ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

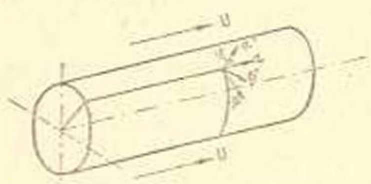
Ж. Е. Багдасарян

Устойчивость анизотропной цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа

1. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку бесконечной длины, изготовленную из ортотропного материала.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки, которая представляется координатами α, β (α—вдоль образующей, β—по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Принимается, что материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных линий α', β', γ.

Пусть одна из плоскостей упругой симметрии материала параллельна срединной поверхности оболочки, а остальные две составляют некоторый угол φ с осями $o\alpha$ и $o\beta$. Следовательно, система α', β', γ получается из системы α, β, γ путем поворота вокруг общей оси γ на некоторый угол φ.



Фиг. 1.

Пусть, далее, оболочка обтекается сверхзвуковым потоком сжимаемого газа с невозмущенной скоростью U, направленной вдоль оси $o\alpha$ (фиг. 1).

В отношении тонкой пологой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу этой гипотезы из обобщенного закона Гука, отнесенного к триортогональной системе координат α, β, γ, имеем [1,2]

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega + \gamma(B_{11}\varkappa_1 + B_{12}\varkappa_2 + B_{16}\tau),\\
\sigma_\beta &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + B_{26}\omega + \gamma(B_{12}\varkappa_1 + B_{22}\varkappa_2 + B_{26}\tau),\\
\tau_{\alpha\beta} &= B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 + B_{66}\omega + \gamma(B_{16}\varkappa_1 + B_{26}\varkappa_2 + B_{66}\tau).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}, \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha},\\
\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}.
\end{gathered} \tag{1.2}$$

B_{ik} — упругие коэффициенты материала оболочки в системе координат (α, β, γ), которые выражаются через упругие коэффициенты B'_{ik} в системе $(\alpha', \beta', \gamma)$ известными формулами преобразования [1]:

$$B_{11} = B'_{11}\cos^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + B'_{22}\sin^4\varphi,$$

$$B_{22} = B'_{11}\sin^4\varphi + 2(B'_{12} + 2B'_{66})\sin^2\varphi\cos^2\varphi + B'_{22}\cos^4\varphi, \tag{1.3}$$

$$B_{12} = B'_{12} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

$$B_{66} = B'_{66} + [B'_{11} + B'_{22} - 2(B'_{12} + 2B'_{66})]\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

где

$$B'_{11} = \frac{E'_1}{1 - \nu'_1\nu'_2}, \quad B'_{22} = \frac{E'_2}{1 - \nu'_1\nu'_2}, \quad B'_{12} = \nu'_1 B'_{22} = \nu'_2 B'_{11}, \quad B'_{66} = G'_{12}.$$

Побочные коэффициенты B_{16} и B_{26}, которые в системе координат $(\alpha', \beta', \gamma)$ равны нулю, здесь, в системе координат (α, β, γ), имеют вид

$$B_{16} = \frac{1}{2}[B'_{22}\sin^2\varphi - B'_{11}\cos^2\varphi + (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi,$$

$$\tag{1.4}$$

$$B_{26} = \frac{1}{2}[B'_{22}\cos^2\varphi - B'_{11}\sin^2\varphi - (B'_{12} + 2B'_{66})\cos 2\varphi]\sin 2\varphi.$$

$u = u(\alpha, \beta, t)$, $v = v(\alpha, \beta, t)$, $w = w(\alpha, \beta, t)$ — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения точки (α, β) срединной поверхности оболочки.

Подставляя значения напряжений σ_α, σ_β и $\tau_{\alpha\beta}$ в обычные формулы для внутренних сил и моментов, получим:

$$T_1 = c_{11}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial\beta} + c_{16}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + c_{12}\frac{w}{R},$$

$$\tag{1.5}$$

$$T_2 = c_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial\beta} + c_{26}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + c_{22}\frac{w}{R},$$

$$S = c_{16}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + c_{26}\frac{\partial v}{\partial\beta} + c_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + c_{26}\frac{w}{R},$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta},$$

$$\tag{1.6}$$

$$M_2 = -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta},$$

$$H = -D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}.$$

Здесь жесткости растяжения c_{ik} и изгиба D_{ik} имеют вид:

$$c_{ik}=B_{ik}h,\quad D_{ik}=B_{ik}\frac{h^3}{12}, \tag{1.7}$$

где h—толщина оболочки.

Эти усилия и моменты удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям движения оболочки:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=\rho_0 h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\rho_0 h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 M_2}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}T_2+z=\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{1.8}$$

где ρ_0—плотность материала оболочки, z—нормально приложенная внешняя нагрузка.

Подставляя значения внутренних сил и моментов из (1.5)—(1.6) в уравнение движения (1.8), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения оболочки*:

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2c_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+c_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+c_{16}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+c_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+$$
$$+\frac{1}{R}\left(c_{12}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+c_{26}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)=\rho_0 h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

$$c_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+2c_{26}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta}+c_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+c_{26}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+(c_{12}+c_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+$$
$$+c_{16}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{R}\left(c_{22}\frac{\partial w}{\partial\beta}+c_{26}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)=\rho_0 h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{1.9}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^3\partial\beta}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha\partial\beta^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}+$$
$$+\frac{1}{R}\left[c_{12}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+c_{26}\frac{\partial u}{\partial\beta}+c_{22}\frac{\partial v}{\partial\beta}+c_{26}\frac{\partial v}{\partial\alpha}\right]+c_{22}\frac{w}{R^2}-Z+\rho_0 h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Для оболочки, совершающей колебания в газе, выражение для поперечной нагрузки имеет вид [3,4]:

$$Z=-2\rho_0 h\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t}+\Delta p. \tag{1.10}$$

Здесь ε—коэффициент затухания, Δp—избыточное давление газа, которое согласно „поршневой теории" [5] имеет вид:

* Заметим, что система (1.9) внешне ничем не отличается от соответствующей системы уравнений движения анизотропной (неортотропной) цилиндрической оболочки, материал которой имеет одну плоскость упругой симметрии. Поэтому все последующие результаты могут быть применимы и для таких оболочек.

$$\Delta p = -\frac{\varkappa p_\infty}{a_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right), \tag{1.11}$$

где p_∞ — давление невозмущенного потока газа, a_∞ — скорость звука для невозмущенного газа, $\varkappa$ — показатель политропы.

Если частота собственных поперечных колебаний оболочки мала по сравнению с частотой собственных колебаний в своей поверхности, то тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь. В этом случае, введя функцию $\Phi(\alpha, \beta, t)$, связанную с u, v, w соотношениями [2]

$$u = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(a_{22}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - a_{12}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_{26}\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\Phi(\alpha, \beta, t),$$

$$v = -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \beta}\left[a_{22}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + (a_{66} - a_{12})\frac{\partial^2}{\partial \alpha} + 2a_{26}\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\right]\Phi - a_{16}\frac{1}{R}\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3}, \tag{1.12}$$

$$w = \left[a_{11}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2a_{16}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \right.$$

$$\left. + 2a_{26}\frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial \beta^4}\right]\Phi$$

и учитывая (1.11), приведем систему (1.9) к одному разрешающему уравнению [2]

$$\left[D_{11}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \right.$$

$$\left. + D_{22}\frac{\partial^4}{\partial \beta^4}\right]\left[a_{11}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2a_{16}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 2a_{26}\frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + \right.$$

$$\left. + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial \beta^4}\right]\Phi + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + \left[\rho_0 h\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\rho_0 h\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varkappa p_\infty}{a_\infty}\frac{\partial}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa p_\infty}{a_\infty}U\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\left[a_{11}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2a_{16}\frac{\partial^4}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + (a_{66} - 2a_{12})\frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \right.$$

$$\left. + 2a_{26}\frac{\partial^4}{\partial \alpha \partial \beta^3} + a_{22}\frac{\partial^4}{\partial \beta^4}\right]\Phi(\alpha, \beta, t) = 0, \tag{1.13}$$

где

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}\Omega},$$

$$a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}\Omega},$$

$$a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}\Omega}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}\Omega}. \tag{1.14}$$

$$\Omega = \frac{1}{c_{66}^2}\left[(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2\right].$$

2. Решение уравнения (1.13) ищем в виде

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\left(\omega t - kx - \frac{n}{R}\beta\right)}. \qquad (2.1)$$

Здесь Φ_0 — некоторая комплексная постоянная, ω — частота колебаний, $k = \frac{\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина полуволны в направлении образующих, n — целое число волн по окружности оболочки.

Подстановка (2.1) в (1.13) приводит к характеристическому уравнению, которое запишем следующим образом:

$$\omega^2 - i\omega(2\varepsilon + \gamma) - \Omega_1^2(k, n) + ikU\gamma = 0, \qquad (2.2)$$

где

$$\Omega_1^2(k, n) = \frac{1}{\rho_0 h}\left[D_{11}k^4 + 4D_{16}k^3\frac{n}{R} + 2(D_{12} + 2D_{66})k^2\frac{n^2}{R^2} + 4D_{26}k\frac{n^3}{R^3} + \right.$$

$$\left. + D_{22}\frac{n^4}{R^4} + \frac{1}{R^2}\,\frac{k^4}{a_{11}k^4 + 2a_{16}k^3\frac{n}{R} + (a_{66} - 2a_{12})k^2\frac{n^2}{R^2} + 2a_{26}\frac{kn^3}{R^3} + a_{22}\frac{n^4}{R^4}}\right] \qquad (2.3)$$

— квадрат частоты собственных поперечных колебаний оболочки в вакууме, а

$$\gamma = \frac{\varkappa p_\infty}{\rho_0 h a_\infty}.$$

Для любых заданных значений k и n из уравнения (2.2) можно найти частоту ω. Если ее мнимая часть положительна, то невозмущенное движение устойчиво по отношению к малым возмущениям. Наличие частот с отрицательной мнимой частью означает неустойчивость. Условия того, чтобы уравнение (2.2) с комплексными коэффициентами не имело корней с отрицательными мнимыми частями, могут быть представлены в форме, аналогичной хорошо известным условиям Рауса-Гурвица [3, 4, 6]. Поступая аналогичным образом, как в работах [3, 4], из этих условий для критической скорости получим формулу

$$U_{\text{кр.}} = V\left(1 + \frac{2\varepsilon}{\gamma}\right). \qquad (2.4)$$

Здесь $V = \frac{\Omega_1}{k}$ — фазовая скорость распространения упругих волн в оболочке:

$$V^2 = \frac{1}{\rho_0 k R^2}\left[\frac{D_{11}m^4 + 4D_{16}m^3 n + 2(D_{12} + 2D_{66})m^2n^2 + 4D_{26}mn^3 + D_{22}n^4}{m^2} + \right.$$

$$+R^2 \frac{m^2}{a_{11}m^4+2a_{16}m^3n+(a_{66}-2a_{12})m^2n^2+2a_{26}mn^3+a_{22}n^4}\Bigg], \qquad (2.5)$$

где

$$m=kR.$$

Второй член в скобках формулы (2.4) учитывает влияние конструкционного демпфирования.

Из (1.3), (1.4), (1.7) и (1.14) следует, что величины D_{ik} и a_{ik} зависят от ориентации главных направлений упругости материала оболочки, в силу чего из (2.4) и (2.5) легко заметить, что критическая скорость существенным образом зависит от ориентации главных направлений упругости.

Отметим, что критическая скорость, а также и величины D_{ik} и a_{ik} являются периодическими функциями угла φ с периодом π.

Наибольший интерес представляют те значения аргументов m и n, вблизи которых критическая скорость принимает минимальное значение.

Если имеет место симметричная форма потери устойчивости, то $n=0$ и критическая скорость принимает минимальное значение при

$$m=\frac{\sqrt{R}}{\sqrt[4]{D_{11}a_{11}}}. \qquad (2.6)$$

Для самой скорости получим формулу

$$U_{\text{кр}}^{\min}=\sqrt{\frac{2R}{\rho_0 h}}\sqrt[4]{\frac{D_{11}}{a_{11}}}\left(1+\frac{2\varepsilon}{\gamma}\right). \qquad (2.7)$$

Если устойчивость теряется по несимметричной форме, то, учитывая, что n^2 мало по сравнению с m^2 (как это видно из решения задачи для изотропной оболочки и подтверждается нашими вычислениями), членами порядка $\frac{n^2}{m^2}\cdot\frac{D_{ik}}{D_{11}}$, $\frac{n^2}{m^2}\frac{a_{ik}}{a_{11}}$ будем пренебрегать. В этом случае критическая скорость принимает минимальное значение вблизи m и n, удовлетворяющих уравнению

$$(D_{11}m+2D_{16}n)(a_{11}m^2+2a_{16}mn)^2-R^2(a_{11}m+a_{16}n)=0, \qquad (2.8)$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\cdots.$$

Для критической скорости получим приближенную формулу

$$U_{\text{кр}}^{\min}\approx\frac{1}{R\sqrt{\rho_0 h}}\sqrt{D_{11}m^2+4D_{16}mn+\frac{R^2}{a_{11}m^2+2a_{16}mn}}. \qquad (2.9)$$

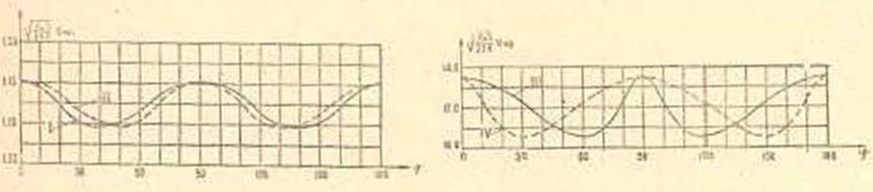
Рассматривая формулы (2.6)—(2.9), легко заметить, что минимальные значения критической скорости, а также и величина m (следовательно, и длины полуволны в направлениях образующих) зависят от ориентации главных направлений упругости материала оболочки.

3. Для иллюстрации приводим некоторые числовые примеры, принимая $h = 0{,}01\,R$, $n = 0$.

Рассматриваются четыре случая комбинаций упругих постоянных:

Случаи	E_1'	E_2'	G_{12}'	ν_1'	ν_2'
I	E	$2E$	$0{,}5E$	0,165	0,23
II	$2E$	E	$0{,}5E$	0,23	0,165
III	$10E$	E	$0{,}5E$	0,349	0,0349
IV	E	$10E$	$0{,}5E$	0,0349	0,349

При этих исходных данных ниже приведены таблица и график (фиг. 2) зависимости критической скорости от угла φ.



Фиг. 2.

φ	$\sqrt{\varkappa_0 h/2RE}\; U^{\min}_{\text{кр.}}$			
	I	II	III	IV
0	1,151	1,151	13,506	13,506
15	1,136	1,144	13,141	11,496
30	1,100	1,114	12,261	10,545
45	1,094	1,094	11,185	11,185
60	1,114	1,100	10,545	12,261
75	1,144	1,136	11,496	13,141
90	1,151	1,151	13,506	13,506

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

а) максимальные значения критической скорости получаются при $\varphi = k\dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, т. е. когда главные направления упругости материала оболочки совпадают с направлением потока газа;

б) минимальные значения критической скорости при $E_1' < E_2'$ достигаются вблизи углов $k\pi < \varphi_1 < k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ и $\dfrac{3\pi}{4} + k\pi < \varphi_2 < (k+1)\pi$

$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$, а при $E_1' > E_2'$—вблизи $k\pi+\frac{\pi}{4}<\varphi_1<k\pi+\frac{\pi}{2}$ и $k\pi+\frac{\pi}{2}<\varphi_2<k\pi+\frac{3\pi}{4}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$.

Отметим, что если $E_1' > E_2'$, то при увеличении E_1' угол φ_1 приближается к правому пределу, а φ_2—к левому пределу. Если же $E_1' < E_2'$, то с уменьшением E_1' угол φ_1 приближается к левому пределу, а φ_2—к правому пределу.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 17 VII 1962

Ժ. Ե. Բաղդասարյան

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ՁԱՅՆԻՑ ՄԵԾ ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆ ՈՒՆԵՑՈՂ ԳԱԶԻ ՀՈՍԱՆՔԻ ՄԵՋ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է օրթոտրոպ նյութից բաղկացած գլանային թաղանթի կայունության խնդիրը ձայնից մեծ արագություն ունեցող գազի հոսանքով շրջհոսվելիս, երբ նյութի առաձգականության գլխավոր ուղղություններից ոչ մեկը չի համընկնում հոսանքի ուղղության հետ: Ուսումնասիրված է օրթոտրոպ նյութի առաձգականության գլխավոր առանցքների տարբեր դիրքերի ազդեցությունը կրիտիկական արագության վրա: Ցույց է տրված, թե նրանց ինչպիսի՛ օրիենտացիայի դեպքում կրիտիկական արագությունը կլինի ամենամեծը և հակառակը:

Դիտարկված են մի քանի կոնկրետ խնդիրներ: Կառուցված են գրաֆիկներ և կազմված են աղյուսակներ:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Амбарцумян С. А.* Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, **4**, № 5, 1951.
3. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
4. *Болотин В. В.* Некоторые новые задачи динамики оболочек. Сб. „Расчеты на прочность", вып. 4, Машгиз, 1959.
5. *Ильюшин А. А.* Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, **20**, № 6, 1956.
6. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций. Изд. АН СССР, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

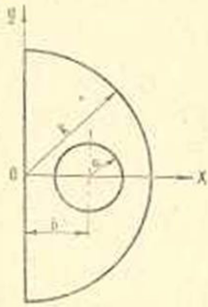
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. В. Михайлов

Кручение полукруглого стержня, ослабленного продольной круглой цилиндрической полостью

В работе дано приближенное решение задачи кручения стержня, поперечное сечение которого есть полукруг с круглым отверстием (фиг. 1).

Вычислены жесткость и напряжения с оценкой погрешности.



Фиг. 1.

§ 1. Постановка задачи

Обозначим область поперечного сечения через ω, радиус полукруга — R, радиус отверстия — a, расстояние от центра круга до центра кругового отверстия — b. Примем, что функция напряжений Φ точно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\Phi = -2\mu\tau \tag{1.1}$$

в области ω и граничному условию $\Phi = 0$ на внешнем контуре сечения. Граничное условие $Z_\nu = \dfrac{\partial\Phi}{\partial s} = 0$ на внутреннем контуре удовлетворяем приближенно, согласно принципу Сен-Венана [1].

Пусть имеем какой-нибудь стержень с внутренней продольной полостью. Разделим внутренний контур сечения стержня на n частей (фиг. 2) $c_1c_2, c_2c_3, \cdots, c_nc_1$ и потребуем, чтобы главный вектор и главный момент усилий

$$Z_\nu dzds = \frac{\partial\Phi}{\partial s} dzds,$$

действующие на каждую из частей боковой поверхности c_1c_2dz, $c_2c_3dz, \cdots, c_nc_1dz$, равнялись нулю.

Получаем следующие условия на внутреннем контуре

$$\int\limits_{c_1}^{c_2}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\, ds = 0, \cdots, \int\limits_{c_n}^{c_1}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\, ds = 0;$$

$$\int\limits_{c_1}^{c_2} x\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds = 0, \cdots, \int\limits_{c_n}^{c_1} x\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds = 0; \tag{1.2}$$

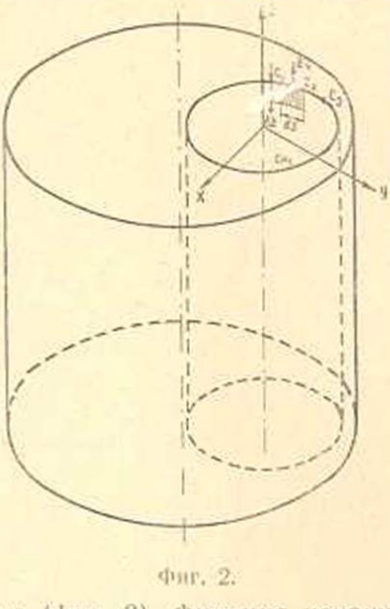
$$\int\limits_{c_1}^{c_2} y\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds = 0, \cdots, \int\limits_{c_n}^{c_1} y\frac{\partial\Phi}{\partial s}\,ds = 0,$$

где x и y — координаты точки внутреннего контура поперечного сечения стержня.

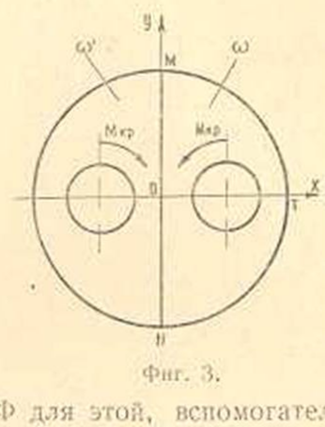
Очевидно, что точность решения зависит от числа участков, на которые резделен контур, при этом чем больше число участков, тем точнее решение. Однако, как будет видно из нижеследующего, практически приемлемые результаты можно получить, ограничиваясь делением контура на 2—3 участка.

Функцию напряжений конструируем следующим образом.

Рассмотрим задачу о кручении круглого стержня с двумя одинаковыми, симметрично расположенными круговыми полостями, в правой части сечения которого действует крутящий момент, направленный против хода часовой стрелки, а в левой части — по часовой



Фиг. 2.



Фиг. 3.

стрелке (фиг. 3). Функция напряжений Φ для этой, вспомогательной, задачи должна удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= -2\mu\tau \quad \text{при} \quad x \geqslant 0, \\ \nabla^2\Phi &= +2\mu\tau \quad \text{при} \quad x \leqslant 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

и контурному условию $\Phi = 0$ на внешней окружности круга. На внутренних окружностях функция Φ должна удовлетворять условиям (1.2).

Из мембранной аналогии следует, что для вспомогательной задачи на диаметре MN функция $\Phi = 0$ и, следовательно, часть круга MTN будет находиться в таких же условиях, как и сечение, соответствующее рассматриваемой задаче.

Решение уравнений (1.3) для вспомогательной задачи представим так:

$$\Phi = \begin{cases} -\dfrac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} & \text{при} \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0, \\ +\dfrac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} & \text{при} \quad \operatorname{Re} z \leqslant 0, \end{cases}$$

где $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$.

Функция $\varphi(z)$ должна быть голоморфной в области круга с двумя круговыми отверстиями, следовательно, ее можно представить в следующем виде [2]

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} z^{2k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{(z-b)^k} - \frac{(-1)^k}{(z+b)^k} \right], \tag{1.4}$$

где все коэффициенты действительные.

Здесь учтено то обстоятельство, что функция $\Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}$ должна быть симметричной относительно оси x и кососимметричной относительно оси y. Ввиду этого граничные условия (1.2) удовлетворяем только для правой внутренней окружности. Применяя комплексные координаты z и $\bar{z}$, можем записать эти условия так:

$$\int_{c_1}^{c_2} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \cdots, \int_{c_n}^{c_1} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0,$$

$$\int_{c_1}^{c_2} (z+\bar{z}) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \cdots, \int_{c_n}^{c_1} (z+\bar{z}) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \tag{1.5}$$

$$\int_{c_1}^{c_2} (z-\bar{z}) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0, \cdots, \int_{c_n}^{c_1} (z-\bar{z}) \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \right) = 0.$$

В первом приближении функция напряжений будет иметь вид

$$\Phi = -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} C_{2k+1} (z^{2k+1} + \bar{z}^{2k+1}) +$$

$$+ A_1 \left[\frac{1}{(z-b)} + \frac{1}{(z+b)} \right] + A_1 \left[\frac{1}{(\bar{z}-b)} + \frac{1}{(\bar{z}+b)} \right]. \tag{1.6}$$

Из граничного условия $\Phi = 0$ на внешнем контуре круга имеем

$$C_{2k+1} = -\frac{1}{R^{2k+1}} \left(B_{2k+1} + \frac{2A_1 b^{2k}}{R^{2k+1}} \right), \tag{1.7}$$

где

$$B_{2k+1}=(-1)^k\frac{4\mu\tau R^2}{\pi(2k+1)\left[(2k+1)^2-4\right]}$$

— коэффициенты ряда Фурье функции

$$f(\theta)=\begin{cases}-\dfrac{\mu\tau R^2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^2}{4} & \text{при } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ +\dfrac{\mu\tau R^2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^2}{4} & \text{при } \dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Тогда функция напряжений примет вид

$$\Phi=-\frac{\mu\tau(z+\bar z)^2}{4}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^{2k+1}}\left(B_{2k+1}+\frac{2A_1b^{2k}}{R^{2k+1}}\right)(z^{2k+1}+\bar z^{2k+1})+$$
$$+A_1\left[\frac{1}{(z-b)}+\frac{1}{(z+b)}\right]+A_1\left[\frac{1}{(\bar z-b)}+\frac{1}{(\bar z+b)}\right].$$

Неизвестный коэффициент A_1 определяем из граничного условия на внутреннем контуре

$$\int_0^{2\pi}(z-\bar z)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z}d\bar z\right)=0.$$

Первые два условия (1.5) удовлетворяются тождественно. Для A_1 имеем

$$A_1=\mu\tau\frac{a^2\left[b-\dfrac{R}{\pi}\left(\dfrac{R^2+b^2}{b^2}-\dfrac{R^4-b^4}{Rb^3}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{R}\right)\right]}{\left[1-\dfrac{a^2}{4b^2}-\dfrac{2a^2R^2(R^4+b^4)}{(R^4-b^4)^2}\right]}. \qquad (1.8)$$

Удовлетворение граничных условий по внутреннему контуру в первом приближении дает недостаточно точные результаты (табл. 2).

Во втором приближении делим внутренний контур сечения на два участка $0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, но ввиду симметричности функции Φ относительно оси x, интегрирование (1.5) ведем от 0 до π.

Функция напряжений во втором приближении будет

$$\Phi=-\frac{\mu\tau(z+\bar z)^2}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k+1}(z^{2k+1}+\bar z^{2k+1})+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}A_k\left\{\left[\frac{1}{(z-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(z+b)^k}\right]+\left[\frac{1}{(\bar z-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(\bar z+b)^k}\right]\right\}. \qquad (1.9)$$

Граничные условия будут

$\Phi=0$ на внешнем контуре круга и (1.10)

$$\int_{b+a}^{b-a}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar z}d\bar z\right)=0,$$

$$\int\limits_{b+a}^{b-a} (z+\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z}\right)=0,$$

$$\int\limits_{b+a}^{b-a} (z-\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z}\right)=0 \tag{1.11}$$

на внутреннем контуре.

Из (1.10) имеем

$$C_1=-\frac{1}{R}\left(B_1+\frac{2A_1}{R}\right),$$

$$C_{2k+1}=-\frac{1}{R^{2k+1}}\left[B_{2k+1}+2A_1\frac{b^{2k}}{R^{2k+1}}+2A_2\frac{2kb^{2k-1}}{R^{2k+1}}+\right.$$

$$\left.+A_3\frac{2k(2k-1)\,b^{2(k-1)}}{R^{2k+1}}\right],$$

где $k\geqslant 1$, а B_{2k+1} определяется по (1.7).

Тогда функция напряжений представляется так:

$$\Phi=-\frac{\mu\tau\,(z+\bar{z})^2}{4}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k+1}}{R^{2k+1}}\left(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2A_1b^{2k}}{R^{2(2k+1)}}\left(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A_2b^{2k-1}}{R^{2(2k+1)}}\,2k\left(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1}\right)-\sum_{=1}^{\infty}\frac{A_3b^{2(k-1)}}{R^{2(2k+1)}}\,2k\,(2k-1)\left(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}A_k\left\{\left[\frac{1}{(z-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(z+b)^k}\right]+\left[\frac{1}{(\bar{z}-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(\bar{z}+b)^k}\right]\right\}.$$

Из (1.11) получаем систему трех уравнений относительно A_k, решая которую, находим A_k (ввиду громоздкости выражений, система уравнений не приводится). Функция напряжений в третьем приближении будет иметь вид

$$\Phi=-\frac{\mu\tau\,(z+\bar{z})^2}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}C_{2k+1}\left(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{6}A_k\left\{\left[\frac{1}{(z-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(z+b)^k}\right]+\left[\frac{1}{(\bar{z}-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(\bar{z}+b)^k}\right]\right\}. \tag{1.12}$$

Граничные условия будут

$$\Phi=0 \text{ на внешнем контуре круга} \tag{1.13}$$

и

$$\int\limits_{b+a}^{b+ia}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z}\right)=0,\qquad \int\limits_{b+ia}^{b-a}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\,d\bar{z}\right)=0,$$

$$\int\limits_{b+a}^{b+ia}(z+\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=0,\quad \int\limits_{b+ia}^{b-a}(z+\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=0,$$

$$\int\limits_{b+a}^{b+ia}(z-\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=0,\quad \int\limits_{b+ia}^{b-a}(z-\bar{z})\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}d\bar{z}\right)=0 \tag{1.14}$$

на внутреннем контуре.

Из (1.13) имеем

$$C_1=-\frac{1}{R}\left(B_1+\frac{2A_1}{R}\right),$$

$$C_3=-\frac{1}{R^3}\left(B_3+\frac{2A_1b^2}{R^3}+\frac{4A_2b}{R^3}+\frac{2A_3}{R^3}\right),$$

$$C_5=-\frac{1}{R^5}\left(B_5+\frac{2A_1b^4}{R^5}+\frac{8A_2b^3}{R^5}+\frac{12A_3b^2}{R^5}+\frac{8A_4b}{R^5}+\frac{2A_5}{R^5}\right),$$

$$C_{2k+1}=-\frac{1}{R^{2k+1}}\Bigg\{B_{2k+1}+\frac{1}{R^{2k+1}}\Bigg[2A_1b^{2k}+2A_2b^{2k-1}2k+$$

$$+A_3b^{2(k-1)}2k(2k-1)+\frac{A_4b^{2k-3}}{3}2k(2k-1)(2k-2)+$$

$$+\frac{A_5b^{2(k-2)}}{12}2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)+$$

$$+\frac{A_6b^{2k-5}}{60}2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4)\Bigg]\Bigg\},$$

где $k\geqslant 3$, а B_{2k+1} определяется по (1.7).

Тогда функция напряжений представится так

$$\Phi=-\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k+1}}{R^{2k+1}}(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2A_1b^{2k}}{R^{2(2k+1)}}(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A_2b^{2k-1}}{R^{2(2k+1)}}2k(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_3b^{2(k-1)}}{R^{2(2k+1)}}2k(2k-1)(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_4b^{2k-3}}{3R^{2(2k+1)}}2k(2k-1)(2k-2)(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{A_5b^{2(k-2)}}{12R^{2(2k+1)}}2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})-$$

$$-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{A_6b^{2k-5}}{60R^{2(2k+1)}}2k(2k-1)\cdots(2k-4)(z^{2k+1}+\bar{z}^{2k+1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{6} A_k\left\{\left[\frac{1}{(z-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(z+b)^k}\right]+\left[\frac{1}{(\bar{z}-b)^k}-\frac{(-1)^k}{(\bar{z}+b)^k}\right]\right\}.$$

Из (1.14) получаем систему шести уравнений относительно A_k, решая которую, находим A_k.

§ 2. Крутящий момент и напряжения

Крутящий момент вычисляем по формуле

$$M_{kp}=\frac{1}{2}\oint(x^2+y^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}dx-\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy\right)+\mu\tau\oint xy\,(xdx-ydy) \quad (2.1)$$

согласно [3] и [4].

Переходя в (2.1) к комплексным координатам z и $\bar{z}$, имеем

$$M_{kp}=\frac{1}{2i}\oint z\bar{z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}}d\bar{z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right)-\frac{\mu\tau}{4i}\oint\bar{z}^2 z\,dz. \quad (2.2)$$

В случае многосвязной области крутящий момент M_{kp} представится суммой контурных интегралов (2.2), вычисленных в направлении положительного обхода внешнего контура L_0 так, чтобы область оставалась слева, и m контурных интегралов, вычисленных по m внутренним контурам в противоположном направлении

$$M_{kp}=\frac{1}{2i}\int_{L_0} z\bar{z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}}d\bar{z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right)-\frac{\mu\tau}{4i}\int_{L_0}\bar{z}^2 z\,dz-$$

$$-\sum_{m=1}^{m}\left[\frac{1}{2i}\oint z\bar{z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial \bar{z}}d\bar{z}-\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz\right)-\frac{\mu\tau}{4i}\oint\bar{z}^2 z\,dz\right]. \quad (2.3)$$

Для рассматриваемого сечения (фиг. 1) имеем

$$M_{kp}=\pi\left\{\frac{\mu\tau R^4}{4}-\frac{\mu\tau a^4}{2}-2\mu\tau a^2b^2+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16\mu\tau R^4}{\pi^2}\times\right.$$

$$\times\frac{1}{(2k+1)(2k+3)\left[(2k+1)^2-4\right]}+$$

$$+\frac{2\mu\tau Ra^2b}{\pi}\left[1+\frac{R^2}{b^2}-\frac{(R^4-b^4)}{Rb^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}\right]-$$

$$-A_1\left|2b+\frac{a^2}{2b}+\frac{8R}{\pi}+\frac{4a^2b\,(R^4+b^4)\,R^2}{(R^4-b^4)^2}+\frac{8b}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R}{b}-\right.$$

$$\left.-\frac{8R^3}{\pi b^2}\left(1-\frac{R}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}\right)\right|+A_2\left|\frac{a^2}{2b^2}-\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R}{b}+\frac{8Rb}{\pi(R^2+b^2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{16a^2b^2R^8}{(R^4-b^4)^3}-\frac{8R^3}{\pi b^3}\left(2-3\frac{R}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}+\frac{b^2}{R^2+b^2}\right)\right|+$$

$$+A_3\left[\frac{48R^4}{\pi b^5}\operatorname{arctg}\frac{b}{R}-\frac{3a^2}{8b^3}-\frac{R^2(R^4+56R^2b^2+67b^4)+24b^6}{\pi R(R^2+b^2)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{32a^2b^3(2R^4+b^4)R^4}{(R^4-b^4)^4}\right]\Bigg\}. \tag{2.4}$$

Для вычисления напряжений имеем известную формулу

$$T_n-iT_s=2ie^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{2.5}$$

где T_n — касательное напряжение, направленное по нормали n к произвольной кривой, расположенной в области сечения, T_s — касательное напряжение, направленное по касательной к указанной кривой, φ — угол, составленный нормалью n с осью x.

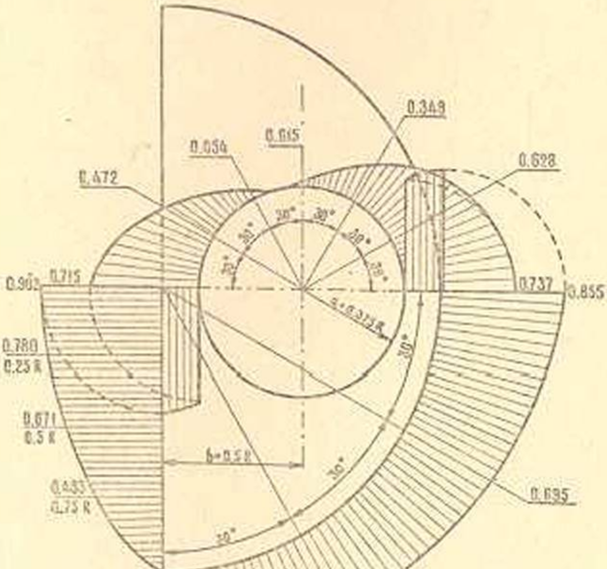
Из (2.5) для напряжения T_s имеем

$$T_s=-\left(e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+e^{-i\varphi}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{z}}\right). \tag{2.6}$$

Численный пример выполнен для $b=0{,}5R$ и $a=0{,}1R$; $0{,}2R$; $0{,}3R$; $0{,}375R$; $0{,}4R$.

Результаты решения системы уравнений, получаемой из (1.11) и (1.14), для указанных соотношений размеров приведены в табл. 1.

На фиг. 4 показана эпюра напряжений для $b=0{,}5R$ и $a=0{,}375R$.



Масштаб τ_s в 1см — 0.25 ...

Фиг. 4.

Таблица 1

Коэффициенты	$a=0,1R$	$a=0,2R$		$a=0,3R$		$a=0,375R$	$a=0,4R$	
	Приближение II	Приближение		Приближение		Приближение II	Приближение	
		II	III	II	III		II	III
$A_1(\mu\tau R^3)$	0,000159	0,000706	0,000726	0,001925	0,001932	0,003716	0,004966	0,005312
$A_2(\mu\tau R^4)$	0,000015	0,000213	0,000218	0,000845	0,000853	0,001527	0,001601	0,001653
$A_3(\mu\tau R^5)$	0	0,000004	0,00000426	—0,000062	—0,000614	—0,000160	—0,000250	—0,000288
$A_4(\mu\tau R^6)$	—	—	0	—	0,000007	—	—	0,000014
$A_5(\mu\tau R^7)$	—	—	0	—	0	—	—	0
$A_6(\mu\tau R^8)$	—	—	0	—	0	—	—	0

Наибольшие напряжения возникают на прямолинейной части контура; в угловых точках, как и следовало ожидать, напряжения равны нулю.

Найденная функция напряжений точно удовлетворяет граничному условию на внешнем контуре и приближенно, но достаточно точно, на внутреннем контуре, о чем свидетельствуют величины погрешностей $\Delta\%$, определяемых согласно [6].

При точном решении задачи на внутреннем контуре сечения

$$T_n = i\left(e^{i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial z} - e^{-i\varphi}\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}\right) = 0,$$

отсюда

$$\Delta = \frac{e^{i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}} + e^{i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial z} - e^{-i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\bar{z}}}{e^{i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial z} - e^{-i\varphi}\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial\bar{z}}} 100\%,$$

где

$$\Phi_0 = -\frac{\mu\tau(z+\bar{z})^2}{4}, \quad \text{а} \quad \Phi_1 = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)}.$$

Значения погрешностей $\Delta\%$ для наиболее характерных точек приведены в табл. 2.

Таблица 2

$a=0{,}375R$ $b=0{,}5R$	Точки			
	$z=b+a$	$z=b+ia$	$z=b-a$	$z=b+ae^{\frac{2}{3}\pi i}$
I приближение	0	6,7 %	0	5,3 %
II приближение	0	0,41 %	0	1,15 %

В табл. 3 приведены жесткость и напряжения T_s^{max} для полукруга с отверстием и аналогичные данные для полукруга без отверстия.

Таблица 3

Сечение	Жесткость ($\mu\tau R^4$)	$T_s^{max}(\mu\tau R)$ по круговой части контура	$T_s^{max}(\mu\tau R)$ по радиальной части контура
Полукруг с отверстием $a=0{,}375R$; $b=0{,}5R$	0,242	0,855	0,902
Полукруг [5] (по Сен-Венану)	0,296	0,719	0,849

Приведенные расчеты для стержня полукруглого сечения с отверстием показывают (табл. 4), что для получения практически при-

Точки	$a=0{,}1R$, $b=0{,}5R$			$a=0{,}2R$, $b=0{,}5R$		
	T_s		β_s	T_s		
	Приближение			Приближение		
	I	II		I	II	III
$z=R$	0,714128	0,751650	4,9	0,739392	0,751650	0,752292
$z=b+a$	0,213176	0,271112	21,4	0,326564	0,459134	0,426588
$z=b-a$	0,085956	0,168812	49	0,286900	0,409722	0,411802
$z=0$	0,845656	0,846868	0	0,834616	0,849116	0,848994

Точки	$a=0{,}375R$, $b=0{,}5R$			$a=0{,}4R$, $b=0{,}5R$		
	T_s		β_s	T_s		
	Приближение			Приближение		
	I	II		I	II	III
$z=R$	0,791793	0,855604	7,5	0,823036	0,865092	0,871928
$z=b+a$	0,651278	0,737684	11,9	0,711804	0,760230	0,769988
$z=b-a$	0,521194	0,715334	27	0,529716	0,739460	0,748242
$z=0$	0,775866	0,902996	14	0,740516	0,905938	0,903972

Таблица 4

		$a = 0{,}3R$, $b = 0{,}5R$				
		T_s				
		Приближение				
β_2	β_3	I	II	III	β_2	β_3
1,6	0,08	0,762200	0,801042	0,801298	4,9	0,031
3,9	0,75	0,523950	0,609372	0,610532	14	0,18
30	0,5	0,408472	0,592076	0,598754	31	1,1
1,65	0,014	0,808956	0,876150	0,877898	7,8	0,19

β_2	β_3	При отсутствии отверстия T_s (по автору)	По Сен-Венану [5] T_s
4,9	0,19	0,726760	0,719
6,5	1,27		
28	1,16		
18	0,44	0,848826	0,849

емлемых результатов можно ограничиться выполнением второго приближения. В табл. 4 приведена относительная погрешность $(k-1)$-го приближения относительно k-го приближения

$$\beta_k = \frac{T_z^{(k)} - T_z^{(k-1)}}{T_z^{(k)}} 100\%.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
Кафедра сопротивления материалов

Поступила 29 V 1962

Լ. Վ. Միխայլով

ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔՈՎ ԿԻՍԱՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկվում է շրջանաձև անցք ունեցող կիսաշրջանի ոլորման խնդիրը։ Ընդունվում է, որ լարումների ֆունկցիան (Φ) ճշգրիտ բավարարում է ոլորման դիֆերենցիալ հավասարմանը (1.1) և կիսաշրջանի արտաքին եզրագծի վրա Φ=0 պայմանին, իսկ անցքին համապատասխանող գլանային մակերևույթի վրա շոշափող լարումների (Z.) զրոյի հավասար լինելու պայմանը բավարարվում է ըստ Սեն-Վենանի սկզբունքի (1.2)։

Հոդվածում հաշված են օրինակներ $b=0{,}5R$, $a=0{,}1R$; $0{,}2R$; $0{,}3R$; $0{,}375R$; $04R$ *դեպքերի համար։*

Բերված հաշվարկները ցույց են տալիս, որ կիրառական արդյունքներ ստանալու համար բավական է սահմանափակվել խնդրի լուծման երկրորդ մոտավորությամբ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапонджян О. М.* Применение принципа Сен-Венана к решению задачи теории упругости. Сборник научных трудов ЕрПИ, Ереван, 1960.
2. *Гурса Э.* Курс математического анализа, т. II. ОНТИ, М., 1936.
3. *Кит Г. С.* Приближенное решение задачи кручения. Изд. АН УССР, Киев, 1960.
4. *Ван-Цзи-Де.* Прикладная теория упругости. Физматгиз, М., 1959.
5. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, НКТП, М., 1937.
6. *Бахтияров И. А.* Кручение призматического бруса коробчатого сечения. Автореферат диссертации Аз. госуниверситет, мех.-мат. фак., Баку, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

К. С. Карапетян

Ползучесть бетона при кручении

§ 1. Введение

Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона при кручении мало исследовано, между тем это имеет как теоретическое, так и практическое значение. Как известно, бетон под длительной нагрузкой наделен свойством ползучести, благодаря чему его деформации со временем намного превосходят соответствующие упруго-мгновенные деформации. Поэтому учет ползучести бетона при проектировании бетонных и железобетонных конструкций имеет важное значение.

Для учета ползучести бетона существуют различные теории, которые базируются на ряде предпосылок, приемлемость которых в отношении такого напряженного состояния, как кручение, насколько автору известно, пока никем не изучалась [1].

§ 2. Цель исследования

Цель данных исследований заключалась в экспериментальном определении приемлемости второй и третьей предпосылок теории упруго-ползучего тела при кручении.

Согласно этим предпосылкам связь между упругими деформациями и напряжениями, а также между деформациями ползучести и напряжениями, до определенного напряжения, принимается линейной [1].

Кроме этого, важно было также установить, существует ли закономерная качественная и количественная связь между деформациями ползучести при кручении и растяжении. Есть предположение, что ползучесть бетона при кручении и растяжении практически одинакова [2]. Однако, экспериментально это пока никем не установлено.

Наличие закономерной связи намного облегчит исследования ползучести бетона и даст возможность получить более достоверные данные.

Здесь имеется в виду то обстоятельство, что не при всех видах напряженных состояний можно непосредственно получить чистые деформации ползучести.

При сжатии и растяжении деформации ползучести измеряются в сумме с объемными деформациями бетона, обусловленными набуханием и усадкой бетона. Чтобы отделить деформации ползучести от суммарных, приходится параллельно на ненагруженных образцах-близнецах определять объемные деформации бетона.

По мнению некоторых исследователей такой метод определения деформаций ползучести не является достоверным. Однако, пока что этот метод является единственным.

Совсем другое имеет место при кручении. В этом случае объемные деформации бетона не накладываются на деформации ползучести, что исключает необходимость параллельного определения объемных деформаций бетона на образцах-близнецах.

Таким образом, при кручении замеряются чистые деформации ползучести.

Поэтому в случае наличия закономерной связи правильнее будет экспериментально определять ползучесть бетона при кручении и по этим данным оценивать ползучесть при растяжении и сжатии.

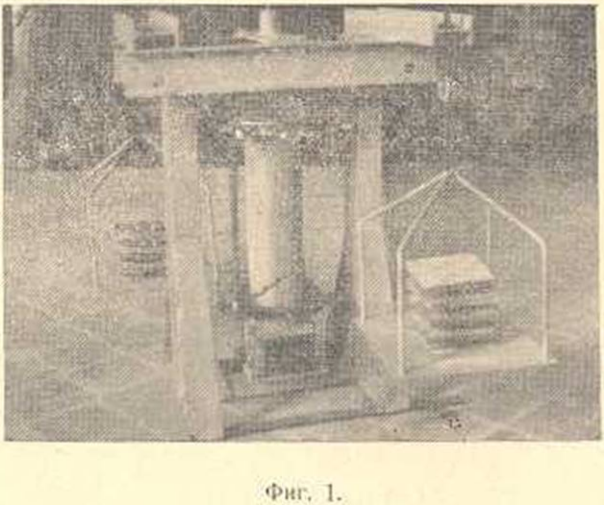
Помимо указанных вопросов, целью данной работы являлось также исследование:

1. Влияния фактора времени на прочность и деформативность бетона при кручении.

2. Влияния длительного загружения бетона крутящим моментом на его прочность и деформативность при кручении в зависимости от величины напряжения в процессе длительного загружения.

§ 3. Методика исследования

Для исследования ползучести бетона при кручении были изготовлены специальные приспособления (фиг. 1). Испытывались образцы длиной 75 *см*. Образцы на участке 60 *см* по длине имели цилиндрическую форму



Фиг. 1.

диаметром 14 *см*, а по концам на участке 7,5 *см* — квадратное сечение (14 × 14 *см*). При испытании нижний конец опытного образца защемлялся в нижнем захвате приспособления, жестко закрепленного к его раме.

Кручение образца осуществлялось путем загружения двух грузовых платформ, которые тросами через блоки были связаны с выступающими частями верхнего захвата, служащими плечом пары.

Методика измерения деформаций кручения была принята такая же, как в опытах В. В. Блинкова [2].

Опыты были поставлены над тяжелым бетоном, приготовленным на базальтовом щебне и кварцевом песке. В качестве вяжущего материала был применен портландцемент Араратского завода, активностью 360.

Характеристика бетона приводится в таблице 1.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 $м^3$ бетона в *кг*				Объемный вес бетона в $т/м^3$	R_k в месячном возрасте в $кг/см^2$
	цемент	песок	щебень	вода		
1:3,31:3,83	267	884	1022	186	2,36	133

Для проведения намеченных программой опытов были изготовлены две серии образцов. Каждая серия включала 18 образцов для испытания на кручение, а также необходимое количество кубиков размером $10 \times 10 \times 10$ *см* и призм — $10 \times 10 \times 40$ *см*.

Каждая серия образцов изготовлялась из одного замеса бетона.

Бетон приготовлялся вручную, а уплотнение бетона производилось на виброплощадке при продолжительности вибрации 15 *сек*. Приготовление образцов производилось в металлических разборных формах. Образцы освобождались от форм на четвертые сутки. Все образцы с момента изготовления хранились в помещении, где температура в период длительных испытаний $T = 21 \pm 7°C$, а относительная влажность $p = 53 \pm 12\%$.

§ 4. Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона

Для изучения этого вопроса соответствующие образцы были испытаны в возрасте 7, 28, 120, 520 и 630 дней. При испытании призм на сжатие и цилиндрических образцов на кручение нагрузка повышалась ступенями. Под каждой ступенью нагрузки образцы выдерживались лишь на время, необходимое для отсчетов по измерительным приборам.

Кривые нарастания кубиковой и призменной прочностей, а также прочности бетона на кручение* во времени представлены на фиг. 2. Кривые построены на основании формул

* Прочность бетона на кручение определялась по формуле $\tau = \frac{M_{кр} r_0}{J_п}$

$$R_k = \frac{100\,t}{3{,}5 + 0{,}65\,t}, \tag{1}$$

$$R_{\text{пр}} = \frac{100\,t}{7{,}6 + 1{,}05\,t}, \tag{2}$$

$$\tau = \frac{100\,t}{65 + 6{,}1\,t}, \tag{3}$$

где t-возраст бетона.

Фиг. 2.

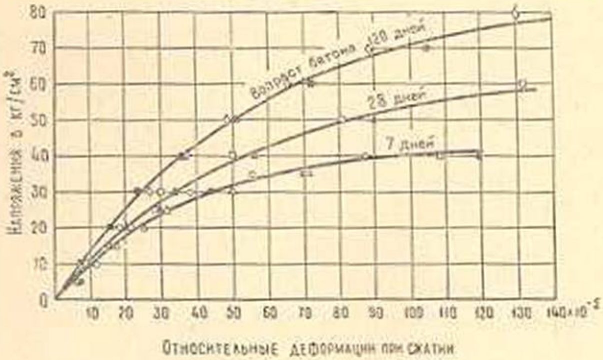
Как видно из фиг. 2, кривые, построенные по формулам (1), (2) и (3), дают удовлетворительное совпадение с опытными данными.

В табл. 2 приведены характеристики прочности бетона в различных возрастах, подсчитанные по этим формулам.

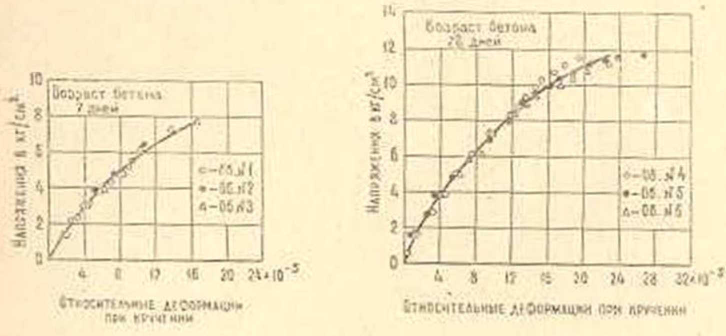
Таблица 2

Характеристики прочности бетона	Возраст бетона в сутках					
	7	14	28	90	200	600
$R_{\text{к}}$ в $кг/см^2$	87	111	129	145	150	152
$R_{\text{пр}}$ в $кг/см^2$	47	63	76	88	92	94
τ в $кг/см^2$	6,5	9,3	11,9	14,7	15,5	16,0
$R_{\text{к}}$ в $\%$ от месячной прочности	68	86	100	112	116	118
$R_{\text{пр}}$ в $\%$ от месячной прочности	62	83	100	116	121	124
τ в $\%$ от месячной прочности	55	78	100	114	120	124
$R_{\text{пр}}/R_{\text{к}}$	0,53	0,56	0,59	0,61	0,61	0,62
$\tau/R_{\text{к}}$	0,075	0,084	0,092	0,101	0,103	0,105

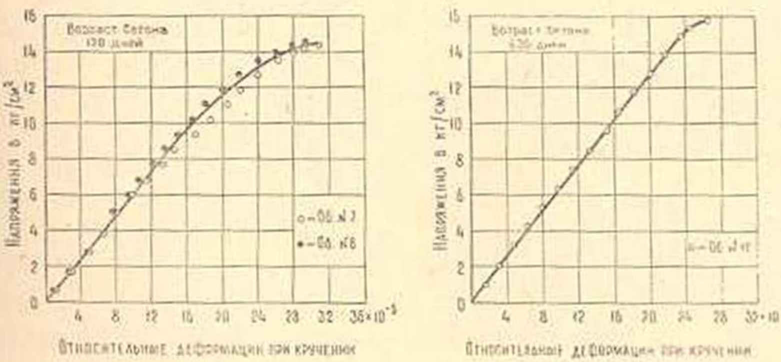
На основании табл. 2 прочность бетона на кручение (после возраста бетона 28 дней) составляет примерно 10% от прочности на сжатие. Как известно, такая доля от прочности бетона на сжатие нормирована для прочности бетона на растяжение. В наших опытах прочность бетона на растяжение, по испытаниям больших восьмерок, в месячном возрасте составляла 8 *кг/см²*, т. е. была намного меньше, чем прочность бетона на кручение. В опытах В. В. Блинкова наблюдалось обратное явление [2].



Фиг. 3.



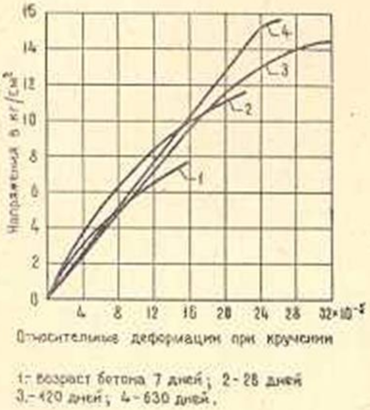
Фиг. 4.



Фиг. 5.

На фиг. 3 приведены для различных возрастов кривые деформаций бетона при сжатии. Кривые деформаций при кручении* приведены на фиг. 4 и 5.

На фиг. 4 связь между напряжениями и деформациями бетона при кручении до месячного возраста носит криволинейный характер. Для более зрелых возрастов эта связь до определенных напряжений носит линейный характер, а выше—криволинейный. При этом, чем



Фиг. 6.

Фиг. 7.

больше возраст бетона к моменту испытания, тем больше то напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость (фиг. 6).

Характерный вид разрушения бетонного образца при кручении приведен на фиг. 7.

§ 5. Ползучесть бетона при кручении

Согласно физической теории ползучести бетона Е. Фрейсинэ, ползучесть бетона, как и усадка, является исключительно следствием капиллярных явлений в порах бетона. При этом ползучесть рассматривается, как обычная усадка с гигрометрическим состоянием, внезапно увеличенным приложением сжимающей силы [14].

На то, что ползучесть бетона не является исключительно следствием капиллярных явлений, указывали ряд исследователей [9, 11]. Это было доказано и автором настоящей статьи путем постановки специальных опытов [4, 5, 6, 7]. На основании этих исследований нами была выдвинута обобщенная гипотеза механизма ползучести бетона, согласно которой ползучесть бетона при сжатии до напряжений 0,55—0,6 R является следствием как вязкости гелевой структурной составляющей цементного кам-

* Деформации при кручении определялись по формуле $\gamma = \frac{a r_0 10^{-3}}{r_1 \cdot l}$, где a—отсчет по мессурам; r_1—радиус прибора; r_0—радиус образца; l—база прибора.

ня, так и капиллярных явлений, а при более высоких напряжениях еще и следствием появления и развития микротрещин в бетоне. Роль каждого из этих факторов в данном явлении зависит от состава бетона, характеристики вяжущего, возраста бетона к моменту загружения, величины напряжения, температуры и влажности окружающей среды и т. д. Ползучесть бетона при сжатии, обусловленная капиллярными явлениями, в большей мере зависит от процесса высыхания бетона, т. е. от температуры и влажности окружающей среды.

Наши исследования показали, что ползучесть бетона при растяжении в основном протекает за счет вязкости гелевой структурной составляющей цементного камня [6].

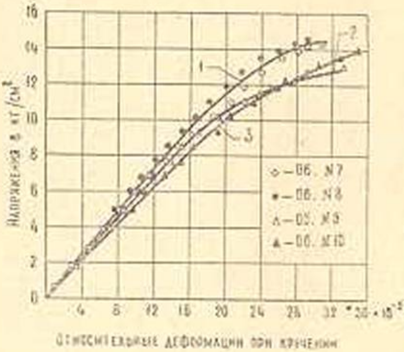
Е. Фрейсинэ на основании своей теории утверждает, что при кручении ползучесть бетона должна отсутствовать, так как кручение не приводит к изменению гигрометрического состояния бетона. Однако, как показали опыты некоторых исследователей, ползучесть бетона имеет место и при кручении [2].

Как известно, даже при кратковременных испытаниях, длительность испытания оказывает существенное влияние на деформацию бетона. Причиной этого является развитие деформаций ползучести, которые тем больше, чем больше время нахождения бетона под нагрузкой. В опытах Гленвиля при обычных кратковременных испытаниях бетона на сжатие с различными выдержками (5, 15, 30 и 60 *сек.*) были получены расходящие кривые деформаций [12]. На основании этих опытов он пришел к выводу, что при мгновенном загружении бетона связь между напряжениями и деформациями выражается линейной зависимостью.

В настоящей работе аналогичные опыты были поставлены на кручение. Возраст бетона к моменту испытания образцов составлял 120 дней. Всего было испытано 4 образца, из коих 2 образца (№ 7 и № 8) без выдержки, один образец (№ 9) с выдержкой 1 минуты и один образец (№ 10) — 5 минут.

Результаты этих опытов приведены на фиг. 8, откуда видно, что при кручении имеет место та же закономерность, что и при сжатии. Из фиг. 8 следует, что с увеличением продолжительности выдержки, а следовательно, и длительности испытания деформации бетона при кручении возрастают. Разница заключается лишь в том, что при кручении, независимо от длительности испытания, до определенных напряжений (0,6—0,65τ) связь между напряжениями и деформациями выражается линейной зависимостью.

В этих опытах длительность испытания для образцов, испытанных без выдержки, составляла 8—9 минут, для образца, испытанного с выдержкой 1 минута,—26 минут и для образца, испытанного с выдержкой 5 минут,—95 минут. При этом пределы прочности бетона на кручение соответственно составляли 14,4; 13,3 и 14,3 *кг/см²*. Эти данные показывают, что при кручении так же, как и при сжатии чем больше длительность испытания, тем меньше прочность. Однако, такой вывод был бы правильным в том случае, если прочность образца № 10, испытанного с наибольшей выдержкой, оказалась бы наименьшей. Фактически же она получилась почти равной прочности образцов № 7 и № 8, испытанных без выдержки. Очевидно, влияние длительности испытания в этом случае оказалось несущественным по той причине, что прочность образца № 10 еще до момента испытания была больше прочности остальных образцов. При одинаковой прочности всех образцов до испытания влияние длительности испытания несомненно оказалось бы закономерным и прочность образца № 10 получилась бы наименьшей. В этом случае и кривая (3) на фиг. 8 заняла бы положение ниже остальных.



Фиг. 8.

На основании приведенных выше опытов, при кратковременных испытаниях, длительность испытания оказывает на прочность и деформативность бетона при кручении такое же влияние, как и при сжатии.

Явление, что при кручении до определенных напряжений (0,6—0,65 τ) независимо от длительности испытания, связь между напряжениями и деформациями бетона носит линейный характер, очевидно, характерно для бетона зрелого возраста.

Таким образом, при кручении так же, как и при сжатии, в зависимости от длительности испытания бетона может быть получено множество диаграмм деформаций бетона. Причиной этого, как уже отмечалось, является развитие деформаций ползучести. Возраст бетона к моменту испытания в этих опытах составлял 4 месяца. При более молодом возрасте расходимость кривых деформаций получилась бы еще большей.

Для исследования зависимости между напряжениями и деформациями ползучести бетона при кручении, бетонные образцы были загружены на длительное кручение при относительных напряжениях 0,25; 0,50; 0,60; 0,75; 0,80 и 0,90. Под длительную нагрузку были установлены 15 образцов. Возраст бетона к моменту длительного загружения составлял 28 дней, а прочность на кручение — 11,4 *кг/см²*.

Данные о загруженных образцах приводятся в табл. 3.

Образцы находились под длительной нагрузкой 305 дней. В процессе длительного загружения образцы хранились в помещении, где температура $T = 21 \pm 7°C$, а относительная влажность $P = 58 \pm 12\%$.

В момент загружения образцов длительной нагрузкой измерялись упругие деформации. При этом связь между упругими деформациями и напряжениями при кручении выражается линейной зависимостью вплоть до относительного напряжения 0,90 (фиг. 9). На фиг. 9 связь между упругими деформациями и напряжениями выражается следующей зависимостью

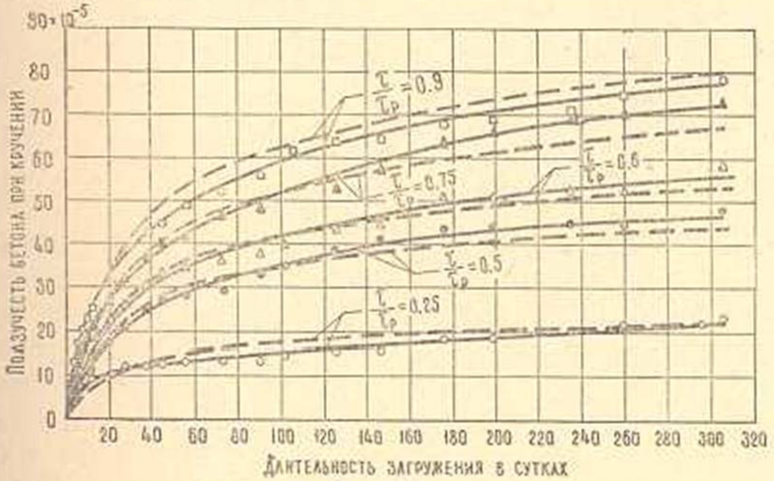
$$\gamma_y = 11{,}4 \frac{\tau}{\tau_p} \times 10^{-5}. \qquad (4)$$

Таблица 3

Возраст бетона к моменту загружения в сутках	τ_p в $кг/см^2$	$\frac{\tau}{\tau_p}$	τ в $кг/см^2$	Количество загруж. образцов в шт.
28	11,4	0,25	2,85	3
		0,50	5,70	3
		0,60	6,85	3
		0,75	8,55	3
		0,80	9,10	1
		0,90	10,25	2

На фиг. 10 жирными линиями нанесены экспериментальные кривые ползучести бетона при кручении для различных относительных напряжений. Кривая ползучести образца, загруженного при относительном напряжении 0,8, не приводится, так как ее деформации не измерялись ввиду недостаточности приборов для измерения деформаций. Поэтому указанный образец предназначался для исследований влияния длительного загружения на прочность и деформативность бетона при кручении. Как видно из фиг. 10, даже при длительности загружения 300 дней деформации ползучести не стабилизировались.

Фиг. 9.



Фиг. 10.

На фиг. 10 приведены экспериментальные кривые ползучести (сплошные линии) и кривые (пунктир), построенные на основании формулы (5)

$$\gamma_n = 100\left[1 - 0{,}5\left(e^{-0{,}05t_1} + e^{-0{,}005t_1}\right)\right] \frac{\tau}{\tau_p} 10^{-5}. \qquad (5)$$

Кривые, построенные на основании этой формулы, дают незначительное отклонение от экспериментальных кривых ползучести. Формула (5) может быть написана также в следующем виде

$$\gamma_n = 8{,}77\,[1 - 0{,}5\,(e^{-0{,}05t_1} + e^{-0{,}005t_1})]\,\tau\cdot 10^{-5}. \qquad (6)$$

Таким образом, те предпосылки теорий ползучести бетона, согласно которым принята линейная зависимость между упругими деформациями и напряжениями, а также между деформациями ползучести и напряжениями, справедливы и для случая кручения вплоть до относительного напряжения 0,9. На основании фиг. 9 и 10 характеристика ползучести бетона (φ_{t_1}), т. е. отношение деформаций ползучести к соответствующим упруго-мгновенным деформациям при кручении для длительности загружения 300 дней составляет 7,7. При предельных деформациях ползучести, т. е. когда $t_1 = \infty$, на основании формул (4) и (5) характеристика ползучести приобретает значение 8,77.

В данной работе параллельно с исследованием ползучести бетона при кручении исследовалась также ползучесть при растяжении. Состав бетона был взят тот же, что и для опытов кручения. Отличалась лишь активность цемента, которая в этих опытах составляла 400 *кг/см*².

В месячном возрасте прочность бетона на сжатие была 159 *кг/см*², а на растяжение — 8 *кг/см*².

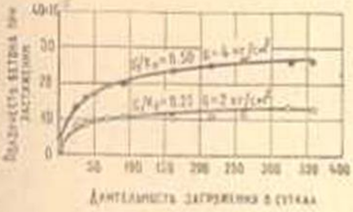
Образцы были загружены при относительных напряжениях 0,25 и 0,5, т. е. при напряжениях 2 и 4 *кг/см*². Возраст бетона к моменту загружения составлял 28 дней. Наблюдение за деформациями продолжалось 300 дней. Одновременно на образцах-близнецах определялись объемные деформации бетона. Деформации ползучести были получены путем исключения из деформаций загруженных образцов объемных деформаций. Результаты этих опытов приведены на фиг. 11, где экспериментальные данные описаны следующей зависимостью

$$\varepsilon_n = 60\,[1 - 0{,}5\,(e^{-0{,}05t_1} + e^{-0{,}005t_1})]\,\frac{\sigma}{\sigma_p}\,10^{-5}. \qquad (7)$$

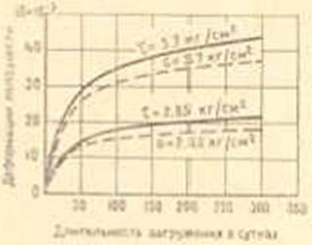
Как видно из фиг. 11 и формулы (7), связь между напряжениями и деформациями ползучести при растяжении также выражается линейной зависимостью. В опытах П. И. Васильева и Н. И. Катина [3, 10] такая закономерность сохранялась до относительного напряжения 0,9. Сравнение ползучести бетона при кручении и растяжении (фиг. 10 и 11) показывает, что при относительном напряжении 0,25 и длительности загружения 300 дней ползучесть бетона при кручении на 65% больше, чем ползучесть бетона при растяжении.

На фиг. 12 сплошными линиями представлены кривые ползучести бетона при кручении для напряжений 2,85 и 5,7 *кг/см*², которые соответствуют относительным напряжениям 0,25 и 0,50. Одновременно на этом же графике, на основании формулы (7), пунктиром нанесены кривые ползучести бетона при растяжении для тех же значений напряжений.

Сравнение кривых ползучести, приведенных на фиг. 12, показывает, что при одинаковых напряжениях ползучесть бетона при кручении и растяжении практически можно считать одинаковой. Разница в данном случае не превышает 17%. Эта незначительная разница могла бы и не получиться, если бы в обоих случаях бетоны были бы приготовлены на одном и том же цементе.



Фиг. 11.



Фиг. 12.

Таким образом, из наших опытов вытекает важный вывод, что при одинаковых напряжениях и прочих равных условиях ползучесть бетона при кручении и растяжении практически одинакова.

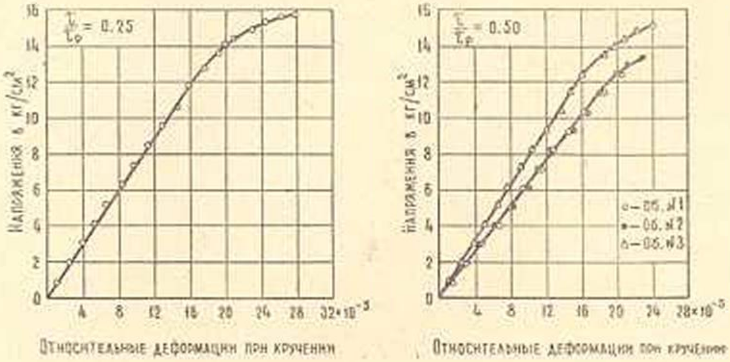
§ 6. Влияние длительного кручения на прочность и деформативность бетона при кручении

Влияние длительного загружения бетона на его прочность и деформативность мало исследовано. Причем существующие исследования в основном относятся к случаю сжатия [10, 12]. На основании этих исследований, до определенных значений напряжений, длительное загружение бетона сжимающей нагрузкой обычно приводит к положительному эффекту, заключающемуся в том, что бетон, твердеющий под нагрузкой, имеет большую прочность и модуль упругости.

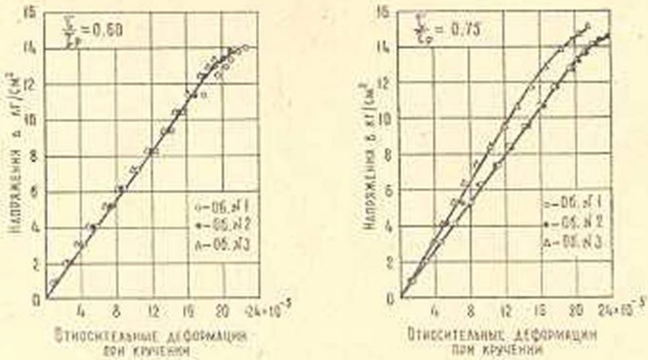
Фиг. 13.

Для исследования влияния длительного кручения на прочность и деформативность бетона все образцы, длительно загруженные крутящим моментом, после разгрузки были испытаны на кручение. Одновременно испытывались и образцы, которые не испытывали длительного кручения. Возраст бетона к моменту испытания составлял 630 дней. Результаты этих опытов приведены на фиг. 13, где каждая экспериментальная точка соответствует прочности одного образца. На основании фиг. 13 длительное загружение бетона крутящим моментом, когда вызванное этим относительное напряжение в бетоне не превышает 0,6—0,7, не влияет отрицательно на его прочность при кручении. При более высоких напряжениях длительное кручение приводит к некоторому понижению прочности бетона на кручение. Так, например, при относительном напряжении 0,9 это понижение прочности составляет 20%.

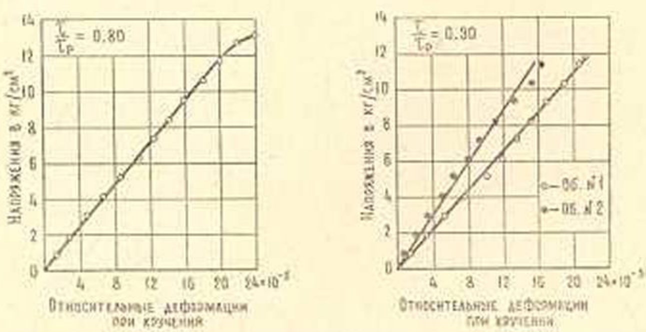
Рассмотрим, как влияет интенсивность напряжения длительного кручения на деформативность бетона при последующем испытании на кручение (фиг. 14, 15 и 16).



Фиг. 14.



Фиг. 15.

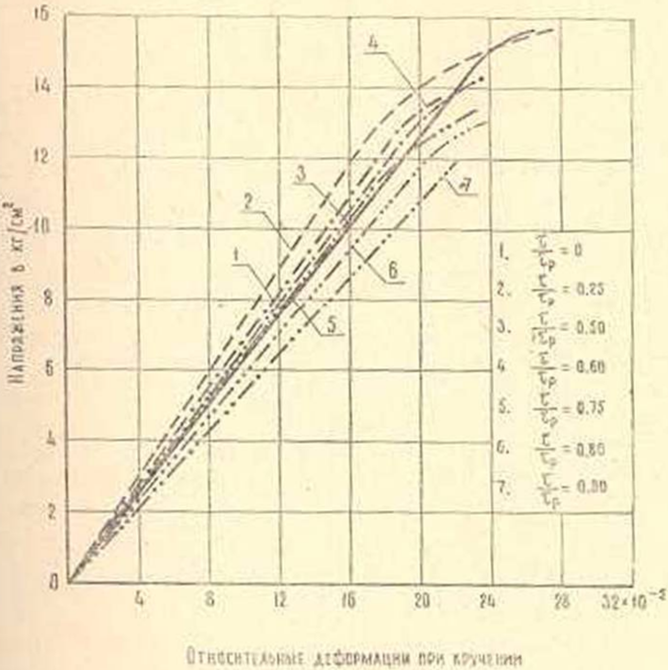


Фиг. 16.

Рассматривая фиг. 14, 15 и 16, можно отметить, что во всех случаях, до определенных напряжений, связь между напряжениями и деформациями кручения имеет линейный характер, а выше — криволинейный. При этом чем больше относительное напряжение в процессе длительного кручения, тем больше то относительное напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость. Так, например, для тех образцов, которые были загружены на длительное кручение при относительном напряжении 0,9, линейная зависимость между напряжениями и деформациями кручения практически сохраняется до момента разрушения бетона (фиг. 16). Это говорит о том, что в этом случае разрушению образца не предшествует увеличение скорости деформаций, как это имеет место в тех образцах, которые были загружены на длительное кручение при меньших напряжениях.

На фиг. 17 приведены наиболее характерные кривые деформаций кручения бетонных образцов, которые испытывали разное относительное напряжение в процессе длительного кручения. Одновременно приводится кривая и для тех образцов, которые не испытывали длительного кручения.

Из фиг. 17 следует, что длительное кручение бетона, когда относительное напряжение не превышает 0,75, приводит к уменьшению деформаций кручения, а в случае более высоких напряжений — к увеличению деформаций.



Фиг. 17.

Таким образом, влияние длительного кручения на прочность и деформативность бетона при кручении выражается теми же закономерностями, что и влияние длительного сжатия на прочность и деформативность бетона на сжатие.

В результате проведенных исследований могут быть сделаны следующие выводы:

1. Прочность бетона на кручение составляет примерно 10% от прочности бетона на сжатие.

2. Прочность бетона на кручение больше, чем прочность бетона на осевое растяжение.

3. Длительность испытания оказывает существенное влияние на прочность и деформации бетона при кручении. Чем больше длительность испытания, тем меньше прочность и больше деформации.

4. В случае мгновенного загружения связь между напряжениями и деформациями бетона при кручении выражается линейной зависимостью.

5. Возраст бетона к моменту испытания оказывает существенное влияние на закон деформаций бетона при кручении.

При обычных кратковременных испытаниях бетона на кручение связь между деформациями и напряжениями до месячного возраста носит криволинейный характер, после месячного возраста до определенных напряжений — линейный характер, а выше — криволинейный. При этом чем больше возраст бетона к моменту испытания, тем больше то относительное напряжение, до которого сохраняется начальная линейная зависимость.

6. Связь между напряжениями и деформациями ползучести бетона при кручении носит линейный характер вплоть до относительного напряжения 0,9.

7. При одинаковых напряжениях и прочих равных условиях ползучесть бетона при кручении и осевом растяжении практически равны.

8. Длительное загружение бетона крутящим моментом в тех случаях, когда относительное напряжение в процессе длительного загружения не превышает 0,6—0,7, не влияет отрицательно на прочность бетона при кручении. В случае более высоких напряжений длительное кручение приводит к некоторому понижению прочности бетона на кручение. Так, например, при загружении бетона относительным напряжением 0,9 это понижение прочности составляет 20%.

9. Длительное загружение бетона крутящим моментом качественно и количественно влияет на его деформации кручения. В том случае, когда относительное напряжение в бетоне в момент длительного загружения не превышает 0,75, последующие деформации бетона при кратковременных испытаниях уменьшаются, а при более высоких напряжениях — увеличиваются. При этом связь между напряжениями и деформациями кручения до определенных напряжений носит линейный характер, а выше — криволинейный. И чем больше относительное напряжение в процессе длительного кручения, тем больше то напряжение, до которого сохраняется линейная зависимость. При относительном напряжении 0,90 связь между напряжениями и деформациями кручения практически сохраняется до момента разрушения бетона.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 VI 1962

Կ. Ս. Կարապետյան

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ ՈԼՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են բետոնի ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա ժամանակի գործոնի ազդեցության ուսումնասիրությունների արդյունքները։

Պարզված է, որ լարումների և առաձգա-ակնթարթային դեֆորմացիաների, ինչպես նաև լարումների ու սողքի դեֆորմացիաների միջև եղած կապը ոլորման դեպքում (մինչև 0,9 հարաբերական լարումների ժամանակ) արտահայտվում է գծային օրենքով։

Ցույց է տրված նաև, որ միևնույն լարումների դեպքում սողքի ոլորման և ձգման դեֆորմացիաները հավասար են։ Ելնելով վերոհիշյալից, հեղինակը գտնում է, որ սողքի ձգման դեֆորմացիաները նպատակահարմար է որոշել ոլորման փորձերից։

Բետոնի հարատև ոլորումը որոշակի ազդեցություն է գործում նրա հետագա ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների վրա՝ ոլորման դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. *Блинков В. В.* Исследование деформаций бетона при чистом сдвиге. Изв. ВНИИГ, **53**, 1955.
3. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв. ВНИИГ, **48**, 1953.
4. *Карапетян К. С.* Ползучесть бетона при высоких напряжениях. Изв. АН АрмССР. сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, **6**, № 2, 1953.
5. *Карапетян К. С.* Влияние размеров образца на усадку и ползучесть бетона. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, **9**, № 1, 1956.
6. *Карапетян К. С.* Экспериментальное исследование ползучести легкого бетона на естественных пористых заполнителях. Диссертация на соискание ученой степени канд. техн. наук, Ереван, 1956.
7. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.
8. *Катин Н. И.* Исследование ползучести бетона при высоких напряжениях. Сборник НИИЖБ „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций", Госстройиздат, М., 1959.
9. *Саталкин А. В.* Ползучесть бетона. Сборник „Прочность, упругость и ползучесть бетона" под ред. проф. Беляева. Стройиздат Наркомстроя, Л., 1941.
10. *Саталкин А. В., Сенченко Б. А.* Раннее нагружение бетона и железобетона в мостостроении. Автотрансиздат, М., 1956.
11. *Столяров Я. В.* Введение в теорию железобетона. Стройиздат Наркомстроя, М.—Л., 1941.
12. *Улицкий И. И.* Ползучесть бетона. Гостехиздат Украины, Киев—Львов, 1948.
13. *Улицкий И. И.* Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Госстройиздат, УССР, Киев, 1960.
14. *Фрейсинэ Е.* Переворот в технике бетона. ОНТИ, Л.-М., 1938.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Аракелян

Деформация неразрезных балок на оседающих во времени опорах

Условия прочности и жесткости неразрезных балок, часто применяемых в речном и морском гидротехническом строительстве, целиком определяются нестабилизированным состоянием податливого грунта основания [1].

Иногда в основании опор залегают водонасыщенные слабые илистые грунты небольшой (по сравнению с размерами сооружения) мощности со слабо выраженным явлением ползучести скелета грунта. Известно, что уплотнение такого грунта при нагружении можно характеризовать одномерной фильтрационной консолидацией [2]. При этом величину осадок (вертикальные перемещения) опор и весь расчет неразрезных балок можно получить на основе общего соотношения Флорина—Арутюняна [3].

Для упомянутого случая ниже приводится общее выражение для деформаций неразрезных балок. Определение последних необходимо для оценки величины и неравномерности осадок, а также для проектирования компенсирующих устройств [4].

1. *Общее уравнение изогнутой оси балки.* Рассматривается плоский изгиб призматической упругой неразрезной балки, лежащей на опорах с уплотняющимися во времени основаниями.

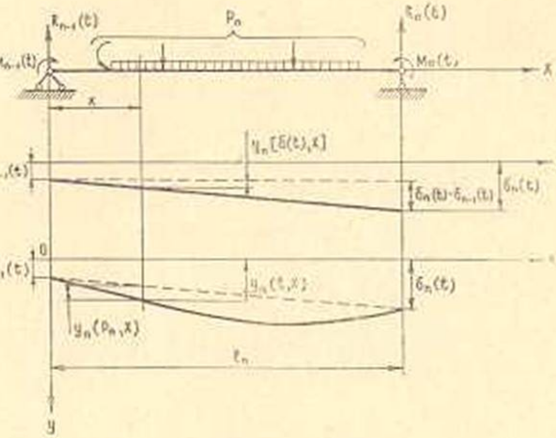
Как известно, после составления и решения системы интегральных уравнений пяти моментов [1], определяются все неизвестные опорные моменты в зависимости от некоторых характеристик, в том числе и от времени t. В число действующих сил основной системы n-го пролета (фиг. 1) входят уже известные опорные моменты $M_{n-1}(t)$ и $M_n(t)$.

Расположив координатные оси согласно фиг. 1, обозначим прогиб в точке x оси балки, вызываемый действием внешних сил и определяемый обычными методами строительной механики, через $y_n(P_n, x)$. Прогибы той же точки, обусловленные воздействиями опорных моментов, представятся в виде

$$y_n[M_{n-1}(t), x] = \frac{M_{n-1}(t)}{6EJ}(l_n - x)\left[l_n - \frac{(l_n - x)^2}{l_n}\right], \qquad (1.1)$$

$$y_n [M_n (t), x] = \frac{M_n (t)}{6EJ} x \left(l_n - \frac{x^2}{l_n} \right), \tag{1.2}$$

где EJ—изгибная жесткость балки.



Фиг. 1.

Для прогиба той же точки, возникающего вследствие осадки опор, согласно фиг. 1 получим выражение

$$y_n [\delta (t), x] = [\delta_n (t) - \delta_{n-1} (t)] \frac{x}{l_n} \cdot \tag{1.3}$$

Исходя из (1.1), (1.2) и (1.3), суммарный прогиб точки x будет

$$y_n (t, x) = y_n (P_n, x) + \frac{M_{n-1} (t)}{6EJ} \left[l_n - \frac{(l_n - x)^2}{l_n} \right] (l_n - x) +$$

$$+ \frac{M_n (t)}{6EJ} \left(l_n - \frac{x^2}{l_n} \right) x + [\delta_n (t) - \delta_{n-1} (t)] \frac{x}{l_n} + \delta_{n-1} (t). \tag{1.4}$$

В этом общем уравнении изогнутой оси неразрезной балки все величины известны, кроме $\delta_n (t)$ и $\delta_{n-1} (t)$. Для определения последних используется известное общее выражение опорного момента для упомянутого случая основания опор [1]

$$M_n (t) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + b_n} - 2 (\beta_2 - b_n \beta_1) \sum_{u=1,2...}^{\infty} \frac{\exp (- r_u t)}{b_n + b_n^2 + \lambda_u^2} \cdot \tag{1.5}$$

Здесь

β_1 и β_2—коэффициенты, зависящие от нагрузок и некоторых характеристик данной неразрезной балки и основания опор,

b_n—безразмерный коэффициент, зависящий от характеристик балки и основания опор,

λ_u—корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{\lambda}{b} ,$$

$$r_n = \frac{\lambda_n^2}{a_n^2}, \quad a_n = \frac{H_n}{2\sqrt{c_n}}.$$

H_n—мощность податливого грунта основания n-ой опоры балки,
c_n—коэффициент консолидации грунта основания n-ой опоры.
Реакция n-ой опоры (фиг. 1) будет

$$R_n(t) = R_n^0 + \frac{M_{n+1}(t) - M_n(t)}{l_{n+1}} - \frac{M_n(t) - M_{n-1}(t)}{l_n}. \tag{1.6}$$

Все опорные моменты любой неразрезной балки выражаются функциями времени типа (1.5). Поэтому, без ущерба общности решения поставленной задачи, можно полагать, что остальные опорные моменты, кроме $M_n(t)$, равны нулю. Тогда соотношение (1.6) запишется в виде

$$R_n(t) = R_n^0 - \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) M_n(t),$$

где

R_n^0—реакция опоры n, вызванная в основной системе от заданной внешней нагрузки, расположенной на пролетах l_n и l_{n+1}.

Внеся сюда из (1.5) значение $M_n(t)$, получаем

$$R_n(t) = A + B \sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_n t)}{b_n + b_n^2 + \lambda_n^2}, \tag{1.7}$$

где

$$A = R_n^0 - \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right) \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + b_n},$$

$$B = 2\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)(\beta - b_n \beta_1). \tag{1.8}$$

Внеся (1.7) в общее выражение осадки грунтового основания Флорина—Арутюняна [3], будем иметь

$$\delta_n(t) = \frac{8k_n}{\Delta H_n F_n} \int_0^t R_n(\xi) \sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \exp[-v^2 \gamma_n (t - \xi)]\, d\xi + \delta_n^0, \tag{1.9}$$

где

$$\gamma_n = \left(\frac{\pi}{H_n}\right)^2 c_n,$$

k_n—средне-приведенный коэффициент фильтрации грунта основания n-ой опоры,
F_n—площадь основания n-ой опоры,
δ_n^0—упруго-мгновенная осадка n-ой опоры неразрезной балки,
Δ—объемный вес фильтруемой воды.

Из (1.9) и (1.7) следует

$$\delta_n(t)=\frac{8Ak_n}{\Delta H_n F_n}\int\limits_0^t\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\exp\left[-v^2\gamma_n(t-\xi)\right]d\xi+$$

$$+\frac{8Bk_n}{\Delta H_n F_n}\int\limits_0^t\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_u t)}{b_n+b_n^2+\lambda_u^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\exp\left[-v^2\gamma_n(t-\xi)\right]d\xi+\delta_n^0.$$

Введя дополнительные обозначения

$$N_1=\frac{Ak_nH_n}{\Delta c_n F_n},\quad N_2=\frac{8Bk_n}{\Delta H_n F_n} \tag{1.10}$$

и имея в виду значение первого интеграла

$$\int\limits_0^t\exp\left[-v^2\gamma_n(t-\xi)\right]d\xi=\frac{H_n^2}{8c_n}\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-v^2\gamma_n t)}{v^2}\right],$$

будем иметь

$$\delta_n(t)=N_1\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-v^2\gamma_n t)}{v^2}\right]+$$

$$+N_2\int\limits_0^t\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_u\xi)\cdot\exp\left[-v^2\gamma_n(t-\xi)\right]}{b_n+b_n^2+\lambda_u^2}d\xi+\delta_n^0. \tag{1.11}$$

Подинтегральный двойной ряд абсолютно и равномерно сходится в интервале $t>\xi\geqslant 0$. Следовательно, допустимо почленное интегрирование такого функционального ряда. Таким образом, получаем

$$\delta_n(t)=N_1\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-v^2\gamma_n t)}{v^2}\right]-$$

$$-N_2\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_u t)-\exp(-v^2\gamma_n t)}{(b_n+b_n^2+\lambda_u^2)(r_u-v^2\gamma_n)}+\delta_n^0. \tag{1.12}$$

Учитывая, что

$$\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_u t)}{(b_n+b_n^2+\lambda_u^2)(r_u-v^2\gamma_n)}=$$

$$=\frac{1}{\gamma_n}\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_u t)}{b_n+b_n^2+\lambda_u^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{v^2-\frac{r_u}{\gamma_n}},$$

а [5]

$$\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{v^2 - \left(\sqrt{\frac{r_u}{\gamma_n}}\right)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{\frac{r_u}{\gamma_n}}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_u}{\gamma_n}},$$

получим

$$\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_u t)}{(b_n + b_n^2 + \lambda_u^2)(r_u - v^2\gamma_n)} =$$

$$= -\frac{\pi}{4\sqrt{\gamma_n}} \sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_u t)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_u}{\gamma_n}}}{(b_n + b_n^2 + \lambda_u^2)\sqrt{r_u}}. \tag{1.13}$$

Ограничиваясь рассмотрением случая, когда суммой оставшегося двойного ряда можно пренебречь по сравнению с другими слагаемыми соотношения (1.13), получим

$$\delta_n(t) = N_1\left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-v^2\gamma_n t)}{v^2}\right] +$$

$$+ \frac{N_2\pi}{4\sqrt{\gamma_n}} \sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_u t)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_u}{\gamma_n}}}{(b_n + b_n^2 + \lambda_u^2)\sqrt{r_u}} + \delta_n^0. \tag{1.14}$$

Высокая степень сходимости рядов, аппроксимирующих величину осадка согласно соотношению (1.14), даст возможность в практических расчетах ограничиться 2—3 членами этого разложения. Таким образом, по (1.4) нетрудно определить прогиб оси балки в произвольной точке в любой момент времени, а, следовательно, проверить условие жесткости в опасный момент эксплуатации, т. е. прогнозировать эту опасность и устранить ее предварительно разработанными конструктивными мероприятиями [4].

Из соотношений (1.14) и (1.11) следует, что $\delta_n(t)$ получает максимальное значение при $t \to \infty$, а минимальное значение при $t = 0$, т. е.

$$\delta_n(\infty) = N_1 + \delta_n^0 = \frac{k_n H_n}{\Delta c_n F_n}\left[R_n^0 - \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}}\right)\cdot\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + b_n}\right] + \delta_n^0, \tag{1.15}$$

$$\delta_n(0) = \delta_n^0. \tag{1.16}$$

Нахождение максимального прогиба по пролету l_n согласно соотношению (1.4) сводится к определению максимума функции двух независимых переменных x и t. При этом может случиться, что

$$y_n(t_1, x_1)_{\max} > y_n(\infty, x_2).$$

Имея в виду фиг. 1, поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях пролета l_n определятся формулами

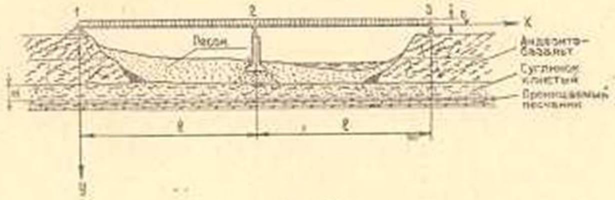
$$Q(t, x)_n = Q_0(x)_n + \frac{M_n(t) - M_{n-1}(t)}{l_n} \tag{1.17}$$

$$M(t, x)_n = M_0(x)_n + \frac{(l_n - x) M_{n-1}(t) + xM_n(t)}{l_n},$$

где

$Q_0(x)_n$ и $M_0(x)_n$ — величины поперечной силы и изгибающего момента в сечении n-го пролета основной системы.

2. *Пример.* Рассмотрим двухпролетную неразрезную балку, средняя опора которой расположена на водонасыщенном илистом грунте, а крайние опоры—на несжимаемом скальном основании (фиг. 2).



Фиг. 2.

Пусть в некоторый момент времени к балке была приложена равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q.

Расчетные данные неразрезной балки и физико-механические показатели грунта основания средней опоры следующие: расчетные пролеты $l_1 = l_2 = l = 3 \cdot 10^4$ *см*, площадь основания средней опоры $F = 49.10^4$ *см*^{2}, изгибная жесткость балки $EJ = 9.10^{13}$ *кг.см*^{2}, интенсивность внешней нагрузки $q = 131 \frac{кг}{см}$, объемный вес фильтруемой воды $\Delta = 1.10^{-3} \frac{кг}{см^2}$, коэффициент фильтрации грунта основания $k = 2{,}2.10^{-7} \frac{см}{сек}$, средний коэффициент пористости грунта основания $\varepsilon = 1{,}368$, мощность слоя податливого грунта основания $H = 4.10^2$ *мм*, коэффициент уплотнения грунта основания $a^0 = 0{,}206 \frac{см^2}{кг}$. Коэффициент консолидации грунта основания будет

$$\frac{k(1+\varepsilon)}{\Delta a^0} = 0{,}253.10^{-2} \frac{см^2}{сек}.$$

Заметив, что для исследуемой неразрезной балки крайние опорные моменты равны нулю

$$M_1(t) = 0$$

$$M_3(t) = 0 \tag{2.1}$$

и обозначив

$$M_2(t) = M(t),$$

интегральное уравнение пяти моментов представим в виде интегрального уравнения Вольтерра [1]

$$M(t) = \beta_1 + \beta_2 \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-v^2\gamma t)}{v^2} \right] -$$

$$- \beta \int_0^t M(\xi) \{\theta_3[0, (t-\xi)] - \theta_3[0, 4(t-\xi)]\} d\xi, \tag{2.2}$$

где

$$\beta = \frac{36EJk}{\Delta HFl^3}, \quad \beta_1 = -\frac{ql^2}{8}, \quad \beta_2 = \frac{3EJkHR^0}{\Delta cFl^2}, \quad \gamma = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 c, \tag{2.3}$$

а $\theta_3[0, (t-\xi)]$ и $\theta_3[0, 4(t-\xi)]$ — являются Тета-функциями Якоби.

Решением уравнения (2.2) будет [1]

$$M(t) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+b} - 2(\beta_2 - b\beta_1) \sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b + \cos^2\lambda} \right) \exp(-r_u t), \tag{2.4}$$

где

$$b = \frac{\beta H^2}{8c} = \frac{9EJHk}{2\Delta cFl^3}, \quad r_u = \frac{\lambda_u^2}{a^2}, \quad a = \frac{H}{2\sqrt{c}}, \tag{2.5}$$

λ_u — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{\lambda}{b}. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует

$$\cos^2\lambda_u = \frac{b^2}{b^2 + \lambda_u^2}. \tag{2.7}$$

Внеся (2.7) в (2.4), найдем окончательное выражение опорного момента

$$M(t) = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1+b} - 2(\beta_2 - b\beta_1) \sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_u t)}{b + b^2 + \lambda_u^2}, \tag{2.8}$$

которое, как и следовало ожидать, полностью совпадает с (1.5).

Корни известного трансцендентного уравнения (2.6) табулированы в [6], аппроксимированы аналитическими соотношениями в [3] и [1] и легко могут определяться графически.

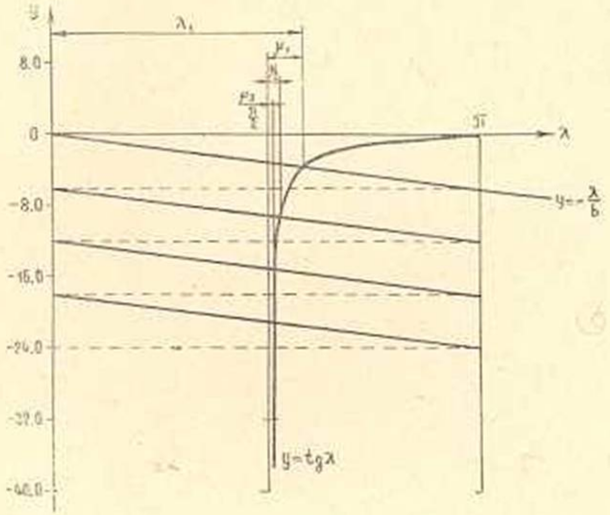
Зная, что [3]

$$\lambda_u = (2u-1)\frac{\pi}{2} + \mu_u,$$

для определения μ_u необходимо установить абсциссы точек пересечения прямой $Y = -\frac{\lambda}{b}$ с тангенсоидой $Y = \operatorname{tg}\lambda$.

При этом целесообразно построить только нижнюю половину второй ветви тангенсоиды, от $-\infty$ до пересечения с осью λ. Прямую же $Y = -\frac{\lambda}{b}$ следует строить отрезками между прямыми $\lambda = 0$ и $\lambda = \pi$, как это показано на фиг. 3.

Согласно (1.4), (1.14), фиг. 2 и в силу того, что для исследуемой неразрезной балки



Фиг. 3.

$$\delta_{n-1}(t) = \delta_1(t) = 0, \qquad \delta_n(t) = \delta_2(t) = \delta(t),$$

$$y_n(P_n, x) = y_2(q, x) = y(q, x) = \frac{ql^3x}{24EJ}\left(1 - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right),$$

$$y_n(t, x) = y_2(t, x) = y(t, x),$$

уравнение изогнутой оси первого пролета представится в виде

$$y(t, x) = \frac{ql^3x}{24EJ}\left(1 - \frac{2x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) + \frac{x}{6EJ}\left(l - \frac{x^2}{l}\right)\Bigg[\frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + b} -$$

$$-2(\beta_2 - b\beta_1)\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_n t)}{b + b^2 + \lambda_n^2}\Bigg] + \frac{N_1 x}{l}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{\nu=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-\nu^2\gamma t)}{\nu^2}\right] +$$

$$+\frac{\pi N_2 x}{4l\sqrt{\gamma}}\sum_{n=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-r_n t)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_n}{\gamma}}}{(b + b^2 + \lambda_n^2)\sqrt{r_n}}, \qquad (2.9)$$

где

$$N_1 = \frac{kH}{\Delta cF}\left[R^0 - \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{l(1 + b)}\right], \qquad N_2 = \frac{32k}{\Delta HFl}(\beta_2 - b\beta_1). \qquad (2.10)$$

R^0—реакция средней опоры в основной системе

$$R_0 = ql.$$

В рассматриваемом примере упруго-мгновенная осадка средней опоры δ^0 под воздействием собственного веса балки и массивной опоры уже в основном имела место до приложения нагрузки q. В силу этого, эта величина не участвует в выражении (2.9).

Прогиб балки в середине пролета согласно (2.9) будет равен

$$y\left(t, \frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ} + \frac{(\beta_1+\beta_2)\, l^2}{16EJ\,(1+b)} + \frac{N_1}{2}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_v t)}{v^2}\right] -$$
$$-\frac{(\beta_2 - b\beta_1)}{8EJ}\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\exp(-r_u t)}{b+b^2+\lambda_u^2}\left[1 - \frac{\pi N_2 EJ}{(\beta_2 - b\beta_1)\, l^2 \sqrt{\gamma r_u}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_u}{\gamma}}\right]. \tag{2.11}$$

При $t=0$ и $t\to\infty$ на основе (1.11) из (2.11) находим

$$y\left(0, \frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ} + \frac{\beta_1 l^2}{16EJ}, \tag{2.12}$$

$$y\left(\infty, \frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EJ} + \frac{l^2}{16EJ}\cdot\frac{\beta_1+\beta_2}{1+b} + \frac{N_1}{2}. \tag{2.13}$$

Исходя из вышеприведенных числовых данных, получаем

$R^0 = 3{,}93.10^5$ *кг*, $\quad b = 1{,}06,$

$\beta_1 = -14{,}75.10^7$ *кг. см*, $\quad \gamma = 0{,}253.10^{-2}\dfrac{1}{сек},$

$\beta_2 = 84{,}00.10^7$ *кг. см*, $\quad a^0 = 3970\ сек^{\frac{1}{2}},$

$\lambda_1 = 2{,}049, \quad \lambda_2 = 4{,}924, \quad y\left(0, \dfrac{l}{2}\right) = 0{,}614\ см,$

$\lambda_3 = 8{,}051, \quad \lambda_4 = 11{,}091, \quad y\left(\infty, \dfrac{l}{2}\right) = 9{,}520\ см.$

По этим данным легко установить абсолютную погрешность величины прогиба или сумму двойного ряда, исключенного из выражения (1.12). Обозначив

$$s(t) = \frac{\pi N_2}{8\gamma}\sum_{u=1,2,\ldots}^{\infty}\sum_{v=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\exp(-v^2\gamma t)}{(b+b^2+\lambda_u^2)(r_u - v^2\gamma)}, \tag{2.14}$$

при $t_1 = 1$ *дню* $= 86400$ *сек.* и $t_2 = 7$ *дням* $= 604800$ *сек.* для прогиба (*см*) в середине пролета получим

$$y\left(t_1, \frac{l}{2}\right) = 6{,}66 + s(t_1) = 6{,}66 + 0{,}80.10^{-4},$$

$$y\left(t_2, \frac{l}{2}\right) = 7{,}96 + s(t_2) = 7{,}96 + 0{,}24.10^{-7}.$$

Эти результаты показывают, что в рассмотренном случае сумма ряда (2.14) в значении прогиба не играет заметной роли, поэтому игнорирование его в общем выражении осадки опор (1.12) с целью упрощения расчетов допустимо.

Пользуясь формулой (2.11), вычисляется изменение $y\left(t, \frac{l}{2}\right)$ для различных моментов времени.

Изменение $y\left(t, \frac{l}{2}\right)$ во времени

t	0	1 *день*	7 *дней*	3 *месяца*	1 *год*	∞
$\dfrac{y\left(t, \frac{l}{2}\right)}{y\left(0, \frac{l}{2}\right)}$	1,00	10,86	12,93	15,43	15,50	15,52

Из таблицы видно, что прогиб $y\left(t, \frac{l}{2}\right)$ резко возрастает от начального значения $y\left(0, \frac{l}{2}\right)$, асимптотически приближаясь к предельному значению $y\left(\infty, \frac{l}{2}\right)$.

Приведенный метод расчета деформации неразрезных балок на оседающих во времени опорах легко применить к любому частному случаю.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 22 VI 1962

Թ. Տ. Առաքելյան

ԺԱՄԱՆԱԿԻ ԸՆԹԱՑՔՈՒՄ ՆՍՏՈՂ ՀԵՆԱՐԱՆՆԵՐՈՎ ԱՆԽԶԵԼԻ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Գետային և ծովային հիդրոտեխնիկական կառույցներում օգտագործվող անխզելի հեծանների հենարանների հիմնատակը հաճախ կազմում են ջրով հագեցած, տիղմային թույլ գրունտները:

Այսպիսի գրունտների վրա, երբ կառույցի ճնշումը տարածվում է գրունտի շերտի հաստության համեմատությամբ մեծ չափեր ունեցող մակերեսներով, ապա հիմնատակի նստվածքները որոշվում են գծային ֆիլտրացիոն կոնսոլիդացիայով:

Նշված դեպքի համար արտածվում են առաձգական պրիզմատիկ անխզելի հեծանի դեֆորմացիաների ընդհանուր հավասարումները՝ կախված ինչպես ժամանակից, այնպես էլ անխզելի հեծանի ու նրա հենարանների հիմնատակերի գրունտի ֆիզիկա-մեխանիկական հատկանիշներից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аракелян Т. Т.* Расчет неразрезных балок со смещающимися во времени опорами. Юбилейный сборник научных трудов Ереванского политехнического института им. К. Маркса. Ереван, 1960.
2. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов, II том. Госстройиздат, Л.—М., 1961.
3. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
4. *Полонский Г. А.* Сооружение акведука. Гидротехническое строительство, № 8, 1949.
5. *Рыжик И. М.* и *Градштейн И. С.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, М.—Л., 1951.
6. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, М.—Л., 1956.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Взаимодействия возмущений с ударным фронтом в задаче проникания давления в жидкость

В настоящей работе рассматривается задача распространения автомодельного давления, движущегося с постоянной сверхзвуковой скоростью по поверхности сжимаемой жидкости, в глубь нее. Рассмотрим плоскую задачу. Выберем ось Ox в плоскости поверхности невозмущенной жидкости, ось Oy направим в глубь жидкости. Уравнения движения жидкости запишутся

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\\ \frac{dP}{dt}+\rho a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,\end{gathered}\tag{1}$$

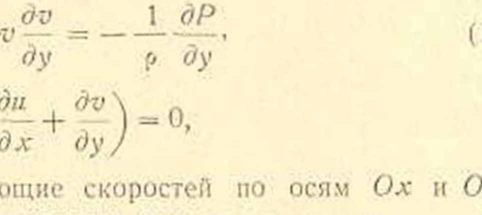
где t — время, u, v — составляющие скоростей по осям Ox и Oy, P — давление, ρ — плотность, a — скорость звука в жидкости.

Граничное условие на поверхности зададим в виде

$$P(x,O,t)=\begin{cases}P_1-\gamma f_1\left(\dfrac{x}{t}\right) & x<V_0t\\ O & x>V_0t,\end{cases}\tag{2}$$

где P_1, V_0 — постоянные, γ — малая величина.

Будем предполагать скорость V_0 сверхзвуковой. Тогда картина возмущенного движения дается фиг. 1.



Фиг. 1.

В области ABC, фиг. 1, течение будет мало отличаться от постоянного течения, соответствующего давлению P_1. Постоянные параметры этого течения u_1, v_1, ρ_1, a_1 легко найти из ударных соотношений. Решение задачи будем искать методом возмущений, как и в [1].

Ищем решение в указанной области в виде

$$u = u_1 + \gamma u_2, \quad v = v_1 + \gamma v_2, \quad P = P_1 + \gamma P_2, \quad \rho = \rho_1 + \gamma \rho_2.$$

Уравнения (1) в системе координат $x_1 = -u_1 t + x$, $y_1 = -v_1 t + y$, связанной с движущейся жидкостью, линеаризуются

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_2}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_2}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \rho_1 a_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1}\right) = 0.$$

В силу автомодельности все параметры зависят от переменных $\xi = \frac{x_1}{t}$, $\eta = \frac{y_1}{t}$. В переменных ξ, η уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} -\xi\frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial u_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_2}{\partial \xi}, \\ -\xi\frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial v_2}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_2}{\partial \eta}, \\ -\xi\frac{\partial P_2}{\partial \xi} - \eta\frac{\partial P_2}{\partial \eta} + \rho_1 a_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2}{\partial \eta}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Для дальнейшего введем систему координат с осями $O\xi_1$, перпендикулярной, и $O\eta_1$, параллельной ударной волне:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 \sin\alpha_1 - \eta_1 \cos\alpha_1, \\ \eta &= \xi_1 \cos\alpha_1 + \eta_1 \sin\alpha_1, \\ \xi_1 &= \xi \sin\alpha_1 + \eta \cos\alpha_1, \\ \eta_1 &= -\xi \cos\alpha_1 + \eta \sin\alpha_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь α_1 — острый угол невозмущенной ударной волны с осью Ox.

В новых переменных система (3) примет вид

$$-\xi_1\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} - \eta_1\frac{\partial u_2}{\partial \eta_1} = -\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial P_2}{\partial \xi_1}\sin\alpha_1 - \frac{\partial P_2}{\partial \eta_1}\cos\alpha_1\right),$$

$$-\xi_1\frac{\partial v_2}{\partial \xi_1} - \eta_1\frac{\partial v_2}{\partial \eta_1} = -\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial P_2}{\partial \xi_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial P_2}{\partial \eta_1}\sin\alpha_1\right),$$

$$-\xi_1\frac{\partial P_2}{\partial \xi_1} - \eta_1\frac{\partial P_2}{\partial \eta_1} + \rho_1 a_1^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}\sin\alpha_1 - \frac{\partial u_2}{\partial \eta_1}\cos\alpha_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial v_2}{\partial \eta_1}\sin\alpha_1\right) = 0.$$

С помощью первых двух уравнений можно исключить производные $\frac{\partial u_2}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial v_2}{\partial \xi_1}$ в перпендикулярном к ударной волне направлении и записать связь $\frac{\partial P_2}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial P_2}{\partial \eta_1}$ и производных $\frac{\partial u_2}{\partial \eta_1}$, $\frac{\partial v_2}{\partial \eta_1}$ вдоль ударной волны

$$-\xi_1 \frac{\partial P_2}{\partial \xi_1} - \eta_1 \frac{\partial P_2}{\partial \eta_1} + \frac{a_1^2}{\xi_1} \frac{\partial P_2}{\partial \xi_1} - \rho_1 a_1^2 \frac{\eta_1 \sin \alpha_1 + \xi_1 \cos \alpha_1}{\xi_1} \frac{\partial u_2}{\partial \eta_1} +$$

$$+ \frac{\xi_1 \sin \alpha_1 - \eta_1 \cos \alpha_1}{\xi_1} \frac{\partial v_2}{\partial \eta_1} = 0.$$

Если ввести еще составляющие скоростей вдоль ударной волны $U = U_1 + \gamma U_2$ и перпендикулярно к ней $V = V_1 + \gamma V_2$, причем

$$u_2 = U_2 \sin \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_1,$$

$$v_2 = U_2 \cos \alpha_1 + V_2 \sin \alpha_1,$$

уравнения движения можно записать для P, U_2, V_2 в виде

$$-\xi_1 \frac{\partial P_2'}{\partial \xi_1} - \eta_1 \frac{\partial P_2'}{\partial \eta_1} + \frac{a_1^2}{\xi_1} \frac{\partial P_2'}{\partial \xi_1} - a_1 \frac{\eta_1}{\xi_1} \frac{\partial U_2}{\partial \eta_1} + a_1 \frac{\partial V_2}{\partial \eta_1} = 0, \qquad (5)$$

где $P_2' = \frac{P_2}{\rho_1 a_1}$ имеет размерность скорости.

Пусть

$$D = D_1 + \gamma D_2 \text{ — скорость ударной волны,}$$

$$\xi_1 = M_2 a_1 + \gamma a_1 \widetilde{\psi} (\eta_1) \text{ — уравнение ударной волны,}$$

$$M_2 = \frac{D_1 - (u_1 \sin \alpha_1 + v_1 \cos \alpha_1)}{a_1}.$$

Уравнения сохранения массы, импульса и уравнение ударной адиабаты запишутся в виде

$$\rho_0 D = \rho (D - \sqrt{u^2 + v^2}),$$

$$P = \rho_0 D \sqrt{u^2 + v^2},$$

$$P = \widetilde{f} (\rho),$$

причем третье уравнение для жидкости с политропическим уравнением $P = \beta (\rho^n - \rho_0^n)$ [2] может быть записано в виде

$$P = -\frac{\beta_n \frac{\rho_0^{n-1}}{n-1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} \frac{\frac{\rho^n}{n-1} + \rho_0^n}{\rho^n - \rho_0^n}},$$

а скорость ударной волны

$$D = D_1 + a_1 \gamma (\widetilde{\psi} - \eta_1 \widetilde{\psi}').$$

Линеаризация условий на ударной волне дает

$$(\rho_0 - \rho_1) a_1 (\widetilde{\psi} - \widetilde{\psi}' \eta_1) = -\rho_1 U_2 + \rho_2 (D_1 - U_1),$$

$$P_2 = \rho_0 a_1 (\overline{\psi} - \overline{\psi}' \eta_1) U_1 + \rho_0 D_1 U_2,$$

$$P_2 = \overline{f}' (\rho_1) \rho_2.$$

Условие непрерывности касательной составляющей скорости имеет вид

$$V_1 = 0, \quad V_2 = - U \overline{\psi}' a_1.$$

Исключая из полученной системы ρ_2, найдем

$$P_2 K_2 = \overline{\psi} - \overline{\psi}' \eta_1,$$

$$U_2 = A_0 P_2', \tag{6}$$

$$\eta_1 \frac{\partial V_2}{\partial \eta_1} = \beta_0 \frac{\partial P_2'}{\partial \eta_1},$$

где

$$K_2 = \frac{1}{\rho_0 a_1 U_1} - \frac{1}{\rho_1 a_1 U_1} \frac{D_1}{a_1} A_0, \quad \beta_0 = - a_1^2 U_1 K_2 \rho_1,$$

$$A_0 = \frac{\dfrac{1}{\overline{f}'(\rho_1)} \dfrac{1}{\rho_0 - \rho_1} \left(\dfrac{D_1}{a_1} - U_1 \right) - \dfrac{1}{\rho_0 a_1 U_1}}{\rho_1 \dfrac{1}{\rho_0 - \rho_1} \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{D_1}{a_1} \dfrac{1}{U_1}} \rho_1 a_1.$$

Из условия $f'(\rho_1) > a_1^2$, $M_2 < 1$ легко видеть, что $K_2 > 0$.

Подставляя (6) в уравнение (5), получим соотношение для P_2' вдоль ударного фронта

$$\frac{\partial P_2'}{\partial \xi_1} = \frac{\eta_1 + \dfrac{\eta_1}{M_2} A_0 - \dfrac{a_1^3 U_1 K_2 \rho_1}{\eta_1}}{\dfrac{a_1}{M_2} - a_1 M_2} \frac{\partial P_2'}{\partial \eta_1}. \tag{7}$$

Как известно, уравнения (3) можно свести к волновому уравнению [3]:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y_1'^2} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2},$$

где $x_1' = \xi_1 t$, $y_1' = \eta_1 t$.

Введем теперь вместо x_1', t координаты $\overline{x}$, $\overline{t}$ так, чтобы уравнением ударной волны было $\overline{x} = 0$. Для этого используем преобразование Лоренца, оставляющее инвариантным волновое уравнение:

$$\overline{x} = \frac{x_1' - M_2 a_1 t}{\sqrt{1 - M_2^2}}; \qquad \overline{t} = \frac{a_1 t - M_2 x_1'}{a_1 \sqrt{1 - M_2^2}}.$$

Если ввести теперь $\tilde{\xi} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{t}}$, $\eta_1' = \frac{y_1'}{\tilde{t}}$, то, как известно, волновое уравнение в области гиперболичности в переменных $\tilde{\xi}$, η_1' имеет решение [4]:

$$P_2' = f(\theta_1) + F(\theta_2), \tag{8}$$

причем

$$\theta_{1,2} = \frac{\eta_1' \pm \frac{\tilde{\xi}}{a_1}\sqrt{\tilde{\xi}^2 + \eta_1'^2 - a_1^2}}{\tilde{\xi}^2 + \eta_1'^2}.$$

Заметим, что условие

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 > a_1^2$$

влечет за собой

$$\tilde{\xi}^2 + \eta_1'^2 - a_1^2 > 0.$$

На фронте ударной волны

$$\tilde{\xi} = 0, \quad \theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{\eta_1'} = \frac{\sqrt{1 - M_2^2}}{\eta_1}.$$

Используя равенства

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi_1 - M_2 a_1}{a_1 - M_2 \xi_1} a_1, \qquad \eta_1' = \frac{\eta_1 a_1 \sqrt{1 - M_2^2}}{a_1 - M_2 \xi_1},$$

условие на ударной волне (7) запишем в виде

$$\frac{\partial P_2'}{\partial \tilde{\xi}} + \frac{\partial P_2'}{\partial \eta_1'} \frac{M_2 \eta_1}{a_1 \sqrt{1 - M_2^2}} = \frac{\eta_1 + \frac{\eta_1}{M_2} A_0 - a_1^3 U_1 K_2 \rho_1 \frac{1}{\eta_1}}{\frac{a_1}{M_2} - M_2 a_1} \sqrt{1 - M_2^2}\, \frac{\partial P_2'}{\partial \eta_1'}.$$

Из последнего соотношения и из (8) найдем связь f и F:

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} \psi(\theta), \tag{9}$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\theta^2} - a_1^2 + A_0 \frac{1}{\theta} - a_1^3 \frac{U_1 K_2 \rho_1 \theta}{1 - M_2^2}}}{\sqrt{\frac{1}{\theta^2} - a_1^2 - A_0 \frac{1}{\theta} - a_1^3 \frac{U_1 K_2 \rho_1 \theta}{1 - M_2^2}}}.$$

Вдоль поверхности жидкости имеем из (2) и (4)

$$f(\theta_1) + F(\theta_2) = -\frac{1}{\rho_1 a_1} f_1(\xi + u_1) = -\frac{1}{\rho_1 a_1} f_1(\xi_1 \sin\alpha_1 - \eta_1 \cos\alpha_1 + u_1).$$

$$\eta_1 = -\xi_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{v_1}{\sin \alpha_1}.$$

Дифференцируя условие вдоль поверхности, получим

$$\frac{df}{d\theta_1} \frac{d\theta_1'}{d\xi_1} + \frac{dF}{d\theta_2} \frac{d\theta_2'}{d\xi_1} = -\frac{1}{\rho_1 a_1} \frac{df_1 (\xi_1 \sin \alpha_1 - \eta_1 \cos \alpha_1 + u_1)}{d\xi_1},$$

где

$$a_1 \cdot \theta_{1,2}' = \frac{\eta_1 \sqrt{1 - M_2^2}\, (a_1 - M_2 \xi_1) \pm (\xi_1 - M_2 a_1) \sqrt{1 - M_2^2} \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 - a_1^2}}{(\xi_1 - M_2 a_1)^2 + \eta_1^2 (1 - M_2^2)},$$

$$\eta_1 = -\xi_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{v_1}{\sin \alpha_1}.$$

Комбинируя с условием (9), получим

$$\frac{df}{d\theta_1} \frac{d\theta_1'}{d\xi_1} + \psi(\theta_2') \frac{d\theta_2'}{d\xi_1} \frac{df}{d\theta_2} = -\frac{1}{\rho_1 a_1} \frac{df_1 (\xi_1 \sin \alpha_1 - \eta_1 \cos \alpha_1 + u_1)}{d\xi_1}. \quad (10)$$

В точке A (фиг. 1) ударной волны $\xi_1 = M_2 a_1$.

Легко найти

$$\left(\frac{d\theta_{1,2}'}{d\xi_1}\right)_0 = \frac{a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 (1 - M_2^2) + \left(M_2 \operatorname{ctg} \alpha_1 a_1 + \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1}\right) M_2}{a_1 \left(M_2 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1}\right)^2 \sqrt{1 - M_2^2}} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{M_2^2 a_1^2 + \left(M_2 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1}\right)^2 - a_1^2}}{a_1 \left(M_2 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1}\right)^2 \sqrt{1 - M_2^2}}. \quad (11)$$

В силу определения $\theta_{1,2}$ выполняется тождественное соотношение [4]

$$-\theta_{1,2}\, \eta_1' \mp \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - \theta_{1,2}^2}\; \xi + 1 = 0. \quad (11')$$

Из уравнения (11′) легко найти связь ξ_1 с $\theta_{1,2}'$ на границе.

Дифференцируя, найдем

$$\frac{d\xi_1}{d\theta_{1,2}'} = \frac{\mp \dfrac{-\sqrt{1 - M_2^2} \left(M_2 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1}\right) + (M_2^2 - 1)\, \theta_{1,2}'\, a_1^2}{\sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} - \theta_{1,2}'^2}}}{\left(\theta_{1,2}' \operatorname{ctg} \alpha_1 a_1 \sqrt{1 - M_2^2} \mp a_1 \sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} - \theta_{1,2}'^2} - M_2\right)^2} +$$

$$+ \frac{M_2 \dfrac{v_1}{\sin \alpha_1} a_1 \sqrt{1 - M_2^2} + a_1^2 \operatorname{ctg} \alpha_1 \sqrt{1 - M_2^2}}{\left(\theta_{1,2}' \operatorname{ctg} \alpha_1 a_1 \sqrt{1 - M_2^2} \mp a_1 \sqrt{\dfrac{1}{a_1^2} - \theta_{1,2}'^2} - M_2\right)^2}.$$

Введем в (10) параметр

$$\lambda = - \frac{\psi(\theta_2') \dfrac{d\theta_2'}{d\xi_1}}{\dfrac{d\theta_1'}{d\xi_1}}.$$

Заметим, что при малых давлениях $\psi = 0$ и, следовательно, $\lambda = 0$.

Нетрудно показать, что и для конечных давлений $\lambda < 1$. Тогда, обозначая

$$-\frac{1}{\rho_1 a_1} \frac{df_1(\xi_1 \sin \alpha_1 - \eta_1 \cos a_1 + u_1)}{d\xi_1} \frac{1}{\dfrac{d\theta_1'}{d\xi_1}} = f_2(\theta_1'),$$

$$\frac{\theta_2'(\theta_1')}{\theta_1'} \theta_1' = k\theta_1' = k(\theta_1')\,\theta_1',$$

найдем из (10)

$$f'(\theta_1) = \sum_0^\infty \lambda^n f_2(k^n \theta_1),$$

где $\lambda(\theta_1)$ и $k(\theta_1)$ определены выше, причем, как легко убедиться, полученное выражение удовлетворяет (10). В силу $\lambda < 1$ полученный ряд сходится. Приведенное решение для установившегося случая найдено в [1].

Итак, мы нашли решение (10) в виде

$$\begin{gathered} f(\theta_1) = \sum_0^\infty \int_{\theta_*}^{\theta_1} \lambda^n f_2(k^n \theta_1')\, d\theta_1' + C_1, \\ F(\theta_1) = \sum_0^\infty \int_{\theta_*}^{\theta_1} \lambda^n f_2(k^n \theta_1')\, \psi(\theta_1')\, d\theta_1' + C_2, \end{gathered} \tag{12}$$

причем P_2' найдется из (8).

Очевидно $C_1 + C_2 = 0$.

На ударной волне (12) упростится в силу

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{\eta_1'}.$$

Заметим, что $\eta_1 = 0$ соответствует точке пересечения прямой, проходящей под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$ к оси Ox через точку O, и невозмущенной ударной волны. Поэтому особенность в выражении $\theta_{1,2}$ появляется лишь вблизи границы области эллиптичности, и расчет течения в гиперболической области не сложен. Решение (12) представляет ряд возмущений, отраженных от ударной волны и свободной поверхности.

Для воды $\left(\rho_0 = 100\,\frac{кг\,сек^2}{м^4},\ \beta\rho_0^n = 3043\,\frac{кг}{см^2},\ n = 7,\ a_1 = 1540\,\frac{м}{сек}\right)$ и
заданного граничного давления

$$\left(P_1 = 6390\,\frac{кг}{см^2},\quad f_1(\xi) = P_1\frac{V_0 - \xi - u_1}{a_1},\quad V_0 = 2a_1\right)$$

из условий на ударной волне нетрудно найти:

$$M_2 = 0{,}829,\ A_0 = 0{,}806,\ k_2 = 0{,}56\cdot 10^{-8},\ \sqrt{u_1^2 + v_1^2} = 383\,\frac{м}{сек},$$

$$D_1 = 1660\,\frac{м}{сек},\quad \rho_1 = 130\,\frac{кг\,сек^2}{м^4}.$$

По формулам (9) и (12) можно рассчитать коэффициент отраже-
ния от ударной волны ψ и значения функций $f(\theta_1)$ и $F(\theta_2)$ с точно-
стью до двух членов. Результаты расчета приведены в таблице, при-
чем последняя строка соответствует точке A (фиг. 1) и получена п
формуле (11).

N	$\frac{\xi_1}{a_1}$	$\theta_1 a_1$	$\theta_2 a_1$	ψ	λ	$\frac{1}{a_1^2} f_2$	$\frac{1}{a_1^2} f'(\theta_1)$	$\frac{1}{a_1^2} F'(\theta$
1	0,415	−0,998	−0,443	0,182	−0,017	1,154	1,54	0,43
2	0,553	−0,870	−0,368	0,165	−0,014	0,311	0,307	0,095
3	0,622	−0,719	−0,344	0,154	−0,014	0,259	0,259	0,069
4	0,663	−0,650	−0,390	0,151	−0,0135	0,255	0,251	0,062
5	0,691	−0,591	−0,327	0,146	−0,0125	0,254	0,250	0,057
6	0,829	−0,299	−0,299	0,143	−0,012	0,245	0,242	0,051

В точках 1, 2 и 4 рассчитаны значения f: $-0{,}26$; $-0{,}14$; $-0{,}08$
и F: $-0{,}075$; $-0{,}063$; $-0{,}049$. При $\gamma = \frac{1}{8}$ получим для давлени

$P = P_1 + \gamma P_2' \rho_1 a_1$: 5087,08; 5611,205; 5857,852.

По этим значениям определим давление на ударной волне, точк
которой, соответствующие 1, 2 и 4, имеют согласно формуле (11
координаты $\frac{\xi}{a_1} = 0{,}9$; 0,97; 1,08. В линейном случае $M_2 = 1$, $A_0 =$
$\psi = 0$, $\lambda = 0$, $F = 0$. Решение (12) дается первым членом

$$f(\theta_1) = -\frac{1}{\rho_1 a_1} f_1(\xi_1 \sin\alpha_1 - \eta_1 \cos\alpha_1 + u_1),$$

соответствующим характеристикам $\theta_1 = \mathrm{const} = C$

$$C\eta_1' + \sqrt{\frac{1}{a_1^2} - C^2}\,\xi - 1 = 0.$$

Эти характеристики в переменных x, y, t являются характеристикам
второго семейства

$$x\left(\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-C^2}+\frac{1}{a_1}\right)\sin\alpha_1+y\left(\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-C^2}+\frac{1}{a_1}\right)\cos\alpha_1-$$

$$-\left(\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-C^2}\,a_1-1\right)t=0,$$

дающими решение в линейном случае.

Заметим, что вблизи точки A, фиг. 1, решение может быть найдено вплоть до второго члена разложения по степеням $\xi_1-M_2a_1$. Пусть $f(\theta)=a_0+a_1'(\theta-\theta_0)$, $f_1(\xi_1)=b_0(\xi_1-M_2a_1)+b_1(\xi_1-M_2a_1)^2$. Тогда имеем для определения a_0 и a_1' уравнение

$$\left[a_0+a_1'\left(\frac{d\theta_1'}{d\xi_1}\right)_0(\xi_1-M_2a_1)\right]\left[\left(\frac{d\theta_1'}{d\xi_1}\right)_0+\left(\frac{d^2\theta_1'}{d\xi_1^2}\right)_0(\xi_1-M_1a_1)\right]+$$

$$+\left[a_0+a_1'\left(\frac{d\theta_2}{d\xi_1}\right)_0(\xi_1-M_2a_1)\right]\left[\left(\frac{d\theta_2'}{d\xi_1}\right)_0+\left(\frac{d^2\theta_2'}{d\xi_1^2}\right)_0(\xi_1-M_2a_1)\right]\times$$

$$\times\left[\psi(\theta_0)+\psi'(\theta_0)\left(\frac{d\theta_2'}{d\xi_1}\right)_0(\xi_1-M_2a_1)\right]=$$

$$=-a_1\frac{b_0}{a_1\sin\alpha_1}-2\frac{b_1}{a_1}\frac{(\xi_1-M_2a_1)}{\sin^2\alpha_1}.$$

Кроме того, необходимо отметить, что граничное условие (2) может быть поставлено не на невозмущенной поверхности, а на прямой, соответствующей огибающей возмущений, движущихся со скоростью $\sqrt{u_1^2+v_1^2}$,

$$y=\frac{V_0t-x}{\sqrt{\dfrac{V_0^2}{(u_1^2+v_1^2)}-1}}.$$

Выкладки для этого случая проводятся подобно проведенным нами выше.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 V 1962

Ա. Գ. Բաղդոև

ԳՐԳՌՄԱՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՃԱԿԱՏԻ ՀԵՏ՝ ՀԵՂՈՒԿԻ ՄԵՋ ՃՆՇՄԱՆ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ԽՆԴՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկվում է սեղմվող հեղուկի մակերևույթով ափի հաստատուն արագությամբ շարժվող ավտոմոդելային ճնշման տարա-

ծումը հեղուկի խորքը։ Ճնշման համար ձևակերպվում է եզրային խնդիր, որի լուծումը տրվում է շարքերով։ Ստացված արդյունքն ընդհանրացնում է [1] աշխատության մեջ կիրառված մեթոդը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
2. *Станюкович К. П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. Гостехиздат, М., 1954.
3. *Кочин Н. Е., Кибель И. А.* и *Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. ОГИЗ, Гостехиздат, М., 1948.
4. *Смирнов В. И.* и *Соболев С. Л.* Sur une problème plan de vibrations elastiques. Тр. сейсмического института АН СССР, 1934.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

АЭРОГИДРОМЕХАНИКА

А. М. Мхитарян

К вопросу о бризовой циркуляции

Введение

Проблема изучения ветрового режима водоемов имеет важное теоретическое и прикладное значение. Важность этой проблемы проистекает не только из необходимости учитывать локальные метеорологические процессы в прогнозе погоды, выдвинутой И. А. Кибелем [6]. Изучение местных ветров связано с решением и других прикладных задач, как, например, задачи об определении испарения с поверхности водоемов и озер [9, 10] и т. д.

В настоящее время, когда на повестку дня ставится проблема сокращения испарения с поверхности озер и водохранилищ, особенно в южных засушливых районах нашей страны, путем применения специальных мономолекулярных пленок, вопрос о ветровом режиме приобретает новое важное значение. Это особенно сложный вопрос для горных водоемов. Многие стороны жизни и эффективности действия пленки зависят от ветрового и волнового режимов, то есть как от общего ветрового фона, определяемого общециркуляционными факторами, так и в еще большей степени, от локальных ветров-бризов, горно-долинной циркуляции, фенов и т. д.

В этой работе будет рассмотрена лишь бризовая циркуляция, возникающая, как известно, вследствие, температурной неоднородности подстилающей поверхности и имеющая суточный ход.

Бризы известны давно, им посвящено большое количество работ. Укажем лишь на работы А. И. Воейкова [2], Л. Н. Гутмана [3—5] и др. [1, 8, 11—17]. В работе [7] предложен метод решения задачи о локальном ветре. В работах [3—5] Л. Н. Гутману удалось провести решение задачи до конца, благодаря удачной формулировке краевого условия на поверхности земли для температуры.

Предполагая отсутствие других местных ветров и общего движения атмосферы, попытаемся построить модель бризовой циркуляции в рамках линейной теории.

§ 1. Основные уравнения

Обратимся к общим уравнениям гидротермодинамики (три уравнения движения, уравнения неразрывности, состояния, притока тепла и влажности). Они имеют следующий вид:

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial u}{\partial z}\right)+k_u'\Delta u+lv, \tag{1.1}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial v}{\partial z}\right)+k_u'\Delta v-lu, \tag{1.2}$$

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial w}{\partial z}\right)+k_u'\Delta w-g, \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+div\,V=0, \tag{1.4}$$

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_T\frac{\partial T}{\partial z}\right)+k_T'\Delta T+f_1, \tag{1.5}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_q\frac{\partial q}{\partial z}\right)+k_q'\Delta q+f_2, \tag{1.6}$$

$$p=\rho RT. \tag{1.7}$$

Обозначения следующие: начало координатной системы расположено на урезе воды, z — вертикально вверх, x — по нормали к берегу, y — по касательной; t — время; u, v, w — составляющие скорости; p, ρ, q, T — соответственно давление, плотность, влажность и температура воздуха; R — газовая постоянная; g — ускорение силы тяжести; k_u, k_u', k_T, k_T', k_q и k_q' — коэффициенты турбулентного перемешивания для количества движения, тепла и влаги по горизонтали и вертикали, соответственно; $l=2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, причем ω — угловая скорость вращения земли вокруг своей оси, φ — широта местности; f_1 — приток тепла; f_2 — приток влаги; Δ — плоский оператор Лапласа.

Положим

$$\begin{aligned} p&=P(z)+p'(x,\ y,\ z,\ t),\\ T&=\overline{T}(z)+\theta(x,\ y,\ z,\ t),\\ \rho&=\gamma_1(z)+\rho'(x,\ y,\ z,\ t),\\ q&=Q(z)+q'(x,\ y,\ z,\ t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь P, $\overline{T}$, γ_1 и Q — стандартные величины, соответствующие покоящейся атмосфере. Тогда основная система (1.1)—(1.6) для бризовых отклонений, после использования (1.7), примет вид (штрихи для простоты записи отбрасываем):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-RT\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial u}{\partial z}\right)+k_u'\Delta u+lv, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-RT\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial v}{\partial z}\right)+k_u'\Delta v-lu, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-RT\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_u\frac{\partial w}{\partial z}\right)+k_u'\Delta w+\lambda\vartheta, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma w, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\mu w=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_T\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+k_T'\Delta\vartheta, \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial q}{\partial y}+w\frac{\partial q}{\partial z}+\mu_1 w=\frac{\partial}{\partial z}\left(k_q\frac{\partial q}{\partial z}\right)+k_q'\Delta q. \quad (1.14)$$

Здесь: $p=\frac{p'}{P}$; $\lambda=\frac{g}{T}$; $\mu=\gamma_a-\gamma$ при $q<q_m$, $\mu=\gamma_b-\gamma$ при $q=q_m$; $\mu_1=\gamma_q'-\gamma_q$, причем q_m — влажность насыщения, γ, γ_a и γ_b — вертикальные градиенты температуры в покоящейся, сухоадиабатической и влажноадиабатической атмосфере, соответственно. Кроме того

$$\sigma\sim\frac{1}{\gamma_1}\frac{d\gamma_1}{dz}=\frac{g-\gamma R}{RT}.$$

Если теперь в первом приближении отбрасывать члены с горизонтальным перемешиванием, полагать бризы как малые отклонения от общего движения, вызванные локальной неоднородностью подстилающей поверхности и линеаризовать уравнения, получим основную систему уравнений нашей задачи в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-RT\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+lv, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-RT\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right)-lu, \quad (1.16)$$

$$O=-RT\frac{\partial p}{\partial z}+\lambda\vartheta, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right). \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial q}{\partial z}\right). \quad (1.20)$$

Здесь и далее принято $k_u=k_T=k_q$. В этой системе не составляет труда сохранить правую часть уравнения (1.12), но более существенно сохранить последние члены левых частей уравнений (1.13) и (1.14). Для простоты мы воспользуемся системой из шести уравнений (1.15)—(1.20) для шести неизвестных функций: u, v, w, p, ϑ и q.

Сформулируем краевые условия.

1. При $z=z_0$ $u=v=w=0$, $\vartheta=\vartheta_0(x, y, t)$, $q=q_0(x, y, t)$,

2. При $z \to \infty$ $u = v = p = \vartheta = q = 0$. (1.21)
Здесь z_0 — параметр шероховатости.

Функцию ϑ_0 можно брать из наблюдений или же определить из условия баланса на уровне z_0. Что касается функции q_0, то на водной поверхности это будет максимальная влажность, соответствующая температуре ϑ_0, а на поверхности суши ее можно также брать из наблюдений, либо пренебречь изменением влажности за счет испарения с поверхности суши и уравнение (1.20) рассматривать лишь для водной поверхности $(x > 0)$.

§ 2. Решение системы основных уравнений

Наметим следующую схему решения.

Начальных условий ставить не будем, так как ищется периодическое решение. Граничные же условия имеют вид (1.21). Сначала из уравнений (1.19) и (1.20) определяются ϑ и q. Далее, вставляя ϑ в (1.17), легко найти p, а подставляя последнее в (1.15) и (1.16), можно определить скорости u и v, тогда из (1.18) определится w.

Прежде чем приступить к решению предположим, что известные функции ϑ_0 и q_0 представлены в виде рядов Фурье

$$\vartheta_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [T_n(x, y)\cos n\omega t + T_n'(x, y)\sin n\omega t], \tag{2.1}$$

$$q_0(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n(x, y)\cos n\omega t + q_n'(x, y)\sin n\omega t], \tag{2.2}$$

причем суточный ход каждой из величин ϑ_0 и q_0 известен либо из наблюдений, либо из условия баланса. Положим также $k = \text{const}$. Ниже мы покажем, как решается задача при $k = k(z)$.

Итак, наша система примет вид:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = k\frac{\partial^2\vartheta}{dz^2}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = k\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \tag{2.4}$$

$$O = -RT\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\vartheta, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -RT\frac{\partial p}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + lv, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -RT\frac{\partial p}{\partial y} + k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - lu, \tag{2.7}$$

$$w = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz. \tag{2.8}$$

Граничные условия имеют вид (1.21), причем мы примем $z_0 = 0$, а ϑ_0 и q_0 — по (2.1) и (2.2). Ищем решение уравнения (2.3) в виде

$$\vartheta(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma_n z} [\vartheta_n(x, y) \cos(n\omega t - \sigma_n z) + \vartheta_n'(x, y) \sin(n\omega t - \sigma_n z)].$$

Легко заметить, что условие на бесконечности удовлетворено. Условие на поверхности земли $z = 0$ дает согласно (2.1) $\vartheta_n \equiv T_n$ и $\vartheta_n' \equiv T_n'$, а подстановка решения в уравнение (2.4) дает

$$\sigma_n^2 = \frac{n\omega}{2k}. \tag{2.9}$$

С учетом этого решение уравнения (2.3) примет вид:

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma_n z} [T_n \cos(n\omega t - \sigma_n z) + T_n' \sin(n\omega t - \sigma_n z)]. \tag{2.10}$$

Точно также можно написать решение уравнения (2.4). Оно имеет вид

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sigma_n z} [q_n \cos(n\omega t - \sigma_n z) + q_n' \sin(n\omega t - \sigma_n z)], \tag{2.11}$$

причем σ_n определяется по формуле (2.9).

Используя теперь второе условие из (1.21), согласно уравнению (2.5), можно написать

$$p = \frac{\lambda}{RT} \int_{\infty}^{z} \vartheta \, dz.$$

Или, подставляя сюда (2.10), получим

$$p = -\frac{\lambda}{RT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [(T_n - T_n') \cos(n\omega t - \sigma_n z) + (T_n + T_n') \sin(n\omega t - \sigma_n z)]. \tag{2.12}$$

В частности, для давления на поверхности земли

$$p_0(x, y, 0, t) = -\frac{\lambda}{RT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} [(T_n - T_n') \cos n\omega t + (T_n + T_n') \sin n\omega t]. \tag{2.13}$$

Обратимся теперь к уравнениям движения (2.6) и (2.7). Умножив второе из них на i и складывая с первым, получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{il}{k} V = -\frac{\lambda}{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} [M_n \cos \alpha_n + M_n' \sin \alpha_n]. \tag{2.14}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$V = u + iv; \quad \alpha_n = n\omega t - \sigma_n z;$$

$$M_n = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)(T_n - T_n'); \qquad M_n' = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}\right)(T_n + T_n'). \tag{2.15}$$

Найдем сначала частное решение неоднородного уравнения (2.14). Легко убедиться, что оно дается соотношением

$$V_{ч.\ р.} = -\frac{il}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n}\left[M_n\cos\alpha_n + M_n'\sin\alpha_n\right]. \tag{2.16}$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{il}{k}V = 0 \tag{2.17}$$

ищем в следующем виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty}\left[u_n(x, y, z)\cos n\omega t + v_n(x, y, z)\sin n\omega t\right], \tag{2.18}$$

причем u_n и v_n — неизвестные комплексные функции.

Подставляя (2.18) в (2.17), получим тождество, на основании которого

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \frac{il}{k}u_n - \frac{n\omega}{k}v_n = 0, \\ &\frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} - \frac{il}{k}v_n + \frac{n\omega}{k}u_n = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Исключая из (2.19) поочередно u_n и v_n, получим

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} - \frac{2il}{k}\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{n^2\omega^2 - l^2}{k^2}u_n = 0. \tag{2.20}$$

Точно таким же будет уравнение для определения v_n, следовательно, и решения будут одного вида, отличие лишь в постоянных интегрирования.

Характеристическим уравнением для (2.20) будет

$$r_n^4 - \frac{2il}{k}r_n^2 + \frac{n^2\omega^2 - l^2}{k^2} = 0.$$

Это уравнение имеет следующие корни

$$\begin{aligned} &r_{n,1,2} = \pm\sqrt{\frac{n\omega + l}{2k}}(1 + i), \\ &r_{n,3,4} = \pm\sqrt{\left|\frac{n\omega - l}{2k}\right|}(1 \mp i). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Отбросим два из этих четырех решений, ввиду их неограниченности на бесконечности. Будем иметь

$$u_n = c_{1,n}e^{-a_n(1+i)z} + c_{2,n}e^{-b_n(1\mp i)z}. \tag{2.22}$$

Точно также можно написать

$$v_n = c_{3,n}e^{-a_n(1+i)z} + c_{4,n}e^{-b_n(1\mp i)z}. \tag{2.23}$$

Здесь и далее верхний знак в выражении $b_n(1 \mp i)$ берется при $n\omega > l$, а нижний — при $n\omega < l$. Кроме того, обозначено

$$a_n^2 = \frac{n\omega + l}{2k}; \qquad b_n^2 = \left| \frac{n\omega - l}{2k} \right|. \tag{2.24}$$

Если решения (2.22) и (2.23) подставить в (2.19), легко получить

$$c_{1,n} = -ic_{3,n} \quad \text{и} \quad c_{2,n} = ic_{4,n}. \tag{2.25}$$

Складывая теперь частное решение (2.16) с общим решением (2.18), используя при этом (2.22), (2.23) и (2.25), получим решение уравнения (2.14).

Удовлетворяя граничному условию на земле, согласно которому $V=0$ при $z=0$, легко определить $c_{3,n}$ и $c_{4,n}$. За недостатком места эти выражения выписывать не будем. Напишем сразу окончательный результат для скоростей, отделяя для этого действительные и мнимые части полученного общего решения неоднородного уравнения.

$$u = \frac{\lambda}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} \left[K_{ny} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{ny} \sin(n\omega t - \sigma_n z)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} \left[(K'_{nx} - K_{ny}) \cos(n\omega t - a_n z) - (K_{nx} + K'_{ny}) \sin(n\omega t - a_n z)\right] -$$

$$- \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} \left[(K'_{nx} + K_{ny}) \cos(n\omega t \mp b_n z) - (K_{nx} - K'_{ny}) \sin(n\omega t \mp b_n z)\right]. \tag{2.26}$$

$$V = -\frac{\lambda}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n} \left[K_{nx} \cos(n\omega t - \sigma_n z) + K'_{nx} \sin(n\omega t - \sigma_n z)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n} \left[(K_{nx} + K_{ny}) \cos(n\omega t - a_n z) + (K'_{nx} - K_{ny}) \sin(n\omega t - a_n z)\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n} \left[(K_{nx} - K'_{ny}) \cos(n\omega t \mp b_n z) + (K'_{nx} + K_{ny}) \sin(n\omega t \mp b_n z)\right]. \tag{2.27}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$K_{nx} = \frac{\partial}{\partial x}(T_n - T'_n); \qquad K'_{nx} = \frac{\partial}{\partial x}(T_n + T'_n);$$

$$K_{ny} = \frac{\partial}{\partial y}(T_n - T'_n); \qquad K'_{ny} = \frac{\partial}{\partial y}(T_n + T'_n). \tag{2.28}$$

Нетрудно заметить, что при $l=0$ получается $a_n = b_n = \sigma_n$ и решения (2.26) и (2.27) становятся неопределенностью. Раскрывая ее по обычным правилам, получим

$$u\Big|_{l\to 0} = -\frac{\lambda z}{4k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^2} \left[\frac{\partial T'_n}{\partial x} \cos(n\omega t - \sigma_n z) - \frac{\partial T_n}{\partial x} \sin(n\omega t - \sigma_n z)\right],$$

$$v\Big|_{l\to 0} = -\frac{\lambda z}{4k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sigma_n z}}{\sigma_n^2}\left[\frac{\partial T_n'}{\partial y}\cos(n\omega t-\sigma_n z)-\frac{\partial T_n}{\partial y}\sin(n\omega t-\sigma_n z)\right]. \tag{2.29}$$

Это предельное решение имеет место для экваториальных областей, где $l \to 0$ и совпадает с решением нашей задачи, которое мы получили бы, если бы с самого начала положили $l = 0$ для всех широт.

Подставляя теперь решения (2.26) и (2.27) в (2.28), получим для вертикальной скорости следующее выражение

$$\begin{aligned} w = &-\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n a_n}(\Delta T_n \cos n\omega t + \Delta T_n' \sin n\omega t) + \\ &+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-a_n z}}{\sigma_n a_n}[\Delta T_n \cos(n\omega t - a_n z) + \Delta T_n' \sin(n\omega t - a_n z)] + \\ &+\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma_n b_n}\left(\begin{matrix}\Delta T_n \\ \Delta T_n'\end{matrix}\cos n\omega t \begin{matrix} + \Delta T_n' \\ - \Delta T_n\end{matrix}\sin n\omega t\right) - \\ &-\frac{\lambda}{4l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-b_n z}}{\sigma_n b_n}\left[\begin{matrix}\Delta T_n \\ \Delta T_n'\end{matrix}\cos(n\omega t \mp b_n z) \begin{matrix} + \Delta T_n' \\ - \Delta T_n\end{matrix}\sin(n\omega t \mp b_n z)\right]. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь верхние знаки и лапласианы от T_n и T_n' берутся при $n\omega > l$, а нижние — при $n\omega < l$.

Таким образом, решение задачи дается формулами (2.10) для температуры, (2.11) — для влажности, (2.12) — для давления, (2.13) — для наземного давления, (2.26) и (2.27) — для горизонтальных и (2.30) — для вертикальной скоростей.

§ 3. Решение задачи при переменном коэффициенте турбулентного перемешивания

Рассмотрим случай, когда k линейно растет с высотой. Такая закономерность для k хорошо оправдывается в приземном слое, далее k стремится к пределу.

Но чтобы не решать двухслойную задачу и упростить выкладки, примем

$$k = k_0 z. \tag{3.1}$$

Тогда система (1.15)—(1.20) примет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k_0 \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right), \tag{3.2}$$

$$0 = -RT\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\vartheta, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -RT\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)p + k_0\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial V}{\partial z}\right) - ilV, \tag{3.4}$$

$$w = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz. \tag{3.5}$$

Причем, как и выше $V = u + iv$.

Граничные условия имеют вид (1.21). Уравнение для влажности в точности совпадает с (3.2).

Ищем решение (3.2) в виде

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} [\vartheta_n(x, y, z) \cos n\omega t + \vartheta_n'(x, y, z) \sin n\omega t]. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.2) и обозначая

$$\vartheta_n + i\vartheta_n' = \Phi_n, \tag{3.7}$$

получим для Φ_n уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} + \frac{in\omega}{k_0 z}\Phi_n = 0.$$

Ограниченным на бесконечности и обращающимся в $T_n + iT_n'$ на $z = z_0$ решением этого уравнения является

$$\Phi_n(x, y, z) = \frac{T_n(x, y) + iT_n'(x, y)}{H_0(\beta_n \sqrt{iz_0})} H_0(\beta_n \sqrt{iz}), \tag{3.8}$$

$$\beta_n = 2\sqrt{\frac{n\omega}{k_0}}. \tag{3.9}$$

Здесь H_0 — функция Ханкеля первого рода.

Из уравнения (3.3) имеем

$$p = \frac{\lambda}{RT}\int_{\infty}^{z_0} \vartheta\, dz.$$

Если подставить сюда (3.6) и, кроме того, положить

$$p = \frac{\lambda}{RT}\sum_{n=1}^{\infty} (p_n \cos n\omega t + p_n' \sin n\omega t), \tag{3.10}$$

можно легко получить

$$p_n + ip_n' = \int_{\infty}^{z} \Phi_n dz.$$

Подставляя сюда (3.8) и выполняя квадратуры, получим

$$p_n + ip_n' = \frac{T_n + iT_n'}{H_0(\beta_n \sqrt{iz_0})} \cdot \frac{\sqrt{2z}}{\beta_n}(1 - i) H_1(\beta_n \sqrt{iz}). \tag{3.11}$$

В частности, если положить здесь $z = z_0$ и подставить это решение в (3.10), можно получить $p_0(x, y, 0, t)$.

Обратимся теперь к уравнению (3.4). Представляя его решение в виде (2.18) и используя решение (3.10) для p, получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)-\frac{il}{k_0}u_n-\frac{n\omega}{k_0}v_n=F_n, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)-\frac{il}{k_0}v_n+\frac{n\omega}{k_0}u_n=f_n, \tag{3.13}$$

$$F_n=\frac{i}{k_0}\left(\frac{\partial}{dx}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)p_n;\qquad f_n=\frac{i}{k_0}\left(\frac{\partial}{dx}+i\frac{\partial}{dy}\right)p_n', \tag{3.14}$$

причем p_n и p_n' определяются из (3.11).

Заметим, что u_n и v_n — неизвестные комплексные функции. Для решения этой системы воспользуемся преобразованием Лапласа.

Положим для какой-либо функции

$$\bar{u}_n(x,y,p)=\int_{z_0}^{\infty}u_n(x,y,z)\,e^{-pz}dz. \tag{3.15}$$

Применяя этот оператор к системе (3.12)—(3.13) и используя граничные условия (1.21), получим

$$\begin{aligned}p^2\frac{\partial\bar{u}_n}{\partial p}+\left(p+\frac{il}{k_0}\right)\bar{u}_n+\frac{n\omega}{k_0}\bar{v}_n=-\bar{F}_n,\\ p^2\frac{\partial\bar{v}_n}{\partial p}+\left(p+\frac{il}{k_0}\right)\bar{v}_n-\frac{n\omega}{k_0}\bar{u}_n=-\bar{f}_n.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Исключая из этих уравнений $\bar{v}_n$, получим для $\bar{u}_n$

$$p^4\frac{\partial^2\bar{u}_n}{\partial p^2}+2p^2\left(2p+\frac{il}{k_0}\right)\frac{\partial\bar{u}_n}{\partial p}+\left(2p^2+2p\frac{il}{k_0}+\frac{n^2\omega^2-l^2}{k_0^2}\right)\bar{u}_n=\bar{F}, \tag{3.17}$$

здесь

$$\bar{F}=\frac{n\omega}{k_0}\bar{f}_n-p^2\frac{\partial\bar{F}_n}{\partial p}-\left(p+\frac{il}{k_0}\right)\bar{F}_n. \tag{3.18}$$

Если из (3.17) определить $\bar{u}_n$, то $\bar{v}_n$ найдется из следующего простого выражения

$$\bar{v}_n=-\frac{k_0}{n\omega}\left[\bar{F}_n+\left(p+\frac{il}{k_0}\right)\bar{u}_n+p^2\frac{\partial\bar{u}_n}{\partial p}\right]. \tag{3.19}$$

Для решения уравнения (3.17) сделаем преобразование переменных, для этого положим

$$p=\frac{1}{q}. \tag{3.20}$$

Кроме того, пусть

$$W_n(q)=e^{-\frac{ilq}{k_0}}\bar{u}_n. \tag{3.21}$$

Тогда (3.17) примет следующий простой вид

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial q^2}-\frac{2}{q}\frac{\partial W_n}{\partial q}+\left(\frac{2}{q}+\frac{n^2\omega^2}{k_0^2}\right)W_n=e^{-\frac{nq}{k_0}}\bar{F}. \tag{3.22}$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$W=q^{3/2}\left[A_nJ_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n\omega}{k_0}q\right)+B_nJ_{+\frac{1}{2}}\left(\frac{n\omega}{k_0}q\right)\right]. \tag{3.23}$$

Здесь $J_{\pm\frac{1}{2}}$ — функции Бесселя.

Для решения неоднородного уравнения (3.22) воспользуемся методом вариации постоянных. Используя некоторые свойства функций Бесселя и возвращаясь к искомой функции по (3.21) и к переменной p по (3.20), получим для изображения u_n, как общее решение неоднородного уравнения (3.17)

$$\begin{aligned}\bar{u}&=\left(\frac{1}{p}\right)^{3/2}e^{\frac{n}{k_0p}}\left[A_nJ_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)+B_nJ_{+\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)\right]+\\&+\frac{8\beta_n}{\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^{3/2}e^{\frac{n}{k_0p}}J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)\int\limits_{\infty}^{p}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{11}{2}}J_{+\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)\bar{F}(p)\,dp-\\&-\frac{8\beta_n}{\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^{3/2}e^{\frac{n}{k_0p}}J_{+\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)\int\limits_{0}^{p}\left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{11}{2}}J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\beta_n}{p}\right)\bar{F}(p)\,dp.\end{aligned} \tag{3.24}$$

По (3.19) легко определить v_n.

Из (3.24) можно найти оригинал u_n

$$u_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pz}\bar{u}\,dp. \tag{3.25}$$

Найдя таким образом горизонтальные скорости, легко из уравнения неразрывности найти вертикальную скорость.

§ 4. Некоторые результаты

Подставим значение l во второе выражение (2.24) и перепишем его в следующем виде

$$b_n=\sigma_n\sqrt{1-\frac{2}{n}\sin\varphi}\,. \tag{4.1}$$

Как видно из (4.1), для $n>2$ b_n действительно на всех широтах, при $n=2$ — лишь на полюсе $b_n=0$. При $n=1$ и $\varphi=30°$ широты снова $b_n=0$. Это означает, что если исключить полюс, то волны, за исключением волны с $n=1$, затухают с высотой на всех широтах.

Лишь суточная волна не затухает с высотой на широте $\varphi=30°$. Этот результат для первой волны получен в [3].

Определим момент наступления бриза из условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=0. \tag{4.2}$$

Подставляя сюда решение (2.26), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n \cos n\omega t_0+\beta_n' \sin n\omega t_0\right)=0. \tag{4.3}$$

Здесь

$$\beta_n=-\frac{a_n-b_n}{\sigma_n}\frac{\partial T_n'}{\partial x};\qquad \beta_n'=\frac{a_n-b_n}{\sigma_n}\frac{\partial T_n}{\partial x}\qquad \varphi<30^\circ,$$
$$\beta_n=\frac{1}{\sigma_n}\left(b_n\frac{\partial T_n}{\partial x}-a_n\frac{\partial T_n'}{\partial x}\right);\qquad \beta_n'=\frac{1}{\sigma_n}\left(b_n\frac{\partial T_n'}{\partial x}+a_n\frac{\partial T_n}{\partial x}\right)\quad \varphi>30^\circ. \tag{4.4}$$

Уравнение (4.3) относительно ωt_0 решается графически. Определим угол наклона ветра от нормали к берегу у поверхности земли из условия

$$\operatorname{tg}\alpha=\left.\frac{v}{u}\right|_{z\to 0}. \tag{4.5}$$

Подставляя сюда (2.26) и (2.27) и раскрывая неопределенность, получим

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos n\omega t+\alpha_n' \sin n\omega t\right)}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\beta_n \cos n\omega t+\beta_n' \sin n\omega t\right)}.$$

$$\alpha_n=\left(2-\frac{a_n+b_n}{\sigma_n}\right)\frac{\partial T_n}{\partial x};\qquad \alpha_n'=\left(2-\frac{a_n+b_n}{\sigma_n}\right)\frac{\partial T_n'}{\partial x}\qquad \varphi<30^\circ. \tag{4.6}$$

$$\alpha_n=\left(2-\frac{a_n}{\sigma_n}\right)\frac{\partial T_n}{\partial x}+\frac{b_n}{\sigma_n}\frac{\partial T_n'}{\partial x};\qquad \alpha_n'=\left(2-\frac{a_n}{\sigma_n}\right)\frac{\partial T_n'}{\partial x}-\frac{b_n}{a_n}\frac{\partial T_n}{\partial x}\qquad \varphi>30^\circ.$$

β_n, β_n' определяются по (4.4).

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют сделать ряд выводов и проводить расчеты конкретных примеров. Этим вопросам будет посвящена наша следующая статья.

Институт водных проблем
АН Армянской ССР

Поступила 14 VII 1962

Ա. Մ. Մխիթարյան

ԲՐԻԶԱՅԻՆ ՑԻՐԿՈՒԼՅԱՑԻԱՅԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լճերի և ջրամբարների վրա քամու ռեժիմի ուսումնասիրությունը կարևոր կիրառական նշանակություն ունի։ Ընդհանուր ֆոնի վրա ավելանում են նաև տեղական քամիներ (լեռնա-հովտային բրիզային, ֆյոնային և այլն), որոնց ուսումնասիրությունը կօգնի ինչպես եղանակի կանխագուշակման մեթոդները կատարելագործելու, այնպես էլ այլ գործնական հարցեր լուծելու համար, ինչպիսիք են՝ գոլորշիացումը և պայքարը նրա դեմ հատուկ մոլեկուլյար թաղանթների միջոցով։

Հոդվածում բերվում է բրիզային ցիրկուլյացիայի խնդրի լուծումը գծային տեսության սահմաններում, ընդունելով, որ այն ունի օրական ընթացք և առաջանում է ծածկույթի ջերմային անհամասեռության հետևանքով։

Հիդրոջերմադինամիկայի հիմնական հավասարումների (1.9)—(1.14) սիստեմը պարզեցվում է և բերվում (1.15)—(1.20) տեսքին՝ ջերմաստիճանի (θ), խոնավության (q), ճնշման (p) և արագության հորիզոնական (u, v) ու ուղղաձիգ (w) բաղադրիչների համար։ Սահմանային պայմաններն ունեն (1.21) տեսքը։ Նախնական պայմաններ չեն դրվում, քանի որ որոնվում է խնդրի պերիոդիկ լուծումը։

Այնուհետև § 2-ում լուծվում է հավասարումների (2.3)—(2.8) սիստեմը, հաշվի առնելով Կորիոլիսի արագացումը տուրբուլենտականության հաստատուն գործակցի դեպքում։

Ընդունվում է, որ ջերմաստիճանի և խոնավության բաշխումը երկրի մակերևույթի վրա հայտնի է և տրվում է (2.1) և (2.2) շարքերով։ Այդ դեպքում ջերմաստիճանի համար ստացվում է (2.10) լուծումը, խոնավության համար (2.11), ճնշման համար՝ (2.12), արագության հորիզոնական բաղադրիչների համար՝ (2.26) ու (2.27) և ուղղաձիգ բաղադրիչի համար՝ (2.30)։

Հաջորդ պարագրաֆում նույն խնդիրը լուծվում է այն դեպքի համար, երբ ուղղաձիգ տուրբուլենտ փոխանակման գործակիցը ըստ բարձրության փոփոխական է, աճում է (3.1) գծային օրենքով։ Հավասարումների սիստեմն այս դեպքում ունի (3.2)—(3.5) տեսքը, սահմանային պայմանները՝ (1.21) տեսքը։ Այս դեպքում ևս հնարավոր է լինում լուծումը հասցնել մինչև վերջ։

Հոդվածի վերջում բերվում են մի շարք արդյունքներ՝ (4.3) տեսքով բրիզի ծագման ժամանակի որոշման համար, (4.6) տեսքով՝ նրա թեքության անկյան որոշման համար և այլն։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурман Э. А.* К вопросу о распределении вертикальных токов при бризовых циркуляциях. Труды ОГМИ, вып. 5, 1953.
2. *Воейков А. И.* Морские и береговые бризы. Метеор. вестник, 6—7, 1914.
3. *Гутман Л. Н.* О структуре бризов. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.
4. *Гутман Л. Н.* О вертикальных токах при бризах. Труды ЦИП, вып. 8, 1948.

5. *Гутман Л. Н.* О распределении бризов по нормали к берегу. Метеор. и гидр., № 2, 1949.
6. *Кибель И. А.* Применение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 5, 1940.
7. *Кибель И. А.* Метод решения задачи о локальных ветрах. Доклады ЦИП, I, вып. 1—2, 1947.
8. *Марков Д. В.* и *Альбов Н. В.* Модель стационарной бризовой циркуляции. Труды ГГО, вып. 31, 1940.
9. *Мхитарян А. М.* Испарение с поверхности озера Севан. „Результаты комплексных исследований по Севанской проблеме", т. I. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
10. *Николаев Н. Г.* Ветры в бассейне озера Севан. Материалы по исследованию оз. Севан, ч. III, 1933.
11. *Ситников И. Г.* Некоторые результаты гидродинамического исследования бризов. Труды ЦИП, вып. 93, 1960.
12. *Трубников Б. Н.* О вертикальных токах при бризе над плоским берегом. Изв. АН СССР, сер. Геофиз., № 2, 1961.
13. *Arakawa H., Utsugi M.* Theoretical Investigation of Land and Sea-Breeses. Geoph. Mag., **11**, 1937.
14. *Haurwithz H.* Comments on the Sea-Breese Circulation. The Journ. of Meteorol., **4**, № 1, 1947.
15. *Jeffreys H.* On the Dynamics of Wind. Quart Journ. Roy. Met. Soc., **48**, 1922.
16. *Pearce R. P.* The calculation of the sea-breese circulation in terms of the differential heating across the coastline. Quart. Journ. of the Roy. Met. Soc., **81**, № 349, 1955, **82**, № 352, 1956.
17. *Schmidt F. H.* An Elementary Theory of Land and Sea-Breese Circulation. The Journ. of Meteorol., **4**, № 1, 1947.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

О. С. Мергелян

Отражение и преломление электромагнитных волн на границе между изотропной и оптически активной средой

Оптически активные среды являются одним из простейших случаев сред с пространственной дисперсией. Материальные уравнения для электромагнитного поля в таких средах имеют вид

$$\vec{B}(\omega, \vec{r}) = \mu(\omega)\, \vec{H}(\omega, \vec{r})$$

$$\vec{D}(\omega, \vec{r}) = \varepsilon(\omega)\, \vec{E}(\omega, \vec{r}) + 4\pi i\gamma \int \frac{\mathrm{rot}\, \vec{E}(\omega, \vec{r}')}{\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|^2}\, d\vec{r}'.$$

Примером оптически активных сред могут служить некоторые органические полимеры, а также раствор сахара.

В настоящей работе рассматриваются электромагнитные явления, возникающие при падении плоской электромагнитной волны на границу раздела двух сред, одна из которых является оптически активной. Получены формулы Френеля и исследована поляризация преломленных и отраженных волн.

1. Характер электромагнитного поля в оптически активной среде. Если представить вектора электрического и магнитного полей и вектора индукций в виде

$$(\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}) = (\vec{E}(\vec{k}), \vec{D}(\vec{k}), \vec{H}(\vec{k}), \vec{B}(\vec{k}))\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \tag{1}$$

то материальные уравнения в оптически активной среде запишутся следующим образом

$$\vec{D}(\vec{k}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{k}) + \frac{i\gamma}{k}\, [\vec{k}\vec{E}(\vec{k})]$$

$$\vec{B}(\vec{k}) = \mu \vec{H}(\vec{k}), \tag{2}$$

где γ — постоянная гирации, характеризующая оптическую активность среды.

Дисперсионное соотношение для такой среды имеет вид

$$k^{\pm 2} = \frac{\omega^2}{c^2} n^{\pm 2} = \frac{\omega^2}{c^2} \mu (\varepsilon \pm \gamma), \tag{3}$$

где знак при γ соответствует индексу при k.

Таким образом, в оптически активной среде могут распространяться два типа волн (им соответствуют различные знаки в правой части (3)), которые мы назовем право и левополяризованными, причем правой поляризации в (3) соответствуют знак и индекс $+$, левой соответственно $-$.

Из уравнений поля с учетом материальных уравнений (2) следуют следующие соотношения

$$E_x^{\pm} (\vec{k}) = - \frac{k_x^{\pm} k_z^{\pm} \mp i k_y^{\pm} k^{\pm}}{k_x^{\pm 2} + k_y^{\pm 2}} E_z^{\pm} (\vec{k}),$$

$$E_y^{\pm} (\vec{k}) = - \frac{k_y^{\pm} k_z^{\pm} \pm i k_x^{\pm} k^{\pm}}{k_x^{\pm 2} + k_y^{\pm 2}} E_z^{\pm} (\vec{k}),$$

$$H_x^{\pm} (\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu} k^{\pm} \frac{k_y^{\pm} k^{\pm} \pm i k_x^{\pm} k_z^{\pm}}{k_x^{\pm 2} + k_y^{\pm 2}} E_z^{\pm} (\vec{k}),$$

$$H_y^{\pm} (\vec{k}) = \frac{c}{\omega\mu} k^{\pm} \frac{k_x^{\pm} k^{\pm} \mp i k_y^{\pm} k_z^{\pm}}{k_x^{\pm 2} + k_y^{\pm 2}} E_z^{\pm} (\vec{k}), \tag{4}$$

$$H_z^{\pm} (\vec{k}) = \pm \frac{c}{\omega\mu} k^{\pm} E_z^{\pm} (\vec{k})\, i,$$

$$\vec{D}^{\pm} (\vec{k}) = (\varepsilon \pm \gamma) \vec{E}^{\pm} (\vec{k}).$$

Из (4) следует, что в оптически активной среде могут распространяться две эллиптически поляризованные волны.

Пусть теперь плоскость $z = 0$ является границей раздела активной и неактивной сред. Рассмотрим раздельно случаи, когда волна падает из неактивной среды на оптически активную и наоборот.

II. Волна падает из оптически неактивной среды на границу раздела с оптически активной средой, амплитуда волны $\vec{E} (\vec{k})$.

Область $z < 0$ заполнена средой с постоянными ε_1, μ_1, область $z > 0$ характеризуется параметрами ε_2, μ_2, γ. Падает волна под углами θ и φ, где θ — угол между волновым вектором $\vec{k}$ и осью z, а φ — угол между проекцией $\vec{k}$ на плоскость $z = 0$ и осью x. Величины, относящиеся к отраженной волне, мы будем характеризовать индексом 1 снизу, а преломленную волну будем характеризовать индексом 2.

а. Фазовые соотношения. Обозначим $n_1^2 = \varepsilon_1 \mu_1$; $n_2^{\pm 2} = \mu_2 (\varepsilon_2 \pm \gamma)$. Из условий сопряжения полей на границе раздела имеем

$$k_x = k_{1x} = k_{2x}^{+} = k_{2x}^{-},$$

$$k_y = k_{1y} = k_{2y}^{+} = k_{2y}^{-},$$

причем

$$k_x = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta \cos\varphi,$$

$$k_y = \frac{\omega}{c} n_1 \sin\theta \sin\varphi, \tag{5}$$

$$k_{2x} = \frac{\omega}{c} n_2^- \sin\theta_2 \cos\varphi_2^- \text{ и т. д.}$$

и

$$k_{1z} = -k_z = -\frac{\omega}{c} n_1 \cos\theta,$$

$$k_{2z}^- = \frac{\omega}{c} n_2^- \cos\theta_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^{-2} - n_1^2 \sin^2\theta}.$$

Из соотношений (5) следует, что

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2^-, \qquad \theta_1 = \theta, \qquad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta} = \frac{n_1}{n_2^-}. \tag{6}$$

6. Формулы Френеля для амплитуд полей.

Из граничных условий для электрических и магнитных векторов мы получим следующие уравнения для определения амплитуд полей

$$2k_z E_z(\vec{k}) = \left(k_{2z}^+ + \frac{\varepsilon_2 + \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right) E_{2z}^+(\vec{k}) + \left(k_{2z}^- + \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right) E_{2z}^-(\vec{k}),$$

$$2ik_z H_z(\vec{k})\mu_2 = n_2^- \left(k_{2z}^+ + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right) E_{2z}^+(\vec{k}) - n_2^- \left(k_{2z}^- + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right) E_{2z}^-(\vec{k}). \tag{7}$$

Обозначим

$$A = n_2^- \left(k_{2z}^+ + \frac{\varepsilon_2 + \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right)\left(k_{2z}^- + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right) + n_2^+ \left(k_{2z}^- + \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right) \times$$
$$\times \left(k_{2z} + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right).$$

Для амплитуд полей отраженной и преломленной волн получим

$$E_{1z}(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon_1 A} \{B E_z(\vec{k}) + 2ik_z [(\varepsilon_2 + \gamma) k_{2z}^- - (\varepsilon_2 - \gamma) k_{2z}^+] H_z(\vec{k})\},$$

$$E_{2z}^+ = \frac{2k_z}{A}\left\{n_2^- \left(k_{2z}^- + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right) E_z(\vec{k}) + i\mu_2 \left(k_{2z}^- + \frac{\varepsilon_2 - \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right) H_z(\vec{k})\right\}, \tag{8}$$

где

$$B = n_2^- \left(k_{2z}^- + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right)[(\varepsilon_2 + \gamma) k_z - \varepsilon_1 k_{2z}^+] +$$
$$+ n_2^+ \left(k_{2z}^+ + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right)[(\varepsilon_2 - \gamma) k_z - \varepsilon_1 k_{2z}^-].$$

$E_{2z}^-(\vec{k})$ получается из $E_{2z}^+(\vec{k})$ взаимной заменой индексов плюс и минус и изменением знака перед i и γ.

Отраженная волна имеет эллиптическую поляризацию. Лишь при углах падения, удовлетворяющих равенству

$$\sin^2\theta = \frac{\mu_2(\varepsilon_2 + \gamma)(\varepsilon_2 - \gamma)}{\varepsilon_1\mu_1\varepsilon_2}, \tag{9}$$

отраженная волна сохраняет плоскую поляризацию.

Если падающая волна поляризована в плоскости падения (электрический вектор лежит в плоскости xz), то отраженная и преломленные волны будут опять иметь эллиптическую поляризацию. Пусть падение происходит под углом $\varphi = 0$. Тогда

$$E_{2z}^{\pm}(\vec{k}) = 2k_z k_z^{\mp} \frac{1}{A}\left(k_{2z}^{\mp} + \frac{\mu_2}{\mu_1} k_z\right) E_z(\vec{k}),$$

$$E_{2y}^{\pm}(\vec{k}) = \mp i \frac{n_2^{\mp}}{n_1 \sin\theta} E_{2z}^{\pm}(\vec{k}), \tag{10}$$

$$E_{1y}(\vec{k}) = E_{2y}^{+}(\vec{k}) + E_{2y}^{-}(\vec{k}).$$

Если же падающая волна перпендикулярна плоскости падения (например, $E = E_y$), то имеют место следующие формулы

$$E_{2z}^{\pm}(\vec{k}) = 2i \frac{1}{A} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_z}{k_x} (k_x^2 + k_y^2)\left(k_{2z}^{\mp} + \frac{\varepsilon_2 \mp \gamma}{\varepsilon_1} k_z\right) E_y(\vec{k}),$$

$$E_{1z}(\vec{k}) = 2i \frac{1}{A} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{k_z}{k_x} (k_x^2 + k_y^2) \{(\varepsilon_2 + \gamma) k_{2z}^{-} - (\varepsilon_2 - \gamma) k_{2z}^{+}\} E_y(\vec{k}). \tag{11}$$

в. Рассмотрим теперь случай нормального падения электромагнитной волны на границу раздела сред. В этом случае

$$k_x = k_y = 0, \quad E_z = 0,$$

$$k_z = k = \frac{\omega}{c} n_1, \tag{12}$$

$$k_{2z}^{\mp} = k_2^{\pm} = \frac{\omega}{c} n_2^{\pm}.$$

Для преломленных волн имеем следующие соотношения

$$E_{2y}^{\pm}(\vec{k}) = \pm i E_{2x}^{\pm}(\vec{k}),$$

т. е. волны поляризованы по кругу.

Для амплитуд полей получим следующие выражения

$$E_{2x}^{+}(\vec{k}) = \frac{\mu_2}{\mu_1} k \frac{E_x(\vec{k}) - iE_y(\vec{k})}{\frac{\mu_2}{\mu_1} k + k_2^{+}},$$

$$E_{2x}^{-}(\vec{k}) = \frac{\mu_2}{\mu_1} k \frac{E_x(\vec{k}) + iE_y(\vec{k})}{\frac{\mu_2}{\mu_1} k + k_2^{-}}.$$

$$E_{1x}(\vec{k})=\frac{\left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k\right)^2-k_2^- k_2^-\right]E_x(\vec{k})+i\frac{\mu_2}{\mu_1}k\left(k_2^+-k_2^-\right)E_y(\vec{k})}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k+k_2^+\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k+k_2^-\right)},$$

$$E_{1y}(\vec{k})=\frac{\left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k\right)^2-k_2^+ k_2^-\right]E_y(\vec{k})-i\frac{\mu_2}{\mu_1}k\left(k_2^+-k_2^-\right)E_x(\vec{k})}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k+k_2^+\right)\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k+k_2^-\right)}, \qquad (13)$$

т. е. отраженная волна поляризована по эллипсу.

III. Рассмотрим теперь случай, когда волна падает из оптически активной среды на границу с неактивной средой. Мы рассмотрим случай, когда падающая волна является правополяризованной (если падает волна, поляризованная влево, то в результатах надо произвести взаимную замену индексов плюс и минус и изменить знак перед i и γ).

а. Фазовые соотношения.

Волновые вектора и их компоненты удовлетворяют следующим соотношениям

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}n_1^{+2},$$

$$k_z=\frac{\omega}{c}n_1^+\cos\theta=-k_{1z}^+=-\frac{\omega}{c}n_1^+\cos\theta_1^+,$$

$$k_{1z}^-=-\frac{\omega}{c}n_1^-\cos\theta_1^-, \qquad (14)$$

$$n_1^{\pm 2}=\mu_1(\varepsilon_1\pm\gamma),$$

$$k_{2z}^2=\frac{\omega}{c}\sqrt{n_2^2-n_1^{+2}\sin^2\theta}=\frac{\omega}{c}n_2\cos\theta_2.$$

Из (14) для углов отражения и преломления получим следующие соотношения

$$\sin\theta_2^+=\frac{n_1^+}{n_2}\sin\theta, \qquad \theta_1^+=\theta, \qquad \frac{\sin\theta_1^-}{\sin\theta}=\frac{n_1^+}{n_1^-}. \qquad (15)$$

Из формул (15) видно, что при отражении электромагнитная волна может расщепиться на две, распространяющиеся под разными углами.

б. Соотношения между амплитудами.

Для амплитуд полей из граничных условий получаются следующие выражения

$$E_{1z}^+(\vec{k})=\frac{B}{D}E_z^+(\vec{k}),$$

$$E_{1z}^-(\vec{k})=\frac{2k^+k_z^+k_{2z}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-\frac{\varepsilon_1+\gamma}{\varepsilon_2}\right)}{D}E_z^+(\vec{k}), \qquad (16)$$

$$E_{2z}(\vec{k}) = 2\frac{k_z}{\varepsilon_2 D}\{k^+(\varepsilon_1-\gamma)+k^-(\varepsilon_1+\gamma)\}\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{2z}-k_z^-\right)E_z^+(\vec{k}),$$

где

$$B = n_1^-\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{2z}+k_z^-\right)\left(k_z^- - \frac{\varepsilon_1+\gamma}{\varepsilon_2}k_{2z}\right) - n_1^+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{2z}-k_z^+\right)\times$$

$$\times\left(k_z^- + \frac{\varepsilon_1-\gamma}{\varepsilon_2}k_{2z}\right),$$

$$D = n_1^+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{2z}+k_z^+\right)\left(k_z^- + \frac{\varepsilon_1-\gamma}{\varepsilon_2}k_{2z}\right) + n_1^-\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}k_{2z}+k_z^-\right)\times$$

$$\times\left(k_z^+ + \frac{\varepsilon_1+\gamma}{\varepsilon_2}k_{2z}\right),$$

$E_z^{+}(\vec{k})$ — амплитуда падающей волны.

Из формул (15) и (16) видно, что отраженная волна состоит из двух волн, распространяющихся с различной скоростью и под разными углами. Волна с амплитудой $E_{1z}^+(\vec{k})$ распространяется под углом θ_1^+ со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\mu_1(\varepsilon_1+\gamma)}}$, а волна с амплитудой $E_{1z}^-(\vec{k})$ распространяется со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\mu_1(\varepsilon_1-\gamma)}}$ под углом θ_1^-. Преломленная волна поляризована по эллипсу и распространяется под углом θ_2 со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}$.

В работе [2] рассматривалось отражение электромагнитной волны, падающей из намагниченного феррита на идеально проводящую плоскость. Так же, как и в нашем случае, волна, отраженная от границы, расщепляется на две, причем левополяризованной волне в нашем случае в [2] соответствует необыкновенная волна.

Отметим следующую особенность при отражении электромагнитной волны при падении из активной среды на изотропную (идеальный проводник можно отнести к изотропным средам). По мере приближения угла падения к нормальному, амплитуда обыкновенной отраженной волны стремится к нулю, в то время как амплитуда необыкновенной волны растет.

При нормальном падении, как мы увидим ниже, отраженная волна целиком переходит в необыкновенную.

Аналогичное явление должно иметь место и в случае падения электромагнитной волны из намагниченного феррита на идеальный проводник. Однако, формулы в предельном случае идеального проводника ($\varepsilon = \infty$) не совпадают, т. к. в нашем случае мы имеем изотропную гиротропную среду, тогда как в [2] рассматривается феррит, намагниченный в определенном направлении.

в. Нормальное падение.

Пусть падает волна $\vec{E}^+ (E_x^+, E_y^+)$, причем

$$E_y^+ (\vec{k}) = iE_x^+ (\vec{k}).$$

Отраженная волна имеет вид $\vec{E}_1 = E_1^+ + E_1^-$, причем $E_{1y}^{\mp} (\vec{k}) = \mp iE_{1x}^{\mp} (\vec{k})$. Используя граничные условия, получим

$$E_{1x}^+ (\vec{k}) = 0,$$

$$E_{1x}^- (\vec{k}) = - \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} k_2 - k^+}{\frac{\mu_1}{\mu_2} k_2 + k^+} E_x^+ (\vec{k}),$$

$$E_{2x} (\vec{k}) = 2 \frac{k^+}{\frac{\mu_1}{\mu_2} k_2 + k^+} E_x^+ (\vec{k}), \tag{17}$$

$$E_{2y} (\vec{k}) = iE_{2x} (\vec{k}).$$

Как видим, при отражении правополяризованная по кругу волна переходит в левополяризованную и распространяется уже со скоростью $\frac{c}{\sqrt{\mu_1 (\varepsilon_1 - \gamma)}}$, а прошедшая волна поляризована по кругу вправо.

В заключение приношу благодарность Б. М. Болотовскому за весьма ценные советы и обсуждения в ходе решения задачи.

ЦНИ Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР
Физический институт АН СССР
им. Лебедева

Поступила 26 V 1962

Օ. Ս. Մերգելյան

ԷԼԵԿՏՐԱՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՈՒՄՆ ՈՒ ԲԵԿՈՒՄԸ ԻԶՈՏՐՈՊ ԵՎ ՕՊՏԻԿՈՐԵՆ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՍԱՀՄԱՆԻՑ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված են էլեկտրամագնիսական երևույթները իզոտրոպ և օպտիկորեն ակտիվ միջավայրերը բաժանող սահմանի վրա։ Ստացված են Ֆրենելի բանաձևերը անդրադարձված և բեկված ալիքների համար։ Հետազոտված է ալիքների բևեռացումը։ Ցույց է տրված, որ երբ որոշակի բևեռացում ունեցող ալիքը օպտիկորեն ակտիվ միջավայրից անցնում է իզոտրոպ միջավայրը, ապա նա բաժանվում է երկու ալիքների, որոնք տարածվում են տարբեր արագությամբ, իսկ ալիքի անցման դեպքում բևեռացման վեկտորի պտտման ուղղությունը փոփոխվում է։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.
2. *Микаелян А. Л., Пистелькорс А. А.* Радиотехника, **10**, № 3, 1955.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. С. Саакян, Ю. Л. Вартанян

О решениях уравнений Эйнштейна для аксиально-симметрических полей

§ 1. О решении Вейля

Первые попытки решения уравнений Эйнштейна для аксиально-симметрических гравитационных полей были сделаны Вейлем [1] и Леви-Чивита [2]. В [1] было предположено, что поле статическое (т. е. тело, создающее поле, неподвижно) и соответственно с этим четырехмерный интервал записывался в виде

$$-ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + dl^2, \tag{1.1}$$

где dl — истинное расстояние (ниже мы везде придерживаемся обозначений книги [3]). Каноническим преобразованием координат квадратичную форму (1.1) можно привести к диагональному виду

$$ds^2 = fdt^2 - h(dr^2 + dz^2) - \frac{r^2}{f}d\varphi^2, \tag{1.2}$$

где f и h — являются функциями лишь координат r и z (r, z, φ — цилиндрические координаты). Для тензора энергии и импульса в [1] было использовано выражение

$$T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k, \tag{1.3}$$

где μ_0 — плотность массы в собственной системе, $u^i = dx^i/ds$. Затем уравнения поля были проинтегрированы в предположении, что $u^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Для этого случая имеем

$$T^{\alpha\beta} = T^{0\alpha} = 0; \qquad T^{00} = \frac{\mu^0 c^2}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{1.4}$$

Уравнения поля в [1] были получены вариационным принципом для специального вида квадратичной формы (1.2). При этом не учитывалось, что $\delta g_{rr} \neq \delta g_{zz}$ и $\delta g_{ik} \neq 0$ (когда $i \neq k$), в результате чего были пропущены некоторые из уравнений поля. Впервые на это обратил внимание Леви-Чивита [2]. В работе [4] непосредственным вычислением было показано, что если работать с исправленной системой дифференциальных уравнений, то оказывается, что не существует решений с отличным от нуля распределением материи. Могло показаться, что такой результат (отсутствие решения с $\mu_0 \neq 0$) связан с частным видом четырехмерного интервала (1.2). Однако, в последнем пункте статьи [4] показывается, что если снова принять за основу тензор энергии-импульса (1.4), то такой же вывод получается и в случае статического поля с произвольной квадратичной формой

$$ds^2 = Xdx^2 + Ydy^2 + Zdz^2 + fdu^2. \tag{1.5}$$

В работе [4] не были выявлены физические, а также математические причины такого парадоксального результата. Нам кажется, что формально как для (1.4), так и для более частного случая (1.2) должны существовать решения с отличным от нуля распределением материи.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим уравнение

$$T^{i}_{k;i} = 0. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4) в (1.6), получаем

$$\mu_0 g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^a} = 0. \tag{1.7}$$

Отсюда, как правильно было показано в [4], следует, что не существуют решения с $\mu_0 \neq 0$.

Однако, если пользоваться более корректным выражением тензора энергии и импульса

$$T^{ik} = (p + \varepsilon)\, u^i u^k + pg^{ik}, \tag{1.8}$$

то вместо (1.7) мы получим

$$\frac{\partial p}{\partial x^a} + \frac{1}{2}(p + \varepsilon)\, g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^a} = 0. \tag{1.9}$$

Сравнивая (1.9) с (1.7), замечаем, что в (1.7) опущено не только давление, но и градиент давления. Именно это обстоятельство и предрешает отсутствие решения с отличным от нуля распределением материи. Действительно, под воздействием одного лишь гравитационного притяжения (без учета поля градиента давления) не могут существовать равновесные конфигурации небесных тел с $\mu_0 \neq 0$.

§ 2. О метрике аксиально-симметрических гравитационных полей

Рассмотрим вопрос о виде четырехмерного интервала в случае аксиально-симметрических полей. Формула (1.2) справедлива лишь в том случае, когда аксиально-симметрическое гравитационное поле является статическим, т. е. когда g_{ik} зависят только от r и z.

Однако, нетрудно убедиться из физических соображений, что в природе не могут существовать такие поля. Действительно, чтобы невращающееся тело имело аксиально-симметрическое распределение материи, мы должны допустить наличие в нем особого поля натяжений, т. е. допустить, что в таких телах нарушается закон Паскаля.

Но поскольку нет основания допустить нарушение закона Паскаля, то очевидно, что неподвижное гравитирующее тело и созданное им поле в состоянии равновесия должны обладать сферической симметрией.

Итак, статические поля не могут быть аксиально-симметрическими. Таковым будет поле равномерно-вращающегося тела. В этом случае причиной аксиально-симметрического распределения метерии является поле центробежных сил. При наличии равномерного вращения все тензора, характеризующие гравитационное поле и распределение материи, помимо координат r и z будут также зависеть от угловой скорости вращения ω

$$
\begin{aligned}
g_{ik} &= g_{ik}(r, z, \omega), \\
T^{ik} &= T^{ik}(r, z, \omega).
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

В этом случае четырехмерный интервал запишется в виде

$$-ds^2 = g_{00}dx^{02} + g_{11}(dr^2 + dz^2) + g_{22}d\varphi^2 + 2g_{02}dx^0 d\varphi. \tag{2.2}$$

Таким образом, четырехмерный интервал для аксиально-симметрического распределения материи не может быть диагональным.

§ 3. О тензоре энергии и импульса

В этом параграфе мы приведем вывод формулы тензора энергии и импульса для вещества, исходя из вариационного принципа. Эта задача фактически решена в [3, 5]. Однако, здесь мы приведем наглядный вывод, который, возможно, будет полезен с методологической точки зрения.

Как известно, варьированием действия

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega, \tag{3.1}$$

для тензора энергии и импульса получается общая формула [3]

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{-\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial g^{ik}} + \frac{\partial}{\partial x^l}\,\frac{\partial \sqrt{-g}\,\Lambda}{\partial(\partial g^{ik}/\partial x^l)}\right\}. \tag{3.2}$$

Представляет интерес построить плотность лагранжиана, из которого по общей формуле (3.2) можно было бы получить T_{ik} для вещества. Рассмотрим сперва случай, когда необходимо учесть микроструктуру системы. В этом случае при отсутствии взаимодействия между частицами для действия всей системы имеем

$$S = \sum_a (-m_a c)\int ds_a. \tag{3.3}$$

Это же выражение, очевидно, можно представить в следующем виде

$$S = \frac{1}{c}\sum_a (-m_a c)\int \sqrt{-g^{ik}(x^l)\,u_i u_k}\,\frac{ds}{dt}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_a)\, d\Omega. \tag{3.4}$$

Сравнивая (3.4) с (3.1), для плотности лагранжиана получаем

$$\Lambda(x^i)=\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_a(-m_a c)\sqrt{-g^{ik}u_i u_k}\,\frac{ds}{dt}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.2), получаем известную формулу [3]

$$T^{ik}=\sum_a\frac{m_a c}{\sqrt{-g}}\,u^i u^k\frac{ds}{dt}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_a). \tag{3.6}$$

Теперь рассмотрим сплошную среду и построим для нее плотность лагранжиана Λ. Для сплошной среды характерными скалярами являются плотность энергии ε и собственное давление p. Поэтому наиболее общее выражение для действия запишется в виде

$$S=\frac{1}{c}\int\left[\varphi(\varepsilon,\,p)\,g^{ik}u_i u_k+\psi(\varepsilon,\,p)\,g^{ik}g_{ik}\right]\sqrt{-g}\,d\Omega, \tag{3.7}$$

где $\varphi(\varepsilon,\,p)$ и $\psi(\varepsilon,\,p)$ — скалярные функции, подлежащие определению.

Итак, для плотности лагранжиана в этом случае имеем

$$\Lambda=\varphi(\varepsilon,\,p)\,g^{ik}u_i u_k+\psi(\varepsilon,\,p)\,g^{ik}g_{ik}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.2), для T_{ik} получаем

$$T_{ik}=(2\psi-\varphi)\,g_{ik}-2\varphi u_i u_k. \tag{3.9}$$

Для определения вида функций φ и ψ перейдем в сопутствующую систему координат. В этой системе имеем

$$\begin{aligned}&T_{\alpha\beta}=p\delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha,\,\beta=1,\,2,\,3),\\&T_{00}=\varepsilon,\end{aligned} \tag{3.10}$$

где первое соотношение следует из закона Паскаля. С другой стороны, в той же системе отсчета из (3.9) для $T_{\alpha\beta}$ и T_{00} имеем

$$\begin{aligned}&T_{11}=T_{22}=T_{33}=(2\psi-\varphi),\\&T_{00}=-(\varphi+2\psi).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.10) и (3.11), получаем

$$\varphi=-\frac{1}{2}(p+\varepsilon), \qquad \psi=-\frac{1}{4}(\varepsilon-p). \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.9), получаем известную формулу тензора энергии и импульса для сплошной среды

$$T_{ik}=(\varepsilon+p)\,u_i u_k+p g_{ik}. \tag{3.13}$$

В заключение выражаем благодарность профессору В. Л. Гинзбургу за ценные замечания.

Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР,
Ереванский государственный
университет

Поступила 30 V 1962

Ս. Գ. Սահակյան, Յու. Լ. Վարդանյան

ԷՅՆՇՏԵՅՆԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄԸ ԱՌԱՆՑՔԱ-ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԱՇՏԻ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում քննարկված են Վեյլի և Օլեյնիչենկոյի աշխատությունները [1, 4]: Ցույց է տրված, որ հիշատակված աշխատություններում էներգիայի և իմպուլսի T_{ik}-ի թենզորի համար օգտագործված է ոչ ճիշտ արտահայտություն, որից հետևում է, որ ճնշման գրադիենտը հավասար է զրոյի: Այս պատճառով [4] աշխատության մեջ ստացված է սխալ արդյունք:

Հոդվածի վերջին պարագրաֆում տրված է T_{ik} թենզորի մի նոր արտածում:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Weyl H.* Ann. d. Phys., **54**, 117, 1917.
2. *Levi Civita.* R. Acc. Lincei, 5, **28**, 101, 1919.
3. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. Физматгиз, М., 1960.
4. *Olijnychenko P.* On Static Solutions in General Relativity. Nuovo Cim., **21**, 389, 1961.
5. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. Физматгиз, М., 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 6, 1962 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Ю. Л. Вартанян, Г. С. Саакян

О коллапсе гравитирующих масс

Звездные конфигурации равновесия теоретически могут иметь любые массы, если, конечно, температура в центре имеет достаточно высокое значение. Мы имеем в виду конфигурации, находящиеся в состоянии механического равновесия. Что касается термодинамического равновесия, то оно у таких конфигураций носит локальный характер. С понижением центральной температуры масса, а также радиус звезды уменьшаются. При достаточно низких температурах образуются конфигурации белых карликов, а при еще меньших температурах — конфигурации вырожденного барионного газа, если, конечно, при этом плотность вещества в центре звезды достаточно велика.

Конфигурации вырожденных газовых масс, находящиеся в состоянии механического, а также термодинамического равновесия, были исследованы в работах [1—5]. Было показано, что радиус таких звезд порядка 10 *км*, а массы порядка массы Солнца. Важно отметить, что как по теории тяготения Ньютона, так и по теории Эйнштейна не существуют равновесные барионные вырожденные конфигурации, масса которых заметно превышала бы массу Солнца. Представляет большой интерес выяснить, что произойдет с теми вырожденными звездами, масса которых превышает массу Солнца. Этот вопрос был рассмотрен Оппенгеймером и Снайдером [6]. Путем решения уравнений Эйнштейна ими было показано, что большие звездные массы подвергаются коллапсу. Однако, в их работе была допущена ошибка, на которой мы хотим остановиться. Именно, задача решалась в предположении, что давление равно нулю. Покажем, что в этом приближении из уравнений поля, использованных в обсуждаемой работе, следует равенство нулю и градиента давления, что является недопустимым.

Уравнения Эйнштейна указанными авторами [6] были выписаны в сопутствующей системе координат в предположении, что четырехмерный интервал записывался в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\bar{\omega}} dR^2 - e^{\omega} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \tag{1}$$

где $\bar{\omega}$ и ω — функции от R и τ.

Если в уравнениях (15)—(18) работы [6] не принимать $P=0$, где P — давление, то путем простых математических операций можно показать, что из них следует

$$P' - \omega' P = 0, \tag{2}$$

где штрих означает дифференцирование по R.

Этот результат получается также из соотношения

$$T^{i}_{k,\,i} = 0, \tag{3}$$

если учесть (1).

Из (2) видно, что приравнивание нулю давления одновременно означает приравнивание нулю и градиента давления. Такой результат обусловлен сделанным неправильным предположением о виде ds^2. Действительно, если четырехмерный интервал записан правильно, то из уравнения Эйнштейна при условии $P=0$ ни в коем случае не должно следовать $\operatorname{grad} P = 0$. Физически это означает, что из пренебрежимости давления еще не следует возможность пренебрежения градиентом давления.

При корректном рассмотрении задачи следует исходить из квадратичной формы [7]

$$ds^2 = c^2 e^{\sigma} d\tau^2 - e^{\mu}\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) - e^{\omega} dR^2, \tag{4}$$

где σ, μ и ω — функции от R и τ.

Для метрики (4) получаются четыре уравнения поля, которые составляют полную систему для определения четырех неизвестных функций σ, μ, ω и ρ (ρ — плотность энергии).

$$\frac{1}{2} e^{-\omega}\left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\sigma'\right) - e^{-\sigma}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\sigma} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu} = \frac{8\pi k}{c^4} P,$$

$$\frac{1}{4} e^{-\omega}\left(2\sigma'' + \sigma'^2 + 2\mu'' + \mu'^2 - \mu'\omega' - \sigma'\omega' + \mu'\sigma'\right) +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-\sigma}\left(\dot{\omega}\dot{\sigma} + \dot{\mu}\dot{\sigma} - \dot{\omega}\dot{\mu} - 2\ddot{\omega} - \dot{\omega}^2 - 2\ddot{\mu} - \dot{\mu}^2\right) = \frac{8\pi k}{c^4} P, \tag{5}$$

$$e^{-\omega}\left(\mu'' + \frac{3}{4}\mu'^2 - \frac{\mu'\omega'}{2}\right) - \frac{1}{2} e^{-\sigma}\left(\dot{\omega}\dot{\mu} + \frac{\dot{\mu}^2}{2}\right) - e^{-\mu} = -\frac{8\pi k}{c^4}\rho,$$

$$\frac{1}{2} e^{-\omega}\left(-2\dot{\mu}' - \dot{\mu}\mu' + \dot{\omega}\mu' + \sigma'\dot{\mu}\right) = 0,$$

где точка означает дифференцирование по τ.

Два из этих уравнений можно заменить им эквивалентными, но более простыми соотношениями

$$\dot{\omega} + 2\dot{\mu} = -\frac{2\dot{\rho}}{P+\rho}, \qquad \sigma' = -\frac{2P'}{P+\rho}, \tag{6}$$

которые получаются из (3).

Полученную систему уравнений необходимо дополнить уравнением состояния $P = P(\rho)$.

Уравнения Эйнштейна с метрикой (4) пока никем не решены. Следовательно, вопрос о том, как будут вести себя большие массы, будут ли они подвергаться коллапсу или нет, остается совершенно открытым.

В заключение авторы выражают благодарность академику В. А. Амбарцумяну за обсуждение и замечания.

Ереванский государственный университет
Физико-техническая лаборатория
АН Армянской ССР

Поступила 21 VII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. *Oppenheimer J. R.* and *Volkoff G. M.* On Massive Neutron Cores. Phys. Rev., **55**, 374, 1939.
2. *Амбарцумян В. А.* и *Саакян Г. С.* О равновесных конфигурациях сверхплотных вырожденных газовых масс. Астрон. ж., **38**, 785, 1960.
3. *Амбарцумян В. А.* и *Саакян Г. С.* Внутреннее строение гиперонных конфигураций звездных масс. Астрон. ж., **38**, 1016 1961.
4. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. ГИТТЛ, М., 1951.
5. *Саакян Г. С.* Ньютоновская теория сверхплотных конфигураций. Астрон. ж., в печати.
6. *Oppenheimer J. R.* and *Volkoff G. M.* On Continued Gravitational Contraction. Phys. Rev., **56**, 455, 1939.
7. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Теория поля, III изд. Физматгиз, М., 1960.