

Г. В. Бадалян

О представлении функций неквазианалитических классов

Рассматривается класс функций

$$AC_{\gamma, \lambda}(0, u], \quad u > 0, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

(см. [1]), где

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots, \quad (2)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} < \infty \quad (2')$$

и ставится задача о представлении функций класса (1).

Составим квазистепенной ряд функции $\varphi(t)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right), \quad (3)$$

где $t \in (0, u]$,

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = \frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1} \varphi_k(u)}{\prod_{v=1}^k \gamma_v}, \quad (k=1, 2, \dots), \quad (4)$$

$\{\varphi_k(u)\}$ — последовательность обобщенных производных функции $\varphi(t)$ при последовательности $\{\gamma_v\}$,

$$\omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{u} \right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)}, \quad \alpha > 0, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

Из результатов работы [2] следует, что ряд (3) при условиях (2) и (2'), вообще говоря, или не сходится в $(0, u]$, или, если сходится, то не к функции $\varphi(t)$.

Обозначим

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n_m} a_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \tau \right) = S_{n_m}(\varphi, t) \right\}, \quad (6)$$

где n_m — подпоследовательность натурального ряда чисел.

Определение 1. Условимся функцию $\psi(t)$ называть правильной частью функции $\varphi(t)$, если существует подпоследовательность натурального ряда чисел

$$\{n_m\}, \quad (m=1, 2, \dots),$$

по которой последовательность (6) сходится в $(0, u]$ к функции $\psi(t)$.

Теорема 1. Всякая функция

$$\varphi(t) \in AC_{1, \tau}(0, u], \quad 0 < u, \quad 0 < \tau,$$

где последовательность чисел $\{\tau_m\}$ удовлетворяет условиям (2) и (2'), в $(0, u]$ имеет правильную часть $\psi(t)$, также принадлежащую классу

$$AC_{1, \tau}(0, u],$$

притом

$$\psi^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(u)$$

и имеет место представление

$$\varphi(t) = \psi(t) + \frac{1}{x_1 t^{x_1}} \int_t^u G\left(\frac{t}{t_0}, \tau, x_1\right) dx(t_0), \quad (7)$$

где

$$G\left(\frac{t}{t_0}, \tau, x_1\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-z}}{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\tau_n + x_1}\right)} dz, \quad \alpha > 0, \quad x_1 > \alpha > 0, \quad (8)$$

α и $\alpha(t)$ — некоторая конструктивно полученная функция с ограниченной вариацией на $[0, u]$.

Доказательство. Записав для функции $\varphi(t)$ обобщенную формулу Тейлора в окрестности точки $t = u$ при последовательности чисел $\{\tau_m\}$, будем иметь

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \tau \right) + R_n(u, t), \quad (9)$$

a_k и $\omega_k \left(\frac{t}{u}, \tau \right)$ определены в (3) и (4),

$$R_n(u, t) = \int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0) t_0^{\tau_n - 1} \omega_{n-1} \left(\frac{t}{t_0}, \tau \right) dt_0, \quad (10)$$

а $\{\varphi_n(t)\}$ — последовательность обобщенных производных функции $\varphi(t)$ при последовательности чисел $\{\gamma_n\}$.

Остаточный член (10) разложения (9) может быть записан в виде

$$R_n(u, t) = \int_t^u \prod_{v=1}^{n-1} (\gamma_v + z_1) \omega_{n-1} \left(\frac{t}{t_0}, \gamma \right) t_0^{-z_1} dz_n(t_0), \quad (10')$$

где

$$z_n(t_0) = z_n(t_0, z_1) = \frac{1}{\prod_{v=1}^{n-1} (\gamma_v + z_1)} \int_{t_0}^{t_n} (-1)^n \varphi_n(\tau) \tau^{i_{n-1} + z_1} d\tau, \quad (11)$$

$$z_1 > z \geq 0,$$

или в виде

$$R_n(u, t) = \int_t^u \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (\gamma_v + z_1)}{t_0^{-z_1} \gamma^{n-1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_v)} dz_n(t_0). \quad (10'')$$

После замены переменных $\zeta = \zeta' + z_1$ получаем

$$R_n(u, t) = \frac{1}{z_1 t^{z_1}} \int_t^u \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (\gamma_v + z_1)}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^{n-1} (\zeta + \gamma_v + z_1)} dz_n(t_0),$$

где $z > -z_1$, $z_n(t_0) = z_n(t_0, z_1)$.

Далее получаем

$$R_n(u, t) = \frac{1}{z_1 t^{z_1}} \int_t^u \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_v + z_1}\right)} dz_n(t_0). \quad (10''')$$

Заметим теперь, что в силу (2) и (2'), а также условия $z_1 > z \geq 0$ заключаем, что при $0 < t \leq t_0$ существует

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_n \left(\frac{t}{t_0}, \gamma \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod_{v=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_v + z_1}\right)} = G \left(\frac{t}{t_0} \right) = \\ &= G \left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1 \right). \end{aligned} \quad (8')$$

С другой стороны, из условия

$$\varphi(t) \in AC_{\tau, \gamma}(0, u]$$

следует, что функции $\{z_n(t_0)\}$ составляют последовательность функций с ограниченной вариацией на $[0, u]$, притом к последовательности

$$\left\{ z_n(t_0) = \int_0^t \frac{(-1)^n \varphi_n(z) \tau^{\gamma_{n-1} + \gamma_1}}{\prod_{s=1}^{n-1} (\gamma_s + x_1)} dz \right\}$$

применима теорема Хелли.

Это значит, что существует подпоследовательность целых чисел

$$\{n_k\}, \quad (k=1, 2, \dots),$$

по которой

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} z_{n_k}(t_0) = z(t_0) = z(t_0, x_1),$$

где $z(t_0)$ на $[0, u]$ имеет ограниченную вариацию.

Согласно вышеприведенному замечанию мы можем в $(10''')$ перейти к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, пробегая последовательность чисел

$$\{n_k\}, \quad (k=1, 2, \dots).$$

Будем иметь

$$R_\infty(u, t) = \frac{1}{x_1 t^{\gamma_1}} \int_0^t G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, x_1\right) dz(t_0), \quad (10^{IV})$$

Возвращаясь к (9), замечаем, что там также (в правой части равенства) можем перейти к пределу, когда $n \rightarrow \infty$, пробегает последовательность чисел $\{n_k\}$.

Если обозначить

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{n_k} a_m w_m \left(\frac{t}{u}, \gamma \right) = \phi(t),$$

где последовательность $\{n_k\}$ определена выше, будем иметь

$$\varphi(t) = \phi(t) + \frac{1}{x_1 t^{\gamma_1}} \int_0^t G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, x_1\right) dz(t_0).$$

Очевидно, что $\phi(t)$ в $(0, u]$ является правильной частью $\varphi(t)$. Остается доказать, что

$$\phi(t) \in AC_{\tau, \gamma}(0, u]$$

и, кроме того, что

$$\phi^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(u), \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Для доказательства последних утверждений нам следует доказать, что функция

$$\Phi(t) = \frac{1}{z_1 t^{z_1}} \int_t^u G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right) dz(t_0) \quad (12)$$

принадлежит классу

$$AC_{\gamma, z}(0, u]$$

и что все ее последовательные производные в точке $t = u$ равны нулю.

Но такое утверждение для функции вида (12), с той лишь разницей, что $\alpha(t_0, z_1) = \alpha(t_0)$ не просто функция с ограниченной на $[0, u]$ вариацией, а монотонно возрастающая функция, доказано в теореме (2,2) работы [2].

Если проследить приведенное там доказательство, то легко заметить, что доказательство без каких-либо изменений проходит и в данном случае, т. е. тогда, когда $\alpha(t_0, z_1)$ хотя не монотонная (по t_0) на $t_0 \in [0, u]$, $u > 0$, но

$$V_0^n \alpha(t_0, z_1) = V_0^n \alpha(t_0) = C(z_1) < \infty.$$

Этим теорема 1 доказана.

Справедливо также обратное утверждение, а именно

Теорема 1'. Всякая функция $\varphi(t)$, имеющая представление

$$\varphi(t) = \phi(t) + \frac{1}{z_1 t^{z_1}} \int_t^u G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right) dz(t_0),$$

где $0 < t \leq t_0 \leq u$, $G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right)$ определена в (8), $\alpha(t)$ в $[0, 1]$ имеет ограниченную вариацию

$$\phi(t) \in AC_{\gamma, z}(0, u],$$

также принадлежит классу

$$AC_{\gamma, z}(0, u]$$

и в точке $t = u$ имеет те же производные, что и $\phi(t)$.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что функция

$$\Phi(t) = \frac{1}{z_1 t^{z_1}} \int_t^u G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right) dz(t_0)$$

принадлежит классу

$$AC_{\gamma, z}(0, u] \quad (\text{см. [2]}),$$

и все ее последовательные производные в точке $t = u$ равны нулю.

Замечание. Для всех $\theta \in [0, 1]$ и $z_1 > 0$ справедливо соотношение

$$G(\theta, \gamma, z_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(\theta, \gamma, z_1) \begin{cases} = 0, & \text{если } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty, \\ \neq 0, & \text{если } \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} < \infty. \end{cases} \quad (13)$$

$$(13')$$

Утверждение (13) следует из оценки сверху $G_n(\theta, \gamma, z_1)$. Что же касается утверждения (13'), то из существования предела $G_n(\theta, \gamma, z_1)$ и ее неотрицательности следует, что

$$G(\theta, \gamma, z_1) > 0.$$

С другой стороны, вычисление показывает, что

$$\int_0^1 \theta^{z-1} G(\theta, \gamma, z_1) d\theta = \frac{1}{\prod_{v=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\gamma_v + z_1}\right)} \neq 0 \quad (14)$$

для всех z , когда $\operatorname{Re} z > -z_1$. Этим утверждение (13') доказано.

Определение 2. Назовем

$$\sup_{\theta \in [0, 1]} G(\theta, \gamma, z_1) = D_\gamma$$

дефектом класса функций

$$AC_{\gamma, z}(0, u], \quad z_1 > z \geq 0.$$

Используя последнее определение, мы можем теорему 7 работы [1] сформулировать в терминах дефекта класса функций, а именно: справедлива

Теорема 2. Для квазианалитичности класса функций

$$AC_{\gamma, z}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы дефект класса функций равнялся нулю.

Ереванский государственный
университет

Поступила 24 X 1961

Հ. Վ. Բադալյան

ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈԶ-ԲՎԱԶԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ԴԱՍԵՐԻ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում գիտարկվում է ֆունկցիաների

$$AC_{\gamma, z}(0, u]$$

դասը ($[1]$), հրթր թվերի

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \quad (1)$$

հաջորդականությունը բավարարում է

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} < \infty \quad (2)$$

պայմանին:

Ապացուցվում է՝

Թ և ո Ր և մ ա. Յուրաքանչյուր ֆունկցիա

$$\varphi(t) \in AC_{\gamma, \alpha}(0, u], \quad 0 < u, \quad \alpha \geq 0,$$

որտեղ թվերի (1) հաջորդականությունը բավարարում է (2) պայմանին, ներկայացվում է հետևյալ տեսքով՝

$$\varphi(t) = \psi(t) + \frac{1}{z_1 t^{\alpha_1}} \int_0^u G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right) dF(t_0),$$

որտեղ

$$\psi(t) \in AC_{\gamma, \alpha}(0, u]$$

և $t = u$ կետում ունի նույն ածանցյալները, ինչ որ $\varphi(t)$ -ն, իսկ

$$G\left(\frac{t}{t_0}, \gamma, z_1\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-z}}{\prod_{v=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\gamma_v + z_1}\right)} dz,$$

$0 < t \leq t_0$, $\alpha > 0$, $z_1 > \alpha \geq 0$, իսկ $F(t)$ -ն $[0, u]$ հատվածում սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիա է. տեղի ունի նաև հակադարձ սխեմներ:

Ս ա հ մ ա ն ու մ. Պայմանավորվենք

$$\sup_{t \in (0, 1]} G(0, \gamma, z_1) = D_{\gamma}$$

անվանել ֆունկցիաների

$$AC_{\gamma, \alpha}(0, u], \quad \alpha \geq 0 \quad (z_1 > \alpha)$$

դասի գեֆեկտ:

Թ և ո Ր և մ ա. Որպեսզի ֆունկցիաների

$$AC_{\gamma, \alpha}(0, u], \quad \alpha \geq 0, \quad u > 0$$

դասը լինի քվադրանոսիտիկ դաս, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ֆունկցիաների այդ դասի գեֆեկտը հավասար լինի զերոյի:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. Критерий абсолютной сходимости квазистепенного ряда. Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук), 15, № 4, 1962.
2. Бадалян Г. В. Критерий разложимости функций в квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. Известия АН СССР (серия математическая) (в печати).

Г. Л. Луиц

О сверхсходимости некоторых рядов

Статья посвящена обобщению на ряды Тейлора-Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} \quad (1)$$

и ряды Дирихле с комплексными показателями известных теорем Островского о пропусках (см. [1], [2]).

§ 1. О сходимости ряда Тейлора-Дирихле

Ниже, в §§ 2, 3, 4 всюду предполагается, что $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$, m_n — действительные неотрицательные числа (если m_n нецелые, то ряд (1) рассматривается на логарифмической римановой поверхности или на плоскости с соответствующим разрезом) и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \quad (1.1)$$

Автором было доказано (см. [5]), что в этих предположениях ряд (1) сходится абсолютно в областях $|z| \geq 1$, $|z| < e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z| \leq 1$, $|z| < e^{\rho_2(x-k)}$ и расходится в областях $|z| \geq 1$, $|z| > e^{\rho_1(x-k)}$ и $|z| \leq 1$, $|z| > e^{\rho_2(x-k)}$, где

$$k = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n}, \quad \rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n}, \quad \rho_2 = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \frac{\lambda_n}{m_n}.$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, то ряд сходится абсолютно в полуплоскости $x > k$ и расходится в полуплоскости $x < k$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, а $k \neq \pm \infty$, то ряд сходится абсолютно в круге $|z| < 1$ и расходится вне этого круга*.

* Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = 0$, а $k = \pm \infty$, то из равенства

$$a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z} = a_n r^{m_n} \left(\frac{z}{r} \right)^{m_n} e^{-r \lambda_n \left(\frac{z}{r} \right)}$$

с помощью замены $\frac{z}{r} = \xi$ приходим к выводу, что если существует такое $r > 0$, что

Было также доказано, что если выполнено условие (1.1), то открытая область сходимости ряда совпадает с открытой областью абсолютной сходимости (то есть, что ряд расходится во всех точках, внешних по отношению к области абсолютной сходимости).

Рассмотрим теперь множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ и определим для каждого конечного $\rho \in M$ число

$$k(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0} k(\rho, z), \text{ где } k(\rho, z) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_p}|}{\lambda_{n_p}}, \text{ а } |n_p| \text{ — последовательность}$$

всех натуральных чисел, для которых $\frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} \in [\rho - z, \rho + z]$. Пред-

положив, что величина $k(\rho, z)$ ограничена сверху, докажем, что, если множество M ограничено, ряд (1) сходится абсолютно на множестве G , точки которого при любом $\rho \in M$ удовлетворяют неравенству

$$|z| < e^{z[x - k(\rho)]} \quad (1.2)$$

и расходится в точках, внешних по отношению к этому множеству (условие (1.1) предполагается выполненным). Можно при этом вместо множества M взять наименьший отрезок, на котором расположено это множество, и для точек ρ этого отрезка, не принадлежащих множеству M , считать, что $k(\rho) = -\infty$.

Действительно, предположим, что в какой-либо точке $|z| > e^{z[x - k(\rho)]}$ при некотором $\rho \in M$; тогда, в силу ограниченности величины $|x - k(\rho, z)|$ и определения $k(\rho)$, существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$|z| > e^{(p+\varepsilon)[x - k(\rho, z)]}, \quad |z| > e^{(p-\varepsilon)[x - k(\rho, z)]},$$

но отсюда следует расходимость ряда $\sum_{p=1}^{\infty} \left| a_{n_p} z^{m_{n_p}} e^{-\lambda_{n_p} z} \right|$, где $\rho - \varepsilon <$

$\frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} < \rho + \varepsilon$, так как очевидно, что

$$\rho + \varepsilon > \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}}, \quad \rho - \varepsilon < \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}}.$$

Тем более, ввиду того, что выполнено условие (1.1), расходится ряд (1).

Если же в некоторой точке $|z| < e^{z[x - k(\rho)]}$ при всех $\rho \in M$, а мно-

$$k' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln |a_n|}{r \lambda_n} + \frac{m_n \ln r}{r \lambda_n} \right) \neq \pm \infty,$$

то ряд сходится абсолютно в круге $|z| < r$ и расходится вне этого круга; если $k' = -\infty$ при любом $r > 0$, то ряд сходится абсолютно во всей плоскости, если же $k' = +\infty$ при всяком $r > 0$, то ряд расходится во всей плоскости (кроме, быть может, точки $z=0$).

жество M лежит на отрезке $[a, b]$, то, выбрав сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, разобьем отрезок $[a - \delta, b + \delta]$, где δ — какое-либо положительное число, на отрезки длины ε . На каждом из этих отрезков

$M_i = \left[p_i - \frac{\varepsilon}{2}, p_i + \frac{\varepsilon}{2} \right]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) найдется по крайней мере

одна точка $p = p_i^*$, в которой $k(p_i^*) = k\left(p_i, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. В самом деле: обо-

значим $k\left(p_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) = k(M_i)$ и разобьем отрезок M_i на два равных по

длине отрезка $M_i^{(1)}$ и $M_i^{(2)}$, тогда по крайней мере для одного из этих отрезков $k(M_i^{(q)}) = k(M_i)$ ($q = 1, 2$). Продолжая рассуждения, мы придем к заключению, что существует такая точка $p = p_i^* \in M_i$, что, каков бы ни был отрезок $I \subset M_i$, для которого эта точка — внутренняя, $k(I) = k(M_i)$; но отсюда $k(p_i^*) = k(M_i)$. Таким образом, в

данной точке z имеем $|z| < \varepsilon$ и, следовательно, если ε достаточно мало, то для всех i ($i = 1, 2, \dots, N$) ввиду ограниченности $|x - k(p, \alpha)|$, также

$$|z| < \varepsilon, \quad |z| < \varepsilon \quad (1.3)$$

Если $\{n_p^{(i)}\}$ — последовательность всех натуральных чисел, для которых $\frac{\lambda_{n_p^{(i)}}}{m_{n_p^{(i)}}} \in M_i$, то нижний предел последовательности $\left\{ \frac{\lambda_{n_p^{(i)}}}{m_{n_p^{(i)}}} \right\}$ не

меньше, чем $p_i - \frac{\varepsilon}{2}$, а верхний не больше, чем $p_i + \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, из неравенств (1.3) следует, в соответствии с доказанным в [5], абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{n_p^{(i)}} z^{m_{n_p^{(i)}}} e^{-\lambda_{n_p^{(i)}} z}$$

при любом i ($i = 1, 2, \dots, N$), а, следовательно, и абсолютная сходимость ряда (1). Нетрудно также видеть, что во всякой конечной области, принадлежащей множеству G , определенному неравенством (1.2), ряд (1) сходится равномерно.

В случае, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{m_n} = \infty$, возьмем любое $r > 0$ и положим $k_r = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_p}|}{\lambda_{n_p}}$, где последовательность $\{n_p\}$ такова, что $\frac{\lambda_{n_p}}{m_{n_p}} \geq r$. Тогда (если, конечно, $k_r \neq +\infty$) очевидно, что ряд (1) сходится абсолютно на множестве G_r , точки которого удовлетворяют неравенству

(1.2) при $\rho \leq r$ и лежат в полуплоскости $x > k_r$. Очевидно, что с ростом r множество G_r расширяется и $G = \bigcup G_r$. Таким образом, в этом случае множество, на котором ряд (1) сходится абсолютно и во внешних точках которого он расходится, состоит из точек, удовлетворяющих неравенству (1.2) при любом конечном ρ и, кроме того, неравенству $x > k_\infty$, где $k_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} k_r$.

Заметим, наконец, что, если числа $m_n = \mu_n + i\nu_n$ — комплексные

($\mu_n \geq 0$), то $|z^{m_n}| = |z|^{\mu_n} e^{-\nu_n \text{Arg } z}$ и поэтому на луче $\text{Arg } z = \varphi$ ($-\infty < \varphi < \infty$) абсолютная сходимость ряда (1) эквивалентна абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{\mu_n} e^{-\nu_n \varphi}$, где $A_n = a_n e^{-\nu_n \varphi}$. Если теперь вме-

сто характеристик $k(\rho, z)$ и $k(\rho)$ ввести соответствующие характеристики $k^{(\varphi)}(\rho, z) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{n_\rho}| - \nu_{n_\rho} \varphi}{\lambda_{n_\rho}}$ и $k^{(\varphi)}(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0} k^{(\varphi)}(\rho, z)$, где по-

следовательность $\{n_\rho\}$ та же, что и в определении $k(\rho, z)$, то можно утверждать, что ряд (1) сходится абсолютно в точках множества $A^{(\varphi)}$ луча $\text{Arg } z = \varphi$ (на логарифмической римановой поверхности), для которых при любом $\rho \in M$

$$|z| < e^{\rho |x - k^{(\varphi)}(\rho)|}, \quad (1.4)$$

и расходится в точках луча $\text{Arg } z = \varphi$, внешних по отношению к $A^{(\varphi)}$. Таким образом, в этом случае $G = \bigcup A^{(\varphi)}$, где $A^{(\varphi)}$ определяется неравенством (1.4). Если числа λ_n также комплексные, то для определения области сходимости ряда (1) можно воспользоваться методом, примененным автором к рядам Дирихле с комплексными показателями (см. [3]).

§ 2. Некоторые неравенства

Будем дальше предполагать, что множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ не содержит точки $\rho = 0$ (следовательно, так как оно замкнуто, и некоторой окрестности этой точки). Обозначим через $\Gamma(M)$ множество всех кривых $|z| = e^{\rho |x - k(\rho)|}$ для $\rho \in M$ и через Γ_ρ семейство кривых $|z| = e^{\rho(x - k)}$ при фиксированном ρ и переменном k .

Через каждую точку z_0 проходит (при фиксированном ρ) определенная кривая из Γ_ρ , соответствующая некоторому значению $k = k_\rho(z_0)$. Уравнение проходящей через точку $z_0 = x_0 + iy_0$ ($y_0 > 0$) кривой из Γ_ρ может быть записано в виде

$$|z| = |z_0| e^{\rho(x - x_0)},$$

откуда $k = k_p(z_0) = x_0 - \frac{\ln |z_0|}{\rho}$ или (для $y > 0$) $y = \sqrt{|z_0|^2 e^{2\rho(x-x_0)} - x^2}$,

откуда $y' = \frac{|z_0|^2 \rho e^{2\rho(x-x_0)} - x}{\sqrt{|z_0|^2 e^{2\rho(x-x_0)} - x^2}}$ и при $x = x_0$ имеем

$$y' = y'_0 = \frac{\rho |z_0|^2 - x_0}{y_0}. \quad (2.1)$$

Таким образом, ρ и k — непрерывные функции от $z_0 = x_0 + iy_0$ и y'_0 .

Предположим теперь, что $z_0 \neq \frac{1}{\rho}$ — граничная точка области сходимости G ряда (1), причем в этой точке существует касательная к границе с угловым коэффициентом $y'_0 \neq \infty$ и круг K с той же касательной, лежащий внутри G^* . Если обозначить через ρ_0 значение ρ , определяемое из (2.1), то можно утверждать, что, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, существует такая окрестность U_ε точки z_0 , что для всех кривых из $\Gamma(M)$, проходящих через точки этой окрестности, $|\rho - \rho_0| < \varepsilon$. В самом деле, допустив противное, мы пришли бы к выводу, что существует такое $\alpha > 0$, что в любой окрестности точки z_0 пройдет кривая из семейства $\Gamma(M)$, для которой $|\rho - \rho_0| > \alpha$. Но тогда в любой окрестности точки z_0 найдутся точки $z = x + iy$, в которых $|y' - y'_0| > \delta > 0$, где y' соответствует кривой из $\Gamma(M)$, а δ не зависит от окрестности. Но в этом случае соответствующая кривая из $\Gamma(M)$ должна пересечь границу круга K , что противоречит предположению о том, что этот круг находится внутри G .

Рассмотрим теперь семейство Γ_p . Если $|z| = e^{\rho(x-k)}$, то $k = x - \frac{1}{\rho} \ln |z|$, откуда

$$|\text{grad } k| = \sqrt{\left[1 - \frac{x}{\rho(x^2 + y^2)}\right]^2 + \frac{1}{\rho^2} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{\sqrt{\left(x - \frac{1}{\rho}\right)^2 + y^2}}{|z|}. \quad (2.2)$$

Пусть γ — кривая из Γ_p с уравнением $|z| = e^{\rho(x-k_0)}$, а $k_p(z')$ — значение параметра k для кривой, проходящей через точку z' и принадлежащей Γ_p . Величину $\Delta_p k(z'; \gamma) = k_p(z') - k_0$ будем называть ρ -расстоянием точки z' от кривой γ . Из (2.2) следует, что

$$\Delta_p k(z'; \gamma) = \int_l \lambda_p(z) ds, \quad (2.3)$$

* Легко показать, что если $z_0 = \frac{1}{\rho}$, то это требование не может быть выполнено и поэтому условие $z_0 \neq \frac{1}{\rho}$ не вносит дополнительных ограничений.

где $\lambda_p(z) = \frac{1}{|z|} \sqrt{\left(x - \frac{1}{p}\right)^2 + y^2}$, а l — дуга кривой $\arg z - py = \arg z' -$

$-py'$ (ортогональной к семейству Γ_p) между точкой z' и точкой пересечения этой кривой с γ (на этой дуге следует считать $ds < 0$, если $|z'| > e^{z(x'-k)}$ и $ds > 0$, если $|z'| < e^{z(x'-k)}$, $z' = x' + iy'$). Обозначим через L_p семейство кривых $\arg z - py = C$ при фиксированном p . Построим круг $K_r \subset K$ радиуса r , касающийся в точке z_0 границы области G и лежащий в U_+ , а также круги $K_{r-\eta}$, $K_{r+\eta}$ с теми же центрами, что круг K_r и радиусами, соответственно равными $r-\eta$ и $r+\eta$ ($0 < \eta < r$). Очевидно, что r можно взять столь малым, чтобы длина любой дуги, соединяющей точку z , лежащую в $K_{r-\eta}$, с точкой, лежащей вне U_+ , была больше, чем A_r , как бы велико ни было A . Так как, с другой стороны, $z_0 \neq \frac{1}{p}$ и, следовательно, функ-

ция $\lambda_p(z)$ в некоторой окрестности точки z_0 ограничена снизу, то на основании (2.3) можно утверждать, что, если r достаточно мало, $z \in K_{r-\eta}$ и проходящая через точку z кривая $l \in L_p$ пересекается с соответствующей кривой $\gamma \in \Gamma(M)$, $\gamma \in \Gamma_p$ вне U_+ , (см. фиг. 1), то p — расстояние точки z от γ удовлетворяет неравенству

$$\Delta_p k(z; \gamma) > Br$$

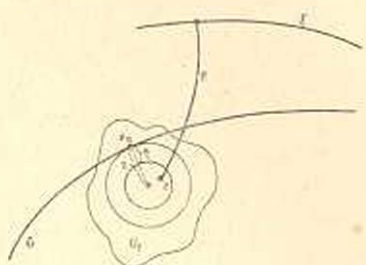
как бы велико ни было число B . Если учесть кроме того, что $\lambda_p(z)$ есть непрерывная функция от p , то из (2.3) заключаем также, что если $z \in K_{r-\eta}$ и l пересекается с γ в U_+ , то, как бы мало ни было $\mu > 0$ при достаточно малых r и ε

$$\Delta_p k(z; \gamma) > (1 - \mu) \lambda_{p_0}(z_0) \eta \quad (2.4)$$

(длина дуги l не может быть меньше η , так как в противном случае кривая γ пересекала бы окружность круга $K_{r-\eta}$, что невозможно). Итак, можно утверждать, что, как бы мало ни было $\mu > 0$, неравенство (2.4) имеет место для $z \in K_{r-\eta}$ и любой кривой $\gamma \in \Gamma(M)$, если только r достаточно мало.

Если $z \in K_{r+\eta}$ и z находится внутри области сходимости G ряда (1), то $\Delta_p k(z; \gamma) > 0$, какова бы ни была кривая $\gamma \in \Gamma(M)$. Если же $z \in K_{r+\eta}$ и z не находится внутри G , то расстояние точки z от тех кривых $\gamma \in \Gamma(M)$, для которых $\Delta_p k(z; \gamma) < 0$ не может быть больше, чем η и поэтому рассуждения, аналогичные только что приведенным, приводят к выводу, что, как бы мало ни было число $\mu > 0$, при достаточно малом r для $z \in K_{r+\eta}$ и любой кривой $\gamma \in \Gamma(M)$ имеет место неравенство

$$-\Delta_p k(z; \gamma) < (1 + \mu) \lambda_{p_0}(z_0) \eta. \quad (2.5)$$



Фиг. 1.

ПА-250

§ 3. Оценки частной суммы и остатка ряда Тейлора-Дирихле

Пусть множество M предельных точек последовательности $\left\{ \frac{\lambda_n}{m_n} \right\}$ находится на отрезке $[a, b]$ ($a > 0$). Возьмем какое-либо $\delta > 0$ так, чтобы $a - \delta > 0$ и разобьем отрезок $[a - \delta, b + \delta]$ на q равных по длине отрезков M_j , причем нумерацию установим следующей. Обозначим через M_k тот из отрезков M_j , в который попадет точка $\frac{\lambda_k}{m_k}$ (предполагается, что члены ряда (1), для которых это отношение не принадлежит отрезку $[a - \delta, b + \delta]$ отброшены); если точка $\frac{\lambda_k}{m_k}$ принадлежит одновременно двум различным отрезкам M_j , то отнесем ее, например, к правому. При такой нумерации, конечно, для бесконечного множества индексов $M_j \equiv M_k$ при $j \neq k$. Обозначив далее (см. стр. 13) $k(M_j) = k_j$, повторив рассуждения со стр. 13 и учитывая определение величин $k(p, \alpha)$ и $k(p)$, мы придем к выводу, что, как бы мало ни было $\omega > 0$, можно подобрать столь большое число N , что при $n > N$ для всех $\frac{\lambda_n}{m_n}$ из отрезка M_j будет иметь место неравенство $|a_n| < e^{(k_n + \omega)\lambda_n}$ ($k_n = k_j$ для всех этих индексов n), а так как различных отрезков M_j лишь конечное число, то существует такое число N_0 , что неравенство

$$|a_n| < e^{(k_n + \omega)\lambda_n} \quad (3.1)$$

имеет место при всех $n > N_0$.

Обозначим, наконец, через ρ_i^* то значение ρ из отрезка M_i , для которого $k(\rho_i^*) = k_i$ (если в каком-либо отрезке $k(M_i) = -\infty$, то ρ_i^* в этом отрезке можно брать произвольно); тогда, взяв достаточно большое q , будем иметь

$$\rho_i^* - \varepsilon < \frac{\lambda_i}{m_i} < \rho_i^* + \varepsilon, \quad (3.2)$$

как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, для всех i .

Рассмотрим какую-либо конечную область D , во всех точках z которой при любом $\rho \in M$ имеет место неравенство

$$|z| < e^{\rho(x - k(\rho) - \beta)},$$

где β — некоторое положительное число (область D лежит, конечно, внутри области сходимости G) и, следовательно, тем более

$$|z| < e^{\rho_i^*(x - k_i - \beta)} \quad (3.3)$$

при любом i ($i = 1, 2, \dots$). Пользуясь (3.2) и (3.3), получим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в той части области D , где $x - k_i - \beta \leq 0$

$$\left| \frac{(k_i + \varepsilon)\lambda_i}{z} \frac{m_i}{e} - \frac{\lambda_i}{z} \right| < e^{\frac{(k_i + \varepsilon)\lambda_i}{e}} \frac{m_i \rho_i^*(x - k_i - \beta) - \lambda_i}{e} <$$

$$\begin{aligned} & < e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} \frac{\lambda_i}{e} \left[\frac{\rho_i^*}{\rho_i^* + \varepsilon} (x - k_i - \beta) - x \right] = \\ & = e^{\lambda_i[k_i + \varepsilon + (1 - \varepsilon')(x - k_i - \beta) - x]} = e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}, \end{aligned}$$

как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$. Если $x - k_i - \beta > 0$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получим также

$$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} e^{\lambda_i \left[\frac{\rho_i^*}{\rho_i^* + \varepsilon} (x - k_i - \beta) - x \right]} < e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}.$$

Таким образом, при достаточно малом ε , как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$,

$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{-\lambda_i(\beta - \varepsilon_1)}$ во всех точках области D и если при этом $n + 1 \leq i$, то тем более $\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta - \varepsilon_1)}$.

С другой стороны, из (3.1) следует, что $|a_i| < e^{\left(k_i + \frac{\varepsilon}{2}\right)\lambda_i}$ при достаточно большом i и поэтому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i}$ сходится, так

как $\ln n = o(\lambda_n)$. Таким образом, $\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i} < C$, где C не зависит от n , а так как

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left[a_i e^{-(k_i + \varepsilon)\lambda_i} e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right],$$

то заключаем, что к любому положительному числу δ можно подобрать такое $N(\delta)$, что при $n > N(\delta)$ во всех точках области D имеет место неравенство

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta - \delta)}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим теперь конечную область D' , во всех точках которой

$$|z| < e^{\rho(x - k(\rho) + \beta)}$$

для всякого $\rho \in M$ ($\beta > 0$). Эта область не лежит уже внутри G . Повторяя выкладки, аналогичные только что проведенным, мы приходим к заключению, что, как бы мало ни было $\varepsilon_1 > 0$, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в области D' будет справедлива оценка

$$\left| e^{(k_i + \varepsilon)\lambda_i} z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right| < e^{\lambda_i(\beta + \varepsilon_1)},$$

а при $n \geq i$ тем более

$$\left| e^{(k_l + \varepsilon)\lambda_l} z^{m_l} e^{-\lambda_l z} \right| < e^{\lambda_n(\beta + \varepsilon_1)}.$$

Но с другой стороны, ряд $\sum_{l=1}^{\infty} |a_l| e^{-(k_l + \varepsilon)\lambda_l}$ сходится, поэтому для любого $\varepsilon_2 > 0$ при достаточно большом i_0 и любом $n > i_0$ будет иметь место неравенство $\sum_{l=i_0}^n |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}| < e^{\lambda_n(\beta + \varepsilon_2)}$. Так как, наконец, сум-

ма $\sum_{l=1}^{i_0-1} |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}|$ в области D' ограничена, то для любого $\delta > 0$ найдется такое $N(\delta)$, что при $n > N(\delta)$ во всех точках области D' будет справедлива оценка

$$\sum_{l=1}^n |a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z}| < e^{\lambda_n(\beta + \delta)}. \quad (3.5)$$

§ 4. Сверхсходимость ряда Тейлора-Дирихле

Теорема 1. Если в точке z_0 границы области сходимости G ряда (1) существует касательная к границе и круг K с той же касательной, лежащий внутри G , если функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}$$

аналитична в точке z_0 и если существует такая бесконечная последовательность индексов $\{n_\nu\}$, что $\lambda_{n_\nu+1} > (1 + \vartheta)\lambda_{n_\nu}$, где $\vartheta > 0$ (ϑ не зависит от ν), то последовательность

$$\left\{ \sum_{l=1}^{n_\nu} a_l z^{m_l} e^{-\lambda_l z} \right\}$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство. Построим окрестность U точки z_0 , в которой функция $f(z)$ аналитична. Построим, далее, лежащие в U круги $K_r, K_{r-\eta}, K_{r+\sigma}, K_{r+\eta}$ с общим центром, радиусами $r, r-\eta, r+\sigma, r+\eta$, причем круг K_r касается границы области G в точке z_0 и $K_r \subset G$, $0 < \sigma < \eta < r$. Тогда, как бы мало ни было $\mu > 0$, при достаточно малом r , в соответствии с доказанным в § 2 будем иметь

$$\Delta_r k(z; \gamma) > (1 - \mu) \lambda_{r_0}(z_0) \eta,$$

если $z \in K_{r-\eta}$ и $\gamma \in \Gamma(M)$, и

$$-\Delta_r k(z; \gamma) > (1 + \mu) \lambda_{r_0}(z_0) \eta,$$

если $z \in K_{r+\eta}$, $\gamma \in \Gamma(M)$. Обозначив, для краткости, $\lambda_{r_0}(z_0) = l_0$ и пользуясь (3.4) и (3.5), отсюда получим

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}[(1-\mu)l_0\tau_1-\delta]} \quad (4.1)$$

если $z \in K_{r-\eta}$ и

$$\sum_{i=1}^n |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{\lambda_n[(1+\mu)l_0\tau_1+\delta]} \quad (4.2)$$

если $z \in K_{r+\eta}$, как бы малы ни были $\delta > 0$ и $\mu > 0$, если только r достаточно мало, а n достаточно велико (r подбирается к μ , а n к δ , η — любое, лишь бы $0 < \eta < r$).

Пусть теперь $\eta \rightarrow 0$ и $\sigma = o(\eta)$. Обозначив $r_1 = r - \eta$, $r_2 = r + \sigma$, $r_3 = r + \eta$, легко найдем

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

и поэтому при достаточно малом η и соответствующем σ отношения

$$\frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}} \quad \text{и} \quad \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$$

сколь угодно близки к $\frac{1}{2}$.

Обозначим

$$R_{n_v}(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}$$

и пусть $M_v^{(1)}$, $M_v^{(2)}$, $M_v^{(3)}$ — наибольшие значения $|R_{n_v}(z)|$ соответственно в кругах $K_{r-\eta}$, $K_{r+\sigma}$, $K_{r+\eta}$. На основании теоремы Адамара о трех кругах имеем

$$\ln M_v^{(2)} \leq b \ln M_v^{(1)} + (1-b) \ln M_v^{(3)},$$

где $b = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$ и, следовательно, $1-b = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{\ln \frac{r_3}{r_1}}$. Пользуясь (4.1),

(4.2), (4.3) и учитывая то обстоятельство, что функция $f(z)$ аналитична в $K_{r+\eta}$ и, следовательно, $|f(z)| < C$ на границе этого круга и поэтому

$$M_v^{(3)} < C + \max_{z \in K_{r+\eta}} \left| \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right|$$

(C — постоянная), получим при достаточно большом v

$$\begin{aligned} \ln M_n^{(2)} &\leq A_1(\eta) \ln M_n^{(1)} + A_2(\eta) \ln M_n^{(3)} \leq \\ &\leq -A_1(\eta) \lambda_{n_v+1} [(1-\mu) l_0 \eta - \delta] + A_2(\eta) \lambda_{n_v} [(1+\mu) l_0 \eta + \delta] \leq \\ &\leq -\{A_1(\eta) [(1-\mu) l_0 \eta - \delta] (1+\vartheta) - A_2(\eta) [(1+\mu) l_0 \eta + \delta]\} \lambda_{n_v}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

где $\lim_{\eta \rightarrow 0} A_1(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_2(\eta) = \frac{1}{2} > 0$, а μ и δ сколь угодно малы. Учитывая то обстоятельство, что в оценках (4.1) и (4.2) r подбирается к μ , а n к δ , можно, как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, взять r и η столь малыми, чтобы

$$\frac{(1-\mu) A_1(\eta)}{(1+\mu) A_2(\eta)} > 1 - 2\varepsilon,$$

после чего выбрать столь малое δ , чтобы

$$\frac{A_1(\eta) [(1-\mu) l_0 \eta - \delta]}{A_2(\eta) [(1+\mu) l_0 \eta + \delta]} > 1 - \varepsilon,$$

взяв для этого достаточно большое v . Так как $\vartheta > 0$, причем ϑ не зависит от v , то $(1+\vartheta)(1-\varepsilon) > 1$ при достаточно малом ε и, следовательно, при достаточно малом $\eta > 0$ и соответствующем σ можно, основываясь на (4.4), утверждать, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \ln M_n^{(2)} = -\infty, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} M_n^{(2)} = 0,$$

а это означает, что последовательность частных сумм ряда (1) порядков $\{n_v\}$ сходится в круге $K_{r+\varepsilon}$, а так как точка z_0 — внутренняя к этому кругу, то теорема доказана.

Очевидно также, что рассматриваемая последовательность частных сумм ряда (1) сходится в круге $K_{r+\varepsilon}$ равномерно, так как при доказательстве оценивался максимум $|R_{n_v}(z)|$ в этом круге.

Если $\rho_0 = \infty$, теорема также справедлива. При доказательстве в этом случае следует окрестность U_ρ точки z_0 заменить окрестностью U_A , в которой $\rho > A$, считать $l_0 = 1$, а при выводе неравенств (3.4) и (3.5) предполагать, что области D и D' определяются следующим образом: в области D $|z| < e^{\rho(x+k(\rho)-\beta)}$ при $\rho \in M$, $\rho \neq \infty$ и $x > k_\infty + \beta$, а в области D' $|z| < e^{\rho(x-k(\rho)+\beta)}$ при $\rho \in M$, $\rho \neq \infty$ и $x > k_\infty - \beta$.

Если множество M конечно и $\lambda_{n+1} > (1+\vartheta)\lambda_n$ при всех n , то из теоремы 1 следует, что все точки границы области G — особые для $f(z)$.

Теорема 2. Если $\lambda_{n_v+1} > (1+\vartheta_v)\lambda_{n_v}$, где $\lim_{v \rightarrow \infty} \vartheta_v = \infty$, то последовательность частных сумм ряда (1)

$$\left\{ \sum_{i=0}^{n_v} a_i z^{m_i - \lambda_i} \right\}$$

сходится в любой конечной части области голоморфности функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}.$$

Доказательство. Пусть C_2 — любая конечная область, в которой $f(z)$ голоморфна. Построим конечную область C_3 , внутри и на границе которой $f(z)$ также голоморфна и которая содержит область C_2 (C_2 — строго внутри C_3). Пусть, наконец, $C_1 \subset C_2$ и C_1 находится внутри области сходимости ряда (1).

Обозначим $\beta_1 = \inf \beta$ для всех кривых $|z| = e^{[x - k(t) - \beta]}$, пересекающих область C_1 и $\beta_2 = \sup \beta$ для всех кривых $|z| = e^{[x - k(t) + \beta]}$, пересекающих C_3 (в силу сделанных предположений β_1 и β_2 — конечные положительные числа). Тогда

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{-\lambda_{n+1}(\beta_1 - \varepsilon)} \quad (4.5)$$

в C_1 и

$$\sum_{i=1}^n |a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}| < e^{\lambda_n(\beta_2 + \varepsilon)} \quad (4.6)$$

в C_3 , как бы мало ни было $\varepsilon > 0$, если n достаточно велико.

Пусть, как и раньше,

$$R_n(z) = f(z) - \sum_{i=1}^n a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z}.$$

Обозначив через $M_n^{(1)}$, $M_n^{(2)}$, $M_n^{(3)}$ значения $\max |R_n(z)|$ на границах областей C_1 , C_2 , C_3 , получим, воспользовавшись общей формой теоремы Адамара,

$$\ln M_n^{(2)} \leq b \ln M_n^{(1)} + (1-b) \ln M_n^{(3)},$$

где $0 < b < 1$. Воспользовавшись оценками (4.5), (4.6) и тем, что из аналитичности $f(z)$ на границе области C_3 следует ограниченность ее модуля, получим при достаточно большом n

$$\begin{aligned} \ln M_n^{(2)} &< -b \lambda_{n+1} (\beta_1 - \varepsilon) + (1-b) \lambda_n (\beta_2 + \varepsilon) < \\ &< [-b(1 + \vartheta_n) (\beta_1 - \varepsilon) + (1-b) (\beta_2 + \varepsilon)] \lambda_n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \infty$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{(2)} = 0$ и последо-

вательность $\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i z^{m_i} e^{-\lambda_i z} \right\}$ сходится в области C_2 (и притом равномерно). Теорема доказана.

Если, в частности, $\lambda_{n+1} > (1 + \vartheta_n) \lambda_n$ при всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \infty$, то все точки на границе области сходимости ряда (1) — особые для его суммы и ряд определяет столько аналитических функций, сколько связных компонент имеет область его сходимости.

§ 5. Сверхсходимость ряда Дирихле с комплексными показателями

Как было доказано автором (см. [31]), ряд Дирихле с комплексными показателями

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad (5.1)$$

где $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ и $\ln n = o(|\lambda_n|)$, сходится абсолютно в области G , точки которой при любом φ удовлетворяют условию

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) > 0$$

и расходится вне этой области. Функция $h(\varphi)$ определяется здесь следующим образом: $h(\varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} h(\varphi, \alpha)$, где $h(\varphi, \alpha) = \frac{\ln |a_{n_p}|}{|\lambda_{n_p}|}$, а $\{n_p\}$ —

последовательность индексов, для которых $\varphi - \alpha \leq \operatorname{Arg} \lambda_{n_p} \leq \varphi + \alpha$.

Нетрудно видеть, что $h(\varphi, \alpha) = h(\psi)$ для некоторого ψ из отрезка $[\varphi - \alpha, \varphi + \alpha]$; в этом легко убедиться, деля отрезок на две части, выбирая тот из полученных отрезков, в который попадет бесконечное множество членов той подпоследовательности из $\{\operatorname{Arg} \lambda_{n_p}\}$, для которой со-

ответствующая подпоследовательность из $\left\{ \frac{\ln |a_{n_p}|}{|\lambda_{n_p}|} \right\}$ сходится к $h(\varphi, \alpha)$,

и продолжая этот процесс деления. Условимся дальше считать, что $\operatorname{Arg} \lambda_n \in [0, 2\pi]$.

С помощью таких же рассуждений, какие на стр. 17 были применены к функциям $k(\rho, \alpha)$ и $k(\rho)$ и вводя аналогичные обозначения для функций $h(\varphi, \alpha)$ и $h(\varphi)$ ($\operatorname{Arg} \lambda_n$ вместо $\frac{\lambda_n}{m_n}$, h_i вместо k_i , φ_i^* вместо ρ_i^*), приходим к выводу, что, как бы мало ни было $\omega > 0$, при достаточно больших i

$$|a_i| < e^{(h_i + \omega)|\lambda_i|}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим теперь какую-либо конечную область D , в которой при всех φ имеет место неравенство

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) - \beta > 0$$

($\beta > 0$). Тогда для точек этой области тем более

$$x \cos \varphi_i^* - y \sin \varphi_i^* - h(\varphi_i^*) - \beta > 0. \quad (5.3)$$

Взяв φ_i^* , соответствующее достаточно мелкому разбиению отрезка $[0, 2\pi]$, и положив $\operatorname{Arg} \lambda_n = \theta_n$, в силу (5.3) и ввиду того, что область D ограничена, а функции $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ непрерывны, имеем

$$|e^{-\lambda_i z}| = e^{-|\lambda_i|(x \cos \theta_i - y \sin \theta_i)} < e^{-|\lambda_i|(x \cos \varphi_i^* - y \sin \varphi_i^* - \epsilon)} < e^{-|\lambda_i|(h_i + \beta - \epsilon)}$$

для всех i , как бы мало ни было $\varepsilon > 0$. Таким образом, в области D при достаточно малом ε_1

$$|e^{-\lambda_i z}| e^{(h_i + \varepsilon_1)|\lambda_i|} < e^{-|\lambda_i|(\beta - \varepsilon_1)},$$

как бы мало ни было $\varepsilon_2 > 0$ и тем более

$$|e^{-\lambda_i z}| e^{(h_i + \varepsilon_1)|\lambda_i|} < e^{-|\lambda_{n+1}|(\beta - \varepsilon_2)}, \quad (5.4)$$

если $n+1 \leq i$. С другой стороны, ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|}$$

сходится при любом $\varepsilon_i > 0$, так как $\ln n = o(|\lambda_n|)$, а в силу (5.2) при достаточно большом i

$$|a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|} < e^{-\delta|\lambda_i|},$$

где $\delta > 0$. Поэтому

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-(h_i + \varepsilon_i)|\lambda_i|} < C,$$

где C — постоянная и с учетом (5.4) приходим к выводу, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$ в области D справедлива оценка

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |a_i| e^{-\lambda_i z} < e^{-|\lambda_{n+1}|(\beta - \varepsilon)}. \quad (5.5)$$

Совершенно аналогично доказывается, что в любой конечной области D' , точки которой при любом φ удовлетворяют неравенству

$$x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) + \beta > 0 \quad (\beta > 0),$$

справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^n |a_i| e^{-\lambda_i z} < e^{|\lambda_n|(\beta + \varepsilon)} \quad (5.6)$$

для любого $\varepsilon > 0$, если только n достаточно велико.

Теорема 3. Если функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

аналитична в точке z_0 на границе Γ области сходимости G ряда (5.1), существует круг, лежащий в G и касающийся Γ в точке z_0 и имеется такая последовательность индексов $\{n_v\}$, что $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta)|\lambda_{n_v}|$, где ϑ не зависит от v ($\vartheta > 0$), то последовательность

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i e^{-\lambda_i z} \right\}$$

сходится в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство этой теоремы основано на оценках (5.5) и (5.6) и вполне аналогично доказательству теоремы 1, но значительно проще, так как роль кривых $|z| = e^{\rho(x-k(\rho))}$ играют прямые $x \cos \varphi - y \sin \varphi - h(\varphi) = 0$, а роль ρ — расстояния — обычное расстояние от соответствующей прямой.

Другим методом и при значительно более ограничительных предположениях $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty \right.$ и даже $|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| > p > 0$) эта теорема была ранее доказана Галли (см. [4]).

Теорема 4. Если $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \theta_v) |\lambda_{n_v}|$, где $\lim_{v \rightarrow \infty} \theta_v = \infty$, то последовательность

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n_v} a_i e^{-\lambda_i z} \right\}$$

сходится в любой конечной части области голоморфности функции

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Доказательство этой теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 2 и немедленно следует из теоремы Адамара (в общей форме) и оценок (5.5), (5.6).

Московский институт
химического машиностроения

Поступила 3 VII 1962

Ч. I, 1, 1969

ՄԻ ՔԱՆԻ ՇԱՐՔԵՐԻ ԳԵՐՁՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկում են Թեյլոր-Դիրիխլեի շարքեր՝

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \quad (1)$$

որտեղ $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow \infty$ և $\ln n = o(\lambda_n)$ և Դիրիխլեի կամպակքս ցուցիչներով շարքեր՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-\lambda_n z}, \quad (2)$$

որտեղ $|\lambda_n| \uparrow \infty$, $\ln n = o(|\lambda_n|)$.

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները:

1. Եթե (1) կամ (2) շարքի գուգամիտություն տիրույթի եզրագծի z_0 կետում շարքի գումարը հանդիսացող ֆունկցիան անալիտիկ է, գոյություն ունի շարքի գուգամիտություն տիրույթի ներսը ընկած ու այդ տիրույթի եզրը z_0 կետում շոշափող շրջան և առկա է $[n_v]$ աջափսի հաջորդականություն, որ $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta_v) |\lambda_{n_v}|$, որտեղ $\vartheta > 0$, ապա շարքի մասնակի գումարների համապատասխան $|S_{n_v}|$ հաջորդականությունը գուգամիտում է z_0 կետի ինչ որ շրջակայքում:

2. Եթե $|\lambda_{n_v+1}| > (1 + \vartheta_v) |\lambda_{n_v}|$ և $\lim_{v \rightarrow \infty} \vartheta_v = +\infty$, ապա ինչպես (1) շարքի, այնպես էլ (2) շարքի համար կարելի է պնդել, որ մասնակի գումարների համապատասխան $|S_{n_v}|$ հաջորդականությունը գուգամիտում է ումեն մի տիրույթում, որտեղ շարքի գումարը անալիտիկ է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bernstein V. Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet. Paris, 1933.
2. Тичмарш Е. Теория функций. Гостехиздат, М., 1951.
3. Լյուզ Գ. Լ. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. Математ. сб., **10**, (52), № 1—2, 33—50, 1942.
4. Gallie T. M. Jr. Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents. Trans. Amer. Math. Soc., **90**, № 1, 57—72, 1959.
5. Լյուզ Գ. Լ. О рядах типа Тейлора—Дирихле. Известия АН АрмССР, **14**, № 2, 7—16, 1961.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Ш. Асатуриян, П. М. Кичаев

Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости

В в е д е н и е

Имеется обширная литература, посвященная колебаниям стержней переменного поперечного сечения при линейном законе деформации [1], [2], [3], [4].

Существует ряд задач, имеющих большое практическое значение, при рассмотрении которых необходимо обращаться к нелинейной теории изгибных колебаний. Так, например, колебания турбинных лопаток происходят в поле высоких температур, где, как показывает опыт, не выполняется линейный закон деформации Гука и появляются пластические деформации.

В нелинейной технической теории упругости, в частности, для изгиба призматических стержней предполагают, что связь между напряжением в волокне σ_x и относительным удлинением волокна ε_x определена из экспериментов на растяжение-сжатие. Эта фундаментальная связь определяется обобщенным нелинейным законом деформации в виде [5]:

$$\sigma_x = E (1 - a E \varepsilon_x^2) \varepsilon_x, \quad (0.1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (1 + a \sigma_x^2) \sigma_x. \quad (0.2)$$

Здесь E — модуль упругости; a — постоянная, имеющая размерность $\text{см}^4/\text{кг}^2$, определяется из соотношения

$$a = - \frac{2}{27} \frac{E \gamma}{G^3}, \quad (0.3)$$

где G — модуль сдвига в $\text{кг}/\text{см}^2$,

γ — интенсивность касательных напряжений.

Для модуля интенсивности касательных напряжений γ предлагается нами следующее эмпирическое соотношение

$$\gamma = \left(\frac{2}{m} - 1 \right) G_1, \quad (0.4)$$

где $\frac{1}{m}$ — коэффициент Пуассона,

G_1 — безразмерный модуль сдвига.

Соотношения (0.1), (0.2) и (0.4) характеризуют не только нелинейный закон упругости, но, по-видимому, служат выражением пластических деформаций в зоне упрочнения при высоких температурах порядка 500–700°C.

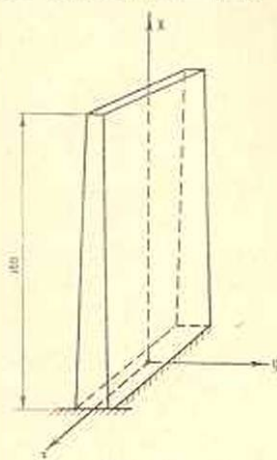
Заметим, что из условия совместности деформаций Сен-Венана и нелинейной теории изгиба призматических стержней [5] следует пропорциональность между относительным удлинением и кривизной упругой линии в следующем виде

$$\varepsilon_x = y \frac{d^2 \eta}{dx^2}. \quad (0.5)$$

§ 1. Нелинейные изгибные колебания стержней переменного поперечного сечения в поле центробежных сил

Изгибные колебания стержней при нелинейном законе упругости с постоянным поперечным сечением и шарнирно закрепленными концами рассмотрены в работе [5].

В данной работе приводится исследование свободных нелинейных изгибных колебаний призматических стержней переменного поперечного сечения в поле центробежных сил. При этом учитывается влияние одновременного изменения жесткости и погонной массы на частоту собственных колебаний стержня. Так как существенная закрученность турбинных лопаток мало влияет на основную частоту их колебаний [4], то при расчете нелинейных колебаний лопатки имитируем как незакрученные призматические консольные балки переменного сечения.



Фиг. 1.

Итак, рассмотрим в декартовой системе координат призматический стержень произвольного поперечного сечения длиной L . Пусть для недеформированного стержня его ось совпадает с осью x , а плоскость сечения — с плоскостью yz (фиг. 1).

Для исследования нелинейного колебания упругой системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. По принципу Гамильтона-Остроградского для неконсервативной системы сил при изохронной вариации имеем соотношение

$$F_1 = \int_0^1 L dt; \quad \delta F_1 = 0, \quad (1.1)$$

где L — функция Лагранжа, определяемая уравнением

$$L = A_1 + A_2 - T. \quad (1.2)$$

Здесь A_1 — полная работа упругих сил,
 A_2 — работа центробежных сил,
 T — кинетическая энергия системы.

Составим функцию Лагранжа. Для этого сначала вычислим работу внутренних сил упругой системы. Элементарная работа будет

$$d\left(\frac{dA_1}{dx}\right) = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x.$$

Подставляя сюда значения σ_x и ε_x из соотношений (0.2) и (0.5), получим

$$d\left(\frac{dA_1}{dx}\right) = \frac{E}{2} \left(1 - \frac{1}{2} a E \varepsilon_x^2\right) \varepsilon_x^2 = \frac{E}{2} \left[1 - \frac{a E^2}{2} \left(y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2\right] \left(y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2.$$

Интегрируя по площади F поперечного сечения, найдем работу на единицу длины стержня

$$\frac{dA_1}{dx} = \frac{E}{2} \left[\iint_F y^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2 dy dz - \frac{a E^2}{2} \iint_F y^4 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^4 dy dz \right].$$

Вводя в рассмотрение моменты инерции сечения

$$J_1 = \iint_F y^2 dy dz, \quad J_2 = \iint_F y^4 dy dz,$$

из предыдущего соотношения работу деформации для всего стержня получим в виде

$$A_1 = \int_0^l \frac{dA_1}{dx} dx = \frac{E}{2} \int_0^l J_1 \left[1 - \frac{a E^2 J_2}{2 J_1^2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2\right] \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right)^2 dx. \quad (1.3)$$

К элементу стержня приложена центробежная сила, имеющая вдоль оси x проекцию $r \omega^2 \rho F$. Проекциями центробежных сил вдоль других осей вследствие малости их пренебрегаем. Работа центробежной силы определяется формулой

$$A_2 = \int_0^l \rho E r \omega^2 \Delta dx,$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx; \quad r = r_0 + x;$$

ρ — плотность материала; ω — угловая скорость;

r_0 — радиус вращения закрепленного конца стержня. Следовательно, работа центробежной силы стержня будет равна

$$A_2 = \frac{\omega^2}{2} \int_0^l \left[\rho \cdot F \cdot r \int_0^x \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \right] dx. \quad (1.4)$$

Кинетическую энергию стержня определим путем интегрирования живой силы отдельных элементов его. Если пренебрежем инерцией вращения элементов стержня, то найдем [1]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho F \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.3), (1.4), (1.5) в уравнение (1.2), а соотношение (1.2) в формулу (1.1), получим:

$$F_1 = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^l \left[EJ_1 \left[1 - \frac{aE^2 J_2}{2J_1} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \omega^2 \rho F r \int_0^x \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx - \rho F \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] dx dt. \quad (1.6)$$

Для упрощения вычислений, введем следующие обозначения:

$$t_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad \tau = pt; \quad \xi = \frac{kx}{l}; \quad r = r_0 + x = r_0 \left(1 + \frac{l}{kr_0} \xi \right); \quad (1.7)$$

$$J_1 = J_0 \left(1 - \frac{\beta x}{l} \right) = J_0 \left(1 - \frac{\beta_1 \xi}{k} \right) = J_0 f(\xi);$$

$$J_2 = J \left(1 - \frac{\beta_1 x}{l} \right) = J \left(1 - \frac{\beta_1 \xi}{k} \right) = J \cdot f_1(\xi);$$

$$F = F_0 \left(1 - \mu \frac{x}{l} \right) = F_0 \left(1 - \frac{\mu}{k} \xi \right) = F_0 \varphi(\xi); \quad (1.8)$$

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \nu \sin \frac{\pi n x}{l} \right) = \rho_0 \left(1 + \nu \sin \frac{\pi n}{k} \xi \right) = \rho_0 \varphi_1(\xi);$$

$$\beta = \frac{J_0 - J_{II}}{J_0}; \quad \beta_1 = \frac{J - J_{0I}}{J}; \quad \mu = \frac{F_0 - F_I}{F_0},$$

где индекс 0 показывает, что все величины вычислены в корневом сечении, а l — на конце стержня; τ — безразмерное время; ξ — безразмерная координата; p — частота колебания стержня; k — безразмерный параметр, подлежащий определению; n — число длин волн шероховатости поверхности изделия.

Величина γ характеризует амплитуду колебания шероховатости и неровности поверхности изделия стержня, учитывающую технологический фактор изготовления, налип на поверхности лопатки и другие отклонения от средней плотности ρ_0 , т. е. безразмерную амплитуду колебания распределения масс около среднего значения плотности вдоль длины стержня. Величины γ и η определяются статистическими методами по наблюдениям. Так как

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{k}{l}; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \frac{k^2}{l^2}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} p, \quad (1.9)$$

то на основании (1.7), (1.8) и (1.9) уравнение (1.6) примет вид

$$F_1 = \frac{\rho_0 F_0 l}{2kp} \int_0^{2\pi} \int_0^k \left\{ \alpha^2 f(\xi) \left[1 + \frac{\lambda}{6} \frac{f_1(\xi)}{f(\xi)} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \eta_1 \omega^2 r(\xi) \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \int_0^{\tau} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi - p^2 \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau} \right)^2 \right\} d\xi d\tau, \quad (1.10)$$

где для сокращения записи приняты следующие обозначения:

$$\alpha^2 = \frac{E J_0}{\rho_0 F_0} \frac{k^4}{l^4}; \quad \lambda = -3aE^2 \frac{J k^4}{J_0 l^4}; \quad \eta_1 = \frac{k r_0}{l}. \quad (1.11)$$

Из (1.10) следует, что уравнение Эйлера-Лагранжа для вариационной задачи δF_1 является нелинейным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами. Поэтому вариационную задачу будем решать приближенно.

Функцию $\eta(\xi, \tau)$ будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от ξ , а вторая — только от τ , т. е.

$$\eta(\xi, \tau) = R(\xi) \varphi(\tau). \quad (1.12)$$

Так как мы рассматриваем стержень как консольную балку, то граничные условия будут:

$$R|_{\xi=0} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=k} = 0; \quad \frac{\partial^3 R}{\partial \xi^3} \Big|_{\xi=k} = 0. \quad (1.13)$$

Этим условиям удовлетворяет функция Н. А. Крылова [6].

$$R(\xi) = \left[U(\xi) - \frac{S(k)}{T(k)} V(\xi) \right], \quad (1.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi + \cos \xi); & U &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi - \cos \xi); \\ T(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \xi + \sin \xi); & V(\xi) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi - \sin \xi), \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

а безразмерные числа k — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ch} k \cdot \cos k + 1 = 0. \quad (1.16)$$

Приведем значения нескольких корней уравнения (1.16), вычисленных Рэйлем [1] и А. Н. Крыловым [2]

$$k_1 = 1,875; \quad k_2 = 4,694, \quad k_3 = 7,855.$$

Подставляя функцию (1.12) в формулу (1.10), получим

$$\begin{aligned} F_1 = & \frac{F_0 F_0 l}{2kp} \int_0^{2\pi} q^2 x^2 \int_0^k f(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi + \frac{\lambda q^4}{6} \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi + \\ & + q^2 \gamma_1 \omega^2 \int_0^k \left[r(\xi) \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \int_0^\xi \left(\frac{dR}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \right] d\xi - \\ & - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \int_0^k \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) [R(\xi)]^2 d\xi \Big] d\tau. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} b_0 = & \int_0^k \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) R^2(\xi) d\xi; \quad \vartheta^2 = \frac{1}{b_0} \int_0^k f(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi; \\ b_2 = & \frac{1}{\vartheta^2 b_0} \int_0^k f_1(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi; \quad b = \frac{1}{b_0} \int_0^k \left[r(\xi) \varphi(\xi) \varphi_1(\xi) \int_0^\xi \left(\frac{dR}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \right] d\xi. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Тогда для F_1 получим следующий интеграл

$$F_1 = \frac{F_0 F_0 l b_0}{2kp} \int_0^{2\pi} \left[\vartheta^2 x^2 q^2 \left(1 + \frac{1}{6} \lambda b_2 q^2 \right) + b \gamma_1 \omega^2 q^2 - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 \right] d\tau. \quad (1.18)$$

По принципу Гамильтона-Остроградского для неконсервативной системы сил при изохронной вариации из формул (1.1) и (1.18) получим

$$\delta F_1 = \int_0^{2\pi} \delta L d\tau = 0,$$

где

$$L = \vartheta^2 x^2 q^2 + \frac{\vartheta^2 \lambda^2 b_2}{6} q^4 + b \gamma_1 \omega^2 q^2 - p^2 \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2.$$

Отсюда, для действительного движения вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа запишется в виде:

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \frac{\beta^2 a^2}{p^2} \left(q + \frac{b\eta_1 \omega^2}{\beta^2 a^2} q + \frac{1}{3} \lambda b_2 q^3 \right) = 0.$$

Если положить, что

$$p_1^2 = \frac{\beta^2 a^2}{p^2}; \quad \omega_1^2 = \frac{b\eta_1 \omega^2}{\beta^2 a^2}; \quad \lambda_1 = \frac{1}{3} \lambda b_2, \quad (1.19)$$

то из предыдущего соотношения будем иметь

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + p_1^2 (q + \omega_1^2 q + \lambda_1 q^3) = 0. \quad (1.20)$$

Соотношение (1.20) описывает свободные колебания системы с нелинейной восстанавливающей силой.

Интегрируя уравнение (1.20) от начального положения Q до q , где Q — наибольшая амплитуда колебания системы, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 = p_1^2 \int_q^Q (q + \omega_1^2 q + \lambda_1 q^3) dq. \quad (1.21)$$

Отсюда, после несложных преобразований, получим следующее дифференциальное уравнение в безразмерных переменных

$$\left(\frac{d\psi}{d\tau} \right)^2 = p_1^2 (1 - \psi^2) \left(1 + \omega_1^2 + \frac{\lambda_1 Q^2}{2} + \frac{\lambda_1 Q^2}{2} \psi^2 \right), \quad (1.22)$$

где $\psi = \frac{q}{Q} \leq 1$ — безразмерная амплитуда.

Разделяя переменные в уравнении (1.22) и интегрируя по q в пределах от нуля до ψ , получим эллиптический интеграл в виде

$$\tau = \frac{1}{p_1} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - \psi^2) \left(1 + \omega_1^2 + \frac{\lambda_1 Q^2}{2} + \frac{\lambda_1 Q^2}{2} \psi^2 \right)}}. \quad (1.23)$$

Для удобства пользования таблицами эллиптических интегралов представим интеграл (1.23) в тригонометрической форме. Для этого положим

$$\psi = \sin \theta; \quad -\chi = \frac{\lambda_1 Q^2}{2 + 2\omega_1^2 + \lambda_1 Q^2} \leq -1, \quad (1.24)$$

где χ — модуль эллиптического интеграла и $\lambda_1 < 0$.

Следовательно, уравнение (1.23) принимает вид

$$\tau = \frac{V'2}{p_1 V'2 + 2\omega_1^2 + \lambda_1^2 Q^2} \int_0^\theta \frac{d\theta}{V'1 - \chi^2 \sin^2 \theta}. \quad (1.25)$$

Так как период колебаний должен иметь значение $\frac{\pi}{2}$, то при $\lambda_1 < 0$ из формулы (1.25) следует соотношение

$$2\pi = \frac{4\sqrt{2}K(\chi)}{p_1\sqrt{2+2\omega_1^2+\lambda_1^2Q^2}},$$

где

$$K(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\chi^2\sin^2\theta}}$$

полный эллиптический интеграл первого рода. Отсюда следует, что

$$p_1 = \frac{2\sqrt{2}K(\chi)}{\pi\sqrt{2+2\omega_1^2+\lambda_1^2Q^2}}.$$

Или, переходя к размерным величинам по формулам (1.19), для частоты колебания будем иметь

$$p = \frac{\pi\omega_1}{2K(\chi)} \sqrt{1 + \frac{b\eta_1\omega^2}{\omega_1^2\alpha^2} + \frac{1}{6}\lambda b_2Q^2}, \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &< 0 \\ -\chi &= \frac{\lambda b_2Q^2}{6 + 6\frac{q\eta_1\omega^2}{\omega_1^2\alpha^2} + \lambda b_2Q^2} \leq -1. \end{aligned}$$

Из соотношения (1.26) видно, что частота колебания зависит от амплитуды. С увеличением амплитуды частота колебания уменьшается вследствие увеличения функции $K(\chi)$ и уменьшения подкоренного выражения.

§ 2. Вывод расчетной формулы

Эллиптический интеграл (1.25) есть функция верхнего предела Q . Обратная функция от τ называется эллиптической функцией Якоби и определяется формулой

$$\phi = \operatorname{sn} \tau.$$

Подставляя сюда значение безразмерной амплитуды ϕ , будем иметь

$$q = Q \operatorname{sn} \tau. \quad (2.1)$$

На основании (2.1), соотношений (1.12) и (1.14), уравнение упругой линии при нелинейном колебании примет вид:

$$\eta(\xi, \tau) = Q \left[U(\xi) - \frac{S(k)}{T(k)} V(\xi) \right] \operatorname{sn} \tau, \quad (2.2)$$

где попрежнему

$$\ddot{z} = -\frac{kx}{l}; \quad \tau = pt.$$

В формулах (1.26) и (2.2) амплитуда колебания заранее нам не известна, но ее можно определить из условия максимального изгибающего момента и допускаемого или расчетного напряжения при изгибе. Максимальный изгибающий момент можно определить, с одной стороны из формулы

$$\max M = EJ \left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right|_{\max}, \quad (2.3)$$

а с другой стороны, легко показать, что наибольший изгибающий момент возникает в корневом сечении стержня и определяется условием

$$\max M = \sigma_g W_0, \quad (2.4)$$

где W_0 — момент сопротивления корневого сечения стержня.

Вычислим теперь максимальное значение изгибающего момента. Из разложения эллиптической функции Якоби [7] следует, что

$$\operatorname{sn} \tau \approx \sin \tau (1 + 4e^{-2\tau} \cos^2 \tau). \quad (2.5)$$

Отсюда

$$|\operatorname{sn} \tau|_{\max} = |\sin \tau|_{\max} = 1.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = Q \frac{k^2}{l^2} \frac{d^2 R}{d\tau^2} \operatorname{sn} \tau, \quad (2.6)$$

то из формулы (1.14) и (2.2) следует, что

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = \left[\frac{d^2 U}{d\tau^2} - \frac{S(k)}{T(k)} \frac{d^2 V}{d\tau^2} \right].$$

По определению функции А. Н. Крылова и из соотношения (1.15) следует, что

$$\frac{d^2 R}{d\tau^2} = S(k) \left[\frac{S(\xi)}{S(k)} - \frac{T(\xi)}{T(k)} \right].$$

Отсюда видно, что правая часть имеет максимум при $\xi = 0$. Поэтому

$$\left| \frac{d^2 R}{d\tau^2} \right|_{\max} = 1. \quad (2.7)$$

Следовательно, комбинируя (2.5), (2.6) и (2.7) с соотношением (2.3), найдем

$$M_{\max} = \frac{EJQk^2}{l^2}. \quad (2.8)$$

Решая совместно уравнения (2.4) и (2.8), получим

$$Q = \frac{\sigma_g W_0}{EJ_0} \frac{l^2}{k^2}. \quad (2.9)$$

Таково значение амплитуды в зависимости от допускаемого или расчетного напряжения. Вычисляя коэффициент $\frac{\lambda}{6} b_2 Q^2$ по условию (2.9), получим:

$$\frac{\lambda b_2}{6} Q^2 = \frac{1}{27} \frac{J}{J_0} \frac{E}{G} b_2 \left(\frac{\tau_K W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma,$$

где $\gamma < 0$. Подставляя это соотношение и значения α , η_1 из (1.11) в уравнение (1.26), найдем расчетные формулы для определения частоты при свободном колебании стержня

$$p = \frac{\pi^4}{2K(\chi)} \frac{k^2}{l^2} \sqrt{\frac{E J_0}{\rho_0 F_0}} \sqrt{1 + \frac{b l^3}{12 k^3} \frac{\rho_0 F_0}{E J_0} r_0^2 \omega^2 + \frac{1}{27} \frac{E J}{G J_0} b_2 \left(\frac{\tau_K W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}, \quad (2.10)$$

$$-\chi^2 = \frac{\frac{1}{27} \frac{J}{J_0} \frac{E b_2}{G} \left(\frac{\tau_K W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}{1 + \frac{b l^3}{12 k^3} \frac{\rho_0 F_0}{E J_0} r_0^2 \omega^2 + \frac{1}{27} \frac{J E b_2}{J_0 G} \left(\frac{\tau_K W_0}{G J_0} \right)^2 \gamma}.$$

Величины b_2 , ϑ , b определяются из выражения (1.17), значения корня k берутся из уравнения (1.16).

§ 3. Сравнение величин собственных частот колебаний стержней при линейной и нелинейной теориях деформации

Величина собственных частот колебания стержней сильно зависит от температуры окружающей их среды. Как известно, изменение величины собственных колебаний от температуры определяется изменением упругих постоянных.

На фиг. 2 приведены графики упругих постоянных и коэффициента интенсивности касательных напряжений для стали в зависимости от температуры.

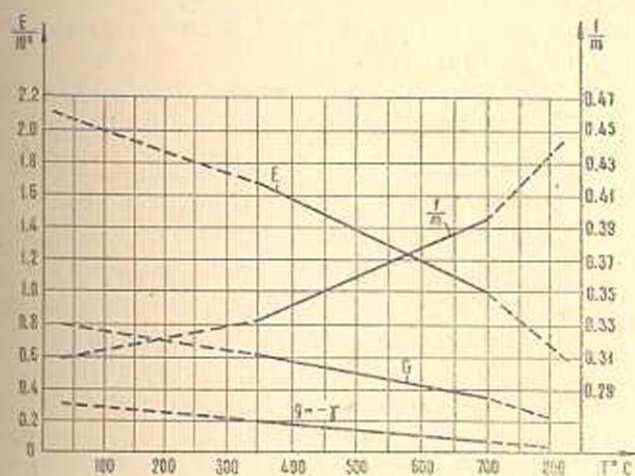
Частота собственных колебаний стержней трапецидального и прямоугольного сечений (фиг. 3) подсчитана по формуле (2.10), в которую, помимо упругих постоянных и других известных величин (момент инерции, площадь и т. д.), входят величины b , b_2 , ϑ , значения которых, для указанных сечений стержней приведены в таблице.

Для других поперечных сечений стержней значения b , b_2 , ϑ легко определяются интегралами от функции А. Н. Крылова [6], которые должны быть умножены на соответствующие постоянные, определяемые формулами (1.8).

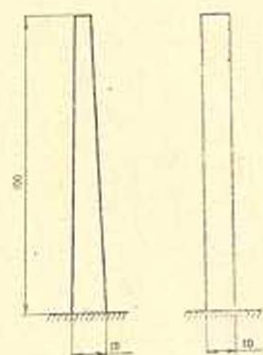
Интегралы от функции А. Н. Крылова были вычислены численно методом Гаусса [8]. Ниже приводим значения указанных выше интегралов в пределах от нуля до $k = 1.875$

$$\int_0^k [R(\xi)]^2 d\xi = 0,46870; \quad \int_0^k \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^4 d\xi = 0,27693;$$

$$\int_0^k \xi |R(\xi)|^2 d\xi = 0,70873; \quad \int_0^k \xi \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi = 0,06413;$$



Фиг. 2.



Фиг. 3. Поперечное сечение стержней.

Таблица

Значения интегралов для стержней

$\frac{b^2}{h^3}$	μ	β	β_1	t мм	$b_0 \int_0^k \varphi(\xi) \psi(\xi) \varphi'(\xi) d\xi$	$a^2 = \frac{1}{b_0} \int_0^k \xi(\xi) \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi$	$b_2 = \frac{1}{b_0} \int_0^k \xi \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi$	$b = \frac{1}{b_0} \int_0^k \xi \varphi(\xi) \left(\varphi'(\xi) \right)^2 d\xi$
1	0,867	0,950	0,9955	100	0,21659	1,78662	0,62631	7,41797
2	0,667	0,830	0,9555	50	0,21659	1,78662	0,62631	4,16446
3	0,000	0,000	0,0000	50	0,46870	1,00000	0,59084	2,42419
4	0,000	0,000	0,0000	100	0,46870	1,00000	0,59084	4,01242

$$\begin{aligned} \int_0^k \xi^2 |R(\xi)|^2 d\xi &= 1,11145; & \int_0^k \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi &= 0,39182; \\ \int_0^k \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi &= 0,47125; & \int_0^k \xi \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi &= 0,55839; \\ \int_0^k \xi \left(\frac{d^2 R}{d\xi^2} \right)^2 d\xi &= 0,17020; & \int_0^k \xi^2 \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi &= 0,84278; \\ \int_0^k \xi^3 \left(\frac{dR}{d\xi} \right)^2 d\xi &= 1,31484. \end{aligned}$$

На фиг. 4. приведены графики собственных частот колебаний

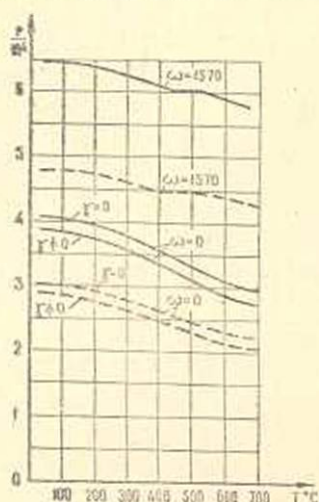
стержней трапецидального и прямоугольного сечений, из которых видно, что частота собственных колебаний стержней уменьшается с увеличением температуры примерно на 20 и более процентов.

При нелинейном законе деформации стержней частота их собственных колебаний уменьшается по сравнению с линейной деформацией примерно на 6—12%.

Влияние нелинейности на уменьшение собственной частоты колебаний стержней тем больше, чем меньше центробежные силы. Центробежные силы, как например, в лопатках турбин, увеличивают их жесткость и сильно повышают частоту собственных колебаний лопаток, что видно из кривых (фиг. 4).

Отметим, что приведенное нами решение, полученное для стержня с заделанным концом, можно распространить и на более сложный случай, как например, на лопатки турбин.

Приведенное решение дает возможность учесть влияние на частоту собственных колебаний различных технологических факторов изготовления стержней (лопаток турбин), как например, влияние изменения момента инерции в зависимости от неточности размеров их толщины.



Фиг. 4.

— Трапецидальное сечение стержня.
--- Прямоугольное сечение стержня.

Запорожский машиностроительный институт
им. В. Я. Чубаря

Поступила 16 IV 1962

Ս. Շ. Ասատրյան, Պ. Մ. Կիչաև

ՉՈՂԵՐԻ ՇԵՂ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՈՋ ԳԾԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հազվադեպ հետազոտվում են փոփոխական լայնական հատվածքով պրիզմայաձև ձողերի ազատ, ոչ զծալին շեղ տատանումները կենտրոնախույս ուժերի դաշտում: Առաջին մոտարկման մեջ արհամարհում ենք տուրբինային թիակների ուղղվածությունը, որովհետև այն քիչ է ազդում տատանման հիմնական հաճախականության վրա: Ոչ զծալին տատանումների հաշվարկման ժամանակ թիակները իմիտացվում են որպես փոփոխական հատվածքի չորսված կոնսոլային հեծաններ:

Դեֆորմացիայի ոչ զծալին օրենքի դեպքում թեղի σ_x լարման և ε_x հարաբերական երկարացման միջև եղած կապը որոշվում է ձգման ու սեղման էքսպերիմենտներից: Այդ հիմնական կապը որոշվում է դեֆորմացիայի ընդհանրացված ոչ զծալին հետևյալ տեսքի օրենքով՝

$$\sigma_x = E(1 - aE\varepsilon_x^2)\varepsilon_x,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(1 + a\sigma_x^2)\sigma_x,$$

որտեղ E -ն առաձգականության մոդուլն է, a -ն մի փոփոխական է, որը որոշվում է

$$a = -\frac{2}{27} \frac{E\gamma}{G^2}$$

հարաբերակցությունից:

G -ն սահքի մոդուլն է կգ/սմ²-ով, γ -ն շոշափող լարումների ինտենսիվությունն է:

Առաձգական սիստեմի ոչ զծալին տատանման հետազոտության համար կիրառվում է Համիլտոն-Օստրադերադսկու վարիացիան սկզբունքը, բնրվում է առաձգական դժի հավասարումը, որովում է հաճախականությունների բաշխման օրենքը հետևյալ տեսքով՝

$$p = \Phi(\omega, Q)$$

որտեղ ω -ն անկյունային արագությունն է, Q -ն սկզբնական ամպլիտուդն է:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Релей Д. В. Теория звука, т. 1. Гостехиздат, 1955.
2. Крылов А. Н. Избранные труды. Изд. АН СССР, Л., 1958.
3. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
4. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении, т. III. Машигиз, М., 1959.
5. Кудерер, Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.
6. Крылов А. Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала. Изд. АН СССР, 1936.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат 1949.
8. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, М., 1954.

А. П. Мелконян

Изгиб трехслойной толстой плиты

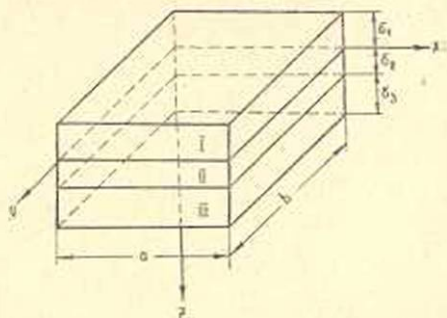
Рассматривается задача об изгибе прямоугольной трехслойной толстой плиты под действием произвольной поперечной нагрузки, приложенной к верхнему основанию. Материалы слоев обладают различными модулями упругости. В пределах каждого слоя модуль упругости считается постоянным. Предполагается, что различные материалы, составляющие слои, имеют одинаковые коэффициенты Пуассона.

В частности, решены задачи изгиба трехслойной квадратной плиты для различных относительных размеров и отношений модулей упругости слоев.

Результаты точного решения сопоставляются с результатами классической теории изгиба тонких плит, а также с результатами другой приближенной теории [1], уточняющей классическую.

§ 1. Общее решение задачи

Пусть толстая прямоугольная плита со сторонами a и b и с толщинами слоев δ_1 , δ_2 и δ_3 нагружена поперечной нагрузкой с интенсивностью $p(x, y)$, приложенной к верхней граничной плоскости плиты. Каждый слой в отдельности также является толстым. Пусть верхний слой имеет модуль упругости E_1 , средний — E_2 , а нижний — E_3 . Коэффициенты Пуассона для всех трех слоев примем равными ν . Далее, все величины, относящиеся к верхнему слою, будем обозначать индексом 1, к среднему слою — индексом 2 и к нижнему слою — индексом 3. Координатную плоскость xoy расположим на границе контакта верхнего и среднего слоев, с началом в одной из вершин плиты.



Фиг. 1.

Ось oz направим вертикально вниз (фиг. 1). Обозначим через u, v, w — перемещения частицы упругого тела, а через $X_x, Y_y, Z_z, X_y, Y_z, X_z$ — компоненты тензора напряжений.

Под свободным опиранием полагаем следующие условия, выполняемые в любой точке боковой поверхности плиты [2]:

- 1) Нормальная компонента напряжений равна нулю,
- 2) Касательные компоненты смещения равны нулю.

Предположим, что на верхней и нижней граничных плоскостях плиты отсутствуют касательные напряжения. Граничные условия на этих плоскостях будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{при } z = -\delta_1 \quad Z_z^{(1)} &= -p(x, y) \quad X_z^{(1)} = Y_z^{(1)} = 0 \\ \text{при } z = \delta_2 + \delta_3 \quad Z_z^{(3)} &= 0 \quad X_z^{(3)} = Y_z^{(3)} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Необходимо также выполнение следующих условий на контактных слоях

$$\text{при } z = 0 \quad Z_z^{(1)} = Z_z^{(2)} \quad X_z^{(1)} = X_z^{(2)} \quad Y_z^{(1)} = Y_z^{(2)} \quad \wedge \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(2)} \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad w^{(1)} = w^{(2)} \\ \text{при } z = \delta_2 \quad Z_z^{(2)} &= Z_z^{(3)} \quad X_z^{(2)} = X_z^{(3)} \quad Y_z^{(2)} = Y_z^{(3)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u^{(2)} = u^{(3)} \quad v^{(2)} = v^{(3)} \quad w^{(2)} = w^{(3)}.$$

На внешнюю поперечную нагрузку $p(x, y)$ накладываем ограничения, позволяющие представить ее в виде двойного ряда Фурье

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.4)$$

где

$$K_{kn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (1.5)$$

Используем для каждого слоя решение Б. Г. Галеркина [2], где все компоненты напряжений и перемещений выражаются через бигармоническую функцию

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{kn}^{(i)} \operatorname{sh} \omega_{kn} z + B_{kn}^{(i)} \operatorname{ch} \omega_{kn} z + \\ &+ C_{kn}^{(i)} z \operatorname{ch} \omega_{kn} z + D_{kn}^{(i)} z \operatorname{sh} \omega_{kn} z] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\text{где} \quad \omega_{kn} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

и имеют следующие выражения*

$$\begin{aligned} X_x^{(i)} &= \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k^2 \left[A_{kn}^{(i)} \omega z \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega z \operatorname{sh} \omega z + \right. \\ &\left. + C_{kn}^{(i)} \left[\omega z \operatorname{sh} \omega z + \left(1 + 2z \frac{a^2 \omega^2}{\pi^2 k^2} \right) \operatorname{ch} \omega z \right] + \right. \end{aligned}$$

* Для простоты записи индексы kn при ω_{kn} в дальнейшем изложении опускаем.

$$+ D_{kn}^{(i)} \left[\omega z \operatorname{ch} \omega z + \left(1 + 2\sigma \frac{a^2 \omega^2}{\pi^2 k^2} \right) \operatorname{sh} \omega z \right] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.7)$$

$$Y_y^{(i)} = \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega z \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega z \operatorname{sh} \omega z + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(i)} \left[\omega z \operatorname{sh} \omega z + \left(1 + 2\sigma \frac{b^2 \omega^2}{\pi^2 n^2} \right) \operatorname{ch} \omega z \right] + \right. \\ \left. + D_{kn}^{(i)} \left[\omega z \operatorname{ch} \omega z + \left(1 + 2\sigma \frac{b^2 \omega^2}{\pi^2 n^2} \right) \operatorname{sh} \omega z \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.8)$$

$$Z_z^{(i)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega^2 \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + C_{kn}^{(i)} [\omega z \operatorname{sh} \omega z - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \omega z] + \right. \\ \left. + D_{kn}^{(i)} [\omega z \operatorname{ch} \omega z - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \omega z] \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.9)$$

$$Z_y^{(i)} = - \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega n \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + C_{kn}^{(i)} (\omega z \operatorname{ch} \omega z + 2\sigma \operatorname{sh} \omega z) + \right. \\ \left. + D_{kn}^{(i)} (\omega z \operatorname{sh} \omega z + 2\sigma \operatorname{ch} \omega z) \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.10)$$

$$X_z^{(i)} = - \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega k \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + C_{kn}^{(i)} (\omega z \operatorname{ch} \omega z + 2\sigma \operatorname{sh} \omega z) + \right. \\ \left. + D_{kn}^{(i)} (\omega z \operatorname{sh} \omega z + 2\sigma \operatorname{ch} \omega z) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.11)$$

$$Y_x^{(i)} = - \frac{\pi^2}{ab} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} kn \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + C_{kn}^{(i)} (\operatorname{ch} \omega z + \omega z \operatorname{sh} \omega z) + \right. \\ \left. + D_{kn}^{(i)} (\operatorname{sh} \omega z + \omega z \operatorname{ch} \omega z) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.12)$$

$$u^{(i)} = - \frac{\pi}{a} \cdot \frac{1 + \sigma}{E_i} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(i)} (\operatorname{ch} \omega z + \omega z \operatorname{sh} \omega z) + D_{kn}^{(i)} (\operatorname{sh} \omega z + \omega z \operatorname{ch} \omega z) \right\} \cos \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.13)$$

$$v^{(i)} = - \frac{\pi}{b} \cdot \frac{1 + \sigma}{E_i} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + \right. \\ \left. + C_{kn}^{(i)} (\operatorname{ch} \omega z + \omega z \operatorname{sh} \omega z) + D_{kn}^{(i)} (\operatorname{sh} \omega z + \omega z \operatorname{ch} \omega z) \right\} \sin \frac{k\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} w^{(i)} = & -\frac{1+\sigma}{E_i} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega [A_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{sh} \omega z + B_{kn}^{(i)} \omega \operatorname{ch} \omega z + \\ & + C_{kn}^{(i)} [\omega z \operatorname{ch} \omega z - 2(1-2\sigma) \operatorname{sh} \omega z] + \\ & + D_{kn}^{(i)} [\omega z \operatorname{sh} \omega z - 2(1-2\sigma) \operatorname{ch} \omega z]] \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$i = 1, 2, 3$ — соответственно для верхнего, среднего и нижнего слоев.

Входящие в выражения (1.7)–(1.15) двенадцать коэффициентов $A_{kn}^{(i)}, B_{kn}^{(i)}, C_{kn}^{(i)}, D_{kn}^{(i)}$ определяются из граничных условий на поверхности (1.1) и условий сопряжения на контактных плоскостях (1.2).

Из условий сопряжения (1.2) на верхней контактной плоскости, т. е. контактной плоскости между верхним и средним слоями, получаем следующую систему алгебраических уравнений*

$$\begin{aligned} A^{(1)}\omega - (1-2\sigma)C^{(1)} &= A^{(2)}\omega - (1-2\sigma)C^{(2)} \\ B^{(1)}\omega + 2\sigma D^{(1)} &= B^{(2)}\omega + 2\sigma D^{(2)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$A^{(1)}\omega + C^{(1)} = \frac{E_1}{E_2} (A^{(2)}\omega + C^{(2)})$$

$$B^{(1)}\omega + 2(1-2\sigma)D^{(1)} = \frac{E_1}{E_2} [B^{(2)}\omega - 2(1-2\sigma)D^{(2)}].$$

Шесть условий (1.2) на верхней контактной плоскости привелись к четырем уравнениям (1.16) в силу того, что условия $v^{(1)} = v^{(2)}$ и $u^{(1)} = u^{(2)}$ приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для условий $X_z^{(1)} = X_z^{(2)}, Y_z^{(1)} = Y_z^{(2)}$.

Решая систему (1.16) относительно коэффициентов верхнего слоя, получим

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= A^{(2)} + \frac{1-2\sigma}{\omega} R (\omega A^{(2)} + C^{(2)}) \\ B^{(1)} &= B^{(2)} + \frac{2\sigma}{\omega} R [\omega B^{(2)} - 2(1-2\sigma)D^{(2)}] \\ C^{(1)} &= C^{(2)} + R (\omega A^{(2)} + C^{(2)}) \\ D^{(1)} &= D^{(2)} - R [\omega B^{(2)} - 2(1-2\sigma)D^{(2)}], \end{aligned} \quad (1.17)$$

где

$$R = \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\frac{E_1}{E_2} - 1 \right).$$

Условия сопряжения (1.3) на нижней контактной плоскости после некоторых преобразований приводят к следующей системе уравнений

* Для простоты записи индекс kn при коэффициентах в дальнейшем изложении опускаем.

$$\begin{aligned}
& A \omega \operatorname{ch} \beta + B \omega \operatorname{sh} \beta + C [\beta \operatorname{sh} \beta - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \beta] + D [\beta \operatorname{ch} \beta - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \beta] = 0 \\
& A \omega \operatorname{sh} \beta + B \omega \operatorname{ch} \beta + C (\beta \operatorname{ch} \beta + 2\sigma \operatorname{sh} \beta) + D (\beta \operatorname{sh} \beta + 2\sigma \operatorname{ch} \beta) = 0 \\
& A \omega \operatorname{ch} \beta + B \omega \operatorname{sh} \beta + C (\operatorname{ch} \beta + \beta \operatorname{sh} \beta) + D (\operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta) = \\
& = 2(1 - \sigma) Q \{A^{(2)} \omega \operatorname{ch} \beta + B^{(2)} \omega \operatorname{sh} \beta + C^{(2)} (\operatorname{ch} \beta + \beta \operatorname{sh} \beta) + D^{(2)} (\operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta)\}, \\
& A \omega \operatorname{sh} \beta + B \omega \operatorname{ch} \beta + C [\beta \operatorname{ch} \beta - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \beta] + D [\beta \operatorname{sh} \beta - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \beta] = \\
& = 2(1 - \sigma) Q \{A^{(2)} \omega \operatorname{sh} \beta + B^{(2)} \omega \operatorname{ch} \beta + C^{(2)} [\beta \operatorname{ch} \beta - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \beta] + \\
& + D^{(2)} [\beta \operatorname{sh} \beta - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \beta]\},
\end{aligned} \tag{1.18}$$

где

$$A = A^{(3)} - A^{(2)}, \quad B = B^{(3)} - B^{(2)}, \quad C = C^{(3)} - C^{(2)}, \quad D = D^{(3)} - D^{(2)},$$

$$\beta = \omega \hat{\alpha}_2, \quad Q = \frac{1}{2(1 - \sigma)} \left(\frac{E_3}{E_2} - 1 \right).$$

Здесь так же, как и в случае верхнего контакта, по указанной причине, шесть условий (1.3) приводятся к системе четырех уравнений.

Решая систему (1.18) относительно коэффициентов нижнего слоя, получим

$$\begin{aligned}
A^{(3)} &= A^{(2)} + Q \left\{ A^{(2)} [\beta \operatorname{sh} 2\beta - 2\sigma \operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{ch}^2 \beta] + \right. \\
&+ B^{(2)} \left[\beta \operatorname{ch} 2\beta + \frac{1}{2} (1 - 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta \right] + \\
&+ C^{(2)} \frac{1}{\omega} [\beta^2 \operatorname{ch} 2\beta + (1 - 2\sigma) (1 + 4\sigma) \operatorname{sh}^2 \beta + (1 - 2\sigma)] + \\
&+ D^{(2)} \frac{1}{\omega} \left[\beta^2 \operatorname{sh} 2\beta + \frac{1}{2} (1 - 2\sigma) (1 + 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta - (1 - 2\sigma) \beta \right] \Big\} \\
B^{(3)} &= B^{(2)} - Q \left\{ A^{(2)} \left[\frac{1}{2} (1 - 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta + \beta \operatorname{ch} 2\beta \right] + \right. \\
&+ B^{(2)} [\beta \operatorname{sh} 2\beta - 2\sigma \operatorname{ch} 2\beta + \operatorname{sh}^2 \beta] + \\
&+ C^{(2)} \frac{1}{\omega} \left[\frac{1}{2} (1 - 2\sigma) (1 + 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta + \beta^2 \operatorname{sh} 2\beta + (1 - 2\sigma) \beta \right] + \\
&+ D^{(2)} \frac{1}{\omega} [\beta^2 \operatorname{ch} 2\beta + (1 - 2\sigma) (1 + 4\sigma) \operatorname{ch}^2 \beta - (1 - 2\sigma)] \Big\} \tag{1.19} \\
C^{(3)} &= C^{(2)} + Q \left\{ A^{(2)} \omega \operatorname{ch} 2\beta + B^{(2)} \omega \operatorname{sh} 2\beta + \right. \\
&+ C^{(2)} [\beta \operatorname{sh} 2\beta - (1 - 4\sigma) \operatorname{sh} \beta + 1] + \\
&+ D^{(2)} \left[\beta \operatorname{ch} 2\beta - \frac{1}{2} (1 - 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$D^{(3)} = D^{(2)} - Q \left\{ A^{(2)} \omega \operatorname{sh} 2\beta + B^{(2)} \omega \operatorname{ch} 2\beta + \right. \\ \left. + C^{(2)} \left[\beta \operatorname{ch} 2\beta - \frac{1}{2} (1 - 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta \right] + \right. \\ \left. + D^{(2)} [\beta \operatorname{sh} 2\beta - (1 - 4\sigma) \operatorname{ch}^2 \beta - 1] \right\}.$$

Таким образом, используя условия на контактах (1.2) и (1.3), вместо первоначальных двенадцати неизвестных постоянных, как видно из (1.17) и (1.19), имеем четыре: $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$. Подставляя значения напряжений (1.9)–(1.11) в условия (1.1) и используя соотношения (1.17), (1.19), а также представив внешнюю нагрузку в виде двойного ряда Фурье по (1.4), получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} & \omega [\operatorname{ch} \alpha + R \alpha \operatorname{sh} \alpha] A^{(2)} - \omega [\operatorname{sh} \alpha + R (\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)] B^{(2)} + \\ & + [|\alpha \operatorname{sh} \alpha - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \alpha| + R \alpha \operatorname{sh} \alpha] C^{(2)} - \\ & - [|\alpha \operatorname{ch} \alpha - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \alpha| - 2(1 - 2\sigma) R (\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)] D^{(2)} = \frac{K_{m,a}}{\omega^2}, \\ & \omega [\operatorname{sh} \alpha + R (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha)] A^{(2)} - \omega [\operatorname{ch} \alpha - R \alpha \operatorname{sh} \alpha] B^{(2)} + \\ & + [|\alpha \operatorname{ch} \alpha + 2\sigma \operatorname{sh} \alpha| + R (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha)] C^{(2)} - \\ & - [|\alpha \operatorname{sh} \alpha + 2\sigma \operatorname{ch} \alpha| + 2(1 - 2\sigma) R \alpha \operatorname{sh} \alpha] D^{(2)} = 0, \\ & \omega [\operatorname{ch} \gamma + Q [\operatorname{sh}^2 \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{sh} (\varphi - \beta)]] A^{(2)} + \\ & + \omega [\operatorname{sh} \gamma + Q [\operatorname{ch}^2 \operatorname{sh} \varphi - \varphi \operatorname{ch} (\varphi - \beta)]] B^{(2)} + [|\gamma \operatorname{sh} \gamma - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \gamma| + \\ & + Q [-\beta \varphi \operatorname{ch} (\varphi - \beta) - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \varphi + (\beta + \varphi) \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi + \\ & + 2(1 - 2\sigma) \varphi \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \varphi]] C^{(2)} + [|\gamma \operatorname{ch} \gamma - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \gamma| + \\ & + Q [\beta \varphi \operatorname{sh} (\varphi - \beta) - 2(1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi + 2(1 - 2\sigma) \varphi \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \varphi]] D^{(2)} = 0, \\ & \omega [\operatorname{sh} \gamma + Q [\operatorname{ch}^2 \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} (\varphi - \beta)]] A^{(2)} + \\ & + \omega [\operatorname{ch} \gamma + Q [\operatorname{sh}^2 \operatorname{sh} \varphi - \varphi \operatorname{sh} (\varphi - \beta)]] B^{(2)} + [|\gamma \operatorname{ch} \gamma + 2\sigma \operatorname{sh} \gamma| + \\ & + Q [-\beta \varphi \operatorname{sh} (\varphi - \beta) + 2(1 - 2\sigma) \varphi \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \varphi + \\ & + \beta \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \varphi + \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi]] C^{(2)} + [|\gamma \operatorname{sh} \gamma + 2\sigma \operatorname{ch} \gamma| + Q [\beta \varphi \operatorname{ch} (\varphi - \beta) + \\ & + 2(1 - 2\sigma) \varphi \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi + \varphi \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \varphi + \beta \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi + \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \varphi]] D^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$\alpha = \omega \delta_1, \quad \beta = \omega \delta_2, \quad \varphi = \omega \delta_3, \quad \gamma = \beta + \varphi.$$

Шесть условий (1.1) привелись к четырем уравнениям (1.20), т. к. условия $X_z^{(1)} = 0$, $Y_z^{(1)} = 0$ при $z = -\delta_1$ приводят к одинаковым уравнениям. То же имеет место для $X_z^{(3)} = 0$, $Y_z^{(3)} = 0$ при $z = \delta_2 + \delta_3$.

Решая систему (1.20), находим

$$A^{(2)} = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \quad B^{(2)} = \frac{\Delta_B}{\Delta}; \quad C^{(2)} = \frac{\Delta_C}{\Delta}; \quad D^{(2)} = \frac{\Delta_D}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\omega^2} = & [(z + \gamma)^2 - \text{sh}^2(z + \gamma)] + R [2(a^2 \text{sh}^2 \gamma - \gamma^2 \text{sh}^2 z) - \\ & - 4(1 - \sigma) [\text{sh} z \text{ch} \gamma \text{sh}(z + \gamma) - z(z + \gamma)] - \\ & - R^2 [\gamma^2 + (1 - 2\sigma)^2 + (3 - 4\sigma) \text{ch}^2 \gamma] (\text{sh}^2 z - a^2) + \\ & + Q [2(\varphi^2 \text{sh}^2(z + \beta) - (z + \beta)^2 \text{sh}^2 \varphi) - 4(1 - \sigma) [\text{sh} \varphi \text{ch}(z + \beta) \text{sh}(z + \gamma) - \\ & - (z + \gamma) \varphi]] - Q^2 [(1 - 2\sigma)^2 + (z + \beta)^2 + (3 - 4\sigma) \text{ch}^2(z + \beta)] (\text{sh}^2 \varphi - \varphi^2) + \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} & + RQ [2(3 - 4\sigma) \text{sh}^2 z \text{sh}^2 \varphi + 4\beta^2 \text{sh}^2 z \text{sh}^2 \varphi - 8(1 - \sigma) \beta (\varphi \text{sh}^2 z + a \text{sh}^2 \varphi) - \\ & - 2(3 - 4\sigma) (\varphi^2 \text{sh}^2 z + a^2 \text{sh}^2 \varphi) + 8(1 - \sigma)^2 a \varphi - 2a^2 \varphi^2 \text{ch} 2\beta + \\ & + 4(1 - \sigma) [\varphi^2 \text{sh} z \text{sh}(z + 2\beta) + a^2 \text{sh} \varphi \text{sh}(\varphi + 2\beta)] - \\ & - 8(1 - \sigma)^2 \text{sh} z \text{sh} \varphi \text{ch}(z + \beta + \gamma)] + R^2 Q [2(\beta^2 \text{sh}^2 \varphi + \varphi^2 \text{sh}^2 \beta) + \\ & + 4(1 - \sigma) [\varphi^2 \text{sh}^2 \beta - (3 - 4\sigma) \text{sh} \varphi \text{sh} \beta \text{ch} \gamma - \beta \varphi]] (\text{sh}^2 z - a^2) + \\ & + RQ^2 [2(\beta^2 \text{sh}^2 z + z^2 \text{sh}^2 \varphi) + 4(1 - \sigma) [z^2 \text{sh}^2 \beta - (3 - 4\sigma) \text{sh} z \text{sh} \beta \text{ch}(z + \beta) - \\ & - a \beta]] (\text{sh}^2 \varphi - \varphi^2) + R^2 Q^2 [\beta^2 - (3 - 4\sigma)^2 \text{sh}^2 \beta] (\text{sh}^2 z - a^2) (\text{sh}^2 \varphi - \varphi^2). \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \Delta_A \frac{\omega}{K_{m,n}} = & (\gamma \text{ch} z + 2\sigma \text{sh} z) (z + \gamma) - (z \text{ch} \gamma + 2\sigma \text{sh} \gamma) \text{sh}(z + \gamma) - \\ & - R \left\{ \frac{1}{2} (\text{sh} 2\gamma - 2\gamma) (\text{sh} z + z \text{ch} z) + [\gamma^2 + 2(1 - 2\sigma) (\text{ch}^2 \gamma - \sigma)] a \text{sh} z \right\} - \\ & - Q [(1 + 4\sigma - 4\sigma^2) \text{ch} z \text{sh}^2 \varphi + 2\beta (z + \beta) \text{ch} z \text{sh}^2 \varphi - \varphi^2 [a \text{sh}(z + 2\beta) + \\ & + 2\sigma \text{ch}(z + 2\beta)] + 2(1 - \sigma) \text{sh} \varphi \text{ch} \gamma [z \text{ch}(z + \beta) + 2\sigma \text{sh}(z + \beta)] + \\ & + 2(1 - \sigma) \text{sh} \varphi \text{sh} \beta [z \text{sh}(z + \gamma) + 2\sigma \text{ch}(z + \gamma)] + 4\sigma \beta \text{sh} z \text{sh}^2 \varphi - \\ & - 4\sigma (1 - \sigma) \varphi \text{sh} z + (1 + 2\sigma) a \text{sh} z \text{sh}^2 \varphi - 2(1 - \sigma) a \varphi \text{ch} z - \\ & - [4(1 - \sigma) \beta + (3 - 4\sigma) \varphi] \varphi \text{ch} z - Q^2 [2(1 - \sigma) \text{ch} z + \beta (z + \beta) \text{ch} z + \\ & + (z + 2\beta) \text{sh} z + (3 - 4\sigma) \text{sh} \beta [z \text{ch}(z + \beta) + 2\sigma \text{sh}(z + \beta)]] (\text{sh}^2 \varphi - \varphi^2) + \\ & + RQ [2(1 - 2\sigma) \varphi^2 \text{ch} 2\beta + [2\beta^2 - (1 - 2\sigma)] \text{sh}^2 \varphi - \\ & - [4(1 - \sigma) \beta + (3 - 4\sigma) \varphi] \varphi - 8(1 - \sigma) (1 - 2\sigma) \text{sh} \beta \text{sh} \varphi \text{ch} \gamma] a \text{sh} z - \\ & - [2\beta \text{sh}^2 \varphi - \varphi^2 \text{sh} 2\beta - 2(1 - \sigma) \varphi + 2(1 - \sigma) \text{sh} \varphi \text{ch}(\beta + \gamma)] (\text{sh} z + a \text{ch} z) + \\ & + RQ^2 \left\{ [\beta^2 - 2(1 - 2\sigma) (3 - 4\sigma) \text{sh}^2 \beta] a \text{sh} z - \right. \\ & \left. - \left(\beta + \frac{3 - 4\sigma}{2} \text{sh} 2\beta \right) (\text{sh} z + a \text{ch} z) \right\} (\text{sh}^2 \varphi - \varphi^2). \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_B \frac{\omega}{K_{m,n}} = & (\gamma \operatorname{sh} \alpha + 2\sigma \operatorname{ch} \alpha) (\alpha + \gamma) + (\alpha \operatorname{sh} \gamma + 2\sigma \operatorname{ch} \gamma) \operatorname{sh} (\alpha + \gamma) + \\
& + R [|\gamma^2 + \operatorname{ch}^2 \gamma - (1 - 2\sigma)^2| (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) + (1 - 2\sigma) (\operatorname{sh} 2\gamma + 2\gamma) \alpha \operatorname{sh} \alpha] - \\
& - Q [(1 + 4\sigma - 4\sigma^2) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi + 2\beta (\alpha + \beta) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi + \varphi^2 [\alpha \operatorname{ch} (\alpha + 2\beta) + \\
& + 2\sigma \operatorname{sh} (\alpha + 2\beta)] - 2(1 - \sigma) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \gamma [\alpha \operatorname{ch} (\alpha + \beta) + 2\sigma \operatorname{sh} (\alpha + \beta)] - \\
& - 2(1 - \sigma) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} \beta [\alpha \operatorname{sh} (\alpha + \gamma) + 2\sigma \operatorname{ch} (\alpha + \gamma)] + 4\sigma \beta \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi - \\
& - 4\sigma (1 - \sigma) \varphi \operatorname{ch} \alpha + (1 + 2\sigma) \alpha \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi - 2(1 - \sigma) \alpha \varphi \operatorname{sh} \alpha - \\
& - [4(1 - \sigma) \beta + (3 - 4\sigma) \varphi] \varphi \operatorname{sh} \alpha] - Q^2 [2(1 - \sigma) \operatorname{sh} \alpha + \beta (\alpha + \beta) \operatorname{sh} \alpha + \\
& + (\alpha + 2\sigma \beta) \operatorname{ch} \alpha - (3 - 4\sigma) \operatorname{ch} \beta [\alpha \operatorname{ch} (\alpha + \beta) + 2\sigma \operatorname{sh} (\alpha + \beta)]] (\operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2) + \\
& + RQ [4(1 - \sigma) \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \gamma + [4(1 - \sigma) \beta + (3 - 4\sigma) \varphi] \varphi - \varphi^2 \operatorname{ch} 2\beta - \\
& - 2\beta^2 \operatorname{sh}^2 \varphi - 2(1 + 2\sigma - 4\sigma^2) \operatorname{sh}^2 \varphi] (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \\
& + 2(1 - 2\sigma) [2(1 - \sigma) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} (\beta + \gamma) + 2(1 - \sigma) \varphi - \varphi^2 \operatorname{sh} 2\beta - 2\beta \operatorname{sh}^2 \varphi] \alpha \operatorname{sh} \alpha + \\
& + RQ^2 [(3 - 4\sigma) \operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2] (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \\
& + (1 - 2\sigma) [(3 - 4\sigma) \operatorname{sh} 2\beta - 2\beta] \alpha \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2). \quad (1.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_C}{K_{m,n}} = & \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} (\alpha + \gamma) - (\alpha + \gamma) \operatorname{sh} \alpha + \\
& + R \left\{ \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\gamma - 2\gamma) (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) - (1 - 2\sigma + \operatorname{ch}^2 \gamma) \alpha \operatorname{sh} \alpha \right\} + \\
& + Q [2(\alpha + \beta) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2 \operatorname{ch} (\alpha + 2\beta) - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi - 2(1 - \sigma) \varphi \operatorname{sh} \alpha + \\
& + 2(1 - \sigma) [\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} (\alpha + \gamma) + \operatorname{sh} \gamma \operatorname{ch} (\alpha + \beta)] \operatorname{sh} \varphi] + \\
& + Q^2 [(3 - 4\sigma) \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) \operatorname{sh} \alpha - (1 - 2\sigma) \operatorname{ch} \alpha] (\operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2) + \\
& + RQ [2\beta \operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2 \operatorname{sh} 2\beta - 2(1 - \sigma) \varphi + 2(1 - \sigma) \operatorname{sh} \varphi \operatorname{ch} (\beta + \gamma)] (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) + \\
& + [\varphi^2 \operatorname{ch} 2\beta - 4(1 - \sigma) \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \varphi \operatorname{sh} \gamma + (5 - 6\sigma) \operatorname{sh}^2 \varphi] \alpha \operatorname{sh} \alpha + \\
& + RQ \left\{ \left(\frac{3 - 4\sigma}{2} \operatorname{sh} 2\beta + \beta \right) (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) - \right. \\
& \left. - (3 - 4\sigma) \alpha \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi \right\} (\operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2). \quad (1.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_D}{K_{m,n}} = & - \operatorname{ch} \gamma \operatorname{sh} (\alpha + \gamma) - (\alpha + \gamma) \operatorname{ch} \alpha - \\
& - R \left\{ (1 - 2\sigma + \operatorname{ch}^2 \gamma) (\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha) - \frac{1}{2} (\operatorname{sh} 2\gamma + 2\gamma) \alpha \operatorname{sh} \alpha \right\} + \\
& + Q [2(\alpha + \beta) \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi + \varphi^2 \operatorname{sh} (\alpha + 2\beta) - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}^2 \varphi - \\
& - 2(1 - \sigma) \varphi \operatorname{ch} \alpha - 2(1 - \sigma) [\operatorname{ch} \gamma \operatorname{ch} (\alpha + \beta) + \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} (\alpha + \gamma)] \operatorname{sh} \varphi] + \\
& + Q^2 [(\alpha + \beta) \operatorname{ch} \alpha - (1 - 2\sigma) \operatorname{sh} \alpha - (3 - 4\sigma) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} (\alpha + \beta)] (\operatorname{sh}^2 \varphi - \varphi^2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + RQ \{ [2\text{sh}^2\varphi + \varphi^2 \text{ch} 2\beta - 4(1-\sigma) \text{sh}\beta \text{sh}\varphi \text{ch}\gamma - (1+2\sigma) \text{sh}^2\varphi] (\text{sh}\alpha + \alpha \text{ch}\alpha) + \\
 & + [2(1-\sigma)\varphi + 2(1-\sigma) \text{sh}\varphi \text{ch}(\beta + \gamma) - 2\beta \text{sh}^2\varphi - \varphi^2 \text{sh} 2\beta] \alpha \text{sh}\alpha \} + \\
 & + RQ^2 \left\{ \left(\frac{3-4\sigma}{2} \text{sh} 2\beta - \beta \right) \alpha \text{sh}\alpha - (3-4\sigma) (\text{sh}\alpha + \alpha \text{ch}\alpha) \text{sh}^2\beta \right\} (\text{sh}^2\varphi - \varphi^2).
 \end{aligned}
 \quad (1.26)$$

Определив таким образом коэффициенты $A^{(2)}$, $B^{(2)}$, $C^{(2)}$, $D^{(2)}$ по формулам (1.17) и (1.19), найдем соответственно коэффициенты для первого и третьего слоев. Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке плиты. Как частный случай, из данного решения можно получить решения для однослойных [2] и двухслойных [3] толстых плит.

§ 2. Изгиб свободно опертой трехслойной квадратной плиты под нагрузкой, распределенной по закону синуса

Рассмотрим квадратную трехслойную плиту с равными толщинами слоев, при этом пусть крайние слои имеют равные модули упругости. Положим, что нормальная нагрузка, приложенная к верхней граничной плоскости плиты, распределена по закону

$$p(x, y) = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

где P_0 — интенсивность нагрузки в центре плиты.

Для данной задачи в полученных выше результатах надо положить

$$n = k = 1, \quad a = b, \quad \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{h}{3}, \quad E_1 = E_3.$$

В последующих расчетах коэффициент Пуассона примем равным $\sigma = 0,25$.

Результаты расчетов приведены в таблицах, где помещены зна-

$$\begin{aligned}
 & \text{чения} \quad \frac{X_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0}, \quad \frac{Z_z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0}, \quad \frac{X_z\left(0, \frac{a}{2}, z\right)}{P_0}, \\
 & \frac{w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, z\right) E_2}{P_0 h} \quad \text{и} \quad \frac{u\left(0, \frac{a}{2}, z\right) E_2}{P_0 h}, \quad \text{вычисленные для отношений} \\
 & \frac{h}{a} = \frac{1}{10}, \frac{1}{5} \quad \text{при} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3}{E_2} = m = 2; \frac{1}{2}; 10; \frac{1}{10}.
 \end{aligned}$$

Полученные значения прогиба w сравниваются с прогибом w_0 , вычисленным по классической теории [4], который для рассматриваемой задачи имеет выражение

$$w_0 = \frac{81 P_0 a^4 (1 - \sigma^2)}{\pi^4 h^3 E_2} \cdot \frac{1}{1 + 2\sigma \frac{E_1}{E_2}} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

и с прогибом w^* , вычисленным по теории С. А. Амбарцумяна [1,5], которая основана на следующих предположениях:

1. В каждом слое нормальный к координатной плоскости линейный элемент пластинки после деформации не меняет своей длины.

2. При определении деформаций $e_{xx}^{(i)}$, $e_{yy}^{(i)}$ напряжение $Z_z^{(i)}$ в силу малости по отношению к $X_{x\pm}^{(i)}$ и $Y_y^{(i)}$ пренебрегается.

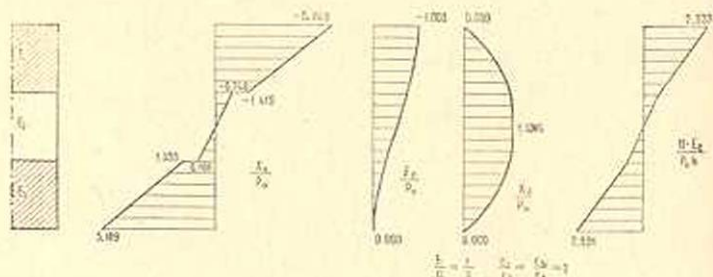
3. При определении деформаций $e_{xz}^{(i)}$ и $e_{yz}^{(i)}$ принято, что касательные напряжения $Z_x^{(i)}$ и $Z_y^{(i)}$ не отличаются от соответствующих напряжений, найденных в предположении справедливости гипотезы недеформируемых нормалей, данной для всего пакета пластинки в целом.

Прогиб, определенный по этой теории, для рассматриваемой задачи имеет следующее выражение

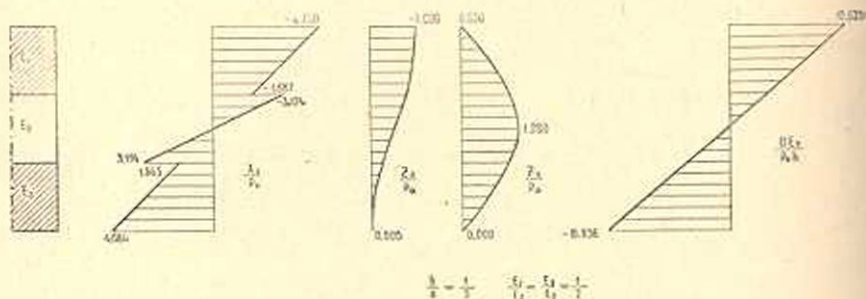
$$w^* = w_0 \left[1 + 0,548311 \cdot \frac{1 + 122 \frac{E_1}{E_2} + 120 \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2}{1 + 26 \frac{E_1}{E_2}} \cdot \frac{h^2}{a^2} \right] \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a},$$

где w_0 — соответствующее значение прогиба по классической теории.

Полученные результаты для случая $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$ представлены также графически на фиг. 2—5.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Произведенные расчеты показывают следующее:

1. Нормальное напряжение X_x , претерпевая разрыв непрерывности на плоскостях контактов слоев, по высоте плиты меняется практически линейно.

Таблица 1

Значения напряжений для $\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$

m	2			1/2			10			1/10		
$\frac{3z}{h}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$
-1	-19,709	-1,000	0,000	-18,613	-1,000	0,000	-21,172	-1,000	0,000	-15,454	-1,000	0,000
-2/3	-15,160	-0,961	0,967	-14,448	-0,971	0,916	-15,622	-0,959	1,021	-12,048	-0,989	0,760
-1/3	-10,686	-0,872	1,681	-10,355	-0,886	1,602	-10,148	-0,867	1,733	-8,702	-0,976	1,332
0	-6,254 -3,249	-0,734	2,149	-6,303 -12,114	-0,754	2,061	-4,712 -0,421	-0,727	2,142	-5,391 -51,314	-0,866	1,710
1/3	-1,148	-0,578	2,267	-4,114	-0,587	2,516	-0,135	-0,576	2,166	-16,999	-0,649	3,622
2/3	0,945	-0,422	2,269	4,097	-0,418	2,513	0,142	-0,426	2,171	17,199	-0,423	3,612
1	3,045 6,178	-0,265	2,157	12,337 6,126	-0,252	2,060	0,434 4,709	-0,274	2,157	51,516 5,087	-0,210	1,723
4/3	10,604	-0,127	1,685	10,177	-0,120	1,595	10,122	-0,133	1,741	8,402	-0,099	1,323
5/3	15,071	-0,038	0,968	14,267	-0,036	0,913	15,572	-0,041	1,024	11,746	-0,030	0,752
2	19,609	0,000	0	18,425	0	0,000	21,098	0,000	0,000	15,147	0,000	0,000

Примечание к таблицам 1 и 2. В плоскостях контактов $z = 0$ и $z = \frac{h}{3}$ приведены значения $\frac{X_x}{P_0}$ для каждого слоя.

Таблица 2

Значения напряжений для $\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$

m	2			1/2			10			1/10		
$\frac{3z}{h}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$	$\frac{X_x}{P_0}$	$\frac{Z_z}{P_0}$	$\frac{Z_x}{P_0}$
-1	-5,248	-1,000	0,000	-4,750	-1,000	0,000	-6,318	-1,000	0,000	-3,448	-1,000	0,000
-2/3	-3,907	-0,964	0,497	-3,693	-0,967	0,455	-4,352	-0,957	0,577	-2,683	-0,974	0,356
-1/3	-2,638	-0,868	0,849	-2,665	-0,877	0,801	-2,301	-0,850	0,908	-1,903	-0,904	0,626
0	-1,419 -0,746	-0,733	1,064	-1,687 -3,124	-0,748	1,032	-0,313 -0,038	-0,714	1,002	-1,198 -12,168	-0,803	0,816
1/3	-0,317	-0,580	1,120	-1,037	-0,586	1,255	-0,013	-0,574	1,013	-3,972	-0,618	1,706
2/3	0,306	-0,422	1,123	1,035	-0,408	1,248	0,010	-0,431	1,012	4,157	-0,366	1,709
1	0,708 1,393	-0,268	1,075	3,114 1,645	-0,248	1,012	0,032 0,337	-0,288	1,029	12,352 1,179	-0,186	0,765
4/3	2,600	-0,132	0,853	2,589	-0,121	0,787	2,204	-0,150	0,916	1,891	-0,091	0,592
5/3	3,807	-0,037	0,497	3,605	-0,033	0,451	4,279	-0,044	0,575	2,636	-0,025	0,338
2	5,109	0	0	4,684	0,000	0,000	6,287	0,000	0,000	3,427	0,000	0,000

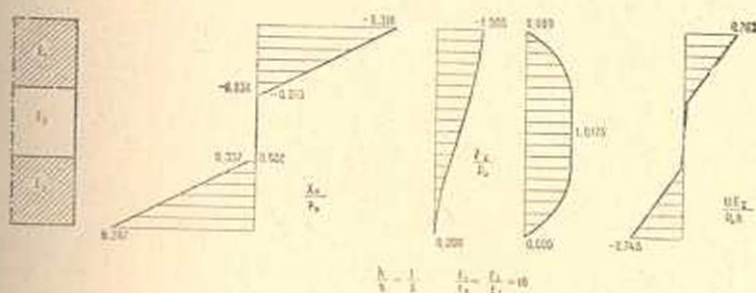
Таблица 4

Значения $\frac{uE_a}{P_0 h}$

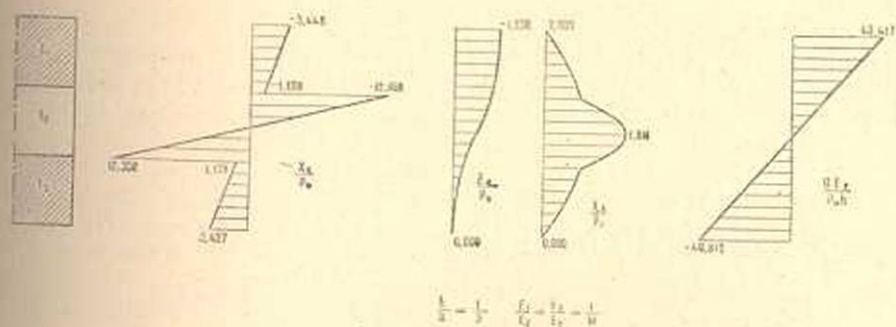
m $\frac{3z}{h}$	2		1/2		10		1/10	
	$\frac{h}{a}$ 1/10	1/5	1/10	1/5	1/10	1/5	1/10	1/5
-1	23,125	2,933	87,258	10,639	4,975	0,763	360,322	40,417
-2/3	17,713	2,140	67,441	8,326	3,653	0,531	279,302	30,919
-1/3	12,408	1,402	48,033	5,864	2,354	0,286	199,983	22,249
0	7,173	0,701	28,894	3,431	1,067	0,007	121,813	13,411
1/3	2,470	0,172	10,023	1,124	0,326	0,002	40,064	4,495
2/3	-2,592	-0,267	-10,114	-1,392	-0,410	-0,003	-41,398	-4,654
1	-7,480	-0,713	-29,652	-3,815	-1,146	-0,007	-123,154	-13,287
4/3	-12,708	-1,454	-48,782	-6,038	-2,427	-0,245	-201,358	-22,836
5/3	-18,00	-2,246	-68,178	-8,408	-3,721	-0,522	-280,656	-31,265
2	-23,417	-2,991	-87,974	-10,836	-5,037	-0,743	-361,600	-40,812

Отношение значений напряжений X_x на контакте слоев приблизительно равно отношению модулей упругости этих слоев.

2. Как показывают фигуры 2—5 и таблицы 1, 2, 5, пренебрегать напряжением Z_x по сравнению с X_x в случае относительно большей жесткости внутреннего слоя можно в более широких пределах $\frac{h}{a}$, чем в случае большей жесткости внешних слоев.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

3. Изменение касательного напряжения Z_x по высоте среднего слоя незначительно в случае большей жесткости наружных слоев. В случае, когда жесткость наружных слоев намного превосходит жесткость внутреннего слоя, можно полагать, что Z_x не меняется по высоте среднего слоя.

4. Как видно из фиг. 2—5, перемещение u в случае большей жесткости внутреннего слоя меняется практически линейно по высоте плиты; в случае же большей жесткости наружных слоев перемещение u по высоте каждого слоя меняется также линейно с угловыми точками на контактах.

5. Изменение прогиба по высоте плиты зависит как от относительной толщины плиты, так и от соотношений жесткостей слоев.

Таблица 5
Значения величин $\frac{Z_x^{\max}}{X_x^{\max}}$

$\frac{h}{a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
m		
2	0,051	0,191
1/2	0,054	0,211
10	0,047	0,158
1/10	0,020	0,082

В таблице 6 приведены значения величин $\frac{w^{\max} - w^{\min}}{w^{\max}}$.

Как показывает таблица 6, предположение $e_{xz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, принимаемое как в классической теории, так и в других приближенных теориях изгиба слоистых пластинок, вполне допустимо.

Таблица 6

$m \backslash \frac{h}{a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
2	0,008	0,036
1/2	0,009	0,032
10	0,009	0,050
1/10	0,008	0,032

6. Сравнение прогибов w и w_0 (таблица 7) показывает, что прогибы, определенные по классической теории при большей жесткости наружных слоев, имеют существенно заниженные значения, даже в случае достаточно тонких пластинок. При большей жесткости среднего слоя классическая теория изгиба слоистых пластинок дает достаточно хорошие результаты для прогиба.

7. Сравнение прогиба w с w^* (таблица 8) показывает, что приближенная теория [1], учитывающая деформации поперечного сдвига, дает хорошие результаты для прогиба при любых соотношениях жесткостей слоев, даже в случае достаточно толстых пластинок.

Таблица 7

Значения величин $\frac{w - w_0}{w}$

$m \backslash \frac{h}{a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
2	0,068	0,232
1/2	0,038	0,117
10	0,223	0,528
1/10	0,039	0,064

Таблица 8

Значения величин $\frac{w - w^*}{w}$

$m \backslash \frac{h}{a}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
2	0,002	0,002
1/2	0,002	0,011
10	0,006	0,009
1/10	0,018	0,018

Примечание к таблицам 7 и 8: при сравнении взяты значения прогибов в сечении $z = h/6$.

8. Сравнение w с w_0 и w^* , таблицы 4, 6 и графики перемещений u (фиг. 2—5) показывают, что допущение $e_{xz} = 0$, $e_{yz} = 0$ в случае большей жесткости наружных слоев приводит к большим погрешностям, тогда как предположение $e_{xz} = 0$ допустимо в широких пределах. Указанное обстоятельство является весьма важным, так как в построении приближенных теорий оболочек и пластин допущение $e_{xz} = 0$ вносит в общие уравнения больше упрощений, чем допущение $e_{xz} = 0$, $e_{yz} = 0$.

Ա. Պ. ՄԵԼԻՔԵՅԱՆ

ԵՌԱՇԵՐՏ ՀԱՍՏ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հորվածում դիտարկվում է ազատ հենված ուղղանկյուն կտրվածքով եռաշերտ հաստ սալի ծաման խնդիրը: Շերտերի նյութերի առաձգականության մոդուլները տարբեր են, բայց հաստատուն են յուրաքանչյուր շերտի համար: Ենթադրվում է նաև, որ Պուասսոնի գործակիցը երեք շերտի համար էլ միևնույնն է: Մասնավոր դեպքում լուծված է քառակուսի սալի ծաման խնդիրը տարբեր հարաբերական չափերի և շերտերի առաձգականության մոդուլների տարբեր հարաբերությունների համար: Ընդգրկում լուծման արդյունքները համեմատվում են բարակ սալերի ծաման տեսությունից ստացված արդյունքների հետ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Галеркин Б. Г. Упругие прямоугольные и треугольные свободно опертые толстые плиты, подверженные изгибу. Собрание сочинений, т. I, Изд. АН СССР, М., 1952.
3. Мелконян А. П. Об изгибе двухслойной толстой плиты. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 2, 1959.
4. Амбарцумян С. А. Расчет пологих цилиндрических оболочек, собранных из анизотропных слоев. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 4, № 5, 1951.
5. Хачатрян А. А. К расчету трехслойной ортотропной оболочки. Известия АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 5, 1959.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

К решению задачи изгиба анизотропных
призматических стержней симметричных профилей

Исследованию задачи об изгибе анизотропных стержней посвящено много работ, среди которых особое место занимают работы Сен-Венана [1], В. Фойгта [2], Л. С. Лейбензона [3], С. Г. Лехницкого [4, 5] и других.

Решение задачи изгиба неортотропного стержня методом малого параметра (геометрический параметр) получено нами в работах [6—8]. В этих работах на геометрию стержня налагается следующее ограничение: сечение стержня должно иметь вид удлиненного профиля.

В настоящей работе предлагается способ решения задачи об изгибе неортотропного стержня с симметричным сечением, свободный от вышеупомянутого ограничения. Дается способ решения задачи об изгибе анизотропного призматического стержня, когда последний в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси. Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ (физический параметр). Показано, что решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В качестве примера решена задача об изгибе неортотропного призматического стержня прямоугольного поперечного сечения.

§1. Метод решения задачи. Пусть анизотропный призматический стержень имеет только одну плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси (т. е. неортотропный стержень). Поместим начало координат в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем геометрическую ось стержня за ось z , а оси x и y совместим с главными осями инерции сечения. Примем далее, что силы, действующие из свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P , направленной по оси y .

Тогда напряженное состояние в сечении стержня будет

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_z = -\frac{P}{I}zy, \\ \tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tau_1, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \tau_2,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $\Psi(x, y)$ — функция напряжений при изгибе, I — момент инерции относительно главной оси x , τ_1, τ_2 — какое-нибудь частное решение уравнения

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_2}{\partial y} - \frac{P}{I} y = 0. \quad (1.2)$$

Для симметричного сечения, ограниченного кривыми

$$y = \pm f(x) \quad (1.3)$$

или этими кривыми и одной или двумя прямыми, параллельными оси y , уравнение (1.2) будет удовлетворено, если положить

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = \frac{P}{2I} [y^2 - f^2(x)]. \quad (1.4)$$

Далее, будем для простоты рассуждений считать поперечное сечение стержня односвязным. Учитывая (1.4), внесем выражения (1.1) в уравнения совместности. Тогда для определения функции напряжений $\Psi(x, y)$ получим дифференциальное уравнение с частными производными с неразделяющимися переменными [4]

$$\begin{aligned} a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \\ = -\frac{P}{I} \left[(2a_{43}x + a_{35}y) + \frac{a_{44} D f^2}{2} + a_{45} y \right] - 2\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\bar{\theta}$ — некоторая постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины,

$$D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \quad (k=1, 2, \dots),$$

a_{ij} — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44} > 0, \quad a_{55} > 0, \quad a_{44}a_{55} - a_{45}^2 > 0. \quad (1.6)$$

Граничные условия для $\Psi(x, y)$ на контуре s , согласно [9], будут

$$\Psi|_s = \frac{P}{2I} \int_0^s [y^2 - f^2(x)] dx = 0. \quad (1.7)$$

Произведя преобразования

$$y = \sqrt{\frac{a_{55}}{a_{44}}} \bar{y}, \quad \Psi(x, y) = \frac{P}{I} U(x, \bar{y}), \quad \bar{\theta} = \frac{P}{I} \theta, \quad (1.8)$$

из (1.5) придем к следующему дифференциальному уравнению для функции $U(x, \bar{y})$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{y}^2} = F_1(x, a_{ij}) + \mu F_2(\bar{y}, a_{ij}), \quad (1.9)$$

где

$$\mu = \frac{a_{45}}{\sqrt{a_{44}a_{55}}} < 1^*, \quad F_1(x, a_{ij}) = - \left[\frac{2a_{13}}{a_{44}}x + \frac{Df^2}{2} + \frac{2b}{a_{44}} \right], \quad (1.10)$$

$$F_2(\bar{y}, a_{ij}) = - \frac{(1+\varepsilon)\bar{y}a_{35}}{a_{44}}, \quad \varepsilon = \frac{a_{36}}{a_{45}}$$

Представим решение дифференциального уравнения с частными производными (1.9) в виде ряда по степеням малого параметра μ^{**}

$$U(x, \bar{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, \bar{y}) \mu^i. \quad (1.11)$$

Подставляя значения $U(x, \bar{y})$ из выражения (1.11) в дифференциальное уравнение (1.9) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим

$$\Delta U_0 = F_1(x, a_{ij}), \quad (1.12)$$

$$\Delta U_1 = F_2(\bar{y}, a_{ij}) + p_1(x, \bar{y}) \quad (1.13)$$

$$\Delta U_i = p_i(x, \bar{y}) \quad (i=2, 3, \dots), \quad (1.14)$$

где

$$p_i(x, \bar{y}) = 2 \frac{\partial^2 U_{i-1}}{\partial x \partial \bar{y}} \quad (i=1, 2, 3, \dots), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2}$$

Из (1.7) при помощи (1.11) легко получаются

$$U_i|_S = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (1.15)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (1.9) сводится к решению рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (1.12)–(1.14) с условием (1.15).

Теперь рассмотрим задачу об изгибе призматического неортотропного стержня прямоугольного поперечного сечения.

§ 2. Изгиб призматического анизотропного стержня прямоугольного поперечного сечения. Рассмотрим задачу об изгибе анизотропного (имеющего в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, нормальную к его оси) стержня прямоугольного поперечного сечения, стороны которого равны a и b .

В данном случае нужно положить $f(x) = \frac{b}{2}$. Тогда формулы для напряжений принимают вид

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P}{2I} \left(y^2 - \frac{b^2}{4} \right), \quad (2.1)$$

где

$$I = \frac{ab^3}{12}$$

* Отметим, что для ортотропного стержня $\mu=0$.

** На доказательстве сходимости ряда (1.11) здесь мы не останавливаемся.

Легко видеть, что здесь постоянную θ можно положить равной нулю.

Для определения $U_0(x, y)$ нужно решить уравнение (1.12) при условиях

$$\begin{aligned} U_0(x, y) &= 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{b_1}{2}, \\ U_0(x, y) &= 0 \quad \text{при } x = \pm \frac{a}{2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$b_1 = b \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}.$$

Введем безразмерные координаты (ξ, η) следующим образом

$$\xi = \frac{\pi}{a} x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}\right), \quad \eta = \frac{\pi}{b_1} y \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.3)$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.12) можно представить так

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial \eta^2} = \tilde{\rho}_0 \xi, \quad (2.4)$$

где

$$\lambda = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}, \quad \tilde{\rho}_0 = -\frac{2 a_{13} a b_1^2}{\pi^3 a_{44}}. \quad (2.5)$$

Для решения дифференциального уравнения (2.4) при соответственном граничном условии (2.2) воспользуемся конечным синус-преобразованием Фурье [10]

$$\bar{U}_0(p, \eta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U_0(\xi, \eta) \sin 2p\xi d\xi, \quad (2.6)$$

где p — целое положительное число. Тогда формула обращения для преобразования (2.6) имеет вид

$$U_0(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \bar{U}_0(p, \eta) \sin 2p\xi. \quad (2.7)$$

Умножим уравнение (2.4) на ядро $\sin 2p\xi$ и проинтегрируем его затем по ξ в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Интегрируя по частям получившееся выражение и принимая во внимание (2.6), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 \bar{U}_0}{d\eta^2} - 4\lambda^2 p^2 \bar{U}_0 = -\frac{\pi \tilde{\rho}_0}{2} \frac{(-1)^p}{p}. \quad (2.8)$$

Нетрудно видеть, что общее решение уравнения (2.8) можно записать в виде

$$\bar{U}_0(p, \eta) = A_p \operatorname{sh} 2\lambda p \eta + B_p \operatorname{ch} 2\lambda p \eta + \frac{\pi \bar{\rho}_0}{8\lambda^2} \frac{(-1)^p}{p^3}. \quad (2.9)$$

Для определения A_p и B_p воспользуемся первым из граничных условий (2.2). Тогда

$$A_p = 0, \quad B_p = -\frac{\pi \bar{\rho}_0}{8\lambda^2 p^3 \operatorname{ch} \lambda p \pi}. \quad (2.10)$$

Итак, при помощи (2.7), (2.9) и (2.10) можно записать

$$U_0(\xi, \eta) = \frac{\bar{\rho}_0}{4\lambda^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda p \eta}{\operatorname{ch} \lambda p \pi} \right] \sin 2p\xi. \quad (2.11)$$

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Подставляя выражение $U_0(\xi, \eta)$ из (2.11) в (1.13) и учитывая (2.3), получим

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta^2} = \bar{\rho}_1 \eta + \bar{\rho}_2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda p \eta}{\operatorname{ch} \lambda p \pi} \cos 2p\xi, \quad (2.12)$$

где

$$\bar{\rho}_1 = -\frac{b_1^3}{\pi^3} \frac{(1+\varepsilon)a_{35}}{a_{44}}, \quad \bar{\rho}_2 = -2\bar{\rho}_0.$$

Для решения уравнения (2.12) при соответственном граничном условии (1.15) опять воспользуемся конечным синус-преобразованием Фурье

$$\bar{U}_1(r, \eta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} U_1(\xi, \eta) \sin r \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right) d\xi. \quad (2.13)$$

При этом формула обращения для преобразования (2.13) будет

$$U_1(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \bar{U}_1(r, \eta) \sin \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right) r. \quad (2.14)$$

Умножим уравнение (2.12) на ядро $\sin r \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right)$, полученное выражение проинтегрируем по ξ в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Выполняя интегрирование по частям и принимая во внимание (2.13), находим

$$\frac{d^2 \bar{U}_1}{d\eta^2} - \lambda^2 (2n+1)^2 \bar{U}_1(2n+1; \eta) = A_{1n} \eta + \sum_{k=0,1}^{\infty} \frac{A_{kn}}{v_{kn}} \frac{\operatorname{ch} 2\lambda (2k+1) \eta}{\operatorname{ch} \lambda \pi (2k+1)}, \quad (2.15)$$

где

$$A_{1n} = \frac{2\tilde{\rho}_1}{2n+1}, \quad A_{kn} = -\frac{2(2n+1)\rho_2}{2k+1}, \quad (2.16)$$

$$v_{kn} = 4(2k+1)^2 - (2n+1)^2.$$

Общее решение (2.15) при соответственном граничном условии (1.15) можно представить в виде

$$U_1(2n+1; \eta) = \frac{A_{1n}}{\lambda^2(2n+1)^2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \lambda(2n+1)\eta}{\operatorname{sh} \lambda(2n+1)\frac{\pi}{2}} - \eta \right] -$$

$$- \frac{1}{\lambda^2} \sum_{k=0,1}^{\infty} A_{kn} \frac{1}{4(2k+1)^2 - (2n+1)^2} \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda \eta(2n+1)}{\operatorname{ch} \lambda \frac{\pi}{2}(2n+1)} - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda \eta(2k+1)}{\operatorname{ch} \lambda \pi(2k+1)} \right]. \quad (2.17)$$

Учитывая (2.14), для второго приближения $U_1(\xi, \eta)$ находим следующее выражение

$$U_1(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi \lambda^2} \sum_{n=0,1}^{\infty} \left\{ \frac{A_{1n}}{(2n+1)^2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} \lambda(2n+1)\eta}{\operatorname{sh} \lambda(2n+1)\frac{\pi}{2}} - \eta \right] - \right.$$

$$- \sum_{k=0,1}^{\infty} A_{kn} \frac{1}{4(2k+1)^2 - (2n+1)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda \eta(2n+1)}{\operatorname{ch} \lambda(2n+1)\frac{\pi}{2}} - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda(2k+1)\eta}{\operatorname{ch} \lambda \pi(2k+1)} \right] \left. \right\} \sin \left(\xi + \frac{\pi}{2} \right) (2n+1). \quad (2.18)$$

Далее, подставляя выражение $U_1(\xi, \eta)$ из (2.18) в (1.14) и учитывая (2.3), окончательно для $U_2(\xi, \eta)$, аналогично, как для U_1 , находим

$$U_2(\xi, \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \left(D_t \operatorname{sh} 2\lambda t \eta + C_t \operatorname{ch} 2\lambda t \eta + \frac{1}{4\lambda^2 t} \times \right.$$

$$\times \left[\sum_n^{\infty} E_n(t) \left[\frac{1}{t} + \frac{4tF_n \operatorname{ch}(2n+1)\frac{\eta}{\lambda}}{(2n+1)^2 - 4t^2} \right] + \right.$$

$$+ \sum_n^{\infty} \sum_k^{\infty} T_{nk}(t) \left(P_n \left[\frac{\operatorname{sh}(4t-2n-1)\lambda \eta}{2n+1-2t} - \frac{\operatorname{sh}(2n+1)\lambda \eta}{2n+1+2t} \right] + \right.$$

$$\left. \left. + Q_k \left[\frac{\operatorname{sh} 2\lambda(2k+1)\eta}{2(2k+1+t)} + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda(4t-2k-1)\eta}{2(2k+1-t)} \right] \right) \right) \sin 2t\xi, \quad (2.19)$$

где

$$C_t = -\frac{1}{8\lambda^2 t \operatorname{ch} \lambda t \pi} \sum_n^{\infty} E_n(t) \left[\frac{1}{t} + \frac{4tF_n \operatorname{ch}(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 - 4t^2} \right],$$

$$\begin{aligned}
D_t = & -\frac{1}{8\lambda^2 t \operatorname{sh} \lambda t \pi} \sum_n \sum_k T_{nk}(t) \left\{ P_n \left[\frac{\operatorname{sh}(4t-2n-1) \frac{\lambda \pi}{2}}{2n+1-2t} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\operatorname{sh}(2n+1) \frac{\lambda \pi}{2}}{2n+1+2t} \right] + Q_k \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda \pi (2k+1)}{2(2k+1+t)} + \frac{\operatorname{sh} \lambda \pi (4t-2k-1)}{2(2k+1-t)} \right] \right\}, \\
E_n(t) = & -\frac{8}{\pi \lambda} \frac{A_{1n}}{4t^2 - (2n+1)^2}, \quad F_n = \frac{(2n+1) \lambda \pi}{2 \operatorname{sh} \lambda (2n+1) \frac{\pi}{2}}, \\
\rho_n = & \frac{2n+1}{\operatorname{ch} \lambda (2n+1) \frac{\pi}{2}}, \quad Q_k = \frac{2(2k+1)}{\operatorname{ch} \lambda \pi (2k+1)}, \\
T_{nk}(t) = & \frac{4\tilde{p}_n(2n+1)}{[4(2k+1)^2 - (2n+1)^2]} \left\{ \frac{1}{4(2k+1)^2 - (2n+1+2t)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{16t(2k+1)}{[(2n+1)^2 - 4(2k+1+t)^2][(2n+1)^2 - 4(2k+1-t)^2]} \right\}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Итак, имея $U_2(\xi, \eta)$, при помощи (1.14) и (1.15) последовательно можно определить $U_i(\xi, \eta)$ ($i=3, 4, \dots$), а следовательно, и значение функции напряжений $\Psi(x, y)$. Имея функцию напряжений, при помощи (2.1) можно определить касательные напряжения.

Поскольку нашей целью являлось определение функции напряжений при изгибе симметричных профилей, мы отыскивали решение (1.5) при граничных условиях (1.7).

Однако следует отметить, что этим методом можно решить более общее уравнение

$$a_{41} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = f(x, y; a_{ij})$$

при более общих граничных условиях

$$\Psi|_s = \varphi(s),$$

что является предметом исследования автора в настоящее время.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Поступила 3 V 1962

Վ. Ս. Սարգսյան

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՊՐՈՌԻԵԼՆԵՐՈՎ ԱՆԻՋՈՏՐՈՊ ՊՐԻԶՄԱՅԱԶԵՎ ԶՈՂԵՐԻ
ԾՈՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[6—8] աշխատություններում փոքր պարամետրի (երկրաչափական պարամետր) օգնությամբ լուծված է ոչ օրթոգոնալ պրիզմաձև ձողերի ծաման

խնդիրը: Այդ դեպքերում ձողի երկրաչափական մեծությունների վրա գրված է հետևյալ սահմանափակումը՝ ձողի լայնական կտրվածքը պետք է լինի երկարացված պրոֆիլ:

Ներկա աշխատության մեջ տրվում է անիզոտրոպ (ոչ օրթոտրոպ) պրիզմայաձև ձողերի ծաման խնդրի լուծման եղանակ: Լուծումը ներկայացված է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր): Այդ եղանակով չանջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծումը բերվում է անջատվող փոփոխականներով մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման լուծման:

Որպես կիրառություն լուծված է անիզոտրոպ պրիզմայաձև ուղղանկյուն կտրվածքով ձողի ծաման խնդիրը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Saint-Venant B. Mémoire sur la torsion des prismes. „Mémoires présentés par divers savants a l'Académie des Sciences“, Sciences math. et phys., t. XIV, 1856. Paris.
2. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. Leipzig-Berlin (Teubner), 1928.
3. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. I. Изд. АН СССР, М., 1951.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.-Л., 1950.
5. Лехницкий С. Г. О равновесии анизотропной консольной балки. ПММ, **6**, вып. 1, 1942.
6. Саркисян В. С. Некоторые задачи об изгибе анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненных профилей. ДАН АрмССР, **32**, № 3, 1961.
7. Саркисян В. С. Изгиб анизотропных призматических стержней удлиненных симметричных профилей. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 1961.
8. Саркисян В. С. О центре изгиба анизотропного стержня с удлиненным симметричным авиационным профилем, изготовленного из ортотропного материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 4, 1962.
9. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
10. Гронттер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, М., 1956.

Г. А. Тевзадзе

К вопросу об устойчивости системы трех тел

В данной работе мы исследуем вопросы о распадах или изменениях конфигурации систем, состоящих из трех тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Известно, что Галактика содержит большое количество кратных звезд, среди которых подавляющее большинство является кратными звездами обыкновенного типа. В случае тройных звезд этой системы, в которых одна из звезд находится на большом расстоянии от двух других, образующих относительно тесную пару, и они, т. е. пара и далекая звезда, обращаются вокруг общего центра тяжести системы. Ясно, что движения в такой системе приближенно сводятся к совокупности кеплеровых движений. Очевидно, эти движения могут продолжаться весьма долго и такие системы могут быть в высокой степени устойчивыми.

Тройные системы типа Трапедий, особенность которых состоит в том, что все три расстояния между компонентами — одного порядка, составляют контраст с кратными системами обыкновенного типа.

Структура системы типа Трапедии допускает возможность сближений прежде далеких друг от друга компонентов. При сближении отдельных звезд между собой будут происходить процессы обмена кинетическими энергиями, в результате чего одна из звезд может приобрести скорость, превосходящую критическую. И эта звезда тогда покинет систему. Даже в случае, если она получит скорость несколько меньшую критической, конфигурация системы может измениться.

В кратных системах обыкновенного типа такие процессы обмена большими количествами кинетической энергии не происходят, так как само устройство этой системы исключает возможность «случайных» сближений, при которых происходит этот обмен.

Как известно, звездные ассоциации, представляют собой неустойчивые системы звезд. Среди многих особенностей этих систем упомянем здесь ту особенность, что входящие в них звездные скопления, содержат среди своих наиболее ярких звезд кратную систему типа Трапедии Ориона или звездные цепочки. Иногда системы типа Трапедии входят в состав ассоциаций непосредственно. Если даже не приводить других аргументов, только из этого ясно можно видеть сколь огромное значение может иметь изучение кратных систем типа Трапедии.

В. А. Амбарцумян, рассматривая вопрос о космогонической роли кратных систем типа Трапеции считает, что они могут иметь как положительную, так и отрицательную полную энергию. Системы с положительной полной энергией быстро разрушаются. Их судьба не представляет сложной динамической проблемы. Системы с отрицательной энергией могут существовать значительно дольше. Однако, предполагается, что и они неустойчивы. Вопросу об устойчивости кратных систем типа Трапеции с отрицательной энергией и посвящена настоящая работа.

Еще в 1952 году на Втором Всесоюзном совещании по вопросам космогонии академик В. А. Амбарцумян говорил:

«Вопрос об устойчивости или неустойчивости трапеции можно решить, только исходя из исследований движения звезд при помощи методов небесной механики. Но до сих пор, насколько мне известно, таких исследований, кроме как для случая треугольной конфигурации (три звезды образуют точный равносторонний треугольник) и прямолинейной (три звезды находятся на одной линии), никем проведено не было. Поэтому заключение о неустойчивости, а следовательно, и о сравнительной «молодости» звездных конфигураций типа Трапеции остается только предположением, хотя и правдоподобным. Поэтому-то я и говорил, что необходимо тщательно изучать задачи трех или вообще небольшого количества тел. То, что содержится в нашем утверждении, это пока перенос результатов, полученных при помощи статистической механики для систем с большим числом тел на системы с небольшим числом тел. Нужны более детальные исследования», [1].

Проблема, поставленная В. А. Амбарцумяном, требует изучения качественных свойств движения в задачах трех или большего числа тел. Эти задачи, как известно, связаны с большими математическими трудностями.

Вследствие отсутствия общего решения этой задачи в сколько-нибудь удобной форме, мы вынуждены применять приближенные методы изучения движений в необходимых для нашей проблемы частных случаях.

Проблема неустойчивости кратных систем типа Трапеции сводится к вопросу о возможности изменения характера движения в системе, в которой все три компонента в течение некоторого, достаточно длительного промежутка времени двигались так, что находились друг от друга на расстояниях одного порядка величины. В результате сближения двух из трех тел между собой, характер движения может измениться и, например, одно из тел может уйти в бесконечность.

Некоторые стороны вопроса об изменении характера движения в задаче трех тел рассматривались в литературе довольно подробно. Следует, например, упомянуть работы Шази [2, 3], Хильми [4, 5, 6], Мермана [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15], Саакяна [16] и др. по вопросу о захвате в задаче трех тел. Главное внимание при этом уделялось тому случаю, когда три тела сближаются по гиперболическим орбитам, после чего возникает одна двойная система, а третье тело опять удаляется в бесконечность.

Нас же интересует случай, когда все три тела сначала связаны меж-

ду собой, полная энергия отрицательна, но в результате взаимодействий одно из тел удаляется в бесконечность (или на очень большое расстояние), оставляя изолированную двойную систему.

Иными словами, мы займемся здесь изучением движения в системе трех тел типа Трапеции, имеющей отрицательную полную энергию, в тех случаях, когда между двумя из трех тел происходит сближение.

1. Об условиях распада системы трех тел

Рассмотрим тройную систему звезд А, В, С типа Трапеции, взаимно притягивающихся по закону притяжения Ньютона с массами соответственно m_0, m_1, m_2 .

Обозначим расстояния между этими телами через

$$r_{01} = AB, r_{02} = AC, r = r_{21} = CB.$$

Предположим, что орбиты звезд В и С относительно О-общего центра тяжести системы расположены так, что существуют близкие друг к другу части орбит. Очевидно, взаимодействие тел В и С увеличится, когда они проходят одновременно те отрезки своих орбит, которые находятся близко друг от друга.

Мы займемся изучением движения трех тел при возможном сближении В и С.

Пусть в какой-то момент три тела расположились так, что имеет место:

$$r \ll r_{01}, \quad r \ll r_{02}.$$

Кроме обозначений, очевидных из фиг. 1, будем далее обозначать через

h —постоянную энергию системы;

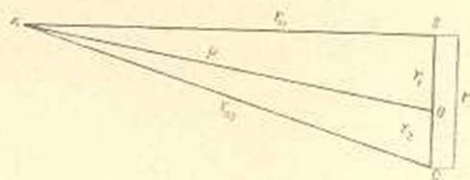
G —постоянную тяготения;

ρ —расстояние от тела А до

q —центра тяжести тел В и С;

R —расстояние от тела А до

О—общего центра тяжести системы,



Фиг. 1.

$$M = m_0 + m_1 + m_2$$

$$\rho = \frac{m_2}{m_2 + m_1} r_{\max}$$

$$q = \frac{m_1}{m_2 + m_1} r_{\max},$$

где $r_{\max}$ есть верхняя граница значений наименьшего расстояния r . Существование этой верхней границы следует из первой теоремы Биркгофа.

$$r < \frac{M^2}{3|h|}.$$

Теорема 1. Если при $h < 0$ выполняются условия

$$\rho(t_0) > \frac{2M^2}{3|h|} \quad (a)$$

и

$$\dot{\rho}(t_0)^2 > \frac{2GM}{m_2 + m_1} \left(\frac{m_2}{\rho(t_0) - p} + \frac{m_1}{\rho(t_0) - q} \right), \quad (b)$$

то, при $t \rightarrow \infty$, $\rho(t) \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Дифференциальное уравнение движения центра тяжести тел В и С относительно тела А будет:

$$\ddot{\rho} = -\frac{MG}{m_2 + m_1} \left(\frac{r_{02}}{r_{02}^3} m_2 + m_1 \frac{r_{01}}{r_{01}^3} \right). \quad (1.1)$$

Разлагая ускорение $\ddot{\rho}$ на радиальную и трансверсальную составляющие [17], будем иметь:

$$\ddot{\rho} = -\{\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\} \bar{\rho}_0 + \{\dot{\rho}\ddot{\rho} + 2\dot{\rho}\ddot{\rho}\} \bar{\rho}_\perp, \quad (1.2)$$

где $\bar{\rho}_0$ — единичный вектор по направлению $\bar{\rho}$, а

$\bar{\rho}_\perp$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\bar{\rho}$.

Умножая выражение (1.2) скалярно на $\dot{\rho} > 0$ — радиальную составляющую скорости, напишем:

$$(\ddot{\rho} \dot{\rho}) = \{\ddot{\rho} - \dot{\rho}^2\} (\bar{\rho}_0 \dot{\rho}) + \{\dot{\rho}\ddot{\rho} + 2\dot{\rho}\ddot{\rho}\} (\bar{\rho}_\perp \dot{\rho}), \quad (1.3)$$

но, так как $\bar{\rho}_0 \perp \dot{\rho}$ и

$$(\bar{\rho}_0 \dot{\rho}) = |\bar{\rho}_0| |\dot{\rho}| \cos(\widehat{\bar{\rho}_0 \dot{\rho}}) = |\dot{\rho}| = \dot{\rho}, \quad (1.4)$$

из (1.3) получим:

$$(\ddot{\rho} \dot{\rho}) = \ddot{\rho} \dot{\rho} - \dot{\rho}^3. \quad (1.5)$$

Умножая уравнение (1.1) на $\dot{\rho} > 0$ скалярно, напишем:

$$(\ddot{\rho} \dot{\rho}) = -\frac{MGm_2}{(m_2 + m_1)r_{02}^3} (\bar{r}_{02} \dot{\rho}) - \frac{MGm_1}{(m_2 + m_1)r_{01}^3} (\bar{r}_{01} \dot{\rho}). \quad (1.6)$$

Заменяя члены $(\bar{r}_{02} \dot{\rho})$ через $r_{02} \dot{\rho}$, $(\bar{r}_{01} \dot{\rho})$ через $r_{01} \dot{\rho}$ и, принимая во внимание (1.5), получим:

$$\ddot{\rho} \dot{\rho} > -\frac{MGm_2}{(m_2 + m_1)r_{02}^3} \dot{\rho} - \frac{MGm_1}{(m_2 + m_1)r_{01}^3} \dot{\rho}. \quad (1.7)$$

Из свойства треугольника (фиг. 1) вытекает, что всегда будут иметь место неравенства:

$$\begin{aligned} r_{01} &\geq \rho - r_1, \\ r_{02} &\geq \rho - r_2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$r_1 = \frac{m_2}{m_2 + m_1} r, \quad (1.9)$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2 + m_1} r.$$

Из условия $\rho \geq \frac{2M^2}{3|h|}$ следует, что до тех пор, пока это выражение удовлетворяется, одно и то же расстояние, например r , всегда остается наименьшим*.

Если r заменим через $r_{\max}$, неравенства (1.8) более усилятся и получим:

$$r_{01} \geq \rho - \frac{m_2}{m_2 + m_1} r_{\max} = \rho - p, \quad (1.10)$$

$$r_{02} \geq \rho - \frac{m_1}{m_2 + m_1} r_{\max} = \rho - q.$$

Так как в момент t_0 имеют место условия теоремы, в силу непрерывности $\rho(t)$ эти условия будут иметь место и в некоторой окрестности момента t_0 . Допустим, что условие (а) в промежутке $t_0 < t < t_1$ имеет место, а при $t > t_1$ нарушается. Это значит, что при $t = t_1$ в (а) имеет место знак равенства.

Следовательно, в указанном интервале времени, будут иметь место неравенства:

$$r_{01} \geq \rho(t) - p; \quad (1.11)$$

$$r_{02} \geq \rho(t) - q.$$

Из (1.7) и (1.11) для интервала $t_0 < t < t_1$ напомним:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\rho}(t))^2 \geq - \frac{2MGm_2 \dot{\rho}(t)}{(m_2 + m_1)(\rho(t) - p)^2} - \frac{2MGm_1 \dot{\rho}(t)}{(m_2 + m_1)(\rho(t) - q)^2}. \quad (1.12)$$

После интегрирования (1.12) в интервале (t_0, t_1) , получим:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t_1)^2 - \dot{\rho}(t_0)^2 \geq & \frac{2MGm_2}{(m_1 + m_2)(\rho(t_1) - p)} - \frac{2MGm_2}{(m_2 + m_1)(\rho(t_0) - p)} + \\ & + \frac{2MGm_1}{(m_2 + m_1)(\rho(t_1) - q)} - \frac{2MGm_1}{(m_1 + m_2)(\rho(t_0) - q)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Отсюда имеем:

$$\dot{\rho}(t_1) > \sqrt{\dot{\rho}(t_0)^2 - \frac{2MG}{m_2 + m_1} \left(\frac{m_2}{\rho(t_0) - p} + \frac{m_1}{\rho(t_0) - q} \right)}. \quad (1.14)$$

* Теоремы Биркгофа Дж. Д. [18].

(1) В случае $f > 0, h < 0$ наименьшее из трех расстояний между телами не может превзойти $\frac{M^2}{3|h|}$.

(4) Если $f > 0, h < 0$, то до тех пор, пока $\rho \geq \frac{2M^2}{3|h|}$, одно и то же расстояние r будет наименьшим.

Здесь f — момент количества движения системы.

Здесь подкоренное выражение по условию теоремы положительно, т. е. для момента t_1 получается, что $\rho(t_1) > 0$. Но мы предположили, что при $t = t_1$ в (α) имеет место знак равенства. Тогда при $t > t_1$ вновь будет иметь место неравенство. Но это противоречит допущению. Следовательно, условие (α) будет сохраняться при любом $t > t_0$. Тогда и выражение (1.14) будет справедливо для любого $t > t_0$.

Интегрированием (1.14), получим:

$$\rho(t) > \rho(t_0) + \sqrt{\dot{\rho}(t_0)^2 - \frac{2MG}{m_2 + m_1} \left(\frac{m_2}{\rho(t_0) - p} + \frac{m_1}{\rho(t_0) - q} \right)} (t - t_0). \quad (1.15)$$

Откуда и видно, что при $t \rightarrow \infty$, $\rho(t) \rightarrow \infty$.

Из теоремы 1 вытекает, что в качестве критерия для ухода одного тела из системы трех тел, т. е. распада системы трех тел, можем принять неравенство:

$$\dot{\rho}(t_0)^2 > \frac{2MG}{m_2 + m_1} \left(\frac{m_2}{\rho(t_0) - p} + \frac{m_1}{\rho(t_0) - q} \right). \quad (1.16)$$

Если $m_2 = m_1$, то из (1.16) получим:

$$\dot{\rho}(t_0)^2 > \frac{4MG}{2\rho(t_0) - r_{\max}}. \quad (1.17)$$

Примечание 1. Допустим, что в неравенстве (1.17)

$$r_{\max} = 0,$$

тогда

$$p = q = 0,$$

поэтому

$$\dot{\rho}(t_0)^2 > \frac{2MG}{\rho(t_0)}, \quad (1.18)$$

чем и можно характеризовать гиперболическое движение в задаче двух тел.

Примечание 2.

Как показали, условия теоремы 1 имеют место для любого $t \geq t_0$. Но при $h < 0$, всегда $r < \frac{M^2}{3|h|}$, а до тех пор, пока существует условие $\rho(t) \geq \frac{2M^2}{3|h|}$, одно и то же расстояние r будет всегда оставаться наименьшим*, следовательно, r ограничено сверху.

Теорема 2. Если при $h < 0$ выполняются условия

$$m_0 > m_1, \quad m_0 > m_2, \quad \rho(t_0) \geq \frac{2M^2}{3|h|} \quad (\alpha')$$

и

$$\dot{R}(t_0)^2 > \frac{2G(m_2 + m_1)}{R(t_0)}, \quad (\beta')$$

то, когда $t \rightarrow \infty$, $R(t) \rightarrow \infty$.

* Теоремы (1), [4].

Доказательство.

При возможном сближении тел В и С допустим, что система трех тел имеет расположение, показанное на фиг. 2.

Дифференциальное уравнение движения тела А относительно О — общего центра тяжести системы, будет:

$$\ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1}{r_{01}^3} \vec{r}_{01} - \frac{Gm_2}{r_{02}^3} \vec{r}_{02}. \quad (1.19)$$

Разложим ускорение $\ddot{\vec{R}}$ на радиальную и трансверсальную составляющие, полученное выражение

умножим скалярно на $\dot{\vec{R}} > 0$ — радиальную составляющую скорости, тогда получим:

$$(\dot{\vec{R}} \ddot{\vec{R}}) = \dot{\vec{R}} \ddot{\vec{R}} - R \dot{\dot{\phi}}^2. \quad (1.20)$$

Умножая уравнение (1.19)

на $\dot{\vec{R}} > 0$ скалярно и заменив члены $(\vec{r}_{01} \dot{\vec{R}}_R)$ через $r_{01} \dot{R}$, $(\vec{r}_{02} \dot{\vec{R}}_R)$ через $r_{02} \dot{R}$ и имея в виду (1.20), получим:

$$R \dot{R} > -\frac{Gm_1 \dot{R}}{r_{01}^2} - \frac{Gm_2 \dot{R}}{r_{02}^2}. \quad (1.21)$$

В момент t_0 выполняются условия теоремы, в силу непрерывности $R(t)$ и $\rho(t)$ эти условия будут иметь место и в некоторой окрестности t_0 . Допустим, что условия (α') имеют место в интервале $t_0 < t < t_1$, а при $t > t_1$ эти условия нарушаются. В точке $t = t_1$ условия (α') будут иметь место знак равенства. Таким образом, в интервале (t_0, t_1) имеют место неравенства:

$$\dot{R}(t) > 0, \quad \rho(t) > \frac{2M^2}{3|h|}. \quad (1.22)$$

Следовательно, при $m_0 > m_1$, $m_0 > m_2$ имеют место неравенства:

$$r_{01} > R(t), \quad r_{02} > R(t). \quad (1.23)$$

Из (1.21) и (1.23) имеем:

$$\frac{d}{dt} (\dot{R}(t))^2 > -\frac{2G(m_2 + m_1) \dot{R}(t)}{R(t)^2}. \quad (1.24)$$

Интегрируя (1.24) в интервале (t_0, t_1) , получим:

$$\dot{R}(t_1)^2 - \dot{R}(t_0)^2 > \frac{2G(m_2 + m_1)}{R(t_1)} - \frac{2G(m_2 + m_1)}{R(t_0)}. \quad (1.25)$$

Тем более

$$\dot{R}(t_1) > \sqrt{\dot{R}(t_0)^2 - \frac{2G(m_2 + m_1)}{R(t_0)}}. \quad (1.26)$$

В неравенстве (1.26) подкоренное выражение по условию теоремы положительно, следовательно, $\dot{R}(t_1) > 0$.

Таким образом, и для $t > t_1$ не нарушаются условия (1.23). Но

это противоречит нашему допущению. Следовательно, условия (а') будут осуществляться и при любом $t > t_0$.

Интегрируя (1.26), получим:

$$R(t) > R(t_0) + \sqrt{\dot{R}(t_0)^2 - \frac{2G(m_2 + m_1)}{R(t_0)}} (t - t_0). \quad (1.27)$$

Откуда и следует, что при $t \rightarrow \infty$, $R(t) \rightarrow \infty$.

1. Частные случаи системы трех тел

Рассмотрим случай, когда в системе трех тел А, В, С тело В имеет малую массу m_1 , и относительное движение тел А и С — эллиптическое.

Рассмотрим в такой системе сближение тела В и А или В и С, допустив, что за время сближения отклонение координат и скоростей тел А и С от тех значений, которые должны быть при кеплеровском движении, пренебрегаемо мало. Таким образом, полагаем, что расстояние АС до и после сближения тел В и А или В и С изменяется по закону движения двух тел А и С.

Теорема 3. Если при $h < 0$ выполняются условия

$$\rho > p, \quad \rho > q \quad (a)$$

$$\text{и} \quad \dot{\rho}(t_0)^2 \geq 2G \left(\frac{m_0}{\rho(t_0) - q} + \frac{m_2}{\rho(t_0) - p} \right), \quad (a')$$

то, при $t \rightarrow \infty$, $\rho(t) \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Пусть дана система трех тел А, В, С (фиг. 3), где тело В имеет массу m_1 .

Дифференциальное уравнение движения тела В относительно центра тяжести системы, будет:

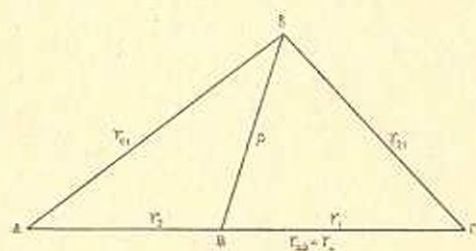
$$\ddot{\rho} = -G \left(\frac{r_{01}}{r_{01}^3} m_0 + \frac{r_{21}}{r_{21}^3} m_2 \right). \quad (1.28)$$

Из свойства треугольника вытекает, что будут иметь место неравенства:

$$\begin{aligned} r_{21} &\geq \rho - r_1, \\ r_{01} &\geq \rho - r_2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_0 + m_2} r, \\ r_2 &= \frac{m_0}{m_0 + m_2} r. \end{aligned} \quad (1.30)$$



Фиг. 3.

Заменяя r через $r_{\max} = a(1 + e)$, где a и e соответственно большая полуось и эксцентриситет эллипса относительного движения А и С, будем иметь:

$$\begin{aligned} r_{21} &> p - p, \\ r_{01} &> p - q, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{m_2}{m_0 + m_2} r_{\max}, \\ q &= \frac{m_0}{m_0 + m_2} r_{\max}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Принимая во внимание условия теоремы (з) и рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получим:

$$\dot{r}(t_1)^2 > \sqrt{\dot{r}(t_0)^2 - 2G \left(\frac{m_0}{r(t_0) - q} + \frac{m_2}{r(t_0) - p} \right)}. \quad (1.33)$$

Откуда, после интегрирования пишем:

$$r(t) > r(t_0) + \sqrt{\dot{r}(t_0)^2 - 2G \left(\frac{m_0}{r(t_0) - q} + \frac{m_2}{r(t_0) - p} \right)} (t - t_0). \quad (1.34)$$

Из (1.34) следует, что при $t \rightarrow \infty$, $r(t) \rightarrow \infty$.

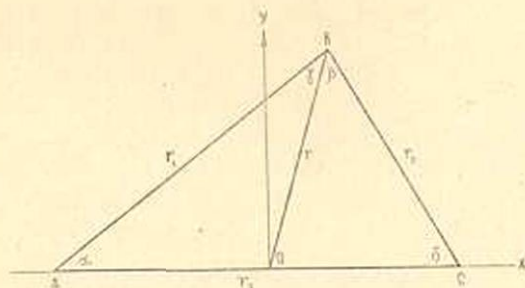
2. О применении интеграла Якоби

Ограниченная задача трех тел по Якоби заключается в следующем:

Требуется найти движение тела В с бесконечно малой массой, притягиваемого двумя телами А и С, имеющими конечные массы и описывающими круговые орбиты вокруг общего центра инерции [19].

В системе тел А, В, С (фиг. 4, не меняя обозначений Якоби, массы и расстояния соответственно будут: m_1 , m_0 , m_2 и r_1 , r_2 , r .

При решении этой задачи выбирается вращающаяся система координат с началом в точке О (общий центр тяжести системы).



Фиг. 4.

Скорость $\bar{U}$ точки В (x, y) относительно этой вращающейся координатной системы, определяется интегралом Якоби:

$$U^2 = 2\Omega - C,$$

где

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) + G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right);$$

C — произвольная постоянная интегрирования;

ω — постоянная угловая скорость, с которой вращается прямая АОС вокруг точки О.

Интеграл Якоби можно написать в виде:

$$U^2 - U_0^2 = 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right) + \omega^2 r^2 - \omega^2 r_0^2, \quad (1.35)$$

где индексом 0 указано начальное значение величин.

Обозначив через $\bar{V}$ абсолютную скорость точки В, т. е. скорость относительно неподвижной системы координат, получим:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{V} - [\omega \bar{r}]; \\ \bar{U}_0 &= \bar{V}_0 - [\omega \bar{r}_0]; \end{aligned} \quad (1.36)$$

или

$$\begin{aligned} U^2 &= V^2 + \omega^2 r^2 - 2\bar{V}[\omega \bar{r}]; \\ U_0^2 &= V_0^2 + \omega^2 r_0^2 - 2\bar{V}_0[\omega \bar{r}_0]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Из (1.35) и (1.37) находим:

$$V^2 - V_0^2 = 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right) + 2\bar{V}[\omega \bar{r}] - 2\bar{V}_0[\omega \bar{r}_0]. \quad (1.38)$$

Если для какого-нибудь момента времени значение $\bar{V}[\omega \bar{r}]$ равняется его значению в начальный момент, т. е.

$$\bar{V}[\omega \bar{r}] = \bar{V}_0[\omega \bar{r}_0], \quad (1.39)$$

то получим:

$$V^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) = V_0^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right). \quad (1.40)$$

Об изменении момента количества движения тела малой массы в задаче трех тел

Напишем дифференциальное уравнение движения тела В малой массы относительно точки О

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = - \frac{Gm_1}{r_1^3} \bar{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \bar{r}_2. \quad (1.41)$$

Разложив ускорение на составляющие, получим:

$$\left(\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \bar{r}_0 + \left\{ r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right\} \bar{p}_0 = - \frac{Gm_1}{r_1^3} \bar{r}_1 - \frac{Gm_2}{r_2^3} \bar{r}_2, \quad (1.42)$$

где $\bar{r}_0$ и $\bar{p}_0$ суть единичные векторы.

Умножив уравнение (1.42) векторно на $\bar{r}$ и допустив, что $m_1 = m_2$, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = - Gm_1 \left(\frac{[\bar{r}_1 \bar{r}]}{r_1^3} + \frac{[\bar{r}_2 \bar{r}]}{r_2^3} \right),$$

или с учетом порядка отсчитывания углов, напишем:

$$d\bar{L}_3 = -Gm_1 \left\{ \frac{r \sin \gamma}{r_1^2} - \frac{r \sin \beta}{r_2^2} \right\} dt, \quad (1.43)$$

где

$$\bar{L}_3 = r^2 \frac{dz}{dt}.$$

Из фиг. 4 имеем:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sqrt{l(l-r_1)(l-r_2)(l-r_3)}}{r_1 r_3}, \quad (1.44)$$

где

$$l = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{2}.$$

Согласно фиг. 4 имеем:

$$\sin \delta = \frac{r_1 \sin \alpha}{r_2}$$

и

$$\sin \beta = \frac{r_3 \sin \delta}{2r},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{r_1 r_3 \sin \alpha}{2r r_2}. \quad (1.45)$$

Из треугольника ABO (фиг. 4) имеем:

$$\sin \gamma = \frac{r_3 \sin \alpha}{2r}. \quad (1.46)$$

Согласно (1.43), (1.45) и (1.46) получим:

$$d\bar{L}_3 = -Gm_1 \sqrt{l(l-r_1)(l-r_2)(l-r_3)} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) dt. \quad (1.47)$$

Интегрируя выражение (1.47) и выводя из под интеграла среднее значение функции, получим выражение $\bar{L}_3$ — секторной площади, описанной радиус-вектором r за время Δt :

$$\bar{L}_3 = \bar{L}_{30} - Gm_1 \left[\sqrt{l(l-r_1)(l-r_2)(l-r_3)} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \right]_{\text{ср.}} \Delta t. \quad (1.48)$$

Рассмотрим для примера изменение $\bar{L}_3$ в трех случаях:

- 1) $r_1 = 10,2 r_3 ae$, $r_2 = 10 r_3 ae$, $r_3 = 1000 ae$, $r \approx 10 r_3 ae$.
- 2) $r_1 = 2,8 r_3 ae$, $r_2 = 3 r_3 ae$, $r_3 = 1000 ae$, $r \approx 2,8 r_3 ae$.
- 3) $r_1 = 1000 ae$, $r_2 = 100 ae$, $r_3 = 1000 ae$, $r \approx 500 ae$.

Предположим, что для всех случаев скорость тела В малой массы относительно точки О определяется через:

$$|\bar{V}_{BO}| = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{r}} \quad (1.49)$$

и $m_1 = m_2 = 1$.

Допустим:

$$\bar{L}_{30} = [\bar{V}_{30} \bar{r}] = V_{30} r,$$

тогда из (1.48) получим:

$$L_3 = V_{30} r - Gm_1 \left[V \sqrt{l(l-r_1)(l-r_2)(l-r_3)} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) \right]_{\text{сред.}} \Delta t. \quad (1.50)$$

Из (1.49), (1.50) и из начальных данных находим:

- 1) $L_3 = 900 + 0,00001 \Delta t,$
 - 2) $L_3 = 560 + 0,0004 \Delta t,$
 - 3) $L_3 = 200 + 2 \Delta t.$
- (1.51)

Пусть

$$\Delta t = KT, \quad (1.52)$$

где $K < 1$, а T — период обращения тела В вокруг О — центра тяжести системы при его круговом движении.

T определим через

$$T = \frac{2\pi r}{V_{30}}. \quad (1.53)$$

Положив значения V_{30} из (1.49) и r в (1.53), получим:

- 1) $T = 7 \cdot 10^5 \text{ лет}$
 - 2) $T = 9 \cdot 10^4 \text{ лет}$
 - 3) $T = 5 \cdot 10^3 \text{ лет}.$
- (1.54)

Из (1.51), (1.52) и (1.54) находим:

- 1) $L_3 = 900 + 7K$
- 2) $L_3 = 560 + 36K$
- 3) $L_3 = 200 + 10^4 \cdot K.$

Эти примеры показывают, что, когда В отстоит от А и С на расстояниях, во много раз превосходящих АВ, тогда L_3 можно принять за постоянную величину, а во время сближения В с А или с С, L_3 нельзя считать постоянной величиной. Следовательно, мы считаем, что при тесном сближении тел, В — тело малой массы может повлиять на движение тел А и С и поэтому выражение

$$m_1 \bar{L}_1 + m_2 \bar{L}_2,$$

т. е. сумма моментов количества движения тел А и С, не постоянная величина.

Вне области же сближения можно считать, что выражение

$$m_1 \bar{L}_1 + m_2 \bar{L}_2$$

будет приближенно постоянной величиной, так как

$$m_1 \bar{L}_1 + m_2 \bar{L}_2 + m_3 \bar{L}_3 = \text{const.}$$

Таким образом, принимаем, что вне области сближения в движении тела малой массы относительно центра тяжести системы, имеет место закон площадей, т. е.

$$r\bar{V}_T = \text{const}, \quad (a)$$

где $\bar{V}_T$ — трансверсальная скорость.

Тогда в ограниченной задаче Якоби, если

$$V_0^2 < 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right), \quad (1.55)$$

то, при t , стремящемся к ∞ , расстояния r_1 и r_2 ограничены.

Действительно, в этом случае согласно выражениям (1.55) и (1.40) имеем:

$$V^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) < 0. \quad (1.56)$$

Откуда можем заключить, что тела А, В, С являются физической системой трех тел.

Теорема 4. В ограниченной задаче Якоби, если выполняется условие

$$r\bar{V}_T = \text{const} \quad (3)$$

и

$$V_{10}^2 > 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right), \quad (3')$$

то, при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$.

Доказательство.

Для абсолютной скорости тела В, как показали выше, из интеграла Якоби имеем:

$$V^2 - V_0^2 = 2G \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right) - 2\bar{V}[\bar{\omega}\bar{r}] - 2\bar{V}_0[\bar{\omega}\bar{r}_0]. \quad (1.56)$$

Принимая во внимание условие теоремы (3) о существовании закона площадей, из (1.56) получим:

$$V^2 > V_0^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right). \quad (1.57)$$

Разложив скорость $\bar{V}$ на радиальную и трансверсальную составляющие, получим:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 > V_0^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right). \quad (1.58)$$

Из условия теоремы (3') следует, что правая часть неравенства (1.58) есть некоторое положительное число N , т. е.

$$V_0^2 - 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right) = N. \quad (1.59)$$

Так как

$$r^2 \frac{dz}{dt} = C \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{C}{r^2}, \quad (1.60)$$

из (1.58), (1.59) и (1.60) получим:

$$\frac{dr}{dt} > \sqrt{N - \frac{C^2}{r^2}}. \quad (1.61)$$

Откуда

$$\int_{r_0}^r \frac{r dr}{\sqrt{r^2 N - C^2}} > \int_{t_0}^t dt. \quad (1.62)$$

После интегрирования получим:

$$(r^2 N - C^2)^{1/2} > (r_0^2 N - C^2)^{1/2} + N(t - t_0). \quad (1.63)$$

Откуда и следует, что при $t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$.

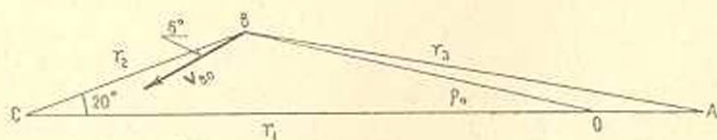
Таким образом, в качестве достаточного условия критерия ухода тела В с малой массой из этой системы можно принять неравенство:

$$V_0^2 > 2G \left(\frac{m_1}{r_{10}} + \frac{m_2}{r_{20}} \right). \quad (1.64)$$

II. Задача об уходе одного тела с малой массой из системы трех тел

Дана система трех тел А, В, С с массами соответственно m_3 , m_1 , m_2 , причем, тело В имеет малую массу.

Допустим, что В сближается с С и вначале сближения (фиг. 5) имеют место условия:



Фиг. 5.

$$V_{BO}^2 < \frac{2Gm_3}{r_{30}} + \frac{2Gm_2}{r_{20}} \quad (2.1)$$

и

$$V_{BC}^2 > \frac{2G(m_2 + m_1)}{r_2}. \quad (2.2)$$

После сближения тел В и С, если выполнится условие

$$V_{BO}^2 > \frac{2Gm_3}{r_3} + \frac{2Gm_2}{r_2}, \quad (2.3)$$

то это значит, что тело уходит из данной системы.

В неподвижной координатной системе скорость тела обозначим через $\bar{V}$, а во вращающейся системе — через $\bar{U}$. Индексы скоростей $\bar{V}_{BO}$, $\bar{U}_{BO}$ и т. д. означают скорость тела В относительно О и т. д. Точка О — центр тяжести системы.

Пусть:

$$r_1 = AC = 1100 \text{ ае}; \quad m_3 = 16 M_{\odot};$$

$$r_2 = CB = 100 \text{ ае}; \quad m_2 = 1 M_{\odot};$$

$$p = CO = \frac{m_3}{m_3 + m_2} r_1; \quad m_1 = 0;$$

$$\angle BCA = 20^\circ;$$

$$q = OA = \frac{m_2}{m_3 + m_2} r_1; \quad |\bar{V}_{BO}| = 1,4 \frac{\text{ае}}{\text{лет}}.$$

Угол β между вектором $\bar{V}_{BO}$ и направлением ВС равен 6° .

Определим величины r_3 , q_0 , ω .

Из треугольника ABC имеем:

$$r_3 = 1006,611 \text{ ае}; \quad p = 1035,294 \text{ ае}; \quad q = 64,712 \text{ ае}; \quad p_0 = 941,945 \text{ ае}.$$

Предполагается, что система двух тел А, С имеет круговое движение, тогда угловая скорость этого движения будет:

$$|\omega| = \sqrt{\frac{G(m_3 + m_2)}{r_1^3}} = 0,000715 \frac{\text{радиан}}{\text{лет}}.$$

Из треугольника OBC имеем:

$$\sin \widehat{OBC} = \frac{p \sin 20^\circ}{p_0} = 0,3759$$

или

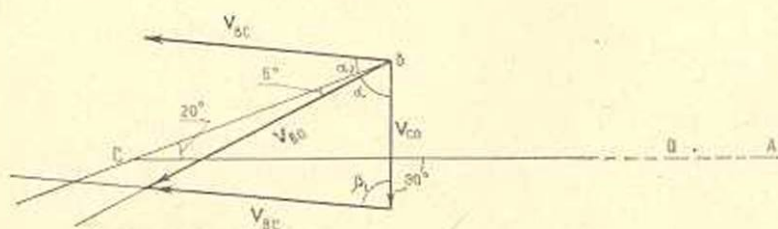
$$\angle OBC = 157^\circ 55' 10'' \text{ и } \angle BOC = 2^\circ 4' 50''.$$

Определение скорости $\bar{V}_{BC}$.

Предположим, что вращение системы двух тел положительное, т. е. для наблюдателя, стоящего в точке О и смотрящего в точку С, движение совершается справа налево. При таком движении и угловую скорость считаем положительной.

Для нашей задачи мы будем применять следующую систему единиц: астрономическая единица; тропический год и масса солнца. Тогда из формулы третьего закона Кеплера для G — постоянной тяготения, получим:

$$G \approx 40.$$



Фиг. 6.

Так как $\bar{\omega}$ направлен перпендикулярно к плоскости движения системы тел А и С,

$$\bar{V}_{CO} = [\bar{\omega} \bar{CO}] = \omega p = 0,7402 \frac{ae}{\text{лет}}$$

и $\bar{V}_{CO}$, перпендикулярный к CO , имеет положительное направление.

Из фиг. 6 видно, что угол α между $\bar{V}_{CO}$ и $\bar{V}_{BO}$ будет равен:

$$\alpha = 64^\circ;$$

Имеем:

$$\bar{V}_{BC} = \bar{V}_{BO} - \bar{V}_{CO}.$$

откуда

$$|\bar{V}_{BC}| = \sqrt{V_{BO}^2 + V_{CO}^2 - 2V_{BO}V_{CO}\cos\alpha} = 1,2646 \frac{ae}{\text{лет}}.$$

Угол β_1 между $\bar{V}_{CO}$ и $\bar{V}_{BC}$ определится из выражения:

$$\sin \beta_1 = \frac{V_{BO} \sin \alpha}{V_{BC}} = 0,9950,$$

$$\beta_1 = 84^\circ 16',$$

поэтому угол α' между $\bar{V}_{BC}$ и BC будет:

$$\alpha_2 = 180^\circ - (\alpha + \beta + \beta_1) = 25^\circ 44'.$$

Выполнение условий (2.1), (2.2).

Имеем:

$$\frac{2Gm_3}{r_{30}} + \frac{2Gm_2}{r_{20}} = 2,0716,$$

$$V_{BO}^2 = 1,96,$$

$$1,96 < 2,0716;$$

следовательно, условие (2.1) выполняется.

Имеем:

$$\sqrt{\frac{2G(m_2 + m_1)}{r_2}} = 0,895,$$

а

$$|\bar{V}_{BC}| = 1,2646,$$

$$1,2646 > 0,895;$$

следовательно, выполняется и условие (2.2).

Определение скорости тела В относительно центра тяжести системы О в конце сближения тел В и С.

Для того, чтобы определять эту скорость, применим вращающуюся координатную систему с угловой скоростью $\bar{\omega}$, с началом координат в точке С.

Дифференциальное уравнение движения тел В относительно С в этой координатной системе будет:

$$\frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r_2^3} \bar{r}_2 - 2[\bar{\omega} \bar{U}_r] - [\bar{\omega} [\bar{\omega} \bar{r}_2]] - \left[\frac{d\bar{\omega}}{dt} \bar{r}_2 \right] -$$

$$-m_0 G \left(\frac{\bar{r}_{01}}{r_{01}^3} - \frac{\bar{r}_{02}}{r_{02}^3} \right).$$

Пренебрегая членами, малыми по сравнению с другими, приближенно напишем:

$$\frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} + \frac{Gm_2}{r_2^3} \bar{r}_2 + 2[\bar{\omega} \bar{U}] = 0, \quad (2.4)$$

откуда получим:

$$\Delta \bar{U} = - \int_{t_0}^t \frac{Gm_2}{r_2^3} \bar{r}_2 dt - 2[\bar{\omega} \Delta \bar{r}_2].$$

Если обозначим

$$\Delta \bar{U}_1 = - \int_{t_0}^t \frac{Gm_2}{r_2^3} \bar{r}_2 dt,$$

то

$$\Delta \bar{U} = \Delta \bar{U}_1 - 2[\bar{\omega} \Delta \bar{r}_2]. \quad (2.5)$$

Преобразование уравнения (2.5).

В уравнении (2.5) член $\Delta \bar{U}_1$ можно рассматривать как приращение скорости в задаче двух тел во вращающейся координатной системе.

Напишем:

$$\Delta \bar{U}_1 = \bar{U}_1 - \bar{U}_{10}. \quad (2.6)$$

где $\bar{U}_{10}$ и $\bar{U}_1$ соответственно скорости тела В в начале сближения (в момент t_0) и в конце сближения (в момент t_1).

Скорости тела В в неподвижной координатной системе в задаче двух тел, для моментов t_0 , t_1 будут:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{10} &= \bar{U}_{10} + [\bar{\omega} \bar{r}_0], \\ \bar{V}_1 &= \bar{U}_1 + [\bar{\omega} \bar{r}]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Принимаем, что начальные скорости тела В в задаче двух тел и в задаче трех тел равны, т. е.

$$\bar{V}_{10} = \bar{V}_0 \quad (2.8)$$

и

$$\bar{U}_{10} = \bar{U}_0. \quad (2.9)$$

где $\bar{V}_0$ и $\bar{U}_0$ скорости тела В в задаче трех тел соответственно в неподвижной и подвижной координатных системах.

Следовательно, скорость точки В относительно С в конце сближения (в момент t_1), имея в виду (2.7), (2.8), согласно (2.9), будет:

$$\bar{U} = \bar{U}_{B,C} = \bar{V}_1 - [\bar{\omega} \bar{r}] - 2[\bar{\omega} \Delta \bar{r}_2], \quad (2.10)$$

где

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_{10} + \Delta \bar{V}_1, \quad (2.11)$$

а $\Delta \bar{V}_1$ есть приращение скорости в задаче двух тел в неподвижной координатной системе, т. е. когда уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2 \bar{r}_0}{dt^2} + \frac{Gm_2}{r_0^3} \bar{r}_0 = 0. \quad (2.12)$$

Если r_{20} — начальное расстояние между телами В и С, а при окончании сближения расстояние между этими телами — r , тогда, при

$$r_{20} = r, \quad (2.13)$$

получим:

$$|\bar{V}_1| = |\bar{V}_{10} + \Delta \bar{V}_1| = |\bar{V}_0|. \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что $\Delta \bar{V}_1$ в данном случае изменяет только направление скорости тела В.

Определение элементов траектории В относительно С в неподвижной координатной системе, пользуясь уравнением (2.12) и исходными данными.

Из (2.12) получаем [20]:

$$r = \frac{C^2}{Gm_2(1 + e \cos \varphi)},$$

где

$$e = \sqrt{1 + \frac{\alpha_1 C^2}{G^2 m_2^2}}, \quad (2.15)$$

$$\alpha_1 = V_0^2 - \frac{2Gm_2}{r_2},$$

где

$$r_2 = r_{20} = 100 ae \text{ и } \bar{V}_0 = \bar{V}_{BC},$$

$$C = r_{20} \bar{V}_{OT}, \quad \bar{V}_{OT} = |\bar{V}_0| \sin \alpha_2,$$

откуда, пользуясь начальными данными, получим:

$$|\bar{V}_{OT}| = 0,5491, \quad C = 54,91, \quad \alpha_1 = 0,7993, \quad e = 1,5831.$$

Из выражения r при $\varphi = 0$ получим:

$$r_{\min} = 29,18 ae.$$

Угол φ_0 между r_0 и главной осью гиперболы определяется выражением:

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{e} \left(\frac{C^2}{Gm_2 r_0} - 1 \right) = -0,1555,$$

откуда

$$\varphi_0 = 261^\circ 3'.$$

Построим траекторию В относительно С в неподвижной координатной системе

$$BC = B_1C.$$

Определение $\bar{U}_{BC}$ скорости тела В относительно С во вращающейся координатной системе в момент t_1 .

В формуле (2.10) примем, что

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_1 - [\omega \bar{r}] = \bar{V}_1 - \bar{l}. \quad (2.16)$$

$$2T = 144,56 \text{ лет.}$$

Определение направления $\overline{\Delta r_2}$ в момент t_1 .

В уравнении (2.4) член $2[\omega U]$ называется поворотным ускорением; полученное же из него выражение $2[\omega \Delta r_2] = \sigma$ назовем поворотной скоростью.

Величина $\overline{\Delta r_2}$ представится в виде:

$$\overline{\Delta r_2} = \bar{r} - \bar{r}_{20}.$$

Обозначим, через $\bar{r}$ радиус-вектор тела В во вращающейся и через $\bar{R}$ радиус-вектор в неподвижной координатной системе.

Пусть в момент t_0 эти вектора соответственно имеют значения $\bar{r}_{20}$ и $\bar{R}_0$, равные по величине и направлению, т. е.

$$\bar{r}_{20} = \bar{R}_0 = \overline{CB}.$$

Очевидно, до конца сближения тел В и С, за промежуток времени $2T = t$, вращающаяся координатная система, поворачиваясь вокруг С со скоростью ω , соответственно изменит направление начального вектора $\bar{r}_{20}$ относительно $\bar{R}$ на угол:

$$\psi = \omega t = 0,1034 \frac{\text{рад.}}{\text{лет}} = 5^\circ 54'.$$

Таким образом, в момент t_1 вектор $\bar{r}_{20}$ будет направлен к точке В₂ и $\overline{\Delta r_2}$ определится величиной отрезка В₁В₂, фиг. 7.

Определение σ .

Согласно фиг. 7 имеем: $\angle B_1CB_2 = \angle B_1CB + \psi = 168^\circ$

и

$$\angle CB_1B_2 = \alpha_3 = 6^\circ,$$

тогда

$$\overline{\Delta r_2} = B_1B_2 = 2r_0 \sin \frac{\widehat{B_1CB_2}}{2} = 199,0 \text{ ае.}$$

Имеем: $\sigma = 2[\omega]|\overline{\Delta r_2}| = 0,2846.$

Из фиг. 7 определим угол λ между $\bar{V}_1$ и $\bar{U}_1$:

$$\sin \lambda = \frac{l \sin \tau}{U_1} = 0,0521,$$

откуда

$$\lambda = 2^\circ 59'.$$

Для угла ϑ между $\bar{V}_1$ и направлением В₁В₂ из фиг. 7 имеем:

$$\vartheta = 180^\circ - (\alpha_2 + \alpha_3) = 148^\circ 16'.$$

Определение $\bar{U}$ скорости В относительно С в момент t_1 во вращающейся координатной системе.

Имеем:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 - \bar{\sigma},$$

где

$$\bar{\sigma} \perp \overline{\Delta r_2}.$$

Угол ε между $\bar{U}_1$ и $\bar{\sigma}^*$ из фиг. 8 будет:

$$\varepsilon = \vartheta_1 + \lambda = 61^\circ 15'.$$

Тогда

$$|\bar{U}| = |\bar{U}_{B,C}| = \sqrt{U_1^2 + \sigma^2 - 2U_1\sigma \cos \varepsilon} = 1,1263.$$

Согласно фиг. 8 напишем:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{\sigma \sin \varepsilon}{U} = 0,2216,$$

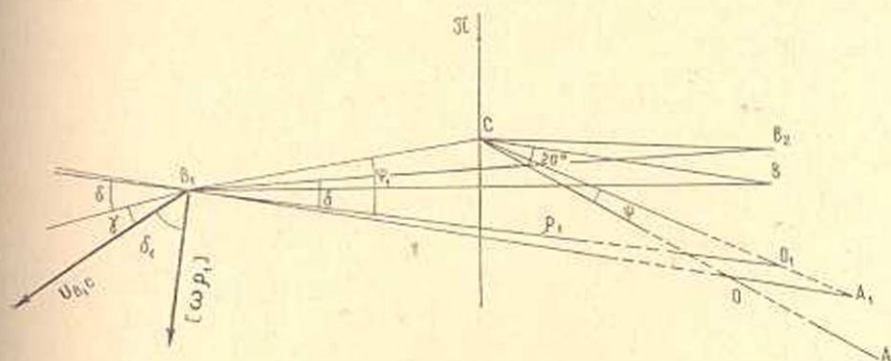
откуда

$$\varepsilon_1 = 12^\circ 50'.$$

Угол γ между $\bar{U}$ и направлением B_1B_2 (фиг. 8) равен:

$$\gamma = 180^\circ - (90^\circ + \varepsilon + \varepsilon_1) = 15^\circ 55'.$$

Расположение тел A, B, C и векторов, действующих на B в момент t_1 .



Фиг. 9.

Тело A , поворачиваясь вокруг C со скоростью ω , в момент t_1 , займет положение A_1 и тогда угол между направлениями CA и CA_1 определится величиной:

$$\psi = \omega t.$$

Из фиг. 9 имеем:

$$\angle B_1CB = 162^\circ 6', \quad \angle ACA_1 = \psi = 5^\circ 54',$$

$$\angle B_1CA_1 = \angle B_1CB - (\angle BCA_1 + \psi) = 148^\circ.$$

Так как

$$r_1 = CA = CA_1$$

и

$$p = CO = CO_1.$$

Из фиг. 9 получим:

$$r_2 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 \cos \widehat{B_1CA_1}} = 1155,99 \text{ ае},$$

$$p_1 = \sqrt{p^2 + r_2^2 - 2p r_2 \cos \widehat{B_1CA_1}} = 1091,59 \text{ ае}.$$

Обозначим угол O_1B_1C через ψ_1 , тогда из фиг. 9 получим:

$$\sin \psi_1 = \frac{p \sin B_1CA_1}{p_1} = 0,5027,$$

откуда

$$\psi_1 = 30^\circ 10'.$$

Угол между направлениями B_1B_2 и B_1O_1 будет:

$$\delta = \psi_1 - \alpha_3 = 24^\circ 10'.$$

Угол δ_1 между $\bar{U}_{B,C}$ и $[\bar{\omega} p_1]$ будет равняться:

$$\delta_1 = 90 - (\gamma + \delta) = 49^\circ 55'.$$

Определение скорости $\bar{V}_{B,O}$ тела В в момент t_1 относительно О — общего центра тяжести системы в неподвижной координатной системе.

Имеем:

$$\bar{V}_{B,O} = \bar{U}_{B,C} + [\bar{\omega} p_1],$$

и

$$[\bar{\omega} p_1] = 0,7805,$$

тогда

$$|\bar{V}_{B,O}| = \sqrt{U_{B,C}^2 + [\bar{\omega} p_1]^2 + 2U_{B,C} [\bar{\omega} p_1] \cos \delta_1} = 1,7350 \frac{ae}{\text{лет}}.$$

Подставив значения $r_3 = A_1B_1$, $r_2 = B_1C$ в правую часть формулы (2.3), находим:

$$\sqrt{\frac{2Gm_3}{r_3} + \frac{2Gm_2}{r_2}} = 1,3811,$$

а

$$|\bar{V}_{B,O}| = 1,7350,$$

откуда получается, что условие (2.3):

$$1,7350 > 1,3811,$$

выполняется.

Примечание.

1. При решении этой задачи мы считаем, что масса малого тела В менее $10^{-4}m_0$. Влияние такого тела на относительное движение тел В и С не учтено, так как величина 10^{-4} меньше точности вычисления.

2. При более точном учете влияния тела А в данной задаче, расстояние между точками В и С должно увеличиться, так как поворотное (приливное) ускорение $2[\bar{\omega} \bar{U}]$ составляет с направлением ВС острый угол (влияние приливного ускорения на расстояние между телами не учитывалось).

Следовательно, в момент t_1 , расстояние между телами В и С должно быть больше, чем взятые нами расстояния, т. е. расстояния

$r_3 = B_1A_1$, $r_2 = CB_1$ и $r_1 = B_1O$ взяты меньшими, чем они должны быть в действительности; отсюда следует, что принятое значение суммы $\frac{2Gm_3}{r_3} + \frac{2Gm_2}{r_2}$ больше действительного, а величина выражения $[\omega \dot{r}_1]$, напротив, взята уменьшенной. Поскольку взятые нами величины удовлетворяют критерию (2.3), то более точные значения этих величин тем более должны удовлетворять критерию (2.3). Повидимому, приращение расстояния между В и С, вследствие влияния третьего тела, относительно мало.

III. Задача об изменении характера движения в системе трех тел с конечными массами после сближения двух тел между собой

Дана система трех тел А, В, С соответственно с конечными массами m_0 , m_1 , m_2 .

Допустим, что до сближения тел В и С, $\vec{V}_{BA}$ — скорость тела В относительно А удовлетворяет условию:

$$1. \quad V_{BA}^2 < \frac{2G(m_0 + m_1)}{BA} \quad .$$

и скорость $\vec{V}_{BC}$ — тела В относительно С — гиперболическая, т. е.

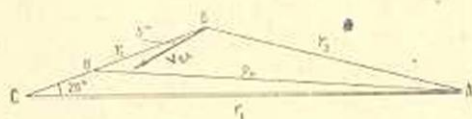
$$2. \quad V_{BC}^2 > \frac{2G(m_2 + m_1)}{BC}.$$

Покажем, что сближение тел В и С может быть таким, что после сближения, будет иметь место условие:

$$3. \quad V_{B_1A_1}^2 > \frac{2G(m_0 + m_1)}{A_1B_1},$$

где $\vec{V}_{B_1A_1}$ есть скорость В относительно А и B_1A_1 — расстояние между ними после сближения тел В и С.

Индексы $\vec{V}_{BA}$, $\vec{U}_{BA}$ и т. д. означают соответственно скорость тела В относительно А в неподвижной и подвижной системах координат.



Фиг. 10.

Пусть:

$$r_1 = AC = 1100 \text{ ае},$$

$$r_2 = BC = 100 \text{ ае},$$

$$r_3 = BA = 1006,61 \text{ ае},$$

$$p = BO = 66,67 \text{ ае},$$

$$q = OC = 33,33 \text{ ае},$$

$$\angle ACB = 20^\circ$$

$$|\vec{V}_{BA}| = 1,15 \frac{\text{ае}}{\text{лет}},$$

$$m_0 = 16 M_\odot,$$

$$m_2 = 2 M_\odot,$$

$$m_1 = 1 M_\odot,$$

$$\beta = 5^\circ$$

Угол между вектором $\vec{V}_{BA}$ и направлением ВС обозначим через β .

Выполнение условия 1

$$\frac{2G(m_0 + m_1)}{BA} = 1,3511,$$

а

$$V_{BA}^2 = 1,3225 < 1,3511.$$

Следовательно, условие 1 удовлетворяется.

Определение величин ρ_0 , $\bar{\omega}$.

Из фиг. 10 находим:

$$\rho_0 = \sqrt{r^2 + q^2 - 2rq \cos 20^\circ} = 1068,74 \text{ ае.}$$

Еще Л. Эйлер показал [21], что, когда в системе трех тел сближаются В и С, а тело А, имеющее сравнительно большую массу, находится от них далеко, тогда θ — центр тяжести тел В и С перемещается вокруг А в первом приближении по законам Кеплера, иными словами приближенное уравнение движения центра тяжести будет иметь вид:

$$\frac{d^2 \rho_0}{dt^2} = - \frac{G(m_0 + m_1 + m_2)}{\rho_0^3},$$

где отброшены члены $\ll$ порядка $\frac{r^2}{\rho_0^4}$.

Отсюда, при круговом движении для $\bar{\omega}$ — угловой скорости точки θ относительно А, получим:

$$|\bar{\omega}| = \sqrt{\frac{G(m_0 + m_1 + m_2)}{\rho_0^3}}.$$

Имея в виду начальные данные, получим:

$$|\bar{\omega}| = 0,000789.$$

Определение скорости $V_{B\theta}$.

Имеем:

$$\vec{V}_{B\theta} = \vec{V}_{BA} - [\bar{\omega} \vec{\rho}_0] = \vec{V}_{BA} - \vec{I}_1.$$

Принимаем, что движение тел системы совершается в одной плоскости, тогда $\bar{\omega} \perp \vec{\rho}_0$ и

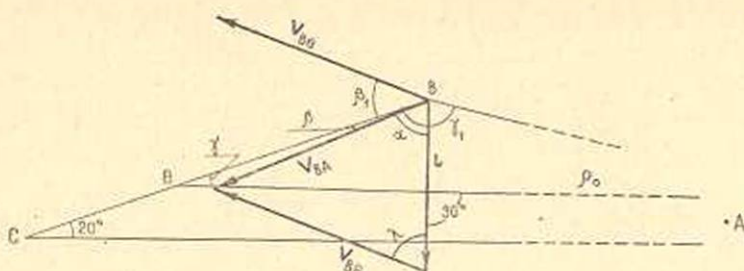
$$I_1 = \omega \rho_0 = 0,8432.$$

Примем, что движение тела С положительное для наблюдателя, стоящего в точке О и смотрящего в направлении точки С, если движение совершается справа налево.

При таком движении и угловую скорость считаем положительной.

Обозначим через $\gamma_1 = \angle ABC$.

Из фиг. 11 имеем:



Фиг. 11.

$$\sin \gamma_1 = \frac{r_1 \sin \widehat{ABC}}{r_3} = 0,3737,$$

откуда

$$\gamma_1 = 158^\circ 3'.$$

Обозначим через $\gamma = \angle BOA_1$, тогда

$$\sin \gamma = \frac{r_3 \sin \gamma_1}{\rho_0} = 0,3520, \quad \gamma = 20^\circ 37'.$$

Обозначив угол между $\vec{l}_1$ и $\vec{V}_{BA}$ через α , получим:

$$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + \gamma + \beta) = 64^\circ 23'.$$

Таким образом:

$$|\vec{V}_{B\bar{B}}| = \sqrt{V_{BA}^2 + l_1^2 - 2 V_{BA} l_1 \cos \alpha} = 1,0932.$$

Находим:

$$\sin \lambda = \frac{V_{BA} \sin \alpha}{V_{B\bar{B}}} = 0,9456,$$

откуда

$$\lambda = 71^\circ 33'.$$

Угол между $\vec{V}_{B\bar{B}}$ и BC будет

$$\beta_1 = 180^\circ - (\lambda + \alpha + \beta) = 39^\circ 4'.$$

Выполнение условия 2.

Выражение 2 можно заменить неравенством:

$$V_{BA}^2 > \frac{2G\mu_1}{p},$$

где

$$\mu_1 = \frac{m_2^3}{(m_2 + m_1)^2} = 0,8889,$$

тогда

$$\sqrt{\frac{2G\mu_1}{p}} = 1,07.$$

Но

$$|\vec{V}_{B\bar{B}}| = 1,0932.$$

Следовательно, удовлетворяется и условие 2.

Определение скорости тела В относительно А в конце сближения тел В и С.

Дифференциальное уравнение движения тела В относительно θ во вращающейся координатной системе приближенно будет:

$$\frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = - \frac{G m_2^3 \bar{r}_1}{(m_2 + m_1)^2 r_1^3} - 2 [\omega \bar{U}_1], \quad (3.1)$$

где в качестве ω возьмем угловую скорость движения точки θ [22].

После интегрирования (3.1) получим:

$$\Delta \bar{U} = \Delta \bar{U}_1 - 2 [\omega \Delta \bar{r}_1], \quad (3.2)$$

где

$$\Delta \bar{U}_1 = - \frac{G m_2^3}{(m_2 + m_1)^2} \int_{t_0}^t \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} dt \quad (3.3)$$

(r_1 есть расстояние между точками В и θ).

Напишем:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U} &= \bar{U} - \bar{U}_0, \\ \Delta \bar{U}_1 &= \bar{U}_1 - \bar{U}_{10}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\bar{U}$ — скорость В относительно θ в задаче трех тел, а $\bar{U}_1$ — скорость В относительно θ в задаче двух тел.

Принимаем, что

$$\bar{U}_0 = \bar{U}_{10}. \quad (3.5)$$

Из (3.2) получим:

$$\bar{U} = \bar{U}_1 - 2 [\omega \Delta \bar{r}_1]. \quad (3.6)$$

В конце сближения тел В и С имеем:

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_1 - [\omega \bar{r}] \quad (3.7)$$

или

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_0 + \Delta \bar{V}_1 - [\omega \bar{r}]. \quad (3.8)$$

Из (3.6) и (3.8) получим (в задаче трех тел) скорость В — относительно θ во вращающейся координатной системе:

$$\bar{U} = \bar{V}_0 + \Delta \bar{V}_1 - [\omega \bar{r}] - 2 [\omega \Delta \bar{r}_1]. \quad (3.9)$$

Если в начале и в конце сближения расстояние между точками В, θ и В, θ обозначим соответственно через r_1 и r , тогда при

$$r_1 = r \quad (3.10)$$

получим

$$|V_1| = |V_0 + \Delta V_1| = |V_0| = |V_{B\theta}|. \quad (3.11)$$

Следовательно, величина $\Delta \bar{V}_1$ — приращение скорости в задаче двух тел в неподвижной координатной системе, в данном случае, изменяет только направление скорости тела В относительно θ .

Определение элементов траектории В относительно θ в неподвижной координатной системе, пользуясь уравнением в задаче двух тел и исходными данными.

Определение $\bar{U}_1$.

$$\bar{U}_1 = \bar{V}_1 - [\omega \bar{r}] = \bar{V}_1 - \bar{l}, \quad |\bar{l}| = 0,0526.$$

Угол между $\bar{V}_1$ и $\bar{l}$ обозначим через ε , из фиг. 13 имеем:

$$\varepsilon = 180^\circ - (90^\circ + \varphi_1) = 50^\circ 56',$$

тогда

$$|\bar{U}_1| = \sqrt{V_1^2 + l^2 - 2V_1 l \cos \varepsilon} = 1,0609.$$

Угол между $\bar{V}_1$ и $\bar{U}_1$ обозначим через ε_1 . Из фиг. 12 имеем:

$$\sin \varepsilon_1 = \frac{l \sin \varepsilon}{U_1} = 0,0385,$$

откуда

$$\varepsilon_1 = 2^\circ 12'.$$

Определим интервал времени, требуемый для прохождения тела от точки В до π — перигелия.

Имеем:

$$T = \frac{\lg \lg \left(45^\circ + \frac{1}{2} E \right) - \varphi_e \lg E}{\varphi_n}.$$

$$\lg \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \lg \frac{r_0}{2},$$

$$n = \frac{\sqrt{G\mu_1}}{a^{3/2}},$$

$$a = \frac{G\mu_1}{\alpha_1}.$$

Из этих формул и данных получим:

$$\alpha = 276,70, \quad n = 0,00041, \quad E = 332^\circ 40', \quad T = 177,22 \text{ лет.}$$

Следовательно, время прохождения тела от точки В до B_1 будет:

$$2T = 354,44 \text{ лет.}$$

Определение направления $\Delta \bar{r}_1$ в момент t_1 .

В равенстве (3.6) член $\Delta \bar{r}_1$ представится в виде:

$$\Delta \bar{r}_1 = \bar{r} - \bar{r}_0.$$

Обозначим через $\bar{r}$ радиус-вектор во вращающейся, а через $\bar{R}$ радиус-вектор тела В в неподвижной координатной системе.

Предполагаем, что в начале сближения В и С в момент t_0 , $\bar{r}$ и $\bar{R}$ соответственно имеют значения $\bar{r}_0$ и $\bar{R}_0$, равные по величине и направлению, т. е.

$$\bar{r}_0 = \bar{R}_0 = \bar{r}_B.$$

За время $2T = t$ вращающаяся координатная система, поворачи-

ваясь с угловой скоростью ω , соответственно изменит направление начального вектора $\vec{r}_0$ относительно $\vec{R}_0$ на угол

$$\psi = \omega t = 0,2797 \frac{\text{рад}}{\text{лет}} = 16^\circ.$$

Следовательно, направление $\vec{r}_0$ в момент t_1 , совпадает с направлением $\vec{\theta B}_2$, $\Delta \vec{r}_1$ определится величиной отрезка $B_1 B_2$, фиг. 12.

Определение $\vec{\sigma}$.

Из треугольника $B_1 \theta B_2$ фиг. 12 имеем

$$\angle B_1 \theta B_2 = 360^\circ - (\angle B_1 \theta B + \psi) = 175^\circ 28',$$

где $\angle B_1 \theta B = 168^\circ 32'$.

Тогда

$$\Delta \vec{r}_1 = 2 r_0 \sin \frac{\angle B_1 \theta B_2}{2} = 133,21 \text{ ае.}$$

Имеем:

$$\vec{\sigma} = 2 |\omega| |\Delta \vec{r}_1| = 0,2102.$$

Обозначим угол $\theta B_1 B_2$ через λ_2 , тогда из фиг. 12 получим

$$\lambda_2 = \frac{180^\circ - \angle B_1 \theta B_0}{2} = 2^\circ 16'.$$

Угол δ между $\vec{V}_1$ и направлением $B_1 B_2$ будет:

$$\delta = 180^\circ - \varphi_1 + \lambda_2 = 143^\circ 12'.$$

Угол $\theta B_1 B$ обозначим через λ_1 , тогда из фиг. 12 имеем:

$$\lambda_1 = 90^\circ - \frac{\angle B_1 \theta B}{2} = 5^\circ 44'.$$

Определение $\vec{U}$ — скорости B относительно θ в момент t_1 в вращающейся координатной системе.

Имеем

$$\vec{U} = \vec{U}_1 - \vec{\sigma},$$

где

$$\vec{\sigma} \perp \Delta \vec{r}_1.$$

Угол δ_1 между $\vec{U}_1$ и направлением $\vec{\sigma}$ из фиг. 13 определится:

$$\delta_1 = \delta + \varepsilon_1 - 90^\circ = 55^\circ 24'.$$

Тогда

$$|\vec{U}| = \sqrt{U_1^2 + \sigma^2 - 2 U_1 \sigma \cos \delta_1} = 0,9573.$$

Из фиг. 13 напишем:

$$\sin \tau = \frac{\sigma \sin \delta_1}{U} = 0,1807,$$

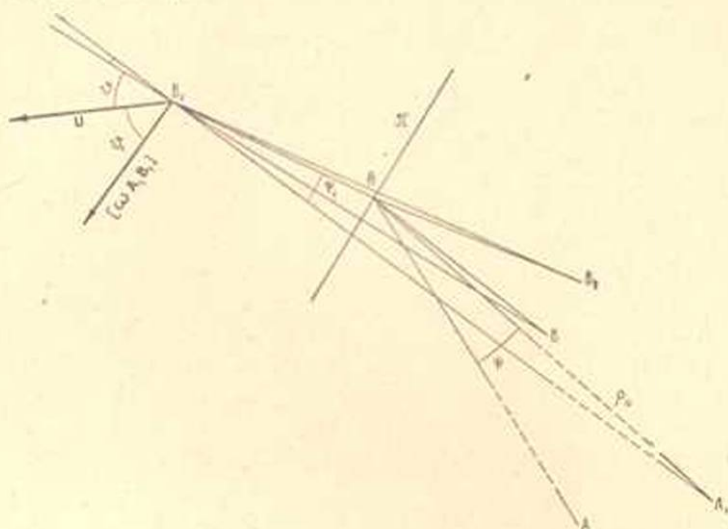
откуда

$$\tau = 10^\circ 25'.$$

Обозначим через ϑ угол между $\bar{U}$ и направлением B_1B_2 , тогда из фиг. 13, имеем:

$$\vartheta = 180^\circ - (\vartheta_1 + \vartheta_2 + \tau) = 24^\circ 11'.$$

Расположение точек В, О, А и векторов, приложенных к В в момент t_1 дано на фиг. 14.



Фиг. 14.

Тело А, вращаясь вокруг точки θ с угловой скоростью $\bar{\omega}$, за время $2T = t$ переместится в A_1 и, очевидно, направление θA_1 составит угол ψ с направлением θA .

Из фиг. 14 имеем:

$$\angle B_1\theta A_1 = \angle B_1\theta B - \tau + \psi = 163^\circ 55'.$$

Тогда

$$B_1A_1 = \sqrt{r_0^2 + \rho_0^2 - 2r_0\rho_0 \cos \angle B_1\theta A_1} = 1131,24 \text{ ae}.$$

Угол между направлениями $B_1\theta$ и B_1A_1 обозначим через φ_1 , тогда из фиг. 14 получим:

$$\sin \varphi_1 = \frac{\rho_0 \sin \angle B_1\theta A_1}{A_1B_1} = 0,2617,$$

откуда

$$\varphi_1 = 15^\circ 10'.$$

Определение $\bar{V}_{B_1A_1}$.

Имеем:

$$\bar{V}_{B_1A_1} = \bar{U} + [\bar{\omega} \bar{B_1A_1}].$$

Угол между $\bar{U}$ и $[\bar{\omega} \bar{A_1B_1}]$ обозначим через ϑ_1 , имеем:

$$\vartheta_1 = 90^\circ - (\vartheta + \varphi_1 + \lambda_2) = 48^\circ 23'$$

$$\bar{z}_1 = [\omega \bar{A}_1 \bar{B}_1] = 0,8925.$$

Тогда

$$|V_{B_1 A_1}| = \sqrt{U^2 + z_1^2 + 2 U z_1 \cos \theta_1} = 1,6878 \frac{ae}{\text{лет}}.$$

Выполнение условия 3.

$$\sqrt{\frac{2G(m_0 + m_1)}{B_1 A_1}} = 1,0965,$$

а

$$|\bar{V}_{B_1 A_1}| = 1,6878.$$

Таким образом, удовлетворяется условие 3, т. е.

$$1,6878 > 1,0965.$$

Следовательно, в системе трех тел с конечными массами может быть такое „случайное“ сближение двух компонентов, после чего может измениться характер движения этих тел и это может привести к изменению конфигурации системы.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну за внимание и советы, полученные от него в ходе выполнения настоящего исследования.

Грузинский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступила 29 V 1962

Գ. Ս. ԹԻԼԳԱՆԷ

ԵՐԵԲ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԱՌԱՏԵՄԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՁԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աստղային կոսմոգոնիայի մի շարք հարցերի լուծման համար անհրաժեշտ է հրկնային մեխանիկայի մեթոդների օգնությամբ ուսումնասիրել տրապեցիայի տիպի բազմակի սխառեմների կառուցվածքն պարբերելը:

Ներկա աշխատանքում մենք ուսումնասիրում ենք տրապեցիայի տիպի սխառեմում շարժման այն դեպքերը, երբ սխառեմի լրիվ էներգիան բացասական է, և երբ երեք մարմիններից երկուսը մոտենում են իրար: Այդ դեպքերի համար սահմանված են սխառեմի քաղաքական կրիտերիումներ:

Աշխատանքում արտածված են 1) վերջավոր մասսաներով երեք մարմինների սխառեմի քաղաքական երկու կրիտերիում, 2) եռակի սխառեմի քաղաքական երկու կրիտերիում, երբ այդ մարմիններից մեկն ունի փոքր մասսա, 3) կրիտերիում այն մասին, թե փոքր մասսավոր մարմինը և՛ կարող է պատկանել եռակի սխառեմին:

Յուշ է արված, որ երեք մարմինների սխառեմում հնարավոր է շարժման այնպիսի դեպք, որ փոքր մասսավոր մարմինը մոտենալով վերջավոր մասսավոր մարմնին կարող է դուրս գալ սխառեմից:

նույնպես ցույց է տրված, որ երեք վերջավոր մասնավոր մարմինների սխեմանում հնարավոր է երկու մարմինների անցյալի մերձեցում, որից հետո սխեմայի մեկ բաղադրիչի շարժման բնույթը կարող է փոխվել:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Труды второго совещания по вопросам космогонии. 19—22 мая 1952 г. Доклад В. А. Амбарцумяна „О происхождении и развитии звезд и звездных систем“. Изд. АН СССР, Москва — 1953.
2. Chazy. Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps. „J. d. mathem. pures et appl.“, v. 8, 1929.
3. Chazy. Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps. „Bull. astron.“, ser. 2, v. 8, 1932.
4. Хильми Г. Ф. О возможности захвата в проблеме трех тел. „Докл. АН СССР“, т. 62, № 1, 1948.
5. Хильми Г. Ф. Об одном критерии неустойчивости захвата в задаче трех тел. „Докл. АН СССР“, т. 78, № 4, 1951.
6. Хильми Г. Ф. Качественные методы в проблеме n тел. Изд-во АН СССР, Москва, 1958.
7. Мерман Г. А. О достаточных условиях захвата и ограниченной гиперболической задаче трех тел при тесных двойных движениях. „Бюлл. Ин-та теор. астроном.“, т. 5, № 6 (69), 1953.
8. Мерман Г. А. Пример захвата в плоской ограниченной гиперболической задаче трех тел. „Бюлл. Ин-та теор. астроном.“, т. 5, № 6 (69), 1953.
9. Мерман Г. А. К вопросу об исследованиях Шази в задаче трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 5, № 9 (72), 1954.
10. Мерман Г. А. Ограниченная параболическая задача трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 5, № 9 (72), 1954.
11. Мерман Г. А. Новый критерий гиперболического движения в задаче трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 6, № 2 (75), 1955.
12. Мерман Г. А. Гиперболические сближения в задаче трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 6, № 2 (75), 1955.
13. Мерман Г. А. и Кочина Н. Г. Применения метода оценок к примеру О. Ю. Шмидта. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 6, № 2 (75), 1955.
14. Мерман Г. А. и Кочина Н. Г. О границах области захвата в плоской ограниченной гиперболической задаче трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 6, № 6 (79), 1956.
15. Мерман Г. А. Качественные исследования в задаче трех тел. „Бюлл. ин-та теор. астроном.“, т. 6, № 10 (83), 1958.
16. Саакян Р. А. О вероятности захвата в задаче трех тел. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1961.
17. Бухгольц. Основной курс теоретической механики, часть первая. Гостехиздат М.-Л., 1939.
18. Мерман Г. А. Об одной теореме Биркгофа. „Бюлл. Ин-та теор. астроном.“ т. 6, № 4 (77), 1956.
19. Субботин М. Ф. Курс небесной механики. Том 2. Из-во ОНТИ, М.-Л., 1937.
20. Дубошин Г. Н. Введение в небесную механику. Из-во ОНТИ, М.-Л., 1938.
21. Эйлер Л. Теория луны. Из-во АН СССР, Л.—1934.
22. Саакян Р. А. О добавочном ускорении в движении небесных тел. „Астрономический журнал“, т. 40, № 5, Из-во АН СССР—1962.

ТЕРМОДИНАМИКА

А. А. Акопян

Об едином законе смещения равновесия

„Закон модерации“ Ле Шателье, теперь более известный как „принцип Ле Шателье—Брауна“, не раз был предметом дискуссии. К сожалению, последние 20—30 лет стал получать признание так называемый „сокращенный принцип Ле Шателье—Брауна“, охватывающий более узкий круг явлений.

В настоящей статье выведены: а) совершенно общее положение $[Ж]$, содержащее в себе все законы смещения равновесия для материально изолированных систем; б) аналогичное положение $[Н]$, выражающее законы смещения равновесия для систем, материально не изолированных, посредством химических потенциалов.

Выведены некоторые общие следствия $[Ж]$ и $[Н]$, удобные в различных случаях.

Одним из следствий является закон модерации.

$[Ж]$ и его следствия применены к термодинамической теории переходов второго порядка.

1

1. Рассмотрим произвольную систему, находящуюся в состоянии устойчивого равновесия. Весьма малое изменение внешних условий вызовет переход системы в новое состояние равновесия, весьма близкое к прежнему.

Термодинамика приводит к очень большому числу зависимостей, определяющих изменения одних признаков системы по равновесным изменениям других. Но все указанные зависимости выражаются посредством частных производных, численные значения и даже знаки которых в большинстве случаев неизвестны.

Поэтому представляют большой интерес теоремы, позволяющие по знакам равновесного изменения одних признаков определять знаки изменения других.

Эти теоремы и называются законами смещения устойчивого равновесия. Впервые они были высказаны Ле Шателье [1] (1884 г.) в виде одного общего положения, охватывающего все явления, связанные с изменением состава, и ставшего известным под названием закона модерации (loi de modération):

[А] *„Всякая система, находящаяся в химическом равновесии, при изменении одного из факторов равновесия испытывает такое превращение, что будь это превращение единственным, оно вызвало бы противоположное по знаку изменение рассматриваемого фактора“.*

Хотя в первоначальной форме закон модерации относился к химическим системам, однако, он был воспринят как единый закон, справедливый для всех систем*.

2. Ле Шателье не дал ни теоретического обоснования закона модерации, ни его выражения посредством математических знаков, а на употребленный им термин „фактор равновесия“ не было обращено должного внимания.

Поэтому естественно, что закон модерации не раз был предметом дискуссии, а обоснованию и установлению его точного содержания посвящено много работ. Среди авторов этих исследований должны быть упомянуты: P. Duhem, П. Эренфест, Ch. Raveau (Ш. Раво), М. Планк, Th. de Donder.

Не входя в подробности истории вопроса, целесообразно отметить здесь вкратце те исследования, в которых впервые были высказаны мысли, оставившие след, и в особенности те, которые в конце концов привели к очень распространенному теперь более узкому пониманию содержания законов смещения равновесия.

3. В 1909 г. Эренфест [2] и Раво [3] (независимо друг от друга) отметили, что вследствие нечеткости формулировки закона модерации его применение не всегда приводит к правильным результатам.

Следует указать, что представление о нечеткости формулировок могло быть вызвано только тем, что не был учтен смысл, вкладываемый Ле Шателье в термин „фактор равновесия“.

Раво разработал метод элементарных циклов (простых и сложных) и получил ряд неравенств, выражающих законы смещения равновесия в различных случаях.

Критика же Эренфеста не была конструктивной. Заключение, к которому Эренфест приходит, сводится к следующему: единственное назначение законов смещения равновесия — указывать направление процессов, возникающих в равновесной системе при изменении внешних факторов; но и это назначение далеко не всегда выполняется законом модерации.

Статья Эренфеста, несомненно, подорвала интерес к этому закону.

* Теперь это положение чаще всего называется принципом Ле Шателье-Брауна. Однако Ле Шателье дал совершенно четкую формулировку закона модерации, а Браун, спустя три года, сделал неэффективную попытку обоснования этого закона. Так что роли Ле Шателье и Брауна несомненно и поэтому название „закон модерации Ле Шателье“ является более справедливым.

В 1934 г. Th. de Donder [4] вывел безупречное единое выражение законов смещения равновесия для систем, в которых могут происходить изменения химического состава.

С. Wagner (1929 г.) получил равенство

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x - \frac{\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y},$$

относящееся ко *всем* системам; Y и y — обобщенная сила и сопряженная обобщенная координата, а X и x — другая пара сопряженных величин: обобщенная сила и обобщенная координата. При устойчивом равновесии системы второе слагаемое правой части неотрицательно.

Отсюда следует неравенство

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x \leq \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_x, \quad (3.1)$$

которое с тех пор многими рассматривается как наиболее общее и точное единое выражение закона модерации.

Так, например, в десятом издании книги: Max Planck, *Thermodynamik* (1954), дополненном главой о законах смещения равновесия (стр. 266—279), написанной M. Laue, на стр. 271 читаем: „Diese Ungleichung... ist die allgemeinste Form des Le Chatelier-Braunsche Prinzips“; а на стр. 272 (в подстрочном примечании) „... Die erste stichhaltige Ableitung gab C. Wagner (Thermodynamik von W. Schottky, H. Ulich, C. Wagner, Berlin, 1929).“

Однако, неравенство (3.1) не охватывает всего содержания закона модерации.

П. С. Эпштейн [5] приводит два типовых примера (А) и (В), к которым приложим закон модерации; (В) соответствует неравенству (3.1), а (А) не укладывается в это неравенство. Эпштейн пишет (стр. 390):

„Не претендуя на охват всех возможных случаев типами (А) и (В), мы однако утверждаем, что принцип Ле Шателье-Брауна должен распадаться по крайней мере на два различных и не связанных друг с другом правила...“.

Переходя к анализу случая (В), Эпштейн предлагает называть правила, относящиеся к классу (В), сокращенным принципом Ле Шателье-Брауна.

Термин „сокращенный принцип...“ нашел широкое распространение. В последнее время часто рассматривается именно этот принцип и создается впечатление, что к этому и сведен закон модерации.

Цель настоящей статьи:

а) показать, что все законы смещения равновесия являются разновидностями единого, применимого ко *всем* системам, положения,

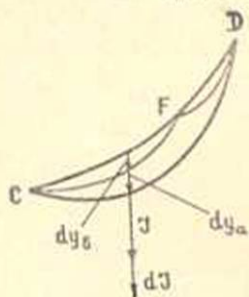
одним из следствий которого является закон модерации (при надлежащем толковании формулировки Ле Шателье);

б) вывести несколько общих следствий, упрощающих пользование этим единым положением;

в) привести применения этого положения в теории переходов второго и более высокого порядков.

II.

4. Прежде чем приступить к термодинамическому рассмотрению, выявим на простом примере, не вызывающем никаких сомнений, тот результат, который является прототипом всех неравенств, объединяемых в один общий закон смещения равновесия.



Фиг. 1.

Пусть стержень, точки C и D которого неподвижны, находится в равновесии под действием силы Y , приложенной в E , (фиг. 1). Бесконечно малое увеличение силы Y на dY вызовет элементарное перемещение точки

а) на dy_a , если неподвижны только точки C и D ,

б) на dy_b , если кроме точек C и D неподвижна еще какая-нибудь третья точка F .

Индексы a и b означают „в случае а“, „в случае б“.

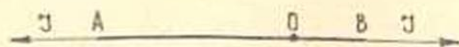
Очевидно $dy_b < dy_a$.

Поэтому
$$0 < \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_a : \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)_b < 1.$$

Следовательно, в координатной системе Y, y кривая $Y_b = Y_b(y)$ окажется более крутой, чем кривая $Y_a = Y_a(y)$.

В дополнение к этому, разберем еще один простой пример.

Упругая нить AB , длина которой y , растягивается силами J , приложенными к точкам A и B , (фиг. 2).



Фиг. 2.

Предположим, что бесконечно малое увеличение Y на dY вызовет удлинение всей нити

на dy_a , если нить совершенно свободна,

на dy_b , если одна из точек нити, например, точка O , закреплена.

Нетрудно показать, что в этом случае $dy_a = dy_b$, т. е. закрепление точки O не имеет никакого влияния на удлинение всей нити. Вследствие этого линия $Y_a = Y_a(y)$ тождественна с линией $Y_b = Y_b(y)$.

Условие неподвижности одной из точек стержня или нити называется в механике связью. Таким образом, несколько обобщая полученные только что результаты, можем сказать:

[Б] В случае, изображенном на фиг. 1, линия $Y_6 = Y_6(y)$ при наличии связи круче линии $Y_6 = Y_6(y)$ в отсутствии связи; в случае, изображенном на фиг. 2, кривые $Y_6 = Y_6(y)$ и $Y_a = Y_a(y)$ — одинаковы.

Случаев, в которых линия $Y_6 = Y_6(y)$ при наличии связи была бы положе линии $Y_a = Y_a(y)$ в отсутствии связи, не существует.

Это последнее утверждение, распространенное на любые системы, любые обобщенные силы и обобщенные координаты, и является, как увидим, единым законом смещения равновесия.

Но, понятно, полученные результаты можно распространить на любые термодинамические системы, только найдя термодинамический аналог понятия связи в механике.

5. Если U — внутренняя энергия, а DQ и DW_e сообщенная извне теплота и внешняя работа в элементарном процессе, то согласно первому началу

$$dU = DQ + DW_e. \quad (5.1)$$

В последующем нам придется рассматривать только термически однородные системы, поэтому можем принять

$$DQ = TdS - \Delta. \quad (5.2)$$

Здесь T и S — абсолютная температура и энтропия системы, а Δ — бесконечно малая величина, удовлетворяющая условиям

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= 0 && \text{в обратимых процессах} \\ \Delta &> 0 && \text{в необратимых процессах.} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Пусть внешняя работа совершается k обобщенными силами

$$X_1, X_2, \dots, X_k,$$

обобщенными координатами которых служат соответственно

$$x_1, x_2, \dots, x_k.$$

Тогда

$$DW_e = \sum_1^k X_r dx_r, \dots \quad (5.4)$$

При этом предполагается, что в одном из произведений $X_r dx_r$

$$X_r = -p_e, \quad dx_r = dV,$$

где p_e — внешнее давление, а V — объем системы.

(5.1), (5.2) и (5.4) дают

$$dU = TdS - \Delta + \sum_1^k X_r dx_r. \quad (5.5)$$

Для краткости и последующих целей положим

$$T = X_1, \quad S = x_2 \quad (5.6)$$

и выделим одно из произведений, например $X_y dx_y$, обозначив его через Ydy .

Теперь (5.5) переписывается так

$$dU = \sum_1^k X_r dx_r - \Delta + Ydy. \quad (5.7)$$

Нам предстоит определять разность работ обобщенной силы Y в двух элементарных процессах. При этом нужно или рассматривать и величины выше первого порядка малости или — и это удобнее — выражать работы посредством площадей. Будем обозначать эти площади буквой σ с соответствующими индексами и приписывать σ знак, совпадающий со знаком работы.

Окончательно имеем

$$dU = \sum_1^k X_r dx_r - \Delta + \sigma \quad (5.8)$$

(σ и Δ — бесконечно малые!).

6. τ -процессы.

При выводе единого выражения законов смещения равновесия нам придется рассматривать процессы, которые здесь для краткости названы τ -процессами.

τ -процессы это процессы, удовлетворяющие следующим условиям:

[B] а) процесс обратим и начинается в состоянии устойчивого равновесия.

б) в этом процессе величины Y и x изменяются (или могут изменяться) одновременно, а в каждой паре сопряженных величин

$$X_1, x_1; X_2, x_2; \dots; X_k, x_k$$

постоянна или обобщенная сила или обобщенная координата.

Пусть в τ -процессе постоянны обобщенные силы

$$X_1, X_2, \dots, X_v$$

и обобщенные координаты

$$x_{v+1}, x_{v+2}, \dots, x_k.$$

Так как

$$dx_{v+1} = dx_{v+2} = \dots = dx_k = 0,$$

то обобщенные силы $X_{v+1}, X_{v+2}, \dots, X_k$ не совершают работы и

$$DW_c = \sum_1^v X_r dx_r.$$

Поэтому в случае τ -процессов (5.8) принимает вид

$$d\left(U - \sum_1^v X_r x_r\right) = \sigma - \Delta. \quad (6.1)$$

Левая часть (6.1)—полный дифференциал.

7. Термодинамическая связь.

Назовем термодинамической связью постоянство какого-нибудь экстенсивного признака системы.

Например, каждое из условий

$$V = \text{const}, \quad S = \text{const}, \quad x_r = \text{const}, \quad r = 1, 2, \dots, k \quad (7.1)$$

$m_j^i = \text{const}$, где m_j^i —масса компонента j в фазе i , является связью.

Следует особо подчеркнуть, что постоянство какой-нибудь интенсивной величины (T , p , X_r) вовсе не является связью.

Указанные только что связи, например (7.1), можно назвать макросвязями.

Кроме макросвязей нами будут рассматриваться и микросвязи. Вот несколько примеров.

Представим, что каждая молекула является диполем, электрический момент которого $\vec{l}$. При изменении состояния системы электрический момент молекулы может изменяться по направлению, по величине или и по направлению и по величине.

Воспрепятствовать изменению (по направлению, по величине или и по направлению и по величине) электрического момента каждой молекулы значит наложить микросвязь.

В настоящее время принимают, что в газах, жидких и твердых телах молекулы или части молекул вращаются или совершают вращательные колебания.

Мысленно приостановить вращение или вращательные колебания каждой молекулы или помешать переходу вращательных колебаний молекулы во вращение значит наложить микросвязь.

В кристаллах каждая частица совершает колебания около занимаемого ею узла решетки. Считать колебания каждой частицы прекратившимися равносильно введению микросвязи.

[Г]. Пусть в τ -процессе АС сохраняются все связи, которые были наложены на систему в течение τ -процесса АВ, и вводится еще новая, дополнительная связь $z = \text{const}$. Тогда условимся называть АВ свободным τ -процессом и обозначать через τ , а АС будем называть τ -процессом с дополнительной связью и обозначать буквой τ_z .

8. Условия устойчивости равновесия и некоторые смежные зависимости.

Пусть $Y \neq T$ и $y \neq S$.

В этом случае условия устойчивости равновесия выражаются неравенствами

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_\tau > 0 \quad (8.1)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_y > 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_Y > 0. \quad (8.2)$$

Кроме того, из постулата Томсона непосредственно следует, что

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_S : \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_T > 1. \quad (8.3)$$

Как уже было сказано, за Y и y может быть принята любая пара сопряженных величин

$$X_1, x_1; X_2, x_2; \dots; X_n, x_n.$$

Положив

$$Y = -p_{ie}, \quad y = V,$$

получим из (8.1) и (8.3)

$$\left(\frac{\partial p_e}{\partial V}\right)_S < 0, \quad \left(\frac{\partial p_e}{\partial V}\right)_T < 0 \quad (8.1')$$

$$\left(\frac{\partial p_e}{\partial V}\right)_S : \left(\frac{\partial p_e}{\partial V}\right)_T > 1. \quad (8.3')$$

Согласно определению τ -процессов зависимости (8.1), (8.3) и, в частности, зависимости (8.1'), (8.3') применимы к τ -процессам. Поэтому (8.1) и (8.3) можно формулировать так:

[D]. Когда Y и y отличны от T и S , то в координатной системе Y, y линии τ -процессов или все поднимаются слева направо или все спускаются слева направо.

В обоих этих случаях линия изэнтропного τ -процесса круче линии изотермического τ -процесса.

Пользуясь чисто математическими соотношениями

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_y \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial y}{\partial T}\right)_S = -1$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_Y \left(\frac{\partial S}{\partial Y}\right)_T \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_S = -1,$$

легко показать, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_y : \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_Y = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_S : \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_T. \quad (8.4)$$

Но

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_y = C_y, \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_Y = C_Y,$$

где C_y и C_Y — теплоемкости при $y = \text{const}$ и $Y = \text{const}$.

Из (8.1), (8.2), (8.4) следует, что

$$\left. \begin{aligned} C_y > 0, \quad C_Y > 0 \\ C_Y : C_y > 1 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

(8.5) применимы ко всем τ -процессам.

9. Вывод единого закона смещения равновесия.

Пусть, фиг. 3, состояния A , B , C бесконечно мало отличаются друг от друга, причем $y_B = y_C$ и на линии CB $y = \text{const}$; A —состояние устойчивого равновесия, AB —элементарный свободный τ -процесс, а AC —элементарный τ_2 -процесс с дополнительной связью $z = \text{const}$, см. $[B]$ и $[I]$.

A —состояние устойчивого равновесия, а по $[B]$ процессы τ и τ_2 обратимы. Следовательно, в любом месте линий AB и AC система также будет в состоянии устойчивого равновесия. Таким образом, при $y = y_B = y_C$ состояниями устойчивого равновесия будут „свободное“ состояние B (без дополнительной связи), состояние C с дополнительной связью $z = \text{const}$.

Ввиду бесконечной близости состояний B и C , состояние C может рассматриваться как бесконечно мало отклоненное от состояния B .

Согласно определению устойчивого равновесия

$[E]$. Система, бесконечно мало отклоненная от состояния устойчивого равновесия, может быть в равновесии только вследствие наложения дополнительной связи (или приложения соответствующей силы). По удалении связи (или силы) равновесие нарушается и система должна вернуться к исходному состоянию равновесия.

Таким образом, по удалении дополнительной связи $z = \text{const}$ C перестает быть состоянием равновесия и должен совершиться необратимый переход CB в состояние B .

В этом процессе $y = \text{const}$ и поэтому работа обобщенной силы Y

$$\sigma_{CB} = 0, \quad \Delta > 0 \quad (9.1)$$

по (5.3).

Следует подчеркнуть, что необратимый процесс CB происходит сам собой, поэтому процесс BC невозможен.

Из вышесказанного заключаем, что систему можно перевести из A в B двумя способами

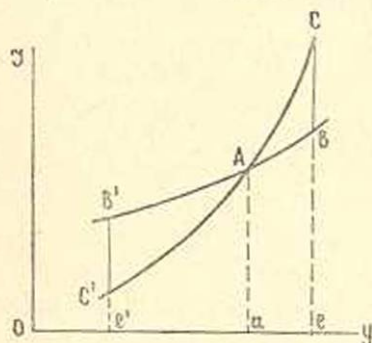
а) посредством обратимого процесса AB , в котором $\Delta = 0$, а работа обобщенной силы Y (фиг. 3)

$$\sigma_{AB} = \text{площ } ABcaA > 0 \quad (9.2)$$

б) посредством последовательности процессов AC и CB ; по (5.3) в этой последовательности $\Delta \neq 0$, а работа обобщенной силы Y

$$\sigma_{ACB} = \sigma_{AC} + \sigma_{CB} = \sigma_{AC} = \text{площ } ACcaA > 0, \Delta > 0. \quad (9.3)$$

Теперь (6.1) согласно (9.2) и (9.3) напишется так



Фиг. 3.

Особо нужно подчеркнуть тот частный случай, когда экстенсивный признак z , постоянство которого является дополнительной связью, оказывается одной из обобщенных координат в выражении (6.1), например,

$$z = x_r.$$

По определению $[B]$ в любом τ -процессе должна быть постоянной или обобщенная сила X_r или обобщенная координата x_r .

При $z = x_r$ процессом AC с дополнительной связью будет τ_{x_r} ; но тогда в свободном τ -процессе AB обобщенная координата будет изменяться и по $[B]$ должна быть постоянной обобщенная сила X_r , т. е. свободным процессом будет τ_{X_r} .

Ввиду этого общее положение $[Ж]$ примет вид

$[З]$. Если дополнительной связью является постоянство одной из обобщенных координат в выражении внешней работы, то в координатной системе Y, y линия процесса τ_{x_r} круче линии τ_{X_r} .

Очевидно, $[З]$ — частный случай.

11. Предельные случаи.

$[Ж]$ не устанавливает величины угла между линиями τ и τ_r в точке A . Этот угол может быть и очень малым, а в предельном случае линии τ и τ_r могут касаться друг друга в точке A .

Вот примеры. Пусть в смеси идеальных газов возможна реакция (скажем, $H_2 + J_2 = 2HJ$), не изменяющая общего числа молекул. Приняв за дополнительную связь условие постоянства состава смеси и считая температуру постоянной, видим, что в координатной системе p, V линия τ_r должна совпасть с линией τ свободного процесса, (В самом деле, $p\dot{V} = nRT$, где n — общее число молекул в смеси; n остается постоянным и при неизменном составе смеси и при реакции).

Другой пример был рассмотрен в пункте 4, фиг. 2. Если, как и раньше, обозначить растягивающую силу через Y , длину нити через y , а за связь принять неподвижность одной из точек нити, то в координатной системе Y, y линия τ_r совпадает со свободной линией τ .

Наконец, если за связь принять условие постоянства энтропии, то согласно теореме Нернста при $T=0$ изотерма совпадает с изэнтропой в любой координатной системе Y, y (при $Y \neq T$, $y \neq S$).

Имея в виду возможность совпадения линий τ_r и τ или их соприкосновения в точке A , нужно $[Ж]$ формулировать так:

$[U]$. В координатной системе Y, y линия τ_r вообще круче линии τ ; иногда эти линии совпадают или соприкасаются в точке A . Линия τ_r ни в одном случае не может быть положе линии τ .

Сравнив с $[B]$, убеждаемся, что $[U]$ представляет распространение $[B]$ на все системы, на любые обобщенные силы и обобщенные координаты Y, y .

12. [U]—единая форма всех законов смещения равновесия. Обычно случай совпадения или прикосновения кривых τ и τ_z не рассматривается, а пользуются [Ж] или [3]. Ниже увидим, что [Ж] вполне соответствует закону модерации Ле Шателье.

Некоторые непосредственные следствия [Ж] иногда оказываются более удобными для применений.

Переходим к этим следствиям.

а) Очевидно линия τ может рассматриваться как график функции

$$Y = Y(z, y), \text{ где в свою очередь } z = z(y). \quad (12.1)$$

Линия же τ_z —график функции $Y = Y(z = \text{const}, y)$.

В точке A частную производную функции $Y = Y(z = \text{const}, y)$ по y обозначим через $\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_z$, а производную функции $Y = Y(z, y)$ по y обозначим через $\frac{\partial Y}{\partial y}$.

Из [U] следует, что

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_z : \frac{\partial Y}{\partial y} > 1; \quad (12.2)$$

знак равенства относится к случаю совпадения кривых τ и τ_z или их соприкосновения в точке A .

Согласно [3] при $z = x_r$ τ —процессом является процесс τ_{x_r} ; поэтому в этом случае вместо (12.2) имеем

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{x_r} : \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_{x_r} > 1. \quad (12.2')$$

б) Возьмем на линии AC процесса τ_z , фиг. 4, еще две точки E и D , причем положение точки E произвольно, а точка D выбрана так, что

$$DB \parallel Oy, \text{ тогда как } CB \parallel Oy.$$

Так как на линии AC экстенсивный признак z не изменяется,

$$\left. \begin{aligned} z_A = z_D = z_C = z_E \\ z_B - z_A = z_B - z_D = z_B - z_E \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

и поэтому

Результат (12.3) общее можно выразить так:

Все процессы, начинающиеся в какой-нибудь точке линии τ_z и оканчивающиеся в одной и той же точке линии τ , вызывают одно и то же изменение экстенсивного признака z .

в) Так как точки A, B, C, D бесконечно близки друг к другу, то, фиг. 4, приращения Y и y в процессах AB, CB бесконечно малы.

Обозначим приращения обобщенной силы Y в свободном τ —процессе и в процессе CB соответственно через dY и $d_y Y$. Знаки этих приращений различны, поэтому можем написать

$$dY d_y Y < 0. \quad (12.4)$$

То же неравенство получится при рассмотрении свободного τ -процесса AB' и процесса $C'B'$ (фиг. 4).

Обозначив через du и $d_y u$ изменения обобщенной координаты u в свободном τ -процессе AB и в процессе DB ($Y = \text{const}$), замечаем, что их знаки одинаковы, поэтому

$$du d_y u > 0. \quad (12.5)$$

Это же неравенство получится при рассмотрении процессов AB' и $D'B'$.

Обратим внимание на то, что по (12.3) приращениям dY , du , $d_y u$ и $d_y Y$ соответствуют одинаковые изменения z .

Весьма существенна противоположность знаков неравенств (12.4) и (12.5).

13. Закон модерации Ле Шателье.

Представим, что в состоянии A начинается процесс I_y , в котором $u = \text{const}$, z изменяется так же, как в свободном τ -процессе AB , а изменение Y равно $\delta_y Y$.

Так как $u = \text{const}$ в обоих процессах I_y и CB , а точки A , C , B бесконечно близки, мы вправе считать, что знак $\delta_y Y$ совпадает со знаком $d_y Y$ (изменения Y в процессе CB). Поэтому неравенство (12.4) относящееся к процессам AB и CB , справедливо также в случае процессов AB и I_y , т. е.

$$dY \delta_y Y < 0. \quad (13.1)$$

Аналогичным образом, если в процессе I_y обобщенная сила Y постоянна, z изменяется так же, как в процессе AB , а приращение u равно $\delta_y u$, то знак $\delta_y u$ одинаков со знаком $d_y u$ (изменения u в процессе DB) и поэтому, кроме неравенства (13.1), справедливо также неравенство

$$du \delta_y u > 0. \quad (13.2)$$

(13.1) можно формулировать так:

[К]. В процессе, в котором обобщенная координата u постоянна, можно осуществить такое же изменение экстенсивного признака z , какое имеет место в свободном τ -процессе, только при условии, что в обоих этих процессах приращения обобщенной силы Y различны по знаку.

Примем во внимание, что у Ле Шателье термин „фактор равновесия“ означает интенсивную величину, обобщенную силу. Учтя эту оговорку и сравнив [К] с законом модерации [А], убеждаемся в их совпадении по смыслу. Отличие кроется только в уточнении, которое содержится в определении τ -процесса.

Смысл неравенства (13.2) таков:

[Л]. При постоянной обобщенной силе Y можно осуществить такое же изменение экстенсивного признака z , какое имеет

место в свободном τ -процессе, только при условии, что в обоих этих процессах знак приращения обобщенной координаты одинаков.

Как видим, положение [Л] (одинаковость знаков приращений обобщенной координаты) противоположно закону модерации (различие знаков приращений обобщенной силы).

Источник недоразумений, связанных с законом модерации, очевиден. Получались неправильные результаты всегда, когда, пренебрегая смыслом термина „фактор равновесия“, сравнивали знаки приращений обобщенной координаты; тогда как по закону модерации сравнивать нужно знаки приращений обобщенной силы.

14. Законы смещения равновесия, связанные с химическим потенциалом.

До сих пор предполагалось, что система материально изолирована, и все результаты параграфов 9—13 относятся к таким системам.

Рассмотрение систем, не изолированных материально, представляет тот интерес, что за обобщенные силу и координату Y, y можно принять химический потенциал и массу какого-нибудь компонента. Чтобы это показать, достаточно представить одну из фаз системы, подверженной только одинаковому во всех точках давлению p_e .

Тогда

$$dU^i = TdS^i - \Delta^i + p_e dV^i, \quad (14.1)$$

где i —индекс фазы. Ее термодинамический потенциал

$$G^i = U^i - TS^i + p_e V^i \quad (14.2)$$

и, как известно,

$$dG^i = -S^i dT + V^i dp_e + \sum_1^c \mu_r^i dm_r^i \dots \quad (14.3)$$

Здесь m_r^i —масса компонента r в фазе i , μ_r^i —химический потенциал этого компонента, а c —число компонентов в фазе. (14.1)—(14.3) приводят к важному неравенству

$$\sum_1^c \mu_r^i dm_r^i = \Delta^i > 0. \quad (14.4)$$

Из (14.4) можно вывести результаты, вполне аналогичные тем, которые получены в параграфах 9—13 из (5.7).

Выделим из суммы $\sum_1^c \mu_r^i dm_r^i$ пару сопряженных величин, например μ_e^i, dm_e^i , и предположим, что, аналогично Y и y , μ_e^i и m_e^i изменяются одновременно.

Рассмотрим λ -процессы, аналогичные τ -процессам: λ -процессы удовлетворяют следующим условиям:

[М]. а) процесс обратим и начинается в состоянии устойчивого равновесия;

б) в этом процессе величины μ_c^i и m_c^i изменяются (или могут изменяться) одновременно, а в каждой из остальных пар сопряженных величин

$$\mu_1^i, m_1^i; \mu_2^i, m_2^i; \dots; \mu_{c-1}^i, m_{c-1}^i$$

постоянными являются или химический потенциал или масса компонента.

Примем снова за связь постоянство экстенсивной величины z и пусть AB —свободный λ -процесс, а AC — λ_z -процесс с дополнительной связью $z = \text{const}$ (при этом $m_{cC}^i = m_{cB}^i$).

Тогда, воспользовавшись условием устойчивости $\frac{\partial \mu_c^i}{\partial m_c^i} > 0$ получим результат,

аналогичный [Ж], фиг. 5.

[Н]. В координатной системе μ_c^i, m_c^i линия AC λ_z -процесса с дополнительной связью $z = \text{const}$ круче линии свободного λ -процесса.

Очевидно, следствия [Н] совпадают по форме со следствиями из [Ж]. Так, например, аналогично (12.2) и (12.2') имеем

$$\left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial m_c^i} \right)_z : \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial m_c^i} \right) > 1, \quad (14.5)$$

а если $z = m_c^i$, то

$$\left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial m_c^i} \right)_{m_c^i} : \left(\frac{\partial \mu_c^i}{\partial m_c^i} \right)_{\mu_c^i} > 1 \quad (14.5')$$

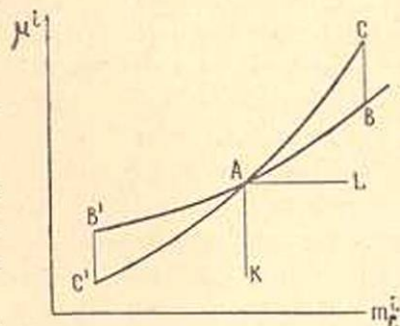
(12. 3) сохраняет силу и теперь.

Рассмотрев, кроме свободного λ -процесса AB , фиг. 5, еще процесс AK , в котором $m_c^i = \text{const}$, и процесс AL , в котором $\mu_c^i = \text{const}$, и отнеся приращения $d\mu_c^i$ и $\delta_{m_c^i} \mu_c^i$ к процессам AB и AK , а dm_c^i и $\delta_{\mu_c^i} m_c^i$ — к процессам AB и AL , получим

$$d\mu_c^i \delta_{m_c^i} \mu_c^i < 0 \quad (14.6)$$

$$dm_c^i \delta_{\mu_c^i} m_c^i > 0 \quad (14.7)$$

(14.6)—это закон модерации Ле Шателье.



Фиг. 5.

III

Некоторые применения законов смещения равновесия к переходам второго порядка.

15. Вместо „переходы второго и более высоких порядков“ будем говорить „переходы второго порядка“.

Имеются основания предполагать, что каждый переход второго порядка связан с разрушениями микросвязей какого-нибудь типа. В различных случаях и телах эти микросвязи различны.

Так, в метане переход второго порядка имеет место при $T=20,4^\circ\text{K}$. Большинство авторов предполагает, что при более низких температурах молекулы метана совершают вращательные колебания; при постепенном повышении температуры все большая часть молекул переходит от вращательных колебаний к вращению, которое становится всеобщим при $T=20,4^\circ\text{K}$.

Здесь микросвязью служит запрещение перехода молекулы от вращательных колебаний к вращению; повышение температуры способствует разрушению микросвязи во все большем числе молекул и переход второго порядка наступает при той температуре, при которой завершается разрушение микросвязи во всех молекулах.

В метаноле молекулы представляют твердые диполи; микросвязью служит требование постоянства направления электрического момента каждого диполя. С повышением температуры диполи—один за другим—получают возможность поворачиваться на все больший угол. Переход второго порядка наступает в тот момент, когда способностью поворачиваться на любой угол будут наделены все диполи.

Итак, во всяком теле, в котором повышение температуры приводит к постепенному разрушению микросвязей одного и того же типа, возможен переход второго рода. Переход наступает в том состоянии тела, когда завершается разрушение всех микросвязей рассматриваемого типа.

Исходя из этого, можно, пользуясь законами смещения равновесия, вывести особенности, присущие переходам второго порядка.

16. В однородной системе, химический состав которой неизменен, за параметры могут быть приняты температура, давление и масса: t , p , m .

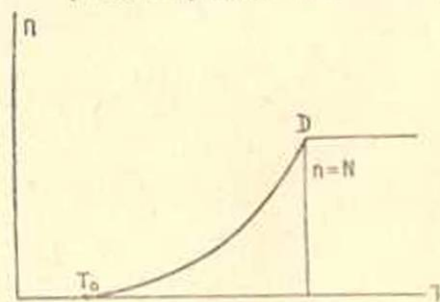
Таким образом, число n разрушенных микросвязей—функция t и p :

$$n = n(t, p).$$

Однако, согласно экспериментальным данным зависимость n от t гораздо сильнее, чем зависимость n от p ; $n=0$ в области низких температур от $0_{\text{абс}}$ до некоторой, характерной для рассматриваемого типа микросвязей, температуры T_0 . От T_0 начиная, n возрастает все быстрее с изобарным повышением температуры и становится равным числу N всех микросвязей рассматриваемого типа при некоторой тем-

пературе T_D . При температурах выше T_D $n = N = \text{const}$. График функции $n = n(t, p = \text{const})$ имеет вид, изображенный на фиг. 6.

Пусть в состоянии A , фиг. 5, происходят процессы: свободный, изобарный τ -процесс AB , в котором $dt > 0$ и $dn > 0$, и изобарный



Фиг. 6.

τ_n -процесс AC с дополнительной связью $n = \text{const}$.

Обозначив через C_p и $C_{p,n}$ теплоемкости процессов AB и AC в точке A , имеем согласно (12.2) неравенства

$$C_p : C_{p,n} > 1, C_p - C_{p,n} > 0. \quad (16.1)$$

Так как с повышением температуры возрастает производная

$\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_p$, то при приближении к точке D разность теплоемкостей $(C_p - C_{p,n})$ увеличивается и достигает наибольшего значения в D . Отмечая индексом D теплоемкости C_p и $C_{p,n}$ в точке D , можем вместо $C_{p,nD}$ писать C_{pN} (так как $n = N$ в D) и тогда

$$C_{pD} - C_{pN} > 0. \quad (16.2)$$

Эта разность представляет одну из характерных особенностей переходов второго порядка: скачкообразное падение теплоемкости при переходе через точку D .

При температурах выше T_D , $n = N = \text{const}$, C_{pN} медленно изменяется с температурой.

17. Заменяем изобарные τ и τ_n -процессы изотермическими. Тогда по (12.2)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{t,n} : \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_t > 1. \quad (17.1)$$

Введем коэффициенты изотермической сжимаемости

$$\gamma_t = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_t \text{ и } \gamma_{t,n} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{t,n}$$

тогда в процессах τ и τ_n .

Снова, называя D ту точку, в которой $n = N$, и обозначив

$$\gamma_{t,n,D} \text{ через } \gamma_{tN},$$

получим согласно (16.2)

$$\gamma_{t,D} > \gamma_{tN}, \quad \gamma_{t,D} - \gamma_{tN} > 0. \quad (17.2)$$

Эта разность в точке D оказывается конечной, что также характерно для переходов второго порядка.

Такие скачки, как (16.1) и (17.2), претерпевают—при переходах второго порядка—и другие величины, например, коэффициенты изобарной расширяемости $\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)_p$;

$$\alpha_{p,D} - \alpha_{p,N} \neq 0. \quad (17.3)$$

Эта разность может иметь любой знак, тогда как законы смещения равновесия предписывают, чтобы знаки разностей (16.1) и (17.2) были положительными.

Причина в том, что τ и τ_z —процессы рассматриваются в координатной системе сопряженных величин Y, y (в частности $T, S; (-p), V$), а в коэффициент α_p входят V и t , которые не являются сопряженными.

Между разностями (16.1), (17.2) и (17.3), а также между этими разностями и производной $\left(\frac{\partial t}{\partial p} \right)_n$ существуют зависимости, впервые установленные П. Эренфестом. Формулы Эренфеста не устанавливают знаков разностей $C_{pD} - C_{pN}$ и $\gamma_{t,D} - \gamma_{t,N}$, а только утверждают, что эти знаки одинаковы.

З а к л ю ч е н и е

1. На основании понятий „термодинамическая связь“, „ τ -процесс“, „ λ -процесс“ выведены:

а) положение [Ж], применимое ко всем материально—изолированным системам, находящимся в устойчивом равновесии, к любой паре обобщенных силы и координаты Y, y , и являющееся единой формой законов смещения равновесия;

б) положение [Н], аналогичное [Ж], применимое к химическому потенциалу и массе любого компонента произвольной фазы (рассматриваемой как система, не изолированная материально);

в) приведены некоторые общие следствия положений [Ж] и [Н].

2. Неравенство (13.1), связывающее приращения обобщенной силы Y и неравенство (14.5), связывающее приращение химического потенциала, представляют закон модерации Ле Шателье.

3. Неравенства (13.2) и (14.6), аналогичные (13.1) и (14.5) соответственно, связывают приращения обобщенной координаты и массы какого-нибудь компонента.

Закон, представляемый этими неравенствами, противоположен закону модерации.

4. (12.2') и (14.5')—частные случаи (12.2) и (14.5). Поэтому

а) неправильно утверждение М. Лауэ, что (12.2') является наиболее общим выражением принципа Ле Шателье—Брауна;

б) неправильна мысль Эпштейна, что „принцип Ле Шателье—Брауна“ должен распасться по крайней мере на два различных и не свя-

занных друг с другом правила*: одно из них („сокращенный принцип Ле Шателье-Брауна“) выражается (12.2'), а другое— (12.2).

5. Переходы второго порядка можно рассматривать как последний этап разрушения микросвязей определенного типа. Пользуясь этим, можно установить знаки некоторых из скачков, характерных для этих переходов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 X 1961

Ս. Ս. Հակոբյան

ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՒԹՅԱՆ ՏԵՂԱՓՈԽՄԱՆ ՄԻԱՍՆԱԿԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Լե Շատելիի «Լոգերացիայի օրենքը», որը պիտի ավելի հախտի է որպես «Լե Շատելի-Բրաունի սկզբունք», մեկ անգամ չէ, որ դարձել է դիսկուսիայի առարկա: Յավոր, վերջին 20-30 տարիների ընթացքում սկսել է ճանաչում ստանալ ալպես կոչված «Լե Շատելի-Բրաունի համառոտ սկզբունքը», որն ընդգրկում է երևույթների ավելի նեղ շրջան:

Ներկա հոդվածում արտածված են՝ ա) միանգամայն ընդհանուր դրույթ [Ж], որն իր մեջ պարունակում է հավասարակշռության տեղափոխման բոլոր օրենքները նյութականապես մեկուսացված սիստեմների համար, բ) համանման դրույթ [Н], որն արտահայտում է հավասարակշռության տեղափոխման օրենքները նյութականապես չմեկուսացված սիստեմների համար՝ քիմիական պոտենցիալների միջոցով:

Արտածված են [Ж]-ի և [Н]-ի մի քանի հետևանքներ, որոնք հարմար են տարրեր զնալիքերում:

Հետևանքներից մեկը հանդիսանում է մոդերացիայի օրենքը՝ [Ж]-ն և նրա հետևանքները կիրառված են երկրորդ կարգի անցումների թերմոդինամիկական տեսության նկատմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. a) Le Chatelier H. Compt. rend. **99**, 786, 1884.
- б) Le Chatelier H. Recherches sur les équilibres chimiques. Paris, 1888 (Annales des Mines **13**, 200, 1888).
- в) Braun F. Untersuchungen über die Löslichkeit (Zs. Phys. Chemie **1**, 259, 1887).
2. а) Эренфест П. Ж. Р. Ф. О. **41**, 347, 1909.
- б) Ehrenfest P. Zs. phys. Chemie **77**, 227, 1911.
3. Raveau Ch. J. Phys. **8**, 572, 1909.
4. De Donder Th. L'Affinité (troisième partie). 41, 1934. Paris, Gauthier—Villars.
5. а) Epstein P. S. Textbook of Thermodynamics 375, 1937, New-York, J. Wiley.
- б) Эннемин П. С. Курс термодинамики 389, 1948, Москва, ГТТИ.
6. Schottky W., Ullrich H., Wagner C. Thermodynamik, 1929, Berlin.

ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ

С. Р. Месчан

Кольцевой прибор для изучения ползучести и
длительного сопротивления сдвигу глинистых грунтов
методом кручения

На настоящем этапе развития механики грунтов большое значение имеют лабораторные исследования деформативных свойств глинистых грунтов при сдвиге с учетом фактора времени. Поэтому обращается особое внимание как на методику эксперимента, так и на приборы, предназначенные для указанной цели.

Для исследования закономерностей деформирования при сдвиге наибольшее распространение получили одноплоскостные срезные приборы [1, 6], а в отдельных лабораториях — приборы скашивания и кручения [2, 3, 4, 5].

Срезные приборы, которые моделируют плоскую деформацию и предназначены для определения сопротивления грунтов сдвигу, обладают недостатками, которые сильно ограничивают их применяемость для исследования деформаций. Основным недостатком указанных приборов является то, что в них образец деформируется в условиях неопределенного напряженного состояния, в условиях неравномерного распределения касательных напряжений в плоскости среза, вследствие концентрации напряжений у краев образца [7]. К числу недостатков срезных приборов надо отнести также переменность площади среза, ограниченность деформации, непостоянство величины зазора между подвижным и неподвижными каретками, неполную передачу касательных напряжений на образец. Небольшая, и неопределенная по величине зона сдвига [7] не дает представления об объемных деформациях сдвига, делает невозможным определение относительной деформации сдвига.

Приборы скашивания, которые моделируют формоизменение образца под действием касательных напряжений и предназначены для исследования закономерностей деформаций грунта при сдвиге, встречаются со сплошными и разрезанными торцевыми стенками. Из указанных приборов лучшими являются те, торцевые стенки которых разрезаны [4]. В этих приборах [4] обеспечивается свобода деформирования, полная передача касательных напряжений на образец, определенное напряженное состояние образца и, наконец, возможность измерения деформации в зоне сдвига. Однако, эти приборы можно использовать только при малых деформациях.

Из всех существующих наиболее подходящими для изучения деформативных свойств при сдвиге являются приборы, в которых деформации сдвига определяются на образцах, подвергнутых кручению [8].

Основные достоинства приборов указанных типов заключаются в том, что: 1) деформация образца происходит в условиях определенного напряженного состояния; 2) во время эксперимента не меняется площадь сечения образца; 3) обеспечивается полная передача касательных напряжений на образец по его горизонтальным плоскостям; 4) возможно измерять деформации непосредственно в зоне сдвига; 5) деформации сдвига по величине практически неограничены.

Идея создания приборов испытания грунтов на сдвиг методом кручения впервые была использована Г. И. Покровским [9]. В дальнейшем подобного типа приборы получили широкое распространение в Германии [5], в Голландии и в Китае получили применение так называемые торсионные пластометры [8, 10], а в СССР — приборы кольцевого сдвига. Испытываемые в указанных приборах образцы обычно имеют форму цилиндра с площадью поперечного сечения от 50 до 100 см², высотой от 2 до 8 см.

Несмотря на то, что у нас в СССР приборы кручения имеют применение в лабораторной практике, однако, к сожалению, они в технической литературе не описаны. Учитывая изложенное, а также имея в виду большое достоинство приборов кручения, нашли необходимым описать прибор кольцевого сдвига НИС Гидропроекта (автор Я. Л. Коган, конструктор Цыплаков), который применяется в нашей лаборатории как для исследования деформативных свойств глинистых грунтов при сдвиге, так и для изучения вопроса о длительном сопротивлении грунтов сдвигу. В период двухлетней работы с приборами кольцевого сдвига они были нами несколько видоизменены. Как будет показано ниже, в результате указанного видоизменения приборы стали более универсальными.

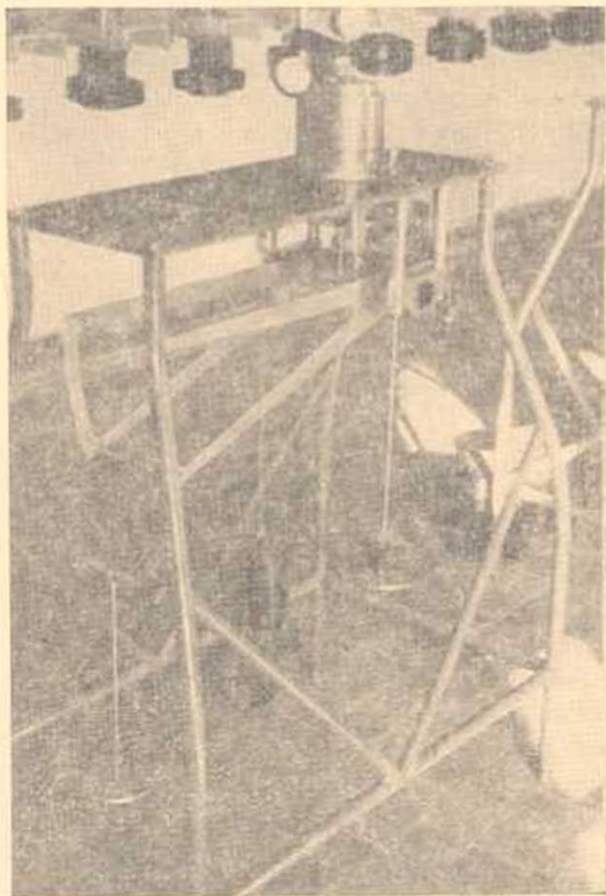
Прибор кольцевого сдвига НИС Гидропроекта (фиг. 1), который предназначен для испытания кольцевых образцов с площадью поперечного сечения 60,5 см² (с наружным диаметром 101 мм, внутренним — 50 мм) и высотой 24 мм, состоит из станины 01 (фиг. 2), головки 02, механизма кручения 03, механизма вертикальных (нормальных) нагрузок 04, кронштейна 05, держателя 06 и нониуса 07.

Головка, в которой осуществляется как предварительное уплотнение, так и сдвиг грунта, состоит из нижней неподвижной 1 и верхней подвижной 2 кольцевых обойм, в которых помещены рифленные дырчатые неподвижное 3 и подвижное 4 кольца. Кольцо 4 с тремя винтами 5 закреплено к трем ножкам опоры 6, проходящим через выдолбленные в крышке верхней обоймы отверстия. Кольцо 4 вместе с опорой 6 перемещается только по вертикали, а шпильки 7 не дают нижнему кольцу возможности крутиться. Вертикальная (нормальная) нагрузка от механизма сжатия 04 при помощи троса 8, втулки 9 и гайки 10 через опору 6 и кольцо 4 передается на образец грунта, помещенный между двумя кольцами 3 и 4.

Для подачи воды в нижнюю обойму она снабжена штуцером 11 и воронкой 12. Подача воды производится также через отверстия 13, просвер-

ленные в крышке обоймы 2. В днище нижней обоймы просверлены три отверстия, заглушенные винтами 14, предназначенными для выталкивания кольца 3 из своего гнезда.

Сдвиг образца осуществляется кручением верхней обоймы при помощи шпинделя 17 механизма кручения 03 и кольца 18, закрепленного к



Фиг. 1

обойме винтами 19. Кольцо 18 имеет прорезы, которыми захватывается головка шпинделя. Неподвижность нижней обоймы обеспечивается двумя шпильками 16 направляющей 15 механизма кручения, которые входят в просверленные в днище отверстия.

Измерение деформации сжатия образца выполняется индикатором 20, а деформации сдвига индикатором 21. Деформация сдвига измеряется также коннусом 07, шкала которого 22 помещена на опоре 6. На шкале коннуса закреплена пластина, куда упирается ножка индикатора 21.

Механизм вертикальной (нормальной) нагрузки 04 представляет собой секторный рычаг с соотношением плеч 1:20, состоящий из двух дисков 24 и опорной оси 25, подвешенной к столу 01 двумя парами колонок 26 с помощью опорных планок 27 и гаек 28. Рычаг уравнивается за-

крепленными между двумя дисками винтами 29 противовесом 30. Ось 25 опирается на опорные планки через шарикоподшипники 31. Диски 24 соединены между собой распорками 32.

Вертикальная нагрузка 53, увеличенная в 20 раз по отношению к грузу, помещенному на поддоне 33 (подвешенном к рычагу тросами 34, тягой 35 поперечной 36), передается на образец при помощи троса 8, закрепленного к оси 25 и перекинутого через ее канавку.

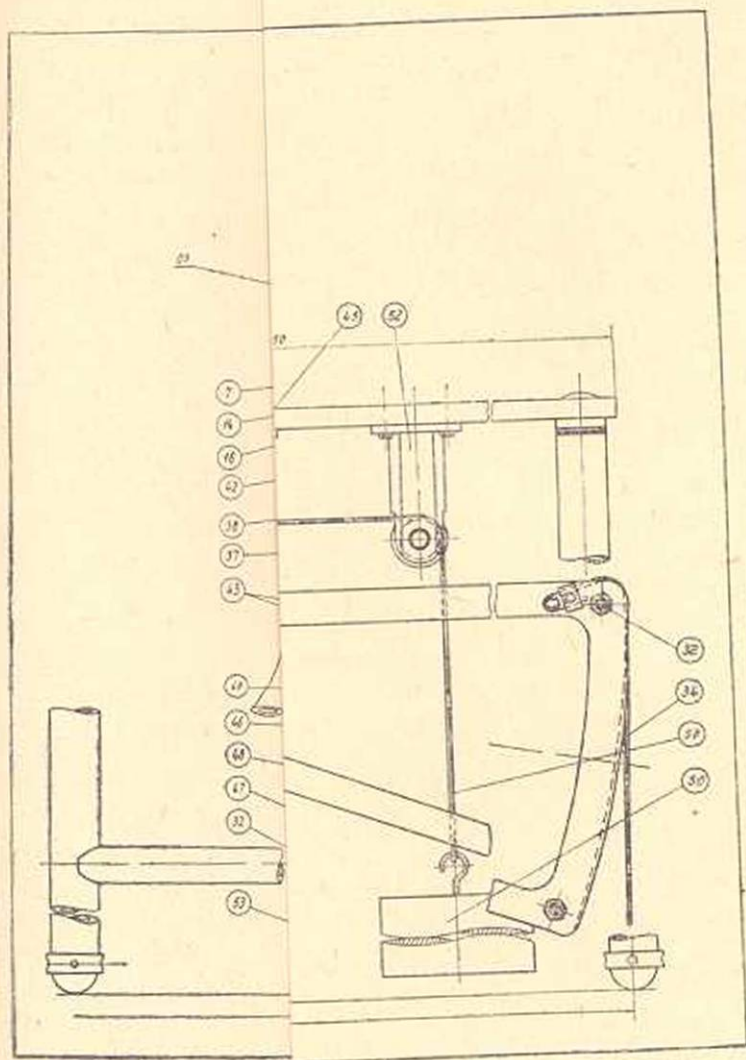
Механизм кручения 03 состоит из закрепленных к столу 01 винтами 54 направляющей 15, шпинделя 17 и насаженного на хвосте шпинделя (закрепленного гайкой 37) диска 38. Шпиндель через опорный подшипник 39, помещенный в стакане 40, опирается на гайку 41. Гайка 41 с помощью ручки 42 поднимает и опускает шпиндель и тем самым создает зазор между обоймами 1 и 2. Максимальная величина зазора — 5 мм, точность измерения — 0,01 мм.

Кручение шпинделя осуществляется при помощи диска 38. Крутящий момент создается парой тяг 43, помещенных в канавках диска 38, перекинутых через ролики 44 кронштейнов 45 и закрепленных на балке 46. К балке 46 подвешен грузовой поддон 47 с помощью стержня 48 и шаровой опоры 49.

Механизм кручения уравнивается противовесом 50 с помощью троса 51, перекинутого через ролик кронштейна 52 и закрепленного в канавке диска 38.

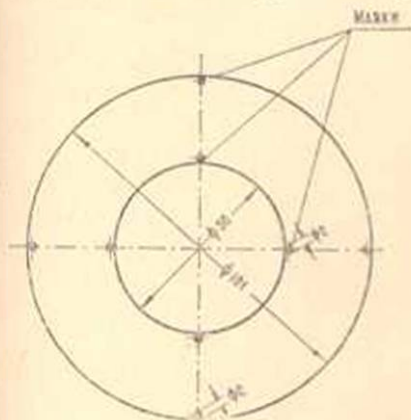
В целях выяснения характера деформации было изучено распределение деформации по высоте образца при помощи грунтовых и пластилиновых маяков. Предварительное изучение указанного вопроса было выполнено на суглинке [11] при величине нормальной нагрузки $P=2 \text{ кг/см}^2$. Более подробно этот вопрос был рассмотрен при испытании разданской и новошвейцарской глин. Разданская глина (Армянская ССР) была испытана при двух значениях нормальной нагрузки $P=0,25$ и $2,0 \text{ кг/см}^2$, а новошвейцарская (Украинская ССР) при $P=1,0 \text{ кг/см}^2$. Для изучения изменения формы маяков испытывались по 4—6 образцов при различных значениях величины деформации. План расположения маяков приведен на фиг. 3. На фиг. 4 приведена фотография а) формоизменения пластилиновых маяков четырех образцов разданской глины, испытанных при $P=2 \text{ кг/см}^2$, б) двух образцов того же грунта, испытанных при $P=0,25 \text{ кг/см}^2$, в) образцов новошвейцарской глины, испытанных при $P=1,0 \text{ кг/см}^2$.

Как показывают эксперименты, образцы деформируются почти по всей высоте, причем до определенных значений касательных напряжений деформация практически имеет линейный характер. В частности, при испытании образцов разданской глины, уплотненных нагрузками $P=2 \text{ кг/см}^2$, линейный характер деформации сохраняется до величины $\Delta S=1,6 \text{ мм}$ (второй образец снизу), что же касается остальных случаев, то указанная деформация ограничивалась величиною $\Delta S=0,7 \text{ мм}$ (нижние образцы на фиг. 4б и 4в). Из указанных фотографий также следует, что после

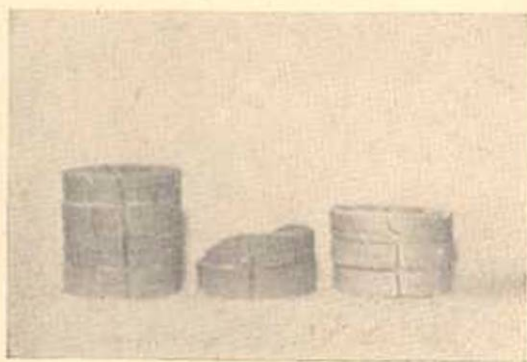


превышения деформации (напряжения) некоторого предельного значения появляется плоскость среза.

Кольцевой прибор «Гидропроекта» может быть использован как для определения деформации, так и сопротивления грунтов сдвигу. Учитывая, что сопротивление грунта сдвигу зависит от высоты зоны сдвига (в данном



Фиг. 3.



Фиг. 4.

случае высота зоны сдвига равна высоте образца), на указанном приборе можно испытывать образцы высотой от 5—6 до 24 мм.

Величина сопротивления сдвигу определяется по известному выражению теории сопротивления материалов [12]

$$q_{кр} = \frac{3M_{кр}}{2\pi(r_2^3 - r_1^3)}$$

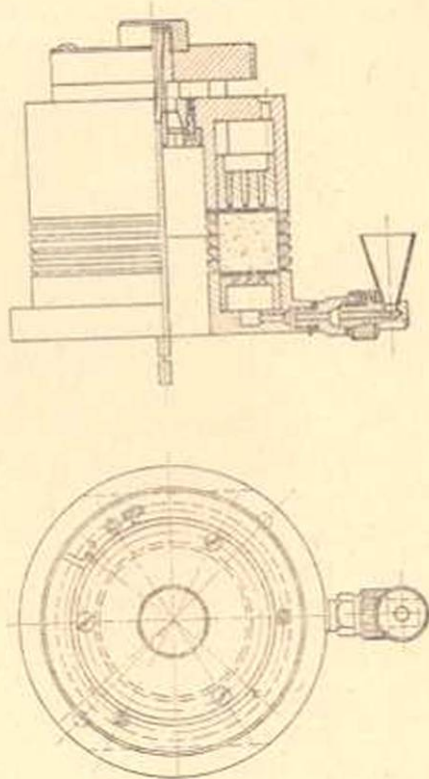
где $M_{кр}$ — крутящий момент, r_2 и r_1 — наружный и внутренний радиусы образца.

Необходимо отметить, что ввиду равномерного распределения касательных напряжений в плоскости среза при предельном напряженном состоянии [12], постоянства величины зоны сдвига, а также неограниченности деформации и неизменяемости площади поперечного сечения образца, приборы кольцевого сдвига являются лучшими из всех существующих приборов, предназначенных для изучения длительного сопротивления грунтов сдвигу.

Несмотря на достоинства прибора кольцевого сдвига Гидропроекта, он обладает также недостатком, который в ряде случаев может несколько исказить результаты определения закономерностей деформации и сопротивления грунтов сдвигу. Этим недостатком является наличие трения [8] между боковыми поверхностями образца и стенками нижней и верхней обойм. Чтобы устранить указанный недостаток, прибор нами был несколько переделан (фиг. 5). Переделка заключается в том, что боковые стенки прибора, соприкасающиеся с образцами, заменены наборами колец из органического стекла, перемещающихся друг относительно друга доста-

* В этой формуле в статье [11], по вине автора, допущена опечатка.

точно свободно. В целях уменьшения трения, кольца соприкасаются друг с другом через тонкую прослойку смазочного масла. С этой же целью уменьшена площадь их соприкосновения (фиг. 5).



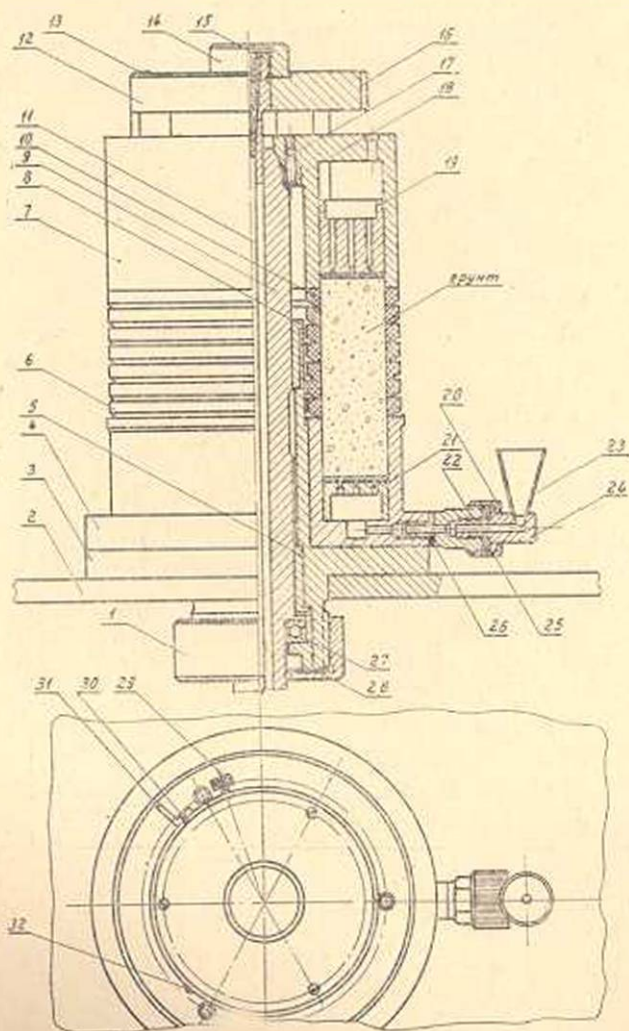
Фиг. 5.

Для защиты от испарения влаги с боковых поверхностей образца, промежутки между подвижными кольцами заполняются техническим вазелином, или же осуществляется боковое окружение образца водой.

Следует отметить, что высота образца не ограничивается размером 24 мм, ее можно значительно увеличить. Это будет очень нетрудно сделать, если иметь набор шпинделей разной длины, а также набор наружных и внутренних колец. На фиг. 6 и 7 приведены чертежи, а на фиг. 8 показана фотография прибора с образцом высотой 80 мм. Преимуществом испытания высоких образцов является то, что исключается влияние способа приложения касательных напряжений на деформацию сдвига, которая измеряется в середине образца на некоторой заданной базе (от 20 до 30 мм).

На фотографии (фиг. 9) показано взаимное передвижение окружающих грунт наружных колец, которое характеризует деформирование образца высотой 80 мм. Испытание образца выполнялось по схеме, приведенной на чертеже (фиг. 6).

Наконец, для изучения деформативных свойств при чистом сдвиге в условиях равномерного распределения касательных напряжений, взамен трапецидальной эпюры распределения касательных напряжений в толстых образцах, можно воспользоваться тонкими образцами. При такой схеме испытания мы приходим к конструкции торсионного пластометра Геза и Тан Тьенг-ки [8], которым они широко пользовались при изучении реологических свойств глин.

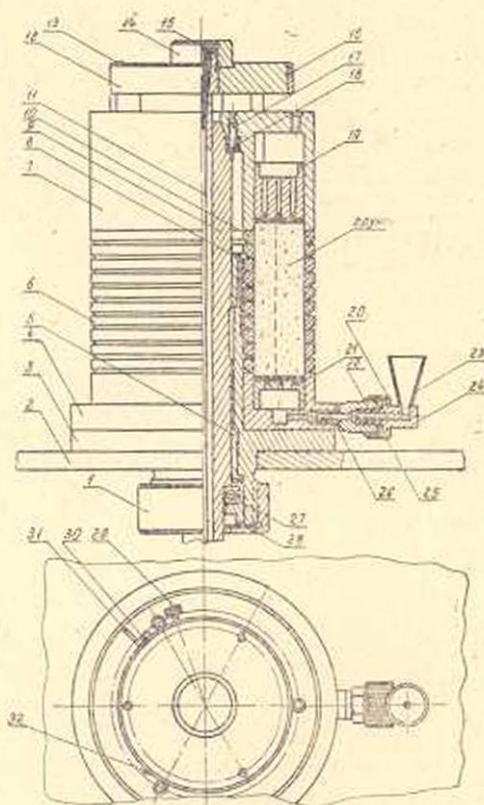


Фиг. 6.

Гёз и Тан Тьенг-ки [8] при изучении реологических свойств глин на торсионных пластометрах пользовались полными цилиндрическими образцами с наружным диаметром 3,8 см и внутренним диаметром 2,6 см (толщина стенки 0,6) при высоте образца 8 см, т. е. при соотношении толщины d к наружному диаметру D —1:6. Аналогичное соотношение между толщиной стенок и наружным диаметром использовано К. Ф. Войт-

ковским [13] при испытании полных цилиндрических образцов льда на кручение и сжатие. Исходя из изложенного, мы полагаем, что такое же соотношение можно использовать и при изучении тонких образцов на рассматриваемом здесь приборе, и поэтому рекомендуем величину толщины образца $1,4 \text{ см}$ ($\frac{d}{D} = 1:7$).

Таким образом, прибор Гидропроекта, с небольшими переделками, может быть использован как для изучения длительного сопротивления грунтов сдвигу, так и для изучения закономерностей деформации ползучести при сдвиге в условиях сложного напряженного состояния и чистого сдвига.



Фиг. 7.

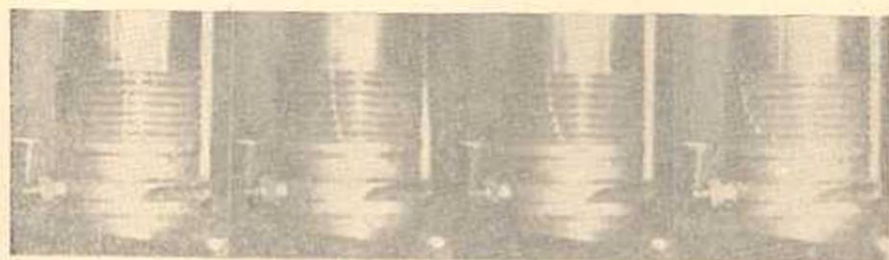
Тарировка механизмов вертикальной (нормальной) нагрузки и кручения выполняется образцовыми динамометрами (ДС-02 и ДС-05) при помощи специальных тарировочных приспособлений.

Тарировка механизма вертикальных (нормальных) нагрузок осуществляется приспособлением (фиг. 10), которое устанавливается на направляющей механизма кручения и служит опорой для динамометра. Для передачи вертикальной нагрузки от рычага к динамометру используется

рамная подвеска. Нижняя балочка подвески захватывает втулку 9 троса 8 при помощи гайки 10 (фиг. 2), а верхняя балочка с помощью регулировочного болта и стального шарика опирается на динамометр.



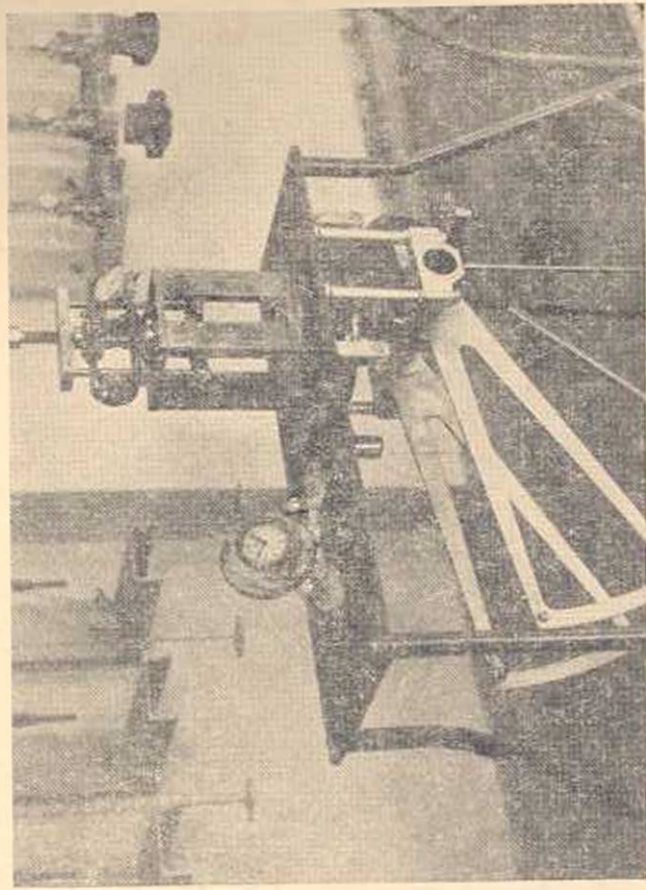
Фиг. 8.



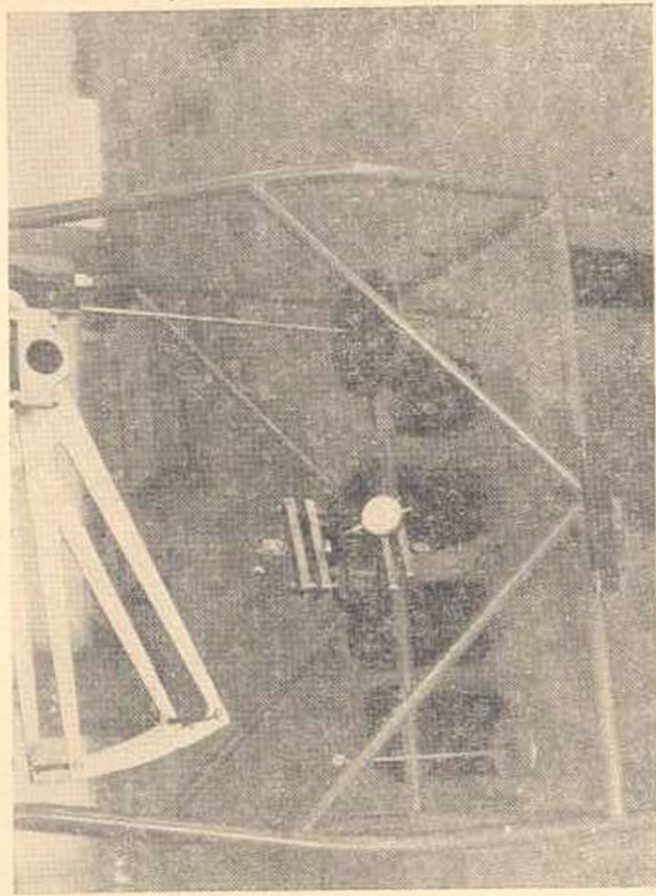
Фиг. 9.

Тарировка механизма кручения выполняется при помощи реверсивного устройства (фиг. 11), которое подвешивается на тросе 51 вместо противовеса 50 (фиг. 2) указанного механизма и закрепляется на балке, смонтированной на раме прибора.

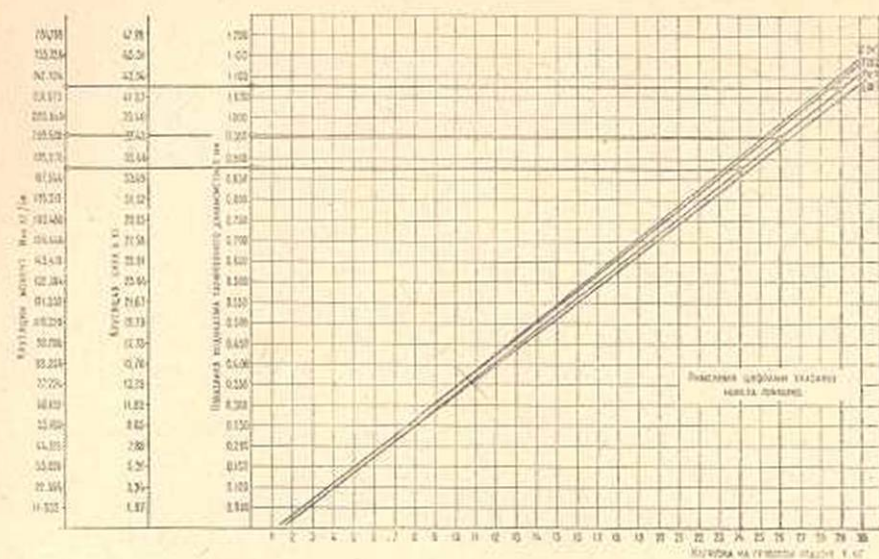
На графике (фиг. 12) приведены тарировочные кривые четырех приборов. Величина крутящего момента определяется по весу гирь, положен-



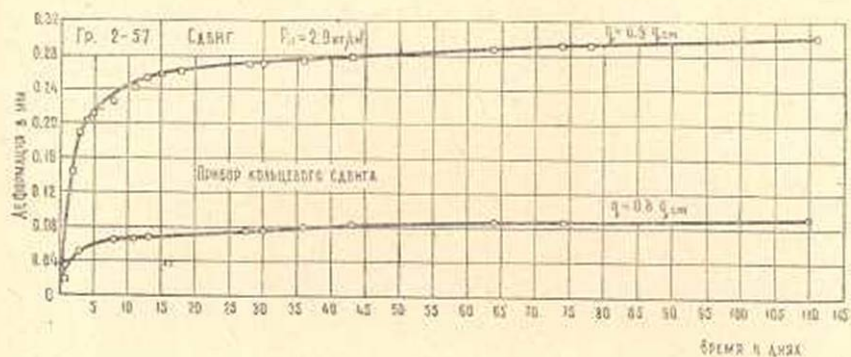
Фиг. 10.



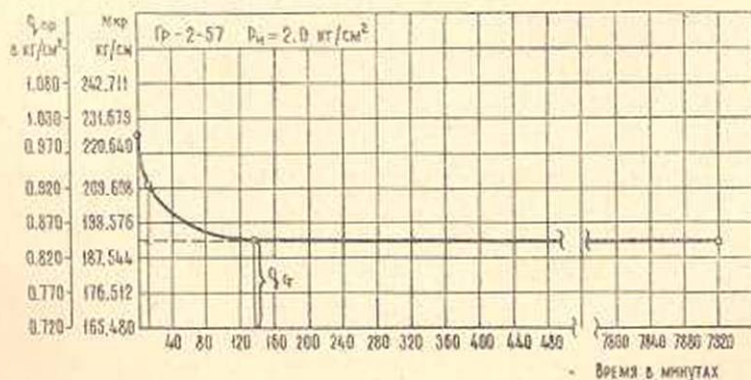
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

ных на грузовой поддон 47 (фиг. 2) при помощи тарировочных кривых, как это показано на фиг. 12.

Для примера на графике (фиг. 13) приведены кривые деформации ползучести при сдвиге образцов-близнецов суглинки, испытанных при двух значениях касательных напряжений $q=0,8 q_{пр}$ и $q=0,9 q_{пр}$ ($q_{пр}=0,77 \text{ кг/см}^2$ — стандартное сопротивление сдвигу), а на фиг. 14 — график изменяемости сопротивления образцов сдвигу в зависимости от длительности испытания, построенный по результатам испытания образцов на приборах кольцевого сдвига при высоте образца 22 мм. Величина предварительно уплотняющей нагрузки $P = 2 \text{ кг/см}^2$.

При изучении вопроса изменяемости сопротивления сдвигу образцов-близнецов в зависимости от продолжительности испытания воспользовались методикой равномерного увеличения касательных напряжений ступенями постоянной величины через различные интервалы времени. Величина ступени касательного напряжения и крутящего момента были равны $q = 0,08 \text{ кг/см}^2$, $M_{кр} = 20 \text{ кг. см}$ (с учетом поправки на тарировку $q = 0,07 \text{ кг/см}^2$, $M_{кр} = 18 \text{ кг. см}$).

Были испытаны восемь образцов при четырех режимах загрузки. Интервалы приложения нагрузок были равны 5 сек., 1 мин и 12 часам. Кроме того, пара образцов была испытана по стандартной методике, т. е. последующая ступень нагрузки прикладывалась к образцу после условного затухания деформации сдвига. За условную стабилизацию деформации сдвига принималась скорость сдвига, равная 0,01 мм/мин.

Как видно из графика (фиг. 14), в начальном участке кривой, т. е. при небольших продолжительностях испытания, имеет место уменьшение сопротивления грунта сдвигу, однако, в дальнейшем какое-либо изменение его величины не наблюдается. Нетрудно заметить, что указанные изменения величины сопротивления грунта сдвигу имеют место в интервале времени, меньшем длительности испытания по стандартной методике.

Полученные результаты еще раз подтверждают полученные нами ранее результаты [11, 14] и приводят к заключению, что стандартное сопротивление сдвигу грунтов нарушенной структуры соответствует их длительному сопротивлению сдвигу.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 18 VI 1962

Ա. Ռ. ՄԵՍՉԻԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԱՐԲ՝ ՈԼՈՐՄԱՆ ԵՂԱՆԱԿՈՎ ԿԱԿԱՅԻՆ ՇԻՆԱՀՈՂԵՐԻ
ՍՈՂԲԻ ԵՎ ՍԱՀԲԻՆ ՑՈՒՅՑ ՏՐՎՈՂ ԴԻՍԱԴՐՈՒԹՅԱՆ
ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում բերված են ոլորման եղանակով շինանոդերի սողքի և սահքին ցույց տրվող հարստի գիմադրության ուսումնասիրության համար «Հիդրոնալիզի» ինստիտուտի գիտահետազոտական բաժնի կողմից ստեղծ-

ված օղակային սարքի, ինչպես նաև հեղինակի կողմից կատարված նրա ձևավորման նկարագրությունները: Բերված են նաև սարքի փորձարկման և ստուգման արդյունքները:

Հոդվածում, որպես նմուշ, դետեղված են այդ սարքի վրա կատարված կավային շինանոցերի սողերի և սահքին ցույց տրվող հարատև դիմադրության ուսումնասիրության արդյունքները: Ցույց է տրված, որ սահքին ցույց տրվող հարատև դիմադրության ուսումնասիրության արդյունքները հաստատում են հիդրենակի կողմից (ուրիշ սարքերի վրա) նախկինում կատարված ուսումնասիրություններից ստացված արդյունքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Маслов Н. Н. Прикладная механика грунтов. Машиностроиздат, М., 1949.
2. Roscoe K. H. and Meek A. M. An apparatus for the application of simple shear to soil samples. Proc. 3-rd Int. Conf. Soil Mech. I, p. 186, 1953.
3. Murayama S. and Hata S. On the effect of remoulding clay. Proc. 4-th Int. Conf. Soil Mech. I, p. 80, 1957.
4. Сотников С. Н. Закономерности развития деформации ползучести глинистых грунтов при сдвиге. Научное сообщение ЛИСИ, Л., 1960.
5. Соколов С. С. и Чуринов М. В. О зарубежной критике исследований сопротивления глинистых грунтов сдвигу. Разведка и охрана недр. Гостеолиздат, № 7, 1959.
6. Коган Я. Л. Установка для испытаний грунтов на сдвиг. Техническое сообщение № 6, НИС „Гидропроект“, 1959.
7. Костерин Э. В. О методике определения сопротивления сдвигу глинистых грунтов. Гидротехническое ст-во, № 7, 1957.
8. Geuze E. C. W. A. and Tan Tjong-Kie. The mechanical behaviour of clays. Proc. 2-nd Int. Congress on Rheology, Oxford, 1953.
9. Покровский Г. И., Эрлих А. А., Будычев В. Г. Исследование внутреннего трения в песках и глинах. Вестник ВИА РККА, № 6, 1934.
10. Tan Tjong-Kie. Structure mechanics of clays. Scientia Sinica, v. VIII, № 1, 1959.
11. Месчян С. Р. К вопросу о длительном сопротивлении глинистых грунтов сдвигу. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962.
12. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. Гостехиздат, М.—Л., 1939.
13. Войтковский К. Ф. Скорость пластической деформации поликристаллического льда. Известия Сибирского отд. АН СССР, № 4, 1959.
14. Месчян С. Р. О влиянии длительности испытания на сопротивление грунтов сдвигу. ДАН АрмССР, 32, № 1, 1961.