

Г. В. Бадалян

Критерий абсолютной сходимости квазистепенного ряда

В работе рассматривается квазистепенной ряд

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \quad (1)$$

где $0 < t \leq u$,

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = \frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1}}{k} \frac{\varphi_k(u)}{\prod_{v=1}^k \gamma_v}, \quad (2)$$

$$\varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right)', \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots, \quad (4)$$

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_v} = \infty, \quad (4')$$

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) &= \\ &= (-1)^k u^{-\gamma_k} \prod_{v=1}^k \gamma_v \int_u^t t_1^{\gamma_1-1} dt_1 \int_u^{t_1} t_2^{\gamma_2-\gamma_1-1} dt_2 \dots \int_u^{t_{k-1}} t_k^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1} dt_k = \\ &= \frac{\prod_{v=1}^k \gamma_v}{2\pi i} \int_C \left(\frac{t}{u} \right)^{\zeta} \frac{d\zeta}{\prod_{v=0}^k (\zeta + \gamma_v)} = \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma_1, \dots, \gamma_n\right), \quad (5) \\ & \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Простой контур C здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности всех полюсов подынтегральной функции.

В [1] получено необходимое и достаточное условие разложимости функций в сходящийся на $(0, u]$ ряд (1) с конечным порядком равномерной сходимости на $[0, u]$.

В настоящей работе приводится аналогичное условие для разложимости функций в абсолютно сходящийся на $(0, u]$ ряд (1) с конечным порядком равномерной сходимости.

Определение 1. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$AC_{\gamma, \kappa}(AC_{\gamma, \kappa}(0, u)),$$

(где $\kappa \geq 0$ — произвольное число, $\{\gamma_v\}$ — произвольная последовательность чисел, определенная в (4) и (4')), если при $t \in (0, u]$ существует последовательность функций

$$\{\varphi_n(t)\},$$

определенная в (3) и, кроме того, если для всякого $x \in (0, u]$ и $n=0, 1, 2, \dots$ удовлетворяются условия

$$\int_x^u |\varphi_{n+1}(t)| t^{\gamma_n + \kappa_1} dt \leq C \prod_{v=1}^n (\kappa' + \gamma_v), \quad (6)$$

где κ_1 и κ' ($\kappa_1 > \kappa' > \kappa \geq 0$) произвольные числа, C — постоянная, не зависящая от n и x .

Очевидно, что (6) равносильно выполнению условия

$$\int_0^u |\varphi_{n+1}(t)| t^{\gamma_n + \kappa_1} dt \leq C \prod_{v=1}^n (\kappa' + \gamma_v). \quad (6')$$

Определение 2. Назовем нижнюю грань множества действительных чисел μ , для которых ряд

$$t^\mu \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right)$$

сходится равномерно на $[0, u]$, порядком равномерной абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right)$$

на $[0, u]$ и обозначим его через κ .

Определение 3. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$AT_{\gamma, \kappa}(AT_{\gamma, \kappa}(0, u)),$$

если она разлагается в абсолютно сходящийся на $(0, u]$ квазистепенной ряд (1) с порядком равномерной абсолютной сходимости κ .

Определение 4. Функция $\varphi(t)$ на $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$R_{\gamma, \kappa}(R_{\gamma, \kappa}(0, u)),$$

если она принадлежит классу обобщенно регулярно монотонных на $(0, u]$ функций при последовательности $\{\gamma_n\}$, т. е. классу $R_1(0, u]$ (см. [2]) и, кроме того

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) t^\alpha = 0 \quad (7)$$

для всякого $\mu > \alpha$, тогда как при $\mu < \alpha$ равенство (7) не имеет места. Число α называется порядком функции $\varphi(t)$ на $[0, u]$.

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей работы, приведем некоторые предложения, первое из которых доказано в [2].

Теорема 1. Для того, чтобы функция $\varphi(t)$ разлагалась в абсолютно сходящийся на $(0, u]$ квазистепенной ряд (1)

$$(\varphi(t) \in AT_1(0, u]),$$

необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух обобщенно регулярно монотонных функций при последовательности чисел $\{\gamma_n\}$, т. е. функций класса $R_1(0, u]$.

Заметим, что в этой общей теореме не обсуждается вопрос о взаимосвязи порядка равномерной абсолютной сходимости ряда (1) и порядков функций класса $R_1(0, u]$.

С целью установления такой взаимосвязи доказываемся:

Теорема 2. Для того, чтобы

$$\varphi(t) \in AT_{\alpha, \mu}(0, u], \quad \alpha > 0$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ представлялась в виде разности двух функций $\psi(t)$ и $g(t)$, где

$$\psi(t) \in R_1(0, u], \quad g(t) \in R_1(0, u],$$

а порядки равномерной сходимости квазистепенных рядов вида (1) функций $\psi(t)$ и $g(t)$ соответственно были равны μ и μ' , где $\mu \leq \alpha$, $\mu' \leq \alpha$, причем хотя бы в одном из этих неравенств имеет место знак равенства.

Доказательство. Необходимость и достаточность в условиях теоремы, чтобы $\varphi(t)$ представлялась в виде разности двух функций $\psi(t)$ и $g(t)$, принадлежащих классу функций $R_1(0, u]$, установлены в теореме 1, поэтому нам остается установить взаимосвязь между числами α , μ и μ' .

С этой целью заметим, что

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| + a_n}{2} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \quad (8)$$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| - a_n}{2} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \quad (9)$$

(см. [2]).

Это значит, что отрезки последних рядов мажорируются соответствующими отрезками ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \omega_n \left(\frac{t}{u}, \gamma \right), \quad (10)$$

следовательно, порядки равномерной (абсолютной) сходимости рядов (8) и (9) не могут превосходить порядка равномерной (абсолютной) сходимости ряда (10), т. е.

$$\mu \leq \lambda, \quad \mu' \leq \lambda. \quad (11)$$

С другой стороны, если бы в (11) одновременно имели место строгие неравенства, то складывая ряды (8) и (9), получили бы ряд (10) с порядком равномерной (абсолютной) сходимости, равным

$$\max(\mu, \mu') < \lambda,$$

чего быть не может.

Этим теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для того, чтобы порядок равномерной (абсолютной) сходимости ряда

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right), \quad (12)$$

где

$$\varphi(t) \in R_{\gamma}(0, u]$$

был равен λ ($\lambda \geq 0$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, \lambda}(0, u].$$

Доказательство. Теорему докажем от противного.

Пусть порядок равномерной (абсолютной) сходимости ряда (12) равен λ , а

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, \lambda_1}(0, u],$$

где $\lambda \neq \lambda_1$ (λ_1 число конечное или $\lambda_1 = \infty$).

В нашем предположении возможно одно из двух:

$$1. \lambda > \lambda_1, \quad 2. \lambda < \lambda_1.$$

Докажем, что оба допущения невозможны. Начнем с первого.

В [2] доказано, что в условиях теоремы

$$0 \leq R_n(u, t) \leq \varphi(x) \prod_{v=0}^{n-1} \frac{1 + \frac{r}{x_v}}{1 + \frac{r}{x_v}} \left(\frac{t}{u} \right)^{-r}, \quad (13)$$

где $0 < x < t \leq u$, $r > 0$ — произвольное число, $x_v = \gamma \ln u/x : \ln u/t$ (см. [2], неравенство (1,10')).

Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы имели

$$\lambda - \varepsilon > \lambda_1 + r', \quad \text{где } r' > r.$$

Тогда, с одной стороны, получаем, что

$$t^{\lambda - \varepsilon} R_n(u, t)$$

на $[0, u]$ не стремится равномерно к нулю, тогда как при $t = 2x$ и $0 < x < \frac{u}{2}$

$$t^{x_1+r'} \varphi(x) \prod_{v=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{r}{x_v}}{1 + \frac{r}{\gamma_v}} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} = x^{x_1+r'} \varphi(x) \prod_{v=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{r}{x_v}}{1 + \frac{r}{\gamma_v}} 2^{x_1+r'-1} u^r \quad (14)$$

стремится к нулю равномерно на $0 < x < \frac{u}{2}$, а равномерное стремление к нулю (14) при $x \in \left[\frac{u}{2}, u\right]$ и $t \in [x, u]$ очевидно.

Таким образом, первое допущение отпадает.

Пусть теперь 2) $x < x_1$.

Представим $\varphi(t)$ рядом (12), где

$$x_k \geq 0, \quad 0 \leq \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma\right) \leq \omega_k(0, \gamma), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Имеем

$$0 \leq \varphi(t) \leq \sum_{k=0}^{n_0} x_k + R_{n_0}(u, t) = S_{n_0} + R_{n_0}(u, t). \quad (15)$$

Помножим обе стороны неравенства (15) на $t^{x+\varepsilon}$, где $x+\varepsilon < x_1$.

Будем иметь

$$0 \leq t^{x+\varepsilon} \varphi(t) \leq A_{n_0} t^{x+\varepsilon} + t^{x+\varepsilon} R_{n_0}(u, t).$$

При достаточно большом

$$0 \leq t^{x+\varepsilon} R_{n_0}(u, t) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (16)$$

для всех $t \in [0, u]$.

Возьмем теперь $t \in (0, u]$ настолько малым, чтобы имели

$$A_{n_0} t^{x+\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это значит, что при достаточно малом $t \in (0, u]$

$$0 \leq t^{x+\varepsilon} \varphi(t) < \frac{\varepsilon}{2},$$

что опять противоречит условию

$$\varphi(t) \in R_{\gamma, x_1}(0, u].$$

Таким образом, доказано, что

$$x = x_1.$$

Теорема доказана.

Объединяя теоремы 1, 2, 3, получаем:

Теорема 4. Для того, чтобы

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \gamma}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ представлялась в виде разности двух функций $\psi(t)$ и $g(t)$

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u], \quad g(t) \in R_{\gamma, \mu'}(0, u], \quad (17)$$

где $\mu < \gamma$, $\mu' < \gamma$, причем хотя бы в одном из последних соотношений имеет место знак равенства.

Теорема 5 (основная). Для того, чтобы

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \gamma}(0, u],$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(t)$ представлялась в виде разности двух таких функций класса $R_{\gamma}(0, u]$, сумма которых принадлежит классу $AC_{\gamma, \gamma}(0, u]$.

Доказательство. В силу теоремы 4 нам остается доказать, что для

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u], \quad 0 \leq \mu$$

необходимо, чтобы

$$\psi(t) \in AC_{\gamma, \mu}(0, u].$$

А для последнего утверждения нам следует в силу теоремы 3 работы [1] только заметить, что ряд

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right)$$

сходится в $(0, u]$, его порядок равномерной абсолютной сходимости на $[0, u]$ не превосходит μ ,

$$\alpha_k \geq 0, \quad \omega_k \left(\frac{t}{u}, \gamma \right) \geq 0$$

и, следовательно, вместо интеграла

$$\left| \int_x^u \psi_{n+1}(t) t^{\gamma_n + \gamma_1} dt \right|,$$

фигурирующего в вышеотмеченной теореме, взять интеграл

$$\left| \int_x^u (-1)^{n+1} \psi_{n+1}(t) t^{\gamma_n + \gamma_1} dt \right| = \int_x^u |\psi_{n+1}(t)| t^{\gamma_n + \gamma_1} dt.$$

Таким образом, повторяя весь ход доказательства вышеуказанной теоремы с учетом последнего замечания, получаем, что для

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \mu}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leq \int_x^u (-1)^{n+1} \psi_{n+1}(t) t^{\gamma_n + \alpha_1} dt \leq C(\alpha_1, \alpha') \prod_{s=1}^n (\gamma_s + \alpha')$$

для всякого $\alpha, \alpha', (\alpha_1 > \alpha' > 0)$.

Аналогичное неравенство получаем и для $g(t)$ с другой постоянной $C_1(\alpha_1, \alpha')$, а, следовательно, и

$$\varphi(t) = \psi(t) - g(t),$$

причем

$$\int_x^u |\varphi_{n+1}(t)| t^{\gamma_n + \alpha_1} dt \leq C_0(\alpha_1, \alpha') \prod_{s=1}^n (\gamma_s + \alpha'),$$

где $x \in (0, u]$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

$$C_0(\alpha_1, \alpha') \leq C(\alpha_1, \alpha') + C_1(\alpha_1, \alpha').$$

Этим теорема 5 доказана.

Последняя теорема позволяет сформулировать аналог теоремы (1,6) работы [1] о разложимости функций в абсолютно сходящийся факториальный ряд.

Теорема 6. Для того, чтобы функция $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, $\alpha \geq 0$ разлагалась в абсолютно сходящийся факториальный ряд по последовательности чисел $\{\gamma_n\}$, определенной в (4) и (4'), необходимо и достаточно, чтобы она представлялась интегралом Лапласа

$$f(z) = \int_0^1 t^{z-1} \varphi(t) dt,$$

где

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \alpha}(0, 1].$$

В заключение работы следует отметить, что повторяя весь ход доказательства теоремы (2,2) работы [1], можно доказать:

Теорема 7. Для квазианалитичности класса функций

$$AC_{\gamma, \alpha}(0, u]$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность чисел (4) удовлетворяла условию (4').

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступил 24 X 1961

2. Գ. Բազալյան

ԲԿԱԶԻ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐԻ ԲԱՑԱՐՁԱԿ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ
ԿՐԻՏԵՐԻՈՒՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատությունը սերտորեն կապված է մեր «Լնդհանրացրած սեղանային մոնոտոն ֆունկցիաներ» վերնագրով հոդվածում շարադրված արդյունքների հետ (տես [2]) և կազմում է նրանց մի մասի բնական զարգացումը:

Սահմանում 1. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան $(0, u]$ միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների

$$R_{\gamma, x} (R_{\gamma, x}(0, u])$$

դասին, եթե նա ախտեղ պատկանում է ընդհանրացրած սեղանային մոնոտոն ֆունկցիաների դասին, և, բացի այդ,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) t^x = 0,$$

երբ $x > x$, ըստ որում վերջին հավասարությունը տեղի չունի, երբ $x < x$:

Սահմանում 2. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան $(0, u]$ միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների

$$AT_{\gamma, x} (AT_{\gamma, x}(0, u]), \quad x \geq 0$$

դասին, եթե նա $(0, u]$ միջակայքում վերլուծվում է զուգամեա քվադրատիկ ճանաչարարի

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \omega_n \left(\frac{t}{u}, \gamma \right) \quad (1)$$

շարքի, որտեղ

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n z}, \quad \lambda_n = \sum_{s=1}^n \frac{1}{\gamma_s}$$

Դիրիխլեի շարքի զուգամիատեսիլի արտերի հավասար է x :

Սահմանում 3. Պայմանավորվենք ասելու, որ $\varphi(t)$ ֆունկցիան $(0, u]$ միջակայքում պատկանում է ֆունկցիաների

$$AC_{\gamma, x} (AC_{\gamma, x}(0, u]), \quad x \geq 0$$

դասին, եթե զուգություն ունի ֆունկցիաների (3) հաջորդականությունը (տես տեքստ (3)) և բավարարվում են հետևյալ անհավասարությունները,

$$\int_0^u |\varphi_{n+1}(t)| t^{\gamma_n + x_1} dt \leq C \prod_{s=1}^n (x' + \gamma_s)$$

որտեղ $x_1 > x' > x \geq 0$ կամայական թվեր են, իսկ C -ն հաստատուն է, որը անկախ է n -ից և x -ից:

Աշխատության ապացուցված թեորեմներից նշենք՝
 Թեորեմ. Որպեսզի

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \kappa}(0, u],$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի $\varphi(t)$ -ն ներկայացվի որպես $\psi(t)$ և $g(t)$ ֆունկցիաների տարրերուծիվուն, որտեղ

$$\psi(t) \in R_{\gamma, \kappa}(0, u], \quad g(t) \in R_{\gamma, \kappa'}(0, u], \quad \kappa \leq \kappa', \quad \kappa' \leq \kappa,$$

քան որում վերջին անհավասարություններից զոնե մեկում տեղի ունի հավասարության նշան:

Թեորեմ. Որպեսզի

$$\varphi(t) \in AT_{\gamma, \kappa}(0, u],$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\varphi(t)$ -ն ներկայացվի որպես $R_{\gamma}(0, u]$ դասի երկու աջակիսի ֆունկցիաների տարրերուծիվուն, որոնց դամարը պատկանում է

$$AC_{\gamma, \kappa}(0, u]$$

դասին:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бадалян Г. В. О критерии разложимости функций и квазистепенной ряд. Известия АН СССР (дана в печать).
2. Бадалян Г. В. Обобщенно регулярно монотонные функции. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **15**, № 3, 1962.
3. Бадалян Г. В. Обобщенные факториальные ряды. Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. V, 1959.

А. П. Южаков

Некоторые случаи вычисления вычетов функций двух комплексных переменных разложением в ряд Лорана*

В в е д е н и е

Как показано в [6], вычисление интегралов вида

$$\iint_{\Delta} F(\omega, z) d\omega dz,$$

где $F(\omega, z)$ — аналитическая функция комплексных переменных ω, z , S -двумерный кусочно-гладкий ориентированный цикл, лежащий в области аналитичности функции $F(\omega, z)$, сводится к следующему:

1. Находится одномерное число Бетти p и база одномерных гомологий $\{\Gamma_i\}$ многообразия особенностей подинтегральной функции в пространстве переменных ω, z , пополненном до сферического одной бесконечно удаленной точкой (точки (∞, z) , (ω, ∞) , (∞, ∞) отождествляются в одну);

2. Вычисляются вычеты относительно базисных циклов Γ_i , $i = 1, 2, \dots, p$. Вычетом относительно цикла Γ_i называется

$$R_i = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{\Delta_i} F(\omega, z) d\omega dz,$$

где Δ_i — двумерный цикл, зацепленный (дуальный) с Γ_i :

$$\text{All}(\Gamma_i, \Delta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

($\text{All}(\Gamma_i, \Delta_j)$ — индекс зацепления циклов Γ_i и Δ_j , см. [3], [4]).

3. Определяются индексы зацепления базисных циклов Γ_i с циклом интегрирования S : $\text{All}(\Gamma_i, S) = N_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Тогда

* Работа доложена на V Всесоюзной конференции по теории функций комплексного переменного в сентябре 1960 г. в г. Ереване.

$$\iint_S F(w, z) dw dz = (2\pi i)^2 \sum_{j=1}^p N_j R_j.$$

Для случая, когда многообразие особенностей подинтегральной функции есть полиномиальная поверхность, например, если

$$F(w, z) = \frac{f(w, z)}{P(w, z)},$$

где $P(w, z)$ — полином, а $f(w, z)$ — целая функция (результаты можно распространить также на случай, когда $f(w, z)$ регулярна в некоторой выпуклой области, содержащей цикл интегрирования S), база одномерных гомотопий многообразия особенностей $T_2: P(w, z) = 0$ состоит из циклов трех видов [7]:

1. Циклы, соответствующие каноническим разрезам римановых поверхностей [2], определяемых неприводимыми множителями полинома $P(w, z)$. Назовем их *собственными циклами*. Получается $\sum_i 2\rho_i$ таких циклов, где ρ_i — род соответствующей римановой поверхности.

2. Каждая точка самопересечения поверхности T_2 дает $r-1$ базисных циклов, где r — число элементов поверхности T_2 , пересекающихся в данной точке. Эти циклы строятся так. В каждом элементе из точки пересечения проводится разрез t_i , $i=1, 2, \dots, r$. Пары $(t_1, t_2), \dots, (t_1, t_r)$ противоположно ориентированных разрезов образуют $r-1$ независимых циклов пересечения. Всего получается $\sum_j (r_j - 1)$ циклов пересечения (здесь суммирование ведется по всем точкам пересечения).

3. Наконец, каждому неприводимому множителю полинома $P(w, z)$ соответствует $l-1$ «полярных» базисных циклов, где l — число элементов поверхности, определяемой этим множителем, пересекающихся в бесконечно удаленной точке. Полярные базисные циклы строятся аналогично циклам пересечения.

В настоящей статье показывается, что вычеты относительно циклов пересечения и полярных циклов, за некоторыми исключениями, могут быть вычислены разложением подинтегральной функции в ряд Лорана.

Очевидно следующее соображение. Если в некоторой двояко-круговой области D функция $F(w, z)$ разлагается в ряд Лорана:

$$F(w, z) = \sum_{k,l=-\infty}^{\infty} c_{kl} w^k z^l,$$

то для цикла

$$S(w = r_1 e^{i\varphi}; z = r_2 e^{i\psi}; 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi) \subset D$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_S F(w, z) dw dz = c_{-1, -1}.$$

Таким образом, c_{-1-1} , вообще говоря, является линейной комбинацией вычетов функции $F(w, z)$. Если разложение таково, что для $S \subset D$ $\text{All}(\Gamma_j, S) = 1$ и $\text{All}(\Gamma_i, S) = 0$ для $i \neq j$, то c_{-1-1} окажется вычетом функции $F(w, z)$ относительно цикла Γ_j .

§ 1. Вычеты относительно циклов пересечения

Случай 1. Пусть $A(0, 0)$ — точка пересечения двух, не обязательно простых в этой точке, элементов поверхности $T_a(P=0)$, имеющих различные касательные (см. § 5). Если A не является началом, можно сделать перенос. В этом случае $P(w, z)$ можно представить в виде:

$$P = (a_1 w + b_1 z)^a (a_2 w + b_2 z)^b + \sum_{k+l \geq a+b} a_{kl} w^k z^l,$$

причем

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сделаем замену $a_1 w + b_1 z = x$, $a_2 w + b_2 z = y$, тогда получим

$$P = x^a y^b + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^k y^l$$

В окрестности точки $A(0, 0)$ поверхность $P=0$ определится уравнениями

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad y = x^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\frac{k}{q}}; \quad \frac{m}{n}, \frac{p}{q} > 1,$$

соответствующими неприводимым элементами. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ было

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < K_1, \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\frac{k}{q}} \right| < K_2.$$

Тогда в двоякокреновой области

$$D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, |x| < K_1 |y|^{\frac{m}{n}}, |y| < K_2 |x|^{\frac{p}{q}})$$

будет $P \neq 0$, следовательно, $F(w, z)$ в D допускает разложение в ряд Лорана. Это разложение для $F = \frac{f}{P}$ может быть получено следующим образом

$$\frac{f}{P} = \frac{f}{x^a y^b + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^k y^l} = \frac{f}{x^a y^b \left(1 + \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^{k-a} y^{l-b} \right)}.$$

Можно показать, что $\left| \sum_{k+l \geq a+b} \tilde{a}_{kl} x^{k-a} y^{l-b} \right| < 1$ в некоторой двоякокреновой области $D_1 \subset D$. Разлагая f в ряд Тейлора, а

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta \left(1 + \sum_{k+l=\alpha+\beta} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)}$$

в ряд геометрической прогрессии и перемножая полученные ряды, получим соответствующее разложение в ряд Лорана. Так как члены разложения

$$\frac{1}{x^\alpha y^\beta \left(1 + \sum_{k+l=\alpha+\beta} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)} = \frac{1}{x^\alpha y^\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+l=\alpha+\beta+n} \tilde{a}_{kl} x^{k-\alpha} y^{l-\beta} \right)^n$$

имеют степени по x, y не ниже $(\alpha + \beta)$, то коэффициент c_{-1-1} разложения $\frac{f}{P}$ окажется линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных до $\alpha + \beta - 2$ порядка включительно в точке $A(0, 0)$.

Точке $A(0, 0)$ соответствует единственный цикл пересечения $\Gamma(t_1, t_2)$, где t_1 — разрез, лежащий в элементе, касающемся плоскости $x = 0$, а t_2 — в элементе, касающемся $y = 0$. Покажем, что c_{-1-1} является вычетом относительно цикла $\Gamma(t_1, t_2)$. Действительно, в окрестности точки $A(0, 0)$ разрезы t_1, t_2 можно задать в виде:

$$t_1: \begin{cases} x = x_1 + iy_1 = \tau_1 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tau_1^{\frac{k}{n}} \\ y = x_2 + iy_2 = \tau_1 \end{cases}, \quad t_2: \begin{cases} x = x_1 + iy_1 = \tau_2 \\ y = x_2 + iy_2 = \tau_2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tau_2^{\frac{k}{q}} \end{cases}$$

τ_1, τ_2 — вещественные параметры, $0 \leq \tau_1, \tau_2 < \infty$. Возьмем цикл интегрирования $S(x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_0 e^{i\psi})$, где $r_0 < \varepsilon$, $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$. Тогда $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B]$, где $B(x = r e^{i\varphi}, y = r e^{i\psi})$, $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, $B' = S$ (здесь $[\Gamma, B]$ — индекс пересечения Γ с B , см. [3], [4]). Цикл Γ

имеет с B одну точку пересечения: $O(x = r_0 \sum_{k=0}^{\frac{m}{n}} a_k r_0^{\frac{k}{n}}, y = r_0)$. Индекс

$$\text{точки } O \text{ равен } \text{sign} \frac{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(\tau_1, r, \varphi, \psi)} \Big|_O = \text{sign} \frac{D(x_1, y_1, x_2, y_2)}{D(t_1, x_1, y_1, \psi)} \Big|_O = 1.$$

Таким образом, $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B] = 1$. С остальными базисными циклами цикл S зацепляться не будет. Действительно, разрезы, соответствующие другим циклам, можно выбирать непроходящими через точку A . При r_0 достаточно малом B не будет пересекаться с этими циклами, т. е. для них $\text{All}(\Gamma, S) = [\Gamma, B] = 0$. Значит, S — цикл, дуальный Γ , и c_{-1-1} есть вычет функции $\frac{f}{P}$ относительно цикла пересечения Γ .

Случай 2. $A(0, 0)$ — точка пересечения r элементов поверхности $T_2(P=0)$, имеющих различные касательные. Тогда $P(w, z)$ можно представить в виде

$$P = (a_1 w + b_1 z)^{\lambda_1} \cdots (a_r w + b_r z)^{\lambda_r} + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} a_{kl} w^k z^l,$$

$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ при $i \neq j$. Делая замену $a_1 w + b_1 z = x$, $a_2 w + b_2 z = y$, получим

$$\begin{aligned} \frac{f}{P} &= \frac{f}{p \left[x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} (x + d_3 y)^{\lambda_3} \cdots (x + d_r y)^{\lambda_r} + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} \tilde{a}_{kl} x^k y^l \right]} = \\ &= \frac{f}{p \cdot x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r} \cdot y^{\lambda_2}} \left[\left(1 + d_3 \frac{y}{x} \right)^{\lambda_3} \cdots \left(1 + d_r \frac{y}{x} \right)^{\lambda_r} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k+l > \lambda_1 + \cdots + \lambda_r} \tilde{a}_{kl} x^{k-\lambda_1-\lambda_2-\cdots-\lambda_r} y^{l-\lambda_2} \right]^{-1}. \quad (*) \end{aligned}$$

В окрестности точки $A(0, 0)$ поверхность T_2 ($P=0$) определится уравнениями

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad y = x^{\frac{p}{q}} \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^{\frac{h}{q}}, \quad \frac{m}{n} > 1, \quad \frac{p}{q} > 1;$$

$$x = -d_i y + y \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} y^{\frac{k}{n_i}}, \quad i = 3, \dots, r.$$

При $|x| < \varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$,

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^{\frac{h}{q}} \right| < K_2, \quad \left| -d_i + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(i)} y^{\frac{k}{n_i}} \right| < K$$

Тогда, учитывая, что при y достаточно малом $K_1 |y|^{\frac{m}{n}} < K |y|$ имеем: в двоякокруговой области

$$D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, |x| > K |y|, |y| > K_2 |x|^{\frac{p}{q}}) \quad P \neq 0,$$

а, следовательно, $\frac{f}{P}$ допускает разложение в ряд Лорана. Это разложение получается из (*) аналогично случаю 1. Коэффициент c_{-1-1} такого разложения будет являться линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных до $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r - 2$ порядка включительно в точке $A(0, 0)$.

Покажем, что c_{-1-1} дает вычет относительно цикла пересечения $\Gamma_1(t_1, t_2)$ точки $A(t_i, i=1, \dots, r)$ — разрез, проведенный в i -м элементе из точки A). Выберем $S: x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_1 e^{i\psi}, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi$, где

$r_0 < \varepsilon, r_1 < \varepsilon, K_1 r_0^{\frac{p}{q}} < r_1 < \frac{r_0}{K}$. Найдем индексы зацепления цикла S

с циклами пересечения точки A : $\text{All}(\Gamma_i, S) = [\Gamma_i, B], i=1, 2, \dots, r-1$. Здесь $\Gamma_i = (t_1, t_{i+1}), i=1, \dots, r-1$; $B: x = r_0 e^{i\varphi}, y = r_1 e^{i\psi}, 0 \leq \varphi, \psi < 2\pi; B=S$. Из всех лучей $t_i, i=1, 2, \dots, r$, пересекается с B лишь t_2 , значит, $\text{All}(\Gamma_1, S) = 1$, а $\text{All}(\Gamma_i, S) = 0, i \neq 1$.

Как и в случае 1, с остальными циклами, не являющимися циклами пересечения точки A , цикл S зацепляться не будет. Значит, цикл S дуален Γ_1 , а, следовательно, c_{-1-1} есть вычет функции $\frac{f}{p}$ относительно Γ_1 .

Взяв вместо 2 $i=3, \dots, r$, получим вычеты относительно циклов $\Gamma_2(t_1, t_3), \dots, \Gamma_{r-1}(t_1, t_r)$.

Случай 3. В точке $A(0, 0)$ встречаются два элемента поверхности T_2 , имеющие в точке A общую касательную. Пусть их общей касательной является координатная плоскость $x=0$ (в противном случае сделаем поворот). В окрестности $|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon$ поверхность $T_2(P=0)$ представляется уравнениями:

$$x = y^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}}, \quad x = y^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}}, \quad \text{где } \frac{m}{n} > 1, \frac{p}{q} > 1.$$

Рассмотрим следующие подслучаи:

а) $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q} \left(\frac{m}{n} > \frac{p}{q} \right)$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы при $|y| < \varepsilon$

было

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right| < 2|a_0|, \quad \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \right| > \frac{1}{2}|b_0|.$$

Тогда в двоякокруговой области $D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, 2|a_0| \cdot |y|^{\frac{m}{n}} \leq |x| \leq \frac{|b_0|}{2} |y|^{\frac{p}{q}})$ $P \neq 0$ и $F(w, z)$ допускает разложение в ряд Лорана. Чтобы получить это разложение для $F = \frac{f}{p}$, представим P в виде

$$P = \prod_{r=1}^n \left(x - y^{\frac{m}{n}} \omega_r^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^{\frac{k}{n}} \right)^{q_1} \cdot \prod_{r=1}^q \left(x - y^{\frac{p}{q}} \omega_r^p \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \omega_r^{\frac{k}{q}} \right)^{p_1} \Omega(x, y),$$

где $\omega_r = e^{i \frac{2\pi r}{n}}$; $\bar{\omega}_r = e^{-i \frac{2\pi r}{n}}$, причем $\Omega(x, y) \neq 0$ при $|x| < z$, $|y| < \bar{z}$. Тогда

$$\frac{f}{\rho} = \frac{\tilde{f}}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k \right)^{a_k}} \times \\ \times \frac{1}{\prod_{r=1}^q \left(-b_0 + \frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right)^{b_k}} \Omega(x, y)$$

$\alpha = \alpha_1 n$, $\beta = \beta_1 q$. Разлагая $\frac{f}{\Omega}$ в ряд Тейлора, а выражения вида

$$\frac{1}{1 - \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k}; \quad \frac{1}{-b_0 + \left(\frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right)}$$

в ряды геометрической прогрессии, имея при этом в виду, что в области D

$$\left| \frac{y^{\frac{n}{q}}}{x} \omega_r^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \omega_r^k \right| < 1,$$

а

$$\left| \frac{x}{y^{\frac{p}{q}} \bar{\omega}_r^{\frac{p}{q}}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{q}} \bar{\omega}_r^k \right| < |b_0|$$

и перемножая полученные ряды и $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}}}$, получим разложение в ряд

Лорана функции $\frac{f}{\rho}$ в области D .

Практически проще поступить так. Полином $P(x, y)$ содержит член $x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0)$. Тогда в выражении

$$\frac{f}{\rho} = \frac{\tilde{f}}{x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0) (1 + \Sigma)},$$

(Σ —сумма остальных членов полинома $P(x, y)$, деленная на член $x^{\frac{m}{n}} y^{\frac{p}{q}} b_0^{\frac{p}{q}} \Omega(0, 0)$) разлагаем $\frac{1}{1 + \Sigma}$ в ряд геометрической прогрессии, а $\tilde{f}$ в ряд Тейлора и находим коэффициент $c_{-1, -1}$ их произведения, умно-

женного на $\frac{1}{x^\alpha y^\beta b_0^\alpha \Omega(0,0)}$. Нетрудно подсчитать, что c_{-1-1} является линейной комбинацией значений функции f и ее частных производных порядков не выше $\beta-1+\frac{p}{q}(\alpha-1)$ в точке $A(0,0)$.

Очевидно c_{-1-1} дает вычет функции $\frac{f}{P}$ относительно единственного цикла пересечения точки $A(0,0)$.

б) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, но $|a_0| \neq |b_0|$ (пусть $|a_0| > |b_0|$). Тогда для ε и δ достаточно малых при $|y| < \varepsilon$ будет

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k y^{\frac{k}{n}} \right| < |b_0| + \delta < |a_0| - \delta < \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{\frac{k}{n}} \right|.$$

Следовательно, в области $D(|x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon, (|b_0| + \delta)|y|^{\frac{m}{n}} < |x| < (|a_0| - \delta)|y|^{\frac{m}{n}})$ $P \neq 0$, а $\frac{f}{P}$ разлагается в ряд Лорана. Коэффициент c_{-1-1} этого разложения можно получить аналогично предыдущему.

в) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| = |b_0|$, но $n = q = 1$. Пусть a_l — первый коэффициент, не равный b_l . Заменой

$\tilde{x} = x - y^m \sum_{k=0}^{l-1} a_k y^k$, $\tilde{y} = y$ ($\frac{D(\tilde{x}, \tilde{y})}{D(x, y)} \neq 0$ во всем пространстве x, y) этот случай приведем к случаю За).

г) Наконец, если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| = |b_0|$, $n = p > 1$, то не удастся построить двоякокруговой области D , разделяющей элементы поверхности, т. е. не удастся найти вычет относительно соответствующего цикла пересечения разложением в ряд Лорана.

Аналогично случаям 2 и 3 можно рассмотреть общий случай, когда в точке A пересекается несколько элементов поверхности T_2 , причем некоторые из них имеют общие касательные.

§ 2. Вычеты относительно полярных циклов.

Расположим полином $P(w, z)$ по степеням w :

$$P(w, z) = a_0(z) w^m + a_1(z) w^{m-1} + \dots + a_m(z).$$

Бесконечно удаленные элементы поверхности $T_2(P(w, z) = 0)$ лежат над точками плоскости z , в которых $a_0(z) = 0$ (полюсы алгебраической функции $w = w(z)$, определяемой уравнением $P(w, z) = 0$)

и над $z = \infty$. Роль касательных для бесконечно удаленных элементов играют асимптоты (конечные или бесконечно удаленные). В каждом бесконечно удаленном элементе проведем разрез t_i . Пусть $t_1, \dots, t_l$ разрезы, соответствующие элементам одного неприводимого множителя. Пары $(t_1, t_2), \dots, (t_1, t_l)$ образуют $l-1$ независимых полярных базисных циклов: $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{l-1}$. Попытаемся найти вычет относительно цикла $\Gamma_1(t_1, t_2)$.

Случай 1. t_2 лежит в элементе, имеющем конечную асимптоту. Можно предположить, что этой асимптотой является плоскость $z=0$, в противном случае сделаем замену $\tilde{z} = aw + bz + c$, где $aw + bz + c = 0$ — уравнение асимптоты.

В окрестности точки $z=0$ бесконечно удаленный элемент представится уравнением $w = z^{-\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}}$.

Пусть это — единственный бесконечно удаленный элемент, лежащий над $z=0$. Тогда остальные элементы поверхности T_2 , лежащие над $z=0$ представятся уравнениями вида

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}}.$$

При $|z| < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$, $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} \right| < K$. Тогда в области

$D(|z| < \varepsilon, |w| > K, |w| > K_1 |z|^{\frac{m}{n}})$ $P(w, z) \neq 0$ и $F(w, z)$ допускает разложение в ряд Лорана, которое для $F = \frac{f}{P}$ можно получить так:

$$\begin{aligned} \frac{f}{P} &= \frac{f(w, z)}{\prod_{r=1}^n \left(w z^{\frac{m}{n}} w_r^{\frac{m}{n}} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} w_r^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \prod_{r,j} \left(w - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} w_r^{\frac{k}{n_j}} \right) \Omega(w, z)} = \\ &= \frac{f(w, z)}{w^{\frac{m}{n}} z^{\frac{m}{n}} \prod_{r=1}^n \left(1 - \frac{1}{w z^{\frac{m}{n}} w_r^{\frac{m}{n}}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} w_r^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \prod_{r,j} \left(1 - \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(j)} z^{\frac{k}{n_j}} w_r^{\frac{k}{n_j}} \right) \Omega(w, z)}, \end{aligned}$$

где $w_r = l^{\frac{2\pi r}{n}}$, $w_{rj} = l^{\frac{2\pi r}{n_j}}$, $\alpha \cdot m = q$, причем $\Omega(w, z) \neq 0$ при $|z| < \varepsilon$. Разлагая $\frac{f}{\Omega}$ в ряд Тейлора, а дроби вида $\frac{1}{1-\Sigma}$ по степеням Σ и перемножая полученные ряды, получим ряд Лорана для функции $\frac{f}{P}$ в области D .

Практически его легче получить из

$$\begin{aligned} \frac{f}{P} &= \frac{f(w, z)}{(c_0 z^k + \dots + c_k z^{k+k}) w^m + a_1(z) w^{m-1} + \dots + a_m(z)} = \\ &= \frac{f(w, z)}{z^k w^m \left[c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k + \frac{1}{w} a_0(z) + \dots + \frac{1}{w^m} a_m(z) \right]}, \end{aligned}$$

учитывая, что в некоторой двоякокруговой области $D_1 \subset D$ $\left| c_1 z + \dots + c_k z^k + \frac{1}{w} a_0(z) + \frac{1}{w^m} a_m(z) \right| < |c_0|$. Коэффициент c_{-1-1} разложения будет иметь вид $c_{-1-1} = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} f_{\omega^k z^l}^{(k+l)}(0, 0)$. Это и даст вычет относительно полярного цикла Γ_1 .

Можно рассмотреть случаи, когда над точкой $z=0$ лежит два (или больше) бесконечно удаленных элемента. Пусть их уравнения будут

$$w = z^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}}; \quad \bar{w} = z^{\frac{p}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{\frac{k}{q}}.$$

Аналогично предыдущему можно построить разложение в ряд Лорана в двоякокруговой области, охватывающей оба элемента. Тогда c_{-1-1} даст сумму вычетов относительно Γ_1 и Γ_2 . Чтобы найти эти вычеты достаточно построить еще разложение в ряд Лорана в двоякокруговой области, разделяющей эти элементы. Это удастся сделать подобно случаю 3, § 1, если $\frac{m}{n} \neq \frac{p}{q}$, либо при $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, $|a_0| \neq |b_0|$.

Случай 2. t_2 лежит в элементе, имеющем бесконечно удаленную асимптоту, параллельную плоскости $z=0$ (в противном случае сделаем поворот). Пусть такой элемент единственный (случаи неединственности аналогичны предыдущему). В окрестности точки $z=\infty$ его уравнение имеет вид

$$w = z^{\frac{m}{n}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-\frac{k}{n}}, \quad \frac{m}{n} > 1.$$

Остальные элементы поверхности T_2 в окрестности $z=\infty$ выражаются уравнениями вида

$$w = \sum_{k=p_i}^{-\infty} b_k^{(i)} z^{\frac{k}{n_i}}$$

где $p_i \leq n_i$. При $\frac{1}{|z|} < \varepsilon$ будет $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\frac{k}{n}} \right| < K_1$, а

$$\left| \sum_{k=p_1}^{-\infty} b_k^{(i)} z^{\frac{k}{n_1}} \right| < K|z|.$$

Тогда в области $D\left(|z| > \frac{1}{z}, K|z| < |w| < K_1|z|^{\frac{m}{n}}\right)$ $P(w, z) \neq 0$, и $F(w, z)$ разлагается в ряд Лорана.

Так как область D , кроме данного элемента, охватывает все элементы с конечными асимптотами, параллельными плоскости $z=0$, то коэффициент c_{-1-1} даст сумму соответствующих им вычетов. Но так как сумму вычетов относительно полярных циклов, соответствующих элементам с конечными асимптотами, мы можем найти, то беря разность, получим вычет относительно полярного цикла, соответствующего данному элементу.

Примеры

$$1. \quad \frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{(w^3 + z^3 - 3wz)^2}.$$

Одномерное число Бетти поверхности $P=0$ равно 3. Имеется один базисный цикл пересечения, соответствующий точке самопересечения $(0, 0)$, и 2 полярных цикла (асимптоты $w^3 + z^3 = 0$). Найдем вычет относительно цикла пересечения.

$$\frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{9w^2z^2 \left(1 - \frac{w^2}{3z} - \frac{z^2}{3w}\right)^2} = \frac{f(w, z)}{9w^2z^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w^2}{3z} + \frac{z^2}{3w} \right)^n \right]^2.$$

$$c_{-1-1} = \frac{1}{9} [f_{wz}(0, 0) + 6f(0, 0)].$$

$$2. \quad \frac{f}{P} = \frac{f(w, z)}{w^2 + z^2 + R^2}$$

База одномерных гомологий поверхности $P=0$ состоит из единственного полярного цикла. Асимптоты бесконечно удаленных элементов: $w + iz = 0$, $w - iz = 0$. Сделаем замену $w + iz = x$, $w - iz = y$.

$$\frac{f}{P} = \frac{z \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2i} \right)}{R^2 + xy} = \frac{f}{xy \left(1 + \frac{R^2}{xy} \right)} = \frac{f}{xy} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{R^2}{xy} \right)^n.$$

$$c_{-1-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n}}{(n!)^2} \cdot \frac{\partial^{2n} f}{\partial x^n \partial y^n} \Big|_{(0,0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{R^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^n f(w, z) \Big|_{0,0}.$$

Замечание. Так как многообразие особенностей произвольной аналитической функции есть аналитическая поверхность, которую на основании леммы Вейерштрасса [1] можно представить в виде псевдодолинома, то рассмотренным выше способом можно находить вычеты произвольной функции относительно ее циклов пересечения.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила 21 V 1962

Ա. Պ. Յուշակով

ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻՆ ՎԵՐԼՈՒԾԵԼՈՒ ՄԻՋՈՑՈՎ ԵՐԿՈՒ ԿՈՍՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄՆԱՑՔՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԴԵՊՔԵՐ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտարկում են երկու փոփոխականների այն անալիտիկ ֆունկցիաներից կրկնակի ինտեգրալների մնացքները, որոնց եղակիությունների բազմազանությունը որոշվում է $P(\omega, z) = 0$ հավասարումով, որտեղ $P(\omega, z)$ -ը պոլինոմ է:

Յուշյ է արված, որ $P = 0$ մակերևույթի ինքնահամաժան կետերի շրջակայքում և նրա անվերջ ճյուղերին մոտ զրույթյան տեղին կրկնաշրջանային տիրույթներ, որոնցում ֆունկցիան թույլ է տալիս վերլուծում Լորանի շարքի: Այդ վերլուծումների C_{-1-1} գործակիցները տալիս են համապատասխան մնացքներ: Տրվում է նշված լորանյան վերլուծումների որոնման եղանակ

$$\frac{f(\omega, z)}{P(\omega, z)}$$

տեսքի ֆունկցիաների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фукс Б. А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
2. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
3. Александров П. С. Комбинаторная топология. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
4. Martinelli E. Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complessi. „Annali di Matematica pura ed Applicata“, 34, 1953.
5. Уокер Р. Алгебраические кривые. ИЛ, М., 1952.
6. Южаков А. П. Вычисление интегралов от функций двух комплексных переменных по замкнутым двумерным контурам. Уч. зап. УрГУ, вып. 23, 2, 1960.
7. Южаков А. П. К теории вычетов функций двух комплексных переменных. Уч. зап. Моск. обл. пединст., 16, вып. 7, 1961.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

О центре изгиба анизотропного стержня с удлиненным симметричным азиационным профилем, изготовленного из ортотропного материала

В настоящей работе рассматривается задача об определении положения центра изгиба анизотропного призматического стержня с удлиненным симметричным профилем, изготовленного из ортотропного материала, когда главные направления упругости не совпадают с главными осями инерции поперечного сечения стержня.

Исследованы вопросы о точности приближенных формул для определения положения центра изгиба и о влиянии различного расположения главных направлений упругости ортотропного материала на центр изгиба. Показано, как нужно изготовить анизотропный стержень из ортотропного материала, чтобы для него расстояние центра изгиба от центра тяжести было наименьшим или наибольшим.

Полученные результаты иллюстрируются числовыми примерами.

§ 1. Постановка и решение задачи

Рассмотрим призматический стержень с симметричным поперечным сечением, ограниченным кривыми*

$$\begin{aligned} y &= a \left(\frac{x+b_1}{b} \right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x+b_1}{b} \right)^p \right]^q, \\ y &= -a \left(\frac{x+b_1}{b} \right)^m \cdot \left[1 - \left(\frac{x+b_1}{b} \right)^p \right]^q, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где m, p, q — положительные числа, a — постоянный коэффициент, который определяется так

$$a = \frac{H}{2} \cdot \frac{(m+pq)^{\frac{m+pq}{p}}}{m^p \cdot (pq)^q},$$

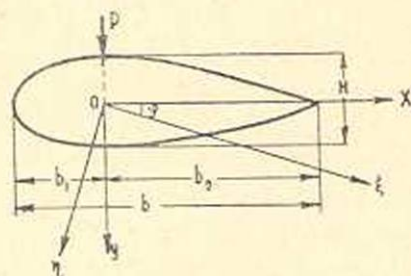
* Область, ограниченную кривыми (1.1), следуя академику Л. С. Лейбензону [1], назовем азиационным профилем.

b —ширина профиля (причем b велико по сравнению с высотой H), а b_1 и b_2 —расстояния от центра тяжести до крайних точек контура, лежащих на оси Ox (фиг. 1).

В этом случае отношение $\lambda = \frac{H}{2b} \left(0 < \lambda < \frac{1}{2} \right)$, естественно, будет малым параметром.

Тогда уравнение авиационного профиля (1.1) можно представить так

$$y = \pm \lambda f(x), \quad (1.2)$$



Фиг. 1.

где введены следующие обозначения

$$f(x) = c(x + b_1)^m \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^q,$$

$$c = \frac{\Delta}{b^{m+pq-1}}, \quad \Delta = \frac{(m+pq)^{\frac{m+pq}{p}}}{m^p (pq)^q}. \quad (1.3)$$

Предположим, что анизотропный стержень изготовлен из ортотропного материала. Поместим начало координат в центре тяжести незакрепленного конца стержня. Примем геометрическую ось стержня за ось Oz , а оси Ox и Oy совместим с главными осями инерции сечения (главные геометрические оси). Тогда для b_1 и b_2 будем иметь следующие выражения:

$$b_1 = b \cdot \frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)}, \quad b_2 = b \cdot \left[1 - \frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} \right]. \quad (1.4)$$

Здесь введено общеизвестное обозначение эйлера интеграла первого рода (бета-функция)

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$$

Примем далее, что силы, действующие на свободном конце, статически эквивалентны одной равнодействующей P , направленной по оси Oy . В этом случае напряженное состояние в сечении стержня характеризуется соотношениями:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} \neq 0, \quad \tau_{yz} \neq 0,$$

$$\sigma_z = -\frac{P}{I} \cdot zy, \quad (1.5)$$

где I —момент инерции сечения стержня относительно главной оси Ox , который определяется так

$$I = \int_{-b_1}^{b_2} \int_{-\lambda_f(x)}^{\lambda_f(x)} y^2 dx dy.$$

Интегрируя, находим

$$I = \lambda^3 I_0, \quad I_0 = \frac{b^4 \Delta^3}{12\rho} \cdot B\left(\frac{3m+1}{\rho}, 3q+1\right). \quad (1.6)$$

Наконец, предположим, что оси $O\xi$ и $O\eta$ являются главными направлениями упругости (физические оси), не совпадающими с главными геометрическими осями. Здесь система $O\xi\eta z$ получена из системы $Oxyz$ путем поворота вокруг общей оси z на некоторый угол φ .

Тогда уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к системе $\xi\eta z$, будут иметь вид [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= -\frac{\nu_{\xi\xi}}{E_{\xi\xi}} \cdot \sigma_\xi, & \gamma_{\eta z} &= \frac{1}{G_{\eta z}} \cdot \tau_{\eta z}, \\ \varepsilon_\eta &= -\frac{\nu_{\eta\eta}}{E_{\eta\eta}} \cdot \sigma_\eta, & \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{G_{\xi z}} \cdot \tau_{\xi z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_{zz}} \cdot \sigma_z, & \gamma_{\xi\eta} &= \frac{\nu_{\xi\eta}}{E_{zz}} \cdot \sigma_z. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Как известно, задача усложняется, когда оси $O\xi$ и $O\eta$ не совпадают с осями ox и oy .

В этом случае уравнения обобщенного закона Гука (отнесенные к системе $Oxyz$) будут:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x, & \gamma_{yz} &= a_{44} \tau_{yz} + a_{45} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_y &= a_{22} \sigma_y, & \gamma_{xz} &= a_{45} \tau_{yz} + a_{55} \tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= a_{33} \sigma_z, & \gamma_{xy} &= a_{66} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

Здесь новые упругие постоянные a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) определяются так [2]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left(\frac{\nu_{yz}}{E_{yz}} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{\nu_{zz}}{E_{zz}} \cdot \cos^2 \varphi\right), & a_{44} &= \frac{\cos^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{zz}}, \\ a_{22} &= -\left(\frac{\nu_{xz}}{E_{xz}} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{\nu_{zz}}{E_{zz}} \cdot \sin^2 \varphi\right), & a_{45} &= \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{1}{G_{zz}}\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, \\ a_{33} &= \frac{1}{E_{zz}}, & a_{55} &= 2 \left(\frac{\nu_{zz}}{E_{zz}} - \frac{\nu_{yz}}{E_{yz}}\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi, & a_{66} &= \frac{\sin^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\cos^2 \varphi}{G_{zz}}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнения равновесия будут тождественно удовлетворены, если компоненты касательных напряжений представить так:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{P}{2I} \cdot [y^2 - \lambda^2 f^2(x)].\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь $\Psi(x, y)$ — функция напряжений при изгибе.

Внесем выражения (1.10) в уравнения совместности, учитывая (1.8), тогда для определения $\Psi(x, y)$ получим дифференциальное уравнение с частными производными с неразделяющимися переменными

$$\begin{aligned}a_{44} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{P}{I} \times \\ \times \left[2a_{13}x + (a_{33} + a_{45})y + \frac{a_{44}\lambda^2 Df^2}{2} \right] - 2\theta\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{xz}} \right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{1}{G_{xz}} \right) \sin 2\varphi \times \\ \times \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\cos^2 \varphi}{G_{xz}} \right) \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \\ = -\frac{P}{I} \left\{ -2x \left(\frac{\nu_{yz}}{E_{yz}} \sin^2 \varphi + \frac{\nu_{xz}}{E_{xz}} \cos^2 \varphi \right) + \right. \\ \left. + \left[\frac{\nu_{zz}}{E_{zz}} - \frac{\nu_{yz}}{E_{yz}} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{1}{G_{xz}} \right) \right] y \cdot \sin 2\varphi + \right. \\ \left. + \left(\frac{\cos^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{xz}} \right) \cdot \frac{\lambda^2 Df^2}{2} \right\} - 2\theta,\end{aligned}\quad (1.11)$$

где θ — постоянная, характеризующая угол закручивания на единицу длины, а

$$D^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Граничные условия для $\Psi(x, y)$ на контуре s согласно [3] будут

$$\Psi|_s = \frac{P}{2I} \cdot \int_0^s (y - \lambda f)(y + \lambda f) dx = 0 \quad (1.12)$$

Закручивания не будет, если точка приложения силы совпадает с центром изгиба. В этом случае полагаем $\theta = 0$. Тогда координата $\bar{x}$ центра изгиба определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{\rho} \cdot \iint_D (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dx dy$$

Имея в виду (1.10) и интегрируя по частям, находим

$$\bar{x} = -\frac{2}{\rho} \cdot \iint_D \Psi dx dy - \frac{1}{2I} \cdot \iint_D [y^2 - x^2 f^2(x)] x dx dy. \quad (1.13)$$

Отсюда видно, что для определения положения центра изгиба анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненного симметричного авиационного профиля, изготовленных из ортотропного материала, необходимо решить задачу об изгибе, т. е. решить уравнение (1.11) при (1.12).

В работе [4] показано, что, когда анизотропный стержень, изготовленный из ортотропного материала, деформируется скручивающими моментами, функция напряжений Φ (функция Прандтля) внутри области поперечного сечения удовлетворяет следующему уравнению

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\sin^2 \varphi}{G_{xz}} \right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{1}{G_{xz}} \right) \sin 2\varphi \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \\ & + \left(\frac{\sin^2 \varphi}{G_{yz}} + \frac{\cos^2 \varphi}{G_{xz}} \right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2, \end{aligned} \quad (1.14)$$

а на контуре поперечного сечения — условию

$$\Phi|_s = 0. \quad (1.15)$$

Поставим задачу: определить положение центра изгиба авиационного профиля, имея только функцию напряжений Φ при кручении, не решая задачи об изгибе, т. е. не решая уравнения (1.11).

Для этого достаточно показать, что входящий в (1.13) интеграл $\iint_D \Psi dx dy$ можно выразить через интеграл от функции Φ , а это для симметричных сечений сделано в работе [5]. Для определения центра изгиба получена такая формула

$$\begin{aligned} \bar{x} = & -\frac{1}{2I} \cdot \iint_D \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{43})y + a_{44}x^2 Df^2] dx dy + \\ & + \frac{\int_{-b_1}^{b_1} x f^3(x) dx}{\int_{-a_1}^{a_1} f^3(x) dx}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Теперь перейдем к определению положения центра изгиба анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненного симметричного авиационного профиля, изготовленных из ортотропного материала.

Для этого напишем выражение функции $\Phi(x, y)$ рассматриваемого профиля [6,7]* в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot P_k \left(x, \frac{y}{\lambda} \right) \quad (1.17)$$

или

$$\Phi(x, y) = \frac{\lambda^2 f^2 - y^2}{a_{55}} + \lambda^2 \cdot \left\{ (\lambda^2 f^2 - y^2) \cdot \left[\frac{a_{44}}{2a_{55}^2} \cdot D^2 f^2 + y \cdot \frac{a_{44}a_{45}}{3a_{55}^3} \cdot D^3 f^2 \right] + \dots \right. \quad (1.17')$$

Имея в виду (1.2), подставляя значение Φ из (1.17') в (1.16), интегрируя по y и выполняя ряд преобразований, находим

$$\bar{x} = \frac{1}{J_0} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) \cdot J_1 - \lambda^2 \cdot \left[\frac{a_{44}}{a_{55}} \cdot J_2 + \frac{2a_{13}a_{44}}{a_{55}^2} \cdot J_3 \right] - \right. \\ \left. - \lambda^4 \cdot \left[\frac{a_{44}^2}{2a_{55}^2} \cdot J_4 + \frac{2(a_{30} + a_{35})a_{44}a_{45}}{15a_{55}^3} \cdot J_5 \right] \right\}, \quad (1.18)$$

где

$$J_0 = c^3 \cdot \int_{-b_1}^{b_2} (x + b_1)^{3m} [b^p - (x + b_1)^p]^{3q} dx,$$

$$J_1 = c^3 \cdot \int_{-b_1}^{b_2} x (x + b_1)^{3m} \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^{3q} dx,$$

$$J_2 = 2c^5 \cdot \int_{-b_1}^{b_2} (x + b_1)^{5m-1} \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^{5q-1} \cdot [r - s(x + b_1)^p] dx,$$

$$J_3 = 2c^5 \cdot \int_{-b_1}^{b_2} x (x + b_1)^{5m-2} \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^{5q-2} \times$$

$$\times [rf - (sf + \bar{v}r + psb^p)(x + b_1)^p + (\bar{v} + p)s(x + b_1)^{2p}] dx$$

$$J_4 = 4c^7 \cdot \int_{-b_1}^{b_2} (x + b_1)^{7m-3} \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^{7q-3} \cdot [r - s(x + b_1)^p] \times$$

* Здесь применен метод малого параметра. Этим методом в 1932—1937 годах В. Дунканом и Д. Ю. Пановым решены задачи о кручении и изгибе изотропного призматического стержня с поперечным сечением в виде узкой и длинной области. Затем методом малого параметра решены задачи о кручении и изгибе анизотропных стержней с удлиненным профилем А. Р. Ямпольским [12—14] и нами в работах [4—7, 15, 16].

$$\times [r\bar{f} - (s\bar{f} + r\bar{v} + psb^p)(x + b_1)^p + (\bar{v} + p)s(x + b_1)^{2p}] dx.$$

$$J_5 = 2c^2 \cdot \int_{-b_2}^{b_2} (x + b_1)^{7m-3} \cdot [b^p - (x + b_1)^p]^{7q-3} \cdot [2[\bar{f} - u(x + b_1)^p] \times \\ \times [r\bar{f} - (s\bar{f} + r\bar{v} + psb^p)(x + b_1)^p] - p(x + b_1)^p \cdot [b^p - (x + b_1)^p] \times \\ \times [(s\bar{f} + \bar{v}r + psb^p) - 2s(\bar{v} + p)(x + b_1)^p]] dx, \\ r = mb^p, \quad s = m + pq, \quad u = m + pq - 1 - p, \quad \bar{v} = 2(m + pq - 1), \\ \bar{f} = (2m - 1) \cdot b^p.$$

Вычислим интегралы $J_i (i = 0, 1, \dots, 5)$. Для этого введем новую переменную таким образом

$$x = bt^p - b_1.$$

Тогда

$$J_0 = \frac{c^3 b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right), \quad (1.19)$$

$$J_1 = \frac{c^3 b^{3(m+pq)+1}}{p} \cdot \left[b \cdot B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) - b_1 \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right) \right], \quad (1.20)$$

$$J_2 = \frac{2c^5 b^{5(m+pq)}}{p} \cdot \left[mB\left(\frac{5m}{p}, 5q\right) - (m+pq) \cdot B\left(\frac{5m+p}{p}, 5q\right) \right]$$

или, воспользовавшись формулой приведения,

$$J_2 = \frac{2c^5 b^{5(m+pq)}}{p} \cdot \left[mB\left(\frac{5m}{p}, 5q\right) - (m+pq) \cdot \frac{m}{m+pq} \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q\right) \right] = 0, \quad (1.21)$$

$$J_3 = \frac{2c^5 b^{5(m+pq)-2p-1}}{p} \cdot \left\{ r\bar{f}B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - b^p(s\bar{f} + r\bar{v} + psb^p) \times \right. \\ \times B\left(\frac{5m+p}{p}, 5q-1\right) + s(\bar{v} + p) \cdot b^{2p} \cdot B\left(\frac{5m+2p}{p}, 5q-1\right) \Big| b - \\ - b_1 \cdot \left[r\bar{f} \cdot B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) - b^p(s\bar{f} + r\bar{v} + psb^p) \times \right. \\ \times B\left(\frac{5m-1+p}{p}, 5q-1\right) + b^{2p} \cdot s(\bar{v} + p) \times \\ \times B\left(\frac{5m-1+2p}{p}, 5q-1\right) \Big\} = \frac{2c^5 b^{5(m+pq)-1}}{p} \times \\ \times \left\{ b\bar{z}_1 \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - b_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) \right\}, \quad (1.22)$$

$$J_4 = \frac{4c^7 b^{7(m+pq)-3p-2}}{p} \cdot \left\{ r^2 \bar{f} \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right) - r(2s\bar{f} + r\bar{v} + psb^p) \times \right. \\ \times b^p \cdot B\left(\frac{7m+p-2}{p}, 7q-2\right) + s(s\bar{f} + 2\bar{v}r + psb^p + pr)b^{2p} \times \\ \times B\left(\frac{7m-2+2p}{p}, 7q-2\right) - s^2(\bar{v} + p)b^{3p} \cdot B\left(\frac{7m-2+3p}{p}, 7q-2\right) \Big\} = \\ = \frac{4c^7 b^{7(m+pq)-2}}{p} \cdot \partial_3 \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right), \quad (1.23)$$

$$J_5 = \frac{2c^7 b^{7(m+pq)-3p-2}}{p} \cdot \left\{ 2f^2 r B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right) - b^p \times \right. \\ \times [2\bar{f}(\bar{v}r + s\bar{f}) + 2u\bar{f}r + 3b^p \bar{f}_{ps} + b^p p \bar{v}r + b^{2p} p^2 s] \times \\ \times B\left(\frac{7m-2+p}{p}, 7q-2\right) + b^{2p} \cdot [2\bar{f}s\bar{v} + 2u(\bar{v}r + s\bar{f}) + \\ + 3p\bar{f}s + 2apsb^p + 2\bar{v}psb^p + pr\bar{v} + 3b^p p^2 s] \cdot B\left(\frac{7m-2+2p}{p}, 7q-2\right) - \\ - 2b^{3p} \cdot s(p^2 + p\bar{v} + u\bar{v}) \cdot B\left(\frac{7m-2+3p}{p}, 7q-2\right) = \\ = \frac{2c^7 b^{7(m+pq)-2}}{p} \cdot \partial_4 \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right). \quad (1.24)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\partial_1 = m(2m-1) - \frac{5m[(m+pq)(4m-1+p)-2m]}{5(m+pq)-p} + \\ + \frac{m(5m+p) \cdot (p+2m+2pq-2)}{5(m+pq)-p}, \\ \partial_2 = m(2m-1) - \frac{(5m-1) \cdot [(m+pq)(4m-1+p)-2m]}{5(m+pq)-p-1} + \\ + \frac{(5m-1) \cdot (5m+p-1) \cdot (p+2m+2pq-2)}{5[5(m+pq)-1-p]}, \\ \partial_3 = m^2(2m-1) - \frac{m[(m+pq)(6m-2+p)-2m](7m-2)}{7(m+pq)-2(1+p)} + \\ + \frac{(m+pq)[(m+pq)(6m-1+p)-(4-p)m](7m-2+p)(7m-2)}{[7(m+pq)-p-2] \cdot [7(m+pq)-2(1+p)]} - \\ - \frac{(m+pq)^2 \cdot [2(m+pq-1)+p][7m-2(1-p)][7m-2+p](7m-2)}{[7(m+pq)-2] \cdot [7(m+pq)-2-p][7(m+pq)-2(1+p)]},$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_4 = & 2m(2m-1)^2 - \frac{7m-2}{[7(m+pq)-2(1+p)]} \cdot [2(2m-1) \times \\ & \times [2m(m+pq-1) + (m+pq)(2m-1)] + 2m(2m-1)(m+pq-1-p) + \\ & + 3(2m-1)p(m+pq) + 2mp(m+pq-1) + p^2(m+pq)] + \\ & + \frac{(7m-2+p)(7m-2)}{[7(m+pq)-p-2] \cdot [7(m+pq)-2(1+p)]} \times \\ & \times [4(2m-1)(m+pq-1)(m+pq) + 2(m+pq-p-1) \times \\ & \times [2m(m+pq-1) + (m+pq)(2m-1)] + \\ & + p(m+pq)[12m+6pq+p-9]] - \\ & - \frac{2[7m-2(1-p)] \cdot [7m-2+p](7m-2)(m+pq)}{[7(m+pq)-2] \cdot [7(m+pq)-p-2] \cdot [7(m+pq)-2(1+p)]} \times \\ & \times [p^2 + 4(m+pq-1)^2]. \end{aligned}$$

Подставляя значения интегралов $J_0, J_1, \dots, J_5$ из (1.19)–(1.24) в (1.18), имея в виду (1.3) и производя несколько несложных, но трудоемких действий, окончательно для определения центра изгиба анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненного симметричного авиационного профиля, изготовленных из ортотропного материала, получим следующую формулу

$$\begin{aligned} \bar{x} = & \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{35}}\right) \times \right. \\ & \times \left[\frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - \right. \\ & - \lambda^2 \cdot \frac{4a_{13}a_{44}}{a_{35}^2} \cdot \left[\bar{z}_1 \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - \right. \\ & - \bar{z}_2 \cdot \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) \cdot B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - \\ & \left. \left. - \lambda^2 \cdot \frac{2a_{44}}{15a_{35}^3} \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right) \cdot [15a_{44}a_{35}\bar{z}_3 + 2a_{45}(a_{28} + a_{45})\bar{z}_4] \right] \right\} \quad (1.25) \end{aligned}$$

или, подставляя значения a_{ij} из (1.9),

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 \tilde{k}_i(b, H, m, p, q) \cdot R_i(\varphi, E_{zz}, E_{\gamma\gamma}, G_{zz}, G_{\gamma\gamma}, \gamma_{zz}, \gamma_{\gamma\gamma}), \quad (1.25')$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + \frac{4G_{zz} \gamma_{zz} (E^* \gamma^* \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{E_{zz} (\cos^2 \varphi + G^* \sin^2 \varphi)} \\ R_2 &= - \frac{\gamma_{zz} \cdot G_{zz}}{E_{zz}} \cdot \frac{(E^* \gamma^* \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) (G^* \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}{(G^* \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2}, \\ R_3 &= \frac{(G^* \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2}{(G^* \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2}, \\ R_4 &= \frac{\gamma_{zz}}{E_{zz}} \cdot \left[2G_{zz} (1 - E^* \gamma^*) + \frac{E_{zz}}{\gamma_{zz}} (G^* - 1) \right] \times \\ &\times \frac{(G^* - 1) (G^* \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(\cos^2 \varphi + G^* \sin^2 \varphi)^3}, \\ G^* &= \frac{G_{zz}}{G_{\gamma\gamma}}, \quad E^* = \frac{E_{zz}}{E_{\gamma\gamma}}, \quad \gamma^* = \frac{\gamma_{\gamma\gamma}}{\gamma_{zz}}, \\ \tilde{k}_1 &= \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \cdot \left[B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) - \right. \\ &\left. \frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} \right], \\ \tilde{k}_2 &= - \frac{4bk^2}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \cdot \left[\gamma_1 \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - \right. \\ &\left. - \gamma_2 \cdot \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) \cdot B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} \right], \\ \tilde{k}_3 &= - \frac{2\lambda^4 b \gamma_3 \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}, \\ \tilde{k}_4 &= - \frac{4b \gamma_4 \cdot \lambda^4}{15} \cdot \frac{B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right)}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}. \end{aligned}$$

§ 2. О точности приближенных формул для определения положения центра изгиба

Пользуясь найденной формулой (1.25) для определения центра изгиба анизотропных призматических стержней с сечением в виде симметричного авиационного профиля, изготовленных из ортотропного материала, легко установить

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{x} = - \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{33}} \right) \cdot \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \times \\ \times \left[\frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) \right] \quad (2.1)$$

или

$$\bar{x} = - \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{33}} \right) \cdot \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} \times \\ \times \left[\frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - \right. \\ \left. - B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) \right] + O(\epsilon^2). \quad (2.1')$$

Соотношение (2.1), или (2.1'), эквивалентно для тонких анизотропных профилей следующему утверждению

$$\bar{x} \approx - \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{33}} \right) \cdot \left[\frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - \right. \\ \left. - B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) \right] \cdot \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)} = x_{\Delta}, \quad (2.2)$$

что совпадает с формулой Л. С. Лейбензона для тонких ортотропных профилей, но получено иным путем. Эта формула дает преувеличенное значение (т. е. верхнюю оценку) по сравнению с точным для интересных, с точки зрения авиации, удлиненных по оси симметрии профилей [1].

Формулу (2.2) можно записать так

$$\bar{x} \approx \bar{x}_a = \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{33}}\right) \cdot \bar{x}_{\text{гр.}},$$

где введено обозначение

$$\bar{x}_{\text{гр.}} = - \left[\frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - \right. \\ \left. - B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right) \right] \cdot \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}. \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) есть координата центра изгиба по приближенной формуле Гриффитса-Тейлора [8]. Их формула дает преуменьшенное значение (нижнюю оценку) для координаты центра изгиба.

Выражения для определения положения центра изгиба (1.25) или (2.2) получены для тонких стержней. Естественно возникает вопрос: для каких стержней эти приближенные формулы можно считать достаточно точными? Иначе говоря, какому условию должен удовлетворять параметр $\lambda = \frac{H}{2b}$, чтобы выражение, определяющее поло-

жение центра изгиба анизотропного стержня (1.25) или (2.2), было бы достаточно точным?

С этой целью рассмотрим вопрос о точности приближенной формулы (1.25), когда в ней сохраняем один, два или более членов. Иначе говоря, оценим погрешность, допускаемую нами при сохранении первых членов этой формулы. Подставим в формулу (1.16)

$$\bar{x} = -\frac{1}{2I} \cdot \int_{-b_1}^{b_1} \int_{-b_2}^{b_2} \Phi \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2] dx dy + \\ + \frac{\int_{-b_1}^{b_1} x f^3(x) dx}{\int_{-b_1}^{b_1} f^3(x) dx}$$

выражение функции напряжений (1.17). Тогда будем иметь

$$\bar{x} = \bar{x}_\lambda - \zeta_\lambda^* \quad (2.4)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\varepsilon_n^* = \frac{1}{2I} \cdot \iint_{D_\lambda} p_n(x, y; \lambda) [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2] dx dy, \quad (2.5)$$

$$p_n(x, y; \lambda) = \Phi(x, y) - \sum_{k=0}^n P_k\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \cdot \lambda^k, \quad (2.6)$$

а область D_λ отличается от области авиационного профиля D только тем, что все ординаты ограничивающих ее кривых уменьшены в отношении λ .

Для функции $p_n(x, y; \lambda)$ в работе [7] получена следующая оценка

$$|p_n| < \lambda^{n-1} \cdot \{(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n\} \cdot \Phi_1, \quad (2.7)$$

где

$$p_{n-1} = \max_D \left| D_{xx}^2 P_{n-1}\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \right|,$$

$$p_n = \max_D \left| D_{xx}^2 P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \right|,$$

$$q_n = \max_D \left| D_{xy}^2 P_n\left(x, \frac{y}{\lambda}\right) \right|,$$

а $\Phi_1(x, y)$ — функция напряжений при кручении стержня эллиптического сечения D^* . Уравнение эллипса D^*

$$y^2 - \lambda^2(b^2 - 4x^2) = 0$$

и он, как легко видеть, охватывает область D , ограниченную кривой (1.2). Функция напряжений для стержня эллиптического сечения D^* имеет вид [6]

$$\Phi_1(x, y) = \frac{\lambda^2 b^2}{a_{35} + 4\lambda^2 a_{44}} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{4x^2}{b^2}\right). \quad (2.8)$$

Перейдем к оценке функции ε_n^* . При помощи (2.7) и (2.8) будем иметь

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n^*| &= \frac{1}{2I} \left| \iint_{D_\lambda} p_n(x, y; \lambda) \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2] dx dy \right| < \\ &\leq \frac{1}{2I} \cdot \iint_{D_\lambda} |p_n(x, y; \lambda) \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2]| dx dy < \\ &\leq \frac{1}{2I} \cdot \iint_{D^*} |p_n(x, y; \lambda) \cdot [4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2]| dx dy < \\ &\leq \frac{1}{2I} \cdot \iint_{D^*} |p_n| \cdot |4a_{13}x + 2(a_{36} + a_{45})y + a_{44}\lambda^2 Df^2| dx dy < \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{[2b|a_{13}| + 2\lambda b|a_{38} + a_{45}| + a_{44}\lambda^2 g]}{2I} \cdot \iint_{D^*} |\rho_n| dx dy < \\
&< \frac{[2b|a_{13}| + 2\lambda b|a_{38} + a_{45}| + a_{44}\lambda^2 g] \cdot \lambda^{n-1} \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n]}{2I} \times \\
&\quad \times \iint_{D^*} \Phi_2(x, y) dx dy = \\
&= \frac{\lambda^{n-1} [2b|a_{13}| + 2\lambda b|a_{38} + a_{45}| + a_{44}\lambda^2 g] \cdot [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n]}{4I} \cdot T^*.
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь $g = \max_D |Df^2|$, а T^* — жесткость кручения анизотропного стержня эллиптического поперечного сечения, которая определяется так [6,7]

$$T^* = \frac{\pi b^4 \lambda^3}{2(a_{33} + 4\lambda^2 a_{44})}. \quad (2.10)$$

Таким образом, при помощи (2.10) из (2.9) будем иметь

$$\begin{aligned}
&|\zeta_n^*| < \\
&< \frac{\pi b^4 \lambda^{n+2} [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n] \cdot [2b|a_{13}| + 2\lambda b|a_{38} + a_{45}| + \lambda^2 a_{44} g]}{8I(a_{33} + 4\lambda^2 a_{44})} \\
&\text{или, учитывая значение } I \text{ из (1.6), получим} \\
&|\zeta_n^*| < \frac{3\pi p b}{2\Delta^3 B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)} \times \\
&\quad \times \frac{\lambda^{n-1} [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n] \cdot [2|a_{13}| + 2\lambda|a_{38} + a_{45}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{a_{33} + 4\lambda^2 a_{44}},
\end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\bar{g} = b \cdot \bar{g}$.

Чтобы оценить точность формулы для определения положения центра изгиба, вычислим относительную погрешность

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^* &= \frac{|\bar{x} - x_{\text{приб.}}^{(n-1)}|}{|x_{\text{приб.}}^{(n-1)}|} = \frac{|\zeta_n^*|}{|x_{\text{приб.}}^{(n-1)}|} < \frac{3\pi p b}{2\Delta^3 B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)} \times \\
&\quad \times \frac{\lambda^{n-1} [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n] \cdot [2|a_{13}| + 2\lambda|a_{38} + a_{45}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{a_{33} + 4\lambda^2 a_{44}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{|x_{\text{приб.}}^{(n-1)}|}.
\end{aligned} \quad (2.12)$$

Несколько увеличивая правую часть неравенства (2.12), находим

$$\epsilon_n^* < \frac{3\pi pb}{2\Delta^3 B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)} \times \\ \times \frac{\lambda^{n-1} [(p_{n-1} + \lambda p_n) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_n] \cdot [2|a_{12}| + 2\lambda |a_{38} + a_{43}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{a_{35} |\bar{x}_{\text{проб.}}^{(n-1)}|} \quad (2.13)$$

Итак, если мы хотим воспользоваться формулой (2.2), относительная погрешность будет

$$\epsilon_2^* < \frac{3\pi pb}{2\Delta^3 B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)} \times \\ \times \frac{\lambda [(p_1 + \lambda p_2) a_{44} + 2\lambda a_{45} q_2] \cdot [2|a_{12}| + 2\lambda |a_{38} + a_{43}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{a_{35} |\bar{x}_{\text{проб.}}^{(1)}|}$$

или, учитывая, что

$$\bar{x}_{\text{проб.}}^{(1)} = \bar{x}_\Delta, \quad p_1 = \max |D_{xx}^* P_1| = 0, \quad q_2 = \max |D_{xy}^* P_2| = 0,$$

и подставляя значение $\bar{x}_\Delta$ из (2.2), получим

$$\epsilon_2^* < \frac{3\pi pb p_2 a_{44} [2|a_{12}| + 2\lambda |a_{38} + a_{43}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{2\Delta^3 \cdot \left| \frac{B \left(\frac{m+2}{p}, q+1 \right) \cdot B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)}{B \left(\frac{m+1}{p}, q+1 \right)} \right|} \dots \rightarrow \\ \rightarrow \dots \frac{+ \lambda^2 a_{44} \bar{g} \cdot \lambda^2}{- B \left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1 \right) | \cdot a_{35}} \quad (2.14)$$

Таким образом, при помощи (2.14) можно установить: если желаем определить положение центра изгиба по формуле (2.2) с точностью в 10^{-3} , то

$$\frac{3\pi pb \lambda^2 p_2 a_{44} [2|a_{12}| + 2\lambda |a_{38} + a_{43}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{2\Delta^3 \cdot \left| \frac{B \left(\frac{m+2}{p}, q+1 \right) \cdot B \left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1 \right)}{B \left(\frac{m+1}{p}, q+1 \right)} \right|} \dots \rightarrow \\ \rightarrow \dots \frac{+ \lambda^2 a_{44} \bar{g}}{- B \left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1 \right) | \cdot a_{35}} < 0,01$$

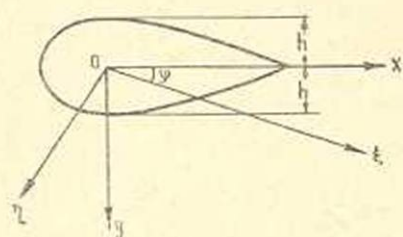
Откуда находим, что значения малого параметра λ должны удовлетворять следующему неравенству четвертой степени

$$\lambda^4 + \tilde{a}_1 \lambda^3 + \tilde{a}_2 \lambda^2 + \tilde{a}_3 < 0, \quad (2.15)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \frac{2|a_{36} + a_{45}|}{a_{44}g}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{2|a_{13}|}{a_{44}g}, \quad \tilde{a}_3 = -\frac{0,02a_{55}}{a_{44}^2g} \times \\ &\times \left| \frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) \cdot B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right) -}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} \right. \\ &\left. - \frac{B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right)}{3\pi p_2 \cdot p} \right|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для иллюстрации полученного результата рассмотрим численный пример. Пусть имеем $m = \frac{1}{2}$, $p = q = 1$, т. е. сечение стержня ограничено дугами полукубической параболы (профиль проф. В. П. Ветчинкина) (фиг. 2).



Фиг. 2.

Предположим, что стержень изготовлен из древесины. Благодаря наличию годовых слоев древесину приходится рассматривать как анизотропное тело, обладающее тремя плоскостями упругой симметрии. Для простоты примем далее, что физические оси совпадают с главными геометрическими осями (т. е. $\varphi = 0$). Тогда для значений технических постоянных: модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона, например, спруса (канадской ели) согласно [9—11] будем иметь:

модулей Юнга, сдвига, коэффициентов Пуассона, например, спруса (канадской ели) согласно [9—11] будем иметь:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 3730 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & E_{22} &= 125370 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & E_{33} &= 6200 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \\ G_{12} &= 5060 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & G_{23} &= 236 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, & G_{31} &= 6320 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \\ \nu_{12} &= 0,0212, & \nu_{21} &= 0,4815, & \nu_{23} &= 0,0104, \\ (\nu_{31} &= 0,4290, & \nu_{32} &= 0,8007, & \nu_{13} &= 0,3487). \end{aligned} \quad (2.17)$$

В этом случае при помощи (1.2)—(1.4), (2.16)—(2.17) вычисляются необходимые величины:

$$p_z = 27G_{33}, \quad \bar{g} = 1,5153061, \quad \Delta = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad (2.18)$$

$$\bar{a}_1 = 0, \quad \bar{a}_2 = 1,306492, \quad \bar{a}_3 = -0,00050935$$

Из (2.15), учитывая (2.18), находим

$$\lambda < 0,0197$$

или

$$\frac{H}{b} < 0,0394. \quad (2.19)$$

Таким образом, из (2.14), (2.19) и (2.2) приходим к заключению, что для определения положения центра изгиба рассматриваемого авиационного профиля формула

$$x = -\frac{4b}{9I} \cdot \left(1 + \frac{4G_{xz} \nu_{xz}}{E_{zz}} \right) \quad (2.20)$$

гарантирует для $\bar{x}$ относительную погрешность меньше 1% для тонких профилей, высота H которых не больше 0,0394 их длины.

Итак, формулу (2.20) можно считать практически применимой для очень тонких ортотропных профилей.

Если полагать (т. е. принять более точное выражение для определения центра изгиба)

$$\begin{aligned} \bar{x} = \bar{x}_A - \lambda^2 \cdot & \left\{ \frac{4a_{13}a_{44}}{a_{55}^2} \cdot \left[\delta_1 \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \delta_2 \cdot \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) \cdot B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} \right] + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \cdot \frac{2a_{44}^2 \delta_3}{a_{55}^2} \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right) \right\} \cdot \frac{b}{B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}, \quad (2.21) \end{aligned}$$

то относительная погрешность согласно (1.13), учитывая $p_z =$

$$= \max \left| \frac{\partial^2 \rho_z}{\partial x^2} \right| = 0, \text{ будет}$$

$$\varepsilon_4^* < \frac{3\pi p \lambda^4 \cdot [p_3 a_{44} + 2a_{45} q_4] \cdot [2|a_{13}| + 2\lambda |a_{36} + a_{45}| + \lambda^2 a_{44} \bar{g}]}{2\Delta^3 a_{55} \left| \delta_5 \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}} \right) - \lambda^2 \left(\delta_6 + \lambda^2 \cdot \frac{2a_{44}^2}{a_{55}^2} \cdot \delta_7 \right) \right|}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\delta_5 &= \frac{B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right) B\left(\frac{3m+1}{p}, 3q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)} - B\left(\frac{3m+2}{p}, 3q+1\right), \\ \delta_6 &= \delta_1 \cdot B\left(\frac{5m}{p}, 5q-1\right) - \\ &\quad - \delta_2 \cdot \frac{B\left(\frac{5m-1}{p}, 5q-1\right) \cdot B\left(\frac{m+2}{p}, q+1\right)}{B\left(\frac{m+1}{p}, q+1\right)}, \\ \delta_7 &= \delta_2 \cdot B\left(\frac{7m-2}{p}, 7q-2\right).\end{aligned}$$

Отсюда из требования $\varepsilon_4^* < 0,01$ получим, что значения параметра λ должны удовлетворять следующему неравенству шестой степени

$$\lambda^6 + \tilde{c}_1 \lambda^5 + \tilde{c}_2 \lambda^4 + \tilde{c}_3 \lambda^2 + \tilde{c}_4 < 0, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{c}_1 &= \tilde{a}_1, \quad \tilde{c}_2 = \frac{2}{a_{44}g} \left\{ |a_{13}| - \frac{a_{44}^2}{a_{35}} \cdot \frac{0,02\Delta^3 |\delta_2|}{3\pi p [p_4 a_{44} + 2a_{45} q_4]} \right\}, \\ \tilde{c}_3 &= - \frac{0,02\Delta^3 a_{55} |\delta_6|}{3\pi p [p_4 a_{44} + 2a_{45} q_4] \cdot g a_{44}}, \quad \tilde{c}_4 = - \frac{0,02\Delta^3 a_{35} |\delta_5| \left(1 - \frac{4a_{13}}{a_{55}}\right)}{3\pi p [p_4 a_{44} + 2a_{45} q_4] \cdot g a_{44}}.\end{aligned} \quad (2.23)$$

Для наглядности полученного результата опять рассмотрим численный пример для того же авиационного профиля $\left(m = \frac{1}{2}, p = q = 1\right)$, изготовленного из древесины с техническими постоянными (2.17).

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}p_4 &= 637,875 \cdot \frac{G_{12}^2}{G_{32}}, \\ \delta_1 &= -\frac{3}{13}, \quad \delta_2 = -\frac{3}{11}, \quad \delta_3 = -\frac{6}{221}, \\ \delta_5 &= 0,0012173, \quad \delta_6 = 0,0767233, \quad \delta_7 = -0,0020058,\end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\tilde{c}_1 = 0, \quad \tilde{c}_2 = 0,8401987, \quad \tilde{c}_3 = -0,0291292, \quad \tilde{c}_4 = -0,0005185.$$

Учитывая (2.23) и (2.24), из (2.22) получим

$$\lambda < 0,192$$

или

$$\frac{H}{b} < 0,384. \quad (2.25)$$

Таким образом, если имеет место (2.25), то формулу

$$\bar{x} = -\frac{4b}{91} \cdot \left(1 - \frac{4a_{12}}{a_{13}} \right) + \lambda^2 \cdot \frac{a_{41}}{a_{53}^2} \left[\frac{32}{13} a_{11} \lambda^2 - \frac{48}{77} a_{13} \right] \cdot b$$

можно считать достаточно точной для определения положения центра изгиба.

§ 3. Исследование положения центра изгиба при разных φ

В предыдущем параграфе было доказано, что для очень тонких профилей при определении положения центра изгиба авиационного профиля можно удовлетворяться первым членом формулы (1.25'), т. е. принять формулу (2.2)

$$\bar{x}(\varphi) = \bar{k}_1 \cdot \left[1 + \frac{4G_{12} \nu_{12} (E^* \nu^* \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}{E_{22} (\cos^2 \varphi + G^* \sin^2 \varphi)} \right]. \quad (3.1)$$

В частном случае, когда физические оси совпадают с главными геометрическими осями, будем иметь

$$\bar{x}(0) = \bar{k}_1 \cdot \left[1 + \frac{4G_{12} \nu_{12}}{E_{22}} \right]. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$Q_1(\varphi) = \frac{\bar{x}(\varphi)}{\bar{x}(0)}.$$

Тогда при помощи (3.1) и (3.2) можно написать

$$Q_1(\varphi) = \frac{1 + K + (1 - K) \cos 2\varphi}{1 + G^* + (1 - G^*) \cos 2\varphi}$$

или

$$Q_1(\varphi) = \frac{N_1 + N_2 \cos 2\varphi}{1 + N_2 \cos 2\varphi}, \quad (3.3)$$

где

$$K = \frac{E_{11} + 4G_{12} \nu_{12}}{E_{22} + 4G_{12} \nu_{12}} \cdot E^* \cdot G^*, \quad N_1 = \frac{1 + K}{1 + G^*},$$

$$N_2 = \frac{1 - K}{1 + G^*}, \quad N_2 = \frac{1 - G^*}{1 + G^*}. \quad (3.4)$$

Как видно из (3.3), $Q_1(\varphi)$ — периодическая функция с периодом π , т. е. $Q_1(\varphi + \pi) = Q_1(\varphi)$, а для N_2 имеет место следующее условие

$$|N_2| < 1. \quad (3.5)$$

Легко видеть, что для функции $Q_1(\varphi)$ могут быть два случая существования экстремальных значений*: $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим эти случаи несколько подробнее. С этой целью вычислим вторую производную

$$\frac{d^2 Q_1}{d\varphi^2} = \bar{A} \cdot \frac{\cos 2\varphi + N_3(1 + \sin^2 2\varphi)}{(1 + N_3 \cos 2\varphi)^3}, \quad (3.6)$$

где

$$\bar{A} = 4(N_1 N_3 - N_2) = \frac{32G^*}{(1 + G^*)^2} \cdot \frac{G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{E_{zz} + 4G_{yz} \nu_{yz}}. \quad (3.7)$$

В первом случае, когда $\varphi = 0$, при помощи (3.4)–(3.7) можно установить:

1) при $G_{yz} \nu_{yz} < G_{xz} \nu_{xz}$ выражение $Q_1(\varphi)$ принимает наибольшее значение,

2) при $G_{yz} \nu_{yz} > G_{xz} \nu_{xz}$ выражение $Q_1(\varphi)$ принимает наименьшее значение.

Итак, для рассматриваемого случая выгодное (невыгодное) положение центра изгиба будет иметь вид

$$\bar{x}(0) = \bar{k}_1 \cdot \left(1 + \frac{4G_{yz} \nu_{yz}}{E_{zz}} \right) \cdot \frac{E_{zz} + 4G_{xz} \nu_{xz}}{E_{zz} + 4G_{yz} \nu_{yz}}, \quad (3.8)$$

выгод. ($\bar{A} > 0$)
невыгод. ($\bar{A} < 0$)

Во втором случае, когда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, нетрудно видеть, пользуясь опять (3.4)–(3.7), что:

1) при $G_{yz} \nu_{yz} > G_{xz} \nu_{xz}$ выражение $Q_1(\varphi)$ принимает наименьшее значение,

2) при $G_{yz} \nu_{yz} < G_{xz} \nu_{xz}$ выражение $Q_1(\varphi)$ принимает наибольшее значение.

Причем имеем (здесь принято во внимание, что $E_{zz} \nu_{yz} = E_{yz} \nu_{zz}$)

$$\bar{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \bar{k}_1 \cdot \left[1 + \frac{4G_{xz} \nu_{xz}}{E_{zz}} \right] \cdot \frac{E_{zz} + 4G_{yz} \nu_{yz}}{E_{zz} + 4G_{xz} \nu_{xz}}, \quad (3.9)$$

выгод.
невыгод.

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующий практически важный вывод. Если хотим изготовить изгиб

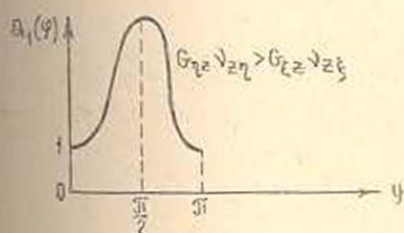
* Здесь предполагается, что

$$N_1 N_3 - N_2 = \frac{8G_{yz} \nu_{yz}}{E_{zz} + 4G_{yz} \nu_{yz}} \cdot \frac{E^* \nu^* - G^*}{(1 + G^*)^2} \neq 0.$$

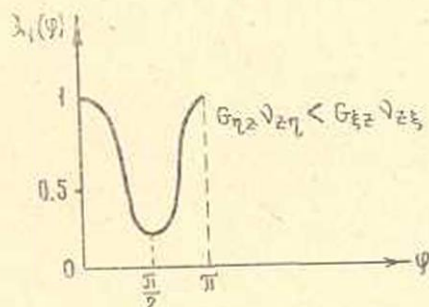
Для изотропного материала имеем $N_1 N_3 - N_2 = 0$.

тропный стержень из ортотропного материала так, чтобы он имел наилучшее механическое свойство (т. е., чтобы расстояние центра изгиба от центра тяжести было наименьшим), то необходимо, чтобы при $\bar{A} < 0$ главные направления упругости $O\xi$ и $O\eta$ ортотропного материала были соответственно перпендикулярны к главным геометрическим осям Ox и Oy , а при $\bar{A} > 0$ — физические оси совпадали с геометрическими осями, и наоборот.

Ниже приведены примерные графики (фиг. 1 и фиг. 2) зависимости Q_1 от φ по формуле (3.3).



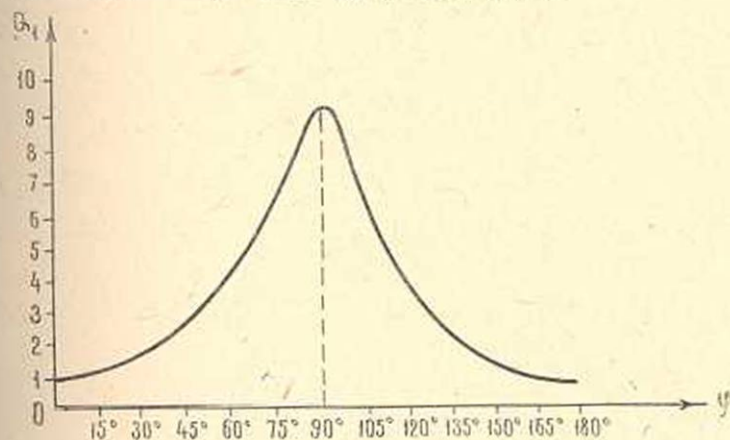
Фиг. 3.



Фиг. 4.

Рассмотрим численный пример для авиационного профиля проф. В. П. Ветчинкина, изготовленного из древесины с техническими постоянными (2.17).

В этом случае выражение (3.8) примет вид



Фиг. 5.

$$Q_1(\varphi) = \frac{1,37898 + 0,53189 \cos 2\varphi}{1 + 0,91087 \cos 2\varphi} \quad (3.10)$$

График функции $Q_1(\varphi)$ симметричен относительно прямой $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Поэтому достаточно произвести вычисления для значений φ от 0 до 90° .

В заключение приводим таблицу, составленную по формуле (3.10) для функции $Q_1(\varphi)$, а также график этой функции (фиг. 5).

Таблица

φ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
Q_1	1	1,02839	1,13019	1,37898	2,04391	4,34850	9,50398

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Ереванский государственный университет

Поступила 2 VII 1961

Վ. Ս. Սարգսյան

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ԵՐԿԱՐԱՑԿԱԾ ՍԻՄԵՏՐԻԿ
ԱՎԷԱՑԻՈՆ ՊՐՈՖԻԼՈՎ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ԶՈՂԻ ԾՌՄԱՆ
ԿԵՆՏՐՈՆԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աշխատության մեջ դիտարկված է օրթոտրոպ նյութից բաղկացած երկա-
րացված պրոֆիլով անիզոտրոպ ձողի ծաման կենտրոնի որոշման խնդիրը,
երբ առաձգականության գլխավոր ուղղությունները չեն համընկնում ձողի
լայնական հատվածքի իներցիայի գլխավոր առանցքների հետ:

Ուսումնասիրված են ծաման կենտրոնի մոտավոր բանաձևի ճշգրտա-
թյան հարցը, ինչպես նաև օրթոտրոպ նյութի առաձգականության գլխավոր
առանցքների տարրեր, դիրքերի ազդեցությունը ծաման կենտրոնի վրա:
Յուրյ է արված, թե նրանց ինչպիսի օրինատացիայի դեպքում ձողի ծաման
կենտրոնի հեռավորությունը ծանրության կենտրոնից կլինի ամենափոքրը
և հակառակը:

Դիտարկված է կոնկրետ խնդիր: Կառուցված են զրաֆիկներ և կազմված
են աղյուսակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лейбензон Л. С. Собрание трудов. т. 1, изд. АН СССР, М., 1951.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1937.
4. Саркисян В. С. Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем, изготовленных из ортотропного материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 5, 1961.
5. Саркисян В. С. О формуле центра изгиба анизотропного призматического стержня с симметричным сечением. ДАН АрмССР, 32, № 4, 1961.
6. Саркисян В. С. Кручение анизотропных призматических стержней с удлиненным профилем. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 12, № 2, 1959.
7. Саркисян В. С. Кручение анизотропных призматических стержней с сечением в виде удлиненного анизотропного профиля. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 2, 1961.

8. Griffith A. A. & Taylor B. T., R. & M., 399, 1917, appendix.
9. Carrington. Elastic Constants of spruce. Philos. Magasin, 1923.
10. Рабинович А. Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. Труды ЦАГИ, № 91, 1946.
11. Митинский А. Н. Упругие постоянные древесины как ортотропного материала. Труды Лесотехнической академии им. С. М. Кирова, № 63, 1948.
12. Ямпольский А. Р. Расчет крутильной жесткости анизотропного стержня. Труды МВМИ, вып. II, 1955.
13. Ямпольский А. Р. Кручение призматических стержней с длинным и узким сечением в общем случае анизотропии. Вестник Военно-инженерной Краснознаменной Академии им. В. В. Куйбышева, изд. ВИА, М., 1955.
14. Ямпольский А. Р. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа. Вестник Военно-инженерной Краснознаменной Академии им. В. В. Куйбышева. Изд. ВИА, М., 1960.
15. Саркисян В. С. Изгиб анизотропных призматических стержней удлиненных симметричных профилей. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 4, 1961.
16. Саркисян В. С. Некоторые задачи об изгибе анизотропных призматических стержней с сечениями в виде удлиненных профилей. ДАН АрмССР, 32, № 3, 1961.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

Неустановившаяся ползучесть конической
безмоментной оболочки вращения

Задачи безмоментных оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах Л. М. Качанова [1], И. И. Гольденבלата и Н. А. Николаенко [2], В. И. Розенблума [3] и других. В настоящей заметке рассматривается неустановившаяся ползучесть конической безмоментной оболочки вращения под действием постоянных нормальных поверхностных нагрузок, когда один конец оболочки зашпелен, а другой растянут (сжат) по направлениям образующих на постоянную величину. Решение задачи сводится к определению одной функции интегрирования, относительно которой на основе теории старения [1] получается нелинейное алгебраическое уравнение. В случае, когда величины кольцевых напряжений превосходят мгновенные (упругие) величины продольных напряжений (последние полагаются сжимающими), переходя в уравнениях ползучести от интенсивности касательных напряжений к близкой ей величине — максимальному касательному напряжению, дается точное решение.

1. Рассмотрим коническую безмоментную оболочку постоянной толщины h . Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять длиной отрезка по образующей s , отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка несет постоянную нормальную поверхностную нагрузку интенсивностью p и пусть ее один конец ($s = s_0$) зашпелен, а другой ($s = l$) растянут (сжат) по направлениям образующих на постоянную величину u_0 . Если материал оболочки обладает свойством ползучести, то при таких условиях в течение времени t произойдет перераспределение перемещений и напряжений в оболочке.

Граничные условия задачи будут:

$$\begin{aligned} \text{на срединной поверхности } Z &= -p, \\ \text{на краях } u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = u_0 = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения равновесия имеют вид [4]

$$\frac{\partial T_1}{\partial s} + (T_2 - T_1) \frac{\sin \vartheta}{r} = 0$$

$$\frac{T_2}{R} = -p, \quad (1.2)$$

где T_1 , T_2 и R — тангенциальные усилия и радиус кривизны срединной поверхности оболочки, ϑ — угол конусности, r — расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения.

Геометрические соотношения имеют вид [4]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R}. \quad (1.3)$$

Здесь ε_1 , ε_2 и w — компоненты деформации и прогиб оболочки.

Интегрируя (1.2), для напряжений $\sigma_1 = \frac{T_1}{h}$, $\sigma_2 = \frac{T_2}{h}$ получим [3]

$$\sigma_1 = \bar{\sigma}_1 + A_1 C(t)$$

$$\sigma_2 = -\frac{pR}{h}, \quad (1.4)$$

где

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{p}{2h \cos \vartheta} \frac{r_0^2 - r^2}{r}, \quad A_1 = \frac{1}{rh \cos \vartheta}, \quad r_0 = r(0), \quad (1.5)$$

$C(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Исходя из основных положений теории старения [1], для компоненты деформации ε_1 получим

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{6} \Omega(t) T^{m-1} (2\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2G} \left(\sigma_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \quad (1.6)$$

где

$$\Omega(t) = \int_0^t B(t) dt, \quad (1.7)$$

$B(t)$ — коэффициент ползучести материала, $T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}$ — интенсивность касательных напряжений, m — показатель ползучести, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$ — среднее давление.

Интегрируя (1.6) от нуля до t с учетом (1.1), получим следующее нелинейное алгебраическое уравнение относительно функции $C(t)$

$$u_0 = \frac{\Omega(t)}{2} \int_0^l (T_1^2 + T_2^2 C(t) + T_3^2 C^2(t))^{\frac{m-1}{2}} (f_1 + f_2 C(t)) ds + \\ + \int_0^l (f_3 + f_4 C(t)) ds, \quad (1.8)$$

где

$$T_1^2 = \frac{p^2 (r_0^4 + 3r^4)}{4h^2 r^2 \cos^3 \vartheta}, \quad T_2^2 = \frac{pr_0^2}{h^2 r^2 \cos^2 \vartheta}, \quad T_3^2 = \frac{1}{h^2 r^2 \cos^2 \vartheta}, \\ f_1 = \frac{pr_0^2}{hr \cos \vartheta}, \quad f_2 = \frac{2}{hr \cos \vartheta}, \quad f_3 = \frac{p}{4Gh(1+\nu) \cos \vartheta} \frac{r_0^2 - (1-2\nu)r^2}{r}, \\ f_4 = \frac{1}{2Gh(1+\nu)r \cos \vartheta}, \quad \Omega(t) = \frac{\Omega(t)}{3^{\frac{m+1}{2}}}. \quad (1.9)$$

В общем случае уравнение (1.8) можно решать лишь численным методом.

Допустим, что для любого s

$$\sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 0, \quad \text{где} \quad \sigma_i = \bar{\sigma}_i + A_1 C'. \quad (1.10)$$

Штрихом обозначены мгновенные (упругие) значения соответствующих величин.

Пользуясь выражениями (1.4) и (1.5), из (1.10) получим

$$-\frac{p(r_0^2 + r_1^2)}{2} < C' \leq -\frac{p(r_0^2 - r_1^2)}{2}. \quad (1.11)$$

Здесь $r_1 = r(l)$, причем $r_1 \geq r_0 > 0$.

Это нам пригодится в дальнейшем при ограничении внешних воздействий на оболочку.

2. Будем исходить из теории старения, переходя при этом от интенсивности касательных напряжений T к близкой ей величине — максимальному касательному напряжению $\tau_{\max}$.

Так как благодаря наличию дальнейшей релаксации напряжений неравенство (1.10) остается справедливым и при любом t , то для главных напряжений имеем

$$\sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 0, \quad \sigma_3 = 0, \quad (2.1)$$

следовательно,

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_2|}{2} = \frac{pr}{2h \cos \vartheta}. \quad (2.2)$$

Для компоненты деформации получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\Omega(t)}{6} \tau_{\max}^{m-1} (2\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{1}{2G(1+\nu)} (\sigma_1 - \nu\sigma_2). \quad (2.3)$$

Последнее условие (1.1) с помощью первого соотношения (1.3), (2.3), (1.4) и (1.9) можно привести к виду

$$u_0 = \int_0^l z_1 ds = \frac{\Omega(t)}{6} \int_0^l z_{\max}^{m-1} f_1 ds + \int_0^l f_3 ds + \\ + C(t) \left(\frac{\Omega(t)}{6} \int_0^l z_{\max}^{m-1} f_2 ds + \int_0^l f_4 ds \right) = A_2 \Omega(t) + A_3 + C(t) (A_4 \Omega(t) + A_5), \quad (2.4)$$

где A_2, A_3, A_4 и A_5 — положительные постоянные

$$A_2 = \frac{r_0^2 (r_0^{m-1} - r_1^{m-1})}{3(m-1) \sin \vartheta} \left(\frac{p}{2h \cos \vartheta} \right)^m, \\ A_3 = \frac{p}{4Gh(1+\nu) \sin 2\vartheta} \left[2r_0^2 \ln \frac{r_0}{r_1} - (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right], \\ A_4 = \frac{2(r_0^{m-1} - r_1^{m-1})}{3p(m-1) \sin \vartheta} \left(\frac{p}{2h \cos \vartheta} \right)^m, \\ A_5 = \frac{\ln \frac{r_0}{r_1}}{Gh(1+\nu) \sin 2\vartheta}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) находим

$$C(t) = - \frac{A_2 \Omega(t) + A_3 - u_0}{A_4 \Omega(t) + A_5}. \quad (2.6)$$

После определения $C(t)$ вычисление u и w не представляет особого труда, и мы на этом не останавливаемся.

При $t=0$ и $t \rightarrow \infty$ по (2.6) получим значения $C(t)$ для мгновенного (упругого) и установившегося режимов

$$C = \frac{u_0 - A_3}{A_5}, \quad (2.7)$$

$$C_{\text{уст.}} = - \frac{A_2}{A_4} = - \frac{pr_0^2}{2}. \quad (2.8)$$

С учетом (2.8) из первой формулы (1.4) получим

$$z_{\text{уст.}} = - \frac{pr}{2h \cos \vartheta}. \quad (2.9)$$

Это означает, что в установленном режиме ползучести продольные напряжения по величине в два раза меньше кольцевых напряжений независимо от величин u_0 и p .

Пользуясь неравенством (1.11), выражениями (2.7) и (2.5), получим общие ограничения внешних условий оболочки, независимо от характеристик ползучести ее материала, при которых продольные

напряжения будут меньше кольцевых напряжений в любой момент времени. Эти ограничения имеют вид

$$\frac{p \left[2r_1^2 \ln \frac{r_0}{r_1} - (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right]}{4Gh(1+\nu) \sin 2\theta} > u_0 > \frac{p \left[2r_1^2 \ln \frac{r_0}{r_1} + (1-2\nu)(r_0^2 - r_1^2) \right]}{4Gh(1+\nu) \sin 2\theta} \quad (2.10)$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 II 1962

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

ԿՈՆԱԿԱՆ ԱՆՄՈՍԵՆՏ ՊՏՏՄԱՆ ՔԱՂԱՆՅԻ ԶԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԸ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Այս նոթում դիտարկվում է մի ծայրում ամրակցված, մյուս ծայրում ծնիչների ուղղությամբ հաստատուն մեծությամբ ձգված (սեղմված) կոնական անմոմենտ պտտման թաղանթի չկալունացված սողքի խնդիրը, հրք աչք բեռնված է հաստատուն մակերևութային նորմալ ուժերով: Ոնգրի լուծումը բերվում է միայն ժամանակից կախված մեկ ֆունկցիայի որոշման, որի նկատմամբ ձերացման տեսության [1] հիման վրա ստացվում է ու աստիճանի հանրահաշվական հավասարում: Այն դեպքում, հրք երկալնական լարումները սեղմող են և չափով չեն գերազանցում շրջանային լարումներին, խնդիրը լուծվում է ճշգրիտ: Ընդ որում սողքի հավասարումներում շոշափող լարումների ինտենսիվությունը փոխարինվում է նախորդ հալտնի մաքսիմում շոշափող լարմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Ползучесть и несущая способность оболочек. Научные сообщения ЦНИИСК, № 13, М., 1960.
3. Розенблюм В. И. О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. И. Розовский

К задаче о ползучести облученного стержня

Недавно М. А. Задоян [1] рассмотрел интересную задачу о не-
 установившейся ползучести металлической балки прямоугольного по-
 перечного сечения, которая после облучения на поверхностях $x = \pm h$
 нейтронным стационарным потоком с одинаковой средней энергией и
 интенсивностью подвергалась чистому изгибу при высокой темпера-
 туре. Исходной физической зависимостью служило нелинейное ин-
 тегральное уравнение Ю. Н. Работнова при степенной нелинейности
 относительно деформации $\varepsilon(x, t)$ с дополнительным множителем $\Phi(x)$
 и ядром наследственности $N(x; t - \tau) = \Omega(x) f^{-1}(t - \tau)$, где функции
 $\Phi(x)$ и $\Omega(x)$ учитывают неоднородность материала, вызванную об-
 лучением.

Задача сводится к решению линейного интегрально-операторного
 уравнения смешанного типа относительно напряжения $\sigma(x, t)$

$$\sigma = F + (M - N)\sigma, \quad (1)$$

где

$$M\sigma = \int_0^h M(\xi, x) \sigma(\xi, t) d\xi, \quad N\sigma = \int_0^t N(x, t - \tau) \sigma(x, \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$M(\xi, x) = \frac{\Phi(x) x^m \xi}{I} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right], \quad N(x; t - \tau) = \frac{\Omega(x)}{f(t - \tau)}, \quad \gamma = \frac{I}{I_0}, \quad (3)$$

$$F(x, t) = \frac{H}{2I} \Phi(x) x^m \left[1 + \gamma \int_0^t \frac{d\tau}{f(t - \tau)} \right], \quad (4)$$

$$I = \int_0^h \Phi(x) x^{m+1} dx, \quad I_0 = \int_0^h \frac{\Phi(x) x^{m+1}}{\Omega(x)} dx,$$

где H — внешний изгибающий момент.

Решение уравнения (1) найдено методом последовательных при-
 ближений и представлено в следующей операторной форме

$$\sigma(x, t) = F(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} (M - N)^k F(x, t). \quad (5)$$

Доказано, что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно, если выполняются следующие условия:

$$\int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi < \frac{I}{\Phi_0 h^{m+1}}, \quad (6)$$

$$\int_0^t \frac{d\tau}{f(t_0 - \tau)} < \frac{1}{\Omega_0} \left[1 - \frac{\Phi_0 h^{m+1}}{I} \int_0^h \left| \frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right| d\xi \right], \quad (7)$$

где

$$\Phi_0 = \max \Phi(x), \quad \Omega_0 = \max \Omega(x) \quad \text{в} \quad 0 \leq x \leq h; \quad 0 \leq t \leq t_0 < \infty.$$

При этом решение (5) уравнения (1) — единственное.

Расшифровка операторного выражения (5) осуществлена в первом приближении при $k=1$. Для конкретности принято, что

$$f(t - \tau) = (t - \tau)^\nu, \quad 0 < \nu < 1$$

и

$$\Phi(x) = A + 2\alpha\theta_0 e^{-\alpha h} \operatorname{ch} \mu x, \quad \Omega(x) = B + 2\beta\theta_0 e^{-\beta h} \operatorname{ch} \mu x, \quad (8)$$

где $A, B, \alpha, \beta, \theta_0$ и μ — заданные постоянные.

В настоящем сообщении будет рассмотрена следующая задача: найти точное решение уравнения (1) в замкнутом виде, пригодное для наглядного изображения физической картины распределения напряжений в стержне и определения деформации для любого момента времени t , включая и случай, когда $t \rightarrow \infty$.

Решение поставленной задачи может быть осуществлено ценою наложения на функцию $\Omega(x)$ определенного ограничения, а именно, примем ее такой, чтобы функция

$$y = \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \quad (9)$$

не меняла знака на отрезке $[0, h]$.

Если исходить из представления (8), то последнее условие выполняется лишь на части отрезка $[0, h]$.

Действительно, функция y обращается в нуль при $x = h_1$, где h_1 является единственным действительным положительным корнем уравнения $\Omega(x) - \gamma = 0$, она положительна на отрезке $[0, h_1]$ и отрицательна на отрезке $[h_1, h]$. Поэтому, чтобы функция y не меняла знака на всем отрезке $[0, h]$, нужно или полностью заменить представления (8) другими, при которых выполняется указанное условие, разумеется, правильно отображающими влияние облучения, или соответствующим образом аппроксимировать выражение $\Omega(x)$ на основе (8). В последнем случае, как это будет обнаружено далее, целесообразно предпринять две аппроксимации $\Omega(x)$, при которых функция y не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$:

$$\Omega(x) = \begin{cases} B + 2\beta\theta_0 e^{-\beta h} \operatorname{ch} \mu x & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 \\ \Omega_1 = \Omega(h_1) & \text{при } h_1 \leq x \leq h \end{cases} \quad (10)$$

или

$$\Omega(x) = \begin{cases} \Omega_1 = \Omega(h_1) & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 \\ B + 2\beta_0 e^{-\alpha h} \operatorname{ch} \mu x & \text{при } h_1 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (11)$$

Аппроксимации (10) соответствует следующая аппроксимация:

$$y = \begin{cases} \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 > 0 & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 - \varepsilon, \text{ где } \varepsilon > 0, \\ \frac{\gamma}{\Omega(h_1 - \varepsilon)} - 1 > 0 & \text{при } h_1 - \varepsilon \leq x \leq h; \\ \text{причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 - \varepsilon)} = 1, & h_1 \leq x \leq h. \end{cases} \quad (12)$$

Аппроксимации (11) соответствует следующая аппроксимация:

$$y = \begin{cases} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 + \varepsilon)} - 1 < 0 & \text{при } 0 \leq x \leq h_1 + \varepsilon, \varepsilon > 0, \\ \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 < 0 & \text{при } h_1 + \varepsilon \leq x \leq h; \\ \text{причем } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\gamma}{\Omega(h_1 + \varepsilon)} = 1, & 0 \leq x \leq h_1. \end{cases} \quad (13)$$

Как функция (12), так и функция (13) непрерывны и не меняют знака на всем отрезке $[0, h]$.

Разумеется, что функция

$$y = \left| \frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right| \quad (14)$$

также не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$. Однако, представлению (14), отвечает аппроксимация $\Omega(x)$ функцией, имеющей экстремум при $x = h_1$, где $0 < h_1 < h$. Последнее является более грубой аппроксимацией выражения $\Omega(x)$, чем (10) или (11), если в качестве эталона принять выражения (8).

Итак, впредь будем считать, что условия, обеспечивающие стабильность знака функции y , определяемой формулой (9), осуществлены.

Решение уравнения (1) найдем методом, представляющим собою синтез метода Пинкерле-Гурса [2] по координате x и интегрально-операторного метода по времени t .

Введем интегральный оператор:

$$\Omega(x) K\tau = \Omega(x) \int_0^t \frac{\tau(x, \tau)}{f(t-\tau)} d\tau. \quad (15)$$

Тогда из уравнения (1) следует

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \int_0^h \frac{\Phi(x) x^m \xi}{I [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] \varepsilon(\xi, t) d\xi. \quad (16)$$

Обозначим

$$Q_1(x) = \frac{\Phi(x) x^m}{I [1 + \Omega(x) \bar{K}]}, \quad Q_2(\xi) = \xi \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right]. \quad (17)$$

Тогда уравнение (16) примет следующий вид:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \int_0^h Q_1(x) Q_2(\xi) \varepsilon(\xi, t) d\xi. \quad (18)$$

Ядро интегрального уравнения (18) вырожденное. Это интегральное уравнение типа Фредгольма решается известным способом [2]. Будем иметь:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \frac{Q_1(x)}{1 - \eta} \int_0^h Q_2(\xi) \frac{F(\xi, t)}{1 + \Omega(\xi) \bar{K}} d\xi, \quad (19)$$

где

$$\eta = \int_0^h Q_1(x) Q_2(x) dx. \quad (20)$$

Оператор, обратный оператору ползучести $1 + \Omega(x) \bar{K}$, являющийся оператором релаксации, имеет вид:

$$[1 + \Omega(x) \bar{K}]^{-1} = 1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)], \quad (21)$$

где ядро оператора $\bar{R}$ представляет собою резольвенту ядра оператора $\bar{K}$. Оператор $\bar{R}$, как известно [3], — регулярный оператор Вольтерра, если ядро оператора $\bar{K}$ ограничено или слабо сингулярно.

На основе (21) выражение (19) можно представить так:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= [1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)]] F(x, t) + \\ &+ \frac{Q_1(x)}{1 - \eta} \int_0^h Q_2(\xi) [1 - \Omega(\xi) \bar{R} [-\Omega(\xi)]] F(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Докажем теперь, что, если γ не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$, то $1 - \eta \neq 0$.

Будем доказывать от противного. Пусть $1 - \eta = 0$, т. е.

$$\int_0^h [1 - \Omega(x) \bar{R} [-\Omega(x)]] \Phi(x) x^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right] dx = I. \quad (23)$$

По физической сущности исходной зависимости типа Ю. Н. Работнова $x^{m+1} > 0$, $\Phi(x) > 0$, $\Omega(x) > 0$ и $I \neq 0$. По условию разность, фи-

гулирующая в квадратных скобках под знаком интеграла, не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$. Поэтому, применяя теорему о среднем в (23), получим:

$$[1 - \Omega(\theta h) \bar{K} [-\Omega(\theta h)]] \int_0^h \Phi(x) x^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(x)} - 1 \right] dx = I, \quad \text{где } 0 < \theta < 1. \quad (24)$$

Из (23) с учетом (4), следует

$$[1 - \Omega(\theta h) \bar{K} [-\Omega(\theta h)]] (\gamma I_0 - I) = I. \quad (25)$$

Так как $\gamma I_0 = I$, то уравнение $1 - \gamma = 0$, дающее собственные значения, превращается в нелепое равенство: $0 = I$ при $I \neq 0$.

Следовательно, в рассматриваемой задаче собственных значений вовсе не существует. Поэтому формула (22) дает единственное определенное решение интегрального уравнения (1).

Условие стабильности знака u на всем отрезке $[0, h]$ приводит также к тому, что интеграл, фигурирующий в (19) или (22), равен нулю. Действительно, с учетом (3) и (17) этот интеграл примет следующий вид:

$$\delta = \frac{H(1 + \gamma \bar{K})}{2I} \int_0^h \frac{\Phi(\xi) \xi^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] d\xi. \quad (26)$$

Применяя в (26) теорему о среднем, получим $\delta = 0$.

Итак, решение интегрального уравнения (1) будет иметь вид:

$$\sigma(x, t) = \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} = \frac{H\Phi(x) x^m (1 + \gamma \bar{K})}{2I [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \quad (27)$$

или

$$\sigma(x, t) = \frac{H}{2I} \Phi(x) x^m [1 + [\gamma - \Omega(x)] \bar{K} [-\Omega(x)]]. \quad (28)$$

Чтобы убедиться в том, что выражение $\sigma(x, t)$, определяемое формулой (27) или (28), удовлетворяет уравнению (1) или равносильному ему уравнению (16), достаточно подставить (27) в (16). Будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} = \\ &= \frac{F(x, t)}{1 + \Omega(x) \bar{K}} + \frac{H\Phi(x) x^m (1 + \gamma \bar{K})}{2I^2 [1 + \Omega(x) \bar{K}]} \int_0^h \frac{\Phi(\xi) \xi^{m+1} \left[\frac{\gamma}{\Omega(\xi)} - 1 \right] d\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку по условию функция u не меняет знака на всем отрезке $[0, h]$, то после применения в (29) теоремы о среднем, обнаруживаем, что преобразованный интеграл равен нулю. Следовательно, равенство (29) есть тождество.

Для получения формулы, определяющей деформацию $\varepsilon(x, t)$, подставим в исходную физическую зависимость типа Ю. Н. Работнова

$$\Phi(x) \varepsilon^m(x, t) = [1 + \Omega(x) K] \sigma(x, t) \quad (30)$$

вместо $\sigma(x, t)$ его выражение из (28). Будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon^m(x, t) = \frac{Hx^m}{2I} \{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \bar{R}[-\Omega(x)] + \Omega(x) \bar{K} + \\ + \Omega(x) [\gamma - \Omega(x)] \bar{K} \bar{R}[-\Omega(x)] \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Принимая во внимание выражение произведения операторов

$$\Omega(x) \bar{K} \bar{R}[-\Omega(x)] = \bar{K} - \bar{R}[-\Omega(x)],$$

являющееся следствием формулы (21), из (31) получим:

$$\varepsilon^m(x, t) = \frac{Hx^m}{2I} (1 + \gamma \bar{K}). \quad (32)$$

Переходя в (28) и (32) от интегрально-операторной формы к обычной, получим окончательно выражения напряжения и деформации

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, 0) \left\{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \int_0^t R[-\Omega(x); s] ds \right\}, \quad (33)$$

$$\varepsilon(x, t) = x \left\{ \frac{H}{2I} \left[1 + \gamma \int_0^t K(s) ds \right] \right\}^{\frac{1}{m}}, \quad \text{где } \sigma(x, 0) = \frac{H\Phi(x) x^m}{2I}. \quad (34)$$

По физической сущности ядро релаксации R является положительной монотонно убывающей функцией s , причем интеграл

$$\int_0^\infty R[-\Omega(x); s] ds < \infty$$

при любом фиксированном значении x , принадлежащем отрезку $[0, h]$ даже тогда, когда ядро ползучести K выбрано слабо сингулярным так, что

$$\int_0^\infty K(s) ds = \infty.$$

В частности, если $K(s) = s^{-\nu} \Gamma(1-\nu)$, $0 < \nu < 1$, где Γ — гамма функция, то

$$\sigma(x, t) = \sigma(x, 0) \left\{ 1 + [\gamma - \Omega(x)] \int_0^t \mathfrak{E}_\nu[-\Omega(x); s] ds \right\}, \quad (35)$$

где $\mathfrak{E}$, — экспоненциальная функция дробного порядка Ю. Н. Работнова [4].

Учитывая связь между $\mathfrak{E}$ — оператором и функцией Миттаг-Леффлера $E_{1-\nu}$, установленную автором [5], из (35) получим:

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon(x, 0) \{1 + [\gamma - \Omega(x)] [1 - E_{1-\nu}(-\Omega(x) t^{1-\nu})] \Omega^{-1}(x)\}. \quad (36)$$

Принимая во внимание, что $E_{1-\nu}(-z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ (см. [5]), получим:

$$\varepsilon(x, \infty) = \varepsilon(x, 0) \frac{\gamma}{\Omega(x)}. \quad (37)$$

Из (34) при выбранном выше выражении ядра ползучести $K(s)$ получим

$$\varepsilon(x, t) = x \left\{ \frac{H}{2l} \left[1 + \frac{\gamma t^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \right] \right\}^{\frac{1}{m}}. \quad (38)$$

Из (38) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(x, t) = \infty$, т. е. материал ведет себя подобно максвелловскому телу, но кривая ползучести в координатах $\varepsilon - t$ не имеет асимптоты. Таким образом, здесь имеет место процесс неустановившейся ползучести. Разумеется, что можно ядро ползучести $K(s)$ подобрать так, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(x, t) \neq \infty$. Например, последнее можно осуществить, если ядро ползучести выразить через $\mathfrak{E}$, — функцию Ю. Н. Работнова с соответствующими реологическими параметрами (см. [5]).

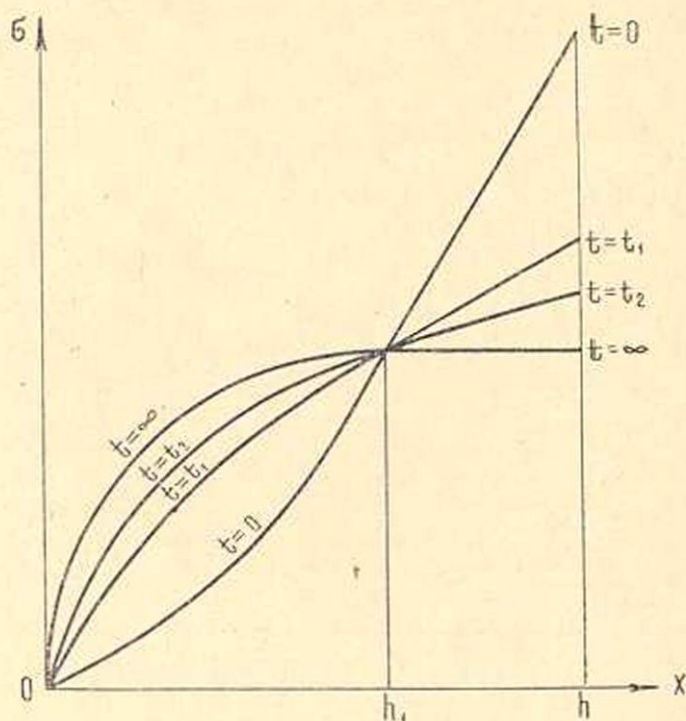
Напомним, что $\text{sign}[\gamma - \Omega(x)] = 1$ при $0 \leq x < h_1$, $\text{sign}[\gamma - \Omega(x)] = -1$ при $h_1 < x < h$ и $\gamma - \Omega(h_1) = 0$, ибо h_1 является корнем уравнения $\gamma - \Omega(x) = 0$.

Поэтому при аппроксимации $\Omega(x)$ согласно (10) напряжение $\sigma(x, t)$ будет монотонно возрастать с течением времени t со скоростью, зависящей от функции $\Omega(x)$, и при $t \rightarrow \infty$ стремиться к конечному предельному значению $\sigma(x, \infty) > \sigma(x, 0)$ при любом фиксированном значении x из $0 < x < h_1$, причем при $x \geq h_1 + 0$ имеем $\sigma(x, t) = \sigma(x, 0)$. Если же воспользоваться аппроксимацией (11), то $\sigma(x, t)$ будет монотонно убывать и при $t \rightarrow \infty$ стремиться к конечному предельному значению $\sigma(x, \infty) < \sigma(x, 0)$, когда $h_1 < x \leq h$, причем при $0 \leq x \leq h_1 - 0$ имеем $\sigma(x, t) = \sigma(x, 0)$.

Заметим, что соответствующая деформация $\varepsilon(x, t)$, определяемая формулой (34), непрерывно возрастает с течением времени t при любом значении x , принадлежащем полному отрезку $[0, h]$.

Если функцию $\Omega(x)$ не аппроксимировать и отпавляться от ее выражения согласно (8) на всем отрезке $[0, h]$, то полученные результаты можно применить для приближенного анализа напряженного состояния стержня при $0 \leq h_1 < h$ или соответственно при $0 < h_1 \ll h$. Случай, когда значение h_1 близко к $0,5h$, является самым неблагоприятным для применения. Однако и в последнем случае можно по-

строить качественно правильную картину распределения напряжений в стержне для различных фиксированных моментов времени (см. фиг. 1), если исходить из следующего свойства найденной выше функции $\sigma(x, t)$:



Фиг. 1.

$$\lim_{x \rightarrow h_1-0} \sigma(x, t) = \lim_{x \rightarrow h_1+0} \sigma(x, t) = \sigma(0, t), \text{ ибо } \lim_{x \rightarrow h_1-0} \Omega(x) = \lim_{x \rightarrow h_1+0} \Omega(x) = \gamma.$$

При этом только в одной точке $x = h_1$ отрезка $[0, h]$ стержень ведет себя подобно необлученному, в которой имеет место простая ползучесть, т. е. когда постоянному во времени напряжению отвечает возрастающая с течением времени деформация. В остальных точках полного отрезка $[0, h]$ изменяются во времени как напряжение, так и соответствующая ему деформация.

Днепропетровский горный институт

Поступила 30 III 1962

Մ. Ի. Ռոզովսկի

ՀԱՌԱԳԱՅԹՎԱԾ ԶՈՂԻ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴՐԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Ի. Մ.

Դիտարկված է (1) հալստարման հզորիտ լուծույթ գտնելու խնդիրը որի շնորհիվ ստացվում է հեծանում լարումների բաշխման ֆիզիկական

պատկերը և դեֆորմացիաների որոշումը կամալական t -ի համար, ներառյալ նաև $t \rightarrow \infty$ դեպքը: $\Omega(x)$ ֆունկցիան, որը հաշվի է առնում նյութի անհամաօրինակությունը՝ համաձայն (10)-ի կամ (11)-ի նախապես ենթադրվում է ապրոկսիմացիայի:

Յիդ խնդիրը լուծվում է մի մեթոդով, որն իրենից ներկայացնում է Պրնկերլե-Գալթայի մեթոդի (ըստ x կոորդինատի) և ինտեգրալ օպերատորային մեթոդի (ըստ t ժամանակի) սինթեզը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Задоян М. А. О задаче ползучести облученного стержня. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 4, 1961.
2. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. И. Л., М., 1960.
3. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М.-Л. 1950.
4. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, **12**, в. 1, 1948.
5. Розовский М. И. Некоторые задачи теории неустановившейся ползучести. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 3, 1961.

А. Г. Багдоев

Определение закона распределения давления, распространяющегося с дозвуковой скоростью

Рассматривается задача проникания давления в жидкость. Предположим, что скорость движения фронта давления по поверхности дозвуковая $R'(t) = V_0 < a_0$. Рассмотрим плоскую задачу. Выберем ось Ox по границе невозмущенной жидкости, ось Oy в глубь жидкости. Граничное условие для давления имеет вид

$$P(x, 0, t) = \begin{cases} P_1 & x < V_0 t \\ 0 & x > V_0 t \end{cases} \quad (1)$$

t — время, P_1 — постоянное давление на поверхности. Уравнение полноты имеет вид

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right], \quad (2)$$

где ρ — плотность, B , n — некоторые константы.

Введем полярные координаты r , θ . Имеем интеграл Лагранжа для потенциального движения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V_r^2 + \frac{1}{2} V_\theta^2 + \frac{a^2}{n-1} = \frac{a_0^2}{n-1} \quad (3)$$

и уравнение неразрывности [1]

$$\frac{dP}{dt} + \rho a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0, \quad (4)$$

где φ — потенциал скоростей, V_r , V_θ — проекции скорости на радиус-вектор и на перпендикуляр к нему, a — скорость звука:

$$a^2 = \frac{B n \rho^{n-1}}{\rho_0^n} = (n-1) \int \frac{dP}{\rho}.$$

Дифференцируя (3) по t полным образом и используя выражения для ускорений

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_r}{r \partial \theta}$$

$$\frac{dV_0}{dt} = \frac{\partial V_0}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_0}{\partial r} + V_\theta \frac{\partial V_0}{r \partial \theta}$$

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta},$$

получим [1] вместо (3) и (1) уравнение для потенциала скоростей

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} + 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} +$$

$$+ 2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} -$$

$$- a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

В силу автомодельности задачи, с заменой переменных $\frac{r}{t} = r_1$;

$\varphi = t \tilde{\varphi}(r_1, \theta)$ уравнение для потенциала движения запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial r_1^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} - r_1 \right)^2 - a^2 \right] + 2 \frac{1}{r_1^3} \left(r_1 - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 -$$

$$- \frac{1}{r_1^4} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \left(r_1 - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial r_1 \partial \theta} + \frac{1}{r_1^4} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - r_1^2 a^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} = 0 \quad (5)$$

$$a^2 = a_0^2 - \frac{(n-1)}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right)^2 - \frac{(n-1)}{2} \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - (n-1) \left(\tilde{\varphi} - r_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right). \quad (6)$$

Решение линейной задачи (5) и (1) найдено в [3] и записывается вблизи фронта в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 = -\gamma a_0^2 \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r_0}{a_0} \right)^{3/2} \sin \theta, \quad (7)$$

где $r_1 = r_0$, $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2} \frac{V_0}{a_0} \sqrt{2} \frac{2}{3}$ малая величина порядка $\frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$. Вблизи фронта волны $r_0 = a_0$ решение (7) имеет особенность. Поэтому нужно применять метод отыскания единого линеаризованного решения [2]. Решение (5) ищем, следуя [2], в виде

$$\tilde{\varphi} = \gamma \tilde{\varphi}_0(r_0, \theta) + \gamma^2 \tilde{\varphi}_1(r_0, \theta) + \dots$$

$$r_1 = r_0 + \gamma r'_1(r_0, \theta) + \gamma^2 r'_2(r_0, \theta) + \dots \quad (8)$$

Далее будет показано, что $r'_1 = \text{const} = 0$. С учетом этого, оставляя в уравнении (5) малые до третьего порядка γ включительно, получим

$$\left(\gamma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0^2} \right) \left(\gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} + \gamma^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} - r_0 - \gamma r'_1 - \gamma^2 r'_2 \right)^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & -a_0^2 + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right)^2 + \frac{n-1}{2} \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial \theta} \right)^2 + (n-1) \left(\tilde{\varphi} - r_1 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \Bigg] + \\
 & + \frac{2}{r_1^3} \left(r_1 - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 \left(r_1 - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial r_1 \partial \theta} + \\
 & + \frac{1}{r_1^4} \left[\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right)^2 - r_1^2 a^2 \right] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} - a^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_1} = 0.
 \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнении (9) в силу (7) особенность дает только слагаемое с $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$. Поэтому, чтобы исключить особенность, мы должны коэффици-

ент в скобках при $\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$ с первой степенью γ в точке $r_0 = a_0$ положить равным нулю. Имеем

$$- \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} - r_1' \right) 2r_0 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_0 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) = 0.$$

Отсюда следует, что при $r_0 = a_0$ имеем $r_1' = 0$. Итак, мы можем выбрать $r_1' = \text{const} = 0$. Перейдем теперь в (9) к пределу при $r_0 \rightarrow a_0$ и определим выражение $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0}$ в точке $r_0 = a_0$. Отличный от нуля предел дают первые и последние слагаемые в (9). С помощью (7) и (9) в точке $r_0 = a_0$ получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2} \Bigg] - \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} 2r_0 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_0 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} \right) \Bigg] - a_0^2 \frac{1}{r_0} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = 0$$

или

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \frac{n+1}{2} a_0 \sin^2 \theta. \quad (10)$$

Пусть $r_1 = M$ уравнение ударной волны, тогда из (2), удерживая малые второго порядка относительно $\frac{P}{Bn}$, легко получить соотношения на ударной волне

$$M = r_0' + \gamma^2 r_2(r_0', \theta) + \dots$$

$$\gamma \tilde{\varphi}_0(r_0', \theta) + \gamma^2 \tilde{\varphi}_1(r_0', \theta) + \dots = 0 \quad (11)$$

$$\gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} + \gamma^2 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \frac{2}{n+1} \left(M - \frac{a_0^2}{M} \right),$$

где r_0' значение r_0 на ударной волне.

Из первого и третьего уравнений (11), а также с помощью (7) получим

$$r'_0 - a_0 = -O(\gamma^2)$$

$$M - a_0 = O(\gamma^2)$$

Таким образом, в силу (7) $\tilde{\varphi}_0(r'_0, \theta)$ имеет порядок $O(\gamma^3)$. Из второго уравнения (11) имеем $\tilde{\varphi}_1(a_0, \theta) = -\gamma^{-1} \tilde{\varphi}_0(a_0, \theta) = 0$. В уравнении (9) в коэффициенте при $\gamma \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0^2}$ для уменьшения особенности приравняем нулю члены с γ^2 :

$$\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}\right)^2 - 2r_0 \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} - r_2\right) + \frac{n-1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0}\right)^2 + (n-1) \left(\tilde{\varphi}_1 - r_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0}\right) = 0$$

В пределе при $r_0 \rightarrow a_0$ получим:

$$r_2 = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} + \frac{n-1}{2} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial r_0} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 a_0 \sin^2 \theta.$$

Теперь из (7) получим на ударной волне

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_0}{\partial r_0} = \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \frac{r_2}{a_0}} a_0 \sin \theta = \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sin^2 \theta} a_0 \sin \theta.$$

Третье уравнение (11) запишется

$$\begin{aligned} \gamma \sin \theta \sqrt{1 - \frac{M}{a_0} + \gamma^2 \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \sin^2 \theta} \cdot a_0 + \gamma^2 \frac{n+1}{2} \sin^2 \theta \cdot a_0 = \\ = \frac{4}{n+1} \left(\frac{M}{a_0} - 1\right) a_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решая уравнение (12) относительно M , получим

$$M = a_0 + a_0 \frac{3}{16} (n+1)^2 \sin^2 \theta \cdot \gamma^2,$$

а для давления P на ударной волне по формуле

$$P = \rho_0 a_0 \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r_0} = \rho_0 a_0 \frac{2}{n+1} \left(M - \frac{a_0^2}{M}\right)$$

получим

$$P = 4\rho_0 a_0 \frac{3}{16} (n+1)^2 \sin^2 \theta \gamma^2,$$

где γ^2 определяется из (7). Таким образом, в отличие от линейного случая, давление на фронте отлично от нуля. Полученные выражения решают задачу определения ударной волны для изэнтропической задачи проникновения давления в случае, когда ударная волна не является присоединенной. Это решение годится как для дозвукового $V_0 < a_0$,

так и для сверхзвукового закона давления на поверхности. Оно имеет место всюду, не доходя до поверхности жидкости. При малых θ имеет место нерегулярное отражение и полученное решение не годится. В точке нерегулярного отражения $r_0 = a_0$, $\theta = 0$ решение получено автором в [4].

Мы следовали методу, развитому для одномерного случая в [2]. Поскольку производные по θ не играют роли при построении решения (обращаются в нуль на звуковой волне), все рассуждения [2] о применимости метода остаются в силе и для нашей задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 III 1962

Ա. Գ. Բաղդոս

ՄԻՆԶՁԱՅՆԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա. Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում որոշվում է ճնշման բաշխման օրենքը հարվածային հաղորդում, ոչ մեծ ճնշումների դեպքում: Խնդիրը լուծվում է փոքր զրգույնների մեթոդի օգնությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, М., 1955.
2. Проблемы механики, в. II, ИЛ, 1958.
3. Багдоев А. Г. Кандидатская диссертация. МГУ, 1959.
4. Багдоев А. Г. Уточнение закона распределения давления. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XV, № 3, 1962.

Л. А. Мовсисян

К нестационарным движениям реального газа в трубах

Будем рассматривать одномерное неустановившееся изотермическое движение вязкой сжимаемой жидкости при числах Маха $< 0,1-0,2$ в прямолинейных трубах постоянного сечения, которое описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{2D} v^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$p = \rho g R T \quad (T = \text{const}), \quad (3)$$

где v — средняя по сечению трубы скорость газа, ρ — средняя по сечению трубы плотность газа, p — среднее по сечению трубы давление газа, x — направление оси трубы, t — время, λ — коэффициент сопротивления, D — диаметр трубы, R — газовая постоянная, T — абсолютная температура газа, g — ускорение свободного падения.

При наличии (2) и (3) уравнение (1) можно привести к виду

$$\frac{1}{gRT} \frac{\partial p v}{\partial t} + \frac{1}{gRT} \frac{\partial p v^2}{\partial x} + \frac{\lambda}{2DgRT} p v^2 + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Легко видеть, что второе слагаемое левой части уравнения (4) по сравнению с последним пренебрежимо мало [2]. Действительно, с целью сопоставления можно переписать второй и последний члены уравнения (4) так

$$\frac{\partial}{\partial x} [p(1 + M^2)],$$

откуда видно, что при рассматриваемых скоростях $M^2 \ll 1$.

Умножив уравнение (4) (без второго слагаемого) на p и обозначив $p v = q$, получим

$$\frac{1}{gRT} p \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\lambda}{2DgRT} q^2 + p \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

С помощью (3) уравнение (2) при наличии принятого обозначения можно привести к виду

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

откуда видно, что существует такая функция $\psi(x, t)$, для которой имеют место следующие соотношения:

$$p = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}, \quad q = -\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}. \quad (7)$$

Подставляя значения p и q из (7) в уравнение (5), получим нелинейное дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{gRT} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) + \frac{\lambda}{2DgRT} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 = 0. \quad (8)$$

Составим условия однозначности.

В начальный момент ($t=0$) должны быть заданы p и q в функции от x . Следовательно, из соотношений (7) имеем следующие начальные условия для $\psi(x, t)$:

$$\psi(x, 0) = \int p(x, 0) dx, \quad \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = -q(x, 0). \quad (9)$$

Отметим, что функцию $\psi(x, t)$ можно определять с точностью до произвольной постоянной. Относительно граничных условий заметим, что если на концах трубы будут заданы p и q в функции от времени, то при составлении этих условий для ψ необходимо обратиться к соотношениям (7).

Легко видеть, что задание q эквивалентно заданию весового расхода газа Q через поперечное сечение s трубы. Действительно, пользуясь соотношением $Q = s\rho g v$, уравнением (3) и обозначением $p v = q$, получим

$$q = cQ \quad (c = RT/S = \text{const}). \quad (10)$$

Таким образом, исследование любого нестационарного движения вязкого газа в трубах (как в длинных, так и в коротких) с хорошим приближением свелось к решению нелинейного дифференциального уравнения (8) при соответствующих условиях однозначности. Следует отметить, что последнее является самым удобным (хотя сложным) уравнением для решения краевой задачи, ибо физические величины p и Q , которые обычно должны быть заданы на границе исследуемой области (x, t) , очень просто связаны с функцией $\psi(x, t)$ линейными соотношениями (7).

Если в работе [3] рассматривалось движение газа в длинных трубопроводах, что влекло за собой пренебрежение инерционным членом $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, а, следовательно, задача сводилась к решению квазилинейного уравнения параболического типа (назовем ее упрощенной задачей), то в данном случае задача сводится к решению квазили-

вейного уравнения гиперболического типа. Естественно ожидать, что эти две формы исследования движения должны дать качественно различные результаты.

Так, например, в упрощенной задаче в начальный момент достаточно было задаться или давлением $\left(\psi(x, 0) = \int p(x, 0) dx\right)$ или расходом $\left(Q(x, 0) = \text{const} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0}\right)$, ибо они удовлетворяли соотношению

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi(x, 0)}{\partial x^2} + a \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^2 = 0$$

Однако, в данном случае для однозначного решения задачи необходимо в начальный момент ($t=0$) задаваться как расходом, так и давлением, так как из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \psi(x, 0)}{\partial x^2} - \frac{1}{gRT} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \right]_{t=0} + \\ + \frac{\lambda}{2DgRT} \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right]_{t=0}^2 = 0 \end{aligned}$$

заданному $Q(x, 0) = \text{const} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0}$ может соответствовать не единственное $\psi(x, 0)$. Это значит, что настоящий путь исследования богаче решениями, чем предыдущий.

Упрощенная задача влечет за собой некоторые искажения физики процесса. Так, например, из решений, полученных в работе [3], видно, что влияние граничных возмущений для достаточно малых t сказывается на любом участке трубы, т. е. возмущения газа распространяются мгновенно в невозмущенную область. Конечно, при исследовании для достаточно больших интервалов времени, измеряемых не секундами или минутами, а часами, такая постановка задачи вполне может удовлетворить запросам практики.

В отличие от упрощенной задачи настоящий путь исследования позволяет решать аналогичные задачи методом характеристик.

Легко видеть, что уравнение (8) допускает два семейства неподвижных характеристических направлений

$$x \pm \lambda_1 t = \text{const} \quad (\lambda_1 = \sqrt{gRT}),$$

дифференциальные соотношения вдоль которых будут соответственно

$$p(dp \mp \lambda_1 dq) + bq^2 dx = 0 \quad \left(b = \frac{\lambda}{2DgRT}\right) \quad (11)$$

или в эквивалентной форме

$$p(p \pm \lambda_1 q)(dp \mp \lambda_1 dq) + bq^2 d\psi = 0,$$

откуда видно, что слабые возмущения газа распространяются со ско-

ростью $\sqrt{gRT}$, т. е. со скоростью звука (заметим, что в условиях изотермического режима скорость звука постоянна).

Следует отметить, что каждое из уравнений (11) является уравнением Пфаффа относительно переменных p, q, x (или p, q, ψ), левая часть которых допускает лишь форму вида

$$dS + VdW,$$

а следовательно, не может быть приведена к полному дифференциалу.

Для разрешения уравнений (11) вдоль соответствующих характеристик можно воспользоваться численными методами и этим решить поставленную задачу*.

Если в упрощенной задаче условие $q(x, 0) = \text{const}$ означает стационарность движения ($p^2 = \text{const} \cdot x + \text{const}$), то настоящий путь исследования не констатирует это утверждение.

Разумеется, что сказанное вполне может найти физическое объяснение.

Дело в том, что в упрощенной задаче движущаяся среда "лишена" инерционности и поэтому постоянство расхода по всему участку трубы влечет за собой стабильность всех параметров.

Иначе обстоит дело при настоящем исследовании. Допустим, что в некоторый момент времени ($t=0$) по всему участку трубы расход газа стал равным нулю (конечно, мы не утверждаем, что он был равен нулю и при $t < 0$), а давление стало некоторой функцией расстояния. После момента $t=0$ расход и давление газа в начале трубы ($x=0$) стали заданными непрерывными функциями времени, все производные которых непрерывны и равномерно ограничены. На заданные функции в дальнейшем будут наложены дополнительные ограничения.

Приведя уравнение (8) к безразмерным независимым переменным

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right)^2 = 0, \quad (12)$$

можем записать условия однозначности для поставленной задачи:

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi(\xi, 0)}{\partial \xi} = f(\xi), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\xi=0} = Q(\tau), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = P(\tau), \quad (15)$$

где $\xi = \frac{x}{L}$, $\tau = \frac{t}{\sqrt{\frac{L}{2DgRT}}}$, L — длина трубы, $c = \frac{2D}{\lambda L}$.

* Например, см. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, 2. Физматгиз, М., 1960.

Решение уравнения (12) при условиях (13), (14), (15) будем искать в виде бесконечного функционального ряда по степеням ξ

$$\psi(\xi, \tau) = \psi_0(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(\tau) \xi^n. \quad (16)$$

При наличии (14) и (15) определяются первые два члена ряда (16)

$$\frac{d\psi_0}{d\tau} = -Q(\tau), \quad \psi_1(\tau) = P(\tau). \quad (17)$$

Подставляя (16) в (17) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим бесконечную систему простых алгебраических уравнений относительно $\psi_i(\tau)$ ($i = 2, 3, \dots$)

$$2\psi_1\psi_2 - c\psi_1\psi_0'' + \psi_0''' = 0,$$

$$6\psi_1\psi_3 + 4\psi_2^2 - c(2\psi_2\psi_0'' + \psi_1\psi_1'') + 2\psi_0'\psi_1' = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

откуда при наличии соотношений (17) очень легко получить искомые функции через известные $\psi_0(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$

$$\psi_2(\tau) = \frac{1}{2\psi_1} (c\psi_1\psi_0'' - \psi_0'''),$$

$$\psi_3(\tau) = \frac{1}{6\psi_1} [c(2\psi_2\psi_0'' + \psi_1\psi_1'') - 4\psi_2^2 - 2\psi_0'\psi_1'],$$

$$\dots \dots \dots$$

(Штрихи обозначают производные по τ).

Нетрудно убедиться, что рекуррентная формула для $\psi_i(\tau)$ ($i = 2, 3, \dots$) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \psi_{n+2} = & \left[c \sum_{k=0}^n (k+1) \psi_{k+1} \psi_{n-k}'' - \sum_{k=1}^n (k+1)(n-k+1)(n-k+2) \times \right. \\ & \left. \times \psi_{k+1} \psi_{n-k} \psi_0'' - \sum_{k=0}^n \psi_k' \psi_{n-k}' \right] \frac{1}{(n+1)(n+2)\psi_1(\tau)}. \end{aligned} \quad (18)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$)

Так как искомые функции $\psi_i(\tau)$ определяются только из алгебраических (а не дифференциальных) соотношений (18), то, чтобы удовлетворить первому начальному условию (13), достаточно некоторым образом сузить класс допустимых граничных функций. Для этого поступим следующим образом.

Допустим, что все $\psi_i(\tau)$ [$i = 0, 1, 2, \dots, (n+1)$] являются функциями квадрата своего аргумента, т. е.

$$\psi_i = \psi_i(\tau^2).$$

Тогда из (18) легко видеть, что $\psi_{n+2}(\tau)$ также является функцией квадрата τ .

Поэтому, если в первом соотношении

$$\psi_2(\tau) = \frac{1}{2\psi_1} (c\psi_1\psi_0'' - \psi_0''^2)$$

ψ_0 и ψ_1 будут функциями квадрата своих аргументов, то (исходя из математической индукции) все последующие ψ_i ($i=2, \dots$), определяемые соотношениями (18), будут обладать этим же свойством.

Таким образом, если заданные функции будут иметь вид

$$Q(\tau) = \tau\psi_1(\tau^2), \quad P(\tau) = \psi_2(\tau^2),$$

то искомая функция $\psi(\xi, \tau)$, определяемая рядом (16), будет также функцией квадрата времени и поэтому будет удовлетворять первому условию (13).

К сожалению, при таком методе решения задачи функцию $f(\xi)$ (второе условие (13)) невозможно задать произвольно. Она может быть получена из решения (16) при $\tau=0$.

В работе [3] этим методом решалась изложенная задача. Однако, в отличие от настоящего исследования, условие $q(0)=0$ влекло за собой условие $p(\xi, 0)=p_0=\text{const}$.

Сопоставление двух полученных решений (сравнение соответственных функций ψ_i и ϕ_i) показывает, что величина инерционного члена $\partial q/\partial t$ прямо пропорциональна диаметру трубы и обратно пропорциональна сопротивлению и длине трубопровода, что вполне соответствует выводам проф. И. А. Чарного [2].

Для практики большое значение имеет решение задач при произвольных краевых условиях.

Поэтому (хотя и приближенно) решим такую задачу: в начальный момент ($t=0$) движение газа в трубе отсутствует, при $t>0$ на обоих концах трубы ($x=0$, $x=L$) давления газа — заданные непрерывные функции времени $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

Для поставленной задачи условия однозначности будут следующие:

$$\psi(x, 0) = p_0 x, \quad \left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \gamma_1(t), \quad (20)$$

$$\left. \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = \gamma_2(t). \quad (21)$$

Уравнение (8), которое можно представить в следующем виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{gRT} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{2DgRT} v \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

прежде всего линеаризуем. Скорость v , явно входящую в уравнение (22), примем постоянной (т. е. осредним как по x , так и по t). В результате получится линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - a_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (23)$$

где

$$a_1 = 1/gRT, \quad a_2 = \lambda v_{cp}/2DgRT.$$

Заметим, что для длинных трубопроводов произведенная линеаризация несколько искусственна. Однако, для коротких трубопроводов, при которых газ движется с линейным гидравлическим сопротивлением, сделанное допущение в некоторой мере оправдывает себя.

Решая уравнение (23) с условиями (19), (20), (21) операционным методом с применением преобразования Лапласа по времени, после ряда нетрудных математических операций получим значение $\psi(x, t)$ [4, 5]:

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = & p_0 x + p_0 \left\{ \frac{(L-x)^2}{2L} - \frac{x^2}{2L} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Psi_1(k_n, t) \times \right. \\ & \times \left[\cos \frac{n\pi(L-x)}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \right] \Bigg\} + \frac{1}{a_2 L} \int_0^t [\chi_2(\tau) - \chi_1(\tau)] d\tau + \\ & + \frac{x^2}{2L} \chi_2(t) - \frac{(L-x)^2}{2L} \chi_1(t) - \left(\frac{a_1}{a_2 L} + \frac{L}{6} \right) [\chi_2(t) - \chi_1(t)] + \\ & + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\chi_1(t) \cos \frac{n\pi x}{L} - \chi_2(t) \cos \frac{n\pi(L-x)}{L} \right] \Psi_2(k_n, t) + \\ & + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \int_0^t \left[\chi_2(\tau) \cos \frac{n\pi x}{L} - \chi_1(\tau) \cos \frac{n\pi(L-x)}{L} \right] \Psi_3(k_n, t-\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_1(k_n, t) &= \frac{\exp(k_{n+} t)}{k_{n+}(2a_1 k_{n+} + a_2)} + \frac{\exp(k_{n-} t)}{k_{n-}(2a_1 k_{n-} + a_2)}, \\ \Psi_2(k_n) &= \frac{1}{k_{n+}(2a_1 k_{n+} + a_2)} + \frac{1}{k_{n-}(2a_1 k_{n-} + a_2)}, \\ \Psi_3(k_n, t-\tau) &= \frac{\exp[k_{n+}(t-\tau)]}{2a_1 k_{n+} + a_2} + \frac{\exp[k_{n-}(t-\tau)]}{2a_1 k_{n-} + a_2}, \\ k_{n+} &= \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_1 \pi^2 n^2 / L^2}}{2a_1}; \quad k_{n-} = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_1 \pi^2 n^2 / L^2}}{2a_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Чтобы получить выражения для давления и расхода, необходимо обратиться к соотношениям (7) и (10), что не представляет особого труда.

Из (25) видно, что при изменении n от 1 до ∞ в шкале натуральных положительных чисел, k_n может принимать значения как действительные, так и комплексные (причем попарно сопряженные):

$$\text{при } n^2 < \frac{a_2^2 L^2}{4\pi^2 a_1} \quad k_n - \text{действительные,} \quad (26)$$

$$\text{при } n^2 > \frac{a_2^2 L^2}{4\pi^2 a_1} \quad k_n - \text{комплексные.} \quad (26')$$

Из (24) легко видеть, что действительным k_n соответствуют затухающие экспоненциальные функции времени. Простыми вычислениями можно получить члены, соответствующие комплексным k_n :

$$\Psi_1(k_n, t) = -\frac{L^2}{h n^2 \pi^2} \left(h \cos \frac{h}{2a_1} t + a_2 \sin \frac{h}{2a_1} t \right) \exp \left(-\frac{a_2 t}{2a_1} \right),$$

$$\Psi_2(k_n) = \frac{L^2}{n^2 \pi^2},$$

$$\Psi_3(k_n, t - \tau) = \frac{2}{h} \left[\sin \frac{h}{2a_1} (t - \tau) \right] \exp \left[-\frac{a_2}{2a_1} (t - \tau) \right],$$

где

$$h = \sqrt{4a_1 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} - a_2^2},$$

откуда видно, что комплексным k_n в решении соответствуют затухающие периодические функции времени (синусы и косинусы).

Таким образом, полное решение выражается суммой конечного числа первых членов с экспоненциальными функциями и суммой бесконечного числа членов с периодическими функциями.

Если представить, что трубопровод достаточно длинный (что дает возможность получить сравнительно больше членов, соответствующих действительным k_n), то, как видно из (25), решение в основном будет содержать затухающие экспоненциальные функции, а периодические функции будут составлять лишь остаток всей суммы (заметим, что полученные ряды быстро сходятся, т. е. их первые слагаемые составляют основное ядро всей суммы). Следовательно, чем длиннее трубопровод, тем существеннее закон экспоненциального затухания.

С другой стороны, из (26) видно, что если комбинация $\frac{a_2^2 L^2}{4\pi^2 a_1}$ будет меньше единицы, то при $1 \leq n < \infty$ решение будет содержать лишь затухающие периодические функции, ибо в этом случае в формулу (24) войдут только комплексные k_n .

Следовательно, при $L < \frac{2\pi\sqrt{a_1}}{a_2} = \frac{4\pi D\sqrt{gRT}}{\lambda v_{cr}}$ (что тоже $a_2^2 L^2 / 4\pi^2 a_1 < 1$) решение будет выражаться затухающими синусоидами и косинусоидами.

Таким образом, из анализа полученного решения создается видимость, что качество нестационарного движения зависит от отклонения длины трубопровода в ту или иную сторону от некоторой критической величины.

Однако, мы не будем утверждать, что это так.

Возможно, что это есть результат метода решения, а не сущности процесса.

Напомним, что в данной работе не делаются никакие ограничения относительно длины трубопровода. Инерционный член $\frac{\partial q}{\partial t}$ в уравнении движения (5), который, вообще говоря, будет пренебрежимо малым для длинных трубопроводов [2], не отбрасывается, что дает возможность получить решения (хотя и приближенные) для трубопроводов любой длины.

В линеаризованной теории движения реального газа в длинных трубопроводах в основном получаются уравнения параболического типа [2, 6, 7]. Однако, в данном случае наличие члена $\frac{\partial q}{\partial t}$ дает возможность получить уравнение гиперболического типа, что, разумеется, должно дать качественно другое решение.

В заключение дадим приближенный метод определения средней скорости v_{cr} , исходя из граничных условий.

Для простоты выкладок определим среднюю квадратичную скорость по времени и по пространственной координате. Предположим, что функции $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ такие, что на всем протяжении нестационарного процесса скорость газа не меняет своего направления ($\chi_1(t) > \chi_2(t)$), и после некоторого конечного момента времени $t_1 > 0$ практически прекращается движение газа в трубопроводе, т. е. $v(x, t_1) = 0$.

Уравнение (1) (без инерционного члена) представим в виде

$$-v^2 = \frac{2D}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2DgRT}{\lambda} \frac{\partial \ln p}{\partial x}$$

Интегрируя это уравнение с применением условий (19), (20), (21) последовательно в промежутках $(0, L)$ и $(0, t_1)$, получим искомое число

$$v_{cr} = \left[\frac{1}{Lt_1} \int_0^L dx \int_0^{t_1} v^2 dt \right]^{1/2} = \left[\frac{2DgRT}{\lambda Lt_1} \int_0^{t_1} \ln \frac{\chi_1(t)}{\chi_2(t)} dt \right]^{1/2}$$

Լ. Ա. Մովսեսյան

ԽՈՂՈՎԱԿՆԵՐՈՒՄ ՌԵԱԼ ԳԱԶԻ ՈՋ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ
ՇԱՐԺՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա հոդվածում խողովակներում, մածուցիկ գազի ոչ ստացիոնար իզոթերմ շարժման (1), (2) և (3) հաճախությունները (7) առնչությունների միջոցով րերվում են (8) հիպերբոլական տիպի ոչ զմային հաճախությունը (19), (20) և (21) միակրթյան պայմանների դեպքում լուծվում է մի խնդիր, որի համար (8)-ը զմայնացվում և րերվում է հաստատուն գործակիցներով (23) զմային հաճախությունը: Լուծումը կատարվում է օպերացիոն հաշվի մեթոդով [4, 5], $\varphi(x, t)$ ֆունկցիայի համար ստացվում է (24) բանաձևը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Христианович С. А. и др. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, М.-Л., 1938.
2. Чарный И. А. Неустойчившееся движение реальной жидкости в трубах. ГНТИ, М.-Л., 1957.
3. Мовсесян Л. А. К теории неустойчившегося движения реальной сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, № 3, 1961.
4. Карлау Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. ИЛ, М., 1948.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. Е. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
6. Мовсесян Л. А. О неустойчившемся движении сжимаемой жидкости в длинных трубопроводах. Инженерно-физический журнал, № 1, 1961.
7. Мовсесян Л. А. Истечение реальной сжимаемой жидкости из длинного трубопровода. Труды первой закавказской конференции молодых научных сотрудников, Ереван, 1960.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. М. Арутюнян, Э. В. Чубарян

О реакции $\pi^- + p \rightarrow n + e^+ + e^-$

Изучению реакции

$$\pi^- + p \rightarrow n + e^+ + e^- \quad (1)$$

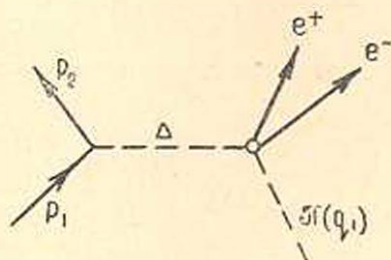
посвящен ряд теоретических и экспериментальных работ. Отношение

$$R_1 = \frac{\pi^- + p \rightarrow n + e^+ + e^-}{\pi^- + p \rightarrow n + \gamma} \quad (2)$$

многократно измерялось в водородных пузырьковых камерах, помещенных в магнитное поле [1, 2]. Коэффициент конверсии R_1 можно вычислить теоретически, не вдаваясь в детали мезонной теории [3, 4]. Необходимо отметить, что имеется хорошее согласие экспериментальных результатов с теоретическими предсказаниями.

В настоящей работе реакция (1) изучается в предположении о наличии резонанса в системе двух π -мезонов (биннион). Аналогично методу Чью и Лоу [5], сечение рассматриваемой реакции выражается через сечение аннигиляции $\pi^- + \pi^+ \rightarrow e^- + e^+$. Показано, что двумерное распределение сечения по передаваемому импульсу и энергии пары $e^+ - e^-$ имеет резонанс, соответствующий резонансу $\pi - \pi$ системы.

Согласно сказанному выше, выделим среди всевозможных графиков, соответствующих реакции (1), полюсной график, указанный на фиг. 1.



Фиг. 1.

Как показали Чью и Лоу [5], в области малых передаваемых импульсов ($\Delta^2 \sim p^2$) данный график будет давать преобладающий вклад в сечение, которое можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \Delta^2 \partial \omega^2} = \frac{f^2}{2\pi} \frac{\Delta^2 / \mu^2}{(\Delta^2 + \mu^2)^2} \frac{\omega (\omega^2/4 - \mu^2)^{1/2}}{q_{1L}^2} \sigma_{\pi e}(\omega), \quad (3)$$

где $f^2 = 0,087$ — постоянная сильного взаимодействия, ω — полная энергия пары $e^+ - e^-$ в собственной системе центра масс, μ — масса π -мезона, q_{1L} — импульс падающего мезона в лабораторной системе, $\sigma_{\pi e}(\omega)$ — полное сечение процесса

$$\pi^- + \pi^+ \rightarrow e^- + e^+ \quad (4)$$

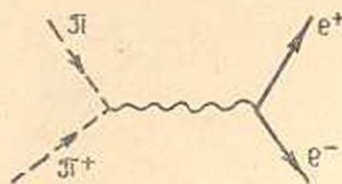
В дальнейшем мы будем предполагать существование $\pi - \pi$ -резонанса в P -состоянии с полным изотопическим спином единица. Для феноменологического учета этого резонанса введем векторное мезонное поле $B_\mu^{(\gamma)}(x)$ [6] (γ — характеризует изотопическое состояние B -мезона и равно 1, 2, 3). Энергия взаимодействия B -поля с фотоном и B -поля с π -мезонами соответственно имеет вид

$$L_1 = \Lambda_1 A_\mu(x) B_\mu^{(3)}(x), \quad (5)$$

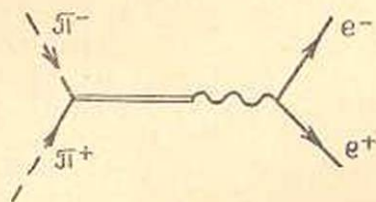
$$L_2 = \Lambda_2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \Phi_\alpha(x) \frac{\partial \Phi_\beta(x)}{\partial x_\gamma} B_\mu^{(\gamma)}(x). \quad (6)$$

Постоянная Λ_2 просто связана с шириной $\pi - \pi$ -резонанса, а Λ_1 можно связать с размером нуклона (взаимодействие (5) дает вклад в форм-факторы нуклона, см. [6]).

Согласно (5) и (6) процессу (4) будут соответствовать графики, указанные на фиг. 2 и 3. На фиг. 3 жирная линия соответствует B -мезону.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

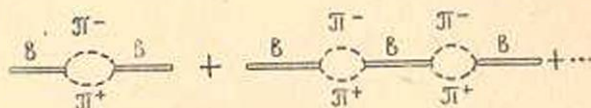
График 3 имеет реальный полюс при $\omega^2 = m_B^2$. Чтобы избежать бесконечного значения сечения в этой точке, добавим к знаменателю функции распространения B -мезона мнимую поправку im_B/τ_B , что соответствует неустойчивости B -мезона [7] (m_B — масса, τ_B — время жизни нейтрального бипиона). Такое видоизменение функции распространения эквивалентно суммированию бесконечного ряда цепочек, приведенных на фиг. 4 [8].

Опуская выкладки, приведем выражение для полного сечения процесса (4)

$$\sigma_{\pi e}(\omega) = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{\hbar}{\mu c} \right)^2 |F_\pi|^2 x^{-1} \left(1 + 2 \frac{m^2}{\mu^2} x^{-1} \right) (1 - 4x^{-1})^{1/2} \times \\ \times \left(1 - 4 \frac{m^2}{\mu^2} x^{-1} \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где $x = \omega^2/\mu^2$, m — масса электрона, а

$$F_\pi = 1 - \frac{\Lambda_1 \Lambda_2}{e(\omega^2 - m_B^2 + im_B/\tau_B)}. \quad (8)$$



Фиг. 4.

Формула (8) имеет резонансный характер при $\omega^2 = m_B^2$. Как видно из (8), m_B/τ_B характеризует ширину резонанса (равна ширине $\pi-\pi$ -резонанса). Входящее сюда τ_B характеризует время жизни B -мезона по отношению к распаду $B^{(3)} \rightarrow \pi^- + \pi^+$ и равно

$$\tau_B = \frac{6\pi m_B^2}{\Lambda_2^2(m_B^2/4 - \mu^2)^{3/2}}. \quad (9)$$

Необходимо заметить, что распад $B^{(3)} \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ запрещен, так как система $2\pi^0$ не может находиться в состоянии с полным изотопическим спином единица.

Физический институт

АН Армянской ССР,

Ереванский государственный университет

Поступила 22 I 1962

Վ. Մ. Հաղարյան, Է. Վ. Չախուրյան

$\pi^- + p \rightarrow n + e^+ + e^-$ ՌԵԱԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Վ. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոդվածում դիտարկված է $\pi^- + p \rightarrow n + e^+ + e^-$ սեղանի տևողական և զանգված, երբ $\pi-\pi$ սխառնումը զուգակցվում է ունի սեղանի տևողական և զանգված է պրոցեսի լատինական կտրվածքը իսխանցման իմպուլսների փոքր արժեքների դեպքում: Ցույց է տրված, որ սեղանի փոքր զանգվածի մասնիկների բաշխումն ըստ էներգիայի ունի սեղանի տևողական բնույթ:

ЛИТЕРАТУРА

1. Derrick M., Fetkovich I. G., Fields T. H. and Deahl I. Internal pairs following π^- -capture in hydrogen. Proceedings of the International Conference on High Energy Physics at Rochester, p. 32, 1960.
2. Samios N. P. Dynamics of internally converted electron-positron pairs. Proceedings of the International Conference on High Energy Physics at Rochester, p. 35, 1960.
3. Kroll N. N. and Wada W. Internal Pair Production Associated with Emission of High Energy Gamma Rays. Phys. Rev. 98, 1355, 1955.

4. Joseph D. W. Electron Pair Creation in $\pi^- + p$ Capture Reactions from Rest. *Nuovo Cimento*, 16, 997, 1960.
5. Chew G. F. and Low F. E. Unstable Particles as Targets in Scattering Experiments. *Phys. Rev.* 113, 1640, 1958.
6. Соловьев Л. Д., Чже-Цун Мо. О феноменологическом учете $\pi\pi$ взаимодействия. Препринт ОИЯИ, Д-774.
7. Matthews P. T. and Salam A. Relativistic Theory of Unstable Particles. *Phys. Rev.*, 115, 1079, 1959.
8. Minami S. K. Meson-Pion Interaction and $K^- + p \rightarrow K^0 + \pi^- + p$ Reaction. *Prog. Theor. Phys.*, 26, 356, 1961.

Ռ.Ս.ԴԻՈՑԻՋԻԿԱՅ.

Հ. Ս. Մերկյան

ԳԾԻ ՌԵՍՈՆԱՆՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Գծի ռեսոնանսիությունը՝ առաջարկվող մոտեցմամբ տրվում է գծի լարման անդրադարձման գործակցի բանաձևի տրամադմամբ ցանկացած դեպքի համար:

1. Գծի ռեսոնանսիությունը՝ լարման և հոսանքի հասկացողությունների վրա հիմնված եղանակի համեմատությամբ, Մաքսվելի հավասարումների վրա հիմնված եղանակը, մոտեցման խստության տեսակետից, նախընտրելի է: Սակայն որոշ հարցերում (օրինակ՝ լարման անդրադարձման p_u գործակցի տրամադմամբ ցանկացած դեպքի համար) առաջանում են մաթեմատիկական զրգվարություններ (որոնք նշված դեպքում կապված են սահմանային պայմանների հետ), ուստի դիմում են նախորդ եղանակին կամ դիտարկում են միայն մասնավոր դեպքեր^{*}:

Ստորև կարտածենք լարման անդրադարձման գործակցը ցանկացած դեպքի համար՝ օգտվելով Մաքսվելի հավասարումներից և կիրառելով առաջարկվող մոտեցումը, որը հիմնված է Մաքսվելի հավասարումների և լիցքի ու էներգիայի պահպանման օրենքների (որոնք անբացահայտ կերպով պարունակվում են այդ հավասարումների մեջ) զուգորդման վրա, ընդ որում p_u գործակցին արտածելու համար բավական է լինում կիրառել էներգիայի պահպանման օրենքը, իսկ ալիքային դիմադրությունն արտածելու համար՝ լիցքի պահպանման օրենքը:

Հասկանալի է, որ գծի ռեսոնանսիությունը ալիքային մոտեցումը նախընտրելի է գծում անդի ունեցող պրոցեսները դիտարկելու և արտածվող մեծությունների ֆիզիկական իմաստը պարզաբանելու տեսակետից:

2. Պարզության համար դիտարկենք համառոտեցք դիմ (գծ. 1), որի մուտքում գործում է

$$u = U_1 \cos \omega t$$

լարումը, իսկ ելքում միացված է Z կոմպլեքս դիմադրություն (Z -ը կարող է ներկայացնել ցանկացած բևեռ):

Փլանային կոորդինատների սխեմայի (ρ, ψ, z) Օշ առանցքը համասեղենք գծի առանցքի հետ: Փլանների միջև եղած տարածությունում դիէլեկտրիկ հաստատունը նշանակենք ε , մագնիսական թափանցիկությունը՝ μ :

Կազմելով դիֆերենցիալ հավասարումներ $\vec{A}$ վեկտոր-պոտենցիալի և $\vec{\varphi}$ սկալյար պոտենցիալի համար և լուծելով այդ հավասարումները, ընդհանուր

* Ա.Ջ. Տլետեր, «Передача УК радиоволн» գրքում տրված է p_u գործակցի արտածումը երկու մասնավոր դեպքում:

հետքում ստանում ենք, ինչպես հայտնի է, երկու ալիք (ուղիղ և հակադարձ)։
 Ուղիղ ալիքի համար ստացվում են հետևյալ հավասարումները (ժամի ու
 Մաքսվելի հավասարումները դնելիս են, ապա ուղիղ և հակադարձ ալիքները

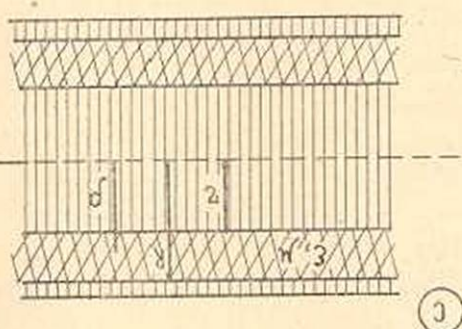
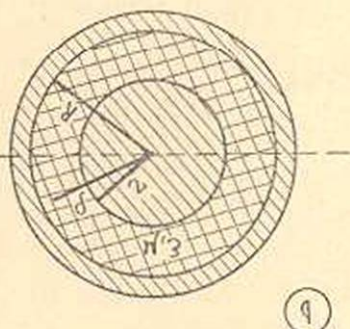
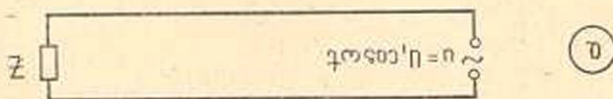
կարելի է դիտարկել տասնվեց-ասանվելի)։

$$H_z = \frac{c k}{U_1} \frac{r}{\rho} \ln \frac{r}{\rho} \cos(\omega t - kz), \quad H_\rho = 0, \quad H_\phi = 0$$

$$E_\phi = 0, \quad E_\rho = -\frac{U_1}{R} \frac{r}{\rho} \ln \frac{r}{\rho} \cos(\omega t - kz), \quad E_z = 0$$

որտեղ c -ն ընկալադրվածության հաստատունն է,

$$k = \frac{c}{\omega} \sqrt{\mu \epsilon},$$



առնելով (3), միտքով հեշտաբանորեն կարելի է գտնել

$$\mathcal{E} = \int_R^r S_z dz$$

և արդյունքում կստանանք

$$S_z = \frac{c}{U_1} \ln \frac{r}{\rho}$$

որտեղ S_z -ն էլ էլեկտրական թափումը (որտեղից էլ հետագայում կստանանք)։

$$S_z = 0, \quad S_\rho = 0, \quad S_\phi = 0, \quad S_z = \frac{c k}{\omega} \frac{r}{U_1} \ln \frac{r}{\rho} \cos(\omega t - kz)$$

(2)-ում տեղադրելով S_z -ի արտահայտությունը և կատարելով համապատասխան գործողություններ, կստանանք

$$\Theta_1(z, t) = \frac{U_1^2 \cos^2(\omega t - kz)}{W}, \quad (3)$$

որտեղ

$$W = \frac{1}{c} 2 \ln \frac{R}{r} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{2\mu \ln \frac{R}{r}}{\varepsilon}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

ներկայացնում է գծի ալիքային դիմադրությունը (L_0 և C_0 -ն, համապատասխանաբար, գծի միավոր երկարության ինդուկտիվությունն ու ունակությունն)։

Նման ձևով կարող ենք ստանալ հակադարձ ալիքով վերադարձող հզորությունը՝

$$\Theta_2(z, t) = \frac{U_2^2 \cos^2(\omega t + kz + \pi)}{W},$$

որտեղ U_2 -ը հակադարձ ալիքի լարման ամպլիտուդն է։

Դիտարկենք գծի ելքը։ Ուղիղ ալիքի լարման կոմպլեքս ամպլիտուդը նշանակենք $\dot{U}_1$, հակադարձ ալիքինը՝ $\dot{U}_2$ ։ Ուղիղ ալիքով տարվող հզորությունը հավասար է հակադարձ ալիքով վերադարձող հզորության և գծի ելքում կլանվող հզորության գումարին՝

$$\frac{(\dot{U}_1 e^{i\omega t})^2}{W} = \frac{(\dot{U}_2 e^{i\omega t})^2}{W} + \frac{(\dot{U}_1 e^{i\omega t} + \dot{U}_2 e^{i\omega t})^2}{Z},$$

որտեղից ստանում ենք

$$\dot{p}_a = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{Z - W}{Z + W}, \quad (4)$$

եթե, մասնավորապես, դիտարկվող գծի ելքում միացված է մի ուրիշ գիծ $\dot{W}_1$ ալիքային դիմադրությամբ, ապա (4)-ից կստանանք՝

$$\dot{p}_u = \frac{\dot{W}_1 - W}{\dot{W}_1 + W},$$

3. Համառոտության համար, չկատարելով ալիքային դիմադրության արտածումը, սահմանափակվում ենք հետևյալով։

Անկորուստ գծի համար, ինչպես ցույց է տալիս (3) արտահայտությունը, W -ն բնորոշում է էներգիայի տարածումը, ոչ թե կլանումը (չնայած, որ լարման և հոսանքի ֆազերը համընկնում են)։ Իսկ հետևանք է այն բանի, որ հոսանքաղծերն ու էլեկտրական դաշտի լարվածության գծերն ամենուրեք փոխուղղահայաց են։ Այդ պայմանը կարող է խախտվել էլեկտրական դաշտի՝

հաղորդչի մեջ թափանցելու և լիցքավորումների (утечки) առկայության դեպքում:

ՀՅՄՌ ԳԱ

Ֆիզիկա-մաթեմատիկական լաբորատորիա

Ստացված է 31 1962

Օ. Տ. Երիցյան

Об исследовании линии

РЕЗЮМЕ

При исследовании линий методом, основанным на уравнениях Максвелла, в некоторых вопросах возникают математические трудности (например, при выводе коэффициента отражения для произвольного случая), поэтому рассматривают только частные случаи.

В статье дается вывод коэффициента отражения для произвольного случая по подходу исследования линий, сущность которого заключается в сочетании уравнений Максвелла с законами сохранения заряда и энергии (которые в неявном виде содержатся в уравнениях Максвелла).

Этот подход, по нашему мнению, предпочтителен для более детального изучения физических процессов, происходящих в линиях и выяснения физического смысла выводимых величин.

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Харкевич А. А. Теоретические основы радиосвязи. Гостехиздат, М., 1957.
2. Слэтер Дж. Передача УВЧ. Госиздат, 1947.
3. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Физматгиз, М., 1960.