ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

Г. В. Бадалян

# Обобщенно регулярно монотонные функции

Определение 1. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу обобщенно регулярно монотонных функций при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, короче– классу $R_\gamma$ на множестве $M$, $0\overline{\in} M$, если там существует последовательность функций

$$\varphi(t)=\varphi_0(t),\quad \varphi_1(t)=\varphi'(t),\quad \varphi_{k+1}(t)=\left(\frac{\varphi_k(t)}{|t|^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)',\qquad (1)$$

$$k=1, 2, \ldots,$$

где

$$0=\gamma_0<\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\cdots\leqslant\gamma_n<\cdots\qquad (2)$$

и удовлетворяются условия

$$(-1)^k\varphi_k(t)\geqslant 0.\qquad (3)$$

В качестве множества $M$ рассматривается промежуток $(0, u]$ и соответствующий класс обобщенно монотонных функций обозначается через

$$R_\gamma(0, u].$$

Определение 2. Условимся говорить, что функция $\varphi(t)$ на промежутке $(0, u]$ принадлежит классу функций

$$T_\gamma\,(T_\gamma(0, u]),$$

если она разлагается в сходящийся на $(0, u]$ квазистепенной ряд

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right),\qquad (4)$$

где

$$0<t\leqslant u,\quad a_0=\varphi(u),$$

$$a_k=\frac{(-1)^k u^{\gamma_{k-1}+1}\varphi_k(u)}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu},\qquad k=1, 2, \ldots,$$

последовательность $\{\gamma_\nu\}$ определена в (2),

$$\omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

простой контур $C$ здесь и впредь в аналогичных случаях охватывает окрестности всех полюсов подинтегральной функции.

Определение 3. Условимся говорить, что функция

$$\varphi(t) \in AT_\gamma(0, u],$$

если она в промежутке $(0, u]$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд (4).

В работах [1], [2] получены достаточные условия, а в [3] — необходимое и достаточное условие принадлежности функции $\varphi(t)$ классу $T_\gamma(0, u]$.

В настоящей работе дается аналитическая (квазианалитическая) характеристика функций класса $R_\gamma(0, u]$, классифицируются функции $\varphi(t) \in R_\gamma(0, u]$ в зависимости от быстроты роста последовательности $\{\gamma_\nu\}$, а также приводится необходимое и достаточное условие принадлежности функции классу $AT_\gamma(0, u]$ в терминах функций класса $R_\gamma(0, u]$.

## § 1. Аналитическая (квазианалитическая) характеристика функций класса $R_\gamma(0, u]$

Предварительно сформулируем два вспомогательных предложения, первое из которых доказано в [4] (в лемме 1 теоремы 1).

Лемма 1. *Для всяких $\theta_1, \theta > 0$ справедливо равенство*

$$\omega_n(\theta_1, \gamma) = \omega_n(\theta, \alpha), \tag{1.1}$$

*где*

$$\alpha_\nu = \gamma_\nu \frac{\ln \theta_1}{\ln \theta}, \qquad \nu=0, 1, 2, \ldots .$$

Лемма 2. *Для всякого $0 < t \leqslant u$ и последовательностей чисел $\{\alpha_\nu\}$, $\{\gamma_\nu\}$, где $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots$, $\alpha_\nu \geqslant \gamma_\nu$, $\nu=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство*

$$\frac{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)}{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)} \leqslant \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu}}, \tag{1.2}$$

*где $r > 0$ — произвольное число.*

Для доказательства леммы поступаем так, как это сделано в [4], т. е. представляем $\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)$ обобщенной формулой Тейлора при последовательности $\{\alpha_\nu\}$.

Будем иметь

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=a_n\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+$$

$$+\int\limits_u^t dt_0\,\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\prod_{\nu=1}^n\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,u^z t_0^{-z-\alpha_n-1}\,dz\times$$

$$\times\frac{(-1)^n t_0^{\alpha_n}\prod\limits_{\nu=1}^n\alpha_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^n(\zeta+\alpha_\nu)},$$

где контуры $C$ и $C'$ охватывают соответственно окрестности полюсов подинтегральных функций.

Заметим далее, что

$$a_n=u^{\alpha_{n-1}+1}\varphi_n(u)_\alpha\prod_{\nu=1}^n\alpha_\nu^{-1}.$$

Здесь $\varphi_n(t)_\alpha$ представляет $n$-ую обобщенную производную функции $\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)$ по $t$ при последовательности $\{\alpha_\nu\}$.

Получаем

$$a_n=\frac{(-1)^n\prod\limits_{\nu=1}^n\gamma_\nu}{\prod\limits_{\nu=1}^n\alpha_\nu}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^{n-1}\frac{\zeta+\alpha_\nu}{\zeta+\gamma_\nu}\,\frac{d\zeta}{\zeta+\gamma_\nu}=\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}.$$

Это значит, что

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+$$

$$+\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\int\limits_u^t dt_0\,\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^n\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,u^z t_0^{-z-1}\,dz\,\frac{(-1)^n\prod\limits_{\nu=1}^n\alpha_\nu}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^n(\zeta+\alpha_\nu)},$$

или

$$\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)=\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u},\ \alpha\right)+\prod_{\nu=1}^n\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\int\limits_t^u\omega_n\left(\frac{t}{t_0},\ \alpha\right)I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}\,dt_0,\quad(1.3)$$

где

$$I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\prod_{\nu=1}^n\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\left(\frac{t_0}{u}\right)^{-z}dz.$$

Из теоремы 3 работы [5] следует, что при $0 < t_0 < u$

$$I_n\left(\frac{t_0}{u}\right) > 0.$$

Используя последнее неравенство из (1.3) получаем

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) < \prod_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\,\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left[1+\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0\right]. \tag{1.4}$$

Заметим теперь, что для произвольного $r > 0$ имеем

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 = \int_t^u t_0^{-r}\,dt_0\,\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}u^z t_0^{-z+r-1}dz \leq$$

$$\leq t^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}u^z\,\frac{t_0^{-z+r}\Big|_{t_0=t}^{u}}{-z+r}dz =$$

$$= t^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+\alpha_\nu}{z+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}t^r}{z-r}\,dz - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

После замены $z - r = z'$ получим

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 \leq \frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z-r}}{z}\,dz - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} =$$

$$= \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}dz}{z} - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

Таким образом получаем, что

$$\int_t^u I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1}dt_0 \leq \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} I_n^*\left(\frac{t}{u}\right) - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}, \tag{1.5}$$

где

$$I_n^*\left(\frac{t}{u}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\prod_{\nu=1}^{n}\frac{z+r+\alpha_\nu}{z+r+\gamma_\nu}\,\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-z}}{z}\,dz,$$

причем

$$\frac{\partial I_n^*\left(\frac{t_0}{u}\right)}{\partial t_0} = -I_n\left(\frac{t_0}{u}\right)t_0^{-1} < 0.$$

Следовательно,

$$I_n^{\bullet}\left(\frac{t_0}{u}\right) < I_n^{\bullet}(0) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu}, \tag{1.6}$$

где $0 < t_0 < u$.

Из (1.4) в силу (1.5) и (1.6) получаем

$$\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left[1 + \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} I_n^{\bullet}\left(\frac{t}{u}\right) - \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\right] <$$

$$< \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)\left\{\left(\frac{t}{u}\right)^{-r} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} - \left[\left(\frac{t}{u}\right)^{-r} - 1\right]\right\} <$$

$$< \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r} \omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right),$$

т. е.

$$\frac{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \gamma\right)}{\omega_n\left(\frac{t}{u}, \alpha\right)} < \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r+\alpha_\nu}{r+\gamma_\nu} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}.$$

Этим лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Всякая функция*

$$\varphi(t) \in R_\gamma(0, u],$$

*принадлежит также классу*

$$T_\gamma(0, u],$$

*если только последовательность чисел*

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$$

*удовлетворяет еще условию*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty. \tag{1.7}$$

Теорема будет доказана, если покажем, что в представлении

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega_k^{\bullet}\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) + R_n(u, t), \tag{1.8}$$

где

$$a_0 = \varphi(u), \quad a_k = u^{\gamma_{k-1}+1} \varphi_k(u), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\omega_k^{\bullet}\left(\frac{t}{u}, \gamma\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{k} (\zeta + \gamma_\nu)},$$

остаточный член

$$R_n(u,\ t)=\int_u^t \varphi_n(t_0)\ t_0^{\gamma_{n-1}}(-1)^{n-1}\omega_{n-1}^*\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)dt_0$$

при $t\in(0,\ u]$ и $n\to\infty$ стремится к нулю.

С этой целью заметим, что для всякого $0<x<t<u$ имеем

$$0\leqslant R_n(u,\ t)=\int_t^u(-1)^n\varphi_n(t_0)\ t_0^{\gamma_{n-1}}\omega_{n-1}^*\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)dt_0\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t_0\in[t,\ u]}\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)}\int_t^u(-1)^n\varphi_n(t_0)\ t_0^{\gamma_{n-1}}\omega_{n-1}^*\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)dt_0\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t_0\in[t,\ u]}\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)}\int_x^u(-1)^n\varphi_n(t_0)\ t_0^{\gamma_{n-1}}\omega_{n-1}^*\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)dt_0$$

или

$$0\leqslant R_n(u,\ t)\leqslant\sup_{t_0\in[t,\ u]}\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)}R_n(u,\ x),\tag{1.9}$$

но

$$0\leqslant R_n(u,\ x)\leqslant\sup_{t\in[x,\ u]}\varphi(t)=\varphi(x),$$

так как

$$0\leqslant R_n(u,\ x)=\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n-1}a_k\omega_k^*\left(\frac{x}{u},\ \gamma\right),$$

где

$$a_k\geqslant 0,\qquad \omega_k^*\left(\frac{x}{u},\ \gamma\right)\geqslant 0.$$

Это значит, что дальнейшая оценка $R_n(u,\ t)$ сводится к оценке

$$\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{x}{t_0},\ \gamma\right)}=\frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0},\ \alpha\right)}.$$

где

$$\alpha_\nu = \gamma_\nu \frac{\ln \frac{t_0}{x}}{\ln \frac{t_0}{t}}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, получаем

$$0 < R_n(u, t) \leqslant \varphi(x) \sup_{t_0 \in [t, u]} \frac{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \gamma\right)}{\omega_{n-1}\left(\frac{t}{t_0}, \alpha\right)}, \tag{1.10}$$

или, в силу леммы 2,

$$0 \leqslant R_n(u, t) < \varphi(x) \prod_{\nu=1}^{n-1} \frac{1 + \frac{r}{\alpha_\nu}}{1 + \frac{r}{\gamma_\nu}} \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}. \tag{1.10'}$$

Нам теперь остается заметить, что в силу расходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu}$$

$\lim_{n \to \infty} R_n(u, t) = 0$ для всякого $t \in (0, u]$.

Следствие теоремы 1. *Всякая функция*

$$\varphi(t) \in R_\gamma(0, u]$$

*принадлежит также классу* $AT_\gamma(0, u]$, *если только последовательность чисел*

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$$

*удовлетворяет еще условию*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty.$$

## § 2. Классы функций $R_\gamma(0, u]$

Рассмотрим последовательности чисел

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots, \quad 0 = \gamma'_0 < \gamma'_1 < \gamma'_2 < \cdots, \tag{2.1}$$

где

$$\gamma'_\nu \geqslant \gamma_\nu, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

и построенные на $(0, u]$ по этим последовательностям классы функций $R_\gamma$ и $R_{\gamma'}$.

Ниже будет доказана теорема включения для этих классов функций.

Нам понадобится следующий, приведенный в [4], результат.

Для последовательностей (2.1) и для всякого $0<\theta<1$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{m}(\zeta+\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}\theta^{-\zeta}d\zeta\geqslant 0,$$

где $m$ и $n$ — произвольные целые положительные числа.

Теорема 2. *Пусть заданы определенные в* (2.1) *последовательности чисел* $\{\gamma_\nu\}$ *и* $\{\gamma'_\nu\}$ *и соответствующие им классы функций*

$$R_\gamma(0,\ u] \quad и \quad R_{\gamma'}(0,\ u].$$

*Тогда*

$$R_\gamma(0,\ u]\subset R_{\gamma'}(0,\ u]. \tag{2.2}$$

*Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.*

Доказательство. Пусть

$$\varphi(t)\in R_\gamma(0,\ u]. \tag{2.3}$$

Представим $\varphi(t)$ обобщенной формулой Тейлора для последовательности чисел $\{\gamma_\nu\}$ в окрестности точки $u$.

Будем иметь

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\omega_k\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)+R_n(u,\ t,\ \gamma),\quad t\in(0,\ u]$$

или

$$\varphi(t)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_k\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}+$$

$$+\int\limits_t^u(-1)^n\varphi_n(t_0)\,dt_0\,\frac{t_0^{\gamma_{n-1}}}{2\pi i}\int\limits_C\frac{t_0^{\zeta}t^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(\zeta+\gamma_\nu)}. \tag{2.4}$$

Теперь последнее тождество обобщенно продифференцируем при последовательности $\{\gamma'_\nu\}$.

Для всякого $0<\mu<n-2$ имеем

$$\varphi_{\mu+1}(t)_{\gamma'}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k a_k\frac{(-1)^\mu\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_C\frac{t^{-\gamma'_\mu-1}\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta}\prod\limits_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}d\zeta+$$

$$+\int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, dt_0 \frac{(-1)^\mu t_0^{\gamma_{n-1}} t^{-\gamma'_\mu - 1}}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma'_\nu)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\zeta}}{\prod_{\nu=1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)} d\zeta.$$

Зная, что $(-1)^k a_k \geqslant 0$,

$$I_{k\mu}\left(\frac{t}{u}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=1}^{\mu}(\zeta+\gamma'_\nu)}{\prod_{\nu=1}^{k}(\zeta+\gamma_\nu)}\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta \geqslant 0,$$

заключаем, что

$$\varphi_\mu(t)_{\gamma'} = (-1)^\mu F(t), \tag{2.5}$$

где

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a_k I_{k\mu}\left(\frac{t}{u}\right) t^{-\gamma'_\mu - 1} +$$

$$+ t^{-\gamma'_\mu - 1} \int_t^u (-1)^n \varphi_n(t_0)\, t_0^{\gamma_{n-1}} I_{n\mu}\left(\frac{t}{t_0}\right) dt_0. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6) в силу произвольности $n$ следует, что

$$(-1)^\mu \varphi_\mu(t)_{\gamma'} \geqslant 0, \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Что касается последнего утверждения теоремы, то оно следует из того факта, что при $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = \infty$ всякая функция класса $R_\gamma(0, u]$ в то же время является функцией класса $C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}$ (см. [1], стр. 59), а для классов функций $C_{\left\{\prod_{\nu=1}^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}$ и $C_{\left\{\prod_1^n \gamma'_\nu,\ \varkappa\right\}}$ в условиях нашей теоремы, в работе [1] доказано, что вообще говоря

$$C_{\left\{\prod_1^n \gamma'_\nu,\ \varkappa\right\}} \overline{\subset} C_{\left\{\prod_1^n \gamma_\nu,\ \varkappa\right\}}.$$

Этим теорема доказана.

## § 3. Функции класса $AT_\gamma(0, u]$

Из следствия теоремы 1 настоящей работы следует, что

$$R_\gamma(0, u] \subset AT_\gamma(0, u],$$

поэтому возникает вопрос установления взаимосвязи классов функций $R_\gamma(0, u]$ и $AT_\gamma(0, u]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы функция* $\varphi(t)$ *принадлежала классу функций*

$$AT_\gamma(0, u],$$

*где*

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\cdots<\gamma_n<\cdots$$

*необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в виде разности двух функций класса* $R_\gamma(0, u]$.

Доказательство. *Необходимость* условия теоремы будет доказана, если покажем, что абсолютно сходящийся ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k\left(\frac{t}{u}, \gamma\right), \quad t\in(0, u] \tag{3.1}$$

можно в $(0, u]$ почленно дифференцировать в любое число раз, в результате чего не нарушится равномерная и абсолютная сходимость получаемого ряда.

С этой целью, полагая, что после $\mu$ кратного обобщенного дифференцирования ряда (3.1) при последовательности $\{\gamma_\nu\}$ получен абсолютно и равномерно сходящийся на $(0, u]$ ряд

$$(-1)^\mu t^{-\gamma_{\mu-1}-1} \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}, \tag{3.1'}$$

покажем, что таким свойством обладает и ряд, получаемый после $(\mu+1)$ кратного дифференцирования (3.1) при последовательности $\{\gamma_\nu\}$, т. е. ряд

$$(-1)^{\mu+1} t^{-\gamma_\mu-1} u^{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)} =$$

$$=\prod_{\nu=1}^{\mu}\gamma_\nu (-1)^{\mu+1} t^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu-1} \sum_{n=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}. \tag{3.1''}$$

Имеем

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})} =$$

$$= \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} a_n \prod_{\nu=\mu+2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}} \omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right),$$

где

$$\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right) = \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{\left(\frac{t}{u}\right)^{-\zeta} d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\zeta + \gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}.$$

Рассмотрим

$$\sum_{n=p}^{q} \left| a_n \prod_{\nu=\mu+2}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}} \omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right) \right| =$$

$$= \frac{\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu}{\gamma_{\mu+1}} \sum_{n=p}^{q} \left| a_n \prod_{\nu=\mu+1}^{n} \frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu - \gamma_\mu} \omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right) \right| \times$$

$$\times \prod_{\nu=\mu+2}^{n} \frac{\gamma_\nu - \gamma_\mu}{\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1}} \frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)}, \tag{3.2}$$

где $0 < t_1 < t \leqslant u$, и оценим сверху

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)} = \frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)} \cdot \frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}, \tag{3.3}$$

где $0 < t_1 < t' < t < u$.

Согласно лемме 1 параграфа 1 имеем

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\ \gamma\right)} \leqslant \left(\frac{t'}{u}\right)^{-r} \prod_{\nu=\mu+2}^{n} \frac{1 + \frac{r}{\alpha_\nu - \alpha_\mu}}{1 + \frac{r}{\gamma_\nu - \gamma_\mu}} \cdot \frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}. \tag{3.3'}$$

Для оценки сверху

$$\frac{\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\omega_{n,\,\mu}\left(\frac{t'}{u},\ \gamma\right)}$$

имеем

$$\omega_{n,\,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right) = -\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n} (\gamma_\nu - \gamma_\mu)} \cdot \frac{\omega'_{n,\,\mu}\left(\frac{t}{u},\ \gamma\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1} - \gamma_\mu - 1}}$$

или

$$\frac{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\left(\frac{t}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}} \geqslant \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\int\limits_t^u \omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{dt}{u}.$$

Из последнего равенства получаем

$$\omega_{n,\mu}\left(\frac{t'}{u},\gamma\right) \geqslant \left(\frac{t'}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\int\limits_{t'}^{t}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{dt}{u} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{t'}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\frac{t-t'}{u}$$

или

$$0 \leqslant \frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t'}{u},\gamma\right)} \leqslant \frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\cdot\frac{u}{(t-t')\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}. \tag{3.4}$$

Из (3.3) в силу (3.3′) и (3.4) будем иметь

$$\frac{\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)}{\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{1+\frac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\frac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\,\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\,\frac{u}{(t-t')\left(\frac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}, \tag{3.5}$$

где $0<t_1<t'<t<u$.

Из (3.2), в силу (3.5), получаем, что

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}{\gamma_\mu}\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)\right|\cdot\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu-\gamma_\mu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\times$$

$$\times\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{1+\dfrac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\dfrac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+2}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1})}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\gamma_\nu-\gamma_\mu)}\cdot\frac{u}{\left(\dfrac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}(t-t')}$$

или

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{t}{u}\right)^{-r}\frac{\gamma_\mu^{-1}}{t-t'}\prod_{\nu=\mu+2}^{p}\frac{1+\dfrac{r}{\alpha_\nu-\alpha_\mu}}{1+\dfrac{r}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}}\cdot\frac{u}{\left(\dfrac{t_1}{u}\right)^{\gamma_{\mu+1}-\gamma_\mu}}\times$$

$$\times\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_\mu}\omega_{n,\mu}\left(\frac{t_1}{u},\gamma\right)\right|.\tag{3.6}$$

При достаточно большом $p$ мы можем взять $t$ (а следовательно $t'$) сколь угодно близким к $t_1$.

Неравенство (3.6) показывает, что при достаточно большом $p$ и $t>t_1$ будем иметь

$$\sum_{n=p}^{q}\left|a_n\prod_{\nu=\mu+2}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu-\gamma_{\mu+1}}\omega_{n,\mu+1}\left(\frac{t}{u},\gamma\right)\right|<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — число сколь угодно малое.

Из (3.1''), в силу последнего неравенства, следует, что ряд

$$\varphi_{\mu+1}(t)=\prod_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu(-1)^{\mu+1}t^{-\gamma_\mu-1}\sum_{n=\mu+1}^{\infty}a_n\frac{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}\gamma_\nu}{2\pi i}\int_{C'}\frac{\left(\dfrac{t}{u}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=\mu+1}^{n}(\zeta+\gamma_\nu)}$$

сходится абсолютно в области $t\in(0,u]$ и равномерно в каждой ее замкнутой части.

Для завершения доказательства необходимости условия теоремы нам остается записать

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|+a_n}{2}\omega_n\left(\frac{t}{u},\gamma\right)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|-a_n}{2}\omega_n\left(\frac{t}{u},\gamma\right)$$

и заметить, что оба эти ряда можно почленно дифференцировать любое число раз, причем их суммы $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ суть обобщенно регулярно монотонные функции при последовательности $\{\gamma_\nu\}$.

*Достаточность* условия теоремы следует из того факта, что всякая обобщенно регулярно монотонная функция $\varphi(t)$ $(\varphi(t) \in R_\gamma(0, u])$ в то же время является функцией класса

$$AT_\gamma(0, u].$$

Этим теорема 3 доказана.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 24 X 1961

**Հ. Վ. Բադալյան**

# ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՐԱԾ ՌԵԳՈՒԼՅԱՐ ՄՈՆՈՏՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Սահմանում:* *Պայմանավորվենք ասել, որ* $\varphi(t)$ *ֆունկցիան* $M$ *բազմության վրա* $0 \in M$ *պատկանում է ընդհանրացրած ռեգուլյար մոնոտոն ֆունկցիաների դասին ըստ թվերի* $\{\gamma_\nu\}$ *հաջորդականության, եթե գոյություն ունի ֆունկցիաների*

$$\varphi(t) = \varphi_0(t), \quad \varphi_1(t) = \varphi'(t), \quad \varphi_{k+1}(t) = \left(\frac{\varphi_k(t)}{|t|^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \quad k = 1, 2, \ldots,$$

*(որտեղ* $0 = \gamma_0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \cdots \leqslant \gamma_n \leqslant \cdots$*) հաջորդականությունը և բավարարվում են*

$$(-1)^k \varphi_k(t) \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad t \in M$$

*պայմանները:*

*Հոդվածում տրվում է ֆունկցիաների վերը նշված դասի քվազիանալիտիկ բնութագիրը: Ապացուցվում է թեորեմա այն մասին, թե ե՞րբ թվերի այս կամ այն հաջորդականության համար կառուցված ֆունկցիաների դասերից մեկն ընդգրկվում է մյուսի մեջ: Ապացուցվում է թեորեմա ֆունկցիաները բացարձակ զուգամետ քվազիաստիճանային շարքերի վերլուծության վերաբերյալ:*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бадалян Г. В.* Обобщение ряда Тейлора и некоторые вопросы теории аналитических и квазианалитических функций. Известия АН АрмССР, **6**, № 5—6, 1953.
2. *Бадалян Г. В.* Условие разложимости функций в квазистепенной ряд в основном промежутке. ДАН СССР, **136**, № 1, 1961.
3. *Бадалян Г. В.* О критерии разложимости функций в квазистепенной ряд. Известия АН СССР (сдана в печать).
4. *Бадалян Г. В.* Условие разложимости функций в квазистепенной ряд вне основного промежутка. Известия АН СССР, серия математическая (находится в печати).
5. *Бадалян Г. В.* $A_\gamma$ — абсолютно монотонные функции. Известия АН АрмССР, серия физико-математических наук, **14**, № 4, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

# Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства (II)

## Введение



Как известно (см., например, [1]), изучение линейчатой геометрии связывается с проективно-дифференциальной геометрией подмногообразий плюккеровой (или грассмановой) гиперквадрики пятимерного пространства.

В работах [2] и [3] ставится аналогичная задача для проективной теории семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства. В отличие от трехмерного случая, здесь прямые (или плоскости) отображаются в точки грассманова многообразия девятимерного пространства. Причем грассманово многообразие $\Omega$ (1,4) (или $\Omega$ (2,4)) является шестимерной поверхностью пятого порядка и имеет уравнения

$$\varphi_1(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{34} - \underline{13}\,\underline{24} + \underline{14}\,\underline{23} = 0,$$

$$\varphi_2(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{35} - \underline{13}\,\underline{25} + \underline{15}\,\underline{23} = 0,$$

$$\varphi_3(pp) \equiv \underline{12}\,\underline{45} - \underline{14}\,\underline{25} + \underline{15}\,\underline{24} = 0,$$

$$\varphi_4(pp) \equiv \underline{23}\,\underline{45} - \underline{24}\,\underline{35} + \underline{25}\,\underline{34} = 0,$$

$$\varphi_5(pp) \equiv \underline{13}\,\underline{45} - \underline{14}\,\underline{35} + \underline{15}\,\underline{34} = 0,$$

где $\underline{ik}$ — грассмановы (или плюккеровы) координаты прямой $p$ (или дуальные грассмановы координаты плоскости). В [2] изучается теория линейных многообразий прямых и плоскостей четырехмерного пространства. Все рассматриваемые здесь задачи тесно связываются с алгебраической геометрией. В работе [3] рассматривается первая часть проективно-дифференциальной теории двупараметрических семейств прямых и плоскостей четырехмерного пространства.

Настоящая статья является продолжением работы [3]. Здесь рассматриваются дифференциальные окрестности более высокого порядка (до третьего) семейств прямых и плоскостей.

В § 1 с каждым лучом семейства связывается подвижной репер первого порядка и для выяснения его геометрического смысла перечисляются некоторые результаты из [3].

Во втором параграфе рассматривается дифференциальная окрестность второго порядка и с помощью девятимерного пространства доказывается ряд теорем. В частности, здесь найдена соприкасающаяся гиперповерхность Власова двупараметрического семейства прямых. Эта гиперповерхность способствует полной фиксации подвижного координатного репера.

В § 3 рассматривается соприкасающаяся гиперповерхность Власова для конгруэнции прямых четырехмерного пространства. Здесь эта гиперповерхность вырождается в гиперконус второго порядка. Далее рассматриваются такие двупараметрические семейства прямых, отображение которых в $P_9$ является картановым многообразием.

В § 4 рассматриваются точки и прямые соприкосновения линейчатых поверхностей, и они связываются с соприкасающейся гиперповерхностью Власова.

В пятом параграфе все полученные результаты по принципу двойственности четырехмерного пространства автоматически повторяются для двупараметрических семейств плоскостей. Здесь, в частности, получаются некоторые результаты из теории двумерных поверхностей четырехмерного пространства. При введении дуального (тангенциального) репера аналитический аппарат для двойственных образов остается без изменения. Этот факт показывает, что для изучения теории многообразий плоскостей пространства $P_4$ лучше пользоваться дуальным репером этого пространства.

К настоящему времени создана богатая теория в области исследования многомерных поверхностей $n$-мерного проективного пространства. Рассматривая теорию семейств $m$-мерных плоскостей с помощью теории проективно-дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия $\Omega(m, n)$, мы имеем возможность воспользоваться результатами теории многомерных поверхностей, с одной стороны, и теорией грассмановых многообразий алгебраической геометрии, с другой [5].

Работа выполнена методом внешних форм Картана [4].

## § 1. Выбор подвижного репера первого порядка

Как известно [3], двупараметрическое семейство прямых $M_2$, описанное ребром $A_1A_2$ подвижного репера $A_i$, определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3, \tag{1.1}$$

где $\omega_1^3$ и $\omega_2^4$ независимые формы семейства $M_2$. Формы $\omega_i^k$ определяют инфинитезимальное преобразование

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \quad (D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k])$$

репера $A_i$. Выбор (1.1) координатного репера означает: 1) касательные трехмерные подпространства линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ являются соответственно подпространствами $A_1A_2A_4A_5$ и $A_1A_2A_3A_5$; 2) фокусы линейчатых поверхностей $\omega_1^3 = 0$ и $\omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с точками $A_2$ и $A_1$; 3) касательные плоскости этих линейчатых поверхностей в фокальных точках совпадают соответственно с плоскостями $A_1A_2A_4$ и $A_1A_2A_3$.

Мы здесь перечислим некоторые результаты из [3].

(I) Касательное трехмерное подпространство линейчатой поверхности $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ семейства $M_2$ определяется точками

$$(A_1, A_2, A_3 + \alpha\lambda A_5, \lambda A_4 + \alpha' A_5). \tag{1.2}$$

(II) Касательные плоскости всех линейчатых поверхностей семейства $M_2$ в точке $A_1 + \rho A_2$ принадлежат одному трехмерному подпространству

$$(A_1, A_2, A_3 + \rho\alpha' A_5, \rho A_4 + \alpha A_5). \tag{1.3}$$

Таким образом, с каждой точкой луча $A_1A_2$ семейства $M_2$ связывается определенное трехмерное (касательное в этой точке) подпространство (1.3).

(III) Каждая линейчатая поверхность $\omega_2^4 = \lambda\omega_1^3$ семейства $M_2$ имеет единственную точку $A_1 + \rho A_2$ (фокус), определенную равенством $\alpha'\rho = \alpha\lambda$, в силу которого два подпространства (1.2) и (1.3) совпадают.

(IV) Однопараметрическое семейство всех касательных подпространств (1.2) (или (1.3)) образует некоторый касательный конус второго класса с уравнением

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3u_4 - \alpha\alpha'(u_5)^2 = 0, \tag{1.4}$$

где $u_i$ — дуальные координаты трехмерного подпространства в $P_4$.

Дифференциал аналитической прямой $(A_1A_2) = \overline{12}$ в силу (1.1) напишется в виде

$$d\overline{12} = (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,\overline{12} - \omega_1^3\,\overline{23} - \alpha\omega_2^4\,\overline{25} + \omega_2^4\,\overline{14} + \alpha'\omega_1^3\,\overline{15}, \ ((A_i\, A_k) = \overline{ik}). \tag{1.5}$$

Прямая $\overline{12}$ отображается в точку $\overline{12}$ грассманова многообразия $\Omega$ (1,4) девятимерного пространства. Когда прямая $\overline{12}$ описывает семейство $M_2$, то ее отображение в $P_9$ описывает двумерное подмногообразие $m_2$. Из (1.5) вытекает, что касательная плоскость подмногообразия $m_2$ определяется тремя точками

$$(\overline{12}, \overline{14} - \alpha\,\overline{25}, \overline{23} - \alpha'\,\overline{15}). \tag{1.6}$$

## § 2. Дифференциальная окрестность второго порядка

Внешнее дифференцирование системы (1.1) приводит к квадратичным уравнениям

$$[\omega_1^2 - \alpha\omega_5^4, \ \omega_2^4] + [\omega_1^3 \omega_3^4] = 0, \quad [\omega_2^1 - \alpha'\omega_5^3, \ \omega_1^3] + [\omega_2^4 \omega_4^3] = 0,$$

$$[\omega_3^5 - \alpha'\omega_1^2 - \alpha\alpha' \omega_5^4, \ \omega_1^3] + [\Delta\alpha \, \omega_2^4] = 0, \quad [\omega_4^5 - \alpha\omega_2^1 - \alpha\alpha'\omega_5^3, \ \omega_2^4] + [\Delta\alpha' \omega_1^3] = 0, \tag{2.1}$$

где

$$\Delta\alpha = d\alpha + \alpha(\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_4^4 + \omega_5^5), \quad \Delta\alpha' = d\alpha' + \alpha'(\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 + \omega_5^5).$$

Алгебраическим разрешением (2.1) находим

$$\begin{aligned}
&\alpha\omega_5^4 - \omega_1^2 = b\omega_1^3 + a\omega_2^4, \quad && \alpha'\omega_5^3 - \omega_2^1 = a'\omega_1^3 + b'\omega_2^4,\\
&\omega_3^4 = c\omega_1^3 + b\omega_2^4, && \omega_4^3 = b'\omega_1^3 + c'\omega_2^4,\\
&\omega_3^5 - \alpha'\omega_1^2 - \alpha\alpha'\omega_5^4 = e\omega_1^3 + f\omega_2^4, && \omega_4^5 - \alpha\omega_2^1 - \alpha\alpha'\omega_5^3 = f'\omega_1^3 + e'\omega_2^4,\\
&\Delta\alpha = f\omega_1^3 + g\omega_2^4, && \Delta\alpha' = g'\omega_1^3 + f'\omega_2^4.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Соприкасающаяся гиперповерхность Власова 3-го порядка. Как известно, семейство $M_2$ представляется двумерным подмногообразием $m_2$ грассманова многообразия $\Omega$ (1.4). Дифференциальная окрестность первого порядка точки $\overline{12}$ лежит в касательной плоскости (1.6), а дифференциальная окрестность второго порядка лежит в пятимерном подпространстве

$$(\overline{12}, \overline{23} - \alpha'\overline{15}, \overline{14} - \alpha\overline{25}, a'\overline{13} + g'\overline{15} - c\overline{24} - e\overline{25} + 2\alpha'\overline{35}, b'\overline{13} +$$

$$+ f'\overline{15} - b\overline{24} - f\overline{25} + \overline{34}, c'\overline{13} + e'\overline{15} - a\overline{24} - g\overline{25} - 2\alpha\overline{45}). \tag{2.3}$$

Пусть точка $\overline{34}$ находится на плоскости (2.3). Тогда будем иметь

$$b = b' = f = f' = 0. \tag{2.4}$$

Известно, что каждое пятимерное подпространство пересекается с грассмановым многообразием по некоторой двумерной поверхности, представляющей линейное двупараметрическое семейство прямых четырехмерного пространства. Это семейство образует некоторую гиперповерхность третьего порядка, названную нами *гиперповерхностью Власова* [2]. В этой же работе доказывается, что поверхность Власова есть геометрическое место всех прямых, пересекающих четыре фиксированные плоскости в общем положении.

Пусть две из этих плоскостей совпадают с гранями $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_5$. Тогда в силу (2.3) будем иметь

$$a = a' = c = c' = 0. \tag{2.5}$$

Теперь уравнения семейства $M_2$ напишутся в виде

$$\omega_1^2 = \alpha\omega_5^4, \quad \omega_2^1 = \alpha'\omega_5^3, \quad \omega_3^4 = 0, \quad \omega_4^3 = 0,$$
$$\omega_3^5 - 2\alpha\alpha'\omega_5^4 = e\omega_1^3, \quad \omega_4^5 - 2\alpha\alpha'\omega_5^3 = e'\omega_2^4, \quad \Delta\alpha = g\omega_2^4, \quad \Delta\alpha' = g'\omega_1^3. \qquad (2.6)$$

В силу этих уравнений подвижной репер полностью фиксируется. Такая фиксация репера не нарушает общности двупараметрического семейства прямых $M_2$.

Действительно, внешний дифференциал системы (2.6) имеет вид

$$[2\alpha\omega_5^2 - g\omega_5^4, \ \omega_2^4] + [\omega_3^2\omega_1^3] = 0, \quad [2\alpha'\omega_5^1 - g'\omega_5^3, \ \omega_1^3] + [\omega_4^1\omega_2^4] = 0,$$
$$[\omega_3^2\omega_2^4] + e[\omega_1^3\omega_5^4] = 0, \qquad [\omega_4^1\omega_1^3] + e'[\omega_2^4\omega_5^3] = 0,$$
$$[\Delta e - 2\alpha g'\omega_5^4 - \alpha'\omega_3^2, \ \omega_1^3] + [2\alpha\alpha'\omega_5^2 - e\alpha\omega_5^3 - \alpha\omega_3^1, \ \omega_2^4] = 0, \qquad (2.7)$$
$$[\Delta e' - 2\alpha' g\omega_5^3 - \alpha\omega_4^1, \ \omega_2^4] + [2\alpha\alpha'\omega_5^1 - e'\alpha'\omega_5^4 - \alpha'\omega_4^2, \ \omega_1^3] = 0,$$
$$[\Delta g\,\omega_2^4] - [\alpha\omega_3^1 + \alpha e\omega_5^3 + \alpha' g\omega_5^4, \ \omega_1^3] = 0,$$
$$[\Delta g'\,\omega_1^3] - [\alpha'\omega_4^2 + \alpha' e'\omega_5^4 + \alpha g'\omega_5^3, \ \omega_2^4] = 0,$$

где

$$\Delta e = de + e(\omega_1^1 - 2\omega_3^3 + \omega_5^5), \quad \Delta e' = de' + e'(\omega_2^2 - 2\omega_4^4 + \omega_5^5),$$
$$\Delta g = dg + g(2\omega_2^2 - 2\omega_4^4 - \omega_1^1 + \omega_5^5) + 2\alpha(\omega_4^2 - \alpha\omega_5^1 - e'\omega_5^4),$$
$$\Delta g' = dg' + g'(2\omega_1^1 - 2\omega_3^3 - \omega_2^2 + \omega_5^5) + 2\alpha'(\omega_3^1 - \alpha'\omega_5^2 - e\omega_5^3).$$

Эта система определяет многообразие $M_2$ с произволом четырех функций двух аргументов, т. е. произвол семейства не уменьшается.

Пятимерное подпространство после этих упрощений напишется в виде

$$(\overline{12}, \overline{23} - \alpha'\overline{15}, \overline{14} - \alpha\overline{25}, g'\overline{15} - e\overline{25} + 2\alpha'\overline{35}, \overline{34}, e'\overline{15} - g\overline{25} - 2\alpha\overline{45}). \qquad (2.8)$$

Его пересечение с грассмановым многообразием представляет линейное двупараметрическое семейство прямых $L_2$ четырехмерного пространства [2]. Семейство прямых $L_2$ образует гиперповерхность Власова 3-го порядка, точечное уравнение которой легко получается из (2.8) и имеет вид

$$\begin{vmatrix} x^3 & -x^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x^5 & 0 & x^1 & \alpha' & 0 & -g' & -e' \\ 0 & x^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 & \alpha & e & g \\ 0 & -x^5 & x^3 & 0 & 0 & -2\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.9)$$

Пять ассоциированных плоскостей конфигурации Власова одновременно пересекаются всеми лучами линейного многообразия $L_2$ [2]. Пусть $a_{ik}$ являются дуальными грассмановыми координатами одной из этих плоскостей. Так как пересечение плоскости $a_{ik}$ и прямой $\underline{ik}$ обеспечивается условием $a_{ik}\,\underline{ik}=0$ (см. [2]), кроме того числа $a_{ik}$ удовлетворяют равенствам $\varphi_i(aa)=0$, то в силу (2.8) для $a_{ik}$ получим пять решений. Два решения из них дают две плоскости $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_5$, а три другие решения представляют остальные плоскости конфигурации Власова. Координаты этих трех плоскостей удовлетворяют уравнениям

$$a_{24}=\alpha(\alpha')^2(a_{15})^3,\quad a_{25}=\alpha'(a_{15})^2,\quad a_{12}=a_{34}=0,\quad a_{23}=\alpha' a_{15},$$

$$a_{14}=\alpha\alpha'(a_{15})^2,\quad g'a_{15}-ea_{23}+2\alpha' a_{35}=0,\quad e'a_{15}-ga_{25}-2\alpha a_{45}=0,\tag{2.10}$$

$$\alpha^2\alpha' e(a_{15})^3-\alpha^2 g'(a_{15})^2+g\alpha' a_{15}-e'=0,$$

где принято $a_{13}=1$. На каждом луче семейства $M_2$ находятся пять точек, где плоскости конфигурации Власова пересекаются с лучом. Эти точки здесь называются *точками Власова*. Пять линейчатых поверхностей семейства $M_2$, у каждой из которых фокус (см. [3]) совпадает с точкой Власова, называются *линейчатыми поверхностями Власова*. Две из пяти линейчатых поверхностей Власова совпадают с поверхностями $\omega_1^3=0$, $\omega_2^4=0$.

Таким образом, *с каждым лучом двупараметрического семейства прямых связывается единственная соприкасающаяся гиперповерхность Власова третьего порядка, которая содержит все прямые дифференциальной окрестности второго порядка луча семейства.*

## § 3. Соприкасающаяся гиперквадрика конгруэнции прямых четырехмерного пространства

Конгруэнция прямых четырехмерного пространства является фокальным двупараметрическим семейством прямых. Она характеризуется условиями [3]

$$\alpha=0,\quad \alpha'=0.\tag{3.1}$$

В силу (3.1) из (2.2) получим $f=f'=g=g'=0$. Посредством выбора репера мы получим еще условия $b=b'=0$. После такого выбора репера все условия (2.5) уже нарушаются. Соприкасающаяся 5-плоскость (2.3) теперь имеет вид

$$(\overline{12},\ \overline{23},\ \overline{14},\ \overline{34},\ a'\,\overline{13}-c\,\overline{24}-e\,\overline{25},\ c'\,\overline{13}+e'\,\overline{15}-a\,\overline{24})\tag{3.2}$$

и пересекается с грассмановым многообразием по двумерным подмногообразиям, представляющим частный случай линейного многообразия прямых $L_2$ четырехмерного пространства. Совокупность этих прямых образует гиперповерхность второго порядка

$$\begin{vmatrix} x^3 & 0 & a' & c' \\ 0 & -x^4 & c & a \\ 0 & -x^5 & e & 0 \\ x^5 & 0 & 0 & e' \end{vmatrix} = 0 \tag{3.3}$$

и гиперплоскость $x^5=0$, т. е. в этом случае гиперповерхность Власова является приведенным многообразием. Гиперповерхность (3.3) является конусом второго порядка, вершина которого совпадает с лучом конгруэнции. Две фокальные плоскости конгруэнции являются образующими плоскостями для этого конуса. Конфигурация Власова в этом случае вырождается в совокупность всех плоскостей, инцидентных с лучом конгруэнции и принадлежащих касательному трехмерному пространству $A_1A_2A_3A_4$.

Таким образом, *с каждым лучом конгруэнции четырехмерного пространства связывается определенная соприкасающаяся гиперквадрика (конус) (3.3), которой принадлежат все прямые дифференциальной окрестности второго порядка.*

Картановы многообразия. Если отображение конгруэнции в девятимерном пространстве является картановым многообразием, т. е. его соприкасающаяся плоскость имеет размерность четыре, то из (3.2) получим

$$e=e'=0, \quad aa'-cc'=0, \tag{3.4}$$

откуда следует, что $A_1A_2$ описывает конгруэнцию $W$, принадлежащую трехмерному пространству $A_1A_2A_3A_4$. Таким образом, *отображение конгруэнции в девятимерном пространстве является картановым многообразием тогда и только тогда, когда конгруэнция является конгруэнцией $W$ трехмерного подпространства.*

Из (2.3) следует, что существует (кроме конгруэнции) также другой класс двупараметрического семейства прямых, отображение которого в $P_9$ является картановым многообразием. Этот класс характеризуется условием

$$\alpha'=0, \quad a'=c=e=0.$$

В этом случае единственная сопряженная сеть картанова многообразия является самосопряженной сетью с уравнением $\omega_2^4=0$.

Пересечение соприкасающейся 5-плоскости с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия. Касательная 6-плоскость грассманова многообразия в точке $\overline{12}$ определяется точками

$$(\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}). \tag{3.5}$$

В общем случае эта плоскость пересекается с соприкасающейся 5-плоскостью (2.8) по касательной 2-плоскости (1.6). Размерность пересечения равна трем только при $\alpha'=0$ (или $\alpha=0$) и равна четырем только при $\alpha=\alpha'=0$. Соприкасающаяся 5-плоскость (2.8) не может целиком находиться в шестимерном касательном подпространстве (3.5). Таким образом, соприкасающаяся 5-плоскость отображения $m_2$ двупараметрического семейства прямых четырехмерного пространства пересекается с касательной 6-плоскостью грассманова многообразия в общем случае только по касательной к $m_2$ 2-плоскостью (1.6). Максимальная размерность этого пересечения равна четырем и соответствует случаю, когда $m_2$ является отображением конгруэнции.

## § 4. Точки и прямые соприкосновения линейчатых поверхностей

Каждая тройка прямых в общем расположении пересекается единственной четвертой прямой четырехмерного пространства. Следовательно, существует единственная прямая, пересекающая три бесконечно близких луча общей линейчатой поверхности четырехмерного пространства. Естественно эту прямую назвать *прямой соприкосновения*, а точку пересечения ее с лучом линейчатой поверхности — *точкой соприкосновения*.

Подсчитывая положение точки соприкосновения линейчатой поверхности Власова $\omega_2^4 = 0$, мы заметим, что она совпадает с точкой $A_1$*. Имея в виду, что все плоскости в конфигурации Власова равноправны [2], будем иметь теорему: *Точка соприкосновения каждой линейчатой поверхности Власова двупараметрического семейства прямых совпадает с фокусом той же линейчатой поверхности.*

Линейчатые поверхности Власова этим свойством не характеризуются. Требование, чтобы точка соприкосновения совпала с фокусом линейчатой поверхности двупараметрического семейства прямых, приводит к дифференциальному уравнению. Следовательно, через каждый луч двупараметрического семейства прямых проходит $\infty^1$ линейчатых поверхностей, у которых фокусы совпадают с точками соприкосновения.

Прямые соприкосновения всех линейчатых поверхностей, проходящих через данный луч, образуют некоторую линейчатую поверхность, названную здесь линейчатой поверхностью соприкосновения двупараметрического семейства.

## § 5. Двойственность

Все полученные результаты, согласно принципу двойственности (точка $\longleftrightarrow$ гиперплоскость, прямая $\longleftrightarrow$ плоскость) четырехмерного пространства, можно автоматически повторить для двупараметрического семейства плоскостей $\pi_2$ с помощью введения дуального репера. Аналитический аппарат при этом остается без изменения.

* Прямая соприкосновения находится в „инволюции“ с $\overline{12}$, $d\,\overline{12}\ (mod\ \omega_2^4)$ и $d^2\,\overline{12}\ (mod\ \omega_2^4)$, из которых получается шесть условий, однозначно определяющих эту прямую.

1) Произвольная точка пространства выражается через вершины репера в виде

$$M = x^i A_i.$$

2) Инфинитезимальные перемещения репера пишутся в виде

$$dA_i = \omega_i^k A_k,$$

где

$$D\omega_i^k = [\omega_i^j \omega_j^k].$$

3) Двупараметрическое семейство прямых, описанное лучом $A_1A_2$, определяется уравнениями

$$\omega_1^4 = \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^5 = \alpha\omega_2^4, \quad \omega_2^5 = \alpha'\omega_1^3$$

относительно репера первого порядка.

1) Произвольная гиперплоскость пространства выражается через грани (гиперплоскости) репера в виде

$$m = X^i a_i$$

2) Инфинитезимальные перемещения репера пишутся в виде

$$da_i = \Omega_i^k a_k,$$

где

$$D\Omega_i^k = [\Omega_i^j \Omega_j^k].$$

3) Двупараметрическое семейство плоскостей, описанное плоскостью $a_1a_2$, определяется уравнениями

$$\Omega_1^4 = \Omega_2^3 = 0, \quad \Omega_1^5 = \alpha\Omega_2^4, \quad \Omega_2^5 = \alpha'\Omega_1^3$$

относительно репера первого порядка.

Геометрический смысл такого выбора подвижного репера для $\infty^2$ семейства плоскостей выявляется также по принципу двойственности. Именно: (I) Фокусы однопараметрических семейств плоскостей $\Omega_1^3 = 0$ и $\Omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с точками $(a_1a_2a_4a_5)$ и $(a_1a_2a_3a_5)$; (II) Касательные трехмерные подпространства (см. [3]) семейств $\Omega_1^3 = 0$, $\Omega_2^4 = 0$ совпадают соответственно с подпространствами $a_2$ и $a_1$; (III) Фокальные прямые этих семейств в их касательных подпространствах (см. [3]) совпадают соответственно с прямыми $(a_1a_2a_4)$ и $(a_1a_2a_3)$.

Как известно [2], гиперповерхность Власова третьего порядка является геометрическим местом всех прямых, пересекающих четыре плоскости в общем расположении. Дуальная „гиперповерхность" Власова третьего класса есть геометрическое место всех плоскостей, пересекающих четыре прямые в общем расположении. Так как двупараметрическое семейство прямых обладает соприкасающейся поверхностью Власова, то результат, двойственный этому, можно формулировать в виде следующей теоремы: *С каждой плоскостью двупараметрического семейства плоскостей связывается единственная соприкасающаяся дуальная гиперповерхность Власова, которая содержит все плоскости дифференциальной окрестности второго порядка данной плоскости семейства.*

Пусть плоскость $a_3a_4$ является образующей плоскостью, а ребра $a_1a_3a_5$ и $a_2a_4a_5$—направляющими прямыми для дуальной гиперповерхности Власова. Тогда двупараметрическое семейство плоскостей определится линейными уравнениями

$$\Omega_1^2 = \alpha\Omega_5^4, \quad \Omega_2^1 = \alpha'\Omega_5^3, \quad \Omega_3^4 = 0, \quad \Omega_4^3 = 0,$$

$$\Omega_3^5 - 2\alpha\alpha'\Omega_5^4 = E\Omega_1^3, \quad \Omega_5^4 - 2\alpha\alpha'\Omega_5^3 = E'\Omega_2^4,$$

$$\Delta\alpha = G\Omega_2^4, \quad \Delta\alpha' = G'\Omega_1^3.$$

Эта система определяет двупараметрическое семейство плоскостей с произволом четырех функций от двух аргументов. Следовательно, выбор дуального репера не нарушает общности этого семейства. Относительно этого репера дуальное (тангенциальное) уравнение гиперповерхности Власова запишется в виде

$$\begin{vmatrix} X^3 & -X^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ X^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -X^5 & 0 & X^1 & \alpha' & 0 & -G' & -E' \\ 0 & X^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2 & 0 & \alpha & E & G \\ 0 & -X^3 & X^3 & 0 & 0 & -2\alpha' & 0 \\ 0 & 0 & X^4 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Так как с каждой четверкой направляющих прямых ассоциируется пятая прямая и все пять прямых равноправны в дуальной конфигурации Власова, то с каждой плоскостью $\infty^2$ семейства связываются пять с ней пересекающихся *прямых Власова* и, следовательно, *пять трехмерных подпространств Власова*.

Известно [3], что с каждым $\infty^1$ семейством плоскостей $\Omega_2^4 = \lambda\Omega_1^3$ двупараметрического семейства связывается единственное подпространство $a_1 + \rho a_2$, называемое касательной гиперплоскостью $\infty^1$ семейства, которое определяется уравнением $\alpha'\rho = \alpha\lambda$ и обладает тем свойством, что фокус $\infty^2$ семейства плоскостей в этом подпространстве совпадает с фокальной точкой данного $\infty^1$ семейства плоскостей. Согласно этому, пять трехмерных подпространств Власова определяют пять *однопараметрических семейств плоскостей Власова*, проходящих через данную плоскость $\infty^2$ семейства плоскостей.

Соприкасающаяся дуальная гиперквадрика двумерной поверхности пространства $P_4$. В работе [3] была доказана теорема: *двойственный образ конгруэнции прямых в $P_4$ является многообразием всех касательных плоскостей некоторой двумерной поверхности и наоборот*. Следовательно, результаты теории конгруэнций в $P_4$ можно перевести по принципу двойственности в теорию двумерных поверхностей того же пространства. В п. 3 мы доказали, что с каждым лучом конгруэнции связывается определенная соприкасающаяся гиперквадрика (конус) (3.3), которой принадлежат все прямые дифференциальной окрестности второго порядка. Двойственный результат сформулируется следующим образом: *с каждой точкой двумерной поверхности пространства $P_4$ связывается определенная соприкасающаяся „гиперквадрика" с уравнением*

$$\begin{vmatrix} X^3 & 0 & A' & C' \\ 0 & -X^4 & C & A \\ 0 & -X^5 & E & 0 \\ X^5 & 0 & 0 & E' \end{vmatrix} = 0,$$

*которой принадлежат все касательные плоскости дифференциальной окрестности второго порядка данной точки поверхности.*

Если вдоль каждой (проходящей через данную точку двумерной поверхности) линии взять три бесконечно близкие точки, то три касательные плоскости в этих точках определяют единственную четвертую плоскость, пересекающуюся с каждой из них по прямой. Любопытно, что *эта четвертая плоскость совпадает с соприкасающейся плоскостью данной линии.* Соприкасающаяся плоскость с данной плоскостью $\infty^1$ семейства образует некоторое трехмерное подпространство, называемое *гиперплоскостью соприкосновения.*

Если конгруэнция принадлежит трехмерному подпространству, то ее действительный образ представляет $\infty^2$ *плоскостей, проходящих через фиксированную точку*, т. е. в этом случае поверхность сжимается в одну точку. Такое семейство плоскостей обладает всеми свойствами, двойственными свойствам конгруэнций трехмерного подпространства.

Армянский педагогический институт им. Х. Абовяна
Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 IV 1961

Ս. Ե. Կարապետյան

## ՔԱՌԱՉԱՓ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՐԿՊԱՐԱՄԵՏՐԱՆՈՑ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐԻ ՊՐՈՅԵԿՏԻՎ-ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆԸ (II)


### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*[2] աշխատության մեջ տրված է քառաչափ տարածության ուղիղների և հարթությունների ընտանիքի գծային տեսությունը, որը հնարավորություն է տալիս անցնելու նույն էլեմենտների բոլոր հնարավոր ընտանիքների պրոյեկտիվ-դիֆերենցիալ երկրաչափությանը։ [3] աշխատության մեջ տրված է նույն տարածության ուղիղների և հարթությունների երկպարամետրանոց ընտանիքների նախնական տեսությունը։*

*Այս աշխատությունը հանդիսանում է [3]-ի շարունակությունը և նվիրված է ուղիղների երկպարամետրանոց ընտանիքների ավելի բարձր կարգի*

*դիֆերենցիալ շրջապատի ուսումնասիրությանը։ Ստացված արդյունքները երկվության սկզբունքի համաձայն, կրկնվում են հարթությունների երկպարամետրանոց ընտանիքների համար։*

*Աշխատության մեջ այդ ընտանիքների տեսությունը բերված է իննաչափ տարածության գրասմանյան բազմաձևության ենթաբազմաձևությունների պրոյեկտիվ-դիֆերենցիալ (կետային) երկրաչափությանը։ Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս օգտվելու հանրահաշվական երկրաչափության հարուստ տեսությունից։*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Карапетян С. Е.* Сопряженные многообразия и их приложения. ДАН СССР, 133, № 5, 1960.
2. *Карапетян С. Е.* Линейные многообразия прямых и плоскостей четырехмерного проективного пространства. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 1, 1962.
3. *Карапетян С. Е.* Проективно-дифференциальная геометрия двупараметрических семейств прямых и плоскостей (I). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 15, № 2, 1962.
4. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана, М.—Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Хожд В.* и *Пидо Д.* Методы алгебраической геометрии. ИЛ, т. I, II, М., 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Ц. Гнуни

# О параметрически возбуждаемых колебаниях слоистых анизотропных гибких оболочек

Рассматривается задача о параметрически возбуждаемых колебаниях гибких оболочек, составленных из произвольного числа однородных ортотропных слоев. В основу ставится теория слоистых анизотропных оболочек, предложенная С. А. Амбарцумяном [1, 2].

Нелинейная задача о параметрически возбуждаемых колебаниях оболочек впервые была поставлена в работе [3] для сферической панели. Указывается, что характер установления резонансных колебаний оболочек качественно отличается от характера установления резонансных колебаний пластинок. Аналогичные задачи для симметрично-собранных слоистых анизотропных пологих оболочек двоякой постоянной кривизны и пологих оболочек вращения рассмотрены в работах [4, 5], откуда, в частности, получаются задачи для слоистых анизотропных прямоугольных и круглых пластинок. Следует отметить, что результаты работ [4, 5] приемлемы для весьма пологих оболочек только в том случае, когда нелинейность слабая и не может существенно изменить гармонического характера движения.

В работе [7] обстоятельно рассмотрена нелинейная задача параметрически возбуждаемых колебаний пологих оболочек.

Исходя из предположения, что при прогибах, сравнимых с толщиной оболочки, симметричная форма волнообразования нарушается [9], в работе [8] рассматривается задача о параметрически возбуждаемых колебаниях замкнутых цилиндрических оболочек. На основе [10] доказывается, что, если $R < 0{,}8464\, nL$, то возбуждение является „жестким" [3] и определяются нижние критические частоты. В случае же, когда $R > 0{,}8464\, nL$, возбуждение является „мягким" [3], т. е. динамический хлопок невозможен. Здесь $R$ — радиус, $L$ — длина оболочки, $n$ — число полуволн на окружности.

В работе [11] рассматривается влияние безмоментных деформаций на области параметрических резонансов. Уравнения, полученные в работе [11] можно использовать для рассмотрения одновременного воздействия вынужденных поперечных и параметрически возбуждаемых колебаний. Укажем, что работа [11] является обобщением на случай оболочек некоторых результатов, полученных в [12]. В работе

[13] показывается, что нелинейно-упругим слоистым пластинкам присущи некоторые особенности, характерные, вообще говоря, для оболочек.

Исследованию задач динамической устойчивости гибких слоистых пластинок и оболочек на основе уточненной теории посвящены работы [14, 15].

Работа [16] посвящена исследованию статической устойчивости несимметрично-собранных слоистых ортотропных гибких оболочек.

1. Пусть $\alpha$ и $\beta$ являются криволинейными ортогональными координатами, совпадающими с линиями кривизны координатной поверхности, $\gamma$ — расстояние по нормали от точки $(\alpha, \beta, 0)$ до точки $(\alpha, \beta, \gamma)$.

За координатную поверхность принимается внешняя поверхность выпуклой стороны оболочки.

Считаем, что плоскости упругой симметрии материалов каждого слоя перпендикулярны к координатным линиям $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

Предполагается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза недеформируемых нормалей.

Поступая обычным образом [1, 9], получаем следующие уравнения движения и неразрывности

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial S}{\partial \beta} + X - m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} + Y - m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial t^2} = 0, \tag{1.2}$$

$$-k_1 T_1 - k_2 T_2 - \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_2}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} -$$

$$- Z + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \beta} - N_1 - m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2} = 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \beta} - N_2 - m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + m_2 \frac{\partial^3 w}{\sigma \beta \partial t^2} = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $m_0$, $m_1$, $m_2$ — приведенные массы

$$m_0 = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\delta_j - \delta_{j-1}), \tag{1.7}$$

$$m_1 = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\delta_j^2 - \delta_{j-1}^2), \tag{1.8}$$

$$m_2 = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3), \tag{1.9}$$

где $\gamma_j$ — удельный вес $j$-го слоя, $\delta_j$ — расстояние $j$-го слоя от координатной поверхности оболочки.

Для усилий и моментов имеем [1]

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2, \\ T_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varkappa_1 + K_{22}\varkappa_2, \\ S &= C_{66}\omega + K_{66}\tau \end{aligned} \tag{1.10}$$

и

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2, \\ M_2 &= D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2, \\ H &= D_{66}\tau + K_{66}\omega, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$\begin{aligned} C_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} B_{ik}^{j}(\delta_j - \delta_{j-1}), \\ K_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} B_{ik}^{j}(\delta_j^2 - \delta_{j-1}^2), \\ D_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} B_{ik}^{j}(\delta_j^3 - \delta_{j-1}^3), \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$B_{11}^{j} = \frac{E_1^j}{1-\mu_1^j\mu_2^j}, \quad B_{22}^{j} = \frac{E_2^j}{1-\mu_1^j\mu_2^j}, \quad B_{12}^{j} = \mu_1^j E_2^j = \mu_2^j E_1^j, \quad B_{66}^{j} = G_{12}^{j}. \tag{1.13}$$

Деформации срединной поверхности выражаются соотношениями [9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial \beta} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2, \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}, \tag{1.15}$$

которые удовлетворяют уравнению неразрывности (1.6).

Пренебрегая тангенциальными составляющими сил инерции* и представляя усилия $T_1$, $T_2$ и $S$ посредством функции напряжений следующим образом

---

* Необходимо отметить, что, вообще говоря, пренебрежение тангенциальными составляющими сил инерции и сохранение инерционных членов типа $\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial t^2}$ и $\frac{\partial^3 w}{\partial \beta \partial t^2}$ не строго. Это сделано с целью получения результатов в замкнутой форме.

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
T_2 &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
S &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}
\end{aligned}
\tag{1.16}
$$

(при $X = Y = 0$), тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (1.1) и (1.2). На основании (1.14)—(1.16) из уравнений (1.3)—(1.6) получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений движения

$$
\begin{aligned}
a_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} &+ (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \\
&+ P_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + (P_{12} + P_{21} - 2P_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + P_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \\
&- Q_1 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial t^2} - Q_2 \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 = 0,
\end{aligned}
\tag{1.17}
$$

$$
\begin{aligned}
(D_{11} - D_{11}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} &+ 2 (D_{12} - D_{12}^0 + 2D_{66} - 2D_{66}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + (D_{22} - D_{22}^0) \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \\
&- k_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - k_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - P_{11} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4} - (P_{12} + P_{21} - 2P_{66}) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - P_{22} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \beta^4} - \\
&- \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \\
&+ (Q' - m_2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial t^2} + (Q'' - m_2) \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^2 \partial t^2} + (m_0 + k_1 m_1 + k_2 m_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\
&+ m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z(\alpha, \beta, t) = 0,
\end{aligned}
\tag{1.18}
$$

где введены следующие обозначения

$$
a_{11} = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{C_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad \Omega = C_{11} C_{22} - C_{12}^2, \tag{1.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_{11} = a_{11} K_{12} - a_{12} K_{11}, \quad P_{12} = a_{11} K_{22} - a_{12} K_{12}, \\
&P_{21} = a_{22} K_{11} - a_{12} K_{12}, \quad P_{22} = a_{22} K_{12} - a_{12} K_{22}, \quad P_{66} = a_{66} K_{66},
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

$$
Q_1 = (a_{11} - a_{12}) m_1, \quad Q_2 = (a_{22} - a_{12}) m_1, \tag{1.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_{11}^0 = P_{11} K_{12} + P_{21} K_{11}, \quad D_{22}^0 = P_{22} K_{12} + P_{12} K_{22}, \\
&D_{12} = D_{21}^0 = P_{22} K_{11} + P_{12} K_{12} = P_{11} K_{22} + P_{21} K_{12}, \quad D_{66}^0 = K_{66} P_{66}.
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

$$
Q' = K_{11} Q_2 + K_{12} Q_1, \quad Q'' = K_{22} Q_1 + K_{12} Q_2. \tag{1.23}
$$

В системе (1.17), (1.18), заменив $Z(\alpha, \beta, t)$ выражением [12]

$$T_1^0(\alpha, \beta, t)\varkappa_1 + T_2^0(\alpha, \beta, t)\varkappa_2 \tag{1.24}$$

получим уравнения динамической устойчивости оболочки.

2. Пусть прямоугольная в плане $(a\times b)$оболочка радиально оперта по четырем краям. Представив решение системы уравнений (1.17) и (1.18) в виде

$$\begin{gathered} w(\alpha, \beta, t) = f_{mn}(t)\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta, \\ \varphi(\alpha, \beta, t) = \Phi_{mn}(t)\sin\lambda_n\alpha\sin\mu_m\beta, \\ \lambda_n = n\pi/a \quad \mu_m = m\pi/b, \end{gathered} \tag{2.1}$$

тождественно удовлетворим граничным условиям.

Применяя к системе уравнений (1.17) и (1.18) вариационный метод Бубнова-Галеркина, в силу (1.24) и (2.1), для определения $f_{mn}(t)$ получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами

$$\ddot{f}_{mn} - \gamma_{mn}\dot{f}_{mn}f_{mn} + \omega^2\left[1 - \frac{T_1^{omn}(t)}{T_{1_*}^{mn}} - \frac{T_2^{omn}(t)}{T_{2_*}^{mn}}\right]f_{mn} - \alpha_{mn}f_{mn}^2 + \beta_{mn}f_{mn}^3 = 0. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\omega_{mn}^2 = \frac{k_{mn}}{M_{mn}}, \qquad T_{1_*}^{mn} = \frac{k_{mn}}{\lambda_n^2}, \qquad T_{2_*}^{mn} = \frac{k_{mn}}{\mu_m^2} \tag{2.3}$$

соответственно частота собственных поперечных колебаний и критические значения $T_1^0$ и $T_2^0$ при их независимом статическом действии,

$$\alpha_{mn} = \frac{16\lambda_n\mu_m}{abM_{mn}}\left[\frac{k_1\mu_m^2 + k_2\lambda_n^2 - P_{11}\lambda_n^4 - (P_{12} + P_{21} - 2P_{66})\lambda_n^2\mu_m^2 - P_{22}\mu_m^4}{a_{11}\lambda_n^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{22}\mu_m^4}\right], \tag{2.4}$$

$$\beta_{mn} = \frac{512}{9M_{mn}}\frac{\lambda_n^2\mu_m^2}{a^2b^2}\frac{1}{a_{11}\lambda_n^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{22}\mu_m^4}, \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{mn} = \frac{32}{3M_{mn}}\left[\frac{2}{3}\frac{\lambda_n^2 + \mu_m^2}{\pi^2 mn}m_1 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_n\mu_m}{ab}\frac{Q_1\lambda_n^2 + Q_2\mu_m^2}{a_{11}\lambda_n^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{22}\mu_m^4}\right], \end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered} k_{mn} = (D_{11} - D_{11}^0)\lambda_n^4 + 2(D_{12} - D_{21}^0 + 2D_{66} - 2D_{66}^0)\lambda_n^2\mu_m^2 + (D_{22} - D_{22}^0)\mu_m^4 + \\ + \frac{[k_1\mu_m^2 + k_2\lambda_n^2 - P_{11}\lambda_n^2 - (P_{12} + P_{21} - 2P_{66})\lambda_n^2\mu_m^2 - P_{22}\mu_m^4]^2}{a_{11}\lambda_n^4 + (a_{66} - 2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2 + a_{22}\mu_m^4}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$M_{mn} = m_0 + (k_1 + k_2)m_1 + (\lambda_n^2 + \mu_m^2)m_2 - (Q'\lambda_n^2 + Q''\mu_m^2) -$$

$$-\frac{(Q_1\lambda_n^2+Q_2\mu_m^2)\,[k_1\mu_m^2+k_2\lambda_n^2-P_{11}\lambda_n^4-(P_{12}+P_{21}-2P_{66})\lambda_n^2\mu_m^2-P_{22}\mu_m^4]}{a_{11}\lambda_n^4+(a_{66}-2a_{12})\lambda_n^2\mu_m^2+a_{22}\mu_m^4}. \tag{2.8}$$

Пусть усилия, характеризующие невозмущенное состояние оболочки изменяются во времени по периодическому закону

$$T_i^0=T_{i0}+T_{it}\cos\theta t. \tag{2.9}$$

Тогда уравнение (2.2) примет вид

$$f''-\gamma f''f+\Omega^2(1-2\mu\cos\theta t)f-\alpha f^2+\beta f^3=0, \tag{2.10}$$

где

$$\Omega^2=\omega^2\left(1-\frac{T_{10}T_{2*}+T_{20}T_{1*}}{T_{1*}T_{2*}}\right), \tag{2.11}$$

$$\mu=\frac{1}{2}\,\frac{T_{1t}T_{2*}+T_{2t}T_{1*}}{T_{1*}T_{2*}-T_{10}T_{2*}-T_{20}T_{1*}}. \tag{2.12}$$

Индексы $m$ и $n$ опущены, поскольку уравнение идентично для всех форм колебаний.

Уравнение (2.10) представляет собой уравнение параметрически возбуждаемых колебаний оболочек.

Из формул (2.3) и (2.8) видно, что третье слагаемое в (2.8), учитывающее инерцию вращения, приводит к уменьшению частоты собственных колебаний; второе, четвертое и пятое слагаемые, в зависимости от степени пологости оболочки, могут привести как к уменьшению, так и к увеличению частоты собственных колебаний.

Второй член в уравнениях (2.2) или (2.10) в некоторой степени (т. к. в первых двух уравнениях движения учитываются лишь те инерционные члены, которые возникают от нормального перемещения $w$) характеризует нелинейную инерционность системы.

Решения уравнения (2.10) ищем в виде

$$f=f_0+f_1\cos\frac{\theta t}{2}, \qquad f=f_0+f_1\sin\frac{\theta t}{2} \tag{2.13}$$

соответственно для нижней и верхней границ главной области неустойчивости [12]

$$\theta^2\approx4\Omega^2(1\mp\mu). \tag{2.14}$$

Подставив (2.13) в уравнение (2.10) и пренебрегая влиянием высших гармоник, получим

$$\begin{gathered}\beta f_0^3-\alpha f_0^2+\Omega^2 f_0-\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\theta^2}{4}\gamma-3\beta f_0\right)f_1^2=0,\\ f_1^2-\frac{1}{3\beta}(\theta^2-\theta_*^2)-\frac{4}{3\beta}\left[\left(2\alpha-\frac{\theta^2}{4}\gamma\right)f_0-3\beta f_0^2\right]=0.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Принимая $f_0\ll f_1$, из системы уравнений (2.15) получим

$$f_1^2=\frac{1}{3\beta}\left[\theta^2-\theta_*^2+A\pm\sqrt{(\theta^2-\theta_*^2+A)^2+8\Omega^2(\theta^2-\theta_*^2)}\right]. \tag{2.16}$$

где

$$A=\frac{8}{3\beta}\left(\alpha-\frac{\theta^2}{4}\gamma\right)\left(\alpha-\frac{\theta^2}{8}\gamma\right)-2\Omega^2. \tag{2.17}$$

Здесь возможны следующие случаи

$$A<0, \qquad A>0, \qquad A=0. \tag{2.18}$$

В первом случае для $f_1^2$ имеем только одно положительное значение и характер установления резонансных колебаний качественно не будет отличаться от случая симметрично-собранной слоистой ортотропной пластинки.

В случае же $A>0$ обнаруживается явление динамического хлопка оболочки — после входа оболочки в резонанс наблюдается падение частоты до некоторого нижнего критического значения $\theta_k$, которое определяется из уравнения

$$(\theta_k^2-\theta_*^2+A)^2+8\Omega^2(\theta_k^2-\theta_*^2)=0.$$

Условие $A=0$ занимает предельное положение и определяет значения параметров оболочки, при которых динамический хлопок невозможен.

Рассматривая формулы (2.4) и (2.17), замечаем, что, в отличие от симметрично-собранных пластинок, здесь, в случае пластинки, $\alpha\neq 0$, $\gamma\neq 0$. В этом случае, при определенном расположении слоев пластинки, возможно выполнение условия $A>0$, что может привести к хлопку пластинки, а, следовательно, возникнет необходимость определения нижних критических частот параметрического резонанса пластинок. В случае оболочек возможно обратное явление, т. е. при определенном расположении слоев оболочки возможно уменьшение склонности оболочки к хлопку.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 I 1962

Վ. Ց. Գնունի

## ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՃԿՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ԳՐԳՌՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հոդվածում դիտարկվում է շերտավոր անիզոտրոպ ճկուն թաղանթների պարամետրական գրգռումների խնդիրը։*

*Հաշվված են կայունացված տատանումների ամպլիտուդները անկայունության տիրույթներում։*

*Ապացուցվում է, որ թաղանթի շերտերի որոշակի դասավորվածության դեպքում հաճախականության իջեցում, թաղանթը ռեզոնանսի մեջ ընկնելուց հետո, տեղի չունի։ Ապացուցվում է նաև, որ հաճախականության այդպիսի անկում կարող է տեղի ունենալ ոչ սիմետրիկ հավաքած սալերի պարամետրական տատանումներում։*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **6**, № 3, 1953.
2. *Амбарцумян С. А* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. *Болотин В. В.* Устойчивость тонкостенной сферической оболочки под действием периодического давления. Расчеты на прочность, в. 2, 1958.
4. *Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 1, 1960.
5. *Багдасарян Ж. Е., Гнуни В. Ц.* К теории динамической устойчивости слоистых анизотропных оболочек вращения. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 5, 1960.
6. *Болотин В. В.* Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости пластин. Известия АН СССР, ОТН, № 10, 1954.
7. *Мишенков Г. В.* Некоторые нелинейные задачи динамической устойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
8. *Гнуни В. Ц.* К теории нелинейной динамической устойчивости оболочек. Известия АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 4, 1961.
9. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, М., 1956.
10. *Агамиров В. Л., Вольмир А. С.* Поведение цилиндрических оболочек при динамическом нагружении всестороннего давления или осевого сжатия. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1959.
11. *Гнуни В. Ц.* О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
12. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
13. *Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.* О динамической устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок. ПММ, **25**, в. 4, 1961.
14. *Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.* О вынужденных колебаниях и динамической устойчивости трехслойных ортотропных пластинок. Известия АН СССР, ОТН, мех. и маш., № 3, 1961.
15. *Амбарцумян С. А., Багдасарян Ж. Е., Гнуни В. Ц.* Некоторые нелинейные динамические задачи трехслойных анизотропных пластин и оболочек. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Львов, 1962.
16. *Гнуни В. Ц.* Об устойчивости несимметрично-собранных слоистых гибких пологих оболочек. ДАН АрмССР, **34**, № 3, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. С. Космодамианский

# Кручение и изгиб поперечной силой ортотропных стержней с полостями

Задача о кручении и изгибе поперечной силой эллиптических или круговых стержней с эллиптическими или круговыми полостями приводится, как известно, к аналогичным задачам для изотропных стержней с полостями, поперечные сечения которых получаются из заданных путем аффинного преобразования [1].

Для случая кручения эллиптического изотропного стержня, ослабленного одной эллиптической полостью, Д. И. Шерман получил интегральное уравнение Фредгольма, решение которого привело к эффективному построению искомого решения [2].

Учитывая результаты указанной работы Д. И. Шермана, мы строим приближенное решение задачи о напряженном состоянии ортотропного стержня, ослабленного несколькими полостями, при его кручении и изгибе поперечной силой. Эта приближенность получается за счет неточного удовлетворения граничных условий. Погрешность полученных решений выяснена путем вычисления напряжений в отдельных точках контуров, где напряжения заданы.

1. Рассмотрим эллиптический ортотропный стержень с $(n-1)$ эллиптическими полостями. В поперечном сечении стержня полуоси внешнего эллипса равны $a$ и $b$, а полуоси внутренних—$a_k$ и $b_k$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$. Расстояния от центра внешнего эллипса до центров внутренних эллипсов равны $l_k$. Контур внешнего эллипса обозначим через $L$, а внутренних—через $L_k$ (фиг. 1).

Стержень закручивается моментами $M$.

Задача о напряженном состоянии такого стержня сводится к определению функции напряжений $\psi$, удовлетворяющей уравнению ([1], стр. 149).

$$a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a_{55}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-2\vartheta. \tag{1.1}$$

При этом на контурах поперечного сечения стержня $\psi=C_k$, где $C_k$ — постоянные, разные на разных контурах.

Угол закручивания $\vartheta$ определяется из уравнения

$$2\iint\psi\,dx\,dy=M. \tag{1.2}$$

Здесь интегрирование ведется по площади поперечного сечения стержня.

Определив функцию $\psi$, неравные нулю напряжения найдем по формулам

$$\tau_{xz_1} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1.3}$$

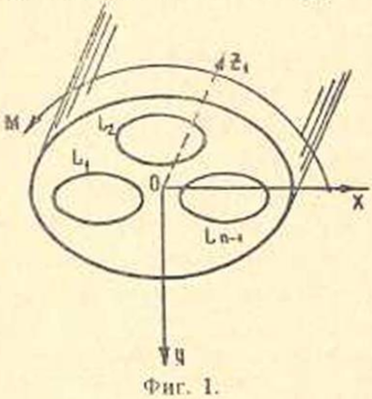
Введем новые переменные

$$x_1 = x, \quad y_1 = \beta y \quad \left(\beta = \sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}\right). \tag{1.4}$$

В этих переменных уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} = -\frac{2}{a_{44}}\vartheta = -2G_1\vartheta. \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что задача о кручении ортотропного стержня приводится к задаче кручения изотропного стержня, поперечное сечение которого получилось из заданного путем аффинного преобразования (1.4). В частности, стержень эллиптический (или круговой) в преобразованной области также будет эллиптическим. При этом в его поперечном сечении горизонтальная ось останется без изменения, а вертикальная увеличится или уменьшится в зависимости от значения коэффициента $\beta$, характеризующего анизотропию рассматриваемого стержня.




Фиг. 1.

После определения в преобразованной области функции $\psi(x_1, y_1)$ напряжения следует находить по формулам

$$\tau_{xz_1} = \beta\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \quad \tau_{yz_1} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{1.6}$$

Для определения жесткости ортотропного стержня имеем уравнение

$$\iint (x\tau_{yz_1} - y\tau_{xz_1})\, dx\, dy = M. \tag{1.7}$$

В преобразованной области напряжения $\tau_{x_1z_1}$ и $\tau_{y_1z_1}$ выражаются через функцию $\psi(x_1 y_1)$

$$\tau_{x_1z_1} = \frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \quad \tau_{y_1z_1} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{1.8}$$

Из (1.6) и (1.8) следует, что

$$\tau_{xz_1} = \beta\tau_{x_1z_1} = \beta G_1\vartheta\bar{\tau}_{x_1z_1}, \quad \tau_{yz_1} = \tau_{y_1z_1} = G_1\vartheta\bar{\tau}_{y_1z_1}. \tag{1.9}$$

Подставим, далее, (1.4) и (1.9) в уравнение (1.7). Получим

$$\frac{1}{\beta} G_1 \vartheta \iint (x_1 \bar{\tau}_{y_1 z_1} - y_1 \bar{\tau}_{x_1 z_1})\, dx_1 dy_1 = M. \tag{1.10}$$

Отсюда найдем

$$G_1 \vartheta = \frac{\beta M}{D}, \quad D = \iint (x_1 \bar{\tau}_{y_1 z_1} - y_1 \bar{\tau}_{x_1 z_1})\, dx_1\, dy_1. \tag{1.11}$$

Здесь $D$ — жесткость изотропного стержня, поперечное сечение которого получается путем применения соотношений (1.4).

Сначала мы решим задачу о кручении изотропного стержня, используя теорию Н. И. Мусхелишвили ([3], стр. 518), а затем по формулам

$$\tau_{xz_1} = \frac{\beta^2 M}{D} \bar{\tau}_{x_1 z_1}, \quad \tau_{yz_1} = \frac{\beta M}{D} \bar{\tau}_{y_1 z_1} \tag{1.12}$$

найдем напряжения, возникающие в ортотропном стержне.

Задача о напряженном состоянии изотропного эллиптического стержня с $(n-1)$ эллиптическими полостями приводится к определению функции комплексного переменного $F(z)$, регулярной в области поперечного сечения стержня. Эта функция определяется из следующих граничных условий ([3], стр. 524)

$$F(t) - \overline{F(t)} = it\bar{t} + C_m, \tag{1.13}$$

где $t$ — аффикс точки на одном из контуров поперечного сечения стержня, а $C_m$ — постоянные $(m = 1, 2, \cdots, n-1)$.

Функцию $F(z)$ можно представить в виде [2]

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z) + \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{mp}}{[\zeta(z - l_m)]^p}. \tag{1.14}$$

Здесь $a_k$ и $b_{mp}$ — постоянные коэффициенты, $P_k(z)$ — полиномы Фабера для области внешнего эллипса, $l_m$ — расстояния от центра внешнего эллипса до центров внутренних, а функция $\zeta$ связана с $z$ следующей неявной зависимостью

$$z - l_m = R_m \left(\zeta + \frac{m_m}{\zeta}\right). \tag{1.15}$$

где $R_m$ и $m_m$ — постоянные, характеризующие размеры внутренних эллипсов и их взаимное расположение.

Как и в работе [4], будем искать приближенное решение поставленной задачи в виде

$$F(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k P_k(z) + \sum_{m=1}^{n} \sum_{p=1}^{s} \frac{b_{mp}}{[\zeta(z - l_m)]^p}. \tag{1.16}$$

При рассмотрении граничного условия на контуре $L'$ введем преобразование

$$t = R\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right), \quad R = \frac{a + \beta b}{2}, \quad m = \frac{a - \beta b}{a + \beta b}, \tag{1.17}$$

а на контурах $L'_m$

$$t - t'_m = R_m\left(\sigma + \frac{m_m}{\sigma}\right), \quad R_m = \frac{a_m + \beta b_m}{2}, \quad m_m = \frac{a_m - \beta b_m}{a_m + \beta b_m}. \tag{1.18}$$

Здесь $\sigma = e^{i\theta}$ ($\theta$ — полярный угол).

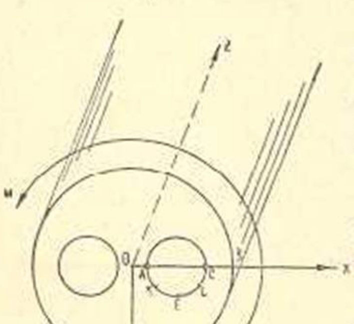
Учитывая преобразования (1.17) и (1.18), граничным условиям можно придать следующий вид

$$f(\sigma) = F[t(\sigma)] - \overline{F[t(\sigma)]} - it(\sigma)\overline{t(\sigma)} - C_m = 0. \tag{1.19}$$

Потребуем, чтобы функция $f(\sigma)$ была ортогональна к первым $n$ функциям $\sigma^{\pm n}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$, которые представляют из себя полную систему функций на контуре единичного круга $\gamma$, где определена переменная $\sigma$. Таким путем мы при приближенном удовлетворении граничных условий, как и в работе [5], применяем основную идею метода Бубнова-Галеркина.

Тогда для определения искомых постоянных получим следующие соотношения

$$\int\limits_{\gamma} \{F[t(\sigma)] - \overline{F[t(\sigma)]} - it(\sigma)\overline{t(\sigma)} - C_m\}\sigma^{\pm n}\,d\sigma = 0. \tag{1.20}$$



Фиг. 2.

При внесении в формулы (1.20) выражений $F[t(\sigma)]$ следует воспользоваться выражением (1.16) и преобразованиями (1.17) или (1.1 ) в зависимости от того, для какого контура мы рассматриваем граничное условие.

2. В качестве примера рассмотрим круглый ортотропный стержень с двумя круговыми полостями (фиг. 2).

Для решения задачи о кручении такого стержня необходимо рассмотреть, как это следует из п. 1, изотропный стержень, поперечное сечение которого будет являться эллипсом с двумя эллиптическими отверстиями (фиг. 3).

Следует подчеркнуть, что задача о кручении ортотропного эллиптического стержня с эллиптическими полостями также приводится к рассмотрению изотропного эллиптического стержня с эллиптическими же полостями. Новых трудностей в этой задаче не появляется.

Для рассматриваемого стержня функция $F(z)$ примет вид [4]

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} ia_k^*\left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} ib_k^*\left\{\frac{1}{[\zeta_1(z-l_1')]^k} + \frac{(-1)^k}{[\zeta_2(z+l_1')]^k}\right\}. \tag{2.1}$$

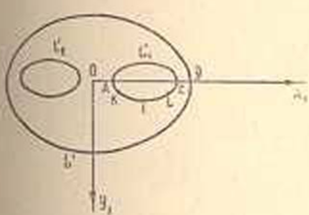
Для сплошного стержня точное решение задачи о кручении эллиптического стержня получается, если положить

$$F(z) = ia_2^*\left(\zeta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2}\right). \tag{2.2}$$

Поэтому при решении аналогичной задачи для стержня с полостями в 1-ом приближении в выражении (1.16) естественно принять $\nu = 2$. Тогда

$$F(z) = ia_2^*\left(\zeta^2 + \frac{m^2}{\zeta^2}\right) + ib_1^*\left\{\frac{1}{\zeta_1(z-l_1')} - \frac{1}{\zeta_2(z+l_1')}\right\} +$$

$$+ ib_2^*\left\{\frac{1}{[\zeta_1(z-l_1')]^2} + \frac{1}{[\zeta_2(z+l_1')]^2}\right\}. \tag{2.3}$$



Фиг. 3.

При рассмотрении граничных условий на $L_1'$ мы воспользовались представлением функции $1/[\zeta_2(z+l')]^k$ в виде

$$1/[\zeta_2(z+l')]^k = \sum_{m=1} A_{mk} P_{mk}(z-l'), \tag{2.4}$$

где $P_{mk}$—полиномы Фабера для эллипса $L_1'$. Коэффициенты $A_{mk}$ определяются по формуле ([6], стр. 422)

$$A_{mk} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta_2^k}\frac{d\sigma}{\sigma^{m+1}}. \tag{2.5}$$

Здесь учтено преобразование (1.18).

При рассмотрении же граничных условий на $L$ функции $1/\zeta_1$ и $1/\zeta_2$ раскладывались в ряды Лорана.

После проведения указанных разложений и интегрирования, соотношения (1.20) приведутся к алгебраической системе вида

$$\begin{gathered}
a_2^*(1+m^2) + 2l\frac{R_1}{R^2}b_1^* + 2\frac{R_1^2}{R^2}b_2^* = R^2 m,\\
b_1^*\left(\frac{1}{1+m_1} - A_{11}\right) + A_{12}b_2^* + 2l\frac{R_1}{R^2}a_2^* = lR_1,\\
-A_{21}b_1^* + b_2^*\left(\frac{1}{1+m_1^2} + A_{22}\right) + \frac{R_1^2}{R^2}a_2^* = \frac{R_1^2 m_1}{1+m_1^2}.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Во втором приближении в выражении (1.16) примем $\nu = 4$. Тогда алгебраическая система для определения искомых постоянных будет такой

$$a_2^*(1+m^2)+2l\frac{R_1}{R^2}b_1^*+2\frac{R_1^2}{R^2}=R^2m,$$

$$a_4^*(1+m^4)+2l\frac{R_1}{R^4}b_1^*[l^2+m_1(3R_1^2-R^2)-mR^2]+$$

$$+2b_2^*\frac{R_1^2}{R^4}[3l^2+2m_1(R_1^2-R^2)]+6l\frac{R_1^3}{R^4}b_3^*+2\frac{R_1^4}{R^4}b_4^*=0,$$

$$2l\frac{R_1}{R^2}a_2^*+b_1^*\left(\frac{1}{1+m_1}-A_{11}\right)+A_{12}b_2^*-A_{13}b_3^*+A_{14}b_4^*+$$

$$+a_4^*\frac{l}{R^4}(4l^2R_1+12m_1R_1^3-8mR_1R^2)=lR_1,$$

$$R_1^2/R^2\cdot(a_2^*-4ma_4^*)+2\frac{a_4^*}{R^4}R_1^2(3l^2+2m_1R_1^2)-A_{21}b_1^*+$$

$$+b_2^*\left(\frac{1}{1+m_1^2}+A_{22}\right)-A_{23}b_3^*+A_{24}b_4^*=\frac{R_1^2m_1}{1+m_1^2},\qquad(2.7)$$

$$4l\frac{R_1^3}{R^4}a_4^*-A_{31}b_1^*+A_{32}b_2^*+b_3^*\left(\frac{1}{1+m_1^3}-A_{33}\right)+A_{34}b_4^*=0,$$

$$\frac{R_1^4}{R^4}a_4^*-A_{41}b_1^*+A_{42}b_2^*-A_{43}b_3^*+b_4^*\left(\frac{1}{1+m_1^4}+A_{44}\right)=0.$$

Определение коэффициентов, не влияющих на напряженное состояние стержня, мы здесь не приводим.

Для определения жесткости стержня воспользуемся формулой Н. И. Мусхелишвили ([3], стр. 529)

$$D=\mu(J+D_0),\qquad(2.8)$$

где

$$J=\frac{1}{4i}\int_\gamma\overline{\omega^2(\sigma)}\,\omega(\sigma)\,d\omega(\sigma),\quad D_0=-\frac{1}{4}\int_\gamma[F(\sigma)+\overline{F(\sigma)}]\,d\,[\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}].\qquad(2.9)$$

После некоторых преобразований в 1-ом приближении будем иметь

$$J=\frac{\pi}{2}R^4(1-m^4)-\pi[2l_1'^2R_1^2(1-m_1^2)+R_1^4(1-m_1^4)],\qquad(2.10)$$

$$D_0=-2\pi mR^2\left[a_2^*(1-m^2)-\frac{2l_1'R_1}{R^2}b_1^*-\frac{2R_1^2}{R^2}b_2^*\right]+$$

$$+2R_1\pi\left[2\frac{R_1}{R^2}a_2^*(l_1'^2+m_1R_1^2)-b_1^*\left(\frac{l_1'}{1-m_1}+A_{11}l_1'+2m_1R_1A_{21}\right)+\right.$$

$$\left.+b_2^*\left(A_{12}l_1'-\frac{2m_1R_1}{1-m_1^2}+2A_{22}m_1R_1\right)\right]\cdot$$

В рассмотренных нами примерах жесткость во 2-ом приближении незначительно отличается от жесткости, полученной в 1-ом приближении. Поэтому выражения для жесткости во 2-ом приближении мы здесь не приводим.

Вычисления для напряжений в наиболее интересных точках поперечного сечения стержня были проведены для $\beta = 1$ и $\beta = \frac{1}{2}$, когда $l_1/a = \frac{1,5}{3,5}$, $l_1'/a_1 = 1,5$. Для этих случаев в таблице 1 приведены значения постоянных $a_j^*$ и $b_j^*$, а в таблице 2—значения напряжений $\tau_{yz_1}$, $\tau_{xz_1}$ и $\tau_{nz_1}$. Вычисления для напряжений $\tau_{xz_1}$ и $\tau_{yz_1}$ были проведены на основании формул (1.12), где ([3], стр. 525)

$$\bar{\tau}_{xz_1} - i\bar{\tau}_{yz_1} = F'(z) - i\bar{z}, \tag{2.11}$$

а напряжения $\tau_{nz_1}$ определяются через напряжения $\tau_{xz_1}$ и $\tau_{yz_1}$

$$\tau_{nz_1} = \tau_{yz_1} \cos(nx) + \tau_{xz_1} \cos(ny). \tag{2.12}$$

*Таблица 1*

| $\beta$ | Приближения | Коэффициенты | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a_2^*$ | $a_4^*$ | $b_1^*$ | $b_2^*$ | $b_3^*$ | $b_4^*$ |
| $\frac{1}{2}$ | 1-ое | 1,880 | 0 | 0,623 | 0,030 | 0 | 0 |
| | 2-ое | 1,876 | 0,052 | 0,635 | 0,027 | −0,006 | 0,001 |
| 1 | 1-ое | −0,365 | 0 | 1,436 | 0,080 | 0 | 0 |
| | 2-ое | −0,368 | −0,072 | 1,443 | 0,086 | −0,013 | 0,006 |

*Таблица 2*

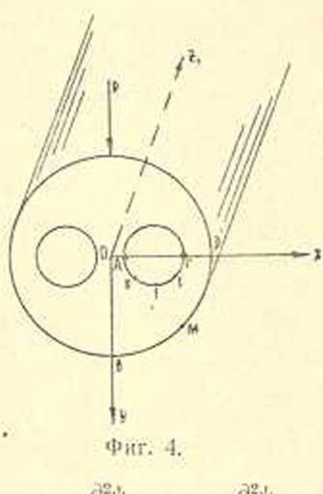
| $\beta$ | Напряж. | Приближения | Точки | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $A$ | $K$ | $E$ | $L$ | $C$ | $D$ | $M$ | $B$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{100\tau_{yz}}{M}$ | 1-ое | 1,423 | 0,106 | 0,010 | 0,758 | 2,879 | 1,994 | 1,198 | 0 |
| | | 2-ое | 1,421 | 0,136 | −0,001 | 0,785 | 2,829 | 1,858 | 1,236 | 0 |
| | $\frac{100\tau_{xz}}{M}$ | 1-ое | 0 | 0,115 | −0,404 | −0,769 | 0 | 0 | −1,202 | −1,478 |
| | | 2-ое | 0 | 0,134 | −0,410 | −0,785 | 0 | 0 | −1,239 | −1,437 |
| | $\frac{100\tau_{nz}}{M}$ | 1-ое | 0 | 0,007 | 0,010 | −0,008 | 0 | 0 | −0,003 | 0 |
| | | 2-ое | 0 | 0,001 | −0,001 | 0,0002 | 0 | 0 | −0,002 | 0 |
| 1 | $\frac{100\tau_{yz_1}}{M}$ | 1-ое | 0,713 | 0,369 | 0,020 | 1,038 | 2,022 | 1,961 | 1,185 | 0 |
| | | 2-ое | 0,682 | 0,398 | −0,004 | 1,053 | 2,038 | 2,002 | 1,157 | 0 |
| | $\frac{100\tau_{xz_1}}{M}$ | 1-ое | 0 | 0,384 | −0,340 | −1,059 | 0 | 0 | −1,170 | −1,530 |
| | | 2-ое | 0 | 0,391 | −0,339 | −1,050 | 0 | 0 | −1,147 | −1,569 |
| | $\frac{100\tau_{nz_1}}{M}$ | 1-ое | 0 | −0,008 | 0,020 | −0,015 | 0 | 0 | 0,011 | 0 |
| | | 2-ое | 0 | 0,004 | −0,004 | 0,002 | 0 | 0 | 0,007 | 0 |

Значения $\tau_{nz_1}$, вычисленные в выбранных нами точках, позволяют оценить погрешность в удовлетворении граничных условий. Из таблицы 2 видно, что значения $\tau_{nz_1}$, вычисленные во втором приближении, составляют менее 0,5% от максимального напряжения, возникающего в стержне. Это говорит о высокой точности полученного решения. Сравнение напряжений, вычисленных в 1-ом и 2-ом приближениях, позволяет оценить быстроту сходимости примененного метода. Это сравнение показывает, что уже 1-ое приближение приводит к достаточно точным результатам.

Для эллиптического изотропного стержня с двумя эллиптическими полостями, когда $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = 2$, напряжения $\tau_{yz_1}$ и $\tau_{xz_1}$ можно найти путем использования таблицы 2. Для этой цели нужно значения напряжений $\tau_{yz_1}$, приведенные в таблице 2 для $\beta = \frac{1}{2}$, умножить на 2, а $\tau_{xz_1}$ — на 4.

Таблица 2 устанавливает также влияние анизотропии на концентрацию напряжений в рассматриваемом стержне. Известно, что напряжения в сплошном анизотропном стержне получаются такими же, как и в изотропном стержне той же формы ([1], стр. 153). В стержне же с полостями анизотропия заметно влияет на напряженное состояние.

В изотропном эллиптическом стержне с двумя эллиптическими полостями концентрация напряжений получается примерно такой же, как и в сплошном стержне. Здесь применение полостей при уменьшении веса стержня не вносит заметного увеличения концентрации напряжений.



Фиг. 4.

3. Пусть эллиптический ортотропный стержень с двумя эллиптическими полостями (фиг. 3) или круглый стержень с двумя круговыми полостями (фиг. 4) изгибается силой $P$.

Задача о напряженном состоянии такого стержня приводится к определению функции напряжений $\psi_1$, удовлетворяющей уравнению ([1], стр. 219)

$$a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + a_{55}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2} = -\frac{2P}{J}a_{13}x - 2\theta + a_{44}\frac{\partial\tau_2}{\partial x} - a_{55}\frac{\partial\tau_1}{\partial y} \qquad (3.1)$$

и граничным условиям

$$\psi_1 = \int_0^s (\tau_2 dx - \tau_1 dy) + c_m^*. \qquad (3.2)$$

Здесь $\tau_1$ и $\tau_2$ — частное решение уравнения

$$\frac{\partial\tau_{xz_1}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz_1}}{\partial y}-\frac{P}{J}y=0, \tag{3.3}$$

а $c_m^*$—постоянные.

Напряжения, возникающие в стержне, представляются в виде

$$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0, \quad \sigma_{z_1}=-\frac{P}{J}z_1 y,$$
$$\tau_{xz_1}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\tau_1, \quad \tau_{yz_1}=-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\tau_2. \tag{3.4}$$

В работе [1] показано, что функция напряжений $\psi_1$ может быть выражена через функцию обобщенного комплексного переменного $z_3$

$$\psi_1=2\mathrm{Re}\,[\Phi_3(z_3)]+\psi_0, \tag{3.5}$$

где $\psi_0$—частное решение уравнения (3.1),

$$z_3=x+i\beta y, \quad \beta=\sqrt{\frac{a_{44}}{a_{55}}}. \tag{3.6}$$

Функция $\Phi_3(z_3)$ определяется из граничных условий на контурах отверстий поперечного сечения стержня

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_3(z_3)]=c_m^*-\psi_0+\int_0^s(\tau_2 dx-\tau_1 dy). \tag{3.7}$$

После определения функции $\psi_1$ касательные напряжения определяются по формулам

$$\tau_{xz_1}=2\mathrm{Re}\,[i\beta\Phi_3'(z_3)]-\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+\tau_1,$$
$$\tau_{yz_1}=-2\mathrm{Re}\,[\Phi_3'(z_3)]-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\tau_2. \tag{3.8}$$

Примем

$$\tau_1=0, \quad \tau_2=\frac{P}{2J}y^2. \tag{3.9}$$

В рассматриваемом случае в силу геометрической и силовой симметрии крутка $\theta$ равна нулю. Это позволяет частное решение (3.1) представить в виде

$$\psi_0=-\frac{P}{J}\frac{a_{13}}{a_{55}}xy^2. \tag{3.10}$$

Граничное условие (3.7) примет вид

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_3(z_3)]=c_m^*+\frac{P}{J}\frac{a_{13}}{a_{55}}xy^2+\frac{P}{2J}\int y^2 dx. \tag{3.11}$$

Касательные напряжения определятся формулами

$$\tau_{xz_1} = 2\mathrm{Re}\,[i\beta\Phi_3'(z_3)] - \frac{2P}{J}\frac{a_{13}}{a_{55}}xy,$$

$$\tau_{yz_1} = -2\mathrm{Re}\,[\Phi_3'(z_3)] + \frac{P}{2J}y^2\left(1 + 2\frac{a_{13}}{a_{55}}\right). \tag{3.12}$$

Функция $\Phi_3(z_3)$ определена в области, изображенной на фиг. 3. Эта область получается из поперечного сечения рассматриваемого стержня путем аффинного преобразования (1.4) таким же образом, как и в задаче о кручении такого же стержня.

В данном случае функцию $\Phi_3(z_3)$ можно представить в виде [7]

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left[\frac{1}{[\zeta_1(z_3 - l_1')]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3 + l_1')]^k}\right]. \tag{3.13}$$

Здесь $\zeta$, $\zeta_1$ и $\zeta_2$ связаны с $z_3$ следующими зависимостями

$$z_3 = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad z_3 - l_1' = R_1\left(\zeta_1 + \frac{m_1}{\zeta_1}\right), \quad z_3 + l_1' = R_1\left(\zeta_2 + \frac{m_1}{\zeta_2}\right),$$

$$m = m_1 = \frac{1 - \beta c}{1 + \beta c}, \quad R = \frac{a}{2}(1 + \beta c), \quad R_1 = \frac{a_1}{2}(1 + c\beta), \quad c = \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}. \tag{3.14}$$

Для сплошного стержня точное решение задачи об изгибе стержня поперечной силой получится, если принять

$$\Phi_3(z_3) = a_1\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) + a_3\left(\zeta^3 + \frac{m^3}{\zeta^3}\right). \tag{3.15}$$

Поэтому при рассмотрении стержня с полостями мы в 1-ом приближении для функции $\Phi_3(z_3)$ примем выражение

$$\Phi_3(z_3) = \sum_{k=1}^{3} a_k\left(\zeta^k + \frac{m^k}{\zeta^k}\right) + \sum_{k=1}^{3} b_k\left\{\frac{1}{[\zeta_1(z_3 - l_1')]^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3 + l_1')]^k}\right\}. \tag{3.16}$$

Поступая таким же образом, как и в задаче о кручении стержня, для определения постоянных $a_k$ и $b_k$ мы получим алгебраическую систему вида

$$a_1(1 + m) + 2\frac{R_1}{R}b_1 = \frac{P}{J}\frac{R^2}{8}(1 + m)(1 - m)^2\left(\frac{a_{13}}{a_{44}} + \frac{3}{2\beta^2}\right),$$

$$a_3(1 + m^3) + b_1\frac{2R_1}{R^3}(l^2 - mR^2 + m_1R^2) + 4b_2 l\frac{R_1^2}{R^3} + 2b_3\frac{R_1^3}{R^3} =$$

$$= -\frac{P}{J}\frac{R^2}{8}(1 + m)(1 - m)^2\left(\frac{a_{13}}{a_{44}} + \frac{1}{6\beta^2}\right).$$

$$\frac{R_1}{R}(a_1-3ma_3)+3a_3\frac{R_1}{R^3}(l^2+m_1R_1^2)+b_1\left(\frac{1}{1+m_1}+A_{11}\right)-b_2A_{12}+$$

$$+b_3A_{13}=\frac{P}{J}\frac{R_1^3}{8}(1-m_1)^2\left(\frac{a_{13}}{a_{44}}+\frac{3}{2\beta^2}\right),$$

$$3a_3l\frac{R_1^2}{R^3}+b_1A_{21}+b_2\left(\frac{1}{1+m_1^2}-A_{22}\right)+b_3A_{23}=$$

$$=-\frac{P}{4J}lR_1^2\frac{a_{13}}{a_{44}}(1-m_1)^2,$$

$$a_3\frac{R_1^3}{R^3}+b_1A_{31}-b_2A_{32}+b_3\left(\frac{1}{1+m_1^3}+A_{33}\right)=$$

$$=-\frac{P}{8J}\frac{(1-m_1)^2}{1+m_1^3}\left(\frac{a_{13}}{a_{44}}+\frac{1}{6\beta^2}\right)R_1^3. \qquad (3.17)$$

Решение этой системы и определение касательных напряжений мы провели для случая, когда $a_{13}/a_{44}=-\frac{1}{10}$, $c=1$, $\frac{l_1'}{a_1}=1{,}5$, $\frac{l_1'}{a}=\frac{1{,}5}{3{,}5}$, $\beta=1$, $\beta=\frac{1}{2}$.

Вычисления напряжений в 1-ом приближении показали, что граничные условия достаточно хорошо удовлетворяются на внутренних контурах и значительно хуже на внешнем контуре. Поэтому во 2-ом приближении мы приняли

$$\Phi_3(z_3)=\sum_{k=1,3}^{5}a_k\left(\zeta^k+\frac{m^k}{\zeta^k}\right)+\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{[\zeta_1(z_3-l_1')]^k}+\frac{(-1)^{k+1}}{[\zeta_2(z_3+l_1')]^k}\right\}. \qquad (3.18)$$

В таблице 3 для этих двух приближений приведены значения постоянных $a_k$ и $b_k$, а в таблице 4—значения для напряжений в тех же точках, что и в задаче о кручении стержня.

*Таблица 3*

| $\beta$ | Приближения | Коэффициенты | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
| $\frac{1}{2}$ | 1-ое | 7,125 | −0,734 | 0 | −2,791 | 0,188 | −0,016 |
| | 2-ое | 7,135 | −0,733 | −0,122 | −2,815 | 0,181 | −0,011 |
| 1 | 1-ое | 9,052 | −0,092 | 0 | −2,711 | 0,154 | −0,043 |
| | 2-ое | 9,054 | −0,092 | 0,047 | −2,714 | 0,151 | −0,045 |

*Таблица 4*

| ε | Напряж. | Приближения | Точки: O | A | K | E | L | C | D | M | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{J}{P}\tau_{yz_1}$ | 1-ое | −11,38 | −20,076 | −3,276 | −0,007 | −3,414 | −14,595 | −4,340 | −1,671 | −0,46 |
| | | 2-ое | −11,37 | −20,037 | −3,321 | −0,005 | −3,480 | −14,693 | −3,674 | −2,092 | −0,11 |
| | $\frac{J}{P}\tau_{xz_1}$ | 1-ое | 0 | 0 | −3,291 | 0,721 | 3,268 | 0 | 0 | 1,860 | 0 |
| | | 2-ое | 0 | 0 | −3,334 | 0,685 | 3,480 | 0 | 0 | 1,935 | 0 |
| | $\frac{J}{P}\tau_{nz_1}$ | 1-ое | — | 0 | 0,011 | −0,007 | −0,103 | 0 | 0 | 0,133 | −0,46 |
| | | 2-ое | | 0 | 0,069 | −0,005 | 0,0003 | 0 | 0 | −0,111 | −0,11 |
| 1 | $\frac{J}{P}\tau_{yz_1}$ | 1-ое | −10,460 | −12,915 | −5,087 | 0,037 | −5,461 | −10,503 | −6,531 | −2,300 | 0,10 |
| | | 2-ое | −10,464 | −12,923 | −5,083 | −0,038 | −5,450 | −10,570 | −6,671 | −2,300 | −0,02 |
| | $\frac{J}{P}\tau_{xz_1}$ | 1-ое | 0 | 0 | −5,160 | 1,300 | 5,485 | 0 | 0 | 2,143 | 0 |
| | | 2-ое | 0 | 0 | −5,171 | 1,281 | 5,475 | 0 | 0 | 2,276 | 0 |
| | $\frac{J}{P}\tau_{nz_1}$ | 1-ое | — | 0 | 0,052 | −0,037 | 0,017 | 0 | 0 | −0,111 | 0,10 |
| | | 2-ое | | 0 | 0,062 | −0,038 | 0,018 | 0 | 0 | −0,017 | −0,02 |

Здесь наибольшая погрешность в граничных условиях во 2-ом приближении не превышает 0,5%.

Таблица 4 позволяет установить сильное влияние анизотропии для стержня с полостями, в то время как для сплошного стержня это влияние незначительно ([1], стр. 226).

Саратовский Государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступила 25 I 1962

**Ա. Ս. Կոսմոդամիանսկի**

## ԽՈՌՈՉՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՁՈՂԵՐԻ ՈԼՈՐՈՒՄՆ ՈՒ ԾՌՈՒՄԸ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՈՒԺՈՎ

### ԱՄՓՈՓՈՒՄ

*Հոդվածում տրված է մի քանի խոռոչներով ծակոտված օրթոտրոպ ձողերի լայնական ուժով ոլորման ու ծռման խնդրի մոտավոր լուծումը: Եզրային պայմանների բավարարելիս օգտագործվել է Բուբնով-Գալերկինի մեթոդը:*

*Ուսումնասիրված է անիզոտրոպիայի ազդեցությունը դիտարկված ձողերի լարման վիճակի վրա:*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, 1950.
2. *Шерман Д. И.* К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью. Инженерный сборник, 25, 1959.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, 1954.
4. *Космодамианский А. С.* Кручение эллиптического стержня с двумя круговыми полостями. Инженерный сборник, 31, 1961.
5. *Космодамианский А. С.* Кручение и изгиб круглого стержня с круговыми полостями. Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, № 4, 1961.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
7. *Космодамианский А. С.* Изгиб эллиптической балки с двумя круговыми полостями. Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 1960.

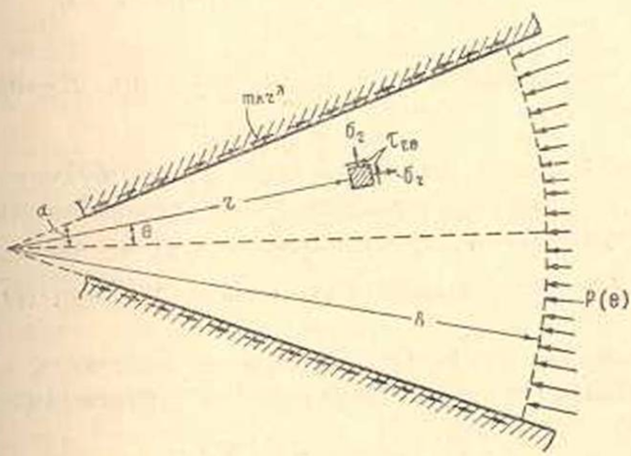
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. А. Задоян

# О течении пластически неоднородного материала через сходящийся канал

Равновесие идеально-пластической массы, сжатой между двумя наклонными жесткими плитами, впервые рассмотрено А. Надаи [1]. На основании результатов А. Надаи по жестко-пластической схеме Р. Хилл [2] определил характер течения пластического материала по сходящемуся каналу. Такая задача в случае упрочнения материала, а также аналогичная осесимметричная задача, исследованы В. В. Соколовским [3].




Фиг. 1.

Рассмотрим задачу о течении идеально-пластической неоднородной массы через сходящийся длинный канал, стенки которого—жесткие, шероховатые плиты, наклоненные друг к другу под углом $2\alpha$ (фиг. 1). Характер неоднородности материала принимаем по степенному закону, т. е. вместо пластической постоянной полагаем $kr^{\lambda}$, где $k$ и $\lambda$—заданные параметры. По аналогии с вышеупомянутыми работами, касательные напряжения на поверхностях контактов принимаем равным $mkr^{\lambda}$. Параметр $m$ меняется от нуля до единицы в зависимости от степени шероховатости плит. Для идеально шероховатых плит $m=1$.

Уравнения равновесия и условие пластичности запишутся в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,$$
$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0. \tag{1}$$

$$(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+4\tau_{r\theta}^2=4k^2r^{2\lambda}. \tag{2}$$

Компоненты напряжения ищем в виде

$$\sigma_r=F(r)-2kC\left(\ln r-\frac{r^\lambda}{\lambda}\right)-\frac{kr^\lambda}{\lambda}\left[f'(\theta)+2\sqrt{1-f^2(\theta)}\right], \tag{3}$$

$$\sigma_\theta=F(r)-2kC\left(\ln r-\frac{r^\lambda}{\lambda}\right)-\frac{kr^\lambda}{\lambda}\left[f'(\theta)+2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)}\right], \tag{4}$$

$$\tau_{r\theta}=kr^\lambda f(\theta), \tag{5}$$

где

$$F(r)=\begin{cases} E+2Ck\left[\ln r-\dfrac{r^\lambda}{\lambda}\right] & \text{при} \quad \lambda\neq 0, \\ E & \text{при} \quad \lambda=0, \end{cases}$$

$f(\theta)$ — неизвестия функция от $\theta$, $C=1+\frac{1}{2}f'(0)$, $E$ — произвольная постоянная.

Выражения компонентов напряжения (3)—(5) будут тождественно удовлетворять уравнению равновесия (1) и условию пластичности (2), если $f(\theta)$ определить из дифференциального уравнения

$$\sqrt{1-f^2(\theta)}\,f''(\theta)-2(1+\lambda)f(\theta)f'(\theta)-\lambda(2+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)}\,f(\theta)=0. \tag{6}$$

Из условий, поставленных на поверхностях контактов, в случае течения, симметричного относительно оси $\theta=0$, будем иметь

$$f(0)=0, \qquad f(\alpha)=m. \tag{7}$$

Введя новую неизвестную функцию

$$f'=\frac{\sqrt{1-f^2}}{W}, \qquad \theta=\int_0^f\frac{W(f)\,df}{\sqrt{1-f^2}} \tag{8}$$

из (6) получим

$$\frac{dW}{df}+\frac{fW\left[1+2(1+\lambda)W+\lambda(2+\lambda)W^2\right]}{1-f^2}=0. \tag{9}$$

Отсюда

$$BH(W)=\sqrt{1-f^2}, \tag{10}$$

где $B$ — постоянная интегрирования, а

$$H(W)=\begin{cases}\dfrac{W}{1+2(1+\lambda)\,W} & \text{при}\quad \lambda(2+\lambda)=0, \qquad (11)\\[2ex] \dfrac{W}{\sqrt{1+2(1+\lambda)\,W+\lambda(2+\lambda)\,W^2}}\left[\dfrac{2+\lambda+\lambda(2+\lambda)\,W}{\lambda+\lambda(2+\lambda)\,W}\right]^{\frac{1+\lambda}{2}} & \\ \qquad\text{при}\quad \lambda(2+\lambda)\neq 0. & (12)\end{cases}$$

Из (10) и (12) следует, что при $\lambda(2+\lambda)\neq 0$ имеем

$$f=\sqrt{1-\frac{B^2W^2}{1+2(1+\lambda)\,W+\lambda(2+\lambda)\,W^2}\left[\frac{2+\lambda+\lambda(2+\lambda)\,W}{\lambda+\lambda(2+\lambda)\,W}\right]^{1+\lambda}}. \qquad (13)$$

Соотношения (8) и (13) определяют искомую функцию $f(\theta)$. В частном случае, когда $\lambda=-1$, имеем

$$W=\frac{\sqrt{1-f^2}}{\sqrt{1+B^2-f^2}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{df}{d\theta}\right)^2+f^2=1+B^2, \qquad (14)$$

откуда, интегрированием и использованием граничных условий (7), получим

$$f(\theta)=m\,\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}. \qquad (15)$$

Когда $\lambda(2+\lambda)=0$, из (10) и (11) определяем

$$W=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-f^2}}{B-2\sqrt{1-f^2}} & \text{при}\quad \lambda=0, \qquad (16)\\[2ex] \dfrac{\sqrt{1-f^2}}{B+2\sqrt{1-f^2}} & \text{при}\quad \lambda=-2. \qquad (17)\end{cases}$$

Подставив значения $W$ из (17) в (8), обозначив $B=2A$ и проинтегрировав, получим

$$2\theta=\arcsin f-\begin{cases}\dfrac{2A}{\sqrt{A^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{A-1}{A+1}}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}} & A>1,\\[2ex] \dfrac{2A}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Ar\,th}\sqrt{\dfrac{1-A}{1+A}}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}} & 0\leqslant A<1.\end{cases} \qquad (18)$$

Используя второе условие (7), для значения неизвестной постоянной $A$ находим

$$2\alpha=\arcsin m-\begin{cases}\dfrac{2A}{\sqrt{A^2-1}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{A-1}{A+1}}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}} & A>1,\\[2ex] \dfrac{2A}{\sqrt{1-A^2}}\,\mathrm{Ar\,th}\sqrt{\dfrac{1-A}{1+A}}\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}} & 0\leqslant A<1.\end{cases} \qquad (19)$$

Для идеально шероховатых плит уравнение (19) запишется в виде

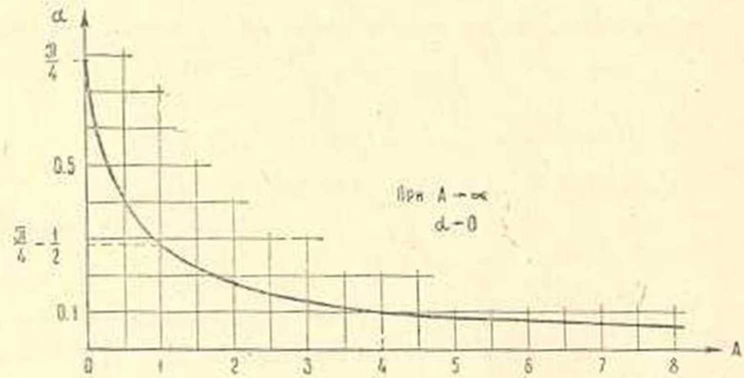
$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{A-1}{A+1}}, & A \geqslant 1, \\ \dfrac{A}{\sqrt{1-A^2}} \operatorname{Ar\,th} \sqrt{\dfrac{1-A}{1+A}}, & 0 \leqslant A \leqslant 1. \end{cases} \tag{20}$$

По этим формулам на фиг. 2 построен график зависимости $\alpha$ от $A$. Отметим, что при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $(A = 0)$

$$f(\theta) = \sin 2\theta, \tag{21}$$

а при $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ $(A = 1)$

$$2\theta = \arcsin f - \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}}. \tag{22}$$




Фиг. 2.

В частном случае, для однородного материала, т. е. при $\lambda = 0$, из (16) и (8) получим

$$2\theta = -\arcsin f + \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-f^2}}{1+\sqrt{1-f^2}}}, \tag{23}$$

где $A > 1$ определяется из соотношений

$$2\alpha = -\arcsin m + \frac{2A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}}}. \tag{24}$$

В соотношениях (23) и (24) обозначив $f = \sin 2\psi$ и приняв $m = 1$, получим решение А. Надаи [1]

$$\theta = -\psi + \frac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{A+1}{A-1}} \operatorname{tg}\psi\right),$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \frac{A}{\sqrt{A^2-1}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{A+1}{A-1}}, \quad A > 1.$$

Далее, переходя к пределу $\lambda \to 0$ и используя дифференциальное уравнение (6), из выражений (3)—(5) легко получить формулы напряжений для однородного материала. Так, разделив все члены уравнения (6) на $\sqrt{1-f^2}$ и проинтегрировав от нуля до $\theta$, получим

$$f'(\theta)+2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)}-2C=2\lambda+\lambda(2+\lambda)\int_0^\theta f(\theta)\,d\theta.$$

Отсюда

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f'(\theta)+2(1+\lambda)\sqrt{1-f^2(\theta)}-2C}{\lambda}=2+2\int_0^\theta f_{\lambda=0}(\theta)\,d\theta,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{f'(\theta)+2\sqrt{1-f^2(\theta)}-2C}{\lambda}=2-2\sqrt{1-f^2_{\lambda=0}(\theta)}+2\int_0^\theta f_{\lambda=0}(\theta)\,d\theta.$$

Но

$$2\int f_{\lambda=0}(\theta)\,d\theta=2\int \sin 2\psi\,d\theta=\cos 2\psi+C\ln(C-\cos 2\psi).$$

Тогда из (3)—(5) будем иметь

$$(\sigma_r/2k)_{\lambda\to 0}=D-C\ln r+\frac{1}{2}\cos 2\psi-\frac{1}{2}C\ln(C-\cos 2\psi),$$

$$(\sigma_\theta/2k)_{\lambda\to 0}=D-C\ln r-\frac{1}{2}\cos 2\psi-\frac{1}{2}C\ln(C-\cos 2\psi),$$

$$(\tau_{r\theta}/k)_{\lambda\to 0}=\sin 2\psi,\quad D=\text{const},\quad C=\text{const}.$$

Эти формулы получены Надаи.

Полагая, что на некоторой поверхности $r=R$ внешнее давление известно $2p(\theta)$, можем написать

$$\int_0^\alpha \sigma_r(R,\theta)\cos\theta\,d\theta=\int_0^\alpha p(\theta)\cos\theta\,d\theta=P. \tag{25}$$

Из (3) и (25) при $\lambda\neq 0$ определяем

$$E=\frac{P}{\sin\alpha}+\frac{kR^\lambda}{\lambda\sin\alpha}\left[m\cos\alpha+\int_0^\alpha f(\theta)\sin\theta\,d\theta+2\int_0^\alpha\sqrt{1-f^2(\theta)}\cos\theta\,d\theta\right]. \tag{26}$$

Уравнениями линий скольжения для рассматриваемой задачи будут

$$r\exp\left\{\pm\int\sqrt{\frac{1\pm f(\theta)}{1\mp f(\theta)}}\,d\theta\right\}=\text{const}\quad(-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha). \tag{27}$$

Исходя из предположения несжимаемости и условий совпадения главных осей напряжения и скорости деформации

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}=0 \qquad \frac{\dot{\varepsilon}_r-\dot{\varepsilon}_\theta}{2\dot{\gamma}_{r\theta}}=\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{2\tau_{r\theta}} \tag{28}$$

аналогично [2] находим

$$u=\frac{g(\theta)}{r}, \qquad g(\theta)=g(0)\exp\left\{-2\int_0^\theta \frac{f(\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-f^2(\theta)}}\right\}. \tag{29}$$

В случае $\lambda=-1$ и $m=\sin\alpha$ из (15) имеем

$$f(\theta)=\sin\theta. \tag{30}$$

Тогда выражения компонентов напряжений будут иметь простой вид

$$\sigma_r=E+\frac{3k}{r}\cos\theta, \qquad \sigma_\theta=E+\frac{k}{r}\cos\theta,$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{k}{r}\sin\theta, \qquad E=\frac{P}{\sin\alpha}-\frac{3k}{2R}\left[\cos\alpha+\frac{\alpha}{\sin\alpha}\right]. \tag{31}$$

Уравнения линий скольжения имеют вид

$$\begin{aligned} r(1+\sin\theta)^{\mp 1}&=\mathrm{const}, \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\alpha,\\ r(1-\sin\theta)^{\pm 1}&=\mathrm{const}, \qquad -\alpha\leqslant\theta\leqslant 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Характер течения определяется выражением

$$g(\theta)=g(0)\cos^2\theta. \tag{33}$$

Аналогичным образом можно рассматривать задачу о расходящемся канале. Для этого случая следует поменять направление касательных напряжений на контактных поверхностях и изменить знаки перед квадратными корнями в выражениях (3)—(4).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 XII 1961

Մ. Ա. Զադոյան

## ՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՆՅՈՒԹԻ ՀՈՍՔԸ ԱՍՏԻՃԱՆԱԲԱՐ ՆԵՂԱՑՈՂ ԿԱՆԱԼՈՒՄ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Երկու կոշտ, միմյանց նկատմամբ թեք, պատերի արանքում իդեալական-պլաստիկական զանգվածի հավասարակշռությունը առաջին անգամ ուսումնասիրել է Ա. Նադաին [1]։*

*Ռ. Հիլլը [2] օգտվելով այդ արդյունքներից որոշել է նյութի հոսքի բնույթը նեղացող կանալում (գծ. 1)։*

*Վ. Վ. Սոկոլովսկին [3] ուսումնասիրել է այդ (ինչպես նաև առանցքասիմետրիկ) խնդիրը նյութի ամրապնդման դեպքում:*

*Այս հոդվածում ուսումնասիրվում է նման խնդիր պլաստիկորեն անհամասեռ նյութի վերաբերյալ: Պլաստիկական հաստատունի փոխարեն ընդունվում է $kr^\lambda$, որտեղ $k$ և $\lambda$ հայտնի պարամետրեր են:*

*Լարումների բաղադրիչները ներկայացնելով (3)—(5) տեսքով, բավարարում ենք հավասարակշռության (1) հավասարումներին և պլաստիկության (2) պայմանին, եթե անհայտ $f(\theta)$ ֆունկցիան որոշվում է (6) ոչ-գծային դիֆերենցիալ հավասարումից: Օգտվելով (8) նշանակումից և (7) եզրային պայմաններից ստանում ենք $f(\theta)$-ի արժեքը քառակուսացումների միջոցով: $\lambda$-ի որոշ արժեքների դեպքում ($\lambda = -1, -2$) ստացվում են պարզ արդյունքներ: Երբ $\lambda = 0$, այսինքն համասեռ նյութի դեպքում, ստանում ենք նախկին բանաձևերը:*

*Սահքի գծերի հավասարումները անհամասեռ նյութի դեպքում ունեն (27) տեսքը:*

*Օգտվելով նյութի անսեղմելիության պայմանից և կոշտ-պլաստիկական մարմնի սխեմայից որոշված է տեղափոխման արագությունը (29) հաստատունի ճշտությամբ:*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Nadai A.* Über die Gleit—und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände bildsamer Massen und die Nachspannungen bleibend verzerrter Körper. Zeits. f. Phys., 1924, t. 30.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
3. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Гостехиздат, 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

М. С. Саркисян

# О жестко-пластическом изгибе анизотропной консоли

В работе А. Грина [1] по схеме жестко-пластического материала исследовано пластическое течение при изгибе изотропной консольной балки. В работе [1] при определении предельной нагрузки учитывается влияние касательных напряжений, которое для коротких балок существенно.

В настоящей работе рассматривается аналогичная задача для случая, когда материал балки обладает пластической анизотропией.

§ 1. Теория, относящаяся к пластически анизотропным материалам, основывается на работах [2]—[5].

На основании работ [4], [5] можно показать, что в случае анизотропного тела бесконечно малый элемент, выделенный линиями скольжения, дифференциальные уравнения которых имеют вид [4]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (\alpha), \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\beta), \tag{1.1}$$

испытывает, в отличие от изотропного тела, неодинаковое растяжение (сжатие) в направлениях линий скольжения. Если условимся фиксировать направления линий скольжения (характеристик) $\alpha$, $\beta$ так, чтобы они образовали правую систему координат, то нормальные и касательные напряжения, действующие на элемент, определяются следующим образом

$$\sigma_\alpha = \sigma - \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2(\varphi - \psi), \qquad \sigma_\beta = \sigma + \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2(\varphi - \psi),$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} Y(\varphi) \cos 2(\varphi - \psi). \tag{1.2}$$

Здесь $Y(\varphi)$ — функция, характеризующая анизотропию материала, $\sigma$ — среднее давление, $\varphi$ — угол между направлением наибольшего главного напряжения и фиксированной осью $x$, $\psi$ — угол между направлением наибольшей главной скорости деформации и осью $x$. Они определяются следующими формулами [4]

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

$$\psi = \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y'(\varphi)}{2Y(\varphi)}. \tag{1.3}$$

Для удобства введем обозначение

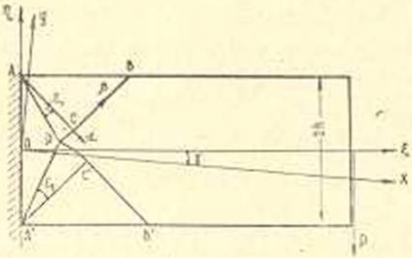
$$\Delta\varphi = \varphi - \psi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y'(\varphi)}{2Y(\varphi)}, \tag{1.4}$$

где $\Delta\varphi$ — функция, характеризующая отклонение угла $\varphi$ от угла $\psi$, вызванное анизотропией материала. Согласно (1.4) формулы (1.2) выразятся через угол $\varphi$ следующим образом

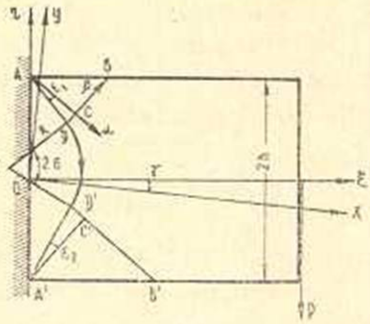
$$\sigma_\alpha = \sigma - \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2\Delta\varphi, \qquad \sigma_\beta = \sigma + \frac{1}{2} Y(\varphi) \sin 2\Delta\varphi,$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} Y(\varphi) \cos 2\Delta\varphi. \tag{1.5}$$

§ 2. Рассмотрим консольную балку, постоянного прямоугольного поперечного сечения, длиной $l$. Один конец балки $AA'$ жестко закреплен, а на другой конец действует изгибающая сила $P$ (на единицу ширины), достаточная для появления пластического течения.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Решения строятся по схеме жестко-пластического материала для случая плоской деформации. Можно показать, что эти решения при условии текучести, изложенном в [5], пригодны и для плоского напряженного состояния.

В общем случае, когда оси анизотропии $(x, y)$ материала не совпадают с геометрическими осями симметрии балки $(\xi, \eta)$, поля линий скольжения будут несимметричными. На фиг. 1 и 2 показаны два типа кинематически возможных полей линий скольжения. Пределы применимости этих решений зависят от характера анизотропии материала и геометрических размеров балки, при этом первый тип решения (фиг. 1) относится к большим значениям $l/2h$, а второй тип (фиг. 2) — к меньшим значениям.

Рассмотрим первый тип линий скольжения.

В равномерной области $ABC$ имеют место: $\varphi = \gamma$, $\psi = \gamma - \Delta\gamma$, следовательно угол между прямой $AC$ и осью $O\xi$ будет

$\psi - \frac{\pi}{4} - \gamma = -\left(\frac{\pi}{4} + \Delta\gamma\right)$. В области $A'B'C'$ соответственно $\varphi = \gamma + \frac{\pi}{2}$, $\psi = \gamma + \frac{\pi}{2} - \Delta\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$, угол прямой $A'C'$ с осью $O\xi$ будет равен $\frac{\pi}{4} - \Delta\left(\frac{\pi}{4} + \gamma\right)$. К равномерным областям примыкают центрированные поля $ACD$ и $A'C'D$, для которых из условия $\sigma + G(\varphi) = \text{const}$ получим значения средних давлений $\sigma_1$ и $\sigma_2$ соответственно на отрезках $AD$ и $A'D$.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} Y(\gamma) + G(\gamma) - G(\varphi_1),$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} Y\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) + G\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right) - G(\varphi_2). \tag{2.1}$$

Здесь

$$G(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} \sqrt{Y''(\varphi) + 4Y^2(\varphi)}\, d\varphi, \tag{2.2}$$

а $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — значения функции $\varphi$ на отрезках $AD$ и $A'D$ соответственно. Значения угла $\psi$ на этих отрезках будут

$$\psi_1 = \gamma - \Delta\gamma - \varepsilon_1, \qquad \psi_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 + \gamma - \Delta\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right).$$

Положение точки $D$, общей для двух центрированных полей, неизвестно, оно определяется после нахождения углов $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$.

Из геометрических соображений длины отрезков $AD$ и $A'D$ можно выразить через значение угла $\psi$ на этих отрезках в следующем виде

$$d_1 = \frac{2h \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}, \qquad d_2 = \frac{2h \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)}{\sin(\psi_2 - \psi_1)}. \tag{2.3}$$

Рассмотрим равновесие части консоли справа от линии $ADA'$. Условия равенства нулю сумм проекций сил на оси $x$, $y$ приводят к уравнениям

$$\sigma_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n' d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \tau_n' d_2 \cos\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = P \sin\gamma, \tag{2.4}$$

$$\sigma_n' d_2 \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \tau_n d_1 \sin\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+\tau_n' d_2 \sin\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) = P\cos\gamma, \tag{2.5}$$

а условие равенства нулю суммы моментов относительно $D$ даст

$$\frac{1}{2}\sigma_n d_1^2 - \frac{1}{2}\sigma_n' d_2^2 = P\left[l - d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4} - \gamma\right)\right], \tag{2.6}$$

где $\sigma_n$, $\tau_n$ и $\sigma_n'$, $\tau_n'$ — нормальные и касательные напряжения соответственно на отрезках $AD$ и $AD'$, которые согласно формулам (1.2), (1.5) будут иметь вид

$$\sigma_n = \sigma_1 + \frac{1}{2} Y(\varphi_1)\sin 2\Delta\varphi_1, \qquad \tau_n = \frac{1}{2} Y(\varphi_1)\cos 2\Delta\varphi_1, \tag{2.7}$$

$$\sigma_n' = \sigma_2 + \frac{1}{2} Y(\varphi_2)\sin 2\Delta\varphi_2, \qquad \tau_n' = \frac{1}{2} Y(\varphi_2)\cos 2\Delta\varphi_2. \tag{2.8}$$

Выразив $\psi_1$ и $\psi_2$ в уравнениях (2.4) и (2.5) через $\varphi_1$ и $\varphi_2$, для определения последних получим следующую систему уравнений

$$\sigma_1 d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_2 d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+\frac{1}{2} d_1 Y(\varphi_1)\cos\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} d_2 Y(\varphi_2)\cos\left(\varphi_2 + \Delta\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= P\sin\gamma, \tag{2.9}$$

$$\sigma_2 d_2 \sin\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_1 d_1 \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{1}{2} d_1 Y(\varphi_1)\sin\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} d_2 Y(\varphi_2)\sin\left(\varphi_2 + \Delta\varphi_2 - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= P\cos\gamma. \tag{2.10}$$

Исходя из условия, что критерий текучести не должен быть нарушен в угле жесткой области между $CD$ и $C'D$, и принимая линию $ADA'$ в качестве предельного случая непрерывной линии характеристик, получим

$$G(\varphi_2 - \pi) - G(\varphi_1) \leqslant \frac{1}{2}\left[G\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - G(\gamma) - Y(\gamma)\right]. \tag{2.11}$$

В случае равенства в условии (2.11) возможен и второй тип линий скольжения.

Рассмотрим теперь второй тип линий скольжения. В этом случае прилегающие к равномерным полям центрированные поля $ADC$ и $A'D'C'$ соединяются с изолированной круговой линией скольжения $DD'$ радиуса $R$. В области $ABC$ имеют место: $\varphi = \gamma$, $\psi = \gamma - \Delta\gamma$, а в области $A'B'C'$: $\varphi = \gamma - \frac{\pi}{2}$, $\psi = \gamma - \frac{\pi}{2} - \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)$. Повторяя аналогичные рассуждения, получим значения среднего давления соответственно на отрезках $AD$ и $A'D'$ в следующем виде

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} Y(\gamma) + G(\gamma) - G(\varphi_1),$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} Y\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) + G\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - G(\varphi_2). \tag{2.12}$$

Значения $\psi$ на линиях $AD$ и $A'D'$ соответственно равны

$$\psi_1 = \gamma - \varepsilon_1 - \Delta(\gamma), \qquad \psi_2 = \gamma - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 - \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{p}\right)$$

откуда получим, что

$$\varepsilon_1 = -\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \gamma - \Delta\gamma, \quad \varepsilon_2 = \varphi_2 - \Delta\varphi_2 - \gamma + \Delta\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}. \tag{2.13}$$

Поскольку линия $ADD'A'$ — непрерывная линия скольжения, то на ней $\sigma - G(\varphi) = \text{const}$, откуда нетрудно получить следующее уравнение, связывающее неизвестные $\varphi_1$ и $\varphi_2$

$$G(\varphi_2) - G(\varphi_1) = \frac{1}{2}\left[G\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) - G(\gamma) - \frac{1}{2} Y(\gamma) - \frac{1}{2} Y\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right)\right]. \tag{2.14}$$

В предельном состоянии правая часть консоли скользит по дуге окружности $DD'$. Положение центра окружности $k$ определяется после нахождения углов $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ и радиуса $R$.

Условия равенства нулю сумм проекций на оси $x$, $y$ сил, действующих на части балки правее линии $ADD'A'$, приводят к уравнениям

$$\sigma_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma'_n d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 - \frac{\pi}{4}\right) +$$

$$+ \tau'_n d_2 \cos\left(\psi_2 - \frac{\pi}{4}\right) + R\int_{\psi_2}^{\psi_1} \sigma^*_n \cos\left(\psi + \frac{\pi}{4}\right) d\psi +$$

$$+ R\int_{\psi_2}^{\psi_1} \tau^*_n \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right) d\psi = P \sin\gamma, \tag{2.15}$$

$$\tau_n d_1 \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau'_n d_2 \cos\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d_1 \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \sigma'_n d_2 \sin\left(\psi_2 + \frac{\pi}{4}\right) - R\int_{\psi_2}^{\psi_1} \sigma^*_n \sin\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) d\psi -$$

$$-R\int_{\psi_2}^{\psi_1}\tau_n^*\sin\left(\psi-\frac{\pi}{4}\right)d\psi=P\cos\gamma. \tag{2.16}$$

Условие равенства нулю суммы моментов сил относительно точки $k$ дает

$$\frac{1}{2}\sigma_n d_1^2-\frac{1}{2}\sigma_n' d_2^2+R\int_{\psi_2}^{\psi_1}\tau_n^* d\psi+\tau_n d_1 R+\tau_n' d_2 R=Pl', \tag{2.17}$$

где $\sigma_n^*$ и $\tau_n^*$ — нормальные и касательные напряжения на дуге окружности $DD$, значения которых можно найти из условия $\sigma-G(\varphi)=$ $=\text{const}$ на линии скольжения $ADD'A'$

$$\sigma_n^*=\sigma_1-G(\varphi_1)+G(\varphi)+\frac{1}{2}Y(\varphi)\sin 2(\varphi-\psi),$$

$$\tau_n^*=\frac{1}{2}Y(\varphi)\cos 2(\varphi-\psi), \tag{2.18}$$

$$d_1=\frac{2h\sin\left(\psi_2+\frac{\pi}{4}-\gamma\right)}{\sin(\psi_2-\psi_1)}-R\,\mathrm{tg}\,\delta,$$

$$d_2=\frac{2h\sin\left(\psi_1+\frac{\pi}{4}-\gamma\right)}{\sin(\psi_1-\psi_2)}-R\,\mathrm{tg}\,\delta, \tag{2.19}$$

$$l'=l+R\cos\delta-d_1\sin\left(\psi_1+\frac{\pi}{4}-\gamma\right),\qquad 2\delta=\psi_1-\psi_2. \tag{2.20}$$

Исключив из уравнений (2.14)—(2.17) величины $\psi_1$ и $\psi_2$, получим систему четырех уравнений относительно неизвестных $\varphi_1$, $\varphi_2$, $R$ и предельной нагрузки $P$.

$$\sigma_n d_1\cos\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right)+\sigma_n' d_2\cos\left(\varphi_2-\Delta\varphi_2+\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\tau_n d_1\cos\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1-\frac{\pi}{4}\right)+\tau_n' d_2\cos\left(\varphi_2-\Delta\varphi_2-\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+R\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\Phi(\varphi)\sigma_n^*\cos\left(\varphi-\Delta\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi+$$

$$+R\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}\Phi(\varphi)\tau_n^*\cos\left(\varphi-\Delta\varphi-\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=P\sin\gamma, \tag{2.21}$$

$$\tau_n d_1 \cos\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \tau_n' d_2 \cos\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \sigma_n d_1 \sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma_n' d_2 \sin\left(\varphi_2 - \Delta\varphi_2 + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- R\int_{\varphi_1}^{\varphi_1} \Phi(\varphi)\, \sigma_n^* \sin\left(\varphi - \Delta\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi -$$

$$- R\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \Phi(\varphi)\, \tau_n^* \sin\left(\varphi - \Delta\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = P\cos\gamma. \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_n d_1^2 - \frac{1}{2}\sigma_n' d_2^2 + R\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \Phi(\varphi)\, \tau_n^* d\varphi + \tau_n d_1 R + \tau_n' d_2 R = Pl', \tag{2.23}$$

где введено обозначение

$$\Phi(\gamma) = 1 - \frac{d}{d\varphi}\Delta\varphi = \frac{4Y^2(\varphi) - Y''(\varphi)\, Y(\varphi) + 2Y'^2(\varphi)}{4Y^2(\varphi) + Y'^2(\varphi)}. \tag{2.24}$$

Таким образом, как в первом, так и во втором типе поля характеристик получаем систему трансцендентных уравнений, которая при заданной функции анизотропии $Y(\varphi)$ можно решить только численными методами.

§ 3. Задача несколько упрощается в случае, когда геометрическая ось балки совпадает с одной из главных осей анизотропии материала балки, т. е. когда $\gamma = 0$. В этом случае из соображений симметрии и из того, что функция $Y(\varphi)$ — периодическая функция с периодом $\pi/2$ [4] следует симметричность полей линий скольжения относительно оси балки, как это имеет место в случае изотропной балки, где $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $d_1 = d_2 = d$.

При первом типе решения, согласно изложенным выше соображениям, из уравнений равновесия (2.4)—(2.6) следует, что

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \Delta\varphi_1 = -\Delta\varphi_2, \tag{3.1}$$

$$\tau_n d \cos\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sigma_n d \sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}P, \tag{3.2}$$

$$\sigma_n d^2 = P\left[l - d\sin\left(\psi_1 + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Подставив значения $\sigma_n$, $\tau_n$ и $d$ в уравнения (3.1)—(3.3), для определения угла $\varphi_1$ и предельной нагрузки $P$ получим следующую систему двух трансцендентных уравнений

$$Y(\varphi_1)\cos\left(\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) - [Y(0) - 2G(\varphi_1)]\sin\left(\varphi_1 - \Delta\varphi_1 + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$=\frac{P}{h}\cos\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2}Y(0)-G(\varphi_1)+\frac{1}{2}Y(\varphi_1)\sin 2\Delta\varphi_1=$$

$$=\frac{P}{h}\left[\frac{l}{h}-\operatorname{tg}\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos^2\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right). \tag{3.5}$$

Предельное значение угла $\varphi_1$, при котором возможен первый тип поля линий скольжения, определяется из уравнения

$$G\left(-\varphi_1^*-\frac{\pi}{4}\right)-G(\varphi_1^*)=\frac{1}{2}G\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}Y(0). \tag{3.6}$$

Аналогично для второго типа решения, когда $\gamma=0$, получим

$$\psi_1+\psi_2=-\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1+\varphi_2=-\frac{\pi}{2}, \qquad \Delta\varphi_1=-\Delta\varphi_2 \tag{3.7}$$

$$\tau_n d\cos\left(\psi_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sigma_n d\sin\left(\psi_1+\frac{\pi}{4}\right)+R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1}\tau_n^*\cos\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)d\psi-$$

$$-R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1}\sigma_n^*\sin\left(\psi+\frac{\pi}{4}\right)d\psi=\frac{1}{2}P, \tag{3.8}$$

$$2\tau_n Rd+\sigma_n d^2+2R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\psi_1}\tau_n^* d\psi=Pl', \tag{3.9}$$

где

$$l'=l+R\cos\delta-d\sin\delta, \qquad d\cos\delta+R\sin\delta=h, \qquad \delta=\frac{\pi}{4}+\psi_1, \tag{3.10}$$

откуда для определения неизвестных $\varphi_1$, $R$ и предельной нагрузки получим следующую систему трех трансцендентных уравнений

$$G\left(-\varphi_1-\frac{\pi}{2}\right)-G(\varphi_1)=\frac{1}{2}\left[G\left(-\frac{\pi}{2}\right)-Y(0)\right], \tag{3.11}$$

$$\tau_n d\cos\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right)-\sigma_n d\sin\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-R\left[1-\cos\left(\varphi_1-\Delta\varphi_1+\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sigma_1-G(\varphi_1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1}\Phi(\varphi)\cos\left(\varphi+\Delta\varphi+\frac{\pi}{4}\right)Y(\varphi)\,d\varphi-$$

$$-R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1}\Phi(\varphi)\,G(\varphi)\sin\left(\varphi-\Delta\varphi+\frac{\pi}{4}\right)d\varphi=\frac{1}{2}P, \qquad (3.12)$$

$$\sigma_n d^2+2\tau_n Rd+R\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\varphi_1}\Phi(\varphi)\,Y(\varphi)\cos 2\Delta\varphi\,d\varphi=Pl'. \qquad (3.13)$$

Системы (3.8)—(3.13) можно решить только при наличии конкретной функции $Y(\varphi)$, характеризующей анизотропию материала балки. Не имея экспериментальных данных, для выяснения некоторых особенностей пластической анизотропии в данной задаче, предположим, что анизотропия материала балки характеризуется функцией

$$Y(\varphi)=Y_0(1+\lambda\cos 4\varphi), \qquad \text{где} \quad |\lambda|<1. \qquad (3.14)$$

Подставив (3.14) в (1.4) и (2.2), получим

$$\varphi-\psi=-\frac{1}{2}\operatorname{arg\,tg}\frac{2\lambda\sin 4\varphi}{1+\lambda\cos 4\varphi},$$

$$G(\varphi)=Y_0\sqrt{1+4\lambda^2}\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1+\frac{2\lambda\cos 4\varphi}{1+4\lambda^2}-\frac{3\lambda^2\cos^2 4\varphi}{1+4\lambda^2}}\,d\varphi. \qquad (3.15)$$

Интеграл в выражениях (3.15) можно вычислить с любой точностью, разложением радикала в ряд по формуле бинома.

Численные расчеты производились для случая, когда $\gamma=0$, при разных значениях параметра $\lambda$. При значении $\lambda=0$ полученные результаты совпадают с соответствующими результатами изотропной балки [1], [3], если принять $Y_0=2K_s$, где $K_s$ — предел текучести материала при чистом сдвиге.

В таблице 1 приведены те критические значения величин, при которых первый тип решений переходит во второй.

*Таблица 1*

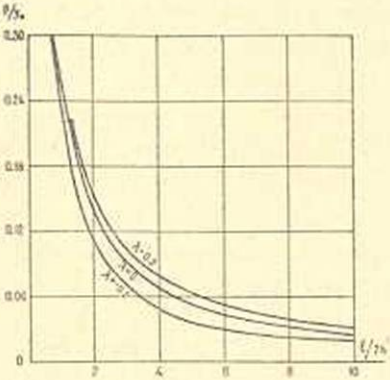
| | $l/2h$ | $P/Y_0$ | $d/2h$ | $\varphi_1$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda=0{,}3$ | 730,59 | 0,0005 | 0,643 | $-3°8'33''$ | $6°1'35''$ |
| $\lambda=0{,}2$ | 127,15 | 0,0024 | 0,635 | $-4°11'38''$ | $6°57'33''$ |
| $\lambda=0$ | 13,73 | 0,0188 | 0,625 | $-8°10'44''$ | $8°10'44''$ |
| $\lambda=-0{,}2$ | 2,79 | 0,0753 | 0,647 | $-16°26'38''$ | $5°36'25''$ |

В таблице 2 приведены результаты вычислений, полученные из первого и второго типа решений.

*Таблица 2*

| | $l/2h$ | $P/Y_0$ | $d/2h$ | $R/2h$ | $\varphi_1$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda=-0,2$ | 0,449 | 0,3981 | 0 | 0,788 | −16°26′38″ | 5°36′25″ |
| | 1,000 | 0,2354 | 0,325 | 0,391 | −16°26′38″ | 5°36′25″ |
| | 2,000 | 0,1114 | 0,575 | 0,088 | −16°26′38″ | 5°36′25″ |
| | 2,788 | 0,0753 | 0,647 | 0 | −16°26′38″ | 5°36′25″ |
| | 5,378 | 0,0374 | 0,692 | 0 | −9°10′2″ | 1°13′32″ |
| | 8,476 | 0,0236 | 0,702 | 0 | −5°43′46″ | 0°12′27″ |
| | 10,540 | 0,0190 | 0,705 | 0 | −4°35′1″ | 0°8′4″ |
| $\lambda=0$ | 0,58 | 0,3583 | 0 | 0,834 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| | 1,00 | 0,2591 | 0,183 | 0,590 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| | 3,00 | 0,0923 | 0,489 | 0,181 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| | 5,00 | 0,0538 | 0,560 | 0,086 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| | 8,00 | 0,0328 | 0,599 | 0,035 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| | 10,00 | 0,0260 | 0,611 | 0,018 | −8°10′44″ | 8°10′44″ |
| $\lambda=0,2$ | 1,215 | 0,2110 | 0 | 0,811 | −4°11′38″ | 6°57′33″ |
| | 3,00 | 0,1046 | 0,324 | 0,398 | −4°11′38″ | 6°57′33″ |
| | 5,00 | 0,0636 | 0,449 | 0,238 | −4°11′38″ | 6°56′33″ |
| | 8,00 | 0,0394 | 0,522 | 0,144 | −4°11′38″ | 6°57′33″ |
| | 10,00 | 0,0314 | 0,547 | 0,113 | −4°11′38″ | 6°57′33″ |
| $\lambda=0,3$ | 1,808 | 0,1479 | 0 | 0,795 | −3°8′33″ | 6°1′35″ |
| | 3,00 | 0,1047 | 0,193 | 0,[illegible]57 | −3°8′33″ | 6°1′35″ |
| | 5,00 | 0,0663 | 0,356 | 0,3[illegible]5 | −3°8′33″ | 6°1′35″ |
| | 8,00 | 0,0420 | 0,462 | 0,224 | −3°8′33″ | 6°1′35″ |
| | 10,00 | 0,0336 | 0,499 | 0,179 | −3°8′33″ | 6°1′35″ |

Результаты произведенных вычислений показывают, что анизотропия материала оказывает существенное влияние на предельное состояние жестко-пластического материала. При этом анизотропия материала на распределение пластических зон сказывается сильнее, чем на предельную нагрузку.




Фиг. 3.

На фиг. 3 приведен график, показывающий зависимость между $\frac{P}{Y_0}$ и $\frac{l}{2h}$ при значениях $\lambda=0$, $\lambda=\pm 0,2$.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. Л. М. Качанову за ценные советы и помощь в работе.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 III 1962

**Մ. Ս. Սարգսյան**

# ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՀԵԾԱՆԻ ԿՈՇՏ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ


## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

[1] *աշխատության մեջ կոշտ-պլաստիկական նյութի սխեմայի համաձայն՝ ուսումնասիրված է իզոտրոպ հեծանի ծռման ժամանակ պլաստիկական հոսունությունը։ Այդ աշխատության մեջ սահմանային բեռի որոշման ժամանակ հաշվի են առնված շոշափող լարումների ազդեցությունները, որոնք կարճ հեծանների համար էական են։*

*Ներկա աշխատության մեջ դիտարկված է անալոգ խնդիր այն դեպքում, երբ հեծանի նյութն ունի պլաստիկական անիզոտրոպիա։*

*Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ նյութի անիզոտրոպիան էական ազդեցություն է գործում կոշտ-պլաստիկական նյութի սահմանային վիճակի վրա։ Ընդ որում նյութի անիզոտրոպությունն ավելի շատ ազդեցություն է գործում պլաստիկական գոտիների բաշխման, քան սահմանային բեռի վրա։*

*Ստացված արդյունքների համար կազմված են աղյուսակներ և գրաֆիկ։*


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Грин А.* Теория пластического течения изгибаемых консолей и балок. Механика (сб. переводов), вып. 4, 1955.
2. *Ивлев Д. Д.* К теории идеальной пластической анизотропии. ПММ **23**, вып. 6, 1959.
3. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Гостехтеоретиздат, 1956.
4. *Саркисян М. С.* К теории плоской деформации пластически анизотропных тел. ПММ, **24**, вып. 6, 1960.
5. *Саркисян М. С.* К плоской задаче пластически анизотропных тел. ПМТФ, № 2, 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Р. М. Киракосян

# Релаксационная задача безмоментных оболочек вращения

Задачи безмоментных оболочек в условиях ползучести рассматривались в работах Л. М. Качанова [1], И. И. Гольденблата, Н. А. Николаенко [2], В. И. Розенблюма [3] и других. В настоящей заметке ставится релаксационная задача металлических безмоментных оболочек вращения. Задача решается по теориям течения и старения. В качестве примера рассматривается релаксация круговой конической оболочки.

1. *Релаксация по теории течения.* Рассмотрим оболочку постоянной толщины $h$, срединная поверхность которой является поверхностью вращения. Положение какого-либо параллельного круга срединной поверхности будем определять меридиональной дугой $s$, отсчитываемой от некоторого параллельного круга $s_0 = 0$.

Пусть рассматриваемая оболочка свободна от поверхностных нагрузок, один конец ее ($s = s_0$) защемлен, а другой конец ($s = l$) растянут (сжат) по направлению меридиана на величину $u_0$. В этом случае, если материал оболочки обладает свойством ползучести, произойдет релаксация напряжений в оболочке.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_1}{\partial s} + (T_2 - T_1)\frac{\sin\vartheta}{r} = 0,\\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = 0,\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $T_1$, $T_2$ и $R_1$, $R_2$ — тангенциальные усилия и радиусы кривизны срединной поверхности оболочки, $\vartheta$ — угол между касательной к меридиану и осью вращения, $r$ — расстояние от точек срединной поверхности до оси вращения.

Граничные условия запишутся следующим образом

$$u(0,\ t) = 0, \qquad u(l,\ t) = u_0 = \text{const}. \tag{1.2}$$

Здесь $u$ — перемещение по меридиану, $t$ — координата времени, отсчитываемая от начала процесса деформирования оболочки $t_0 = 0$.

Геометрические соотношения имеют вид

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_1},$$
$$\varepsilon_2 = -\frac{\sin \vartheta}{r} u + \frac{w}{R_2}, \tag{1.3}$$

где $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ и $w$ — компоненты деформации и прогиб оболочки.

Интегрируя статические уравнения (1.1), для нормальных напряжений $\sigma_1$ и $\sigma_2$ получим [3]

$$\sigma_1 (s, t) = \frac{T_1}{h} = \frac{c(t)}{R_2 h \cos^2 \vartheta}, \tag{1.4}$$

$$\sigma_2 (s, t) = \frac{T_2}{h} = -\frac{c(t)}{R_1 h \cos^2 \vartheta}. \tag{1.5}$$

Здесь $c(t)$ — произвольная функция интегрирования.

Из геометрических соотношений (1.3) с учетом условий (1.2) получим [3]

$$u(s, t) = \cos \vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos \vartheta} \left( \varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 \right) ds,$$
$$w(s, t) = R_1 \varepsilon_1 - R_1 \frac{\partial u}{\partial s}. \tag{1.6}$$

Для скоростей деформации $\xi_1$ и $\xi_2$, в условиях степенной зависимости и подобия кривых ползучести, по теории течения имеем [1]

$$\xi_1 = \frac{1}{2} B(t) T^{m-1} (\sigma_1 - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_1 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right),$$
$$\xi_2 = \frac{1}{2} B(t) T^{m-1} (\sigma_2 - \sigma) + \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma_2 - \frac{3\nu}{1+\nu} \sigma \right), \tag{1.7}$$

где $B(t)$ — коэффициент ползучести для объемного напряженного состояния, $m$ — показатель ползучести, $\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$ — среднее гидростатическое давление, $\nu$ — коэффициент Пуассона, $G$ — модуль сдвига, $T$ — интенсивность касательных напряжений. В данном случае

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2}. \tag{1.8}$$

Учитывая (1.4), (1.5) и (1.8), из (1.7) получим

$$\xi_1 = A_1(s) B_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_2(s) \frac{dc(t)}{dt},$$
$$\xi_2 = A_3(s) B_1(t) c^m(t) + \frac{1}{2G} A_4(s) \frac{dc(t)}{dt}, \tag{1.9}$$

где

$$A_1(s) = \frac{(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)^{\frac{m-1}{2}}(2R_1 + R_2)}{2(R_1R_2h\cos^2\vartheta)^m}, \tag{1.10}$$

$$A_2(s) = \frac{1}{R_2h\cos^2\vartheta}\left(1 - \frac{\nu}{1+\nu} + \frac{R_2}{R_1}\frac{\nu}{1+\nu}\right), \tag{1.11}$$

$$A_3(s) = -\frac{(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2)^{\frac{m-1}{2}}(2R_2 + R_1)}{2(R_1P_2h\cos^2\vartheta)^m}, \tag{1.12}$$

$$A_4(s) = \frac{1}{R_2h\cos^2\vartheta}\left(\frac{R_2}{R_1}\frac{\nu}{1+\nu} - \frac{R_2}{R_1} - \frac{\nu}{1+\nu}\right), \tag{1.13}$$

$B_1(t) = \dfrac{B(t)}{3^{\frac{m+1}{2}}}$ — есть коэффициент ползучести для одноосного напряженного состояния.

Компоненты деформации выражаются через соответствующие скорости деформации по следующим формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(s,\ t) &= \varepsilon_1'(s) + \int_0^t \xi_1(s,\ t)\,dt, \\ \varepsilon_2(s,\ t) &= \varepsilon_2'(s) + \int_0^t \xi_2(s,\ t)\,dt, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где штрихом обозначены мгновенные (упругие) значения соответствующих величин, которые полагаются известными.

Внеся (1.14) в первое уравнение (1.6), получим

$$u(s,\ t) = u'(s) + \cos\vartheta \int_0^s \frac{1}{\cos\vartheta}\left[\int_0^t \left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1}\xi_2\right)dt\right]ds. \tag{1.15}$$

Последнее условие (1.2) с помощью (1.15) запишется следующим образом

$$\cos\vartheta_1 \int_0^l \frac{1}{\cos\vartheta}\left[\int_0^t \left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1}\xi_2\right)dt\right]ds = 0, \tag{1.16}$$

где

$$\vartheta_1 = \vartheta(l), \qquad \vartheta_1 \neq \frac{\pi}{2}. \tag{1.17}$$

После некоторых преобразований, (1.16) можно привести к виду

$$\int_0^l \frac{1}{\cos\vartheta}\left(\xi_1 - \frac{R_2}{R_1}\xi_2\right)ds = 0, \tag{1.18}$$

откуда, с учетом (1.9)—(1.13), будем иметь

$$AB_1(t)\,c^m(t)+B\frac{dc(t)}{dt}=0, \tag{1.19}$$

где

$$A=\frac{1}{h^m}\int_0^l\frac{(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)^{\frac{m+1}{2}}}{R_1^{m+1}R_2^m\cos^{2m+1}\vartheta}\,ds, \tag{1.20}$$

$$B=\frac{1}{2Gh(1+\nu)}\int_0^l\frac{R_1^2+2R_1R_2\nu+R_2^2}{R_1^2R_2\cos^2\vartheta}\,ds. \tag{1.21}$$

Проинтегрировав (1.19) при начальном условии

$$c(t)\Big|_{t=0}=c', \tag{1.22}$$

и учитывая (1.5), получим

$$\rho(t)=\frac{c(t)}{c'}=\frac{\sigma_1}{\sigma_1'}=\frac{\sigma_2}{\sigma_2'}=\frac{1}{\sqrt[m-1]{1+(m-1)\,t^*}}, \tag{1.23}$$

где

$$t^*=\frac{A}{B}\,\Omega_1(t)(c')^{m-1}=\frac{A}{B}\,\Omega_1(t)\,(R_2h\sigma_1'\cos^2\vartheta)^{m-1}, \tag{1.24}$$

$$\Omega_1(t)=\int_0^t B_1(t)\,dt. \tag{1.25}$$

Из (1.23) легко заметить, что в любом поперечном сечении оболочки процесс релаксации протекает одинаково.

После определения $c(t)$, вычисление перемещений $u$ и $w$ не представляет особого труда и мы на этом не останавливаемся.

2. *Релаксация по теории старения.* Исходя из основных положений теории старения, для соотношений ползучести имеем [1]

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(s,\,t)&=\frac{1}{2}\,\Omega(t)\,T^{m-1}(\sigma_1-\sigma)+\frac{1}{2G}\left(\sigma_1-\frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right),\\ \varepsilon_2(s,\,t)&=\frac{1}{2}\,\Omega(t)\,T^{m-1}(\sigma_2-\sigma)+\frac{1}{2G}\left(\sigma_2-\frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right),\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$\Omega(t)=3^{\frac{m+1}{2}}\,\Omega_1(t). \tag{2.2}$$

Пользуясь формулами (1.4), (1.5) и (1.8), из (2.1) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(s,\,t)&=A_1(s)\,\Omega_1(t)\,c^m(t)+\frac{1}{2G}A_2(s)\,c(t),\\ \varepsilon_2(s,\,t)&=A_3(s)\,\Omega_1(t)\,c^m(t)+\frac{1}{2G}A_4(s)\,c(t).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Внеся (2.3) в первую формулу (1.6) и учитывая последнее условие (1.2), после интегрирования от нуля до $l$ получим

$$A\Omega_1(t)\,c^m(t) + Bc(t) = \frac{u_0}{\cos\vartheta_1}. \tag{2.4}$$

Так как (2.4) справедливо при любом $t$, то, полагая $t = t_0 = 0$ и учитывая, что

$$\Omega_1(t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad c(t)\Big|_{t=0} = c', \tag{2.5}$$

получим

$$u_0 = Bc'\cos\vartheta_1. \tag{2.6}$$

Внеся (2.6) в (2.4), после некоторых преобразований получим формулу для безразмерного времени

$$t^* = \frac{1-\rho}{\rho^m}. \tag{2.7}$$

Сравнивая (2.7) и (1.23) заключаем, что кривые релаксации, полученные по теории старения, располагаются выше кривых, полученных по теории течения.

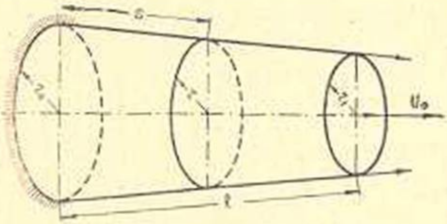
3. *Пример.* В качестве примера рассмотрим релаксацию круговой конической оболочки (фиг. 1).

Для этого случая

$$\vartheta = \mathrm{const},\ R_1 = \infty,\ R_2 = \frac{r}{\cos\vartheta}, \tag{3.1}$$

где

$$r = r_0 - s\sin\vartheta. \tag{3.2}$$




Фиг. 1.

Пользуясь формулами (1.20) и (1.21), с учетом (3.1) и (3.2) из (1.24) получим

$$t^* = \frac{E\Omega_1(t)\,(\sigma_1')^{m-1}(r_0 - s\sin\vartheta)^{m-1}}{(m-1)\ln\dfrac{r_0}{r_1}}\left(\frac{1}{r_1^{m-1}} - \frac{1}{r_0^{m-1}}\right). \tag{3.3}$$

Если в (3.3) перейдем к пределу при $r_1 \to r_0 = R = \mathrm{const} \neq 0$, то получим значение $t^*$ для цилиндрической оболочки радиуса $R$

$$t_{ц}^* = E\Omega_1(t)\,(\sigma_1')^{m-1}. \tag{3.4}$$

Этот результат, как и следовало ожидать, ничем не отличается от формулы, выведенной для стержня.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 I 1962

Ռ. Մ. Կիրակոսյան

# ՊՏՏՄԱՆ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՌԵԼԱՔՍԱՑԻՈՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հոդվածում դիտարկվում է պտտման անմոմենտ մետաղական թաղանթների ռելաքսացիոն խնդիրը։ Ընդհանուր լուծումը տրվում է ըստ Լ. Մ. Կաչանովի [1] մշակած հոսունության և ծերացման տեսությունների։ Որպես օրինակ լուծված է պտտման կոնական թաղանթի ռելաքսացիոն խնդիրը։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. *Гольденблат И. И., Николаенко Н. А.* Ползучесть и несущая способность оболочек. Научные сообщения ЦНИИСК, № 13, 1960.
3. *Розенблюм В. И.* О неустановившейся ползучести безмоментных оболочек. ПМТФ, № 4, 1960.
4. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Ленинград, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

М. Б. Эдилян

# Исследование точности шарнирно-шестизвенного механизма

В настоящей работе исследуется вопрос инструментальной точности механизма, т. е. влияние погрешностей отдельных параметров механизма как на точность положения точки шатуна шарнирно-четырехзвенного механизма, описывающего шатунную кривую, мало отличающуюся от заданной траектории, так и точность выстоя ведомого звена шестизвенного механизма с остановкой. В работе произведен расчет одного механизма по выбранным допускам.

## § 1. Вывод основных зависимостей для расчета точности положения точки шатуна шарнирно-четырехзвенного механизма

Наряду с другими вопросами, одной из основных характеристик механизма является его точность. Точность работы механизма зависит от точности изготовления отдельных его звеньев, в частности, от их действующих первичных ошибок. Если в составе механизма имеется $n$ звеньев, то зависимость ошибки положения, т. е. отклонение точки шатуна шарнирно-четырехзвенного механизма в зависимости от ошибок звеньев механизма, можно определить следующим образом.

Систематическое отклонение конечного звена вследствие всех геометрических первичных ошибок равно

$$\Delta_Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right)\Delta_{0i}. \tag{1.1}$$

где $\left(\dfrac{\partial Y}{\partial q_i}\right)$ — передаточные отношения механизма, т. е. частные производные уравнения шатунной кривой, описываемой точкой шатуна шарнирно-четырехзвенного механизма, по соответствующим параметрам механизма, $\Delta_{0i}$ — смещение центра группирования первичной ошибки.

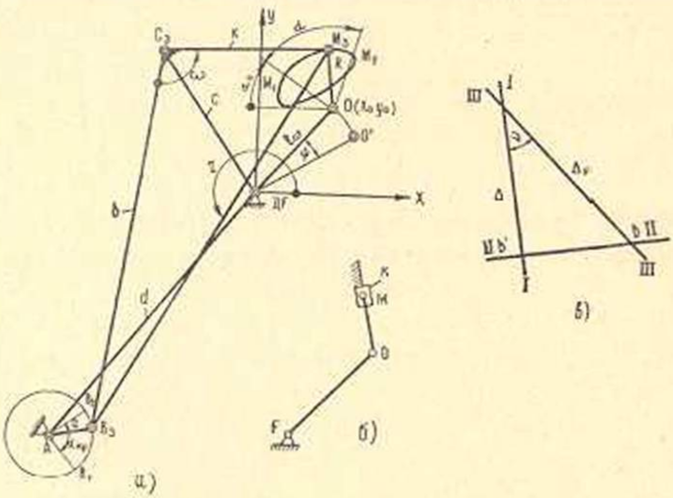
Практически предельное отклонение конечного звена, происходящее от действия первичных ошибок (ошибок в длинах звеньев)* определяется по формуле

$$\delta_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial Y}{\partial q_i} \right)^2 \delta_i^2}, ^{**} \qquad (1.2)$$

где $\delta_i$ — половина поля допуска.

Отклонения размеров звеньев механизма полагаем распределенными по закону Гаусса. При симметрично расположенных допусках $\Delta_{0i}$ равно нулю, следовательно $\Delta_Y = 0$. Уравнение шатунной кривой, описываемой точкой шатуна шарнирно-четырехзвенного механизма, представляет собой алгебраическую кривую 6-го порядка.

Дифференцируя уравнение шатунной кривой по переменному параметру $P$, где под $P$ подразумеваются параметры механизма $a$, $b$, $d$, $\omega$, $K$, $C$ (фиг. 1), выражение для $\delta_Y$ можно представить в виде




Фиг. 1.

$$\delta_{YP} = \sqrt{\sum_P \left( \frac{a'_{60P}X^6 + a'_{42P}X^4Y^2 + a'_{24P}X^2Y^4 + a'_{06P}Y^6 + a'_{50P}X^5 + \cdots}{2Ya_{42}X^4 + 4Y^3a_{24}X^2 + 6Y^5a_{06} + a_{41}X^4 + 2Ya_{32}X^3 + \cdots} \right.}$$

$$\cdots \frac{+ a'_{41P}X^4Y + a'_{32P}X^3Y^2 + a'_{23P}X^2Y^3 + a'_{14P}XY^4 + a'_{05P}Y^5 + a'_{40P}X^4 + \cdots}{+ 3Y^2a_{23}X^2 + 4Y^3a_{14}X + 5Y^4a_{05} + a_{31}X^3 + \cdots}$$

$$\cdots \frac{+ a'_{31P}X^3Y + a'_{22P}X^2Y^2 + a'_{13P}XY^3 + a'_{04P}Y^4 + a'_{30P}X^3 + \cdots}{+ 2Ya_{22}X^2 + 3Y^2a_{13}X + 4Y^3a_{04} + a_{21}X^2 + \cdots}$$

---

* Ввиду того, что конструирование шарниров не входит в содержание данной задачи, погрешности, возникающие от зазоров в шарнирах нами не учитывались, и в каждом отдельно рассматриваемом механизме должны учитываться особо.

** Под величиной $\delta_Y$ подразумевается отклонение траектории точки шатуна от теоретического значения координаты $Y$.

$$\frac{\dots + a'_{21P}X^2Y + a'_{12P}XY^2 + a'_{03P}Y^3 + a'_{20P}X^2 + a'_{11P}XY + a'_{02P}Y^2 + \dots}{\dots + 2Ya_{12}X + 3Y^2a_{03} + a_{11}X + \dots}$$

$$\left.\frac{+ a'_{10P}Y + a'_{01P}Y + a'_{00P}}{+ 2Ya_{02} + a_{01}}\right)^2 \delta_P^2, \qquad (1.3)$$

где $a_{ij}$ — коэффициенты при переменных $X$ и $Y$ в уравнении шатунной кривой. Влияние параметра $\eta$ на точность не учитывается и в коэффициентах $a_{ij}$ его принимаем равным нулю. Тогда эти коэффициенты примут следующий вид

$$a_{06} = a_{60} = b^2, \qquad a_{42} = a_{24} = 3b^2;$$

$$a_{50} = a_{14} = -2db(b + K\cos\omega), \qquad a_{32} = 2a_{50}, \qquad (1.4)$$

$$a_{05} = a_{41} = -2Kdb\sin\omega, \qquad a_{23} = 2a_{05},$$

$$a_{13} = a_{31} = 4Kd^2b\sin\omega,$$

$$a_{04} = d^2(b^2 + K^2) - 2b^2(K^2 + C^2) + 2bK\cos\omega(b^2 + C^2 - a^2),$$

$$a_{22} = 2d^2(b^2 + K^2) - 4b^2(K^2 + C^2) + 4bK\cos\omega(b^2 + C^2 - a^2 + d^2),$$

$$a_{40} = d^2(b^2 + K^2) - 2b^2(K^2 + C^2) + 2bK\cos\omega(b^2 + C^2 - a^2 + 2d^2),$$

$$a_{30} = a_{12} = 2d\,[(bK\cos\omega + K^2)(2bK\cos\omega + a^2 - d^2 - b^2 - C^2) -$$
$$- 2b^2(K^2 - C^2) + 4K^2b^2\sin^2\omega],$$

$$a_{21} = a_{03} = -2Kdb\sin\omega(d^2 - a^2 + b^2 - C^2 + 2bK\cos\omega - 2K^2),$$

$$a_{20} = (K^2 - C^2)\,[2(bK\cos\omega - K^2)(b^2 - 2bK\cos\omega + K^2 + 3d^2 - a^2) +$$
$$+ (b^2 - 2bK\cos\omega + K^2)(2d^2 + K^2 - C^2)] +$$
$$+ K^2(d^2 - a^2 + b^2 + K^2 - 2bK\cos\omega)^2 - 4K^2d^2b^2\sin^2\omega,$$

$$a_{02} = (K^2 - C^2)\,[2(bK\cos\omega - K^2)(b^2 - 2bK\cos\omega + K^2 + d^2 - a^2) +$$
$$+ (b^2 - 2bK\cos\omega + K^2)(2d^2 + K^2 - C^2) +$$
$$+ K^2(d^2 - a^2 + b^2 + K^2 - 2bK\cos\omega)^2 - 4K^2d^2(b\cos\omega - K)^2,$$

$$a_{11} = 4Kd^2b\sin\omega(2bK\cos\omega - K^2 - C^2),$$

$$a_{10} = -2d(K^2 - C^2)\,[(bK\cos\omega - K^2)(d^2 - a^2) +$$
$$+ (b^2 + K^2 - 2bK\cos\omega)(bK\cos\omega - C^2)],$$

$$a_{01} = -2Kdb(C^2 - K^2)\sin\omega(d^2 - a^2 + b^2 + K^2 - 2bK\cos\omega),$$

$$a_{00} = d^2(K^2 - C^2)(b^2 + K^2 - 2bK\cos\omega).$$

Выражение $\dfrac{\partial Y}{\partial q_a}$ имеет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial q_a} = -\frac{a'_{40a}X^4 + a'_{22a}X^2Y^2 + a'_{04a}Y^4 + \rho^2(a'_{30a}X + a'_{21a}Y) + \dots}{\rho^4(6Ya_{60} + a_{05}) + \rho^2(4Y^2a_{05} + 4XYa_{50} + a_{31}X + a_{21}) + \dots}$$

$$
\rightarrow \cdots \frac{+ a'_{20a}X^2 + a'_{02a}Y^2 + a'_{10a}X + a'_{01a}Y}{+ 4Y^3a_{04} + 2Y^2(a_{31}X + a_{21}) + 2y(a_{12}X + a_{02}) + a_{11}X + a_{01}}. \tag{1.5}
$$

Выражения для $\frac{\partial Y}{\partial q_d}$, $\frac{\partial Y}{\partial q_K}$ и $\frac{\partial Y}{\partial q_m}$ имеют следующий вид

$$
\frac{\partial Y}{\partial q_d} = \frac{\partial Y}{\partial q_K} = \frac{\partial Y}{\partial q_m} =
$$

$$
= -\frac{\rho^4(a'_{50l}X - a'_{41l}Y) + \rho^2(a'_{30l}X + a'_{31l}XY + a'_{21l}Y) + a'_{40l}X^4 +}{\rho^4(6Ya_{06} + a_{05}) + \rho^2(4Y^2a_{05} + 4XYa_{50} + a_{31}X + a_{21}) +} \cdots \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \cdots \frac{+ a'_{22l}X^2Y^2 + a'_{04l}Y^4 + a'_{20l}X^2 + a'_{11l}XY + a'_{02l}Y^2 +}{+ 4Y^3a_{04} + 2Y^2(a_{31}X + a_{21}) + 2Y(a_{12}X + a_{02}) +} \cdots \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \cdots \frac{+ a'_{10l}X + a'_{01l}Y + a'_{00l}}{+ a_{11}X + a_{01}}, \tag{1.6}
$$

а выражения для $\frac{\partial Y}{\partial q_b}$ и $\frac{\partial Y}{\partial q_C}$ имеют вид

$$
\frac{\partial Y}{\partial q_b} = -\frac{\rho^6 a'_{60b} + \rho^4(a'_{50b}X + a'_{41b}Y) + \rho^2(a'_{30b}X + a'_{31b}XY + a'_{21b}Y) +}{\rho^4(6Ya_{06} + a_{05}) + \rho^2(4Y^2a_{05} + 4XYa_{50} + a_{31}X + a_{21}) +} \cdots \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \cdots \frac{+ a'_{40b}X^4 + a'_{22b}X^2Y^2 + a'_{04b}Y^4 + a'_{21b}X^2 + a'_{11b}XY +}{+ 4Y^3a_{04} + 2Y^2(a_{31}X + a_{21}) + 2Y(a_{12}X + a_{02}) +} \cdots \rightarrow
$$

$$
\rightarrow \cdots \frac{+ a'_{02b}Y^2 + a'_{10b}X + a'_{01b}Y + a'_{00b}}{+ a_{11}X + a_{01}}, \tag{1.7}
$$

$$
\frac{\partial Y}{\partial q_C} = -\frac{a'_{40C}(X^4 + Y^4) + a'_{12C}X^2Y^2 + a'_{04C}Y^4 + \rho^2(a'_{30C}X + a'_{21C}Y) +}{\rho^4(2Ya_{06} + a_{05}) + \rho^2(4Y^2a_{05} + 4XYa_{50} + a_{31}X + a_{21}) +} \cdots \rightarrow
$$

$$
\cdots \rightarrow \frac{+ a'_{20C}X^2 + a'_{11C}XY + a'_{02C}Y^2 + a'_{10C}X + a'_{01C}Y + a'_{00C}}{+ 4Y^3a_{04} + 2Y^2(a_{31}X + a_{21}) + 2Y(a_{12}X + a_{02}) + a_{11}X + a_{01}}. \tag{1.8}
$$

Имея предельные отклонения положения точки $M$ шатуна $\delta_Y$ как функцию первичных ошибок звеньев механизма, можно определить предельные отклонения точки $M$ шатуна по нормали

$$
\delta_n = \frac{\delta Y}{\sin \zeta}, \tag{1.9}
$$

где $\zeta$ — угол, составленный радиусом-вектором текущей точки шатунной кривой с осью $x$.

## § 2. Анализ точности присоединенной группы механизма с выстоем

Ввиду того, что в шестизвенном механизме с остановкой шатунная кривая на дуге аппроксимации воспроизводит окружность лишь приближенно и с определенной степенью точности, ведомое звено диады, присоединяемой к основному круговому шарнирно-четырехзвенному направляющему механизму, будет вместо остановки отклоняться на какой-то угол $\Delta_\psi$. Поэтому, имея предельное отклонение положения точки $M$ шатуна основного механизма, необходимо определить величину угла отклонения ведомого звена $OF$ (фиг. 1а) с учетом как величины теоретического отклонения $\Delta_n$*, так и величины предельного отклонения $\delta_n$ и первичной ошибки звена $MO$. Для этого воспользуемся графическим методом определения ошибки положения, данным в книге Н. Г. Бруевича „Точность механизмов".

Введем в точке $O$ диады $MOF$ дополнительное звено в виде ползушки $k$ и рассмотрим полученный кривошипно-шатунный механизм $FOM$ (фиг. 1б). Для данного кривошипно-шатунного механизма построим план малых перемещений**.

Ошибка положения точки $O$ определяется по формуле

$$\Delta = \Delta_n + \delta_n + \delta_{ш}\text{***}. \tag{2.1}$$

Проведем линию I—I, параллельную шатуну $MO$ и отложим отрезок $ab'$, изображающий в масштабе величину $\Delta$ (фиг. 1в). Из точки $b'$ проведем линию $b'b$, перпендикулярную к $MO$ и из точки $a$ проведем линию III—III, перпендикулярную к $FO$. Отрезок $\Delta_F$ в масштабе картины малых перемещений дает величину отклонения точки $O$.

$$\Delta_F = \frac{\Delta}{\cos\gamma}, \tag{2.2}$$

где $\gamma$—угол давления между звеньями $MO$ и $OF$. При $\gamma = 0$ получим $\Delta_F = \Delta$. Поэтому естественно выбирать неподвижный центр $F$ так, чтобы величина угла $\gamma$ была бы в допустимых пределах****.

Тогда величина угла отклонения ведомого звена $OF$ будет выражаться зависимостью

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta_F}{l_{OF}} \tag{2.3}$$

или в % к углу качания $\psi$ ведомого звена $OF$

$$\varepsilon = \frac{\Delta_\psi}{\psi}\,100\,\%, \tag{2.4}$$

где $l_{OF}$ — длина звена $OF$.

* Под величиной $\Delta_n$ подразумеваются отклонения между шатунной кривой и аппроксимирующей окружностью, данные в работе [4].

** План малых перемещений построен для точки наибольшего удаления шатунной кривой от аппроксимирующей окружности.

*** Величины $\Delta_n$, $\delta_n$ и $\delta_{ш}$ могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

**** Выбор неподвижного центра $F$ из условия нестесненности движения и допустимых углов передачи не рассматривается в настоящей задаче.

## § 3. Расчет на точность шестизвенного шарнирного механизма с остановкой по выбранным допускам

В качестве примера расчета на точность возьмем механизм, центр $F$ которого совпадает с центром $D$.

Ввиду отсутствия ГОСТ-ов на допуски линейных размеров, последние нами ориентировочно выбраны как допуски на межцентровые расстояния по соответствующему классу изготовления звеньев механизма.

Номинальные размеры параметров механизма в масштабе кривошипа при длине кривошипа $a = 50$ *мм* приведены в таблице 1.

*Таблица 1*

| | Параметры механизма | Номинальные значения |
|---|---|---|
| $b$ | 6,467941 | 433 *мм* |
| $d$ | 5,363597 | 359 *мм* |
| $a$ | 0,747665 | 50 *мм* |
| $\omega$ | 101°13′22″ | 101°13′22″ |
| $K$ | 2,763491 | 185 *мм* |
| $C$ | 2,8 | 187 *мм* |

Угловая погрешность параметра $\omega$ переводится в линейную ошибку по оси $y$.

Выбрав величины допусков на линейные размеры звеньев и на угол в секундах, просчитываются значения передаточных отношений для трех точек шатунной кривой, наиболее удаленных от аппроксимирующей окружности (см. табл. 2).

*Таблица 2*

| Точка | $\frac{\partial Y}{\partial q_a}$ | $\frac{\partial Y}{\partial q_d}$ | $\frac{\partial Y}{\partial q_b}$ | $\frac{\partial Y}{\partial q_K}$ | $\frac{\partial Y}{\partial q_C}$ | $\frac{\partial Y}{\partial q_\omega}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | −0,022076 | 0,162754 | −0,149153 | −0,089572 | −0,574201 | 0,291359 |
| $M_2$ | −0,029835 | 0,207851 | −0,163467 | −0,198029 | −0,762272 | 0,408512 |
| $M_3$ | −0,040658 | 0,223805 | 0,055563 | −0,437401 | −0,422965 | 0,346916 |

В таблице 3 даны величины $\delta_n$, $\Delta$, $\Delta_F$, $\Delta_\varphi$, $\varepsilon$ для механизма, выполненного по II классу точности.

*Таблица 3*

| | $\delta_n = -0,103848$ (в точке $M_1$) | $\delta_n = -0,134531$ (в точке $M_2$) | $\delta_n = -0,061724$ (в точке $M_3$) |
|---|---|---|---|
| Значение $\Delta$ | −0,191598 | −0,217081 | −0,400474 |
| Значение $\Delta_F$ при учете только величины $\Delta_n$ | −0,034965 | −0,022550 | −0,295475 |
| Значение $\Delta_F$ при учете $\Delta_n + \delta_n + \delta_{\text{ш}}$ | −0,241413 | −0,217081 | −0,424502 |
| Значение $\Delta_\varphi$ при учета $\Delta_n$ | −0°00′52″ | −0°00′34″ | −0°07′34″ |
| Значение $\Delta_\varphi$ при учете $\Delta_n + \delta_n + \delta_{\text{ш}}$ | −0°06′12″ | −0°05′34″ | −0°10′53″ |
| Значение $\varepsilon$ при учете $\Delta_n$ | 0,085 % | 0,056 % | 0,742 % |
| Значение $\varepsilon$ при учете $\Delta_n + \delta_n + \delta_{\text{ш}}$ | 0,607 % | 0,524 % | 0,032 % |

Ереванский Политехнический институт им. К. Маркса

Поступила 3 I 1962

**Մ. Բ. Էդիլյան**

# ՀՈԴԱ-ՎԵՑՕՂԱԿԱՎՈՐ ՄԵԽԱՆԻԶՄԻ ՃՇՏՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Աշխատության մեջ հետազոտվում է մեխանիզմի գործիքային ճշտության հարցը, այսինքն՝ մեխանիզմի առանձին պարամետրերի անճշտությունների ազդեցությունը ինչպես հոդա-քառօղակավոր մեխանիզմի շարժաթևի կետի (որի հետագիծը քիչ է տարբերվում նախապես տված կորից), այնպես էլ հոդա-վեցօղակավոր կանգառներով մեխանիզմի տարվող օղակի կանգառի ճշտության վրա։*

*Աշխատության մեջ որպես օրինակ բերված է կանխատեսված թույլտվածքներով մեկ մեխանիզմի հաշվարկը։*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бруевич Н. Г.* Точность механизмов. ГТТИ. М., 1946.
2. *Кобринский А. Е.* Некоторые вопросы практического расчета на точность механизмов с низшими парами. Труды семинара по ТММ, 8, вып. 31, 1950.
3. *Левитский Н. И.* Проектирование плоских механизмов с низшими парами. Изд. АН СССР, М., 1950.
4. *Эдилян М. Б.* Применение электронно-вычислительных машин для синтеза направляющего механизма. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 14, вып. 5, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. М. Арутюнян

# О фоторождении $\pi$- и $K$-мезонов

## Введение

Процессы фоторождения $\pi$-мезонов на нуклонах при низких энергиях изучались многими авторами с помощью дисперсионнных соотношений (более подробно см. в [1]). Несмотря на то, что в некоторых теоретических работах не учитывалась отдача нуклона, в других—$\pi\pi$-взаимодействие, тем не менее имеется довольно хорошее согласие с экспериментом.

В области высоких энергий (выше порога фоторождения двух $\pi$-мезонов) дисперсионные уравнения перестают быть правильными и последовательное изучение процессов фоторождения $\pi$-мезонов становится невозможным.

В случае фоторождения странных частиц имеет место другая ситуация. Хотя в принципе нетрудно написать дисперсионные соотношения и в этом случае, однако, из-за высокого порога фоторождения странных частиц, в условии унитарности смешиваются много разных каналов, что весьма затрудняет анализ дисперсионных уравнений.

В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы фоторождения $\pi$-мезонов и странных частиц при высоких энергиях. Рассмотрение в основном ведется в духе теории периферийных взаимодействий.

В первой части настоящей работы рассматривается фоторождение $\pi^0$-мезонов при высоких энергиях и в области малых углов. Показывается, что в указанной области энергий и углов основной вклад в процесс фоторождения $\pi^0$-мезонов дает график с однофотонным промежуточным состоянием. Обсуждается, так называемый, эффект Примакова [2] на нуклоне. Здесь же рассматривается аналогичный механизм генерации „бипионов“ (резонанс в системе $\pi\pi$) и „трипионов“ (трехпионный резонанс)*.

Во второй части рассматривается фоторождение положительных $\pi^+$-мезонов на протоне в полюсном приближении опять в области больших энергий и малых углов. Теоретическим аргументом в пользу

* Хотя и последняя задача не имеет ничего общего с фоторождением мезонов, тем не менее считаем нужным рассматривать здесь такую задачу, так как она по духу очень близка к эффекту Примакова.

правильности сделанного приближения может служить наличие графика с однопионным обменом (прямое фотопионное рождение). Проводится сравнение с экспериментом. Некоторые аналогичные результаты в этой области были получены недавно и другими авторами [3].

В третьей части рассматривается фоторождение странных частиц ($\Lambda K$, $\Sigma K$) в предположении о доминирующем вкладе $K'$ резонанса (резонанс в системе $K\pi$) вблизи порога при различных вариантах относительной четности протона и $\Lambda$-гиперона. Теоретические результаты сравниваются с имеющимися экспериментами. Получается удовлетворительное согласие с экспериментом в случае противоположной относительной четности в $\Lambda K'p$ вершине.

### § 1. Фоторождение $\pi^0$-мезонов при высоких энергиях. Образование „бипиона" $\pi$-мезонами в поле ядра

Как отметил Примаков [2,4], время жизни нейтральных $\pi^0$-мезонов можно определить из экспериментов по фоторождению в кулоновском поле ядра. Для углового распределения образующихся мезонов в работах [2,4] было получено выражение

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = Z^2 \frac{4e^2}{\mu^3\tau} \frac{kq^3}{t^2} \sin^2\theta F_1^{2}*. \tag{1.1}$$

Угловое распределение (1.1) обладает интересной особенностью. В области малых углов наблюдается резкий пик, величина которого быстро растет с энергией падающего фотона. Это обстоятельство используется для определения времени жизни $\pi^0$-мезонов. На первый взгляд кажется, что угловое распределение фоторождения $\pi^0$ в кулоновском поле нуклона будет подчиняться этой же формуле при $Z=1$ ($Z$—величина заряда ядра), так как рассматриваемый механизм фоторождения работает лишь в области малых передаваемых импульсов. Однако, в действительности, ситуация немного иная. Это связано с тем, что, согласно (1.1), для фоторождения вперед ($\theta=0^0$) $d\sigma(0)/d\Omega=0$. Хотя поправки на отдачу и аномальный магнитный момент нуклона в области малых передаваемых импульсов будут невелики, тем не менее они конечны, и, чтобы получить правильные результаты при $\theta=0^0$, необходимо эти поправки аккуратно учесть. Задача сводится к вычислению вклада графика, указанного на фиг. 1, в сечение фоторождения $\pi^0$-мезонов.

Распадное $\pi^0\gamma\gamma$ взаимодействие на фиг. 1 можно учесть следующим лагранжианом

$$L(x) = \Lambda \vec{E}(x) \vec{H}(x) \Phi(x). \tag{1.2}$$

Здесь $\vec{E}(x)$ и $\vec{H}(x)$—напряженности электрического и магнитного полей фотона, $\Phi(x)$—волновая функция $\pi^0$-мезона. Удобно (1.2) переписать в релятивистски инвариантной форме

* Обозначения, принятые здесь, см. ниже.

$$L(x) = i\frac{\Lambda}{8}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}(x)F_{\gamma\delta}(x)\Phi(x), \tag{1.3}$$

где $F_{\alpha\beta}(x)$—тензор электромагнитного поля фотона, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$—антисимметричный тензор второго ранга. (Отметим, что в настоящей работе везде принята следующая метрика $ab = \vec{a}\vec{b} - a_0 b_0$). Неизвестный параметр $\Lambda$ легко связать со временем жизни нейтрального $\pi^0$-мезона

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\Lambda^2\mu^3}{32\pi}, \tag{1.4}$$

где $\mu$—масса $\pi^0$-мезона.

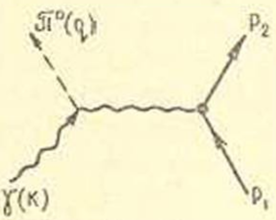
Согласно общим правилам, матричный элемент, соответствующий графику на фиг. 1, имеет вид

$$S_{if} = -i\frac{(2\pi)^4 e\Lambda}{(4k\omega)^{1/2}t}\delta(p_1+k-p_2-q)\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}q_\nu e_\sigma k_\rho \bar{u}(p_2)\Gamma_\mu u(p_1), \tag{1.5}$$

где

$$\Gamma_\mu = (F_1+F_2)\gamma_\mu + \frac{i}{2M}F_2(p_1+p_2)_\mu.$$

Здесь приняты следующие обозначения: $F_1$ и $F_2$—электромагнитные форм-факторы нуклона (для нейтрона $F_1=0$); $e_\sigma$—вектор поляризации фотона; $k$, $q$, $p_1$ и $p_2$—4-х импульсы фотона, мезона, начального и конечного нуклонов соответственно; $k$, $\omega$—энергии фотона и $\pi^0$-мезона, $M$—масса нуклона, $t=(q-k)^2$—квадрат передаваемого импульса.




Фиг. 1.

Для углового распределения образующихся мезонов в системе центра масс можно получить следующее выражение

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi}\frac{\Lambda^2}{4\pi}\frac{kq^3}{4t^2W^2}\left\{t\cos^2\theta(F_1+F_2)^2 + W^2\sin^2\theta\left(2F_1^2+\frac{t}{2}F_2^2\right)\right\}. \tag{1.6}$$

В формуле (1.6) все энергетические переменные выражены в нуклонных массах (т. е. выбирается система единиц, где $M=1$), а $W$—означает полную энергию сталкивающихся частиц. При получении (1.6) мы воспользовались следующими правилами суммирования по поляризациям фотона

$$\begin{gathered}\sum_e(\eta_\mu\eta_\mu) = -2q^2k^2\cos^2\theta,\\ \sum_e(\eta_\mu p_{1\mu})(\eta_\mu p_{2\mu}) = -W^2k^2\sin^2\theta,\\ \frac{1}{4}\sum_e(\eta_\mu p_{1\mu}+\eta_\mu p_{2\mu})^2 = -W^2k^2\sin^2\theta,\end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\eta_\mu = \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} q_\nu e_\sigma k_\rho. \tag{1.8}$$

Для анализа (1.6) представим квадрат передаваемого импульса в виде

$$t = 2k(\omega - q) - \mu^2 + 4kq \sin^2 \frac{\theta}{2} \equiv t_0 + 4kq \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

и учтем, что при $\omega \gg \mu$ $t_0 \simeq \mu^4/4k^2W^2 \ll 1$. Тогда мы легко найдем интервал углов, где рассматриваемый график дает большой вклад $\theta^2 = t_0/kq$. В частности, для фоторождения вперед при высоких энергиях, справедливо соотношение

$$\frac{d\sigma(0)}{d\Omega} = \frac{1}{137}\frac{\Lambda^2}{4\pi}\frac{q^3k^3}{\mu^4}[F_1(t_0) + F_2(t_0)]^2 \sim 0{,}5\cdot 10^{-30} k^6 \frac{см^2}{стер}. \tag{1.9}$$

При получении оценки (1.9) мы заменим электромагнитные форм-факторы нуклона их значениями, соответствующими $t = 0$. Это становится понятным, если учесть, что $t_0/\mu^2 \ll 1$ (грубо размер протона порядка $1/\mu$). Константу $\Lambda$ мы определили из условия (1.4), предположив $\tau = 2{,}2\cdot 10^{-16}$ *сек*.

В отличие от результата Примакова (1.1), для фоторождения вперед здесь имеется очень быстрый рост сечения с энергией падающего фотона (согласно Примакову сечение фоторождения при $\theta = 0^0$ в кулоновском поле ядра при всех энергиях равно нулю). Здесь, как и в случае (1.1), в угловом распределении наблюдается максимум в области малых углов при

$$\theta^2 = \frac{t_0}{kq}\frac{2W^2 - kq(1+\mu_p)^2}{2W^2 + kq(1+\mu_p)^2}, \tag{1.10}$$

где $\mu_p$—аномальная часть магнитного момента протона ($\mu_p = 1{,}79275$). Однако, в отличие от (1.1), значение сечения в максимуме при больших энергиях мало отличается от значения при $\theta = 0^0$ (во всяком случае резкого пика в угловом распределении $\pi^0$ нет, хотя дифференциальное сечение и быстро падает с увеличением угла $\theta$).

Отметим, что при сверхвысоких энергиях формулу (1.9) необходимо видоизменить с учетом экранировки кулоновского поля нуклона атомным электроном. Эффективно это приводит к тому, что рост сечения (1.9) приостанавливается. Эффект экранировки легко учесть, основываясь на результатах работы [5].

Несколько слов о полном сечении фоторождения. Чтобы оценить вклад графика на фиг. 1 в полное сечение, необходимо проинтегрировать угловое распределение (1.6). При этом возникает трудность, связанная с незнанием поведения форм-факторов нуклона при больших передаваемых импульсах ($t \gg \mu^2$). Однако учитывая, что дифференциальное сечение быстро падает с увеличением угла $\theta$, при интегрировании мы можем ограничиться малыми углами $\theta^2 \simeq t_0/kq$, когда $F_1 = 1$, и $F_2 = \mu_p$. Для полного сечения при этом получается

$$\sigma_n = \frac{e^2}{4\pi}\frac{\Lambda^2}{4\pi}2\pi\frac{8-(1+\mu_p)^2}{8+(1+\mu_p)^2} \simeq 0{,}5\cdot 10^{-36}\ см^2. \tag{1.11}$$

Для окончательных выводов о вкладе данного графика необходимо оценить также вклады от других графиков. Получение строгой оценки не представляется возможным, поэтому приведем некоторые грубые оценки.

Для вклада остальных полюсных графиков,

$$\frac{d\sigma_{полюс}}{d\Omega} \simeq 3\cdot 10^{-29}\,\mu^4/W^4;$$

для интерференции графика фиг. 1 с остальными полюсными диаграммами

$$\frac{d\sigma_{инт}}{d\Omega} \simeq 3\cdot 10^{-31}\,\mu^3/W^2;$$

для дисперсионной части

$$\frac{d\sigma_{дис}}{d\Omega} \simeq 10^{-30}k^{-2}\,.$$

Эти оценки показывают, что вклад рассматриваемого графика в области очень малых углов и при энергиях выше 1 *Бэв* всегда будет доминировать.

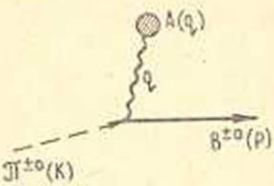
В связи с рассмотренной задачей представляет некоторый интерес аналогичный механизм генерации „бипиона" (трипиона). В последнее время в литературе широко обсуждается так называемый $\pi\pi$-резонанс. Множество экспериментов однозначно показывает, что в системе $\pi\pi$ имеется резонанс при энергии $\simeq 700$ *Мэв*, соответствующий $P$—фазе пион-пионного рассеяния с полным изотопическим спином единица. „Бипион" ($\pi\pi$-резонанс) распадается в основном по каналу $B \to \pi + \pi$ с очень большой вероятностью. Кроме основного канала возможен также распад $B \to \pi + \gamma$ с гораздо меньшей вероятностью. Несомненно представляет большой интерес обнаружение этой „частицы", а также измерение времени жизни „бипиона" по отношению к электромагнитному распаду $B \to \pi + \gamma$. С этой целью можно рассматривать обратную реакцию ($\gamma + \pi \to B$), беря в качестве $\gamma$ кулоновское поле ядра

$$\pi^{\pm,0} + Ze \to Ze + B^{\pm,0}. \tag{1.12}$$

Относительно „бипиона" можно утверждать, что пространственный спин $S = 1$, а изотопический $I = 1$. Электромагнитное взаимодействие „бипиона", приводящее эффективно к распаду $B \to \pi + \gamma$ (и, конечно, дающее вклад в другие электромагнитные процессы типа фоторождения $\pi$-мезона на нуклоне [6]), из общих соображений инвариантности в обычном и изотопическом пространствах, можно записать в следующем виде

$$L(x) = \Lambda \in_{\mu\nu\sigma\rho} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial B_\sigma^{(\alpha)}(x)}{\partial x_\rho} \Phi_\alpha(x), \tag{1.13}$$

где $\Lambda$—константа, связанная со временем жизни распада $B \rightarrow \pi + \gamma$; $B_\sigma^{(\alpha)}(x)$—волновая функция „бипиона" ($\alpha$ характеризует изотопическое состояние „бипиона" и равна 1, 2, 3). Процессу (1.12) будет соответствовать график, указанный на фиг. 2. Необходимо отметить, что хотя мы рассматриваем (1.12) в кулоновском поле ядра, результаты нетрудно обобщить и на случай нуклона (как и в случае фоторождения $\pi^0$).



Фиг. 2.

Приведем соответствующее выражение для матричного элемента

$$S_{if} = \frac{\Lambda}{(4\varepsilon\omega)^{1/2}} \in_{\mu\nu\sigma\rho} A_\mu(q)\, q_\nu e_\sigma p_\rho \tag{1.14}$$

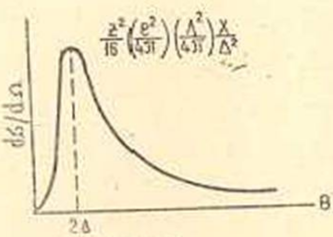
для всех трех возможных реакций (1.12). Здесь $k$—4-х импульс, $\omega$—энергия $\pi$-мезона, $p$—4-х импульс, $\varepsilon$—энергия и $e_\sigma$—вектор поляризации „бипиона",

$$A_\mu(q) = -2\pi i \delta(q_0) \frac{Ze}{\vec{q}^2} \delta_{\mu 4} \tag{1.15}$$

Фурье—образ кулоновского поля ядра с зарядом $Z$. В случае неточечного ядра к правой части (1.15) необходимо добавить форм-фактор распределения заряда ядра (отметим, что мы рассматриваем бесспиновое ядро).

Вычислим наконец угловое распределение „бипионов".

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{Z^2}{16} \frac{e^2}{4\pi} \frac{\Lambda^2}{4\pi} x \frac{\sin^2\theta}{\left(\Delta^2 + \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}. \tag{1.16}$$



Фиг. 3.

Здесь

$$x = v_B / v_\pi,$$
$$4\Delta^2 = x + x^{-1} - 2, \tag{1.17}$$

а $v_\pi$ и $v_B$—скорости $\pi$-мезона и „бипиона" соответственно.

Аналогично эффекту Примакова в угловом распределении наблюдается резкий пик в направлении вперед при

$$\theta^2 = 4\Delta^2 \tag{1.18}$$

и сечение при этом достигает значения

$$\frac{d\sigma_{\max}}{d\Omega} = \frac{Z^2}{16} \frac{e^2}{4\pi} \frac{\Lambda^2}{4\pi} \frac{x}{\Delta^2}. \tag{1.19}$$

Качественная картина углового распределения показана на фиг. 3. Подтверждение этой картины на эксперименте позволит определить константу $\Lambda B_{\gamma\pi}$ взаимодействия. С другой стороны, используя некоторые оценки работы [6], можно получить следующие значения для (1.19) при условии, что максимум достигается при $\theta = 1^0$

$$\frac{d\sigma_{\max}}{d\Omega} \sim Z^2 10^{-26} \frac{см^2}{стер}. \qquad (1.20)$$

По сравнению с эффектом Примакова, здесь сечения на несколько порядков больше и на тяжелых ядрах $\sim 10^{-23} \frac{см^2}{стер}$.

## § 2. Фоторождение $\pi^{\pm}$-мезонов

Прежде чем перейти к анализу фоторождения $\pi^{\pm}$-мезонов при больших энергиях в полюсном приближении, приведем некоторые результаты, вообще полезные при анализе фоторождения пионов. Представим сначала $S$-матрицу фоторождения в следующем виде [7]

$$S = 1 - i(2\pi)^4 (4k\omega)^{-1/2} \bar{u}(p_2)\, Tu(p_1)\, \delta(p_1 + k - p_2 - q). \qquad (2.1)$$

Из общих соображений релятивистской инвариантности $T$—матрицу можно построить следующим образом

$$T = AM_A + BM_B + CM_C + DM_D, \qquad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} M_A &= i\gamma_5(\gamma e)(\gamma k), \\ M_B &= 2i\gamma_5[(Pe)(qk) - (Pk)(qe)], \\ M_C &= \gamma_5[(\gamma e)(qk) - (\gamma k)(qe)], \\ M_D &= 2\gamma_5[(\gamma e)(Pk) - (\gamma k)(Pe) - iM(\gamma e)(\gamma k)]. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Здесь $A$, $B$, $C$ и $D$ — инвариантные амплитуды фоторождения, $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Остальные обозначения такие же, как и в § 1. Каждая из амплитуд $A$, $B$, $C$ и $D$ имеет следующую изотопическую структуру

$$A = A^{(+)}\delta_{\beta 3} + A^{(-)}\frac{1}{2}[\tau_\beta \tau_3] + A^{(0)}\tau_\beta, \qquad (2.4)$$

где $\tau_\beta$ — матрицы Паули, а $\beta = 1, 2, 3$ характеризует изотопическое состояние $\pi$-мезона.

Согласно (2.1)—(2.3) сечение фоторождения для неполяризованного пучка фотонов, вычисленное в системе центра масс, имеет вид

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{128\pi^2 W^2}\frac{q}{k} F, \qquad (2.5)$$

где

$$F = 8(p_1k)(p_2k)|A|^2 - 16z(M^2 + (p_1p_2))|B|^2 + 4[M^2(qk)^2 + 2z -$$

$$-(qk)^2(p_1p_2)]|C|^2 + 8[4M^2(p_1k)(p_2k) - 2(Pk)^2(p_1p_2) -$$

$$-6M^2(Pk)^2 - z]|D|^2 - 16z\,\mathrm{Re}(AB^*) + 16M(qk)(Pk)\,\mathrm{Re}(AC^*) +$$

$$+32M[(Pk)^2 - (p_1k)(p_2k)]\,\mathrm{Re}(AD^*) -$$

$$-16(qk)(Pk)(M^2 + (p_1p_2))\,\mathrm{Re}(CD^*), \tag{2.6}$$

и

$$z = \frac{1}{2}q^2k^2W^2\sin^2\theta. \tag{2.7}$$

Приведем выражения для инвариантных амплитуд $A$, $B$, $C$ и $D$ в полюсном приближении

$$A^{(\pm)} = -\frac{eG}{2}\left(\frac{1}{\alpha_1} \pm \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad A^{(0)} = A^{(+)},$$

$$B^{(\pm)} = -\frac{eG}{\alpha_3}\left(\frac{1}{\alpha_1} \pm \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad B^{(0)} = B^{(+)},$$

$$\tag{2.8}$$

$$C^{(\pm)} = \frac{1}{2}G(\mu_p - \mu_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} \mp \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad C^{(0)} = \frac{1}{2}G(\mu_p + \mu_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right),$$

$$D^{(\pm)} = \frac{1}{2}G(\mu_p - \mu_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} \pm \frac{1}{\alpha_2}\right), \quad D^{(0)} = \frac{1}{2}G(\mu_p + \mu_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right).$$

В выражении (2.8)

$$\alpha_1 = 2(p_1k), \quad \alpha_2 = -2(p_2k), \quad \alpha_3 = -2(qk), \tag{2.9}$$

$g^2 = \dfrac{G^2}{4\pi} \sim 15$ пион-нуклонная константа, $\mu_p$ и $\mu_n$ — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона.

В случае фоторождения $\pi^0$-мезонов на протоне

$$A = A^{(0)} + A^{(+)}. \tag{2.10}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для остальных амплитуд $B$, $C$ и $D$. В случае фоторождения $\pi^+$-мезонов

$$A = \sqrt{2}(A^{(0)} + A^{(-)}). \tag{2.11}$$

Учитывая (2.5)—(2.11) легко вычислить сечения фоторождения для $\pi^0$-и $\pi^+$-мезонов на протоне. Приведем эти результаты в удобной для сравнения с экспериментом форме

$$\frac{d\sigma^0(\theta)}{d\Omega} = \frac{\Lambda q}{kW^3(p_2k)}\left\{\frac{1}{(p_2k)}[k^2\beta^2(W + \beta) + q^2W^2(k - \omega)\sin^2\theta] -\right.$$

$$- 3{,}585k\beta^2 - 1{,}607k\,(2\beta^2 + q^2W^2\sin^2\theta) \Big\} \tag{2.12}$$

и

$$\frac{d\sigma^+(\theta)}{d\Omega} = \frac{\Lambda q}{kW^3}\Big\{\frac{1}{k^2\beta^2}\,[k^2\beta^2(W+\beta) + q^2W^2(k-\omega)\sin^2\theta] - 0{,}120\beta -$$

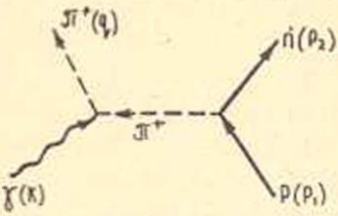
$$- \frac{1}{(p_2k)}\,[6{,}865\,W(p_2k)(1 + (p_1p_2)) - 1{,}714k\,(2\beta^2 + q^2W^2\sin^2\theta)]\Big\}\cdot \tag{2.13}$$

В (2.13) мы обозначили

$$\begin{aligned} &\Lambda = \frac{e^2}{4\pi}\,\frac{G^2}{4\pi}\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2\left(\frac{\hbar}{\mu c}\right)^2 \simeq 1{,}211\cdot 10^{-29}\,см^2, \\ &\beta = q\cos\theta - \omega, \\ &(p_2k) = -k\,(W+\beta), \\ &(p_1p_2) = k\beta + (k\omega - E_1E_2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

В формулах (2.11)—(2.13) выбрана система единиц, где $M = 1$.

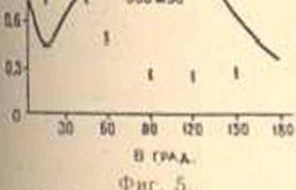
Для фоторождения $\pi^+$-мезонов на протоне среди возможных полюсных графиков имеется график с одним пионом в промежуточном состоянии (прямое фотопионное рождение) (фиг. 4). Вкладу этого графика в сечение фоторождения соответствуют члены, пропорциональные $\beta^{-1}$, $\beta^{-2}$. Согласно (2.14) при больших энергиях падающего фотона



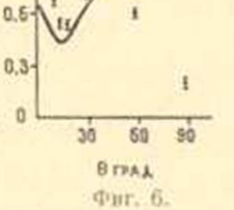

Фиг. 4.

$$\beta = q - \omega - 2q\sin^2\frac{\theta}{2} \simeq -\left(\frac{\mu^2}{2\omega} + 2q\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot \tag{2.15}$$

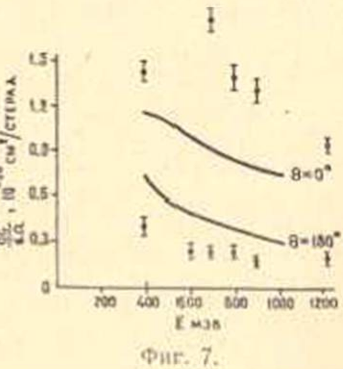
Поэтому, в области углов $\theta^2 \simeq \frac{\mu^2}{2\omega} \ll 1$ и $\beta \ll 1$, вклад от графика на




Фиг. 5.




Фиг. 6.




Фиг. 7.

фиг. 4 быстро растет. Естественно поэтому ожидать, что при больших энергиях и в области углов $\theta \sim \mu/\omega$ полюсные члены должны неплохо описывать экспериментальные результаты.

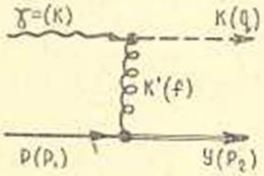
Мы сравним теоретический результат (2.13) с экспериментами [8] по фоторождению $\pi^+$-мезонов при высоких энергиях (фиг. 5, 6, 7).

На фиг. 5 и 6 дается угловое распределение $\pi^+$-мезонов при энергиях 900 и 1025 *Мэв*. Видно, что чем больше энергия, тем лучше согласие. На фиг. 7 приводится зависимость дифференциального сечения от энергии падающего фотона при углах $\theta = 0^0$ и $\theta = 180^0$.

Отметим, что полюсные члены для фоторождения $\pi^+$-мезонов вообще во многом лучше согласуются с экспериментом, чем для $\pi^0$-мезонов.

## § 3. Фоторождение странных частиц с обменом $K'$

Недавние эксперименты группы Альвареца [9] указывают на существование узкого резонанса $K'$ в системе $K\pi$ при энергии 878 *Мэв*. Относительно нестабильной частицы $K'$ в настоящее время более или менее определенно известно, что пространственный спин $S = 1$ (вектор или псевдовектор), а изотопический спин $I = 1/2$ [10,11]. Наличие такого резонанса $K'$ позволяет надеяться, что во многих реакциях с образованием странных частиц $K\pi$ взаимодействие можно будет учесть простыми полюсными членами, как в случае $\pi\pi$-взаимодействия. Некоторые авторы [10,12] указанным методом недавно рассмотрели реакцию $\pi^- + p \to \Lambda^0 + K^0$ в полюсном приближении с учетом лишь обмена $K'$ „частицей". Теоретический анализ указанной реакции позволяет делать заключения относительно спина $K'$ „частицы" и получить оценку для константы $\Lambda K' p$ взаимодействия. Однако этот анализ ничего определенного не говорит об относительной четности ($P_{\Lambda p}$) в вершине ($\Lambda K' p$), так как оба возможных варианта четности $P_{\Lambda p} = \pm 1$ дают одинаково хорошее согласие с экспериментном. Для определения $P_{\Lambda p}$ нужны дополнительные сведения. Поэтому кажется целесообразным рассматривать аналогичным методом фоторождение странных частиц ($\gamma + N \to \Lambda + K$). С этой целью рассмотрим следующий график (фиг. 8). Так как наибольшее количество экспериментальных данных имеется только для реакции



Фиг. 8.

$$\gamma + p \to \Lambda^0 + K^+, \tag{3.1}$$

то в дальнейшем мы не будем учитывать изотопические соотношения и более детально проанализируем лишь указанную реакцию. При этом мы везде будем предполагать, что $K'$—пространственный вектор, а не псевдовектор.

Приведем выражение для матричного элемента реакции (3.1)

$$S_{if} = -i \frac{(2\pi)^4 \Lambda_1 \Lambda_2}{(4k\omega)^{1/2}} \frac{\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} e_\mu k_\nu q_\rho}{(f^2 + m^2)} \left( \delta_{\sigma\alpha} - \frac{1}{m^2} f_\sigma f_\alpha \right) \times$$

$$\times \bar{u}(p_2) O \gamma_\alpha u(p_1) \delta(p_1 + k - p_2 - q). \tag{3.2}$$

Здесь и в дальнейшем $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$—константы, соответствующие взаимодействиям $\Lambda K' p$ и $KK'\gamma$. Относительно константы $\Lambda_1$ некоторые оценки имеются в [10] ($\Lambda_1^2/4\pi \sim 1$). Константу $\Lambda_2$ естественно сравнить с соответствующей константой $\Lambda_3$ $K'K\pi$ взаимодействия. Предполагая, что $\Lambda_3^2/4\pi \sim 1$, можно ожидать, что $\Lambda_2^2/4\pi \sim \frac{1}{137}\Lambda_3^2/4\pi$. Взаимодействие $K'K\gamma$ приводит к распаду $K' \to K + \gamma$. Так как вероятность основного распада $K' \to K + \pi$ минимум на два порядка больше вероятности распада $K' \to K + \gamma$, то имеет смысл определить время жизни $K'$ по отношению к распаду $K' \to K + \gamma$ изучением реакции [13]

$$K + Ze \to Ze + K' \tag{3.3}$$

при малых передаваемых импульсах.

В выражении (3.2) $e_\mu$ — вектор поляризации, $k$ — 4-х импульс фотона, $q$ и $\omega$ — 4-х импульс и энергия $K$-мезона, $f$ — импульс, $m$ — масса $K'$-мезона ($m = 878$ *Мэв*), $p_1$ и $p_2$ — импульсы протона и $\Lambda$ — гиперона. В зависимости от относительной четности протона и $\Lambda$ — гиперона $O$ принимает значения 1 и $\gamma_5$, при $P_{\Lambda p} = \pm 1$. В (3.2)

$$(f^2 + m^2)^{-1}\left(\delta_{\alpha\alpha} - \frac{1}{m^2} f_\alpha f_\alpha\right) \tag{3.4}$$

означает функцию Грина векторного $K'$-мезона. Так как $K'$ — нестабильная „частица", то в принципе необходимо учесть радиационные поправки к функции Грина. Это сведется фактически к добавлению к знаменателю (3.4) мнимой поправки $im/\tau$, где $\tau$ — время жизни $K'$. Так как $f^2 + m^2$ нигде не обращается в нуль, а ширина $K'$ резонанса мала, то естественно ожидать, что эти поправки будут незначительны. Радиационные поправки гораздо существенны к вершинному оператору $KK'\gamma$, так как $m > \mu$ ($\mu$ — масса $K$-мезона). В первом приближении мы не будем учитывать эти поправки.

Дифференциальное сечение фоторождения $\Lambda K$, вычисленное согласно (3.2) с учетом (1.7) в системе центра масс будет

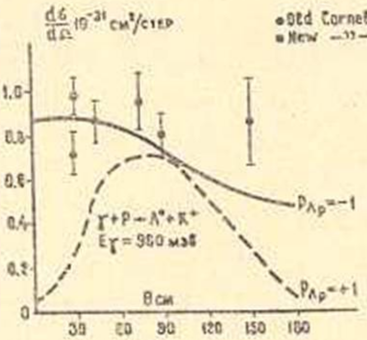
$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{(\Lambda_1\Lambda_2)^2}{32\pi^2}\frac{kq^3}{(t + m^2)^2}\left\{\sin^2\vartheta + \frac{1}{2W^2}\cos^2\vartheta\left[t + (M_2 - P_{\Lambda p} M_1)^2\right]\right\}, \tag{3.5}$$

где $t = 2k(\omega - q\cos\vartheta) - \mu^2$, $W$ — полная энергия, $M_2$ и $M_1$ — массы $\Lambda$ — гиперона и протона. Отметим, что формула (3.5) применима и к другим возможным реакциям $\gamma + N \to Y + K$, если в (3.5) подставить соответствующие массы и константы.

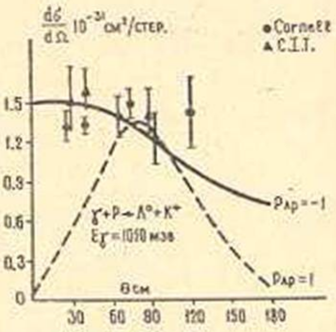
Особенностью выражения (3.5) является то обстоятельство, что член в квадратных скобках вблизи порога сильно меняется в зависимости от знака $P_{\Lambda p}$.

При $P_{\Lambda p} = 1$ угловое распределение характеризуется, в основном, множителем $\sin^2\vartheta$ и имеет явно неизотропный характер. В случае $P_{\Lambda p} = -1$ выражение в фигурных скобках приблизительно порядка единицы, и распределение почти изотропно.

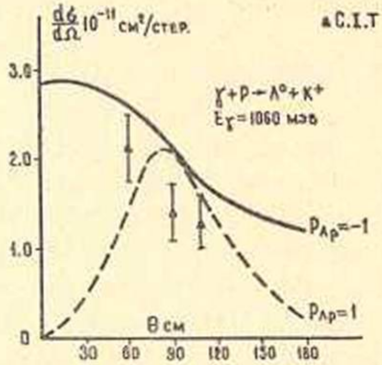
На фиг. 9, 10, 11 мы сравнили формулу (3.5) с опытными данными по фоторождению $\Lambda^0 K^+$ вблизи порога для трех значений энергии падающего кванта (980, 1010 и 1060 *Мэв*). Данные взяты из ра-




Фиг. 9.




Фиг. 10.




Фиг. 11.

боты [14]. Отметим, что экспериментальные результаты довольно ненадежные. Тем не менее формула (3.5) в основном правильно передает ход экспериментального углового распределения при $P_{\Lambda p} = -1$. При построении теоретических кривых мы для $(\Lambda_1 \Lambda_2)^2/32\pi^2$ выбрали значение $0{,}35 \cdot 10^{-28}$ *см*², что грубо соответствует $e^2/m_\pi^2$. Такая оценка согласуется с ожидаемым значением времени жизни $K'$ при распаде $K' \to K + \gamma$.

## Заключение

Задачи, рассмотренные в § 1 представляют некоторый интерес, так как позволяют определить времена жизни некоторых нестабильных частиц. Прямые методы измерения времени жизни $\pi^0$ весьма затруднительны из-за чрезвычайной малости времени жизни. В эффекте Примакова, наоборот, чем меньше время жизни, тем больше ожидаемый эффект. В реальных условиях эксперимента, однако, возникают некоторые трудности. Часть из них обусловлена тем, что ожидаемый эффект большой лишь в области очень малых углов. Некоторые же трудности связаны с выделением на большом фоне конкурирующих процессов лишь нужных событий. Что касается рождения „бипиона" в поле ядра $\pi$-мезонами, то здесь имеются дополнительные трудности из-за чрезвычайной малости времени жизни „бипиона". Последний мгновенно распадается на два $\pi$-мезона, находясь фактически еще в области взаимодействия. На эксперименте процесс (1.12) на пучке $\pi^-$-мезонов будет выглядеть как однолучевая звезда (один из образованных $\pi$-мезонов нейтральный). Выделить процесс (1.12) видимо можно будет по кинематике.

Более точные эксперименты в случае фоторождения странных частиц позволили бы уточнить параметры модели. Они же покажут, насколько важно резонансное $K\pi$ взаимодействие в фоторождении.

Автор выражает благодарность К. А. Тер-Мартиросяну, М. Л. Тер-Микаеляну, Ю. Л. Вартаняну, Э. В. Чубаряну и В. А. Туманяну за обсуждение результатов.

Физический институт
АН Армянской ССР

Поступила 21 I 1962

Վ. Մ. Հարությունյան

## π- ԵՎ K-ՄԵԶՈՆՆԵՐԻ ՖՈՏՈԱՌԱՋԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հոդվածում դիտարկված են բարձր էներգիաների ֆոտոնների կողմից π- և K-մեզոնների առաջացման մի քանի հարցերը։*

*Առաջին մասում ցույց է տրված, որ բարձր էներգիաների դեպքում $\pi^0$-մեզոնների ֆոտոառաջացումը փոքր անկյունների տիրույթում հիմնականում տեղի է ունենում նուկլոնի կուլոնյան դաշտում։ Հաշված է $\pi^0$-մեզոնների ֆոտոառաջացման լրիվ կտրվածքը և ցույց է տրված, որ այն շատ արագ աճում է, երբ ֆոտոնի էներգիան մեծանում է։ Քննարկվում է Պրիմակովի էֆեկտը նուկլոնի վրա և նույնպիսի մեխանիզմով π-մեզոնների կողմից միջուկի կուլոնյան դաշտում «բիպիոնների» առաջացումը։*

*Երկրորդ մասում բևեռային գրաֆիկների օգնությամբ հաշված է $\pi^+$-մեզոնների ֆոտոառաջացման լրիվ կտրվածքը նուկլոնների վրա, բարձր էներգիաների և փոքր անկյունների տիրույթում։ Ցույց է տրված, որ թեորիան բավարար կերպով համընկնում է փորձի հետ։*

*Երրորդ մասում դիտարկված են տարօրինակ մասնիկների ֆոտոառաջացման հարցերը այն դեպքում, երբ այդ երևույթը հիմնականում պայմանավորված է K'-մեզոնների փոխազդեցությամբ։*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Соловьев Л. Д.*, Чэнь Цун-мо. Применение дифференциального метода для получения амплитуды фоторождения из дисперсионных соотношений. Препринт ОИЯИ, Д—728.

2. *Primakoff H.* Photo-Production of Neutral Mesons in Nuclear Electric Fields and the Mean Life of the Neutral Meson. Phys. Rev., 81, 899, 1951.
3. *Höhler G., Dietz K.* and *Mullensiefen A.* The Contribution of the Born Terms to Photoproduction of Pionsat High Energies. Nuovo Cimento, 21, 1, 186, 1961.
4. *Glaser V.* and *Ferrell R.* Lifetime of the Neutral Pion. Phys. Rev. 121, 886, 1961.
5. *Pomeranchuk I. Ya.* and *Shmushkevich I. M.* On Process in the Interaction of $\gamma$—Quanta with Unstable Particles. Nucl. Phys., 23, 3, 452, 1961:
6. *Соловьев Л. Д.*, Чень Цун-мо. О феноменологическом учете $\pi\pi$ взаимодействия Препринт ОИЯИ, Д-774.
7. *Chew G. F., Goldberger M. L., Low F. E., Nambu Y.* Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production. Phys. Rev., 106, 1345, 1957.
8. *Walker R. L.* Photoproduction of Positive Pions from Hydrogen. Proceedings of the International Conference on High Energy Physics at Rechester. стр. 17, 1960.
9. Alvarez et al. Resonance in the $\Lambda\pi$ system. Phys. Rev. Lett., 5, 11, 520, 1960.
10. Chia—Hwa Chan. $K$-$\pi$ Resonance. Phys. Rev. Lett., 6, 7, 383, 1961.
11. *Minami S.* $K$-Meson—Pion Interaction and $K^- + p \to \overline{K}^0 + \pi^- + p$ Reaction. Prog. Theor. Physics., 26, 356, 1961.
12. *Beg M. A. B.* et al. $K$-$\pi$ Resonance and Lifetime of the $K'$ Particle. Phys. Rev. Lett., 6, 145, 1961.
13. *Beg M. A. B.* et al. Decay Modes of $K^*$. 124, 622, 1961.
14. *Turkot F.* Photoproduction of strange Particles. Proceeding of the International Conference on High Energy Physics at Rochester. стр. 369, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ФИЗИКА

А. Г. Акритов, П. А. Безирганян

# Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от размеров отражающего монокристалла (случай точечонго источника)

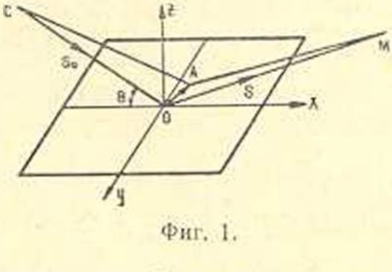
В работах [1]—[4] рассмотрена зависимость интенсивности отраженных волн от размеров отражающего монокристалла в случае плоской монохроматической падающей волны. Здесь мы рассмотрим случай точечного источника рентгеновских лучей.

Пусть сферическая монохроматическая волна от точечного источника $C$ (фиг. 1) падает на кристаллы так, что в центральной точке $O$ поверхности кристалла падающая волна составляет угол $\theta$ с поверхностью кристалла.

Единичный вектор направления $CO$ обозначим через $\vec{S}_0$.

Пусть точка наблюдения $M$ из начала координат видна в направлении $\vec{S}$.

Источник $C$ и точка наблюдения $M$ расположены на плоскости $ZOX$, а отражающая плоскость, т. е. поверхность кристалла, совпадает с плоскостью $XOY$.




Фиг. 1.

Координаты точек $C$, $M$ и $A$ соответственно будут

$C(-r_1 \cos\theta,\ \ 0,\ \ r_1 \sin\theta)$,

$M(r_2 \cos\theta,\ \ 0,\ \ r_2 \sin\theta)$,

$A(x,\ y)$,

где $r_1$ и $r_2$ — соответственно расстояния точек $C$ и $M$ от точки $O$. Для расстояния $L_1$ и $L_2$ $(L_1 = CA,\ L_2 = AM)$ пренебрегая степенями $x$ и $y$ выше второй, получим

$$L_1 = r_1 + \frac{x^2 \sin^2\theta + y^2}{2r_1} + x\cos\theta,$$

$$L_2 = r_2 + \frac{x^2 \sin^2\theta + y^2}{2r_2} - x\cos\theta.$$

Тогда, в точке наблюдения $M$ для разности хода $\Delta$ между волнами, отраженными от точек $O$ и $A$, получим

$$\Delta = (L_1 + L_2) - (r_1 + r_2) = \frac{x^2 \sin^2\theta + y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Если точка $A$ расположена на границе первой зоны, то

$$\frac{x^2 \sin^2\theta + y^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{\lambda}{2}$$

или

$$\frac{x^2}{\dfrac{r_1 r_2 \lambda}{(r_1 + r_2)\sin^2\theta}} + \frac{y^2}{\dfrac{r_1 r_2 \lambda}{r_1 + r_2}} = 1,$$

т. е. первая зона Френеля и в этом случае имеет форму эллипса, но полуоси его уменьшены в $\sqrt{\dfrac{r_1}{r_1 + r_2}}$ раз.

Отсюда, без дальнейших расчетов можно сделать следующий вывод. Интенсивность волны, отраженной от одной неограниченной атомной плоскости, в случае точечного источника меньше, чем в случае первичной плоской волны.

Действительно, ведь при неограниченной атомной плоскости суммарное действие равно половине действия первой зоны. При точечном источнике площадь первой зоны уменьшается, следовательно и уменьшается интенсивность отраженной волны.

Волна, отраженная от одной плоскости, в этом случае (непоглощающий кристалл) будет [5]

$$G = \frac{E_0 n e^2 f}{r_1 r_2 m c^2} \exp\{i[\omega t - k(r_1 + r_2)]\} \times$$

$$\times \iint \exp\left\{-\frac{ik(x^2 \sin^2\theta + y^2)}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right\} dx dy.$$

В случае ограниченного непоглощающего кристалла, вещественная и мнимая части амплитуды этой волны соответственно будут

$$G_0' = \frac{E_0 n e^2 f}{r_1 r_2 m c^2}\left\{\int_0^A \cos\left[\frac{k(r_1 + r_2)\sin^2\theta \cdot x^2}{2 r_1 r_2}\right] dx \int_0^B \cos\left[\frac{k(r_1 + r_2) y^2}{2 r_1 r_2}\right] dy -\right.$$

$$\left. - \int_0^A \sin\left[\frac{k(r_1 + r_2)\sin^2\theta \cdot x^2}{2 r_1 r_2}\right] dx \int_0^B \sin\left[\frac{k(r_1 + r_2) y^2}{2 r_1 r_2}\right] dy\right\},$$

$$G_0'' = -\frac{E_0 n e^2 f}{r_1 r_2 m c^2}\left\{\int_0^A \cos\left[\frac{k(r_1 + r_2)\sin^2\theta \cdot x^2}{2 r_1 r_2}\right] dx \times\right.$$

$$\times \int_0^B \sin\left[\frac{k(r_1 + r_2) y^2}{2 r_1 r_2}\right] dy +$$

$$+\int\limits_0^A \sin\left[\frac{k(r_1+r_2)\sin^2\theta\cdot x^2}{2r_1r_2}\right]dx\int\limits_0^B\cos\left[\frac{k(r_1+r_2)\,y^2}{2r_1r_2}\right]dy\Bigg\}.$$

После некоторых простых преобразований получим

$$G_0' = \frac{E_0 n e^2 f\lambda}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\left\{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}\sin\theta\, A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}\sin\theta\, A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right\}. \qquad (1)$$

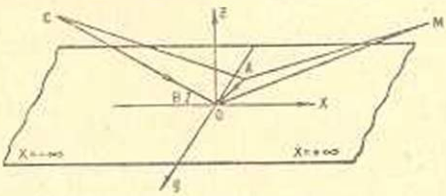
$$G_0'' = -\frac{E_0 n e^2 f\lambda}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\left\{\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}\sin\theta\, A}\cos\frac{\pi}{2}x^2dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}\sin\theta\, A}\sin\frac{\pi}{2}x^2dx\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy\right\}. \qquad (2)$$

В формулах (1) и (2) $E_0$ — амплитуда падающей волны на единицу расстояния от источника; $A$ и $B$ — линейные размеры кристалла в направлениях $X$ и $Y$ соответственно; $n$ — число атомов в 1 $см^2$ плоскости; $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $f$ — атомный фактор (или структурный фактор).

Если отражающие плоскости в одном направлении ограничены, а в другом нет, то вместо (1) и (2) получим (непоглощающий кристалл):

для случая, когда отражающая плоскость в направлении $Y$ ограничена (размер плоскости в направлении $Y$ равен $B$), а в направлении $X$ неограничена, т. е. $-\infty\leqslant x\leqslant\infty$ (фиг. 2)




Фиг. 2.

$$G_0' = -\frac{E_0 n e^2\lambda f(2\theta,\,k)}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy-\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right], \qquad (3)$$

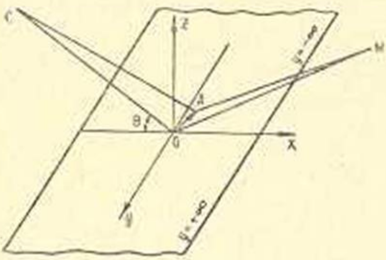
$$G_0'' = -\frac{E_0 n e^2\lambda f(\theta,\,k)}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy+\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1r_2}}B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]. \qquad (4)$$

для случая, когда отражающая плоскость в направлении $X$ ограничена (размер плоскости в направлении $X$ равен $A$), а в направлении $Y$ неограничена, т. е. $-\infty \leqslant y \leqslant \infty$ (фиг. 3)

$$G_0' = \frac{E_0 n e^2 \lambda f(2\theta, k)}{2mc^2 (r_1+r_2)\sin\theta}\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]. \quad (5)$$

$$G_0'' = -\frac{E_0 n e^2 \lambda f(2\theta, k)}{2mc^2 (r_1+r_2)\sin\theta}\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим поглощающий кристалл. В случае поглощающего кристалла [2] вместо формул (1)—(6) получим следующие формулы.



Фиг. 3.

а) Для случая ограниченной отражающей плоскости

$$G_0' = D\,[f'(2\theta, k)(a_1b_1 - a_2b_2) + f''(2\theta, k)(a_1b_2 + a_2b_1)], \quad (7)$$

$$G_0'' = D\,[f''(2\theta, k)(a_1b_1 - a_2b_2) - f'(2\theta, k)(a_1b_2 + a_2b_1)], \quad (8)$$

где

$$D = \frac{E_0 n e^2 \lambda}{2mc^2 (r_1+r_2)\sin\theta},$$

$$a_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx, \qquad a_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx,$$

$$b_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \cos\frac{\pi}{2}y^2dy, \qquad b_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \sin\frac{\pi}{2}y^2dy,$$

$f'(2\theta, k)$ и $f''(2\theta, k)$ — вещественные и мнимые части атомного фактора.

б) Для случая, когда отражающая плоскость в направлении $Y$ ограничена, а в направлении $X$ неограничена

$$G_0' = \frac{E_0 n e^2 \lambda}{2mc^2 (r_1+r_2)\sin\theta}\left\{f'(2\theta, k)\left[\int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B}\cos\frac{\pi}{2}y^2dy - \int_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B}\sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right] + \right.$$

$$+ f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \cos\frac{\pi}{2}y^2dy + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\Bigg\}, \tag{9}$$

$$G_0^{''} = \frac{E_0ne^2\lambda}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\Bigg\{f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \cos\frac{\pi}{2}y^2dy - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right] -$$

$$- f'(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \cos\frac{\pi}{2}y^2dy + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}B} \sin\frac{\pi}{2}y^2dy\right]\Bigg\}. \tag{10}$$

в) Для случая, когда отражающая плоскость в направлении $X$ ограничена, а в направлении $Y$ неограничена

$$G_0^{'} = \frac{E_0ne^2\lambda}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\Bigg\{f'(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right] +$$

$$+ f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]\Bigg\}, \tag{11}$$

$$G_0^{''} = \frac{E_0ne^2\lambda}{2mc^2(r_1+r_2)\sin\theta}\Bigg\{f''(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx - \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right] -$$

$$- f'(2\theta,\ k)\left[\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \cos\frac{\pi}{2}x^2dx + \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2(r_1+r_2)}{\lambda r_1 r_2}}\sin\theta A} \sin\frac{\pi}{2}x^2dx\right]\Bigg\}. \tag{12}$$

Для всех этих случаев мы получим $\Sigma_0^{'}$ вещественные и $\Sigma_0^{''}$ мнимые части амплитуд волн, отраженных в направлении падающего пучка (в направлении оси падающего пучка), если в формулах (1)—(12) вместо $f(2\theta,\ k)$, $f'(2\theta,\ k)$ и $f''(2\theta,\ k)$ соответственно поставим $f(0,\ k)$, $f'(0,\ k)$ и $f''(0,\ k)$.

В рассматриваемых случаях, как в случаях [1]—[4], для относительной интенсивности волн, отраженных от кристалла, имеет место следующая формула

$$\left|\frac{S_0}{T_0}\right|^2 = \frac{[G_0^{'}]^2 + [G_0^{''}]^2}{U + W + V}, \tag{13}$$

где

$$U = [dk(\theta - \theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0^{''}]^2 + [\Sigma_0^{'}]^2,$$

$$W = \sqrt{[2\Sigma_0''[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'] + 2G_0'G_0'']^2 + L^2},$$

$$L^2 = [[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0']^2 + [G_0']^2 - [G_0'']^2 - [\Sigma_0'']^2]^2,$$

$$V = 2\sqrt{UW}\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\Sigma_0''}{dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{2\Sigma_0''[dk(\theta-\theta_0)\cos\theta_0 - \Sigma_0'] + 2G_0'G_0''}{L^2},$$

$d$ — межплоскостное расстояние отражающих плоскостей,

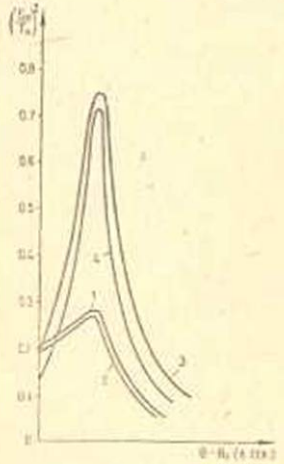
$\theta_0$ — угол, удовлетворяющий уравнению Вульфа-Брегга,

$T_0$ — амплитуда падающей волны на поверхности кристалла (в центральной точке),

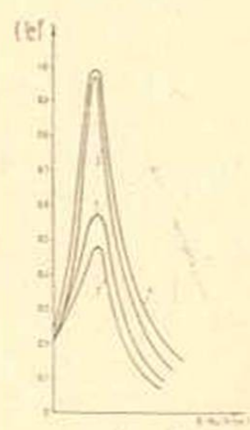
$S_0$ — амплитуда отраженной от кристалла волны на поверхности кристалла.

Для сравнения с результатами, полученными в [1]—[4], вычислим по формуле (13) интенсивность в диффракционном максимуме при отражении рентгеновских лучей $M_0K_\alpha$, от кристалла кальцита для всех рассмотренных здесь случаев.

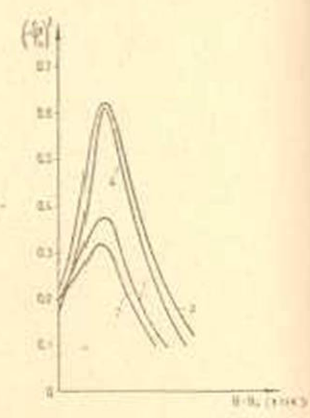
Результаты расчетов представлены на фигурах 4, 5 и 6.



Фиг. 4.
1—непоглощающий кристалл $A=10^{-4}$ *см*, $B=10^{-4}$ *см*;
2—поглощающий кристалл $A=10^{-4}$ *см*, $B=10^{-4}$ *см*;
3—непоглощающий кристалл $A=10^{-3}$ *см*, $B=10^{-3}$ *см*;
4—поглощающий кристалл $A=10^{-3}$ *см*, $B=10^{-3}$ *см*.



Фиг. 5.
1—непоглощающий кристалл $x=\pm\infty$, $B=10^{-4}$ *см*;
2—поглощающий кристалл $x=\pm\infty$, $B=10^{-4}$ *см*;
3—непоглощающий кристалл $x=\pm\infty$, $B=10^{-3}$ *см*;
4—поглощающий кристалл $x=\pm\infty$, $B=10^{-3}$ *см*.



Фиг. 6.
1—непоглощающий кристалл $A=10^{-4}$ *см*, $y=\pm\infty$;
2—поглощающий кристалл $A=10^{-4}$ *см*, $y=\pm\infty$;
3—непоглощающий кристалл $A=10^{-3}$ *см*, $y=\pm\infty$;
4—поглощающий кристалл $A=10^{-3}$ *см*, $y=\pm\infty$.

Из результатов вычислений можно сделать следующие выводы.

1) В случае точечного источника (сферическая падающая волна), как и в случае падающей плоской волны, полного отражения не получается и коэффициент преломления зависит от размеров отражающих плоскостей.

2) В случае бесконечных отражающих плоскостей, с увеличением расстояния точечного источника рентгеновских лучей от этих плоскостей относительная интенсивность отраженных волн (отношение интенсивности отраженных волн к интенсивности первичных волн) увеличивается.

3) В случае точечного источника, колебание интенсивности в зависимости от размеров кристалла уменьшается, так как в этом случае площади зон Френеля меньше, чем в случае падающей плоской волны.

4) Коэффициент преломления зависит от расстояния точечного источника рентгеновских лучей от отражающих плоскостей.

Армянский Сельскохозяйственный институт
Ереванский Государственный университет

Поступила 23 IX 1960

**Ս. Գ. Ակրիտով, Պ. Ս. Բեզիրգանյան**

# ԱՆԴՐԱԴԱՐՁԱԾ ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ԿԱԽՈՒՄԸ ԱՆԴՐԱԴԱՐՁՆՈՂ ՄԻԱԲՅՈՒՐԵՂԻ ՉԱՓԵՐԻՑ՝ ԿԵՏԱՅԻՆ ԱՂԲՅՈՒՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Աշխատության մեջ ուսումնասիրված է անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների ինտենսիվության կախումը անդրադարձնող միաբյուրեղի չափերից՝ կետային աղբյուրի դեպքում:*

*Տեսական հաշվումներով ցույց է տրված, որ կետային աղբյուրի (ինչպես և սկզբնական հարթ ալիքի) դեպքում լրիվ անդրադարձում չի ստացվում և բեկման ցուցիչը կախված է անդրադարձնող միաբյուրեղի չափերից: Անսահմանափակ հարթությունների (ատոմային) դեպքում անդրադարձած ռենտգենյան ճառագայթների հարաբերական ինտենսիվությունը (անդրադարձած ալիքի ինտենսիվության հարաբերությունը սկզբնական ալիքի ինտենսիվությանը) մեծանում է կետային աղբյուրի այդ հարթություններից ունեցած հեռավորության մեծացմամբ: Ցույց է տրված, որ կետային աղբյուրի դեպքում ինտենսիվության տատանումը՝ կախված բյուրեղի չափերից, փոքրանում է, որովհետև այդ դեպքում Ֆրենելի զոնաների մակերեսներն ավելի փոքր են, քան ընկնող հարթ ալիքի դեպքում: Ցույց է տրված նաև, որ այս դեպքում Ֆրենելի զոնաների մակերեսները կրճատվում են $\sqrt{\frac{r_1}{r_1+r_2}}$ անգամ, որտեղ $r_1$-ը կետային աղբյուրի հեռավորությունն է անդրադարձնող*

*միաբյուրեղի կենտրոնից, իսկ $r_2$-ը դիտման կետի հեռավորությունն է բյուրեղի այդ կետից։*

*Վերջապես, եզրակացվում է, որ ռենտգենյան ճառագայթների բեկման ցուցիչը կախված է կետային աղբյուրի՝ անդրադարձնող հարթություններից ունեցած հեռավորությունից։*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Безирганян П. А.* Динамическая теория интерференции рентгеновских лучей для конечного кристалла. ДАН АрмССР, **29**, № 5, 1959.
2. *Безирганян П. А.* Динамическая теория интерференции рентгеновских лучей для конечного кристалла (поглощающий кристалл). ДАН АрмССР (в печати).
3. *Безирганян П. А.* и *Акритов А. Г.* Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от формы отражающего кристалла. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, 13, № 2, 1960.
4. *Безирганян П. А.* и *Акритов А. Г.* Зависимость интенсивности рентгеновских отраженных волн от формы отражающего кристалла (случай поглощающего кристалла). Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **13**, № 5, 1960.
5. *Безирганян П. А.* и *Акритов А. Г.* Увеличение интенсивности отраженных рентгеновских волн при изгибе отражающего кристалла. Кристаллография (в печати).

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

РАДИОФИЗИКА

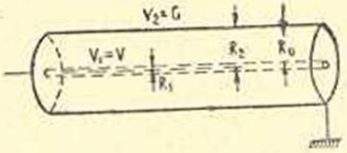
А. М. Резикян, Г. Г. Бахшян

# Движение электрона в скрещенных неоднородных электрическом и магнитном полях

В настоящей работе рассмотрено движение электрона в электрическом и магнитном полях коаксальных цилиндров. Электрическое поле получается приложением разности потенциалов между электродами, а магнитное поле—током, протекающим через внутренний электрод—стержень. При начальной скорости, отличной от нуля, получена траектория электрона в виде петли, шаг которой определен. Определены также частота вращения и средняя скорость перемещения электрона вдоль оси цилиндра. Рассмотрены также вопросы влияния некоторых параметров на движение электрона.

Движение электронов в постоянных однородных электрических и магнитных полях рассмотрено в [1, 2, 3]. Что же касается движения электронов в электрических и магнитных неоднородных полях, то в работах [4, 5, 6, 7, 8] приближенными методами решены лишь некоторые частные задачи.

В настоящей статье рассматривается частная задача движения электрона в неоднородных скрещенных полях, в пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора, где внутренним электродом является круглый провод радиуса $R_1$, а внешним электродом—полый цилиндр радиуса $R_2$. В отличие от работы [8] предполагается, что начальная скорость электрона отлична от нуля.




Фиг.

Если разность потенциалов между двумя электродами равна $V$, то постоянное неоднородное по радиусу электрическое поле в системе цилиндрических координат $z\,r\,\varphi$ (когда ось цилиндрического конденсатора совпадает с осью $z$) представится в виде [8]

$$E_z = 0, \qquad E_r = \frac{V}{r \ln \dfrac{R_1}{R_2}}, \qquad E_\varphi = 0. \tag{1}$$

Источником постоянного неоднородного магнитного поля, имеющего круговое распределение силовых линий, является ток $J$, протекающий через электрод радиуса $R_1$.

Таким образом, для составляющих магнитного поля будем иметь

$$H_z = 0, \qquad H_r = 0, \qquad H_\varphi = \frac{2J}{r}. \tag{2}$$

Допустим из точки $z=0$, $r=R_0$, $\varphi=0$ в скрещенные поля выходит электрон с заданной начальной скоростью $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} v_{z_н} &= -v_0\cos\alpha, \\ v_{r_н} &= -v_0\cos\gamma, \\ v_{\varphi_н} &= -v_0\cos\beta. \end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая (1) и (2) получим систему уравнений движения для указанного электрона в виде

$$\begin{aligned} \ddot z &= A\frac{\dot r}{r}, \\ \ddot r &= r\dot\varphi^2 - \frac{B}{r} - A\frac{\dot z}{r}, \\ \ddot\varphi &= -\frac{2\dot r\dot\varphi}{r}, \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\frac{e}{m}2J, \\ B &= \frac{e}{m}\frac{V}{\ln\frac{R_1}{R_2}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь все физические величины взяты в системе *CGSM*, а заряд электрона со знаком минус. Так как мы исследуем движение электрона в плоскости $(zr)$, то системы уравнений упрощаются

$$\ddot z = A\frac{\dot r}{r}, \tag{6а}$$

$$\ddot r = -\frac{B}{r} - A\frac{\dot z}{r}. \tag{6б}$$

Интегрируя уравнение (6а) получаем

$$\dot z = A\ln r + C_1, \tag{7}$$

где постоянную интегрирование $C_1$ находим из начальных условий. При $r=R_0$

$$\begin{aligned} \dot z &= -v_0\cos\alpha \\ -v_0\cos\alpha &= A\ln R_0 + C_1 \\ C_1 &= -A\ln R_0 - v_0\cos\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив (7) в (6б) и проинтегрировав, получим

$$\dot{r} = \pm\sqrt{-A^2 \ln^2 r - 2(AC_1 + B)\ln r + 2C_2}\,, \tag{9}$$

где постоянную интегрирования $2C_2$ находим подставив $r = r_{k_1}$, $\dot{r} = 0$.

$$2C_2 = A^2 \ln^2 r_{k_1} + 2(AC_1 + B)\ln r_{k_1}. \tag{10}$$

Освобождаясь от параметрического вида получаем

$$\frac{dz}{dr} = \pm \frac{A \ln r + C_1}{\sqrt{-A^2 \ln^2 r - 2(AC_1 + B)\ln r + 2C_2}}, \tag{11}$$

затем произведя замену переменных

$$\ln r + \frac{AC_1 + B}{A} = y$$

и проинтегрировав, получим

$$z = \pm \int \frac{(Ay + B)\, e^{\frac{Ay - AC_1 - B}{A^2}}}{A^2 \sqrt{a^2 - y^2}}\, dy + C_2, \tag{12}$$

где

$$a^2 = \left(\frac{AC_1 + B}{A}\right)^2 + 2C_2.$$

Разложив в ряд $e^{\frac{Ay - AC_1 - B}{A^2}}$ и ограничиваясь пятым членом, будем иметь

$$e^{\frac{Ay - Q}{A^2}} = 1 + \frac{Ay - Q}{A^2} + \frac{(Ay - Q)^2}{2A^4} + \frac{(Ay - Q)^3}{6A^6} + \frac{(Ay - Q)^4}{24A^8}, \tag{13}$$

где

$$Q = AC_1 + B.$$

Подставив (13) в (12), проинтегрировав и перейдя к первоначальной переменной получим

$$z = \pm \Bigg[ (L_1 + L_2 \ln r + L_3 \ln^2 r + L_4 \ln^3 r + L_5 \ln^4 r) \times$$

$$\times \sqrt{-A^2 \ln^2 r - 2(AC_1 + B)\ln r + 2C_2} + \eta \arcsin \frac{A \ln r + \frac{Q}{A}}{a} \Bigg] + C_2, \tag{14}$$

где

$$L_1 = -\frac{1}{A} + \frac{Q}{2A^3} - \frac{Q^2}{6A^5} - \frac{a^2}{3A^3} + \frac{Q^3}{24A^7} + \frac{13a^2Q}{48A^5} -$$

$$-\frac{Q^4}{120A^9} - \frac{83a^2Q^2}{720A^7} - \frac{Q^4}{45A^5} + \frac{B}{A^3} - \frac{5BQ}{6A^5} + \frac{11BQ^2}{36A^7} +$$

$$+\frac{a^2B}{9A^5} - \frac{25BQ^3}{288A^9} - \frac{55Ba^2Q}{576A^7},$$

$$L_2 = -\frac{1}{2A} - \frac{Q}{6A^3} - \frac{Q^3}{24A^5} - \frac{a^2}{16A^3} + \frac{Q^3}{120A^7} + \frac{29a^2Q}{720A^5} +$$

$$+ \frac{B}{6A^3} - \frac{5BQ}{36A^5} + \frac{13BQ^2}{288A^7} + \frac{Ba^2}{64A^5},$$

$$L_3 = -\frac{1}{6A} + \frac{Q}{24A^3} - \frac{a^2}{90A^3} - \frac{Q^2}{120A^5} + \frac{B}{18A^3} - \frac{7}{288}\frac{BQ}{A^5},$$

$$L_4 = -\frac{1}{24A} + \frac{Q}{120A^3} + \frac{B}{96A^3},$$

$$L_5 = -\frac{1}{120A},$$

$$\eta = \frac{a^2}{2A^2} - \frac{a^2Q}{2A^4} + \frac{a^4}{16A^4} + \frac{a^2Q^2}{4A^6} - \frac{a^4Q}{16A^6} - \frac{a^2Q^3}{12A^8} -$$

$$-\frac{B}{A^2} + \frac{BQ}{A^4} - \frac{Ba^2}{6A^4} - \frac{BQ^2}{2A^6} - \frac{BQa^2}{4A^6} + \frac{BQ^3}{6A^8} - \frac{Ba^4}{64A^6} - \frac{Ba^2Q^2}{8A^8} - \frac{BQ^4}{24A^{10}}.$$

Постоянную интегрирования (14) находим из условия $z = z_k$ при $r = r_{k_1}$, которое дает

$$C_z = \mp \eta \arcsin \frac{A \ln r_{k_1} + \dfrac{Q}{A}}{a} + z_k,$$

$$z = \pm \Bigg[ (L_1 + L_2 \ln r + L_3 \ln^2 r + L_4 \ln^3 r + L_5 \ln^4 r) \times$$

$$\times \sqrt{-A^2 \ln^2 r - 2(AC_1 + B)\ln r + 2C_2} +$$

$$+ \eta \left( \arcsin \frac{A \ln r + \dfrac{Q}{A}}{a} - \arcsin \frac{A \ln r_{k_1} + \dfrac{Q}{A}}{a} \right) \Bigg] + z_k. \qquad (15)$$

Здесь $z_k$ определяется из условия $z = z_0 = 0$ при $r = R_0$, которое дает

$$z_k = \pm \Bigg[ (L_1 + L_2 \ln R_0 + L_3 \ln^2 R_0 + L_4 \ln^3 R_0 + L_5 \ln^4 R_0) \times$$

$$\times \sqrt{-A^2 \ln^2 R_0 - 2(AC_1 + B)\ln R_0 + 2C_2} +$$

$$+ \eta \left( \arcsin \frac{A \ln R_0 + \dfrac{Q}{A}}{a} - \arcsin \frac{A \ln r_{k_1} + \dfrac{Q}{A}}{a} \right) \Bigg].$$

В полученном равенстве физическому смыслу удовлетворяет только знак (+).

Подставив в (15) найденное значение $z_k$ окончательно получим

$$z = \pm \Bigg[ (L_1 + L_2 \ln r + L_3 \ln^2 r + L_4 \ln^3 r + L_5 \ln^4 r) \times$$

$$\times \sqrt{-A^2 \ln^2 r - 2(AC_1 + B) \ln r + 2C_2} +$$

$$+ \eta \left( \arcsin \frac{A \ln r + \frac{Q}{A}}{a} - \arcsin \frac{A \ln r_{k_1} + \frac{Q}{A}}{a} \right) \Bigg] +$$

$$+ \Bigg[ (L_1 + L_2 \ln R_0 + L_3 \ln^2 R_0 + L_4 \ln^3 R_0 + L_5 \ln^4 R_0) \times$$

$$\times \sqrt{-A^2 \ln^2 R_0 - 2(AC_1 + B) \ln R_0 + 2C_2} +$$

$$+ \eta \left( \arcsin \frac{A \ln R_0 + \frac{Q}{A}}{a} - \arcsin \frac{A \ln r_{k_1} + \frac{Q}{A}}{a} \right) \Bigg]. \quad (16)$$

Точка $r_{k_1}$ определяется из уравнения (9).

Подставив $r = R_0$ и $\dot{r} = -v_0 \cos \gamma = -v_0 \sin \alpha$, получим

$$\ln r_{k_1} = -\frac{AC_1 + B}{A^2} +$$

$$+ \sqrt{\frac{(AC_1 + B)^2}{A^4} + \ln^2 R_0 + \frac{2(AC_1 + B)}{A^2} \ln R_0 + \frac{v_0^2}{A^2} \sin^2 \alpha},$$

$$\ln r_{k_2} = -\frac{AC_1 + B}{A^2} -$$

$$- \sqrt{\frac{(AC_1 + B)^2}{A^4} + \ln^2 R_0 + \frac{2(AC_1 + B)}{A^2} \ln R_0 + \frac{v_0^2}{A^2} \sin^2 \alpha}.$$

В зависимости от начальных условий, $r_{k_1}$ и $r_{k_2}$ выбираются таким образом, чтобы траектория электрона не выходила бы из области исследования.

Таким образом, уравнение (16) полностью определяет траекторию электрона в постоянном, неоднородном по радиусу электрическом и в постоянном неоднородном магнитном поле с круговым распределением силовых линий.

Траектория получается в виде петли, но она отличается от циклоиды. В частности, приняв в (16) $B = 0$ ($V = 0$) получим траекторию электрона только в постоянном неоднородном магнитном поле.

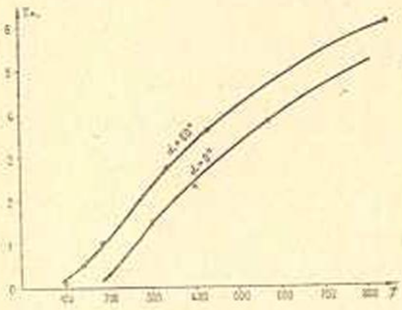
Чтобы ясно представить себе раздельное влияние на траекторию электрона всех физических величин, входящих в общее уравнение, возьмем на траектории электрона любую точку (например $r_{k_1}$) и исследуем их влияние на эту точку.

Связь величины $r_{k_1}$ с остальными физическими величинами выражается следующим уравнением

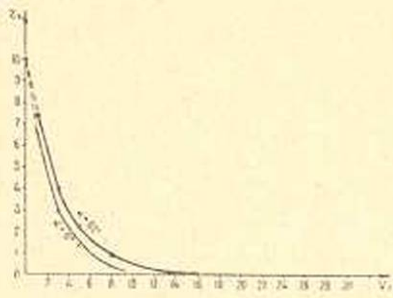
$$\ln r_{k_1} = -\frac{AC_1 + B}{A^2} +$$

$$+\sqrt{\frac{(AC_1+B)^2}{A^4} + \ln^2 R_0 + \frac{2(AC_1+B)}{A^2}\ln R_0 + \frac{v_0^2}{A^2}\sin^2\alpha}\,. \qquad (17)$$

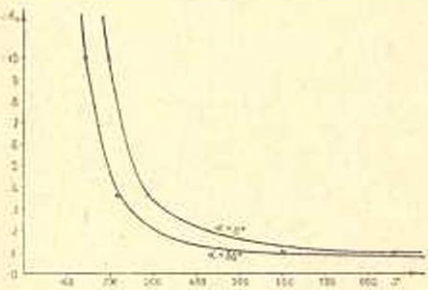
Изменения различных величин, входящих в это уравнение, даны графиками фиг. 2, 3, 4, 5.



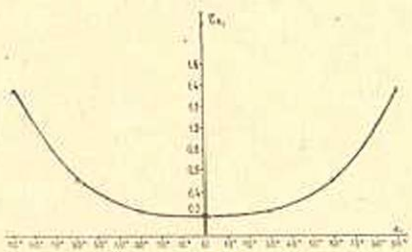
Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Приняв в уравнении (17) $B=0$ $(V=0)$ можем найти такую критическую скорость электрона $\vec{v}_0$, что при всех других скоростях $\vec{v}$ $(v_r < v_{0r})$ электрон будет отражаться магнитным полем проводника $R_1$.

Воспользовавшись уравнением (16) нетрудно заметить, что шаг петли, представляющий расстояние между двумя экстремумами, выразится следующим образом

$$l = 2\left[z(r_{k_2}) - z(r_{k_1})\right] = 2\pi\gamma_1,$$

где $\gamma_1$ дано (14).

Частота и период вращения электрона получатся в следующем виде

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi\gamma_1}{\bar{v}_z},$$

где $\bar{v}_z$ — средняя скорость электрона по оси $z$, которую можно найти из усреднения

$$\bar{v}_z = \frac{1}{r_{k_1} - r_{k_2}} \int\limits_{r_{k_1}}^{r_{k_2}} v_z(r)\, dr = A\, \frac{r_{k_2} \ln r_{k_2} - r_{k_1} \ln r_{k_1}}{r_{k_1} - r_{k_2}} + A\,(1 + \ln R_0) + v_0 \cos\alpha.$$

Так как в вышеуказанных электрическом и магнитном полях электрон приобретает скорость по направлению $z$, то данная конфигурация может быть использована для ускорений заряженных частиц.

Сила тока при этом будет пропорциональна величине поверхности эмитируемого электрода.

Тот факт, что электроны в указанных полях перемещаются по направлению $z$, может также указывать на возможное течение вещества в плазменных средах в одном направлении, т. е. эти поля могут служить перекачивающим насосом.

Возможность образования в плазме поля $E_r$ зависит от функций $T(z)$, $n(z)$, $\chi(z)$, где $T$ — температура плазмы, $n$ — число частиц, а $\chi$ — степень ионизации. Очевидно, что если плазма с одними параметрами окажется при своем течении в среде плазмы с другими параметрами, то обязательно между ними должно возникнуть электрическое поле.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР
Поступила 16 II 1962

Ա. Մ. Ռեզիկյան, Հ. Գ. Բախշյան

## ԷԼԵԿՏՐՈՆԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԵՎ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐՈՒՄ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Աշխատության մեջ տեսականորեն հաշված է էլեկտրոնի շարժման հետագիծը հաստատուն անհամասեռ էլեկտրական ու մագնիսական դաշտերում, որը օղակի (պտույտի) տեսք ունի։ Որոշված են օղակի քայլը, էլեկտրոնի պտտման հաճախականությունը և միջին արագությունը առանցքի ուղղությամբ։*

*Քննության են առնված առանձին ֆիզիկական մեծությունների ազդեցությունները էլեկտրոնի հետագծի վրա։*

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ландау Л. Д.* и *Лифшиц Е. М.* Теория поля, том 2. Госиздат, М., 1960.
2. *Коваленко В. Ф.* Введение в электронику сверхвысоких частот. Изд. Советское радио, 1955.
3. Радиофизическая электроника. Под редакцией проф. Капцова Н. А., Изд. МГУ, М., 1960.
4. *Богуславский С. А.* Пути электронов в электрических и магнитных полях. Изд. МГУ, М., 1929.

5. *Рустергольц А.* Электронная оптика. ИЛ, М., 1952.
6. *Альфвен Х.* Космическая электродинамика. ИЛ, М., 1956.
7. *Alfven H.* The effect of the vertical magnetic field in the conducting fluid. Ark. f. Math. astr. och Fys. 29 A, № 11, 2, 1943.
8. *Кельман В. М.* и *Рудникова И. В.* Движение заряженных частиц в магнитном поле линейного тока и электрическом поле цилиндрического конденсатора. ЖЭТФ, **21**, в. 12, 1951.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

ТЕХНИКА ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ

Н. Г. Ахназарян, С. Р. Месчян

# Об одном факторе, влияющем на уплотнение глинистого грунта

К. Лангер [1], исследовав влияние скорости загружения на сжимаемость грунтов, показал, что чем меньше скорость приложения нагрузки, тем меньше величина деформации.

Влияние скорости загружения на компрессионные свойства глинистых грунтов исследовано также Н. Я. Денисовым [2].

М. И. Гольдштейн [3] отмечает, что по причине медленного роста напряжений сжимаемость грунта в естественных условиях значительно меньше, чем в компрессионных приборах. Для правильного учета явления вторичной консолидации он предлагает компрессионные опыты проводить над образцами большой высоты при ступенях нагрузки в 0,1 *кг/см²*.

В. А. Флорин [4] теоретически показал, что при весьма малой деформации или скорости нарастания деформации ползучести, уплотнение происходит без ощутимого повышения давления в поровой воде, а время уплотнения может совсем не зависеть от толщины уплотняемого слоя или же зависеть, но в степени меньшей, чем вторая.

С. А. Роза [5] считает, что при достаточно медленном нарастании нагрузки фильтрационное уплотнение не будет иметь значения и осадка грунта под нагрузкой будет обусловлена, в основном, деформацией ползучести скелета.

С. Р. Месчян [6] показал, что медленное ступенчатое загружение может привести к тиксотропному упрочнению грунта нарушенной структуры и к нарушению той закономерности деформирования, которая присуща ему при высоких темпах загружения. Он указывает, что процесс деформирования в большой степени зависит от соотношения структурной прочности грунта, величины ступени и скорости приложения нагрузки. Им исследовано [7] также влияние скорости загружения на деформативные характеристики глинистых грунтов.

В. М. Павилонский [8] на основании экспериментального исследования порового давления в глинистых грунтах, выполненного при сравнительно больших значениях ступеней нагрузки, показал влияние темпа нарастания внешней нагрузки на величину порового давления.

В докладе Леонардса и Гиролта [9] (1961), опубликованном в трудах V международного конгресса по механике грунтов и фундаментостроению, приведены результаты экспериментального исследования влияния величины ступени нагрузки и бокового трения на процесс одноразмерной консолидации, протекающей с изменением порового давления. Им установлено, что характер кривой деформация-логарифм времени зависит от отношения приращения нагрузки к предыдущей и только при его больших значениях рассеивание порового давления протекает согласно теории К. Терцаги.

Из практики гидротехнического строительства известно, что нарастание внешней нагрузки на основание сооружений происходит довольно медленно. Обычно скорость возведения земляных плотин колеблется в пределах от 0,09 до 0,4 *м* в сутки [10], что соответствует скорости нарастания напряжений от 0,02 до 0,07 *кг/см*$^2$ в сутки. Указанные скорости нарастания нагрузок в 10—20 и более раз меньше, чем те скорости, с которыми обычно мы имеем дело в лабораторной практике. Скорость нарастания напряжения будет еще меньше если учесть быстрое затухание напряжений по глубине грунтовой толщи [3].

Следовательно, очевидна важность исследования уплотнения глинистых грунтов при малых значениях ступеней нагрузок.

Для теории уплотнения будет представлять особый интерес изучение деформации во времени глинистых водонасыщенных грунтов при малых значениях нагрузок. Оно позволит выяснить влияние факторов ползучести скелета [4] и фильтрации поровой воды на продолжительность деформирования указанных грунтов.

Насколько нам известно, влияние факторов фильтрации и ползучести скелета на длительность деформирования при малых значениях нагрузок не изучено, поэтому мы и выполнили настоящую работу, преследующую цель несколько восполнить этот пробел*.

Настоящая работа является продолжением выполненного ранее [11] исследования влияния высоты образца на процесс деформирования глинистых водонасыщенных грунтов при уплотнении их ступенями нагрузки 0,125—0,25 *кг/см*$^2$.

В целях изучения характера деформирования образцов разной высоты и перераспределения напряжений между скелетом и поровой водой мы воспользовались сопоставлением кривых деформация—время (определенных испытанием образцов грунта различной толщины), примененным ранее одним из авторов настоящей работы [12].

Для определения участков, в пределах которых процесс деформирования протекает только в результате ползучести скелета, предположено, что при отсутствии влияния фактора фильтрации, относительная деформация не должна зависеть от высоты образца.

Имея в виду невозможность достижения абсолютно точного совпадения результатов параллельно выполненных опытов, мы считали, что влияние высоты образца на продолжительность деформирования отсутствует, если: 1) расхождение между кривыми деформация—время не пре-

* Эксперименты выполнены Н. Г. Ахназаряном.

вышает точности измерения; 2) указанное расхождение не больше, чем разница между деформациями в параллельно выполненных опытах и 3) скорости деформирования образцов различной толщины равны между собой, т. е. кривые параллельны друг другу.

Были выполнены три серии опытов на трех различных видах глинистого грунта в малых и больших компрессионных приборах, при высоте образцов 20 и 60 *мм* и диаметре их 70 и 210 *мм* соответственно.

Опыты проводились на образцах нарушенной структуры, предварительно уплотненных нагрузками 0,125—0,25 *кг/см²* в течение 11—30 дней. Повторность опытов трехкратная. Испытания проводились при одностороннем движении поровой воды (снизу вверх).

Рассмотрим результаты опытов каждой серии в отдельности.

**Серия первая.** Исследован суглинок под лабораторным № 2-57, основные физические свойства которого сведены в таблицу 1.

*Таблица 1*

| Лабор. № грунта | Удельный вес *г/см³* | Влажность пасты % | Степень влажности | Пределы пластичности: граница текучести | граница пластичности | число пластичности |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2-57 | 2,66 | 34,5 | 0,97 | 31,3 | 18,6 | 12,7 |

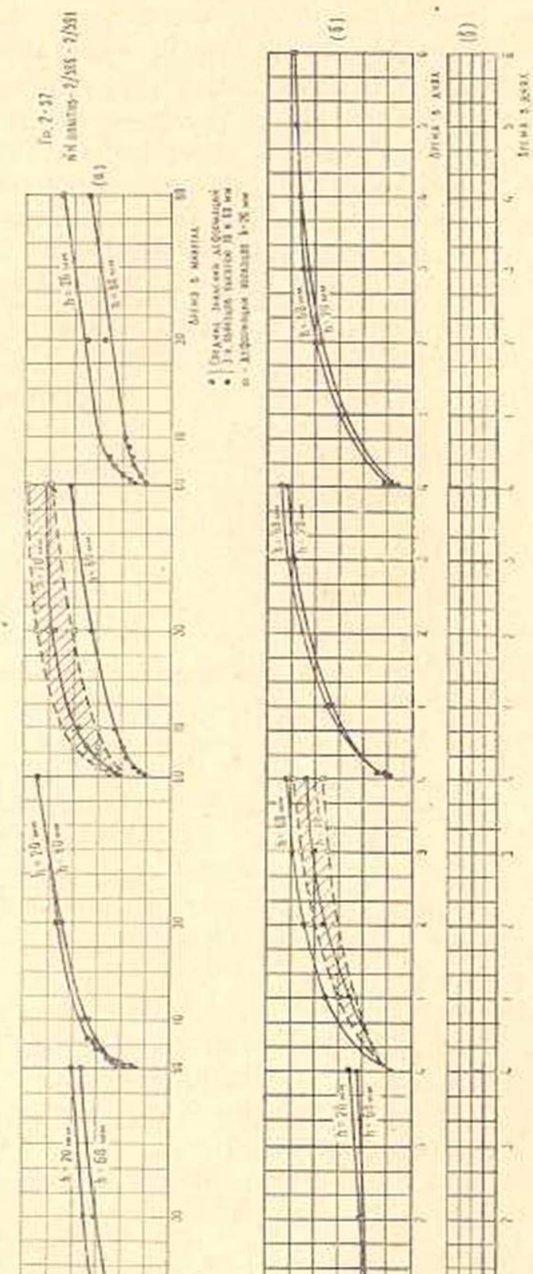
Из пасты с влажностью, примерно равной влажности грунта при пределе текучести (таблица 1), были приготовлены шесть образцов высотою 20 и 60 *мм*. Все образцы вначале были подвергнуты предварительному уплотнению нагрузками $P = 0{,}125$ *кг/см²* в течение 20 дней, после чего было изучено влияние высоты образца. Нагрузки прикладывались ступенями по 0,05 *кг/см²* через каждые четверо суток. Деформации измерялись индикаторами часового типа с ценой деления 0,002 *мм*.

На графиках фиг. 1 приведены кривые деформация — время указанных выше образцов всех четырех ступеней нагрузок в интервалах времени 60 *мин* (фиг. 1-а) и 4—6 *суток* (фиг. 1-б) от момента приложения ступеней нагрузок. На фиг. 1-в приведена схема загружения.

Для определения влияния высоты образца на продолжительность и перераспределение приложенного к грунту напряжения между скелетом и поровой водой, необходимо было построить графики относительная деформация — время. Мы нашли целесообразным, для сопоставления результатов опытов, деформации образцов высотою $h = 60$ *мм* привести к высоте 20 *мм*. Это дало нам возможность определить абсолютную величину расхождения между кривыми деформация — время образцов высотою 60 и 20 *мм* и сравнивать ее с точностью наших измерений.

Рассмотрим результаты экспериментов.

Сопоставление кривых деформация — время образцов высотою 60 и 20 *мм*, приведенных на графиках фиг. 1-а, показывает, что, за исключением третьей ступени нагрузки, они практически совпадают, так как расхождение между ними не превышает точности измерений деформаций.



Фиг. 1.

Аналогичная картина наблюдается и на фиг. 1-б (за исключением второй ступени загружения).

Из практического совпадения кривых деформация—время образцов различной высоты следует, что причиной деформирования во времени исследованных образцов является *ползучесть скелета* — вязкое перемещение частиц и агрегатов друг относительно друга, а приложенная к грунту внешняя нагрузка полностью воспринимается его скелетом. Это говорит о том, что поровая вода движется быстрее, чем происходит взаимное перемещение частиц и агрегатов грунта.

Что же касается случаев, где все же имеет место некоторое расхождение между кривыми деформация—время образцов исследованных размеров, то нетрудно показать, что оно является результатом погрешностей эксперимента. Для подтверждения сказанного достаточно нанести на графики результаты испытания всех образцов и построить зону разброса опытных точек (на графиках указанных двух случаев штриховкой показаны зоны разброса опытных точек трех образцов $h = 20$ *мм*). Как видно из графиков, кривые деформация—время образцов $h = 60$ *мм*, построенные по осредненным значениям деформаций трех образцов, параллельны граничным линиям зон разброса. Иначе говоря, скорость деформирования одного из образцов $h = 20$ *мм* равна средней скорости деформирования образцов $h = 60$ *мм*. Следовательно, имеющее место расхождение между кривыми деформация — время обусловлено не влиянием высоты образца, а различием результатов между параллельно выполненными экспериментами.

Сопоставление полученных результатов с результатами опытов, выполненных при величине ступени нагрузки, равной $P = 0{,}25$ *кг/см*$^2$ [12], показывает, что скорость загружения существенно меняет характер деформирования грунта. Достаточно сказать, что после предварительного уплотнения образцов нагрузками $P = 0{,}125$ *кг/см*$^2$ уплотнение грунта под нагрузкой 0,25 *кг/см*$^2$ в течение первых четырех часов протекает при совместном действии факторов фильтрации и ползучести скелета, тогда как при величине ступени нагрузки $P = 0{,}05$ *кг/см*$^2$ процесс деформирования во времени (первая ступень нагружения, фиг. 1) обусловлен только ползучестью скелета.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что при переходе от первой ступени нагрузки ко второй имеет место (фиг. 1) существенное увеличение величины деформации, несмотря на то, что величины ступеней нагрузок равны. Увеличение деформации при переходе от одной ступени нагрузки к другой свидетельствует о том, что деформации грунта от предыдущих ступеней нагрузок (ввиду их малости) не уплотнили его настолько, чтобы существенно изменить его механические свойства. Такой случай был рассмотрен ранее [6], где было показано, что увеличение деформации от последующей ступени нагрузки, по величине равной предыдущей, обусловлено разрушением ранее образованной структуры в глинистой пасте. Помимо разрушения структуры, имеет место увеличение скорости перемещения частиц и агрегатов грунта друг относительно друга под суммарным воздействием всех ранее приложенных нагрузок.

**Серия вторая.** Исследована глина под лабораторным № 4-57, основные физические свойства которой сведены в таблицу 2.

*Таблица 2*

| Лабор. № грунта | Удельный вес $г/см^3$ | Влажность пасты % | Степень влажности | Пределы пластичности | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | граница текучести | граница пластичности | число пластичности |
| 4-57 | 2,7 | 42,7 | 0,95 | 41,2 | 23,2 | 18,0 |

Методика приготовления образцов и точность измерения деформации прежние. Все образцы вначале были подвергнуты предварительному уплотнению нагрузками 0,25 *кг/см²* в течение 11 дней, после чего были проведены исследования их деформативных свойств во времени при ступенчатом загружении нагрузками 0,05 *кг/см²* через каждые семь суток.

На графиках фиг. 2 приведены результаты испытания шести образцов высотою 20 и 60 *мм* в интервалах времени 60 *мин* и 7 *суток* от момента приложения ступеней нагрузок. В целях сопоставления результатов опытов, как и выше, деформации образцов высотою 60 *мм* были приведены к высоте 20 *мм*.

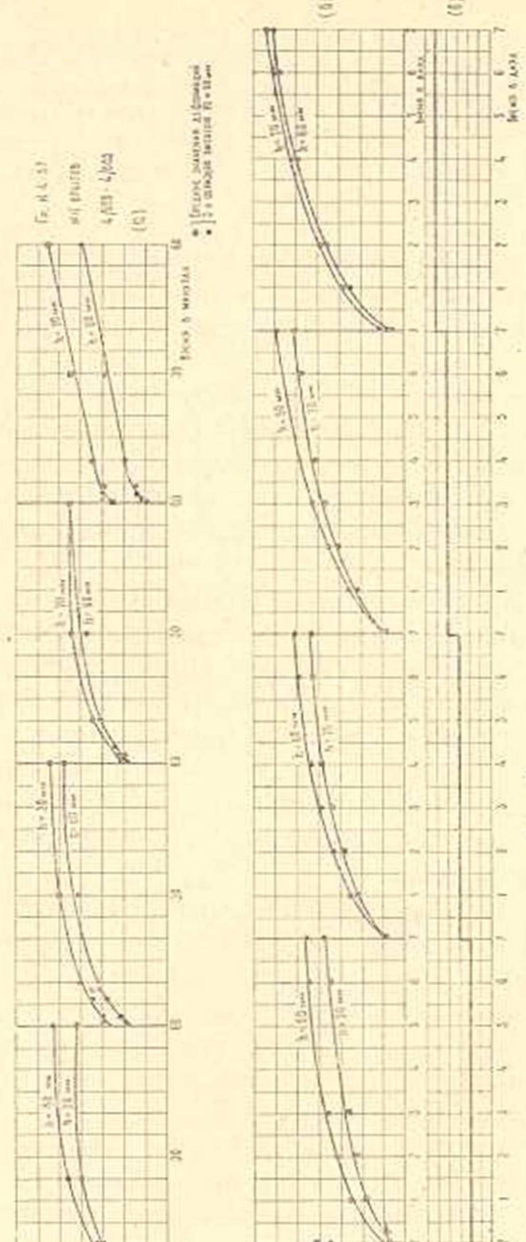
Сопоставление кривых деформация — время образцов высотою 20 и 60 *мм*, построенных по осредненным значениям деформации трех образцов, показывает, что в интервале времени до 60 *мин* (фиг. 2-а) расхождение между указанными кривыми не превышает точности измерения деформации, а расхождения, которые существуют между кривыми деформация — время (фиг. 2-б), практически не меняются до момента приложения следующей ступени нагрузки.

Полученные результаты дают нам полное основание считать, что и здесь продолжительность деформирования практически не зависит от высоты образца, следовательно, деформация образцов протекает только в результате ползучести скелета.

Сравнение полученных результатов с результатами подобных же опытов, выполненных испытанием образцов при ступенях нагрузки 0,25 *кг/см²* [12], показывает, что в последнем случае (при равных начальных условиях опыта) для перехода в зону чисто ползучих деформаций скелета было необходимо около 24 часов.

Сопоставление кривых ползучести от разных ступеней нагрузок показывает, что по мере перехода от одной ступени нагрузки к другой, по изложенной выше причине, величина деформации ползучести постепенно, медленно возрастает.

**Серия третья.** Была исследована часов-ярская глина под лабораторным № 6-57, основные физические свойства которой сведены в таблицу 3.



Фиг. 2.

*Таблица 3*

| Лабор. № грунта | Удельный вес $г/см^3$ | Влажность пасты % | Степень влажности | Пределы пластичности | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | граница текучести | граница пластичности | число пластичности |
| 6-57 | 2,65 | 63,0 | 0,98 | 59,07 | 21,2 | 37,87 |

В отличие от рассмотренных выше случаев, все образцы третьей серии были предварительно уплотнены нагрузками 0,25 *кг/см²* в течение 15 *дней*, а величина последующих ступеней нагрузок была равна 0,025 *кг/см²*.

Результаты экспериментального исследования приведены на графиках фиг. 3. На фиг. 3 не приведены графики начальных участков деформирования в более крупном масштабе, ввиду того, что небольшие деформации и большой разброс опытных точек (до 10 микрон) не дали возможности сопоставить результаты, полученные испытанием образцов высотою 20 и 60 *мм*.

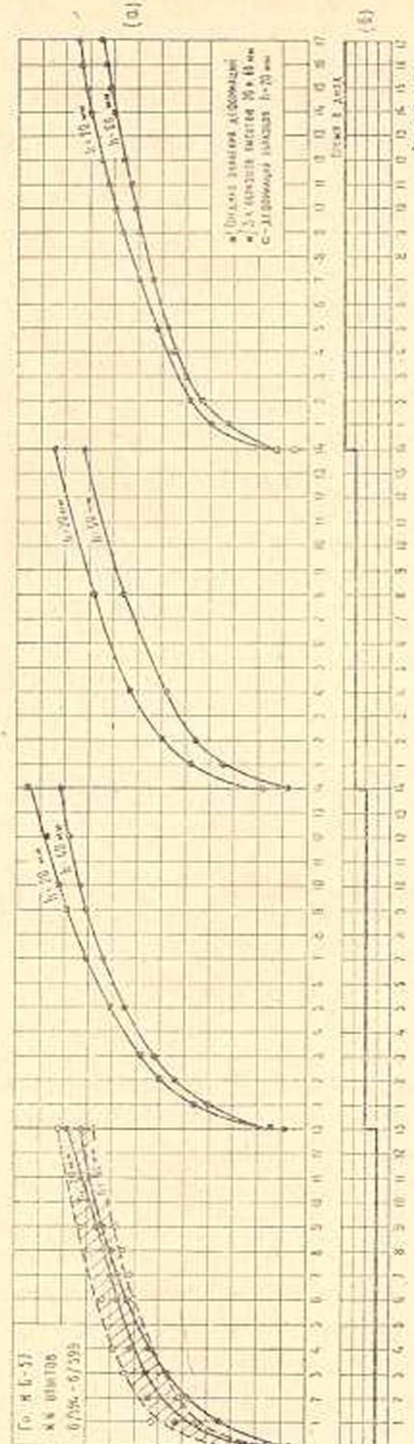
Из графиков фиг. 3 следует, что расхождение между кривыми деформация — время образцов высотою 20 и 60 *мм* едва превышает 10 микрон, тогда как точность параллельно выполненных опытов такого же порядка.

На одном примере (фиг. 3) (первая ступень загружения) показано, что расхождение осредненной кривой деформации образцов $h = 60$ *мм* от зоны разброса опытных точек (построенной по результатам испытания трех образцов $h = 20$ *мм*) незначительно. Следовательно, и в этом случае деформация практически протекает без влияния высоты образца, без участия фактора фильтрации.

Если теперь сопоставить кривые первых ступеней загружения, полученные испытанием образцов нагрузками 0,025 и 0,25 *кг/см²* (после их предварительного уплотнения нагрузками 0,25 *кг/см²*), то нетрудно заметить, что десятикратное уменьшение ступени нагрузки в корне изменило характер деформирования. А именно, если при величине нагрузки $P = 0{,}25$ *кг/см²* (фиг. 4) [12] для перехода в зону чисто ползучих деформаций скелета и рассеивания давления в поровой воде необходимо было около десяти суток, то в случае испытания образцов ступенями нагрузок, равными 0,025 *кг/см²*, длительность деформации не зависит от высоты образца, а деформация с самого начала является результатом ползучести скелета.

Изложенные выше результаты исследования показывают, что внешняя нагрузка полностью воспринимается скелетом грунта. Следовательно, для прогноза деформации во времени в данном случае нельзя использовать теорию фильтрационного уплотнения.

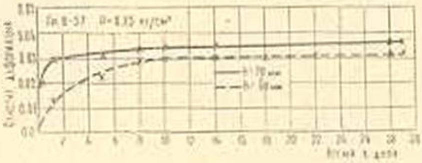
Учитывая малую структурную прочность испытанных нами образцов грунтов,—можно утверждать, что в грунтах, обладающих более прочным структурным каркасом, уплотнение должно протекать только за счет ползучести скелета и при высоких значениях ступеней нагрузок. В работе [8] показано, что, действительно, при испытании кинельской глины



Фиг. 3.

ненарушенной структуры нагрузками 7 *кг/см*² давления в поровой воде не возникало.

Все это говорит о том, что показатель консолидации ($n$), которым пользовались в работе [13] для выявления картины перераспределения напряжений между скелетом и поровой водой, не инвариантен относительно величины ступени нагрузки. Разумеется, этот показатель не инвариантен и относительно высоты образца [14]. Поэтому все наши выводы относятся к образцам рассмотренных размеров.



Фиг. 4.

Вопрос о том, как будет изменяться уплотнение при переходе к образцам более крупных размеров, нуждается в экспериментальном исследовании.

Изложенное выше дает нам возможность считать, что при расчете осадок сооружений, в большинстве случаев можно будет пренебречь влиянием фактора фильтрации на продолжительность деформирования, ввиду достаточной структурной прочности глинистых грунтов, с которыми нам приходится сталкиваться в природе.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 3 XII 1962

**Ն. Գ. Հախնազարյան, Ս. Ռ. Մեսչյան**

## ԿԱՎԱՅԻՆ ԳՐՈՒՆՏԻ ԽՏԱՑՄԱՆ ԲՆՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ԱԶԴՈՂ ՄԻ ԳՈՐԾՈՆԻ ՄԱՍԻՆ

### Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հաշվի առնելով այն հանգամանքը, որ սովորաբար բեռների տակ կառուցվածքների հիմնատակների վրա տեղի է ունենում բավականին դանդաղ, իսկ լաբորատոր պայմաններում գրունտի նմուշների բեռնավորման արագությունը 10—20 և ավելի անգամ մեծ է, քան իրականում գոյություն ունեցող բեռնավորման արագությունները, փորձարկման պայմանները գոյություն ունեցողին մոտեցնելու համար անհրաժեշտ է լաբորատոր փորձարկումները կատարել նմուշների բեռնավորման փոքր արագությունների պայմաններում։ Նմուշների աստիճանաձև բեռնավորման ժամանակ, բեռնավորման աստիճանի մեծ լինելը կարող է հանգեցնել գրունտի ստրուկտուրայի քայքայմանը, նրա դեֆորմացիայի մասին սխալ պատկերացում կազմելուն։*

*Այդ իսկ պատճառով չափազանց կարևոր է իմանալ գրունտի խտացման բնույթը փոքր լարումների դեպքում, որը հնարավորություն կտա կառուցել նրա խտացման ստույգ տեսությունը։*

*Ելնելով վերոհիշյալից, կատարված է տարբեր բարձրություններ ունեցող նմուշների խտացումը, նրանց կողային ընդարձակման բացակայության պայ-*

մաններում, երբ բեռնավորման աստիճանի մեծությունները շատ փոքր են և հավասար են՝ 0,025 և 0,05 կգ/սմ²։

Երեք տարբեր կավային գրունտների 20 և 60 մմ բարձրություն ունեցող նմուշների փորձարկումները փոքր և մեծ սեղմման աստիճաններում՝ ցույց տվեցին, որ հիշյալ նմուշների ժամանակի ընթացքում տեղի ունեցող դեֆորմացիաները կախված չեն նրանց բարձրություններից։ Դա նշանակում է, որ նրանց դեֆորմացիաներն ընթանում են միմիայն մեկ՝ գրունտի կմախքի սողքի, գործոնի առկայության պայմաններում։

Այն դեպքում, երբ հիշյալ նմուշների փորձարկումները կատարվել են 0,25 կգ/սմ² մեծություն ունեցող բեռներով փորձարկման ժամանակ, նրանց դեֆորմացիաները սկզբնական ժամանակաշրջանում ընթանում են երկու՝ կմախքի սողքի և ջրհաղորդականության գործոնների միաժամանակ ազդեցության հետևանքով։

Հեղինակները եկել են այն եզրակացության, որ կավային գրունտների դեֆորմացիայի բնույթը կախված է գործող լարումների մեծությունից և նրանց ազդման արագությունից։

## ЛИТЕРАТУРА


1. Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1936.
2. *Денисов Н. Я.* Строительные свойства глинистых пород и их использование в гидротехническом строительстве. Стройиздат, М., 1956.
3. *Гольдштейн М. Н.* Механические свойства грунтов. Госстройиздат, М., 1952.
4. *Флорин В. А.* Одноразмерная задача уплотнения сжимаемой пористой ползучей земляной среды. Известия АН СССР, ОТН, № 6, 1953.
5. *Роза С. А.* и *Котов А. И.* О явлениях ползучести скелета грунта в процессе консолидации. Гидротехническое строительство, № 5, 1956.
6. *Месчян С. Р.* К вопросу о влиянии продолжительности нагружения на ползучесть связных грунтов нарушенной структуры. ДАН АрмССР, **23**, № 1, 1956.
7. *Месчян С. Р.* О влиянии скорости загружения на деформативные свойства связных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 4, 1959.
8. *Павилонский В. М.* Экспериментальные исследования порового давления в глинистых грунтах. Информационные материалы, № 4, ВОДГЕО, М., 1959.
9. Proceedings of the V International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Paris, 1961.
10. Проектирование и строительство больших плотин по материалам V международного конгресса по большим плотинам. Сборник статей под общей редакцией А. А. Борового. Госэнергоиздат, М.—Л., 1958, 175.
11. *Месчян С. Р.* О методике экспериментального исследования ползучести скелета связных грунтов. ДАН АрмССР, **26**, № 4, 1958.
12. *Месчян С. Р.* Исследование влияния высоты образца на деформативные свойства водонасыщенных грунтов. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **12**, № 3, 1959.
13. *Месчян С. Р.* К вопросу о перераспределении напряжений между скелетом и поровой водой глинистого грунта. Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, **14**, № 1, 1961.
14. *Малышев М.* Реферат № 10 В 290. Реф. журнал Механика, Сводный том, № 10, 1961.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. Г. Багдоев

# Уточнение закона распределения давления

Пусть некоторое давление $P_1$ со скоростью $V$ движется по поверхности сжимаемой жидкости, занимающей нижнее полупространство. Пусть $V \ll a_0$, где $a_0$—скорость звука невозмущенной жидкости. Эта задача рассмотрена нами в работе [1]. Давление в точке пересечения ударной волны с поверхностью определяется в предположении, что основное течение одномерно, а давление в ударной волне равно $P_1$. Если учесть сферичность волны, давление на ударной волне, движущейся в жидкости в предположении малости $\frac{V}{a_0}$, равно [2]

$$\bar{P}_1 = \frac{3}{2}(\gamma + 1)\rho_0 a_0^2 \frac{V^4}{a_0^4}, \tag{1}$$

где $\rho_0$ — начальная плотность жидкости, $\gamma$ — показатель политропы. Таким образом, если $\frac{V}{a_0}$ мало и $P_1 \sim \frac{V}{a_0}$, то $\bar{P}_1 \sim \frac{V^4}{a_0^4}$. В точке, где ударная волна отражается от поверхности, имеем для давления

$$P = \frac{1}{4}\bar{P}_1. \tag{2}$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 8 II 1962

Ա. Գ. Բագդոև

# ՃՆՇՄԱՆ ԲԱՇԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔԻ ՃՇՏՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Հեղուկի մակերևույթով տարածված ճնշման արագության փոքրության ենթադրությամբ ճշտվում է հեղինակի կողմից նախկինում ստացված լուծումը և որոշվում է լուծման կարգը։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* и *Нерсесян Э. М.* Определение давления в идеальной жидкости для изэнтропического приближения. Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1960.
2. Проблемы механики. Сборник статей, т. II. Издательство ИЛ, М., 1959.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Ֆիզիկա-մաթեմատ. գիտություններ XV, № 3, 1962 Физико-математические науки

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. А. Хачатрян

# Об устойчивости прямоугольной пластинки при некоторых нагрузках

Рассмотрим прямоугольную пластинку, изготовленную из изотропного материала. Поместим начало координат в центре прямоугольника, а координатные оси направим параллельно его сторонам.

Допустим, что по краям пластинки кроме нормальных сжимающих усилий действуют также касательные усилия, меняющиеся по линейному закону

$$\begin{aligned} &\text{на} \quad x = \pm\frac{a}{2} \qquad \sigma_x^0 = -\gamma p, \qquad \tau_{xy}^0 = \pm\frac{2\alpha p}{b}y, \\ &\text{на} \quad y = \pm\frac{b}{2} \qquad \sigma_y^0 = -\beta p, \qquad \tau_{yx}^0 = \pm\frac{2\alpha p}{a}x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a$, $b$ — размеры пластинки; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — некоторые постоянные; $p$ — величина давления.

Нетрудно показать, что напряженное состояние рассматриваемой пластинки под действием внешних нагрузок (1) определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p\left(\gamma - \frac{\alpha a}{2b} + \frac{2\alpha}{ab}x^2\right), \\ \sigma_y &= -p\left(\beta - \frac{\alpha b}{2a} + \frac{2\alpha}{ab}y^2\right), \\ \tau_{xy} &= \frac{4\alpha p}{ab}xy. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассматривая внешнюю нагрузку (1), замечаем, что в ней $p$ играет роль некоторого параметра, с увеличением или уменьшением которого соответственно увеличиваются или уменьшаются величины внешних сил. Вопрос устойчивости рассматриваемой пластинки под действием указанных внешних сил фактически будет сводиться к нахождению критического значения параметра $p$. Для определения последнего будем пользоваться энергетическим методом [1]. Согласно этому методу, критическое значение параметра внешней нагрузки определяется из уравнения

$$V = T \tag{3}$$

где $V$ — энергия изгиба, $T$ — работа сил, действующих в срединной плоскости пластинки

$$V = \frac{D}{2}\iint\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dxdy, \tag{4}$$

$$T = -\frac{h}{2}\iint\left[\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2\tau_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right] dxdy. \tag{5}$$

Здесь $D$ — цилиндрическая жесткость, $\mu$ — коэффициент Пуассона, $w$ — прогиб, а $h$ — толщина пластинки; интегрирование производится по всей площади пластинки.

Предположим, что пластинка свободно оперта по краям. В случае, когда рассматриваемая пластинка мало отличается от квадратной, можно допустить, что выпучивание ее происходит по одной полуволне по направлениям координатных осей. Поэтому, полагая

$$w = A\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}, \tag{6}$$

где $A$ — некоторая постоянная, удовлетворим граничным условиям свободного опирания пластинки.

Подставив (6) в (4) и (5) и выполнив интегрирование, найдем

$$V = \frac{\pi^4 Dab}{8}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 A^2, \tag{7}$$

$$T = \frac{\pi^2 ph}{8}A^2\left[\left(\gamma\frac{b}{a}+\beta\frac{a}{b}\right)-\frac{2\alpha}{3}\right]. \tag{8}$$

Учитывая (7) и (8), из (3) для критического значения параметра $p$ будем иметь

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 Dab}{h}\cdot\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}{\gamma\frac{b}{a}+\beta\frac{a}{b}-\frac{2\alpha}{3}}. \tag{9}$$

В этой формуле, принимая для коэффициентов $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ различные численные (как положительные, так и отрицательные) значения, получим значения для $p_{\text{кр}}$ при различных случаях нагружения пластинки. Следует только учесть, что если при каких-либо значениях коэффициентов $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ выражение для $p_{\text{кр}}$ обращается в бесконечность или принимает отрицательное значение, то в таком случае пластинка не теряет устойчивости, т. е. при таком нагружении ее плоская форма устойчивая.

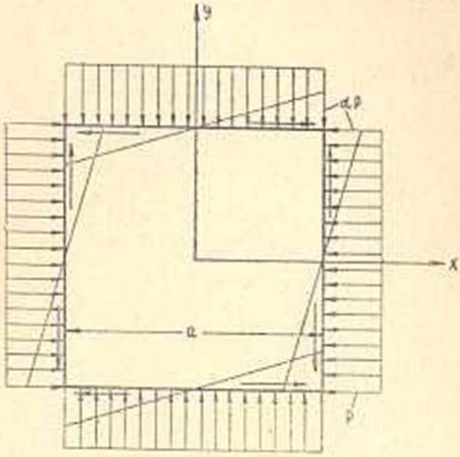
В случае квадратной пластинки ($b = a$) формула (9) упрощается и принимает вид

$$p_{\text{кр}}=\frac{4\pi^2Da^2}{h}\cdot\frac{1}{\gamma+\beta-\dfrac{2\alpha}{3}}. \tag{10}$$

Рассмотрим более подробно случай, когда $\gamma=\beta=1$, а $\alpha\geqslant 0$. Распределение внешней нагрузки для этого случая показано на фиг. 1.

В этом случае имеем

$$p_{\text{кр}}=\frac{2\pi^2Da^2}{h\left(1-\dfrac{\alpha}{3}\right)}. \tag{11}$$




Фиг. 1.

Заметим, что при $\alpha=0$ выражение (11) совпадает с известным значением критической силы для квадратной пластинки, равномерно сжатой в двух взаимно-перпендикулярных направления x.

Как видно из (11), касательные напряжения существенно влияют на устойчивость пластинки. Например, если $\alpha\geqslant 3$, то пластинка не теряет устойчивости при любом значении сжимающего нормального давления $p$. Это имеет место, когда внешние касательные усилия действуют так, как это показано на фиг. 1. А если они действуют в противоположном направлении (для чего достаточно принять $\alpha<0$), то при этом они не только не препятствуют, но даже способствуют потере устойчивости пластинки. Отметим, что при $\alpha<0$ возможна потеря устойчивости пластинки даже при равномерном всестороннем растяжении ее. Например, это будет иметь место в том случае, когда $\gamma=\beta=-1$, а $\alpha\leqslant -3$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 IV 1962

Ա. Ա. Խաչատրյան

# ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ՝ ՈՐՈՇ ԲԵՌԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

*Դիտարկվում է եզրերով ազատ հենված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը, երբ նա գտնվում է սեղմող և շոշափող ուժերի միաժամանակյա ազդեցության տակ: Այդ ուժերն իրենց մեջ պարունակում են α, β, γ գործակիցներ, որոնց տարբեր արժեքներ տալով, ստացվում են տարբեր տիպի բեռնավորվածություններ: Այդպես բեռների կրիտիկական պարամետրի արժեքն*

ստացվում է էներգետիկ մեթոդով: Վերջում, որպես մասնավոր դեպք, դիտարկվում է քառակուսի սալի կայունության խնդիրը՝ նույնպիսի բեռերի ազդեցության տակ:

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. Госиздат, М.—Л., 1946.