^0}\frac{k^2}{(k^2+x_p^2)^2}-$$

$$-\sum_{k=1,3,}^{k_p^1}\frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}-\sum_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{k}{(k^2+x_p^2)^2}. \qquad (2.10)$$

Оценки (2.9) получаются при помощи формул для приближенного интегрирования [2].

Оценим значение функции $J_1(x_p,\nu)$. Имеем

$$\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k=1,3,}^{k_p^0}\frac{1}{(k^2+x_p^2)^2}=\frac{x_p}{1+\nu}\sum_{k=1}^{\frac{k_p^0+1}{2}}\frac{1}{[(2k-1)^2+x_p^2]^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\frac{x_p}{1+\nu}\int_0^{k_p^0}\frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2}. \qquad (2.11)$$

Аналогично оценивая остальные слагаемые правой части (2.10), будем иметь

$$J_1(x_p,\nu)\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{x_p}{1+\nu}\int_0^{k_p^0}\frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2}-\frac{x_p}{1+\nu}\int_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+x_p^2)^2}+\right.$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\frac{1}{x_p}\int_{k_p^1+2}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+x_p^2)^2}-\frac{\nu}{1+\nu}\frac{1}{x_p}\int_1^{k_p^0}\frac{x^2dx}{(x^2+x_p^2)^2}-$$

$$-\int\limits_{1}^{k_p^1}\frac{xdx}{(x^2+x_p^2)^2}-\int\limits_{k_p^0+2}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+x_p^2)^2}+\frac{1+2\nu}{2(1+\nu)}\cdot\frac{1}{x_p^3}\Bigg\}=$$

$$=\frac{1}{4x_p^2}\Bigg\{\frac{\nu_0}{1+\nu_0^2}-\frac{x_p^2}{x_p^2+(2+\nu_0\cdot x_p)^2}+\frac{1}{1+\nu_1^2}+$$

$$+\frac{(2+\nu_1\cdot x_p)x_p}{x_p^2+(2+\nu_1\cdot x_p)^2}-\frac{x_p^2}{1+x_p^2}\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{x_p}\right)+\frac{1+2\nu}{1+\nu}\cdot\frac{1}{x_p}+$$

$$+\frac{\nu}{1+\nu}\operatorname{arctg}\frac{1}{x_p}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\left[\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\left(\nu_1+\frac{2}{x_p}\right)-\frac{\pi}{2}\right]\Bigg\}. \qquad (2.12)$$

Из (2.2), (2.8), (2.9) и (2.12) получаем

$$\lim_{x_p\to\infty}\varphi_1(x_p,\nu)=\frac{2}{\pi}+f_1(\nu), \qquad (2.13)$$

где

$$f_1(\nu)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\nu_0-1}{1+\nu_0^2}+\frac{1+\nu_1}{1+\nu_1^2}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\nu_1-\frac{\pi}{2}\right)-1\right]. \qquad (2.14)$$

Расчеты показывают, что

$$f_1(0)=0{,}5, \quad f_1(0{,}5)=0{,}3. \qquad (2.15)$$

Для производной функции $f_1(\nu)$ имеем

$$f_1'(\nu)=-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(1+\nu)^2}\left(\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\nu_1-\frac{\pi}{2}\right). \qquad (2.16)$$

Обозначим

$$z_0=\operatorname{arctg}\nu_0+\operatorname{arctg}\nu_1. \qquad (2.17)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}z_0=\frac{\nu_0+\nu_1}{1-\nu_0\cdot\nu_1}=-\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu}}{1-\nu}. \qquad (2.18)$$

Следовательно,

$$z_0>\frac{\pi}{2}. \qquad (2.19)$$

На основании (2.16) и (2.19) получаем

$$f_1'(\nu)<0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant\nu\leqslant 0{,}5. \qquad (2.20)$$

Из отрицательности $f_1'(\nu)$ следует, что функция $f_1(\nu)$ монотонно убывает, а из (2.15) получаем, что она меняется в пределах от 0,5 до 0,3. Поэтому функция $f_1(\nu)$ получает свое максимальное значение при $\nu=0$. Следовательно,

$$\sum_{k=1,3,}^{\infty}|a_{pk}|+\sum_{k=1,3,}^{\infty}|b_{pk}|\leqslant\frac{2}{\pi}+f_1^{\max}(\nu)\leqslant 1{,}1366. \qquad (2.21)$$

Аналогичным образом для второго уравнения системы (1.24) получим

$$\sum_{k=2,4,}^{\infty} |c_{pk}| + \sum_{k=2,4,}^{\infty} |d_{pk}| = \frac{8x_p^2}{\pi\eta_p(x_p)} \left\{ \sum_{k=2,4,}^{\infty} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2} + J_2(x_p, \nu) \right\} =$$

$$= \varphi_2(x_p, \nu), \tag{2.22}$$

где

$$\eta_p(x_p) = \left(1 - \frac{x_p\pi}{\operatorname{sh} x_p\pi}\right) \operatorname{cth} \frac{x_p\pi}{2}, \tag{2.23}$$

$$\sum_{k=2,4,}^{\infty} \frac{k}{(k^2+x_p^2)^2} \leqslant S_2(x_p) = \begin{cases} \dfrac{2}{(4+x_p^2)^2} + \dfrac{32+x_p^2}{4(16+x_p^2)^2} & \text{при } x_p \leqslant 4 \\[2ex] \dfrac{8+x_p^2}{4(4+x_p^2)^2} + \dfrac{1}{8x_p^3} & \text{при } x_p > 4, \end{cases} \tag{2.24}$$

$$J_2(x_p, \nu) \leqslant \frac{1}{4x_p^2} \left\{ \frac{\nu_0}{1+\nu_0^2} - \frac{x_p^2}{x_p^2+(2+\nu_0 x_p)^2} + \frac{1}{1+\nu_1^2} + \right.$$

$$+ \frac{(2+\nu_1 x_p)\, x_p}{x_p^2+(2+\nu_1 x_p)^2} - \frac{x_p^2}{4+x_p^2}\left(1 + \frac{2\nu}{1+\nu}\, \frac{1}{x_p}\right) + \frac{1+2\nu}{1+\nu}\, \frac{1}{x_p} +$$

$$\left. + \frac{\nu}{1+\nu} \operatorname{arctg} \frac{2}{x_p} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\left[\operatorname{arctg}\nu_0 + \operatorname{arctg}\left(\nu_1 + \frac{2}{x_p}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\right\}. \tag{2.25}$$

Из (2.22)—(2.25) и (2.13) получаем

$$\lim_{x_p\to\infty} \varphi_2(x_p, \nu) = \lim_{x_p\to\infty} \varphi_1(x_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_1(\nu). \tag{2.26}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2,4,}^{\infty} |c_{pk}| + \sum_{k=2,4,}^{\infty} |d_{pk}| \leqslant \frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \leqslant 1{,}1366. \tag{2.27}$$

Для третьего уравнения системы (1.24) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| = \frac{8\beta_p^2}{l} |D^*| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2} \left| \alpha_k + (-1)^k \frac{|R_p|}{\beta_p}\, \frac{\alpha_k^2 - \nu\beta_p^2}{1+\nu} \right| =$$

$$= \frac{16\, y_p^2}{\pi} |D^*| \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{1}{(n^2+y_p^2)^2} \left| n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{|R_p|}{y_p}\, \frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu} \right| =$$

$$= \frac{16\, y_p^2}{\pi} |D^*| \left\{ \sum_{n=1,5,9,}^{\infty} \frac{1}{(n^2+y_p^2)^2} \left| n - \frac{|R_p|}{y_p}\, \frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=3,7,11,}^{\infty} \frac{1}{(n^2+y_p^2)^2} \left| n + \frac{|R_p|}{y}\, \frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu} \right| \right\}. \tag{2.28}$$

где

$$D^{*}=\frac{M_p(y_p)+N_p(y_p)}{M_p^2(y_p)-N_p(y_p)L_p(y_p)}, \qquad y_p=\frac{2\beta_p l}{\pi}=2p\frac{l}{h}, \quad (p=1,\ 3,\cdots). \tag{2.29}$$

Как и в случае первого уравнения системы (1.24), освобождаемся от абсолютных значений в правой части выражения (2.28)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e_{pk}|=\frac{16\ y_p^2}{\pi}|D^{*}|\left\{\sum_{n=1,5,9,}^{n_p^0}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n-\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)-\right.$$

$$-\sum_{n_p^0+4}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n-\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)-$$

$$-\sum_{n=3,7,11}^{n_p^1}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2)}{1+\nu}\right)+$$

$$\left.+\sum_{n_p^1+4}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)\right\}, \tag{2.30}$$

где n_p^0 и n_p^1 — нечетные числа, определяемые из следующих неравенств:

$$n-\frac{|R_p|}{y_p}\cdot\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\geqslant 0 \quad \text{при всех } n\leqslant n_p^0,$$

$$n+\frac{|R_p|}{y_p}\cdot\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\leqslant 0 \quad \text{при всех } n\leqslant n_p^1. \tag{2.31}$$

Из формул (2.31) получим

$$n_p^0\leqslant\bar{\nu}_0\cdot y_p, \qquad n_p^1\leqslant\bar{\nu}_1\cdot y_p, \tag{2.32}$$

где

$$\bar{\nu}_0=\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu R_p^2}+(1+\nu)}{2|R_p|}, \quad \bar{\nu}_1=\frac{\sqrt{(1+\nu)^2+4\nu R_p^2}-(1+\nu)}{2|R_p|}. \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) легко заметить, что

$$n_p^0\geqslant n_p^1. \tag{2.34}$$

В силу (2.34) для выражения (2.30) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e_{pk}|=\frac{16y_p^2}{\pi}|D^{*}|\left\{\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)-\right.$$

$$-2\sum_{n=1,3,}^{n_p^1}\frac{1}{(n^2+y_o^2)^2}\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\,\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)+$$

$$+2\sum_{n=1,5,9,}^{n_p^0}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\left(n-\frac{|R_p|}{y_p}\frac{(n^2-\nu y_p^2)}{1+\nu}\right)-\sum_{n=1,5,9,}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\times$$

$$\times\left(n-\frac{|R_p|}{y_p}\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)+2\sum_{n=1,5,9,}^{n_p^1}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\times$$

$$\times\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)-\sum_{n=1,5,9,}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\times$$

$$\times\left(n+\frac{|R_p|}{y_p}\frac{n^2-\nu y_p^2}{1+\nu}\right)\Bigg\}=$$

$$=\frac{16y_p^2}{\pi}|D^*|\left\{\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{n}{(n^2+y_p^2)^2}-\frac{\nu}{1+\nu}|R_p|\,y_p\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+\nu}\frac{|R_p|}{y_p}\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2+y_p^2)^2}+J_2(y_p,\nu)\right\}=\Phi_1(y_p,\nu), \qquad (2.35)$$

где

$$\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}=\frac{\pi}{8y_p^3}\left(\operatorname{th}\frac{y_p\pi}{2}-\frac{y_p\pi}{2}\operatorname{sch}^2\frac{y_p\pi}{2}\right), \qquad (2.36)$$

$$\sum_{n=1,3,}^{\infty}\frac{n^2}{(n^2+y_p^2)^2}=\frac{\pi}{8y_p}\left(\operatorname{th}\frac{y_p\pi}{2}+\frac{y_p\pi}{2}\operatorname{sch}^2\frac{y_p\pi}{2}\right), \qquad (2.37)$$

$$J_2(y_p,\nu)=2\left\{\frac{\nu}{1+\nu}|R_p|\,y_p\left[\sum_{n=3,7,}^{n_p^1}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}+\sum_{n=1,5,9,}^{n_p^0}\frac{1}{(n^2+y_p^2)^2}\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{|R_p|}{y_p}\left[\sum_{n=3,7,}^{n_p^1}\frac{n^2}{(n^2+y_p^2)^2}+\sum_{n=1,5,9,}^{n_p^0}\frac{n^2}{(n^2+y_p^2)^2}\right]-$$

$$\left.-\sum_{n=3,7,}^{n_p^1}\frac{n}{(n^2+y_p^2)^2}-\sum_{n_p^0+4}^{\infty}\frac{n}{(n^2+y_p^2)^2}\right\}<$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left\{\frac{\nu}{1+\nu}|R_p|\,y_p\left[\int_0^{n_p^1}\frac{dy}{(y^2+y_p^2)^2}+\int_0^{n_p^0}\frac{dy}{(y^2+y_p^2)^2}\right]-\right.$$

$$-\frac{1}{1+\nu}\frac{|R_p|}{y_p}\left[\int_1^{n_p^1}\frac{y^2dy}{(y^2+y_p^2)^2}+\int_1^{n_p^0}\frac{y^2dy}{(y^2+y_p^2)^2}\right]-$$

$$
-\int_{1}^{n_p^1}\frac{y\,dy}{(y^2+y_p^2)^2}-\int_{n_p^0+4}^{\infty}\frac{y\,dy}{(y^2+y_p^2)^2}+\frac{1}{y_p^3}\left(1+\frac{|R_p|}{1+\nu}\right)\Bigg\}=
$$

$$
=\frac{1}{4y_p^2}\Bigg[\,|R_p|\left(\frac{\bar\nu_0}{1+\bar\nu_0^2}+\frac{\bar\nu_1}{1+\bar\nu_1^2}\right)+\frac{1}{1+\nu_1^2}-\frac{y_p^2}{y_p^2+(4+\bar\nu_0 y_p)^2}-
$$

$$
-\frac{y_p^2}{1+y_p^2}\left(1+\frac{2}{1+\nu}\frac{|R_p|}{y_p}\right)+\frac{2}{y_p}\left(1+\frac{|R_p|}{1+\nu}\right)+\frac{2}{1+\nu}|R_p|\times
$$

$$
\times\operatorname{arctg}\frac{1}{y_p}-|R_p|\frac{1-\nu}{1+\nu}(\operatorname{arctg}\bar\nu_0+\operatorname{arctg}\bar\nu_1)\Bigg]. \qquad (2.3
$$

Из (1.20), (1.28), (2.9), (2.29) и (2.35)—(2.38) получим

$$
\lim_{y_p\to\infty}\psi_1(y_p,\nu)=\frac{2}{\pi}+f_2(\nu), \qquad (2.3
$$

где

$$
f_2(\nu)=\frac{1-\nu}{3-\nu}+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1+\nu}{3-\nu}\left(\frac{\tilde\nu_0}{1+\tilde\nu_0^2}+\frac{\tilde\nu_1}{1+\tilde\nu_1^2}\right)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{1+\tilde\nu_1^2}-\frac{1}{1+\tilde\nu_0^2}-1-\frac{1-\nu}{3-\nu}(\operatorname{arctg}\tilde\nu_0+\operatorname{arctg}\tilde\nu_1)\right], \qquad (2.4
$$

$$
\tilde\nu_0=\lim_{y_p\to\infty}\bar\nu_0=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}+(3-\nu)\right],
$$

$$
\tilde\nu_1=\lim_{y_p\to\infty}\bar\nu_1=\frac{1}{2}\left[\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}-(3-\nu)\right]. \qquad (2.4
$$

Расчеты показывают, что

$$
f_2(0)=0{,}0680, \qquad f_2(0{,}5)=0{,}1169. \qquad (2.4
$$

Для производной функции $f_2(\nu)$ имеем

$$
f_2'(\nu)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(3-\nu)^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{1-\nu}+\frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}-\frac{\pi}{2}\right. \qquad (2.4
$$

Имеем

$$
\frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}>\operatorname{arctg}\frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}. \quad (0\leqslant\nu\leqslant0{,}5 \qquad (2.4
$$

Значит

$$
\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{1-\nu}+\frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}>\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{1-\nu}
$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}. \tag{2.45}$$

Обозначим

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{1-\nu} + \operatorname{arctg} \frac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}. \tag{2.46}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} z_1 = \frac{\dfrac{\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{1-\nu} + \dfrac{(1+\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{5-2\nu+\nu^2}}{1-\dfrac{(1+\nu)(9-2\nu+\nu^2)}{(1-\nu)(5-2\nu+\nu^2)}} =$$

$$= -\frac{(3-\nu)\sqrt{(3-\nu)^2+4\nu}}{2(1-\nu^2)+7\nu+\nu^3}. \tag{2.47}$$

Следовательно,

$$z_1 > \frac{\pi}{2}. \tag{2.48}$$

На основании (2.43), (2.45) и (2.48) получаем

$$f_2'(\nu) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5. \tag{2.49}$$

Из положительности $f_2'(\nu)$ следует, что функция $f_2(\nu)$ монотонно возрастает, а из (2.42) получаем, что она меняется в пределах от 0,068 до 0,1169. Поэтому функция $f_2(\nu)$ получает свое максимальное значение при $\nu = 0{,}5$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| \leqslant \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \leqslant 0{,}7535. \tag{2.50}$$

Аналогичным образом для четвертого уравнения системы (1.24) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| = \frac{16y_p^2}{\pi} |D^{**}| \left\{ \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{n}{(n^2+y_p^2)^2} - \frac{\nu}{1+\nu} |Q_p| y_p \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{1}{(n^2+y_p^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+\nu} \frac{|Q_p|}{y_p} \sum_{n=1,3,}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+y_p^2)^2} + J_4(y_p, \nu) \right\} = \psi_2(y_p, \nu), \tag{2.51}$$

где

$$D^{**} = \frac{M_p(y_p) + L_p(y_p)}{M_p^2(y_p) - N_p(y_p) L_p(y_p)}, \tag{2.52}$$

$$J_4(y_p, \nu) \leqslant \frac{1}{4y_p^2} \left\{ |Q_p| \left(\frac{\bar{\bar{\nu}}_0}{1+\bar{\bar{\nu}}_0^2} + \frac{\bar{\bar{\nu}}_1}{1+\bar{\bar{\nu}}_1^2} \right) + \frac{1}{1+\bar{\bar{\nu}}_1^2} - \frac{y_p^2}{y_p^2+(4+\bar{\bar{\nu}}_0 y_p)^2} - \right.$$

$$- \frac{y_p^2}{1+y_p^2} \left(1 + \frac{2}{1+\nu} \frac{|Q_p|}{y_p} \right) + \frac{2}{y_p} \left(1 + \frac{|Q_p|}{1+\nu} \right) + \frac{2}{1+\nu} |Q_p| \operatorname{arctg} \frac{1}{y_p} -$$

$$- |Q_p| \frac{1-\nu}{1+\nu} (\operatorname{arctg} \bar{\bar{\nu}}_0 + \operatorname{arctg} \bar{\bar{\nu}}_1) \Big\}, \tag{2.53}$$

$$\bar{\bar{\nu}}_0 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu Q_p^2} + (1+\nu)}{2|Q_p|}, \quad \bar{\bar{\nu}}_1 = \frac{\sqrt{(1+\nu)^2 + 4\nu Q_p^2} - (1+\nu)}{2|Q_p|}. \tag{2.54}$$

Из (1.20), (1.28), (2.9), (2.35)—(2.37) и (2.51)—(2.54) получим

$$\lim_{y_p \to \infty} \psi_2(y_p, \nu) = \lim_{y_p \to \infty} \psi_1(y_p, \nu) = \frac{2}{\pi} + f_2(\nu). \tag{2.55}$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| \leqslant \frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \leqslant 0{,}7535. \tag{2.56}$$

Если подставим X_p и Y_p из первого и второго уравнений (1.24) в третье и четвертое, получим бесконечную систему относительно неизвестных Z_p и W_p, для суммы абсолютных значений коэффициентов которой в рассматриваемом случае, т. е. при p нечетном, согласно (2.21), (2.27), (2.50) и (2.56), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e_{pk}| \left(\sum_{n=1,3,}^{\infty} |a_{kn}| + \sum_{n=1,3,}^{\infty} |b_{kn}| \right) \leqslant \left[\frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \right] \left[\frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \right] \leqslant$$
$$\leqslant 0{,}7535 \cdot 1{,}1366 = 1 - \theta, \tag{2.57}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{pk}| \left(\sum_{n=1,3,}^{\infty} |a_{kn}| + \sum_{n=1,3,}^{\infty} |b_{kn}| \right) \leqslant \left[\frac{2}{\pi} + f_2^{\max}(\nu) \right] \left[\frac{2}{\pi} + f_1^{\max}(\nu) \right] \leqslant$$
$$\leqslant 0{,}7535 \cdot 1{,}1366 = 1 - \theta, \tag{2.58}$$

где

$$0 < \theta = 0{,}1436 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5. \tag{2.59}$$

Аналогичные оценки получим для сумм коэффициентов бесконечной системы для X_p и Y_p, получаемой из (1.24) исключением Z_p и W_p.

Точно такие же оценки получаются при p четном.

Таким образом, на основании (2.57)—(2.59) бесконечная система (1.24) при произвольном отношении l и h и любом возможном значении коэффициента Пуассона квазивполне регулярна [8]. Как видно из (1.27), свободные члены бесконечной системы (1.24) имеют порядок коэффициентов Фурье разложений (1.4)—(1.7). Следовательно, они ограничены сверху и имеют порядок не ниже, чем p^{-1}, если внешняя нагрузка и первые производные перемещений $u(0, y)$ и $v(0, y)$ в данном интервале кусочно-непрерывны.

Квазивполне регулярность бесконечной системы (1.24) вместе с ограниченностью свободных членов (1.27) позволяет определить искомые коэффициенты разложения $\Phi(x, y)$ (1.9) с любой степенью точности [8]. А при помощи этих оценок определяются верхняя и нижняя границы для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и перемещений u и v.

3. В качестве численного примера рассмотрим изгиб консольной балки, когда нагрузка приложена на конце балки $x=l$ по следующему закону

$$\tau_{xy}(l, y) = qy(y-h), \quad (0 \leqslant y \leqslant h) \tag{3.1}$$

где $q=\text{const}$.

Пользуясь разложениями (1.4)—(1.7), имеем

$$a_p = b_p' = c_p = d_p = e_p = g_p = h_p = 0, \quad (p = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.2}$$

$$f_0 = -2\frac{P}{h}, \quad f_p = \frac{24}{p^2\pi^2}\cdot\frac{P}{h}, \quad (p = 2, 4, 6, \cdots), \tag{3.3}$$

где

$$P = -\int_0^h \tau_{xy}(l, y)\,dy = -\int_0^h qy(y-h)\,dy = \frac{qh^3}{6}. \tag{3.4}$$

Для коэффициента Пуассона материала и размеров балки принимаем

$$\nu = 0{,}3, \quad l = 5h. \tag{3.5}$$

На основании (1.2), (1.3), (1.9)—(1.14), (1.22), (1.23) и (3.2)—(3.5) для напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и перемещения v будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Big\{(X_k+Y_k)\Big[2\operatorname{sh}\alpha_k(h-y) - \alpha_k y \operatorname{ch}\alpha_k(h-y) +$$
$$+\alpha_k h\frac{\operatorname{sh}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Big] + (X_k - Y_k)\left[(2-\alpha_k h\cdot\operatorname{cth}\alpha_k h)\operatorname{sh}\alpha_k y +\right.$$
$$\left.+\alpha_k y\cdot\operatorname{ch}\alpha_k y\right]\Big\}\cos\alpha_k x + l\sum_{k=1}^{\infty}(Z_k+W_k)\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \beta_k x\right)\times$$
$$\times(\operatorname{ch}\beta_k x - \operatorname{sh}\beta_k x)\sin\beta_k y, \tag{3.6}$$

$$\sigma_y(x, y) = h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Big\{(X_k+Y_k)\Big[\alpha_k y\cdot\operatorname{ch}\alpha_k(h-y) - \alpha_k h\frac{\operatorname{sh}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Big] +$$
$$+(X_k - Y_k)\left[\alpha_k h\cdot\operatorname{cth}\alpha_k h\cdot\operatorname{sh}\alpha_k y - \alpha_k y\cdot\operatorname{ch}\alpha_k y\right]\Big\}\cos\alpha_k x -$$
$$-l\sum_{k=1}^{\infty}(Z_k+W_k)\left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - \beta_k x\right)(\operatorname{ch}\beta_k x - \operatorname{sh}\beta_k x)\sin\beta_k y, \tag{3.7}$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{P}{h} + h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Big\{(X_k+Y_k)\Big[\operatorname{ch}\alpha_k(h-y) -$$

$$-\alpha_k y\cdot \operatorname{sh}\alpha_k(h-y)-\alpha_k h\frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Bigg]-$$

$$-(X_k-Y_k)\left[(1-\alpha_k h\cdot\operatorname{cth}\alpha_k h)\operatorname{ch}\alpha_k y+\alpha_k y\operatorname{sh}\alpha_k y\right]\Big\}\sin\alpha_k x-$$

$$-l\sum_{k=1}^{\infty}(Z_k+W_k)\left(\frac{2}{1+\nu}-\beta_k x\right)(\operatorname{ch}\beta_k x-\operatorname{sh}\beta_k x)\cos\beta_k y, \qquad (3.8)$$

$$v(x,y)=\frac{1+\nu}{E}h\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k\cdot\operatorname{sh}\alpha_k h}\Bigg\{(X_k+Y_k)\Bigg[\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\operatorname{ch}\alpha_k(h-y)+$$

$$+\alpha_k y\cdot\operatorname{sh}\alpha_k(h-y)+\alpha_k h\frac{\operatorname{ch}\alpha_k y}{\operatorname{sh}\alpha_k h}\Bigg]+$$

$$+(X_k-Y_k)\left[\alpha_k y\cdot\operatorname{sh}\alpha_k y-\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}+\alpha_k h\cdot\operatorname{cth}\alpha_k h\right)\operatorname{ch}\alpha_k y\right]\Bigg\}\cos\alpha_k x+$$

$$+\frac{1+\nu}{E}l\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k+W_k}{\beta_k}\left(\frac{3-\nu}{1+\nu}-\beta_k x\right)(\operatorname{ch}\beta_k x-\operatorname{sh}\beta_k x)\cos\beta_k y+$$

$$+\frac{4}{E}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha_k^2}Y_k-2\nu\frac{P}{E}\frac{x}{h}. \qquad (3.9)$$

Из (3.9) для прогиба правого конца изогнутой оси балки получаем

$$v\left(l,\frac{h}{2}\right)=\frac{16l^2}{E\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}Y_k-2\nu\frac{P}{E}\frac{l}{h}. \qquad (3.10)$$

Пользуясь теорией квазивполне регулярных систем линейных уравнений [8], получим следующие оценки для неизвестных

$$0{,}00087\frac{P}{h^2}\leqslant X_1\leqslant 0{,}00101\frac{P}{h^2} \qquad 12{,}519\frac{P}{h^2}\leqslant Y_1\leqslant 12{,}520\frac{P}{h^2}$$

$$-0{,}00022\frac{P}{h^2}\leqslant X_2\leqslant -0{,}00004\frac{P}{h^2} \qquad -1{,}3597\frac{P}{h^2}\leqslant Y_2\leqslant -1{,}3554\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}00195\frac{P}{h^2}\leqslant X_3\leqslant 0{,}00243\frac{P}{h^2} \qquad 0{,}51805\frac{P}{h^2}\leqslant Y_3\leqslant 0{,}52496\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}00030\frac{P}{h^2}\leqslant X_4\leqslant 0{,}00080\frac{P}{h^2} \qquad -0{,}25137\frac{P}{h^2}\leqslant Y_4\leqslant -0{,}24208\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}00251\frac{P}{h^2}\leqslant X_k\leqslant 0{,}00446\frac{P}{h^2} \qquad 0{,}14540\frac{P}{h^2}\leqslant Y_k\leqslant 0{,}21563\frac{P}{h^2}$$

$$(k\geqslant 5) \qquad\qquad (k\geqslant 5)$$

$$(3.11)$$

$$0{,}00129\,\frac{P}{h^2} \leqslant Z_1 \leqslant 0{,}00219\,\frac{P}{h^2} \qquad -0{,}00214\,\frac{P}{h^2} \leqslant W_1 \leqslant -0{,}00124\,\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}28107\,\frac{P}{h^2} \leqslant Z_2 \leqslant 0{,}32181\,\frac{P}{h^2} \qquad 0{,}07779\,\frac{P}{h^2} \leqslant W_2 \leqslant 0{,}11775\,\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}00160\,\frac{P}{h^2} \leqslant Z_3 \leqslant 0{,}00280\,\frac{P}{h^2} \qquad -0{,}00270\,\frac{P}{h^2} \leqslant W_3 \leqslant -0{,}00152\,\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}19279\,\frac{P}{h^2} \leqslant Z_4 \leqslant 0{,}23676\,\frac{P}{h^2} \qquad -0{,}03044\,\frac{P}{h^2} \leqslant W_4 \leqslant 0{,}01309\,\frac{P}{h^2}$$

$$0{,}00262\,\frac{P}{h^2} \leqslant Z_k \leqslant 0{,}00263\,\frac{P}{h^2} \qquad -0{,}06692\,\frac{P}{h^2} \leqslant W_k \leqslant -0{,}06180\,\frac{P}{h^2}\cdot$$

$$(k \geqslant 5)$$

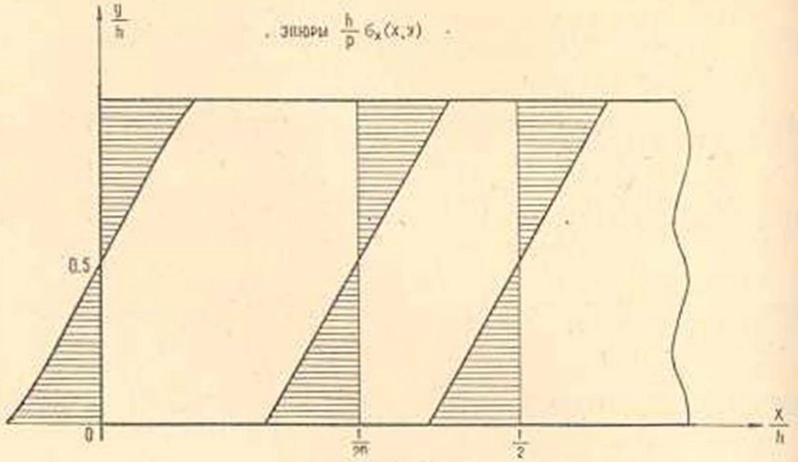
Подставив коэффициенты X_k, Y_k, Z_k и W_k из (3.11) в полученные выражения (3.6)—(3.10), определим значения напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} в пяти сечениях вблизи места закрепления $x=0$ и прогиб правого конца $x=l$. Эти значения напряжений приведены в таблицах 1—3. Максимальные расхождения в значениях напряжений в сечениях $x=\frac{h}{20}, \frac{h}{10}, \frac{h}{5}, \frac{h}{2}$ с избытком и недостатком, вычисленных при сохранении четырех первых членов рядов с помощью оценок (3.11), не превосходят 7%. Оценки напряжений в самой заделке затруднительны. Картина изменения напряжений иллюстрирована на графиках 1—3.

Как видно из эпюры τ_{xy} (фиг. 2), касательные напряжения по мере приближения к заделке отклоняются от параболического закона распределения по высоте.

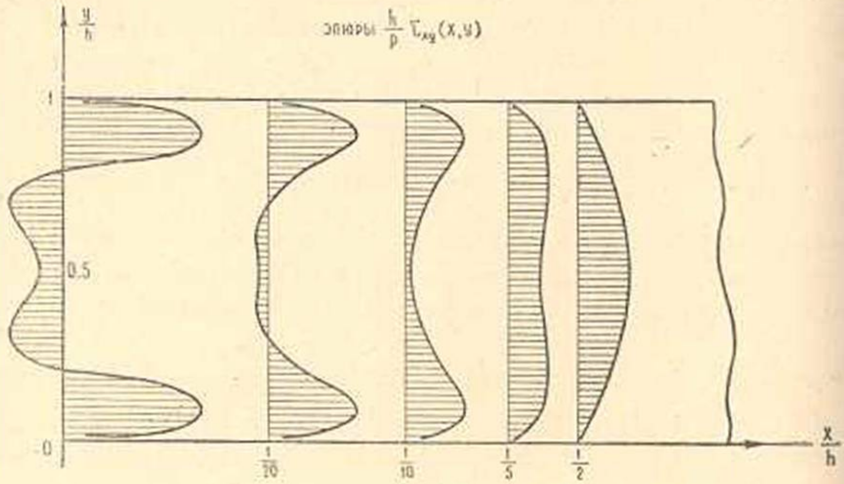
Таблица 1

Значения $\frac{h}{P}\,\sigma_x(x, y)$.

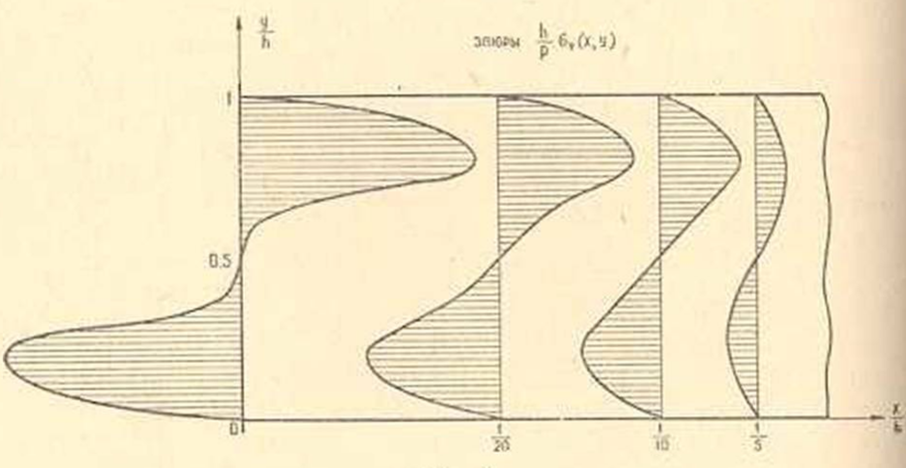
$\frac{y}{h}$ \ $\frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	21,88	23,05	23,48	23,52	22,47
0,8	15,77	16,99	17,51	17,72	16,88
0,7	10,74	11,12	11,42	11,71	11,29
0,6	5,654	5,467	5,566	5,766	5,650
0,5	−0,0038	−0,0017	−0,0012	−0,0019	−0,0032
0,4	−5,658	−5,462	−5,524	−5,754	−5,643
0,3	−10,73	−11,09	−11,39	−11,69	−11,26
0,2	−15,75	−16,97	−17,46	−17,65	−16,85
0,1	−21,87	−23,04	−23,42	−23,45	−22,45



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Таблица 2

Значения $-\frac{h}{P}\tau_{xy}(x, y)$

$\frac{y}{h}$ \ $\frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	3,950	2,561	1,744	0,9743	0,5602
0,8	0,4855	1,110	1,235	1,104	0,9303
0,7	−1,595	−0,0782	0,6267	1,091	1,224
0,6	−1,136	−0,3687	0,2319	0,9535	1,411
0,5	−0,5885	−0,3224	0,1058	0,8692	1,476
0,4	−1,148	−0,3721	0,2323	0,9556	1,410
0,3	−1,605	−0,0791	0,6294	1,087	1,222
0,2	0,4933	1,118	1,229	1,099	0,9315
0,1	3,928	2,546	1,734	0,9679	0,5622

Таблица 3

Значения $\frac{h}{P}\sigma_y(x, y)$

$\frac{y}{h}$ \ $\frac{x}{h}$	0	1/20	1/10	1/5	1/2
0,9	6,082	3,402	1,847	0,5705	0,0475
0,8	7,288	4,269	2,529	0,8947	0,0573
0,7	3,548	2,756	1,976	0,8741	0,0442
0,6	0,3315	1,046	0,9474	0,5318	0,0229
0,5	0,0053	0,0025	0,0015	0,0019	0
0,4	−0,3341	−0,9940	−0,9271	−0,5190	−0,0201
0,3	−3,585	−2,724	−1,910	−0,8490	−0,0424
0,2	−7,239	−4,191	−2,491	−0,8780	−0,0555
0,1	−6,022	−3,338	−1,765	−0,5619	−0,0459

Отметим, что ряды, определяющие напряжения в заделке, сходятся медленно. Для увеличения точности вычислений следует решать систему линейных уравнений с большим числом неизвестных.

Значения напряжений, приведенные в таблицах 1—3, вычислены по формулам (3.6)–(3.8), ограничиваясь первыми четырьмя членами рядов. Расчеты показывают, что остатки рядов для максимальных значений напряжений в сечениях $x=\frac{h}{20}, \frac{h}{10}, \frac{h}{5}, \frac{h}{2}$ не превосходят 5% для касательных напряжений τ_{xy} и 1% для нормальных напряжений σ_x.

Для прогиба правого конца с избытком и недостатком согласно (3.10) и (3.11) получаем

$$-517{,}65\,\frac{P}{E}\leqslant v\left(l,\frac{h}{2}\right)\leqslant-517{,}59\,\frac{P}{E}\cdot \tag{3.12}$$

Приведем значение прогиба правого конца, вычисленное по известной формуле ([9], стр. 158), т. е.

$$f=-\left[\frac{Pl^3}{3EJ}+\frac{3Pl}{2Gh}\right]_{\substack{\nu=0,3\\ l=5h}}=-519{,}5\,\frac{P}{E}\cdot \tag{3.13}$$

Сравнивая эти результаты, мы видим, что разность составляет всего 0,4%.

С целью проверки полученных результатов в лаборатории фотоупругости Института математики и механики АН АрмССР Варданяном Г. С. были поставлены опыты. Результаты эксперимента подтвердили теоретические расчеты.

Институт математики и механики
АН Армянской СРР
Поступила 11 VII 1963

Պ. Հ. Գալֆայան

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ԽԱՌԸ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առաձգականության տեսության խառը հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան մի կողմում տրված են տեղափոխումները, իսկ մյուս երեք կողմերում՝ լարումները։

Խնդրի լուծումը բերվում է ուղղանկյան ներսում լարումների էրիի $\Phi(x, y)$ ֆունկցիայի որոնմանը խառը եզրային պայմաններով։

Դիտարկվող խնդրում $\Phi(x, y)$ ֆունկցիան ներկայացվում է եռանկյունաչափական շարքերով, որի վերլուծության գործակիցները որոշելու համար ստացվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմ։ Ապացուցվում է ստացված գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի քվազիլիովին ռեգուլյարությունը և ազատ անդամների սահմանափակությունը։

Այս խնդրի մասնավոր դեպքը դիտարկված է [6] աշխատությունում։ Որպես օրինակ դիտարկված է կոնսոլային հեծանի ծռման խնդիրը, երբ հեծանի $x=0$ հատվածքը ամրակցված է, իսկ մյուս՝ $x=l$ ազատ հատվածքում կիրառված է ծռող P ուժը։ Դիտարկվող խնդրի լուծումը հասցված է մինչև թվային արդյունքների։ Ուսումնասիրված է նորմալ և շոշափող լարումների բաշխման օրենքը ամրակցված $x=0$ հատվածքի մոտակայքում։ Մաքսիմալ ճկվածքի համար ստացված թվային արդյունքը համեմատված է հայտնի բանաձևից [9] ստացված արդյունքի հետ։ Կազմված են լարումների բաշխման գրաֆիկները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокопов В. К.* Задача о стесненном изгибе прямоугольной полосы. Инженерный сборник, 11, 1952, 151—160.
2. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 21, № 1, 1957, 89—100.
3. *Валов Г. М.* Об одной основной смешанной задаче теории упругости для прямоугольника. Известия АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 1961, 133—142.
4. *Прокопов В. К.* Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области. ПММ, **16**, № 1, 1952, 45—56.
5. *Абрамян Б. Л.* и *Манукян М. М.* Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. ДАН АрмССР, **25**, № 4, 1957, 177—184.
6. *Галфаян П. О.* Об изгибе защемленной прямоугольной балки. ДАН АрмССР, **37**, № 3, 1963, 143—150.
7. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1934.
8. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1962.
9. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. Физматгиз, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. В. Еганян

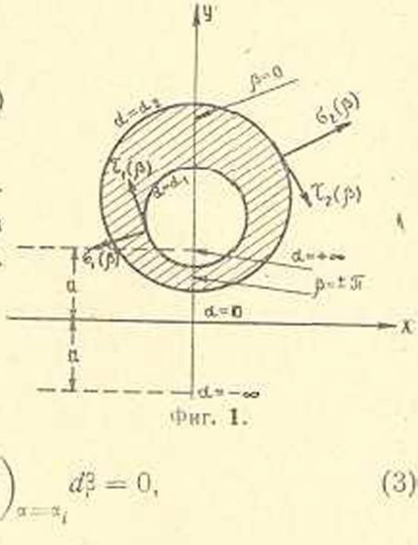
Плоская задача теории упругости для эксцентричного кольца

Для решения задачи воспользуемся системой биполярных координат (α, β), которые связаны с прямоугольными координатами (x, y) соотношениями [1]

$$x = \frac{a \sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad y = \frac{a \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}. \tag{1}$$

Рассматриваемая область ограничена двумя координатными линиями $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2 \; (-\infty < \alpha_2 < \alpha_1 < +\infty)$, представляя собой эксцентричное кольцо. Вдоль контуров приложены нормальные и касательные нагрузки (фиг. 1):

$$\left.\sigma_\alpha\right|_{\alpha=\alpha_i} = \sigma_i(\beta)$$
$$\left.\tau_{\alpha\beta}\right|_{\alpha=\alpha_i} = \tau_i(\beta). \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$



Фиг. 1.

Предположим, что внешние нагрузки статически уравновешиваются на каждом из контуров $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, т. е. имеют место соотношения [1]

$$X_i = \pm \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0,$$

$$Y_i = \pm \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sigma_\alpha \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \tau_{\alpha\beta} \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0, \tag{3}$$

$$M_i = \mp \frac{a^2}{\operatorname{sh}\alpha_i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} \right)_{\alpha=\alpha_i} d\beta = 0,$$

($i = 1, 2$, верхний знак соответствует $i = 1$).

Кроме этого, полагаем, что $\sigma_i(\beta)$, $\tau_i(\beta)$ и производные функции $\sigma_i(\beta)$ интегрируемы в пределах от $-\pi$ до $+\pi$.

Общие формулы напряжений и перемещений плоской задачи в биполярных координатах имеют следующий вид [1]:

$$\sigma_\alpha = \left[g\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\operatorname{ch}\alpha}{a}\right)(g\Phi),$$

$$\sigma_\beta = \left[g\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\operatorname{sh}\alpha}{a}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\sin\beta}{a}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\beta}{a}\right](g\Phi), \tag{4}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -g\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi);$$

$$U(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right],$$

$$V(\alpha, \beta) = \frac{g}{2\mu}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right], \tag{5}$$

где

$$g = \frac{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}{a}, \tag{6}$$

$$g\Psi = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\iint\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - 1\right]d\alpha d\beta. \tag{7}$$

Функции $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ являются бигармоническими.

Когда имеем дело с эксцентричным кольцом, область которого расположена по одну сторону линий $\alpha=0$, функция напряжений имеет вид [1]

$$g\Phi = \alpha(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\,I + aB_0\cos\beta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(f_1(n, \alpha)\cos n\beta + f_2(n, \alpha)\sin n\beta\right], \tag{8}$$

где

$$f_j(n, \alpha) = A_j(n)\operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_j(n)\operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_j(n)\operatorname{sh}(n+1)\alpha + D_j(n)\operatorname{sh}(n-1)\alpha, \quad (j=1, 2;\ n\geqslant 2), \tag{9}$$

$$f_j(1, \alpha) = A_j(1)\operatorname{ch}2\alpha + C_j(1)\operatorname{sh}2\alpha, \quad (j=1, 2). \tag{10}$$

Данную задачу решил Я. С. Уфлянд в предположении, что внешние нагрузки $\sigma_i(\beta)$ и $\tau_i(\beta)$ разлагаются в тригонометрические ряды. В данной статье решена эта же задача, но другим методом, при этом для определения коэффициентов, входящих в (8), получены более простые уравнения и, кроме того, рассмотрены случаи сосредоточенной силы.

Граничные условия (2) с учетом (4), (6) и (8) можно записать так:

$$\left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\alpha\right](g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = a\sigma_i(\beta) + \operatorname{sh}\alpha_i(\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta)\,I - aB_0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i} = -\frac{a\tau_i(\beta)}{\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta} - I\sin\beta \quad (i=1, 2),$$

где

$$g\Phi_0=\sum_{n=1}^{\infty}[f_1(n,\alpha)\cos n\beta+f_2(n,\alpha)\sin n\beta]. \tag{12}$$

Так как функция $g\Phi_0$ представлена в виде ряда Фурье, то левая часть второго условия (11) будет представлять собой некоторые ряды Фурье. Однако, первое условие (11) непосредственно не представляет собой ряда Фурье, так как перед знаками рядов имеются функции от переменной β. С целью преодоления этой трудности, следуя Я. С. Уфлянду, дифференцируем первое условие (11) по β.

С учетом второго условия (11) получим

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)(g\Phi_0)_{\alpha=\alpha_i}=\frac{a}{\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta}\frac{\partial\sigma_i}{\partial\beta}-\frac{a\,\mathrm{sh}\,\alpha_i}{(\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta)^2}\tau_i. \tag{13}$$

Из второго условия (11) и из (13), с учетом (12), находим

$$f_1(n,\alpha_i)=K_{1,i}(n),\qquad f_1'(n,\alpha_i)=K_{3,i}(n),$$
$$f_2(n,\alpha_i)=K_{2,i}(n),\qquad f_2'(n,\alpha_i)=K_{4,i}(n), \tag{14}$$
$$(i=1,\ 2;\quad n\geqslant 2)$$

$$f_1'(1,\alpha_i)=I+K_{3,i}(1),\quad f_2'(1,\alpha_i)=K_{4,i}(1)\quad (i=1,\ 2), \tag{15}$$

где обозначено

$$\left.\begin{aligned}K_{1,i}(n)&=\frac{a}{\pi n(n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\frac{\partial\sigma_i}{\partial\beta}}{\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta}-\frac{\tau_i\,\mathrm{sh}\,\alpha_i}{(\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta)^2}\right]\sin n\beta\,d\beta\\ K_{2,i}(n)&=-\frac{a}{\pi n(n^2-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\frac{\partial\sigma_i}{\partial\beta}}{\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta}-\frac{\tau_i\,\mathrm{sh}\,\alpha_i}{(\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta)^2}\right]\cos n\beta\,d\beta\end{aligned}\right\}n\geqslant 2$$

$$\left.\begin{aligned}K_{3,i}(n)&=\frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau_i\sin n\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta\\ K_{4,i}(n)&=-\frac{a}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\tau_i\cos n\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha_i-\cos\beta}\,d\beta\end{aligned}\right\}n\geqslant 1\quad (i=1,\ 2). \tag{16}$$

Из (14) находим коэффициенты $A_i(n)$, $B_i(n)$, $C_i(n)$ и $D_i(n)$ при $n\geqslant 2$, а из (15) находим $A_2(1)$ и $C_2(1)$ и одновременно $A_1(1)$ и $C_1(1)$, выраженные через I. Остается определить B_0 и I.

Для определения B_0 и I требуем, чтобы удовлетворялось также первое условие (11). Так как первое условие (11) имеет место для всех $\beta(-\pi\leqslant\beta\leqslant+\pi)$, то умножая обе части на $d\beta$ и интегрируя в пределах от $-\pi$ до $+\pi$, с учетом (12), (14) и (15), получим

$$-I \operatorname{sh} 2\alpha_i + 2aB_0 + 2f_1(1, \alpha_i) = \frac{a}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_i(\beta)\, d\beta \quad (i=1, 2), \tag{17}$$

откуда и находим B_0 и I (при данной внешней нагрузке).

Теперь остается определить выражения для $g\Psi$. Из (7), (8), (9) и (10) (производя интегрирование) находим

$$g\Psi = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Big\{ 2\beta (\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) I + \sin\beta\, [A_1(1) \operatorname{ch} 2\alpha + C_1(1) \operatorname{sh} 2\alpha] +$$

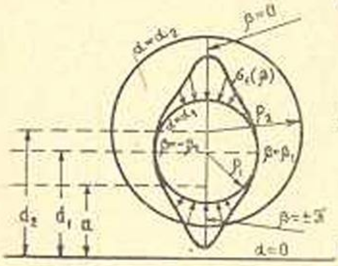
$$+ 2 \sum_{n=2}^{\infty} [A_1(n) \operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_1(n) \operatorname{sh}(n-1)\alpha + C_1(n) \operatorname{ch}(n+1)\alpha +$$

$$+ D_1(n) \operatorname{ch}(n-1)\alpha] \sin n\beta \Big\}. \tag{18}$$

Напряжения и перемещения определяются по формулам (4) и (5).

Таким образом, поставленная задача полностью решена.

Рассматриваем частный случай внешней нагрузки, когда на контуре $\alpha = \alpha_1$ приложены экспоненциально изменяющиеся нормальные нагрузки, симметрично относительно координат β, а контур $\alpha = \alpha_2$ свободен от нагрузки (фиг. 2):



Фиг. 2.

$$\sigma_1(\beta) = -Q_1 (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2 (\cos\beta_1 - \cos\beta)\, e^{-k\beta}$$

$$\text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1,$$

$$\sigma_1(\beta) = Q_2 (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2 (\cos\beta_1 - \cos\beta)\, e^{-k(\pi-\beta)}$$

$$\text{при} \quad \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \pi, \tag{19}$$

$$\tau_1(\beta) = \tau_2(\beta) = \sigma_2(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,$$

где k — положительное число, Q_1 и Q_2 — параметры, связь между которыми получается с помощью (3), а

$$\beta_1 = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh}\alpha_1 < \frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

Из (19) видно, что такой выбор нагрузки не только облегчает вычисление интегралов (3) и (16), но и дает возможность совершить предельный переход к сосредоточенной силе (когда $k \to \infty$).

При таком выборе нагрузки уравнения (14), (15) и (16) приводятся к следующему простому виду:

$$f_1(n, \alpha_1) = K_{1,1}(n), \quad f_1(n, \alpha_2) = f_1'(n, \alpha_1) = f_1'(n, \alpha_2) = 0 \quad (n \geqslant 2), \tag{21}$$

$$f_1'(1, \alpha_1) = f_1'(1, \alpha_2) = I, \tag{22}$$

$$K_{1,1}(n) = \frac{2}{\pi n (n^2 - 1)} \int_0^{\pi} \frac{a \sin n\beta}{\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta} \frac{\partial \sigma_1(\beta)}{\partial \beta}\, d\beta,$$

$$K_{1,2}(n) = K_{2,i}(n) = K_{3,i}(n) = K_{4,i}(n) = K_{3,i}(1) = K_{4,i}(1) = 0. \tag{23}$$

$$(i = 1, 2, \quad n \geqslant 2).$$

Из (3), с учетом (19), получаем

$$X_i = Y_2 = M_i = 0, \quad (i = 1,\ 2) \qquad Y_1 = \int_0^{\pi} \sigma_1(\beta) \frac{\partial y}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} d\beta = 0, \tag{24}$$

что дает связь между Q_1 и Q_2.

С помощью (9) и (10) из (21) и (22) получаем систему уравнений, решая которую находим

$$A_1(n) = \frac{K_{1,1}(n)}{\Delta}\left[(n^2-1)\operatorname{ch}(n+1)\alpha_1 - (n^2-1)\operatorname{ch}(n+1)\alpha_2 \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch}(n-1)(\alpha_1-\alpha_2) - (n-1)^2 \operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n-1)(\alpha_1-\alpha_2)\right],$$

$$B_1(n) = \frac{K_{1,1}(n)}{\Delta}\left[(n^2-1)\operatorname{ch}(n-1)\alpha_1 - (n^2-1)\operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch}(n+1)(\alpha_1-\alpha_2) - (n+1)^2 \operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n+1)(\alpha_1-\alpha_2)\right],$$

$$C_1(n) = -\frac{K_{1,1}(n)}{\Delta}\left[(n^2-1)\operatorname{sh}(n+1)\alpha_1 - (n^2-1)\operatorname{sh}(n+1)\alpha_2 \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch}(n-1)(\alpha_1-\alpha_2) - (n-1)^2 \operatorname{ch}(n+1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n-1)(\alpha_1-\alpha_2)\right],$$

$$D_1(n) = -\frac{K_{1,1}(n)}{\Delta}\left[(n^2-1)\operatorname{sh}(n-1)\alpha_1 - (n^2-1)\operatorname{sh}(n-1)\alpha_2 \times \right.$$

$$\left. \times \operatorname{ch}(n+1)(\alpha_1-\alpha_2) - (n+1)^2 \operatorname{ch}(n-1)\alpha_2 \operatorname{sh}(n+1)(\alpha_1-\alpha_2)\right], \tag{25}$$

$$\Delta = 2\left[\operatorname{ch} 2n(\alpha_1-\alpha_2) - n^2 \operatorname{ch} 2(\alpha_1-\alpha_2) - (n^2-1)\right],$$

$$A_1(1) = -\frac{I}{2}\,\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1+\alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)}, \qquad C_1(1) = \frac{I}{2}\,\frac{\operatorname{ch}(\alpha_1+\alpha_2)}{\operatorname{ch}(\alpha_1-\alpha_2)}. \tag{26}$$

Если значения $\sigma_1(\beta)$ и $\sigma_2(\beta)$ из (19) подставить в (17) и (23), то правые части легко интегрируются и находятся коэффициенты I, B_0 и $K_{1,1}(n)$.

Для вычисления σ_β вблизи контуров предварительно определим разность $\sigma_\alpha - \sigma_\beta$.

Из (4) находим

$$\sigma_\alpha - \sigma_\beta = g\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 1\right](g\Phi). \tag{27}$$

С помощью граничных условий (19) из (27) легко вычисляется напряжение σ_β вблизи контуров

$$a\sigma_\beta\Big|_{\alpha=\alpha_i} = a\sigma_i(\beta) + (\operatorname{ch}\alpha_i - \cos\beta)\Big\{2\operatorname{sh}\alpha_i I + 4\cos\beta f_1(1,\ \alpha_i) +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) K_{1,i}(n)\cos n\beta -$$

$$- 4\sum_{n=2}^{\infty} n\cos n\beta\left[B_1(n)\operatorname{ch}(n-1)\alpha_i + D_1(n)\operatorname{sh}(n-1)\alpha_i\right]\Big\}. \tag{28}$$

При нагрузке (19) из (5) находим

$$2\mu U(\alpha, \beta) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big\{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\, l + f_1'(1, \alpha)\cos\beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_1'(n, \alpha)\cos n\beta -$$

$$- \frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\Big[aB_0\cos\beta + f_1(1, \alpha)\cos\beta + \sum_{n=2}^{\infty} f_1(n, \alpha)\cos n\beta\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\Big\{2l(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) + f_1'(1, \alpha)\frac{\operatorname{ch}\alpha\cos\beta - 1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty}[A_1\operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_1\operatorname{sh}(n-1)\alpha + C_1\operatorname{ch}(n+1)\alpha +$$

$$+ D_1\operatorname{ch}(n-1)\alpha]\, n\cos n\beta - \frac{2\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\sum_{n=2}^{\infty}[A_1\operatorname{sh}(n+1)\alpha + B_1\operatorname{sh}(n-1)\alpha +$$

$$+ C_1\operatorname{ch}(n+1)\alpha + D_1\operatorname{ch}(n-1)\alpha]\sin n\beta\Big\}, \tag{29}$$

$$2\mu V(\alpha, \beta) = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}\Big\{[aB_0 + f_1(1, \alpha)]\frac{\sin\beta\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} nf_1(n, \alpha)\sin n\beta + \frac{\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\sum_{n=2}^{\infty} f_1(n, \alpha)\cos n\beta\Big\} +$$

$$+ \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\Big\{f_1'(1, \alpha)\sin\beta - f_1'(\alpha)\frac{\operatorname{sh}\alpha\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} +$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)A_1\operatorname{ch}(n+1)\alpha + (n-1)B_1\operatorname{ch}(n-1)\alpha + (n+1)C_1\operatorname{sh}(n+1)\alpha +$$

$$+ (n-1)D_1\operatorname{sh}(n-1)\alpha]\sin n\beta - \frac{2\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\sum_{n=2}^{\infty}[A_1\operatorname{sh}(n+1)\alpha +$$

$$+ B_1\operatorname{sh}(n-1)\alpha + C_1\operatorname{ch}(n+1)\alpha + D_1\operatorname{ch}(n-1)\alpha]\sin n\beta\Big\},$$

отсюда видно, что $V(\alpha, 0) = V(\alpha, \pm\pi) = 0$, как и должно быть (в силу симметричности по β).

Теперь переходим к сосредоточенной силе. Если на фиг. 2 подсчитать суммарную нагрузку, которая приложена по линии $\alpha = \alpha_1$ и приравнять каждую из них (при $k \to \infty$) заданной величине P_1, т. е.

$$-2\lim_{k\to\infty}\int_0^{\beta_1}\sigma_1(\beta)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} d\beta = 2\lim_{k\to\infty}\int_{\beta_1}^{\pi}\sigma_1(\beta)\frac{\partial y}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_1} d\beta = P_1, \tag{30}$$

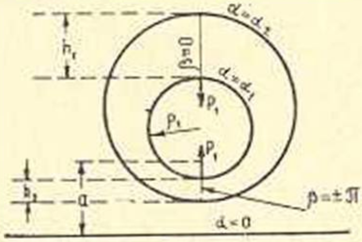
то получим случай действия осевых сосредоточенных сил (фиг. 3). С помощью (1) и (19) из (30) получим

$$
\begin{aligned}
&(\operatorname{ch}\alpha_1 - 1)(\cos\beta_1 - 1)\lim_{k\to\infty}\frac{Q_1}{k} = -\frac{P_1}{2a},\\
&(\operatorname{ch}\alpha_1 + 1)(\cos\beta_1 + 1)\lim_{k\to\infty}\frac{Q_2}{k} = \frac{P_1}{2a}.
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

Из (19) и (23) при $k\to\infty$ с помощью (31) для $K_{1,1}(n)$ получается следующее простое выражение

$$
K_{1,1}(n) = \frac{P_1}{\pi(n^2-1)}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad (32)
$$

$$(n \geqslant 2),$$



Фиг. 3.

откуда

$$
K_{1,1}(2m) = 0,
$$

$$
K_{1,1}(2m+1) = -\frac{2P_1}{\pi\left[(2m+1)^2 - 1\right]} \qquad (33)
$$

$$(m \geqslant 1).$$

Из (17), с помощью (19) и (31), находим

$$
I = -\frac{P_1}{\pi D_0}\operatorname{ch}\alpha_1, \qquad B_0 = -\frac{P_1\operatorname{ch}\alpha_1}{2a\pi D_0}\left[\operatorname{sh}2\alpha_2 + \operatorname{th}(\alpha_1-\alpha_2)\right],
$$

где

$$
D_0 = (\operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2)\operatorname{th}(\alpha_1 - \alpha_2). \qquad (34)
$$

С помощью (32), (33) и (34) из (24) и (26) находятся коэффициенты $A_1(n)$, $B_1(n)$, $C_1(n)$, $D_1(n)$, $A_1(1)$ и $C_1(1)$.

В случае сосредоточенной силы из (28) при $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ для $\sigma_\beta\big|_{\alpha=\alpha_i}$ получается очень простое выражение

$$
\sigma_\beta\Big|_{\substack{\alpha=\alpha_i\\ \beta=\pm\frac{\pi}{2}}} = \frac{I}{a}\operatorname{sh}2\alpha_i \quad (i = 1,\ 2). \qquad (35)
$$

Из (29) в случае сосредоточенной силы находим

$$
U(\alpha_1, 0) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\,\frac{\varphi_1 + \frac{\lambda}{\mu}\varphi_2}{1+\frac{\lambda}{\mu}}, \qquad U(\alpha_2, 0) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\,\frac{\varphi_3 + \frac{\lambda}{\mu}\varphi_4}{1+\frac{\lambda}{\mu}},
$$

$$
U(\alpha_1, \pi) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\,\frac{\varphi_5 + \frac{\lambda}{\mu}\varphi_6}{1+\frac{\lambda}{\mu}}, \qquad U(\alpha_2, \pi) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\,\frac{\varphi_7 + \frac{\lambda}{\mu}\varphi_8}{1+\frac{\lambda}{\mu}}, \qquad (36)
$$

где функции φ_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ зависят от α_1 и α_2

$$
\varphi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - a_0 + \operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2}\right) + a_1 + a_3 + a_7,
$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}(1 - a_0) + a_3,$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}a_0 + 2a_4 + a_5 + 6a_9,$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{4}a_0 + a_4 + 3a_9,$$

$$\varphi_5 = \frac{1}{2}\left(1 + 3a_0 + \operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2}\right) + a_1 - 4a_2 - a_3 + a_7,$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{4}(1 + 3a_0) - 2a_2 - a_3,$$

$$\varphi_7 = -\frac{1}{2}a_0 + 3a_4 - a_8 + 6a_9, \qquad \varphi_8 = -\frac{1}{4}a_0 + a_4 + 3a_9.$$

$$a_0 = \frac{\operatorname{ch}\alpha_1}{\operatorname{sh}^2\alpha_1 + \operatorname{sh}^2\alpha_2}, \qquad a_1 = a_0 \operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2}, \qquad a_2 = a_0 \operatorname{cth}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

$$a_3 = a_2 \operatorname{ch}\alpha_1, \qquad a_4 = a_2 \operatorname{ch}\alpha_2, \qquad a_5 = a_3 \operatorname{ch}\alpha_2, \qquad a_6 = a_4 \operatorname{sh}\alpha_2,$$

$$a_7 = a_6 \operatorname{cth}\frac{\alpha_1}{2}, \qquad a_8 = a_6 \operatorname{th}\frac{\alpha_2}{2}, \qquad a_9 = e^{-2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \tag{37}$$

Значения φ_i $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ для разных α_1 и α_2 приведены в таблице

Таблица

$\frac{h_1}{h_2}$	$\frac{a}{\rho_1}$	α_1	α_2	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
3	3	1,818	1,001	4,03289	1,60298	3,79572	1,35893	1,17469	1,25522	3,7315	1,2067
4	3	1,818	0,724	3,3606	1,4691	2,5525	0,9424	0,7581	1,1334	1,9369	0,7781
5	3	1,818	0,570	3,1412	1,4252	2,1351	0,7963	0,6219	1,0941	1,6421	0,6274
3	4	2,095	0,912	3,0921	1,3905	2,1339	0,7627	0,6904	1,0112	1,5177	0,6422
4	4	2,095	0,664	2,8043	1,3421	1,5783	0,5778	0,4952	0,9670	1,1713	0,4530
5	4	2,095	0,524	2,6956	1,3238	1,3730	0,5072	0,4215	0,9503	1,0318	0,8006
3	5	2,313	0,863	2,7335	1,3195	1,4679	0,5203	0,4962	0,9177	1,0290	0,4221
4	5	2,313	0,630	2,5605	1,2941	1,1359	0,4122	0,3715	0,8946	0,8296	0,3121
5	5	2,313	0,498	2,4915	1,2845	1,0088	0,3695	0,3216	0,8853	0,7465	0,2687

Известна следующая связь:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2G}{1 - 2\mu},$$

откуда, с помощью таблиц получаем, что

$$\min \frac{\lambda}{\mu} = 2 \cdot 10^5 \ \text{кг/см}^2.$$

Поэтому в формулах (36) можно пренебречь φ_1, φ_3, φ_5 и φ_7 и единицей относительно второго слагаемого.

Тогда (36) примет очень простой вид

$$U(\alpha_1, 0) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\varphi_2, \quad U(\alpha_2, 0) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\varphi_4,$$

$$U(\alpha_1, \pi) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\varphi_6, \quad U(\alpha_2, \pi) = \frac{P_1}{2\pi\mu}\varphi_8. \tag{38}$$

Из таблицы видно, что $U(\alpha_i, 0)$ и $U(\alpha_i, \pi)$ $(i = 1, 2)$ уменьшаются при уменьшении α_2 или при увеличении α_1.

В частности, если взять

$$\sigma_i(\beta) = -q_i, \quad \tau_i(\beta) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{39}$$

то получим задачу эксцентричной трубы под равномерным давлением, т. е. по контуру $\alpha = \alpha_1$ действует равномерное давление, равное q_1, а по контуру $\alpha = \alpha_2$ — давление, равное q_2.

В этом случае, с помощью (39), из (14), (15), (16), (17) и (22) получается

$$A_i(n) = B_i(n) = C_i(n) = D_i(n) = 0 \quad (n \geqslant 2;\ i = 1, 2),$$

$$A_2(1) = B_2(1) = C_2(1) = D_2(1) = 0.$$

Для определения оставшихся коэффициентов $A_1(1)$, $C_1(1)$, B_0 и I получаем следующие четыре уравнения:

$$A_1(1)\,\mathrm{sh}\,2\alpha_i + C_1(1)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_i = \frac{I}{2},$$

$$-I\,\mathrm{sh}\,\alpha_i\,\mathrm{ch}\,\alpha_i + aB_0 + A_1(1)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_i + C_1(1)\,\mathrm{sh}\,2\alpha_i = -aq_i \quad (i = 1, 2),$$

откуда находим

$$I = \frac{2a}{D_0}(q_1 - q_2)\,\mathrm{ch}(\alpha_1 - \alpha_2),$$

$$B_0 = \frac{1}{D_0}[q_1\,\mathrm{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\mathrm{sh}\,2\alpha_2 - q_2\,\mathrm{ch}(\alpha_1 - \alpha_2)\,\mathrm{sh}\,2\alpha_1 + (q_1 + q_2)\,\mathrm{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

$$A_1(1) = -\frac{a}{D_0}(q_1 - q_2)\,\mathrm{sh}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

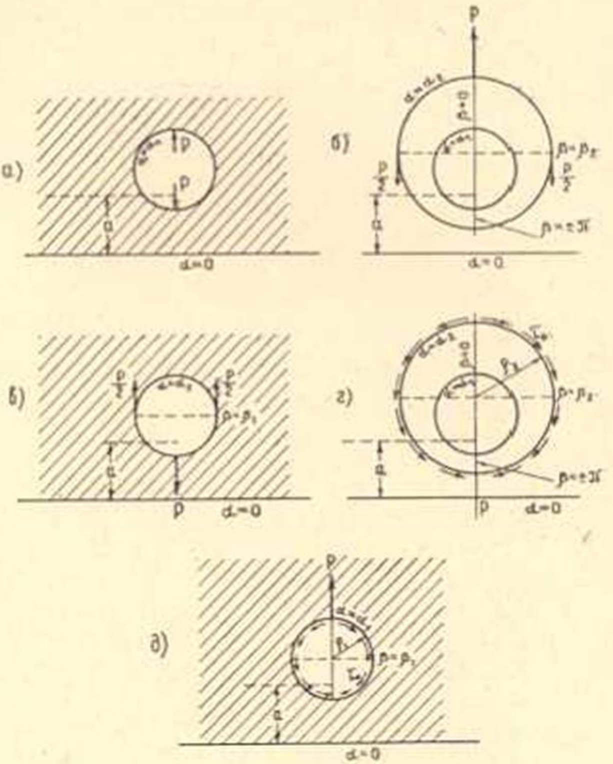
$$C_1(1) = \frac{a}{D_0}(q_1 - q_2)\,\mathrm{ch}(\alpha_1 + \alpha_2),$$

где

$$D_0 = 2(\mathrm{sh}^2\alpha_1 + \mathrm{sh}^2\alpha_2)\,\mathrm{sh}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Это решение совпадает с решением Я. С. Уфлянда [1].

По изложенному методу, кроме рассмотренных задач, легко решаются некоторые конкретные задачи. Для решения этих задач необходимо соответственным образом выбрать внешние нагрузки, далее в полученных результатах перейти к пределу при $k \to \infty$ и приравнять суммарную нагрузку заданной величине P или $\frac{P}{2}$ (фиг. 4).



Фиг. 4.

Здесь рассмотрены следующие задачи:

1. Полуплоскость с отверстием (фиг. 4а). Решение этой задачи получается из первой рассмотренной задачи, где нужно лишь принять $\alpha_2 = 0$, $P_1 = -P$.

2. Эксцентричное кольцо (фиг. 4б)

$$\sigma_1(\beta) = \tau_1(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_2(\beta) = Q_2 (\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)^2 (\cos\beta_2 - \cos\beta)\, e^{-k\beta} \\ &\tau_2(\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_2$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_2(\beta) = 0 \\ &\tau_2(\beta) = H_2 (\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)^2 \sin\beta\, e^{-k(\beta-\beta_2)} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \beta_2 \leqslant \beta \leqslant \pi$$

$$\beta_2 = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh}\alpha_2.$$

3. Полуплоскость с отверстием (фиг. 4в)

$$\sigma_2(\beta) = \tau_2(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(\beta) = 0 \\ &\tau_1(\beta) = H_1 (\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2 \sin\beta\, e^{-k(\beta-\beta_1)} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= Q_1(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2(\cos\beta_1 - \cos\beta)\, e^{-k(\pi-\beta)} \\ \tau_1(\beta) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \pi$$

где

$$\beta_1 = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh}\alpha_1.$$

В результатах надо положить $\alpha_2 = 0$.

4. Эксцентричное кольцо (фиг. 4г)

$$\sigma_1(\beta) = \tau_1(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,$$

$$\sigma_2(\beta) = 0, \quad \tau_2(\beta) = \tau_0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_2,$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2(\beta) &= Q_2(\operatorname{ch}\alpha_2 - \cos\beta)^2(\cos\beta_2 - \cos\beta)\, e^{-k(\pi-\beta)} \\ \tau_2(\beta) &= \tau_0, \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \beta_2 \leqslant \beta \leqslant \pi$$

где

$$\tau_0 = \frac{P}{4\rho_2}, \qquad \rho_2 = \frac{a}{\operatorname{sh}\alpha_2}, \qquad \beta_2 = \operatorname{arc\,tg} \operatorname{sh}\alpha_2.$$

5. Полуплоскость с отверстием (фиг. 4д)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1(\beta) &= Q_1(\operatorname{ch}\alpha_1 - \cos\beta)^2(\cos\beta_1 - \cos\beta)\, e^{-k\beta} \\ \tau_1(\beta) &= \tau_0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \beta_1$$

$$\sigma_1(\beta) = 0, \quad \tau_1(\beta) = \tau_0 \quad \text{при} \quad \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \pi$$

$$\sigma_2(\beta) = \tau_2(\beta) = 0 \quad \text{при} \quad -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,$$

где

$$\tau_0 = \frac{P}{4\rho_1}, \qquad \rho_1 = \frac{a}{\operatorname{sh}\alpha_1}.$$

В результатах надо принять $\alpha_2 = 0$.

При решении перечисленных задач интегралы (16) и (17) берутся очень легко, и коэффициенты функции напряжений выражаются в замкнутой форме.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступила 10 VI 1963.

Վ. Վ. Եգանյան

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԱՐՏԱԿԵՆՏՐՈՆ ՕՂԱԿԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում տրվում է արտակենտրոն օղակի հարթ խնդրի լուծումը, երբ եզրերում կիրառված են կամայականորեն բաշխված բեռներ։

Խնդիրը դիտարկվում է երկբևեռ կոորդինատներով։ Խնդրի լուծումը՝ լարումների ֆունկցիան, պատկերված է Ֆուրյեի շարքի տեսքով։ Արտաքին բեռի ընտրությունը 2—4 գծագրերի տեսքով հնարավորություն է տալիս, ա) հեշտությամբ գտնել լարումների ֆունկցիայի գործակիցները և բ) անցնել կենտրոնացած ուժերին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. Гостехтеориздат, Л., 1950.
2. *Еганян В. В.* Плоская задача теории упругости для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей. Кандидатская диссертация, Ереван, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

О справедливости решения вида простых волн

Рассмотрим задачу о распространении давления в сжимаемую жидкость. Граничные условия возьмем в виде

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 P_a\left(\dfrac{x}{t}\right) & x < Vt \\ 0 & x > Vt, \end{cases} \tag{1}$$

где ось Ox направлена по границе полуплоскости и ось Oy перпендикулярна границе, t — время, P — давление, V — скорость фронта по границе. Решение этой задачи с помощью простых волн найдено в [1] в виде

$$\begin{gathered} x\cos\alpha + y\sin\alpha - (u\cos\alpha + v\sin\alpha + a)\,t = 0, \\ u = \frac{2}{n-1}\int\cos\alpha\,da, \qquad v = \frac{2}{n-1}\int\sin\alpha\,da, \\ u = U\cos\beta, \qquad v = U\sin\beta, \end{gathered} \tag{2}$$

u, v — компоненты скорости по осям Ox и Oy, a — скорость звука. Уравнение политропы для жидкости имеет вид

$$P = \mathrm{B}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1\right].$$

Покажем, что решение (2) удовлетворяет условиям на ударной волне с точностью до малых третьего порядка

$$\begin{aligned} &\rho_0 D = \rho(D - U), \\ &P = \rho_0 DU, \\ &\frac{D^2}{2} + \frac{a_0^2}{n-1} = \frac{(D-U)^2}{2} + \frac{a^2}{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение легко получается из уравнения политропы и формулы для скорости ударной волны [2]

$$D = \frac{a_0 + a + U}{2}. \tag{4}$$

Второе уравнение (3), учитывая малые второго порядка, можно записать в виде

$$dU = \frac{dP}{\rho a},$$

где использованы уравнение политропы и формула (4). Но из (2) имеем

$$dU = \frac{2}{n-1} da \cos(\beta - \alpha), \qquad U d\beta = \frac{2}{n-1} da \sin(\alpha - \beta). \tag{5}$$

В силу того, что $\beta - \alpha$ равно нулю в линейном случае и является малой первого порядка относительно $\frac{P_1}{Bn}$, имеем с точностью до третьего порядка

$$dU = \frac{2}{n-1} da.$$

Выполнение уравнения энергии показано в (3). Покажем, что условие для касательной составляющей скорости на ударной волне также выполняется с точностью до второго порядка включительно. В самом деле, согласно (2) и [1], решение имеет вид

$$a(x, y, t) = a_0 \left[1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1 P_a(\xi')}{Bn}\right] + \cdots,$$

где ξ' — постоянная для данной поверхности уровня (2) скорость ее вдоль Ox, причем вблизи фронта ударной волны имеем $\xi' = V - \xi_1'$, где ξ_1' — малая величина,

$$\xi_1' = -\frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn} \frac{(V - \xi)\frac{V}{a_0^2}}{1 - \xi\frac{V^2}{a_0^2}},$$

$$\xi = \frac{x}{t}.$$

Если оставлять в выражении для $a(x, y, t)$ малые первого порядка, получим

$$a(x, y, t) = a_0\left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{Bn}\right),$$

где $a_0\left(1 + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{Bn}\right)$ — постоянная величина, а невыписанные члены имеют второй порядок малости. Таким образом, da имеет второй порядок малости.

Касательная составляющая скорости на ударной волне запишется

$$u \sin\lambda - v \cos\lambda,$$

где λ — угол нормали к ударной волне с Ox.

Из (2) получим

$$u \sin\lambda - v\cos\lambda = \int \frac{2}{n-1} da \sin(\lambda - \alpha).$$

Поскольку в линейном приближении α и λ совпадают, $\lambda - \alpha$ первого порядка малости, da имеет второй порядок малости, следовательно, $u\sin\lambda - v\cos\lambda$ имеет третий порядок малости, что и требовалось показать.

В приведенном выше доказательстве использован тот факт, что мы рассматриваем узкую область вблизи ударной волны, в то время как пределы интегрирования по a строго не очерчены и могут, вообще говоря, быть вне этой области. Поэтому приведем другое доказательство, более соответствующее задаче.

Для касательной составляющей скорости на фронте имеем

$$U \sin(\lambda - \beta).$$

Из решения задачи имеем для ударной волны

$$-\operatorname{tg}\lambda = \frac{d\eta}{d\xi} = -\operatorname{tg}\alpha_1 - \frac{n+1}{4}\,\frac{\sin\alpha_1}{\cos^3\alpha_1}\,\frac{P_1}{Bn},$$

где α_1 — угол характеристики для линейной задачи, $\sin\alpha_1 = \frac{a_0}{V}$.

Если представить λ в виде

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{P_1}{Bn},$$

то из вышеприведенного уравнения получим

$$\lambda_1 = \alpha_1, \qquad \lambda_2 = \frac{n+1}{4}\operatorname{tg}\alpha_1.$$

Таким образом, λ постоянно с точностью до малых второго порядка. Из второго уравнения (5) имеем, что $Ud\beta \sim da \sin(\alpha - \beta)$ или $d\beta = 0$ с той же точностью, что и $da = 0$. Это равенство имеет место на всей ударной волне, поэтому как λ, так и β постоянны до малых первого порядка включительно. Граничное условие для β, как и для всех параметров, ставится в точке $x = Vt, y = 0$, но в этой точке из условий на ударной волне обязательно $\beta = \lambda$; поскольку β и λ вплоть до первого порядка включительно постоянны, вдоль фронта имеем, что величина $\beta - \lambda$—малая второго порядка. Тогда касательная составляющая скорости на фронте волны $U\sin(\lambda - \beta)$ будет малой третьего порядка.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 V 1963

Ա. Գ. Բագդոև

ՀԱՍԱՐԱԿ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԵՍՔԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկվում է հեղուկում հարվածի ճնշման տարածման խնդրի՝ հասարակ ալիքների տեսքով լուծումը։

Խնդրի լուծումը նախկինում ստացված է հեղինակի կողմից [1]։

Ցույց է տրվում, որ երկրորդ մոտավորության սահմաններում հարվածի ալիքի վրա պայմանները բավարարվում են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г., Нерсисян Э. М.* Определение давления в полупространстве идеальной жидкости для изэнтропического приближения. Известия АН СССР, ОТН, Мех. и маш., № 4, 1960.
2. *Курант Р.* и *Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1960.
3. *Багдоев А. Г.* О возможности замены ударного перехода непрерывным. ДАН АрмССР, **33**, № 1, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկո-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

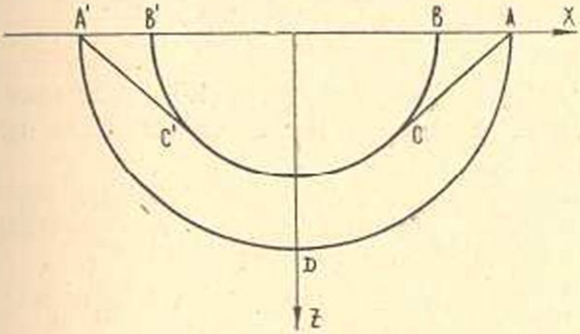
З. А. Мартиросян

Плоская задача о распространении давления постоянного профиля в упругом полупространстве

§ 1. Постановка задачи и решение в виде интеграла

Рассматривается закон распространения давления, образованного от взрыва над изотропным упругим полупространством, которое характеризуется постоянными λ, μ, ρ_0.

Обозначим через O точку возникновения давления на границе. Выберем ось Ox в плоскости поверхности, ось Oy направим вниз. (фиг. 1).



Фиг. 1.

Предположим, что на граничной поверхности $z=0$ действует нормальное давление $T_{zz} = -P_1 = \text{const}$. В этом случае, как известно, задача будет плоской и потенциальные функции φ и ψ удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

с начальными нулевыми условиями

$$\varphi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi\Big|_{t=0} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях

$$T_{xz} = \mu\left(2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,$$

$$T_{zz} = \left[\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\right]_{z=0} = \begin{cases} -P_1 & \text{при } |x| < Vt \\ 0 & \text{при } |x| > Vt, \end{cases} \tag{1.3}$$

где V—скорость фронта по поверхности.

Заметим, что входящие в (1.1) a^2 и b^2 определяются формулами

$$a = \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda + 2\mu}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}} \tag{1.4}$$

и имеют смысл обратных величин скоростей распространения продольных и поперечных волн. Решим задачу методом неполного разделения переменных [2].

Решения уравнений (1.1) при начальных и граничных условиях (1.2) и (1.3) найдем в виде интегралов Фурье

$$\varphi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} R(z, t, k)\, e^{ikx} dk,$$

$$\psi(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(z, t, k)\, e^{ikx} dk. \tag{1.5}$$

Значения функций φ и ψ из уравнений (1.5) подставим в уравнения (1.1), (1.2), (1.3) и, сделав в последнем обратное преобразование Фурье, получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - a^2\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - k^2 R = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - b^2\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - k^2 S = 0, \tag{1.6}$$

$$R\Big|_{t=0} = \frac{\partial R}{\partial t}\Big|_{t=0} = S\Big|_{t=0} = \frac{\partial S}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{1.7}$$

$$\mu\left(2ik\frac{\partial R}{\partial z} - k^2 S - \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right)_{z=0} = 0,$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} - k^2 R\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + ik\frac{\partial S}{\partial z}\right)\right]_{z=0} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} P_1(x, t)\, e^{-ikx} dx \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.6) при условиях (1.7), (1.8) функции R и S легко определяются, если ввести следующие вспомогательные функции

$$\overline{X}(z, k, s) = \int_0^{\infty} R(z, k, t)\, e^{-st} dt, \tag{1.9}$$

$$\overline{Y}(z,k,s)=\int\limits_0^\infty S(z,k,t)e^{-st}dt. \tag{1.9}$$

Согласно (1.9) из (1.6) и (1.8), имея в виду, что

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}dt\int\limits_{-\infty}^\infty P_1(x,t)e^{-ikx}dx=\frac{2P_1V}{s^2+k^2V^2},$$

получим

$$\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}-(a^2s^2+k^2)\overline{X}=0,\quad \frac{\partial^2\overline{Y}}{\partial z^2}-(b^2s^2+k^2)\overline{Y}=0, \tag{1.10}$$

$$\mu\left(2ik\frac{\partial\overline{X}}{\partial z}-k^2\overline{Y}-\frac{\partial^2\overline{Y}}{\partial z^2}\right)_{z=0}=0,$$

$$\left[\lambda\left(\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}-k^2\overline{X}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2\overline{X}}{\partial z^2}+ik\frac{\partial\overline{Y}}{\partial z}\right)\right]_{z=0}=-\frac{P_1V}{\pi(s^2+k^2V^2)}. \tag{1.11}$$

Решим уравнения (1.10) относительно $\overline{X}$ и $\overline{Y}$

$$\begin{aligned}\overline{X}(z,k,s)&=C(k,s)e^{-z\sqrt{a^2s^2+k^2}},\\ \overline{Y}(z,k,s)&=D(k,s)e^{-z\sqrt{b^2s^2+k^2}},\end{aligned} \tag{1.12}$$

где многозначные функции фиксированы по следующему условию:

$$\arg\sqrt{a^2s^2+k^2}=\arg\sqrt{b^2s^2+k^2}=0,\ \text{когда}\ s>0, \tag{1.13}$$

а функции $C(k,s)$ и $D(k,s)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}&(b^2s^2+2k^2)D(k,s)+2ik\sqrt{a^2s^2+k^2}\,C(k,s)=0,\\ &2ik\sqrt{b^2s^2+\kappa^2}\,D(k,s)-(b^2s^2+2k^2)C(k,s)=\frac{1}{\pi\mu}\cdot\frac{P_1V}{s^2+k^2V^2},\end{aligned} \tag{1.14}$$

откуда

$$\begin{aligned}C(k,s)&=-\frac{P_1V(b^2s^2+2k^2)}{\pi\mu(s^2+k^2V^2)\left[(b^2s^2+2k^2)^2-4k^2\sqrt{b^2s^2+k^2}\sqrt{a^2s^2+k^2}\right]},\\ D(k,s)&=\frac{2iP_1V\sqrt{a^2s^2+k^2}\cdot k}{\pi\mu(s^2+k^2V^2)\left[(b^2s^2+2k^2)^2-4k^2\sqrt{b^2s^2+k^2}\sqrt{s^2a^2+k^2}\right]}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

В (1.9) произведем обратное преобразование Лапласа. Имея в виду (1.12), для функций R и S получим следующие выражения в виде интеграла Меллина:

$$R(z,k,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} C(k,s)e^{-z\sqrt{a^2s^2+k^2}}e^{st}\,ds,$$

$$S(z,k,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} D(k,s)\,e^{-z\sqrt{b^2s^2+k^2}}e^{st}\,ds, \tag{1.16}$$

где σ—постоянное положительное число. Значения R и S подставим в уравнения (1.5) и, сделав следующее обозначение

$$\zeta=\frac{bs}{k},$$

для функций φ и ψ получим следующие выражения:

$$\varphi(x,z,t)=-\frac{P_1Vb}{\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\xi^2)\,e^{-|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\,e^{k\frac{t\xi}{b}}\,d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)\,R(\xi)}\right]\frac{dk}{k^3},$$

$$\psi(x,z,t)=\frac{2iP_1Vb}{\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\,e^{-|k|z\sqrt{1+\xi^2}}\,e^{k\frac{t\xi}{b}}\,d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)}\right]\frac{|k|\,dk}{k^3}. \tag{1.17}$$

В уравнениях (1.17) ветви корня фиксированы при условиях

$$\arg\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}=\arg\sqrt{1+\xi^2}=0 \quad \text{при} \quad \xi>0. \tag{1.18}$$

Функция $R(\xi)$ имеет значение

$$R(\xi)=(2+\xi^2)^2-4\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\,\sqrt{1+\xi^2}, \tag{1.19}$$

величина γ определяется отношением

$$\gamma=\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}. \tag{1.20}$$

Для компонентов напряжения T_{zz} имеем

$$T_{zz}=\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)+2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right). \tag{1.21}$$

Если значения функций φ и ψ из равенств (1.17) подставим в уравнение (1.21), то для T_{zz} получим следующее выражение в виде интеграла

$$T_{zz}=-\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}X(z,k,t)\frac{dk}{k}+$$

$$+\frac{4\mu P_1Vb}{\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}Y(z,k,t)\frac{dk}{k}+\frac{\lambda P_1Vb}{\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}Z(z,k,t)\frac{dk}{k}, \tag{1.22}$$

где

$$X(z, k, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)e^{-|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}e^{k\frac{t\xi}{b}}d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)} & \text{при} \quad t>\gamma bz\\ 0 & \text{при} \quad t<\gamma bz,\end{cases} \tag{1.23}$$

$$Y(z, k, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\sqrt{1+\xi^2}\,e^{-|k|z\sqrt{1+\xi^2}}e^{k\frac{t\xi}{b}}d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)} & \text{при} \quad t>bz\\ 0 & \text{при} \quad t<bz,\end{cases} \tag{1.24}$$

$$Z(z, k, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\dfrac{(2+\xi^2)\,e^{-|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}e^{k\frac{t\xi}{b}}d\xi}{(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)} & \text{при} \quad t>\gamma bz\\ 0 & \text{при} \quad t<\gamma bz.\end{cases} \tag{1.25}$$

§ 2. Качественное исследование решения

Чтобы дать качественную картину распространения давления в упругом полупространстве, исследуем интегралы Меллина.

Проведем из точек разветвлений $\xi=\pm i$ и $\xi=\pm\frac{i}{\gamma}$ разрезы параллельно отрицательной части вещественной оси. Тогда подинтегральные функции в (1.23), (1.24), (1.25) будут иметь полюсы в корнях уравнения Релея

$$R(\xi)=(2+\xi^2)^2-4\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\sqrt{1+\xi^2}$$

и в точках

$$\xi=\pm iVb.$$

На рассматриваемом листе плоскости ξ это уравнение имеет двойной корень $\xi=0$, а также простые корни в точках $\xi=\pm i\theta$, где $0<\theta<1$.

Учитывая, что при больших значениях k подинтегральные функции в (1.23), (1.24), (1.25) оказываются весьма малыми в полуполосе $|\operatorname{Im}\xi|<1$, $\operatorname{Re}\xi<0$, представляется естественным заменить прямую интегрирования $\operatorname{Re}\xi=\sigma$ контуром (λ), изображенным на фиг. 2.

При такой деформации контура пересекаются особые точки $\xi=0$, $\xi=\pm i\theta$ и $\xi=\pm iVb$.

Поэтому функции X, Y и Z из (1.23), (1.24), (1.25) представятся следующими равенствами:

$$X = X_0 + X_R + X_M + X_\lambda, \tag{2.1}$$

$$Y = Y_0 + Y_R + Y_M + Y_\lambda, \tag{2.2}$$

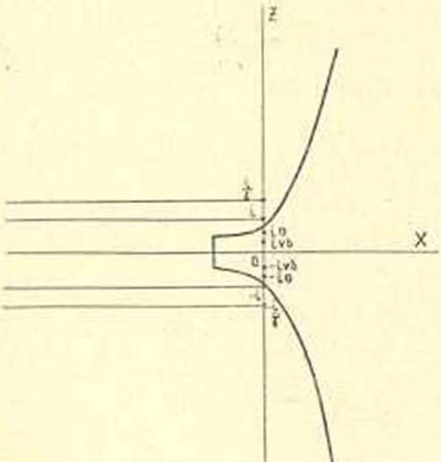
$$Z = Z_0 + Z_R + Z_M + Z_\lambda, \tag{2.3}$$

где X_0, Y_0, Z_0 суть вычеты подинтегральных функций в начале координат, X_R, Y_R, Z_R—вычеты в точках $\xi = \pm i\theta$, X_M, Y_M, Z_M—вычеты в точках $\xi = \pm iVb$, а последнее слагаемое имеет вид

$$X_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\lambda \frac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2 + V^2b^2) R(\xi)}, \tag{2.4}$$

$$Y_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\lambda \frac{\sqrt{1+\gamma^2\xi^2}\sqrt{1+\xi^2}\, e^{-|k| z \sqrt{1+\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2 + V^2b^2) R(\xi)}, \tag{2.5}$$

$$Z_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\lambda \frac{(2+\xi^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1+\gamma^2\xi^2}}\, e^{k\frac{t\xi}{b}}\, d\xi}{(\xi^2 + V^2b^2) R(\xi)}. \tag{2.6}$$



Фиг. 2.

Надо заметить, что многозначные функции фиксированы по условию (1.18). Легко убедиться, что если значения X_0, Y_0, Z_0 подставить в (1.22), то получится

$$T_{zz_0} \equiv 0.$$

Итак, поле давления разделится на 3 слагаемых

$$T_{zz} = T_{zz_R} + T_{zz_M} + T_{zz_\lambda}, \tag{2.7}$$

каждое из которых имеет свой физический смысл.

1. Определим поле давления T_{zz_R}; для этого, интегрируя сначала (1.23), (1.24), (1.25), получим

$$X_R = -\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2) e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.8}$$

$$Y_R = -\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\sqrt{1-\theta^2}\, e^{-|k| z \sqrt{1-\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.9}$$

$$Z_R = -\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2) e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} \sin\frac{kt\theta}{b}, \tag{2.10}$$

где

$$C_0 = 4\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{\sqrt{1-\theta^2}} + \frac{\gamma^2\sqrt{1-\theta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}} - 2 + \theta^2\right)(\theta^2 - V^2b^2). \tag{2.11}$$

Подставив значения X_R, Y_R, Z_R в уравнение (1.22), дифференцируя по z, получим

$$\frac{\partial T_{zz_R}}{\partial z} = -\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right)+$$

$$+\frac{4\mu P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\sqrt{1-\theta^2}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right)+$$

$$+\frac{\lambda P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\times$$

$$\times\left(\frac{x+V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x+V_0t)^2}-\frac{x-V_0t}{z^2(1-\gamma^2\theta^2)+(x-V_0t)^2}\right), \qquad (2.12)$$

откуда

$$T_{zz_R} = -\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{2}{C_0\theta}(2-\theta^2)(1-\gamma^2\theta^2)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x-V_0t}\right)+$$

$$+\frac{4\mu P_1Vb\cdot 2}{C_0\theta\pi\mu}\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}\sqrt{1-\theta^2}\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\theta^2}}{x-V_0t)}\right)+\frac{\lambda P_1Vb\,2}{\pi\mu C_0\theta}(2-\theta^2)\times$$

$$\times\left(\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x+V_0t}-\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\gamma^2\theta^2}}{x-V_0t}\right)+C_1, \qquad (2.13)$$

где

$$V_0=\frac{\theta}{b}. \qquad (2.14)$$

В уравнении (2.13) величина T_{zz_R} зависит от $x-V_0t$, $x+V_0t$. Если ту часть T_{zz_R}, которая зависит от $x-V_0t$, принять за движение по положительной оси Ox, то часть, определяющаяся $x+V_0t$, будет движением в отрицательном направлении оси Ox. Итак, первое слагаемое уравнения (2.7) представляет собой пакеты волновых поверхностей или, как называют в теории упругости, поверхностные волны Рэле. Очевидно, что эти волновые пакеты движутся со скоростью $V_0=\frac{\theta}{b}$.

2. Определим поле давления T_{zz_M}. Для этого интегрируя сначала уравнения (1.23), (1.24), (1.25), получим

$$X_M = \frac{(2 - V^2b^2)(1 - \gamma^2V^2b^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2V^2b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.15}$$

$$Y_M = \frac{\sqrt{1 - V^2b^2\gamma^2}\sqrt{1 - V^2b^2}\, e^{-|k| z \sqrt{1-V^2b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.16}$$

$$Z_M = \frac{(2 - V^2b^2)\, e^{-|k| z \sqrt{1-\gamma^2V^2b^2}} \sin ktV}{VbC_1}, \tag{2.17}$$

где

$$C_1 = (2 - V^2b^2)^2 - 4\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}\sqrt{1 - V^2b^2}. \tag{2.18}$$

При $Vb < 1$ для T_{zz_M} получим следующее выражение:

$$T_{zz_M} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 Vb}{\pi\mu} \frac{(2 - V^2b^2)(1 - \gamma^2V^2b^2)}{VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x - Vt}\right) -$$

$$- \frac{4\mu P_1 Vb}{\pi\mu} \cdot \frac{\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}\sqrt{1 - V^2b^2}}{VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - V^2b^2}}{x - Vt}\right) -$$

$$- \frac{\lambda P_1 Vb (2 - V^2b^2)}{\pi VbC_1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x + Vt} - \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{1 - \gamma^2V^2b^2}}{x - Vt}\right) + c_2, \tag{2.19}$$

при этом слагаемое T_{zz_M} представляет собой волновой пакет, который движется по поверхности со скоростью V.

Чтобы исследовать поле давления, мы должны, прежде всего, попытаться вычислить контурные интегралы (2.4), (2.5) и (2.6). Правильный расчет этого интеграла труден, поэтому ограничимся условием $kt \gg 1$, которое дает возможность использовать асимптотические методы.

Рассмотрим интеграл (2.4), представляющийся в канонической форме следующим образом:

$$X_\lambda = \int_\lambda \psi(\xi)\, e^{kf(\xi)}\, d\xi, \tag{2.20}$$

где „медленно изменяющаяся" функция $\psi(\xi)$ равна

$$\psi(\xi) = \frac{(2+\xi^2)(1+\gamma^2\xi^2)}{2\pi i(\xi^2+V^2b^2)R(\xi)}, \tag{2.21}$$

а „фазой“ является функция

$$kf(\xi) = -|k|z\sqrt{1+\gamma^2\xi^2} + \frac{kt}{b}\xi. \tag{2.22}$$

Учитывая возможность изменения пути интегрирования в контурных интегралах от аналитических функций, постараемся выбрать контур (λ) так, чтобы на нем оказались точки резкого максимума подинтегральной функции и чтобы при удалении от этих точек подинтегральная функция убывала наиболее быстро.

Контур, обладающий указанными выше свойствами, называется стационарным, а точки максимумов функций—седловыми.

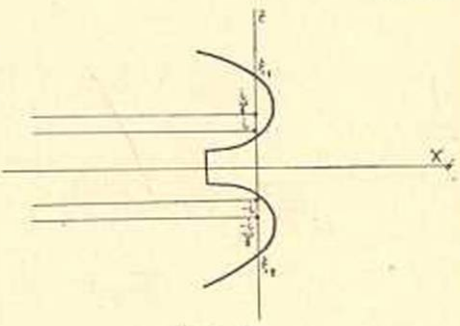
Известно, что седловые точки ξ_ν^0 определяются из условия $f'(\xi)=0$, а стационарный контур определяется уравнением

$$\operatorname{Jm} f(\xi) = \operatorname{Jm} f(\xi_\nu^0). \tag{2.23}$$

При $k \gg 1$ можно ожидать, что главная часть интеграла будет соответствовать интегрированию по малым окрестностям седловых точек

$$\xi_1 = +\frac{it}{\gamma\sqrt{t^2-a^2z^2}} \quad \text{при } k>0, \quad \xi_2 = -\frac{it}{\gamma\sqrt{t^2-a^2z^2}} \quad \text{при } k<0. \tag{2.24}$$

Нетрудно убедиться, что в качестве пути интегрирования (λ) в (2.21) можно взять стационарный контур, изображенный на фиг. 3.



Фиг. 3.

Распространенный по такому контуру интеграл интегрируется по следующей формуле [3]

$$\int\limits_{\lambda} \psi(\xi)e^{kf(\xi)}d\xi = \sum_\nu \psi(\xi_\nu)e^{kf(\xi_\nu)}\sqrt{\frac{2\pi}{k|f''(\xi_\nu)|}}e^{i\theta}, \tag{2.25}$$

где θ—угол контура с осью Ox в точках ξ_ν.

Пользуясь уравнением (2.26), для X_λ получим следующее выражение:

$$X_\lambda = \frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_x(\xi_1)} e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при } k>0, \tag{2.26}$$

где

$$\psi_x(\xi_1) = \frac{[(2\gamma^2-1)t^2-2a^2z^2]a^2z^2\gamma^3(t^2-a^2z^2)}{[(2\gamma^2-1)t^2-2a^2z^2]^2+4az\gamma^3(t^2-a^2z^2)\sqrt{(1-\gamma^2)t^2+\gamma^2a^2z^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(1-\gamma^2 V^2 b^2)\, t^2 - a^4 V^2 z^2},$$

$$f_x(\xi_1) = \frac{i}{a}\sqrt{t^2 - a^2 z^2}, \tag{2.27}$$

$$f_x''(\xi_1) = \frac{(t^2 - a^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^2 z^2}.$$

Аналогично определяя остальные интегралы уравнения (2.5), (2.6), получим

$$Y_\lambda = -\frac{\psi_y(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_y(\xi_1)}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при } k > 0, \tag{2.28}$$

где

$$\psi_y = -\frac{4b^2 z^2 (t^2 - b^2 z^2)^2 \left[(1-\gamma^2)\, t^2 - b^2 z^2\right]}{\left[(t^2 - 2b^2 z^2)^4 - 16 b^2 z^2 (t^2 (1-\gamma^2) - b^2 z^2)\right]\left[(V^2 b^2 - 1)\, t^2 - V^2 z^2 b^4\right]}$$

$$f_y(\xi_1) = \frac{i}{b}\sqrt{t^2 - b^2 z^2}$$

$$f_y''(\xi_1) = \frac{(t^2 - b^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{z^2 b^3};$$

$$Z_\lambda = -\frac{\psi_z(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_z''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_z(\xi_1)}\, e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \text{при } k > 0, \tag{2.29}$$

где

$$\psi_z(\xi_1) = -\frac{\left[(2\gamma^2 - 1)\, t^2 - 2a^2 z^2\right] \gamma^4 (t^2 - a^2 z^2)^2}{\left[(2\gamma^2 - 1)\, t^2 - 2a^2 z^2\right]^4 + 4az\gamma^3 (t^2 - a^2 z^2)\sqrt{(1-\gamma^2)\, t^2 + \gamma^2 a^2 z^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{(1 - V^2 b^2 \gamma^2)\, t^2 + a^4 V^2 t^2}.$$

$$f_z(\xi_1) = \frac{i}{a}\sqrt{t^2 - a^2 z^2},$$

$$f_z''(\xi_1) = \frac{(t^2 - a^2 z^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^2 z^2};$$

$$X_\lambda = -\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_x(\xi_1)}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при } k < 0, \tag{2.30}$$

$$Y_\lambda = \frac{\psi_y(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_y''(\xi_1)\, k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_y(\xi_1)}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при } k < 0, \tag{2.31}$$

$$Z_\lambda = -\frac{\psi_z(\xi_1)}{2\pi i}\left(\frac{2\pi}{f_y''(\xi_1)\,k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{kf_z(\xi_1)} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{при} \quad k<0. \tag{2.32}$$

Вычислим первый интеграл уравнения (1.22)

$$\varphi_1(x, z, t) = -\frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k\sqrt{k}} \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2} + \frac{\pi}{4}\right) dk, \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{(\lambda+2\mu)P_1Vb}{\pi\mu}\frac{\psi_x(\xi_1)}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{f_x''(\xi_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \int_0^\infty \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin kx \frac{dk}{\sqrt{k}}. \tag{2.34}$$

Если подставим

$$\xi = \sqrt{t^2-a^2z^2} - ax, \qquad \eta = \sqrt{t^2-a^2z^2} + ax \tag{2.35}$$

и обозначим

$$\varepsilon_\xi = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \xi>0 \\ -1, & \text{если} \ \xi<0 \end{cases} \qquad \varepsilon_\eta = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \eta>0, \\ -1, & \text{если} \ \eta<0 \end{cases} \tag{2.36}$$

то для интеграла правой стороны уравнения (2.34) получим следующее выражение

$$\int_0^\infty \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin kx \frac{dk}{\sqrt{k}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{a}{|\eta|}}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda + \varepsilon_\eta \sin\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda - \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\frac{a}{|\xi|}}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda + \varepsilon_\xi \sin\lambda}{\sqrt{\lambda}}\, d\lambda. \tag{2.37}$$

Предположим, что $\xi \ll 1$, тогда первым интегралом правой стороны уравнения (2.37) можно пренебречь

$$\int_0^\infty \frac{e^{ikx}}{k\sqrt{k}} \cos\left(\frac{k}{a}\sqrt{t^2-a^2z^2} + \frac{\pi}{4}\right) dk =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\dfrac{|\xi|}{a}}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} + c_2, & \text{если} \ \xi>0 \ \text{(позади фронта)} \\ 0, & \text{если} \ \xi<0 \ \text{(впереди фронта)}. \end{cases} \tag{2.38}$$

Аналогично вычисляя остальные интегралы уравнения (1.22), получим

$$T_{zz_\lambda} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 V b}{2\pi\mu} \frac{\psi_x(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_x(\xi_1)}} -$$

$$- \frac{2\mu P_1 V b}{\pi\mu} \frac{\psi_y(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi_2|}{2af'_y(\xi_1)}} + \frac{\lambda P_1 V b}{2\pi\mu} \frac{\psi_z(\xi_1)}{1} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_z(\xi_1)}} + c_3, \tag{2.39}$$

где ξ определяется уравнением (2.35), а

$$\xi_2 = \sqrt{t^2 - b^2 z^2} - bx. \tag{2.40}$$

Из уравнения (2.39) видно, что поле давления T_{zz_λ} представляет собой волновые пакеты поперечных и продольных волн. Заметим, что постоянные c_1, c_2 и c_3, входящие в равенства (2.13), (2.19) и (2.39), можно принять равными нулю, так как нас интересуют те члены, которые меняются сильно. Легко убедиться, что продольные волны движутся со скоростью $V_1 = \frac{1}{a}$, а поперечные волны — $V_2 = \frac{1}{b}$.

Следовательно, на фронте продольных волн отсутствуют поперечные волны, так как $b > a$ (фиг. 1).

Радиус распространения продольных и поперечных волн будет

$$r_1 = \frac{1}{a} t, \qquad r_2 = \frac{1}{b} t. \tag{2.41}$$

В частях $ACC'A'DA$ есть только продольные волны, и для этой части уравнение (2.39) принимает следующий вид:

$$T_{zz_\lambda} = \frac{(\lambda + 2\mu) P_1 V b}{2\pi\mu} \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_x(\xi_1)}} \psi_x(\xi_1) + \psi_z(\xi_1) \sqrt{\frac{|\xi|}{2af'_z(\xi_1)}} \frac{\lambda P_1 V b}{2\pi\mu}, \tag{2.42}$$

а на фронте продольных волн, когда $\xi = 0$,

$$T_{zz_\lambda} = 0. \tag{2.43}$$

Заметим, что метод „неполного разделения переменных" имеет превосходства перед использованным методом Майлса [5], так как результаты, полученные Майлсом, достигаются этим методом, а решение при $P_1 = \text{const}$ не может быть получено его методом.

Ереванский государственный университет

Поступила 26 IV 196

Զ. Ա. Մարտիրոսյան

ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ՊՐՈՖԻԼՈՎ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է պայթյունից առաջացած հարվածող ալի- ճնշման տարածումը առաձգական համասեռ միջավայրում։ Խնդիրը լուծ- է փոփոխականների ոչ լրիվ անջատման մեթոդով։ Ապացուցված է, ո

առաջանում են երկու տեսակի ալիքային խզեր, որոնք մակերևույթով շարժվում են V և $V_0 = \frac{\theta}{b}$ արագություններով:

Առաջանում են նաև երկայնական ու լայնական ալիքների խզեր, որոնք շարժվում են, համապատասխանաբար՝ $\frac{1}{a}$ և $\frac{1}{b}$ արագություններով: Ճնշման համար ստացված արդյունքները ճիշտ են ալիքի ճակատի բավականաչափ մոտ կետերում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. ИЛ., М., 1955.
2. *Петрашен Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.* О задаче Лэмба в случае полупространства. Ученые записки ЛГУ, серия мат. наук, № 135, вып. 21, 1950.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
4. *Фукс Б. А.* и *Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
5. *Майлс Дж.* О поведении упругого полупространства при движении взрывной волны. Механика. Периодический сборник переводов иностранных статей, № 3. ИЛ, М., 1961.
6. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

С. П. Хачатрян

Приближенный расчет характеристик водности конвективных облаков, обусловленных наличием гигантских ядер конденсации в атмосфере

Вопрос о водности в мощнокучевых и кучеводождевых облаках и, особенно, в их центральной части до настоящего времени не получил своего окончательного разрешения. До недавнего времени в литературе указывалось, что водность в конвективных облаках не может превышать 5 $г/м^3$. Экспериментальные материалы, полученные в ВГИ АН СССР в 1957—1958 гг. [1], показали, что водность в мощнокучевых облаках может достигать 30 $г/м^3$. В последующие годы в зарубежной литературе появились работы, в которых высказывается предположение о наличии в грозовых облаках водности до 30 $г/м^3$ [7, 8]. Однако, эти, пока еще единичные, данные нуждаются в дальнейшем подтверждении.

Сравнительно недавно в нижних слоях атмосферы были обнаружены гигантские ядра конденсации, имеющие радиус более 10 μ. И хотя число таких ядер в атмосфере весьма невелико, в настоящее время существует мнение [1], что основная масса жидкой влаги в облаках обусловлена наличием именно этих ядер конденсации. В настоящей работе сделана попытка получить приближенные данные о возможных величинах характеристик водности конвективных облаков, обусловленных наличием гигантских ядер конденсации в атмосфере.

Вывод расчетных формул

Скорость восходящих потоков в конвективном облаке возрастает с высотой до какой-то максимальной величины W_m на высоте Z_m, а затем уменьшается [2]. Для простоты расчетов можно считать, что скорость восходящих потоков является линейной функцией высоты, т. е.

$$W_Z = aZ_m + a_1(Z_m - Z) + b \qquad \text{при } Z > Z_m, \tag{1}$$

где W_m — скорость восходящего потока на высоте Z, a и a_1 — градиенты скорости W соответственно до и после уровня Z_m (Z и Z_m отсчитываются от уровня нижней границы облака); b — скорость восходящих потоков у нижней границы облака.

Рассмотрим облако с момента его образования. Допустим, что в начальный момент образования облака $(t=0)$ концентрация гигантских ядер в облаке выше уровня Z_m равна нулю, а ниже этого уровня концентрация гигантских ядер не зависит от времени и равна N_1. Так же будем считать, что распределение скорости восходящих потоков по высоте за рассматриваемое время не меняется.

При этих условиях количество гигантских ядер, поступающее в верхнюю часть облака вместе с восходящими потоками, будет зависеть от объема воздуха, приносимого восходящими потоками из области ниже Z_m, и от концентрации гигантских капель N_1 в этой области и очевидно, что за время t через единичную поверхность на уровне Z_m в верхнюю часть облака поднимется число гигантских ядер

$$N_{\Delta Z} = N_1 W_m t; \tag{2}$$

$N_{\Delta Z}$ — есть ничто иное, как количество гигантских ядер* в столбе облачного воздуха с единичным основанием и высотой ΔZ, заключенной между уровнями Z_m и Z_b; Z_b — высота траектории гигантских капель.

Как известно, скорость падения капель при радиусах $R \leqslant 45$ μ равна $V_R = \alpha R^2$. Если ростом капли радиуса R_0 при подъеме пренебречь, то можно сказать, что капля радиуса $R_0 \leqslant 45$ μ может быть поднята восходящими потоками до высоты, где $W_Z = V_R = \alpha R^2$.

Учитывая это, уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\alpha R_0^2 = aZ_m + a_1(Z_m - Z_b) + b.$$

Отсюда найдем Z_b

$$Z_b = \frac{(a + a_1) Z_m + b - \alpha R_0^2}{a_1}.$$

Масса жидкой воды в столбе облачного воздуха единичного сечения и высоты ΔZ равна

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_k \sum N_{\Delta Z i} R_i^3, \tag{3}$$

где ρ_k — плотность капли, $N_{\Delta Z i}$ — число капель радиуса R_i. При постоянном распределении W по высоте, величина M зависит от времени. Эту зависимость в приближенном виде можно получить с помощью следующих рассуждений. Рассмотрим дискретный процесс и предположим, что через каждую единицу времени в область облака, выше уровня Z_m, поступает одинаковое число гигантских капель. Как видно из формулы (2), через единичную поверхность на уровне Z_m в область выше Z_m поступает за единицу времени $N = N_1 W_m$ гигантских капель. Число гигантских капель, пришедшее в объем ΔZ за последнюю

* В дальнейшем понятие гигантских ядер будем отождествлять с понятием гигантских капель, так как в облаке на гигантских ядрах конденсации образуются большие облачные капли, так называемые гигантские капли.

единицу времени, будет иметь наименьший, т. е. первоначальный радиус R_0, а N — число капель, пришедшее за первую единицу времени, вследствие коагуляционного роста будет иметь наибольший радиус R_t. Все остальные группы N числа капель, пришедшие в объем ΔZ за промежуток времени между приходом первой и последней групп, будут иметь размеры между R_0 и R_t в зависимости от времени их нахождения в объеме ΔZ.

Таким образом, сумму капель разных размеров в объеме ΔZ в зависимости от времени можно представить в виде

$$\sum N_{\Delta Z i} R_t = N(R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_t) \quad \text{при } t < t_{\text{кр}}. \tag{4}$$

Попадая в область выше W_Z облачные капли начинают быстро расти. Однако, капли расти бесконечно не могут. Достигая критических размеров $R_{\text{кр}} = 2{,}5$ *мм* капли разбрызгиваются на несколько мелких капель. Обозначим время, необходимое для роста капли от размера R_0 до размера $R_{\text{кр}} = 2{,}5$ *мм* через $t_{\text{кр}}$. Тогда формула (4) будет справедлива для случая, когда время существования облака t меньше $t_{\text{кр}}$. Если делать предположение, что достигая радиуса 2,5 *мм*, размеры облачных капель не изменяются, тогда для случая, когда время существования облака больше $t_{\text{кр}}$, можем записать:

$$\sum N_{\Delta Z i} R_t = N[R_0 + R_1 + R_2 + \cdots + R_t + (t - t_{\text{кр}}) R_{\text{кр}}] \quad \text{при } t > t_{\text{кр}}. \tag{4'}$$

Основное значение для роста облачных частиц радиусом порядка 30—50 μ и больше имеет гравитационная коагуляция. Поэтому будем считать, что рост гигантских капель обусловлен только этим процессом, а остальными процессами роста будем пренебрегать.

Уравнение скорости роста капель вследствие гравитационной коагуляции можно представить в виде [1]:

$$\rho_k \frac{dR}{dt} = \frac{qE}{4}(V_R - V_r), \tag{5}$$

где V_R и V_r — скорость падения крупных и мелких капель R и r, q — водность облака, E — коэффициент захвата, равный 0,85. Как известно, скорость падения капель зависит от их размера. Эта зависимость для капель с радиусами $R < 45\,\mu$ и $45 \leqslant R \leqslant 1000\,\mu$ выражается формулами соответственно $V_R = \alpha R^2$ и $V_R = \beta R$, где α и β — некоторые коэффициенты. Для простоты расчетов в уравнении (5) величиной V_r можно пренебречь как малой величиной по сравнению с V_R.

Тогда для капель радиуса до 1000 μ (5) можно переписать

$$\rho_k \frac{dR}{dt} = \frac{qE}{4} \beta R. \tag{6}$$

Решение уравнения (6) при $t = 0$, $R = R_0$ имеет вид

$$R = R_0 e^{Bt};\qquad (7)$$

B — некоторая постоянная величина, зависящая от q, E и β.

Время $t_{кр}$ находим из уравнения (7), подставляя вместо R_0 и R наличный радиус гигантских капель и радиус, при котором капли разбрызгиваются (т. е. $R_0 = 40\ \mu$, а $R = 2{,}5$ *мм*).

Поскольку водность облака в основном определяется размерами и концентрацией облачных частиц, составляющих крупнокапельную фракцию, то, подставляя (7) в уравнения (4) и (4′), для массы жидкой воды в единичном столбе ΔZ в зависимости от времени получи выражение

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_k N R_0^3 \left(1 + e^{3B} + e^{3\cdot 2B} + e^{3\cdot 3B} + \cdots + e^{3tB}\right) \qquad (8)$$

при $t < t_{кр}$

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho_k N R_0^3 \left[1 + e^{3B} + e^{3\cdot 2B} + \cdots + e^{3\cdot tB} + (t - t_{кр})\, e^{3t_{кр}B}\right] \qquad (8')$$

при $t > t_{кр}$.

Зная M, можем определить среднюю водность $\bar{q}$ облака в столбе ΔZ.

Очевидно, что

$$\bar{q} = \frac{M}{Z_b - Z_m}. \qquad (9)$$

Представляет большой интерес определение максимально возможных значений водности облака вблизи уровня Z_m. Эту задачу можно решить, если допустить, что выше уровня Z_m водность падает с высотой линейно, достигая минимума у верхней границы облака. В этом случае можно написать

$$q_z = q_m - \sigma Z, \qquad (10)$$

где q_z и q_m — водность облака на высотах соответственно Z и Z_m $(Z > Z_m)$, σ — градиент водности. Тогда масса воды в столбе облака единичного сечения, имеющего нижнюю и верхнюю границы соответственно Z_m и Z_b, равна:

$$M = \int\limits_{Z_m}^{Z_b} q_z dZ = \int\limits_{Z_m}^{Z_b} (q_m - \sigma Z)\, dZ. \qquad (11)$$

Интегрируя уравнение (11) в указанных пределах, получим

$$M = q_m \Delta Z - \frac{\sigma}{2}\Delta Z^2, \qquad (12)$$

где $\Delta Z = Z_b - Z_m$.

Обозначая водность на высоте вершины траектории Z_b через q_{min}, уравнение (10) можно переписать в виде

$$q_{\min} = q_m - \sigma (Z_b - Z_m). \quad (13)$$

Подставляя значение σ из (13) в (12), получим

$$q_m = \frac{2M}{Z_b - Z_m} - q_{\min}. \quad (14)$$

Высота Z_b довольно близко совпадает с высотой верхней границы облака. Многочисленные экспериментальные материалы показывают, что водность облака вблизи верхней границы, а следовательно, и вблизи уровня Z_b имеет величину порядка $0{,}05 \div 0{,}1$ *г/м³*.

Имея это ввиду, мы можем переписать (14) в виде:

$$q_m = \frac{2M}{Z_b - Z_m} - 0{,}05 \text{ г/м}^3. \quad (15)$$

Результаты расчетов

По формулам (8′, 9, 15) были проведены расчеты для величин Q, $\bar{q}$ и q_m (количество осадков Q определяется по величине M). Расчеты были проведены для облака, имеющего вертикальную мощность около 5000 *м*, при различных значениях W_m и для различных моментов времени после его образования. При этом использовались следующие значения коэффициентов:

$E = 0{,}85$, $\quad a = a_1 = (4 \div 14) \cdot 10^{-3}$ *сек*$^{-1}$, $\quad b = 2 \cdot 10^2$ *см/сек*,

$q = 1 \cdot 10^{-6}$ *г/см³*, $\quad R_0 = 40\ \mu$, $\quad \alpha = 1{,}26 \cdot 10^6$,

$\beta = 7{,}5 \cdot 10^3$.

По данным [4] концентрация гигантских ядер конденсации, имеющих радиус более 10 μ, равна $2 - 10$/*м³*. Фурнье д'Альб и Латеев [5] указывают, что гигантские гигроскопические ядра конденсации, имеющие радиус 25 μ, обнаруживаются в концентрациях, иногда превышающих 10/*м³*. По измерениям Юнге [6] ядра конденсации радиуса 15—20 μ имеют концентрацию около 10/*м³*. Однако, не все ядра конденсации, имеющиеся в атмосфере, становятся зародышами облачных капель. Только часть их, в зависимости от своей природы, могут стать ядрами облачных капель. Поэтому для сравнения расчеты были проведены для $N_1 = 0{,}5$, $N_1 = 1{,}0$ и $N_1 = 5{,}0$/*м³*.

Результаты расчетов приведены в таблице 1. Анализ таблицы показывает, что водность облака сильно зависит от времени его существования. Например, при $W_m = 15$ *м/сек* и $N_1 = 5$/*м³* через 45 *мин* после образования облака $\bar{q} = 1{,}6$ *г/м³*; $q_m = 3{,}3$ *г/м³*, а через 75 *мин* $\bar{q}$ имеет значение 9,3 *г/м³*, а $q_m = 18{,}5$ *г/м³*. Из таблицы видно, что количество аккумулированной воды сильно зависит от величины концентрации гигантских ядер конденсации, которые по своей природе являются активными. При одних и тех же условиях водность облака при $N_1 = 5$/*м³* в несколько раз превышает водность, полученную при

Величина $\overline{q}$, q_m и Q для различных моментов времени после образования облака и при различных значениях W_m и N_1

Таблица 1

Максимальная скорость ветра W_m м/сек	Средняя водность облака выше уровня Z_m $\overline{q}$ г/м³				Максимальная водность облака вблизи уровня Z_m q_m г/м³				Количество осадков на площадь, равную плоскости горизонтального сечения облака на уровне Z_m Q мм			
	время в минутах				время в минутах				время в минутах			
	30	45	60	75	30	45	60	75	30	45	60	75
					$N_1 = 0,5/м^3$							
10	0,0015	0,10	—	—	0,003	0,19	—	—	<0,1	0,20	—	—
15	0,002	0,16	0,55	0,93	0,004	0,33	1,09	1,85	<0,1	0,37	1,20	2,00
20	0,003	0,20	0,64	1,10	0,016	0,39	1,27	2,19	<0,1	0,40	1,40	2,40
25	0,004	0,25	0,80	1,37	0,018	0,49	1,60	2,70	<0,1	0,50	1,80	3,00
30	0,006	0,32	1,14	1,70	0,120	0,60	2,27	3,40	<0,1	0,70	2,50	3,70
					$N_1 = 1,0/м^3$							
10	0,003	0,20	—	—	0,06	0,38	—	—	<0,1	0,40	—	—
15	0,004	0,32	1,10	1,90	0,08	0,64	2,00	3,70	<0,1	0,74	2,40	4,00
20	0,006	0,40	1,30	2,20	0,12	0,78	2,50	4,30	<0,1	1,00	3,60	6,00
25	0,008	0,50	1,60	2,70	0,16	0,98	3,10	5,30	<0,1	1,00	3,60	6,00
30	0,012	1,13	2,30	3,40	0,24	1,28	4,50	6,70	<0,1	1,40	5,00	7,40
					$N_1 = 5/м^3$							
10	0,015	1,00	—	—	0,30	1,90	—	—	0,1	2,00	—	—
15	0,020	1,60	5,50	9,30	0,40	3,30	10,90	18,50	0,1	3,70	12,00	20,00
20	0,030	2,00	6,40	11,00	0,60	3,90	12,70	21,90	0,1	4,00	14,00	24,00
25	0,040	2,50	8,00	13,70	0,80	4,90	16,00	27,00	0,1	5,00	18,00	30,00
30	0,060	3,20	11,40	17,00	1,20	6,00	22,70	34,00	0,15	7,00	25,00	37,00

расчетах с $N_1 = 1,0/м^3$. Поэтому для более точного определения характеристик водности кучевых облаков необходимо проводить дальнейшее исследование как концентрации, так и природы гигантских ядер конденсации. Результаты расчетов наводят на мысль, что в отдельных случаях, встречающихся в природе сравнительно редко, водность облака может быть примерно на порядок больше тех значений, которые до сих пор были измерены экспериментально.

Так например, по результатам расчета, при $N_1 = 5/м^3$ и $W_m = 30$ *м/сек* через 75 минут после образования облака максимальная водность в нем достигает значения ~ 30 *г/м³*, что же касается количества осадков, то по результатам расчета на площадь, равную плоскости горизонтального сечения облака на уровне Z_m, могут выпадать осадки от десятых долей *мм* до 37 *мм* в зависимости от N_1, W_m и времени образования осадков после возникновения облака.

Как было показано исследованиями [1, 3], основная масса воды облака аккумулируется в верхней половине облака, выше уровня Z_m. Поэтому можно предполагать, что полученные данные дают предсталение о возможных максимальных величинах характеристик водности облака в целом.

Выражаю свою благодарность профессору Г. К. Сулаквелидзе, поставившему задачу и оказавшему помощь в ее решении.

Институт водных проблем
АН Армянской ССР

Поступила 18 VI 1963

Մ. Փ. Խաչատրյան

ՄԹՆՈԼՈՐՏՈՒՄ ԿՈՆԴԵՆՍԱՑՄԱՆ ՀՍԿԱ ՄԻՋՈՒԿՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ ՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐՎԱԾ ԿՈՒՅՏԱՎՈՐ ԱՄՊԵՐԻ ՋՐԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՏԱՐԲԵՐ ԽԱՐԱԿՏԵՐԻՍՏԻԿԱՆԵՐԻ ՄՈՏԱՎՈՐ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում առաջված են կոնվեկտիվ ամպերի ջրայնության տարբեր խարակտերիստիկաների հաշվարկման մոտավոր բանաձևեր։

Այդ բանաձևերի հիման վրա կատարված են հաշվարկներ մթնոլորտում կոնդենսացիայի հսկա միջուկների տարբեր կոնցենտրացիաների համար։ Բերված են միջին և մաքսիմալ ջրայնության հաշվումների արդյունքներն ու հնարավոր տեղումների քանակը այդպիսի ամպերից։

Հոդվածում բերված տվյալների և ուրիշ հետազոտողների տվյալների համեմատությունից արվում է եզրակացություն, որ ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս գաղափար կազմելու ամբողջությամբ վերցրած ամպի ջրայնության խարակտերիստիկաների հնարավոր մեծության մասին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бартишвили Г. С., Бибилашвили Н. Ш., Зайцева А. М., Лапчева В. Ф., Орджоникидзе А. А., Сулаквелидзе Г. К.* Рост капель и градин в мощнокучевом облаке с учетом изменения скорости вертикальных потоков по высоте и физические основы воздействия на градовые процессы. Труды Эльбрусской экспедиции (ВГИ АН СССР), т. 2, 1961.
2. *Бибилашвили Н. Ш.* Некоторые вопросы структуры конвективных потоков в кучевых и мощнокучевых облаках. Труды Эльбрусской экспедиции, том 2, 1961.
3. *Бибилашвили Н. Ш., Лапчева В. Ф., Орджоникидзе А. А., Сулаквелидзе Г. К.* Известия АН СССР, серия геофизич., № 4, 1960.
4. *Боровиков А. М.* Физика облаков. Гимиз, 1961.
5. *Fournier d'Albe E. M.* and *Lateev A. M.* A Preliminary Note on the Large Hydroscopic Particles suspended in the Atmosphere. Bul. de L'Obs. Puy de Dome, I, 1953.
6. *Junge C.* Gesetzmässigkneiten in der Grössenvertailung atmosphärischer Aerosole über dem kontinent. Ber. Dtsch. Wetterdienst. U. S. Zone, 35, 1952.
7. *Marshall J. S.* Inter-relatian of the Fall Speed of Rain and the Updraft Rates in Hail Formation. Nubila, 4, 1961.
8. *Hitschfeld Walter, Douglas R. H.* A Theory of Hail Growth Based on Radar and Surface Studies of Alberta Storms. Proc. 9th Weather Radar Conf. Kansas City, Mo. 1961, S. 1, s. a.

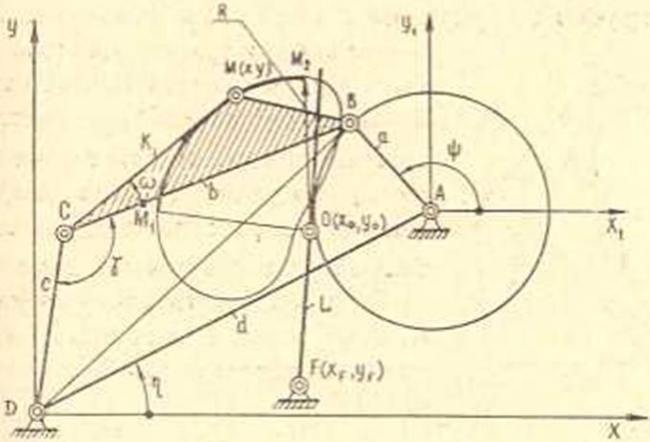
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

М. Б. Эдилян

Об одном аналитическом методе синтеза присоединенной диады механизма с остановкой

Потребность в шарнирных механизмах с остановкой возникает при проектировании различных приспособлений для осуществления технологических процессов, приспособлений для станков, исполнительных устройств станков-автоматов. Синтез механизма с остановкой складывается из проектирования базисной части—шарнирного четырехзвенника *ABCD* и проектирования присоединенной группы *OF* (фиг. 1).



Фиг. 1.

Шарнирный четырехзвенник *ABCD* является круговым направляющим механизмом, т. е. имеет на шатуне точку *M*, траектория которой на некотором своем участке (дуга M_1M_2) приближена к дуге окружности.

Двухповодковая группа одной внешней кинематической парой присоединяется к этой точке механизма, а второй—к стойке. Длина звена, присоединяемого к шатунной точке, равна радиусу аппроксимирующей окружности. Длина второго звена и положение его неподвижного шарнира *F* должны быть выбраны так, что внутренний шарнир присоединяемой группы за время прохождения шатунной точкой участка, близкого к окружности, должен совпадать с центром этой окружности. Вследствие этого второе звено *OF* группы *MOF*, являющееся ведомым звеном механизма, имеет выстой, продолжитель-ность которого равна времени прохождения точкой шатуна участ[ка] траектории, близкого к дуге окружности.

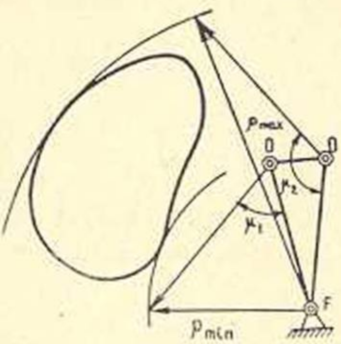
При присоединении к уже существующему механизму ABC[D] новой структурной группы MOF должны быть выдержаны следующи[е] два условия:

1. Присоединяемая группа не должна стеснять движение базис-ного механизма.

2. Угол передачи между звеньями присоединяемой группы н[е] должен принимать чрезмерно малых и чрезмерно больших значени[й] (считаем, что угол передачи меняется от 0° до 180°).

Угол передачи принимает свое наименьшее (μ_1) и наибольше[е] (μ_2) значения в положениях наименьшего и наибольшего удалени[я] шатунной кривой от центра неподвижного шарнира F. Положени[е] наименьшего удаления шатунной кривой от центра неподвижного шарнира называется внутренним положением присоединенной группы, положение наибольшего удаления—внешним положением присоеди-ненной группы.

В работе [2] рассмотрены методы графического синтеза присо-единенной группы по указанным выше двум условиям. По условию нестеснимости траектория (точки M) може[т] быть воспроизведена полностью, если наи-большее расстояние ρ_{max} (фиг. 2) непод-вижного центра от траектории будет мень-ше суммы длин звеньев диады MOF, [а] наименьшее расстояние ρ_{min} этого центра больше разности тех же длин.



Фиг. 2.

Если обозначить длину звена MO чер[ез] R, а OF через L и принять, что наимень-ший угол передачи $\mu_1 = 30°$, а наибольший $\mu_2 = 150°$, т. е.

$$\sin\mu \geqslant \frac{1}{2},$$

то условия нестеснимости движения присоединенной группы и допу-стимых значений углов передачи выразятся в виде:

$$|R^2 + L^2 - \rho^2| \leqslant \sqrt{3}\, RL. \qquad (\ldots$$

$$\rho_{min} \leqslant \rho \leqslant \rho_{max},$$

где

$$\rho^2_{max} = R^2 + L^2 - 2RL\cos\mu_2,$$

$$\rho^2_{min} = R^2 + L^2 - 2RL\cos\mu_1,$$

ρ — текущее значение расстояния между точками F и M. Координат[ы] точки B выражаются следующим образом:

$$x_B = d\cos\eta + a\cos\psi,$$
$$y_B = d\sin\eta + a\sin\psi, \tag{3}$$

где ψ — текущий угол между кривошипом AB и положительным направлением оси x_1 (фиг. 1).

Н. И. Левитским [1] выведены реккурентные соотношения между координатами точек M и B в виде:

$$x = x_B + \frac{V_B Q_B + W_B T_B}{2b},$$
$$y = y_B + \frac{V_B T_B - W_B Q_B}{2b}, \tag{4}$$

где

$$V_B = \pm \frac{\sqrt{4b^2\rho_B^2 - (\rho_B^2 + b^2 - c^2)^2}}{\rho_B^2}\,*, \tag{5}$$

$$W_B = \frac{\rho_B^2 + b^2 - c^2}{\rho_B^2},$$

$$Q_B = -x_B k\sin\omega - y_B(k\cos\omega - b), \quad T_B = -y_B k\sin\omega + x_B(k\cos\omega - b).$$

Условие проворачивания звена AB на 2π и DC на угол $< 2\pi$, записанное в виде:

$$a + d < b + c,$$
$$a + b < d + c, \tag{6}$$
$$a + c < b + d,$$

исключает тот случай, когда звенья DC и BC вытянуты в одну прямую. В самом деле, координаты точки C выражаются следующим образом:

$$x_c = c\,\frac{x_B\cos\gamma \mp y_B\sin\gamma}{\rho_B},$$
$$y_c = c\,\frac{y_B\cos\gamma \pm x_B\sin\gamma}{\rho_B}, \tag{7}$$

где γ — угол между звеньями DC и BC.

При $\gamma = 0$ условие (6) не выполняется и нарушается определенность движения и неразрывость шатунной кривой.

Вычисляя (с малым шагом изменения параметра ψ в пределах $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$) координаты точки B, затем по соотношениям (4) координаты точек шатунной кривой, задавшись из конструктивных соображений произвольным положением точки F в плоскости YOX (напри-

---

* Знак перед радикалом V_B выбирается в зависимости от того, какая из двух возможных шатунных кривых должна быть приближена к заданной траектории.

мер, прямоугольной сеткой варьируемых точек x_F и y_F), проверяются условия (1), в которых

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2}, \\
L &= \sqrt{(x_F - x_0)^2 + (y_F - y_0)^2}\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Предполагается, что предварительно просчитаны на цифровой машине семейства круговых направляющих механизмов, удовлетворяющих определенным логическим условиям, сформулированным в [3].

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 21 V 1963

Մ. Բ. Էդիլյան

ԿԱՆԳՆՈՒՄՈՎ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՀԱՐԱԿԻՑ ԴԻԱԴԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՄԻ ԱՆԱԼԻՏԻԿ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Տվյալ հոդվածը հանդիսանում է [3] աշխատության շարունակությունը: Այստեղ առաջարկված է B և M կետերի կոորդինատների միջև եղած ռեկուրենտ հարաբերությունների միջոցով հոդակապային կանգնումներով մեխանիզմներին միացվող դիադի նախագծման անալիտիկ մեթոդ: Այս մեխանիզմները վերջին ժամանակներս լայն կիրառում են գտնում ավտոմատ սարքերում, որպես գործող օրգաններ: Դիադի անշարժ F կենտրոնը ընտրված է շարժման հնարավորությունից և փոխանցման թույլատրելի անկյունից:

Աշխատության վերջնական նպատակն է վերոհիշյալ մեխանիզմների մասին տեղեկագիրք կազմելը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. *Артоболевский И. И., Добровольский В. В., Блох З. Ш.* Синтез механизмов. ГГТИ, М., 1944.
3. *Эдилян М. Б.* Применение электронно-вычислительных машин для синтеза несимметричного направляющего механизма. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, вып. 5, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э. Д. Газазян, О. С. Мергелян

Излучение Вавилова-Черенкова линейными зарядами и пучками конечных размеров в оптически активной среде

В работе рассмотрено излучение Вавилова—Черенкова линейными зарядами и пучками конечных размеров в изотропной оптически активной среде, получены выражения для полей и потерь энергии, исследованы спектр и поляризация возникающего излучения, рассмотрена связь между размерами заряда и спектром излучения. При $a \to 0$ результаты настоящей работы согласуются с результатами работы [1]. В работе рассмотрено также излучение бесконечной заряженной нити в оптически активной среде.

1. Пусть линейный заряд q длины $2a$, расположенный вдоль оси y, движется по направлению z со скоростью $\vec{V}$. Тогда для плотности заряда и тока мы имеем [2]

$$\begin{gathered}\rho = \frac{q}{2a}\,\delta(x)\,\delta(z-vt)\,\sigma(y),\\ \vec{j} = \frac{q\vec{v}}{2a}\,\delta(x)\,\delta(z-vt)\,\sigma(y),\end{gathered}\tag{1.1}$$

где

$$\sigma(y) = \begin{cases}1 & |y| \leqslant a\\ 0 & |y| > a.\end{cases}$$

Уравнения поля в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\frac{q\vec{v}}{2a}\,\delta(x)\,\delta(z-vt)\,\sigma(y),\\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\vec{B} = 0,\\ \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\frac{q}{2a}\,\delta(x)\,\delta(z-vt)\,\sigma(y).\end{gathered}\tag{1.2}$$

Представив $\sigma(y)$ в виде

$$\sigma(y)=\int\sigma_0(k_y)e^{ik_y y}\,dk_y, \qquad (1.3)$$

где

$$\sigma_0(k_y)=\frac{\sin(k_y a)}{\pi k_y},$$

запишем поля и токи в виде трехкратных интегралов Фурье

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\int\vec{E}(\vec{k})\,e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}d\vec{k}, \qquad (1.4)$$

где $\omega=(\vec{k}\vec{v})$, $\vec{k}=\vec{k}\left(k_x,\ k_y,\ \frac{\omega}{v}\right)$, $d\vec{k}=dk_x dk_y\frac{d\omega}{v}$.

Уравнения поля для Фурье-компонент примут вид

$$i[\vec{k}\vec{H}(\vec{k})]=-\frac{i\omega}{c}\vec{D}(\vec{k})+\frac{q\vec{v}}{2\pi^2 ac}\frac{\sin(k_y a)}{k_y},$$

$$i[\vec{k}\vec{E}(\vec{k})]=\frac{i\omega}{c}\vec{B}(\vec{k}), \qquad (1.5)$$

$$(\vec{k}\vec{B}(\vec{k}))=0,$$

$$i(\vec{k}\vec{D}(\vec{k}))=\frac{q}{2\pi^2}\frac{\sin(k_y a)}{k_y a}.$$

Материальные уравнения для Фурье-компонент полей в оптически активной среде имеют вид [3]

$$\vec{D}(\vec{k})=\varepsilon\vec{E}(\vec{k})+\frac{i\gamma}{k}[\vec{k}\vec{E}(\vec{k})], \qquad \vec{B}(\vec{k})=\mu\vec{H}(\vec{k}).$$

Разложим поля на продольную и поперечную составляющие $\vec{E}^l(\vec{k})\parallel\vec{k}$ и $\vec{E}^n(\vec{k})\perp\vec{k}$.

Из уравнений (1.5) для $\vec{E}^l(\vec{k})$ и $\vec{E}^n(\vec{k})$ получим следующие выражения:

$$\vec{E}^l(\vec{k})=-\frac{iq\sin(k_y a)}{2\pi^2\varepsilon k_y a}\frac{\vec{k}}{k^2},$$

$$\vec{E}^n(\vec{k})=iq\frac{\sin(k_y a)}{2\pi^2 k_y a}\frac{\omega\mu}{c^2}\frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu-k^2\right)\left(\frac{\omega\vec{k}}{k^2}-\vec{v}\right)+i\frac{\gamma\mu}{kc^2}[\vec{k}\vec{v}]}{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}n_1^2\right)\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}n_2^2\right)}, \qquad (1.6)$$

где $n_1^2=\mu(\varepsilon+\gamma)$, $n_2^2=\mu(\varepsilon-\gamma)$.

Поле $\vec{E}^l(\vec{k})$ описывает потери на поляризацию и вклада в излучение не дает. Поэтому в дальнейшем под $\vec{E}(\vec{k})$ мы будем понимать $\vec{E}^n(\vec{k})$.

Поле излучения имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\, d\vec{k}. \tag{1.7}$$

Для получения частотного спектра полей необходимо проинтегрировать выражение (1.7) по k_y и k_x.

Интеграл по k_y сводится к вычетам в точках

$$k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} S_1^2 - k_x^2} \quad \text{и} \quad k_y = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} S_2^2 - k_x^2},$$

где $S_{1,2}^2 = \beta^2 n_{1,2}^2 - 1$, $\beta = \frac{v}{c}$.

Введем цилиндрическую систему координат

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi, \\ y &= \rho \cos\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Интегрирование по k_x произведем методом перевала (см., например, [4]), что дает нам выражения для полей при больших ρ

$$\rho \gg \frac{2\pi v}{\omega S_{1,2} \sin^2\varphi}.$$

Для полей излучения таким образом получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(2)}(\vec{r}, t), \\ \vec{E}^{(1,2)}(\vec{r}, t) &= \vec{E}^{(1,2)}_{\text{tang}}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(1,2)}_{\vec{v}}(\vec{r}, t), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $\vec{E}^{(1,2)}_{\text{tang}}$ — составляющая поля излучения в плоскости, перпендикулярной траектории частицы.

Введя направление φ единичным вектором $\vec{n}_\varphi = \frac{[\vec{\rho}\vec{v}]}{\rho v}$, выражения для полей можно записать в следующем виде:

$$\vec{E}^{(1)}_{\text{tang}}(\vec{r}, t) = \frac{q}{2\sqrt{2\pi\rho}\, a v} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-i\,\frac{\omega}{v} S_1}\, \frac{\sin\left(a \frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi\right)}{\frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi}\, \frac{\mu}{n_1} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{n_1}\frac{\vec{\rho}}{\rho} + i\beta\vec{n}_\varphi\right) e^{i\left(\frac{\omega}{v} S_1\rho + \frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega, \tag{1.10}$$

$$\vec{E}^{(1)}_{\vec{v}} = -\frac{q}{2\sqrt{2\pi\rho}\, a v} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-i\frac{\omega}{v} S_1}\, \frac{\sin\left(a \frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi\right)}{\frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi} \times$$

$$\times \frac{\mu}{n_1^2} S_1 e^{i\left(\frac{\omega}{v} S_1\rho + \frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega.$$

Поля (1.10) описывают поляризованные по кругу вправо излучения. Плоскость поляризации этого излучения (плоскость, проведенная через $\vec{E}$ и ось z) делает полный оборот на длине волны $\lambda_1 = \frac{2\pi c}{\omega n_1}$ в направлении от $\vec{\rho}$ к $-[\vec{\rho}\,\vec{v}]$.

Для $\vec{E}^{(2)}(\vec{r}t)$ имеем

$$\vec{E}^{(2)}_{\text{tang}}(\vec{r},\ t) = \frac{q}{2\sqrt{2\pi\rho\, av}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-i\frac{\omega}{v} S_2} \frac{\sin\left(a\frac{|\omega|}{v} S_2 \cos\varphi\right)}{\frac{|\omega|}{v} S_2 \cos\varphi} \frac{\mu}{n_2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{n_2}\frac{\vec{\rho}}{\rho} - i\beta \vec{n}_\varphi\right) e^{i\left(\frac{\omega}{v}S_2\rho + \frac{\omega}{v}z - \omega t\right)} d\omega, \tag{1.11}$$

$$\vec{E}^{(2)}_{\vec{v}}(\vec{r},\ t) = -\frac{q}{2\sqrt{2\pi\rho\, av}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-\frac{\omega}{v} S_2} \frac{\sin\left(a\frac{|\omega|}{v} S_2 \cos\varphi\right)}{\frac{|\omega|}{v} S_2 \cos\varphi} \times$$

$$\times \frac{\mu}{n_2^2} S_2 e^{i\left(\frac{\omega}{v}S_2\rho + \frac{\omega}{v}z - \omega t\right)} d\omega.$$

Поля (1.11) описывают поляризованное по кругу влево излучение. Плоскость поляризации вращается в направлении $\vec{\rho} \to [\vec{\rho}\,\vec{v}]$ и делает полный оборот на длине волны левополяризованного излучения $\lambda_2 = \frac{2\pi c}{\omega n_2}$.

Из уравнений поля с помощью выражений (1.10)—(1.11) нетрудно получить выражения для магнитных полей

$$\vec{H}^{(1,2)}(\vec{r},\ t) = H_\rho \frac{\vec{\rho}}{\rho} + H^{(1,2)}_\varphi \vec{n}_\varphi + H^{(1,2)}_{\vec{v}} \frac{\vec{v}}{v}. \tag{1.12}$$

Энергия, излученная зарядом на единице пути, дается вектором Пойнтинга

$$-\frac{dw}{dz} = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{E}\vec{H}]_\rho \rho\, d\varphi\, dt, \tag{1.13}$$

что после интегрирования по t дает

$$-\frac{dw}{dz} = \frac{q^2}{4\pi c^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\beta n_1 > 1} \mu\omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_1^2}\right) \frac{\sin^2\left(a\frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi\right)}{\left(a\frac{|\omega|}{v} S_1 \cos\varphi\right)^2} d\omega + \right.$$

$$+\int\limits_{\beta n_2>1} \mu\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n_2^2}\right)\frac{\sin^2\left(a\frac{|\omega|}{v}S_2\cos\varphi\right)}{\left(a\frac{\omega}{v}S_2\cos\varphi\right)^2}d\omega\Bigg)d\varphi. \tag{1.14}$$

Первый член в формуле (1.14) описывает правополяризованное излучение, а второй член есть интенсивность левополяризованного излучения. Как видно из формулы (1.14), частоты

$$\frac{|\omega|}{v}S_{1,2}a\cos\varphi=\pi k, \tag{1.15}$$

где k — целое число, под углом φ не наблюдаются.

2. Пусть теперь линейный заряд q перемещается вдоль оси y, т. е. плотность тока имеет вид

$$\vec{j}=\rho\vec{v}=\frac{q\vec{v}}{2a}\delta(x)\sigma(y-vt)\delta(z), \tag{2.1}$$

где

$$\sigma(y-vt)=\begin{cases}1 & |y-vt|\leqslant a\\ 0 & |y-vt|>a.\end{cases}$$

Тогда для потерь энергии такого пучка в оптически активной среде имеем

$$-\frac{dw}{dy}=\frac{q^2}{2a^2c^2}\left\{\int\limits_{\beta n_1>1}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v}a\right)}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n_1^2}\right)\mu\omega d\omega+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\beta n_2>1}\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v}a\right)}{\left(\frac{\omega}{v}\right)^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n_2^2}\right)\mu\omega d\omega\right\}. \tag{2.2}$$

Из формулы (2.2) видно, что частоты $\frac{\omega}{v}a=\pi k$ в спектре излучения отсутствуют.

При $a\to 0$ формулы (1.14) и (2.2) переходят в соответствующие формулы для точечного заряда [1]. В формуле (1.14) линейный заряд можно считать точечным, если

$$a\ll\frac{\lambda}{2\pi\sqrt{1-\frac{1}{\beta^2 n_{1,2}^2}}}. \tag{2.3}$$

В формуле (2.2) заряд можно считать точечным, если

$$a\ll\beta n_{1,2}\frac{\lambda}{2\pi}. \tag{2.4}$$

3. Если имеем сгусток заряженных частиц в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2d$, то плотность тока имеет вид

$$\vec{i} = \rho\vec{v} = \frac{q}{8abd}\,\sigma(x)\,\sigma(y)\,\sigma(z - vt), \tag{3.1}$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant b \\ 0 & |x| > b, \end{cases}$$

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1 & |y| \leqslant a \\ 0 & |y| > a, \end{cases}$$

$$\sigma(z - vt) = \begin{cases} 1 & |z - vt| < d \\ 0 & |z - vt| > d. \end{cases}$$

Тогда для потерь энергии имеем следующую формулу:

$$-\frac{dw}{dz} = \frac{q^2}{4\pi c^2}\int\limits_0^{\pi/2}\left\{\int\limits_{\beta n_1 > 1}\frac{\sin^2\left(\frac{|\omega|}{v}S_1 b\sin\varphi\right)}{\left(\frac{|\omega|}{v}S_1 b\sin\varphi\right)^2}\,\frac{\sin^2\left(\frac{|\omega|}{v}S_1 a\cos\varphi\right)}{\left(\frac{\omega}{v}S_1 a\cos\varphi\right)^2}\times\right.$$

$$\times\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v}d\right)}{\frac{\omega^2}{v^2}d^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_1^2}\right)\mu\omega\,d\omega + \int\limits_{\beta n_2 > 1}\frac{\sin^2\left(\frac{|\omega|}{v}S_2 b\sin\varphi\right)}{\left(\frac{|\omega|}{v}S_2 b\sin\varphi\right)^2}\times$$

$$\left.\times\frac{\sin^2\left(\frac{|\omega|}{v}S_2 a\cos\varphi\right)}{\left(\frac{|\omega|}{v}S_2 a\cos\varphi\right)^2}\,\frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{v}d\right)}{\frac{\omega^2}{v^2}d^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_2^2}\right)\mu\omega\,d\omega\right\}d\varphi. \tag{3.2}$$

4. Рассмотрим излучение бесконечной заряженной нити. Для этого в уравнениях поля (1.1) надо положить $a \to \infty$. В этом случае $\sigma(y) = 1$ и вместо $\frac{q}{2a}$ мы будем писать q_0 — линейную плотность заряда. Тогда для Фурье-компонент поля излучения имеем

$$\vec{E}(\vec{k}) = \frac{iq_0}{\pi}\,\frac{\omega\mu}{c^2}\,\frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - k^2\right)\left(\frac{\omega\vec{k}}{k^2} - \vec{v}\right) + \frac{i\gamma\mu\omega^2}{c^2 k}\,[\vec{k}\vec{v}]}{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}n_1^2\right)\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}n_2^2\right)}$$

$$\vec{k} = \vec{k}(k_x,\ k_z), \qquad \omega = k_z v, \qquad d\vec{k} = dk_x\frac{d\omega}{v}. \tag{4.1}$$

Интегрируя выражение

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{E}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d\vec{k}$$

с Фурье-компонентой (4.1) по k_x, получим

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}^{(1)}(\vec{r}, t) + \vec{E}^{(2)}(\vec{r}, t), \qquad (4.2)$$

где

$$E_x^{(1,2)}(\vec{r}, t) = \frac{q_0}{2v} \int \frac{\mu}{n_{1,2}^2}\, e^{i\left(\frac{\omega}{v} S_{1,2} x + \frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega;$$

$$E_y^{(1,2)}(\vec{r}, t) = \pm\, i \frac{q_0}{2c} \int \frac{\mu}{n_{1,2}}\, e^{i\left(\frac{\omega}{v} S_{1,2} x + \frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega,$$

$$E_z^{(1,2)}(\vec{r}, t) = -\frac{q_0}{2v} \int \frac{\mu}{n_{1,2}^2} S_{1,2}\, e^{i\left(\frac{\omega}{v} S_{1,2} x + \frac{\omega}{v} z - \omega t\right)} d\omega.$$

Индексы 1, 2 соответствуют правой и левой поляризации излучения.

Плоскость поляризации правополяризованного излучения вращается в направлении $x \to y$ и делает полный оборот на длине волны. Аналогично плоскость поляризации левополяризованного излучения вращается в направлении $x \to -y$.

Потери энергии единицей длины нити на единице пути даются формулой

$$-\frac{dw}{dz} = \frac{q_0^2}{v}\left(\int\limits_{\beta n_1 > 1} \frac{\mu S_1}{n_1^2} d\omega + \int\limits_{\beta n_2 > 1} \frac{\mu S_2}{n_2^2} d\omega\right). \qquad (4.3)$$

Поступила 20 V 1963

Է. Դ. Գազազյան, Հ. Ս. Մերգելյան

ԳԾԱՅԻՆ ԼԻՑՔԵՐԻ ԵՎ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՉԱՓՍԵՐԻ ԽՏԻԼՆԵՐԻ ՉԵՐԵՆԿՈՎՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ ՕՊՏԻԿՈՐԵՆ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է Վավիլով-Չերենկովի ճառագայթումը իզոտրոպ, օպտիկորեն ակտիվ միջավայրերում: Ստացված են արտահայտությունները դաշտերի և ինտենսիվությունների համար, ուսումնասիրված են ծագող ճառագայթման սպեկտրն ու բևեռացումը, դիտարկված է լիցքի չափերի և ճառագայթման սպեկտրի միջև գոյություն ունեցող կապը:

Աշխատության մեջ դիտարկված է նաև անվերջ մեծ լիցքավորված թելի ճառագայթումը օպտիկորեն ակտիվ միջավայրում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотовский Б. М., Мергелян О. С.* Теория излучения Вавилова—Черенкова в изотропной оптически активной среде. Оптика и спектроскопия, **14**, 3, 1963.
2. *Аматуни А. Ц.* Переходное излучение периодически следующих друг за другом сгустков заряженных частиц. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, 1, 1962.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
4. *Гарибян Г. М.* К теории переходного излучения. ЖЭТФ, **33**, 1403, 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. М. Седракян

Излучение заряженной частицы, пересекающей металлический экран

В работе [3] было рассмотрено излучение частицы, пролетающей мимо металлического экрана, связанное с дифракцией электромагнитного поля частицы на металлическом экране. В работах [2], [4] рассматривалось излучение, появляющееся при пересечении заряженной частицей металлической плоскости. Ниже будет рассмотрено излучение, возникающее при пересечении заряженной частицей идеальной проводящей полуплоскости на заданном расстоянии от края полуплоскости. В этом случае мы имеем, с одной стороны, излучение заряженной частицы, пересекающей экран, связанное с дифракцией ее поля на металлическом экране, а с другой стороны, поправки к переходному излучению заряженной частицы при наличии края экрана.

Пусть траектория частицы перпендикулярна ребру экрана и пересекает экран на расстоянии d от его края. Рассмотренный нами случай интересен еще тем, что позволяет найти точное решение задачи при произвольной скорости частицы, в то время как аналогичные задачи были рассмотрены ранее для случая медленных $\beta \ll 1$ и быстрых $(1-\beta \ll 1)$ частиц [5—7]. Так как потери на излучение малы, то можно считать, что частица движется с постоянной скоростью.

Расположим ось z вдоль ребра экрана, а ось $0x$ в плоскости экрана (фиг. 1). Обозначим: θ — угол наклона траектории частицы к плоскости, d — расстояние от ребра экрана до точки пересечения траектории частицы с плоскостью экрана.

Чтобы найти электрические и магнитные поля, созданные частицей, необходимо решить уравнения Максвелла при граничных условиях, налагаемых наличием металлического идеально проводящего экрана. В дальнейшем удобно использовать электромагнитные потенциалы A° и A, где $A^\circ = \{\vec{A}^\circ, \varphi^\circ\}$ — поле частицы в свободном пространстве, а $A = \{\vec{A}, \varphi\}$ — поле, наведенное индуцированными зарядами и токами на экране. Связь электромагнитных полей с потенциалами дается следующими соотношениями

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}.$$

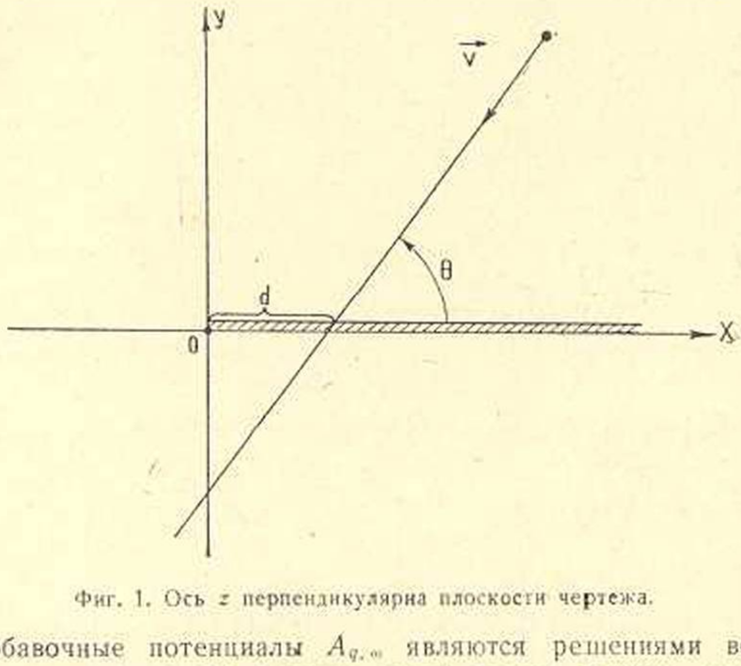
Введем $A_{q,\omega}$ следующим образом:

$$A_{q,\omega}(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}, t)e^{iqz+i\omega t}\,dzdt,$$

$$j_{q,\omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} j(x, z, t)e^{iqz+i\omega t}\,dzdt,$$

где

$j(x, z, t) = \left\{\frac{1}{c}\vec{j}(x, z, t),\ \rho(x, z, t)\right\}$ — индуцированные токи и заряды на экране, а $A(\vec{r}, t)$ — добавочный потенциал, обусловленный ими.



Фиг. 1. Ось z перпендикулярна плоскости чертежа.

Добавочные потенциалы $A_{q,\omega}$ являются решениями волнового уравнения, где с правой стороны стоят заряды и токи, наведенные на экран. Решение волнового уравнения

$$A_{q,\omega}(x, y) = i\pi\int_{0}^{\infty} H_0^{(1)}\left(p\sqrt{y^2 + (x-\xi)^2}\right) j_{q,\omega}(\xi)\,d\xi, \tag{2}$$

где $p = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2}$.

Обозначим потенциалы на поверхности экрана через $\overline{A}_{q,\omega}$, тогда представляя $j_{q,\omega}(x)$ интегралом Фурье по переменной x, мы можем написать

$$\overline{A}_{q,\omega}(x) = i\,(2\pi)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{j_{q,\omega}(\alpha)e^{-i\alpha x}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\,d\alpha. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) и имея в виду, что $\vec{A}_{q,\omega}$ не имеет y компоненты, получим компоненты $\overline{E}_x$ и $\overline{E}_z$ на плоскости экрана

$$\begin{aligned}
\overline{E}_x &= -\,(2\pi)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\alpha\varphi_{q,\omega}(\alpha) + \frac{\omega}{c^2}\,j_x(\alpha)\right]\frac{e^{-i\alpha x}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\,d\alpha,\\
\overline{E}_z &= -\,(2\pi)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[q\varphi_{q,\omega}(\alpha) + \frac{\omega}{c^2}\,j_z(\alpha)\right]\frac{e^{-i\alpha x}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\,d\alpha.
\end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначения

$$\alpha\varphi_{q,\omega}(\alpha) + \frac{\omega}{c^2}\,j_x(\alpha) = -\,\frac{1}{2\pi}E_x(\alpha)\sqrt{p^2-\alpha^2},$$

$$q\varphi_{q,\omega}(\alpha) + \frac{\omega}{c^2}\,j_z(\alpha) = -\,\frac{1}{2\pi}E_z(\alpha)\sqrt{p^2-\alpha^2}.$$

Тогда формула (4) запишется в следующем виде

$$\begin{aligned}
\overline{E}_x &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_x(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha,\\
\overline{E}_z &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_z(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha.
\end{aligned} \tag{4'}$$

Поля, вызванные поверхностными токами и зарядами, должны быть такие, чтобы на поверхности экрана тангенциальные компоненты полного электрического поля равнялись нулю, т. е. $\overline{E}_x$ и $\overline{E}_z$ — компоненты полей излучения должны удовлетворять следующим граничным условиям

$$\begin{aligned}
\overline{E}_x &= -E_x^0 \quad \text{при} \quad x>0,\quad y=0,\\
\overline{E}_z &= -E_z^0 \quad \text{при} \quad x>0,\quad y=0,
\end{aligned} \tag{5}$$

где E_x^0 и E_z^0 — Фурье-компоненты тангенциальных слагаемых электрического поля равномерно движущегося заряда при отсутствии экрана на поверхности $x>0$, $y=0$.

E_x^0 и E_z^0 на поверхности экрана имеют значения

$$E_x^0 = \frac{e}{2\pi ac}\left[ik\gamma^2\cos\theta \mp \frac{a\sin\theta}{\beta}\right]e^{-i\frac{\omega}{v}x\cos\theta \pm a(x-d)\sin\theta},$$

$$E_z^0 = \frac{e}{2\pi ac}\frac{iq}{\beta} e^{-i\frac{\omega}{v}x\cos\theta \pm a(x-d)\sin\theta}, \tag{6}$$

где верхний знак соответствует точкам поверхности $0 \leqslant x < d$, а нижний $- x > d$; $a = \sqrt{q^2 + k^2\gamma^2}$, где $\gamma = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}$, $k = \frac{\omega}{c}$. Подставляя (6) в правые части условий (5), мы получим интегральное уравнение для неизвестных функций $E_x(\alpha)$ и $E_z(\alpha)$ при $x > 0$. Для получения замкнутой системы интегральных уравнений для $E_x(\alpha)$ и $E_z(\alpha)$ воспользуемся условием, что при $y = 0$, $x < 0$ поверхностные токи и заряды равняются нулю. Тогда мы получим два интегральных уравнения типа

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} E_x(\alpha)\,\lambda(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} E_z(\alpha)\,\lambda(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\lambda(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - p^2}$. Группируя первое из уравнений (7) с первым уравнением (5) и второе из (7) со вторым из (5), мы получим две системы парных интегральных уравнений для определения неизвестных функций $E_x(\alpha)$ и $E_z(\alpha)$. Так как эти уравнения аналогичны, достаточно рассмотреть решение только для $E_x(\alpha)$. Парные интегральные уравнения для $E_x(\alpha)$ имеют следующий вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} E_x(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha = -E_x^0(x) \quad \text{при} \quad x > 0, \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty} E_x(\alpha)\,\lambda(\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha = 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где $E_x^0(x)$ дается формулой (6). Решение уравнения (7) можно провести методом, изложенным в § 2.8 книги [1]. Результат имеет следующий вид

$$E_x(\alpha) = -2^{-1/2}\pi^{-1}(\alpha - p)^{-1/2} e^{\frac{3i\pi}{4}} \int_0^{\infty} e^{i(\alpha-p)u}\,du \frac{d}{du}\int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ip(u+\xi)} E_x^0(u+\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Подставляя значение функции $E_x^0(u+\xi)$ из (6) и проведя интегрирование по u и ξ, мы получим выражение для Фурье-компоненты $E_x(\alpha)$

$$E_x(\alpha)=\frac{e}{2\sqrt{2}\,\pi^2 ac}e^{\frac{3i\pi}{4}}\left\{(\alpha-p)^{1/2}e^{i\alpha d-i\frac{\omega}{v}d\cos\theta}\left[\frac{ik\gamma^2\cos\theta+\dfrac{a\sin\theta}{\beta}}{\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{ik\gamma^2\cos\theta-\dfrac{a\sin\theta}{\beta}}{\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta}\right]\int\limits_0^d\xi^{-1/2}e^{-i(\alpha-p)\xi}\,d\xi-$$

$$-\frac{\left(ik\gamma^2\cos\theta-\dfrac{a\sin\theta}{\beta}\right)\left(p-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta\right)A_1(d)}{(\alpha-p)^{1/2}\left(\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta\right)}-$$

$$\left.-\frac{\left(ik\gamma^2\cos\theta+\dfrac{a\sin\theta}{\beta}\right)\left(p-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta\right)A_2(d)}{(\alpha-p)^{\frac{1}{2}}\left(\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta\right)}\right\}, \qquad (10)$$

где

$$A_1(d)=\int\limits_0^d\xi^{-1/2}e^{ip\xi-i\frac{\omega}{v}\xi\cos\theta+a(\xi-d)\sin\theta}\,d\xi,$$

$$A_2(d)=\int\limits_d^\infty\xi^{-1/2}e^{ip\xi-i\frac{\omega}{v}\xi\cos\theta+a(d-\xi)\sin\theta}\,d\xi.$$

Аналогичным образом решается пара интегральных уравнений для неизвестной функции $E_z(\alpha)$. Для нее получаем следующее выражение

$$E_z(\alpha)=\frac{ieq\,e^{\frac{3i\pi}{4}}}{2\sqrt{2}\,\pi^2 ae\beta}\left\{(\alpha-p)^{1/2}e^{i\alpha d-i\frac{\omega}{v}d\cos\theta}\left[\frac{1}{\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta}\right]\int\limits_0^d\xi^{-1/2}e^{-i(\alpha-p)\xi}\,d\xi-$$

$$-\frac{\left(p-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta\right)A_1(d)}{(\alpha-p)^{1/2}\left(\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta-ia\sin\theta\right)}-$$

$$\left.-\frac{\left(p-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta\right)A_2(d)}{(\alpha-p)^{1/2}\left(\alpha-\dfrac{\omega}{v}\cos\theta+ia\sin\theta\right)}\right\}. \qquad (10')$$

Рассмотрим случай, когда $d \to 0$. Тогда $E_x(\alpha)$ и $E_z(\alpha)$ примут вид

$$E_x(\alpha) = -\frac{e}{(2\pi)^{1/2}ac}\frac{\left(ik\gamma^2\cos\theta + \frac{a\sin\theta}{\beta}\right)\left(p - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta\right)^{1/2}}{(\alpha - p)^{1/2}\left(\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta\right)},$$

$$E_z(\alpha) = \frac{e}{(2\pi)^{1/2}ac}\frac{iq}{\beta}\frac{\left(p - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta\right)^{1/2}}{(\alpha - p)^{1/2}\left(\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta\right)}. \tag{11}$$

Эти выражения совпадают с результатами работы [2]. При другом предельном случае, $d \to \infty$, получим

$$E_x(\alpha) = \frac{ie}{(2\pi)^{1/2}ac}\left[\frac{ik\gamma^2\cos\theta + \frac{a\sin\theta}{\beta}}{\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta} - \frac{ik\gamma^2\cos\theta - \frac{a\sin\theta}{\beta}}{\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta - ia\sin\theta}\right], \tag{12}$$

$$E_z(\alpha) = -\frac{eq}{(2\pi)^{1/2}ac\beta}\left[\frac{1}{\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta + ia\sin\theta} - \frac{1}{\alpha - \frac{\omega}{v}\cos\theta - ia\sin\theta}\right].$$

Формулы (12) с точностью до обозначений дают Фурье-компоненты излучения, совпадающие с известными формулами переходного излучения [4]. При больших d формула (12) отличается от формул (10), (10') только членами порядка $\frac{1}{\sqrt{kd}}$, при $d \to \infty$ эти члены стремятся к нулю. Таким образом, при наличии края экрана добавочные члены к полям переходного излучения частицы имеют порядок $\frac{1}{\sqrt{kd}}$. Из предельных переходов видно, что решение задачи непрерывно зависит от d.

Подставляя $\frac{k}{p\beta} = \cos\theta_0$, где θ_0 — мнимый угол, формулу (10) можно записать в следующем виде

$$E_x(\alpha) = -\frac{e}{2\sqrt{2}\pi^2 ac}e^{3i\frac{\pi}{2}}\left\{(\alpha - p)^{1/2}e^{i\alpha d - i\frac{\omega}{v}d\cos\theta}[B(\alpha) + B^*(\alpha)] \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^d \xi^{-1/2}e^{-i(\alpha - p)\xi}d\xi + \frac{c(\alpha)A_1(d)}{(\alpha - p)^{1/2}} - \frac{c^*(\alpha)A_2(d)}{(\alpha - p)^{1/2}}\right\}, \tag{10'}$$

где $B(\alpha) = \frac{\sigma}{\alpha - p\cos(\theta - \theta_0)}$, $\quad c(\alpha) = B(\alpha)[p - p\cos(\theta - \theta_0)]$,

$\sigma = ik\gamma^2\cos\theta - \frac{a\sin\theta}{\beta}$; знак (*) означает комплексное сопряжение.

Компоненты электрического поля E_x и E_z определим из формул

$$E_x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_x(\alpha)\, e^{-i\alpha x - \lambda y - iqz}\, d\alpha dq,$$

$$E_z = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} E_z(\alpha)\, e^{-i\alpha x - \lambda y - iqz}\, d\alpha dq. \tag{13}$$

Подставляя (10″) в (13) и проведя интегрирование по α и q, получим E_x и E_z. Для больших расстояний интегрирование можно провести методом перевала. Таким образом, интегрируя (13) методом перевала, мы найдем выражение для E_x и E_z на больших расстояниях. Запишем выражение E_x

$$E_x = \frac{-ie\, e^{\frac{3i\pi}{4}}}{\pi^{1/2} ac} \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ e^{-i\frac{\omega}{v} d\cos\theta} \left[\frac{\sigma \sin\varphi}{\cos\varphi + \cos(\theta - \theta_0)} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\sigma^* \sin\varphi}{\cos\varphi + \cos(\theta + \theta_0)} \right] \Phi_1\left(\sqrt{2kd\sin\psi}\cos\frac{\varphi}{2} \right) +$$

$$+ \frac{2\sigma e^{-da\sin\theta} \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\theta - \theta_0}{2}}{\cos\varphi + \cos(\theta - \theta_0)} \Phi_1\left(\sqrt{2kd\sin\psi}\sin\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) -$$

$$\left. - \frac{2\sigma^* e^{da\sin\theta} \sin\frac{\varphi}{2} \sin\frac{\theta + \theta_0}{2}}{\cos\varphi + \cos(\theta + \theta_0)} \Phi_2\left(\sqrt{2kd\sin\psi}\sin\frac{\theta + \theta_0}{2} \right) \right\}. \tag{14}$$

где $\Phi_1(v) = \int\limits_0^v e^{iz^2} dz$, $\Phi_2(v) = \int\limits_v^\infty e^{iz^2} dz$, а R, ψ, φ — сферические координаты.

Аналогичный вид будет иметь E_z. Для нахождения E_y-компоненты полей излучения используем уравнение $\operatorname{div}\vec{E}=0$. Так как E_x и E_z известны, то из этого уравнения легко определить E_y. Таким образом, мы нашли все компоненты для электрических полей излучения, а магнитные поля можно выразить через электрические.

Излучение частицы равно потоку вектора Пойнтинга, проинтегрированному по поверхности сферы большого радиуса. Так как интенсивность излучения пропорциональна квадрату электрического поля, то поправки к переходному излучению оказываются порядка $\frac{1}{\sqrt{kd}}$ (при больших d), то-есть поправки существенны для тех частот, длина волн которых порядка расстояния точки пересечения от ребра d. Для длин волн $\lambda \ll d$ излучение с большой точностью совпадает с переходным излучением.

В ультрарелятивистском случае $\left(\beta = \frac{v}{c} = 1\right)$, когда поле частицы почти поперечное, задачу можно рассмотреть в приближении геометрической оптики. В этом случае потери на излучение равны удвоенному (так как излучение „вперед“ и „назад“ одинаково) потоку энергии свободного поля частицы через плоскость экрана. В случае перпендикулярного падения частицы величина $\int\limits_{(s)} [\vec{E}^0\vec{H}^0]\vec{ds}dt$ (т. е. интенсивность излучения) равняется

$$dJ = \frac{e^2(a^2+q^2)}{4\pi a^3}\left[1 - \frac{1}{2}e^{-2ad}\right]dq\,d\omega, \tag{15}$$

где $a = \sqrt{\omega^2\gamma^2 + q^2}$, $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$.

Интегрируя (15) по q и ω, мы получим интенсивность полного излучения. Интеграл от первого слагаемого в (15) расходится, так как он описывает переходное излучение. Интеграл же от второго члена, который дает добавку к переходному излучению, можно вычислить, и тогда получим

$$I_{доб} = -\frac{e^2}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(a^2+q^2)}{a^3}e^{-2ad}dq\,d\omega = -\frac{3}{8}\frac{e^2}{\gamma d} \tag{16}$$

при $1-\beta \ll 1$. Как видно из (16), поправка к полному переходному излучению (при больших d) стремится к нулю, как $\frac{1}{d}$.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Б. М. Болотовского за обсуждение результатов и за ценные замечания.

Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 4 V 196

Դ. Մ. Սեդրակյան

ՄԵՏԱՂՅԱ ԷԿՐԱՆԸ ՀԱՏՈՂ ՇԱՐԺՎՈՂ ԼԻՑՔԱՎՈՐՎԱԾ ՄԱՍՆԻԿԻ ՃԱՌԱԳԱՅԹՈՒՄԸ

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Աշխատության մեջ դիտարկված է լիցքավորված մասնիկի ճառագայ- թումը, երբ այն իր շարժման ընթացքում հատում է իդեալական հաղորդի- մետաղյա էկրանը նրա եզրից d հեռավորության վրա։

Ցույց է տրված, որ եթե մասնիկը հատում է էկրանը նրա եզրից մե- հեռավորության վրա ($d \to \infty$), ապա ստացված բանաձևերը համընկնում ե- անցումային ճառագայթման բանաձևերի հետ։

Վերջավոր, բայց մեծ d դեպքում հաշված է այն ուղղումը, որ մըտ- ցնում է էկրանի եզրի առկայությունը անցումային ճառագայթման բանա-

ձևերում: Ցույց է տրված, որ այդ լրացուցիչ անդամները $\frac{1}{\sqrt{ka}}$ *կարգի են, որտեղ k-ն ալիքային թիվն է:*

Ուլտրառելյատիվիստական արագությունների դեպքում խնդիրը կարելի է դնել երկրաչափական օպտիկայի մոտավորությամբ: Հաշված է այդ մոտավորությամբ մասնիկի լրիվ ճառագայթումը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа. ИЛ., М., 1962.
2. *Гинзбург В. Л., Франк И. М.* Излучение равномерно движущегося электрона при его переходе из одной среды в другую. ЖЭТФ, **16**, 15, 1946.
3. *Казанцев А. П., Сурдутович Г. И.* Излучение заряженной частицы, пролетающей вблизи металлического экрана. ДАН, **147**, 74, 1962.
4. *Корхмазян Н. А.* Кандидатская диссертация. ФИАН, М., 1962.
5. *Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.* Излучение заряженных частиц при пролете возле идеально проводящих тел. ДАН, **116**, 377, 1957.
6. *Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.* Излучение модулированного пучка заряженных частиц при пролете через круглое отверстие в плоском экране. ДАН, **124**, 792, 1959.
7. *Днестровкий Ю. Н., Костомаров Д. П.* Излучение ультрарелятивистских зарядов при пролете через круглое отверстие в экране. ДАН, **124**, 1024, 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

П. А. Безирганян

Рассеяние рентгеновских лучей в жидкостях

В работах [1] и [2] было исследовано рассеяние рентгеновских лучей в газах, состоящих из одноатомных и многоатомных молекул. Здесь мы рассмотрим рассеяние рентгеновских лучей в жидкостях.

В случае жидкостей важную роль играют как внутримолекулярные, так и межмолекулярные интерференционные эффекты. В рассматриваемом случае, как в случае газов, размеры облучаемого объема определяются поперечным сечением падающего пучка рентгеновских лучей, следовательно, пренебрежение добавочных разностей фаз, возникающих из-за непараллельности волн, рассеянных различными атомами этого объема в направлении точки наблюдения, никак нельзя оправдать.

§ 1. Рассеяние рентгеновских лучей в жидкости, состоящей из одноатомных молекул

Мгновенная интенсивность рентгеновских волн, рассеянных одноатомной жидкостью с учетом добавочных разностей фаз, возникающих благодаря непараллельности этих волн, будет (см. [1])

$$J = B|f|^2 \left\{ N + \sum_{p}^{p \neq q} \sum_{q} e^{-ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_p-\vec{r}_q) - \frac{(\vec{r}_p\vec{s})^2-(\vec{r}_q\vec{s})^2}{2R}\right]} \right\}, \qquad (1.1)$$

где

$$B = \frac{1}{R}\,\frac{e^4}{m_0^2 e^4}\cdot\frac{1+\cos^2 2\theta}{2},$$

2θ — угол рассеяния.

Здесь предположено, что все рассеивающие атомы одинаковы. Среднюю интенсивность можно выразить следующим образом (см. [2]):

$$\bar{J} = B|f|^2 \left\{ N + N(N+1)\iint W \exp\left\{ -ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_p-\vec{r}_q) + \frac{r_p^2-r_q^2}{2R} - \frac{(\vec{r}_p\vec{s})-(\vec{r}_q\vec{s})}{2R}\right]\right\} \frac{dv_p}{V}\,\frac{dv_q}{V} \right\}. \qquad (1.2)$$

Функция вероятности W равна единице, когда всевозможные взаимные расположения молекул равновероятны. В случае одноатомных жидкостей функция вероятности, по-видимому, зависит только от расстояния $W = W(r)$. При любой закономерности в распределении молекул для больших расстояний $W = 1$, а для расстояний, меньших молекулярного диаметра (сферы действия), $W = 0$. Для промежуточных расстояний в рассматриваемом случае только можно утверждать, что эта функция симметрична. Имея в виду вышесказанное, удобно (1.2) привести к виду

$$\overline{J} = B|f|^2 \times$$

$$\times \left\{ N + N(N-1) \iint e^{-ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_p-\vec{r}_q) + \frac{r_p^2-r_q^2}{2R} + \frac{(\vec{r}_p\vec{s})^2-(\vec{r}_q\vec{s})^2}{2R}\right]} \frac{dv_p\, dv_q}{V^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{N(N-1)}{V^2} \iint (1-W) e^{-ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_p-\vec{r}_q) + \frac{r_p^2-r_q^2}{2R} + \frac{(\vec{r}_p\vec{s})^2-(\vec{r}_q\vec{s})}{2R}\right]} dv_p dv_q \right\}. \quad (1.3)$$

Первый интеграл последнего выражения уже рассмотрен в [1], этот интеграл выражает рассеяние под малыми углами. Предполагая, что вероятность нахождения атома P где-то внутри объема V везде одинакова, и допуская, что облучаемый объем жидкости представляет собой шар радиуса R, можно второй интеграл в выражении (1.3) привести к виду (см. [3])

$$-\frac{2\pi(N-1)N}{V} \iint (1-W)\, r^2 e^{+i\left[2rk \sin\theta \cos\alpha + \frac{kr^2 \sin^2\beta}{2R}\right]} \sin\alpha\, d\alpha\, dr, \quad (1.4)$$

где

$$r = |\vec{r}_p - \vec{r}_q|.$$

При выводе (1.4) центр атома P принят за начало координат, а радиальное расстояние q от атома P обозначено через r, α и β — углы между вектором $\vec{r}$ и векторами $\vec{s} - \vec{s}_0$ и $\vec{s}$ соответственно.

Усредняя сначала по β (см. [2]), а потом интегрируя по α, для средней интенсивности рассеянных волн для не очень малых углов получим

$$\bar{J} = B|f|^2 \left\{ N - \frac{4\pi N(N-1)}{V} \int\limits_0^\infty (1-W) \frac{\sin 2kr \sin\theta}{2kr \sin\theta} r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{4N(N-1)}{VR} k \sin 2\theta \int\limits_0^\infty (1-W) r^4 \int\limits_0^\pi \sin 2\alpha \sin(F\cos\alpha) \sin\alpha \, d\alpha \, dr \right\}, \quad (1.5)$$

где

$$F = 2kr \sin\theta.$$

Здесь для r пределы интегрирования взяты от 0 до ∞, так как при больших r функция вероятности W равна единице и подинтегральная функция в (1.3) обращается в нуль.

Из последнего получим (см. [2])

$$\bar{J} = B|f|^2 \left\{ N - \frac{4\pi N(N-1)}{V} \int\limits_0^\infty (1-N) \frac{\sin F}{F} r^2 dr + \right.$$

$$\left. + k^2 \sin\theta \sin 2\theta \frac{16N(N-1)}{3RV} \int\limits_0^\infty (1-W) r^5 \Phi(F) \, dr \right\}, \quad (1.6)$$

где

$$\Phi(F) = \frac{3(\sin F - F\cos F)}{F^3}.$$

Найдем среднее рассеяние $\bar{J}_a$, приходящееся на один атом. Заменив $N-1$ через N, из (1.6) получим

$$\bar{J}_a = \frac{\bar{J}}{N} = B|f|^2 \left\{ 1 - \frac{4\pi N}{V} \int\limits_0^\infty (1-W) \varphi(F) r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{3} k^2 \sin\theta \sin 2\theta \frac{N}{RV} \int\limits_0^\infty (1-W) r^5 \Phi(F) \, dr \right\}, \quad (1.7)$$

где

$$\varphi(F) = \frac{\sin F}{F}.$$

Функция интерференции определяется следующим выражением

$$I = \frac{J_a}{|f|^2} = B \left\{ 1 - \frac{4\pi N}{V} \int\limits_0^\infty (1-W) \varphi(F) r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{3} k^2 \sin\theta \sin 2\theta \frac{N}{RV} \int\limits_0^\infty (1-W) \Phi(F) r^5 dr. \right\}. \quad (1.8)$$

§ 2. Рассеяние рентгеновских лучей в жидкости, состоящей из многоатомных молекул

В случае жидкости, состоящей из многоатомных молекул, необходимо различать два случая: случай, когда можно пренебречь добавочными разностями фаз, возникающими из-за непараллельности волн, рассеянных различными атомами данной молекулы в направлении точки наблюдения, и случай, когда нельзя пренебречь этими разностями фаз.

Здесь мы рассмотрим только случай, когда размеры молекул жидкости меньше размеров первой зоны Френеля. Тогда разностями фаз, возникающими из-за непараллельности волн, рассеянных различными атомами индивидуальной молекулы в направлении точки наблюдения, можно пренебречь. Разностями фаз, возникающими благодаря непараллельности волн, рассеянных атомами разных молекул в направлении точки наблюдения, пренебречь нельзя.

В этом случае для мгновенной амплитуды рассеянных волн получим

$$A = \frac{1}{R}\frac{e^2}{mc^2} P \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{n-1} f_p e^{ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)\vec{r}_{\mu p} + \frac{r_{\mu p}^2}{2R} - \frac{(\vec{r}_{\mu p}\vec{s})^2}{2R}\right]}, \quad (2.1)$$

где

P — поляризационный фактор,

N — число молекул в облучаемом объеме,

n — число атомов в индивидуальной молекуле,

$\vec{r}_{\mu p} = \vec{r}_\mu + \vec{r}^{\,0}_{\mu p}$ — векторное расстояние атома P молекулы от начала координат,

$\vec{r}_\mu$ — векторное расстояние молекулы μ от начала координат,

$\vec{r}^{\,0}_{\mu p}$ — векторное расстояние атома P от центра своей молекулы (см. фиг. 1),

$\sum\limits_{p}$ обозначает суммирование по всем n атомам молекулы,

$\sum\limits_{\mu}$ обозначает суммирование по всем N молекулам облучаемого объема.

В этом случае (2.1) можно привести к виду

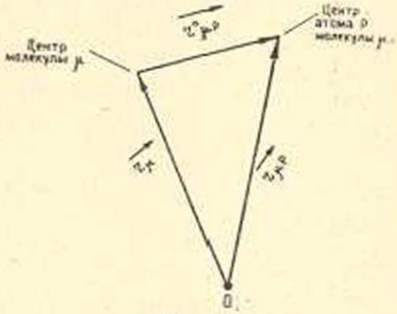
$$A = \frac{1}{R}\frac{e^2}{mc^2} P \sum_{\mu=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{n-1} f_p e^{ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_\mu + \vec{r}^{\,0}_{\mu p}) + \frac{r_p^2}{2R} - \frac{(\vec{r}_\mu\vec{s})^2}{2R}\right]}.$$

Откуда для моментальной интенсивности получим

$$J=B\sum_{\mu}\sum_{\nu}\sum_{p}\sum_{q}\left\{e^{ik\left[(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}_{\mu}-\vec{r}_{\nu})+\frac{\vec{r}_{\mu}^{\,2}-\vec{r}_{\nu}^{\,2}}{2R}-\frac{(\vec{r}_{\mu}\vec{s})^2-(\vec{r}_{\nu}\vec{s})^2}{2R}\right]}\times\right.$$

$$\left.\times e^{ik(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}^{\,0}_{\mu p}-\vec{r}_{\nu q})} f_q f_p\right\}. \qquad (2.2)$$

Для нахождения средней интенсивности мы должны последнее выражение разбить на две части: первая часть содержит члены, для которых $\mu=\nu$ (этими членами обусловлены внутримолекулярные интерференционные эффекты), а вторая часть пусть содержит члены, для которых $\mu\neq\nu$ (этими членами обусловлены межмолекулярные интерференционные эффекты), т. е.



Фиг. 1.

$$\bar{J}=\bar{J}_1+\bar{J}_2, \qquad (2.3)$$

где $\bar{J}_1$ — среднее значение суммы членов первой части ($\mu=\nu$),

$\bar{J}_2$ — среднее значение суммы членов второй части ($\mu\neq\nu$).

Если молекулы имеют возможность принимать всевозможные ориентации в пространстве, то для $\bar{J}_1$, согласно [1] (см. также [2]), получим

$$\bar{J}_1=BN\left(\sum_{p}^{n}f_p^2+2\sum_{pq}^{n}f_pf_q\,\frac{\sin(2k\sin\theta\, l_{pq})}{2k\sin\theta\, l_{pq}}\right), \qquad (2.4)$$

где l_{pq} — расстояние между атомами p и q в одной и той же молекуле. Для усреднения второй части предположим, что функция вероятности $W(\vec{R}'_{\mu\nu})$, где $\vec{R}'_{\mu\nu}$ — векторное расстояние между центрами молекул μ и ν, в среднем радиально симметрична и одинакова для любой пары молекул, т. е.

$$W(\vec{R}'_{\mu\nu})=W(R').$$

Тогда, имея в виду (1.6) и (2.2), для $\bar{J}_2$ получим

$$\bar{J}_2=-B\sum_{p}\sum_{q}\frac{4\pi N(N-1)}{V}\left[\overline{f_pf_q\,e^{ik(\vec{s}-\vec{s}_0)(\vec{r}^{\,0}_{\mu p}-\vec{r}^{\,0}_{\nu q})}}\right]\times$$

$$\times\left[\int_0^{\infty}(1-W)\frac{\sin F_1}{F_1}R'^2dR-\frac{4k^2\sin\theta\sin 2\theta}{\pi R}\int_0^{\infty}(1-W)\,R'^2\Phi(F_1)\,dR'\right],$$

где $F_1=2kR'\sin\theta$, V — облучаемый объем.

Так как в этой части суммы p и q относятся к разным моле-кулам, то $r^0_{\mu p}$ и $r^0_{\nu q}$ независимы друг от друга и для любого атома получим

$$\overline{\left[e^{ik(\vec{s}-\vec{s}_0)\vec{r}^0_{\mu p}} \right]} = \frac{\sin 2kl_{op} \sin\theta}{2kl_{op}\sin\theta},$$

где l_{op} — расстояние атома P от центра молекулы.

Окончательно, для $\overline{J}_2$ получим

$$\overline{J}_2 = -J_3 B \frac{4\pi N(N-1)}{V} \left\{ \int_0^\infty (1-W) \frac{\sin F_1}{F_1} R'^2 dR' - \right.$$

$$\left. - \frac{4k^2 \sin\theta \sin 2\theta}{\pi R} \int_0^\infty (1-W) R'^5 \Phi(F_1)\, dR' \right\}, \quad (2.?)$$

где

$$J_3 = \sum_p \sum_q f_p f_q \frac{\sin 2kl_{op}\sin\theta}{2kl_{op}\sin\theta} \cdot \frac{\sin 2kl_{oq}\sin\theta}{2kl_{oq}\sin\theta}.$$

Таким образом, из (2.3), (2.4) и (2.5) для средней интенсивности рассеянных волн получим

$$\overline{J} = \overline{J}_1 - J_3 B \frac{4\pi N(N-1)}{V} \left\{ \int_0^\infty (1-W) \frac{\sin F_1}{F_1} R'^5 dR' - \right.$$

$$\left. - \frac{4k^2 \sin\theta \sin 2\theta}{\pi R} \int_0^\infty (1-W)\Phi(F_1) R'^5 dR' \right\}.$$

Откуда, для среднего рассеяния $\overline{J}_a$, приходящегося на один атом получим

$$\overline{J}_a = \frac{\overline{J}}{N} = J_4 - J_3 B \frac{4\pi(N-1)}{V} \left\{ \int_0^\infty (1-W) \frac{\sin F_1}{F_1} R'^2 dR' - \right.$$

$$\left. - \frac{4k^2 \sin\theta \sin 2\theta}{\pi R} \int_0^\infty (1-W)\Phi(F_1) R'^5 dR' \right\}, \quad (2.6)$$

где

$$J_4 = \frac{J_1}{N}.$$

Обсуждение результатов

Как видно из (1.7) и (2.6), при учете разностей фаз, возникающих из-за непараллельности волн, рассеянных различными атомами облучаемого объема в направлении точки наблюдения, средняя интенсивность рассеянных волн выражается двумя интерференционными функциями

$$\varphi(F) = \frac{\sin F}{F} \quad \text{и} \quad \Phi(F) = \frac{\sin F - F\cos F}{F^3}.$$

Между тем, без учета этих разностей фаз в выражении интенсивности фигурировала только первая из этих функций (см. [3]).

Таким образом, учет вышеуказанных добавочных разностей фаз привел к появлению в выражении средней интенсивности рассеянных волн интерференционной функции типа $\Phi(F)$.

Обе эти функции хорошо известны и часто встречаются в теории дифракции.

Для ряда значений F, для которых функция $\varphi(F)$ принимает побочные максимальные и минимальные значения, функция $\Phi(F)$ принимает нулевое значение. Кроме того, при возрастании F функция $\Phi(F)$ спадает до нуля медленнее и далее быстрее затухает, чем $\varphi(F)$. В выражениях (1.7) и (2.6) соответственно в первые интегралы входят множители $r^2\varphi(F)$ и $R'^2\varphi(F_1)$, а во вторые интегралы $-r^5\Phi(F)$ и $R'^5\Phi(F_1)$, следовательно, первые интегралы имеют существенные значения соответственно при малых значениях r и R', а вторые интегралы—при сравнительно больших значениях r и R'.

Таким образом, первый интеграл учитывает влияние ближнего порядка, а второй интеграл—влияние сравнительно дальнего порядка.

Однако, если дальний порядок отсутствует (молекулы малы), то вторым интегралом можно пренебречь.

Вторым интегралом можно пренебречь также во всех случаях, когда размеры облучаемого объема меньше размеров первой зоны Френеля.

Выводы

Из вышеприведенных расчетов можно сделать следующие выводы.

1. При рассеянии рентгеновских лучей в жидкости, состоящей из одноатомных молекул:

а) угловая ширина интерференционных максимумов для малых углов рассеяния по нашим расчетам получается гораздо большей, чем по расчетам [3] (см. первый интеграл в выражении (1.3) и работу [1]),

б) в выражении средней интенсивности по нашим расчетам появляется второй интеграл (см. второй интеграл в выражении (1.7)), которым можно пренебречь только при малых облучаемых объемах по сравнению с первой объемной зоной Френеля (см. [1]). Без учета этого интеграла нельзя точно определить функцию вероятности W.

При рассеянии рентгеновских лучей в жидкости, состоящей из многоатомных молекул, когда размеры этих молекул меньше размеров первой зоны Френеля, в выражении интенсивности рассеянных волн появляется второй интеграл, зависящий от дифракционной функции Ф и выражающий влияние дальнего порядка (порядка вне первой объемной зоны Френеля). Для точного определения функции вероятности W необходимо учесть и этот интеграл.

Ереванский государственный университет Поступила 5 IV 1963

Պ. Հ. Բեզիրգանյան

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ՑՐՈՒՄԸ ՀԵՂՈՒԿՆԵՐԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հետազոտված է ռենտգենյան ճառագայթների ցրումը հեղուկների մեջ։ Հեղուկների դեպքում կարևոր դեր են խաղում ինչպես ներմոլեկուլյար, այնպես էլ միջմոլեկուլյար ինտերֆերենցիոն էֆեկտները։ Դիտարկվող դեպքում, ինչպես և գազերի դեպքում, ճառագայթվող ծավալի չափերը որոշվում են ընկնող ճառագայթների լայնական հատվածքի չափերով։ Հետևապես, ճառագայթվող ծավալի տարբեր ատոմների կողմից դեպի դիտման կետը ցրված ճառագայթների ոչ զուգահեռության պատճառով առաջացած փազերի տարբերությունը ոչ մի կերպ արհամարհել չի կարելի։

Աշխատության մեջ որոշված է հեղուկներում ցրված ճառագայթների ինտենսիվությունը՝ հաշվի առնելով վերոհիշյալ փազերի տարբերությունը։

Ապացուցված է, որ՝

1. Փոքր անկյունների տակ ցրման անկյունային լայնությունը ստացվում է շատ ավելի մեծ, քան այն դեպքում, երբ հաշվի չի առնվում փազերի այդ լրացուցիչ տարբերությունը։

2. Հեղուկի բազմատոմ մոլեկուլների դեպքում, երբ այդ մոլեկուլների չափերը ավելի փոքր են, քան Ֆրենելի առաջին զոնայի չափերը, ինտենսիվության արտահայտության մեջ ստացվում է մի նոր անդամ, որն արհամարհել այս դեպքում չի կարելի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Безирганян П. А.* Рассеяние рентгеновских лучей в газах, жидкостях и аморфных телах I. ЖТФ, **32**, вып. 6, 1962.
2. *Безирганян П. А.* Рассеяние рентгеновских лучей в газах, жидкостях и аморфных телах II. ЖТФ, **33**, вып. 1, 1963.
3. *Джеймс Р.* Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. ИЛ, М., 1950.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ

А. А. Трчунян, Я. М. Погосян, К. А. Егиян, Т. А. Погосян

Установка для одновременного исследования ферромагнитных пленок магнитооптическим методом Керра и методом Акулова—Биттера

Описана установка для одновременного изучения тонких ферромагнитных пленок как магнитооптическим методом Керра, так и методом Акулова—Биттера. Установка собрана на базе металлографического микроскопа МИМ—8. Преимущество описанной установки заключается в том, что она дает возможность один и тот же участок пленки наблюдать обоими методами и, так как внешнее поле генерируется одними и теми же катушками Гельмгольца, то состояния, наблюдаемые обоими методами, полностью будут соответствовать друг другу.

Приводится несколько снимков, полученных на этой установке, которые подтверждают преимущество описанной установки.

Введение

В последнее время, в связи с развитием вычислительной техники, тонкие ферромагнитные пленки являются объектом всестороннего физического исследования, имеющего своей целью объективно выявить характер переключения как всей пленки в целом, так и отдельных ее областей (доменов).

В настоящее время исследования характера переключения пленок в основном проводят тремя методами: электронно-микроскопическим [1, 2, 3], с помощью магнитооптического эффекта Керра [4], большей частью меридиональным, и методом порошковых фигур (метод Акулова—Биттера) [5].

Естественно, что все перечисленные методы имеют свои преимущества и недостатки.

Электронно-микроскопический метод позволяет определять внутреннюю структуру самих доменов, тип, полярность и ширину границы, направление намагниченности в доменах. Метод имеет большую разрешаемость, однако, эксперимент длителен, и пленка требует особой подготовки к эксперименту (отделение от подложки и пр.). При больших толщинах (выше 1000Å) метод вообще непригоден.

Меридиальный эффект Керра применяется, главным образом, дл наблюдения процессов переключения, происходящих смещением гра ниц, при этом можно наблюдать общий характер переключения все пленки в целом, определить направление намагниченности в домена Этот метод не требует особой подготовки образца и безынерционе Однако, ввиду малой разрешаемости, он не может быть применен д выявления деталей.

Метод Акулова—Биттера имеет большую разрешаемость, чт дает возможность наблюдать процесс переключения в микрообластя определить тип границы и т. д. Одним из основных недостатков я ляется его инерционность.

Исходя из вышеизложенного, становится ясным, что для всесторо него исследования пленок следует применять все три метода, допо няющие друг друга. Однако, ввиду отсутствия специальных электро ных микроскопов, в настоящее время исследование ферромагнитн пленок ведется, главным образом, магнитооптическим методом Кер и методом Акулова—Биттера.

В процессе исследования ферромагнитных пленок часто возника необходимость объяснить доменную картину, полученную магнитоо тическим методом, процессом, происходящим в микрообластях, кот рый можно обнаружить только методом Акулова—Биттера. При эт возникают затруднения, вызванные тем, что образец с заданной стру турой, обнаруженной эффектом Керра, нужно перенести на микроск или на микроскопе с помощью соответствующих полей воспроизве нужную картину. Как в первом случае, так и во втором это осущ ствить довольно сложно, так как в первом случае при переносе о разца на микроскоп имеется большая вероятность искажения стру туры (особенно, если структура в пленке очень чувствительна к и менениям полей); во втором случае положение затрудняется тем, ч переключение нужно произвести „вслепую", т. е. невозможно точ установить направление осей пленки по отношению к катушк Гельмгольца.

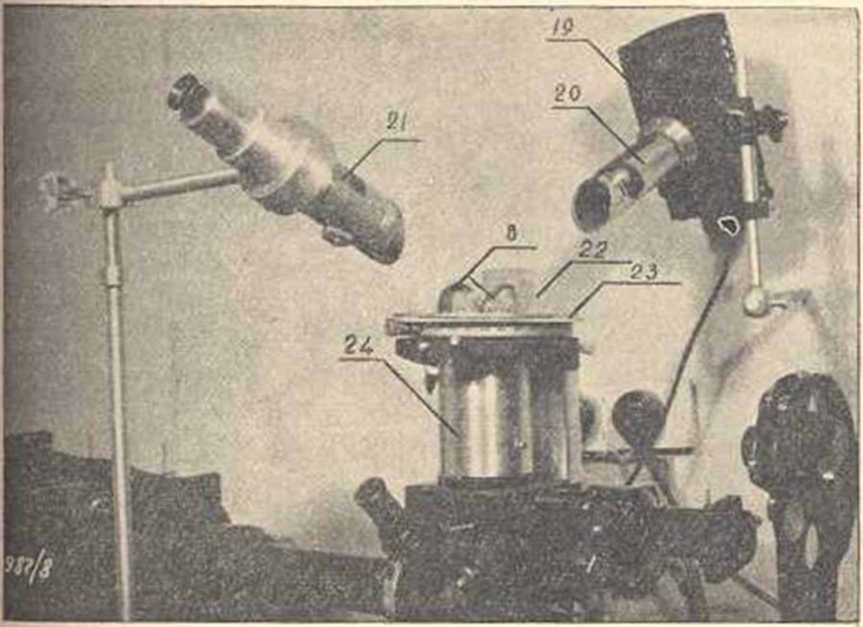
Сочетание этих двух методов, осуществленное на описанно настоящей работе установке, дало возможность избежать этих затру нений и проследить процесс переключения методом Акулова—Битте во внешнем поле в одной определенной области.

Описание установки

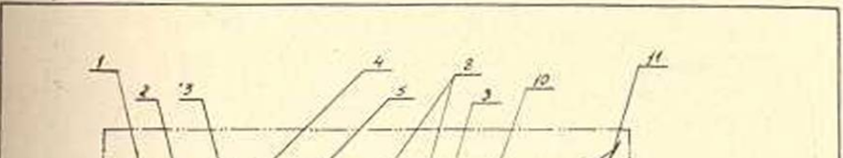
Установка собрана на базе металлографического микроско МИМ—8. Внешний вид установки приведен на фиг. 1, а оптичес схема—на фиг. 2.

Установка состоит из двух основных частей:

1. Устройство для магнитооптических наблюдений [см. фи (8, 19, 20, 21) и фиг. 2 (А)].



Фиг. 1. Внешний вид установки.



Фиг. 2. Оптическая схема установки.

2. Металлографический микроскоп МИМ—8 [см. фиг. 1, фиг. (В)] с небольшими переделками для наблюдения картин Акулова—Биттера.

Магнитооптические наблюдения на установке осуществляютс следующим образом: линейно-поляризованный монохроматический па раллельный пучок света, для получения которого служат ртутна лампа высокого давления (1), конденсорная линза (2), диафрагма (3 коллиматор (4), светофильтр (5) и поляризатор (6), отражаясь по углом 60° от поверхности исследуемой пленки, проходит через ана лизатор (9), и с помощью объектива (10) изображение пленки фоку сируется на поверхность (11). При соответствующей юстировке поля ризатора и анализатора на этой поверхности можем наблюдать маг нитную структуру пленки, т. е. доменную картину, а с помощью ка тушек Гельмгольца (8) наблюдать процесс переключения во внешне поле.

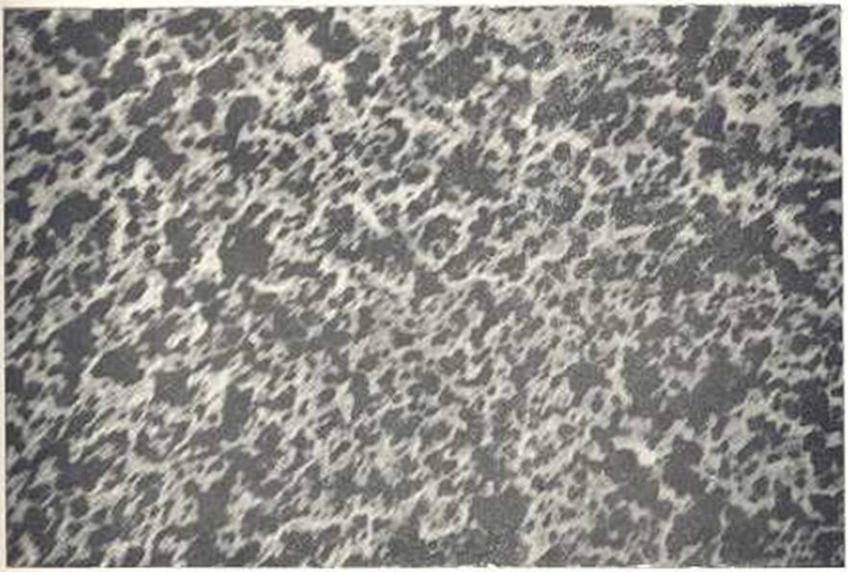
Выявление доменной структуры методом Акулова—Биттера н микроскопе МИМ—8 при темнопольном изображении происходит сле дующим образом: краевые пучки параллельных лучей, пройдя кольце вую диафрагму (14), падают на кольцевое зеркало (15). Кольцево зеркало отражает лучи на вогнутый металлический конденсор (16 который собирает их в плоскости исследуемой пленки. Рассеянны лучи света, отраженные от объекта, проходят через объектив (17 сквозь отражательную пластинку (15), ахроматические линзы (18) попадают либо в визуальный тубус, либо в фотокамеру, образуя изо бражение определенных участков пленки.

Для одновременного наблюдения обоими методами на держател образца (22), изготовленный из органического стекла и прикрепленны к столику микроскопа (23), помещается чистое покровное стекло (13 на которое наносится 2—3 капли специально приготовленной магнит ной суспензии. На нее лицевой стороной вниз помещается исследуе мая пленка (7), тем самым обеспечивая условия наблюдения на мик роскопе картин Акулова—Биттера.

Общий характер процесса переключения наблюдается магнитооп тическим методом с оборотной стороны пленки, при этом, хотя кар тина менее контрастна, но так как пленки используемых нами толщи (1000—2000 Å) однодоменны, то картина на оборотной стороне пол ностью совпадает с полученной на лицевой стороне, наблюдаемой ме тодом Акулова—Биттера.

Разумеется, для получения фотографии более удовлетворитель ной контрастности пленку можно вначале исследовать с лицевой сто роны и после этого проделать вышеизложенное.

Во избежание всяких помех микроскоп МИМ—8 был нескольк переделан. Все детали столика (23) из железа были заменены на та кие же из немагнитного материала. Кроме того, с помощью систе переходников [(24) фиг. 1, (Д—Д) фиг. 2] пленка отдалена от кор пуса микроскопа на 160 *мм*.



Фиг. 3. Электронно-микроскопический снимок используемой суспензии (40000 X).

Фиг. 5. Остаточное состояние при переключении пленки под углом 13° к трудной оси, легкая ось горизонтальна (200 X).

Фиг. 4а. Ферромагнитная пленка с тремя устойчивыми состояниями. Снимок получен магнитооптическим методом Керра. Направление намагниченности областей указано стрелками.

Фиг. 4б. Участок, обведенный кружком на фиг. 4а, полученный методом Акулова—Биттера (360 X).

Исследуемая пленка помещается в центре катушек Гельмгольца*, из-за чего расширен внутренний диаметр столика микроскопа.

Магнитная суспензия, используемая для получения фигур Акулова—Биттера, готовилась по способу Элмора [6]. Для стабилизации полученного коллоидного раствора в мыльный раствор суспензии добавлялась соляная кислота, пока pH раствора не достигало значений 8—9. При таком pH система была устойчива в течение 10 дней. На фиг. 3 приводится электронно-микроскопический снимок используемой нами суспензии.

Ценность предложенной установки подтверждается следующими примерами.

Пример 1. В одноосно анизотропных пленках, обладающих прямоугольной петлей гистерезиса в трудном направлении, можно получить три устойчивых состояния с направлениями намагниченности 0°, 90° и 180° с легкой осью. Эти состояния пленки получаются предварительным ее насыщением в трудном направлении полем, превышающим поле анизотропии, и последующим приложением небольших полей 0,2—0.3 э. в легком направлении в обоих полярностях поочередно. На фиг. 4а приводится снимок, полученный магнитооптическим методом, а на фиг. 4б—участок, обведенный кружком на фиг. 4а, полученный методом Акулова—Биттера.

Пример 2. Пленка насыщалась под углом 13° к трудной оси, в силу дисперсии [7], и в этом случае наблюдается разбиение пленки на домены (фиг. 5). Однако, это состояние настолько неустойчиво, что если приложить поле порядка 0,05 э, полученная картина разрушается.

Поступила 21 VI 1963

Հ. Ս. Թաշունյան, Յա. Մ. Պողոսյան, Կ. Ա. Եղիյան, Թ. Ս. Պողոսյան

ՍԱՐՔԱՎՈՐՈՒՄ ԿԵՐՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ԱԿՈՒԼՈՎ—ԲԻՏՏԵՐԻ ՄԵԹՈԴՆԵՐՈՎ ՖԵՐՈՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՄԻԱԺԱՄԱՆԱԿՅԱ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում նկարագրված է սարքավորում Կերրի մագնիսաօպտիկական և Ակուլով—Բիտտերի մեթոդներով ֆերոմագնիսական թաղանթների միաժամանակյա հետազոտման համար: Սարքավորումը հավաքված է МИМ—8 *միկրոսկոպի բազայի վրա:*

Նկարագրված սարքավորման առավելությունն այն է, որ նա հնարավորություն է տալիս թաղանթի նույն հատվածը միաժամանակ դիտել երկու

---

* На установке вмонтированы 3 пары катушек, из коих одна для компенсации поля земли, две остальные для создания 2-х взаимно-перпендикулярных полей в плоскости пленки.

մեթոդներով և քանի որ արտաքին մագնիսական դաշտը գեներացվում է Հելմհոլցի նույն կոճերով, ուստի երկու մեթոդներով գտնվող վիճակները լիովին կհամապատասխանեն մեկը մյուսին։

Բերված են մի քանի նկարահանումներ, որոնք վկայում են նկարագրված սարքավորման առավելությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fuller H. W., Hale M. E.* Determination of Magnetization in Thin Films Using Electron Microscopy. J. Appl. Physics, **31**, 1961, 238.
2. *Fuchs E.* Die Ummagnetisierung anisotroper Nickeleisenschichten in der schweren Richtung. Z. angew. Phys., **13**, 1961, 157.
3. *Fuchs. E.* Magnetische Strukturen in dünnen ferromagnetischen Schichten, untersuchten mit dem Elektronenmikroskop. Z. angew. Phys., **14**, 1962, 203.
4. *Fowler C. W., Fryer E. M.* Magnetic Domains by the Longitudinal Kerr Effect. Phys. Rev., **94**, 1954, 52.
5. *Bitter F.* On Inhomogeneities in the Magnetization of Ferromagnetic Materials. Phys Rev., **38**, 1931, 1903.
6. *Акулов Н. С., Дехтяр М. В.* О сложном строении ферромагнитных монокристаллов. Ann. d. Phys., **15**, 1932, 750.
7. *Elmore W. C.* The Ferromagnetic Colloids for Observation of the Ferromagnetic Structure. Phys. Rev., **54**, 1938, 309.
8. *Middelhoek S.* Der Einfluß von lokalen Anisotropieschwankungen auf der magnetische Verhalten von dünnen Ni-Fe.-Schichten. Z. angew. Phys., **13**, 1961, 151.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XVII, № 1, 1964 Физико-математические науки

АСТРОФИЗИКА

Г. М. Товмасян

О функции радиосветимости и распределении радиогалактик в пространстве

1. Одной из важнейших характеристик любого класса космических объектов является их функция светимости. В случае внегалактических радиоисточников незнание расстояний большинства радиоисточников делает определение функции радиосветимости последних очень неуверенным. Было сделано несколько попыток исследования распределения абсолютных радиовеличин и определения функции радиосветимости радиогалактик [1—6]. Однако, все полученные функции радиосветимости радиогалактик страдают большой степенью ненадежности, поскольку их получение основано на тех или иных, подчас произвольных, допущениях или подвержено избирательности наблюдательных данных. Обсуждение и критика указанных работ проведена Хэнбери Брауном [7], который получил функцию радиосветимости внегалактических радиоисточников с помощью 68 радиоисточников с известными угловыми размерами. Несколько позднее Браун совместно с Алленом и Палмером аналогичным образом исследовали функцию радиосветимости с помощью 133 радиоисточников [8]. Однако, функция радиосветимости Брауна также не лишена недостатков, так как она основана на допущении об одинаковости линейных размеров радиоисточников, принятых в работе [7] равными 30 *кпс*, а в работе [8] равными 25 *кпс*. Последнее является средним значением диаметров 12 радиоисточников с известными красными смещениями. Между тем отношение крайних значений линейных диаметров этих 12 источников превосходит 10 : 1.

В настоящей работе сделана новая попытка получить представление о функции радиосветимости радиогалактик. Для этого прежде всего использованы радиоисточники, отождествленные с галактиками, являющимися членами скоплений галактик [9—11]. Распределение абсолютных радиовеличин радиогалактик, полученное на основе такого наблюдательного материала, будет более близко к действительности, чем в случае радиоисточников, отождествленных непосредственно с отдельными галактиками, без рассмотрения их связи со скоплениями галактик.

Действительно, с отдельными галактиками отождествлены в основном радиоисточники с большими значениями плотности потока, для которых надежно измерены их координаты. Это либо очень мощные радиоизлучатели, как скажем Лебедь—А или 3С 295, либо радиоисточники с меньшей мощностью радиоизлучения, однако, расположенные сравнительно близко к нашей Галактике, как например, 3С 71 (NGC 1068) или 3С 270 (NGC 4261). В случае же радиоисточников, отождествленных со скоплениями галактик, в значительной степени ослаблены требования к точности определения их координат. И поэтому отождествления произведены и для менее мощных радиоисточников, расположенных на больших расстояниях. Ограничением при этом является то, что отождествления произведены для радиоисточников, находящихся на расстояниях от 80 до 800 *мпс*. Таковы пределы по дальности того пространства, в котором Абелем [12] проведено исследование скоплений галактик, список которых использован при отождествлениях, произведенных в [9—11]. При определении расстояний постоянная Хаббла принята равной 75 *км/сек мпс*. В дальнейшем также использовано это значение постоянной Хаббла и при необходимости сделан соответствующий пересчет.

Абсолютные радиовеличины радиоисточников определены по методу, описанному в [13], при помощи звездных величин десятых по яркости галактик соответствующих скоплений, а для двойных радиогалактик также и по полученной там же зависимости абсолютной радиовеличины от относительного расстояния между компонентами двойной галактики.

2. В работе [13] шкала абсолютных радиовеличин радиоисточников, находящихся в скоплениях галактик, определена с помощью привязки к абсолютной радиовеличине источника Гидра—А, значение которой, равное —29.4 взято из [14]. В настоящей работе решено пересмотреть эту шкалу абсолютных радиовеличин. Привязка к шкале абсолютных радиовеличин произведена здесь по значению абсолютной радиовеличины не одного, а пяти радиоисточников, отождествленных с определенными галактиками—членами скоплений галактик—с измеренными радиальными скоростями. Это радиоисточники 3С 33, 3С 40, 3С 75, Гидра—А и 3С 338, радиальные скорости которых измерены Шмидтом и Минковским [15, 16]. Кроме того, при выводе формулы зависимости абсолютной радиовеличины радиоисточника от относительного расстояния между компонентами отождествляемой с ним двойной галактики абсолютные радиовеличины радиоисточников 3С 40, 3С 66, 3С 75, Гидра—А, 3С 278, 3С 338, Лебедь—А и 3С 442 приняты равными значениям, полученным по соответствующим лучевым скоростям. Лучевые скорости 3С 66, 3С 278, Лебедя—А и 3С 442 измерены Минковским [16], Гринстейном [17, 18], Бааде и Минковским [19]. В работе [13] соответствующая формула была выведена при использовании абсолютных радиовеличин всех 46 двойных радиогалактик, определенных только при помощи звездных величин десятых по яркости галактик соответствующих скоплений галактик. С учетом всего сказанного теперь эта формула принимает вид:

$$M_R = -(28{,}2 \pm 0{,}2) + (4{,}6 \pm 0{,}7) \lg A. \qquad (1)$$

Абсолютные радиовеличины радиоисточников, отождествленных с определенными членами скоплений галактик приведены в табл. 1.

Таблица 1

№	Радио-источник	$-M_R$	№	Радио-источник	$-M_R$	№	Радио-источник	$-M_R$
1	3С 4	28,9	21	15+011	29,9	41	13—117	27,0
2	33	29,8	22	22+015	28,6	42	20—111	27,9
3	40	26,4	23	23+ 02	29,9	43	21—120	27,1
4	53	29,1	24	00—012	28,7	44	21—121	27,3
5	75	27,6	25	04— 05	29,0	45	22—115	27,8
6	169	28,3	26	12— 01	28,4	46	23— 14	28,1
7	Гидра—А	31,1	27	12— 08	28,1	47	23—112	27,5
8	3С 277	29,0	28	22—012	27,5	48	00— 25	28,6
9	291	29,8	29	22—014	29,6	49	00— 28	27,6
10	301	28,9	30	23— 08	28,4	50	00—223	28,1
11	313	27,5	31	00— 14	29,0	51	01— 21	27,5
12	317	30,8	32	00—111	28,7	52	04—214	28,1
13	338	28,2	33	01— 14	28,6	53	04—215	26,8
14	464	25,9	34	01—113	28,4	54	04—219	26,9
15	00+03	28,5	35	02—110	28,7	55	05—210	24,9
16	08+010	28,6	36	03— 13	27,4	56	11— 21	27,9
17	11+09	27,6	37	04—112	26,4	57	13— 27	28,7
18	14+01	29,6	38	05— 14	28,1	58	23— 23	27,5
19	15+03	27,9	39	12—111	28,4	59	23— 25	29,6
20	15+06	28,6	40	12—113	29,2	60	23— 27	27,9
						61	23—213	28,8

В случае радиогалактик с измеренными красными смещениями приведены абсолютные радиовеличины, определенные по красным смещениям. Абсолютные величины радиоисточников, отождествленных с двойными галактиками, являются средними от значений, полученных по звездным величинам десятых по яркости галактик соответствующих скоплений и по соотношению (1). Для отождествленных с одиночными галактиками радиоисточников абсолютные радиовеличины определены только по десятым по яркости галактикам соответствующих скоплений галактик.

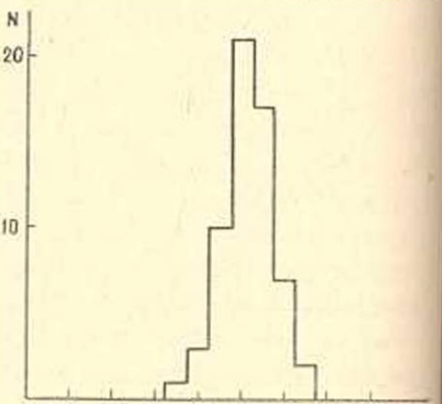
Чтобы убедиться в надежности полученных абсолютных радиовеличин, в табл. 2 для сравнения приведены полученные нами и известные по измеренным красным смещениям абсолютные радиовеличины некоторых двойных радиогалактик. Как видно из таблицы, заметное расхождение имеется только в случае мощного радиоисточника Лебедь—А, трактовка которого как двойной галактики является довольно условной.

В табл. 2 не включены радиоисточники Геркулес—А и 3C 198, которые, казалось бы, отождествлены с двойными галактиками [20, 15]. Абсолютные радиовеличины этих радиоисточников, полученные по измеренным красным смещениям [18, 15] равны соответственно —33,0 и —29,2. Абсолютные же радиовеличины, определенные по соотношению (1) значительно отличаются от приведенных и равны соответственно —27,4 и —27,3. Причиной такого расхождения вероятно является то обстоятельство, что источниками радиоизлучения являются не рассматриваемые „двойные" системы галактик. В случае Геркулеса—А спектральное исследование системы, проведенное Гринстейном [18] дало основание усомниться в том, действительно ли более слабый компактный компонент системы является объектом галактического типа, связанным с основной галактикой. Гринстейн высказал предположение, что этот объект является, вероятно, спроектированной звездой. В случае 3C 198 радиоизлучателем, по-видимому, является более яркий компонент системы. Внимательное рассмотрение изображения этой галактики указывает на наличие некоторой асимметричности, замеченной также Малтби и др. [15].

Таблица 2

Радио-источник	M_R	$M_{R\,\text{изв}}$	$M_R - M_{R\,\text{изв}}$
3C 33	—30,2	—29,8	—0,4
40	—27,3	—26,4	—0,9
66	—27,5	—27,1	—0,4
75	—27,0	—27,6	+0,6
Гидра—А	—31,4	—31,1	—0,3
3C 278	—27,1	—26,6	—0,5
3C 338	—29,2	—28,2	—1,0
Лебедь—А	—32,8	—35,2	+2,4
3C 442	—27,3	—27,5	+0,2

3. На фиг. 1 приведена гистограмма абсолютных радиовеличин радиоисточников, отождествленных с членами скоплений галактик. Из гистограммы следует, что наиболее часто встречаются радиоисточники с абсолютной радиовеличиной около —28. Примерно такова же характерная абсолютная радиовеличина радиоисточников, полученная Хэнбери Брауном (см. фиг. 4а в [7] с учетом поправки за шкалу расстояний).



Фиг. 1. Гистограмма абсолютных радиовеличин радиоисточников, отождествленных со скоплениями галактик.

Выведенная из приведенного распределения абсолютных радиовеличин функция радиосветимости радиогалактик окажется довольно грубой из-за небольшого количества (всего 61) использованных радиоисточников. Это хорошо видно из табл. 3, в которой приведены количества радиоисточников с определенной абсолютной радиовеличиной в поясах с отличающимися на единицу модулями расстояний. В таблице указаны также предельные абсолютные радиовеличины для дальнего конца каждого пояса. Предельная видимая радиовеличина исследованных радиоисточников равна 10,6, что соответствует плотности потока радиоизлучения в $2{,}5\cdot10^{-26}$ *ватт* $м^{-2}$ $гц^{-1}$ на частоте 159 *мгц*. Пространство, занимаемое этими радиоисточниками, ограничено, как было отмечено выше, расстояниями, в пределах которых зафиксированы скопления галактик в каталоге Абеля [12].

Таблица 3

$m_r - M_R$ / $M_{R\,пр}$ / M_R	34,5 / −24,5	35,5 / −25,5	36,5 / −26,5	37,5 / −27,5	38,5 / −28,5	39,5 / −29,5
$-24\pm0{,}5$	0	—	—	—	—	—
$-25\pm0{,}5$	1	0	—	—	—	—
$-26\pm0{,}5$	1	0	2	—	—	—
$-27\pm0{,}5$	0	0	7	3	—	—
$-28\pm0{,}5$	0	2	2	9	8	—
$-29\pm0{,}5$	0	0	1	5	11	0
$-30\pm0{,}5$	0	0	0	1	2	4
$-31\pm0{,}5$	0	0	1	0	1	0

Рассмотрение этой таблицы указывает, что имеющийся статистический материал явно недостаточен для вывода надежной функции светимости радиогалактик.

При составлении табл. 3 использованы только те радиоисточники, которые были отождествлены с индивидуальными галактиками в скоплениях галактик. Добавление других отождествленных радиоисточников внесет, очевидно, определенную избирательность в наблюдательный материал. В основном это будут радиоисточники с большими значениями плотности потока радиоизлучения, являющиеся либо мощными радиоизлучателями, либо близко расположенными к Галактике. Несмотря, однако, на этот недостаток, исследование распределения абсолютных радиовеличин всех отождествленных радиоисточников представляет определенный интерес.

Список радиоисточников, отождествленных с отдельными галактиками, не входящими в скопления галактик, зарегистрированных в каталоге Абеля, приведен в табл. 4. В таблицу вошли надежно отождествленные радиоисточники, приведенные в работах [14, 15, 21], а также радиоисточники 3С 48 и 3С 273, недавно отождествленные с далекими галактиками [22, 23]. Абсолютные радиовеличины радиоисточников, красные смещения которых не измерены, определены, исходя из предположения, что их абсолютные фотографические величины равны —21,0. В таблицу включены также радиоисточники, отождествленные Миллсом с двойными галактиками (табл. 1 в работе [6]), абсолютная фотографическая величина которых получается ярче —20 при определении абсолютной радиовеличины и, соответственно, модуля расстояния по соотношению (1). Это сделано для исключения возможных случайных отождествлений в [6].

Таблица 4

№	Радио-источник	$-M_R$	№	Радио-источник	$-M_R$
1	3C 5	30,5	17	310	30,1
2	26	28,7	18	315	30,5
3	48	33,4	19	327	30,0
4	66	27,1	20	Герк—А	33,7
5	71	21,5	21	3C 353	31,6
6	78	27,1	22	Лебедь—А	35,2
7	84	26,9	23	3C 424	29,6
8	89	32,0	24	433	29,2
9	98	28,0	25	442	27,5
10	198	29,2	26	02+011	28,0
11	219	32,0	27	00—04	28,9
12	270	22,8	28	10—018	28,7
13	273	32,1	29	NGC 1316	26,8
14	Дева—А	27,1	30	NGC 4374	23,0
15	3C 278	26,6	31	Цент—А	26,1
16	3C 295	34,7	32	21—21	29,5
			33	22—09	29,8

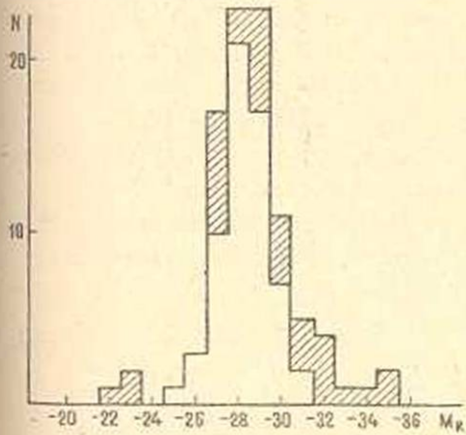
Гистограмма абсолютных радиовеличин 94 отождествленных радиоисточников приведена на фиг. 2. Добавленные радиоисточники вне скоплений галактик отмечены штриховкой. Гистограмма показывает, что, как и следовало ожидать, в основном возросло число ярких радиоисточников.

Представляет интерес то обстоятельство, что не добавилось ни одного радиоисточника с абсолютной радиовеличиной в интервале $-24 \div -26$. Недостаток радиоисточников с M_R, равным около -24, был отмечен также и другими авторами [3]. По-видимому, можно полагать, что это является результатом не только эффекта избирательности наблюдательного материала. В самом деле, как видно из табл. 3, в первом поясе нет ни одного радиоисточника с абсолютной радиовеличиной около -24, хотя и такие радиоисточники могли быть обнаружены в этом поясе. Вероятно, пространственная плотность таких радиоисточников во всяком случае не больше пространственной плотности радиоисточников с M_R порядка $-25 \div -26$. Это видно также из того, что из 6 радиогалактик с модулями расстояний меньше 32, т. е. расположенных ближе 25 *мпс*, абсолютные радиовеличины трех из них близки к -27, а трех других слабее -23. Последними тремя галактиками являются сейфертовская галактика NGC 1068 и нормальные с виду эллиптические галактики NGC 4261 и NGC 4374.

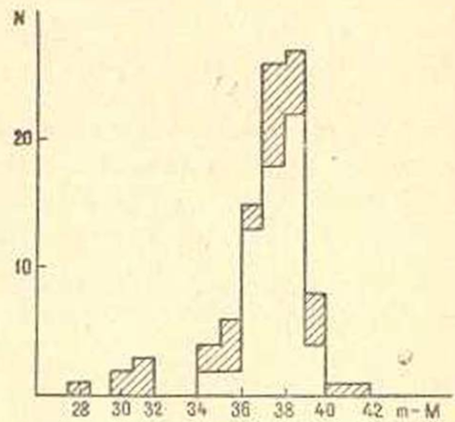
С другой стороны, очевидно, как это следует из табл. 3, что пространственная плотность радиоисточников с $M_R = -30 \div -3$ меньше пространственной плотности радиоисточников с M_R около $-27 \div -28$.

Таким образом, можно заключить, что функция радиосветимости радиогалактик имеет, по-видимому, максимум где-то у $M_R = -27$. В таком случае она не является простым продолжением функции радиосветимости нормальных галактик. Последнее не кажется невозможным по функции радиосветимости радиогалактик, полученной Брауном (см. фиг. 4в в [7]), хотя и оспаривается им.

4. На фиг. 3 показано распределение 94 отождествленных радиоисточников по поясам с возрастающим расстоянием. Как и выше, штриховкой показаны радиоисточники списка 4.



Фиг. 2. Гистограмма абсолютных радиовеличин всех отождествленных радиоисточников. Штриховкой отмечены радиоисточники вне скоплений галактик Абеля.



Фиг. 3. Распределение радиоисточников в пространстве. По оси абсцисс отложены модули расстояний.

Примечательным является то обстоятельство, что в пространстве от 25 до 60 *мпс* нет ни одной радиогалактики. Этого следовало ожидать в свете представления о существовании Сверхгалактики [24]. Интересно также, что из 6 радиоисточников, находящихся на расстояниях, меньших 25 *мпс*, четыре расположены в направлении, близком к направлению на центр Сверхгалактики, два радиоисточника находятся в приблизительно перпендикулярных направлениях и нет ни одного радиоисточника в направлении антицентра Сверхгалактики. Такое распределение близких радиоисточников подтверждает заключение де-Вокулёра [24] о расположении Галактики ближе к краю Сверхгалактики, на расстоянии 11 *мпс* от ее центра.

Таким образом, по радионаблюдениям радиус Сверхгалактики получается равным порядка 25 *мпс*. За пределами Сверхгалактики, вплоть до расстояний около 80 *мпс* плотность радиоисточников очень низка. Затем их плотность возрастает, причем начиная с 80 *мпс* и далее радиогалактики кажутся распределенными в пространстве более или менее равномерно. Однако, на больших расстояниях нужно, очевидно, предполагать существование других сверхгалактик. Именно такую модель распределения галактик или скоплений галактих в пространстве предполагал Браун [7] для объяснения наблюдаемого отклонения $\lg N/\lg S$ от ожидаемого в случае равномерного распределения радиоисточников.

5. Таким образом:

а) исследование распределения абсолютных радиовеличин 94 отождествленных радиоисточников класса II показало, что функция радиосветимости радиогалактик имеет, по-видимому, максимум у значения около —27 и, вероятно, не является продолжением функции радиосветимости нормальных галактик. Очевидно, что полученный результат является только грубым приближением к действительности из-за недостаточности использованного наблюдательного материала;

б) исследование распределения радиогалактик в пространстве указало на существование Сверхгалактики и, возможно, других сверхгалактик, расположенных на расстояниях больших, чем 80 *мпс*.

В заключение автор выражает признательность академику В. А. Амбарцумяну за дискуссию при выполнении настоящей работы.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 4 IX 1963

Հ. Մ. Թովմասյան

ՌԱԴԻՈԳԱԼԱԿՏԻԿԱՆԵՐԻ ՌԱԴԻՈԼՈՒՍԱՏՎՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԵՎ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ՆՐԱՆՑ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գալակտիկաների կույտերի [9—11] (աղյուսակ 1) և առանձին գալակտիկաների [14, 15, 21, 22, 23] (աղյուսակ 4) հետ նույնացված ռադիոաղբյուրների բացարձակ ռադիոմեծությունների բաշխման ուսումնասիրության միջոցով փորձ է կատարված պատկերացում ստանալ ռադիոգալակտիկաների ռադիոլուսատվության ֆունկցիայի մասին.

Կրկնակի ռադիոգալակտիկաների բացարձակ ռադիոմեծությունների որոշման նպատակով վերանայված է [13] աշխատության մեջ առաջված կապը կրկնակի գալակտիկաների միջև եղած հարաբերական հեռավորության և այդ գալակտիկաների հետ նույնացված ռադիոաղբյուրների բացարձակ ռադիոմեծությունների միջև, և այդ կապի համար տրված է նոր բանաձև (1):

Ռադիոգալակտիկաների բացարձակ ռադիոմեծությունների բաշխման ուսումնասիրությունից հետևում է (տե՛ս նկ. 1), որ ավելի հաճախակի հանդիպում են —28-ին մոտ բացարձակ ռադիոմեծություն ունեցող ռադիոգալակտիկաները: Ցույց է տրված (տե՛ս աղ. 3 և նկ. 2), որ ռադիոգալակտիկաների ռադիոլուսատվության ֆունկցիան —27 արժեքին մոտ, հավանաբար, ունի մաքսիմում և, հետևաբար, այդ ֆունկցիան իրենից չի ներկայացնում նորմալ գալակտիկաների ռադիոլուսատվության ֆունկցիայի շարունակությունը

Ռադիոգալակտիկաների տարածության մեջ բաշխման ուսումնասիրությունը ապացուցում է Գերգալակտիկայի գոյությունը [24], որի շառավիղը, ըստ երևույթին, մոտ 25 Մպս է, և թույլ է տալիս ենթադրել, որ 80 Մպս հեռավորությունից այն կողմ, հավանաբար, գոյություն ունեն ուրիշ գերգալակտիկաներ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ryle M., Clarke R. W.* The examination of the steady-state model in the light of some recent observations of radio sources. M. N., **122**, 1961, 349.
2. *Leslie P. R. R.* The surface brightness of radio sources at galactic latitudes greather than 20°. M. N., **122**, 1961, 51.
3. *Long R. J., Marks D. R.* The relation between the optical and radio magnitudes of galaxies. M. N., **122**, 1961, 61.
4. *Minkowski R.* Proceedings of 4th symposium on mathematical statistics and probability. Berkeley, 1960.
5. *Bolton J. G.* 13-th General Assembly URSY. London, 1960.
6. *Mills B. Y.* On the identification of extragalactic radio sources. Aust J. Ph., **13**, 1960, 550.
7. *Hanbury Brown R.* Clustering, cosmology and source counts. M. N., **124**, 1962, 35.
8. *Allen L. R., Hanbury Brown R., Palmer H. P.* An analysis of the angular sizes of radio sources. M. N., **125**, 1962, 57.
9. *Товмасян Г. М., Шахбазян Р. К.* Об отождествлении космических радиоисточников. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 5, 1961, 121.
10. *Товмасян Г. М.* Новые вероятные отождествления космических радиоисточников. Сообщения Бюраканской Обсерватории, **31**, 1962, 19.
11. *Товмасян Г. М., Каллоглян А. Т.* Некоторые отождествления космических радиоисточников. Сообщения Бюраканской Обсерватории, **31**, 1962, 31.
12. *Abell G. O.* The distribution of rich clusters of galaxies. Ap. J. Suppl., Ser No 31, **3**, 1958, 211.
13. *Каллоглян А. Т., Товмасян Г. М.* О природе двойных радиогалактик. Сообщения Бюраканской Обсерватории, **31**, 39, 1962.
14. *Псковский Ю. П.* Эффект светимости радиогалактик. АЖ, **39**, 1962, 222.
15. *Maltby P., Matthews T. A., Moffet A. T.* Brightness distribution in discrete radio sources. IV. Observations of Cal. Tech. Inst., Radio Observatory, No 4, 1962.
16. *Minkowski R.* NGC 6166 and the cluster Abell 2129. A. J., **66**, 1961, 558.
17. *Greenstein J. L.* The galaxies in the radio source 3C 278. Ap. J., **133**, 1961, 335.
18. *Greenstein J. L.* Radio sources containing peculiar ellipticals. Ap. J., **135**, 1962, 679.
19. *Baade W., Minkowski R.* Identifications of the radio sources in Cassiopeia, Cygnus and Puppis A. Ap. J., **119**, 1954, 206.
20. *Williams P. J. S., Dewhirst D. W., Leslie P. R. R.* The radio source Hercules A. Observatory, **81**, 1961, 64.
21. *Шкловский И. С.* Радиогалактики. УФН, **77**, 1962, 3.
22. *Schmidt M.* 3C 273: A star-like object with large red-shift. Nature, **197**, 1963, 1040.
23. *Greenstein J. L., Matthews T. A.* Red-shift of the unusual radio source: 3C 48. Nature, **197**, 1963, 1041.
24. *Ж. де Вокулер.* Местное сверхскопление галактик. АЖ, **36**, 1959, 977.